



HAL
open science

Géométrie des surfaces singulières

Clément Debin

► **To cite this version:**

Clément Debin. Géométrie des surfaces singulières. Mathématiques générales [math.GM]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAM078 . tel-01682803

HAL Id: tel-01682803

<https://theses.hal.science/tel-01682803v1>

Submitted on 12 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Clément DEBIN

Thèse dirigée par **Gérard BESSON**

préparée au sein de **Institut Fourier**
dans l'**École Doctorale MSTII**

Géométrie des surfaces singulières

Thèse soutenue publiquement le **09/12/2016**
devant le jury composé de :

M. Gérard BESSON

Directeur de Recherche CNRS, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

M. François FILLASTRE

Maître de Conférences Habilité, Université Cergy-Pontoise, Examineur

M. Erwan LANNEAU

Professeur, Université Grenoble Alpes, Président du jury

M. Rafe MAZZEO

Professeur, Stanford University, Rapporteur

M. Jean-Marc SCHLENKER

Professeur, University of Luxembourg, Rapporteur

M. Marc TROYANOV

Professeur, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Rapporteur



Remerciements

C'est maintenant à mon tour d'écrire cette page... Tout arrive à qui sait attendre : j'ai longtemps imaginé ce moment (qui signifie la fin d'une thèse, rien que ça !), et ce n'est que trois jours avant d'imprimer mon manuscrit que je me lance enfin.

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Gérard, pour m'avoir si bien accompagné durant ces presque quatre années. Malgré les nombreuses sollicitations auxquelles tu devais faire face (notamment lorsque tu étais directeur du labo), tu as toujours su m'accorder le temps nécessaire lors de tes journées chargées. Ton expérience et ta vision à long terme m'ont impressionné : la première année tu m'as demandé d'écrire un théorème dans un cas très simple (et sans intérêt), si bien que j'ai compris le schéma de preuve qui me servira plus tard (quel flair !); six mois après j'ai trouvé l'énoncé de mon résultat principal, et un an après la démonstration était terminée. Il me restait encore six mois pour commencer à explorer une nouvelle piste : avec du recul, le planning a vraiment été idéal. Enfin, tu as su me faire confiance, me remonter le moral lorsque le besoin s'en faisait sentir, et à aucun moment tu n'as douté de mes capacités à faire face à l'obstacle (ou alors, tu l'as bien caché!) : tout au long de ces quelques années tu as fait preuve d'une très grande humanité et d'une grande bienveillance, et c'est pour moi - de loin - le plus important.

Je voudrais également remercier les différents membres du jury d'avoir accepté cette tâche. Marc, merci d'avoir accepté d'être rapporteur malgré tes nombreuses sollicitations ; Jean-Marc, merci d'avoir accepté de découvrir mon travail si peu de temps avec la soutenance ; et Rafe, merci d'avoir rapporté ma thèse à l'autre bout du monde. Merci également à Erwan, et à François : nos discussions commencées en Grèce au mois de mai m'ont ouvert les yeux sur une branche des mathématiques que je ne connaissais que très peu. À posteriori, j'ai appris que ceci répond à une aspiration de mon grand-père (mathématicien !) Marcel Berger, qui souhaitait que Gérard « s'intéresse à la géométrie convexe ».

Merci également aux nombreux mathématiciens croisés tout au long de conférences, notamment lors des rencontres organisées par l'ANR GTO et l'ERC GETOM : je vais en oublier mais je pourrais citer Gilles Carron, Samuel Tapie, Gilles Courtois, Laurent Besières, Sylvain Maillot, Constantin Vernicos, Thomas Richard... Un remerciement spécial va à Marc Herzlich pour avoir, un soir de décembre 2013 aux alentours de minuit, attiré mon attention sur un survey des théorèmes de compacité qu'il avait écrit quinze ans plus tôt : il est clair que cet événement a joué dans la suite un rôle capital. Merci également à Alix, Ilaria et Louis pour avoir été plus que des collègues lors de ces conférences. Merci à Gérard et à l'ERC GETOM pour avoir financé mes séjours plus ou moins lointains. Merci aussi à deux mathématiciens qui m'ont donné (encore un peu plus) goût aux mathéma-

tiques lors de trois années pour le moins chargées, M. Liters et M. Luron. Enfin, merci à Christian pour ses conseils avisés, dus à sa situation si particulière !

Il est maintenant l'heure de remercier les mathématiciens de l'Institut Fourier : merci à ceux qui sont partis, Binbin, Thibaut, Jean-Mathieu, « Koju », Guillaume, et à ceux qui sont toujours là, Raphaël, Pedro, Louis-Clément, Florent, Luc, Alejandro, Giuseppe... Merci pour les séminaires compréhensibles, et pour les bières qui ont suivies. Merci enfin à Simon, pour être beaucoup plus qu'un collègue de travail.

Merci également aux amis de (très) longue date, les Pichs sans qui je ne serais probablement pas devenu qui je suis aujourd'hui : Camille & Margaux (pour les trichés-dégaines et tout le reste), Pol et les Tétris, Laura, Fabrice, Chloé, Vincent, Sarah & Elian... Et bien sûr les Relous (qui pensait que ce nom débile trouvé un soir au foyer allait résister aux années ?) : Fanny et Clément, Avé et Solenn, Gus, Simon, Laura, Carole, Sara, Théo et Léonie, Lauren... Tomás, nous ne t'oublions pas : tu ne liras malheureusement jamais ces lignes, mais je reste persuadé que tu aurais été heureux de fêter cette thèse et de faire El Relou avec nous.

J'en profite pour remercier également les grenoblois de passage, Thomas C., Coline et Arnaud, les deux colocs du colonel, les soirées polonaises. Ainsi que la pm2 et Céline & Jérôme... Enfin un immense merci aux Quatre Massifs pour ces si nombreux moments passés ensemble : quel bonheur de disposer d'un tel terrain de jeu !

J'en profite pour remercier maintenant tout ceux que j'ai oubliés, et ils sont forcément nombreux.

Merci à ma famille pour avoir toujours été à mes côtés : à mes parents pour m'avoir soutenu sans relâche et avoir toujours cru en ce que je faisais, à Damien & Marjorie (et Emma et Léo !) pour montrer l'exemple et à Marion & JB pour me rappeler que la vie doit avant tout être une aventure.

Enfin, merci à toi Marlène. À la fin des remerciements de thèse, j'ai souvent lu des formules du type « je n'aurais jamais pu faire cela sans toi » ; à vrai dire, j'ai toujours trouvé cela un peu niais, et surtout très faux (ce qui est embêtant pour un mathématicien). Pourtant, c'est maintenant à mon tour d'utiliser les mêmes mots : ma thèse s'est avérée être bien plus compliquée que ce que j'avais imaginé, et sans ta présence je pense que mon parcours se serait arrêté à la deuxième année. Merci donc d'avoir été là tout au long du chemin, et surtout, merci pour la suite.

*« Sous la lumière en plein
Et dans l'ombre, en silence
Si tu cherches un abri
Inaccessible
Dis-toi qu'il n'est pas loin,
Et qu'on y brille... »*

Noir Désir, *À ton étoile.*

Qu'est-ce que la géométrie ?

Ce court chapitre est entièrement destiné à la famille et aux amis, en tout cas aux *non-mathématiciens* qui veulent savoir à quels objets s'intéressent les géomètres ; il ne fait pas à proprement parler partie du manuscrit, et n'est ni rigoureux, ni exhaustif. Les mathématiciens (et les géomètres riemanniens encore plus) peuvent passer leur chemin !

La géométrie Riemannienne est l'étude des *espaces courbés*. On se limitera ici à la dimension deux, c'est-à-dire au cas des surfaces (comme dans tout ce manuscrit). Sur une surface un point est décrit par deux coordonnées : x et y dans le plan, la latitude et la longitude sur la Terre... Il sera donc question ici de *surfaces courbées*.

Avant d'essayer de définir le terme *géométrie*, définissons un concept qu'il est nécessaire de comprendre avant de passer à la géométrie : la topologie.

La topologie

C'est l'étude de la *forme générale* des surfaces. Deux surfaces ont la même topologie si on peut passer de l'une à l'autre par des *déformations*, mais sans déchirer ou recoller la surface.

Par exemple, un ballon de football, un ballon de rugby et un ballon de handball ont la même *topologie* : on peut passer des uns aux autres en aplatissant, en étirant, etc. Attention ici, on considère seulement la *surface* de ces ballons (qui est un objet en 2 dimensions), et non le ballon et son intérieur (qui est un objet en 3 dimensions).

Les trois surfaces suivantes ont la même topologie : on peut passer de l'une à l'autre en déformant (mais sans déchirer). La surface de droite a un volume bien plus petit que celle de gauche, mais ceci n'a pas d'importance pour la topologie !

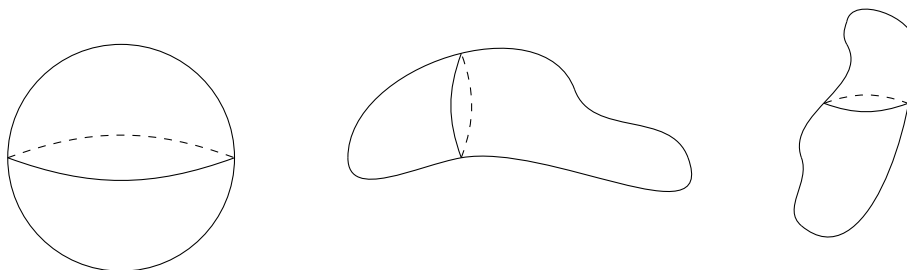


FIGURE 1 – Ces trois surfaces ont la même topologie.

Remarque. *Attention, ici les cercles n'ont aucune signification; ils servent juste à montrer qu'on considère des surfaces dans l'espace (elles ont une « épaisseur »).*

Au contraire, un beignet (ou une bouée si vous préférez) et un ballon n'ont pas la même topologie : il est impossible de passer de l'un à l'autre en déformant selon les règles écrites plus haut (l'un a un trou, et l'autre non!).

En fait, en topologie, les surfaces sont classées en fonction de leur nombre de trous : il n'y a qu'une seule surface avec 0 trou (ce sont les surfaces de la figure 1), une seule avec 1 trou, une seule avec 2 trous, etc.

La géométrie

La géométrie consiste à étudier la *forme géométrique* des surfaces, c'est-à-dire considérer des longueurs, des aires, etc. (On rappelle qu'en topologie, il n'y a pas de notion de longueur!)

Ainsi, les surfaces de la figure 1 ont la même topologie mais *n'ont pas la même géométrie*. Souvent en géométrie, on se fixe une topologie (la topologie des surfaces avec 0 trou par exemple), et on se demande quelle peut être la géométrie de ces surfaces : trois exemples sont donnés sur la figure 1.

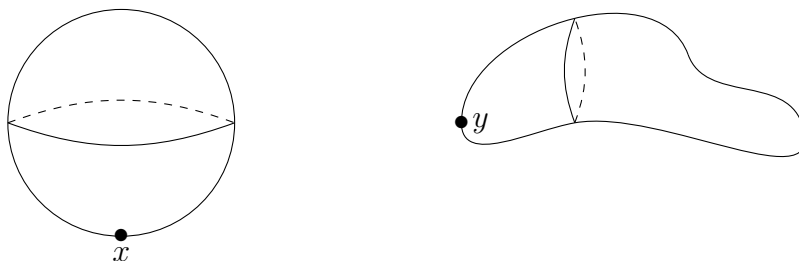
À toute géométrie sur une surface on associe une *courbure* : c'est pour cela qu'on dit que la géométrie Riemannienne est *l'étude des espaces courbés*.

La courbure

Commençons par des remarques simples. Tout le monde s'accorde à dire qu'un plan est un objet géométrique qui n'est pas courbé; la surface de notre Terre est courbée, mais sa courbure est très faible (on ne s'en aperçoit presque pas : en regardant autour de nous, on aurait plutôt l'impression que la terre est plate...). Au contraire, la courbure d'un ballon de football est bien plus élevée.

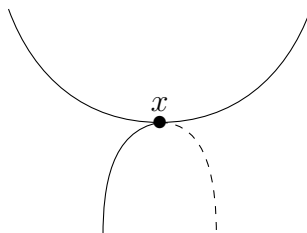
Gauß, au début du XIX^e siècle, a été le premier à définir cette notion. Si S est une surface géométrique, alors la courbure est une fonction définie sur cette surface. On la note souvent K : si x est un point de la surface S , alors $K(x)$ est la courbure au point x . Comment est définie cette fonction ?

- Une courbure nulle ($K(x) = 0$) signifie qu'autour du point x , la surface ressemble à un plan. Par exemple si S est un plan, alors la courbure est nulle partout (pour tout point x de la surface on a $K(x) = 0$) : un plan n'est pas courbé. On parle aussi de *géométrie Euclidienne* : c'est la géométrie que tout le monde apprend à l'école.
- Une courbure positive ($K(x) > 0$) signifie qu'autour du point x , la surface *ressemble à celle d'une sphère*. Sur la surface de la Terre (en supposant que cette dernière soit vraiment ronde, en oubliant les montagnes, etc.), on pourrait (en théorie) regarder tout autour de nous et voir que la surface de la Terre est *en-dessous* du plan tangent. Il y a également une notion assez intuitive de « surface plus courbée qu'une autre » : les deux surfaces suivantes ont une courbure positive en x et y , et on a $K(y) > K(x)$ (la surface de droite est plus courbée au point y que la surface de gauche au point x).



La courbure d'une sphère (c'est-à-dire d'un ballon, ou de la surface de la Terre) est constante : elle ne dépend pas du point de la surface. Pour les amateurs de formule, la courbure d'une sphère de rayon R est en tout point égale à $1/R^2$. Pour la Terre, $R = 6400$ km ; la courbure est donc bien plus faible que celle d'un ballon, où l'on a environ $R = 15$ cm.

- Une courbure négative ($K(x) < 0$) correspond aux autres cas. Par exemple lorsqu'on arrive à un col en montagne, le chemin derrière et devant nous est *en-dessous* de nous, alors que la montagne à gauche et à droite est *au-dessus*. C'est aussi le cas pour une selle de cheval. On parle alors de point col, ou de point selle.



Remarque. Attention, une surface peut avoir à la fois des points de courbure positive et des points de courbure négative (vous pouvez par exemple vérifier que c'est le cas pour la surface du milieu sur la figure 1).

Un lien entre la topologie et la géométrie

Le théorème de Gauß-Bonnet relie la topologie et la géométrie d'une surface : on a toujours l'identité

$$\int K dA = 4\pi(1 - g),$$

où g est le nombre de trous de la surface : le terme de droite ne dépend donc que de la topologie. Le terme de gauche est en quelque sorte une moyenne de la courbure sur la surface (et on rappelle que la courbure dépend de la géométrie). On a donc la propriété suivante : changer la géométrie d'une surface change sa courbure, mais la valeur moyenne de la courbure, elle, est toujours la même. Et donc :

- Sur une surface à 0 trous ($g = 0$), la moyenne de la courbure est positive : il y aura « plus » de courbure positive que de courbure négative (on peut vérifier cette propriété pour les surfaces de la figure 1).

- Sur une surface à 1 trou ($g = 1$), la moyenne de la courbure est nulle : il y aura autant de courbure positive que négative.
- Etc.

Et, la géométrie... ça sert à quoi ?

Même si les mathématiciens se posent assez rarement cette question, rien ne nous interdit d'y réfléchir. Une réponse classique est la théorie de la relativité générale (qui n'est pas mon thème de recherche), et qui permet (entre autres) de mieux comprendre notre univers ; je vais très brièvement expliquer ici de quoi il s'agit (je ne suis de toute façon en aucun cas un spécialiste!).

Si on commence par considérer les surfaces, il est bien connu qu'il y en a des *infinies* (par exemple un plan infini, c'est-à-dire s'étendant à l'infini dans toutes les directions), et des *finies* (par exemple la surface de la terre). De même pour les espaces à trois dimensions, il en existe des *infinis* (un espace s'étendant à l'infini dans les trois directions), mais aussi des *finis*. De la même manière qu'en marchant sur la Terre (très longtemps) en suivant « la même direction », on va finir par revenir à notre point de départ, il peut se produire la même chose en trois dimensions : on peut imaginer qu'en allant « tout droit » dans l'univers, suivant une direction fixe, on finira par arriver à l'endroit d'où on était partis (il s'agit alors de ce que les mathématiciens appellent la sphère de dimension 3). De la même façon qu'il existe de nombreuses surfaces « finies » différentes (si vous avez bien suivi, il y en a une à 0 trou, une à 1 trou, une à 2 trous, etc.), il existe de nombreux espaces de dimension 3 finis. On ne sait pour l'instant pas quelle est la forme de notre univers à trois dimensions, mais il paraît peu probable que celui-ci soit celui imaginé naturellement par chacun : un espace infini, s'étendant à l'infini dans les trois directions.

Au début du xx^e siècle, Einstein, dans sa théorie de la relativité générale, a fait le postulat suivant : l'espace-temps (qui est un objet à 4 dimensions : trois dimensions d'espace et une de temps) est courbé par les objets massifs présents dans l'Univers (étoiles, galaxies...), et ceci détermine ainsi sa géométrie. Pour comprendre ce phénomène, on peut faire une analogie en 2 dimensions : imaginez quatre personnes tenant un grand drap carré, de telle sorte que ce dernier soit plat. Une bille posée sur ce drap va le courber, et donc changer sa géométrie - avec la bille, le drap ne sera plus plat. Il en est ainsi de même pour l'univers : l'espace-temps n'est pas plat, mais courbé par les objets massifs présents. L'équation d'Einstein s'écrit globalement *courbure = masses présentes*, et son étude est un domaine de recherche très actif en géométrie riemannienne.

Si ces questions passionnantes vous intéressent, vous pouvez par exemple consulter les livres de Jean-Pierre Luminet, excellent vulgarisateur - notamment « *L'univers chiffonné* » (adressé à des non-scientifiques) où il est question de géométrie, de topologie et de forme de l'univers.

Table des matières

Introduction	1
1 Géométrie classique	11
1.1 Géométrie métrique	11
1.2 Géométrie riemannienne	13
1.2.1 Géométrie riemannienne en dimension $n \geq 2$	13
1.2.2 Géométrie riemannienne des surfaces	15
1.3 Géométrie conforme des anneaux	16
1.3.1 Module d'un anneau	17
1.3.2 L'anneau de Grötzsch	18
2 Géométrie des surfaces d'Alexandrov	23
2.1 Échauffement : géométrie des cônes Euclidiens	23
2.2 Définition des surfaces d'Alexandrov	25
2.2.1 Première définition : par approximation	25
2.2.2 Deuxième définition : géométrique	27
2.2.3 Troisième définition : analytique	32
2.3 Le théorème de convergence local de Y. Reshetnyak	37
2.4 Une surface qui n'est pas une surface d'Alexandrov	37
2.5 Deux résultats qui seront utiles dans la suite	39
2.5.1 Volume des boules	39
2.5.2 Une borne supérieure sur la longueur d'un segment	43
3 Des résultats de compacité	47
3.1 À quoi peut servir un théorème de compacité ?	47
3.2 Bref historique des théorèmes de compacité	48
3.2.1 Début des théorèmes de compacité	48
3.2.2 Les coordonnées harmoniques	49
3.2.3 La conjecture de Gromov (enfin) démontrée	50
3.3 Convergence au sens de Gromov-Hausdorff	50
3.4 Convergence lisse (Cheeger-Gromov)	52
3.4.1 Énoncé du résultat	52
3.4.2 Un mot sur les hypothèses	54
3.4.3 Les deux étapes de la preuve	55
3.4.4 Conséquences d'un contrôle C^0 de la métrique	59

4	Du théorème de Cheeger-Gromov au Théorème Principal	63
4.1	Hypothèse sur la courbure	64
4.2	Le rayon de contractibilité remplace le rayon d'injectivité	64
4.2.1	Définition	64
4.2.2	Cas d'une métrique riemannienne	72
4.2.3	Rayon de contractibilité des cônes Euclidiens	73
4.2.4	L'hypothèse 2. n'implique pas l'hypothèse 1.	75
4.3	Énoncé du Théorème Principal, et versions plus pratiques	83
4.3.1	Cas de métriques à singularités coniques	84
4.3.2	Cas de métriques riemanniennes	84
4.3.3	Un critère pour remplacer les hypothèses 1. et 2.	86
4.4	Qu'en est-il des structures conformes ?	87
5	Preuve du Théorème Principal	89
5.1	Majorer l'aire revient à majorer le diamètre et la courbure totale	90
5.2	Préliminaire I : une borne sur le terme harmonique local	91
5.3	Préliminaire II : un contrôle sur l'image conforme des boules	97
5.3.1	Choix de α	99
5.3.2	Convergence de métriques : un corollaire du théorème 2.20	100
5.3.3	Choix de κ	102
5.4	Preuve du théorème	103
	Plan de la preuve	104
5.4.1	Recouvrement de Σ	104
5.4.2	Plongement dans un espace Euclidien	105
5.4.3	Convergence des surfaces plongées Σ^m vers une surface plongée Σ^∞	106
5.4.4	Construction d'un difféomorphisme $\Pi^m : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$	112
5.4.5	Fin de la preuve	116
6	Espace de module des convexes dans le plan	125
6.1	Caractérisation de l'ensemble des convexes	131
6.1.1	Les fonctions de support	131
6.1.2	Passage au quotient	133
6.1.3	La forme d'aire	134
6.2	Géométrie hyperbolique	134
6.2.1	Géométrie hyperbolique de dimension finie	134
6.2.2	Géométrie hyperbolique de dimension infinie	136
6.2.3	Géométrie hyperbolique pour les convexes	136
6.3	Étude du sous-ensemble $X_1 \subset \mathbb{H}^\infty$	139
6.3.1	Étude des géodésiques	139
6.3.2	Étude du flot de raccourcissement des courbes	141
	Perspectives	145
	Bibliographie	148

« Que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ? Elle n'a aucun sens. Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode. Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode. »

H. Poincaré, *La science et l'hypothèse.*

Introduction

Dans cette thèse, on s'attache à étudier la géométrie des surfaces qui ne sont pas lisses, mais *singulières*.

On peut commencer par considérer celles dont les singularités sont *ponctuelles* (ou *isolées*). Il s'agit de surfaces à *singularités coniques*, car en effectuant un zoom on obtient une surface dont la géométrie est proche de celle d'un cône Euclidien :

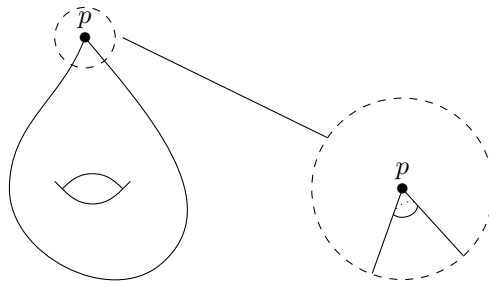


FIGURE 2 – Une surface avec une singularité conique au point p .

Les polyèdres, dont les premières études remontent à la civilisation Grecque dans l'Antiquité, sont des exemples de surfaces (plates) à singularités coniques. Ces dernières apparaissent naturellement en géométrie riemannienne ainsi qu'en dynamique, avec l'étude des surfaces de translation (c'est-à-dire des surfaces plates dont les angles des singularités sont des multiples de 2π).

On peut faire remarquer qu'il est ici question de singularités *géométriques*, c'est-à-dire que les surfaces sont considérées à isométrie près. Par exemple, les seuls points singuliers d'un polyèdre sont les sommets : les arêtes sont constituées de points lisses, car on peut (localement) les déplier afin d'obtenir une isométrie avec le plan Euclidien.

Cette thèse contribue à l'étude des géométries singulières en recherchant une *compactification de l'ensemble des métriques à singularités coniques*. Pour commencer, on peut étudier le comportement des surfaces dont les points coniques se rapprochent les uns des autres. Un premier exemple simple est décrit sur la figure suivante :

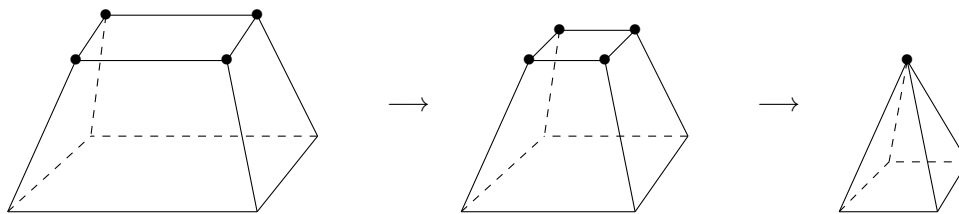


FIGURE 3 – Quatre singularités se rapprochent pour en former une unique.

Ici, la *surface limite* est encore un polyèdre. On peut obtenir d'autres comportements plus intéressants :

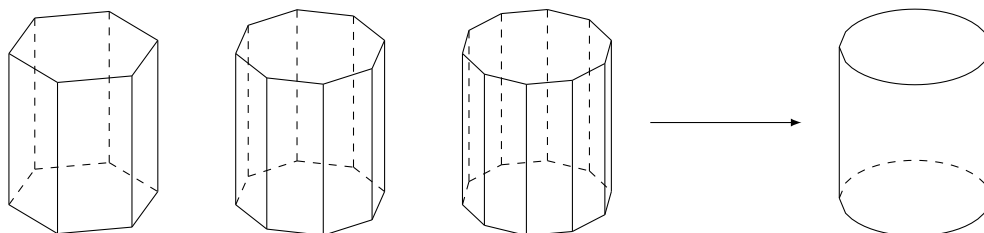


FIGURE 4 – Les singularités s'accumulent : des polyèdres convergent vers un cylindre.

Cette fois-ci, la surface limite est un cylindre, ou une boîte de conserve (le dessus et le dessous appartiennent bien à la surface). Il est clair que cette dernière ne possède pas de singularités coniques. On peut donc se poser la

Question 0.1. *Comment décrire les singularités du cylindre ?*

Pour répondre à cette question, on peut commencer par étudier la courbure des surfaces qui approximent le cylindre : elle est nulle presque partout, et les points anguleux sont de « courbure infinie ». Mais alors, qu'en est-il du cylindre ? De façon plus mathématique, la bonne façon de voir les choses est de ne plus considérer la courbure comme une fonction, mais comme une mesure.

Ainsi, la courbure des surfaces qui approximent le cylindre, en tant que mesure, est concentrée en les points anguleux : c'est une somme de masses de Dirac en ces points (ce qui donne une notion cohérente de « courbure infinie »). Ces masses de Dirac ont un poids d'autant plus que fort que la géométrie paraît éloignée du cas plat (Euclidien) ; au cours de l'approximation présentée dans la figure 4, ces poids vont donc être de plus en plus faibles.

La *mesure de courbure* des surfaces approxinant le cylindre est donc une somme de masses de Dirac, répartis uniformément sur le cercle, et dont les poids tendent vers zéro. À la limite, la mesure de courbure du cylindre est donc la mesure (angulaire) standard portée par les deux cercles, en haut et en bas du cylindre. Ceci répond à la question 0.1.

Remarque 0.2. *On vient de décrire une surface à « singularités le long d'une courbe ». On peut en fait faire bien plus : on peut par exemple construire un exemple analogue à celui de la figure 4, où cette fois-ci les points coniques ne s'accumulent pas uniformément sur le cercle, mais le long d'un ensemble de Cantor. A la limite, la mesure de courbure est alors portée par cet ensemble, et ceci donne une surface à « singularités le long d'un ensemble de Cantor ».*

Le bon cadre dans lequel il faut se placer pour étudier des accumulations de singularités est donc celui des surfaces *pour lesquelles il existe une mesure de courbure*. A. Alexandrov et l'école de Leningrad, dans les années 1940-1970, ont développé une telle géométrie singulière : il s'agit des *surfaces à Courbure Intégrale Bornée au sens d'Alexandrov*. Dans la suite, on parlera de façon plus concise de *surfaces d'Alexandrov*, ou de *métriques d'Alexandrov*. Cette théorie englobe (heureusement) les surfaces lisses, ainsi que celles qui ont des singularités coniques ; d'une manière générale, toutes les surfaces raisonnables que l'on peut imaginer sont d'Alexandrov.

Plusieurs approches sont possibles pour les décrire. On en présente deux ici (ce sont les définitions 2.6 et 2.19).

Approche géométrique

Commençons par le cas d'une métrique riemannienne lisse sur une surface. Une façon de considérer la courbure d'une partie U est d'intégrer la courbure de Gauß sur U :

$$\omega(U) := \int_U K d\mathcal{A}.$$

L'objet ω ainsi construit est une mesure, que l'on appelle la *mesure de courbure* de la surface. Cet objet a une interprétation très géométrique : si \mathcal{T} est un triangle géodésique tracé sur la surface, de sommets A, B, C et d'angles α, β, γ , alors la formule de Gauß-Bonnet nous dit que la courbure du triangle vérifie

$$\omega(\mathcal{T}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{1}$$

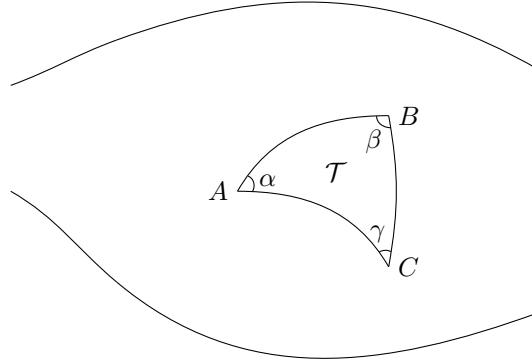


FIGURE 5 – La formule de Gauß-Bonnet pour un triangle géodésique

On constate alors que sur une surface quelconque, on peut également définir une mesure de courbure par la formule (1), à condition d'avoir une notion de (triangles) géodésiques, et une notion d'angles. Ces notions sont valables dans le cadre plus général des surfaces munies d'une *métrique intrinsèque*. L'idée est donc d'essayer de définir une mesure de courbure sur cette classe géométrique plus large, à l'aide de la formule (1), et en approchant toute partie U par des triangles disjoints. Les surfaces d'Alexandrov sont alors celles qui vérifient une condition de finitude pour cette mesure ainsi construite.

Approche analytique

Considérons une métrique (plate) sur une surface, à singularités coniques en des points p_1, \dots, p_n , de poids β_1, \dots, β_n : il existe une coordonnée complexe z telle que la métrique s'écrive

$$g = e^{2u(z)} |dz|^2,$$

où on a posé

$$u(z) = \beta_1 \ln |z - p_1| + \dots + \beta_n \ln |z - p_n|.$$

Si on note μ la mesure discrète

$$\mu = \beta_1 \delta_{p_1} + \dots + \beta_n \delta_{p_n}$$

(δ_{p_i} la masse de Dirac en p_i), on a

$$u(z) = \int \ln |z - \xi| d\mu(\xi). \quad (2)$$

Par ailleurs, une métrique riemannienne donne une géométrie sur la surface, en mesurant la longueur des courbes γ selon la formule

$$\text{longueur de } \gamma = \int \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt = \int e^{u(\gamma(t))} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

L'idée est alors de donner un sens à cette formule, pour des fonctions u s'écrivant sous la forme (2), mais où cette fois-ci la mesure μ n'est plus nécessairement une mesure discrète (mais par exemple une mesure portée par une courbe, ou par un ensemble de Cantor).

Des résultats de compacité

Le but du travail effectué dans cette thèse est d'étudier le comportement des métriques dont les singularités se rapprochent, en donnant un théorème de compacité pour des métriques d'Alexandrov. Dans le cas de métriques riemanniennes lisses, on dispose du célèbre théorème de compacité de Cheeger-Gromov, qu'on énonce ici dans le cas des surfaces :

Théorème 0.3 (Cheeger-Gromov). *Soit $\Lambda > 0$, $i > 0$ et $A > 0$. L'ensemble des surfaces riemanniennes lisses (Σ, g) satisfaisant les trois hypothèses*

1. *|courbure de Gauß| $\leq \Lambda$,*
2. *rayon d'injectivité $\geq i$,*
3. *aire $\leq A$*

est précompact (après composition par des difféomorphismes), en topologie $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

Si on veut adapter ce théorème au cas des métriques d'Alexandrov, on peut commencer par remarquer que la conclusion ne peut plus porter sur les métriques riemanniennes - elles n'existent pas dans ce cadre singulier. Il ne peut être question que de distance.

De plus, on a vu que la notion adéquate de courbure à considérer n'est plus la courbure ponctuelle, mais la mesure de courbure. Enfin, le rayon d'injectivité n'a pas de sens dans

le cadre des surfaces d’Alexandrov, et on introduira à la place le *rayon de contractibilité*, dont une borne inférieure joue le rôle d’une borne inférieure sur le rayon d’injectivité pour les variétés riemanniennes. Le résultat principal obtenu dans cette thèse est le suivant (voir aussi [Deb16]) :

Théorème Principal. *Soit Σ une surface compacte, et $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ l’ensemble des métriques d’Alexandrov d sur Σ , vérifiant les conditions suivantes :*

1. *pour tout $x \in \Sigma$ on a*

$$\omega^+(B(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta;$$

2. *le rayon de contractibilité de (Σ, d) vérifie*

$$\text{cont}(\Sigma, d) \geq c;$$

3. *l’aire de (Σ, d) vérifie*

$$\text{aire}(\Sigma, d) \leq A.$$

Alors, l’ensemble $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ est compact, au sens suivant : pour toute suite $d_m \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, il existe une métrique d’Alexandrov d sur Σ et des difféomorphismes $\varphi_m : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tels que, après passage à une sous-suite, on ait

$$\varphi_{m_k}^* d_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} d,$$

uniformément sur Σ .

La démonstration s’inspire de celle du théorème de Cheeger-Gromov. On s’est attachés à développer les outils adaptés au cadre singulier des surfaces d’Alexandrov ; une large partie de ce manuscrit est destinée à présenter cette preuve.

On a donc étudié ce qu’il se passait lorsque des singularités se rapprochent les unes des autres, et on a donné un sens à des métriques à singularités le long d’une courbe, ou le long d’un ensemble de Cantor (via la mesure de courbure). On peut alors se poser la question suivante :

Question 0.4. *« Combien » y a-t-il de métriques à (mesure de) courbure fixée ?*

La recherche d’un tel *espace de module* est très classique en géométrie riemannienne. Il a déjà été largement étudié, dans le cas des surfaces lisses - notamment lors de la recherche de métriques de courbure constante (c’est la théorie de Teichmüller), et dans le cas des surfaces à singularités coniques. Dans cette étude, on s’intéressera aux métriques *plates à singularité positive le long d’une courbe fermée*, dont une classe d’exemples est constituée des convexes, recollés le long de leurs bords.

Présentation des résultats

On donne un aperçu du contenu des différents chapitres de ce manuscrit.

Chapitre 1 : Géométrie classique

Ce chapitre a principalement pour but de fixer les notations utilisées dans la suite. On commence par étudier les espaces métriques intrinsèques, dont on présente les propriétés principales.

On rappelle ensuite des notions classiques de géométrie riemannienne sur les surfaces, avec en tête l'idée suivante : *les surfaces d'Alexandrov généralisent les surfaces riemanniennes lisses*. De nombreuses propriétés exposées dans cette partie vont être valables plus loin dans le cadre des surfaces d'Alexandrov.

La dernière partie est moins classique : on y étudie la géométrie conforme des anneaux dans le plan. On énonce notamment le théorème de Grötzsch (pour un énoncé plus précis, voir le théorème 1.11) :

Théorème (Grötzsch). *Soit $r < 1$. Parmi tous les anneaux inclus dans le disque unité D , ne contenant pas 0 et r , l'anneau de Grötzsch $D - [0, r]$ est celui de plus grand module.*

Ce résultat joue un rôle central dans la démonstration du Théorème Principal : en coordonnées locales $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D$, il nous permet de contrôler l'image des boules $H(B(x, \lambda\varepsilon))$ (pour certaines valeurs bien spécifiques de $\lambda < 1$), en considérant l'anneau du plan $D - H(B(x, \lambda\varepsilon))$.

Chapitre 2 : Géométrie des surfaces d'Alexandrov

On présente les surfaces d'Alexandrov, qui sont l'objet d'étude principal de ce travail. Les résultats énoncés ici sont, pour la majeure partie, issus des travaux de mathématiciens Russes dans les années 1940-1970. On donne trois définitions (équivalentes) différentes. La première est la suivante (les deux autres ont été présentées plus haut) : les surfaces d'Alexandrov sont limites (au sens de la distance uniforme) de surfaces riemanniennes lisses, à courbure intégrale bornée.

Définition. *Une métrique d'Alexandrov d sur Σ est une métrique compatible avec la topologie, intrinsèque, et limite uniforme de distances riemanniennes d_{g_m} sur Σ , dont l'intégrale de la valeur absolue de la courbure $\int_{\Sigma} |K_{g_m}| d\mathcal{A}_{g_m}$ est majorée.*

On termine cette section en montrant deux résultats qui seront utiles dans la démonstration du Théorème Principal. Le premier concerne le volume des boules : comme en géométrie riemannienne classique, un contrôle sur la courbure (ici, sur la mesure de courbure) nous donne un contrôle sur le volume des boules.

Proposition. *Soit (Σ, d) une surface d'Alexandrov, et soient $x \in \Sigma$ et $r > 0$.*

1. *On a*

$$\text{aire}(B(x, r)) \leq (2\pi + \omega^-(B(x, r)))r^2/2.$$

2. *Si pour tout $s < r$, $B(x, s)$ est homéomorphe à un disque ouvert, alors*

$$\text{aire}(B(x, r)) \geq (2\pi - \omega^+(B(x, r)))r^2/32.$$

Le deuxième résultat donne une estimation de la longueur d'un segment (Euclidien) pour une métrique d'Alexandrov écrite en coordonnées locales, ne comportant pas de terme harmonique. Plus précisément, on montre la

Proposition. *Soit ω une mesure de Radon définie sur $D(1/2)$, avec $\omega^+(D(1/2)) < 2\pi$. Soient $z, z' \in D(1/2)$, et soit $\gamma(t) := (1-t)z + tz'$ le segment $[zz']$. On a alors*

$$\int_0^1 e^{V[\omega](\gamma(t))} |z - z'| dt \leq \frac{2}{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi} |z - z'|^{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi}, \quad (3)$$

où $V[\omega](u) = \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |u - \xi| d\omega(\xi)$ est le potentiel de la mesure ω .

Chapitre 3 : Des résultats de compacité

On présente deux théorèmes de compacité bien connus des géomètres riemanniens.

On commence par la notion (assez faible) de convergence d'espaces métriques au sens de Gromov-Hausdorff, et le théorème de compacité de Gromov, présenté en 1981 dans le fameux « livre vert » [Gro81b]. Il faudra alors une dizaine d'années pour que Greene-Wu [GW88] et Peters [Pet87] démontrent une conjecture faite par Gromov, et prouvent ainsi le théorème de Cheeger-Gromov, dont l'énoncé (dans le cas des surfaces) a été rappelé plus haut dans l'introduction.

On explique ensuite les hypothèses de ce théorème, puis on donne le détail des deux étapes de sa démonstration (en suivant la preuve exposée dans [HH97]). La première est purement riemannienne, et consiste à minorer le *rayon harmonique* des variétés. La deuxième étape consiste à plonger les variétés dans un espace Euclidien, et dans ce manuscrit on adapte cette construction au cadre singulier des surfaces d'Alexandrov afin de démontrer le Théorème Principal. Cette description de la preuve joue donc un rôle important dans la suite.

Chapitre 4 : Du théorème de Cheeger-Gromov au Théorème Principal

On détaille comment, en faisant une analogie avec le théorème de Cheeger-Gromov, on a trouvé les hypothèses adaptées aux métriques d'Alexandrov.

L'hypothèse sur la courbure (sectionnelle) est remplacée de façon assez naturelle par une hypothèse sur la mesure de courbure. Par contre, il n'y a plus de notion de rayon d'injectivité pour les surfaces d'Alexandrov, et on a donc besoin de définir une nouvelle quantité. On arrive naturellement à la définition suivante de *rayon de contractibilité* en un point $x \in \Sigma$ (des définitions similaires, dans un cadre riemannien, existent dans la littérature, voir la remarque 4.7) :

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) := \sup \{r > 0 \mid \text{pour tout } s < r, \overline{B}(x, s) \text{ est homéomorphe à un disque fermé}\}.$$

Le rayon de contractibilité de la surface d'Alexandrov (Σ, d) est alors

$$\text{cont}(\Sigma, d) := \inf_{x \in \Sigma} \text{cont}(\Sigma, d, x),$$

et une minoration du rayon d'injectivité est remplacée par une minoration du rayon de contractibilité. Cette quantité est naturelle, car dans le cas d'une métrique riemannienne

à courbure bornée, une minoration du rayon d'injectivité est équivalente à une minoration du rayon de contractibilité. On étudie en détail cette nouvelle quantité dans ce chapitre.

On a finalement introduit toutes les définitions nécessaires à énoncer le Théorème Principal, et ses corollaires. On montre notamment le corollaire suivant, concernant des métriques riemanniennes ayant « peu » de courbure positive, dont l'énoncé est purement riemannien et qui semble ne pas avoir d'analogue dans la littérature :

Corollaire. *On suppose que Σ n'est pas la sphère \mathbb{S}^2 . L'ensemble des métriques riemanniennes g sur Σ vérifiant*

1. $\int_{\Sigma} K^+ dA \leq 2\pi - \delta$,
2. $\text{inj} \geq i > 0$ et
3. $\text{aire} \leq A$

est précompact (après composition par des difféomorphismes), au sens des distances uniformes.

On termine cette partie en se posant la question de la convergence, dans le Théorème Principal, des structures conformes associées aux métriques d'Alexandrov : on verra que ce problème est plus compliqué qu'il n'y paraît.

Chapitre 5 : Preuve du Théorème Principal

Cette partie est la plus technique du manuscrit : on démontre en détail le Théorème Principal. On commence par énoncer deux propositions fondamentales, qui nous permettent de contrôler la métrique dans des cartes conformes (pour des énoncés précis on peut se référer aux théorèmes 5.2 et 5.9). Pour toute métrique d'Alexandrov vérifiant les hypothèses du Théorème Principal, et toute carte conforme $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D$ vérifiant $H(x) = 0$,

- le terme harmonique de la métrique dans cette carte est borné (sur tout compact de D) ;
- on a un contrôle sur l'image des boules $H(B(x, \lambda\varepsilon)) \subset D$, pour certaines valeurs bien spécifiques de $\lambda < 1$.

Les bornes et les contrôles obtenus doivent être uniformes (c'est-à-dire, indépendants de la métrique d'Alexandrov vérifiant les hypothèses du Théorème Principal).

On adapte ensuite, dans le détail, la deuxième étape de la preuve du théorème de Cheeger-Gromov aux surfaces d'Alexandrov, en commençant par plonger les surfaces dans un espace Euclidien.

Chapitre 6 : Espace de module des convexes dans le plan

Ce chapitre est très largement indépendant des précédents. Il consiste à rechercher un espace de module pour des surfaces à singularité positive le long d'une courbe, en commençant par considérer les exemple formés des convexes du plan, recollés le long de leurs bords.

W. Thurston [Thu98], ainsi que C. Bavard et É. Ghys [BG92], ont considéré des espaces de module de surfaces plates, à singularités coniques prescrites (il s'agit plus précisément

de polyèdres et de polygones). La géométrie naturelle sur ces espaces est celle d'un espace hyperbolique complexe (ou réel) de dimension finie. La forme d'aire de la surface joue ici un rôle central : c'est une forme quadratique de signature $(1, n)$, et si on fixe l'aire = 1, elle fait naturellement apparaître la géométrie hyperbolique.

Des convexes du plan s'identifient à leur fonction de support. Sur cet espace de fonction, de dimension infinie, on dispose encore d'une forme d'aire (l'aire du convexe), qui est cette fois-ci de signature « $(1, \infty)$ ». Si on fixe l'aire = 1, elle fait également apparaître une géométrie hyperbolique, cette fois-ci de *dimension infinie*.

L'ensemble X_1 des convexes d'aire = 1 est donc un sous-ensemble de l'espace hyperbolique de dimension infini \mathbb{H}^∞ . On en étudie quelques propriétés : cet espace est géodésiquement convexe, mais n'est pas totalement géodésique. On étudie aussi le flot de raccourcissement des courbes (normalisé), qui trace une courbe dans X_1 .

Perspectives

On présente dans cette dernière partie quelques pistes de recherche pour les mois (ou les années) à venir. Il y a trois axes principaux. Le premier consiste à essayer d'étendre les résultats de compacité obtenus dans cette thèse en dimension supérieure. Le deuxième consiste à étudier plus en détail l'espace de module des convexes, et plus généralement, essayer de comprendre l'espace de module des *surfaces à singularités le long d'un ensemble de Cantor*. Enfin, une troisième piste de recherche consiste à essayer de lancer un flot de Ricci sur des surfaces d'Alexandrov ; les cas « simples » de surfaces à singularités coniques ont déjà été traités, notamment par les travaux de R. Mazzeo, Y. Rubinstein et N. Sesum [MRS15].

Chapitre 1

Géométrie classique

L'objectif de ce paragraphe est principalement de fixer les notations qui vont être utilisées dans la suite. On commence par rappeler quelques propriétés des métriques intrinsèques, qui seront utiles plus loin (les métriques d'Alexandrov sont en effet des métriques intrinsèques). On énonce ensuite quelques propriétés classiques des métriques riemanniennes sur une surface, en gardant à l'esprit que les surfaces d'Alexandrov forment des généralisations des surfaces riemanniennes. On termine par étudier la géométrie conforme des anneaux, qui joue un rôle central dans la démonstration du Théorème Principal.

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés considérées seront sans bord, et lisses, c'est-à-dire munies d'un atlas de cartes \mathcal{C}^∞ . On attire l'attention du lecteur sur le fait suivant : *être une variété lisse* est une propriété topologique (il existe un recouvrement par des ouverts, et des cartes vers un espace Euclidien, tels que les changements de cartes soient de classe \mathcal{C}^∞). Dans la suite, on sera amenés à considérer différentes métriques sur des variétés ; le point important est de remarquer qu'à chaque fois, ces métriques sont compatibles avec la topologie, c'est-à-dire qu'elles définissent bien la topologie de variété.

Exemple 1.1. *Un cube dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 est naturellement une variété lisse, car homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 . On peut alors considérer l'espace tangent en un sommet du cube. Ce dernier est défini de façon abstrait, et est par contre difficile à visualiser dans l'espace (le cube n'est bien sûr pas une sous-variété lisse de \mathbb{R}^3).*

1.1 Géométrie métrique

Pour cette partie, on pourra se reporter au livre [BBI01]. À partir de maintenant on fixe une surface *fermée* Σ , c'est-à-dire compacte et sans bord (bien que les résultats énoncés ici soient valables dans un cadre plus général).

Une *distance* sur Σ est une application $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$, vérifiant les trois conditions suivantes :

- symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in \Sigma$,
- inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in \Sigma$,
- séparation : si $x, y \in \Sigma$ sont tels que $d(x, y) = 0$, alors $x = y$.

On supposera toujours implicitement que les distances considérées sont compatibles avec la topologie de variété de Σ . Si γ est une courbe continue dans Σ , on peut définir sa longueur pour la métrique d par

$$L_d(\gamma) := \sup_{0=t_0 \leq \dots \leq t_n=1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right) \in [0, +\infty]$$

(quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira $L(\gamma)$ en lieu et place de $L_d(\gamma)$). Si cette longueur est finie, on dit que la courbe est *rectifiable*. La distance d est *intrinsèque* (on trouve aussi dans la littérature le terme de distance *géodésique*, ou distance de *longueur*) si, pour tous $x, y \in \Sigma$,

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les courbes continues $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ joignant x à y . À partir de maintenant, on fixe une distance intrinsèque sur Σ .

Exemple 1.2. On verra que les métriques riemanniennes sont des exemples de métriques intrinsèques. Par contre, la sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, munie de la restriction de la distance de \mathbb{R}^{n+1} , n'est pas intrinsèque : la distance entre le pôle Nord et le pôle Sud est 2, alors que toute courbe joignant ces deux points est de longueur $\geq \pi$.

La surface Σ étant compacte, la propriété suivante est une conséquence directe du théorème d'Arzelà-Ascoli : pour tous $x, y \in \Sigma$, il existe une *géodésique minimisante* $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ joignant x et y (c'est-à-dire une courbe vérifiant $d(x, y) = L(\gamma)$). Une courbe γ est une *géodésique* (on trouve aussi le terme *géodésique locale*) si pour tout $t_0 \in (0, 1)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que γ soit une géodésique minimisante entre $\gamma(t_0 - \varepsilon)$ et $\gamma(t_0 + \varepsilon)$. Il est clair qu'une géodésique minimisante est une géodésique. On fera toujours attention à bien distinguer ces deux notions : par exemple sur la sphère (munie de sa métrique usuelle de surface riemannienne), une courbe contenue dans un grand arc de cercle est une géodésique, mais n'est pas nécessairement une géodésique minimisante.

Pour $x \in \Sigma$ et $r > 0$ on définit les boules ouvertes et fermées :

$$B_d(x, r) := \{y \in \Sigma \mid d(x, y) < r\}$$

et

$$\overline{B}_d(x, r) := \{y \in \Sigma \mid d(x, y) \leq r\}$$

(quand le contexte sera clair, on écrira $B(x, r)$ et $\overline{B}(x, r)$ en lieu et place de $B_d(x, r)$ et $\overline{B}_d(x, r)$). La propriété suivante nous sera utile dans la suite :

Proposition 1.3. Soit d une métrique intrinsèque sur Σ , compatible avec la topologie. Alors l'adhérence de la boule ouverte $B(x, r)$ est la boule fermée $\overline{B}(x, r)$.

Démonstration. Notons X l'adhérence de la boule ouverte $B(x, r)$.

Soit (y_m) une suite de $B(x, r)$, convergeant vers $y \in \Sigma$: on a $d(x, y_m) < r$, et donc à la limite $d(x, y) \leq r$, ce qui montre que $X \subset \overline{B}(x, r)$.

Considérons maintenant $y \in \overline{B}(x, r)$, et soit γ une géodésique minimisante entre x et y , avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Pour $t < 1$ on a $d(x, \gamma(t)) < d(x, y) \leq r$, et donc $\gamma(t) \in B(x, r)$, ce qui montre que y est dans l'adhérence de $B(x, r)$, c'est-à-dire $y \in X$. \square

Une notion importante est celle de métrique induite. Si $A \subset \Sigma$ est connexe par arcs, on définit la métrique induite sur A de la façon suivante : si $x, y \in A$,

$$d_A(x, y) := \inf_{\gamma} L_d(\gamma),$$

où la borne inférieure est prise sur les courbes continues $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$, joignant x à y .

Proposition 1.4. *(A, d_A) est un espace métrique intrinsèque, c'est-à-dire que l'on a $d_A(x, y) := \inf_{\gamma} L_{d_A}(\gamma)$ si $x, y \in A$ (la borne inférieure est prise sur les courbes continues $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ joignant x à y).*

On peut remarquer ici que cette notion de métrique (intrinsèque) induite est différente de celle obtenue par restriction : la métrique induite par \mathbb{R}^{n+1} sur \mathbb{S}^n est la métrique riemannienne usuelle sur \mathbb{S}^n , alors que la métrique obtenue par restriction n'est pas intrinsèque (voir l'exemple 1.2).

1.2 Géométrie riemannienne

On suppose que le lecteur est déjà familier avec les notions classiques de Géométrie riemannienne ; l'un des intérêts de ce chapitre est de fixer les notations utilisées, et de servir de première approche avant de définir les surfaces d'Alexandrov. Comme les métriques sur les surfaces vont particulièrement nous intéresser dans la suite, on s'attache à les étudier en détail.

1.2.1 Géométrie riemannienne en dimension $n \geq 2$

Pour toute cette partie on peut se référer aux livres [GHL04], [Pet06] et au très complet [Ber03]. On fixe une variété lisse M de dimension $n \geq 2$.

Définition 1.5. *Une métrique riemannienne g est la donnée en tout point $x \in M$ d'un produit scalaire g_x sur l'espace tangent $T_x M$.*

Pour toutes coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) , on dispose donc de fonctions $g_{ij} := g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. On dit que g est lisse si les fonctions g_{ij} sont lisses : comme la variété M est lisse, ceci ne dépend pas du choix de coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) . Dans la suite, il sera toujours sous-entendu que les métriques riemanniennes sont lisses (sauf dans la partie 3 où il sera question des théorèmes de convergence $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ du type Cheeger-Gromov).

Un des intérêts d'avoir une métrique riemannienne est de pouvoir faire de la géométrie, c'est-à-dire mesurer des distances. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est une courbe de classe \mathcal{C}^1 , on définit sa longueur par

$$L_g(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt,$$

et la distance entre deux points $x, y \in M$ est

$$d(x, y) := \inf L_g(\gamma),$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les courbes de classe \mathcal{C}^1 joignant x à y . Il est bien connu que cette distance d est intrinsèque, et la quantité L_d (définie comme à la partie précédente à l'aide de la distance d) coïncide avec L_g pour des courbes de classe \mathcal{C}^1 .

On suppose que le lecteur est familier avec la notion de connexion de Levi-Civita (notée ∇) associée à une métrique riemannienne (lisse) g . Une courbe lisse γ est une *géodésique* si elle vérifie $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. Une géodésique est nécessairement paramétrée à vitesse constante. Si $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, alors γ est une géodésique pour la métrique d ; réciproquement, si γ est une géodésique pour la métrique d , alors tout paramétrage à vitesse constante $\tilde{\gamma}$ vérifie $\nabla_{\dot{\tilde{\gamma}}}\dot{\tilde{\gamma}} = 0$.

On suppose à partir de maintenant que l'espace métrique (M, d) est *complet*. Si $x \in M$ et $v \in T_xM$, d'après le théorème de Hopf-Rinow, on sait qu'il existe une unique géodésique $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$, vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = v$. On définit l'application exponentielle en x en posant $\exp_x(v) := \gamma(1)$: on obtient alors une application $\exp_x : T_xM \rightarrow M$. Le rayon d'injectivité $\text{inj}(x)$ en x est le plus grand $r > 0$ tel que l'application \exp_x soit un difféomorphisme, de la boule Euclidienne $B(r) \subset T_xM$ sur son image. On reviendra largement sur l'interprétation de cette quantité plus loin.

À l'aide de la connexion de Levi-Civita on peut définir le tenseur de courbure de Riemann R , qui est un tenseur de type $(4,0)$. À l'aide de R on peut définir la courbure sectionnelle $K(\pi_x)$ d'un plan π_x dans T_xM . Les inégalités

$$K \leq \lambda \text{ (ou } K \geq \lambda)$$

signifient que pour tout point $x \in M$ et tout plan $\pi_x \subset T_xM$ on a $K(\pi_x) \leq \lambda$ (ou $K(\pi_x) \geq \lambda$).

Le tenseur de courbure R comporte beaucoup d'informations, et est difficile à manipuler en général. On prend donc sa trace pour obtenir un tenseur de type $(2,0)$, le tenseur de Ricci, noté Ric . On dit qu'on a l'inégalité

$$\text{Ric} \geq (n-1)\lambda$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$ si pour tout vecteur tangent $X \in TM$ on a $\text{Ric}(X, X) \geq (n-1)\lambda g(X, X)$. Si on prend la trace du tenseur de Ricci, on obtient la courbure scalaire, qui est une fonction définie sur la variété.

Un des (nombreux) intérêts d'avoir un contrôle sur la courbure d'une variété riemannienne est d'obtenir des informations sur le volume des boules. On a notamment la célèbre proposition suivante : le premier résultat est une conséquence directe du comportement des champs de Jacobi, et le deuxième résultat est plus fin, et est dû à M. Gromov.

On note $v(n, \lambda, r)$ le volume d'une boule de rayon r dans l'unique variété riemannienne complète simplement connexe de dimension n , de courbure constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.6 (Bishop-Gromov). *Soit (M, g) une variété riemannienne lisse.*

1. *On suppose que la courbure sectionnelle vérifie $K \leq \lambda$. Alors, pour tout $x \in M$ et tout $r < \text{inj}(x)$ on a*

$$\text{vol}(B(x, r)) \geq v(n, \lambda, r).$$

2. On suppose que la courbure de Ricci vérifie $\text{Ric} \geq (n-1)\lambda$. Alors pour tout $x \in M$ la fonction

$$r \mapsto \frac{\text{vol}(B(x, r))}{v(n, \lambda, r)}$$

est décroissante sur $(0, \infty)$, et tends vers 1 quand r tends vers zéro. Ceci montre en particulier que pour tout $r > 0$ on a

$$\text{vol}(B(x, r)) \leq v(n, \lambda, r).$$

On reparlera plus tard de ce théorème : on voudra en effet obtenir des résultats analogues, dans le cadre des surfaces d'Alexandrov (voir la partie 2.5.1).

1.2.2 Géométrie riemannienne des surfaces

Sur les surfaces, les différents tenseurs et les notions de courbure coïncident (à un facteur multiplicatif près), et la seule quantité intéressante à considérer est la courbure de Gauß K . On peut notamment comprendre son rôle en considérant la longueur $L(C(m, \varepsilon))$ du cercle $C(m, \varepsilon)$, centré en m et de rayon ε : quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on a

$$L(C(m, \varepsilon)) = 2\pi\varepsilon - \frac{\pi}{3} K(m)\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$$

(formule de Bertrand et Puiseux, obtenue en 1848, voir [Ber03]). Ainsi, une courbure positive (resp., négative) tends à diminuer la longueur des petits cercles (resp., l'augmenter).

