



HAL
open science

Distribution asymptotique fine des points de hauteur bornée sur les variétés algébriques

Zhizhong Huang

► **To cite this version:**

Zhizhong Huang. Distribution asymptotique fine des points de hauteur bornée sur les variétés algébriques. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAM036 . tel-01682961

HAL Id: tel-01682961

<https://theses.hal.science/tel-01682961>

Submitted on 12 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel du 25 mai 2016

Préparée au sein de **l'Institut Fourier**

et de l'école doctorale **Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Distribution asymptotique fine des points de hauteur bornée sur les variétés algébriques

Présentée par

Zhizhong Huang

Thèse dirigée par **Emmanuel Peyre**

Thèse soutenue publiquement le **30 août 2017**,
devant le jury composé de :

Mme, Sara Checcoli	Maître de conférence	Université Grenoble Alpes	Examinatrice
M, Régis de la Bretèche	Professeur	Université Paris-Diderot	Président du jury
M, Marc Hindry	Professeur	Université Paris-Diderot	Rapporteur
M, David McKinnon	Professeur	University of Waterloo	Rapporteur
M, Emmanuel Peyre	Professeur	Université Grenoble Alpes	Directeur de thèse

多情乃佛心

不俗即仙骨

Remerciements

De nombreuses personnes ont contribué, directement ou indirectement, à l'élaboration de ce travail. Je tiens en premier à exprimer mes vifs remerciements à Emmanuel Peyre, pour avoir encadré mon stage de M2 puis cette thèse. Sa patience à mon égard, sa disponibilité, sa rigueur mathématique, sa relecture minutieuse et ses encouragements tout au long de ces quatre années m'ont permis de mener à bien la recherche. Ses nombreuses remarques et suggestions sont très précieuses pour rendre beaucoup plus clairs plusieurs points de ce travail. Sans lui ce manuscrit resterait un échafaudage de fragments totalement illisible.

Je voudrais remercier David McKinnon pour son idée ingénieuse de la notation de constantes d'approximation et l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Il m'a fait l'immense honneur d'avoir accepté de rapporter cette thèse avec promptitude et de venir du Canada pour être présent le jour de ma soutenance. Ma reconnaissance s'adresse également à Marc Hindry. J'ai eu toujours un profond respect pour sa grande connaissance des mathématiques. Je le remercie sincèrement pour avoir accepté de relire cette thèse dans une période très chargée. J'aimerais remercier aussi Sara Checcoli et Régis de la Bretèche pour avoir accepté de faire partie du jury. Avec Régis j'ai eu plusieurs discussions très éclairantes qui ont permis de résoudre quelques points techniques dans mon travail. Je lui suis donc extrêmement reconnaissant d'avoir accordé tant d'attention à mes questions. Ce travail ne pourrait pas aboutir sans le manuscrit de Sébastien Pagelot. Ce fut un plaisir de pouvoir apprendre son travail de pionnier.

Ceci m'amène à remercier plus généralement à tous ceux qui m'ont enseigné et partagé leur idées mathématiques : David Bourqui, Michel Brion, Tim Browning, Huayi Chen, Pierre Dehornoy, Jean-Pierre Demailly, Stéphane Druel, Aurélien Galateau, Éric Gaudron, Bruno Klingler, Laurent Manivel, Jacques Peyrière, Gaël Rémond, Tanguy Rivoal, Per Salberger... Bien entendu, la liste est longue et j'espère donc que toutes les autres personnes se reconnaîtront dans ce remerciement collectif que je leur adresse.

Pendant ces quelques années, j'ai pu travaillé à l'Institut Fourier dans des conditions très agréables et je souhaite donc adresser de chaleureux remerciements à tous les membres du laboratoire. En particulier, je suis vivement reconnaissant à Lindsay Bardou et Christine Haccart pour leur gentillesse en gestions de missions et à Géraldine Rahal pour gérer les procédures administratives. Merci à François Dahmani pour ses arrangements du programme M2R, et à Hervé Pajot, qui n'arrête pas de m'inciter à avancer sur mon enseignement. Je dois remercier aussi l'ANR Gardio, dont le soutien financier m'a donné les chances d'assister à d'innombrables conférences en France et à l'étranger, et de nombreuses rencontres qui furent autant d'occasions pour moi de mesurer l'étendue et la richesse de la branche des mathématiques dans laquelle j'évolue. L'atmosphère stimulante du BICMR et du Département de Mathématiques de l'Université Paris-Diderot m'a laissé de très bons souvenirs.

Mes amis, à Grenoble, Paris ou ailleurs : Raphaël Achet, Amina Azzouz, François Ballaÿ, Yulin Cai, Thomas Camus, Junyan Cao, Yang Cao, Young-Jun Choi, Ya Deng, Kévin Destagnol, Thibault Delcroix, Victoria Cantoral-Farfan, Jiaming Chen, Yanbo Fang, Tiago Jardim da Fonseca, Lie Fu, Ziyang Gao, Luc Gossart, Roberto Gualdi, Jiao He, Weikun He, Yong Hu, Yuliang Huang, Cong Bang Huynh, Dinh Tuan Huynh, Guillaume Idelon-Ritton, Diego Izquierdo, Antoine Julia, Philippe Jullian, Bruno Laurent, Louis-Clément Lefèvre, Christophe Leuridan, Huajie Li, Long Li, Yongqi Liang, Hseuh-Yung Lin, Chunhui Liu, Jie Liu, Shinan Liu, Teddy Mignot, Pedro Montero, Alejandro Rivera, Chenmin Sun, Salim Tayou, Zhiyu Tian, Baptiste Trey, Jian Wang, Xiaojun Wu, Jian Xiao, Songyan Xie, Daxin Xu, Cong Xue, Nanjun Yang, Yong Yang, Florent Ygouf, Hongjie Yu, Can Zhang, Xiaoyu Zhang, Peng Zheng, Tao Zheng... Je vous dis un grand merci ! Combien de blagues nous avons pu faire ensemble, combien de très bons moments nous avons partagés...

Finalement je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à toute ma famille pour le soutien permanent et les encouragements constants.

感恩傷害你的人，因為他磨練你的心志。
感恩絆倒你的人，因為他強化你的雙腿。
感恩欺騙你的人，因為他增進你的智慧。
感恩藐視你的人，因為他醒覺你的自尊。
感恩遺棄你的人，因為他教會了你獨立。

Résumé

L'étude de la distribution des points rationnels sur les variétés algébriques est un sujet classique de la géométrie diophantienne. Le programme proposé par V. Batyrev et Y. Manin dans des années 90 donne une prédiction sur l'ordre de croissance tandis que sa version ultérieure due à E. Peyre conjecture l'existence d'une mesure décrivant la distribution globale. Dans cette thèse nous nous proposons une étude de la distribution locale des points rationnels de hauteur bornée sur les variétés algébriques. Ceci envisage une description plus fine que celle globale en dénombrant les points les plus proches d'un point fixé. Nous nous plaçons le cadre dans le travail de D. McKinnon et M. Roth qui met en évidence que la positivité locale des fibrés en droites de la variété gouverne l'approximation diophantienne sur elle et nous reprenons les résultats de S. Pagelot. L'ordre de croissance espéré et l'existence d'une mesure asymptotique sur certaines surfaces toriques sont démontrés, alors qu'un résultat négatif pour une autre surface sur laquelle il n'y a pas de mesure asymptotique et les meilleurs approximations génériques s'obtiennent sur des courbes rationnelles nodales est également obtenu. Ces deux phénomènes sont de nature radicalement différente du point de vue de l'approximation diophantienne classique.

Abstract

The study of the distribution of rational points on algebraic varieties is a classic subject of Diophantine geometry. The program proposed by V. Batyrev and Y. Manin in the 1990s gives a prediction on the order of growth whereas its later version due to E. Peyre conjectures the existence of a measure describing the global distribution. In this thesis we propose a study of the local distribution of rational points of bounded height on algebraic varieties. This aims at giving a description finer than the global one by counting the points closest to a fixed point. This is based on the recent framework of the work of D. McKinnon and M. Roth which highlights that the local positivity of line bundles of the variety governs the Diophantine approximation on it and we take up the results of S. Pagelot. The expected order of growth and the existence of an asymptotic measure on some toric surfaces are demonstrated, while a negative result for another surface on which there is no asymptotic measure and the best generic approximates are obtained on nodal rational curves is also proven. These two phenomena are of radically different nature from the point of view of classical Diophantine approximation.

Table des matières

Remerciements	iii
1 INTRODUCTION	1
1.1 Points rationnels sur les variétés algébriques et principe de Batyrev-Manin	2
1.2 Distribution locale	2
1.3 Principaux résultats	3
1.4 Interprétation en terme de l'espace de module des courbes rationnelles	6
2 CONSTANTES D'APPROXIMATION ET OPÉRATIONS DE GROSSISSEMENT	7
2.1 Constantes d'approximation et constante essentielle	8
2.2 Opération de grossissement	11
2.3 Minorations générales des constantes d'approximation	15
3 VARIÉTÉS TORIQUES	17
3.1 Préliminaire sur les variétés toriques	18
3.2 Torseur universel	20
3.3 Courbes rationnelles sur les variétés toriques	23
3.4 Variétés toriques avec $\text{rg}_{\mathbf{Z}}(\text{Pic}(X)) = 2$	35
4 APPROXIMATION DIOPHANTINNE ET DISTRIBUTION LOCALE SUR LA SURFACE X_3	41
4.1 Introduction	42
4.2 Détermination de la constante essentielle	44
4.3 Transformation de Cremona et paramétrisation des droites	45
4.4 Calcul global	48
4.5 Obtention de la mesure asymptotique	59
4.6 À la recherche des interprétations	62
4.7 Résultats pour d'autres surfaces toriques	63
5 APPROXIMATION DIOPHANTINNE ET DISTRIBUTION LOCALE SUR LA SURFACE Y_4	65
5.1 Introduction	66
5.2 Solutions des équations de Pell-Fermat	68
5.3 Zoom sur les nombres algébriques	72
5.4 Distribution locale sur la surface torique Y_4	94
6 APPENDICES	111
6.1 Distribution locale d'un point rationnel sur la droite projective	112
6.2 Le problème des diviseurs pour des formes binaires cubiques déployées	114
Bibliographie	126

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Points rationnels sur les variétés algébriques et principe de Batyrev-Manin

L'étude de la distribution des points rationnels sur les variétés algébriques est un sujet classique de la géométrie diophantienne. Beaucoup de variétés dont le fibré anticanonique est gros vérifient le principe de Batyrev-Manin [BM90] avec la constante de Peyre [Pey95], y compris les variétés toriques lisses projectives (voir [Bro09] pour des exemples). Plus précisément, soit X une telle variété définie sur un corps de nombres k munie d'une hauteur de Weil H associée au fibré anticanonique ω_X^{-1} . On dit que X vérifie le principe de Batyrev-Manin s'il existe un ouvert dense U de X tel que

$$\sharp U_{H \leq B} = \sharp \{x \in U(k) : H(P) \leq B\} \sim C(X) B(\log B)^{\text{rg}(\text{Pic}(X)) - 1}, \quad (1.1.1)$$

où la constante $C(X)$ a reçu une interprétation géométrique (cf. [Pey95],[Pey03]). Citons aussi quelques versions raffinées de cette conjecture [Pey14], [LTT15], [LS16]. La raison pour laquelle on ne considère pas tous les points de la variété est que souvent il existe des sous-variétés, que l'on appelle ici *globalement accumulatrice*, dont la croissance du nombre de points rationnels domine celle d'un ouvert dense. On peut définir certaines constantes (par exemple, la constante β dans [BM90]) pour détecter de telles variétés. Soit U l'ouvert privé de toutes les sous-variétés globalement accumulatrices (si un tel ouvert existe). Une extension naturelle de ce problème est de considérer la convergence au sens faible de la suite de mesures de probabilité

$$\mu_{U_{H \leq B}} = \frac{1}{\sharp U_{H \leq B}} \sum_{x \in U(k), H(x) \leq B} \delta_x. \quad (1.1.2)$$

Si cette suite de mesures converge, elle reflète un phénomène d'équidistribution, et en regardant la densité de la mesure limite on peut obtenir une caractérisation de la « concentration » des points rationnels. E. Peyre [Pey95] a conjecturé une mesure limite, appelée mesure de Tamagawa.

1.2 Distribution locale

On se place toujours sur le cadre du principe de Batyrev-Manin. Pour étudier la distribution plus fine, on se propose d'utiliser une approche plus « locale ». Pour X une « bonne » variété munie d'une hauteur de Weil H , on s'intéresse à l'ensemble des points rationnels de hauteur bornée

$$X_{H \leq B} = \{P \in X(\mathbf{Q}) : H(P) \leq B\}.$$

Nous regardons d'abord quelques exemples particuliers.

Cas I. $X = \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$. On choisit la hauteur de Weil définie par

$$H([x : y : z]) = \max(|x|, |y|, |z|), \quad \text{pgcd}(x, y, z) = 1.$$

Un calcul nous dit que les points le plus proches de Q sont à une distance de l'ordre de B^{-1} . Nous observons aussi que les points se répartissent apparemment de préférence sur les droites rationnelles.

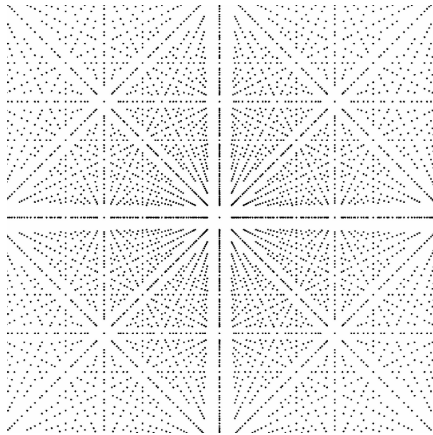
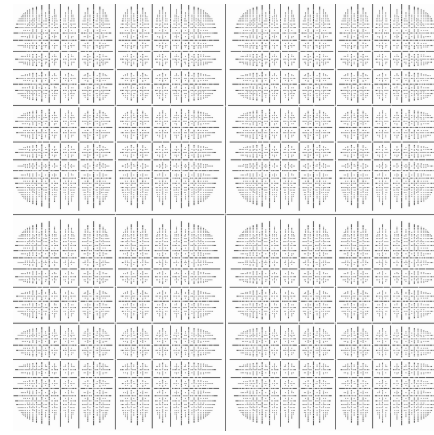
Cas II. $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. On choisit la hauteur définie par

$$H([u : v] \times [s : t]) = \max(|u|, |v|) \max(|s|, |t|), \quad \text{pgcd}(u, v) = \text{pgcd}(s, t) = 1.$$

On peut étendre ce principe à une variété plus générale. Étant donné $Q \in X(k)$, on considère les questions suivantes :

- Quels sont les points rationnels de hauteur bornée sur X « les plus proches » de Q ?
- Existe-t-il une distribution asymptotique de ces points, une fois appliqué une opération de grossissement approprié ?

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux variétés toriques lisses et projectives dont le fibré en droites anticanonique est engendré par ses sections globales et on utilise une hauteur de Weil associée. Les travaux [BT98] [BT95] [Sal98] confirment la conjecture de Manin pour les variétés toriques munies d'une hauteur de Weil associée au fibré anticanonique. Ceci est en faveur de l'existence d'une distribution globale ainsi que de l'existence d'une distribution locale asymptotique.

FIGURE 1.1 – Points de hauteur bornée sur \mathbf{P}^2 FIGURE 1.2 – Points de hauteur bornée sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

1.3 Principaux résultats

Dans ce mémoire, on considère les surfaces toriques dont l'éventail est l'un des suivants (Figures 1.3 à 1.8) avec une hauteur de Weil associée au fibré anticanonique. Pour donner un sens aux notions de points proches et de facteur de zoom, on se placera dans le cadre de l'approximation diophantienne sur les variétés algébriques à la D. McKinnon et M. Roth [MR15]. Ils proposent une définition qui est de nature géométrique et arithmétique en même temps pour mesurer la qualité d'approcher un point rationnel par d'autres points rationnels sur la variété (cf. chapitre 2).

Le premier résultat concerne la meilleure approximation.

Théorème 1.3.1 (cf. Théorème 3.3.13 *infra*). *Pour toute variété torique vérifiant une condition géométrique (cf. 3.3.8), les approximations optimales peuvent être choisies sur des courbes rationnelles de degré anticanonique minimal. Cela est encore vrai pour toutes les variétés étudiés dans ce mémoire (bien que certaines d'entre elles ne vérifient pas cette condition).*

Le second est focalisé sur la distribution locale. Nous nous concentrons sur les surfaces X_3 et Y_4 . Elles fournissent des phénomènes assez différents.

Théorème 1.3.2 (cf. Théorème 4.1.2 *infra*). *Pour la surface X_3 , en dehors d'un fermé de Zariski, les approximations génériques s'obtiennent sur des courbes rationnelles lisses très libre de degré anticanonique minimal et il existe une mesure limite pour le zoom critique décrivant la distribution locale d'un point général sur l'orbite ouverte. Elle est de dimension de Hausdorff 2.*

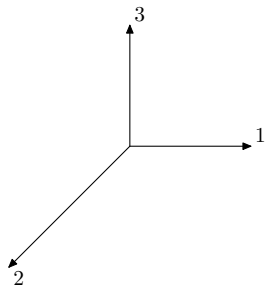
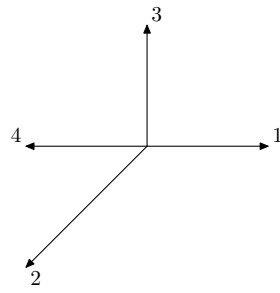
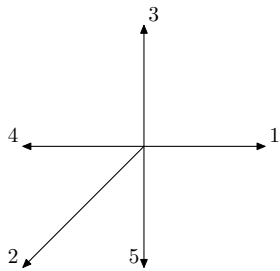
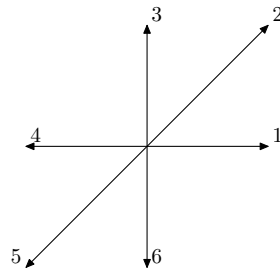
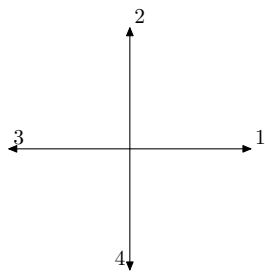
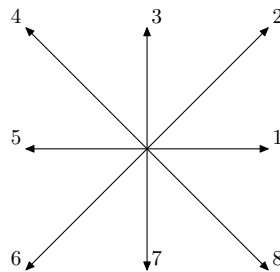
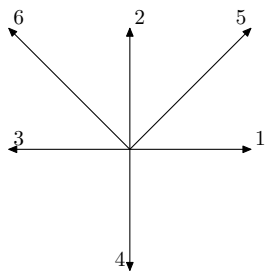
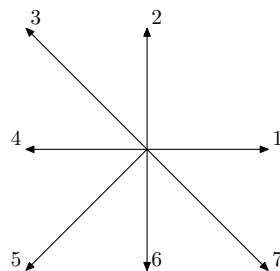
Théorème 1.3.3 (cf. Théorème 5.1.1 *infra*). *Pour la surface Y_4 , en dehors d'un fermé de Zariski, les approximations génériques se situent sur une famille de courbes rationnelles cubiques nodales et il n'existe pas de mesure limite pour le zoom critique.*

La méthode de paramétrage utilisée dans la démonstration nous permet de redémontrer un résultat que S. Pagelot avait énoncé :

Théorème 1.3.4 (Pagelot [Pag08]). — *Pour les surfaces \mathbf{P}^2 , X_1 et X_2 , en dehors d'un fermé de Zariski, la mesure limite existe et elle est de dimension de Hausdorff 1.*

— *Pour la surface $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, en dehors d'un fermé de Zariski, la mesure limite existe et elle est de dimension de Hausdorff 2.*

Remarque 1.3.5. Dans un travail à venir, nous allons étudier les surfaces Y_2 (Fig. 1.9) et Y_3 (Fig. 1.10). Il semble que sur Y_2 la mesure limite existe et elle est de dimension de Hausdorff 2 comme pour X_3 et $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, mais de densité légèrement différente. Alors que pour Y_3 , contrairement à Y_4 , les approximations génériques peuvent se trouver sur des familles de courbes nodales ou celles de courbes cuspidales. Mais ces dernières en contiennent beaucoup plus.