Sur les surfaces riemanniennes, on a l'existence de coordonnées conformes :

Théorème 1.7 (Existence de coordonnées conformes. Voir par exemple [Tro09], Proposition 4.1). *Soit g une métrique riemannienne sur une surface Σ . Pour tout point $x \in M$, il existe des coordonnées locales z au voisinage de x telles que la métrique s'écrive*

$$g = e^{2u(z)} |dz|^2 \tag{1.1}$$

dans ces coordonnées.

De plus, si φ et ψ sont deux cartes conformes (c'est-à-dire deux cartes pour lesquelles la métrique g s'écrit sous la forme (1.1)), alors $\varphi \circ \psi^{-1}$ est une application conforme (i.e., holomorphe ou anti-holomorphe), là où elle est définie.

On énoncera plus loin un résultat plus fort (théorème-définition 2.15, qui est valable pour les surfaces d'Alexandrov et donc pour les surfaces riemanniennes) : on a en plus un contrôle sur la taille du voisinage du point x sur lequel on peut introduire de telles coordonnées conformes. On verra également que la deuxième partie de l'énoncé s'étend aux métriques d'Alexandrov.

Si $g = e^{2u(z)} |dz|^2$, alors la courbure de Gauß est

$$K = e^{-2u} \Delta u.$$

Dans tout le manuscrit, on utilise la convention suivante pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur \mathbb{C} :

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Dans le cas des surfaces fermées (i.e. compactes sans bord), on a un lien très fort entre la topologie et la géométrie. Rappelons que la caractéristique d'Euler d'une surface fermée Σ est $\chi(\Sigma) = 2 - 2g$, où g est le genre de la surface. La formule de Gauß-Bonnet relie la courbure d'une métrique riemannienne sur Σ à sa topologie : on a

$$2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K d\mathcal{A}.$$

Dans tout le manuscrit, on appellera *triangle (géodésique)* la donnée de 3 points $A, B, C \in \Sigma$, et de 3 géodésiques reliant ces points, tels que ces 3 géodésiques soient le bord d'une partie de Σ homéomorphe à un disque fermé. Souvent, les géodésiques reliant les 3 points seront sous-entendus, et il sera simplement question du *triangle ABC*.

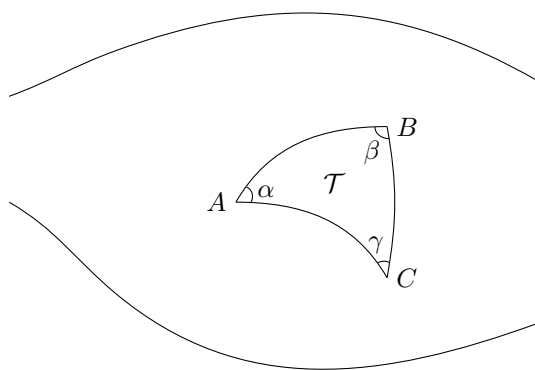


FIGURE 1.1 – Un triangle géodésique tracé sur la surface Σ

Comme signalé dans l'introduction, si \mathcal{T} est un triangle géodésique de sommets A, B, C et d'angles α, β, γ , la formule de Gauß-Bonnet s'écrit

$$\int_{\mathcal{T}} K d\mathcal{A} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

1.3 Géométrie conforme des anneaux

Cette partie est indépendante des deux précédentes. Le résultat majeur énoncé ici, le théorème de Grötzsch, est un des outils principaux pour la démonstration du Théorème Principal. Il sera utilisé dans les parties 5.2 et 5.3. Les références sont les deux livres de L. Ahlfors, [Ahl10] et [Ahl78].

De manière générale, la géométrie conforme consiste à se demander quand est-ce que deux ouverts U et U' du plan complexe sont *conformes*. Le résultat majeur de géométrie conforme date du début du vingtième siècle, c'est le théorème d'uniformisation de Riemann : tout ouvert non vide du plan, simplement connexe, qui n'est pas le plan complexe tout entier, est conforme au disque unité $D(1)$. Ce résultat répond donc à la question posée, dans le cas des ouverts simplement connexes.

Les ouverts que l'on peut naturellement considérer ensuite sont ceux qui sont *doublement connexes* : ce sont les *anneaux*. Dans tout le texte on adoptera la définition suivante :

Définition 1.8. *Un anneau (topologique) est un ouvert U du plan complexe, borné, tel que $\mathbb{C} - U$ a seulement une composante connexe bornée, et cette composante n'est pas réduite à un point.*

D'après les travaux de L. Ahlfors ([Ahl78], théorème 10), on sait que tout anneau topologique est conforme à un anneau régulier

$$A(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\},$$

où $0 < R_1 < R_2 < +\infty$.

Pour les anneaux topologiques, on peut définir un invariant conforme : le *module* de l'anneau (voir la section suivante), noté $\text{mod}(U)$. C'est un nombre réel strictement positif, et par définition, deux anneaux conformes ont même module. Les anneaux réguliers $A(R_1, R_2)$ ont pour module $\frac{1}{2\pi} \ln(R_2/R_1)$. Tout anneau U est conforme à un anneau régulier $A(1, R)$ (l'application conforme $z \mapsto z/R_1$ envoie l'anneau $A(R_1, R_2)$ sur $A(1, R_2/R_1)$), et le calcul du module de cet anneau nous donne $R = e^{2\pi \text{mod}(U)}$. Le module d'un anneau est donc un invariant total : deux anneaux sont conformes si, et seulement si, ils ont même module.

Dans ce travail, la géométrie conforme des anneaux nous intéresse pour la raison suivante. On va considérer des cartes conformes $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$, et on aura, par exemple, besoin d'un contrôle sur l'image par H de la boule $B(x, \varepsilon/2)$. Ce contrôle sera obtenu en considérant l'anneau $H(B(x, \varepsilon)) - H(B(x, \varepsilon/2))$, et en réussissant à estimer son module. Voir les parties 5.2 et 5.3.

La théorie du module d'une famille de courbes (ou la notion duale de *longueur extrémale*) est valable dans un cadre plus général que celui des anneaux ; pour autant, on énonce dans ce texte uniquement ce qui va nous servir dans la suite.

1.3.1 Module d'un anneau

Soit U un anneau. Soit Γ l'ensemble des courbes continues $\gamma : [0, l] \rightarrow U$, paramétrées par la longueur d'arc (i.e. pour tous $t_1 < t_2$, la longueur Euclidienne de la courbe $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ est $t_2 - t_1$), joignant la composante bornée à la composante non bornée de $\mathbb{C} - U$: c'est-à-dire, $\gamma(0)$ (resp., $\gamma(l)$) est dans la composante bornée (resp., non bornée) de $\mathbb{C} - U$, et $\gamma(t) \in U$ pour $t \in (0, l)$. Si $\rho : U \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable, on définit la ρ -longueur de γ par

$$L_\rho(\gamma) := \int_\gamma \rho |dz| = \int_0^l \rho(\gamma(t)) dt,$$

et la ρ -aire de U par

$$A_\rho(U) := \iint_U \rho^2 d\lambda.$$

Ce sont la longueur de γ et l'aire de U pour la métrique riemannienne (singulière) $g = \rho^2 |dz|^2$. On définit alors le module de U de la façon suivante :

$$\text{mod}(U) := \sup_\rho \frac{\inf_{\gamma \in \Gamma} L_\rho(\gamma)^2}{A_\rho(U)},$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les fonctions mesurables ρ vérifiant $0 < A_\rho(U) < +\infty$.

Par définition, il est clair que le module est un invariant conforme : si U et U' sont deux anneaux conformes, alors $\text{mod}(U) = \text{mod}(U')$. De façon heuristique, le module d'un anneau traduit son *épaisseur* : si $U \subset U'$ sont deux anneaux, alors $\text{mod}(U) \leq \text{mod}(U')$. La proposition suivante est bien connue :

Proposition 1.9. *Pour un anneau régulier $U = A(R_1, R_2)$, on a*

$$\text{mod}(U) = \frac{1}{2\pi} \ln(R_2/R_1) :$$

la borne supérieure est obtenue en prenant la métrique $\rho(z) = |z|^{-1}$.

Remarque 1.10. *En général, lors de la définition du module d'une famille de courbes (ou de la longueur extrémale), les courbes considérées sont seulement supposées rectifiables. Mais en examinant la démonstration de l'égalité $\text{mod}(U) = \frac{1}{2\pi} \ln(R_2/R_1)$, il apparaît que la restriction aux fonctions continues, paramétrées par la longueur d'arc, ne change pas la valeur du module, et donc notre définition est équivalente à la définition usuelle de module d'un anneau.*

1.3.2 L'anneau de Grötzsch

Soit $0 < r < 1$. L'anneau de Grötzsch est l'anneau suivant :

$$G(r) := D(1) - [0, r].$$

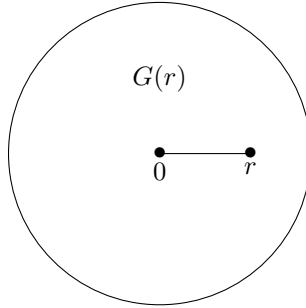


FIGURE 1.2 – L'anneau de Grötzsch $G(r)$

(cet anneau est parfois défini comme l'ensemble des nombres complexes z avec $|z| > 1$ et $z \notin [1/r, +\infty)$; on peut passer d'une définition à l'autre par l'application conforme $z \mapsto 1/z$.)

L'application $r \in (0, 1) \mapsto \text{mod}(G(r))$ est décroissante (car $G(r') \subset G(r)$ si $r \leq r'$), et on a $\lim_{r \rightarrow 0^+} \text{mod}(G(r)) = +\infty$ et $\lim_{r \rightarrow 1^-} \text{mod}(G(r)) = 0$.

H. Grötzsch a montré le théorème suivant, qui assure que l'anneau de Grötzsch est l'anneau de plus grand module (de façon heuristique, l'anneau *le plus épais*) parmi tous les anneaux inclus dans $D(1)$, et ne contenant par 0 et r .

Théorème 1.11 (Grötzsch). *Soit $U \subset D(1)$ un anneau, ne contenant pas 0 et r . Alors*

$$\text{mod}(U) \leq \text{mod}(G(r)).$$

La démonstration repose principalement sur un argument de symétrie : le segment $[0, r]$ est le plus petit ensemble connexe, symétrique par rapport à l'axe réel, contenant 0 et r . En raison de l'importance de ce résultat dans la suite, on présente les grandes lignes de la démonstration plus loin.

Le point important est le suivant : on a juste besoin d'avoir $0, r \notin U$ pour avoir $\text{mod}(U) \leq \text{mod}(G(r))$. On n'a pas besoin d'avoir d'informations sur la composante connexe K contenant 0 et r . Dans le cas simple où $[0, r] \subset K$, on a $U \subset G(r)$ et donc, par croissance du module, la conclusion du théorème est évidente. Par contre dans le cas suivant, l'inégalité $\text{mod}(U) \leq \text{mod}(G(r))$ serait bien plus difficile à obtenir sans le théorème :

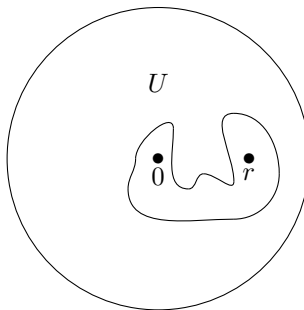


FIGURE 1.3

Démonstration du théorème 1.11. On donne les grandes lignes de la démonstration présente dans [Ahl10] (théorème 4.1, p.72).

Première étape. On doit faire appel à la notion (duale) de longueur extrémale. Pour un anneau U , on définit la quantité suivante :

$$\text{mod}^*(U) := \sup_{\rho} \frac{\inf_{\gamma \in \Gamma^*} L_{\rho}(\gamma)^2}{A_{\rho}(U)},$$

où cette fois-ci Γ^* est l'ensemble des courbes fermées continues $\gamma^* : [0, l] \rightarrow U$, paramétrées par la longueur d'arc, séparant la composante connexe bornée et la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} - U$. En effectuant une preuve similaire à celle permettant d'obtenir $\text{mod}(A(R_1, R_2)) = \frac{1}{2\pi} \ln(R_2/R_1)$, il n'est pas difficile de montrer que $\text{mod}^*(A(R_1, R_2)) = 2\pi(\ln(R_2/R_1))^{-1}$, et donc

$$\text{mod}^*(U) = \text{mod}(U)^{-1}.$$

Deuxième étape. Considérons maintenant le disque unité $D(1) \subset \mathbb{C}$, et pour $z \in (0, 1) \subset D(1)$ définissons

$$\lambda^*(z) = \sup_{\rho} \frac{\inf_{\gamma^* \in \Gamma^*} L_{\rho}(\gamma^*)^2}{A_{\rho}(D(1))}$$

et

$$\lambda_0^*(z) = \sup_{\rho} \frac{\inf_{\gamma_0^* \in \Gamma_0^*} L_{\rho}(\gamma_0^*)^2}{A_{\rho}(D(1))},$$

où Γ^* (resp. Γ_0^*) est l'ensemble des courbes dans $D(1)$, séparant $\{0, z\}$ (resp. séparant le segment $[0, z]$ de ∂D). Par exemple, la courbe suivante γ^* est dans Γ^* , mais n'est pas dans Γ_0^* :

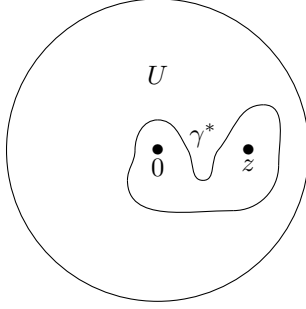


FIGURE 1.4

Par définition, on a

$$\lambda_0^*(z) = \text{mod}^*(G(r)).$$

Fait 1.12. On a $\lambda^*(z) = \lambda_0^*(z)$.

Démonstration. Comme $\Gamma_0^* \subset \Gamma^*$, on a clairement $\lambda^*(z) \leq \lambda_0^*(z)$.

De plus, comme $D(1) - [0, z]$ est un anneau topologique, on sait qu'il existe une métrique extrémale ρ_0 ; cette métrique est symétrique par rapport au segment $[0, z]$. Quitte à renormaliser, on peut supposer $A_{\rho_0}(D(1)) = \iint_{D(1)} \rho_0(z)^2 d\lambda(z) = 1$, et on a donc

$$\lambda_0^*(z) = \inf_{\gamma_0^* \in \Gamma_0^*} L_{\rho_0}(\gamma_0^*)^2.$$

Pour conclure il nous suffit donc de montrer que pour tout $\gamma^* \in \Gamma^*$ on a

$$L_{\rho_0}(\gamma^*)^2 \geq \inf_{\gamma_0^* \in \Gamma_0^*} L_{\rho_0}(\gamma_0^*)^2. \quad (1.2)$$

Si c'est le cas, on a en effet

$$\lambda^*(z) \geq \frac{\inf_{\gamma^* \in \Gamma^*} L_{\rho_0}(\gamma^*)^2}{A_{\rho_0}(D(1))} \geq \inf_{\gamma_0^* \in \Gamma_0^*} L_{\rho_0}(\gamma_0^*)^2 = \lambda_0^*(z).$$

Considérons donc $\gamma^* \in \Gamma^*$: c'est une courbe dans $D(1)$, séparant $\{0, z\}$ de $\partial D(1)$. En effectuant une réflexion par rapport au segment $[0, z]$, on construit une courbe $\gamma_0^* \in \Gamma_0^*$, qui est de même ρ_0 -longueur (car la métrique ρ_0 est symétrique par rapport à $[0, z]$) :

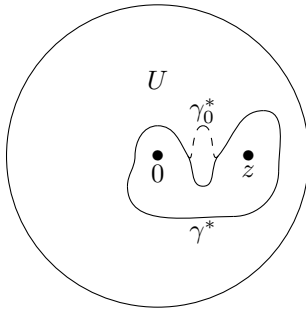


FIGURE 1.5

et ceci montre l'inégalité (1.2). □

Troisième étape. Considérons maintenant un anneau topologique $U \subset D(1)$, ne contenant pas 0 et z . Notons K la composante connexe bornée de $\mathbb{C} - U$: on pose $U' = D(1) - K$. Comme $U \subset U'$, on a $\text{mod}(U) \leq \text{mod}(U')$, et pour montrer le théorème il nous suffit de montrer $\text{mod}(U') \leq \text{mod}(G(r))$.

On a $\lambda^*(z) \leq \text{mod}^*(U')$, car pour calculer $\lambda^*(z)$ (resp., $\text{mod}^*(U')$), on prend une borne inférieure sur toutes les courbes séparant $\{0, z\}$ de $\partial D(1)$ (resp., séparant K de $\partial D(1)$), et K contient $\{0, z\}$. Par le fait 1.12, on a donc $\lambda_0^*(z) \leq \text{mod}^*(U')$, c'est-à-dire $\text{mod}^*(G(r)) \leq \text{mod}^*(U')$, et par la première étape on obtient $\text{mod}(U') \leq \text{mod}(G(r))$. \square

Chapitre 2

Géométrie des surfaces d'Alexandrov

En guise d'échauffement, on commence par considérer la géométrie (élémentaire) des cônes Euclidiens ; ils constituent en effet les modèles des surfaces à singularités coniques, qui sont un exemple important de surfaces d'Alexandrov.

On donne ensuite dans le détail trois définitions des surfaces d'Alexandrov, et on en étudie les premières propriétés. Les références principales sont le livre de A. Alexandrov et V. Zalgaller [AZ67], le livre de Y. Reshetnyak [Res93], son article d'exposition [Res01], et le récent survey de M. Troyanov [Tro09].

On termine cette partie en démontrant deux résultats sur les surfaces d'Alexandrov, qui seront utiles dans la preuve du Théorème Principal.

2.1 Échauffement : géométrie des cônes Euclidiens

Un cône (Euclidien) se construit à l'aide d'une feuille de papier, en recollant un secteur angulaire du plan :



FIGURE 2.1 – En découpant le cône selon les pointillés, on obtient un secteur angulaire dans le plan

Le nombre positif θ est l'angle de la singularité : si C_r est le cercle de centre p et de rayon r (c'est-à-dire, l'ensemble des points à distance exactement r de p), alors sa longueur est

$$L(C_r) = \theta r.$$

Le cas $\theta = 2\pi$ correspond au cas plat (Euclidien) : il n'y a pas de singularité. L'angle θ peut être inférieur à 2π , comme dans la figure précédente, ou supérieur à 2π , comme c'est le cas au pied d'un building, dans la rue :

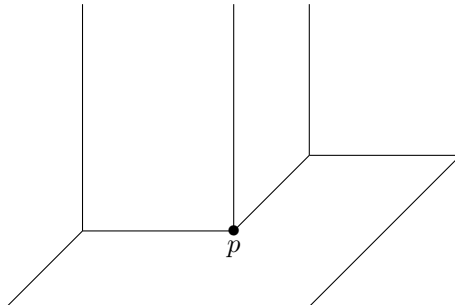


FIGURE 2.2 – Un cercle de centre p et de rayon r est constitué de 5 quarts de cercle (Euclidien), donc l'angle conique est $\theta = 5 \cdot \frac{\pi}{2} > 2\pi$.

On peut approximer une singularité conique à l'aide de capuchons sphériques :

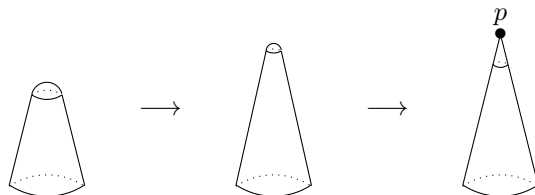


FIGURE 2.3

On remarque que pour les surfaces (lisses) approchant le cône, l'intégrale de la courbure sur le capuchon sphérique est constante :

$$\int K d\mathcal{A} = 2\pi - \theta. \quad (2.1)$$

En effet, considérons ces surfaces, *sans le disque du dessous* : ce sont des surfaces riemannniennes lisses, homéomorphes à un disque, et dont le bord est un cercle. Ce cercle ne change pas au cours de l'approximation, et la figure 2.1 nous montre que l'intégrale de la courbure géodésique le long de ce cercle est égale à θ . La formule de Gauß-Bonnet s'écrit alors

$$2\pi = \int K d\mathcal{A} + \theta,$$

ce qui montre la formule (2.1).

Il est donc naturel de définir la courbure de la singularité par la formule

$$k = 2\pi - \theta.$$

Dans la figure 2.1, la courbure de la singularité est positive, et dans la figure 2.2 elle est négative.

La figure 2.1 nous montre qu'un cône est isométrique au plan Euclidien, muni de la métrique écrite en coordonnées polaires $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$g = dr^2 + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 r^2 d\varphi^2$$

(on a également une isométrie avec $(0, \infty) \times \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}$, muni de la métrique $dr^2 + r^2 d\psi^2$.)

On peut représenter ces métriques de façon conforme de la façon suivante : considérons la bijection

$$(r, \varphi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto z = \left(\frac{\theta}{2\pi} r\right)^{\frac{2\pi}{\theta}} e^{i\varphi} \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\theta}{2\pi} r\right)^{\frac{2\pi}{\theta}-1} e^{i\varphi} dr + \left(\frac{\theta}{2\pi} r\right)^{\frac{2\pi}{\theta}} i e^{i\varphi} d\varphi \\ &= \left(\frac{\theta}{2\pi} r\right)^{\frac{2\pi}{\theta}-1} \left(dr + \frac{\theta}{2\pi} i r d\varphi\right) e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |dz|^2 &= \left(\frac{\theta}{2\pi} r\right)^{2\left(\frac{2\pi}{\theta}-1\right)} \left(dr^2 + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 r^2 d\varphi^2\right) \\ &= |z|^{2\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)} \left(dr^2 + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 r^2 d\varphi^2\right). \end{aligned}$$

Finalement en posant

$$\beta = \frac{\theta}{2\pi} - 1 > -1,$$

on a bien une écriture conforme

$$g = |z|^{2\beta} |dz|^2.$$

Remarque 2.1. *A l'aide de cette écriture conforme, il est tentant de considérer aussi des métriques riemanniennes s'écrivant sous la forme $g = |z|^{2\beta} |dz|^2$, avec $\beta \leq -1$ (ce qui correspond à un angle $\theta = 2\pi(\beta + 1)$ négatif). On ne le fait pas dans ce travail, pour la raison suivante : l'aire d'un voisinage du sommet du cône est alors infinie, ce qu'on veut éviter.*

2.2 Définition des surfaces d'Alexandrov

2.2.1 Première définition : par approximation

La première définition que l'on présente est la plus synthétique. Elle tient en quelques lignes, et permet de définir immédiatement la mesure de courbure.

Définition 2.2 (Surfaces d'Alexandrov, première définition. Voir [Tro09]). *d est une métrique d'Alexandrov sur Σ si :*

1. d est une métrique intrinsèque sur Σ ;
2. d est compatible avec la topologie de Σ ;
3. il existe une suite g_m de métriques riemanniennes lisses sur Σ , avec $\int_{\Sigma} |K_m| d\mathcal{A}_m \leq \Lambda < \infty$, telle que d est la limite uniforme des métriques d_{g_m} sur Σ .

La troisième condition explique de façon évidente la terminologie de *surface à Courbure Intégrale Bornée (au sens d'Alexandrov)*. Il est alors facile de définir la mesure de courbure ω : c'est la limite faible des mesures de courbure $\omega_m = K_m d\mathcal{A}_m$. On verra plus loin que cette quantité ne dépend pas de la suite de métriques riemanniennes g_m choisie pour approximer d .

Comme les surfaces (Σ, g_m) vérifient la formule de Gauß-Bonnet, $\int_{\Sigma} K_m d\mathcal{A}_m = 2\pi\chi(\Sigma)$, la surface limite la vérifie aussi, c'est-à-dire

$$\omega(\Sigma) = 2\pi\chi(\Sigma).$$

On peut également définir la mesure d'aire $d\mathcal{A}$ comme la limite faible de $d\mathcal{A}_m$. Cette mesure coïncide avec la mesure de Hausdorff de l'espace métrique (Σ, d) , et elle ne dépend donc pas non plus de la suite de métriques riemanniennes g_m approximant d .

Exemple 2.3. *Considérons une surface riemannienne, lisse partout sauf en un nombre fini de points p_i , où la surface est localement isométrique au sommet d'un cône Euclidien. En approximant les cônes Euclidiens par des capuchons sphériques, comme dans la section précédente, il est clair que la mesure de courbure de cette surface est*

$$\omega = K d\mathcal{A} + \sum_i k_i \delta_{p_i}, \quad (2.2)$$

où les k_i sont les courbures des cônes Euclidiens, et K est la courbure de Gauß de la partie lisse.

Cet exemple permet de définir ce qu'est une *surface à singularités coniques* : c'est une surface d'Alexandrov, dont la mesure de courbure a une expression analogue à la formule (2.2).

Définition 2.4. *Une métrique d'Alexandrov d sur Σ est une métrique à singularités coniques si elle est sans cusp (i.e. $\omega^+(\{x\}) < 2\pi$ pour tout $x \in \Sigma$), et si la partie singulière de la décomposition de Radon-Nikodym de la mesure de courbure ω par rapport à la mesure d'aire $d\mathcal{A}$ est une somme de Dirac.*

Autrement dit, il existe une fonction « courbure » $K \in L^1_{loc}(d\mathcal{A})$ et une mesure μ , qui est une somme de Dirac, tels que

$$\omega = K d\mathcal{A} + \mu.$$

On a vu que pour un cône Euclidien, de sommet p et d'angle θ , la longueur des cercles de centre p et de rayon r est θr . Pour une surface à singularités coniques, au voisinage d'une singularité on a également un tel équivalent quand $r \rightarrow 0$; voir par exemple [Res93].

2.2.2 Deuxième définition : géométrique

Comme indiqué dans l'introduction de ce manuscrit, l'idée est de considérer une surface munie d'une métrique intrinsèque et d'essayer de définir une mesure de courbure sur cette surface, à l'aide de la formule de Gauß-Bonnet. La définition que l'on va présenter est assez satisfaisante intellectuellement, car elle donne une interprétation géométrique intrinsèque de la mesure de courbure ; pour autant, ce n'est pas très utile en pratique, et cette définition ne sera pas utilisée dans la suite. On peut se référer au livre [Res01] pour tout ce qui est présenté ici.

Rappelons la formule de Gauß-Bonnet, dans le cas d'une surface munie d'une métrique riemannienne : pour tout triangle géodésique \mathcal{T} on a

$$\omega(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} K dA = a + b + c - \pi. \quad (2.3)$$

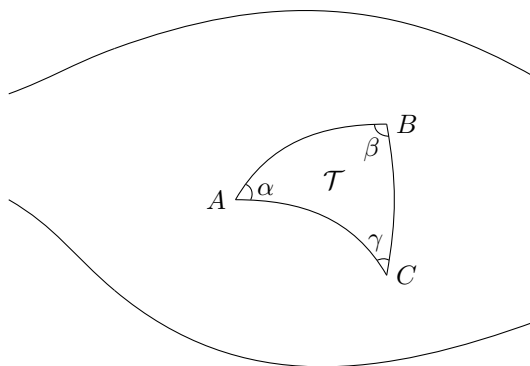


FIGURE 2.4 – La formule de Gauß-Bonnet pour un triangle géodésique

Pour définir une notion d'angle dans le cas de métriques intrinsèques, commençons par considérer un triangle Euclidien OXY , et notons $x = |OX|$, $y = |OY|$ et $z = |XY|$. La formule d'Al-Kashi (datant du xv^e siècle) nous indique que l'angle en O est alors

$$\arccos \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}. \quad (2.4)$$

Considérons maintenant une métrique intrinsèque d sur Σ (qui est compatible avec la topologie), et deux géodésiques $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$, issues d'un même point $O \in \Sigma$ (i.e., $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = O$). On souhaiterait définir l'angle entre ces deux courbes au point O . L'angle étant une notion locale, on peut considérer des points X sur γ_1 et Y sur γ_2 , proches de O , et appliquer la formule (2.4) pour obtenir une valeur approchée de l'angle :

$$\arccos \frac{d(O, X)^2 + d(O, Y)^2 - d(X, Y)^2}{2d(O, X)d(O, Y)}. \quad (2.5)$$

Une manière équivalente de procéder est de construire un triangle de comparaison Euclidien, dont les côtés sont de longueur $d(O, X)$, $d(O, Y)$ et $d(X, Y)$, et de considérer l'angle que forment deux des côtés du triangle au point O :

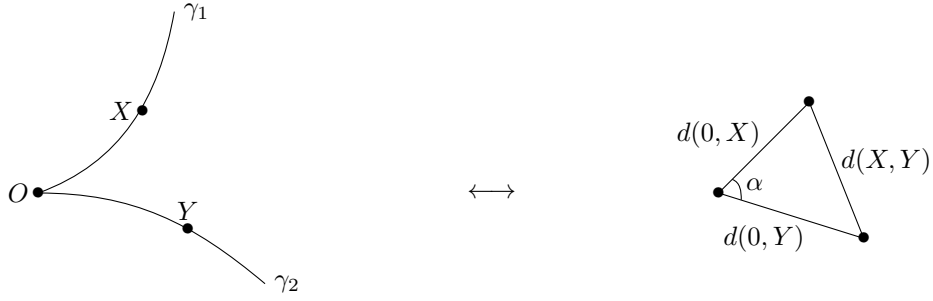


FIGURE 2.5 – L’angle α est une valeur approchée de l’angle entre les courbes γ_1 et γ_2 au point O .

Comme la limite de la quantité (2.5) quand X et Y tendent vers O n’est pas forcément définie, on considère la limite supérieure et on définit l’angle supérieur en O par

$$\bar{\alpha} = \limsup_{X \in \gamma_1 \rightarrow O, Y \in \gamma_2 \rightarrow O} \left(\arccos \frac{d(O, X)^2 + d(O, Y)^2 - d(X, Y)^2}{2d(O, X)d(O, Y)} \right).$$

En remplaçant la limite supérieure par une limite inférieure, on obtient une définition de l’angle inférieur $\underline{\alpha}$, et on dit que l’angle entre γ_1 et γ_2 existe au point O si on a $\bar{\alpha} = \underline{\alpha}$ (c’est-à-dire si la quantité (2.5) admet une limite quand X et Y tendent vers O).

Considérons maintenant un triangle (géodésique) $\mathcal{T} = ABC$: on spécifie trois points $A, B, C \in \Sigma$, et trois géodésiques entre ces points (γ_1 entre A et B , γ_2 entre B et C et γ_3 entre C et A). On peut définir l’excès supérieur de ce triangle par

$$\bar{\delta}(\mathcal{T}) := \bar{\alpha} + \bar{b} + \bar{c} - \pi,$$

où $\bar{\alpha}$ (respectivement \bar{b} , \bar{c}) est l’angle supérieur en A (respectivement en B , en C). On peut en première approche penser à cet excès supérieur comme à la mesure de courbure du triangle (voir pour autant la remarque 2.7).

Exemple 2.5. *Regardons sur un exemple comment calculer l’excès d’un triangle. Considérons un triangle $\mathcal{T} = ABC$ sur un cylindre. Pour simplifier les calculs, on suppose que A est le centre du disque formant le dessus du cylindre, B est sur le cercle, et C est sur les côtés. On note P l’intersection entre le cercle et la géodésique joignant A à C .*

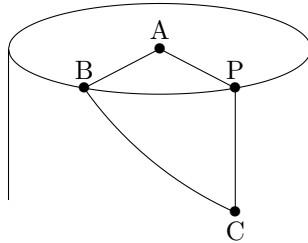


FIGURE 2.6

Appelons θ l’angle en A ; dans le triangle \mathcal{T} , on cherche à exprimer les angles en B et en C . Si on découpe le cylindre le long du cercle, on obtient les deux parties suivantes :

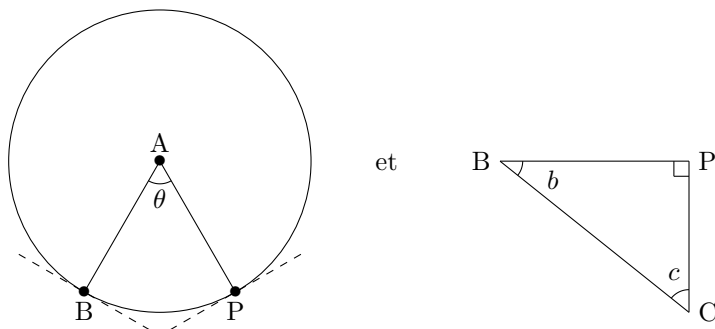


FIGURE 2.7

Appelons b et c les angles en B et C dans le triangle (droit) BPC : on a $b + c = \pi/2$. Dans le triangle \mathcal{T} , l'angle en B est alors $b + \pi/2$, et l'angle en C est c , si bien que l'excès dans le triangle est

$$\delta(\mathcal{T}) = (\theta + b + \pi/2 + c) - \pi = \theta.$$

(il n'y a ici pas besoin de prendre de limite supérieure, car il est clair que les angles existent). L'excès du triangle correspond donc bien à la quantité de courbure présente à l'intérieur du triangle : ici la courbure est concentrée sur le cercle.

Rappelons-nous que pour construire la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n , on commence par définir la mesure des parallélépipèdes, puis on définit la mesure d'un ensemble quelconque en l'approchant par une union de parallélépipèdes disjoints. De la même façon, on peut espérer construire une mesure de courbure sur la surface, en approchant n'importe quel ensemble par une union de triangles disjoints. On a seulement besoin d'avoir une condition de finitude de cette mesure, c'est la deuxième définition des surfaces d'Alexandrov :

Définition 2.6 (Surfaces d'Alexandrov, deuxième définition. Voir [Res93]). Une métrique d sur Σ est d'Alexandrov si :

1. d est une métrique intrinsèque sur Σ ;
2. d est compatible avec la topologie de Σ ;
3. Pour tout $x \in \Sigma$, il existe un voisinage U , homéomorphe à un disque ouvert, et une constante $M(U) < \infty$ tel que pour tout ensemble fini $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ de triangles simples d'intérieurs disjoints (cette condition est expliquée ci-dessous) contenus dans U on a l'inégalité

$$\sum_{i \in I} |\bar{\delta}(\mathcal{T}_i)| \leq M(U). \quad (2.6)$$

Remarque 2.7. De façon assez surprenante, on obtient une définition équivalente en remplaçant la condition (2.6) par la condition plus faible

$$\sum_{i \in I} \bar{\delta}(\mathcal{T}_i) \leq M(U).$$

La notion de triangle *simple* est une condition technique, qui ne sera pas utilisée dans la suite. Un triangle est *simple* s'il borde un domaine homéomorphe à un disque fermé (on peut alors parler de *l'intérieur du triangle*), et si, pour tous points Z et T sur les côtés du triangle, une courbe à l'extérieur du triangle joignant Z à T est de longueur plus grande que la courbe passant par les côtés « enveloppés » par la courbe (voir la figure suivante).

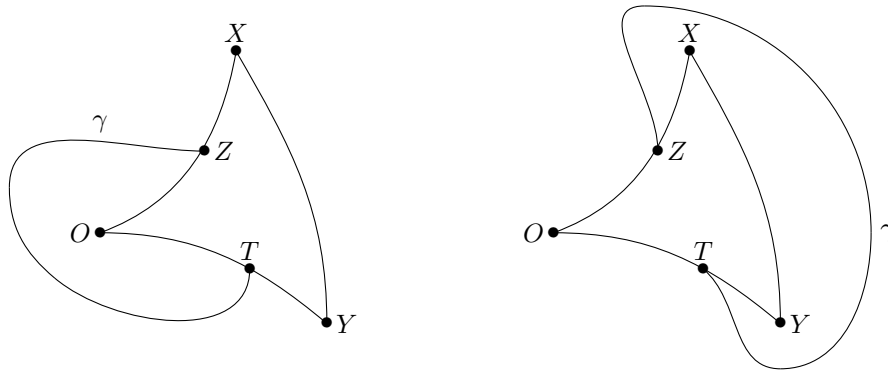


FIGURE 2.8 – Dans la situation de gauche, la longueur de la courbe γ doit être supérieure à $d(O, Z) + d(O, T)$; dans la situation de droite, elle doit être supérieure à $d(Z, X) + d(X, Y) + d(Y, T)$.

Exemple 2.8. *Il est facile de se convaincre que les triangles Euclidiens dans le plan sont simples.*

Au contraire, considérons sur la sphère ronde \mathbb{S}^2 un triangle équilatéral $\mathcal{T} = ABC$, dont les côtés sont de longueur $\pi/2$ (ce triangle recouvre $1/8^{\text{ème}}$ de la surface de la sphère). Soit γ la géodésique joignant A au milieu de $[BC]$, noté Z .

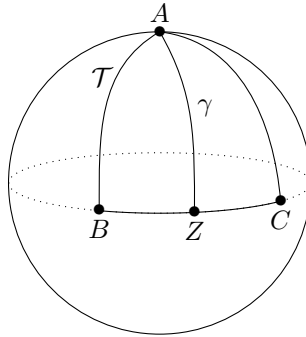


FIGURE 2.9

Considérons alors la portion de sphère constituée des $7/8^{\text{ème}}$ restant. Ce domaine est homéomorphe à un disque fermé, et le bord de ce domaine est le triangle \mathcal{T} . Dans cette représentation, la courbe γ est hors du triangle (comme dans la figure 2.8). Pourtant, sa longueur est de $\pi/2$, alors que la longueur des courbes passant par les côtés du triangle est $> \pi/2$: le triangle \mathcal{T} n'est donc pas simple.

On peut construire la mesure de courbure d'une surface d'Alexandrov de la façon suivante (voir [AZ67]) : si $U \subset \Sigma$ est ouvert on pose

$$\omega^+(U) = \sup \sum_{i \in I} \bar{\delta}(\mathcal{T}_i)^+, \text{ et } \omega^-(U) = \sup \sum_{i \in I} \bar{\delta}(\mathcal{T}_i)^-,$$

où les bornes supérieures sont prises sur les ensembles de triangles simples d'intérieurs disjoints \mathcal{T}_i contenus dans U . Pour un ensemble quelconque $A \subset \Sigma$ on pose

$$\omega^+(A) := \inf_{\text{ouverts } U \supset A} \omega^+(U), \text{ et } \omega^-(A) := \inf_{\text{ouverts } U \supset A} \omega^-(U).$$

Comme les surfaces d’Alexandrov vérifient la condition 3 de la définition 2.6, toutes les quantités ainsi définies sont finies. On pose finalement, pour tout ensemble $A \subset \Sigma$:

$$\omega(A) = \omega^+(A) - \omega^-(A).$$

La mesure ω ainsi définie est une mesure de Radon. Dans le cas d’une métrique riemannienne, la construction précédente donne les mesures de courbures suivantes :

$$\omega^+ = K^+ d\mathcal{A}, \quad \omega^- = K^- d\mathcal{A} \text{ et } \omega = K d\mathcal{A}.$$

Remarque 2.9. *Reshetnyak montre dans [Res93] que sur une surface d’Alexandrov, l’angle entre deux géodésiques existe toujours. On n’a donc pas besoin de considérer des limites supérieures pour définir les angles et les excès des triangles, et on peut partout remplacer les quantités $\bar{\delta}(\mathcal{T})$ par $\delta(\mathcal{T}) = a + b + c - \pi$, où a, b, c sont les angles en les sommets A, B, C du triangle \mathcal{T} .*

Terminons cette définition géométrique par une remarque, qui peut paraître assez étonnante : la mesure de courbure ainsi construite ne vérifie pas forcément la formule de Gauß-Bonnet pour les triangles (bordant un domaine homéomorphe à un disque fermé).

Rappelons que, dans le cas riemannien, cette formule est une conséquence de la formule plus générale suivante. Si g est une métrique riemannienne sur Σ , et U un ouvert homéomorphe à un disque ouvert, dont la frontière est une courbe γ , lisse sauf en un nombre fini de points où les angles intérieurs sont θ_i , on a

$$2\pi = \int_U K d\mathcal{A} + \int_\gamma \kappa ds + \sum_i (\pi - \theta_i), \quad (2.7)$$

où κ est la courbure géodésique de la courbe γ (voir par exemple [Ber03]).

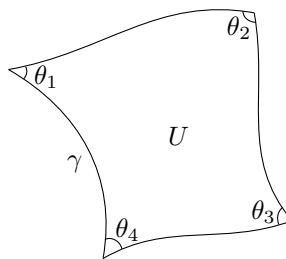


FIGURE 2.10

Pour un triangle géodésique \mathcal{T} on a $\kappa \equiv 0$, et la courbe comporte trois points anguleux, ce qui donne bien la formule

$$\int_{\mathcal{T}} K d\mathcal{A} = \text{somme des angles} - \pi.$$

On remarque qu’ici il faut, en toute rigueur, intégrer sur *l’intérieur* du triangle pour obtenir la formule de Gauß-Bonnet (ceci ne change rien dans le cas d’une métrique riemannienne, car le bord du triangle est de mesure nulle).

Considérons maintenant la surface à singularité conique de la figure 2.2, et le triangle géodésique ABC suivant :

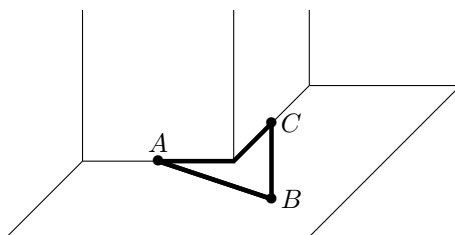


FIGURE 2.11

Dans le triangle, la somme des angles est $< \pi$, alors que la courbure de l'intérieur du triangle est $\omega(\overset{\circ}{\mathcal{T}}) = 0$: on a donc

$$\omega(\overset{\circ}{\mathcal{T}}) > \text{somme des angles} - \pi.$$

Sur les surfaces d'Alexandrov, une formule de Gauß-Bonnet analogue à la formule (2.7) est bien vérifiée, mais il faut remplacer la courbure géodésique de la courbe γ par sa *courbure géodésique intérieure*, obtenue en approchant la courbe par des polygones à l'intérieur du domaine. En l'approchant par des polygones extérieurs au domaine, on définit également une notion de *courbure géodésique extérieure*. On pourra consulter [AZ67], chapitres 5 et 6, pour plus de détails sur ces constructions. La seule chose que l'on peut dire sur la *courbure géodésique intérieure* d'une géodésique est qu'elle est négative ou nulle ; ceci permet de montrer que pour un triangle géodésique \mathcal{T} on a toujours l'inégalité

$$\omega(\overset{\circ}{\mathcal{T}}) \geq \text{somme des angles} - \pi.$$

Remarque 2.10. Cette définition à l'aide de triangles dans des espaces métriques rappelle la notion (mieux connue) de surface à courbure majorée (ou minorée) au sens d'Alexandrov (voir par exemple [BBI01]). Le lien entre les deux notions est la suivante : une surface à courbure majorée (ou minorée) par κ au sens d'Alexandrov est une surface d'Alexandrov (au sens de ce manuscrit), et vérifie $\omega \leq \kappa \cdot d\mathcal{A}$ (resp., $\omega \geq \kappa \cdot d\mathcal{A}$). Et réciproquement, une surface d'Alexandrov vérifiant $\omega \leq \kappa \cdot d\mathcal{A}$ (resp., $\omega \geq \kappa \cdot d\mathcal{A}$) pour une constante $\kappa \in \mathbb{R}$ est une surface à courbure majorée (resp., minorée) par κ au sens d'Alexandrov.

2.2.3 Troisième définition : analytique

On va donner un sens à la phrase suivante : *sur une surface, une métrique est d'Alexandrov s'il existe des coordonnées conformes au voisinage de tout point.*

Notations

Pour $r > 0$ on pose

$$D(r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\},$$

et

$$\overline{D}(r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}.$$

Si ν est une mesure de Radon (signée) à support dans $\overline{D}(1/2)$ on note

$$V[\nu](z) := \iint_{\mathbb{C}} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln |z - \xi| d\nu(\xi)$$

le potentiel de ν . Par définition, $V[\nu]$ est défini pour presque tout $z \in \mathbb{C}$, on a $V[\nu] \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$, et

$$\Delta V[\omega] = \omega \text{ au sens faible,}$$

c'est-à-dire

$$\iint_{\mathbb{C}} V[\omega] \Delta \varphi d\lambda = \iint_{\mathbb{C}} \varphi d\omega$$

pour toute fonction lisse $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact (on note $d\lambda(z)$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C}).

Dans la suite on se servira très souvent de l'ouvert $D(1/2)$, pour la raison suivante : si $z, \xi \in D(1/2)$, on a $\ln |z - \xi| \leq 0$, et donc si ν est une mesure positive on a $V[\nu](z) \geq 0$ pour presque tout $z \in D(1/2)$. Si ν est une mesure signée, on peut donc faire sa décomposition de Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$ pour écrire

$$-V[\nu^-](z) \leq V[\nu](z) \leq V[\nu^+](z)$$

pour presque tout $z \in D(1/2)$. Ces inégalités seront très souvent utilisées dans la suite. On peut remarquer qu'en considérant par exemple le disque unité $D(1)$ à la place de $D(1/2)$, la situation n'est pas aussi simple.

Cas d'une métrique riemannienne

Considérons une métrique riemannienne (lisse) g , et des coordonnées conformes locales telles que $g = e^{2u} |dz|^2$. On rappelle que la courbure de Gauß et la forme d'aire de la métrique sont respectivement

$$K = e^{-2u} \Delta u \text{ et } d\mathcal{A} = e^{2u} d\lambda(z)$$

La mesure de courbure est donc

$$\omega = K d\mathcal{A} = \Delta u \cdot d\lambda(z).$$

Soit $h := u - V[\omega]$: par définition, h est harmonique sur \mathbb{C} , et on peut donc écrire

$$g = e^{2V[\omega] + 2h} |dz|^2. \tag{2.8}$$

Ainsi, l'expression locale de la métrique comporte un terme qui dépend (de façon explicite) de la mesure de courbure, et un terme harmonique.

La formule (2.8) permet de passer naturellement du cas riemannien (ω absolument continu par rapport à la mesure d'aire, i.e. $\omega = K d\mathcal{A}$) au cas singulier (ω est une mesure de Radon quelconque).

Cas d'une métrique singulière

Considérons une mesure de Radon ω , à support dans $\overline{D}(1/2)$, et une fonction harmonique h sur $D(1/2)$. Considérons la métrique riemannienne (singulière) suivante sur $D(1/2)$:

$$g_{\omega,h} = e^{2V[\omega](z)+2h(z)}|dz|^2.$$

Comme en géométrie riemannienne classique, cette métrique (singulière) permet de mesurer la longueur des courbes. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow D(1/2)$ une courbe simple (i.e., injective) et continue, paramétrée à vitesse constante v (i.e., la longueur Euclidienne de la courbe $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ est $v \cdot (t_2 - t_1)$ pour tous $t_1 \leq t_2$). On définit la longueur de γ pour la métrique riemannienne singulière $g_{\omega,h}$ par

$$L_{\omega,h}(\gamma) := \int_0^1 e^{V[\omega](\gamma(t))+h(\gamma(t))} v \cdot dt.$$

On a utilisé des courbes paramétrées à vitesse constante pour éviter de parler de différentiabilité, et on a donc écrit $v \cdot dt$ à la place de $|\gamma'(t)|dt$. On sait par ailleurs que ce n'est pas restrictif : on peut toujours (re-)paramétriser une courbe continue injective afin qu'elle soit à vitesse constante.

La quantité $V[\omega](z)$ étant seulement définie pour presque tout $z \in \mathbb{C}$, il n'est pas évident que $V[\omega](\gamma(t))$ soit défini pour presque tout $t \in [0, 1]$. C'est pourtant le cas : ceci provient du fait que $V[\omega]$ est la différence de deux fonctions sous-harmoniques (voir [Res93], p.99).

On pose finalement

$$d_{\omega,h}(z, z') := \inf \{L_{\omega,h}(\gamma)\} \in [0, \infty],$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les courbes simples continues $\gamma : [0, 1] \rightarrow D(1/2)$, paramétrées à vitesse constante, avec $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = z'$.

Remarque 2.11. *Pour énoncer le théorème de convergence local dû à Y. Reshetnyak (théorème 2.20), qui joue un rôle central dans ce manuscrit, on a besoin de la définition suivante : si $z, z' \in D(1/2)$, on pose*

$$\overline{d}_{\omega,0}(z, z') := \inf \{L_{\omega,0}(\gamma)\} \tag{2.9}$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les courbes simples continues $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{D}(1/2)$, paramétrées à vitesse constante, avec $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = z'$. La différence avec $d_{\omega,0}(z, z')$ est que les courbes peuvent rencontrer $\partial D(1/2)$. Ce détail technique sera seulement utilisé dans la preuve du corollaire 5.12 ; à tout autre moment dans le manuscrit, on considèrera $d_{\omega,h}$, et non $\overline{d}_{\omega,0}$.

Il est immédiat que $d_{\omega,h}$ vérifie tous les axiomes d'une distance, sauf que l'on peut avoir $d_{\omega,h}(z, z') = +\infty$. Une condition suffisante pour que $d_{\omega,h}$ soit une distance est de ne pas avoir de cusp, c'est-à-dire de point z vérifiant $\omega(\{z\}) = 2\pi$ (voir par exemple [Tro09], proposition 5.3) :

Proposition 2.12. *Si pour tout $z \in D(1/2)$ on a $\omega^+(\{z\}) < 2\pi$, alors $d_{\omega,h}$ est une distance sur $D(1/2)$.*

Remarque 2.13. Si $z_0 \in D(1/2)$ est un cusp, i.e. $\omega^+(\{z_0\}) = 2\pi$, alors z_0 peut être un point à l'infini, c'est-à-dire à distance infinie de tous les autres points $z \in D(1/2)$. La topologie définie par la distance n'est alors plus la topologie usuelle de $D(1/2)$.

Par exemple, si $\omega = 2\pi\delta_0$ (δ_0 est la masse de Dirac en $0 \in \mathbb{C}$) et $h = 0$, alors $g_{\omega,h} = |z|^{-2}|dz|^2$, et on peut montrer facilement que $d_{\omega,h}(0,z) = \infty$ pour tout $z \neq 0$ (cette métrique correspond au cas limite d'un cône d'angle $\theta = 0$).

La proposition suivante est due à Y. Reshetnyak, voir [Res93], théorème 7.1.1 :

Proposition 2.14. S'il n'y a pas de cusp (i.e. $\omega(\{z\}) < 2\pi$ pour tout $z \in D(1/2)$), alors la distance $d_{\omega,h}$ est compatible avec la topologie usuelle de $D(1/2)$, et $(D(1/2), d_{\omega,h})$ est une surface d'Alexandrov (la définition des surfaces d'Alexandrov n'a été donnée que dans le cas de surfaces fermées, mais cette définition s'étend sans difficulté aux autres cas).

Dans la suite, on supposera toujours que les métriques n'ont pas de cusp. C'est le cas pour des métriques riemanniennes à singularités coniques d'angles $\theta_i > 0$ (les seuls atomes de la mesure de courbure sont les points coniques p_i , et on a $\omega(\{p_i\}) = 2\pi - \theta_i$). Dans le Théorème Principal, l'hypothèse 1. empêchera des cusps d'apparaître sur la métrique limite.

Les surfaces d'Alexandrov admettent des coordonnées locales, au sens suivant :

Théorème-Définition 2.15 ([Res01], théorème 4). Soit (Σ, d) une surface d'Alexandrov, sans cusp, et soit U un ouvert, homéomorphe à un disque ouvert, tel que \bar{U} est homéomorphe à un disque fermé. Il existe alors une fonction H , une mesure ω_H , définie sur $D(1/2)$, et une fonction harmonique h sur $D(1/2)$ telle que

$$H : (U, d|_U) \rightarrow (D(1/2), d_{\omega_H, h})$$

est une isométrie (rappelons que $d|_U$ est la distance de longueur induite par d sur U , voir la partie 1.1). Une telle fonction H est appelée une carte conforme.

De plus, la mesure ω_H est définie par $\omega_H = H_{\#}\omega$ (ω est la mesure de courbure standard de la surface d'Alexandrov Σ) : pour tout ensemble de Borel $A \subset D(1/2)$ on a $\omega_H(A) = \omega(H^{-1}(A))$. L'aire de tout ensemble de Borel $A \subset U$ s'écrit

$$\text{aire}(A) = \int_{H(A)} e^{2V[\omega_H](z) + 2h(z)} d\lambda(z).$$

Exemple 2.16. Par définition, la mesure de courbure d'une métrique à singularités coniques p_1, \dots, p_n (de courbure k_1, \dots, k_n) s'écrit

$$\omega = K d\mathcal{A} + \sum_{i=1}^n k_i \delta_{p_i}.$$

Ainsi, au voisinage de chaque point conique p_i , il existe des coordonnées locales (conformes) $z \in D(1/2)$ telles que la métrique (singulière) g s'écrit

$$g = |z|^{2\beta_i} e^{2u_i(z)} |dz|^2,$$

où $\beta_i := -k_i/2\pi > -1$, et $u_i \in L^1_{loc}(D(1/2))$ est tel que $\Delta u_i \in L^1_{loc}(D(1/2))$ au sens faible.

Ce théorème d'existence de coordonnées conformes jouera un rôle fondamental dans la preuve du Théorème Principal, car la première étape de la démonstration consistera à recouvrir la surface par de telles cartes. Notamment, l'hypothèse sur l'ouvert U (« U homéomorphe à un disque ouvert et \bar{U} homéomorphe à un disque fermé ») aura son importance pour la recherche des hypothèses adéquates (voir la partie 4.2 et la remarque après la définition 4.3).

Le théorème suivant montre que, comme dans le cas de métriques riemanniennes lisses (voir la deuxième partie de la proposition 1.7), les fonctions de transition entre deux cartes conformes sont des fonctions conformes :

Proposition 2.17. *Soit (Σ, d) une surface d'Alexandrov, et U, V deux ouverts, tels que $U \cap V \neq \emptyset$ et tels qu'il existe deux cartes conformes*

$$H_U : U \rightarrow D(1/2) \text{ et } H_V : V \rightarrow D(1/2).$$

Alors l'application

$$\Psi = H_U \circ H_V^{-1} : H_V(U \cap V) \rightarrow H_U(U \cap V)$$

est une bijection conforme (i.e., holomorphe ou anti-holomorphe) entre ouverts de \mathbb{C} . De plus, si la métrique (singulière) s'écrit $g = e^{2u}|dz|^2$ dans la carte H_U , et $g = e^{2v}|dz|^2$ dans la carte H_V , alors

$$e^{2v(z)} = e^{2u(\Psi(z))} |\Psi'(z)|^2 \quad (2.10)$$

(si $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$, on a posé

$$|\Psi'(z)|^2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)^2 \right),$$

c'est-à-dire $|\Psi'(z)|^2 = \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|^2$ si Ψ est holomorphe, et $|\Psi'(z)|^2 = \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right|^2$ si Ψ est anti-holomorphe.)

Les deux dernières propositions montrent que toute surface d'Alexandrov admet naturellement une structure de surface de Riemann. On rappelle la définition :

Définition 2.18. *Une surface de Riemann est une surface (pour simplifier, fermée) Σ , munie d'un atlas de cartes $H_i : U_i \rightarrow D(1/2)$, telle que pour tous les ouverts U_i et U_j vérifiant $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, les fonctions de transition $H_i \circ H_j^{-1}$ et $H_j \circ H_i^{-1}$ (définies entre ouverts de \mathbb{C}) sont conformes.*

Une différentielle quadratique ds^2 sur la surface de Riemann Σ est la donnée, pour toute carte H dans l'atlas, d'une différentielle quadratique sur \mathbb{C} : $ds^2 = e^{2u}|dz|^2$, telle que les différentielles quadratiques correspondant à deux cartes H_U et H_V , telles que $U \cap V \neq \emptyset$, vérifient la formule (2.10).

On peut alors énoncer la troisième définition des surfaces d'Alexandrov : ce sont les surfaces de Riemann, munies d'une différentielle quadratique ayant une forme particulière permettant de définir une distance. Cette définition explique la phrase présentée au début de cette partie : *une métrique est d'Alexandrov s'il existe des coordonnées conformes au voisinage de tout point.*

Définition 2.19 (Surfaces d’Alexandrov, troisième définition. Voir [Res93], théorème 7.1.4). *Une surface d’Alexandrov est une surface de Riemann Σ munie d’une différentielle quadratique ds^2 telle que dans toute carte de l’atlas $H : U \rightarrow H(U) \subset \mathbb{C}$, la différentielle quadratique s’écrit $ds^2 = e^{2V[\omega]+2h}|dz|^2$, où ω est une mesure de Radon à support compact dans \mathbb{C} et h est une fonction harmonique.*

On peut alors définir la distance associée à la différentielle quadratique ds^2 : il s’agit de l’unique métrique intrinsèque d vérifiant la propriété suivante. Pour toute carte $H : U \rightarrow D(1/2)$ et tout $x \in U$, il existe $V \subset U$, un voisinage de x , tel que pour tous $p_1, p_2 \in V$ on ait

$$d(p_1, p_2) = d_{\omega, h}(H(p_1), H(p_2)),$$

où ω et h sont tels que la différentielle quadratique ds^2 s’écrit $e^{2V[\omega]+2h}|dz|^2$ dans la carte H , et $d_{\omega, h}$ est la métrique présentée dans les deux pages précédentes.

2.3 Le théorème de convergence local de Y. Reshetnyak

Rappelons que, localement, la métrique est induite par une métrique riemannienne singulière $g_{\omega, h} = e^{2V[\omega]+2h}|dz|^2$ (voir le théorème-définition 2.15). L’expression (locale) de la métrique comporte donc un terme potentiel, et un terme harmonique.

Le théorème suivant joue un rôle fondamental dans la suite. De façon heuristique, si en coordonnées locales on oublie le terme harmonique (i.e. $h = 0$), il suffit que la mesure de courbure converge pour que les distances convergent. Comme signalé précédemment, pour énoncer ce théorème il faut utiliser les distances $\bar{d}_{\omega, 0}$ introduites dans la remarque 2.11.