FIGURE 1.3 – L'éventail de \mathbf{P}^2 FIGURE 1.4 – L'éventail de X_1 FIGURE 1.5 – L'éventail de X_2 FIGURE 1.6 – L'éventail de X_3 FIGURE 1.7 – L'éventail de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ FIGURE 1.8 – L'éventail de Y_4 FIGURE 1.9 – L'éventail de Y_2 FIGURE 1.10 – L'éventail de Y_3

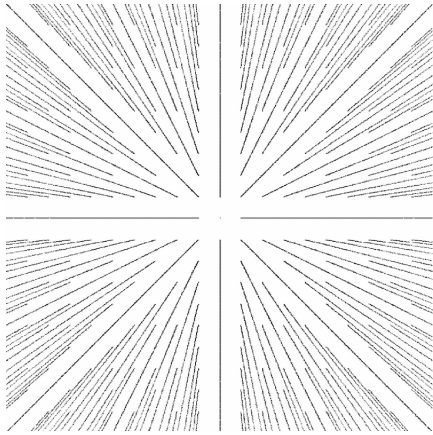


FIGURE 1.11 – Zoom sur \mathbf{P}^2

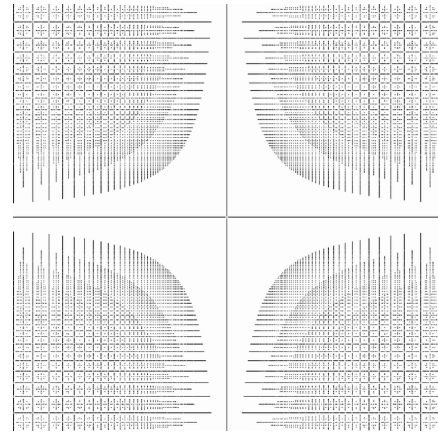


FIGURE 1.12 – Zoom sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

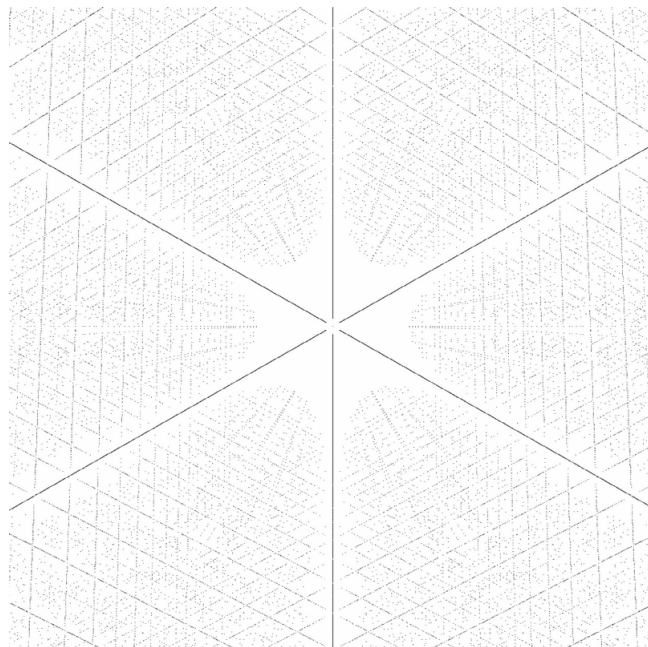


FIGURE 1.13 – Zoom sur X_3

1.4 Interprétation en terme de l'espace de module des courbes rationnelles

Les courbes rationnelles sur les variétés donnent naturellement des approximants. L'obtention de la meilleure approximation et de l'approximation générique nous amène à chercher les courbes rationnelles qui sont de degré bas et peuvent être déformées librement. La géométrie de l'espace de modules des courbes rationnelles pourrait avoir un impact sur l'approximation diophantienne sur la variété. On propose un premier regard sur l'espace $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ des morphisme de $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$ pour X une variété torique dans le chapitre 3.

D'après nos considérations, il semble qu'il y ait des conditions « nécessaires » pour l'existence de mesure limite de dimension complète.

Pour les surfaces $\mathbf{P}^2, X_1, X_2, X_3, Y_2$, considérons le nombre de composantes irréductibles de $\text{Mor}_3(\mathbf{P}^1, X)$ caractérisant les courbes rationnelles de degré anticanonique 3, qui sont en fait lisse et *très libres* de degré minimal. Pour $X = \mathbf{P}^2, X_1, X_2$ il vaut 1 mais pour $X = X_3, Y_2$ il vaut 2. Les transformations birationnelles du type Cremona dans $\text{Bir}(\mathbf{P}^2)$ préservent la hauteur choisie et échangent les courbes correspondant à ces composantes. Pour $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, il n'y a qu'une composante de $\text{Mor}_4(\mathbf{P}^1, X)$ qui caractérise les courbes rationnelles *très libres* de degré minimal (degré 4 anticanonique) mais elle est de dimension « grande ». Quant à Y_3 et Y_4 , les courbes donnant les meilleurs approximants génériques ne sont plus lisses, ce qui semble donner une obstruction à l'existence de mesure limite.

Chapitre 2

CONSTANTES D'APPROXIMATION ET OPÉRATIONS DE GROSSISSEMENT

2.1 Constantes d'approximation et constante essentielle

On définit plusieurs *constantes d'approximation* d'un point rationnel sur une variété algébrique généralisant la notion de *mesure d'irrationalité* venant de l'approximation diophantienne classique. Dans ce mémoire, nous considérons uniquement les distances archimédiennes réelles. Une définition analogue s'applique aux places non-archimédiennes. Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres k . Dans la suite, \bar{k} désigne une clôture algébrique de k . Fixons une valuation ν archimédienne. La complétion k_ν est donc \mathbf{R} ou \mathbf{C} . On peut choisir la fonction de distance projective d définie par la restriction de la fonction définie sur un plongement $X \hookrightarrow \mathbf{P}_k^n$ de manière suivante. Soient $x = [x_0 : \cdots : x_n], y = [y_0 : \cdots : y_n] \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$,

$$d_\nu(x, y) = \left(1 - \frac{|\sum_{i=0}^n x_i \bar{y}_i|^2}{(\sum_{i=0}^n |x_i|^2)(\sum_{i=0}^n |y_i|^2)} \right)^{\frac{[k_\nu, \mathbf{R}]}{2}},$$

où $|\cdot|$ est la valeur absolue usuelle sur \mathbf{C} . Les distances venant de plongements différents sont équivalentes. Plus précisément, si d'_ν est une distance induite par un autre plongement $X \hookrightarrow \mathbf{P}^m$, alors pour toute extension finie K/k , d_ν et d'_ν sont équivalentes sur $X(K_\nu) \times X(K_\nu)$ (cf. [MR15], Proposition 2.4). Localement elles équivalent aussi à

$$\min(1, \max(|a_1 - b_1|, \dots, |a_n - b_n|))$$

pour $x = (a_1, \dots, a_n), y = (b_1, \dots, b_n)$ en coordonnées affines. (cf. [MR15], Lemma 2.2-2.6.)

Soit L un fibré en droites sur X muni d'une hauteur de Weil absolue H_L . On fixe un point rationnel $Q \in X(\bar{k})$. Pour V une partie constructible de X , on considère les ensembles

$$A(Q, V) = \{\gamma > 0 \mid \exists (y_i) \in (V(k) - \{Q\})^{\mathbf{N}}, \exists C > 0, d(Q, y_i) \rightarrow 0 \text{ et } d(Q, y_i)^\gamma H_L(y_i) < C\},$$

$$B(Q, V) = \{\gamma > 0 \mid \exists C > 0, d(Q, y)^\gamma H_L(y) \geq C, \forall y \in V(k) - \{Q\}\}. \quad (2.1.1)$$

Chacun est un intervalle : si $\gamma_0 \in B(Q, V)$, tout $0 < \gamma < \gamma_0$ appartient à $B(Q, V)$; de même, si $\gamma_0 \in A(Q, V)$, tout $\gamma > \gamma_0$ appartient à $A(Q, V)$.

Définition 2.1.1. Soit U un ouvert de X . On dit que L vérifie la *propriété de Northcott* pour U si pour tout $B > 0$,

$$\#\{x \in U(k) : H_L(x) \leq B\} < \infty.$$

Proposition-Définition 2.1.2 ([MR15], Proposition 2.11). Soient $Q \in X(\bar{k})$ et V une partie constructible de X . Supposons que L vérifie la propriété de Northcott pour un ouvert de Zariski U contenant Q . Alors on a

$$\inf A(Q, U \cap V) = \sup B(Q, U \cap V).$$

Cette quantité est appelée *constante d'approximation en Q dans V* , notée $\alpha_L(Q, V) = \alpha(Q, V)$ si le fibré L est fixé dans la considération. S'il existe une sous-variété fermée Z contenue dans V tel que $\alpha(Q, Z) = \alpha(Q, V)$, on dit que $\alpha(Q, V)$ peut être calculée sur Z .

Cette définition ne dépend pas du choix de U . Dans la suite, lorsque l'on parle de la constante d'approximation, on admet que L vérifie la propriété de Northcott pour un ouvert dense contenant Q .

Définition 2.1.3 ([Pag08]). On définit la *constante essentielle* en Q comme la quantité

$$\alpha_{\text{ess } L}(Q) = \alpha_{\text{ess}}(Q) = \sup_V \alpha(Q, V) \quad (2.1.2)$$

où V parcourt tous les ouverts denses de X . S'il existe une sous-variété Z de X de sorte que pour tout ouvert dense $W \subset Z$, $\alpha(Q, W) < \alpha_{\text{ess}}(Q)$, on dit que Z est *localement accumulatrice*.

Ces notions ne dépendent ni du choix de la hauteur associée au fibré L , ni du choix de la distance projective.

Remarque 2.1.4. Puisque le problème que l'on étudie est local, on peut se restreindre à des ouverts de X . Si le fibré en droites L est gros, c'est-à-dire sa classe est dans l'intérieur du cône pseudo-effectif de X , alors il existe un entier m tel que l'application rationnelle $\Upsilon_m : X \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, L^{\otimes m}))$ est birationnelle vers son image. En particulier on peut choisir un ouvert U tel que $U \simeq \Upsilon_m(U) \subset \mathbf{P}(H^0(X, L^{\otimes m}))$ et donc

$$\#\{x \in U(k) : H_L(x) \leq B\} = \#\{y \in \Upsilon_m(U)(k) : H_{\mathcal{O}(1)}(y) \leq B\} < \infty$$

grâce au théorème de Northcott. Donc si le point à approcher est dans cet ouvert, alors la constante d'approximation est bien définie en tout point de l'ouvert.

Nous présentons des propriétés fondamentales des constantes d'approximation. Pour une démonstration, voir [MR15, Proposition 2.14].

Proposition 2.1.5. *Soient L un fibré en droites sur X et $x \in X(\bar{k})$.*

- Pour tout $m \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, on a $\alpha_{mL}(x, X) = m\alpha_L(x, X)$.
- Pour tout $a, b \in \mathbf{Q}_{>0}$ et J un fibré en droites sur X , on a $\alpha_{aL+bJ}(x, X) \geq a\alpha_L(x, X) + b\alpha_J(x, X)$.
- Pour toute sous-variété Y telle que $x \in Y(\bar{k})$, on a $\alpha_L(x, X) \leq \alpha_{L|_Y}(x, Y)$.
- Si L est ample, alors $\alpha_L(x, X) > 0$. Si L est très ample, alors $\alpha_L(x, X) \geq 1$.

Soient Y une autre variété projective et K un fibré en droites sur Y et $y \in Y(\bar{k})$.

- Si $x \notin X(k)$ et $y \notin Y(k)$, alors $\alpha_{L \boxtimes K}(x \times y, X \times Y) \geq \alpha_L(x, X) + \alpha_K(y, Y)$.
- Si $x \in X(k)$ et $y \notin Y(k)$, alors $\alpha_{L \boxtimes K}(x \times y, X \times Y) = \alpha_K(y, Y)$.
- Si $x \in X(k)$, $y \in Y(k)$, alors $\alpha_{L \boxtimes K}(x \times y, X \times Y) = \min(\alpha_L(x, X), \alpha_K(y, Y))$.

La constante α_{ess} satisfait, quant à elle, les propriétés suivantes.

Proposition 2.1.6. (i) *Soient X une variété projective et $x \in X(\bar{k})$.*

- Soit L un fibré en droites sur X avec une hauteur de Weil H_L associée. On a

$$\alpha_{\text{ess}L^{\otimes n}}(x) = n\alpha_{\text{ess}L}(x, X) \quad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

- La fonction $\alpha_{\text{ess}\cdot}(x)$ est concave. À savoir, pour deux fibrés en droites L, J sur X et pour $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, on a

$$\alpha_{\text{ess}n_1L+n_2J}(x) \geq n_1\alpha_{\text{ess}L}(x) + n_2\alpha_{\text{ess}J}(x).$$

- (ii) *Soient X, Y des variétés projectives munies de fibrés en droite amples L_1, L_2 respectivement. Soient $x \in X(\bar{k}), y \in Y(\bar{k})$. Alors on a*

$$\alpha_{\text{ess}L_1 \boxtimes L_2}(x \times y) \geq \alpha_{\text{ess}L_1}(x) + \alpha_{\text{ess}L_2}(y).$$

Démonstration. On se place d'abord sur une variété fixée X avec une distance d choisie. Le premier énoncé résulte des définitions. Pour démontrer le deuxième énoncé, on peut supposer que $n_1 = n_2 = 1$. Pour des hauteurs H_L, H_J associées à L, J , on associe la hauteur $H_{L+J} = H_L H_J$ au fibré $L+J$. Supposons que $a_1 = \alpha_{\text{ess}L}(x), a_2 = \alpha_{\text{ess}J}(x)$ sont finis. Alors tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U(\varepsilon)$ dense tel que

$$\alpha_L(x, U(\varepsilon)) \geq a_1 - \varepsilon, \quad \alpha_J(x, U(\varepsilon)) \geq a_2 - \varepsilon.$$

Prenons une suite $(x_i) \rightarrow x$ dans $U(\varepsilon)(k)$. Alors les suites

$$d(x, x_i)^{a_1 - \varepsilon} H_L(x_i) \quad \text{et} \quad d(x, x_i)^{a_2 - \varepsilon} H_J(x_i)$$

sont minorées. On en conclut donc que la suite

$$d(x, x_i)^{a_1 + a_2 - 2\varepsilon} H_{L+J}(x_i) = d(x, x_i)^{a_1 - \varepsilon} H_L(x_i) \times d(x, x_i)^{a_2 - \varepsilon} H_J(x_i)$$

est également minorée. Cela montre que $\alpha_{L+J}(x, U(\varepsilon)) \geq a_1 + a_2 - 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $\alpha_{\text{ess}L+J}(x) \geq a_1 + a_2$.

Supposons que $a_1 = \infty$ et $a_2 < \infty$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe un ouvert $U(n)$ dense tel que $\alpha_L(x, U(n)) > n$. On note $b = \alpha_J(x, U(n)) \leq a_2$. En reprenant l'argument ci-dessus on obtient que pour tout suite $(x_i) \rightarrow x$ dans $U(n)(k)$, la suite

$$d^{n+b-\varepsilon}(x, x_i) H_{L+J}(x_i)$$

n'est pas bornée. On en conclut que $\alpha_{\text{ess}L+J}(x) \geq \alpha_{L+J}(x, U(n)) \geq n + b, \forall n \in \mathbf{N}$ et donc $\alpha_{\text{ess}L+J}(x) = \infty$. Les deux cas ($a_1 < a_2 = \infty$ et $a_1, a_2 = \infty$) qui restent peuvent être vérifiés de façon analogue.

Maintenant fixons deux variétés projectives X, Y . On associe des hauteurs de Weil absolues H_1, H_2 à L_1, L_2 . On choisie les distances d_1, d_2 pour X, Y . Remarquant que les constantes d'approximation ne dépendent ni du choix de hauteur ni du choix de distance, on peut prendre la distance

$$d((s, t), (x, y)) = \max(d_1(s, x), d_2(t, y))$$

sur $X \times Y$. Une hauteur de Weil absolue associée à $L_1 \boxtimes L_2$ sur $X \times Y$ est $H(s, t) = H_1(s) H_2(t)$. Supposons que $c_1 = \alpha_{\text{ess}L_1}(x), c_2 = \alpha_{\text{ess}L_2}(y) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut prendre U_1 ouvert de X et U_2 ouvert de Y qui sont denses tels que

$$\alpha_{L_1}(x, U_1) > c_1 - \varepsilon, \quad \alpha_{L_2}(y, U_2) > c_2 - \varepsilon.$$

On considère l'ouvert dense U de $X \times Y$ défini par

$$U = (U_1 \times U_2) - (\{x\} \times Y \cup X \times \{y\}).$$

Alors pour toutes suites $(x_i) \rightarrow x$ dans $U_1(k)$ et $(y_i) \rightarrow y$ dans $U_2(k)$ avec $x_i \neq x, y_i \neq y$, la suite $(x_i \times y_i)$ est dans $U(k)$ et

$$\begin{aligned} & d((x_i, y_i), (x, y))^{c_1+c_2-2\varepsilon} H_{L_1 \boxtimes L_2}(x_i \times y_i) \\ & \geq d_1(x_i, x)^{c_1-\varepsilon} H_{L_1}(x_i) \times d_2(y_i, y)^{c_2-\varepsilon} H_{L_2}(y_i) \end{aligned}$$

est minorée. On en conclut que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\alpha_{L \boxtimes J}(x \times y, U) \geq c_1 + c_2 - 2\varepsilon.$$

et donc

$$\alpha_{\text{ess} L_1 \boxtimes L_2}(x \times y) \geq c_1 + c_2.$$

Supposons que $c_2 < c_1 = \infty$. Par abus de notation, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe U_1 ouvert dense dans X tel que $\alpha_L(x, U_1) > n$. Avec la même construction de l'ouvert U comme ci-dessus et le même raisonnement on conclut que

$$\alpha_{\text{ess} L_1 \boxtimes L_2}(x \times y) \geq \alpha_{L \boxtimes J}(x \times y, U) \geq n,$$

et d'où $\alpha_{\text{ess} L_1 \boxtimes L_2}(x \times y) = \infty$. Les autres cas se démontrent de façon analogue. \square

Toutes ces constantes sont connues en dimension 1.

Théorème 2.1.7 (Théorème de Roth, Principe de Dirichlet, [MR15] Lemma 2.15). *Soient $x \in \mathbf{P}^1(\bar{k})$ et $d \in \mathbf{N}$. Supposons que $k(x) \subset k_\nu$. On fixe une hauteur de Weil absolue associée à $\mathcal{O}(d)$. Alors*

$$\alpha(x, \mathbf{P}^1) = \begin{cases} d & \text{si } k(x) = k; \\ \frac{d}{2} & \text{si } k(x) \neq k. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Théorème 2.1.8 ([MR15] Theorem 2.16). *Soient C une courbe rationnelle définie sur k et L un faisceau inversible ample sur C . On fixe $Q \in C(\bar{k})$. Soit $\phi : \mathbf{P}^1 \rightarrow C$ le morphisme de normalisation. Alors*

$$\alpha(Q, C) = \min_{P \in \phi^{-1}(Q)} \frac{d}{m_P r_P},$$

où $d = \deg_C(L)$, m_P est la multiplicité de la branche de C passant par Q correspondant à P et

$$r(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } k(P) \not\subset k_\nu; \\ 1 & \text{si } k(P) = k; \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Ici $r_P = 0$ veut dire que $\frac{d}{m_P r_P} = \infty$, qui arrive par exemple pour $k = \mathbb{Q}$ et Q un point imaginaire $k(Q) \not\subset \mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$ qu'il est donc impossible d'approcher par des nombres rationnels.)

La constante d'approximation est donc sensible aux singularités.

C'est un fait empirique que les approximants proviennent essentiellement des courbes rationnelles. En effet D. McKinnon a proposé la conjecture suivante [McK07, Conjecture 2.7], qui prédit que $\alpha(Q, X)$ peut être calculée sur des courbes rationnelles passant par Q .

Conjecture 2.1.9 (McKinnon). *Soient L un fibré ample sur X avec une hauteur de Weil choisie et $Q \in X(k)$. Supposons qu'il y a une courbe rationnelle passant par Q (ceci implique en particulier que $\alpha(Q, X) < \infty$). Alors il existe une courbe rationnelle C telle que*

$$\alpha(Q, C) = \alpha(Q, X).$$

On utilise souvent la procédure suivante pour déterminer la constante essentielle. Elle consiste essentiellement en deux étapes : démontrer une borne inférieure uniforme valide dans un ouvert pour le produit d'une certaine puissance de la distance avec la hauteur et trouver une famille de courbes rationnelles dont la réunion dans la variété est dense pour la topologie de Zariski et chacune atteint la constante d'approximation souhaitée. Il convient de remarquer que cette procédure donne seulement une condition « suffisante » pour trouver α_{ess} . En général, il n'est pas clair que α_{ess} puisse toujours être atteinte sur une famille de courbes rationnelles.

2.2 Opération de grossissement

2.2.1 Principe de Batyrev-Manin-Peyre

Dans des années 1990, Batyrev et Manin ont conjecturé une formule qui donne une prédiction pour l'ordre de croissance du cardinal de l'ensemble des points de hauteur bornée. Concernant la distribution globale des points rationnels sur X , Peyre a ensuite reformulé et raffiné leur conjecture sous une forme intervenant des mesures, que nous énonçons comme suit. On note $k = \text{rg}(\text{Pic}(X))$, $X(\mathcal{A}_k)^{\text{Br}}$ l'ensemble des points adélique de X pour lesquels l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est triviale.

Conjecture 2.2.1. Il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel qu'en notant

$$\delta_{U,B} = \sum_{\substack{P \in U(\mathbf{Q}) \\ H(P) \leq B}} \delta_P, \quad (2.2.1)$$

on ait

$$\frac{1}{B(\log B)^{k-1}} \delta_{U,B} \longrightarrow \mu_X^{\text{Br}}, \quad B \rightarrow \infty$$

au sens de convergence faible pour certaine mesure

$$\mu_X^{\text{Br}} = \prod_{\nu \in \text{Val}(k)} \mu_\nu$$

comme produit de mesures ν -adique, définie sur $X(\mathcal{A}_k)^{\text{Br}}$.

Remarquons qu'en fait, si $v \mid \infty$, la partie ν -adique μ_ν est une mesure à densité continue relativement à la mesure de Lebesgue sur $X(k_\nu)$.

2.2.2 Formulation du grossissement

Maintenant nous allons décrire *l'opération de grossissement* (ou *zoom*) en détail. On suppose que $k \subset \mathbf{R}$ et ν est une place archimédienne réelle. On identifie localement $X(\mathbf{R})$ avec l'espace tangent $T_Q X$ en envoyant Q sur l'origine, en utilisant un système de coordonnées analytiques. Dans $T_Q X$, on définit une « contraction » par une homothétie de rapport une puissance de B (la lettre B désigne ici la borne de la hauteur). Plus précisément, si l'on note le difféomorphisme entre $X(\mathbf{R})$ et $T_Q X$ par ρ , alors *l'opérateur de zoom* $\Psi_{r,B}$ avec *le facteur* r est défini par

$$\Psi_{r,B}(P) = B^{\frac{1}{r}} \rho(P), \quad P \in X(\mathbf{R}).$$

Remarquons qu'avec cette convention, plus r est grand, plus le grossissement est faible.

Notation 2.2.2. On note $\mathcal{C}_Q^b(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de support compact définie sur $T_X Q$ à valeurs réelles.

Fixons U une sous-variété de X . Soit $f \in \mathcal{C}_Q^b(X)$, on introduit la mesure $\delta_{U,Q,B,r}$ définie par

$$\int f \, d\delta_{U,Q,B,r} = \sum_{x \in U(k): H_L(x) \leq B} f(B^{\frac{1}{r}} \rho(x)).$$

Cette définition dépend de la différentielle en l'origine du difféomorphisme choisi. On note $\mathbb{B}(0, \varepsilon)$ la boule centrée en l'origine de rayon $\varepsilon > 0$ et $\chi(\varepsilon)$ la fonction caractéristique associée. S'il existe $\gamma \geq 0, \beta \geq 0$ tels que

$$B^\gamma (\log B)^\beta \ll_\varepsilon \int \chi(\varepsilon) \, d\delta_{U,Q,B,r} \ll_\varepsilon B^\gamma (\log B)^\beta, \quad (2.2.2)$$

pour une infinité de $B \rightarrow \infty$, ils décrivent l'ordre de grandeur d'accumulation des points rationnels autour de Q . Par exemple quand on calcule $\{\int \chi(\varepsilon) \, d\delta_{U,Q,B,r}\}$, on est en train de compter des points rationnels dans la boule $\mathbb{B}(0, B^{-\frac{1}{r}} \varepsilon)$ dont le volume est de grandeur $B^{-\frac{n}{r}}$. Plus petit est le facteur r , moins de points sont dénombrés, et l'on dit que le grossissement est plus fort. Nous espérons que pour r suffisamment grand, la distribution des points rationnels respecte encore le principe de Batyrev-Manin-Peyre, à savoir que la mesure limite devrait être proportionnelle à la mesure de Lebesgue. Alors que pour r suffisamment petit, on ne trouve que le point Q dans un voisinage borné.

On peut aussi donner une prédiction naïve pour les constantes β, γ . Soit $n = \dim X$. Supposons que U est un ouvert pour la suite. Supposons la validité de la conjecture 2.2.1 pour l'ouvert U et la validité d'une forme forte de l'équidistribution, c'est-à-dire pour des voisinages analytiques dont la taille dépend de B , ce qui donnerait dans (2.2.2),

$$\begin{aligned} \int \chi(\varepsilon) d\delta_{U,Q,B,r} &= \int \chi(\varepsilon B^{-\frac{1}{r}}) d\delta_{U,B} \sim_{\varepsilon} \text{Vol}(\mathbb{B}(0, \varepsilon B^{-\frac{1}{r}})) B(\log B)^{k-1} \\ &\sim_{\varepsilon} B^{-\frac{n}{r}} \times B(\log B)^{k-1} = B^{1-\frac{n}{r}} (\log B)^{k-1}. \end{aligned}$$

Autrement dit, on devrait avoir

$$\beta = 1 - \frac{n}{r}, \quad \gamma = k - 1. \quad (2.2.3)$$

En fait, dans les exemples considérés dans ce mémoire, la valeur de β est en accord avec cette prédiction, mais celle de γ ne l'est pas. Il arrive parfois que $\beta = \gamma = 0$, comme pour la surface Y_4 . On renormalise en considérant la suite de mesures

$$\left\{ \frac{1}{B^{\gamma} (\log B)^{\beta}} \delta_{U,Q,B,r} \right\} \quad (2.2.4)$$

Le comportement de la suite (2.2.4) décrit la *distribution locale* autour du point Q sur X . On appelle *mesure limite* la limite de la suite (2.2.4) (si elle existe).

Le facteur de grossissement est étroitement lié aux constantes d'approximation. Moralement, le grossissement d'un certain facteur va mettre en évidence les sous-variétés dont la constante d'approximation atteignent ce facteur et ignorer celles dont la constante d'approximation est plus grande. Donc celui d'un facteur plus petit que α_{ess} va nous ramener à des sous-variétés fermées localement accumulatrices. Cela plus la proposition suivante explique la raison pour laquelle on s'intéresse à ceux avec un facteur $\geq \alpha_{\text{ess}}$.

Proposition 2.2.3. *Soit U une partie analytique de X pour laquelle L vérifie la propriété de Northcott telle que $\alpha(Q, U) = \alpha_{\text{ess}}(Q)$. Alors pour tout $r < \alpha_{\text{ess}}$ et $f \in \mathcal{C}_Q^b(X)$, on a*

1. $\int f d\delta_{U,Q,B,r} = f(Q)$ si $Q \in U(\bar{k})$;
2. $\int f d\delta_{U,Q,B,r} = 0$ sinon,

pour $B \gg_{f,r} 1$.

Démonstration. On peut supposer que f est une fonction caractéristique $\chi(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. On choisit une distance d sur $T_Q X$. D'après la proposition-définition 2.1.2, pour $\beta > 0$ tel que $r + \beta < \alpha_{\text{ess}}$, il existe une $C > 0$ telle que pour tout $P \in U(k)$ différent de Q , $d(\varrho(P), \varrho(Q))^{r+\beta} H_L(P) \geq C$. Supposons que $H(P) \leq B$. Cela implique que

$$d(\varrho(P), \varrho(Q)) \geq C^{\frac{1}{r+\beta}} H_L(P)^{-\frac{1}{r+\beta}} \geq C' B^{-\frac{1}{r+\beta}}.$$

Les points après zoom doivent situer dans le support de f , donc $d(\varrho(P), \varrho(Q)) B^{\frac{1}{r}} \leq \varepsilon$, d'où $d(\varrho(P), \varrho(Q)) \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}$. Donc un tel P n'existe pas quand $B > (\varepsilon(C')^{-1})^{\frac{r(r+\beta)}{\beta}}$. \square

Définition 2.2.4. On dit que le grossissement est *critique* (resp. *sous-critique*) si son facteur $r = \alpha_{\text{ess}}$ (resp. $> \alpha_{\text{ess}}$).

La dimension du support de la famille (2.2.4) pour le grossissement critique se révèle être très varié. Elle peut être n'importe quelle valeur entière entre 0 et n , ce qui rend ce cas le plus intéressant. D'après la proposition ci-dessus et la définition de α_{ess} , la répartition des approximants qu'on trouve dans les grossissements sous-critiques devraient être plus uniforme. Nous espérons donc que la dimension de Hausdorff du support de la mesure limite (si elle existe) devrait être égale à la dimension de la variété. Prenant du recul, une minoration du type

$$\frac{1}{B^{\beta} (\log B)^{\gamma}} \int \chi(\varepsilon) d\delta_{U,Q,B,r} \gg \int \chi(\varepsilon) d\tilde{\delta}_r, \quad \forall \varepsilon > 0$$

pour une mesure $\tilde{\delta}_r$ définie sur $T_Q X$ veut dire que la distribution locale est uniformément minorée par une mesure de dimension de Hausdorff égale aussi à celle de la variété, ce qui assure l'existence de « beaucoup » de points dans le zoom. C'est ce que nous allons démontrer dans le chapitre 5 pour certains zooms de la surface Y_4 .

Inspiré par le fait que certaines courbes rationnelles contiennent beaucoup plus de points que les autres dans une même variété dans l'opération de zoom, bien qu'elles aient la même constante d'approximation, nous proposons la définition suivante pour les distinguer.

Définition 2.2.5. Supposons que $\alpha_{\text{ess}}(Q) < \infty$. On dit qu'une sous-variété fermée stricte W de X est *localement faiblement accumulatrice* si $\alpha_{\text{ess}}(Q) = \alpha(Q, W)$ et qu'il existe U_1 ouvert dense de X tel que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment grand et pour tout ouvert U_2 satisfaisant à $\alpha(Q, U_2) = \alpha_{\text{ess}}(Q)$ et $U_1 \cap U_2 \cap W$ dense dans W , on ait, en notant $U = U_1 \cap U_2$,

$$\int \chi(\varepsilon) d\delta_{U-W, Q, B, \alpha_{\text{ess}}(Q)} = o\left(\int \chi(\varepsilon) d\delta_{U \cap W, Q, B, \alpha_{\text{ess}}(Q)}\right).$$

Autrement dit, les sous-variétés localement faiblement accumulatrices ne sont pas localement accumulatrices mais dominant leur complémentaire.

Puisque l'opération de grossissement nous permet de ne garder que les points généraux les plus proches d'un point donné, elle nous fournit aussi une condition suffisante pour que α_{ess} soit additive pour le produit de variétés.

Proposition 2.2.6. *On conserve les notations de la proposition 2.1.6 (ii). Supposons que $\alpha_{\text{ess}, L_1}(x)$ et $\alpha_{\text{ess}, L_2}(y)$ sont finies et qu'il existe des ouverts $U_1 \subset X, U_2 \subset Y$ tels que pour tout $r > 0$ suffisamment petit, pour toutes régions $R_1 \subset T_{\mathbf{R}}X, R_2 \subset T_{\mathbf{R}}Y$ (avec les difféomorphismes ϱ_1, ϱ_2), on ait*

$$\delta_{U_1, x, B, \alpha_{\text{ess}, L_1}(x)+r}(\chi(R_1)) \gg_{R_1} F_1(B), \quad \delta_{U_2, y, B, \alpha_{\text{ess}, L_2}(y)+r}(\chi(R_2)) \gg_{R_2} F_2(B),$$

pour certaines fonctions croissantes $F_{1,r}, F_{2,r} : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ non-bornées et pour tout B suffisamment grand. Alors on a

$$\alpha_{\text{ess}, L_1 \boxtimes L_2}(x \times y) = \alpha_{\text{ess}, L_1}(x) + \alpha_{\text{ess}, L_2}(y).$$

Démonstration. On note $a_1 = \alpha_{\text{ess}, L_1}(x), a_2 = \alpha_{\text{ess}, L_2}(y)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \delta_{U_1, x, B, a_1+r}(\chi(R_1)) &= \#A_1(U_1, R_1, a_1 + r, B), \\ \delta_{U_2, y, B, a_2+r}(\chi(R_2)) &= \#A_2(U_2, R_2, a_2 + r, B), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_1(U_1, R_1, a_1 + r, B) &= \left\{ P_1 \in U_1(k) - \{x\} \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{a_1+r}} \varrho_1(P_1) \in R_1 \\ H_{L_1}(P_1) \leq B \end{array} \right. \right\}, \\ A_2(U_2, R_2, a_2 + r, B) &= \left\{ P_2 \in U_2(k) - \{y\} \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{a_2+r}} \varrho_2(P_2) \in R_2 \\ H_{L_2}(P_2) \leq B \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

En notant $U = (U_1 \times U_2) - (\{x\} \times Y \cup X \times \{y\})$, et

$$A_3(U, R_1 \times R_2, a_1 + a_2 + 2r, B) = \left\{ P \in U(k) \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{a_1+a_2+2r}} (\varrho_1 \times \varrho_2)(P) \in R_1 \times R_2 \\ H_{L_1 \boxtimes L_2}(P) \leq B \end{array} \right. \right\},$$

on a

$$\begin{aligned} &\delta_{U, x \times y, B, a_1+a_2+2r}(\chi(R_1 \times R_2)) = \#A_3(U, R_1 \times R_2, a_1 + a_2 + 2r, B) \\ &\geq \# \left\{ P_1 \in U_1(k) - \{x\} \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{a_1+a_2+2r}} \varrho_1(P_1) \in R_1 \\ H_{L_1}(P_1) \leq B^{\frac{a_1+r}{a_1+a_2+2r}} \end{array} \right. \right\} \# \left\{ P_2 \in U_2(k) - \{y\} \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{a_1+a_2+2r}} \varrho_2(P_2) \in R_2 \\ H_{L_2}(P_2) \leq B^{\frac{a_2+r}{a_1+a_2+2r}} \end{array} \right. \right\} \\ &= \#A_1(U_1, R_1, a_1 + r, B^{\frac{a_1+r}{a_1+a_2+2r}}) \#A_2(U_2, R_2, a_2 + r, B^{\frac{a_2+r}{a_1+a_2+2r}}) \\ &= \delta_{U_1, x, B^{\frac{a_1+r}{a_1+a_2+2r}}, a_1+r}(\chi(R_1)) \delta_{U_2, y, B^{\frac{a_2+r}{a_1+a_2+2r}}, a_2+r}(\chi(R_2)) \\ &\gg_{R_1, R_2} F_1(B^{\frac{a_1+r}{a_1+a_2+2r}}) F_2(B^{\frac{a_2+r}{a_1+a_2+2r}}). \end{aligned}$$

Puisque les voisinages analytiques de la forme $R_1 \times R_2$ forment une base locale pour le point $x \times y$ sous la topologie réelle, pour tout ouvert dense V de $X \times Y$, il existe des régions R_1 et R_2 bornées telle que $((\varrho_1 \times \varrho_2)(V) \cap (R_1 \times R_2))^\circ \neq \emptyset$. Pour $n \in \mathbf{N}$ suffisamment grand tel que

$$\delta_{U_1, x, B^{\frac{a_1+r}{a_1+a_2+2r}}, a_1+r}(\chi(R_1)) \delta_{U_2, y, B^{\frac{a_2+r}{a_1+a_2+2r}}, a_2+r}(\chi(R_2)) \geq 1,$$

on peut prendre $x_n \in A_1(\pi_X(V), R_1, a_1 + r, n^{\frac{a_1+r}{a_1+a_2+2r}}), y_n \in A_2(\pi_Y(V), R_2, a_2 + r, n^{\frac{a_2+r}{a_1+a_2+2r}})$. Alors $x_n \times y_n \in A_3(V, R_1 \times R_2, a_1 + a_2 + 2r, n)$. La suite $(x_n \times y_n)_n \rightarrow x \times y$ et vérifie $\alpha_{L \boxtimes J}(x \times y, \{x_n \times y_n\}) \leq a_1 + a_2 + 2r$. On a donc

$$\alpha_{L \boxtimes J}(x \times y, V) \leq \alpha_{L \boxtimes J}(x \times y, (x_n \times y_n)) \leq a_1 + a_2 + 2r.$$

Cela démontre que les approximants ayant la constante d'approximation $\leq a_1 + a_2 + 2r$ sont denses dans $X \times Y$ et donc

$$\alpha_{\text{ess}, L_1 \boxtimes L_2}(x \times y) \leq a_1 + a_2.$$

L'énoncé (ii) de la proposition 2.1.6 nous permet de conclure. \square

La proposition suivante implique que la mesure limite est compatible en quelque sorte avec le produit de variétés.