Théorème 2.20 (Y. Reshetnyak [Res93], théorème 7.3.1). *Soient ω_m^+ et ω_m^- des mesures de Radons positives, à support dans $\bar{D}(1/2)$, faiblement convergentes vers des mesures ω^+ et ω^- . Soit $\omega_m := \omega_m^+ - \omega_m^-$ et $\omega := \omega^+ - \omega^-$. On a alors*

$$\bar{d}_{\omega_m, 0} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \bar{d}_{\omega, 0},$$

uniformément sur tout ensemble $A \subset \bar{D}(1/2)$ ne contenant pas de cusp (i.e. $\omega^+(\{z\}) < 2\pi$ pour tout $z \in A$). C’est-à-dire, si $z_m \rightarrow z$ et $z'_m \rightarrow z'$, avec $\omega^+(\{z\}) < 2\pi$ et $\omega^+(\{z'\}) < 2\pi$, alors $\bar{d}_{\omega_m, 0}(z_m, z'_m) \rightarrow \bar{d}_{\omega, 0}(z, z')$.

Pour démontrer le Théorème Principal, une grosse partie du travail sera de contrôler le terme harmonique local, afin de se rapprocher du cas $h = 0$, et pouvoir ainsi appliquer ce théorème de convergence local. Plus précisément, on majorera le terme harmonique sur tout compact de $D(1/2)$ (partie 5.2).

2.4 Une surface qui n’est pas une surface d’Alexandrov

On a déjà fait remarquer que la notion de surface singulière étudiée ici englobe quasiment toutes les surfaces « raisonnables » que l’on peut imaginer. On peut alors se poser la

Question 2.21. *Existe-t-il une surface qui ne soit pas d'Alexandrov ?*

La réponse est affirmative. Considérons le plan Euclidien \mathbb{R}^2 , muni de la *distance Manhattan* :

$$d(x, y) := \|x - y\|_\infty.$$

Cette distance est intrinsèque, et est compatible avec la topologie de \mathbb{R}^2 . On a tracé dans la figure suivante quelques géodésiques minimisantes :

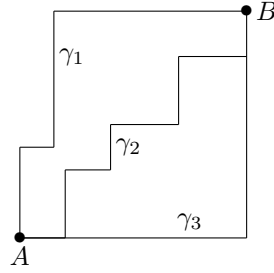


FIGURE 2.12 – γ_1 , γ_2 et γ_3 sont trois géodésiques minimisantes entre A et B .

Considérons le triangle suivant $\mathcal{T} = ABC$:

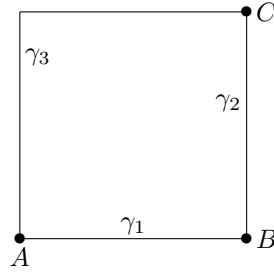


FIGURE 2.13

Il est facile de vérifier que ce triangle est simple : la longueur de toute courbe sortant du triangle est nécessairement plus longue que la longueur des côtés « enveloppés » par la courbe. Les angles en A , en B et en C sont les mêmes, et donc pour calculer l'excès de ce triangle il suffit de savoir calculer l'angle entre les deux géodésiques γ_1 et γ_2 suivantes :

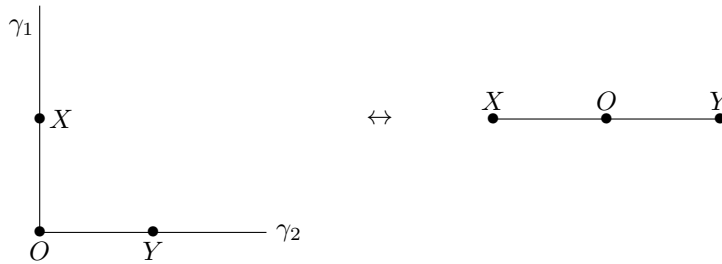


FIGURE 2.14 – On a $d(X, Y) = d(O, X) + d(O, Y)$, donc le triangle de comparaison Euclidien (à droite) est plat.

L'angle entre les deux géodésiques en O est π : sachant que $d(X, Y) = d(O, X) + d(O, Y)$, il suffit d'appliquer la formule (2.5), ou de remarquer que le triangle de comparaison Euclidien est plat. L'excès du triangle \mathcal{T} présenté dans la Figure 2.13 est donc $3\pi - \pi = 2\pi$.

L'excès du triangle \mathcal{T} est donc strictement positif, et *ne dépend pas de sa taille* : l'inégalité (2.6) de la définition 2.6 ne peut donc pas être vérifiée, car tout ouvert contient un nombre arbitrairement grand de tels triangles disjoints. A l'aide de cette métrique, il est facile d'adapter la construction pour définir une surface *compacte* ne vérifiant pas non plus les conditions de la définition 2.6.

2.5 Deux résultats qui seront utiles dans la suite

2.5.1 Volume des boules

En géométrie riemannienne, l'un des (nombreux) intérêts d'avoir un contrôle sur la courbure est d'obtenir des informations sur le volume des boules : on a notamment énoncé le théorème de Bishop-Gromov dans la partie 1.2.1.

On souhaiterait avoir un résultat du même type, dans le cas des surfaces d'Alexandrov. Il est alors pertinent de demander un contrôle de la mesure de courbure, et non plus de la courbure de Gauß. Une manière de procéder est de vérifier qu'un tel résultat est valable en géométrie riemannienne classique, puis d'approximer les surfaces d'Alexandrov par des surfaces riemanniennes lisses.

On rappelle que dans le cas d'une métrique riemannienne lisse, on a $\omega^+ = K^+ d\mathcal{A}$ et $\omega^- = K^- d\mathcal{A}$; de plus, il est clair qu'une borne supérieure sur la mesure de courbure est équivalente à une borne supérieure sur ω^+ , et une borne inférieure sur la mesure de courbure est équivalente à une borne supérieure sur ω^- . T. Shioya [Shi99] a démontré le résultat suivant :

Théorème 2.22. *Soit (Σ, g) une surface riemannienne fermée, et soit $x \in \Sigma$.*

1. *Pour tout $r > 0$ on a*

$$\text{aire}(B(x, r)) \leq (2\pi + \omega^-(B(x, r))) r^2/2,$$

où

$$\omega^-(B(x, r)) = \int_{B(x, r)} K^- d\mathcal{A}$$

est la partie négative de courbure de $B(x, r)$.

2. *Soit $r > 0$ tel que pour tout $s < r$, $B(x, s)$ est homéomorphe à un disque ouvert. Alors*

$$\text{aire}(B(x, r)) \geq (2\pi - \omega^+(B(x, r))) r^2/2,$$

où

$$\omega^+(B(x, r)) = \int_{B(x, r)} K^+ d\mathcal{A}$$

est la partie positive de courbure de $B(x, r)$.

Remarque 2.23. *L'hypothèse supplémentaire dans la deuxième assertion est nécessaire pour obtenir une borne inférieure sur l'aire, à l'aide d'une borne supérieure sur ω^+ . En effet, sur des cylindres de rayons de plus en plus petits, l'aire des boules de rayon r tends vers zéro, tout en ayant une courbure $\omega^+ \equiv 0$.*

On va montrer le

Corollaire 2.24. *Soit (Σ, d) une surface d'Alexandrov, et soit $x \in \Sigma$.*

1. *Pour tout $r > 0$ on a*

$$\text{aire}(B(x, r)) \leq (2\pi + \omega^-(B(x, r))) r^2/2.$$

2. *Soit $r > 0$ tel que pour tout $s < r$, $B(x, s)$ est homéomorphe à un disque ouvert.*

Alors

$$\text{aire}(B(x, r)) \geq (2\pi - \omega^+(B(x, r))) r^2/32.$$

La preuve se déroule en approximant la métrique d'Alexandrov d par des métriques lisses d_{g_m} . Une difficulté provient du fait qu'on ne peut pas directement appliquer le théorème 2.22 : rien ne nous assure en effet que les boules $B_m(x, s)$, pour $s < r$, sont homéomorphes à des disques ouverts. Cette propriété est en fait vraie si on remplace r par $r/4$ (voir la preuve ci-dessous), et on peut donc appliquer le théorème 2.22 avec $r/4$. Ceci explique que le terme $r^2/2$ soit remplacé par $r^2/32$ dans la propriété 2. La borne obtenue n'est probablement pas optimale, mais elle suffit largement pour notre étude.

Exemple 2.25. *Considérons un cône Euclidien, de sommet x et d'angle θ . La mesure de courbure est $\omega = (2\pi - \theta)\delta_x$, où δ_x est la masse de Dirac en x . On a*

$$2\pi + \omega^-(B(x, r)) = 2\pi + \max(\theta - 2\pi, 0) = \max(\theta, 2\pi),$$

et

$$2\pi - \omega^+(B(x, r)) = 2\pi - \max(2\pi - \theta, 0) = 2\pi + \min(\theta - 2\pi, 0) = \min(\theta, 2\pi).$$

On a donc

$$2\pi - \omega^+(B(x, r)) \leq \theta \leq 2\pi + \omega^-(B(x, r)),$$

et comme l'aire de $B(x, r)$ est $\theta r^2/2$ on a bien

$$(2\pi - \omega^+(B(x, r))) r^2/2 \leq \text{aire}(B(x, r)) \leq (2\pi + \omega^-(B(x, r))) r^2/2.$$

Pour la preuve du corollaire 2.24, on a besoin du (très classique) lemme suivant :

Lemme 2.26. *Soit U un ouvert de Σ , et $K \subset U$ un compact. Soit μ_m une suite de mesures de Radon positives sur Σ , avec $\mu_m \rightarrow \mu$ faiblement. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour m assez grand on a*

$$(1) \mu(K) < \mu_m(U) + \varepsilon$$

et

$$(2) \mu_m(K) < \mu(U) + \varepsilon.$$

Démonstration. D'après le lemme d'Urysohn, on sait qu'il existe une fonction lisse $\varphi : \Sigma \rightarrow [0, 1]$, vérifiant $\varphi \equiv 1$ sur K et à support dans U . Pour m assez grand on a $|\int_{\Sigma} \varphi d\mu - \int_{\Sigma} \varphi d\mu_m| < \varepsilon$, et donc

$$\mu(K) \leq \int_{\Sigma} \varphi d\mu < \int_{\Sigma} \varphi d\mu_m + \varepsilon \leq \mu_m(U) + \varepsilon,$$

et

$$\mu_m(K) \leq \int_{\Sigma} \varphi d\mu_m < \int_{\Sigma} \varphi d\mu + \varepsilon \leq \mu(U) + \varepsilon.$$

□

Démonstration du corollaire 2.24. Soit g_m une suite de métriques riemanniennes sur Σ telle que, quand m tend vers l'infini, $d_m := d_{g_m} \rightarrow d$ uniformément. On sait alors que les mesures d'aire $d\mathcal{A}_m$ et de courbure ω_m de (Σ, d_m) convergent vers les mesures d'aire $d\mathcal{A}$ et de courbure ω de (Σ, d) (voir [Res93], théorèmes 8.1.9 et 8.4.3). Par contre, si on écrit les décompositions de Jordan $\omega_m = \omega_m^+ - \omega_m^-$ et $\omega = \omega^+ - \omega^-$, on n'a pas nécessairement $\omega_m^+ \rightarrow \omega^+$ et $\omega_m^- \rightarrow \omega^-$. Mais il est possible de choisir une suite de métriques riemanniennes g_m vérifiant ces propriétés; voir [AZ67] et [Res93].

Démonstration du 1. On remarque que $\cup_{\varepsilon>0} \overline{B}(x, r - \varepsilon) = B(x, r)$, on a donc

$$\text{aire}(B(x, r)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{aire}(\overline{B}(x, r - \varepsilon)).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On utilise le lemme 2.26 : on sait que pour m assez grand on a

$$\text{aire}(\overline{B}(x, r - \varepsilon)) < \text{aire}_m(B(x, r - 3\varepsilon/4)) + \varepsilon,$$

et avec $B(x, r - 3\varepsilon/4) \subset B_m(x, r - \varepsilon/2)$ (pour m assez grand) on obtient

$$\text{aire}(\overline{B}(x, r - \varepsilon)) < \text{aire}_m(B_m(x, r - \varepsilon/2)) + \varepsilon.$$

On peut utiliser le théorème 2.22, avec $r - \varepsilon/2$, pour obtenir

$$\text{aire}(\overline{B}(x, r - \varepsilon)) \leq (2\pi + \omega_m^-(B_m(x, r - \varepsilon/2)))(r - \varepsilon/2)^2/2 + \varepsilon,$$

et comme $B_m(x, r - \varepsilon/2) \subset B(x, r - \varepsilon/4)$ pour m assez grand, on obtient

$$\begin{aligned} \text{aire}(\overline{B}(x, r - \varepsilon)) &\leq (2\pi + \omega_m^-(B(x, r - \varepsilon/4)))(r - \varepsilon/2)^2/2 + \varepsilon \\ &\leq (2\pi + \omega_m^-(B(x, r - \varepsilon/4)))r^2/2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

En utilisant encore le lemme 2.26, pour m assez grand on a

$$\omega_m^-(B(x, r - \varepsilon/4)) \leq \omega^-(B(x, r)) + \varepsilon,$$

et donc

$$\text{aire}(\overline{B}(x, r - \varepsilon)) \leq (2\pi + \omega^-(B(x, r)) + \varepsilon)r^2/2 + \varepsilon,$$

et en faisant tendre ε vers zero cela termine la preuve.

Démonstration du 2. La propriété est clairement vérifiée si $\omega^+(B(x, r)) \geq 2\pi$, donc on suppose $\omega^+(B(x, r)) < 2\pi$. Comme signalé précédemment, on ne peut pas directement appliquer le théorème 2.22. Soit $y \in B(x, r)$ vérifiant $d(x, y) = r/2$. On a alors

$$B(x, r/4) \cap B(y, r/4) = \emptyset,$$

et

$$B(x, r/4) \cup B(y, r/4) \subset B(x, r).$$

Comme $\omega^+(B(x, r)) < 2\pi$, on a alors $\omega^+(B(x, r/4)) < \pi$, ou $\omega^+(B(y, r/4)) < \pi$. Notons z ($z = x$ ou y) un point vérifiant

$$\omega^+(B(z, r/4)) < \pi. \quad (2.11)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour m assez grand on a

$$\overline{B}_m(z, r/4 - \varepsilon) \subset B(z, r/4 - \varepsilon/2), \quad (2.12)$$

et par le lemme 2.26 et l'équation (2.11) on a aussi

$$\omega_m^+(B(z, r/4 - \varepsilon/2)) < \pi. \quad (2.13)$$

On va utiliser le lemme suivant, qui sera démontré plus loin (voir la proposition 4.24) et dont la preuve est assez élémentaire (elle repose sur une application de la formule de Gauß-Bonnet pour un domaine dont le bord est un lacet géodésique). L'énoncé est le suivant :

Lemme 2.27. *Soit U un ouvert d'une surface riemannienne (M, g) , homéomorphe à un disque ouvert, et $x \in U$ vérifiant $\omega^+(U - \{x\}) = \int_{U - \{x\}} K^+ d\mathcal{A} < \pi$. Si $\overline{B}(x, r) \subset U$, alors pour tout $s \leq r$, $B(x, s)$ est homéomorphe à un disque ouvert.*

Soit $U := B(z, r/4 - \varepsilon/2)$. U est homéomorphe à un disque ouvert, et on a $\omega_m^+(U - \{z\}) \leq \omega_m^+(U) < \pi$ et $\overline{B}_m(z, r/4 - \varepsilon) \subset U$. On peut appliquer le lemme pour obtenir :

pour tout $s < r/4 - \varepsilon$, $B_m(x, s)$ est homéomorphe à un disque ouvert.

On peut alors utiliser le théorème 2.22, pour la métrique d_m , au point z et pour le rayon $r/4 - \varepsilon$: pour m assez grand on a

$$\text{aire}_m(B_m(z, r/4 - \varepsilon)) \geq (2\pi - \omega_m^+(B_m(z, r/4 - \varepsilon)))(r/4 - \varepsilon)^2/2. \quad (2.14)$$

Pour m assez grand on a aussi

$$B_m(z, r/4 - \varepsilon) \subset B(x, r - \varepsilon),$$

et par le lemme 2.26 on a également

$$\begin{cases} \text{aire}(B(x, r)) \geq \text{aire}_m(B(x, r - \varepsilon)) - \varepsilon \\ \omega^+(B(x, r)) \geq \omega_m^+(B(x, r - \varepsilon)) - \varepsilon, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \text{aire}(B(x, r)) \geq \text{aire}_m(B_m(z, r/4 - \varepsilon)) - \varepsilon \\ \omega^+(B(x, r)) \geq \omega_m^+(B_m(z, r/4 - \varepsilon)) - \varepsilon. \end{cases}$$

Avec l'équation (2.14) on obtient

$$\text{aire}(B(x, r)) \geq (2\pi - \omega^+(B(x, r)) - \varepsilon)(r/4 - \varepsilon)^2/2 - \varepsilon,$$

et en faisant tendre ε vers zéro cela termine la preuve. \square

2.5.2 Une borne supérieure sur la longueur d'un segment

Pour démontrer le Théorème Principal, on aura besoin d'obtenir des bornes sur la distance $d_{\omega, h}(z, z')$, quand ω est une mesure de Radon sur $D(1/2)$, h est une fonction harmonique sur $D(1/2)$, et $z, z' \in D(1/2)$. Pour obtenir une majoration, il suffit de considérer la courbe la plus simple joignant z à z' , le segment $[zz']$, et de majorer $d_{\omega, h}(z, z')$ par $L_{\omega, h}([zz'])$.

Au cours de la démonstration du Théorème Principal, on arrivera à majorer le terme harmonique h (proposition 5.3). Pour obtenir une majoration de $L_{\omega, h}([zz'])$, il ne nous reste donc plus qu'à obtenir une majoration de $L_{\omega, 0}([zz'])$, qui est la longueur d'un segment pour une métrique riemannienne singulière ne comportant pas de terme harmonique, c'est-à-dire quand $g = e^{2V[\omega](z)}|dz|^2$.

Commençons par considérer la cas simple d'une métrique à singularité conique : $g = |z|^{2\beta}|dz|^2$, avec $\beta > -1$. Soit $\gamma(t) = tz$ le segment joignant 0 et un point $z \in D(1/2)$. La longueur de γ pour cette métrique conique est

$$L(\gamma) = \int_0^1 |tz|^\beta |z| dt = \frac{1}{1+\beta} |z|^{1+\beta}.$$

La mesure de courbure pour cette métrique est $\omega = -2\pi\beta \cdot \delta_0$ (δ_0 est la masse de Dirac en zéro), donc la partie positive de courbure est $\omega^+(D(1/2)) = \max(0, -2\pi\beta) = 2\pi\beta^-$, et donc

$$1 + \beta \geq 1 - \beta^- = 1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi,$$

ce qui donne

$$L(\gamma) \leq \frac{1}{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi} |z|^{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi}.$$

La proposition suivante montre qu'on peut étendre ce résultat en considérant deux points arbitraires $z, z' \in D(1/2)$, et une mesure de courbure ω quelconque.

Proposition 2.28. *Soit ω une mesure de Radon définie sur $D(1/2)$, avec $\omega^+(D(1/2)) < 2\pi$. Soient $z, z' \in D(1/2)$, et soit $\gamma(t) := (1-t)z + tz'$ le segment $[zz']$. Soit $L(\gamma)$ la longueur de ce segment pour la métrique singulière $g = e^{2V[\omega](z)}|dz|^2$. On a alors*

$$L(\gamma) \left(= \int_0^1 e^{V[\omega](\gamma(t))} |z - z'| dt \right) \leq \frac{2}{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi} |z - z'|^{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi}. \quad (2.15)$$

Démonstration. Première étape. On montre tout d'abord qu'il est suffisant de prouver la proposition dans le cas où ω est une somme de masses de Dirac. Supposons donc que la proposition soit vraie dans ce cas-là.

Soit ω une mesure de Radon, avec $\omega^+(D(1/2)) < 2\pi$: écrivons $\omega = \omega^+ - \omega^-$, où ω^+ et ω^- sont des mesures positives. Soit ω_m^+ et ω_m^- des suites de sommes de masses de Dirac, avec $\omega_m^+ \rightarrow \omega^+$ et $\omega_m^- \rightarrow \omega^-$ faiblement, et posons $\omega_m := \omega_m^+ - \omega_m^-$.

Soit $L_m(\gamma)$ la longueur de γ pour la métrique conique $g_m = e^{2V[\omega_m](z)}|dz|^2$. Pour presque tout $t \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} V[\omega_m](\gamma(t)) &= \iint_{D(1/2)} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln |\gamma(t) - \xi| d\omega_m(\xi) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \\ &\iint_{D(1/2)} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln |\gamma(t) - \xi| d\omega(\xi) = V[\omega](\gamma(t)), \end{aligned}$$

et par le lemme de Fatou on obtient donc

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 e^{V[\omega](\gamma(t))} |z - z'| dt \\ &= \int_0^1 \liminf_{m \rightarrow \infty} (e^{V[\omega_m](\gamma(t))} |z - z'|) dt \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 e^{V[\omega_m](\gamma(t))} |z - z'| dt \right) \\ &= \liminf_{m \rightarrow \infty} L_m(\gamma). \end{aligned}$$

Par hypothèses, on peut appliquer l'inégalité (2.15) aux mesures ω_m (on a $\omega_m^+(D(1/2)) < 2\pi$ pour m assez grand), et donc

$$L_m(\gamma) \leq \frac{2}{1 - \omega_m^+(D(1/2))/2\pi} |z - z'|^{1 - \omega_m^+(D(1/2))/2\pi},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 - \omega_m^+(D(1/2))/2\pi} |z - z'|^{1 - \omega_m^+(D(1/2))/2\pi} \right) \\ &= \frac{2}{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi} |z - z'|^{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi}. \end{aligned}$$

Deuxième étape. On suppose que ω est une somme de masses de Dirac : il existe des points $p_1, \dots, p_n \in D(1/2)$ et $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\omega = \sum_{s=1}^n k_s \delta_{p_s}$$

(δ_{p_s} désigne la masse de Dirac au point p_s), et

$$\omega^+(D(1/2)) = \sum_{s=1}^n k_s^+ < 2\pi.$$

Pour presque tout $z \in D(1/2)$ on a

$$V[\omega](z) = \iint_D \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z - \xi| d\omega(\xi) = \sum_{s=1}^n \left(\frac{-k_s}{2\pi}\right) \ln |z - p_s| \leq \sum_{s=1}^n \left(\frac{-k_s^+}{2\pi}\right) \ln |z - p_s|,$$

donc en posant $\beta_s := -k_s/2\pi$ on a $\beta_s^- = \max(0, -\beta_s) = \max(0, k_s/2\pi) = k_s^+/2\pi$, et donc

$$e^{V[\omega](z)} \leq \prod_{s=1}^n |z - p_s|^{-\beta_s^-}.$$

On a alors

$$L(\gamma) = \int_0^1 e^{V[\omega](\gamma(t))} |z - z'| dt \leq \int_0^1 \left(\prod_{s=1}^n |\gamma(t) - p_s|^{-\beta_s^-} \right) |z - z'| dt.$$

Soit $S := \{s \text{ tels que } \beta_s^- > 0\}$.

Si $S = \emptyset$, alors $\beta_s^- = 0$ pour tout s : on a $\omega^+(D(1/2)) = 0$, et la dernière inégalité montre que $L(\gamma) \leq |z - z'|$, et donc l'inégalité (2.15) est bien vérifiée (dans ce cas là, le facteur 2 n'est pas nécessaire).

Supposons donc $S \neq \emptyset$. Posons $M := -\sum_{s \in S} \beta_s^-$: par hypothèse, on a $-1 < M < 0$. Pour $s \in S$, posons également $q_s := -M/\beta_s^-$: on a

$$q_s \geq 1 \text{ et } \sum_{s \in S} \frac{1}{q_s} = 1.$$

Comme $|\gamma(t) - p_s|^{-\beta_s^-} \leq 1$ pour $\beta_s^- \leq 0$, on peut appliquer l'inégalité de Hölder de la façon suivante :

$$\int_0^1 \left(\prod_{s=1}^n |\gamma(t) - p_s|^{-\beta_s^-} \right) dt \leq \int_0^1 \left(\prod_{s \in S} |\gamma(t) - p_s|^{-\beta_s^-} \right) dt \quad (2.16)$$

$$\leq \prod_{s \in S} \left(\int_0^1 |\gamma(t) - p_s|^{-q_s \beta_s^-} dt \right)^{1/q_s} \quad (2.17)$$

$$= \prod_{s \in S} \left(\int_0^1 |\gamma(t) - p_s|^M dt \right)^{1/q_s}. \quad (2.18)$$

Maintenant, fixons $s \in S$ et considérons $\int_0^1 |\gamma(t) - p_s|^M dt$. Soit p'_s la projection du point p_s sur la droite (zz') :

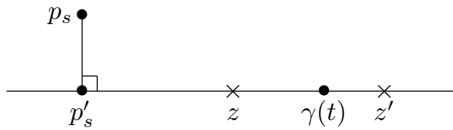


FIGURE 2.15

On a $|\gamma(t) - p'_s| \leq |\gamma(t) - p_s|$, et comme $M < 0$ on obtient

$$\int_0^1 |\gamma(t) - p_s|^M dt \leq \int_0^1 |\gamma(t) - p'_s|^M dt.$$

Comme p'_s est sur la droite (zz') , on peut écrire $p'_s = (1 - \lambda_s)z + \lambda_s z'$ pour un certain réel $\lambda_s \in \mathbb{R}$, et donc

$$|\gamma(t) - p'_s| = |(1 - t)z + tz' - (1 - \lambda_s)z - \lambda_s z'| = |t - \lambda_s||z - z'|.$$

De plus, il est facile de montrer que l'application $\lambda \mapsto \int_0^1 |t - \lambda|^M dt$ admet un maximum pour $\lambda = 1/2$ (rappelons que $M < 0$; il suffit de distinguer les cas, en fonction de la position de λ par rapport à 0 et 1). On a donc

$$\int_0^1 |t - \lambda_s|^M dt \leq \int_0^1 |t - \frac{1}{2}|^M dt = \frac{1}{(M + 1)2^{M+1}},$$

et donc

$$\int_0^1 |\gamma(t) - p_s|^M dt \leq \frac{|z - z'|^M}{(M + 1)2^M}.$$

Si on insère cette inégalité dans l'équation (2.18), en rappelant que $\sum_{s \in S} 1/q_s = 1$ on obtient

$$\int_0^1 \left(\prod_{s \in S} |\gamma(t) - p_s|^{-\beta_s^-} \right) dt \leq \frac{|z - z'|^M}{(M + 1)2^M}.$$

Comme $M > -1$, on a $2^M \geq 1/2$, et comme $M = -\omega^+(D(1/2))/2\pi$ on obtient finalement

$$L(\gamma) \leq \frac{2}{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi} |z - z'|^{1 - \omega^+(D(1/2))/2\pi}.$$

□

De manière analogue, on peut chercher à obtenir une *minoration* de $d_{\omega,0}(z, z')$, en fonction de $|z - z'|$ et de ω (on considère ici encore le cas d'une métrique ne comportant pas de terme harmonique, i.e. $h = 0$). Pour faire cela, il faut minorer la longueur $L_{\omega,0}(\gamma)$ de *toutes* les courbes γ joignant z à z' . Par une méthode analogue à celle présentée dans la démonstration précédente, il n'est pas difficile de minorer cette longueur pour une métrique à singularités coniques, mais cette minoration dépend du nombre de singularités; elle n'est donc pas généralisable à une mesure de Radon ω quelconque. L'auteur ne sait pas si une telle minoration de $d_{\omega,0}(z, z')$ est possible. Un résultat de ce type aurait probablement simplifié quelques passages dans la preuve du Théorème Principal.

Chapitre 3

Des résultats de compacité

Dans cette partie, on commence par motiver la recherche de théorèmes de compacité en donnant quelques applications.

On présente ensuite rapidement la chronologie des différents résultats obtenus, des années 1970 à nos jours; on définit notamment les coordonnées harmoniques, qui ont permis d'obtenir la convergence optimale dans le théorème de Cheeger-Gromov.

On étudie ensuite la notion (assez faible) de convergence au sens de Gromov-Hausdorff d'espaces métriques, et on énonce le théorème de compacité de Gromov des variétés à courbure de Ricci minorée. La démonstration est intéressante : elle est assez élémentaire, et repose sur une discrétisation de l'espace en recouvrant la variété par des boules dont on estime le volume. Cette méthode de recouvrement par un nombre *uniforme* de boules constitue toujours la première étape des preuves de compacité lisses, et sera donc utilisée plus loin.

On énonce ensuite le théorème de compacité de Cheeger-Gromov. Il joue un rôle central dans ce texte, dans le but d'obtenir le Théorème Principal : on étudie donc en détail ses hypothèses et sa démonstration.

3.1 À quoi peut servir un théorème de compacité ?

Une application élémentaire d'un théorème de compacité est de montrer qu'une fonction définie sur un espace a un maximum et un minimum. En géométrie plus particulièrement, une autre application classique est de d'obtenir des propriétés géométriques pour une classe de variétés, en raisonnant par contradiction. Supposons par exemple vouloir montrer un résultat du type :

« Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute variété riemannienne (M, g) de dimension n vérifiant la propriété $\mathcal{P}(\varepsilon)$, (M, g) vérifie la propriété \mathcal{Q} . »

On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe une suite de variétés riemanniennes (M_m, g_m) de dimension n vérifiant la proposition $\mathcal{P}(1/m)$, tel que (M_m, g_m) vérifie également la proposition $\text{non}(\mathcal{Q})$. On peut alors utiliser un théorème de compacité pour montrer que (M_m, g_m) converge (en un certain sens) vers une variété (M, g) , qui vérifie également $\text{non}(\mathcal{Q})$; on peut alors espérer obtenir une contradiction.

Ce type de raisonnement, en utilisant le théorème de convergence $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ de Cheeger-

Gromov, a par exemple permis de passer d'un théorème de rigidité : le *Théorème de la sphère 1/4-pincée* (théorème 3.1), démontré par M. Berger et W. Klingenberg dans les années 1960, à un théorème de presque-rigidité : le *Théorème de la sphère presque 1/4-pincée* (théorème 3.2), démontré par M. Berger et O. Durumeric dans les années 1980.

Théorème 3.1 (Théorème de la sphère 1/4-pincée, [Ber60], [Kli61]). *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte simplement connexe de dimension n , dont la courbure sectionnelle vérifie*

$$\frac{1}{4} \leq K \leq 1.$$

Alors M est homéomorphe à \mathbb{S}^n , ou isométrique à un espace symétrique compact de rang 1.

Théorème 3.2 (Théorème de la sphère presque 1/4-pincée, [Ber83], [Dur87] et [PT09]). *Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ tel que toute variété riemannienne simplement connexe (M^n, g) de dimension n vérifiant*

$$\frac{1}{4} - \varepsilon \leq K \leq 1$$

est difféomorphe à \mathbb{S}^n , ou difféomorphe à un espace symétrique compact de rang 1.

Il existe évidemment de nombreuses autres applications des théorèmes de compacité, et il est impossible d'en dresser une liste exhaustive. Un point à retenir est que les démonstrations s'effectuent toujours par l'absurde, et ne sont donc pas constructives (en particulier, les bornes apparaissant ne sont la plupart du temps pas explicites). Pour d'autres résultats (plus analytiques), on peut par exemple consulter la dernière partie du survey [HH97].

3.2 Bref historique des théorèmes de compacité

Les différents résultats obtenus s'étendent sur de nombreuses années, et les mathématiciens impliqués sont nombreux : cette partie ne se veut donc en aucun cas exhaustive. On souhaite juste donner un aperçu du développement des idées au cours des années. On pourra consulter à ce sujet l'article d'exposition de R. Greene [Gre93]. Dans cette section, les différents résultats sont énoncés de façon assez informelle, et on pourra se référer aux parties suivantes pour plus de précision.

3.2.1 Début des théorèmes de compacité

Dans sa thèse en 1970, J. Cheeger [Che70] a été le premier à énoncer un résultat de finitude (à difféomorphismes près) pour des variétés riemanniennes vérifiant des conditions géométriques : volume minoré, diamètre majoré et courbure sectionnelle bornée. C'est un premier pas vers des résultats de compacité.

Dans les années 1980, M. Gromov introduit dans [Gro81b] la distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques quelconques. Il énonce également un théorème de précompacité (pour la distance Gromov-Hausdorff) pour des variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée ; il s'agit ici d'une convergence assez faible, et l'espace limite n'est pas forcément riemannien.

Le théorème d'Arzelà-Ascoli joue un rôle majeur dans quasiment tous les résultats de compacité. Il est tentant de l'appliquer à une situation géométrique, dans le but d'obtenir un résultat de précompacité pour des métriques riemanniennes. La courbure sectionnelle étant (en coordonnées locales) reliée aux dérivées secondes de la métrique, M. Gromov énonça, toujours dans [Gro81b], un résultat de précompacité $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ ($\alpha < 1$) pour une suite de variétés riemanniennes à rayon d'injectivité minoré, diamètre majoré et courbure sectionnelle bornée (après composition par des difféomorphismes). Pour autant, la preuve esquissée dans [Gro81b] n'aboutit pas à la régularité optimale souhaitée.

3.2.2 Les coordonnées harmoniques

Pour plus de détails pour cette partie, on peut consulter [HH97] et les articles originaux [DK81] et [JK82].

Des coordonnées naturellement utilisées en géométrie riemannienne sont les coordonnées normales : elles sont *canoniques*, et dépendent directement de la géométrie - plus précisément, des géodésiques. Elles sont obtenues en considérant l'application \exp_x^{-1} , définie sur un voisinage de x dans M et à valeurs dans $T_x M$. L'avantage est qu'au point x , ces coordonnées ressemblent très fortement aux coordonnées Euclidiennes : on a $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} est le symbole de Kronecker), et $\nabla g_{ij}(x) = 0$. Pour autant, si l'on souhaite estimer les dérivées premières des fonctions g_{ij} au voisinage de x , on a besoin de bornes sur les dérivées covariantes de la courbure (des bornes sur la courbure elle-même ne suffisent pas) ; voir la page 578 de [HH97]. Afin d'espérer contrôler les dérivées (secondes) de la métrique à l'aide de la courbure, il faut donc utiliser d'autres coordonnées.

Définition 3.3. *Des coordonnées (x_1, \dots, x_n) sur une variété riemannienne (M, g) sont harmoniques si g est \mathcal{C}^1 dans ces coordonnées, et si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $\Delta x^k = 0$ (i.e. $g^{ij}\Gamma_{ij}^k = 0$, où $[g^{ij}]$ est la matrice réciproque de $[g_{ij}]$, et les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel).*

Les coordonnées harmoniques ont été initialement introduites dans le contexte de la relativité générale, notamment en raison de propriétés liées au tenseur de Ricci. Dans de telles coordonnées, ce dernier a par exemple une expression (relativement) simple : on a $\text{Ric}_{ij} = -g^{mk}\partial_k\partial_m g_{ij} +$ des termes ne comportant (au plus) que des dérivées premières de la métrique.

D. DeTurck et J. Kazdan [DK81] ont montré le résultat suivant : c'est dans des coordonnées harmoniques que la métrique a la régularité maximale.

Théorème 3.4. *Supposons qu'une métrique riemannienne g sur une variété lisse M soit de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ ($k \geq 1$) dans des coordonnées locales au voisinage d'un point $x \in M$. Alors, des coordonnées harmoniques existent au voisinage de x , ces dernières sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^{k+1,\alpha}$ des anciennes coordonnées, et la métrique est de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ dans n'importe quel système de coordonnées harmoniques au voisinage de x .*

Au contraire, l'utilisation de coordonnées normales fait (en général) perdre deux dérivées à la métrique : si une métrique est de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ dans une carte au voisinage de x , elle est alors (à priori) seulement de classe $\mathcal{C}^{k-2,\alpha}$ dans des coordonnées normales au voisinage de x .

3.2.3 La conjecture de Gromov (enfin) démontrée

J. Jost et H. Karcher [JK82] ont ensuite montré que si le rayon d'injectivité est minoré et la courbure sectionnelle est bornée, alors il existe des coordonnées harmoniques sur des boules de rayon fixé. À l'aide de ce résultat, R. Greene et H. Wu [GW88] ainsi que S. Peters [Pet87] ont (indépendamment) montré le théorème de Cheeger-Gromov, avec la régularité de la convergence optimale (théorème 3.11) : l'ensemble des variétés riemanniennes à rayon d'injectivité minoré, volume majoré et courbure sectionnelle bornée est précompact (après composition par des difféomorphismes), en norme $C^{1,\alpha}$ ($\alpha < 1$). A. Kasue [Kas89] a ensuite donné une preuve différente de celle de Greene-Wu et Peters. E. Hebey et M. Herzlich ont détaillé dans leur survey [HH97] la preuve de A. Kasue ; c'est ce schéma de démonstration qui est utilisé dans ce manuscrit pour démontrer le Théorème Principal. On étudie en détail cette démonstration dans la suite.

Le théorème de convergence de Cheeger-Gromov répond à la conjecture initiale de M. Gromov présente dans [Gro81b]. Ce résultat a ensuite été amélioré par M. T. Anderson [And90] et M. T. Anderson et J. Cheeger [AC92], en remplaçant l'hypothèse sur la courbure sectionnelle par une hypothèse (plus faible) sur la courbure de Ricci ; de plus, des bornes sur les dérivées du tenseur de Ricci donnent lieu à une convergence plus forte (voir encore le théorème 3.11).

Des résultats de compacité sous des hypothèses de bornes L^p de la courbure de Ricci ont également été démontrés dans les années 1990, notamment par des travaux de M.T. Anderson, L. Z. Gao et D. Yang. Voir [Pet97], ou les références dans [HH97]. Dans tous les cas, il s'agit de voir si on peut minorer le rayon harmonique en adaptant la démonstration esquissée ci-dessous (la démonstration du théorème 3.16) à des cas où on a moins d'informations sur la courbure de Ricci. Si c'est le cas, la suite de la démonstration du théorème de compacité est alors (presque) identique à celle présentée ci-dessous...

On peut notamment citer le résultat suivant dû à M. T. Anderson, voir [Pet97], p.187 :

Théorème 3.5. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Lambda, i, V > 0$, et soit $p > n/2$. L'ensemble des variétés riemanniennes vérifiant $(\int |\text{Ric}|^p d\mathcal{A})^{1/p} \leq \Lambda$, $\text{inj} \geq i$ et $\text{vol} \leq V$ est précompact, en norme C^α pour $\alpha < 2 - n/p$.*

On reparlera de ce théorème plus tard : on montrera en effet que le Théorème Principal nous donne également un théorème de compacité, sous des hypothèses de bornes intégrales sur la courbure (voir le corollaire 4.30).

3.3 Convergence au sens de Gromov-Hausdorff

Pour cette partie, on pourra se référer au livre [Pet06]. On va se placer uniquement dans le cas d'espaces compacts ; la plupart des notions étudiées ici sont également valides dans le cas des espaces complets, mais il faut alors utiliser la convergence de Gromov-Hausdorff pointée.

Si A et B sont deux parties d'un espace métrique compact (X, d) , on définit la distance de Hausdorff entre A et B par

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathcal{V}_\varepsilon(B) \text{ et } B \subset \mathcal{V}_\varepsilon(A)\},$$

où on note $\mathcal{V}_\varepsilon(Y) = \{x \in X \mid d(x, Y) < \varepsilon\}$ l' ε -voisinage d'une partie $Y \subset X$. L'ensemble des compacts de X , munis de la distance de Hausdorff d_H , est un espace métrique compact.

M. Gromov, dans [Gro81b], a défini la distance entre deux espaces métriques *quelconques* (et non pas inclus dans un troisième espace métrique plus grand) de la façon suivante. Si X et Y sont deux espaces métriques, on définit la distance de Gromov-Hausdorff entre X et Y par

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{d_H(X, Y)\},$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les métriques sur l'union disjointe $X \amalg Y$, qui étendent les métriques sur X et sur Y . Deux espaces métriques sont à distance nulle si, et seulement si, ils sont isométriques. L'ensemble des espaces métriques compacts (modulo isométries), muni de la distance de Gromov-Hausdorff, est un espace métrique.

La convergence au sens de Gromov-Hausdorff est assez faible, et on peut obtenir énormément d'exemples pathologiques. A la limite, la dimension peut diminuer : pour toute variété riemannienne compacte (M, g) , la suite de variétés $(M, g/m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un point. La dimension peut également augmenter. M. Cassorla [Cas92] a démontré que tout espace métrique intrinsèque compact est la limite Gromov-Hausdorff de surfaces riemanniennes compactes (qui, de plus, peuvent être plongées isométriquement dans \mathbb{R}^3). Sans hypothèse supplémentaire sur la suite d'espaces métriques (intrinsèques) (X_m, d_m) qui converge, la seule chose que l'on peut dire est que l'espace métrique limite est également intrinsèque.

M. Gromov a montré le

Théorème 3.6 (Gromov). *Soit \mathcal{C} un ensemble d'espaces métriques compacts. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $X \in \mathcal{C}$, le nombre maximal de boules disjointes de rayon ε dans X est inférieur à $N(\varepsilon)$.*

Alors \mathcal{C} est précompact : toute suite de \mathcal{C} admet une sous-suite qui converge, au sens de Gromov-Hausdorff, vers un espace métrique compact X .

L'idée de la démonstration est d'abord de remarquer que le diamètre des espaces métriques $X \in \mathcal{C}$ est borné. Ensuite, on approxime tout $X_m \in \mathcal{C}$ par un espace métrique discret, comportant $N(\varepsilon)$ points (correspondant aux centres des $N(\varepsilon)$ boules disjointes). La métrique sur cet espace est alors décrite par $N(\varepsilon)(N(\varepsilon) - 1)$ nombres positifs, qui sont bornés. Un argument de compacité permet alors de conclure.

Le fait important est que par le théorème de Bishop-Gromov (théorème 1.6), une borne inférieure sur la courbure de Ricci nous donne des estimées sur le volume des boules, et de telles estimées nous permettent d'obtenir une majoration du nombre de boules disjointes de rayon fixé :

Théorème 3.7 (Gromov). *Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $D > 0$. L'ensemble des variétés riemanniennes compactes M^n , de dimension n , à courbure de Ricci $\geq (n - 1)\lambda$ et diamètre $\leq D$, est précompact.*

Démonstration. On utilise le théorème précédent. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $B(x_i, \varepsilon)$, pour $1 \leq i \leq N(\varepsilon)$, un ensemble maximal de boules disjointes de rayon ε . Supposons que $B(x_1, \varepsilon)$ est la boule de plus petit volume. On a alors

$$N(\varepsilon) \cdot \text{vol}(B(x_1, \varepsilon)) \leq \text{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B(x_i, \varepsilon)\right) \leq \text{vol}(M^n) = \text{vol}(B(x_1, 2D)).$$

Par le théorème de Bishop-Gromov, on sait que l'application $r \mapsto \frac{\text{vol}(B(x_1, r))}{v(n, \lambda, r)}$ est décroissante (on rappelle que $v(n, \lambda, r)$ est le volume d'une boule de rayon r dans l'unique variété riemannienne complète simplement connexe de dimension n , de courbure constante $\lambda \in \mathbb{R}$). On a donc

$$\frac{\text{vol}(B(x_1, 2D))}{v(n, \lambda, 2D)} \leq \frac{\text{vol}(B(x_1, \varepsilon))}{v(n, \lambda, \varepsilon)}$$

et on obtient

$$N(\varepsilon) \leq \frac{v(n, \lambda, 2D)}{v(n, \lambda, \varepsilon)},$$

ce qui montre qu'on peut appliquer le théorème précédent. \square

Remarque 3.8. *Cet important théorème de compacité donne lieu à un thème de recherche actuellement très en vogue. Notamment, J. Cheeger, T. Colding et A. Naber étudient la structure de l'espace métrique limite (X, d) d'une suite de variétés riemanniennes lisses à courbure de Ricci vérifiant $\text{Ric} \geq (n-1)\kappa$: on sait déjà que (X, d) est un espace métrique intrinsèque, mais que peut-on dire de plus ? Ils étudient notamment les cas de non-effondrement (volume des boules de rayon 1 minoré). La littérature sur ce sujet est abondante : on pourra par exemple consulter [CC96], [CC97] et les références citées dans ces articles.*

Cette méthode constitue très souvent la première étape dans une démonstration d'un résultat de compacité, car on obtient ainsi un recouvrement de la variété par un nombre majoré de boules. En effet, on a le fait élémentaire suivant :

Fait 3.9. *Si les boules $B(x_i, \varepsilon)$, pour $1 \leq i \leq N$, constitue un ensemble maximal de boules de rayon ε disjointes dans M , alors les boules $B(x_i, 2\varepsilon)$ recouvrent M .*

Démonstration. S'il existait un point $x \in M - \bigcup_{i=1}^N B(x_i, 2\varepsilon)$, alors la boule $B(x, \varepsilon)$ serait disjointe des boules $B(x_i, \varepsilon)$, et on aurait donc $N+1$ boules de rayon ε disjointes. \square

Pour démontrer des théorèmes de compacité (voir la section suivante ou le début de la démonstration du Théorème Principal), on commence donc par prendre un nombre maximal N de boules de rayon fixé disjointes. Grâce à des informations sur la courbure, on dispose de bornes sur le volume des boules, et ceci nous donne une majoration de N . Par le fait précédent, on a donc un recouvrement de notre variété par un nombre de boules majoré. Ce recouvrement constitue le point de départ de la démonstration.

3.4 Convergence lisse (Cheeger-Gromov)

3.4.1 Énoncé du résultat

Commençons par préciser ce que l'on entend par « convergence en norme $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ » pour une suite de variétés riemanniennes.

Définition 3.10. *Soient $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in (0, 1)$. Soit (M_m, g_m) une suite de variétés riemanniennes compactes lisses de dimension n , M une variété lisse, et g une métrique riemannienne de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ sur M . On dit que (M_m, g_m) converge vers (M, g) en norme*

$\mathcal{C}^{k,\alpha}$ s'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geq m_0$, il existe des difféomorphismes $\Phi_m : M \rightarrow M_m$, de classe $\mathcal{C}^{k+1,\alpha}$, tels que $\Phi_m^*(g_m)$ converge vers g en norme $\mathcal{C}_{\text{loc}}^{k,\alpha}$ (c'est-à-dire que dans toute carte de l'atlas lisse de M , les composantes de $\Phi_m^*(g_m)$ convergent vers les composantes de g , en tant que fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n).

Le théorème de Cheeger-Gromov, conjecturé par M. Gromov dans [Gro81b], démontré par R. Greene et H. Wu [GW88] et S. Peters [Pet87] dans le cas de courbure sectionnelle bornée, puis étendu au cas de bornes sur la courbure de Ricci par M. T. Anderson [And90] et M. T. Anderson et J. Cheeger [AC92] (voir l'historique au début de cette partie) est le suivant :

Théorème 3.11 (Cheeger-Gromov). *Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i > 0$ et $v > 0$. L'ensemble des variétés riemanniennes lisses (M, g) de dimension n satisfaisant les trois hypothèses*

1. $\text{Ric} \geq \lambda(n - 1)$,
2. $\text{inj} \geq i$,
3. $\text{vol} \leq v$

est précompact en topologie $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$ (c'est-à-dire que toute suite (M_m, g_m) possède une sous-suite qui converge en norme $\mathcal{C}^{0,\alpha}$).

Si à la place de l'hypothèse 1, on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|D^j \text{Ric}| \leq C(j)$ pour $j \in \{0, \dots, k\}$, alors on a une précompacité en topologie $\mathcal{C}^{k+1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

La régularité de la convergence est optimale : en effet, sous l'hypothèse $|\text{Ric}| \leq C$, S. Peters [Pet87] a montré que la métrique limite n'était pas nécessairement \mathcal{C}^2 (en fait, elle n'est même pas forcément $\mathcal{C}^{1,1}$). Le dessin suivant est assez éclairant : à courbure bornée, une surface (lisse) peut converger vers une surface constituée d'un cylindre, et de deux demi-sphères. Et la métrique de cette surface ne peut pas être \mathcal{C}^2 : la courbure, qui est la dérivée seconde de la métrique, n'est pas continue (elle vaut 0 ou +1).

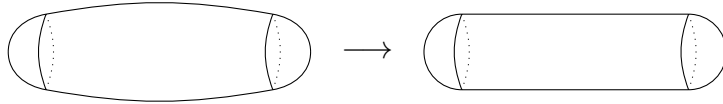


FIGURE 3.1 – Des surfaces lisses convergent vers une surface dont la métrique ne peut pas être \mathcal{C}^2 .

Dans le cas où $M_m = M$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut se demander s'il est vraiment nécessaire de composer par des difféomorphismes pour obtenir une convergence. C'est bien le cas, pour la raison suivante. On reprend l'exemple de E. Hebey et M. Herzlich exposé dans [HH97], p.4. Considérons la sphère \mathbb{S}^2 , munie de sa métrique ronde g . Pour toute suite de difféomorphismes $\varphi_m : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, la suite de métriques $(\varphi_m)^*g$ vérifie les conditions du théorème 23, car les métriques sont toutes isométriques à g (et ont donc exactement les mêmes propriétés géométriques). Et il est facile de choisir la suite φ_m de telle sorte que les métriques $(\varphi_m)^*g$ ne convergent pas vers une métrique g_∞ . Par exemple, notons $\text{proj} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la projection stéréographique de pôle Nord (c'est-à-dire telle que le pôle Nord N soit envoyé sur l'infini), et $f_m : z \mapsto mz$ le difféomorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Posons $\varphi_m = \text{proj}^{-1} \circ f_m \circ \text{proj}$. Alors $(\varphi_m)^*g$ concentre toute la sphère vers le pôle Nord :

si on note d_m la suite de distances associées, on a $d_m(x, y) \rightarrow 0$ si x et y ne sont pas au pôle Sud. Sans composer la suite $(\varphi_m)^*g_m$ par des difféomorphismes, il est clair qu'on ne peut pas espérer une convergence de cette suite de métriques. En d'autres termes, la bonne notion de convergence à considérer est la convergence à *isométrie près*.

Dans tout résultat de compacité de ce type, il faut donc *construire* les difféomorphismes. Il est illusoire de chercher à montrer un tel théorème uniquement en appliquant des résultats de compacité de type Arzelà-Ascoli... Les difféomorphismes peuvent par exemple être construits en plongeant les variétés dans un même espace Euclidien (voir ci-dessous).

Réécrivons le théorème de Cheeger-Gromov dans le cas des surfaces ($n = 2$), car c'est sous cette forme que le résultat va nous intéresser dans la suite :

Théorème 3.12. *Soit $\Lambda > 0$, $i > 0$ et $A > 0$. L'ensemble des surfaces riemanniennes lisses (Σ, g) satisfaisant les trois hypothèses*

1. $|K| \leq \Lambda$,
2. $\text{inj} \geq i$,
3. $\text{aire} \leq A$

est précompact en topologie $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

On a la proposition élémentaire suivante, qui montre que dans le théorème de Cheeger-Gromov, on peut remplacer une borne supérieure sur le volume par une borne supérieure sur le diamètre. On aura une proposition analogue pour le Théorème Principal, voir la proposition 5.1 et le corollaire 4.28.

Proposition 3.13. *Sous les hypothèses de courbure sectionnelle bornée et de rayon d'injectivité minoré, une majoration du volume est équivalente à une majoration du diamètre.*

Démonstration. Supposons qu'on ait une variété riemannienne (M, g) , à courbure sectionnelle $|K| \leq \Lambda$ et rayon d'injectivité $\geq i > 0$.

Supposons que le volume soit majoré. Si le diamètre était arbitrairement grand, alors on pourrait trouver un nombre arbitrairement grand de boules disjointes de rayon i , et comme le volume de ces boules est minoré par celui d'une boule de rayon i dans un modèle simplement connexe de courbure constante $\Lambda > 0$, le volume serait arbitrairement grand.

Supposons maintenant que le diamètre soit majoré par D . Alors, la variété toute entière est une boule de rayon $D + 1$, et le volume de cette boule est au plus celui d'une boule de rayon $D + 1$ dans un modèle simplement connexe de courbure constante $-\Lambda < 0$, ce qui prouve que le volume est majoré. \square

3.4.2 Un mot sur les hypothèses

La partie 4 va être consacrée à adapter les hypothèses du théorème de Cheeger-Gromov au cas des surfaces d'Alexandrov ; il est donc intéressant dans un premier temps de bien comprendre ces dernières.

La borne sur la courbure nous donne une borne sur les dérivées secondes de la métrique. Comme déjà signalé, par le théorème d'Arzelà-Ascoli, il n'est alors pas étonnant d'obtenir une convergence en norme $\mathcal{C}^{1,\alpha}$... Bien que comme expliqué plus haut, la (nécessaire!)

construction des difféomorphismes nécessite un raisonnement plus compliqué que la seule application du théorème d'Arzelà-Ascoli.

Une minoration du rayon d'injectivité empêche un pincement de la surface, qui peut se produire à courbure bornée. On peut par exemple penser à une métrique produit sur un tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ où le diamètre de l'un des facteurs tend vers zéro, ou de façon plus imagée à la figure suivante :

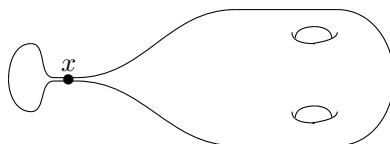


FIGURE 3.2 – Le rayon d'injectivité en x est très petit

On reviendra largement sur ces considérations dans la partie 4.2, quand on cherchera des hypothèses pertinentes pour empêcher un tel pincement, dans le cas d'espaces métriques singuliers (et non plus riemanniens).

Enfin, une borne sur l'aire est naturelle si l'on souhaite rester dans la catégorie des surfaces compactes (on peut imaginer des sphères de rayons de plus en plus grands, et dont la courbure sectionnelle reste bornée). Sans cette borne sur l'aire, on peut toujours énoncer un résultat de convergence, mais dans la catégorie des variétés riemanniennes complètes pointées. Comme déjà précisé, on se limite dans ce manuscrit aux énoncés dans le cas compact.

3.4.3 Les deux étapes de la preuve

On suit ici la présentation de la preuve faite dans le survey [HH97]. La démonstration se déroule en deux étapes bien distinctes :

1. La première étape consiste à montrer que sur les variétés considérées, il existe de *bonnes* cartes harmoniques sur des boules de tailles uniformes. Plus précisément, on montre qu'il y a une borne inférieure sur le *rayon harmonique* ; cette partie est due à Anderson-Cheeger [AC92] et Anderson [And90].
2. La deuxième partie consiste, à l'aide des cartes précédemment construites, à plonger les variétés dans un même espace Euclidien \mathbb{R}^q . Cette construction fait naturellement apparaître les difféomorphismes φ_m de la conclusion du théorème. Cette partie de la démonstration est due à A. Kasue [Kas89] (comme signalé plus haut, les démonstrations de R. Greene et H. Wu [GW88] et S. Peters [Pet87] sont moins éclairantes).

Remarque 3.14. *P. Petersen, dans le livre [Pet06], propose une autre démonstration du théorème de Cheeger-Gromov en définissant une notion de « norme $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ » d'une variété riemannienne. Cette notion est d'une certaine manière duale de celle de rayon harmonique, présentée plus bas : des hypothèses géométriques donnent une majoration de la « norme $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ » de la variété (au lieu de donner une minoration du rayon harmonique). L'intérêt est alors que l'énoncé du théorème de compacité semble être une généralisation du théorème d'Arzelà-Ascoli, où les fonctions sont remplacées par des variétés. Selon l'auteur de ce manuscrit, la notion de rayon harmonique semble plus facile à appréhender que celle de « norme $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ » d'une variété.*

Première étape : minoration du rayon harmonique

Comme indiqué précédemment, les coordonnées harmoniques jouent un rôle central dans la preuve. Le rayon harmonique est le plus grand rayon des boules sur lesquelles il existe des coordonnées harmoniques, dans lesquelles on contrôle la métrique :

Définition 3.15. Soit (M, g) une variété lisse, et $x \in M$. Soient $Q > 1$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in (0, 1)$. On définit le $\mathcal{C}^{k, \alpha}$ -rayon harmonique en x comme le plus grand réel $r_H = r_H(M, g, Q, k, \alpha)(x)$ tel qu'il existe une carte harmonique sur la boule $B(x, r_H)$ telle que la métrique g_{ij} dans cette carte vérifie les propriétés suivantes :

— en tant que formes bilinéaires on a

$$Q^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq Q\delta_{ij};$$

— on a

$$\sum_{1 \leq |\beta| \leq k} \left(r_H^{|\beta|} \sup_y |\partial^\beta g_{ij}(y)| + \sum_{|\beta|=k} r_H^{k+\alpha} \sup_{y \neq z} \frac{|\partial^\beta g_{ij}(y) - \partial^\beta g_{ij}(z)|}{d(y, z)^\alpha} \right) \leq Q - 1. \quad (3.1)$$

On définit le rayon harmonique de (M, g) par

$$r_H(M, g, Q, k, \alpha) = \inf_{x \in M} r_H(M, g, Q, k, \alpha)(x).$$

L'inégalité (3.1) fait apparaître certaines puissances de r . L'intérêt est que le rayon harmonique est homogène à une longueur : pour tout $\lambda > 0$ on a $r_H(M, \lambda^2 g, Q, k, \alpha)(x) = \lambda r_H(M, g, Q, k, \alpha)(x)$.