Proposition 2.2.7. *Soit X (resp. Y) une variété projective de dimension n_1 (resp. n_2) munie d'un fibré en droites L_1 (resp. L_2) nef et gros avec H_1 (resp. H_2) une hauteur de Weil associée et d_1 (resp. d_2) une fonction de distance. Soient $Q_1 \in X(k), Q_2 \in Y(k)$ les points à approcher. Supposons qu'il existe des ouverts $U_1 \subset X, U_2 \subset Y$ tels que*

$$\alpha_1 = \alpha_{\text{ess}, L_1}(Q_1) = \alpha_{L_1}(Q_1, U_1) < \infty, \quad \alpha_2 = \alpha_{\text{ess}, L_2}(Q_2) = \alpha_{L_2}(Q_2, U_2) < \infty.$$

Supposons de plus qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tous $P_1 \in U_1(k) - \{Q_1\}, P_2 \in U_2(k) - \{Q_2\}$,

$$d_1(P_1)^{\alpha_1} H_1(P_1) \geq C_1, \quad d_2(P_2)^{\alpha_2} H_2(P_2) \geq C_2. \quad (2.2.5)$$

Si les mesures limite existent dans les zooms critiques de X en Q_1 pour l'ouvert U_1 et de Y en Q_2 pour l'ouvert U_2 d'ordre de grandeur espéré, i.e. il existe des mesures μ_1 (resp. μ_2) définie sur $T_{Q_1}(X_1)_{\mathbf{R}}$ (resp. $T_{Q_2}(X_2)_{\mathbf{R}}$) et $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que pour toute $f \in \mathcal{C}_{Q_1}^b(X), g \in \mathcal{C}_{Q_2}^b(Y)$, on a

$$\begin{aligned} \delta_{U_1, Q_1, B, \alpha_1}(f) &= B^{1 - \frac{n_1}{\alpha_1}} (\log B)^{\lambda_1} \left(\int f d\mu_1 + o(1) \right), \\ \delta_{U_2, Q_2, B, \alpha_2}(g) &= B^{1 - \frac{n_2}{\alpha_2}} (\log B)^{\lambda_2} \left(\int g d\mu_2 + o(1) \right), \end{aligned}$$

alors pour l'ouvert $U = U_1 \times U_2 \subset X \times Y$, le zoom critique pour $X \times Y$ avec la distance naturelle $d = \max(d_1, d_2)$ et la hauteur $H = H_1 H_2$ en $Q = Q_1 \times Q_2$ vérifie que pour $h \in \mathcal{C}_Q^b(X \times Y)$ positive,

$$\delta_{U, Q, B, \alpha_1 + \alpha_2}(h) \gg_{\ll h} B^{1 - \frac{n_1 + n_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} (\log B)^{\lambda_1 + \lambda_2} \int h d(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

Démonstration. On peut supposer que $h = \chi(V_1 \times V_2)$ est une fonction caractéristique du produit des voisinages $V_1 \subset T_{Q_1}(X_1)_{\mathbf{R}}, V_2 \subset T_{Q_2}(X_2)_{\mathbf{R}}$ bornés de diamètre $\leq \varepsilon$. Tout d'abord comme dans la démonstration de la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} &\delta_{U, Q, B, \alpha_1 + \alpha_2}(\chi(V_1 \times V_2)) \\ &\geq \delta_{U_1, Q_1, B^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \alpha_1}(\chi(V_1)) \times \delta_{U_2, Q_2, B^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \alpha_2}(\chi(V_2)) \\ &= B^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} (1 - \frac{n_1}{\alpha_1})} (\log B)^{\lambda_1} \int \chi(V_1) d\mu_1 \times B^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (1 - \frac{n_2}{\alpha_2})} (\log B)^{\lambda_2} \int \chi(V_2) d\mu_2 \\ &= B^{1 - \frac{n_1 + n_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} (\log B)^{\lambda_1 + \lambda_2} \int \chi(V_1 \times V_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2). \end{aligned}$$

La condition de zoom implique que si $(P_1, P_2) \in U(k)$ vérifie

$$d((P_1, P_2)) = \max(d_1(P_1), d_2(P_2)) \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}},$$

on a, compte tenu des hypothèses (2.2.5),

$$H_1(P_1) \geq C_1 d_1(P_1)^{-\alpha_1} \geq C_1 \varepsilon^{-\alpha_1} B^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}},$$

et

$$H_2(P_2) \geq C_2 \varepsilon^{-\alpha_2} B^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}.$$

D'où on déduit la majoration

$$\begin{aligned} &\delta_{U, Q, B, \alpha_1 + \alpha_2}(\chi(V_1 \times V_2)) \\ &\leq \# \left\{ P_1 \in U_1(k) - \{Q_1\} \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \varrho_1(P_1) \in V_1 \\ H_1(P_1) \leq C_2^{-1} \varepsilon^{\alpha_2} B^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \end{array} \right. \right\} \# \left\{ P_2 \in U_2(k) - \{Q_2\} \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \varrho_2(P_2) \in V_2 \\ H_2(P_2) \leq C_1^{-1} \varepsilon^{\alpha_1} B^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \end{array} \right. \right\} \\ &\ll_{\varepsilon, C_i} B^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} (1 - \frac{n_1}{\alpha_1})} (\log B)^{\lambda_1} \int \chi(V_1) d\mu_1 \times B^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (1 - \frac{n_2}{\alpha_2})} (\log B)^{\lambda_2} \int \chi(V_2) d\mu_2 \\ &= B^{1 - \frac{n_1 + n_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} (\log B)^{\lambda_1 + \lambda_2} \int \chi(V_1 \times V_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.8. Même si la mesure limite existe pour le produit $X \times Y$, elle n'est pas forcément la mesure produit. En général il y a d'autres fonctions arithmétiques qui interviennent.

Si la variété X contient très peu de courbes rationnelles, dans l'esprit de la conjecture de McKinnon (Conjecture 2.1.9), il devrait exister peu d'approximants pour les point rationnels.

Proposition 2.2.9 (cf. [McK07], p. 302). *Supposons que la dimension de Kodaira de la variété X est positive, et que X vérifie la conjecture de Vojta ([Voj87], cf. [McK07], Conjecture 4.1) alors pour L un fibré en droites gros et pour tout $Q \in X(k)$, $\alpha_{\text{ess}L}(Q) = +\infty$.*

2.3 Minorations générales des constantes d'approximation

Démontrer une borne inférieure pour les constante d'approximation signifie la non-existence d'approximants de meilleure qualité. À cette fin souvent on démontre une minoration uniforme du produit d'une puissance convenable de la distance avec la hauteur, ceci étant une condition plus forte. Quand X est munie d'une fibré en droites ample, la constante d'approximation admet des minorations se déduisant de celles des espaces projectifs.

Soient X une variété algébrique irréductible définie sur un corps de nombres k , ν une place de k , L un fibré en droites ample et $Q \in X(\bar{k})$. On choisit une place ω plongeant ν sur $k(Q)$ et l'on note $d = [k(Q) : k]$ le degré du corps de définition de Q et $d_\nu = [k(Q)_\omega : k_\nu]$.

Proposition 2.3.1 (McKinnon-Roth [MR15], Propositions 2.12, 2.14). *Pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que mL définisse un plongement $X \hookrightarrow \mathbf{P}_k^n$, on a*

$$\alpha_{L,\nu}(Q, X) \geq \frac{\alpha_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(1),\nu}(Q, \mathbf{P}_k^n)}(Q, \mathbf{P}_k^n)}{m} \geq \frac{d_\nu \alpha_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_{k(x)}(1),\omega}(Q, \mathbf{P}_{k(x)}^n)}(Q, \mathbf{P}_{k(x)}^n)}{dm} \geq \frac{d_\nu}{md}.$$

Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X_{k(Q)}$ l'éclatement du point Q avec E le diviseur exceptionnel. Pour $\gamma > 0$ rationnel, on définit le \mathbf{Q} -fibré en droites $L_\gamma = \pi^*L - \gamma E$ et la constante

$$\gamma_{\text{eff},L} = \sup\{\gamma \in \mathbf{Q}_{>0} : L_\gamma \text{ est effectif}\}.$$

Rappelons que la constante de Seshadri (pour L et Q) est définie par

$$\varepsilon_L(Q) = \inf_{Q \in C \subseteq X} \frac{\langle L, C \rangle}{\text{mult}_Q C}$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes intègres C passant par Q . D'après [LM09, Proposition 5.1.5], on a

$$\varepsilon_L(Q) = \sup\{\gamma \in \mathbf{Q}_{>0} : L_\gamma \text{ est nef}\}.$$

Donc on a

$$\gamma_{\text{eff},L} \geq \varepsilon_L(Q).$$

La seule minoration non-triviale valide pour les variétés algébriques générales est due à McKinnon et Roth. Cette minoration est purement en terme de la constante de Seshadri et indépendante de la place ν et du corps de définition du point à approcher.

Théorème 2.3.2 (McKinnon-Roth [MR15], Theorem 6.3). *On a*

$$\alpha_{L,\nu}(Q, X) \geq \frac{1}{2} \varepsilon_L(Q),$$

l'égalité étant vérifiée si et seulement s'il existe une courbe C définie sur k telle que

- $\alpha_L(Q, X) = \alpha_{L|_C}(Q, C)$, $\varepsilon_{L,X}(Q) = \varepsilon_{L|_C,C}(Q)$;
- C est unibranchée en Q ;
- $k \subsetneq k(Q) \subset k_\nu$.

Dans [MR16], McKinnon et Roth ont démontré une borne inférieure de la constante d'approximation en dehors d'un fermé de Zariski. Par conséquent, cela nous fournit une borne inférieure pour la constante essentielle.

Théorème 2.3.3 (McKinnon-Roth [MR16], Theorem 3.3). *Pour tout $\gamma \in \mathbf{Q}_{>0}$ vérifiant $\gamma < \gamma_{\text{eff},L}$, il existe un fermé strict B_γ de X , qui est l'image du lieu de base stable du fibré L_γ , et une constante $M_\gamma > 0$ tels que pour tout $y \in X(k) - (B_\gamma(k) \cup \{Q\})$, on ait*

$$d_\nu(Q, y)^{\frac{\gamma}{d}} H_L(y) \geq M_\gamma.$$

Par conséquent, on a $\alpha_{L,\nu}(Q, X - B_\gamma) \geq \frac{\gamma}{d}$, et

$$\alpha_{\text{ess } L,\nu}(Q) \geq \sup_{0 < \gamma < \gamma_{\text{eff},L}} \alpha_{L,\nu}(Q, X - B_\gamma) \geq \frac{\gamma_{\text{eff},L}}{d}.$$

Remarque 2.3.4. La constante $\gamma_{\text{eff},L}$ apparaît naturellement dans la définition du *corps d'Okounkov infinitésimal* [LM09, Theorem 6.4], en terme duquel elle admet donc une minoration.

Chapitre 3

VARIÉTÉS TORIQUES

On étudie dans ce chapitre l'approximation diophantienne sur les variétés toriques générales. La première partie est consacrée à la géométrie des variétés toriques. Dans la seconde partie, on introduit la notion du torseur universel, qui nous permet de relever les points rationnels et les courbes rationnelles en des données entières combinatoires. Dans la troisième partie on est concernée par l'espace de module des courbes rationnelles. Celles de plus petit degré qui sont libres fournissent une majoration pour la constante d'approximation et une condition pour qu'elle soit atteinte est donnée. Celles qui sont très libre fournissent une majoration pour la constante essentielle et un critère pour caractériser le fait d'être très libre est donné. Dans la quatrième partie, on examine plus soigneusement les variété toriques particulières dont le rang du groupe de Picard est 2 grâce à la classification de Kleinschmidt.

3.1 Préliminaire sur les variétés toriques

Nous adoptons les notations standards des variété toriques. Nous renvoyons le lecteur aux excellents livres de Fulton [Ful93] et Cox [CLS11] pour leur propriétés basiques. Étant donné un réseau $N \simeq \mathbf{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, on note $M = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ le réseau dual et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'accouplement canonique.

Définition 3.1.1. Un *cône polyédrique* σ dans $N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^n$ est un ensemble de la forme $\mathbf{R}_{\geq 0}\xi_1 + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0}\xi_k$ où $\xi_i, 1 \leq i \leq k$ sont des vecteurs de N .

Définition 3.1.2. Un *éventail* Δ est un ensemble de cônes polyédriques dans $N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Pour tout cône $\sigma \in \Delta$, $\mathbf{0} \in \sigma$;
2. Toute face d'un cône $\sigma \in \Delta$ est aussi un cône de Δ ;
3. L'intersection de deux cônes de Δ est une face de chacun de ces deux cônes.

L'éventail est dit

- *complet* si $|\Delta| = \cup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$;
- *régulier* si tout cône est engendré par une famille de vecteurs du réseau N qui peut être complétée en une base de N .

Définition 3.1.3. Étant donné un cône σ , le *cône dual* σ^\vee de σ est l'ensemble des $\chi \in M_{\mathbf{R}}$ tels que pour tout $\xi \in \sigma$, $\langle \chi, \xi \rangle \geq 0$.

Chaque cône $\sigma \in \Delta$ définit un monoïde $S_\sigma = M \cap \sigma^\vee$ ainsi qu'une variété affine $U_\sigma = \text{Spec}(k[S_\sigma])$. Si σ_1, σ_2 sont deux cônes tels que $\sigma_1 \subset \sigma_2$, alors on a $\sigma_2^\vee \subset \sigma_1^\vee$ et donc $S_{\sigma_2} \subset S_{\sigma_1}$. Cela induit une immersion ouverte $\text{Spec}(k[S_{\sigma_1}]) \hookrightarrow \text{Spec}(k[S_{\sigma_2}])$. La variété torique $X(\Delta)$ est construite à partir de ces données combinatoires en recollant tous les U_σ suivants les $U_{\sigma_i \cap \sigma_j}$.

On considère une variété torique $X = X(\Delta)$ lisse et projective de dimension n définie par un éventail Δ complet et régulier. On note $T = \text{Spec}(k[M]) \simeq \mathbf{G}_m^n$. On a donc que l'ensemble des caractères (resp. co-caractères) $X_*(T) \simeq N$ (resp. $X^*(T) \simeq M$). On pose $r = \text{rg}_{\mathbf{Z}} \text{Pic}(X)$, et on note Δ_{\max} l'ensemble des cônes maximaux (c'est-à-dire les cônes de dimension n) et $\Delta(1) = \{\varrho_1, \dots, \varrho_{n+r}\}$ l'ensemble des vecteurs primitifs des rayons (c'est-à-dire les cônes de dimension 1) dans Δ . Ils correspondent aux diviseurs invariants D_1, \dots, D_{n+r} de X . Rappelons que dans $\text{Pic}(X)$,

$$\overline{\text{Eff}}(X) = \sum_{i=1}^{n+r} \mathbf{N}D_i, \quad \omega_X = - \sum_{i=1}^{n+r} D_i.$$

Pour chaque diviseur $D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i$, le *polyèdre associé* est

$$P_D = \{\chi \in M : \langle \chi, \varrho_i \rangle \geq -a_i, \forall i\}.$$

La fonction $\phi_D : N_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ linéaire par morceau associée est définie par

$$\phi_D(\varrho) = \inf_{\chi \in P_D} \langle \chi, \varrho \rangle.$$

Elle est calculée de la manière suivante. Pour tout $\varrho \in N_{\mathbf{R}}$, il existe un cône maximal σ contenant ϱ . Sur l'ouvert U_σ , le fibré $\mathcal{O}_X(D)$ est engendré par un élément $\chi(\sigma) \in M$, alors $\phi_D(\varrho) = \langle \chi(\sigma), \varrho \rangle$ ne dépend pas du choix de

$\chi(\sigma)$. Donc ϕ_D est linéaire sur chaque cône maximal. En particulier on a $\phi_D(\varrho_i) = -a_i, \forall i$. La fonction ϕ_D est dite *convexe* (resp. *strictement convexe*) si pour tout $\varrho, \tau \in N_{\mathbf{R}}$, on a

$$\phi_D(\varrho + \tau) \geq \phi_D(\varrho) + \phi_D(\tau),$$

(resp.

$$\phi_D(\varrho + \tau) > \phi_D(\varrho) + \phi_D(\tau),$$

si ϱ, τ ne sont pas tous les deux dans un cône maximal.) La fonction ϕ_D caractérise en effet la positivité du diviseur D .

Théorème 3.1.4 (cf. [Ful93] p. 68, p. 70.). *Le fibré $\mathcal{O}_X(D)$ est engendré par ses sections globales (resp. ample) si et seulement si ϕ_D est convexe (resp. strictement convexe).*

Théorème 3.1.5 (cf. [CLS11] Proposition 6.3.11, Theorem 6.3.12.). *Un fibré en droites est engendré par ses sections globales si et seulement s'il est nef.*

Remarque 3.1.6. Le polytope $P_{\omega_X^{-1}}$ associé à ω_X^{-1}

$$P_{\omega_X^{-1}} = \{\chi \in M : \langle \chi, \varrho_i \rangle \geq -1, \forall i\}$$

est le *polytope polaire* de X (cf. [Ful93] §3.4 p. 25), qui contient l'origine. En outre le fibré ω_X^{-1} est sans lieu de base sur l'orbite ouverte, sur lequel la propriété de Northcott est donc vérifiée.

Définition 3.1.7. On appelle *relation* toute égalité $\mathcal{P} : \sum_i a_i \varrho_i = 0, a_i \in \mathbf{Z}$. On note $\mathcal{P}(1) \subset \Delta(1)$ des rayons ϱ_i tels que $a_i \neq 0$. Elle est dite *positive* si tous les coefficients a_i sont positifs.

Rappelons que l'on a la suite exacte de \mathbf{Z} -modules (cf.)

$$0 \longrightarrow X^*(T) \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Delta(1)} \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow 0. \quad (3.1.1)$$

L'équivalence algébrique et l'équivalence rationnelle coïncidant sur les variétés torique (cf. [CLS11, Proposition 6.3.15]), on peut identifier $\text{Pic}(X)$ avec $\text{NS}(X)$. On note $N_1(X)$ le groupe des 1-cycles modulo les équivalences algébriques. Par dualité, on a

$$0 \longrightarrow N_1(X) \xrightarrow{f} \mathbf{Z}^{\Delta(1)} \xrightarrow{g} X_*(T) \longrightarrow 0. \quad (3.1.2)$$

Pour une courbe C dans X , l'application f est donnée par

$$f([C]) = (\langle D_i \cdot C \rangle)_i \in \mathbf{Z}^{\Delta(1)}.$$

Pour $(a_i)_i \in \mathbf{Z}^{\Delta(1)}$,

$$g((a_i)_i) = \sum_{i=1}^{n+r} a_i \rho_i.$$

Ainsi le groupe $N_1(X)$ est en bijection avec les relations centrées.* De plus, si une courbe C correspond à un élément $(a_i)_i \in \mathbf{Z}^{\Delta(1)}$, alors $\langle D_i \cdot C \rangle = a_i$.

Une première observation est qu'à l'aide de l'action du tore T , on peut faire bouger des objets en un point de l'orbite ouverte sur un autre point. Cela nous permet de ramener tout point de l'orbite ouverte au point de complexité le plus simple $Q_0 = (1, \dots, 1)$.

Proposition 3.1.8. *Les constantes $\alpha_L(Q, X), \alpha_{\text{ess}L}(Q)$ ne dépendent pas du point Q dans l'orbite ouverte.*

Démonstration. On fixe un cône maximal σ et l'ouvert U_σ . Il suffit de démontrer que

$$\alpha_L(Q, X) = \alpha_L(Q_0, X), \quad \alpha_{\text{ess}L}(Q) = \alpha_{\text{ess}L}(Q_0).$$

Pour $Q_0 = (1, \dots, 1)$. Soit $\lambda \in \mathbf{G}_m^n$ tel que $\lambda \cdot Q_0 = Q$. Puisque $d_\nu(\lambda P, Q) \simeq d_\nu(P, Q_0)$ pour P proche de Q_0 et que $\lambda \cdot D_i = D_i$, on a l'équivalence des hauteurs $H_{\lambda \cdot L} \simeq H_L$. On en conclut que

$$\alpha_L(Q, X) \leq \alpha_L(Q_0, X), \quad \alpha_{\text{ess}L}(Q) \leq \alpha_{\text{ess}L}(Q_0).$$

Réciproquement il suffit de noter que $Q_0 = \lambda^{-1}Q$. □

*. Dans la suite, il nous arrivera d'identifier un élément de $N_1(X)$ avec la relation correspondante. Quand on parlera de combinaison linéaire des relations, il s'agira de la combinaison linéaire d'éléments de $N_1(X)$.

3.2 Torseur universel

La notion du toseur universel fut introduite en premier par Colliot-Thélène et Sansuc [CS87] pour des variétés rationnelles. Pour les variétés toriques elle a reçu une description explicite grâce aux travaux de Cox [Cox95b] et de Salberger [Sal98]. Par simplicité, on ne considère que les variétés toriques déployées sur le corps de base.

3.2.1 Relèvement des points rationnels

Considérons la suite exacte des tores déployés correspondant à la suite exacte de \mathbf{Z} -modules (3.1.1)

$$1 \longrightarrow T_{\text{NS}} \longrightarrow \mathbf{G}_m^{\Delta(1)} \longrightarrow T \longrightarrow 1. \quad (3.2.1)$$

On considère l'ouvert de l'espace affine $\mathcal{A}^{\Delta(1)}$ avec les coordonnées $(X_i)_{i \in \Delta(1)}$:

$$\mathcal{T} = \mathbb{A}^{\Delta(1)} - \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \subset \Delta(1) \\ \bigcap_{i \in \mathcal{P}} D_i = \emptyset}} \left(\bigcap_{i \in \mathcal{P}} (X_i = 0) \right) = \mathbb{A}^{\Delta(1)} - \left(\bigcap_{\sigma \in \Delta_{\max}} \left(\prod_{i \notin \sigma(1)} X_i = 0 \right) \right) \quad (3.2.2)$$

qui contient le tore $\mathbf{G}_m^{\Delta(1)}$. Alors on a que X est isomorphe au quotient géométrique $\mathcal{T} // T_{\text{NS}}$. Étant donné un cône maximal σ engendré par $\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$, les autres éléments de $\Delta(1)$ s'écrivent

$$\rho_{n+j} = - \sum_{i=1}^n a_{i,j} \rho_i, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (3.2.3)$$

On note $\{\varrho_1^\vee, \dots, \varrho_n^\vee\}$ la base duale de M . L'application $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} // T_{\text{NS}} \simeq X$ s'écrit dans les coordonnées de $\mathbb{A}^{\Delta(1)}$:

$$\begin{aligned} \pi : \pi^{-1}U_\sigma &\longrightarrow U_\sigma \\ (X_1, \dots, X_{n+r}) &\longmapsto \left(\prod_{j=1}^{n+r} X_j^{\langle \varrho_i^\vee, \varrho_j \rangle} \right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\frac{X_1}{\prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{1,j}}}, \dots, \frac{X_n}{\prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{n,j}}} \right). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

On définit une distance entre le point $Q_0 = (1, \dots, 1)$ et $P = \pi(X_0, \dots, X_{n+r})$,

$$d_\nu(P) = \max_i d_{i,\nu}(Q_0, P) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| 1 - \frac{X_i}{\prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{i,j}}} \right|_\nu. \quad (3.2.5)$$

Supposons que le corps de base est \mathbf{Q} . Un point rationnel P sur X est, par définition, un morphisme $\text{Spn}(\mathbf{Q}) \rightarrow X$. Puisque X est complète, $X(\mathbf{Q}) = X(\mathbf{Z})$. D'après la suite exacte 3.2.1, on a la suite exacte longue de groupe de cohomologie

$$0 \rightarrow T_{\text{NS}}(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{Z}) \rightarrow X(\mathbf{Z}) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\text{Spec}(\mathbf{Z}), T_{\text{NS}}),$$

l'obstruction à relever P un en point entier sur \mathcal{T} est contrôlé par le groupe $H_{\text{ét}}^1(\text{Spec}(\mathbf{Z}), T_{\text{NS}}) = 0$ car le tore T_{NS} est supposé déployé sur \mathbf{Z} . Donc à $T_{\text{NS}}(\mathbf{Z})$ près il existe un relèvement de P sur $\mathcal{T}(\mathbf{Z})$. En terme des coordonnées, un \mathbf{Z} -point (X_1, \dots, X_n) satisfait aux conditions équivalentes

$$\left(\forall \mathcal{P} \subset \Delta(1), \bigcap_{i \in \mathcal{P}} D_i = \emptyset \implies \text{pgcd}_{i \in \mathcal{P}}(X_i) = 1 \right) \Leftrightarrow \text{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}} \left(\prod_{i \notin \sigma(1)} X_i \right) = 1. \quad (3.2.6)$$

3.2.2 Relèvement des courbes rationnelles

De manière équivalente, une courbe rationnelle est un $k[T]$ -point de X , et l'on a aussi

$$H_{\text{ét}}^1(\text{Spec}(k[T]), T_{\text{NS}}) = 0.$$

Donc une courbe rationnelle est représentée par une famille de polynômes homogènes $(f_i(u, v))_{1 \leq i \leq n+r}$ vérifiant que

$$\forall \mathcal{P} \subset \Delta(1), \bigcap_{i \in \mathcal{P}} D_i = \emptyset \implies \text{pgcd}_{i \in \mathcal{P}}(f_i(u, v)) = 1. \quad (3.2.7)$$

Une autre description, qui est un cas particulier de la functorialité des variétés toriques [Cox95a], donne explicitement le relèvement des morphismes $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$. Soit S un k -schéma. Donner un k -morphisme $f : S \rightarrow X$ équivaut à donner, à multiplication par un élément de $H^0(S, \mathcal{O}_S^*)$ près,

- une famille $(L_i, s_i)_{i=1}^{n+r}$ où L_i sont des fibrés en droites sur S et s_i une section globale de L_i vérifiant la condition de non-nullité (analogue à (3.2.2), (3.2.6), (3.2.7)) :

$$\forall \mathcal{P} \subset \Delta(1), \bigcap_{\varrho_i \in \mathcal{P}} D_i = \emptyset \implies \bigcap_{\varrho_i \in \mathcal{P}} (s_i = 0) = \emptyset. \quad (3.2.8)$$

- une famille d'isomorphismes $(d_m)_{m \in M}$:

$$d_m : \bigotimes_{i=1}^{n+r} L_i^{\otimes \langle m, \rho_i \rangle} \simeq \mathcal{O}_S, \quad d_m \otimes d_{m'} = d_{m+m'}.$$

Dans ce cas on a

$$L_i \simeq f^* \mathcal{O}_X(D_i),$$

et s_i est le tiré en arrière d'une section de $\mathcal{O}_X(D_i)$. Les sections (s_1, \dots, s_{n+r}) définissent un morphisme $\tilde{f} : S \rightarrow \mathcal{T}$ dépendant du choix d'éléments de $H^0(S, \mathcal{O}_S)$. En composant avec le morphisme de quotient $\pi : \mathcal{T} \rightarrow X$, on obtient un morphisme $\pi \circ \tilde{f} : S \rightarrow X$.

Quand $S = \mathbf{P}^1$, on peut supposer $L_i = \mathcal{O}(d_i)$ avec $d_i = \langle D_i, f(S) \rangle \in \mathbf{Z}$ et, pour $d_i > 0$, s_i un polynôme de degré d_i en deux variables (vérifiant la condition de non-nullité 3.2.8). On choisit une base de rayons $\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}$ de N et on écrit

$$\varrho_{n+j} = - \sum_{i=1}^n a_{i,j} \varrho_i.$$

Alors la deuxième condition avec $\varrho_1^\vee, \dots, \varrho_n^\vee \in M$ dit que

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \left(d_i - \sum_{j=1}^r a_{i,j} d_{n+j} \right) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

qui implique que

$$d_i - \sum_{j=1}^r a_{i,j} d_{n+j} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n+r} d_i \rho_i = \sum_{i=1}^n d_i \varrho_i - \sum_{j=1}^r d_{n+j} \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \varrho_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(d_i - \sum_{j=1}^r a_{i,j} d_{n+j} \right) \varrho_i = 0 \quad (3.2.9)$$

et l'image de \mathbf{P}^1 pour les sections s_i génériquement choisies, est une courbe rationnelle dont la classe dans $\text{NS}(X)$ correspond à la relation centrée (3.2.9) (pas nécessairement positive) ci-dessus. Si cette relation est positive, alors la courbe intersecte proprement les diviseurs au bord. En résumé, on a démontré que

Proposition 3.2.1. *Les relations positives représentent des morphismes $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$ non-constants dont l'image rencontre l'orbite ouverte.*

3.2.3 Hauteur sur les variétés toriques

Désormais on considère les variétés torique déployées définies sur \mathbf{Q} . Dans cette section on calcule la hauteur de Weil associée aux fibrés en droites définie de la manière suivante. Supposons que

$$D = \sum_{i=1}^{n+r} a_i D_i, \quad a_i \geq 0$$

dont le fibré associé $\mathcal{O}_X(D)$ est engendré par ses sections globales.

Définition 3.2.2. Une hauteur d'Arakelov est la donnée $(\mathcal{O}_X(D), (\|\cdot\|_\nu)_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})})$ où la famille $(\|\cdot\|_\nu)_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})}$ est une métrique adélique au sens suivant : il existe un ensemble fini $S \subset \text{Val}(\mathbf{Q})$, un modèle projectif \mathcal{X} de X et un modèle \mathcal{L} de L sur \mathcal{O}_S de sorte que pour tout $\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q}) - S$, pour tout $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$ qui se relève en $P_0 \in \mathcal{X}(\mathbf{Z}_\nu)$, $\widehat{P}_0 : \text{Spec}(\mathbf{Z}_\nu) \rightarrow \mathcal{X}$, en choisissant un générateur s_0 du \mathcal{O}_ν -fibré inversible $\widehat{P}_0^*(\mathcal{L})$ de manière que, pour tout $s \in L_P - \{0\}$, il existe $e_s \in k(P)^*$ tel que $s = e_s s_0$, la norme $\|\cdot\|_P$ sur $L_P = L \otimes k(P)$ soit définie par la formule

$$\|s\| = |e_s|_\nu = \left| \frac{s}{s_0} \right|_\nu.$$

Soient $\sigma \in \Delta_{\max}$ et χ^σ l'unique caractère engendrant $\mathcal{O}_X(D)$ sur U_σ qui se relève aussi une section globale de $\mathcal{O}_X(D)$.

Proposition-Définition 3.2.3 ([Sal98], Proposition 9.8). Fixons $\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})$. Soit $P \in X(\mathbf{Q}_\nu)$. Pour $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ définie en P , on pose

$$\|s(P)\|_{D, \nu} = \inf_{\sigma \in \Delta_{\max}} \left| \frac{s(P)}{\chi^\sigma(P)} \right|.$$

On définit la hauteur d'Arakelov $H_D : X(\mathbf{Q}) \rightarrow]0, \infty[$ associée à D par la formule

$$H_D(P) = \prod_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})} \|s(P)\|_{D, \nu}^{-1},$$

où s est une section définie en P telle que $s(P) \neq 0$. Cette expression ne dépend que la classe de D dans $\text{Pic}(X)$ pour $P \in \mathcal{T}(\mathbf{Q})$.

Pour $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_{n+r}) \in \mathbf{G}_m^{\Delta(1)}(\mathbf{Z})$, on utilise la notation

$$\mathbf{x}^D = \prod_{i=1}^{n+r} X_i^{a_i}.$$

Posons pour $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0} \varrho_1 + \dots + \mathbf{R}_{\geq 0} \varrho_n \in \Delta_{\max}$, (avec les notations (3.2.3)) $m(\sigma) = \sum_{i=1}^n a_i \varrho_i^\vee$ et

$$D(\sigma) = D + \sum_{i=1}^{n+r} \langle -m(\sigma), \varrho_i \rangle D_i.$$

C'est un diviseur effectif linéairement équivalent à D à support dans $\cup_{i \notin \sigma(1)} D_i$, de plus toutes les puissances de $\mathbf{x}^{D(\sigma)}$ sont positives.

Proposition 3.2.4 (Salberger). Soit $P \in X(\mathbf{Q})$ qui se relève en $P_0 \in \mathcal{T}(\mathbf{Z})$. Alors

$$H_D(P) = \sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\mathbf{x}^{D(\sigma)}(P_0)|_\infty. \quad (3.2.10)$$

Démonstration. La preuve suit les lignes de celles des Propositions 10.14 et 11.3 dans [Sal98]. Le point est que, si $P_0 = (X_1, \dots, X_{n+r})$, comme

$$\text{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}} \left(\prod_{i \notin \sigma(1)} X_i \right) = 1 \implies \text{pgcd}_{\sigma \in \Delta_{\max}} (\mathbf{x}^{D(\sigma)}) = 1,$$

on a

$$\sup_{\sigma \in \Delta_{\max}} |\mathbf{x}^{D(\sigma)}|_\nu = 1$$

pour toute place ν finie. □

Proposition 3.2.5. Localement au un voisinage de Q_0 , pour la topologie réelle, on a que, pour $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_{n+r}) \in \mathbf{G}_m^{\Delta(1)}(\mathbf{Z})$ et pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$,

$$|\mathbf{x}^{D(\sigma)}| \sim \left| \prod_{i=1}^{n+r} X_i^{a_i} \right|.$$

Le symbole \sim signifie que les rapports entre eux sont majoré par une constante dépendant du voisinage. Par conséquent, soient σ_1, σ_2 deux cônes maximaux, on a

$$|\mathbf{x}^{D(\sigma_1)}| \sim |\mathbf{x}^{D(\sigma_2)}|.$$

Toute hauteur de Weil associée à D est donc localement équivalente à

$$\widehat{H}_D(\pi(\mathbf{x})) = \left| \prod_{i=1}^{n+r} X_i^{a_i} \right|.$$

Démonstration. Étant donné $\sigma = \langle \varrho_1, \dots, \varrho_n \rangle \in \Delta_{\max}$, on se restreint au voisinage

$$V(c) = \{P \in \mathbf{G}_m^n(\mathbf{Q}) : d_\infty(P, Q_0) \leq c\}$$

où $c \in]0, 1[$. Alors pour $P = \pi(X_1, \dots, X_{n+r}) \in V(c)$, on a que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$(1-c) \left| \prod_{j=1}^r X_{n+j}^{-\langle \varrho_i^\vee, \varrho_{n+j} \rangle} \right| \leq |X_i| \leq (1+c) \left| \prod_{j=1}^r X_{n+j}^{-\langle \varrho_i^\vee, \varrho_{n+j} \rangle} \right|.$$

On obtient donc

$$\prod_{i=1}^n |X_i^{a_i}| \sim \prod_{i=1}^n \left| \prod_{j=1}^r X_{n+j}^{-\langle \varrho_i^\vee, \varrho_{n+j} \rangle} \right|^{a_i} = \prod_{j=1}^r \left| \prod_{i=1}^n X_{n+j}^{-a_i \langle \varrho_i^\vee, \varrho_{n+j} \rangle} \right| = \prod_{j=1}^r \left| X_{n+j}^{\langle \sum_{i=1}^n -a_i \varrho_i^\vee, \varrho_{n+j} \rangle} \right|.$$

Si l'on choisit la hauteur de Weil absolue (3.2.10), on obtient que, d'après la proposition 3.2.4,

$$|\mathbf{x}^{D(\sigma)}| = \prod_{j=1}^r \left| X_{n+j}^{a_{n+j} - \langle \sum_{i=1}^n a_i \varrho_i^\vee, \varrho_{n+j} \rangle} \right| \sim \prod_{i=1}^{n+r} |X_i|^{a_i}.$$

Or il existe un cône maximal σ_P tel que

$$H_D(P) = |\mathbf{x}^{D(\sigma_P)}|,$$

on obtient donc les équivalences annoncées. \square

Cette proposition implique la flexibilité du choix du cône maximal dans (3.2.10) quand on calcule les constantes d'approximation.

Corollaire 3.2.6. *Supposons que ω_X^{-1} est nef. Alors il existe une constante $c_{\omega_X^{-1}} > 0$ explicitement calculable telle que*

$$\alpha_{\omega_X^{-1}, \infty}(X) \geq c_{\omega_X^{-1}}$$

Démonstration. L'algorithme que l'on donnera n'est probablement pas optimal. Par convention on note $(c_1, \dots, c_{n+r}) \geq (b_1, \dots, b_{n+r})$ pour deux familles de nombres réels si $c_i \geq b_i$ pour tout i . Pour une collection J de familles $((b_{i,j})_{i=1}^{n+r})_{j \in J}$, on note $\max_{j \in J} (b_{i,j})$ comme la famille de nombres réels $(c_i)_{i=1}^{n+r}$ donnée par $c_i = \sup_{j \in J} b_{i,j}$. On note aussi pour un nombre réel x , $x^+ = \max(0, x)$. Pour tout cône maximal $\sigma = \langle \varrho_1, \dots, \varrho_n \rangle$, on définit c_σ comme le maximum des nombres rationnels d_σ tel que

$$(1, \dots, 1) \geq d_\sigma \max_{1 \leq i \leq n} ((\langle \varrho_i^\vee, \varrho_j \rangle^+)_{j=1}^{n+r}).$$

On voit en particulier que $c_\sigma > 0$. Cela implique que $d(P)^{c_\sigma} H_{\omega_X^{-1}}(P) \geq 1$ pour tout $P \neq Q_0$ dans un voisinage de Q_0 . Alors il suffit de choisir $c_{\omega_X^{-1}} = \max_{\sigma \in \Delta_{\max}} c_\sigma$. \square

Remarque 3.2.7. L'algorithme ci-dessus fonctionne aussi pour les diviseurs D vérifiant que $D + \omega_X$ est effectif. En considérant la donnée combinatoire de Δ plus soigneusement on peut obtenir de meilleures minoration. L'avantage de cet algorithme est qu'il est explicite. Alors que la minoration générale du théorème 2.3.2 où intervient la constante de Seshadri est difficile à calculer, même pour le fibré anticanonique ω_X^{-1} (cf. [Ito14]).

3.3 Courbes rationnelles sur les variétés toriques

On suppose dans cette section que X est définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

3.3.1 Généralités

On désigne par $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}^1, X)$ l'espace des morphismes de \mathbf{P}^1 vers X dont l'image rencontre l'orbite ouverte \mathcal{T} . D'après la description dans la section 3.2.2, un tel morphisme $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ est déterminé par une famille de polynômes $f_i(u, v)$ de degré $d_i = \deg f^* \mathcal{O}_X(D)$ satisfaisant à certaine condition de non-nullité. Il est donc représenté par la relation positive $\sum_{i=1}^{n+r} d_i \varrho_i = 0$. On appelle $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{n+r}) \in \mathbf{Z}^{\Delta(1)}$ *multi-degré* du morphisme f . on a donc la décomposition suivante, où $\text{Mor}_{\mathbf{d}}(\mathbf{P}^1, X)$ désigne la composante dont le multi-degré est \mathbf{d} :

$$\text{Mor}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}^1, X) = \bigsqcup_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^{n+r}} \text{Mor}_{\mathbf{d}}(\mathbf{P}^1, X).$$

Considérons une relation positive $\sum_{i=1}^{n+r} d_i \varrho_i = 0$ de multi-degré $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^{n+r}$. On note $\mathcal{T}_{\mathbf{d}} = \prod_{i=1}^{n+r} (\mathbf{A}^{d_i+1} - \{0\})$, qui paramètre les coefficients des polynômes en deux variables pour des relèvements. D'après la suite exacte (3.2.1), le groupe T_{NS} agit sur $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ via le groupe $\mathbf{G}_m^{\Delta(1)}$. La condition de non-nullité (3.2.7) induit une condition ouverte sur les coefficients et donne ainsi un ouvert $U_{\mathbf{d}}$ de $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$. On a en fait

$$\text{Mor}_{\mathbf{d}}(\mathbf{P}^1, X) \simeq U_{\mathbf{d}}/T_{\text{NS}}. \quad (3.3.1)$$

Cela nous permet de calculer la dimension de chaque composante.

Soit $\text{Mor}_{\mathcal{T}}^{\text{bir}}(\mathbf{P}^1, X) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}^1, X)$ le sous-schéma ouvert paramétrant les morphismes $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$ qui envoient \mathbf{P}^1 birationnellement sur son image. Il arrive que

$$\text{Mor}_{\mathbf{d}}(\mathbf{P}^1, X) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \text{Mor}_{\mathbf{d}}^{\text{bir}}(\mathbf{P}^1, X) = \emptyset.$$

Prenons l'exemple le plus simple

$$\text{Mor}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1) = \bigsqcup_d \text{Mor}_d(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1),$$

où, pour $f \in \text{Mor}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1)$ non-constant, $d = \deg f^*(\mathcal{O}(1))$. La seule courbe rationnelle dans \mathbf{P}^1 est elle-même, mais on a plein de morphismes $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ de degré $d > 1$. Chacun est donné par deux polynômes en deux variables sans facteur commun, qui est en fait un revêtement ramifié de degré d . Donc $\text{Mor}^{\text{bir}}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1) = \text{Mor}_1(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1)$.

On appelle *morphisme ramifié* tout morphisme dans le schéma $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}^1, X) - \text{Mor}_{\mathcal{T}}^{\text{bir}}(\mathbf{P}^1, X)$. Si $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ est un morphisme ramifié de multi-degré \mathbf{d}_f , puisque $\text{Im}(f)$ est une courbe de genre 0 donc birationnelle à \mathbf{P}^1 , alors f se décompose en un composé de deux morphismes

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{g} \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{h} X \end{array}$$

avec g ramifié et h birationnel sur son image de multi-degré \mathbf{d}_h vérifiant

$$\mathbf{d}_f = (\deg g) \mathbf{d}_h.$$

On en conclut que les morphismes ramifiés sont tous des composés de morphismes venant des courbes rationnelles de degré plus bas. Être ramifié est une condition fermée sur les coefficients des polynômes définissant les relèvements.