Le résultat important est qu'un contrôle sur le rayon d'injectivité et sur la norme \mathcal{C}^{k+1} de la courbure de Ricci nous donne une minoration du $\mathcal{C}^{k, \alpha}$ -rayon harmonique.

Théorème 3.16 ([HH97]). Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $Q > 1$ et $\alpha \in (0, 1)$.

Toute variété (M^n, g) de courbure de Ricci satisfaisant $\text{Ric} \geq \lambda(n-1)$ et de rayon d'injectivité $\text{inj} \geq i$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i > 0$) vérifie

$$r_H(M, g, Q, 0, \alpha) \geq r_{\min},$$

où $r_{\min} > 0$ est une constante ne dépendant que de n, Q, α, i, λ .

Si au lieu de supposer $\text{Ric} \geq \lambda(n-1)$ on suppose $|D^j \text{Ric}| \leq C(j)$ pour $j \in \{0, \dots, k\}$, alors on a

$$r_H(M, g, Q, k+1, \alpha) \geq r_{\min}$$

où r_{\min} est une constante ne dépendant que de n, Q, α, i et des $C(j)$ pour $j \in \{0, \dots, k\}$.

Démonstration. On en donne seulement les grandes lignes, sans rentrer dans les détails techniques. Plaçons-nous dans le cas $\text{Ric} \geq \lambda(n-1)$. On suppose par l'absurde qu'il n'existe pas de constante r_{\min} comme dans le théorème : il existe donc une suite (M_m, g_m) de variétés lisses de dimension n , avec $\text{Ric}_{(M_m, g_m)} \geq \lambda(n-1)$ et $\text{inj}_{(M_m, g_m)} \geq i$, telle que

$r_m := r_H(M_m, g_m, Q, 0, \alpha) \rightarrow 0$. On effectue un changement d'échelle en considérant les métriques $\widetilde{g}_m := r_m^{-2} g_m$: on a alors

$$\begin{aligned} r_H(M_m, \widetilde{g}_m, Q, 0, \alpha) &= 1, \\ \text{Ric}(M_m, \widetilde{g}_m) &\geq r_m^2 \lambda(n-1) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \\ \text{inj}(M_m, \widetilde{g}_m) &\geq i/r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

L'idée est alors de montrer que (M_m, \widetilde{g}_m) converge (en un certain sens) vers une variété (M, g) . Comme les variétés (M_m, \widetilde{g}_m) ont un rayon harmonique égal à 1, on peut montrer que le rayon harmonique de (M, g) sera ≤ 1 .

Par ailleurs, le rayon d'injectivité de (M, g) est infini, ce qui montre qu'en un point x , il existe des lignes (géodésiques) dans toutes les directions. Comme la courbure de Ricci est positive, on peut appliquer le théorème de « splitting » de Cheeger-Gromoll pour montrer que (M, g) est en fait isométrique à l'espace Euclidien \mathbb{E}^n ; comme cet espace a un rayon harmonique infini, on aboutit à une contradiction. \square

Deuxième étape : plongement dans un espace Euclidien et conclusion

On donne les grandes lignes de la deuxième étape de la démonstration. Afin d'en comprendre le schéma général, on ne rentre volontairement pas dans les détails, et on fait quelques abus de notations qui simplifient l'exposé. La preuve du Théorème Principal de ce manuscrit, présentée en détails dans la partie 5.4, est basée sur ce même schéma de démonstration ; les différences importantes entre les deux constructions sont explicitées au début de la partie 5.4.

Considérons une suite (M^m, g_m) de variétés riemanniennes vérifiant les hypothèses du théorème 3.11, c'est-à-dire telles que

1. $\text{Ric} \geq \lambda(n-1)$ (ou $|D^j \text{Ric}| \leq C(j)$ pour $j \in \{0, \dots, k\}$),
2. $\text{inj} \geq i > 0$,
3. $\text{aire} \leq A$.

Dans ce résumé de la preuve, à de nombreuses reprises les propriétés annoncées seront vraies seulement après avoir extrait une sous-suite de (M^m, g_m) . Pour plus de clarté, on ne le précisera pas à chaque fois, et on ne changera pas non plus les indices de la suite.

Par le théorème 3.16, il existe $r_{\min} > 0$ tel que le rayon harmonique de ces variétés soit supérieur à r_{\min} . La preuve se déroule en plusieurs parties.

1. Comme indiqué à la fin de la partie 3.3, à l'aide d'estimations sur le volume des boules (qui sont valables car on dispose de bornes sur la courbure), on peut recouvrir la variété par un nombre uniforme de boules $B_m(x_i^m, r_{\min})$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$. On peut alors prendre des cartes harmoniques, comme dans la définition du rayon harmonique :

$$H_i^m : B_m(x_i^m, r_{\min}) \rightarrow B$$

(B désigne la boule unité de \mathbb{R}^n .)

2. On étend les cartes H_i^m , définies seulement sur $B_m(x_i^m, r_{\min})$, à M^m tout entier en définissant des fonctions $\overline{H}_i^m : M^m \rightarrow B$, égales à H_i^m au voisinage de x_i^m . On plonge alors les variétés M^m dans un espace Euclidien \mathbb{R}^q , par une construction due à H. Whitney :

$$\begin{aligned} \Psi^m : M^m &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\longmapsto \Psi^m(x) \simeq (\overline{H}_1^m(x), \dots, \overline{H}_N^m(x)) \end{aligned}$$

(en réalité, on ne définit pas $\Psi^m(x)$ exactement de cette façon-là, mais pour simplifier l'exposé on se contentera de cette expression).

Par construction, les sous-variétés $\Psi^m(M^m)$ sont localement des graphes. Plus précisément, $\Psi^m(M^m)$ est la réunion de N graphes : pour une certaine boule Euclidienne $B' \subset B$ on a

$$\Psi^m(M^m) = \bigcup_{i=1}^N \left\{ \Psi^m \circ (H_i^m)^{-1}(z) \mid z \in B' \right\},$$

et la i -ème coordonnée de l'expression $\Psi^m \circ (H_i^m)^{-1}(z)$ est z . En effet, si la boule B' est assez petite, on a $\overline{H}_i^m((H_i^m)^{-1}(z)) = z$ pour $z \in B'$, et donc

$$\Psi^m((H_i^m)^{-1}(z)) = (\overline{H}_1^m \circ (H_i^m)^{-1}(z), \dots, z, \dots, \overline{H}_N^m \circ (H_i^m)^{-1}(z)). \quad (3.2)$$

Remarque 3.17. *Attention, ici on plonge les variétés (lisses) M^m dans \mathbb{R}^q , et à aucun moment il n'est question de plongement isométrique dans \mathbb{R}^q . La construction est juste différentielle, et les métriques riemanniennes sur M^m joueront seulement un rôle plus tard (elles interviennent de façon détournée lors de l'étape suivante, pour faire converger les fonctions). Cette remarque aura son importance plus loin, lors de la même étape de la démonstration du Théorème Principal, voir la remarque 5.19.*

3. On a le fait suivant :

Fait 3.18. *Quand m tends vers l'infini, les fonctions $\overline{H}_j^m \circ (H_i^m)^{-1} : B \rightarrow B$ convergent.*

En effet, les fonctions $\overline{H}_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ sont soit nulles (par exemple quand il n'y a pas de fonctions de transition, c'est-à-dire quand $B_m(x_i^m, r_{\min}) \cap B_m(x_j^m, r_{\min}) = \emptyset$), soit ressemblent fortement à $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ (auquel cas cette dernière expression a un sens, du moins localement). Sans trop rentrer dans les détails, le principe est le suivant. Comme les cartes H_i^m sont harmoniques, les n fonctions coordonnées des applications $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ vérifient des équations elliptiques, dont les coefficients dépendent des coefficients de la métrique dans les cartes $H_i^m : B_m(x_i^m, r_{\min}) \rightarrow B$. Par définition du rayon harmonique, ces coefficients sont contrôlés, et par régularité elliptique on obtient alors des bornes sur les dérivées des fonctions $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$. On n'a alors plus qu'à utiliser le théorème d'Arzelà-Ascoli pour conclure.

On peut ainsi passer à la limite dans l'expression (3.2) pour obtenir une variété « limite », ou plus précisément limite de graphes :

$$M^\infty := \lim \Psi^m(M^m) \subset \mathbb{R}^q.$$

On montre que M^∞ est en fait une sous-variété lisse de \mathbb{R}^q .

4. Pour m assez grand, les variétés plongées $\Psi^m(M^m) \subset \mathbb{R}^q$ sont dans un voisinage tubulaire de M^∞ . On peut alors projeter le long des normales à M^∞ et obtenir une application $\Pi^m : M^m \rightarrow M^\infty$. Comme les sous-variétés M^m convergent vers M^∞ (au sens explicité ci-dessus), on peut prouver que les applications $\Pi^m : M^m \rightarrow M^\infty$ sont en fait des difféomorphismes.
5. Résumons la construction effectuée : on a construit des difféomorphismes $M^m \xrightarrow{\sim} \Psi^m(M^m) \subset \mathbb{R}^q \xrightarrow{\sim} M^\infty \subset \mathbb{R}^q$. On peut donc transporter les métriques g_m sur M^m en des métriques \widetilde{g}_m sur M^∞ . Il ne nous reste alors plus qu'à montrer que les métriques \widetilde{g}_m convergent vers une métrique riemannienne g .

Pour ce faire, plaçons nous dans des cartes naturelles sur M^∞ , qui correspondent aux N graphes « limites » (rappelons que M^∞ est la limite des sous-variétés $\Psi^m(M^m)$, au sens où les N graphes de $\Psi^m(M^m)$ convergent vers les N graphes de M^∞). Il nous suffit de montrer que les coefficients de \widetilde{g}_m , dans ces cartes, convergent ; mais par construction, ces coefficients ressemblent à ceux de la métrique g_m dans les cartes H_i^m . Et les cartes harmoniques H_i^m ont justement été construites de telle sorte que les coefficients de la métrique g_m soient contrôlés dans ces cartes : on peut donc appliquer une dernière fois le théorème d'Arzelà-Ascoli pour conclure.

Les deux dernières étapes ne sont pas très détaillées dans la littérature, que ce soit dans la démonstration de A. Kasue [Kas89] ou dans le survey de E. Hebey et M. Herzlich [HH97] ; notamment, le fait que M^∞ soit bien une sous-variété, et que les projections $\Pi^m : M^m \rightarrow M^\infty$ soient bien des difféomorphismes... Pour la démonstration du Théorème Principal, il a fallu écrire tous les détails pour vérifier que cette construction s'adaptait bien au cas des surfaces d'Alexandrov. On rappelle qu'on détaillera au début de la partie 5.4 les différences entre cette preuve du théorème de Cheeger-Gromov et celle du Théorème Principal.

3.4.4 Conséquences d'un contrôle \mathcal{C}^0 de la métrique

Pour pouvoir appliquer la construction expliquée dans la deuxième étape de la démonstration, on a besoin, une fois qu'on a choisi des cartes harmoniques $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$, d'avoir un certain contrôle sur l'image des boules $B(x, \lambda\varepsilon)$, pour des valeurs de $\lambda < 1$ (notamment au 2., où l'on doit étendre les cartes H_i^m définies localement, et dans les parties 3. et 4.). Les propriétés obtenues doivent être uniformes, c'est-à-dire ne pas dépendre de l'élément de la suite considéré.

La proposition suivante précise ce que signifie « contrôler l'image des boules ». Dans le cas d'une métrique lisse, sous la seule hypothèse d'une inégalité du type $Q^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq Q\delta_{ij}$ pour un $Q > 1$ (comme dans le cas de la définition du rayon harmonique, mais sans prêter attention aux dérivées), un tel contrôle est facile à obtenir (la démonstration de la proposition 3.20 est assez élémentaire). Ces propriétés sont utilisées de façon implicite dans la démonstration présentée dans [HH97].

Pour démontrer le Théorème Principal, qui se place dans le cadre de métriques singulières, on souhaitera effectuer la même construction que celle présentée précédemment. On aura donc besoin d'avoir des résultats similaires sur l'image des boules $B(x, \lambda\varepsilon)$, pour $\lambda < 1$, une fois qu'on s'est fixé une carte (conforme) $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$. Ceci est beaucoup plus compliqué, car on ne disposera plus d'une inégalité du type $Q^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq Q\delta_{ij}$

(les métriques considérées ne seront plus riemanniennes, et donc ces inégalités n'auront plus de sens). On devra alors utiliser la géométrie conforme des anneaux, présentée dans la partie 1.3. Le théorème correspondant est un des points clés de la démonstration du Théorème Principal, c'est le théorème 5.9.

On énonce donc la proposition suivante, afin de faire le parallèle avec le théorème 5.9, et montrer que la situation est beaucoup plus simple dans le cas lisse, sous l'hypothèse $Q^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq Q\delta_{ij}$; on pourra également faire le parallèle entre les figures 3.3 et 5.1.

Remarque 3.19. *Bien qu'un contrôle des images des boules soit élémentaire sous les hypothèses $Q^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq Q\delta_{ij}$, la partie difficile du travail a en quelque sorte déjà été effectuée avant, lors de la minoration du rayon des boules sur lesquelles on a de telles estimées pour la métrique - c'est-à-dire lors de la minoration du rayon harmonique.*

Proposition 3.20. *Soit (M, g) une variété riemannienne lisse de dimension n , et $H : B(x, r) \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ une carte, avec $H(x) = 0$. On suppose que $r < \text{inj}(x)$, et que les coefficients de la métrique g dans cette carte vérifient*

$$Q^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq Q\delta_{ij},$$

pour un réel $Q > 1$.

De plus, on suppose qu'on a $r < Q$, et pour simplifier les notations du théorème, on pose $\iota = \frac{r}{4Q^{3/2}}$. Pour $s > 0$, on note $B^n(s)$ la boule Euclidienne de \mathbb{R}^n , centrée en 0 et de rayon s .

1. On peut restreindre H pour obtenir une carte

$$H : U \rightarrow B^n\left(\frac{r}{\sqrt{Q}}\right),$$

où U vérifie

$$B\left(x, \frac{r}{Q}\right) \subset U \subset B(x, r).$$

2. On est alors dans la situation suivante :

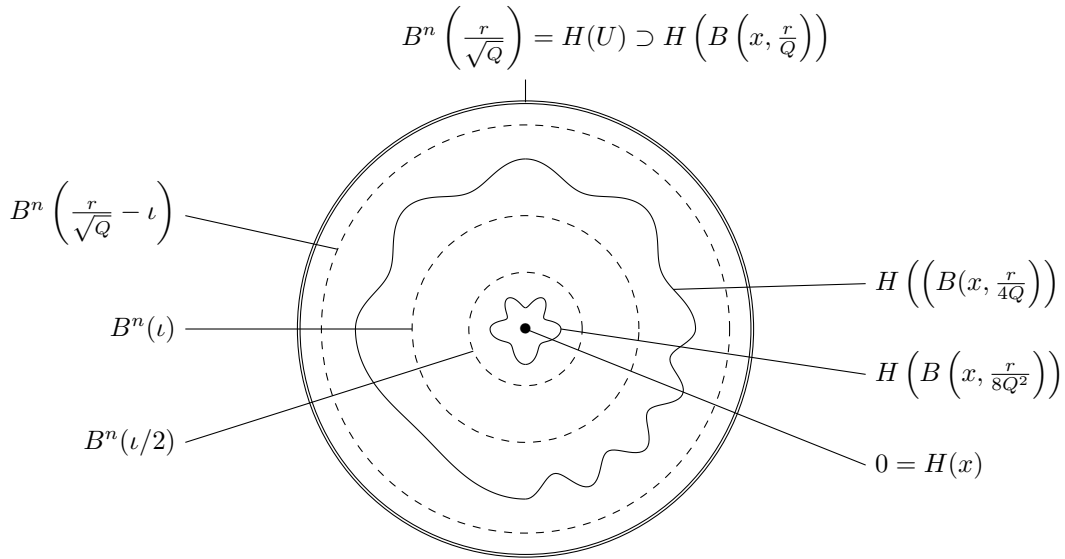


FIGURE 3.3 – On a un contrôle sur l'image des « grosses » boules $B\left(x, \frac{r}{4Q}\right)$ et sur l'image des « petites » boules $B\left(x, \frac{r}{8Q^2}\right)$.

Autrement dit, on a les deux propriétés suivantes :

$$(2a) \quad B^n(\iota) \subset H\left(B\left(x, \frac{r}{4Q}\right)\right) \subset B^n\left(\frac{r}{\sqrt{Q}} - \iota\right)$$

et

$$(2b) \quad H\left(B\left(x, \frac{r}{8Q^2}\right)\right) \subset B^n\left(\frac{\iota}{2}\right).$$

Démonstration. Par les bornes sur la courbure on a, pour tout $z, z' \in A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\|z - z'\| \leq d_{|B(x,r)}(H^{-1}(z), H^{-1}(z')) \leq \sqrt{Q}\|z - z'\| : \quad (3.3)$$

on va utiliser ces inégalités à de nombreuses reprises dans la suite. On rappelle que $d_{|B(x,r)}$ est la distance de longueur induite par d sur $B(x, r)$: on a donc $d \leq d_{|B(x,r)}$. On a également $d_{|B(x,r)}(x, y) = d(x, y)$ pour tout $y \in B(x, r)$, car r est inférieur au rayon d'injectivité et il existe donc une (unique) géodésique minimisante entre x et y , et cette dernière reste dans $B(x, r)$.

Preuve du 1. Il suffit de montrer l'inclusion

$$B\left(x, \frac{r}{Q}\right) \subset H^{-1}\left(B^n\left(\frac{r}{\sqrt{Q}}\right)\right), \quad (3.4)$$

qui est vraie car pour tout $y \in B\left(x, \frac{r}{Q}\right)$ on a, par l'inégalité (3.3) :

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\|H(y)\| = \frac{1}{\sqrt{Q}}\|H(y) - H(x)\| \leq d_{|B(x,r)}(x, y) = d(x, y) < \frac{r}{Q}.$$

Preuve du 2a. Commençons par montrer la première inclusion. Si $\|z\| < \iota = \frac{r}{4Q^{3/2}}$, alors par l'inégalité 3.3 on a

$$d(x, H^{-1}(z)) = d_{|B(x,r)}(x, H^{-1}(z)) \leq \sqrt{Q}\|z\| < \frac{r}{4Q},$$

et donc $H^{-1}(z) \in B\left(x, \frac{r}{4Q}\right)$.

Pour la deuxième inclusion, considérons $y \in B\left(x, \frac{r}{4Q}\right)$. Si $H(y) = 0$, alors il n'y a rien à démontrer, et si $H(y) \neq 0$ définissons $\lambda > 0$ par

$$\lambda\|H(y)\| = \frac{r}{\sqrt{Q}}.$$

Comme $\|H(y)\| < \frac{r}{\sqrt{Q}}$, on a $\lambda > 1$.

Considérons la suite de points $z_m = (\lambda - 2^{-m})H(y)$; pour m assez grand on a $z_m \in B^n\left(\frac{r}{\sqrt{Q}}\right)$. Comme $H\left(\overline{B}\left(x, \frac{r}{2Q}\right)\right) \subset H\left(B\left(x, \frac{r}{Q}\right)\right)$, l'inclusion (3.4) nous montre que

$$H\left(\overline{B}\left(x, \frac{r}{2Q}\right)\right) \subset B^n\left(\frac{r}{\sqrt{Q}}\right).$$

Comme $z_m \in B^n\left(\frac{r}{\sqrt{Q}}\right)$ et $\|z_m\| \rightarrow \frac{r}{\sqrt{Q}}$, il est clair que pour m assez grand on a $z_m \notin H\left(\overline{B}\left(x, \frac{r}{2Q}\right)\right)$, et donc $z_m \notin H\left(B\left(x, \frac{r}{2Q}\right)\right)$. En appliquant l'inégalité (3.3) on obtient

$$\begin{aligned} d_{|B(x,r)}(y, H^{-1}(z_m)) &\leq \sqrt{Q} \cdot \|H(y) - z_m\| \\ &= \sqrt{Q} \cdot (-1 + \lambda - 2^{-m}) \cdot \|H(y)\|. \end{aligned}$$

De plus, comme $y \in B\left(x, \frac{r}{4Q}\right)$ et $H^{-1}(z_m) \notin B\left(x, \frac{r}{2Q}\right)$, on a $d(y, H^{-1}(z_m)) > \frac{r}{4Q}$, et donc avec l'inégalité $d \leq d_{|B(x,r)}$ on obtient

$$\frac{r}{4Q} < \sqrt{Q} \cdot \left(-\|H(y)\| + \frac{r}{\sqrt{Q}} - 2^{-m}\|H(y)\|\right) < -\sqrt{Q}\|H(y)\| + r,$$

et donc

$$\|H(y)\| < \frac{r}{\sqrt{Q}} - \frac{r}{4Q^{3/2}} = \frac{r}{\sqrt{Q}} - \iota.$$

Preuve du 2b. Par l'inégalité (3.3) on a, pour tout $y \in B\left(x, \frac{r}{8Q^2}\right)$:

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\|H(y)\| \leq d_{|B(x,r)}(x, y) = d(x, y) < \frac{r}{8Q^2},$$

et donc

$$\|H(y)\| \leq \frac{r}{8Q^{3/2}} = \frac{\iota}{2}.$$

□

Chapitre 4

Du théorème de Cheeger-Gromov au Théorème Principal

Le but de cette partie est d'expliquer comment on peut adapter les hypothèses du théorème de compacité de Cheeger-Gromov (le théorème 3.12) au cas des surfaces d'Alexandrov.

L'hypothèse la plus facile à adapter est la troisième, celle qui concerne l'aire, car les surfaces d'Alexandrov possèdent naturellement une mesure d'aire. Quant à la première, elle porte sur la courbure de Gauß de la métrique, et dans le cadre singulier des surfaces d'Alexandrov l'objet naturel à considérer est la mesure de courbure. On détaille dans la première partie l'hypothèse correspondante.

La deuxième hypothèse est une borne inférieure sur le rayon d'injectivité, et cette notion n'est pas pertinente dans le cadre singulier des surfaces d'Alexandrov. Dans une deuxième partie, on introduit une nouvelle quantité, le rayon de contractibilité, qui va jouer le rôle du rayon d'injectivité pour les surfaces d'Alexandrov. On en étudie les principales propriétés.

On termine ce chapitre par énoncer quelques corollaires du Théorème Principal, et par se poser la question de la convergence des structures conformes, pour une suite de métriques vérifiant les hypothèses du Théorème Principal.

Remarque 4.1. *Dans le théorème de Cheeger-Gromov, on considère une suite de variétés riemanniennes (M_m, g_m) vérifiant certaines hypothèses ; on ne suppose pas que les variétés M_m sont difféomorphes entre elles. Une des conséquences du théorème est qu'il existe une sous-suite m_k telle que toutes les variétés M_{m_k} sont difféomorphes entre elles.*

Dans le Théorème Principal, on ne considère au contraire qu'une seule surface Σ (munie de différentes métriques d'Alexandrov), pour la raison suivante. Pour espérer obtenir un résultat de convergence, il est nécessaire de supposer une majoration de la mesure de courbure $\Omega = \omega^+ + \omega^-$ des surfaces d'Alexandrov ; mais alors, par la formule de Gauß-Bonnet, le genre de ces surfaces est borné, et donc quitte à considérer une sous-suite on peut supposer que toutes ces surfaces sont difféomorphes. Ainsi, dans le Théorème Principal, on ne perd pas en généralité en considérant des métriques sur une même surface Σ .

4.1 Hypothèse sur la courbure

On a déjà signalé que sur une surface d’Alexandrov, les points x dont la mesure de courbure vérifie $\omega^+(\{x\}) = 2\pi$ posent problème : ce sont des cusps, et ils peuvent être à distance infinie des autres points, auquel cas la topologie définie par la métrique n’est plus la topologie de surface de Σ (la surface peut ne plus être compacte pour cette nouvelle topologie).

On veut donc empêcher l’apparition de tels cusps : on souhaite que toute suite de métriques vérifiant les hypothèses du Théorème Principal converge (après passage à une sous-suite et composition par des difféomorphismes) vers une métrique dont la mesure de courbure vérifie $\omega^+(\{x\}) < 2\pi$ pour tout $x \in \Sigma$. Il est facile de construire des exemples de métriques d_m dont les mesures de courbure vérifient $\omega_m^+(\{x\}) < 2\pi$ pour tout $x \in \Sigma$, mais telles que ω_m^+ converge faiblement vers un Dirac de poids 2π (on peut par exemple penser à une accumulation de singularités coniques, dont les courbures k_i vérifient $\sum_i k_i = 2\pi$). Pour un exemple plus explicite, on pourra se référer également à la partie 4.2.4 et à la figure 4.9. Pour empêcher une telle accumulation il est naturel de demander la condition suivante :

Hypothèse 1 : il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\omega^+(B(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta$ pour tout $x \in \Sigma$.

4.2 Le rayon de contractibilité remplace le rayon d’injectivité

4.2.1 Définition

La définition du rayon d’injectivité d’une surface riemannienne fait intervenir l’application exponentielle, qui est construite en considérant les géodésiques issues d’un point $x \in \Sigma$ (voir la partie 1.2.1) : $\text{inj}(x)$ est le plus grand $r > 0$ tel que \exp_x soit un difféomorphisme, de $B(r) \subset T_x\Sigma$ sur son image.

Dans un cadre singulier, dans lequel on dispose toujours de l’existence de géodésiques, on pourrait être tentés de définir de même une application exponentielle *singulière* en un point x : à un vecteur tangent $v \in T_x\Sigma$ on associe la valeur en 1 de l’*unique géodésique* γ vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = v$.

Le problème est qu’avec des singularités coniques de courbures négatives, on n’a pas unicité des géodésiques (à vitesse initiale prescrite) : sur la figure suivante, les deux géodésiques γ_1 et γ_2 ont même vitesse initiale.

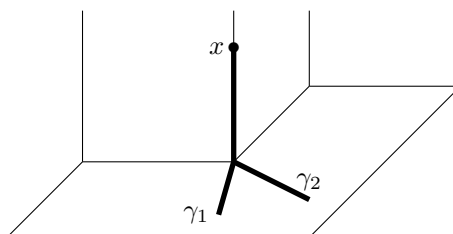


FIGURE 4.1 – Exemple de *branching geodesics*.

Supposons que l'on soit dans un cas idéal, où on a unicité des géodésiques (à vitesse initiale prescrite). On peut alors définir, de la même façon que dans le cas lisse, un rayon d'injectivité $\text{inj}(x)$, égal au plus grand $r > 0$ tel que \exp_x soit (par exemple) un homéomorphisme, de $B(r) \subset T_x \Sigma$ sur son image. Mais alors en présence d'une singularité conique de courbure positive, cette quantité n'est pas pertinente non plus, pour la raison suivante : ce rayon d'injectivité $\text{inj}(x)$ tends vers zéro quand x se rapproche d'un point conique p , car deux vecteurs tangents différents ont pour image un même point $y \in \Sigma$, arbitrairement proche de p .

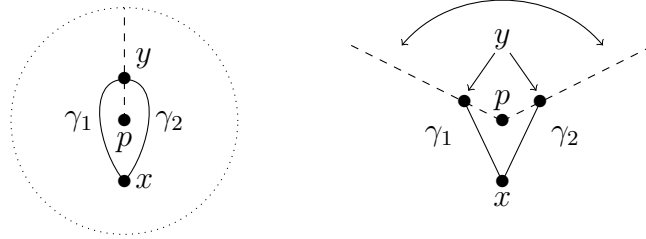


FIGURE 4.2 – Cône vu du dessus (à gauche), ou découpé selon les pointillés (à droite) : γ_1 et γ_2 sont deux géodésiques minimisantes entre x et y .

On cherche donc à introduire une nouvelle quantité strictement positive, que l'on va noter $\text{cont}(\Sigma, d, x)$ dans la suite, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\text{cont}(\Sigma, d, x)$ a un sens si (Σ, d) est une surface d'Alexandrov, et cette quantité n'est « pas trop éloignée » du rayon d'injectivité si la métrique est riemannienne.
2. Une borne inférieure sur

$$\text{cont}(\Sigma, d) := \inf_{x \in \Sigma} \text{cont}(\Sigma, d, x)$$

empêche un pincement de la surface. En d'autres termes, on souhaite que dans l'exemple suivant, $\text{cont}(\Sigma, d, x)$ soit très petit :

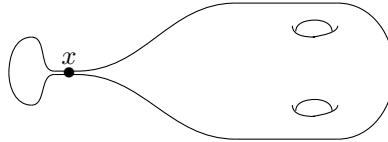


FIGURE 4.3 – La surface est pincée en x

3. Une borne inférieure sur $\text{cont}(\Sigma, d, x)$ nous donne des propriétés intéressantes (sur le volume des boules par exemple).

La surface Σ étant seulement munie d'une distance, une des façons de contrôler sa géométrie est d'étudier le comportement des (petites) boules. Dans l'exemple de la figure 4.3, les boules de très petits rayons autour de x sont homéomorphes à des disques, mais pour des rayons plus grands ces boules vont être homéomorphes à des anneaux. On pourrait donc utiliser la

Définition 4.2 (provisoire). *On pose*

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) = \sup \{r > 0 \mid B(x, r) \text{ est homéomorphe à un disque}\}.$$

Le problème est que, dans l'exemple précédent, cette quantité n'est en fait pas petite : si x est à une distance de l'ordre de $2r$ des trous de la surface, alors une boule de rayon r est homéomorphe à un disque :

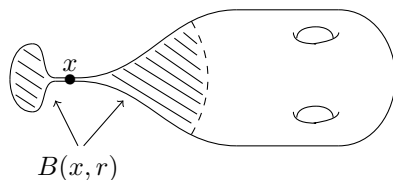


FIGURE 4.4 – La boule $B(x, r)$ est homéomorphe à un disque.

Il est donc naturel de plutôt considérer la

Définition 4.3 (provisoire, bis). *On pose*

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) = \sup \{r > 0 \mid \text{pour tout } s < r, B(x, s) \text{ est homéomorphe à un disque ouvert}\}$$

(dans l'exemple précédent, cette quantité est petite).

On remarque que cette définition (provisoire) satisfait à la troisième des conditions espérées pour la quantité $\text{cont}(\Sigma, d, x)$: une borne inférieure sur $\text{cont}(\Sigma, d, x)$ nous donne une minoration du volume des boules (corollaire 2.24).

Dans la suite, on souhaitera introduire des coordonnées conformes sur des petites boules. On rappelle le résultat du théorème de représentation conforme des surfaces d'Alexandrov de Reshetnyak (théorème-définition 2.15) : si U est homéomorphe à un disque ouvert, et \bar{U} est homéomorphe à un disque fermé, alors on peut introduire des coordonnées conformes sur U . Dans la définition du rayon de contractibilité, on a donc besoin que les boules fermées soient homéomorphes à des disques fermés.

Il est clair qu'en général, aucune des deux conditions U homéomorphe à un disque ouvert et \bar{U} homéomorphe à un disque fermé n'implique l'autre : sur la sphère ronde \mathbb{S}^2 , la boule ouverte de rayon π est $\mathbb{S}^2 - \{\text{point}\}$, qui est homéomorphe à un disque ouvert, et l'adhérence de cette boule est \mathbb{S}^2 tout entier ; et dans l'exemple suivant, où on a collé à une sphère ronde un long tube, la boule (ouverte) centrée en x et de rayon π est homéomorphe à un anneau, alors que l'adhérence de cette boule est homéomorphe à un disque fermé :

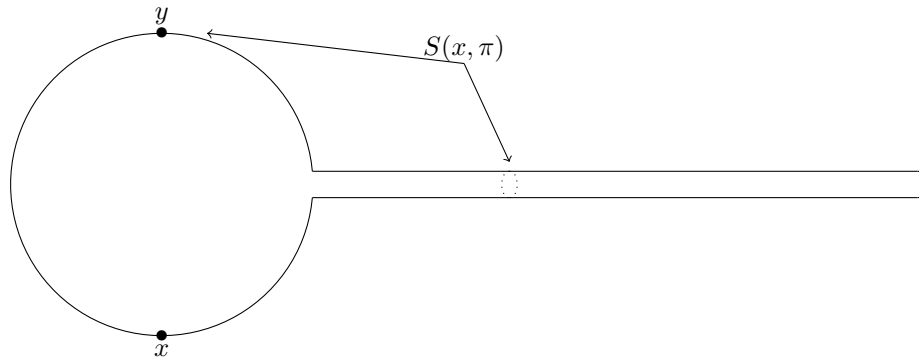


FIGURE 4.5 – $B(x, \pi)$ est un anneau, et $\overline{B}(x, \pi)$ est un disque fermé.

Malgré les remarques précédentes, on peut se poser la question suivante :

Question 4.4. *La propriété*

« pour tout $s < r$, $B(x, s)$ est homéomorphe à un disque ouvert »

implique-t-elle

« pour tout $s < r$, $\overline{B}(x, s)$ est homéomorphe à un disque fermé » ?

La réponse à cette question n'est pas connue de l'auteur. La difficulté vient du fait qu'il n'existe pas de caractérisation simple d'espaces topologiques homéomorphes à des disques fermés. Au contraire, en ce qui concerne l'homéomorphie avec des disques ouverts, la situation est beaucoup plus simple : par le théorème d'uniformisation, il suffit qu'une partie du plan soit simplement connexe pour qu'elle soit homéomorphe à un disque ouvert. Cette remarque nous permet de montrer la

Proposition 4.5. *La propriété*

« pour tout $s < r$, $\overline{B}(x, s)$ est homéomorphe à un disque fermé »

implique la propriété

« pour tout $s < r$, $B(x, s)$ est homéomorphe à un disque ouvert ».

Démonstration. Soit $s < r$, et s' tel que $s < s' < r$. Soit H un homéomorphisme entre $\overline{B}(x, s')$ et le disque fermé $\overline{D}(1)$. Comme $H(B(x, s))$ est un ouvert du plan, pour montrer que $H(B(x, s))$ est homéomorphe à un disque ouvert, il nous suffit de montrer que cette partie du plan est simplement connexe.

Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow H(B(x, s))$ une courbe continue. Par compacité, la courbe $H^{-1}(\gamma)$ dans $B(x, s)$ est incluse dans une boule $\overline{B}(x, s - \iota)$ pour un certain $\iota > 0$. Alors γ est dans $H(\overline{B}(x, s - \iota))$, qui est homéomorphe à un disque fermé (et donc simplement connexe). γ est donc homotope à zéro dans $H(\overline{B}(x, s - \iota))$, et donc homotope à zéro dans $H(B(x, s))$, ce qui termine la preuve. \square

On définit donc la quantité suivante :

Définition 4.6. Le rayon de contractibilité de la surface d’Alexandrov (Σ, d) au point x est

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) := \sup \{r > 0 \mid \text{pour tout } s < r, \overline{B}(x, s) \text{ est homéomorphe à un disque fermé}\}$$

(le nom provient du fait que les boules fermées sont alors contractiles ; c’est une traduction approximative de l’anglais *contractibility radius*). On définit également le rayon de contractibilité de (Σ, d) par

$$\text{cont}(\Sigma, d) := \inf_{x \in \Sigma} \text{cont}(\Sigma, d, x).$$

La deuxième hypothèse du théorème principal s’écrit donc

$$\text{Hypothèse 2 : il existe } c > 0 \text{ tel que } \text{cont}(\Sigma, d) > c.$$

Remarque 4.7. L’auteur a remarqué très récemment que le terme anglais *contractibility radius* a déjà été utilisé, par K. Shiohama [Shi83] et T. Yamaguchi [Yam88]. Ces deux notions (différentes) de rayon de contractibilité $c(x)$ en un point x n’ont été étudiées que dans le cas de métriques riemanniennes lisses, en dimension quelconque $n \geq 2$. Dans [Shi83], $c_1(x)$ est le plus grand r tel que $\overline{B}(x, r)$ est contractile ; dans [Yam88], on considère les points critiques de la fonction distance $d(x, \cdot)$ pour définir $c_2(x)$. L’inégalité $c_2(x) \geq c_1(x)$ relie ces deux définitions.

Ces notions sont également reliées à celle de fonction de contractibilité (*contractibility function* en anglais), qui étudie pour quelles valeurs de $\lambda > 1$ la boule $B(x, r)$ est contractile dans la boule $B(x, \lambda r)$. Cette notion est apparue pour la première fois dans un article de M. Gromov [Gro81a], voir aussi [Ber03], page 392. Encore une fois, ces notions ne sont étudiées que dans le cas de métriques riemanniennes lisses.

La proposition 4.5 se réécrit de la façon suivante :

Proposition 4.8. Pour tout $r < \text{cont}(\Sigma, d, x)$, $B(x, r)$ est homéomorphe à un disque ouvert.

On peut donc notamment utiliser le corollaire 2.24 pour minorer le volume des boules.

On peut remarquer ici qu’on n’a pas encore montré que la définition du rayon de contractibilité a un sens : on prend une borne supérieure sur un ensemble qui pourrait être vide. On doit donc montrer la proposition suivante :

Proposition 4.9. La définition 4.6 a un sens. Autrement dit, si (Σ, d) est une surface d’Alexandrov, alors pour tout $x \in \Sigma$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $s < r$, $\overline{B}(x, s)$ est homéomorphe à un disque fermé.

Remarque 4.10. On a besoin dans cette proposition de supposer que (Σ, d) est une surface d’Alexandrov, et non pas un espace métrique (intrinsèque) quelconque ; l’auteur ne sait pas si cette hypothèse peut être affaiblie. Ainsi, il n’est pas sûr que la notion de rayon de contractibilité ait un sens dans le cadre plus général des espaces métriques intrinsèques (bien qu’il soit seulement question de notion métriques dans la définition !)...

La proposition 4.9 est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.11. *Soit U un ensemble homéomorphe à un disque ouvert, avec $x \in U$ et $\omega^+(U - \{x\}) < \pi$. Si $\overline{B}(x, r) \subset U$, alors pour tout $s \leq r$, $\overline{B}(x, s)$ est homéomorphe à un disque fermé.*

Vu l'importance de ce résultat dans la suite de ce manuscrit, on donnera dans la partie 4.2.4 une démonstration heuristique d'un résultat similaire, mais un peu plus faible (c'est la proposition 4.24). Dans le cas général qui nous intéresse ici, on doit se reposer sur un résultat profond de Y. D. Burago et M. B. Stratilatova sur la structure des sphères dans les surfaces d'Alexandrov (voir le livre [Res93]). En général, la sphère $S(x, r)$ peut avoir une structure compliquée (elle peut par exemple ne pas être connexe, comme dans la figure 4.5). Mais si on a une information sur la partie positive de la courbure, on a le

Théorème 4.12 (Y. D. Burago et M. B. Stratilatova). *Soit U un ensemble homéomorphe à un disque ouvert, avec $x \in U$ et $\omega^+(U - \{x\}) < \pi$. Si $S(x, r) \subset U$, alors $S(x, r)$ est une courbe de Jordan.*

On comprendra un peu mieux plus tard le rôle particulier joué par une courbure positive plus petite (ou plus grande) que π ; notamment, les cônes Euclidiens de courbure plus petite (ou plus grande) que π n'ont pas du tout les mêmes propriétés, vis-à-vis du rayon de contractibilité (voir la partie 4.2.3).

Preuve du lemme 4.11. Soit $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ un homéomorphisme, et soit $s \leq r$. Comme $S(x, s) \subset \overline{B}(x, r) \subset U$, on peut appliquer le théorème 4.12 : $h(S(x, s))$ est une courbe de Jordan Γ . $\mathbb{C} - \Gamma$ a deux composantes connexes : de façon naturelle on appelle la composante bornée l'intérieur de Γ , et la composante non bornée l'extérieur de Γ . Comme $B(x, s)$ est ouvert et fermé dans $U - S(x, s)$, $h(B(x, s))$ est une composante connexe de $h(U - S(x, s)) = \mathbb{C} - \Gamma$, et on a donc

$$h(B(x, s)) = \text{intérieur de } \Gamma, \text{ ou } h(B(x, s)) = \text{extérieur de } \Gamma.$$

Le second cas est impossible, car l'adhérence de $h(B(x, s))$ est $h(\overline{B}(x, s))$, qui est compact, et l'adhérence de l'extérieur de Γ n'est pas compact.

Donc $h(B(x, s))$ est l'intérieur de Γ , et $h(\overline{B}(x, s))$ est l'adhérence de l'intérieur de Γ , et par le théorème de Jordan-Schoenflies, on sait que ces ensembles sont (respectivement) homéomorphes à des disques ouverts (respectivement, fermés). \square

On peut maintenant démontrer la proposition 4.9 :

Démonstration de la proposition 4.9. Par la structure de surface de Σ , on sait qu'on peut construire une suite décroissante d'ouverts (U_i) , tels que tous les U_i sont homéomorphes à des disques ouverts, avec

$$\{x\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i.$$

On a alors

$$0 = \omega^+\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (U_i - \{x\})\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \omega^+(U_i - \{x\}),$$

et donc il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega^+(U_{i_0} - \{x\}) < \pi$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(x, r) \subset U_{i_0}$: on peut appliquer le lemme 4.11, et obtient que pour tout $s \leq r$, $\overline{B}(x, s)$ est homéomorphe à un disque fermé. \square

On sait maintenant que le rayon de contractibilité est bien défini, on peut énoncer une nouvelle fois le lemme 4.11 en utilisant cette nouvelle terminologie :

Proposition 4.13. *Supposons avoir $\overline{B}(x, r) \subset U$, où U est un ensemble homéomorphe à un disque ouvert, avec $\omega^+(U - \{x\}) < \pi$. Alors*

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) \geq r.$$

Sur des surfaces d'Alexandrov à courbure négative, la condition $\omega^+(U - \{x\}) < \pi$ est forcément vérifiée, et dans ce cas on peut définir le rayon de contractibilité de la façon plus simple suivante (ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite) :

Corollaire 4.14. *Sur une surface d'Alexandrov (Σ, d) de courbure négative (c'est-à-dire telle que $\omega^+ \equiv 0$), on a*

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) = \sup \{r > 0 \mid B(x, r) \text{ est homéomorphe à un disque ouvert}\}.$$

Démonstration. Notons A le membre de droite. Par la proposition 4.5, l'ensemble

$$\{r > 0 \mid \forall s < r, \overline{B}(x, s) \text{ est homéomorphe à un disque fermé}\}$$

est inclus dans

$$X := \{r > 0 \mid \forall s < r, B(x, s) \text{ est homéomorphe à un disque ouvert}\},$$

et donc $\text{cont}(\Sigma, d, x) \leq \sup X$.

On a également $\sup X \leq A$: en effet, si $r_m = \sup X - 1/m$, alors il existe $r'_m > r_m$ tel que $r'_m \in X$, et donc $B(x, r_m)$ est homéomorphe à un disque ouvert, ce qui donne $r_m \leq A$, puis $\sup X \leq A$ en passant à la limite. On a donc

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) \leq A.$$

Concernant l'inégalité dans l'autre sens, posons $r_m = A - 1/m$. Pour tout m , il existe $r'_m > r_m$ tel que $B(x, r'_m)$ soit homéomorphe à un disque ouvert ; on a de plus $\overline{B}(x, r_m) \subset B(x, r'_m)$, et on peut donc appliquer la proposition 4.13 pour obtenir

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) \geq r_m = A - 1/m.$$

On obtient finalement $\text{cont}(\Sigma, d, x) \geq A$ en faisant tendre m vers l'infini. \square

La surface Σ étant compacte, on a $\overline{B}(x, \text{diam } \Sigma) = \Sigma$, et donc les boules fermées de rayon $\text{diam } \Sigma$ ne sont pas homéomorphes à des disques fermés. On a donc les inégalités

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) \leq \text{diam } \Sigma, \text{ et } \text{cont}(\Sigma, d) \leq \text{diam } \Sigma.$$

En ce qui concerne les surfaces munies d'une métrique riemannienne lisse, on sait que le rayon d'injectivité de la variété $\text{inj}(\Sigma, g) = \inf_{x \in \Sigma} \text{inj}(\Sigma, g, x)$ est strictement positif. Au contraire, le rayon de contractibilité d'une surface d'Alexandrov compacte (Σ, d) peut être nul : ceci arrive par exemple dès qu'il y a un cône Euclidien de courbure $> \pi$ (voir la partie 4.2.3). C'est en fait le seul cas où cela se produit :

Proposition 4.15. *Si (Σ, d) est une surface d'Alexandrov compacte telle que $\omega^+(\{x\}) < \pi$ pour tout $x \in \Sigma$, alors $\text{cont}(\Sigma, d) > 0$.*

Démonstration. Soit (x_m) une suite de Σ telle que

$$\text{cont}(\Sigma, d, x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \text{cont}(\Sigma, d).$$

Par compacité, on peut supposer $x_m \rightarrow x \in \Sigma$. Comme dans la preuve de la proposition 4.9, on considère une suite décroissante d'ouverts (U_i) , homéomorphes à des disques ouverts, tels que

$$\{x\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i.$$

Comme $\omega^+(\{x\}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \omega^+(U_i) < \pi$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega^+(U_{i_0}) < \pi$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(x, r) \subset U_{i_0}$. Pour m assez grand on a $\overline{B}(x_m, r/2) \subset \overline{B}(x, r) \subset U_{i_0}$: comme $\omega^+(U_{i_0} - \{x_m\}) \leq \omega^+(U_{i_0}) < \pi$, on peut appliquer la proposition 4.13 pour obtenir $\text{cont}(\Sigma, d, x_m) \geq r/2$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient finalement $\text{cont}(\Sigma, d) \geq r/2 > 0$. \square

On termine cette section d'introduction du rayon de contractibilité par la remarque suivante : l'auteur de ce manuscrit ne sait pas si la fonction $x \mapsto \text{cont}(\Sigma, d, x)$ est semi-continue supérieurement. Par contre, il est facile de montrer que la fonction

$$x \mapsto \sup \{r > 0 \mid \text{pour tout } s < r, B(x, s) \text{ est homéomorphe à un disque ouvert}\}$$

(c'est la définition provisoire 4.3 du rayon de contractibilité) est semi-continue supérieurement.

Remarque 4.16. *On ne peut pas espérer une semi-continuité inférieure (et donc, a fortiori, une continuité) pour une telle quantité, ou pour le rayon de contractibilité. En effet, on verra plus loin que dans le cas d'un cône Euclidien de courbure $> \pi$, ces quantités tendent vers zéro quand le point se rapproche du sommet du cône, bien que la valeur en le sommet du cône soit $+\infty$.*

Démonstration. On reproduit quasiment à l'identique la démonstration de la proposition 4.5. Notons

$$c(x) = \sup \{r > 0 \mid \text{pour tout } s < r, B(x, s) \text{ est homéomorphe à un disque ouvert}\} :$$

on veut montrer que

$$\limsup_{y \rightarrow x} c(y) \leq c(x).$$

Considérons donc une suite x_m telle que $x_m \rightarrow x$ et $c(x_m) \rightarrow l$; on veut montrer que $l \leq c(x)$. Fixons $r < l$: on veut montrer que $B(x, r)$ est homéomorphe à un disque ouvert.

Soit $r < r' < l$. Pour m assez grand, on a $r' < c(x_m)$ et $B(x, r) \subset B(x_m, r')$. Comme $B(x_m, r')$ est homéomorphe à un disque ouvert, pour montrer que $B(x, r)$ est homéomorphe à un disque ouvert, il suffit de montrer que ce dernier est simplement connexe.

Considérons donc γ , une courbe continue dans $B(x, r)$. Par compacité, γ est dans une boule $B(x, r - \varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$; supposons avoir de plus $r - \varepsilon/2 < l$. Pour m assez grand on a

$$B(x, r - \varepsilon) \subset B(x_m, r - \varepsilon/2) \subset B(x, r),$$

et on peut également supposer $r - \varepsilon/2 < c(x_m)$. La boule $B(x_m, r - \varepsilon/2)$ est donc simplement connexe : γ est donc homotope à zéro dans $B(x_m, r - \varepsilon/2)$, et donc dans $B(x, r)$, ce qu'on voulait démontrer. \square

Comme signalé précédemment, toute la difficulté pour montrer une propriété analogue pour la fonction $x \mapsto \text{cont}(\Sigma, d, x)$ vient du fait qu'il n'existe pas (à la connaissance de l'auteur) de caractérisation topologique simple d'ensembles homéomorphes à des disques fermés (contrairement à la propriété d'être simplement connexe, pour des disques ouverts).

4.2.2 Cas d'une métrique riemannienne

Si (Σ, g) est une surface compacte munie d'une métrique riemannienne, alors pour tout $r < \text{inj}(\Sigma, g, x)$, l'application exponentielle en x est un difféomorphisme d'un disque fermé de rayon r sur $\overline{B}(x, r)$, ce qui montre que

$$\text{cont}(\Sigma, d_g, x) \geq \text{inj}(\Sigma, g, x) \text{ et } \text{cont}(\Sigma, d_g) \geq \text{inj}(\Sigma, g).$$

En particulier, on a $\text{cont}(\Sigma, d_g) > 0$. Ce fait est aussi une conséquence de la propriété 4.15, car la mesure de courbure $\omega = KdA$ d'une surface riemannienne n'a pas d'atome.

Pour ce qui est des inégalités dans l'autre sens, on montre la proposition suivante : à courbure bornée, une borne inférieure sur le rayon de contractibilité donne une borne inférieure sur le rayon d'injectivité. Ainsi, dans le théorème de Cheeger-Gromov, une minoration du rayon d'injectivité peut être remplacée par une minoration du rayon de contractibilité. Ceci répond donc d'une certaine manière à la première des conditions espérées pour la quantité $\text{cont}(\Sigma, d, x)$ (voir le début de la partie 4.2.1) : si la métrique est riemannienne, le rayon de contractibilité n'est « pas trop éloigné » du rayon d'injectivité.

Proposition 4.17. *Soient $\Lambda > 0$ et $c > 0$. Il existe une constante $i = i(\Lambda, c)$ vérifiant la propriété suivante. Pour toute surface compacte Σ et toute métrique riemannienne g sur Σ , vérifiant $|K| \leq \Lambda$ et $\text{cont}(\Sigma, d_g) \geq c$, on a*

$$\text{inj}(\Sigma, g) \geq i.$$

Démonstration. Par un résultat bien connu de W. Klingenberg (voir par exemple [Ber03]), la borne sur la courbure nous donne l'estimation suivante :

$$\text{inj}(\Sigma, g) \geq \min \left(\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}, \frac{1}{2} \cdot \text{longueur de la plus petite géodésique fermée} \right).$$

Considérons donc une géodésique fermée γ , de longueur l , et supposons $l < c$; on cherche à minorer l . La courbe γ est incluse dans une certaine boule B de rayon $l < \text{cont}(\Sigma, d)$, qui est homéomorphe à un disque ouvert (voir la proposition 4.8). γ borne donc un domaine

$U \subset B$, homéomorphe à un disque ouvert. Comme la courbure géodésique de la frontière ∂U de U est nulle, le théorème de Gauß-Bonnet nous donne

$$2\pi = \int_U K dA,$$

et donc

$$2\pi \leq \Lambda \cdot \text{aire}(U).$$

Mais on a $U \subset B$, donc $\text{aire}(U) \leq \text{aire}(B)$, et comme $K \geq -\Lambda$, par le théorème de Bishop-Gromov (voir le théorème 1.6), l'aire de la boule B est au plus l'aire d'une boule de rayon l sur une surface complète simplement connexe de courbure constante $-\Lambda < 0$. Cette aire est au plus $\sqrt{\Lambda} \cdot \exp(l/\sqrt{\Lambda})$, donc on obtient

$$2\pi \leq \Lambda^{3/2} \cdot \exp(l/\sqrt{\Lambda}),$$

ce qui donne finalement

$$\text{inj}(\Sigma, g) \geq \min\left(\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}, \frac{c}{2}, \frac{\sqrt{\Lambda} \ln(2\pi/\Lambda^{3/2})}{2}\right).$$

□

4.2.3 Rayon de contractibilité des cônes Euclidiens

On rappelle ici que l'idée générale du travail de cette thèse est de compactifier l'ensemble des métriques à singularités coniques. Il est donc naturel de s'intéresser au rayon de contractibilité des cônes Euclidiens.

Considérons donc un cône Euclidien d'angle au sommet $\theta > 0$. Rappelons que la courbure au sommet p du cône est $k = 2\pi - \theta$ (la mesure de courbure de la surface d'Alexandrov est $\omega = (2\pi - \theta)\delta_p$).

Cas d'une courbure faible ($k < \pi$)

Dans le cas d'un cône Euclidien Σ , de sommet p et d'angle $\theta > \pi$ (c'est-à-dire d'une courbure $k < \pi$), le rayon de contractibilité est infini : toute boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est homéomorphe à un disque fermé. En effet, si $d(x, p) \geq r$, alors $\overline{B}(x, r)$ n'est rien d'autre qu'une boule Euclidienne fermée. Et si $d(x, p) < r$, il suffit de découper le cône le long de la droite (px) pour obtenir le dessin suivant : $\overline{B}(x, r)$ est la réunion de deux demi-disques, recollés comme indiqués par la flèche.

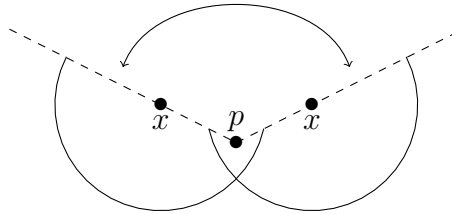


FIGURE 4.6

Remarque 4.18. *On aurait également pu utiliser la proposition 4.13 : le cône Euclidien Σ est homéomorphe à \mathbb{C} (et donc à un disque ouvert), et pour tout $x \in \Sigma$ et $r > 0$ on a $\omega^+(\Sigma - \{x\}) \leq \omega^+(\Sigma) < \pi$, et $\overline{B}(x, r) \subset \Sigma$, ce qui implique $\text{cont}(\Sigma, d, x) > r$.*

Cas d'une courbure forte ($k > \pi$)

Considérons un cône Euclidien Σ , de sommet p et d'angle $\theta < \pi$ (c'est-à-dire de courbure $k > \pi$). Il est clair que les boules fermées centrées en p sont homéomorphes à des disques fermés : on a donc

$$\text{cont}(\Sigma, d, p) = \infty.$$

On va montrer que pour tout $x \neq p$ on a

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) = d(x, p) \cdot \sin(\theta/2). \quad (4.1)$$

Ainsi, le rayon de contractibilité en x tends vers zéro quand x se rapproche du sommet du cône, ce qui nous montre que

$$\text{cont}(\Sigma, d) = 0.$$

Pour $x \neq p$, découpons le cône selon la droite (px) (comme précédemment), et traçons en pointillés la bissectrice du secteur angulaire ainsi obtenu.

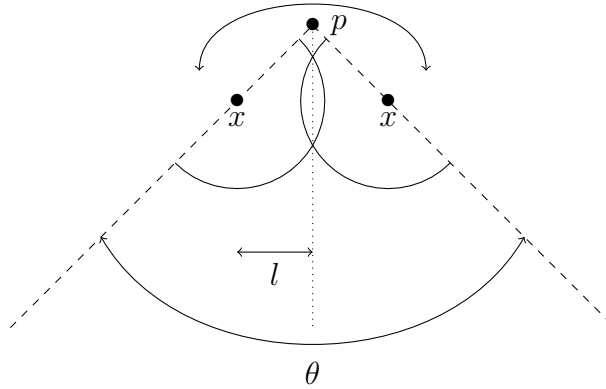


FIGURE 4.7

Plaçons nous en un point x , et considérons un rayon r tel que l'on soit dans la situation de la figure précédente, c'est-à-dire tel que r soit inférieur à $d(x, p)$, mais supérieur à la distance de x à la ligne en pointillés (notée l) ; comme $\sin(\theta/2) = l/d(x, p)$ on a donc

$$d(x, p) \cdot \sin(\theta/2) < r < d(x, p).$$

Pour un tel rayon r , on voit sur la figure précédente que $\overline{B}(x, r)$ est la réunion de deux demi-disques, recollés comme indiqué ; la surface obtenue est ainsi homéomorphe à un anneau $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Une autre façon de voir que cette surface n'est pas simplement connexe est de remarquer que le segment (Euclidien) joignant les deux copies de x dans la figure précédente correspond à une courbe fermée dans $\overline{B}(x, r)$, qui n'est pas homotope à zéro

dans $\overline{B}(x, r)$; le problème vient bien sûr du fait que le sommet p du cône n'est pas dans $\overline{B}(x, r)$.

Par ailleurs, la figure précédente nous montre aussi que si $r < d(x, p) \cdot \sin(\theta/2)$, alors $\overline{B}(x, r)$ n'est rien d'autre qu'une boule Euclidienne fermée. Tout ceci montre qu'on a bien l'égalité (4.1).

Finalement, on a $\text{cont}(\Sigma, d) = 0$ dès qu'il y a un point conique d'angle $< \pi$. Et donc, dans le Théorème Principal, les singularités d'angles $< \pi$ (c'est-à-dire de courbure $> \pi$) ne sont pas autorisées. On pourrait alors se demander si cette condition n'est pas trop restrictive.