Proposition 3.3.1. *Une relation positive $\mathcal{P} : \sum_{i=1}^{n+r} d_i \varrho_i = 0$ représente un morphisme ramifié si et seulement si $\text{pgcd}(d_i) > 1$.*

Démonstration. Il reste à démontrer la suffisance. Notons $e = \text{pgcd}(d_i)$ et considérons la relation positive $\mathcal{Q} : \sum_{i=1}^{n+r} f_i \varrho_i = 0$ où $f_i = d_i/e$. On choisit une courbe rationnelle $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ de classe \mathcal{Q} avec un relèvement donné par des polynômes $\{f_i(u, v), 1 \leq i \leq n+r\}$ vérifiant la condition de non-nullité (3.2.7). Pour tout revêtement ramifié $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ de degré e défini par deux polynômes $g_j(u, v), j = 1, 2$ premiers entre eux, les polynômes $\{f_i(g_1(u, v), g_2(u, v)), 1 \leq i \leq n+r\}$ de multi-degré \mathbf{d} et satisfont aussi à (3.2.7) et donc définissent un morphisme $g : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ qui est ramifié et vérifie que $\deg g^* \mathcal{O}_X(D_i) = d_i, \forall i$. \square

3.3.2 Courbes rationnelles de degré minimal

Dans cette section nous nous intéressons aux composantes de $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}^1, X)$ de degré le plus bas relativement à ω_X^{-1} . Nous verrons que la notion de « collection primitive », introduite par Batyrev [Bat91] pour le problème de classification des variétés toriques projectives lisses, se révèle important. Géométriquement, ces relations

caractérisent certaines structures de fibré projectif. Récemment Chen, Fu et Hwang [CFH14] ont montré aussi que, les collections primitives minimales correspondent aux composantes minimales du schéma de l'espace normalisé des courbes rationnelles dans X (cf. [Kol96] II 2.11). Nous allons démontrer que les courbes rationnelles construites à partir des collections primitives minimales sont de degré minimal (par rapport à ω_X^{-1}). Avec une hypothèse (cf. hypothèses 3.3.8, 3.3.9 *infra*) sur l'éventail de la variété, ces courbes ont la plus petite constante d'approximation et elles fournissent certains espaces projectifs comme sous-variétés localement accumulatrices.

Définition 3.3.2. Une collection des rayons $\mathcal{I} \subset \Delta(1)$ est dite *primitive* si elle n'engendre pas un cône dans Δ mais tous ses sous-ensembles le font. Il existe un cône unique σ tel que la somme $\sum_{\rho \in \mathcal{I}} \rho$ soit dans l'intérieur relatif de σ , c'est-à-dire qu'on peut écrire de façon unique

$$\sum_j \rho_{i_j} = \sum_{\rho_k \in \sigma(1)} c_k \rho_k, \quad (c_k > 0).$$

La relation associée est la relation

$$\sum_{\rho \in \mathcal{I}} \rho - \sum_{\rho_k \in \sigma(1)} c_k \rho_k = 0.$$

Le degré de la collection \mathcal{I} est le degré de la relation associée, à savoir $\#\mathcal{I} - \sum_k c_k$. Si $\sigma = \{0\}$, on dit que cette relation primitive est *centrée*. Une collection primitive centrée est dite *minimale* si elle est de degré minimal parmi toutes les collections primitives centrées.

Théorème 3.3.3 ([Bat91], Proposition 3.2). *Pour une variété torique $X = X(\Delta)$ projective lisse, il existe une collection primitive centrée.*

Prenons une collection primitive centrée $\mathcal{I} = \{\rho_{i_j}, 1 \leq j \leq m+1\}$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, la collection $\mathcal{I} - \{\rho_{i_j}\}$ engendre un cône $\sigma_j \in \Delta$ de dimension m . Le sous-éventail Σ de Δ engendré par les faces des $\sigma_j, 1 \leq j \leq m$ définit une sous-variété torique ouverte de X isomorphe à $\mathbf{P}^m \times \mathbf{G}_m^{n-m}$. Chacune des droites dans une fibre de la projection $\mathbf{P}^m \times \mathbf{G}_m^{n-m} \rightarrow \mathbf{G}_m^{n-m}$ est une courbe rationnelle de degré $m+1$ dont la classe dans $N_1(X)$ correspond à la relation associée à cette collection.

Notation 3.3.4. Dans la suite on note $k \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ l'entier tel que $k+1$ est le degré minimal des collections primitives centrées.

Proposition 3.3.5. *Supposons que ω_X^{-1} est nef. Alors pour toute relation positive non-nulle des générateurs*

$$\mathcal{P} : \sum_{i=1}^{n+r} b_i \rho_i = 0, \tag{3.3.2}$$

on a

$$\deg \mathcal{P} = \sum_j b_j \geq k+1. \tag{3.3.3}$$

Si ω_X^{-1} est ample, alors l'inégalité (3.3.3) est une égalité si et seulement si \mathcal{P} est une relation associée à une relation primitive centrée minimale.

Démonstration. Pour un diviseur D et la fonction ϕ_D linéaire par morceau associée, on note pour toute relation $\mathcal{Q} : \sum a_\rho \rho = 0$ positive,

$$m_D(\mathcal{Q}) = - \sum_{\rho \in \Delta(1)} a_\rho \phi_D(\rho), \quad r(D) = \inf_{\substack{\mathcal{Q} \\ \text{positive centrée}}} m_D(\mathcal{Q}).$$

Si D est ample, alors ϕ_D est strictement convexe (Théorème 3.1.4). La démonstration de la Proposition 3.2 [BM86] implique que $r(D)$ est pris uniquement sur des collections primitives centrées. (Remarquons que la fonction ϕ utilisée par Batyrev est l'opposé de la nôtre.) Donc le cas où ω_X^{-1} est ample s'en suit directement puisque

$$r(\omega_X^{-1}) = \min_{\substack{\mathcal{Q} \\ \text{positive centrée}}} \deg \mathcal{Q}.$$

Supposons que ω_X^{-1} est nef. Comme le cône ample est l'intérieur du cône nef, pour tout $\varepsilon \in \mathbf{Q}$ petit, il existe $D_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n+r} c_{i,\varepsilon} D_i$ un \mathbf{Q} -diviseur ample tel que

$$|c_{i,\varepsilon} - 1| < \varepsilon.$$

Maintenant on fixe une relation positive \mathcal{P} (3.3.2) et une collection primitive centrée \mathcal{I}_0 (de degré $1+k$) avec la relation associée \mathcal{P}_0 . On note $|\mathcal{P}| = \max_j |b_j|$ et $n = \dim X$. On a donc

$$\begin{aligned} m_{\omega_X^{-1}}(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n+r} b_i \geq \sum_{i=1}^{n+r} c_{i,\varepsilon} b_i - \varepsilon n |\mathcal{P}| \\ &= m_{D_\varepsilon}(\mathcal{P}) - \varepsilon n |\mathcal{P}| \\ &\geq m_{D_\varepsilon}(\mathcal{P}_0) - \varepsilon n |\mathcal{P}| \\ &\geq m_{\omega_X^{-1}}(\mathcal{P}_0) - \varepsilon n (1 + |\mathcal{P}|) \\ &= k + 1 - \varepsilon n (1 + |\mathcal{P}|). \end{aligned}$$

D'où $\sum_j b_j \geq k + 1$. C'est ce qu'il fallait démontrer. \square

Corollaire 3.3.6.

$$\min_C \langle \omega_X^{-1}, C \rangle = k + 1$$

où C parcourt les courbes qui rencontrent l'orbite ouverte.

Démonstration. Une courbe C intersectant chaque diviseur invariant proprement correspond à une relation positive. La conclusion suit directement de la proposition ci-dessus. \square

Proposition 3.3.7. Soit $Q \in T(\mathbf{Q})$. Alors

$$\alpha_{\omega_X^{-1}}(Q, X) \leq k + 1.$$

Démonstration. Rappelons qu'une relation primitive centrée minimale définit un plongement de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{G}_m^{n-k}$ de sorte que les droites passant par Q dans la fibre (contenant Q) de $\mathbf{P}^k \times \mathbf{G}_m^{n-k}$ sont lisses de degré $k + 1$. Prenons une telle droite l , alors on a $\omega_X^{-1}|_l \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(k + 1)$ et donc

$$k + 1 = \alpha_{\mathcal{O}(k+1)}(Q, l) \geq \alpha_{\omega_X^{-1}}(Q, X).$$

\square

Dans la suite nous allons démontrer que pour les variétés toriques vérifiant l'hypothèse 3.3.8 suivante, l'approximation optimale d'un point sur l'orbite ouverte peut en fait s'obtenir sur les droites correspondante aux collections primitives centrées minimales. On précisera les versions géométrique et combinatoire. Il s'agit d'une hypothèse forte sur la variété.

Hypothèse 3.3.8 (H). Le cône effectif $\overline{\text{Eff}}(X)$ est simplicial.

Hypothèse 3.3.9 (H'). Il existe un cône maximal σ_0 tel que tous les générateurs de $\Delta(1) - \sigma(1)$ soient des combinaisons négatives des membres de $\sigma(1)$.

Pour voir l'équivalence de ces énoncés, notons que le cône effectif est engendré par des diviseurs invariants et que

$$D_i = \sum_{j=1}^r a_{i,j} D_{n+j} \Leftrightarrow \rho_{n+j} = - \sum_{i=1}^n a_{i,j} \rho_i.$$

Une fois que $a_{i,j}$ sont positifs, les $\varrho_i, 1 \leq i \leq n$ forment les générateurs d'un cône maximal grâce à la complétude de l'éventail. Dans ce cas

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_{\geq 0} \varrho_1 + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0} \varrho_n \quad \text{et} \quad \overline{\text{Eff}}(X) = \sum_{j=1}^r \mathbf{N} D_{r+j}.$$

Nous conserverons ces notations pour la suite de cette partie.

Lemme 3.3.10. Soit \mathcal{I} une collection primitive centrée. Alors il existe $\varrho_{n+j} \in \mathcal{I}$ tel que

$$\mathcal{I} - \{\varrho_{n+j}\} \subset \sigma_0(1).$$

Démonstration. Par définition, une collection primitive ne peut pas être contenue dans un cône. Soit $\varrho_{n+j} \in \mathcal{I} - \sigma_0$. On peut écrire

$$\rho_{n+j} = - \sum_{i=1}^n a_{i,j} \rho_i = - \sum_{\rho_{i_j} \in \mathcal{I} - \{\rho_{n+1}\}} \rho_{i_j}.$$

Cela nous donne deux combinaisons linéaires positives de $-\rho_{n+j}$ des générateurs de deux cônes. Il existe un unique cône dont l'intérieur relatif contient $-\varrho_{n+j}$ car Δ est complet, ces deux expressions doivent se coïncider grâce à la régularité de l'éventail. Donc les éléments de $\mathcal{I} - \{\rho_{n+j}\}$ sont aussi des générateurs de σ_0 . \square

Lemme 3.3.11. *Soient $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ deux collections primitives centrées différentes. Alors $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$.*

Démonstration. S'il existe $\varrho \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, alors

$$-\varrho = \sum_{\varrho_i \in \mathcal{I}_1 - \{\varrho\}} \varrho_i = \sum_{\varrho_j \in \mathcal{I}_2 - \{\varrho\}} \varrho_j.$$

Comme dans la preuve précédente, ces deux expressions doivent coïncider, ce qui est absurde. \square

Lemme 3.3.12. *Rappelons les notations au-dessous de l'hypothèse 3.3.9. Supposons en outre que ω_X^{-1} est nef. Alors*

$$1 + \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \geq a_{i_0,j_0}(1+k), \quad \forall 1 \leq i_0 \leq n, \forall 1 \leq j_0 \leq r.$$

Supposons de plus que ω_X^{-1} est ample. S'il existe $j_0 \in \{1, \dots, r\}$ tel que ρ_{n+j_0} n'appartienne à aucune collection primitive centrée minimale. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$1 + \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} > a_{i_0,j_0}(1+k+\delta), \quad \forall 1 \leq i_0 \leq n. \tag{3.3.4}$$

Démonstration. On fixe i_0, j_0 et l'on regarde le cône σ_{i_0} adjacent à σ_0 tel que

$$\sigma_{i_0} \cap \sigma_0 = \mathbb{R}_{\geq 0} \rho_1 + \dots + \widehat{\mathbb{R}_{\geq 0} \rho_{i_0}} + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0} \rho_n.$$

On écrit

$$\sigma_{i_0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \rho_1 + \dots + \widehat{\mathbb{R}_{\geq 0} \rho_{i_0}} + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0} \rho_n + \mathbb{R}_{\geq 0} \rho_{n+j_1}.$$

Si $j_1 = j_0$, alors $|a_{i_0,j_0}| = 1$ grâce à la régularité de l'éventail et l'inégalité suit de la proposition 3.3.5. L'hypothèse 3.3.9 implique que $a_{i_0,j_0} = 1$. On suppose dans ce qui va suivre que $j_1 \neq j_0$. On écrit ρ_{n+j_0} en terme des générateurs du cône σ_{i_0} , à savoir

$$\begin{aligned} \rho_{n+j_0} &= - \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \rho_i \\ &= a_{i_0,j_0} \left(\sum_{i \in \{1, \dots, n\} - \{i_0\}} a_{i,j_1} \rho_i + \rho_{n+j_1} \right) - \sum_{i \in \{1, \dots, n\} - \{i_0\}} a_{i,j_0} \rho_i \\ &= a_{i_0,j_0} \rho_{n+j_1} - \sum_{i \in \{1, \dots, n\} - \{i_0\}} (a_{i,j_0} - a_{i_0,j_0} a_{i,j_1}) \rho_i. \end{aligned}$$

La convexité de la fonction $\phi_{\omega_X^{-1}}$ nous donne que

$$\langle -m(\sigma_{i_0}), \rho_{n+j_0} \rangle \geq \phi_{\omega_X^{-1}}(\varrho_{n+j_0}) = -1.$$

On obtient que

$$\sum_{i \in \{1, \dots, n\} - \{i_0\}} (a_{i,j_0} - a_{i_0,j_0} a_{i,j_1}) - a_{i_0,j_0} \geq -1.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j_0} + 1 \geq a_{i_0,j_0} \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j_1} + 1 \right).$$

Supposons pour la suite que ω_X^{-1} est ample et ϱ_{n+j_0} comme ci-dessus. Si $j_0 = j_1$ on a d'après la proposition 3.3.5 que $\sum_{i=1}^n a_{i,j_0} > 1+k$ puisque la relation $\varrho_{n+j_0} + \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \varrho_i = 0$ n'est pas une relation primitive centrée minimale. Si $j_0 \neq j_1$, la convexité stricte entraîne que tous les \geq ci-dessus sont remplacés par $>$. Donc il suffit de prendre $\delta > 0$ suffisamment petit pour que l'inégalité (3.3.4) soit valide. \square

Théorème 3.3.13. *Supposons que X vérifie l'hypothèse 3.3.8 et que ω_X^{-1} est nef. On a alors*

$$\alpha_{\omega_X^{-1}}(Q_0, X) = k + 1. \quad (3.3.5)$$

Supposons de plus que ω_X^{-1} est ample, alors cette constante est atteinte sur une sous-variété Y isomorphe à une réunion finie de $Y_i \simeq \mathbf{P}^k$, chacune étant la fibre $\mathbf{P}^k \times \{1\}$ d'une sous-variété torique ouverte $Z_i \simeq \mathbf{P}^k \times \mathbf{G}_m^{n-k}$ de X correspondant à une collection primitive centrée minimale. De plus on a $Y_i \cap Y_j = Q_0$.

Remarque 3.3.14. On verra dans §3.4 des exemples de variétés toriques auxquelles ce théorème s'applique.

Démonstration du théorème 3.3.13. On va se placer sur l'ouvert U_{σ_0} avec le paramétrage du cône σ_0 qui vérifie l'hypothèse 3.3.9. On choisit la distance (3.2.5). Au vu du paramétrage (3.2.4), on a

$$\begin{aligned} \pi : \pi^{-1}U_{\sigma_0} &\longrightarrow U_{\sigma_0} \\ (X_1, \dots, X_{n+r}) &\longmapsto (y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{X_1}{\prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{1,j}}}, \dots, \frac{X_n}{\prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{n,j}}} \right). \end{aligned}$$

On prend $P = (y_1, \dots, y_n) \neq Q_0$. Alors il existe $z_{i_0} = \prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{i_0,j}} - X_{i_0} \neq 0$. On obtient donc la minoration suivante d'après le lemme 3.3.12,

$$\begin{aligned} H_{\omega_X^{-1}}(P)d(P, Q_0)^{1+k} &\geq \left| \mathbf{X}^{D(\sigma_0)} \right| d_{i_0}(P, Q_0)^{1+k} \geq \left| \prod_{j=1}^r X_{n+j}^{1+\sum_{i=1}^n a_{i,j}} \cdot \frac{|z_{i_0}|^{1+k}}{\prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{i_0,j}(1+k)}} \right| \\ &= |z_{i_0}|^{1+k} \prod_{j=1}^r \left| X_{n+j}^{1+\sum_{i=1}^n a_{i,j} - (1+k)a_{i_0,j}} \right| \geq 1, \end{aligned}$$

Cela démontre que $\alpha_{\omega_X^{-1}}(Q_0, X) = 1 + k$ compte tenu de la proposition 3.3.7.

Supposons pour la suite que ω_X^{-1} est ample. Soit Y la sous-variété définie comme dans l'énoncé. On démontre que, pour tout ouvert U de Y , on a $\alpha_{\omega_X^{-1}}(Q_0, X - Y) > 1 + k = \alpha_{\omega_X^{-1}}(Q_0, U)$. Donc Y est localement accumulatrice. Pour déduire que $\alpha_{\omega_X^{-1}}(Q_0, U) = 1 + k$ il suffit de choisir une droite l passant par Q_0 dans Y telle que $l \cap U \neq \emptyset$. On fixe une collection primitive centrée minimale \mathcal{I}_0 , en renumérotant on suppose que $\mathcal{I}_0 = \{\rho_1, \dots, \rho_{k+1}\}$ puisque $\sharp(\mathcal{I}_0 \cap \Delta(1)) = k$ (Lemme 3.3.10). On considère la sous-variété torique $Z_{\mathcal{I}_0} \simeq \mathbf{P}^k \times \mathbf{G}_m^{n-k}$ ouverte de X associée au sous-éventail engendré par les éléments de \mathcal{I}_0 . On désigne par $Y_{\mathcal{I}_0} = \mathbf{P}^k \times \{1\}$ la fibre au-dessus du point $\{1\} \in \mathbf{G}_m^{n-k}$ de $Z_{\mathcal{I}_0}$. On a donc

$$U_{\sigma} \cap Y_{\mathcal{I}_0} = \left(\overbrace{*, \dots, *}^{k \text{ coordonnées}}, 1, \dots, 1 \right).$$

Or toutes les deux collections $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ primitives centrées n'ont pas de membre commun (Lemme 3.3.11), les variétés toriques correspondantes $Y_{\mathcal{I}_1}, Y_{\mathcal{I}_2}$ s'intersectent uniquement en le point Q . On voit que $(U_{\sigma_0} - Y)(\mathbf{Q})$ est l'ensemble des $(y_1, \dots, y_n) \in U_{\sigma_0}(\mathbf{Q})$ tels qu'il existe $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$ de sorte que $y_{i_0} \neq 1$ et que ρ_{i_0} n'est pas un membre d'une collection centrée minimale. On a donc que pour $1 \leq j_0 \leq r$, $a_{i_0, j_0} = 0$ lorsque ρ_{n+j_0} est un membre d'une collection primitive centrée minimale et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $1 + \sum_{i=1}^n a_{i, j_0} \geq (1 + k + \delta)a_{i_0, j_0}$ (Lemme 3.3.12). Donc pour tout $P \in (U_{\sigma_0} - Y)(\mathbf{Q}) - \{Q_0\}$, on a la minoration suivante :

$$\begin{aligned} H_{\omega_X^{-1}}(P)d(P, Q_0)^{1+k+\delta} &\geq \prod_{j=1}^r \left| X_{n+j}^{1+\sum_{i=1}^n a_{i,j}} \right| \cdot \frac{|z_{i_0}|^{1+k+\delta}}{\prod_{j=1}^r \left| X_{n+j}^{a_{i_0,j}(1+k+\delta)} \right|} \\ &= |z_{i_0}|^{1+k+\delta} \cdot \prod_{j=1}^r \left| X_{n+j}^{1+\sum_{i=1}^n a_{i,j} - (1+k+\delta)a_{i_0,j}} \right| \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Cela démontre que $\alpha_{\omega_X^{-1}}(Q_0, X - Y) \geq 1 + k + \delta > 1 + k$. □

On démontre que les variétés vérifiant l'hypothèse (3.3.8) supportent l'heuristique donné par le principe de Batyrev-Manin.