Remarque 4.19. *En réalité, on n'a pas montré rigoureusement que sous l'hypothèse d'un rayon de contractibilité strictement positif, on a $\omega^+(\{x\}) \leq \pi$ pour tout $x \in \Sigma$; par l'étude faite précédemment, on sait seulement que cette propriété est vraie si les voisinages des points coniques sont isométriques à des voisinages de sommets de cônes Euclidiens. L'auteur conjecture que cette propriété est vraie en toute généralité.*

La condition $\omega^+(\{x\}) \leq \pi$ pour tout $x \in \Sigma$ n'est pas trop restrictive, pour la raison suivante. Lorsque des singularités s'accroissent (ce qui est le cadre d'application du théorème), la courbure des points coniques qui se rapprochent les uns des autres doit tendre vers zéro, tout simplement par une application de la formule de Gauß-Bonnet : la somme des courbures doit être constante, donc si le nombre de points tend vers l'infini, la courbure en chaque point doit tendre vers zéro. Ainsi, il n'y aura pas de singularité de courbure $> \pi$, et on pourra donc espérer avoir une borne inférieure sur le rayon de contractibilité. Par exemple dans le cas décrit dans l'introduction, les singularités s'accroissent et on a bien une borne inférieure sur le rayon de contractibilité (on peut par exemple appliquer la proposition 4.13) :

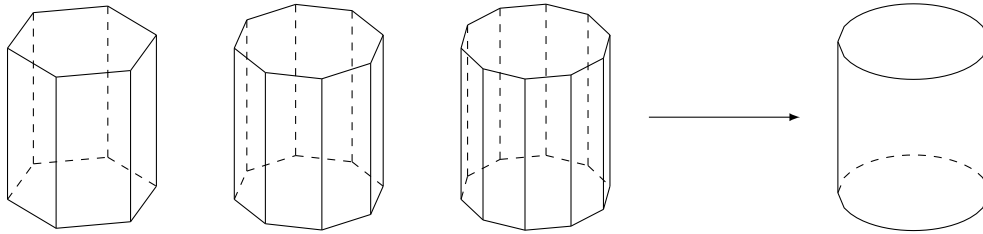


FIGURE 4.8 – Si le polyèdre a N_m sommets à l'étape m de la convergence, par le théorème de Gauß-Bonnet, la courbure k_m en les N_m points coniques vérifie $N_m k_m = 4\pi$, donc k_m tend vers zéro quand le nombre de points coniques N_m tend vers l'infini.

Remarque 4.20. *Le rôle particulier joué par π pour la valeur d'un angle conique a déjà été observé, voir par exemple la thèse de D. Ramos-Guallar : sur une surface à singularités coniques dont la courbure est bornée, des points coniques d'angles $< \pi$ ne peuvent pas trop se rapprocher. Ceci est en accord avec la remarque précédente.*

4.2.4 L'hypothèse 2. n'implique pas l'hypothèse 1.

Rappelons les deux premières hypothèses du Théorème Principal :

- Hypothèse 1 : il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\omega^+(B(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta$ pour tout $x \in \Sigma$,
- Hypothèse 2 : il existe $c > 0$ tel que $\text{cont}(\Sigma, d) > c$.

De plus, on a vu que l'hypothèse 2 implique l'absence de points coniques de courbure $> \pi$; on peut donc se poser la

Question 4.21. *L'hypothèse 2 implique-t-elle l'hypothèse 1 ?*

On va donner la réponse à cette question en considérant la surface Σ suivante :

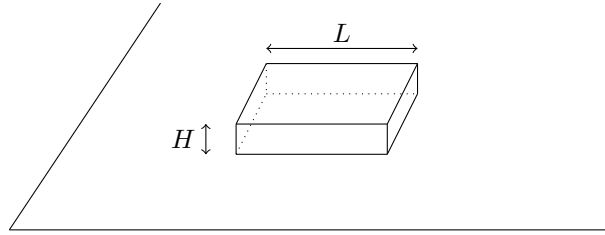


FIGURE 4.9 – Surface Σ

L est la longueur du côté du carré qui constitue le dessus de la boîte, et H est la hauteur de la boîte. La surface à considérer est constituée du plan à côté de la boîte, plus les quatre côtés de la boîte, plus le dessus de la boîte. Cette surface n'est rien d'autre qu'un plan, muni d'une métrique avec 8 singularités coniques : les 4 sommets de la boîte sont des singularités d'angle $3\pi/2$ (donc de courbure $\pi/2$), et les 4 pieds de la boîte sont des singularités d'angle $5\pi/2$ (donc de courbure $-\pi/2$). On remarque qu'on vérifie bien la formule de Gauß-Bonnet dans cet exemple : on a $4 \times (\pi/2) + 4 \times (-\pi/2) = 0$.

Si $H \ll L$ (comme sur la figure), alors le rayon de contractibilité de cette surface est infini. On peut le voir en se plaçant en un point x , et en faisant grossir le rayon des boules fermées $\overline{B}(x, r)$: il est clair que ces boules vont toujours être homéomorphes à des disques fermés, et on n'aura jamais une situation comme celle de la figure 4.7 (où les boules $\overline{B}(x, r)$ deviennent des anneaux). On va essayer dans la suite de cette partie de donner une démonstration un peu plus convaincante de cette propriété.

Remarque 4.22. *Dans le cas où $H \gg L$ (c'est le cas d'un grand building dans la rue), si x est à une hauteur $H/2$, alors il est clair que la boule $\overline{B}(x, 3L)$ est homéomorphe à un anneau, et dans ce cas on a donc*

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) < 3L.$$

Cette surface Σ au rayon de contractibilité infini répond à la question 4.21. En effet, en faisant un changement d'échelle de telle sorte que la boîte s'écrase sur un point x (c'est-à-dire en multipliant L et H par $\lambda \rightarrow 0$), on obtient une surface à rayon de contractibilité toujours infini, mais on ne pourra pas espérer avoir une inégalité du type $\omega^+(B(x, \varepsilon)) < 2\pi - \delta$: pour λ assez petit, tous les sommets de la boîte vont être dans $B(x, \varepsilon)$, et on aura donc $\omega^+(B(x, \varepsilon)) = 2\pi$. Si l'on préfère, quand λ tends vers zéro, ω^+ converge faiblement vers $2\pi \cdot \delta_x$.

Dans la suite, on ne va pas montrer rigoureusement que le rayon de contractibilité est infini, mais on va donner des éléments de démonstration de la propriété suivante :

(P) Pour tous $x \in \Sigma$ et $r > 0$, $B(x, r)$ est homéomorphe à un disque ouvert.

On a déjà signalé que cette propriété est plus faible que de dire que le rayon de contractibilité est infini (voir la question 4.4) ; il est question ici de boules ouvertes, et non de boules fermées (et à plusieurs reprises, on a fait remarquer que l'étude des boules ouvertes est plus facile que celle des boules fermées). Il est néanmoins intéressant de démontrer la propriété (P), pour différentes raisons.

Tout d'abord, il n'est pas très difficile de se convaincre que pour cette surface très particulière, le fait de passer des boules ouvertes aux boules fermées ne va pas changer grand chose, et ceci donne donc une démonstration heuristique du fait que le rayon de contractibilité est infini (et montre donc que l'hypothèse 2 n'implique pas l'hypothèse 1).

Ensuite, la démonstration en elle-même est intéressante, pour deux raisons. Tout d'abord, elle nous invite à étudier les géodésiques fermées (et les lacets géodésiques) sur la surface Σ , qui est une surface à singularités coniques particulière. De plus, on démontre en passant, et de façon assez élémentaire, la propriété 4.24, similaire au lemme 4.11, mais dont le résultat est plus faible (les boules fermées sont remplacées par des boules ouvertes, et il s'agit de métriques riemanniennes lisses, et non de métriques d'Alexandrov). A la vue de l'importance du lemme 4.11 dans ce manuscrit, il nous est apparu assez intéressant de donner la démonstration de la proposition 4.24, certes plus faible, mais dont la démonstration ne repose pas sur un théorème annexe compliqué (le lemme 4.11 est une conséquence directe du théorème 4.12, qui est un résultat de Burago et Stratilatova portant sur la structure des sphères dans les surfaces d'Alexandrov). Enfin, selon l'auteur, on comprend clairement le rôle joué par une courbure égale à π dans la démonstration de la proposition 4.24, et ceci permet donc de mieux comprendre les hypothèses du lemme 4.11.

On va utiliser lemme suivant (voir [Shi99]) :

Lemme 4.23. *Si $B(x, r)$ n'est pas simplement connexe, alors il existe un lacet géodésique dans $B(x, r)$, de point de base x , non homotope à zéro dans $B(x, r)$.*

Un lacet géodésique basé en x est une géodésique $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. La démonstration de ce lemme est assez élémentaire, et consiste à utiliser le théorème d'Arzelà-Ascoli pour minimiser la longueur des lacets basés en x , qui sont non homotopes à zéro dans $B(x, r)$. Dans [Shi99], la démonstration est effectuée dans le cas de métriques riemanniennes lisses, mais elle s'adapte sans problème aux métriques intrinsèques.

On commence par démontrer la proposition suivante, qui ne sera pas utilisée dans la suite, mais qui a été utilisée précédemment sous la forme du lemme 2.27 (comme déjà signalé, l'énoncé est similaire mais moins fort que le lemme 4.11) :

Proposition 4.24. *Soit U un ouvert d'une surface riemannienne (M, g) , homéomorphe à un disque ouvert, et $x \in U$ vérifiant $\omega^+(U - \{x\}) = \int_{U - \{x\}} K^+ d\mathcal{A} < \pi$. Si $\bar{B}(x, r) \subset U$, alors pour tout $s \leq r$, $B(x, s)$ est homéomorphe à un disque ouvert.*

Démonstration. Supposons que $B(x, s)$ ne soit pas simplement connexe. Par le lemme 4.23, il existe un lacet géodésique γ dans $B(x, s)$, de point de base x (et non homotope à

zéro dans $B(x, s)$). Comme $B(x, s)$ est inclus dans U , qui est homéomorphe à un disque ouvert, on peut considérer l'intérieur de γ , noté $\text{int}(\gamma)$:

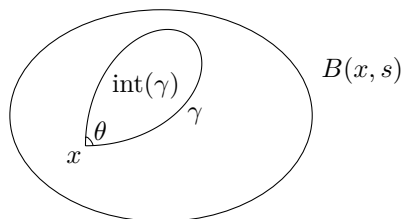


FIGURE 4.10

On a noté $\theta \in [0, 2\pi)$ l'angle en x de γ . Comme γ est une géodésique, la formule de Gauß-Bonnet s'écrit

$$2\pi = \omega(\text{int}(\gamma)) + (\pi - \theta),$$

et donc

$$2\pi \leq \omega^+(\text{int}(\gamma)) + \pi \leq \omega^+(U - \{x\}) + \pi < 2\pi,$$

ce qui est absurde. □

On souhaite maintenant montrer la propriété (P). Déjà, par le théorème d'uniformisation, pour montrer que $B(x, r)$ est homéomorphe à un disque ouvert, il suffit de montrer que $B(x, r)$ est simplement connexe. En effet, si c'est le cas, alors cette partie du plan est homéomorphe à $D(1)$, au plan complexe \mathbb{C} ou à la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 , mais ce dernier cas n'est pas possible car $B(x, r)$ n'est pas compact.

Par le lemme 4.23, il nous suffit donc de montrer que tous les lacets géodésiques dans $B(x, r)$, de point de base x , sont homotopes à zéro dans $B(x, r)$; on va donc commencer par s'intéresser aux lacets géodésiques de la surface Σ .

Étude des lacets géodésiques dans Σ

Il est utile de réaliser un patron de Σ :

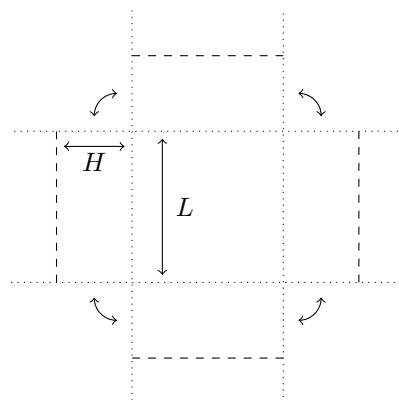


FIGURE 4.11

Les tirets correspondent au bas de la boîte. En recollant les rectangles de largeur H comme indiqué, et en pliant selon les tirets, on obtient une partie de la surface Σ (mais pas toute la surface : il nous manque quatre quarts-d'espace du plan).

Remarque 4.25. *Pour les besoins du dessin, on a choisi H de l'ordre de grandeur de L , mais comme indiqué précédemment on supposera plus loin que $H \ll L$.*

Déjà, il est facile de voir qu'il y a de nombreuses géodésiques fermées : toutes celles qui font le tour de la boîte, en étant parallèle aux arêtes. Elles sont indiquées en traits pleins sur la figure suivante :

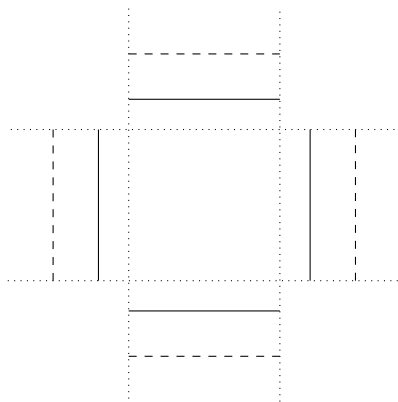


FIGURE 4.12 – Une géodésique fermée

Ces géodésiques sont les seules géodésiques fermées dans Σ . En effet, si une géodésique ne touche pas la boîte, alors c'est une ligne droite et elle ne peut pas être fermée. Supposons donc qu'elle touche les côtés de la boîte, mais en n'étant pas parallèle aux arêtes. Alors, en regardant dans une direction ou dans l'autre, il est clair que la géodésique va nécessairement sortir de la boîte à un moment, et elle ne pourra donc pas se refermer. Les géodésiques fermées sont donc uniquement celles qui sont parallèles aux arêtes, comme présentées sur la figure 4.12.

Par contre, il existe des lacets géodésiques de point de base x (qui ne sont pas des géodésiques fermées). Notons θ un représentant dans l'intervalle $[0, \pi]$ de l'angle en x de ces géodésiques. On a par exemple le lacet suivant :

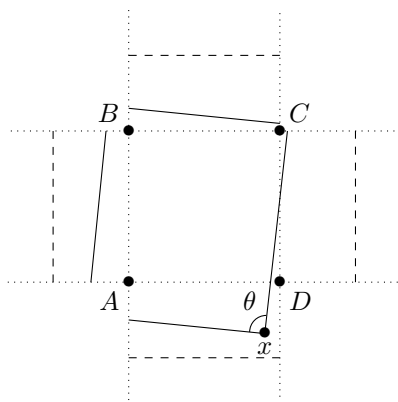


FIGURE 4.13 – Lacet géodésique, un seul tour

Ici, on a $\theta = \pi/2$.

Remarque 4.26. *On peut vérifier la formule de Gauß-Bonnet dans cet exemple. La courbe étant géodésique, on doit avoir*

$$2\pi = \sum_i k_i + (\pi - \theta),$$

où k_i est la courbure d'une singularité conique p_i comprise dans le domaine délimité par la courbe. Ici, il y a trois singularités coniques d'angle $3\pi/2$ (et donc de courbure $\pi/2$) en les points A, B et C (le point D n'est pas à l'intérieur du domaine), et comme $\theta = \pi/2$ la formule est bien vérifiée.

Il est clair que $\theta = \pi/2$ est la seule valeur possible pour l'angle d'un lacet géodésique, qui n'est pas une géodésique fermée. En regardant le patron, on voit que la géodésique effectue un quart de tour à chaque fois qu'elle passe une arête; l'angle en x du lacet géodésique est donc dans l'ensemble $\{0, \pi/2, \pi\}$ (on rappelle qu'on a choisi un représentant de l'angle dans $[0, \pi]$). Si $\theta = 0$, il est clair qu'on ne peut pas espérer obtenir un lacet géodésique, et $\theta = \pi$ correspond à une géodésique fermée.

Un lacet géodésique peut également tourner plusieurs fois autour de la boîte avant de se refermer. Ici on en a représenté un qui fait 2 tours avant de se refermer, mais il est évident qu'il y a des lacets géodésiques qui font n tours pour tout $n \geq 1$:

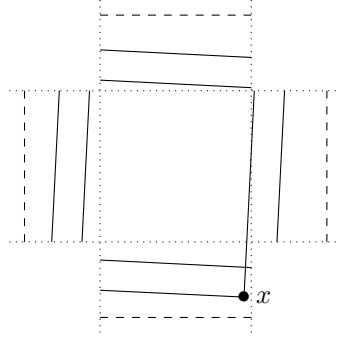


FIGURE 4.14 – Lacet géodésique, plusieurs tours

Considérons maintenant x , tel qu'il existe un lacet géodésique de point de base x , qui n'est pas une géodésique fermée. On sait que l'angle formé par le lacet géodésique en x est $\pi/2$. Si x n'est pas sur la boîte (i.e., x est sur le plan), alors en regardant le lacet géodésique on voit que deux demi-droites issues de x et orthogonales doivent rencontrer la boîte, ce qui n'est pas possible si x est dans l'un des quatre quarts d'espace manquants sur la représentation de Σ à l'aide du patron. Ainsi x est nécessairement sur le patron que l'on a représenté sur les figures 4.12, 4.13 et 4.14. De plus, sur les figures on a implicitement supposé que x était sur les côtés de la boîte. Ce n'est pas forcément vrai, mais à chaque quart de tour autour de la boîte, la géodésique s'écarte d'une distance d'au plus H de la boîte. Cet écartement étant constant, et la dernière portion de géodésique rejoignant x

coupant l'arête, x est au plus à une distance $2H$ de la boîte. Autrement dit, sur le dessin, le point x peut être en dessous des tirets, mais ne sera pas trop éloigné de ceux-ci.

Finalement, on a décrit toutes les géodésiques fermées (voir la figure 4.12), ainsi que tous les lacets géodésiques de point de base x (à symétrie près bien sûr), et on a en plus des informations sur le point x : il est à une distance au plus $2H$ de la boîte.

Démonstration de la propriété (P)

Pour démontrer la propriété (P), on sait qu'il nous suffit de montrer que les lacets géodésiques dans $B(x, r)$, de point de base x , sont homotopes à zéro dans $B(x, r)$. Par l'étude précédente, il nous suffit de considérer les trois cas des figures 4.12, 4.13 et 4.14.

Cas d'une géodésique fermée

Supposons que le point x soit à droite du trait plein suivant (l'autre cas se déduit aisément par symétrie) :

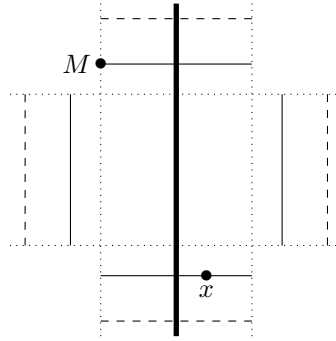


FIGURE 4.15

La géodésique étant dans la boule $B(x, r)$, le point M est à distance au plus r de x : $d(x, M) < r$. Ici, d désigne bien sûr la distance de la surface Σ , et non la distance Euclidienne (i.e., sur le patron) entre M et x . Il y a trois géodésiques minimisantes possibles entre M et x : le segment (Euclidien) entre M et x tracé sur le patron, la géodésique passant « par la gauche » de la boîte, et la géodésique passant « par la droite ». Le segment entre M et x est de longueur $|Mx| \leq \sqrt{L^2 + (L + 2H)^2} \leq \sqrt{2}(L + 2H)$, et on voit sur la figure que les géodésiques passant par la gauche et par la droite de la boîte sont de longueur $\geq 3L/2$: toutes les deux doivent (au moins) traverser une arête entière, plus la moitié d'une autre arête. Le segment entre M et x est donc une géodésique minimisante, à condition d'avoir

$$\sqrt{2}(L + 2H) < 3L/2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{H}{L} < \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \simeq 0.03.$$

Si cette inégalité est vérifiée, alors la distance euclidienne (sur le patron) entre M et x est $|Mx| = d(x, M)$, et donc $|Mx| < r$. Sur la figure il est clair qu'on peut relier x à

tout point de l'intérieur de la géodésique fermée par un segment (éventuellement par une ligne brisée) de longueur $\leq |Mx| < r$, et donc l'intérieur de la géodésique fermée est dans $B(x, r)$. Finalement, la géodésique est homotope à zéro dans $B(x, r)$, ce qu'on voulait démontrer.

Cas d'un lacet géodésique

On veut reproduire le même type de raisonnement que précédemment. Cette fois-ci la situation est moins symétrique et on a besoin du

Fait 4.27. *Si $H \ll L$, dans le cas d'une géodésique faisant un ou plusieurs tours comme sur la figure, le point x est forcément à droite de la ligne en trait plein :*

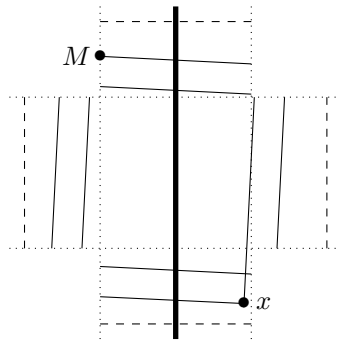


FIGURE 4.16

Démonstration. Notons $\alpha > 0$ l'angle que fait la géodésique avec les arêtes (dans le cas de la figure précédente, cet angle est très petit). Par construction on a l'inégalité

$$\tan(\alpha) \leq H/L \tag{4.2}$$

(on a donc bien un angle très petit si $H \ll L$). On souhaite montrer que x est à droite du trait plein sur la figure 4.16. Comme la portion de géodésique issu de x doit rencontrer l'arête de la boîte, le cas où le point x est « le plus à gauche » correspond au cas limite suivant :

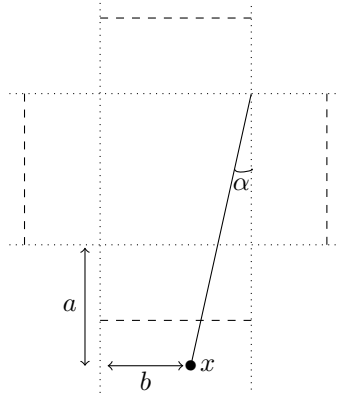


FIGURE 4.17

On souhaite donc montrer $b > L/2$. D'après la figure on a

$$\tan(\alpha) = \frac{L - b}{L + a},$$

et on sait que x n'est pas trop éloigné de la boîte, i.e. on a $a \leq 2H$ (voir la fin de la partie précédente), donc $a \leq L$ si on suppose $H \leq L/2$. On obtient donc

$$\tan(\alpha) \geq \frac{L - b}{2L},$$

et donc

$$b \geq (1 - 2 \tan(\alpha))L,$$

et on obtient finalement $b > L/2$, à condition d'avoir $2 \tan(\alpha) < 1/2$, ce qui est vrai dès que $H/L < 1/4$ (voir l'inégalité (4.2)). \square

La fin de la démonstration est la même que précédemment : soit M le point de la géodésique le plus éloigné de x , comme sur la figure 4.16. Pour les mêmes raisons que précédemment, le segment (Euclidien) entre M et x est une géodésique minimisante, à condition que H soit très petit par rapport à L . On a donc $|Mx| = d(M, x) < r$, et il est clair que tout point du domaine délimité par les portions de géodésique les plus éloignées du centre de la boîte sur la figure 4.14 peut être relié à x par un segment (éventuellement par une ligne brisée) de longueur $\leq |Mx| < r$, et donc le lacet géodésique est homotope à zéro dans $B(x, r)$, ce qu'on voulait démontrer.

4.3 Énoncé du Théorème Principal, et versions plus pratiques

Rappelons l'énoncé du Théorème Principal :

Théorème Principal. Soit $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ l'ensemble des métriques d'Alexandrov d sur Σ , vérifiant les conditions suivantes :

1. pour tout $x \in \Sigma$ on a

$$\omega^+(B(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta;$$

2. le rayon de contractibilité de (Σ, d) vérifie

$$\text{cont}(\Sigma, d) \geq c;$$

3. l'aire de (Σ, d) vérifie

$$\text{aire}(\Sigma, d) \leq A.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ est compact, au sens suivant : pour toute suite $d_m \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, il existe une métrique d'Alexandrov d sur Σ et des difféomorphismes $\varphi_m : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tels que, après passage à une sous-suite, on ait

$$\varphi_{m_k}^* d_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} d,$$

uniformément sur Σ .

On rappelle que l'auteur conjecture que l'hypothèse 2. implique $\omega^+(\{x\}) \leq \pi$ pour tout $x \in \Sigma$ (voir la remarque 4.19). De plus, comme déjà signalé, on peut remplacer une borne sur l'aire par une borne sur le diamètre et sur la courbure totale $|\omega| = \omega^+ + \omega^-$ (proposition 5.1) :

Corollaire 4.28. *Soit $\mathcal{M}_\Sigma(D, \Omega, c, \varepsilon, \delta)$ l'ensemble des métriques d'Alexandrov d sur Σ , où la condition 3. est remplacée par les conditions 3' et 4' :*

3' le diamètre de (Σ, d) vérifie

$$\text{diam}(\Sigma, d) \leq D,$$

4' la courbure totale vérifie

$$|\omega| \leq \Omega.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_\Sigma(D, \Omega, c, \varepsilon, \delta)$ est compact, au sens du Théorème Principal.

4.3.1 Cas de métriques à singularités coniques

Dans ce cas, on sait que la mesure de courbure s'écrit $\omega = K d\mathcal{A} + \sum_i k_i \delta_{p_i}$, où la somme est prise sur les points coniques p_i . On a donc immédiatement le

Corollaire 4.29. *L'ensemble constitué des métriques g à singularités coniques vérifiant les trois conditions suivantes est compact, au sens du Théorème Principal :*

1. pour tout $x \in \Sigma$ on a

$$\int_{B(x, \varepsilon)} K^+ d\mathcal{A} + \sum_i (2\pi - \theta_i)^+ \leq 2\pi - \delta,$$

où la somme est prise sur les indices i tels que les points coniques p_i sont dans $B(x, \varepsilon)$;

2. $\text{cont}(\Sigma, d_g) \geq c$;

3. $\text{aire}(\Sigma, g) \leq A$

ou

3' $\text{diam}(\Sigma, g) \leq D$.

4' $\int_\Sigma |K| d\mathcal{A} + \sum_i |2\pi - \theta_i| \leq \Omega$, où la somme est prise sur tous les indices i des points coniques p_i .

4.3.2 Cas de métriques riemanniennes

Dans ce cas, il est plus naturel de demander une minoration du rayon d'injectivité, tout en gardant à l'esprit l'inégalité suivante : rayon de contractibilité \geq rayon d'injectivité.

Bornes intégrales sur la courbure

Le Théorème Principal peut être utile pour obtenir des résultats sous la seule hypothèse de borne sur l'intégrale de la partie positive de la courbure K^+ .

Déjà, le corollaire 4.29, dans le cas de métriques riemanniennes sans singularités coniques, est intéressant en lui-même (la condition 1. est alors bien plus explicite). Pour simplifier encore cette condition 1., on peut remarquer que

$$\int_{B(x,\varepsilon)} K^+ d\mathcal{A} \leq \int_{\Sigma} K^+ d\mathcal{A},$$

et par le théorème de Gauss-Bonnet on a $2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K d\mathcal{A} \leq \int_{\Sigma} K^+ d\mathcal{A}$, ce qui montre que la condition $\int_{\Sigma} K^+ d\mathcal{A} \leq 2\pi - \delta$ est impossible à réaliser si $\Sigma = \mathbb{S}^2$. On a donc le

Corollaire 4.30. *Soit Σ une surface fermée, qui n'est pas la sphère \mathbb{S}^2 . L'ensemble des métriques riemanniennes g sur Σ vérifiant*

1. $\int_{\Sigma} K^+ d\mathcal{A} \leq 2\pi - \delta$,
2. $\text{inj} \geq i > 0$ et
3. $\text{aire} \leq A$

est précompact, au sens du Théorème Principal.

Ce corollaire a un énoncé purement riemannien, bien que la métrique à la limite ne soit à priori pas riemannienne ; il semble être intéressant et paraît ne pas avoir d'analogue dans la littérature. Rappelons quand même le théorème 3.5 de ce manuscrit, qu'on énonce ici dans le cas des surfaces ($n = 2$) :

Théorème (Anderson). *Soit $\Lambda, i, A > 0$, et soit $p > 1$. L'ensemble des métriques riemanniennes sur Σ vérifiant $\int_{\Sigma} |K|^p d\mathcal{A} \leq \Lambda$, $\text{inj} \geq i > 0$ et $\text{aire} \leq A$ est précompact, en norme C^α pour $\alpha < 2 - 2/p$.*

Malgré les ressemblances entre les deux théorèmes, on peut noter le caractère vraiment différent des hypothèses sur la courbure, et des conclusions.

Métriques riemanniennes à courbure $K \leq 0$

Dans le cas d'un contrôle ponctuel sur la courbure, du type $|K| \leq \Lambda$, pour $\Lambda > 0$, ou $K \geq \lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a vu que le théorème de Cheeger-Gromov, sous les hypothèses supplémentaires d'aire majorée et de rayon d'injectivité minoré, nous assure une précompacité en norme $C^{1,\alpha}$ (ou $C^{0,\alpha}$). Le Théorème Principal, dont la conclusion est seulement une convergence (uniforme) des distances, est donc plus faible.

Le seul cas intéressant (et où le Théorème Principal nous apprend quelque chose) est donc le cas $K \leq \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On va surtout s'intéresser au cas $\lambda \leq 0$, car pour les variétés à courbure négative, la condition 1. du Théorème Principal est automatiquement satisfaite.

Considérons donc les métriques riemanniennes à courbure négative ou nulle sur Σ . Par le théorème de Gauss-Bonnet, il faut supposer que Σ n'est pas la sphère \mathbb{S}^2 . Il est bien connu que l'on a alors

$$\text{inj}(\Sigma, g) = \frac{1}{2} \times \text{longueur de la plus petite géodésique fermée}$$

(voir par exemple [Ber03]). On obtient donc le

Corollaire 4.31. *L'ensemble des métriques riemanniennes à courbure négative ou nulle, dont les géodésiques fermées sont de longueur $\geq i > 0$, et dont l'aire est $\leq A$ est précompact, au sens du Théorème Principal. Les limites de suites de métriques dans cet ensemble sont des surfaces d'Alexandrov à mesure de courbure négative, et donc à courbure négative au sens d'Alexandrov (voir la remarque 2.10).*

Dans le cas de métriques à courbure $K \leq -1$, le théorème de Gauß-Bonnet nous montre que l'aire de Σ est $\leq -2\pi\chi(\Sigma)$, et on a donc également le

Corollaire 4.32. *L'ensemble des métriques riemanniennes sur Σ , à courbure $K \leq -1$, et dont les géodésiques fermées sont de longueur $\geq i > 0$, est précompact, au sens du Théorème Principal. Les limites de suites de métriques dans cet ensemble sont des surfaces à courbure ≤ -1 au sens d'Alexandrov (voir par exemple [BBI01] pour une définition de ces surfaces).*

On rappelle que dans le cas de métriques hyperboliques ($K \equiv -1$), le théorème de Cheeger-Gromov donne plus d'informations que le Théorème Principal. Bien que les deux conclusions soient bien différentes, on peut ici faire le parallèle avec le théorème de compacité de D. Mumford, dont il sera question dans la partie suivante :

Théorème 4.33 (Mumford). *Soit Σ une surface fermée de genre $g \geq 2$. Dans l'espace de module $\text{Mod}(\Sigma)$, l'ensemble des métriques hyperboliques dont la longueur de la plus petite géodésique fermée est $\geq i > 0$ est compact.*

4.3.3 Un critère pour remplacer les hypothèses 1. et 2.

On termine cette partie en énonçant un critère pratique, qui permet de remplacer les conditions 1. et 2. du Théorème Principal; ceci peut être utile dans certains cas (notamment pour lancer un flot de Ricci sur des surfaces singulières, on y reviendra dans le chapitre de Perspectives à la fin du manuscrit). C'est une conséquence directe de la proposition 4.13.

Critère pratique 4.34. *Supposons avoir un recouvrement de Σ par des ensembles homéomorphes à des disques ouverts : $\Sigma = \cup_i U_i$. Une métrique d'Alexandrov d sur Σ vérifiant les deux conditions*

$$\omega^+(U_i) < \pi$$

et

$$\text{pour tout } x \in \Sigma, \text{ il existe } i \text{ tel que } B(x, \varepsilon) \subset U_i$$

vérifie aussi les conditions 1. et 2. du Théorème Principal.

Une nouvelle fois, dans le cas de métriques d'Alexandrov à courbure négative, ce critère est plus simple à vérifier.

4.4 Qu'en est-il des structures conformes ?

Dans cette partie, on étudie brièvement la théorie de Teichmüller. Le sujet est très vaste, la littérature sur le sujet l'est également, et le lecteur intéressé pourra notamment se référer au livre [IT92].

Sur une surface compacte de genre ≥ 2 , cette théorie consiste à considérer l'ensemble $\text{Teich}(\Sigma)$ des structures conformes sur Σ (à difféomorphismes isotopes à l'identité près), ou si l'on préfère, l'ensemble des métriques hyperboliques sur Σ (à difféomorphismes isotopes à l'identité près). L'espace de module $\text{Mod}(\Sigma)$ est le quotient de $\text{Teich}(\Sigma)$ par l'action du Mapping Class Group : c'est l'ensemble des structures conformes sur Σ (à difféomorphismes près) ou, si l'on préfère, l'ensemble des métriques hyperboliques sur Σ (à difféomorphismes près).

Munissons la surface Σ d'une métrique hyperbolique. Par la théorie de Teichmüller, on sait qu'il existe une collection F de $3g - 3$ géodésiques fermées, telle que $\Sigma - F$ soit une union de $2g - 2$ pantalons (un pantalon est une surface homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 , privée de 3 disques). En plus de la longueur des composantes de bord des pantalons (i.e. la longueur des géodésiques fermées), on a une information sur la façon de recoller (isométriquement) ces pantalons entre eux pour reconstruire la surface Σ .

Réciproquement, à toute collection de $2g - 2$ pantalons (composée de $6g - 6$ longueurs, mais chaque longueur doit apparaître deux fois donc il n'y a que $3g - 3$ paramètres), et tous paramètres de recollement (appelé *twists*), on associe une unique métrique hyperbolique.

On a ainsi construit explicitement une bijection entre l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(\Sigma)$ et \mathbb{R}^{6g-6} : ce sont les coordonnées de Fenchel-Nielsen (voir [IT92]).

Dans le Théorème Principal, on a une convergence uniforme des distances, à difféomorphisme près. On a donc une suite de points $p_m = [d_m] = [\varphi_m^* d_m] \in \text{Mod}(\Sigma)$, et un point $p = [d] \in \text{Mod}(\Sigma)$ (on désigne par $[\cdot]$ la classe conforme d'une métrique d'Alexandrov, à difféomorphisme près). On peut alors se poser la

Question 4.35. *A-t-on la convergence $p_m \rightarrow p$ dans $\text{Mod}(\Sigma)$?*

L'auteur ne connaît pas la réponse à cette question ; nous allons dans les quelques lignes qui suivent essayer d'expliquer pourquoi.

Concernant les parties compactes de $\text{Mod}(\Sigma)$, on a le théorème suivant, dû à Mumford (voir par exemple [IT92], p.175), qui peut se comprendre en considérant les coordonnées de Fenchel-Nielsen que l'on vient d'introduire :

Théorème 4.36 (Mumford). *Un ensemble $A \subset \text{Mod}(\Sigma)$ est compact si, et seulement si, il existe $i > 0$ tel que pour les métriques hyperboliques h dans A , les géodésiques fermées sont de longueur $\geq i$.*

Pour répondre à la question 4.35, il faut donc considérer l'unique métrique hyperbolique dans chaque classe conforme $[d_m] = [\varphi_m^* d_m]$, et minorer la longueur des géodésiques fermées pour cette métrique ; ceci semble être hors de portée. Les géodésiques (et leurs longueurs) d'une métrique conforme $e^{2u}g$ peuvent être bien différentes de celles de g ...

De plus, il est raisonnable de penser qu'il est possible de construire une suite de métriques hyperboliques h_m , qui part à l'infini dans $\text{Mod}(\Sigma)$ (par exemple en pinçant une géodésique fermée, de telle sorte que sa longueur tende vers zéro), et telle que pour des

fonctions u_m bien choisies (consistant à dilater la partie où la longueur de la géodésique fermée tend vers zéro), on ait un contrôle sur la suite de distances $e^{2u_m}h_m$ (voire même une convergence de cette dernière). L'hypothèse de convergence uniforme des distances paraît donc être une hypothèse trop faible pour faire converger les structures conformes.

Remarque 4.37. *Dans le cas de la sphère, la réponse à la question 4.35 est triviale car il n'y a qu'une seule classe conforme. Et dans le cas d'un tore, pour espérer montrer une convergence dans $\text{Mod}(\Sigma)$, il faut encore une fois considérer la longueur des géodésiques fermées pour l'unique métrique plate (disons d'aire = 1) dans la classe conforme, et ceci semble être également bien difficile.*

Le lecteur aura compris que cette partie constitue encore un travail en cours ; notamment, le lien entre *convergence dans l'espace de Teichmüller* et *convergence uniforme des distances associées* a semble-t-il été très peu étudié. Ceci constitue une perspective de recherche pour la suite.

Chapitre 5

Preuve du Théorème Principal

Ce chapitre est le plus technique. On rappelle que Σ est une surface compacte sans bord. Si d est une métrique d'Alexandrov sur Σ , alors le rayon de contractibilité au point x est

$$\text{cont}(\Sigma, d, x) = \sup \{r > 0 \mid \text{pour tout } s < r, \overline{B}(x, s) \text{ est homéomorphe à un disque fermé}\},$$

et le rayon de contractibilité de (Σ, d) est

$$\text{cont}(\Sigma, d) = \inf_{x \in \Sigma} \text{cont}(\Sigma, d, x).$$

Le résultat principale de cette thèse est le suivant :

Théorème Principal. *Soit $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ l'ensemble des métriques d'Alexandrov d sur Σ , vérifiant les conditions suivantes :*

1. *pour tout $x \in \Sigma$ on a*

$$\omega^+(B(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta;$$

2. *le rayon de contractibilité de (Σ, d) vérifie*

$$\text{cont}(\Sigma, d) \geq c;$$

3. *l'aire de (Σ, d) vérifie*

$$\text{aire}(\Sigma, d) \leq A.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ est compact, au sens suivant : pour toute suite $d_m \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, il existe une métrique d'Alexandrov d sur Σ et des difféomorphismes $\varphi_m : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tels que, après passage à une sous-suite, on ait

$$\varphi_{m_k}^* d_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} d,$$

uniformément sur Σ .

Dans la partie 5.1, on montre qu'une borne sur l'aire est équivalente à une borne sur le diamètre et la courbure totale; on pourra donc utiliser ces trois bornes dans la démonstration.

Rappelons que la démonstration du Théorème Principal suit le schéma général de la preuve du théorème de Cheeger-Gromov, qu'on a présenté dans la partie 3.4.3. On a vu qu'il y avait deux étapes bien distinctes : la première, la plus difficile à prouver, consistait à minorer le rayon harmonique des variétés; la deuxième, à plonger ces variétés dans un espace Euclidien.

La première étape consistait en quelque sorte à montrer qu'il existe de *bonnes cartes*, sur des boules de taille fixée. Les parties 5.2 et 5.3 montrent que pour les métriques d'Alexandrov dans $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, les cartes conformes constituent de bonnes cartes : le terme harmonique de la métrique dans ces cartes est borné (partie 5.2), et on a également un contrôle sur l'image des boules dans ces cartes (partie 5.3; on a vu qu'un tel résultat est immédiat dans le cas lisse, si on dispose d'une minoration du rayon harmonique, voir la proposition 3.20).

Du point de vue du schéma général de la preuve du Théorème Principal, ces deux parties 5.2 et 5.3 constituent les analogues de la première étape de la démonstration du théorème de Cheeger-Gromov - bien que les énoncés des théorèmes et les outils mis en œuvre soient bien différents. Elles comportent les passages les plus techniques, et utilisent la géométrie conforme des anneaux présentée dans la partie 1.3.

La partie 5.4 démontre le Théorème Principal, à l'aide des résultats obtenus précédemment. La construction effectuée est analogue à la deuxième étape de la preuve du théorème de Cheeger-Gromov : il s'agit de plonger les surfaces dans un espace Euclidien. Cette construction, bien que relativement proche de celle du théorème de Cheeger-Gromov, comporte de nombreuses différences avec cette dernière. On présente les principales différences entre les deux approches au début de la partie 5.4. Notamment, de nombreux points techniques sont omis dans les références classiques [GW88], [Pet87] et [Kas89], et on s'est attachés ici à les détailler, afin de vérifier qu'on pouvait passer sans difficulté du cas lisse au cas des surfaces d'Alexandrov.

5.1 Majorer l'aire revient à majorer le diamètre et la courbure totale

On a déjà signalé que dans le théorème de Cheeger-Gromov, on peut remplacer une majoration de l'aire par une majoration du diamètre (proposition 3.13).

Concernant le Théorème Principal, on ne peut pas remplacer une majoration de l'aire par une majoration du diamètre; il faut en plus demander une majoration de la courbure totale $|\omega| = \omega^+ + \omega^-$. La proposition suivante montre ainsi comment passer du Théorème Principal au corollaire 4.28. Ces résultats seront aussi utilisés dans la démonstration du Théorème Principal.

Proposition 5.1. *Soient Σ une surface fermée, et $c, \varepsilon, \delta > 0$. Soit d une métrique d'Alexandrov sur Σ , vérifiant les propriétés 1. et 2. de la définition de $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$,*

c'est-à-dire

1. pour tout $x \in \Sigma$, $\omega^+(B(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta$
2. $\text{cont}(\Sigma, d) \geq c$.

On a alors :

— Pour tout $A > 0$, il existe des constantes positives D et Ω telles que

$$\text{aire}(\Sigma, d) \leq A \ (\iff d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)) \implies \begin{cases} \text{diam}(\Sigma, d) \leq D \\ |\omega|(\Sigma, d) \leq \Omega. \end{cases}$$

— Réciproquement, pour tous $\Omega, D > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$\begin{cases} \text{diam}(\Sigma, d) \leq D \\ |\omega|(\Sigma, d) \leq \Omega \end{cases} \implies \text{aire}(\Sigma, d) \leq A \ (\iff d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)).$$

Démonstration. Pour montrer la première propriété, considérons $d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$. Soit $B(x_i, \varepsilon/2)$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, un nombre maximal de boules disjointes de rayon $\varepsilon/2$ dans Σ . Par le corollaire 2.24, ces boules ont une aire minorée; comme l'aire de (Σ, d) est majorée, l'entier N est aussi majoré. Si le diamètre était arbitrairement grand, alors on pourrait trouver un nombre arbitrairement grand de boules de rayon $\varepsilon/2$ disjointes : ceci montre qu'il existe $D > 0$ tel que $\text{diam}(\Sigma, d) \leq D$. De plus, par un argument de doublement, les N boules $B(x_i, \varepsilon)$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, recouvrent Σ . Mais la partie positive de la mesure de courbure de ces boules est majorée, donc $\omega^+(\Sigma, d)$ est majoré. La formule de Gauß-Bonnet s'écrit $\omega^+(\Sigma, d) - \omega^-(\Sigma, d) = 2\pi\chi(\Sigma)$, donc $\omega^-(\Sigma, d)$ est aussi majoré, et il existe donc $\Omega > 0$ tel que $|\omega|(\Sigma, d) \leq \Omega$.

Réciproquement, supposons $\text{diam}(\Sigma, d) \leq D$ et $|\omega|(\Sigma, d) \leq \Omega$. Soit $x \in \Sigma$. On a $\Sigma = B(x, D+1)$, et comme $\omega^-(\Sigma)$ est majoré, par le corollaire 2.24, on sait que l'aire d'une boule de rayon $D+1$ est majorée, et il existe donc $A > 0$ tel que $\text{aire}(\Sigma, d) \leq A$. \square

À partir de maintenant, on fixe des réels strictement positifs $A, c, \varepsilon, \delta$. Quitte à changer ε en ε' plus petit, on peut supposer $\varepsilon < c$. On dispose aussi de constantes strictement positives D et Ω vérifiant la première partie de la proposition précédente.

5.2 Préliminaire I : une borne sur le terme harmonique local

Par le théorème-définition 2.15, et comme ε est inférieur au rayon de contractibilité, on sait que pour tout $d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ on peut considérer une carte conforme $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$, avec $H(x) = 0$. La métrique s'écrit alors sous la forme singulière $e^{2V[\omega_H] + 2h}|dz|^2$ (voir les notations du théorème-définition 2.15); on va montrer que le terme harmonique h est borné sur tout compact.

Théorème 5.2. *Soit $K \subset D(1/2)$ un ensemble compact. Il existe une constante $M(K) = M(K, \Sigma, A, c, \varepsilon, \delta)$ vérifiant les propriétés suivantes.*

Soit $d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, et soit $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$ une carte conforme, avec $H(x) = 0$. On note h le terme harmonique dans cette carte (voir le théorème-définition 2.15). On a alors

$$|h(z)| \leq M(K) \text{ pour tout } z \in K.$$

On peut commencer par remarquer qu'on ne peut pas espérer obtenir mieux qu'une borne sur h , sur tout compact de $D(1/2)$. En effet, par exemple, dans le cas d'une métrique à singularité conique $g = |z - 1/2|^{2\beta}|dz|^2$, où $\beta > -1$, h peut être la fonction harmonique définie sur $D(1/2)$ par $h(z) = \beta \ln |z - 1/2|$, et cette fonction n'est pas bornée sur $D(1/2)$ tout entier.

On commence par donner une majoration (explicite) de h . Ce résultat sera utilisé dans la section suivante.

Proposition 5.3. *Sous les hypothèses du théorème 5.2 on a, pour tout $z \in D(1/2)$,*

$$e^{h(z)} \leq \frac{\varepsilon}{(1/2 - |z|)^{1+\Omega/2\pi}} \cdot C(\Omega), \quad (5.1)$$

où $C(\Omega) := \sqrt{1 + \Omega/2\pi} \cdot e^{\Omega/4\pi}$.

Démonstration. Soit $a \in D(1/2)$. On pose $s = 1/2 - |a| > 0$: on a alors $D(a, s) \subset D(1/2)$ ($D(a, s)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon s). On note $u := V[\omega_H] + h$, de sorte que la métrique singulière s'écrit $g = e^{2u}|dz|^2$. Par l'inégalité de Jensen on a

$$\exp\left(\iint_{D(a,s)} 2u(z) \frac{d\lambda(z)}{\pi s^2}\right) \leq \iint_{D(a,s)} e^{2u(z)} \frac{d\lambda(z)}{\pi s^2} \leq \frac{\text{aire}(B(x, \varepsilon))}{\pi s^2},$$

et par le corollaire 2.24 on a $\text{aire}(B(x, \varepsilon)) \leq (\pi + \Omega/2) \cdot \varepsilon^2$, et donc

$$\frac{1}{\pi s^2} \iint_{D(a,s)} 2u(z) d\lambda(z) \leq \ln\left((1 + \Omega/2\pi) \frac{\varepsilon^2}{s^2}\right).$$

De plus, h est harmonique, et donc vérifie la propriété de la moyenne :

$$h(a) = \frac{1}{\pi s^2} \iint_{D(a,s)} h(z) d\lambda(z),$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$h(a) = \frac{1}{\pi s^2} \iint_{D(a,s)} u(z) d\lambda(z) - \frac{1}{\pi s^2} \iint_{D(a,s)} V[\omega_H](z) d\lambda(z) \quad (5.2)$$

$$\leq \frac{1}{2} \ln\left((1 + \Omega/2\pi) \frac{\varepsilon^2}{s^2}\right) - \frac{1}{\pi s^2} \iint_{D(a,s)} V[\omega_H](z) d\lambda(z), \quad (5.3)$$

et pour conclure on doit donc trouver une minoration de $\iint_{D(a,s)} V[\omega_H](z) d\lambda(z)$.

On sait que l'on peut écrire $V[\omega_H](z) = V[\omega_H^+](z) - V[\omega_H^-](z) \geq -V[\omega_H^-](z)$ pour presque tout $z \in D(1/2)$, donc

$$\iint_{D(a,s)} V[\omega_H](z) d\lambda(z) \geq - \iint_{D(a,s)} \left(\iint_{D(1/2)} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln |z - \xi| d\omega_H^-(\xi) \right) d\lambda(z) \quad (5.4)$$

$$= - \iint_{D(1/2)} \left(\iint_{D(a,s)} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln |z - \xi| d\lambda(z) \right) d\omega_H^-(\xi). \quad (5.5)$$

De plus, pour $\xi \in D(1/2)$ on a

$$\iint_{D(a,s)} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln |z - \xi| d\lambda(z) = \iint_{D(a-\xi,s)} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln |z| d\lambda(z).$$

Lemme 5.4. *La fonction $f(b) := \iint_{D(b,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z| d\lambda(z)$, définie sur \mathbb{C} , admet son maximum pour $b = 0$.*

Démonstration. On a $D(b, s) = (D(b, s) \cap D(0, s)) \sqcup (D(b, s) - D(0, s))$, donc

$$f(b) = \iint_{D(b,s) \cap D(0,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z| d\lambda(z) + \iint_{D(b,s) - D(0,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z| d\lambda(z). \quad (5.6)$$

En effectuant le changement de variable $z' = b - z$ on obtient

$$\iint_{D(b,s) - D(0,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z| d\lambda(z) = \iint_{D(0,s) - D(b,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |b - z'| d\lambda(z'),$$

et pour $z' \in D(0, s) - D(b, s)$ on a $|b - z'| \geq s > |z'|$, donc

$$\iint_{D(b,s) - D(0,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z| d\lambda(z) \leq \iint_{D(0,s) - D(b,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z'| d\lambda(z').$$

Avec l'équation (5.6) on obtient finalement

$$\begin{aligned} f(b) &\leq \iint_{D(b,s) \cap D(0,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z| d\lambda(z) + \iint_{D(0,s) - D(b,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z'| d\lambda(z') \\ &= f(0), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Pour $\xi \in D(1/2)$ on obtient donc

$$\begin{aligned} \iint_{D(a,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z - \xi| d\lambda(z) &\leq f(0) = \iint_{D(0,s)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln |z| d\lambda(z) \\ &= - \int_0^s r \ln r dr = \frac{s^2}{4} - \frac{s^2 \ln s}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.5) on obtient

$$\iint_{D(a,s)} V[\omega_H](z) d\lambda(z) \geq \left(-\frac{s^2}{4} + \frac{s^2 \ln s}{2}\right) \cdot \omega_H^-(D) \geq \left(-\frac{s^2}{4} + \frac{s^2 \ln s}{2}\right) \cdot \Omega$$

(rappelons que Ω vérifie $\omega_H^+(D) + \omega_H^-(D) \leq \Omega$), et avec l'inégalité (5.3) on obtient finalement

$$h(a) \leq \frac{1}{2} \ln \left((1 + \Omega/2\pi) \frac{\varepsilon^2}{s^2} \right) + \frac{\Omega}{4\pi} - \frac{\Omega \ln s}{2\pi},$$

ce qui termine la preuve de la proposition 5.3. □

On anticipe maintenant un peu sur la partie suivante (voir le théorème 5.9 sur le contrôle de l'image des boules), en montrant que les images des boules $B(x, \varepsilon/2)$ ne peuvent pas trop se rapprocher de la frontière de $D(1/2)$. Pour cela, on considère l'anneau $D(1/2) - H(B(x, \varepsilon/2))$, et on utilise la géométrie conforme des anneaux présentée dans la partie 1.3. D'un côté, par définition, cet anneau a un module minoré; d'un autre côté, par le théorème de Grötzsch, si $H(\overline{B}(x, \varepsilon/2))$ était arbitrairement proche de $\partial D(1/2)$, alors le module de cet anneau serait arbitrairement proche de zéro. La proposition suivante nous sert à démontrer le théorème 5.2, et nous sera aussi utile plus tard pour démontrer le théorème 5.9.

Proposition 5.5. *Soit $r < 1/2$ tel que le module de l'anneau de Grötzsch $G(2r)$ vérifie $\text{mod}(G(2r)) < \varepsilon^2/4A$. Soit $d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, et soit $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$ une carte conforme, avec $H(x) = 0$. Alors*

$$H(B(x, \varepsilon/2)) \subset D(r).$$

Démonstration. Le sous-ensemble de \mathbb{C}

$$U := D(1/2) - H(\overline{B}(x, \varepsilon/2))$$

est un anneau topologique. On sait que H est une isométrie entre $(B(x, \varepsilon), d_{|B(x, \varepsilon)})$ et $(D(1/2), d_{\omega_H, h})$. Rappelons que le module de U est

$$\text{mod}(U) = \sup_{\rho} \frac{\inf_{\gamma \in \Gamma} L_{\rho}(\gamma)^2}{A_{\rho}(U)},$$

où Γ est l'ensemble des courbes continues et simples γ dans U , paramétrées par la longueur d'arc, joignant $\partial D(1/2)$ et un point de $H(\overline{B}(x, \varepsilon/2))$. On pose $\rho := e^{V[\omega_H] + h}$.

Si $\gamma \in \Gamma$, rien ne nous assure que la ρ -longueur de la courbe γ est égale à la d -longueur de γ . Par contre, on sait que par définition de la distance de longueur $d_{\omega_H, h}$, on a (en faisant attention à $\gamma(0) \notin D(1/2)$) :

$$\begin{aligned} L_{\rho}(\gamma) &\geq \limsup_{t \rightarrow 0} d_{\omega_H, h}(\gamma(t), \gamma(1)) \\ &= \limsup_{t \rightarrow 0} d_{B(x, \varepsilon)}(H^{-1}(\gamma(t)), H^{-1}(\gamma(1))) \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow 0} d(H^{-1}(\gamma(t)), H^{-1}(\gamma(1))) \end{aligned}$$

(la dernière inégalité provient du fait que lors du calcul de la distance de longueur $d_{B(x, \varepsilon)}$, on ne considère que la longueur des courbes dans $B(x, \varepsilon)$, alors que pour calculer d on considère la longueur de *toutes* les courbes dans Σ). Maintenant, considérons une sous-suite $t_k \rightarrow 0$ telle que $H^{-1}(\gamma(t_k))$ converge vers $y \in \Sigma$: comme $\gamma(0) \notin D(1/2)$, on a $y \notin B(x, \varepsilon)$, et comme $H^{-1}(\gamma(1)) \in \overline{B}(x, \varepsilon/2)$ on a

$$L_{\rho}(\gamma) \geq d(y, H^{-1}(\gamma(1))) \geq \varepsilon/2.$$

De plus, la ρ -aire de U est inférieure à celle de (Σ, d) , et on a donc obtenu

$$\text{mod}(U) \geq \frac{(\varepsilon/2)^2}{A} = \varepsilon^2/4A.$$

On termine la preuve du lemme par l'absurde : supposons $H(\overline{B}(x, \varepsilon/2)) \not\subset D(r)$. Alors, quitte à effectuer une rotation (telle que le nombre complexe de module maximum de $H(\overline{B}(x, \varepsilon/2))$ appartienne à l'axe réel), et après une homothétie de facteur 2, il est clair que U est conforme à un anneau $U' \subset D(1)$, ne contenant pas 0 (car $H(x) = 0$) et $2r$. Par le théorème de Grötzsch's (théorème 1.11), on a $\text{mod}(U) = \text{mod}(U') \leq \text{mod} G(2r)$, ce qui est impossible par notre choix de r . On a donc $H(\overline{B}(x, \varepsilon/2)) \subset D(r)$, et ceci termine la preuve de la proposition. \square

Soit $p^* := 4\pi/\delta > 1$. Pour obtenir une minoration du terme harmonique h , on commence par montrer une minoration d'une certaine intégrale faisant intervenir h :

Lemme 5.6. *Sous les hypothèses du théorème 5.2 on a*

$$\left(\frac{\delta^2 \varepsilon^2}{512\pi^2} \right)^{p^*} \leq \iint_{D(r)} e^{2p^* h(z)} d\lambda(z).$$

Avant de démontrer le lemme, on démontre la proposition suivante (voir [Tro91a]), qui permet d'obtenir une majoration d'une intégrale faisant intervenir un terme potentiel :

Proposition 5.7 (M. Troyanov). *Soit ν une mesure de Radon positive, définie sur $D(1/2)$. On suppose qu'il existe $p > 1$ tel que $\nu(D(1/2)) < 2\pi/p$. Alors*

$$\iint_{D(1/2)} e^{2pV[\nu](z)} d\lambda(z) \leq \frac{\pi}{1 - \frac{p}{2\pi}\nu(D(1/2))}.$$

Démonstration. Si $\nu = 0$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc $\nu(D(1/2)) > 0$. Pour $z \in D(1/2)$ on a

$$\begin{aligned} e^{2pV[\nu](z)} &= \exp\left(2p \iint_{D(1/2)} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \ln|z - \xi| d\nu(\xi)\right) \\ &= \exp\left(\iint_{D(1/2)} \ln(|z - \xi|^{-\frac{p}{\pi}\nu(D(1/2))}) \frac{d\nu(\xi)}{\nu(D(1/2))}\right), \end{aligned}$$

et donc par l'inégalité de Jensen on obtient

$$e^{2pV[\nu](z)} \leq \frac{1}{\nu(D(1/2))} \iint_{D(1/2)} |z - \xi|^{-\frac{p}{\pi}\nu(D(1/2))} d\nu(\xi).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{D(1/2)} e^{2pV[\nu](z)} d\lambda(z) &\leq \frac{1}{\nu(D(1/2))} \iint_{D(1/2)} \iint_{D(1/2)} |z - \xi|^{-\frac{p}{\pi}\nu(D(1/2))} d\nu(\xi) d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\nu(D(1/2))} \iint_{D(1/2)} \left(\iint_{D(1/2)} |z - \xi|^{-\frac{p}{\pi}\nu(D(1/2))} d\lambda(z) \right) d\nu(\xi). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\xi \in D(1/2)$ on a

$$\begin{aligned} \iint_{D(1/2)} |z - \xi|^{-\frac{p}{\pi}\nu(D(1/2))} d\lambda(z) &\leq \iint_{D(1)} |z|^{-\frac{p}{\pi}\nu(D(1/2))} d\lambda(z) = 2\pi \int_0^1 r^{1 - \frac{p}{\pi}\nu(D(1/2))} dr \\ &= \frac{2\pi}{2 - \frac{p}{\pi}\nu(D(1/2))} = \frac{\pi}{1 - \frac{p}{2\pi}\nu(D(1/2))}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement l'inégalité

$$\iint_{D(1/2)} e^{2pV[\nu](z)} d\lambda(z) \leq \frac{\pi}{1 - \frac{p}{2\pi}\nu(D(1/2))}.$$

□

On peut maintenant démontrer le lemme 5.6.

Démonstration du lemme 5.6. Soit $p > 1$ tel que $1/p + 1/p^* = 1$ (on rappelle que par définition on a $p^* = 4\pi/\delta > 1$). Par la propriété 1. de la définition de $\mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ on a

$$\omega_H^+(D(1/2)) = \omega^+(B(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta = 2\pi(1 - 2/p^*) = 2\pi(1/p - 1/p^*) < 2\pi/p.$$

On peut donc appliquer la Proposition 5.7 à $\nu = \omega_H^+$: on obtient

$$\iint_{D(1/2)} e^{2pV[\omega_H^+](z)} d\lambda(z) \leq \frac{\pi}{1 - \frac{p}{2\pi}\omega_H^+(D(1/2))},$$

et avec $1 - \frac{p}{2\pi}\omega_H^+(D(1/2)) \geq \frac{p}{p^*} \geq \frac{1}{p^*} = \delta/4\pi$ on obtient

$$\iint_{D(1/2)} e^{2pV[\omega_H^+](z)} d\lambda(z) \leq \frac{4\pi^2}{\delta}. \quad (5.7)$$

De plus, on a $H(B(x, \varepsilon/2)) \subset D(r)$ (proposition 5.5), et donc

$$\iint_{D(r)} e^{2u(z)} d\lambda(z) \geq \text{aire}(B(x, \varepsilon/2)).$$

Par le corollaire 2.24 on a également l'inégalité

$$\text{aire}(B(x, \varepsilon/2)) \geq (2\pi - \omega^+(B(x, \varepsilon/2))) \cdot (\varepsilon/2)^2/32 \geq \delta\varepsilon^2/128.$$

Comme $u = V[\omega_H] + h$, par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon^2/128 &\leq \text{aire}(B(x, \varepsilon/2)) \\ &\leq \iint_{D(r)} e^{2u(z)} d\lambda(z) \\ &\leq \left(\iint_{D(r)} e^{2pV[\omega_H](z)} d\lambda(z) \right)^{1/p} \left(\iint_{D(r)} e^{2p^*h(z)} d\lambda(z) \right)^{1/p^*} \\ &\leq \left(\iint_{D(1/2)} e^{2pV[\omega_H](z)} d\lambda(z) \right)^{1/p} \left(\iint_{D(r)} e^{2p^*h(z)} d\lambda(z) \right)^{1/p^*}. \end{aligned}$$

Avec l'inégalité $V[\omega_H](z) = V[\omega_H^+](z) - V[\omega_H^-](z) \leq V[\omega_H^+](z)$ (pour presque tout $z \in D(1/2)$) et avec l'équation (5.7) on obtient

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon^2/128 &\leq \left(\frac{4\pi^2}{\delta} \right)^{1/p} \cdot \left(\iint_{D(r)} e^{2p^*h(z)} d\lambda(z) \right)^{1/p^*} \\ &\leq \frac{4\pi^2}{\delta} \cdot \left(\iint_{D(r)} e^{2p^*h(z)} d\lambda(z) \right)^{1/p^*} \end{aligned}$$

(on rappelle qu'on a $\frac{4\pi^2}{\delta} > 1$), et ceci termine la preuve du lemme. \square

Pour terminer la preuve du théorème 5.2, on a besoin du lemme de Harnack pour les fonctions harmoniques positives (voir [ABR92]) :

Théorème 5.8 (lemme de Harnack). *Soit f_m une suite de fonctions harmoniques positives, sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$. On a l'alternative suivante : soit (1) $f_m \rightarrow +\infty$ localement uniformément sur U , soit (2) il existe une sous-suite m_j de m et une fonction harmonique f sur U telle que $f_{m_j} \rightarrow f$ localement uniformément sur U .*

Fin de la preuve du théorème 5.2. La proposition 5.3 nous assure que pour tout compact $K \subset D(1/2)$, il existe une constante $M'(K)$ telle que, sous les hypothèses du théorème 5.2, on a $h(z) \leq M'(K)$ pour tout $z \in K$ (on rappelle que $M'(K)$ ne dépend pas de la métrique d).

On démontre le théorème 5.2 par contradiction. Supposons qu'il existe un compact $K \subset D(1/2)$ (on peut supposer que ce compact vérifie $D(r) \subset K$), une suite $d_m \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, une suite de points $x_m \in \Sigma$, une suite de carte conformes $H_m : B_m(x_m, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$, avec $H_m(x_m) = 0$, telles que le terme harmonique h_m de la métrique dans cette carte vérifie

$$\min_{z \in K} h_m(z) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\infty.$$

Soit $z_m \in K$ tel que $\min_{z \in K} h_m(z) = h_m(z_m)$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer $z_m \rightarrow z \in K$. On fixe un ouvert connexe U , vérifiant $K \subset U \subset \bar{U} \subset D(1/2)$.

Comme $h_m(z) \leq M'(\bar{U})$ pour tout $z \in U$, on peut considérer la suite de fonctions harmoniques positives sur U :

$$f_m := M'(\bar{U}) - h_m.$$

Comme $f_m(z_m) \rightarrow +\infty$, l'alternative (2) du théorème 5.8 ne peut pas avoir lieu. On a donc $f_m \rightarrow +\infty$ localement uniformément sur U , et donc $h_m \rightarrow -\infty$ localement uniformément sur U . Mais le lemme 5.6 nous assure que

$$\left(\frac{\delta^2 \varepsilon^2}{512 \pi^2} \right)^{p^*} \leq \iint_{D(r)} e^{2p^* h_m(z)} d\lambda(z).$$

On obtient une contradiction, car le terme de droite devrait tendre vers zéro quand m tends vers l'infini. En effet, on peut appliquer le théorème de convergence dominé de Lebesgue : on a $e^{2p^* h_m(z)} \rightarrow 0$ pour tout $z \in D(r) \subset U$, et comme $D(r) \subset \bar{U}$, on peut dominer $e^{2p^* h_m(z)}$ par la fonction constante $e^{2p^* M'(\bar{U})}$. \square

5.3 Préliminaire II : un contrôle sur l'image conforme des boules

Cette partie consiste à démontrer le théorème présenté ci-dessous, qui utilise la géométrie conforme des anneaux. Soit $d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, et $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$ une carte conforme, avec $H(x) = 0$. On a alors un contrôle sur l'image des « grosses » boules $B(x, \varepsilon/4)$ (plus précisément, on a $D(2\alpha) \subset H(B(x, \varepsilon/4))$), et sur l'image des « petites » boules $B(x, \kappa\varepsilon)$ (plus précisément, on a $H(B(x, \kappa\varepsilon)) \subset D(\alpha)$), où α et κ sont des constantes strictement positives fixées (la figure 5.1 décrit la situation). Pour toute métrique $d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, il est clair que de telles constantes α et κ existent, mais la difficulté est de montrer qu'elles peuvent être choisies de façon uniforme.

Comme signalé précédemment, dans le cas classique du théorème de Cheeger-Gromov, sous l'hypothèse d'une minoration du rayon harmonique, de tels contrôles sont faciles à obtenir (proposition 3.20).

Théorème 5.9. *Il existe des constantes $\alpha = \alpha(\Sigma, A, c, \varepsilon, \delta) > 0$ et $\kappa = \kappa(\Sigma, A, c, \varepsilon, \delta) > 0$ vérifiant la propriété suivante. Soit $d \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, et soit $H : B(x, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$ une carte conforme, avec $H(x) = 0$. On est dans la situation suivante :*

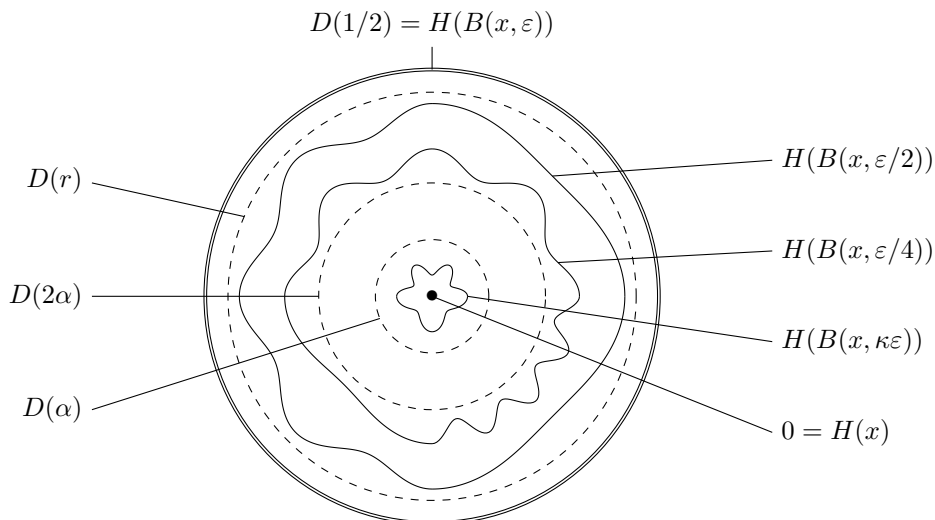


FIGURE 5.1

(L'inclusion $H(B(x, \varepsilon/2)) \subset D(r)$ a déjà été démontrée dans la proposition 5.5).

Il suffit donc de montrer les deux propriétés suivantes :

1. Si γ est le segment joignant 0 et un point de $D(2\alpha)$, alors la longueur de la courbe $H^{-1}(\gamma)$ dans Σ est strictement inférieure à $\varepsilon/4$. Ceci prouve que l'on a $D(2\alpha) \subset H(B(x, \varepsilon/4))$;
2. on a l'inclusion $H(B(x, \kappa\varepsilon)) \subset D(\alpha)$.

Remarque 5.10. *En réalité, α peut être très petit. Pour une meilleure lisibilité on a choisi $\alpha = 0.125$.*

On choisit d'abord α assez petit pour que la propriété 1. soit vérifiée. L'idée est la suivante : par le théorème 5.3, on a une majoration (explicite) de h , et la proposition 2.28 nous donne une majoration de la longueur d'un segment, lorsqu'il n'y a pas de terme harmonique dans l'expression de la métrique singulière. Il suffit alors d'utiliser ces deux estimées.

On prouve alors un théorème de convergence pour les distances (un corollaire du théorème de convergence local de Y. Reshetnyak, le théorème 2.20). Il est nécessaire pour démontrer la partie 2. du théorème 5.9, et il sera également utilisé plus loin (voir la section 5.4.5).

Avec ce théorème de convergence, on peut choisir κ assez petit pour que l'anneau topologique $D(1/2) - H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon))$ ait un module assez grand. Par le théorème de Grötzsch, $H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon))$ sera assez loin de $\partial D(1/2)$, c'est-à-dire que l'on aura $H(B(x, \kappa\varepsilon)) \subset D(\alpha)$.

5.3.1 Choix de α

Rappelons que $C(\Omega) = \sqrt{1 + \Omega/2\pi} \cdot e^{\Omega/4\pi}$ est la constante qui apparaît dans le théorème 5.3. Choisissons $0 < \alpha < 1/8$ tel que

$$\frac{(2\alpha)^{\delta/2\pi} \cdot 4\pi}{\delta} \cdot \frac{C(\Omega)}{(1/4)^{1+\Omega/2\pi}} \leq 1/4. \quad (5.8)$$

Preuve de la première partie du théorème 5.9. Soit $|z| < 2\alpha$, et $\gamma(t) := tz$ le segment $[0, z]$. On souhaite obtenir une majoration de la longueur de $H^{-1}(\gamma)$:

$$L(H^{-1}(\gamma)) = \int_0^1 e^{V[\omega_H](\gamma(t)) + h(\gamma(t))} |z| dt.$$

On a le

Fait 5.11. *Pour tout $z' \in D(2\alpha)$ on a*

$$\frac{(2\alpha)^{\delta/2\pi} \cdot 4\pi}{\delta} \cdot e^{h(z')} \leq \varepsilon/4.$$

Démonstration. La proposition 5.3 nous assure que, pour tout $z' \in D(1/2)$,

$$e^{h(z')} \leq \frac{\varepsilon}{(1/2 - |z'|)^{1+\Omega/2\pi}} \cdot C(\Omega),$$

donc en multipliant par l'inégalité (5.8) on obtient

$$\frac{(2\alpha)^{\delta/2\pi} \cdot 4\pi}{\delta} \cdot \frac{C(\Omega)}{(1/4)^{1+\Omega/2\pi}} \cdot e^{h(z')} \leq \varepsilon/4 \cdot \frac{C(\Omega)}{(1/2 - |z'|)^{1+\Omega/2\pi}}.$$

Pour tout $z' \in D(2\alpha)$ on a $|z'| \leq 1/4$, et donc $(1/2 - |z'|)^{1+\Omega/2\pi} \geq (1/4)^{1+\Omega/2\pi}$. Après simplification on obtient l'inégalité souhaitée. \square

Le segment $[0, z]$ est inclus dans $D(2\alpha)$, donc par le fait 5.11 on a

$$e^{h(\gamma(t))} \leq \frac{\delta}{(2\alpha)^{\delta/2\pi} \cdot 4\pi} \cdot \varepsilon/4,$$

d'où

$$L(H^{-1}(\gamma)) \leq \frac{\delta}{(2\alpha)^{\delta/2\pi} \cdot 4\pi} \cdot \varepsilon/4 \cdot \int_0^1 e^{V[\omega_H](\gamma(t))} |z| dt. \quad (5.9)$$

De plus, par la proposition 2.28 on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{V[\omega_H](\gamma(t))} |z| dt &\leq \frac{2}{1 - \omega_H^+(D(1/2))/2\pi} \cdot |z|^{1 - \omega_H^+(D(1/2))/2\pi} \\ &= \frac{2}{1 - \omega^+(B(x, \varepsilon))/2\pi} \cdot |z|^{1 - \omega^+(B(x, \varepsilon))/2\pi}. \end{aligned}$$

Avec l'inégalité $\omega^+(B(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta$ on obtient

$$\int_0^1 e^{V[\omega_H](\gamma(t))} |z| dt < \frac{4\pi}{\delta} \cdot (2\alpha)^{\delta/2\pi},$$

et avec (5.9) on obtient finalement $L(H^{-1}(\gamma)) < \varepsilon/4$. Ceci termine la preuve de la première partie du théorème 5.9. \square

5.3.2 Convergence de métriques : un corollaire du théorème 2.20

On prouve un corollaire du théorème de convergence local de Reshetnyak (théorème 2.20), qui nous est utile dans la preuve du théorème 5.2. Ce résultat nous sera aussi utile à la fin de la preuve du Théorème Principal (voir la partie 5.4.5).

Corollaire 5.12. *Soit $d_m \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$ une suite de métriques, et pour tout suite $x_m \in \Sigma$ on considère des cartes conformes $H_m : B_m(x_m, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$, avec $H_m(x_m) = 0$. Soit ω_m la mesure de courbure de (Σ, d_m) , et soit $\omega_{H_m} := (H_m)_\# \omega_m$ la mesure de Radon et h_m la fonction harmonique telle que H_m est une isométrie entre $(B_m(x_m, \varepsilon), d_m|_{B_m(x_m, \varepsilon)})$ et $(D(1/2), d_{\omega_{H_m}, h_m})$. Il existe une sous-suite telle que la propriété suivante soit vérifiée.*

Il existe une constante $C > 0$ et une mesure de Radon $\tilde{\omega}$, à support dans $\overline{D}(1/2)$, telle que

$$d_{\omega_{H_m}, h_m} \text{ converge vers } C \cdot \bar{d}_{\tilde{\omega}, 0}, \text{ localement uniformément sur } D(2\alpha)$$

(c'est-à-dire, si $z_m \rightarrow z \in D(2\alpha)$ et $z'_m \rightarrow z' \in D(2\alpha)$, alors $d_{\omega_{H_m}, h_m}(z_m, z'_m) \rightarrow C \cdot \bar{d}_{\tilde{\omega}, 0}(z, z')$).

Démonstration. On souhaite appliquer le théorème 2.20, qui est un théorème de convergence de métriques singulières, lorsqu'il n'y a pas de terme harmonique dans l'expression de la métrique (c'est-à-dire lorsqu'il n'y a qu'un terme potentiel). On va donc exprimer le terme harmonique h_m sous la forme d'un terme potentiel.

On sait qu'on peut exprimer une fonction harmonique en fonction des dérivées radiales le long d'un cercle : pour $z \in D(r)$ on a

$$h_m(z) = h_m(0) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D(r)} \ln |z - \xi| \cdot \frac{\partial h_m}{\partial \nu}(\xi) |d\xi|,$$

où $\frac{\partial h_m}{\partial \nu}$ est la dérivée radiale de h_m . Pour $z \in D(r)$ on peut donc écrire

$$h_m(z) = h_m(0) + V[\mu_m](z), \tag{5.10}$$

où μ_m est la mesure de Radon suivante (à support dans $\partial D(r)$) : $\mu_m := \frac{1}{2} \frac{\partial h_m}{\partial \nu} |d\xi|$. Posons

$$\tilde{\omega}_m := \omega_{H_m} + \mu_m.$$

On a le fait suivant, qui nécessite quelques justifications (l'écriture (5.10) n'est en effet valide que pour $z \in D(r)$) :

Fait 5.13. *Pour $u, u' \in D(2\alpha)$ on a*

$$d_{\omega_{H_m}, h_m}(u, u') = e^{h_m(0)} \cdot \bar{d}_{\tilde{\omega}_m, 0}(u, u').$$

Démonstration. Par définition,

$$d_{\omega_{H_m}, h_m}(u, u') = \inf_{\gamma} \int_0^l e^{V[\omega_{H_m}](\gamma(t)) + h_m(\gamma(t))} dt, \tag{5.11}$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les courbes simples continues $\gamma : [0, l] \rightarrow D(1/2)$, paramétrées par la longueur d'arc, avec $\gamma(0) = u$ et $\gamma(l) = u'$. Soit $y_m = (H_m)^{-1}(u)$

et $y'_m = (H_m)^{-1}(u')$. Comme la propriété 1. du théorème 5.9 a déjà été prouvée, on a $(H_m)^{-1}(D(2\alpha)) \subset B_m(x_m, \varepsilon/4)$, et donc $d_m(x_m, y_m) < \varepsilon/4$ et $d_m(x_m, y'_m) < \varepsilon/4$.

Maintenant, on considère $\gamma : [0, l] \rightarrow D(1/2)$, une courbe simple continue entre u et u' , paramétrée par la longueur d'arc, et on suppose que cette courbe n'est pas incluse dans $D(r)$. Posons $\tilde{\gamma} := (H_m)^{-1}(\gamma)$: c'est une courbe entre y_m et y'_m , et comme $H_m(B_m(x_m, \varepsilon/2)) \subset D(r)$ (c'est la proposition 5.5), $\tilde{\gamma}$ n'est pas incluse dans $B_m(x_m, \varepsilon/2)$. Mais $\tilde{\gamma}$ est une courbe joignant deux points dans $B_m(x_m, \varepsilon/4)$, et doit quitter $B_m(x_m, \varepsilon/2)$, donc sa longueur est au moins $2 \cdot \varepsilon/4 = \varepsilon/2$:

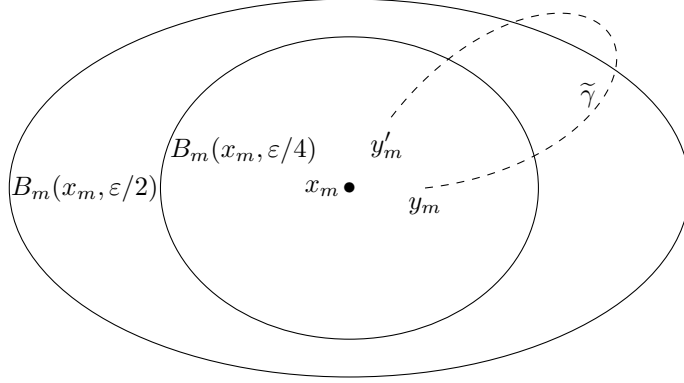


FIGURE 5.2

Comme la distance entre y_m et y'_m est strictement inférieure à $\varepsilon/2$, ceci nous montre que dans la formule (5.11), on peut considérer seulement les courbes γ incluses dans $D(r)$. Pour de telles courbes γ , on peut utiliser la formule (5.10) et on obtient donc

$$d_{\omega_{H_m}, h_m}(u, u') = e^{h_m(0)} \cdot \inf_{\gamma} \int_0^l e^{V[\tilde{\omega}_m](\gamma(t))} dt,$$

où la borne inférieure est prise sur les courbes simples continues $\gamma : [0, l] \rightarrow D(r)$, paramétrées par la longueur d'arc, avec $\gamma(0) = u$ et $\gamma(l) = u'$. Pour les mêmes raisons que précédemment, il revient au même de prendre la borne inférieure sur toutes les courbes $\gamma : [0, l] \rightarrow \bar{D}(1/2)$, et cette borne inférieure est exactement $\bar{d}_{\tilde{\omega}_m, 0}(u, u')$ (voir l'équation (2.9) de la partie 2.2.3 pour la définition de $\bar{d}_{\tilde{\omega}_m, 0}$). Ceci termine la preuve du fait 5.13. \square

Par le théorème 5.2, la suite $(h_m(0))_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc quitte à considérer une sous-suite on peut supposer $e^{h_m(0)} \rightarrow C > 0$. De plus, comme les fonctions h_m sont harmoniques, on peut appliquer la formule de Cauchy : on obtient une borne sur les dérivées de la fonction (en un point x), à partir d'une borne sur la valeur absolue de la fonction sur une boule centrée en x . Comme les fonctions h_m sont bornées sur tout compact de $D(1/2)$, on obtient que $\frac{\partial h_m}{\partial \nu}$ est borné sur $\partial D(r)$ (par une constante indépendante de m). Donc $\mu_m^+(D(1/2))$ et $\mu_m^-(D(1/2))$ sont bornées, et quitte à considérer une sous-suite on peut donc supposer $\mu_m^+ \rightarrow \mu^+$ and $\mu_m^- \rightarrow \mu^-$ faiblement. Comme les supports des mesures μ_m^+ et μ_m^- sont inclus dans $\partial D(r)$, les supports de μ^+ et μ^- le sont aussi. On pose $\mu := \mu^+ - \mu^-$.

On peut aussi supposer que $\omega_{H_m}^+ \rightarrow \omega^+$ et $\omega_{H_m}^- \rightarrow \omega^-$ faiblement. On pose $\omega := \omega^+ - \omega^-$. Comme $\tilde{\omega}_m = \omega_{H_m} + \mu_m$, on a $\tilde{\omega}_m \rightarrow \tilde{\omega} := \omega + \mu$ faiblement.

Comme $\omega_{H_m}^+(D(1/2)) = \omega_m^+(B_m(x_m, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta$, on a $\omega^+(\{z\}) < 2\pi$ pour tout $z \in D(2\alpha)$, et μ^+ a son support inclus dans $\partial D(r)$, donc $\mu^+(\{z\}) = 0$ pour tout $z \in D(2\alpha)$. On a donc $\tilde{\omega}^+(\{z\}) < 2\pi$ pour tout $z \in D(2\alpha)$ et on peut appliquer le théorème 2.20 : si $z_m \rightarrow z \in D(2\alpha)$ et $z'_m \rightarrow z' \in D(2\alpha)$, alors

$$\bar{d}_{\tilde{\omega}_m, 0}(z_m, z'_m) \rightarrow \bar{d}_{\tilde{\omega}, 0}(z, z'),$$

et le fait 5.13 nous donne

$$d_{\omega_{H_m}, h_m}(z_m, z'_m) = e^{h_m(0)} \cdot \bar{d}_{\tilde{\omega}_m, 0}(z_m, z'_m) \rightarrow C \cdot \bar{d}_{\tilde{\omega}, 0}(z, z').$$

□

5.3.3 Choix de κ

On commence par choisir κ assez petit, de telle sorte que l'anneau topologique $D(1/2) - H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon))$ ait un module assez grand. On pourra ensuite utiliser le théorème de Grötzsch pour terminer la preuve du théorème 5.9. On rappelle que $\text{mod } G(2\alpha)$ est le module de l'anneau de Grötzsch $G(2\alpha)$.

Lemme 5.14. *Il existe une constante $\kappa = \kappa(\Sigma, A, c, \varepsilon, \delta) > 0$ vérifiant la propriété suivante. Sous les hypothèses du théorème 5.9, l'anneau topologique $D(1/2) - H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon))$ a un module strictement supérieur à $\text{mod } G(2\alpha)$.*

Remarque 5.15. *Cette propriété est évidente dans le cas du plan Euclidien. Un anneau $A(R_1, R_2)$, de frontière deux cercles concentriques de rayons $R_1 < R_2$ a pour module $\frac{1}{2\pi} \ln(R_2/R_1)$, et cette quantité tends vers l'infini quand R_1 tends vers zéro.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de métriques $d_m \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, une suite de points $x_m \in \Sigma$, une suite de carte conformes $H_m : B_m(x_m, \varepsilon) \rightarrow D(1/2)$, avec $H_m(x_m) = 0$, telles que

$$\text{mod}(D(1/2) - H_m(\overline{B_m}(x_m, \varepsilon/m))) \leq \text{mod}(G(2\alpha)).$$

Soit $\iota > 0$ tel que $\frac{1}{2\pi} \ln(1/2\iota) > \text{mod } G(2\alpha)$ (on peut supposer $\iota < 2\alpha$). On a le

Fait 5.16. *On a $H_m(B_m(x_m, \varepsilon/m)) \not\subset D(\iota)$.*

Démonstration. Supposons avoir $H_m(B_m(x_m, \varepsilon/m)) \subset D(\iota)$: on a alors

$$D(1/2) - \overline{D}(\iota) \subset D(1/2) - H_m(\overline{B_m}(x, \varepsilon/m)),$$

et donc

$$\text{mod}(D(1/2) - H_m(\overline{B_m}(x, \varepsilon/m))) \geq \text{mod}(D(1/2) - \overline{D}(\iota)) = \frac{1}{2\pi} \ln(1/2\iota) > \text{mod } G(2\alpha),$$

ce qui est absurde. □

Considérons la métrique riemannienne singulière $g_m = e^{2V[\omega_m] + 2h_m} |dz|^2$, telle que H_m soit une isométrie entre $(B_m(x_m, \varepsilon), d_m|_{B_m(x_m, \varepsilon)})$ et $(D(1/2), d_{\omega_m, h_m})$.

Par le fait 5.16, il existe des nombres complexes z_m , avec $|z_m| \geq \iota$, et $d_{\omega_m, h_m}(0, z_m) \leq \varepsilon/m$. Quitte à considérer l'intersection entre une géodésique entre 0 et z_m et $\partial D(\iota)$, on peut supposer que $|z_m| = \iota$ et $d_{\omega_m, h_m}(0, z_m) \leq \varepsilon/m$. Par compacité, quitte à considérer une sous-suite on peut supposer $z_m \rightarrow z \neq 0$. Comme $|z| = \iota < 2\alpha$, par le corollaire 5.12 on sait que, quitte à considérer une sous-suite, il existe une constante $C > 0$ et une mesure de Radon $\tilde{\omega}$, à support dans $\overline{D}(1/2)$, telle que

$$d_{\omega_m, h_m}(0, z_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} C \cdot \bar{d}_{\tilde{\omega}, 0}(0, z) \neq 0,$$

et c'est absurde car $d_{\omega_m, h_m}(0, z_m) \leq \varepsilon/m \rightarrow 0$. □

Preuve de la seconde partie du théorème 5.9. On va démontrer l'inclusion

$$H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon)) \subset D(\alpha).$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons avoir

$$H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon)) \not\subset D(\alpha).$$

Quitte à faire une rotation, on peut supposer que $H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon))$ ne contient pas le point $\alpha \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. En effectuant une homothétie de facteur 2, il est clair que l'anneau $D(1/2) - H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon))$ est conforme à l'anneau $U \subset D(1)$, qui ne contient ni 0, ni 2α . Par le théorème de Grötzsch, on sait que le module de cet anneau est

$$\text{mod}(U) = \text{mod}(D(1/2) - H(\overline{B}(x, \kappa\varepsilon))) \leq \text{mod} G(2\alpha),$$

et c'est une contradiction par le lemme 5.14. Ceci termine la preuve du théorème 5.9. □

5.4 Preuve du théorème

On peut maintenant commencer la preuve du Théorème Principal : on considère une suite de métriques $d_m \in \mathcal{M}_\Sigma(A, c, \varepsilon, \delta)$, c'est-à-dire

1. pour tout $x \in \Sigma$ on a $\omega_m^+(B_m(x, \varepsilon)) \leq 2\pi - \delta$;
2. $\text{cont}(\Sigma, d_m) \geq c$;
3. $\text{aire}(\Sigma, d_m) \leq A$.

On rappelle qu'on suppose toujours $\varepsilon < c$. Par la proposition 5.1, on a aussi des constantes $D > 0$ et $\Omega > 0$ telles que

$$\text{diam}(\Sigma, d_m) \leq D \text{ et } |\omega|(\Sigma, d_m) \leq \Omega,$$

et on dispose également des constantes $\alpha > 0$ et $\kappa > 0$ du théorème 5.9.

On considèrera souvent des sous-suites de la suite originale (d_m) , mais pour plus de clarté dans la présentation on ne changera jamais l'indexation de la suite.

Plan de la preuve

Comme déjà signalé, le schéma de la démonstration est similaire à la deuxième étape du théorème de Cheeger-Gromov. On ne signale ici que les *différences* avec ce qui a déjà été présenté : il faut donc lire ce qui suit en parallèle avec la fin de la partie 3.4.3.

1. L'argument pour recouvrir Σ par des ouverts $B_m(x_i^m, \varepsilon)$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, est le même que précédemment. On utilise ici les résultats de la partie 2.5.1 (plutôt que le théorème de Bishop-Gromov) pour contrôler le volume des boules à l'aide de la courbure. On définit des cartes *conformes* (et non pas harmoniques) $H_i^m : B_m(x_i^m, \varepsilon) \rightarrow D$, avec $H_i^m(x_i^m) = 0$.
2. Le plongement de Whitney est le même que précédemment : on obtient des sous-variétés plongées $\Sigma^m \subset \mathbb{R}^q$, qui sont encore (localement) des graphes.
3. Pour faire converger la suite de fonctions $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$, quand ces dernières ont un sens, on utilise cette fois-ci le fait que ces applications définies sur un ouvert de \mathbb{C} sont *conformes*, et bornées. On peut alors appliquer le théorème de Montel pour les faire converger.
4. On définit un difféomorphisme $\Pi^m : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$ de la même façon que précédemment.
5. A l'aide des difféomorphismes $\Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma^m \subset \mathbb{R}^q \xrightarrow{\sim} \Sigma^\infty \subset \mathbb{R}^q$, on transporte la métrique initiale d_m en une métrique \widetilde{d}_m sur Σ^∞ : (Σ, d_m) est isométrique à $(\Sigma^\infty, \widetilde{d}_m)$. On montre finalement que \widetilde{d}_m converge, en utilisant le corollaire du théorème de convergence locale de Reshetnyak démontré précédemment (corollaire 5.12).

5.4.1 Recouvrement de Σ

Soit $m \in \mathbb{N}$. Considérons un nombre maximal $N(m)$ de boules disjointes $B_m(x_i^m, \kappa\varepsilon/4)$ dans Σ . Par le corollaire 2.24, on sait que l'aire de ces boules est minorée. Comme l'aire de (Σ, d_m) est majorée, $N(m)$ est également majoré : quitte à considérer une sous-suite, on va supposer que $N(m) = N$ est constant. De plus, par un argument élémentaire de doublement on a

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^N B_m(x_i^m, \kappa\varepsilon/2). \quad (5.12)$$

On peut alors considérer des cartes conformes (voir le théorème-définition 2.15)

$$H_i^m : B_m(x_i^m, \varepsilon) \rightarrow D(1/2),$$

avec $H_i^m(x_i^m) = 0$. Dans la suite, on pose $\omega_i^m := (H_i^m)_\# \omega$, et h_i^m la fonction harmonique sur $D(1/2)$ telle que la métrique riemannienne singulière s'écrive

$$g_i^m := e^{2V[\omega_i^m](z) + 2h_i^m(z)} |dz|^2.$$

La propriété 2. du théorème 5.9 nous assure que

$$H_i^m(B_m(x_i^m, \kappa\varepsilon)) \subset D(\alpha),$$

et avec la relation (5.12) on obtient le

Fait 5.17. *On a le recouvrement*

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^N (H_i^m)^{-1}(D(\alpha)).$$

5.4.2 Plongement dans un espace Euclidien

On utilise une fonction $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ pour étendre les cartes H_i^m à la surface Σ tout entier. Alors, par un analogue au théorème de plongement de Whitney, on plonge Σ dans un espace Euclidien, et on montre que cet ensemble est localement un graphe.

Soit $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse, valant 1 sur $D(5\alpha/3)$ et 0 hors de $D(2\alpha)$ (voir la figure 5.1). Pour $1 \leq i \leq N$, on définit sur Σ les fonctions suivantes :

- $\varphi_i^m := \varphi \circ H_i^m : \Sigma \rightarrow [0, 1]$. Par le théorème 5.9, cette fonction vaut 1 sur $B_m(x_i^m, \kappa\varepsilon)$, et 0 hors de $B_m(x_i^m, \varepsilon/4)$;
- $\overline{H}_i^m := \varphi_i^m H_i^m : \Sigma \rightarrow D(1/2)$. Cette fonction étend H_i^m . Elle est égale à H_i^m sur $B_m(x_i^m, \kappa\varepsilon)$, et vaut 0 hors de $B_m(x_i^m, \varepsilon/4)$.

Décrivons maintenant le plongement de Whitney. Soit $q := 2N + N$. On défini

$$\begin{aligned} \Psi^m : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\longmapsto \Psi^m(x) = (\overline{H}_1^m(x), \dots, \overline{H}_N^m(x), \varphi_1^m(x), \dots, \varphi_N^m(x)). \end{aligned}$$

Lemme 5.18 (Whitney). *Ψ^m est un plongement. On appelle*

$$\Sigma^m := \Psi^m(\Sigma)$$

la sous-variété de \mathbb{R}^q ainsi obtenue.

Démonstration. Σ étant compact, il suffit de montrer que Ψ^m est une immersion injective.

Soit $x \in \Sigma$, et $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x \in B_m(x_i^m, \kappa\varepsilon)$. Comme $\overline{H}_i^m = H_i^m$ au voisinage de x , et H_i^m est une immersion, on obtient que Ψ^m est aussi une immersion.

Supposons maintenant avoir $\Psi^m(x) = \Psi^m(y)$, avec $x \in B_m(x_i^m, \kappa\varepsilon)$. En considérant la coordonnée $2N + i$ on a $\varphi_i^m(x) = 1 = \varphi_i^m(y)$, ce qui montre que $y \in B_m(x_i^m, \varepsilon/4)$. On a alors $\overline{H}_i^m(y) = \varphi_i^m(y)H_i^m(y) = H_i^m(y)$, et $\overline{H}_i^m(x) = \varphi_i^m(x)H_i^m(x) = H_i^m(x)$. Comme $\overline{H}_i^m(x) = \overline{H}_i^m(y)$ on obtient $H_i^m(x) = H_i^m(y)$, et donc $x = y$, ce qui montre que Ψ^m est injective. \square

Comme $\varphi = 1$ sur $D(5\alpha/3)$, on remarque que ces sous-variétés sont des graphes, paramétrés par $D(5\alpha/3)$. En effet, pour $1 \leq i \leq N$, les ouverts $(H_i^m)^{-1}(D(5\alpha/3))$ recouvrent Σ (c'est le fait 5.17), et pour $z \in D(5\alpha/3)$ on a

$$\varphi_i^m((H_i^m)^{-1}(z)) = \varphi(z) = 1 \text{ et } \overline{H}_i^m((H_i^m)^{-1}(z)) = z,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Phi_i^m(z) &:= \Psi^m((H_i^m)^{-1}(z)) = \\ &\left(\overline{H}_1^m((H_1^m)^{-1}(z)), \dots, z, \dots, \overline{H}_N^m((H_N^m)^{-1}(z)), \varphi_1^m((H_1^m)^{-1}(z)), \dots, 1, \dots, \varphi_N^m((H_N^m)^{-1}(z)) \right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

(c'est bien un graphe car la $i^{\text{ème}}$ coordonnée est z). Σ^m est alors la réunion de N portions de graphes :

$$\Sigma^m = \bigcup_{i=1}^N \Phi_i^m(D(5\alpha/3)).$$

Si $x \in \Phi_i^m(D(5\alpha/3))$, on écrira dans la suite que x est dans le graphe numéro i .

Remarque 5.19. *Ce commentaire fait suite à la remarque 3.17. On rappelle que la surface Σ est lisse. Bien que les métriques considérées ne le soient pas (à priori), ces dernières n'interviennent pas dans la construction précédente et on obtient donc quand même des plongements qui sont lisses.*

5.4.3 Convergence des surfaces plongées Σ^m vers une surface plongée Σ^∞

On veut montrer la convergence des fonctions définissant Σ^m en tant que graphes, c'est-à-dire la convergence des fonctions $\overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1}$ et $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$. On montre d'abord que, quitte à considérer une sous-suite, sur des ouverts V adéquats, ces fonctions sont soit nulles sur V , pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ est bien défini sur V (c'est-à-dire $(H_i^m)^{-1}(V) \subset B_m(x_j^m, \varepsilon)$), pour tout $m \in \mathbb{N}$. Dans le premier cas, la suite de fonctions $\overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1}$ converge de façon évidente ; dans le second cas, le théorème de Montel nous permet de conclure que cette suite bornée de fonctions conformes va converger localement uniformément sur V . En passant à la limite, on définit un sous-ensemble $\Sigma^\infty \subset \mathbb{R}^q$. On prouve ensuite que ce sous-ensemble est en fait une surface plongée.

Étude préliminaire des fonctions $\overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1}$ et $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$

Fixons $z \in D(1/2)$. Si l'expression $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z)$ a un sens (c'est-à-dire si $(H_i^m)^{-1}(z) \in B_m(x_j^m, \varepsilon)$) on a

$$\begin{cases} \overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1}(z) &= \varphi(H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z)) \cdot H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z) \\ \varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z) &= \varphi(H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z)), \end{cases}$$

et sinon (c'est-à-dire si $(H_i^m)^{-1}(z) \notin B_m(x_j^m, \varepsilon)$) on a

$$\overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1}(z) = 0 \text{ et } \varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z) = 0.$$

En un certain sens, on veut montrer que cette dichotomie est valide *uniformément* en $m \in \mathbb{N}$.

Proposition 5.20. *Il existe un recouvrement fini par des ouverts*

$$D(2\alpha) = \bigcup_{t \in T} V_t$$

vérifiant la propriété suivante (après extraction d'une sous-suite). On fixe $i, j \in \{1, \dots, N\}$ et $t \in T$. Alors au moins l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

- (A) pour tout $m \in \mathbb{N}$, $V_t \subset H_i^m(B_m(x_i^m, \varepsilon) \cap B_m(x_j^m, \varepsilon))$.
Alors $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ est bien défini sur V_t .
- (B) pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1} = 0$ sur V_t .
Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1} = 0$ sur V_t .

Remarque 5.21. On peut remarquer qu'un ouvert V_t peut vérifier les deux propriétés à la fois. De plus, la propriété (B) est vérifiée dès qu'il n'y a pas de fonctions de transition entre $B_m(x_i^m, \varepsilon)$ et $B_m(x_j^m, \varepsilon)$, c'est-à-dire dès que $B_m(x_i^m, \varepsilon) \cap B_m(x_j^m, \varepsilon) = \emptyset$.

Cette proposition est une conséquence directe du lemme suivant. Soit $\eta > 0$ la constante vérifiant

$$e^{M(\overline{D}(2\alpha))} \cdot \frac{4\pi}{\delta} \cdot \eta^{\delta/2\pi} = 3\varepsilon/4 \quad (5.14)$$

(rappelons que $M(\overline{D}(2\alpha))$ est la constante apparaissant dans le théorème 5.2 pour le compact $K = \overline{D}(2\alpha)$).

Lemme 5.22. Soit $m \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$ et $z_0, z \in D(2\alpha)$. On suppose $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z_0) \neq 0$. Alors

$$|z - z_0| \leq \eta \implies (H_i^m)^{-1}(z) \in B_m(x_j^m, \varepsilon) \text{ (et donc } H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z) \text{ existe).}$$

Démonstration. Comme $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z_0) = \varphi(H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z_0)) \neq 0$, on a $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z_0) \in D(2\alpha)$, donc par le théorème 5.9 on a $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z_0) \in H_j^m(B_m(x_j^m, \varepsilon/4))$, et donc

$$d_m(x_j^m, (H_i^m)^{-1}(z_0)) < \varepsilon/4. \quad (5.15)$$

On utilise maintenant les mêmes arguments que dans la preuve de la première partie du théorème 5.9. Soit $\gamma(t) := (1-t)z_0 + tz$ le segment joignant z_0 à z . On a

$$L_m((H_i^m)^{-1}(\gamma)) = \int_0^1 e^{V[\omega_i^m](\gamma(t)) + h_i^m(\gamma(t))} |z - z_0| dt.$$

Comme le segment γ est inclus dans $D(2\alpha)$, on a $e^{h_i^m(\gamma(t))} \leq e^{M(\overline{D}(2\alpha))}$. En utilisant alors la proposition 2.28, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{V[\omega_i^m](\gamma(t))} |z - z_0| dt &\leq \frac{2}{1 - (\omega_i^m)^+(D(1/2))/2\pi} \cdot |z - z_0|^{1 - (\omega_i^m)^+(D(1/2))/2\pi} \\ &\leq \frac{4\pi}{\delta} \cdot |z - z_0|^{\delta/2\pi}. \end{aligned}$$

On a donc obtenu

$$L_m((H_i^m)^{-1}(\gamma)) \leq e^{M(\overline{D}(2\alpha))} \cdot \frac{4\pi}{\delta} \cdot |z - z_0|^{\delta/2\pi} \leq e^{M(\overline{D}(2\alpha))} \cdot \frac{4\pi}{\delta} \cdot \eta^{\delta/2\pi} = 3\varepsilon/4$$

(on a choisi η de telle sorte que la dernière inégalité soit vérifiée). Comme $(H_i^m)^{-1}(\gamma)$ est une courbe continue dans Σ joignant $(H_i^m)^{-1}(z_0)$ et $(H_i^m)^{-1}(z)$, on a $d_m((H_i^m)^{-1}(z_0), (H_i^m)^{-1}(z)) \leq 3\varepsilon/4$, et donc avec l'inégalité (5.15) on obtient $d_m(x_j^m, (H_i^m)^{-1}(z)) < 3\varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon$, et ceci termine la preuve. \square

Démonstration de la proposition 5.20. Le fait suivant est une conséquence directe du lemme 5.22 (la seule différence entre ce fait et la proposition 5.20 est qu'ici l'entier m est fixé) :

Fait 5.23. Soit $m \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$, et $V \subset D(2\alpha)$ un ouvert de diamètre au plus η . Alors au moins l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

- (A') on a $V \subset H_i^m(B_m(x_i^m, \varepsilon) \cap B_m(x_j^m, \varepsilon))$,
- (B') on a $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1} = 0$ sur V .

Démonstration. Supposons que la propriété (B') ne soit pas vérifiée : il existe $z_0 \in V$ avec $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z_0) \neq 0$. Par ailleurs tout $z \in V$ vérifie $|z - z_0| \leq \eta$, et donc $(H_i^m)^{-1}(z) \in B_m(x_j^m, \varepsilon)$ par le lemme 5.22 : ceci montre que la propriété (A') est vérifiée. \square

Maintenant, recouvrons $D(2\alpha)$ par un nombre fini d'ouverts V_t , pour $t \in T$, de diamètre au plus η . Pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$ et tous $t \in T$, par le fait précédent, il existe un nombre infini d'entiers m vérifiant la même propriété, (A') ou (B'). Il existe donc une sous-suite m' de m telle que la même propriété ((A') ou (B')) soit vérifiée pour tout m' . En prenant un nombre fini d'extractions successives, quand i, j parcourent $\{1, \dots, N\}$ et $t \in T$, on obtient la proposition 5.20. \square

Convergence des fonctions de transition

Soient $i, j \in \{1, \dots, N\}$. On veut montrer la convergence des suites de fonctions $\overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1}$ et $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ sur $D(2\alpha)$.

Sur un ouvert V_t vérifiant la propriété (B) de la proposition 5.20, on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1} = 0$ et $\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1} = 0$ sur V_t , et donc la suite de fonctions converge trivialement.

Considérons maintenant un ouvert V_t tel que la propriété (A) de la proposition 5.20 soit vérifiée. Alors $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ est bien défini sur V_t . Les fonctions H_i^m et H_j^m sont des cartes conformes, donc $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ est une application conforme sur V_t (cette propriété classique des surfaces munies de métriques riemanniennes lisses s'étend sans problème aux surfaces à Courbure Intégrale Bornée : voir la proposition 2.17). $(H_j^m \circ (H_i^m)^{-1})_{m \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de fonctions holomorphes (ou anti-holomorphes) bornées sur V_t : par le théorème de Montel, on sait que, quitte à considérer une sous-suite, $H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}$ converge localement uniformément (ainsi que les dérivées) vers une fonction holomorphe (ou anti-holomorphe) définie sur V_t .

Soit $A_{ji} :=$ la réunion des ouverts V_t pour lesquels la propriété (A) de la proposition 5.20 est satisfaite, et $B_{ji} :=$ la réunion des ouverts V_t pour lesquels la propriété (B) est satisfaite. On a $D(2\alpha) = A_{ji} \cup B_{ji}$.

Quitte à considérer des extractions successives, on peut définir une fonction lisse H_{ji} sur A_{ji} par $H_{ji}(z) := \lim_{m \rightarrow \infty} H_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z)$. Pour $i, j \in \{1, \dots, N\}$ on a les propriétés suivantes :

- il existe une fonction lisse φ_{ji} sur $D(2\alpha)$ telle que

$$\varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi_{ji} \text{ localement uniformément (ainsi que les dérivées) sur } D(2\alpha) :$$

φ_{ji} est défini par $\varphi_{ji} = \varphi \circ H_{ji}$ sur A_{ji} , et $\varphi_{ji} = 0$ sur B_{ji} .

— Il existe une fonction lisse $\overline{H_{ji}}$ sur $D(2\alpha)$ telle que

$\overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \overline{H_{ji}}$ localement uniformément (ainsi que les dérivées) sur $D(2\alpha)$:

$\overline{H_{ji}}$ est défini par $\overline{H_{ji}} = \varphi_{ji} H_{ji}$ sur A_{ji} , et $\overline{H_{ji}} = 0$ sur B_{ji} .

Construction de la surface plongée Σ^∞

Faisons tendre m vers l'infini dans la relation (5.13) : pour $z \in D(5\alpha/3)$ on pose

$$\Phi_i^\infty(z) := \left(\overline{H_{1i}}(z), \dots, z, \dots, \overline{H_{Ni}}(z), \varphi_{1i}(z), \dots, 1, \dots, \varphi_{Ni}(z) \right). \quad (5.16)$$

On définit également le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^q :

$$\Sigma^\infty := \bigcup_{i=1}^N \Phi_i^\infty(D(5\alpha/3)).$$

Si $x \in \Sigma^\infty$ est dans l'ouvert $\Phi_i^\infty(D(5\alpha/3))$, on écrira que x est dans le graphe numéro i . Comme Σ^m est recouvert par les ouverts $(H_i^m)^{-1}(D(\alpha))$, pour $1 \leq i \leq N$, la proposition suivante est immédiate :

Proposition 5.24. *On a*

$$\Sigma^\infty = \bigcup_{i=1}^N \Phi_i^\infty(\overline{D}(\alpha)),$$

et donc

$$\Sigma^\infty = \bigcup_{i=1}^N \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3)).$$

Démonstration. Soit $x \in \Sigma^\infty$: par définition, il existe des points $x_m \in \Sigma^m$, vérifiant $x_m \rightarrow x$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $i(m) \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x_m \in \Phi_{i(m)}^m(D(\alpha))$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $i(m)$ est constant. Pour simplifier l'exposé, on suppose $i(m) = 1$. Il existe donc une suite de nombres complexes $z_m \in D(\alpha)$ tels que

$$x_m = \Phi_1^m(z_m) = \left(z_m, \dots, \overline{H_N^m}((H_1^m)^{-1}(z_m)), 1, \dots, \varphi_N^m((H_1^m)^{-1}(z_m)) \right).$$

Par compacité, quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer $z_m \rightarrow z \in \overline{D}(\alpha)$, et par convergence uniforme de toutes les fonctions apparaissant dans l'égalité, on obtient $x = \Phi_1^\infty(z)$, et ceci termine la preuve. \square

Il est facile de voir qu'une telle « limite » de surfaces plongées n'est pas forcément une surface plongée :

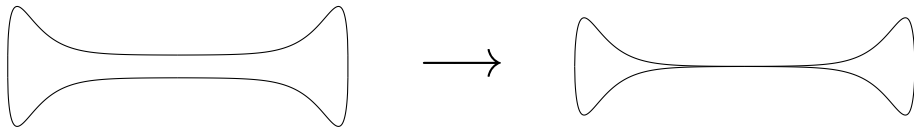


FIGURE 5.3

Mais c'est la cas dans la situation présentée ici :

Proposition 5.25. Σ^∞ est une surface lisse plongée dans \mathbb{R}^q , éventuellement non connexe (on montrera la connexité plus loin).

C'est une conséquence directe du lemme technique suivant, qui sera également utilisé plus loin : les points de Σ^m (ou de Σ^∞) qui sont proches de points dans le graphe numéro i , sont aussi dans le graphe numéro i .

Lemme 5.26. Les propriétés suivantes sont vraies pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$:

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \Phi_i^m(D(4\alpha/3)) \subset \Sigma^m$. Pour tout $x \in \Sigma^m$,

$$\|x - x_0\| < \alpha/6 \implies x \in \Phi_i^m(D(5\alpha/3)).$$

2. Soit $x_0 \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3)) \subset \Sigma^\infty$. Pour tout $x \in \Sigma^\infty$,

$$\|x - x_0\| < \alpha/6 \implies x \in \Phi_i^\infty(D(5\alpha/3)).$$

2'. Soit $x_0 \in \Phi_i^\infty(D(\alpha)) \subset \Sigma^\infty$. Pour tout $x \in \Sigma^\infty$,

$$\|x - x_0\| < \alpha/6 \implies x \in \Phi_i^\infty(D(7\alpha/6)).$$

($\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne de \mathbb{R}^q .)

Démonstration de la proposition 5.25. La compacité est une conséquence de la proposition 5.24. Maintenant, considérons $x_0 \in \Sigma^\infty$. Par la proposition 5.24, il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x_0 \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$. La seconde partie du lemme 5.26 nous montre que

$$B_{\text{euc}}(x_0, \alpha/6) \cap \Sigma^\infty = B_{\text{euc}}(x_0, \alpha/6) \cap \Phi_i^\infty(D(5\alpha/3))$$

($B_{\text{euc}}(x_0, \alpha/6)$ est la boule Euclidienne de centre x_0 et de rayon $\alpha/6$). Comme $\Phi_i^\infty(z)$ est le graphe d'une fonction (voir l'égalité 5.16), ceci montre que Σ^∞ est une surface plongée dans \mathbb{R}^q . \square

Démonstration du lemme 5.26. Pour simplifier l'exposé, on effectue les calculs dans le cas $i = 1$.

Démonstration de 1). Il existe $z_0 \in D(4\alpha/3)$ tel que

$$x_0 = \Phi_1^m(z_0) = \left(z_0, \dots, \overline{H_N^m}((H_1^m)^{-1}(z_0)), 1, \dots, \varphi_N^m((H_1^m)^{-1}(z_0)) \right),$$

et on considère $x \in \Sigma^m$ vérifiant $\|x - x_0\| < \alpha/6$. Il existe un entier $i \in \{1, \dots, N\}$ et $z \in D(4\alpha/3)$ tels que

$$x = \left(\overline{H_1^m}((H_i^m)^{-1}(z)), \dots, z, \dots, \overline{H_N^m}((H_i^m)^{-1}(z)), \varphi_1^m((H_i^m)^{-1}(z)), \dots, 1, \dots, \varphi_N^m((H_i^m)^{-1}(z)) \right).$$

Posons $z' = \overline{H_1^m}((H_i^m)^{-1}(z))$: on veut montrer $|z'| < 5\alpha/3$ et $x = \Phi_1^m(z')$.

Comme $|z' - z_0| \leq \|x - x_0\| < \alpha/6$, on a $|z'| < 4\alpha/3 + \alpha/6 = 3\alpha/2$. Pour la même raison, $|\varphi_1^m((H_i^m)^{-1}(z)) - 1| \leq \|x - x_0\| < \alpha/6 < 1/10$, et donc $\varphi_1^m((H_i^m)^{-1}(z)) > 9/10$.

Comme $\varphi_1^m((H_i^m)^{-1}(z)) \neq 0$, on sait que $H_1^m((H_i^m)^{-1}(z))$ existe, et on a donc $z' = \overline{H_1^m}((H_i^m)^{-1}(z)) = \varphi_1^m((H_i^m)^{-1}(z)) \cdot H_1^m((H_i^m)^{-1}(z))$. Comme $\varphi_1^m((H_i^m)^{-1}(z)) \geq 9/10$ on a

$$|z'| \geq \frac{9}{10} \cdot |H_1^m((H_i^m)^{-1}(z))|,$$

et donc

$$|H_1^m((H_i^m)^{-1}(z))| \leq \frac{10}{9} \cdot |z'| < \frac{10}{9} \cdot \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{3}.$$

Comme $\varphi = 1$ sur $D(5\alpha/3)$ on obtient

$$\varphi_1^m((H_i^m)^{-1}(z)) = \varphi(H_1^m((H_i^m)^{-1}(z))) = 1,$$

et donc finalement $z' = H_1^m((H_i^m)^{-1}(z))$. On a déjà $|z'| < 3\alpha/2 < 5\alpha/3$. Pour montrer l'égalité $x = \Phi_1^m(z')$, c'est-à-dire

$$x = \left(z', \dots, \overline{H_N^m}((H_1^m)^{-1}(z')), 1, \dots, \varphi_N^m((H_1^m)^{-1}(z')) \right),$$

on doit prouver les égalités suivantes, pour $j \geq 2$:

$$\overline{H_j^m}((H_1^m)^{-1}(z')) = \overline{H_j^m}((H_i^m)^{-1}(z))$$

et

$$\varphi_j^m((H_1^m)^{-1}(z')) = \varphi_j^m((H_i^m)^{-1}(z)),$$

et ce sont des conséquences directes de l'égalité $(H_1^m)^{-1}(z') = (H_i^m)^{-1}(z)$.

Démonstration de 2). (La démonstration de 2') est analogue). La preuve ressemble à celle de 1), seule la fin est différente.

Soit $z_0 \in D(4\alpha/3)$ tel que

$$x_0 = \Phi_1^\infty(z_0) = \left(z_0, \overline{H_{21}}(z_0), \dots, \overline{H_{N1}}(z_0), 1, \varphi_{21}(z_0), \dots, \varphi_{N1}(z_0) \right),$$

et soient $i \in \{1, \dots, N\}$ et $z \in D(4\alpha/3)$ tels que

$$x = \left(\overline{H_{1i}}(z), \dots, z, \dots, \overline{H_{Ni}}(z), \varphi_{1i}(z), \dots, 1, \dots, \varphi_{Ni}(z) \right).$$

On pose $z' = \overline{H_{1i}}(z)$, et on veut montrer $|z'| < 5\alpha/3$, et $x = \Phi_1^\infty(z')$.

Pour les mêmes raisons que précédemment, on a $|z'| < 3\alpha/2$, et $\varphi_{1i}(z) > 9/10$: $H_{1i}(z)$ existe (c'est-à-dire, z est dans un ouvert V_i vérifiant la propriété (A) de la proposition 5.20), et on a

$$|H_{1i}(z)| < 5\alpha/3.$$

On obtient $\varphi_{1i}(z) = 1$, et finalement $z' = \varphi_{1i}(z) \cdot H_{1i}(z) = H_{1i}(z)$. Pour conclure on doit montrer l'égalité

$$x = \Phi_1^\infty(z') = \left(z', \overline{H_{21}}(z'), \dots, \overline{H_{N1}}(z'), 1, \varphi_{21}(z'), \dots, \varphi_{N1}(z') \right).$$

On doit donc montrer que pour $j \geq 2$:

$$\overline{H_{j1}}(z') = \overline{H_{ji}}(z)$$

et

$$\varphi_{j1}(z') = \varphi_{ji}(z).$$

La première égalité s'écrit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{H_j^m} \circ (H_1^m)^{-1} \left(\lim_{m' \rightarrow \infty} H_1^{m'} \circ (H_i^{m'})^{-1}(z) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{H_j^m} \circ (H_i^m)^{-1}(z),$$

et elle est vraie car toutes les convergences sont uniformes ; la seconde s'écrit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_j^m \circ (H_1^m)^{-1} \left(\lim_{m' \rightarrow \infty} H_1^{m'} \circ (H_i^{m'})^{-1}(z) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_j^m \circ (H_i^m)^{-1}(z),$$

et elle est vraie pour les mêmes raisons. \square

5.4.4 Construction d'un difféomorphisme $\Pi^m : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$

Pour m assez grand, Σ^m est dans un voisinage tubulaire de Σ^∞ : on peut donc définir une projection $\Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$. Comme Σ^m tends vers Σ^∞ (au sens précisé précédemment), on montre que cette projection est en fait un difféomorphisme.