Proposition 3.3.15. *Supposons que X vérifie l'hypothèse 3.3.8 et que ω_X^{-1} est nef. On a alors $\alpha_{\text{ess}, \omega_X^{-1}}(Q_0) > n$.*

Démonstration. Pour minorer la constante essentielle, on peut se placer sur l'ouvert $U = U_{\sigma_0} - Z$, avec $Z = \cup_{i=1}^n (y_i = 1)$. Fixons $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, $a_{i_0, j} \delta \leq 1$. Alors pour tout $P \in U(\mathbf{Q})$,

$$\begin{aligned} H_{\omega_X^{-1}}(P)d(Q_0, P)^{n+\delta} &\geq \prod_{j=1}^r |X_{n+j}|^{1+\sum_{i=1}^n a_{i,j}} \times \prod_{i=1}^n d_i(P, Q_0) \times d_{i_0}(P, Q_0)^\delta \\ &\geq \prod_{j=1}^r |X_{n+j}|^{1+\sum_{i=1}^n a_{i,j}} \times \prod_{i=1}^n \left| \frac{\prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{i,j}} - X_i}{\prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{i,j}}} \right| \times \left| \frac{X_{n+j}^{a_{i_0,j}} - X_{i_0}}{X_{n+j}^{a_{i_0,j}}} \right|^\delta \\ &\geq \prod_{i=1}^n \left| \prod_{j=1}^r X_{n+j}^{a_{i,j}} - X_i \right| \times |X_{n+j}^{a_{i_0,j}} - X_{i_0}|^\delta \prod_{j=1}^r |X_{n+j}^{1-a_{i_0,j} \delta}| \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Cela montre que $\alpha_{\text{ess} \omega_X^{-1}}(Q_0) \geq \alpha_{\omega_X^{-1}}(Q_0, U) \geq n + \delta$. \square

3.3.3 Courbes rationnelles très libres - Calcul du f^*T_X

Le calcul de la constante essentielle nous amène à regarder les courbes rationnelles qui peuvent être déformées en fixant le point à approcher.

Définition 3.3.16. Soit $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ un morphisme birationnel sur son image. Il est dit *libre* (resp. *très libre*) si le fibré vectoriel f^*T_X (resp. $f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$) est engendré par des sections globales. Si la classe de f correspond à la relation \mathcal{P} , on dit que \mathcal{P} est *libre* (resp. *très libre*).

La majoration suivante suit du calcul de la constante d'approximation pour les courbes (cf. Théorème 2.1.8).

Proposition 3.3.17.

$$\alpha_{\text{ess} \omega_X^{-1}}(Q_0) \leq \min_{\mathcal{P} \text{ très libre}} \deg \mathcal{P}.$$

Les courbes qui intersectent l'orbite ouverte peuvent être déformées par l'action du tore. Donc une relation est libre si et seulement si elle est positive. D'après la théorie de déformation, la capacité d'être déformé est mesurée par la positivité de la restriction du fibré tangent T_X . En considérant la suite d'Euler généralisée (3.3.7), (3.3.8), on propose un algorithme combinatoire pour calculer le tiré en arrière de T_X pour caractériser la propriété d'être très libre.

D'après le théorème de Grothendieck, tous les fibrés vectoriels sur \mathbf{P}^1 se décomposent en des sommes directes de fibrés en droites. Donc

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_n), \quad (3.3.6)$$

avec $\mu_{\min}(f^*T_X) = a_1 \leq \dots \leq a_n = \mu_{\max}(f^*T_X)$, $n = \dim X$. La condition dans la définition ci-dessus est équivalente à

$$a_1 \geq 0 \quad (\text{resp. } a_1 \geq 1).$$

Considérons la suite exacte d'Euler généralisée ([BM86], [Jac94], [BC94], cf. [CLS11], Theorem 8.1.6)

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n+r} \mathcal{O}_X(-D_i) \longrightarrow \text{Pic}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0. \quad (3.3.7)$$

En la dualisant, on obtient la suite exacte suivante décrivant le fibré tangent de X :

$$0 \longrightarrow N_1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n+r} \mathcal{O}_X(D_i) \longrightarrow T_X \longrightarrow 0, \quad (3.3.8)$$

où $N_1(X)$ est le groupe abélien des 1-cycles modulo l'équivalence rationnelle. On fixe $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ non-constant. On choisit un relèvement de f en $\mathbb{A}^2 - \{0\} \rightarrow \mathcal{T}$ donné par des polynômes $(f_i(u, v))_{i=1}^{n+r}$. En tirant en arrière la suite exacte (3.3.8), on obtient une suite exacte concernant f^*T_X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus r} \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n+r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\deg f^*(\mathcal{O}_X(D_i))) \longrightarrow f^*T_X \longrightarrow 0 \quad (3.3.9)$$

Si f correspond à une relation positive $\sum_{i=1}^{n+r} b_i \varrho_i = 0$, on a

$$f^*(\mathcal{O}_X(D_i)) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(b_i) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\deg f_i).$$

Une relation (pas nécessairement positive) $\mathcal{Q} : \sum_{i=1}^{n+r} c_i \varrho_i = 0$ définit un morphisme

$$i_{\mathcal{Q}} : \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \rightarrow \bigoplus_{\substack{i \in \{1, \dots, n+r\} \\ c_i \neq 0}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(b_i) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(b_i)$$

$$f \mapsto (c_i f f_i)_{i: c_i \neq 0}.$$

Lemme 3.3.18. Soient $a_1, a_2 \in \mathbf{N}$ et $f_i \in H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)) - \{0\}$. Supposons que $\text{pgcd}(f_1, f_2) = 1$. Alors on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \xrightarrow{h} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1 + a_2) \rightarrow 0$$

$$h \mapsto (h f_1, h f_2) \mapsto (g_1, g_2) \mapsto f_2 g_1 - f_1 g_2.$$

Démonstration. Cela peut être vérifié sur les tiges. \square

Lemme 3.3.19. Soient $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $f_i \in H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)) - \{0\}$. Supposons que $\text{pgcd}(f_1, f_2) = 1$. Soit \mathcal{G} le fibré quotient de l'immersion

$$i : \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \hookrightarrow \mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$$

définie par les (f_i) . Alors

$$\mathcal{G} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1 + a_2) \oplus \bigoplus_{i=3}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i).$$

En particulier on a

$$\mu_{\max}(\mathcal{G}) = \max(a_1 + a_2, a_n) \geq \mu_{\max}(\mathcal{F}), \quad \mu_{\min}(\mathcal{G}) = \min(a_1 + a_2, a_3) \geq \mu_{\min}(\mathcal{F}).$$

Démonstration. Pour tout $3 \leq i \leq n$, on choisit $g_{i,1}, g_{i,2}$ de degré $a_i - a_1, a_i - a_2$ respectivement tels que

$$f_1 g_{i,1} + f_2 g_{i,2} = f_i.$$

On définit un automorphisme du fibré $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$:

$$j : \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$$

$$(h_1, \dots, h_2) \mapsto (h_1, h_2, h_3 - g_{3,1} h_1 - g_{3,2} h_2, \dots, h_n - g_{n,1} h_1 - g_{n,2} h_2).$$

On vérifie que, en composant avec l'immersion,

$$j \circ i : \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$$

$$h \mapsto (f_1 h, f_2 h, 0, \dots, 0),$$

et donc

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i) / \text{Im}(i) \simeq (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_2) / \text{Im}(j \circ i)) \oplus \bigoplus_{i=3}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i).$$

On est ramené au lemme (3.3.18). \square

Proposition 3.3.20. Les courbes rationnelles génériques correspondant à la relation positive

$$\mathcal{P} : \sum_{\varrho_i \in \mathcal{P}(1)} c_i \varrho_i = 0, \quad c_i \geq 0, \quad \forall \varrho_i \in \mathcal{P}(1)$$

sont très libres si et seulement si

$$\text{Vect}_{\mathbf{Q}}\{\mathcal{P}(1)\} = N_{\mathbf{Q}}.$$

Par conséquent pour que cette relation soit très libre, il faut que

$$\#\mathcal{P}(1) \geq \dim X + 1.$$

Démonstration. En renumérotant, on suppose que $\mathcal{P}(1) = \{\varrho_1, \dots, \varrho_m\}$.

Suffisance. Supposons que les rayons $\{\varrho_i\}, 1 \leq i \leq m$ engendrent l'espace ambiant. Alors $m \geq n + 1$. En renumérotant encore si nécessaire on suppose que $\{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}$ est une \mathbf{Q} -base de $N_{\mathbf{Q}}$. Donc pour tout $n + 1 \leq k \leq n + r$, il existe des entiers $b_k \neq 0, a_{j,k}, 1 \leq j \leq n$ tels que

$$\mathcal{Q}_k : b_k \varrho_k - \sum_{i=1}^n a_{i,k} \varrho_i = 0. \quad (3.3.10)$$

Ces r relations sont indépendantes et forment une \mathbf{Q} -base de $N_1(X)_{\mathbf{Q}}$. À un automorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus r}$ près, elles définissent le morphisme, pour un morphisme générique $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ correspondant à \mathcal{P} ,

$$i_{\mathcal{P}} : \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus r} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\deg f^*(\mathcal{O}_X(D_i))).$$

Pour tout $n + 1 \leq k \leq n + r$, on désigne par $i_{\mathcal{Q}_k}$ le k -ème facteur, c'est-à-dire le morphisme donné par la k -ème relation (3.3.10). On a

$$\deg f^*(\mathcal{O}_X(D_i)) = c_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq m; \quad \deg f^*(\mathcal{O}_X(D_i)) = 0, \text{ pour } m + 1 \leq i \leq n + r$$

On note

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{n+r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\deg f^*(\mathcal{O}_X(D_i))) = \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c_i) \right) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus n+r-m},$$

M_1 (resp. M_2) le sous-fibré de \mathcal{F} engendré par les images des morphismes $i_{\mathcal{Q}_k}, m + 1 \leq k \leq n + r$ (resp. $n + 1 \leq k \leq n + r$) et

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}/M_1, \quad \mathcal{H} = f^*T_X = \mathcal{F}/M_2.$$

On va démontrer que

$$\mathcal{G} \simeq \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c_i). \quad (3.3.11)$$

Choisissons un relèvement de f définis par les polynôme $(f_i(u, v))_{i=1}^{n+r}$. On a

$$\deg f_i = c_i, \text{ pour } i \in \mathcal{P}(1), \quad \deg f_k = 0, \text{ pour } k \in \Delta(1) - \mathcal{P}(1),$$

$f_k(u, v) = f_k$ sont donc des constantes non-nulles pour $m + 1 \leq k \leq n + r$. Soient $g_{i,k}(u, v) \in k[u, v], (1 \leq i \leq n, m + 1 \leq k \leq n + 1)$ définis par

$$b_k f_k g_{i,k}(u, v) = a_{i,k} f_i(u, v).$$

On définit un automorphisme de \mathcal{F} par

$$\Psi : (h_1(u, v), \dots, h_{n+r}(u, v)) \longmapsto \left(h_1(u, v) - \sum_{k=m+1}^{n+r} h_k(u, v) g_{1,k}(u, v), \dots, h_n(u, v) - \sum_{k=m+1}^{n+r} h_k(u, v) g_{n,k}(u, v), h_{n+1}(u, v), \dots, h_{n+r}(u, v) \right).$$

Démontrons que

$$\Psi(M_1) = \{(0, \dots, 0, F_1, \dots, F_{n+r-m}), F_i \in \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\}, \quad (3.3.12)$$

d'où l'isomorphisme (3.3.11). En effet, pour tout $m + 1 \leq k \leq n + r$, le morphisme $i_{\mathcal{Q}_k}$ se factorise de manière suivante,

$$i_{\mathcal{Q}_k} : \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \rightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c_i) \right) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \rightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c_i) \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=m+1}^{n+r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \right) = \mathcal{F}.$$

La composée $\Psi \circ i_{\mathcal{Q}_k}$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} \Psi \circ i_{\mathcal{Q}_k} : f &\longmapsto \Psi(a_{1,k} f f_1(u, v), \dots, a_{n,k} f f_n(u, v), 0, \dots, 0, b_k f_k f, 0, \dots, 0) \\ &= (0, \dots, 0, b_k f_k f, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Im}(\Psi \circ i_{\mathcal{Q}_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1})) = \{(0, \dots, 0, F, 0, \dots, 0), F \in \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\}.$$

Cela démontre (3.3.12). Désignons par M_3 le sous-fibré engendré par l'image de M_2 par la projection $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. On arrive à l'isomorphisme suivant

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}/M_2 \simeq \mathcal{G}/M_3,$$

d'où on conclut que \mathcal{H} est un quotient successif du fibré \mathcal{G} par les image des morphismes $\pi \circ i_{\mathcal{Q}_k}$, $n+1 \leq k \leq m$. Puisque la condition de pgcd dans le lemme 3.3.19 est une condition ouverte en les coefficients de $f_i(u, v)$, pour le morphisme f génériquement choisi, on applique le lemme 3.3.19, et on obtient que

$$\mu_{\min}(\mathcal{H}) \geq \mu_{\min}(\mathcal{G}) = \min_{1 \leq i \leq m} (c_i) > 0,$$

et donc \mathcal{H} est un fibré ample.

Nécessité. Fixons un morphisme générique $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$. Si $V = \text{Vect}_{\mathbf{Q}}\{\varrho, \varrho \in \mathcal{P}(1)\} \neq N_{\mathbf{Q}}$, on choisit $\{\varrho_1, \dots, \varrho_q\}$, $q \leq \min(m = \#\mathcal{P}(1), n-1)$ une \mathbf{Q} -base de V et l'on la complète en $\{\varrho_1, \dots, \varrho_q, \varrho_{m+1}, \dots, \varrho_{m+n-q}\}$ une \mathbf{Q} -base de $N_{\mathbf{Q}}$. On a donc les r relations indépendantes suivantes : (où $b_k \neq 0, a_{i,k}, d_{j,k}$ sont des entiers)

$$\mathcal{Q}_k : b_k \varrho_k = \sum_{i=1}^q a_{i,k} \varrho_i + \sum_{j=1}^{n-q} d_{j,k} \varrho_{m+j}, \quad q+1 \leq k \leq m \text{ et } m+n-q+1 \leq k \leq n+r. \quad (3.3.13)$$

On note

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{n+r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\deg f^*(\mathcal{O}_X(D_i))),$$

M_1 (resp. M_2) le sous-fibré engendré par les images des morphismes $i_{\mathcal{Q}_k}$, $m+n-q+1 \leq k \leq n+r$ (resp. $k \in \{q+1, \dots, m, m+n-q+1, \dots, n+r\}$) donnés par les relations (3.3.13) et

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}/M_1, \quad \mathcal{H} = \mathcal{F}/M_2.$$

La procédure dans la partie de suffisance ci-dessus nous montre que

$$\mathcal{G} \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c_i) \right) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus n-q}.$$

On a donc, en notant M_3 le sous-fibré de \mathcal{G} engendré par les images de $i_{\mathcal{Q}_k}$, $k \in \{q+1, \dots, m\}$ composé avec la projection $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$,

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{G}/M_3.$$

Cependant, remarquons que l'on a pour tout $q+1 \leq k \leq m$, $d_{j,k} = 0, \forall 1 \leq j \leq n-q$ puisque $\varrho_k \in V$. Le morphisme $i_{\mathcal{Q}_k}$ se factorise donc via

$$i_{\mathcal{Q}_k} : \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c_i) \hookrightarrow \mathcal{F}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}/M_3 \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c_i)/M_3 \right) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus n-q}.$$

n'est pas ample puisque l'on trouve $n-q \geq 1$ facteurs triviaux. \square

Exemple 3.3.21. On considère l'éventail de la surface Y_4 (Fig. 1.8). Tout d'abord on choisit une base pour $N_1(X)$. Lorsque l'on fixe un cône maximal, disons σ_{12} , un choix naïve est la représentation des autres rayons en termes de ceux engendrant σ_{12} :

$$\begin{aligned} \varrho_3 &= -\varrho_1 + \varrho_2, & \varrho_4 &= -2\varrho_1 + \varrho_2, \\ \varrho_5 &= -\varrho_1, & \varrho_6 &= -\varrho_2, \\ \varrho_7 &= \varrho_1 - \varrho_2, & \varrho_8 &= 2\varrho_1 - \varrho_2. \end{aligned}$$

On calcule maintenant le tiré en arrière de T_X pour certaines familles de courbes rationnelles.

Cas 1. Soit

$$\mathcal{P}_1 : \varrho_2 + \varrho_6 = 0. \quad (3.3.14)$$

En fait \mathcal{P}_1 est l'une des collections primitives centrées (Définition 3.3.2). Alors (3.3.9) s'écrit

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus 6} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus 6} \longrightarrow f^*T_X \longrightarrow 0$$

puisque les coefficients non-zéros dans (3.3.14) sont 1 : le 2-ème et le 6-ème, ce qui signifie qu'une courbe $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ correspondant à cette relation n'intersecte que les diviseurs D_2 et D_6 avec multiplicité 1. Compte tenu du choix de base précédent pour $N_1(X)$ et du lemme 3.3.19,

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) / \text{Im}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2),$$

on obtient que

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}.$$

Elle est donc *libre*, mais pas *très libre*. Donc cette famille de courbes est *minimale* (cf. [Kol96, II. 2.11]).

Remarque. En général pour toutes les variétés toriques X , on peut démontrer que pour une courbe $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ correspondant à une collection primitive centrée \mathcal{I} ,

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}(2) \oplus \underbrace{\mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(1)}_{\#\mathcal{I}-2} \oplus \underbrace{\mathcal{O} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}}_{n-\#\mathcal{I}+1}.$$

Comme précédemment, si $X \neq \mathbf{P}^n$, elle n'est pas *très libre*. En effet, dans ce cas $\#\mathcal{I} < n + 1$. Comme nous l'avons vu (la discussion au-dessous du théorème 3.3.3), cette courbe est une droite contenue dans un espace projectif $\mathbf{P}^{\#\mathcal{I}-1}$ qui est une fibre de la projection $\mathbf{P}^{\#\mathcal{I}-1} \times \mathbf{G}_m^{n+1-\#\mathcal{I}} \rightarrow \mathbf{G}_m^{n+1-\#\mathcal{I}}$. La restriction à elle du fibré tangent T_X est isomorphe à la somme directe de la restriction à elle dans $\mathbf{P}^{\#\mathcal{I}-1}$ du fibré $T_{\mathbf{P}^{\#\mathcal{I}-1}}$ avec un fibré trivial de rang égal à celui du fibré normal de $\mathbf{P}^{\#\mathcal{I}-1}$.

Cas 2. Soit

$$\mathcal{P}_2 : \varrho_1 + \varrho_3 + \varrho_6 = 0.$$

Dans ce cas la suite exacte (3.3.8) s'écrit, en restreignant à une courbe générique $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ de cette classe,

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus 6} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus 5} \longrightarrow f^*T_X \longrightarrow 0.$$

On trouve

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1),$$

ce qui implique que cette courbe est *très libre*. Ceci est en accord avec le critère donné par la proposition 3.3.20 puisque les rayons ϱ_1, ϱ_3 de cette relation engendrent $N = \mathbf{Z}^2$.