Construction d'une projection $\Pi^m : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$

Σ^∞ est une surface plongée dans \mathbb{R}^q , éventuellement non connexe, mais avec un nombre fini de composantes connexes. On peut donc considérer la projection normale sur Σ^∞ : il existe $\tau > 0$ (on peut supposer $\tau < \alpha/12$), un voisinage tubulaire

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^q \mid d_{\text{euc}}(x, \Sigma^\infty) < \tau\}$$

et une fonction lisse $\Pi : \mathcal{V} \rightarrow \Sigma^\infty$ vérifiant la propriété suivante (voir [Bre97]) : si $x \in \mathcal{V}$, alors $\Pi(x)$ est le point le plus proche de Σ^∞ . Pour tout $x \in \mathcal{V}$ on a

$$x - \Pi(x) \in (T_{\pi(x)}\Sigma^\infty)^\perp$$

(voir le dessin ci-dessous), où l'on note $T_{\pi(x)}\Sigma^\infty \subset \mathbb{R}^q$ l'espace tangent de Σ^∞ au point $\pi(x)$, et $(T_{\pi(x)}\Sigma^\infty)^\perp$ son orthogonal dans \mathbb{R}^q .

D'après les résultats de la section 5.4.3, quitte à considérer une sous-suite, on a le

Fait 5.27. *Pour tous $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ et $z \in D(5\alpha/3)$ on a*

$$\|\Phi_i^m(z) - \Phi_i^\infty(z)\| < \tau.$$

Pour tout $x \in \Sigma^m$, il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ et $z \in D(\alpha)$ tels que $x = \Phi_i^m(z)$, et donc $d_{\text{euc}}(x, \Sigma^\infty) < \tau$, ce qui montre que $\Sigma^m \subset \mathcal{V}$. On peut donc considérer la restriction suivante :

$$\Pi^m := \Pi|_{\Sigma^m} : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty.$$

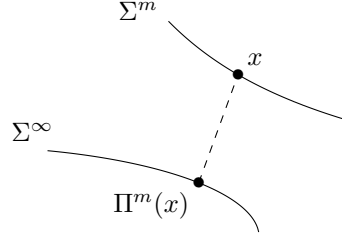


FIGURE 5.4

$\Pi^m : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$ est un difféomorphisme

On souhaite montrer la

Proposition 5.28. *Quitte à considérer une sous-suite, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\Pi^m : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$ est un difféomorphisme (de classe C^∞).*

Pour des raisons techniques, on montre d'abord que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, les points de Σ^m dans le graphe numéro i sont envoyés par Π^m sur des points de Σ^∞ dans le graphe numéro i , et réciproquement. C'est une conséquence directe du lemme 5.26.

Proposition 5.29. *Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \dots, N\}$, on a les inclusions suivantes :*

1. $(\Pi^m)^{-1}(\Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))) \subset \Phi_i^m(D(5\alpha/3))$,
2. $\Pi^m(\Phi_i^m(D(4\alpha/3))) \subset \Phi_i^\infty(D(5\alpha/3))$,

et

$$2'. \Pi^m(\Phi_i^m(D(\alpha))) \subset \Phi_i^\infty(D(7\alpha/6)).$$

Démonstration. Démonstration du 1). Soit $x \in (\Pi^m)^{-1}(\Phi_i^\infty(D(4\alpha/3)))$. Il existe $z \in D(4\alpha/3)$ tel que $\Pi^m(x) = \Phi_i^\infty(z)$. Par la proposition 5.27 on a

$$\|\Pi^m(x) - \Phi_i^m(z)\| = \|\Phi_i^\infty(z) - \Phi_i^m(z)\| < \tau < \alpha/12,$$

et on a également $\|\Pi^m(x) - x\| < \tau < \alpha/12$ (d'après la définition de la projection normale Π). On a donc $\|x - \Phi_i^m(z)\| < \alpha/6$, et l'identité 1. du lemme 5.26 nous assure que $x \in \Phi_i^m(D(5\alpha/3))$.

Démonstration du 2) (la preuve de 2') est tout à fait analogue, en utilisant l'identité 2') du lemme 5.26 à la place de l'identité 2)). Soit $z \in D(4\alpha/3)$ et $x = \Phi_i^m(z)$. Par la proposition 5.27 on a

$$\|x - \Phi_i^\infty(z)\| = \|\Phi_i^m(z) - \Phi_i^\infty(z)\| < \tau < \alpha/12,$$

et on a également $\|x - \Pi^m(x)\| < \tau < \alpha/12$. Donc $\|\Pi^m(x) - \Phi_i^\infty(z)\| < \alpha/6$, et l'identité 2. du lemme 5.26 nous assure que $\Pi^m(x) \in \Phi_i^\infty(D(5\alpha/3))$. \square

On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.30. Σ^∞ est connexe (par arcs).

Démonstration. Soit $x = \Phi_i^\infty(z)$ et $y = \Phi_j^\infty(z')$ deux points de Σ^∞ , avec $z, z' \in D(4\alpha/3)$. Pour $m = 1$, soit γ une courbe continue dans Σ^m , joignant $\Phi_i^m(z)$ et $\Phi_j^m(z')$ (rappelons que Σ^m est connexe par arcs). Alors, $\Pi^m \circ \gamma$ est un chemin continu dans Σ^∞ , joignant $\Pi^m(\Phi_i^m(z))$ et $\Pi^m(\Phi_j^m(z'))$. On a

$$\Pi^m(\Phi_i^m(z)) \in \Pi^m(\Phi_i^m(D(4\alpha/3))) \subset \Phi_i^\infty(D(5\alpha/3)),$$

et comme $x \in \Phi_i^\infty(D(5\alpha/3))$ et $\Phi_i^\infty(D(5\alpha/3))$ est connexe par arcs, on peut joindre $\Pi^m(\Phi_i^m(z))$ et x par un chemin continu dans Σ^∞ . Pour la même raison on peut joindre $\Pi^m(\Phi_j^m(z'))$ et y par un chemin continu dans Σ^∞ , et on peut donc joindre x et y par un chemin continu dans Σ^∞ . \square

Pour démontrer la proposition 5.28, il nous suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.31. *Quitte à considérer une sous-suite, Π^m est une immersion injective (pour tout $m \in \mathbb{N}$).*

Démonstration de la proposition 5.28. Π^m est un difféomorphisme sur son image, qui est un ensemble ouvert et fermé dans Σ^∞ , et qui est donc Σ^∞ par connexité. \square

Démonstration du lemme 5.31. Il y a deux propriétés distinctes à prouver, mais les deux démonstrations sont similaires. On effectue un raisonnement par l'absurde : de façon heuristique, comme Σ^m converge vers Σ^∞ , les espaces tangents doivent aussi converger ; c'est cette dernière propriété qui va nous apporter une contradiction.

Première étape : on montre que quitte à considérer une sous-suite, $\Pi^m : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$ est une immersion.

On raisonne par l'absurde : si ce n'est pas le cas, alors Π^m est une immersion seulement pour un nombre fini de $m \in \mathbb{N}$, et donc il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq M_0$, Π^m n'est pas une immersion. On suppose dans la suite $m \geq M_0$.

Il existe alors une suite $x_m \in \Sigma^m$ vérifiant $\ker(D\Pi^m(x_m)) \neq \{0\}$. Par compacité, on peut supposer $x_m \rightarrow x \in \Sigma^\infty$. On a aussi $\Pi^m(x_m) = \Pi(x_m) \rightarrow \Pi(x) = x$ (on rappelle que Π est la projection normale sur Σ^∞ , et Π^m est sa restriction à Σ^m).

De plus, il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$: pour simplifier l'exposé, on suppose $i = 1$. Soit $z \in D(4\alpha/3)$ tel que $x = \Phi_1^\infty(z)$. Pour m assez grand, $\Pi^m(x_m) \in \Phi_1^\infty(D(4\alpha/3))$, et donc par la proposition 5.29 on a

$$x_m \in (\Pi^m)^{-1}(\Phi_1^\infty(D(4\alpha/3))) \subset \Phi_1^m(D(5\alpha/3)).$$

Il existe donc des suites z_m et z'_m dans $D(5\alpha/3)$ telles que $x_m = \Phi_1^m(z_m)$ et $\Pi^m(x_m) = \Phi_1^\infty(z'_m)$. Pour simplifier, on écrit x_m et $\Pi^m(x_m)$ sous la forme suivante :

$$x_m = (z_m, \Theta^m(z_m)) \text{ et } \Pi^m(x_m) = (z'_m, \Theta^\infty(z'_m)),$$

où Θ^m et Θ^∞ sont des fonctions lisses, et $\Theta^m \rightarrow \Theta^\infty$ uniformément (ainsi que toutes les dérivées) sur tout compact de $D(2\alpha)$ (voir la section 5.4.3). On a

$$\ker(D\Pi^m(x_m)) = T_{x_m} \Sigma^m \cap (T_{\Pi^m(x_m)} \Sigma^\infty)^\perp \neq \{0\},$$

on peut donc considérer un vecteur unitaire u_m dans cet espace vectoriel. On connaît une base de $T_{x_m}\Sigma^m$, donc il existe des réels a_m et b_m tels que

$$u_m = a_m(1, 0, \partial_x\Theta^m(z_m)) + b_m(0, 1, \partial_y\Theta^m(z_m)).$$

Comme u_m est un vecteur unitaire, on a $|a_m| \leq 1$ et $|b_m| \leq 1$. On peut considérer le vecteur suivant dans $T_{\Pi^m(x_m)}\Sigma^\infty$:

$$v_m = a_m(1, 0, \partial_x\Theta^\infty(z'_m)) + b_m(0, 1, \partial_y\Theta^\infty(z'_m)).$$

Comme u_m et v_m sont orthogonaux, on a $1 = \|u_m\|^2 \leq \|u_m - v_m\|^2$, donc $1 \leq \|u_m - v_m\|$ et

$$\begin{aligned} 1 &\leq |a_m| \cdot \|\partial_x\Theta^m(z_m) - \partial_x\Theta^\infty(z'_m)\| + |b_m| \cdot \|\partial_y\Theta^m(z_m) - \partial_y\Theta^\infty(z'_m)\| \\ &\leq \|\partial_x\Theta^m(z_m) - \partial_x\Theta^\infty(z'_m)\| + \|\partial_y\Theta^m(z_m) - \partial_y\Theta^\infty(z'_m)\|. \end{aligned}$$

On obtient alors une contradiction : quand m tends vers l'infini, x_m et $\Pi^m(x_m)$ convergent vers x , donc z_m et z'_m convergent vers z , et on a convergence uniforme des dérivées de Θ^m vers les dérivées de Θ^∞ , ce qui montre que le terme de droite de l'inégalité tends vers zéro. *Deuxième étape* : quitte à considérer une sous-suite, $\Pi^m : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^\infty$ est injective.

Comme précédemment, on raisonne par l'absurde : si ce n'est pas le cas, alors il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq M_0$, Π^m n'est pas injective. On suppose dans la suite $m \geq M_0$.

Il existe des points $x_m, x'_m \in \Sigma^m$, avec $x_m \neq x'_m$, tels que $\Pi^m(x_m) = \Pi^m(x'_m)$, et donc tels que $x_m - x'_m \in (T_{\Pi^m(x_m)}\Sigma^\infty)^\perp$:

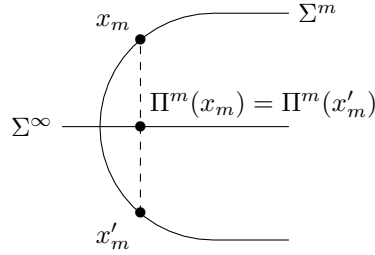


FIGURE 5.5

Par compacité on peut également supposer que x_m et x'_m convergent, vers la même limite $x \in \Sigma^\infty$ (car $\lim x_m = \lim \Pi^m(x_m)$ et $\lim x'_m = \lim \Pi^m(x'_m)$). Il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$: pour simplifier l'exposé on suppose $i = 1$. Il existe $z \in D(4\alpha/3)$ tel que $x = \Phi_1^\infty(z)$. Si m est assez grand, x_m et x'_m sont aussi dans $\Phi_1^\infty(D(4\alpha/3))$, donc il existe z_m et z'_m tels que

$$x_m = (z_m, \Theta^m(z_m)) \text{ et } x'_m = (z'_m, \Theta^m(z'_m))$$

(on utilise les mêmes notations que précédemment) ; on a alors

$$x_m - x'_m = (z_m - z'_m, \Theta^m(z_m) - \Theta^m(z'_m)).$$

Si m est assez grand, $\Pi^m(x_m) = \Pi^m(x'_m)$ est aussi dans $\Phi_1^\infty(D(4\alpha/3))$, donc il existe $u_m \in D(4\alpha/3)$ tel que

$$\Pi^m(x_m) = \Pi^m(x'_m) = (u_m, \Theta^\infty(u_m)).$$

Écrivons $z_m = a_m + ib_m$ et $z'_m = a'_m + ib'_m$ avec $a_m, b_m, a'_m, b'_m \in \mathbb{R}$, et considérons le vecteur de $T_{\Pi^m(x_m)}\Sigma^\infty$ suivant :

$$\frac{a_m - a'_m}{|z_m - z'_m|^2} \cdot (1, 0, \partial_x \Theta^\infty(u_m)) + \frac{b_m - b'_m}{|z_m - z'_m|^2} \cdot (0, 1, \partial_y \Theta^\infty(u_m))$$

($x_m \neq x'_m$ implique $z_m \neq z'_m$). En prenant le produit scalaire avec $x_m - x'_m \in (T_{\Pi^m(x_m)}\Sigma^\infty)^\perp$ on obtient

$$0 = 1 + \left\langle \frac{\Theta^m(z_m) - \Theta^m(z'_m)}{|z_m - z'_m|}, D\Theta^\infty(u_m) \left(\frac{z_m - z'_m}{|z_m - z'_m|} \right) \right\rangle$$

(\langle, \rangle désigne le produit scalaire Euclidien dans \mathbb{R}^{q-2}). On souhaite maintenant utiliser le théorème des accroissements finis : on doit donc considérer des fonctions à valeurs réelles. Écrivons les composantes de Θ^m et de Θ^∞ de la façon suivante :

$$\Theta^m = (\Theta^{m,1}, \dots, \Theta^{m,q-2}) \text{ and } \Theta^\infty = (\Theta^{\infty,1}, \dots, \Theta^{\infty,q-2})$$

pour des fonctions $\Theta^{m,j}, \Theta^{\infty,j} : D(5\alpha/3) \rightarrow \mathbb{R}$. On a alors

$$0 = 1 + \sum_{j=1}^{q-2} \left(\frac{\Theta^{m,j}(z_m) - \Theta^{m,j}(z'_m)}{|z_m - z'_m|} \right) \cdot D\Theta^{\infty,j}(u_m) \left(\frac{z_m - z'_m}{|z_m - z'_m|} \right).$$

Comme les $\Theta^{m,j}$ sont des fonctions à valeurs réelles, par le théorème des accroissements finis, on sait que pour tout $j \in \{1, \dots, q-2\}$ il existe $\zeta_m^j \in [z_m, z'_m]$ tel que $\Theta^{m,j}(z_m) - \Theta^{m,j}(z'_m) = D\Theta^{m,j}(\zeta_m^j) \cdot (z_m - z'_m)$: on a alors

$$0 = 1 + \sum_{j=1}^{q-2} D\Theta^{m,j}(\zeta_m^j) \cdot \left(\frac{z_m - z'_m}{|z_m - z'_m|} \right) \cdot D\Theta^{\infty,j}(u_m) \left(\frac{z_m - z'_m}{|z_m - z'_m|} \right).$$

Par compacité on peut supposer $\frac{z_m - z'_m}{|z_m - z'_m|} \rightarrow v \in \mathbb{S}^1$, et comme Θ^m converge vers Θ^∞ (ainsi que leurs dérivées), on obtient $0 = 1 + \|D\Theta^\infty(z) \cdot (v)\|^2$, ce qui est absurde. \square

5.4.5 Fin de la preuve

On a construit les difféomorphismes suivants :

$$\Sigma \xrightarrow{\Psi^m} \Sigma^m \subset \mathbb{R}^q \xrightarrow{\Pi^m} \Sigma^\infty \subset \mathbb{R}^q.$$

On rappelle que Ψ^m est obtenu à l'aide du plongement de Whitney, et Π^m est la restriction à Σ^m de la projection normale sur Σ^∞ . On peut donc considérer la métrique suivante sur Σ^∞ :

$$\widetilde{d}_m := ((\Pi^m \circ \Psi^m)^{-1})^* d_m,$$

c'est-à-dire

$$\widetilde{d}_m(x, y) = d_m((\Pi^m \circ \Psi^m)^{-1}(x), (\Pi^m \circ \Psi^m)^{-1}(y)),$$

de telle sorte que $(\Sigma, \widetilde{d}_m)$ soit isométrique à $(\Sigma^\infty, \widetilde{d}_m)$. Pour finir la preuve du théorème, on doit montrer que \widetilde{d}_m converge uniformément vers une métrique d'Alexandrov \widetilde{d} sur Σ^∞ .

Dans la première partie de cette section, on prouve que $(\widetilde{d}_m(x, y))$ converge, si x et y sont dans un même graphe $\Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$. Ensuite, on montre que $(\widetilde{d}_m(x, y))$ converge pour tous $x, y \in \Sigma$: on peut donc définir $\widetilde{d}(x, y) := \lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{d}_m(x, y)$. Pour terminer la preuve, on montre que \widetilde{d}_m converge *uniformément* vers \widetilde{d} , et que \widetilde{d} est une métrique d'Alexandrov.

Propriétés locales

Par la proposition 5.29, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$(\Pi^m)^{-1}(\Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))) \subset \Phi_i^m(D(5\alpha/3)),$$

donc on peut considérer la fonction $f_i^m : D(4\alpha/3) \rightarrow D(5\alpha/3)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} D(5\alpha/3) & \xleftarrow{\sim} & \Phi_i^m(D(5\alpha/3)) \\ f_i^m \uparrow & & (\Pi^m)^{-1} \uparrow \\ D(4\alpha/3) & \xrightarrow{\sim} & \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3)) \end{array}$$

c'est-à-dire $f_i^m = (\Phi_i^m)^{-1} \circ (\Pi^m)^{-1} \circ \Phi_i^\infty$

Proposition 5.32. *Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $f_i^m : D(4\alpha/3) \rightarrow D(5\alpha/3)$ converge uniformément vers l'inclusion $D(4\alpha/3) \hookrightarrow D(5\alpha/3)$.*

Démonstration. Pour tout $z \in D(4\alpha/3)$, posons $z' = f_i^m(z) \in D(5\alpha/3)$. Comme z (resp. z') est la i -ème composante de $\Phi_i^\infty(z)$ (resp. de $\Phi_i^m(z')$), on a

$$|z - z'| \leq \|\Phi_i^\infty(z) - \Phi_i^m(z')\| = \|\Pi^m(\Phi_i^m(z')) - \Phi_i^m(z')\| \leq \|\Phi_i^\infty(z') - \Phi_i^m(z')\| :$$

la dernière inégalité provient du fait que $\|\Pi^m(\Phi_i^m(z')) - \Phi_i^m(z')\|$ est la distance entre $\Phi_i^m(z')$ et la surface plongée Σ^∞ , et on a $\Phi_i^\infty(z') \in \Sigma^\infty$. On a donc

$$|z - f_i^m(z)| \leq \sup_{u \in D(5\alpha/3)} \|\Phi_i^\infty(u) - \Phi_i^m(u)\|,$$

et on sait que le terme de droite tend vers zéro quand m tend vers l'infini. \square

On sait que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \dots, N\}$ on a une isométrie

$$(B_m(x_i^m, \varepsilon), d_m|_{B_m(x_i^m, \varepsilon)}) \xrightarrow[\widetilde{H}_i^m]{\sim} (D(1/2), d_{\omega_i^m, h_i^m}). \quad (5.17)$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, par le corollaire 5.12, on sait qu'il existe une mesure $\widetilde{\omega}_i$, à support dans $\overline{D}(1/2)$, et une constante $C_i > 0$ telle que, quitte à considérer une sous-suite, $d_{\omega_i^m, h_i^m}$ converge localement uniformément sur $D(2\alpha)$ vers la métrique $\widetilde{d}^i := C_i \cdot \widetilde{d}_{\omega_i, 0}$ (quand m tend vers l'infini).

Maintenant, si on considère le diagramme commutatif du début de la section 5.4.5, on peut considérer la métrique suivante sur $\Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$:

$$\tilde{d}^i := ((\Phi_i^\infty)^{-1})^* d^i.$$

Proposition 5.33. *Soit $i \in \{1, \dots, N\}$ et $(x_m), (y_m)$ deux suites de points dans Σ^∞ , telles que $x_m \rightarrow x \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$ et $y_m \rightarrow y \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$. Alors*

$$\tilde{d}_m(x_m, y_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{d}^i(x, y).$$

Démonstration. Supposons que m est assez grand pour que $x_m, y_m \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$. Par le corollaire 5.12, $d_{\omega_i^m, h_i^m}$ converge localement uniformément vers d^i sur $D(2\alpha)$, et $f_i^m : D(4\alpha/3) \rightarrow D(5\alpha/3)$ converge uniformément vers l'inclusion $D(4\alpha/3) \hookrightarrow D(5\alpha/3)$ (proposition 5.32), donc

$$\begin{aligned} \tilde{d}^i(x, y) &= d^i((\Phi_i^\infty)^{-1}(x), (\Phi_i^\infty)^{-1}(y)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} d_{\omega_i^m, h_i^m}(f_i^m \circ (\Phi_i^\infty)^{-1}(x_m), f_i^m \circ (\Phi_i^\infty)^{-1}(y_m)). \end{aligned}$$

Par l'isométrie (5.17), on a également, pour tous $z, z' \in D(5\alpha/3)$,

$$d_{\omega_i^m, h_i^m}(z, z') = d_m|_{B_m(x_i^m, \varepsilon)}((H_i^m)^{-1}(z), (H_i^m)^{-1}(z')) = d_m((H_i^m)^{-1}(z), (H_i^m)^{-1}(z')) :$$

en effet, par le théorème 5.9 on a $(H_i^m)^{-1}(z), (H_i^m)^{-1}(z') \in B_m(x_i^m, \varepsilon/4)$, donc une courbe qui minimise (presque) la distance $d_m((H_i^m)^{-1}(z), (H_i^m)^{-1}(z'))$ doit rester dans $B_m(x_i^m, \varepsilon)$ (on a $d_m((H_i^m)^{-1}(z), (H_i^m)^{-1}(z')) \leq \varepsilon/2$, et une courbe qui joint $(H_i^m)^{-1}(z)$ à $(H_i^m)^{-1}(z')$ en sortant de $B_m(x_i^m, \varepsilon)$ aura une longueur $\geq 2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon/4) > \varepsilon/2$). On obtient donc

$$\tilde{d}^i(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m((H_i^m)^{-1} \circ f_i^m \circ (\Phi_i^\infty)^{-1}(x_m), (H_i^m)^{-1} \circ f_i^m \circ (\Phi_i^\infty)^{-1}(y_m)).$$

Par définition de Φ_i^m on a $(H_i^m)^{-1} = (\Psi^m)^{-1} \circ \Phi_i^m$, et avec l'égalité $f_i^m \circ (\Phi_i^\infty)^{-1} = (\Phi_i^m)^{-1} \circ (\Pi^m)^{-1}$ (c'est la définition de f_i^m) on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{d}^i(x, y) &= \lim_{m \rightarrow \infty} d_m((\Psi^m)^{-1} \circ (\Pi^m)^{-1}(x_m), (\Psi^m)^{-1} \circ (\Pi^m)^{-1}(y_m)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{d}_m(x_m, y_m), \end{aligned}$$

et ceci termine la preuve. □

Construction de la métrique limite \tilde{d} et conclusion

On sait déjà que $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{d}_m(x, y)$ existe si x et y sont dans le même graphe (c'est-à-dire, s'il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x, y \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$) : c'est la proposition 5.33. Pour montrer que la limite précédente existe pour tous $x, y \in \Sigma$, l'idée est de considérer des \tilde{d}_m -géodésiques minimisantes entre x et y , $\gamma_m : [0, 1] \rightarrow \Sigma$, et de subdiviser le segment $[0, 1]$ en sous-intervalles sur lesquels on peut appliquer la proposition 5.33.

Proposition 5.34. *Soient $x, y \in \Sigma^\infty$: la limite $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{d}_m(x, y)$ existe, et on pose*

$$\tilde{d}(x, y) := \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{d}_m(x, y) \in [0, +\infty).$$

Démonstration. Soient $x, y \in \Sigma^\infty$. On considère une sous-suite (m_j) de (m) telle que

$$\widetilde{d}_{m_j}(x, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} \widetilde{d}_m(x, y).$$

Soit $\gamma_{m_j} : [0, 1] \rightarrow \Sigma^\infty$ des géodésiques minimisantes pour la métrique \widetilde{d}_{m_j} , entre x et y (avec $\gamma_{m_j}(0) = x$ et $\gamma_{m_j}(1) = y$), et paramétrées à vitesse constante : pour $t, t' \in [0, 1]$ on a

$$\widetilde{d}_{m_j}(\gamma_{m_j}(t), \gamma_{m_j}(t')) = \widetilde{d}_{m_j}(x, y) \cdot |t - t'|.$$

Quitte à considérer une sous-suite de m_j (comme précédemment on ne change pas l'indexation pour cette suite), on a le fait suivant :

Fait 5.35. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D/n \leq \kappa\varepsilon/2$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe $i(k) \in \{1, \dots, N\}$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$,*

$$\gamma_{m_j}(k/n) \text{ et } \gamma_{m_j}((k+1)/n) \text{ appartiennent à } \Phi_{i(k)}^\infty(D(7\alpha/6)).$$

Démonstration. Par le recouvrement (5.12), on sait que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, il existe un entier $i(k, j) \in \{1, \dots, N\}$ tel que

$$(\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(\gamma_{m_j}(k/n)) \in B_{m_j}(x_{i(k,j)}^{m_j}, \kappa\varepsilon/2). \quad (5.18)$$

Comme $i(k, j)$ parcourt un ensemble fini, quitte à considérer une sous-suite de (m_j) on peut supposer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $i(k, j)$ est indépendant de j : on peut écrire $i(k, j) = i(k)$. On veut montrer l'inclusion

$$\gamma_{m_j}([k/n, (k+1)/n]) \subset \Phi_{i(k)}^\infty(D(7\alpha/6)).$$

Soit $t \in [k/n, (k+1)/n]$: on a

$$\widetilde{d}_{m_j}(\gamma_{m_j}(t), \gamma_{m_j}(k/n)) = d_{m_j}(x, y) \cdot |t - k/n|,$$

donc

$$d_{m_j}((\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(\gamma_{m_j}(t)), (\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(\gamma_{m_j}(k/n))) \leq D \cdot 1/n \leq \kappa\varepsilon/2,$$

et avec (5.18) ceci montre que

$$(\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(\gamma_{m_j}(t)) \in B_{m_j}(x_{i(k)}^{m_j}, \kappa\varepsilon).$$

Donc

$$(\Pi^{m_j})^{-1}(\gamma_{m_j}(t)) \in \Psi^{m_j}(B_{m_j}(x_{i(k)}^{m_j}, \kappa\varepsilon)) = \Phi_{i(k)}^{m_j} \circ H_{i(k)}^{m_j}(B_{m_j}(x_{i(k)}^{m_j}, \kappa\varepsilon)) \subset \Phi_{i(k)}^{m_j}(D(\alpha))$$

(la dernière inclusion provient du théorème 5.9). Avec l'identité 2' de la proposition 5.29, on obtient

$$\gamma_{m_j}(t) \in \Pi^{m_j}(\Phi_{i(k)}^{m_j}(D(\alpha))) \subset \Phi_{i(k)}^\infty(D(7\alpha/6)),$$

et ceci termine la preuve du fait 5.35. \square

Par compacité, quitte à considérer une sous-suite de (m_j) , on peut aussi supposer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a

$$\gamma_{m_j}(k/n) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \alpha_{k/n} \in \overline{\Phi_{i(k)}^\infty(D(7\alpha/6))} \subset \Phi_{i(k)}^\infty(D(4\alpha/3)),$$

où les $\alpha_{k/n}$ sont des points dans Σ^∞ , avec $\alpha_0 = x$ et $\alpha_1 = y$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ on a $\alpha_{k/n}, \alpha_{(k+1)/n} \in \Phi_{i(k)}^\infty(D(4\alpha/3))$, et la proposition 5.33 nous assure que

$$\widetilde{d}_{m_j}(\gamma_{m_j}(k/n), \gamma_{m_j}((k+1)/n)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \widetilde{d}^{i(k)}(\alpha_{k/n}, \alpha_{(k+1)/n}).$$

Comme les courbes γ_{m_j} sont des géodésiques minimisantes on a

$$\widetilde{d}_{m_j}(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{d}_{m_j}(\gamma_{m_j}(k/n), \gamma_{m_j}((k+1)/n)),$$

et donc quand j tends vers l'infini on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow \infty} \widetilde{d}_m(x, y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{d}^{i(k)}(\alpha_{k/n}, \alpha_{(k+1)/n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \limsup_{m \rightarrow \infty} \widetilde{d}_m(\alpha_{k/n}, \alpha_{(k+1)/n}) \\ &\geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{d}_m(\alpha_{k/n}, \alpha_{(k+1)/n}) \\ &\geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \widetilde{d}_m(x, y). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{d}_m(x, y)$ existe dans $[0, +\infty]$, et cette limite est finie car $\widetilde{d}_m(x, y) \leq D$. Ceci termine la preuve de la proposition 5.34. \square

On démontre maintenant la convergence *uniforme* de \widetilde{d}_m vers \widetilde{d} :

Corollaire 5.36. *Soient (x_m) et (y_m) deux suites dans Σ^∞ , telles que $x_m \rightarrow x \in \Sigma^\infty$ et $y_m \rightarrow y \in \Sigma^\infty$. On a*

$$\widetilde{d}_m(x_m, y_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \widetilde{d}(x, y).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |\widetilde{d}_m(x_m, y_m) - \widetilde{d}(x, y)| &\leq |\widetilde{d}_m(x_m, y_m) - \widetilde{d}_m(x, y)| + |\widetilde{d}_m(x, y) - \widetilde{d}(x, y)| \\ &\leq \widetilde{d}_m(x_m, x) + \widetilde{d}_m(y_m, y) + |\widetilde{d}_m(x, y) - \widetilde{d}(x, y)|. \end{aligned}$$

Par définition, $|\widetilde{d}_m(x, y) - \widetilde{d}(x, y)|$ tends vers zéro. Et considérons $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$: la proposition 5.33 nous assure que $\widetilde{d}_m(x_m, x) \rightarrow \widetilde{d}^i(x, x) = 0$. Pour la même raison on a $\widetilde{d}_m(y_m, y) \rightarrow 0$, et ceci termine la preuve. \square

Pour finir la preuve du Théorème Principal, on doit montrer que \widetilde{d} est une métrique d'Alexandrov sur Σ^∞ .

Proposition 5.37. \tilde{d} est une distance sur Σ^∞ .

Démonstration. Par définition de $\tilde{d}(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{d}_m(x, y)$, la symétrie et l'inégalité triangulaire sont clairs. Considérons maintenant $x, y \in \Sigma^\infty$ avec $\tilde{d}(x, y) = 0$: on a alors $\tilde{d}_m(x, y) \rightarrow 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un entier $i(m) \in \{1, \dots, N\}$ tel que

$$(\Pi^m \circ \Psi^m)^{-1}(x) \in B_m(x_{i(m)}^m, \kappa\varepsilon/2);$$

comme $i(m)$ parcourt un ensemble fini, il existe une sous-suite m_j de (m) et un entier $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $i(m_j) = i$ pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$(\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(x) \in B_{m_j}(x_i^{m_j}, \kappa\varepsilon/2), \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Si j est assez grand pour avoir $\tilde{d}_{m_j}(x, y) \leq \kappa\varepsilon/2$, on a

$$d_{m_j}((\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(x), (\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(y)) \leq \kappa\varepsilon/2,$$

et donc

$$(\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(x) \text{ et } (\Pi^{m_j} \circ \Psi^{m_j})^{-1}(y) \text{ appartiennent à } B_{m_j}(x_i^{m_j}, \kappa\varepsilon).$$

On procède alors comme à la fin de la preuve du fait 5.35 : on a

$$(\Pi^{m_j})^{-1}(x) \text{ et } (\Pi^{m_j})^{-1}(y) \text{ appartiennent à } \Psi^{m_j}(B_{m_j}(x_i^{m_j}, \kappa\varepsilon)),$$

et

$$\Psi^{m_j}(B_{m_j}(x_i^{m_j}, \kappa\varepsilon)) = \Phi_i^{m_j}(H_i^{m_j}(B_{m_j}(x_i^{m_j}, \kappa\varepsilon))) \subset \Phi_i^{m_j}(D(\alpha))$$

(la dernière inclusion est vraie d'après le théorème 5.9). On obtient donc

$$x \text{ et } y \text{ appartiennent à } \Pi^{m_j}(\Phi_i^{m_j}(D(\alpha))) \subset \Phi_i^\infty(D(7\alpha/6))$$

(la dernière inclusion est vraie d'après l'identité 2' de la proposition 5.29). Comme $x, y \in \Phi_i^\infty(D(4\alpha/3))$, on peut appliquer la proposition 5.33 afin d'obtenir $\tilde{d}_{m_j}(x, y) \rightarrow \tilde{d}^i(x, y)$, donc $\tilde{d}^i(x, y) = 0$ et $x = y$. \square

Le fait que \tilde{d} est une distance intrinsèque est une conséquence du lemme suivant, qui a un intérêt en lui-même :

Proposition 5.38. Soient $x, y \in \Sigma^\infty$ et $\gamma_m : [0, 1] \rightarrow \Sigma^\infty$ des géodésiques minimisantes pour les distances \tilde{d}_m , entre x et y (avec $\gamma_m(0) = x$ et $\gamma_m(1) = y$), et paramétrées à vitesse constante. Alors il existe une sous-suite (m_j) de (m) telle que γ_{m_j} converge uniformément vers une courbe continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma^\infty$, et pour la métrique \tilde{d} , γ est une géodésique minimisante entre x et y .

Démonstration. On adapte la preuve du lemme d'Arzelà-Ascoli à notre situation. On a

$$\tilde{d}_m(\gamma_m(t), \gamma_m(t')) = \tilde{d}_m(x, y) \cdot |t - t'| \leq D \cdot |t - t'|.$$

Considérons un ensemble $\{t_k, k \in \mathbb{N}\}$, dense dans $[0, 1]$. Par un argument diagonal, on peut construire une sous-suite (m_j) de (m) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_{m_j}(t_k) \rightarrow_{j \rightarrow \infty} \alpha_k \in \Sigma^\infty$. Soit $\gamma : \{t_k, k \in \mathbb{N}\} \rightarrow \Sigma^\infty$ la fonction définie par $\gamma(t_k) := \alpha_k$. On a

$$\widetilde{d}_{m_j}(\gamma_{m_j}(t_{k_1}), \gamma_{m_j}(t_{k_2})) \leq D \cdot |t_{k_1} - t_{k_2}|,$$

et quand j tends vers l'infini, le corollaire 5.36 nous assure que

$$\widetilde{d}(\gamma(t_{k_1}), \gamma(t_{k_2})) \leq D \cdot |t_{k_1} - t_{k_2}|.$$

γ est donc Lipschitz sur $\{t_k, k \in \mathbb{N}\}$, qui est dense dans $[0, 1]$, donc il existe une (unique) extension Lipschitz $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma^\infty$. Quand j tends vers l'infini, on a alors

γ_{m_j} converge uniformément sur $[0, 1]$ vers γ :

en effet, soit (u_{m_j}) une suite dans $[0, 1]$, avec $u_{m_j} \rightarrow u \in [0, 1]$. On veut montrer $\gamma_{m_j}(u_{m_j}) \rightarrow_{j \rightarrow \infty} \gamma(u)$. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que j est assez grand pour avoir $\widetilde{d} \leq \widetilde{d}_{m_j} + \varepsilon$ sur $\Sigma^\infty \times \Sigma^\infty$. Considérons un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $|t_k - u| \leq \varepsilon/D$. On a alors

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(\gamma_{m_j}(u_{m_j}), \gamma(u)) &\leq \widetilde{d}(\gamma_{m_j}(u_{m_j}), \gamma_{m_j}(t_k)) + \widetilde{d}(\gamma_{m_j}(t_k), \gamma(t_k)) + \widetilde{d}(\gamma(t_k), \gamma(u)) \\ &\leq \widetilde{d}_{m_j}(\gamma_{m_j}(u_{m_j}), \gamma_{m_j}(t_k)) + \varepsilon + \widetilde{d}(\gamma_{m_j}(t_k), \gamma(t_k)) + \widetilde{d}(\gamma(t_k), \gamma(u)) \\ &\leq D \cdot |u_{m_j} - t_k| + \varepsilon + \widetilde{d}(\gamma_{m_j}(t_k), \gamma(t_k)) + D \cdot |t_k - u| \\ &\leq D \cdot |u_{m_j} - t_k| + \varepsilon + \widetilde{d}(\gamma_{m_j}(t_k), \gamma(t_k)) + \varepsilon, \end{aligned}$$

et le terme de droite est $\leq 3\varepsilon$ si j est assez grand, donc $\gamma_{m_j}(u_{m_j})$ converge vers $\gamma(u)$ quand j tends vers l'infini.

Finalement, pour la métrique \widetilde{d} , γ est une géodésique minimisante entre x et y : pour toute subdivision $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p = 1$ de $[0, 1]$, comme γ_{m_j} est une géodésique minimisante on a

$$\widetilde{d}_{m_j}(x, y) = \sum_{k=0}^{p-1} \widetilde{d}_{m_j}(\gamma_{m_j}(\lambda_k), \gamma_{m_j}(\lambda_{k+1})).$$

Quand j tends vers l'infini on obtient

$$\widetilde{d}(x, y) = \sum_{k=0}^{p-1} \widetilde{d}(\gamma(\lambda_k), \gamma(\lambda_{k+1})),$$

et ceci termine la démonstration, en considérant la borne supérieure sur l'ensemble des subdivisions $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p = 1$ de $[0, 1]$: $\widetilde{d}(x, y)$ est égal à la \widetilde{d} -longueur de la courbe γ . \square

La proposition suivante termine la preuve du Théorème Principal.

Proposition 5.39. \widetilde{d} est une métrique d'Alexandrov sur Σ^∞ .

Démonstration. \tilde{d} est une métrique intrinsèque, et est compatible avec la topologie de Σ^∞ : pour tout $\varepsilon > 0$, si m est assez grand, pour tout $x \in \Sigma$ on a

$$B_{\tilde{d}}(x, \varepsilon/2) \subset B_{\tilde{d}_m}(x, \varepsilon) \subset B_{\tilde{d}}(x, 2\varepsilon)$$

(les notations sont évidentes), et la métrique \tilde{d}_m est compatible avec la topologie de Σ^∞ , donc \tilde{d} aussi.

Et pour tout $\varepsilon > 0$, considérons un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $\|\tilde{d}_m - \tilde{d}\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme \tilde{d}_m est une métrique d'Alexandrov, il existe une métrique riemannienne lisse g sur Σ^∞ telle que $\|\tilde{d}_m - d_g\| \leq \varepsilon$, et avec $\int_{\Sigma^\infty} |K_g| d\mathcal{A}_g \leq \Omega + 1$. On a alors $\|\tilde{d} - d_g\| \leq 2\varepsilon$: \tilde{d} peut être approchée uniformément par des métriques riemanniennes, avec $\int_\Sigma |K_g| d\mathcal{A}_g$ bornée, et donc \tilde{d} est une métrique d'Alexandrov (c'est la définition 2.2). \square

Chapitre 6

Espace de module des convexes dans le plan

Considérons une fonction f définie sur une variété M . On peut naturellement se poser la question suivante :

Question 6.1. *La fonction f est-elle la courbure (en un sens à préciser) d'une métrique riemannienne sur M ? Si oui, « combien » de telles métriques existent ?*

Ce genre de problème est très classique en géométrie, et nécessite quelques précisions. On va uniquement considérer la dimension 2 : $M = \Sigma$ est une surface fermée. La courbure à considérer est bien sûr la courbure de Gauß. On peut se poser la question suivante :

Question 6.2. *Fixons une classe conforme sur Σ (i.e. Σ est une surface de Riemann). Une fonction lisse $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle la courbure d'une métrique conforme g ? Si oui, « combien » de telles métriques g existent ?*

Par le théorème d'uniformisation, on sait qu'il existe dans chaque classe conforme une (unique) métrique à courbure constante $+1, 0$ ou -1 : ces cas correspondent à la sphère, au tore (il faut rajouter « aire = 1 » pour avoir unicité), et aux surfaces de genre ≥ 2 . Ceci répond donc à la question dans le cas où f est une fonction constante. Il revient au même de considérer les métriques à courbure constante ou les classes conformes, et la théorie de Teichmüller étudie en détail ces questions (voir la partie 4.4, et le livre [IT92]).

Dans le cas d'une fonction f quelconque, une obstruction immédiate vient de la formule de Gauß-Bonnet : si f est la mesure de courbure d'une métrique riemannienne g , alors

$$\int_{\Sigma} f d\mathcal{A}_g = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Par exemple, si Σ est une surface de genre ≥ 2 , alors f doit nécessairement être négative en au moins un point. Réciproquement, on a le

Théorème 6.3 (Melvyn Berger, [Ber71]). *Soit Σ une surface de Riemann de genre ≥ 2 : toute fonction lisse strictement négative est la courbure d'une unique métrique conforme.*

De même, si Σ est le tore, si $f \not\equiv 0$ alors f doit changer de signe. Réciproquement, on a le

Théorème 6.4 (J. Kazdan et F. W. Warner, [KW74]). *Soit Σ une surface de Riemann de genre 1. Alors une fonction lisse $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $f \not\equiv 0$ est la courbure d'une métrique conforme sur Σ si, et seulement si,*

- f change de signe,
- $\int_{\Sigma} f d\mathcal{A} < 0$,

où $d\mathcal{A}$ est l'élément d'aire de l'unique métrique conforme plate sur Σ .

Dans le cas de la sphère \mathbb{S}^2 , la situation est plus compliquée : voir par exemple [KW74], ainsi que [CY87], [CY88], [CGY93] et [CD87], et les références dans ces articles.

Il est naturel de se poser les mêmes questions pour des métriques à singularités coniques sur une surface (de Riemann). Etant donné une fonction $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ et des angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n > 0$ (ce qui revient à se fixer la courbure des points singuliers), f est-elle la courbure d'une métrique conforme g , ayant des singularités coniques d'angles $\theta_1, \dots, \theta_n$? Si c'est le cas, la formule de Gauß-Bonnet s'écrit

$$\int_{\Sigma} f d\mathcal{A}_g + \sum_{i=1}^n (2\pi - \theta_i) = 2\pi\chi(\Sigma),$$

et donc

$$\int_{\Sigma} f d\mathcal{A}_g = 2\pi\chi(\Sigma, (\theta_1, \dots, \theta_n)),$$

où

$$\chi(\Sigma, (\theta_1, \dots, \theta_n)) := \chi(\Sigma) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\theta_i}{2\pi} - 1 \right)$$

est la caractéristique d'Euler modifiée de Σ . M. Troyanov, dans [Tro91b], énonce des résultats similaires aux résultats classiques précédents (les théorèmes 6.3 et 6.4), dans le cas de surfaces à singularités coniques.

Pour des métriques d'Alexandrov à *mesure de courbure* fixée, la situation est bien plus simple et la seule obstruction vient de la formule de Gauß-Bonnet :

Théorème 6.5 ([Tro09]). *Pour toute structure conforme sur Σ , et toute mesure de Radon (sans cusp) vérifiant $\omega(\Sigma) = 2\pi\chi(\Sigma)$, il existe une unique métrique d'Alexandrov, à homothétie près, compatible avec la structure conforme, et dont la mesure de courbure est ω .*

Espace de module

À partir de maintenant, on suppose que Σ est la sphère \mathbb{S}^2 . Dans le cas de métriques plates à singularités coniques, le théorème précédent implique le corollaire suivant (voir aussi [Tro86]) :

Corollaire 6.6. *Soient p_1, \dots, p_n des points de Σ , et $\theta_1, \dots, \theta_n$ des réels strictement positifs. Supposons $\chi(\Sigma, (\theta_1, \dots, \theta_n)) = 0$, c'est-à-dire*

$$\sum_{i=1}^n (2\pi - \theta_i) = 2\pi\chi(\Sigma). \tag{6.1}$$

Il existe alors une unique métrique conforme plate sur Σ , à homothétie près, à singularités coniques θ_i au point p_i (pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$).

On peut faire remarquer ici que ce théorème permet à M. Troyanov, dans [Tro07], d'étudier l'espace (de Teichmüller) des surfaces de Riemann pointées (via l'identification avec des surfaces plates à angles coniques fixés).

Il convient de remarquer que le célèbre théorème de réalisation d'Alexandrov (voir par exemple [Ale05] ou [Pog73]) affirme que dans le cas de singularités de courbures positives (i.e. $\theta_i \in (0, 2\pi)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$), de telles surfaces sont isométriques à un polyèdre convexe de \mathbb{R}^3 .

Ainsi, pour tout n -uplet $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ constitué de réels vérifiant la formule de Gauß-Bonnet (6.1), l'ensemble des *classes conformes marquées en n points* est en bijection avec l'ensemble des *polyèdres d'angles coniques $\theta_1, \dots, \theta_n$* .

Comme il n'y a qu'une classe conforme sur la sphère, la donnée d'une classe conforme marquée en n points est exactement la donnée de n points p_1, \dots, p_n dans \mathbb{S}^2 , à transformation conforme près. Mais \mathbb{S}^2 est conformément équivalent à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et le groupe des transformations de Möbius est triplement transitif, donc on peut supposer $(p_1, p_2, p_3) = (0, 1, \infty)$. Ainsi, la donnée d'une classe conforme marquée en n points est équivalente à la donnée de $n - 3$ points dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (différents de 0, 1 et ∞), à transformation de Möbius près. On s'attend donc à ce que l'espace de module de telles structures soit de dimension (complexe) $n - 3$.

W. Thurston a démontré le théorème suivant (pour un énoncé plus précis, on pourra se référer à l'article original [Thu98] ou aux notes de R. Schwartz [Sch13]) :

Théorème 6.7 (Thurston). *Soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ des réels dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, vérifiant la condition de Gauß-Bonnet (6.1). Alors l'ensemble des métriques plates à singularités coniques sur la sphère, d'angles coniques $\theta_1, \dots, \theta_n$ et d'aire = 1, est naturellement une variété hyperbolique complexe de dimension $n - 3$. De plus, cet espace n'est pas complet, et sa complétion métrique est une variété hyperbolique complexe conique, de volume fini (et c'est un orbifold dans certains cas explicites).*

De façon très succincte, l'idée de la construction est la suivante. Il s'agit tout d'abord de *déplier* le polyèdre dans le plan, ce qui nous donne des coordonnées complexes correspondant aux sommets du polyèdre. L'aire du polyèdre est alors une forme quadratique de signature $(1, n - 3)$ en ces coordonnées, et comme on a fixé l'aire = 1, ceci fait naturellement apparaître le modèle de l'hyperboloïde du plan hyperbolique complexe. Pour la suite, on va retenir l'idée suivante : *c'est la forme d'aire qui fait apparaître la structure hyperbolique*.

Le cas de polygones convexes, c'est-à-dire de polyèdres convexes dégénérés (contenus dans un plan), correspond à des sous-ensembles hyperboliques *réels* de l'espace de module de Thurston (J. Granier a étudié de tels sous-ensembles dans sa thèse). C. Bavard et É. Ghys [BG92], à l'aide d'une construction indépendante de celle de W. Thurston, ont décrit l'espace de module des polygones (convexes) du plan à n angles fixés : c'est un polyèdre de l'espace hyperbolique réel de dimension $n - 3$. Là encore, c'est la forme d'aire qui fait apparaître la structure hyperbolique. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article de F. Fillastre [Fil11], qui fait le lien entre les approches de W. Thurston et de C. Bavard et É. Ghys.

L'idée générale de ce manuscrit étant d'étudier des métriques dont les singularités s'accumulent, on peut se poser la

Question 6.8. *Dans les espaces de module de W . Thurston ou de C . Bavard et \acute{E} . Ghys, que se passe-t-il quand le nombre n de points tends vers l'infini ? En d'autres termes, quel est l'espace de module des m茅triques dont la mesure de courbure est ω , dans le cas o u ω n'est pas une mesure discr ete ?*

Un cas naturel à considérer au départ est celui d'une mesure portée par une courbe fermée : il existe une fonction $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$, et une mesure μ sur \mathbb{S}^1 , telle que la mesure de courbure de Σ soit $\omega = f_{\#}\mu$. On peut remarquer ici qu'il n'est pas facile de considérer la partie singulière de la mesure de courbure de façon intrinsèque : deux paramétrages différents de la courbe singulière \mathcal{C} , $f_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ et $f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{C}$, donnent deux mesures différentes μ_1 et μ_2 sur \mathbb{S}^1 vérifiant $f_{1\#}\mu_1 = f_{2\#}\mu_2 = \omega$.

Une notion indépendante du paramétrage de la partie singulière est par exemple celle de métrique à singularité positive le long d'une courbe fermée :

Définition 6.9. *Une surface d'Alexandrov Σ est à singularité positive le long d'une courbe fermée s'il existe une fonction h strictement positive sur \mathbb{S}^1 , et un plongement $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$, tel que la mesure de courbure soit $\omega = f_{\#}(h \cdot d\theta)$.*

Remarque 6.10. *On peut citer ici le livre d'Alexandrov et Reshetnyak [AR89] qui définit une notion de mesure de courbure pour une courbe en dimension $n \geq 2$ (via la notion de « rotation » d'une courbe).*

De plus, par le théorème de réalisation d'Alexandrov mentionné plus haut, on sait que toute métrique à singularité positive le long d'une courbe fermée est isométrique à la frontière d'un convexe ( ventuellement dégénéré) de \mathbb{R}^3 .

Des exemples simples de telles surfaces sont donnés par des parties strictement convexes compactes du plan, recollées le long de leur bord : la surface obtenue est la sphère \mathbb{S}^2 , et la métrique est à singularité positive le long du bord du convexe. Dans la suite, on va appeler une telle surface un *convexe recollé trivialement le long de son bord*. On peut alors se poser la

Question 6.11. *  part les convexes recollés trivialement le long de leurs bords, existe-t-il d'autres surfaces d'Alexandrov,   singularité positive le long d'une courbe fermée ? En d'autres termes, existe-t-il dans \mathbb{R}^3 des convexes non dégénérés (i.e. d'intérieur non vide), dont la frontière est une surface d'Alexandrov   singularité positive le long d'une courbe fermée ?*

La réponse est affirmative, et est donnée par un théorème de recollement de convexes, d u à A. Alexandrov et A. Pogorelov (voir par exemple [Ale05] et [Pog73]) : de façon heuristique, si deux convexes C_1 et C_2 ont un bord de même longueur, et si $A_1 \in \partial C_1$ et $A_2 \in \partial C_2$, alors il est possible de recoller C_1 et C_2 le long de leurs bords, en commençant par recoller A_1 et A_2 . La surface ainsi obtenue est le bord d'un convexe de \mathbb{R}^3 , et la mesure de courbure est concentrée le long des bords des convexes recollés.

Par exemple, en recollant les deux convexes suivants

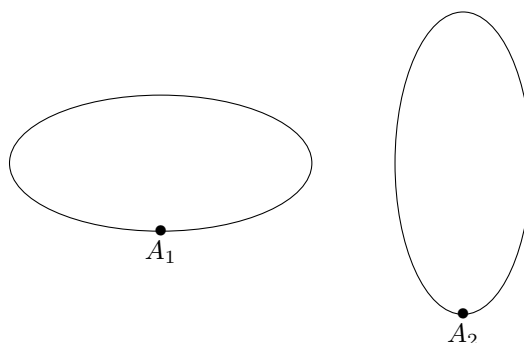


FIGURE 6.1

on obtient la surface suivante :

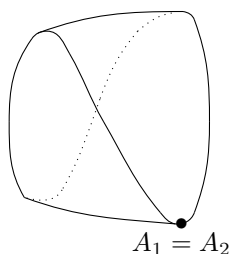


FIGURE 6.2 – Une surface plate, à singularité positive le long d’une courbe fermée.

Dans la suite, on va considérer seulement les surfaces à singularité positive le long d’une courbe fermée, qui sont des convexes recollés trivialement le long de leurs bords. On a la caractérisation suivante :

Proposition 6.12. *Une surface à singularité positive le long d’une courbe fermée est isométrique à un convexe recollé trivialement le long de son bord si, et seulement si, il existe une isométrie i de la surface, dont le lieu des points fixes est la courbe singulière.*

Il est clair que pour la surface de la figure 6.2, une telle isométrie n’existe pas.

Démonstration. La condition est nécessaire : il suffit de prendre la réflexion du plan, qui consiste à échanger les deux copies du convexe ; l’ensemble fixé correspond exactement aux bords des convexes.

La réciproque est moins évidente. Considérons une telle surface Σ , et un plongement isométrique $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ donné par le théorème de réalisation d’Alexandrov. Alors $f \circ i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ est également un plongement isométrique. Par l’unicité dans le théorème de réalisation d’Alexandrov, on sait que $f \circ i$ s’obtient à partir de f par une isométrie T de \mathbb{R}^3 : on a $f \circ i = T \circ f$. Pour tout point c appartenant à la courbe singulière, on a donc $f(c) = T(f(c))$: T fixe la courbe singulière. Comme i n’est pas l’identité, T non plus, et le lieu des points fixes de T n’est ni un point, ni une droite : c’est donc un plan. Finalement, la courbe singulière \mathcal{C} est dans un plan. Mais alors, les deux composantes connexes de $f(\Sigma) - \mathcal{C}$ sont des surfaces plates, dont le bord est une courbe fermée dans un plan : ces deux surfaces sont donc l’intérieur de cette courbe fermée, et ceci termine la démonstration. \square

De plus, il est clair que deux surfaces Σ_1 et Σ_2 , obtenues respectivement en recollant trivialement deux convexes C_1 et C_2 le long de leurs bords, sont isométriques si, et seulement si, les convexes C_1 et C_2 sont isométriques.

On a donc montré la propriété suivante : *l'ensemble des surfaces à singularité positive le long d'une courbe fermée, telles qu'il existe une isométrie qui fixe cette courbe est, modulo isométries, en bijection avec les parties strictement convexes compactes du plan, modulo isométries.* Pour apporter un élément de réponse à la question 6.8, on va donc considérer l'ensemble des parties strictement convexes compactes du plan, modulo isométries.

On va en fait considérer l'ensemble plus grand, et plus simple à décrire, de tous les convexes compacts du plan. L'idée est d'identifier un convexe à sa fonction de support, qui appartient à l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{S}^1)$. Par analogie avec les exemples de W. Thurston et de C. Bavard et É. Ghys, on peut considérer la forme d'aire (du convexe). C'est une forme quadratique sur l'espace de Hilbert $H^1(\mathbb{S}^1)$, de signature « $(1, \infty)$ » : elle est définie positive sur une droite vectorielle, et définie négative sur son orthogonal. Par analogie avec les espaces hyperboliques de dimension finie, on peut alors définir un espace hyperbolique de dimension infinie (qui est un espace métrique intrinsèque, complet, de courbure ≤ -1 au sens d'Alexandrov), et l'espace de module qui nous intéresse en est naturellement un sous-ensemble.

Dans toute la suite, le mot *convexe* désignera un convexe compact non vide du plan. Deux bonnes références pour cette partie sont les livres de H. Groemer [Gro96] et R. Schneider [Sch93].

Notations : séries de Fourier

Dans la suite, on va à de nombreuses reprises utiliser les séries de Fourier ; les notations utilisées seront les suivantes. Si $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, on pose

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\theta) d\theta$$

et pour $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta \text{ et } b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\theta) \sin(k\theta) d\theta.$$

La formule de Parseval s'écrit alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\theta)^2 d\theta = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Si de plus f est de classe \mathcal{C}^1 , alors f est somme de sa série de Fourier : pour $\theta \in \mathbb{S}^1$ on a

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

6.1 Caractérisation de l'ensemble des convexes

6.1.1 Les fonctions de support

Les convexes peuvent être décrits de façon simple par leur fonction de support :

Définition 6.13. La fonction de support d'un convexe C est définie pour $\theta \in \mathbb{S}^1$ par

$$h_C(\theta) = \sup_{c \in C} (e_\theta | c),$$

où $e_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$.

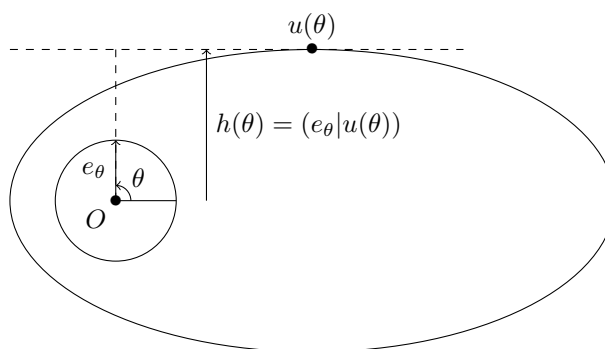


FIGURE 6.3 – Calcul de la fonction de support du convexe en $\theta \in \mathbb{S}^1$.

Pour se familiariser avec cet objet, on commence par donner quelques exemples et propriétés :

- Si $C = \{M_1\}$, où $M_1 = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$, alors $h(\theta) = (M_1 | e_\theta) = a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta$.
- Si $C = [-1, 1]$, alors $h(\theta) = |\cos \theta|$.
- Si C est un disque de rayon $r > 0$, alors $h \equiv r$.
- Si C est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, alors $h(\theta) = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$.
- Si $O \in C$ (comme dans la figure 6.3), alors $h \geq 0$.
- Pour tout convexe C on a

$$\int_{\mathbb{S}^1} h(\theta) d\theta \geq 0$$

(il suffit de fixer $c \in C$: on a $h(\theta) \geq (e_\theta | c)$, ce qui donne l'inégalité après intégration).

- Si C est un convexe, et si les coefficients de Fourier de la fonction de support h sont $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, alors le périmètre de C est $2\pi a_0$, et son *point de Steiner* (de façon heuristique, cela correspond à son centre de courbure) est (a_1, b_1) (voir par exemple [Gro96], p.139).

On rappelle que si C est convexe, alors λC est convexe pour tout $\lambda \geq 0$, et si C et C' sont deux convexes, alors $C + C'$ est convexe. Pour étudier les convexes, il est bien plus intéressant d'étudier les fonctions de support que les paramétrages naturels du convexe, pour la raison suivante :

Proposition 6.14. L'ensemble des fonctions de support de convexes est un cône convexe :

- pour tout $\lambda \geq 0$ on a $\lambda h_C = h_{\lambda C}$;
- si $\lambda \in [0, 1]$ et si C, C' sont deux convexes, alors

$$(1 - \lambda)h_C + \lambda h_{C'} = h_{(1-\lambda)C + \lambda C'}.$$

La propriété de régularité suivante est classique :

Proposition 6.15. *Si h est la fonction de support d'un convexe $C \subset D(R) = \{|z| < R\}$, alors h est Lipschitz de rapport R (et donc dérivable presque partout, de dérivée $|h'| \leq R$).*

Définition 6.16. *Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-linéaire si*

1. *f est positivement homogène : pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$;*
2. *pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.*

Il est équivalent de remplacer la condition 2. par la condition

2' f est convexe.

On peut remarquer que les fonctions continues f sur \mathbb{S}^1 sont en bijection avec les fonctions continues positivement homogènes \tilde{f} sur \mathbb{R}^2 : on passe de \tilde{f} à f par la restriction à \mathbb{S}^1 , et de f à \tilde{f} par la formule

$$\tilde{f}(x) := \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

On appelle \tilde{f} l'extension 1-homogène de f . L'extension 1-homogène de la fonction de support de C est donc la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\tilde{h}_C(x) := \sup_{c \in C} (x|c);$$

il est facile de vérifier que cette fonction est sous-linéaire. Réciproquement, on a la

Proposition 6.17. *Une fonction continue $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de support d'un (unique) convexe si, et seulement si, l'extension 1-homogène de f à \mathbb{R}^2 est sous-linéaire.*

Concernant la régularité des fonctions de support, on a la proposition suivante. On note Conv_+^2 l'ensemble des convexes dont le bord est de classe \mathcal{C}^2 , de courbure strictement positive (c'est-à-dire l'ensemble des parties strictement convexes dont le bord est de classe \mathcal{C}^2).

Proposition 6.18 (Voir [Sch93] et [Gro96], lemme 2.2.3). *L'application qui à un convexe $C \in \text{Conv}_+^2$ associe sa fonction de support définit une bijection*

$$\begin{aligned} \text{Conv}_+^2 &\longrightarrow \{h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{S}^1) \mid h + h'' > 0\} \\ C &\longmapsto h_C. \end{aligned}$$

L'application réciproque associe à une fonction $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{S}^1)$ vérifiant $h + h'' > 0$ le convexe $C \in \text{Conv}_+^2$ dont le bord est la courbe

$$\gamma(\theta) := h(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) + h'(\theta)(-\sin \theta, \cos \theta).$$

(Le bord du convexe ainsi obtenu est bien de classe \mathcal{C}^2 , même si cette expression pourrait laisser croire qu'il n'est que de classe \mathcal{C}^1).

De plus, si $C \in \text{Conv}_+^2$ est de fonction de support h , alors la courbure $\kappa(\theta)$ au point $u(\theta)$ (voir la figure 6.3) est donnée par la formule

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{h(\theta) + h''(\theta)}.$$

Remarque 6.19. Il existe des convexes, dont le bord est de classe \mathcal{C}^∞ , et dont les fonctions de support ne sont pas de classe \mathcal{C}^2 (voir [Sch93]). Dans la proposition précédente, l'hypothèse de stricte convexité ne peut pas être retirée.

6.1.2 Passage au quotient

Translations

On a vu (proposition 6.17) que les convexes s'identifient aux fonctions continues sur \mathbb{S}^1 , dont l'extension 1-homogène est sous-linéaire. De plus, on souhaite s'intéresser aux convexes à translation près. Les fonctions de support d'un convexe C et de son translaté $C + \{M_1\}$ (où $M_1 = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$) sont reliés par la formule

$$h_{C+\{M_1\}}(\theta) = h_C(\theta) + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta.$$

Les convexes, à translation près, s'identifient donc au quotient de l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{S}^1 , dont l'extension 1-homogène est sous-linéaire, par les fonctions $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

On remarque qu'on a (heureusement) la propriété suivante : si g et h sont deux fonctions continues sur \mathbb{S}^1 telles que $g(\theta) = h(\theta) + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta$, alors leurs extensions 1-homogènes \tilde{g} et \tilde{h} diffèrent d'une fonction linéaire, et ont donc toutes les deux les mêmes propriétés vis-à-vis de la sous-linéarité.

Rotations

On souhaite également considérer les convexes à rotation près. Une rotation du convexe $C' = e^{i\varphi}C$ correspond au changement suivant sur les fonctions de support :

$$h_{C'}(\theta) = h_C(\theta - \varphi).$$

Ainsi, il faut également quotienter par l'action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^1 , c'est-à-dire que deux fonctions g et h sont égales s'il existe $\varphi \in \mathbb{S}^1$ tel que $g(\theta) = h(\theta - \varphi)$.

Finalement, via les fonctions de support, l'ensemble des convexes, modulo isométries, s'identifie naturellement avec l'ensemble X des fonctions continues sur \mathbb{S}^1 , dont l'extension 1-homogène est sous-linéaire, modulo les fonctions linéaires (x et y), et modulo l'action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^1 .

Pour ce qui est du cas \mathcal{C}^2 , on a la propriété suivante : l'ensemble des convexes dans Conv_+^2 , modulo isométries, s'identifie naturellement avec l'ensemble des fonctions h de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{S}^1 , vérifiant $h + h'' > 0$, modulo les fonctions linéaires (x et y), et modulo l'action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^1 .

6.1.3 La forme d'aire

On a déjà signalé que l'aire du convexe va jouer un rôle central, car elle va nous donner la structure hyperbolique. Considérons donc $h \in X$, c'est-à-dire la fonction de support d'un convexe C (on rappelle que h est dérivable presque partout, et de dérivée bornée). L'aire du convexe C est donné par les formules

$$\begin{aligned} \text{aire}(C) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} h(\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} h'(\theta)^2 d\theta \\ &= \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$

(les coefficients de Fourier a_k et b_k de h ont été définis précédemment). On remarque que, fort heureusement, les coefficients de Fourier a_1 et b_1 n'apparaissent pas dans cette formule (on rappelle que dans X on a quotienté par $\cos \theta$ et $\sin \theta$).

En considérant les coefficients de Fourier, il est clair que cette forme quadratique est définie positive sur la droite vectorielle des fonctions constantes, et définie négative sur son orthogonal. Sans faire appel à la théorie de Fourier, on peut montrer cette propriété en utilisant l'inégalité de Wirtinger (voir [Gro96]) : si $\int_{\mathbb{S}^1} h(\theta) d\theta = 0$ alors

$$\int_{\mathbb{S}^1} h(\theta)^2 d\theta \leq \int_{\mathbb{S}^1} h'(\theta)^2 d\theta,$$

et on a égalité si, et seulement si, $h = a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $h = 0$ dans X .

6.2 Géométrie hyperbolique

6.2.1 Géométrie hyperbolique de dimension finie

Avant de considérer la dimension infinie, on rappelle une des constructions classiques de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n de dimension n . Sur \mathbb{R}^{n+1} on considère la forme quadratique

$$q(x) = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2.$$

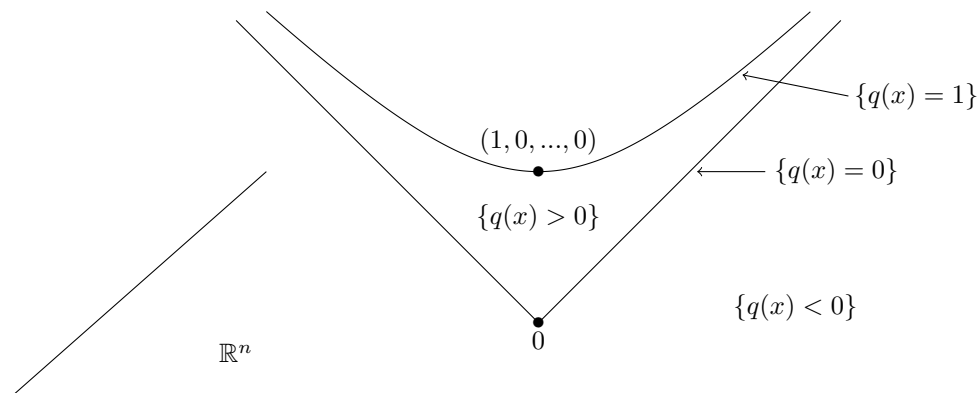


FIGURE 6.4 – Hyperboloïde dans \mathbb{R}^{n+1} , dans le demi-espace $\{x_0 \geq 0\}$

On note B la forme bilinéaire symétrique associée. Pour anticiper un peu sur la suite, on peut remarquer que q s'écrit

$$q(x) = \|x_L\|^2 - \|x_{L^\perp}\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ est le produit scalaire Euclidien, L est la droite vectorielle engendrée par le premier vecteur $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, et x_L et x_{L^\perp} désignent la projection orthogonale de x sur L et L^\perp .

Proposition 6.20 (Inégalité de Cauchy-Schwartz renversée). *Si $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ sont tels que $q(x), q(y) > 0$, alors*

$$B(x, y)^2 \geq q(x)q(y),$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Si x et y sont colinéaires, on a égalité. Si ce n'est pas le cas, alors l'espace vectoriel engendré par x et y est un plan, et ce plan contient nécessairement des vecteurs z de type espace, i.e. tels que $q(z) < 0$ (voir la figure 6.4). Le polynôme $q(x + ty) = q(x) + 2tB(x, y) + t^2q(y)$ change donc de signe, et le déterminant est strictement positif, ce qui donne l'inégalité (stricte). \square

Proposition 6.21. *Si $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ sont tels que $q(x) = 1$, $q(y) = 1$ et $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, on a $B(x, y) \geq 0$.*

Démonstration. Comme $q(x) = q(y) = 1$ on a

$$x_0^2 y_0^2 = \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(1 + \sum_{i=1}^n y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2$$

(la dernière inégalité est Cauchy-Schwartz). En passant à la racine on obtient

$$x_0 y_0 \geq \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \geq \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

et donc $B(x, y) \geq 0$. \square

L'espace hyperbolique réel de dimension n est alors

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 > 0 \text{ et } q(x) = 1\},$$

muni de la distance hyperbolique d définie par

$$\cosh(d(x, y)) = B(x, y)$$

(par les deux propositions précédentes, on a $B(x, y) \geq 1$ pour tous $x, y \in \mathbb{H}^n$).

6.2.2 Géométrie hyperbolique de dimension infinie

Pour la définition de l'espace hyperbolique réel de dimension infinie que l'on présente ici, on peut se référer à [BIM05] et [MP14] (ainsi que [LRW14]). L'idée est de construire cet espace par analogie avec la dimension finie, en remplaçant l'espace Euclidien \mathbb{R}^{n+1} par un espace de Hilbert.

Soit H un espace de Hilbert, et $L = \mathbb{R}e$ une droite vectorielle. On considère une forme quadratique

$$q(x) = \|x_L\|^2 - \|x_{L^\perp}\|^2, \quad (6.2)$$

où x_L (resp. x_{L^\perp}) est la projection orthogonale de x sur L (resp. sur L^\perp). On définit la forme bilinéaire B associée.

On considère l'ensemble

$$\mathbb{H}^\infty = \{x \in H \mid B(x, e) > 0 \text{ et } q(x) = 1\} :$$

pour les mêmes raisons que celles exposées précédemment en dimension finie (les démonstrations sont analogues), on a toujours une inégalité de Cauchy-Schwartz renversée, ce qui nous assure $B(x, y) \geq 1$ pour tous $x, y \in \mathbb{H}^\infty$, et on peut définir la distance hyperbolique d par la formule

$$\cosh(d(x, y)) = B(x, y).$$

Proposition 6.22 (voir [BIM05] et [MP14]). *(\mathbb{H}^∞, d) est un espace métrique intrinsèque complet $CAT(-1)$.*

De plus, si \mathbb{E} est un espace vectoriel engendré par n vecteurs linéairement indépendants e_1, \dots, e_n de type temps (i.e. $q(e_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$), alors $\mathbb{H}^\infty \cap \mathbb{E}$, muni de la distance d , est isométrique à l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^{n-1} .

Enfin, \mathbb{H}^∞ est $CAT(-1)$, donc il existe une unique géodésique entre deux points : comme en dimension finie, les géodésiques sont les intersections des plans vectoriels de H avec \mathbb{H}^∞ .

On a également la propriété d'unicité suivante (voir [BIM05]) : pour chaque cardinal α , il existe un unique espace hyperbolique réel de dimension infinie, de cardinal α .

6.2.3 Géométrie hyperbolique pour les convexes

On considère l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{S}^1)$ des fonctions h dans $L^2(\mathbb{S}^1)$, dont la dérivée au sens des distributions h' est dans $L^2(\mathbb{S}^1)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|h\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} h^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} h'^2.$$

A l'aide de la théorie de Fourier, on a une isométrie avec l'espace

$$H^1(\mathbb{N}) = \left\{ (a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}) \mid \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)$$

(c'est la formule de Parseval). On utilisera dans la suite indifféremment l'écriture fonctionnelle ou les coefficients de Fourier.

Comme les fonctions de support sont dérivables presque partout, et de dérivées bornées, elles sont dans $H^1(\mathbb{S}^1)$. On a déjà vu que pour définir X (voir la fin de la partie 6.1.2), on souhaite quotienter par $\cos \theta$ et $\sin \theta$, et par l'action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^1 : on note

$$H = H^1(\mathbb{S}^1) / \sim$$

ce quotient, et on a donc

$$X \subset H.$$

Remarque 6.23. *Quotienter par $\cos \theta$ et $\sin \theta$ revient à se placer sur le sous-espace vectoriel de $H^1(\mathbb{N})$ des suites vérifiant $a_1 = b_1 = 0$.*

Quant à l'action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^1 , on sait que si $g(\theta) = h(\theta + T)$, alors les coefficients de Fourier de g et h sont reliés par les relations

$$\begin{cases} a_n(g) &= \cos(nT)a_n(h) + \sin(nT)b_n(h) \\ b_n(g) &= -\sin(nT)a_n(h) + \cos(nT)b_n(h), \end{cases}$$

et donc quotienter par l'action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^1 dans $H^1(\mathbb{S}^1)$ correspond à effectuer le quotient de $H^1(\mathbb{N})$ par les isométries

$$\phi_T : (a_n, b_n) \mapsto (\cos(nT)a_n + \sin(nT)b_n, -\sin(nT)a_n + \cos(nT)b_n).$$

La norme $\|\cdot\|$ sur $H^1(\mathbb{S}^1)$ descend naturellement en une norme sur H , que l'on note $\|\cdot\|_H$:

$$\|(a_k, b_k)_{k \neq 1}\|_H^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2).$$

Notons q la forme quadratique sur H

$$\begin{aligned} q(h) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} h(\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} h'(\theta)^2 d\theta \\ &= \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

et B la forme bilinéaire associée. On a vu que si $h \in X$ est la fonction de support d'un convexe C , alors $q(h)$ est l'aire du convexe. De plus, si h_1 et h_2 sont les fonctions de support de deux convexes C_1 et C_2 , alors $B(h_1, h_2)$ est l'aire mixte de C_1 et C_2 (voir par exemple [Gro96], p.42). Cette quantité, que l'on peut aussi noter $B(C_1, C_2)$, vérifie, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$:

$$\text{aire}(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = \lambda_1^2 \text{aire}(C_1) + 2\lambda_1 \lambda_2 B(C_1, C_2) + \lambda_2^2 \text{aire}(C_2).$$

Pour définir l'espace hyperbolique de dimension infinie, on souhaite écrire q sous la forme (6.2). Pour cela on considère une nouvelle norme $N(\cdot)$ sur H :

$$N(h)^2 := \pi a_0^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2),$$

et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé. On a le fait élémentaire suivant :

Fait 6.24. Les deux normes N et $\|\cdot\|_H$ sont équivalentes.

Démonstration. Si $(a_k, b_k)_{k \neq 1} \in H$ on a

$$N(h)^2 \leq \pi a_0^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \leq \pi \|(a_k, b_k)_{k \neq 1}\|_H^2;$$

de plus, pour $k \geq 2$ on a $k^2 - 1 \geq \frac{1}{2}(k^2 + 1)$, et donc

$$N(h)^2 \geq \frac{\pi}{2} a_0^2 + \frac{\pi}{4} \sum_{k \geq 2} (k^2 + 1)(a_k^2 + b_k^2) = \frac{\pi}{2} \|(a_k, b_k)_{k \neq 1}\|_H^2.$$

□

Notons $L \subset H$ la droite vectorielle des fonctions constantes. On a alors la

Proposition 6.25. La forme quadratique q s'écrit sous la forme (6.2) : si h_L et h_{L^\perp} sont la projection de h sur L et L^\perp , on a

$$q(h) = N(h_L)^2 - N(h_{L^\perp})^2.$$

Démonstration. h_L est la projection de h sur les fonctions constantes : on a $h_L = a_0$, ce qui donne

$$N(h_L)^2 = \pi a_0^2.$$

Avec $h_{L^\perp} = h - h_L$, on a

$$N(h_{L^\perp})^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2),$$

et ceci termine la démonstration car

$$q(h) = \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2).$$

□

L'unique espace hyperbolique réel à base hilbertienne dénombrable de dimension infinie est donc

$$\mathbb{H}^\infty = \{h \in H \mid B(h, 1) = \pi a_0 > 0 \text{ et } q(h) = 1\},$$

muni de la distance $d(h_1, h_2) = \cosh(B(h_1, h_2))$.

Il est clair que l'ensemble des convexes, modulo isométries et d'aire = 1, s'identifie avec l'ensemble X_1 des éléments $h \in X$ vérifiant $q(h) = 1$. Comme pour tout $h \in X$ on a également $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} h(\theta) d\theta > 0$, on a bien

$$X_1 \subset \mathbb{H}^\infty :$$

X_1 est naturellement un sous-espace de l'espace hyperbolique réel de dimension infinie \mathbb{H}^∞ . On va dans la suite étudier la géométrie de ce sous-ensemble. On rappelle que $X \subset H$ est un cône convexe (voir la proposition 6.14).

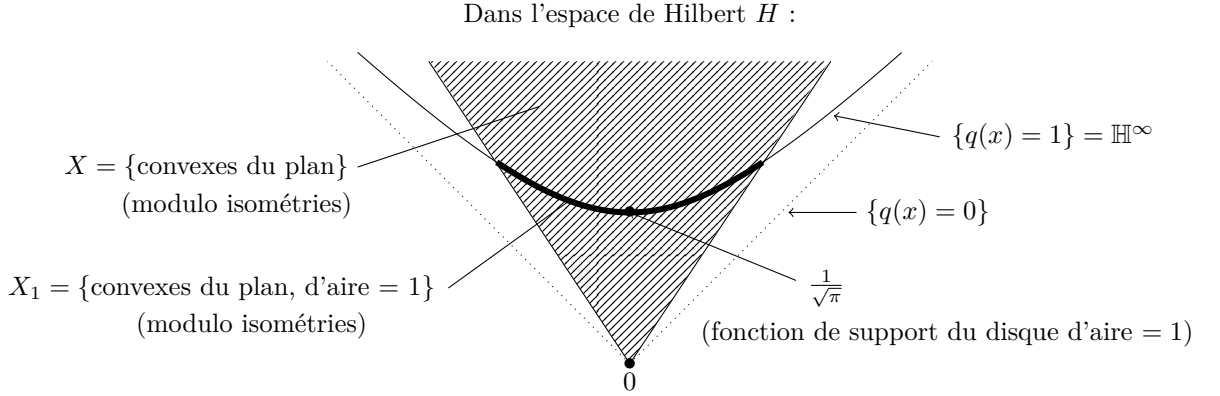


FIGURE 6.5 – Situation de X_1 dans le demi-espace $\{B(h, 1) = \pi a_0 \geq 0\}$.

6.3 Étude du sous-ensemble $X_1 \subset \mathbb{H}^\infty$

6.3.1 Étude des géodésiques

Considérons l'unique géodésique passant par deux éléments distincts x et y de \mathbb{H}^∞ . On sait que cette dernière est l'intersection de \mathbb{H}^∞ avec le plan vectoriel de H engendré par x et y , et elle s'écrit donc

$$\gamma(t) = \lambda(t)((1-t)x + ty),$$

où $\lambda(t) > 0$ est tel que $q(\gamma(t)) = 1$. Comme $q(x) = q(y) = 1$ on a

$$q((1-t)x + ty) = (1-t)^2 + t^2 + 2t(1-t)B(x, y) = 1 + 2t(1-t)(B(x, y) - 1). \quad (6.3)$$

On rappelle que $B(x, y) \geq 1$, et même $B(x, y) > 1$ car on a supposé $h_1 \neq h_2$. Notons $t_1 < 0 < 1 < t_2$ les deux racines du polynôme du second degré (6.3). La géodésique passant par x et y est donc la courbe γ définie pour $t \in (t_1, t_2)$ par

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2t(1-t)(B(x, y) - 1)}}((1-t)x + ty).$$

Entre x et y , c'est-à-dire pour $t \in [0, 1]$, la géodésique est donc une combinaison linéaire à coefficients *positifs* de x et y . Comme $X_1 \subset \mathbb{H}^\infty$ est la trace sur l'hyperboloïde du convexe X , on obtient directement la

Proposition 6.26. $X_1 \subset \mathbb{H}^\infty$ est géodésiquement convexe (i.e. la géodésique entre deux points de X_1 reste dans X_1). Plus précisément, si C_1 et C_2 sont deux convexes d'aire 1, la géodésique joignant C_1 à C_2 est définie pour $t \in [0, 1]$ par

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2t(1-t)(B(C_1, C_2) - 1)}}((1-t)C_1 + tC_2) \in X_1$$

(rappelons que $B(C_1, C_2)$ est l'aire mixte de C_1 et C_2).

Exemple d'une géodésique

La fonction $h(\theta) = 4 + \cos(2\theta)$ vérifie $h + h'' > 0$; on peut remarquer que c'est une des fonctions non constantes les plus simples vérifiant cette propriété. D'après la proposition 6.18, c'est la fonction de support du convexe dont le bord est d'équation $\theta \mapsto h(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) + h'(\theta)(-\sin \theta, \cos \theta)$; on l'a représenté sur la figure suivante.

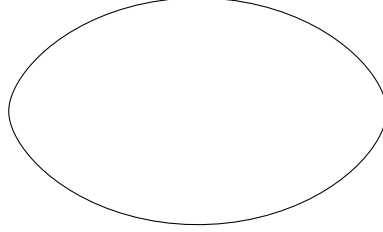


FIGURE 6.6 – Unique convexe dont la fonction support est $h(\theta) = 4 + \cos(2\theta)$.

L'aire de ce convexe est

$$q(h) = 16\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{29\pi}{2},$$

et on peut donc considérer les deux éléments suivants de X_1 :

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{2}{29\pi}} (4 + \cos(2\theta))$$

(on rappelle que la fonction constante $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ est la fonction de support du disque de centre O et d'aire = 1). La géodésique $t \mapsto \gamma(t, \cdot)$ passant par x et y s'écrit donc

$$\begin{aligned} \gamma(t, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2t(1-t)(B(x, y) - 1)}} ((1-t)x(\theta) + ty(\theta)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2t(1-t)(B(x, y) - 1)}} \left(\frac{1-t}{\sqrt{\pi}} + t\sqrt{\frac{2}{29\pi}} (4 + \cos(2\theta)) \right), \end{aligned}$$

avec

$$B(x, y) = \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{29\pi}} = \sqrt{\frac{32}{29}}.$$

Avec les mêmes notations que précédemment, on sait que cette géodésique est définie pour $t \in (t_1, t_2)$, où t_1 et t_2 sont les racines du polynôme $1 + 2t(1-t)(B(x, y) - 1)$:

$$t_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{32}{3}} + \sqrt{\frac{29}{3}} \right) \simeq -2.69 < 0 < 1 < t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{32}{3}} + \sqrt{\frac{29}{3}} \right) \simeq 3.69.$$

On veut montrer que cette géodésique ne reste pas dans X_1 ; on rappelle qu'on a montré qu'elle reste dans X_1 pour $t \in [0, 1]$. Ceci montrera en passant que $X_1 \subset \mathbb{H}^\infty$ n'est pas un sous-ensemble totalement géodésique.

On sait qu'une condition nécessaire pour avoir $\gamma(t, \cdot) \in X_1$ est la suivante : pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$,

$$\gamma(t, \theta) + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2}(t, \theta) \geq 0.$$

On obtient facilement l'expression

$$\gamma(t, \theta) + \frac{\partial^2 \gamma}{d\theta^2}(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2t(1-t)(B(x, y) - 1)}} \left(\frac{1-t}{\sqrt{\pi}} + t\sqrt{\frac{2}{29\pi}}(4 - 3\cos(2\theta)) \right).$$

Comportement pour $t < 0$:

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\left[\gamma + \frac{\partial^2 \gamma}{d\theta^2} \right] \left(t, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2t(1-t)(B(x, y) - 1)}} \left(\frac{1-t}{\sqrt{\pi}} + 7t\sqrt{\frac{2}{29\pi}} \right),$$

et

$$\frac{1-t_1}{\sqrt{\pi}} + 7t_1\sqrt{\frac{2}{29\pi}} \simeq -0.71,$$

ce qui montre qu'on a $\left[\gamma + \frac{\partial^2 \gamma}{d\theta^2} \right] \left(t, \frac{\pi}{2} \right) < 0$ pour $t > t_1$ proche de t_1 , et donc la géodésique sort de X_1 .

Comportement pour $t > 1$

Pour $\theta = 0$ on a

$$\left[\gamma + \frac{\partial^2 \gamma}{d\theta^2} \right] (t, 0) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2t(1-t)(B(x, y) - 1)}} \left(\frac{1-t}{\sqrt{\pi}} + t\sqrt{\frac{2}{29\pi}} \right),$$

et

$$\frac{1-t_2}{\sqrt{\pi}} + t_2\sqrt{\frac{2}{29\pi}} \simeq -0.97,$$

ce qui montre que $\left[\gamma + \frac{\partial^2 \gamma}{d\theta^2} \right] (t, 0) < 0$ pour $t < t_2$ proche de t_2 , et donc la géodésique sort encore de X_1 .

Remarque 6.27. Une manière heuristique (et géométrique) de comprendre ces résultats est la suivante : d'après la proposition 6.26, la valeur en t de la géodésique entre C_1 et C_2 est un multiple de l'ensemble $(1-t)C_1 + tC_2$. Si $t < 0$ ou $t > 1$, cet ensemble est la différence de deux convexes, et rien ne nous assure alors que c'est bien un convexe.

6.3.2 Étude du flot de raccourcissement des courbes

Introduction

Ce flot est un processus géométrique qui a été largement étudié : il fait évoluer une courbe en déplaçant ses points dans la direction de la normale, proportionnellement à la courbure. Dans la suite, on énoncera de nombreux résultats sans démonstration ; on pourra se référer à [HB11], et à l'article original de M. Gage et R. S. Hamilton [GH86].

Une fonction $F : [0, T) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est solution du flot de raccourcissement des courbes, de condition initiale $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, si

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = -\kappa \vec{N} \text{ pour } t > 0, \\ F(0, \cdot) = \gamma_0, \end{cases} \quad (6.4)$$

où \vec{N} et κ sont la normale unitaire sortante et la courbure de la courbe $F(t, \cdot)$.

On se place dans le cas de parties strictement convexes (i.e. γ_0 borde une partie strictement convexe C_0 de \mathbb{R}^2) : c'est le premier cas qui a été étudié par M. Gage et R. S. Hamilton dans les années 1980 (voir [GH86]). Quitte à renormaliser la condition initiale, on peut supposer que C_0 est d'aire = 1. Dans ce cas, le flot est défini pour $t \in [0, \frac{1}{2\pi})$, les courbes $F(t, \cdot)$ bordent un domaine strictement convexe $C(t)$, et l'aire de ce convexe est $1 - 2\pi t$.

M. Grayson montra en 1987 que pour toute condition initiale γ_0 , la courbe $F(t, \cdot)$ borde une partie strictement convexe du plan à partir d'un certain temps t . L'étude effectuée par M. Gage et R. S. Hamilton est donc suffisante pour étudier le flot du raccourcissement des courbe pour n'importe quelle condition initiale.

Exemple 6.28. *Si la condition initiale est un disque d'aire 1, i.e. de rayon $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, alors $C(t)$ est un disque de rayon $\sqrt{\frac{1}{\pi} - 2t}$.*

On sait de plus que le convexe renormalisé (d'aire = 1)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\pi t}} C(t)$$

converge vers le disque d'aire = 1, dans le sens suivant : la courbure $\kappa(t, \cdot) : \mathbb{S}^1 \rightarrow (0, \infty)$ de la frontière de ce convexe (voir la définition plus haut) converge uniformément vers $\sqrt{\pi}$ quand $t \rightarrow \frac{1}{2\pi}$ (on peut rappeler ici que le disque d'aire = 1 est de courbure $\sqrt{\pi}$).

Une courbe dans X_1

Il suffit de renormaliser les convexes durant le flot pour obtenir une courbe dans X_1 . En effet, notons $h(t, \cdot) : \theta \mapsto h(t, \theta)$ la fonction de support du convexe $C(t)$: la courbe

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, \frac{1}{2\pi}) &\longrightarrow X_1 \\ t &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1 - 2\pi t}} h(t, \cdot) \end{aligned}$$

est une courbe dans X_1 . On peut naturellement se poser la

Question 6.29. *Γ est-elle une géodésique (pour la métrique hyperbolique) ?*

On va répondre à cette question en montrant la proposition suivante :

Proposition 6.30. *Sauf cas très exceptionnel, la courbe Γ n'est pas une géodésique.*

D'après les résultats de M. Gage et R. S. Hamilton, les convexes renormalisés convergent vers le disque d'aire = 1. On va montrer que c'est le cas pour la topologie de X_1 :

Lemme 6.31. *Quand $t \rightarrow \frac{1}{2\pi}$, $\Gamma(t)$ converge dans X_1 vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.*

Démonstration. On sait que la courbure $\kappa(t, \theta)$ converge uniformément vers $\sqrt{\pi}$ quand $t \rightarrow \frac{1}{2\pi}$, et cette courbure est

$$\kappa(t, \theta) = \frac{1}{\Gamma + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \theta^2}}$$

(voir la proposition 6.18). Notons $(a_k(t), b_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ les coefficients de Fourier de $\Gamma(t)$. Comme

$$\Gamma(t, \cdot) + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \theta^2}(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{1}{2\pi}]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ uniformément sur } \mathbb{S}^1,$$

on a convergence en norme L^2 , ce qui donne

$$\left(a_0(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1)^2 (a_k(t)^2 + b_k(t)^2) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{1}{2\pi}]{} 0.$$

Dans H on a donc

$$\begin{aligned} \|\Gamma(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|_H^2 &= \left(a_0(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} (1 + k^2) (a_k(t)^2 + b_k(t)^2) \\ &\leq \left(a_0(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} (k^2 - 1)^2 (a_k(t)^2 + b_k(t)^2) \end{aligned}$$

(la dernière inégalité obtenue est vraie car $1 + k^2 \leq (k^2 - 1)^2$ si $k \geq 2$). Quand $t \rightarrow \frac{1}{2\pi}$, on a donc $\Gamma(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ dans H , et donc dans X_1 . \square

On rappelle qu'une géodésique reste nécessairement dans un plan de H . Le lemme nous permet de montrer la

Proposition 6.32. *Si un plan vectoriel \mathcal{P} contient $\Gamma(t)$ pour tout $t \in [0, \frac{1}{2\pi})$, alors il contient les fonctions constantes.*

Démonstration. Comme H est un espace de Hilbert et \mathcal{P} est un sous-espace vectoriel de dimension finie, on sait que l'on a

$$\inf_{g \in \mathcal{P}} \|f - g\|_H = 0 \text{ si, et seulement si, } f \in \mathcal{P}.$$

Mais comme $\Gamma(t) \in \mathcal{P}$ pour tout $t \in [0, \frac{1}{2\pi})$, on a

$$\inf_{g \in \mathcal{P}} \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} - g \right\|_H \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \Gamma(t) \right\|_H :$$

par le lemme, le terme de droite tend vers zéro, et donc $\inf_{g \in \mathcal{P}} \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} - g \right\|_H = 0$, ce qui montre que $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \in \mathcal{P}$ et donc \mathcal{P} contient les fonctions constantes. \square

On peut maintenant démontrer la proposition 6.30. On suppose que la condition initiale du flot est un convexe différent du disque d'aire = 1, c'est-à-dire une fonction de support $h_0 \in X_1$ différente d'une constante. Comme les géodésiques restent dans un plan vectoriel de H , si Γ était une géodésique, alors par la proposition précédente, Γ resterait dans le plan \mathcal{P} engendré par h_0 et les fonctions constantes.

Pour montrer que Γ n'est pas une géodésique, il nous suffit donc de montrer la propriété suivante : $\frac{d}{dt}|_{t=0+} \Gamma(t)$ n'est pas dans le plan vectoriel engendré par h_0 et les fonctions

constantes. L'équation d'évolution de la fonction de support $h(t, \cdot)$ du convexe $C(t)$ évoluant sous le flot est la suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{-1}{h + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}}$$

(voir par exemple [HB11]). On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2\pi t}} h \right) \\ &= \frac{\pi}{(1-2\pi t)^{3/2}} h + \frac{1}{\sqrt{1-2\pi t}} \cdot \frac{-1}{h + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}}, \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0^+} \Gamma = \pi h_0 - \frac{1}{h_0 + h_0''}.$$

Ainsi, pour montrer que $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0^+} \Gamma(t)$ n'est pas dans le plan vectoriel engendré par h_0 et les fonctions constantes, il suffit de montrer que le vecteur $\frac{1}{h_0 + h_0''}$ n'est pas dans ce plan, ce qui est quasiment toujours le cas : les conditions initiales qui pourraient (éventuellement) donner des géodésiques sont les fonctions h_0 solutions d'une équation différentielle du type

$$\frac{1}{h(\theta) + h''(\theta)} = ah(\theta) + b + c \cos(\theta) + d \sin(\theta),$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Perspectives

Les résultats obtenus dans cette thèse laissent de nombreuses pistes à explorer ; nous en présentons ici quelques-unes.

La dimension supérieure

Le théorème de compacité de métriques singulières, démontré dans cet article, est valable dans le cadre des surfaces d’Alexandrov. Mais la notion de singularités coniques, centrale dans cette étude, se généralise en dimension supérieure : on peut par exemple supposer que, localement, la métrique ressemble au produit d’un cône Euclidien et d’une variété de codimension 2. De façon (beaucoup) plus générale, on peut également considérer des espaces stratifiés, qui sont construits inductivement (ce sont des cônes sur des espaces qui sont eux-même stratifiés). Un théorème de compacité serait-il valable pour des métriques singulières, dans un cadre plus général que celui des surfaces ?

Le cadre en lui-même constitue la principale difficulté de la dimension supérieure : il n’y a en effet pas de notion d’espaces singuliers analogue aux surfaces d’Alexandrov. En dimension supérieure, par quoi remplacer l’hypothèse de courbure intégrale bornée $\int_{\Sigma} |K_m| d\mathcal{A}_m \leq \Lambda$ (pour des métriques riemanniennes g_m approximant une métrique d’Alexandrov d) ? On pourrait par exemple penser à une condition portant sur la courbure scalaire, $\int_M |\text{scal}_m| d\mathcal{A}_m \leq \Lambda$. Une telle théorie n’a pour l’instant pas été développée. Les surfaces d’Alexandrov étant étroitement liées à la formule de Gauß-Bonnet, on pourrait également être tentés de commencer par les variétés de dimension 4, et remplacer la courbure de Gauß par la Q-courbure.

Espace de module

Le lecteur aura peut-être remarqué les nombreuses questions qui restent ouvertes concernant les résultats du chapitre 6 : les pages qui précèdent donnent seulement un aperçu de ce qu’il est possible de réaliser. On liste ici quelques-unes des questions qui paraissent intéressantes.

Pour les convexes

L’espace de module des polygones à n angles fixés de C. Bavard et É. Ghys est un polyèdre dans \mathbb{H}^{n-3} ; c’est donc naturellement un sous-ensemble de $X_1 \subset \mathbb{H}^{\infty}$. Dans cet espace, que se passe-t-il quand le nombre de points n tends vers l’infini ? De plus, l’espace

de module de C. Bavard et É. Ghys permet trouver des polyèdres hyperboliques : y a-t-il des analogues en dimension infinie ?

Il y a d'autres flots naturels sur les convexes que l'on peut considérer. Notamment, le flot de la courbure inverse fait évoluer une courbe selon l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\kappa} \vec{N}.$$

Sous ce flot, un convexe (normalisé) converge encore vers un disque. La dérivée de la courbe $\Gamma(t)$ en 0 est alors dans le plan vectoriel adéquat engendré par la condition initiale et les fonctions constantes si h_0 est solution d'un équation du type

$$h(\theta) + h''(\theta) = ah(\theta) + b + c \cos(\theta) + d \sin(\theta),$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (voir la fin du chapitre 6). Cette équation comporte de nombreuses solutions. Ces solutions donnent-elles des géodésiques ? Si oui, quelle est la forme des convexes dans le plan correspondants ? Ont-ils beaucoup de symétries ?

On a vu que l'ensemble des parties strictement convexes compactes du plan correspond aux métriques à singularité positive, telles qu'il existe une isométrie fixant le lieu singulier. De quel façon peut-on voir ce sous-ensemble de X_1 ? De plus, est-ce que toutes les surfaces à singularités positives le long d'une courbe fermée sont obtenues par la construction de A. Pogorelov exposée au début du chapitre 6 ? Si oui, par recollement, à tout couple de convexes pointés (C, A) , où $A \in C$, on peut associer une surface à singularité positive le long d'une courbe fermée. Est-ce que l'espace de module décrit dans ce manuscrit permet de mettre alors une structure géométrique sur *toutes* les surfaces à singularité positive le long d'une courbe fermée ?

La forme d'aire $\int_{\mathbb{S}^1} u_1(\theta) du_2(\theta)$ associée à deux fonctions lisses u_1 et u_2 sur \mathbb{S}^1 munit $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ d'une structure Kählerienne (voir par exemple [BCG95]). Quel est la relation entre cette structure et la structure hyperbolique de dimension infinie sur les convexes, lorsque $\gamma = (u_1, u_2)$ paramètre le bord du convexe ?

Enfin, comment se comporte le groupe d'isométrie de \mathbb{H}^∞ vis-à-vis de l'ensemble X_1 ?

Singularités le long d'un Cantor

Les convexes recollés le long de leurs bords constituent des modèles de surfaces à singularités le long d'une courbe fermée. Un problème qui semble plus difficile consiste à comprendre l'espace de module des surfaces à singularités le long d'un ensemble de Cantor (ces derniers apparaissent naturellement lors de l'étude d'objets singuliers, comme la variété de Whitehead par exemple). Déjà, il est clair que le problème ne va pas se ramener simplement à l'étude d'un espace de fonctions, comme c'est le cas pour les convexes avec leurs fonctions de support.

Une idée pourrait être d'utiliser l'approche de W. Thurston, qui, rappelons-le, a étudié l'espace de module des polyèdres à angles fixés. Lorsqu'il y a n sommets, cet espace est modelé sur l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}^{n-3}(\mathbb{C})$; dans ce cas, lorsque k singularités se rapprochent les unes des autres, la géométrie est celle d'un cône sur l'espace de module des polyèdres à $n - k$ sommets. Que se passe-t-il alors lorsque des singularités s'accumulent le long d'un Cantor ? Deux phénomènes rentrent ici en jeu : le nombre n de singularités tends

vers l'infini, et les singularités se rapprochent les unes des autres... On pourrait s'attendre à obtenir un espace hyperbolique *complexe* de dimension infini.

Flot de Ricci sur des surfaces d'Alexandrov

Le flot de Ricci est un flot géométrique, qui fait évoluer une métrique riemannienne dans la direction de sa courbure de Ricci :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}. \quad (6.5)$$

Il a été abondamment étudié depuis les travaux de R. S. Hamilton dans les années 1980, et a permis la résolution de la conjecture de Géométrisation de Thurston au début des années 2000 par G. Perelman. Dans le cas d'une variété compacte lisse à l'instant initial $t = 0$, le comportement de ce flot est très bien compris.

Ces dernières années, de nouvelles pistes de recherche concernant une condition initiale singulière ont été développées. R. Mazzeo, Y. Rubinstein et N. Sesum [MRS15] ont étudié le cas d'une surface à singularités coniques : pour des angles coniques $\theta_1, \dots, \theta_n \in (0, 2\pi)$, un flot (normalisé) qui préserve les singularités existe en tout temps. Les angles peuvent également évoluer selon une façon prescrite $\theta_i(t)$: on a alors existence (en temps court) du flot normalisé.

Des flots rendant la métrique instantanément lisse pour $t > 0$ ont également été étudiés ; D. Ramos-Guallar [RG11] a notamment étudié le cas de surfaces à singularités coniques. T. Richard [Ric12] a également défini un flot de Ricci, ayant pour condition initiale un espace métrique à courbure ≥ -1 au sens d'Alexandrov, et rendant la métrique instantanément lisse.

Une idée intéressante serait de définir un flot pour une surface d'Alexandrov, *dont les singularités ne sont pas coniques*. On peut par exemple penser à une surface à singularité (par exemple positive) le long d'un ensemble de Cantor ; par les résultats de T. Richard [Ric12], on sait déjà qu'un flot rendant la métrique instantanément lisse existe. Il semble intéressant d'essayer de définir un flot qui préserverait les singularités.

Il faut commencer par donner un sens à un *flot de Ricci sur Σ , préservant les singularités* : si la partie singulière d'une surface d'Alexandrov Σ est un Cantor C (la métrique est donc riemannienne sur $\Sigma - C$), on peut par exemple demander à ce que la métrique vérifie l'équation du flot (6.5) sur la partie lisse $\Sigma - C$. Une difficulté vient aussi de ce qu'on entend par *préservant les singularités* ; la mesure que l'on obtient sur un Cantor (de référence) C_0 dépend de la façon dont on paramètre le Cantor C au cours du flot (on a déjà vu ce problème au chapitre 6, lorsqu'on a étudié des métriques à singularités le long d'une courbe fermée : la mesure obtenue sur \mathbb{S}^1 dépend de la façon dont on paramètre la courbe singulière).

Pour obtenir un tel flot, une idée peut être d'approximer la métrique singulière par des métriques à singularités coniques ; pour ces dernières, on peut lancer le flot (par les résultats de R. Mazzeo, Y. Rubinstein et N. Sesum). Il faudrait alors un théorème de compacité pour les flots singuliers, analogue au classique théorème de compacité de Hamilton, pour obtenir un *flot limite*.

Exemple 6.33. *Considérons une métrique plate sur \mathbb{S}^2 , à singularités le long d'un Cantor C . La métrique est plate hors de C , donc la surface est invariante sous le flot. Au contraire, une surface lisse (arbitrairement proche de cette surface singulière) évoluera sous le flot de Ricci normalisé vers une sphère ronde...*

On peut noter que le théorème de compacité montré dans ce manuscrit peut constituer une première approche pour faire converger ces flots. Plus précisément, considérons une approximation de la métrique d singulière par des métriques coniques d_m , et notons $d_m(t)$ les flots (préservant les singularités coniques) construits par R. Mazzeo, Y. Rubinstein et N. Sesum. Sous des hypothèses assez larges, il est possible, à t fixé, de faire converger la suite de métriques $(d_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$: on peut par exemple se servir du critère pratique 4.34 pour vérifier facilement les hypothèses du Théorème Principal dans ce cas concret. Il existe alors une famille $\varphi_m(t)$ de difféomorphismes telle que, à t fixé, on ait la convergence uniforme $\varphi_m(t)^* d_m \rightarrow_{m \rightarrow \infty} d$. Le problème est alors qu'on n'a pas de contrôle sur les difféomorphismes $\varphi_m(t)$... En examinant la démonstration du Théorème Principal dans ce cas précis, il est peut-être possible de montrer que les difféomorphismes peuvent être choisis indépendamment du temps.

Une autre piste serait enfin d'essayer de résoudre à la main l'équation différentielle du flot de Ricci, comme dans [MRS15] ; des surfaces évoluant sous le flot de Ricci restent dans une même classe conforme, et le problème se ramène donc à la résolution d'une équation *scalaire* (non linéaire).

Bibliographie

- [ABR92] Sheldon Axler, Paul Bourdon, and Wade Ramey. *Harmonic function theory*, volume 137 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [AC92] Michael T. Anderson and Jeff Cheeger. C^α -compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below. *J. Differential Geom.*, 35(2) :265–281, 1992.
- [Ahl78] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [Ahl10] Lars V. Ahlfors. *Conformal invariants*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Topics in geometric function theory, Reprint of the 1973 original, With a foreword by Peter Duren, F. W. Gehring and Brad Osgood.
- [Ale05] A. D. Alexandrov. *Convex polyhedra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1950 Russian edition by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze and A. B. Sossinsky, With comments and bibliography by V. A. Zalgaller and appendices by L. A. Shor and Yu. A. Volkov.
- [And90] Michael T. Anderson. Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds. *Invent. Math.*, 102(2) :429–445, 1990.
- [AR89] A. D. Alexandrov and Yu. G. Reshetnyak. *General theory of irregular curves*, volume 29 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. Translated from the Russian by L. Ya. Yuzina.
- [AZ67] A. D. Aleksandrov and V. A. Zalgaller. *Intrinsic geometry of surfaces*. Translated from the Russian by J. M. Danskin. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [BCG95] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5(5) :731–799, 1995.
- [Ber60] M. Berger. Les variétés Riemanniennes $(1/4)$ -pincées. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 14 :161–170, 1960.

- [Ber71] Melvyn S. Berger. Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds. *J. Differential Geometry*, 5 :325–332, 1971.
- [Ber83] Marcel Berger. Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de $1/4$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(2) :135–150 (loose errata), 1983.
- [Ber03] Marcel Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [BG92] Christophe Bavard and Étienne Ghys. Polygones du plan et polyèdres hyperboliques. *Geom. Dedicata*, 43(2) :207–224, 1992.
- [BIM05] Marc Burger, Alessandra Iozzi, and Nicolas Monod. Equivariant embeddings of trees into hyperbolic spaces. *Int. Math. Res. Not.*, (22) :1331–1369, 2005.
- [Bre97] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.
- [Cas92] Mark Cassorla. Approximating compact inner metric spaces by surfaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 41(2) :505–513, 1992.
- [CC96] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. *Ann. of Math. (2)*, 144(1) :189–237, 1996.
- [CC97] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J. Differential Geom.*, 46(3) :406–480, 1997.
- [CD87] Wen Xiong Chen and Wei Yue Ding. Scalar curvatures on S^2 . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 303(1) :365–382, 1987.
- [CGY93] Sun-Yung A. Chang, Matthew J. Gursky, and Paul C. Yang. The scalar curvature equation on 2- and 3-spheres. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 1(2) :205–229, 1993.
- [Che70] Jeff Cheeger. Finiteness theorems for Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 92 :61–74, 1970.
- [CY87] Sun-Yung Alice Chang and Paul C. Yang. Prescribing Gaussian curvature on S^2 . *Acta Math.*, 159(3-4) :215–259, 1987.
- [CY88] Sun-Yung A. Chang and Paul C. Yang. Conformal deformation of metrics on S^2 . *J. Differential Geom.*, 27(2) :259–296, 1988.
- [Deb16] Clément Debin. A compactness theorem for surfaces with bounded integral curvature. <http://arxiv.org/abs/1605.07755>, 2016.
- [DK81] Dennis M. DeTurck and Jerry L. Kazdan. Some regularity theorems in Riemannian geometry. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(3) :249–260, 1981.
- [Dur87] O. Durumeric. A generalization of Berger’s theorem on almost $\frac{1}{4}$ -pinched manifolds. II. *J. Differential Geom.*, 26(1) :101–139, 1987.
- [Fil11] François Fillastre. From spaces of polygons to spaces of polyhedra following Bavard, Ghys and Thurston. *Enseign. Math. (2)*, 57(1-2) :23–56, 2011.
- [GH86] M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geom.*, 23(1) :69–96, 1986.

- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [Gre93] Robert E. Greene. Some concepts and methods in Riemannian geometry. In *Differential geometry : Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990)*, volume 54 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–22. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [Gro81a] Michael Gromov. Curvature, diameter and Betti numbers. *Comment. Math. Helv.*, 56(2) :179–195, 1981.
- [Gro81b] Mikhael Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, volume 1 of *Textes Mathématiques [Mathematical Texts]*. CEDIC, Paris, 1981. Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.
- [Gro96] H. Groemer. *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*, volume 61 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [GW88] R. E. Greene and H. Wu. Lipschitz convergence of Riemannian manifolds. *Pacific J. Math.*, 131(1) :119–141, 1988.
- [HB11] Rong Li Huang and Ji Guang Bao. The blow up analysis of the general curve shortening flow. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 27(11) :2107–2128, 2011.
- [HH97] E. Hebey and M. Herzlich. Harmonic coordinates, harmonic radius and convergence of Riemannian manifolds. *Rend. Mat. Appl. (7)*, 17(4) :569–605 (1998), 1997.
- [IT92] Y. Iwayoshi and M. Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, Tokyo, 1992. Translated and revised from the Japanese by the authors.
- [JK82] Jürgen Jost and Hermann Karcher. Geometrische Methoden zur Gewinnung von a-priori-Schranken für harmonische Abbildungen. *Manuscripta Math.*, 40(1) :27–77, 1982.
- [Kas89] Atsushi Kasue. A convergence theorem for Riemannian manifolds and some applications. *Nagoya Math. J.*, 114 :21–51, 1989.
- [Kli61] Wilhelm Klingenberg. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. *Comment. Math. Helv.*, 35 :47–54, 1961.
- [KW74] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Curvature functions for compact 2-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 99 :14–47, 1974.
- [LRW14] Bas Lemmens, Mark Roelands, and Marten Wortel. Isometries of infinite dimensional hilbert geometries. <https://arxiv.org/abs/1405.4147>, 2014.
- [MP14] Nicolas Monod and Pierre Py. An exotic deformation of the hyperbolic space. *Amer. J. Math.*, 136(5) :1249–1299, 2014.
- [MRS15] Rafe Mazzeo, Yanir A. Rubinstein, and Natasa Sesum. Ricci flow on surfaces with conic singularities. *Anal. PDE*, 8(4) :839–882, 2015.
- [Pet87] Stefan Peters. Convergence of Riemannian manifolds. *Compositio Math.*, 62(1) :3–16, 1987.

- [Pet97] Peter Petersen. Convergence theorems in Riemannian geometry. In *Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993–94)*, volume 30 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 167–202. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [Pet06] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [Pog73] A. V. Pogorelov. *Extrinsic geometry of convex surfaces*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973. Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 35.
- [PT09] Peter Petersen and Terence Tao. Classification of almost quarter-pinched manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(7) :2437–2440, 2009.
- [Res93] Yu. G. Reshetnyak. Two-dimensional manifolds of bounded curvature. In *Geometry, IV*, volume 70 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 3–163, 245–250. Springer, Berlin, 1993.
- [Res01] Yu. G. Reshetnyak. On the conformal representation of Alexandrov surfaces. In *Papers on analysis*, volume 83 of *Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat.*, pages 287–304. Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, 2001.
- [RG11] Daniel Ramos Guallar. Smoothing cone points with ricci flow. <http://arxiv.org/abs/1109.5554>, 2011.
- [Ric12] Thomas Richard. Canonical smoothing of compact alexandrov surfaces via ricci flow. <https://arxiv.org/abs/1204.5461>, 2012.
- [Sch93] Rolf Schneider. *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Sch13] Rick Schwartz. Notes on shapes of polyhedra. <http://arxiv.org/abs/1506.07252>, 2013.
- [Shi83] Katsuhiko Shiohama. A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 275(2) :811–819, 1983.
- [Shi99] Takashi Shioya. The limit spaces of two-dimensional manifolds with uniformly bounded integral curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(5) :1765–1801, 1999.
- [Thu98] William P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 511–549. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.
- [Tro86] Marc Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseign. Math. (2)*, 32(1-2) :79–94, 1986.
- [Tro91a] M. Troyanov. Un principe de concentration-compacité pour les suites de surfaces riemanniennes. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 8(5) :419–441, 1991.
- [Tro91b] Marc Troyanov. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2) :793–821, 1991.
- [Tro07] Marc Troyanov. On the moduli space of singular Euclidean surfaces. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. I*, volume 11 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 507–540. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

- [Tro09] Marc Troyanov. Les surfaces à courbure intégrale bornée au sens d'alexandrov. *Journées annuelles de la SMF*, pages 1–18, 2009.
- [Yam88] Takao Yamaguchi. Homotopy type finiteness theorems for certain precompact families of Riemannian manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(3) :660–666, 1988.

Résumé

La recherche d'une compactification de l'ensemble des métriques riemanniennes à singularités coniques sur une surface amène naturellement à l'étude des *surfaces à Courbure Intégrale Bornée au sens d'Alexandrov*. Il s'agit d'une géométrie singulière, développée par A. Alexandrov et l'école de Leningrad dans les années 1970, et dont la caractéristique principale est de posséder une notion naturelle de courbure, qui est une mesure. Cette large classe géométrique contient toutes les surfaces « raisonnables » que l'on peut imaginer.

Le résultat principal de cette thèse est un théorème de compacité pour des métriques d'Alexandrov sur une surface ; un corollaire immédiat concerne les métriques riemanniennes à singularités coniques. On décrit dans ce manuscrit trois hypothèses adaptées aux surfaces d'Alexandrov, à la manière du théorème de compacité de Cheeger-Gromov qui concerne les variétés riemanniennes à courbure bornée, rayon d'injectivité minoré et volume majoré. On introduit notamment la notion de rayon de contractibilité, qui joue le rôle du rayon d'injectivité dans ce cadre singulier.

On s'est également attachés à étudier l'espace (de module) des métriques d'Alexandrov sur la sphère, à courbure positive le long d'une courbe fermée. Un sous-ensemble intéressant est constitué des convexes compacts du plan, recollés le long de leurs bords. À la manière de W. Thurston, C. Bavard et É. Ghys, qui ont considéré l'espace de module des polyèdres et polygones (convexes) à angles fixés, on montre que l'identification d'un convexe à sa fonction de support fait naturellement apparaître une géométrie hyperbolique de dimension infinie, dont on étudie les premières propriétés.

Mots-clés : géométrie riemannienne, singularités coniques, surfaces d'Alexandrov, théorème de compacité, espace de module, géométrie hyperbolique de dimension infinie.

Abstract

If we look for a compactification of the space of Riemannian metrics with conical singularities on a surface, we are naturally led to study the *surfaces with Bounded Integral Curvature in the Alexandrov sense*. It is a singular geometry, developed by A. Alexandrov and the Leningrad's school in the 70's, and whose main feature is to have a natural notion of curvature, which is a measure. This large geometric class contains any "reasonable" surface we may imagine.

The main result of this thesis is a compactness theorem for Alexandrov metrics on a surface ; a straightforward corollary concerns Riemannian metrics with conical singularities. We describe here three hypothesis which pair with the Alexandrov surfaces, following Cheeger-Gromov's compactness theorem, which deals with Riemannian manifolds with bounded curvature, injectivity radius bounded by below and volume bounded by above. Among other things, we introduce the new notion of contractibility radius, which plays the role of the injectivity radius in this singular setting.

We also study the (moduli) space of Alexandrov metrics on the sphere, with non-negative curvature along a closed curve. An interesting subset is the set of compact convex sets, glued along their boundaries. Following W. Thurston, C. Bavard and É. Ghys, who considered the moduli space of (convex) polyhedra and polygons with fixed angles, we show that the identification between a convex set and its support function give rise to an infinite dimensional hyperbolic geometry, for which we study the first properties.

Keywords : Riemannian geometry, conical singularities, Alexandrov surfaces, compactness theorem, moduli space, infinite dimensional hyperbolic geometry.