Cas 3. Soit

$$\mathcal{P}_3 : \sum_{i=1}^4 \varrho_{2i} = 0. \quad (3.3.15)$$

Soit C un membre général, alors C intersecte les diviseur D_{2i} avec multiplicité 1. Alors (3.3.9) s'écrit sous la forme

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus 6} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus 4} \longrightarrow f^*T_X \longrightarrow 0.$$

Encore d'après le choix de base pour $N_1(X)$ en remplaçant l'égalité $\varrho_8 - 2\varrho_1 + \varrho_2 = 0$ par $\varrho_4 + \varrho_8 = 0$, on obtient que

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(2).$$

Ceci implique que C est *très libre*. Le même raisonnement nous fournit le même résultat pour la relation

$$\mathcal{P}_4 : \sum_{i=1}^4 \varrho_{2i-1} = 0. \quad (3.3.16)$$

Remarque. Il s'avère que les courbes rationnelles correspondant à relation \mathcal{P}_2 sont de degré 3 relativement à $\omega_{Y_4}^{-1}$ et lisses, alors que celles de \mathcal{P}_3 sont de degré 4 mais ont toujours un point singulier (nodal). Du point de vue d'approximation diophantienne par contre, la constante essentielle est atteinte sur des déformations de ces dernières courbes rationnelles (cf. chapitre 4).

3.3.4 Existence de courbes rationnelles nodales

Comme l'on a vu, les singularités des courbes rationnelles contribuent à la diminution des constantes d'approximation (cf. Remark 2.1.8). Si le point à approcher est un point nodal sur la courbe, un des facteurs à diviser est le degré du corps de définition des points sur la normalisation au-dessus de ce point. Si les tangentes ne sont pas définies sur le corps de base, le degré est 2. Comme révélé dans le chapitre 4, la constante essentielle de la surface Y_4 est atteinte sur une famille de courbes nodales.

On dit qu'une relation $\mathcal{P} : \sum_{i=1}^{n+r} b_i \varrho_i = 0$ est *primitive* si $\text{pgcd}(b_i) = 1$. Rappelons qu'une fois qu'on a une relation \mathcal{Q}_1 positive dont le pgcd des coefficients est > 1 (cela revient à dire elle représente des morphismes ramifiés), en le divisant on obtient une relation \mathcal{Q}_2 positive primitive qui représente moins de morphismes (cf. (3.3.1)) mais elle est de degré plus bas. Même s'il existe des courbes nodale de classe \mathcal{Q}_1 , la constante d'approximation qui en résulte serait $\deg \mathcal{Q}_1/2 \geq \deg \mathcal{Q}_2$. C'est la raison pour laquelle on ne considère plus les relations non-primitives pour calculer la constante essentielle.

On obtient ainsi une majoration plus forte que la proposition 3.3.17.

Proposition 3.3.22. *Quelque soit une relation positive \mathcal{P} , Soit (\mathbf{G}) la condition suivante*

$(\mathbf{G}) : \mathcal{P}$ est primitive et la classe d'une courbe rationnelle très libre nodale en un point dans l'orbite ouverte.

On a alors

$$\alpha_{\text{ess}, \omega_X^{-1}}(Q_0) \leq \min \left(\min_{\mathcal{P} \text{ très libre}} \deg \mathcal{P}, \min_{\mathcal{P} \text{ vérifie } (\mathbf{G})} \frac{\deg \mathcal{P}}{2} \right).$$

Remarque 3.3.23. (Cf. [Kol96] II.1 Theorem 1.7). Une courbe nodale $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ peut être déformée en fixant le point nodal si et seulement si $f^*T_X(-2)$ est nef, ce qui revient à dire que $a_i \geq 2$ dans le scindage 3.3.6. Cela implique que $\deg f^*T_X \geq 2n$.

On fixe une relation primitive $\mathcal{P} : \sum_{i=1}^{n+r} b_i \varrho_i = 0$, que l'on a supposée être très libre. Soit $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ de classe \mathcal{P} . Si l'image de f est nodale en un point $Q \in \mathcal{T}$, il existe $P_1 = [u_1 : v_1], P_2 = [u_2 : v_2]$ tels que $f(P_1) = f(P_2) = Q$. En faisant agir le groupe $\text{Aut}(\mathbf{P}^1)$ sur \mathbf{P}^1 et le groupe \mathcal{T} sur Q , on peut supposer que $P_1 = [1 : 0], P_2 = [0 : 1]$ et que $Q = (1, \dots, 1)$. On obtient donc une condition suffisante et nécessaire pour que f soit une courbe nodale :

$$f([1 : 0]) = f([0 : 1]) = (1, \dots, 1). \quad (3.3.17)$$

Ceci donne $2 \dim X$ équations sur les coefficients des polynômes définissant f . Si elles ne contredisent pas la condition de pgcd (3.2.7), on trouve une famille de courbes nodales de classe \mathcal{P} .

Exemple 3.3.24. On revisite l'exemple 1.8 et ses deux relations \mathcal{P}_3 (3.3.15) et \mathcal{P}_4 (3.3.16). Elles vérifient la condition dans la remarque 3.3.23. On détermine si elles représentent des courbes rationnelles nodales ou pas. En utilisant le paramétrage donné par la base $\{\varrho_1, \varrho_3\}$ de N , (3.2.4) s'écrit

$$(X_1, \dots, X_8) \mapsto \left(\frac{X_1 X_2 X_8}{X_4 X_5 X_6}, \frac{X_2 X_3 X_4}{X_6 X_7 X_8} \right). \quad (3.3.18)$$

Cas I. Pour la relation \mathcal{P}_3 , on choisit, pour $a, b \in k^*, a \neq b$, les polynômes

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= a, & f_2(u, v) &= u - v, & f_3(u, v) &= b, & f_4(u, v) &= v, \\ f_5(u, v) &= 1, & f_6(u, v) &= bv - ua, & f_7(u, v) &= 1, & f_8(u, v) &= u, \end{aligned}$$

qui vérifient la condition (3.2.7). Alors l'application $f : \mathbf{P}^1 \dashrightarrow \mathcal{T}$ ainsi définie s'écrit avec le paramétrage (3.3.18),

$$[u : v] \mapsto \left(\frac{ua(u-v)}{v(bv-ua)}, \frac{bv(u-v)}{u(bv-ua)} \right) = \left(\frac{au^2 - bv^2}{v(bv-ua)} + 1, \frac{au^2 - bv^2}{u(bv-ua)} + 1 \right).$$

Alors le choix des constantes permet que

$$f^{-1}(Q_0) = \{P_1 = [\sqrt{\frac{b}{a}} : 1], P_2 = [-\sqrt{\frac{b}{a}} : 1]\} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}(\sqrt{ab})).$$

Donc $\{f_i(u, v), 1 \leq i \leq 8\}$ définit un morphisme $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$ dont l'image est une courbe rationnelle nodale. De plus d'après le théorème 2.1.8, on a

$$\alpha_{\omega_X^{-1}}(Q_0, \text{Im}(f)) = \frac{\deg \mathcal{P}_3}{[k(P_i) : \mathbf{Q}]} = \frac{4}{2} = 2$$

si ab n'est pas un carré dans \mathbf{Z} .

Cas II. Soient

$$f_i(u, v) = a_i u + b_i v, i \in \{1, 3, 5, 7\}; \quad f_j(u, v) = c_j, j \in \{2, 4, 6, 8\},$$

où $a_i, b_i, c_j \in k$. La condition de non-nullité (3.2.7) se traduit en

$$\text{pgcd}(f_i(u, v), f_l(u, v)) \in k^*, \forall i, l \in \{1, 3, 5, 7\}, i \neq l \quad \text{et} \quad c_j \in k^*, j \in \{2, 4, 6, 8\}. \quad (3.3.19)$$

L'application définie par ces polynômes s'écrit

$$[u : v] \mapsto \left(\frac{c_2 c_8 (a_1 u + b_1 v)}{c_4 c_6 (a_5 u + b_5 v)}, \frac{c_2 c_4 (a_3 u + b_3 v)}{c_6 c_8 (a_7 u + b_7 v)} \right).$$

Maintenant on impose la condition (3.3.17) :

$$[0 : 1] \mapsto (1, 1) \Leftrightarrow c_2 c_8 b_1 = c_4 c_6 b_5 \quad \text{et} \quad c_2 c_4 b_3 = c_6 c_8 b_7;$$

$$[1 : 0] \mapsto (1, 1) \Leftrightarrow c_2 c_8 a_1 = c_4 c_6 a_5 \quad \text{et} \quad c_2 c_4 a_3 = c_6 c_8 a_7.$$

Elles impliquent que

$$b_1 a_5 = a_1 b_5 \quad \text{et} \quad b_3 a_7 = a_3 b_7,$$

ce qui contredit la condition (3.3.19). Donc il n'y a pas de courbes rationnelles nodales dont la classe est \mathcal{P}_4 .

3.4 Variétés toriques avec $\text{rg}_{\mathbf{Z}}(\text{Pic}(X)) = 2$

3.4.1 Préliminaires

Comme exemples typiques, on va étudier plus soigneusement les variétés complètes lisses toriques dont le rang du groupe de Picard géométrique est 2 grâce à la classification de Kleinschmidt [Kle88] (cf. [CLS11, §7.3 Theorem 7.3.7]). Ce sont des fibrés vectoriels projectifs au-dessus d'un espace projectif.

$$X = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^s} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(a_r)) \rightarrow \mathbf{P}^s, \quad (a_r \geq \cdots \geq a_1 \geq 0; r, s \geq 1, r + s = n).$$

Toutes ces variétés satisfont à l'hypothèse 3.4.7. T. Mignot [Mig16] a réussi à établir la conjecture de Batyrev-Manin pour des hypersurfaces dans certaines variétés toriques de ce type. On suppose que $a_r \geq 1$ (sinon $X \simeq \mathbf{P}^s \times \mathbf{P}^r$). Soit $(e_i)_{i=1}^n$ la base usuelle de \mathbb{R}^n . Les générateurs $\{\varrho_i\}_{i=0}^{n+1}$ de l'éventail de X peuvent s'écrire comme suit

$$\varrho_i = e_i, \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{et} \quad r+1 \leq i \leq r+s;$$

$$\varrho_0 = -\sum_{i=1}^r e_i; \quad (3.4.1)$$

$$\varrho_{n+1} = -\sum_{j=1}^s e_{r+j} + \sum_{i=1}^r a_i e_i. \quad (3.4.2)$$

Pour $0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s+1$, on note le cône maximal $\sigma_{i,j}$ engendré par tous les générateurs sauf ϱ_i, ϱ_{r+j} . L'éventail de X est constitué par les cônes $\sigma_{i,j}$ et leur faces. À partir des relations (3.4.1), (3.4.2), on obtient deux 1-cycles représentés par les relations suivantes :

$$C_1 : \sum_{i=0}^r \varrho_i = 0; \quad (3.4.3)$$

$$C_2 : \sum_{j=1}^{s+1} \varrho_{r+j} - \sum_{i=1}^r a_i \varrho_i = 0. \quad (3.4.4)$$

Ces relations C_1 et C_2 sont associées aux collections primitives $\{\varrho_0, \dots, \varrho_r\}$ et $\{\varrho_{r+1}, \dots, \varrho_{n+1}\}$ respectivement (Définition 3.3.2). La première C_1 est positive mais la deuxième C_2 ne l'est pas.

Proposition 3.4.1. *Le cône fermé des 1-cycles effectifs est engendré par C_1 et C_2 :*

$$\overline{\text{NE}}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0} C_1 + \mathbf{R}_{\geq 0} C_2.$$

Démonstration. On note D_i ($0 \leq i \leq n+1$) le diviseur invariant correspondant à ϱ_i . Comme les éléments de $\mathbf{Z}^{\Delta(1)}$ correspondant à C_1 et C_2 sont linéairement indépendants et primitifs, le groupe $N_1(X)$ est engendré par ces éléments :

$$N_1(X) = \mathbf{Z}C_1 + \mathbf{Z}C_2.$$

Soit C la classes d'un certain 1-cycle effectif E . Alors

$$C = pC_1 + qC_2, \quad p, q \in \mathbf{Z}.$$

Nous allons démontrer que $p, q \geq 0$. La relation représentant C est

$$p\varrho_0 + \sum_{i=1}^r (p - qa_i)\varrho_i + \sum_{j=1}^{s+1} q\varrho_{r+j} = 0. \quad (3.4.5)$$

Si $q < 0$, on a que pour tout $1 \leq j \leq s+1$, $\langle D_{r+j}, E \rangle = q < 0$, et donc $E \subset \bigcap_{j=1}^{s+1} D_{r+j} = \emptyset$, ce qui est absurde. De façon similaire si $p < 0$, on a que pour tout $1 \leq i \leq r$, $\langle D_i, E \rangle = p - qa_i \leq \langle D_0, E \rangle = p < 0$, qui implique que le cycle $E \subset \bigcap_{i=0}^r D_i = \emptyset$. \square

Maintenant on change l'indice des générateurs ϱ_i de sorte que deux d'entre eux sont les combinaisons négatives des autres. Géométriquement, cela n'est rien d'autre que l'isomorphisme

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^s} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(a_r)) \\ & \simeq \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^s} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(-(a_r - a_1)) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(-(a_r - a_{r-1})) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(-a_r)). \end{aligned}$$

Soit

$$v_0 = \varrho_r, \quad v_i = \varrho_i \quad (1 \leq i \leq r-1 \text{ et } r+1 \leq i \leq r+s), \quad v_r = \varrho_0.$$

Alors les relations se réécrivent

$$v_0 = - \sum_{i=1}^r v_i, \quad (3.4.6)$$

$$v_{n+1} = - \sum_{i=1}^r b_i v_i - \sum_{j=1}^s v_{r+j}, \quad (3.4.7)$$

où

$$b_r = a_r, \quad b_i = a_r - a_i, \quad (1 \leq i \leq r-1).$$

En appliquant la base duale $(v_1^\vee, \dots, v_n^\vee)$ du cône $\sigma_{r,n+1}$ à la suite exacte (3.1.1) on obtient (avec la convention $b_0 = a_r$),

$$[D_i] = [D_r] + b_i[D_{n+1}] \quad (0 \leq i \leq r-1) \quad [D_{r+j}] = [D_{n+1}],$$

ainsi que

$$\overline{\text{Eff}}(X) = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{N}[D_i] = \mathbf{R}_{\geq 0}[D_r] + \mathbf{N}[D_{n+1}]. \quad (3.4.8)$$

D'où l'on conclut que le cône effectif est simplicial.

La relation (3.4.7) nous fournit une nouvelle relation positive

$$C_3 : \sum_{i=1}^r b_i v_i + \sum_{j=1}^{s+1} v_{r+j} = b_r \varrho_0 + \sum_{i=1}^{r-1} b_i \varrho_i + \sum_{j=1}^{s+1} \varrho_{r+j} = 0, \quad (3.4.9)$$

qui vérifie

$$C_3 = a_r C_1 + C_2.$$

Proposition 3.4.2. *Le fibré ω_X^{-1} est engendré par ses sections globales si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^r a_i \leq s+1. \quad (3.4.10)$$

La variété X est de Fano (i.e. ω_X^{-1} est ample) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^r a_i < s+1. \quad (3.4.11)$$

Démonstration. pour les variétés toriques, un fibré L est engendré par ses sections globales si et seulement s'il est nef (Théorème 3.1.5), ce qui revient à dire que la forme d'intersection $\langle L, \cdot \rangle$ est positive sur $\overline{NE}(X)$. Comme $\overline{NE}(X)_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{\geq 0}C_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}C_2$ et $\langle \omega_X^{-1}, C_1 \rangle = r + 1 > 0$, la propriété d'être nef (resp. ample) revient à

$$\begin{aligned} \langle \omega_X^{-1}, C_2 \rangle &= s + 1 - \sum_{i=1}^r a_i \geq 0; \\ (\text{resp. } \langle \omega_X^{-1}, C_2 \rangle &= s + 1 - \sum_{i=1}^r a_i > 0). \end{aligned}$$

Remarquons que la propriété d'être ample résulte aussi du [Kle88, Theorem 2], ou bien du critère de Nakai-Moishezon torique (cf. [CLS11, Theorem 6.3.13]). \square

Proposition 3.4.3. — *Supposons que ω_X^{-1} est engendré par ses sections globales. Alors les courbes rationnelles très libres de degré minimal sont, relativement à ω_X^{-1} , de degré*

$$\begin{cases} \deg C_3 & \text{si } b_i \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, r\}; \\ \deg C_1 + \deg C_3 & \text{si } \exists i \in \{1, \dots, r\} \text{ tel que } b_i = 0. \end{cases}$$

— *Supposons que ω_X^{-1} est ample. Alors les courbes rationnelles très libres de degré minimal sont de classe*

$$\begin{cases} C_3 & \text{si } b_i \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, r\}; \\ C_1 + C_3 & \text{si } \exists i \in \{1, \dots, r\} \text{ tel que } b_i = 0. \end{cases} \quad (3.4.12)$$

Démonstration. Observons avant tout que la collection primitive $\{\varrho_0, \dots, \varrho_r\}$, dont la relation associée est C_1 , est centrée. Comme X n'est pas un espace projectif, les courbes rationnelles de classe C_1 ne sont pas *très libres*. D'après la proposition 3.4.1, et comme la relation C_2 n'est pas positive (on a supposé que $a_r > 0$), une relation positive $pC_1 + qC_2, p, q \in \mathbf{N}$ qui est différente de C_1 doit vérifier $p, q \geq 1$. En comparant les coefficients (3.4.5), on en déduit que

$$p \geq q \max_i a_i = qa_r. \quad (3.4.13)$$

Si $b_i \neq 0, \forall i$, rappelons la relation C_3 (3.4.9) ($p = a_r, q = 1$). On a $\varrho_i \in C_3(1)$ pour $i \neq r$ et donc $\text{Vect}(C_3(1)) = N$. D'après la proposition 3.3.20, les courbes rationnelles génériques de classe C_3 sont *très libres* et de degré minimal. Si ω_X^{-1} est ample, toutes les autres relations $C = pC_1 + qC_2$ représentant des courbes rationnelles *très libres* vérifient la relation $C - C_3 = (p - a_r)C_1 + qC_2 \in \overline{NE}(X) - \{0\}$ à cause de la condition (3.4.13) et sont donc de degré strictement positif. D'où on déduit que C_3 est la seule classe de degré $\deg C_3$. S'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $b_i = 0$, comme $b_r \geq b_1 \geq \dots \geq b_{r-1}$, on a $b_{r-1} = 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \text{Vect}_{\mathbf{Q}} C_3(1) &\subseteq \text{Vect}_{\mathbf{Q}}\{\varrho_0, \dots, \varrho_{r-2}, \varrho_{r+1}, \dots, \varrho_{n+1}\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbf{Q}}(\varrho_1, \dots, \varrho_{r-2}, \varrho_{r-1} + \varrho_r, \varrho_{r+1}, \dots, \varrho_n), \end{aligned}$$

donc $\dim \text{Vect}_{\mathbf{Q}} C_3(1) \leq r + s - 1 = n - 1$ et les courbes rationnelles de classe C_3 ne sont pas *très libre*. Pour obtenir une relation positive de degré bas dont les rayons engendrent l'espace ambiant, comme la relation $C_3 + C_2$ n'est plus positive, considérons la relation

$$C_1 + C_3 = (a_r + 1)C_1 + C_2 : (b_r + 1)\varrho_0 + \sum_{i=1}^{r-1} (b_i + 1)\varrho_i + \sum_{j=1}^{s+1} \varrho_{r+j} = 0,$$

Cette relation satisfait à l'hypothèse (3.4.13) souhaitée. De plus elle est la seule classe de degré $\deg C_1 + \deg C_3$ si (3.4.11) (i.e ω_X^{-1} est ample) est vérifiée. \square

3.4.2 Approximation diophantienne

On étudie l'approximation diophantienne de meilleur niveau et générique avec $\nu = \infty$ et $L = \omega_X^{-1}$ sur les variétés X dont ω_X^{-1} est engendré par ses sections globales. Nous avons vu que X vérifie l'hypothèse 3.3.8. Puisque la collection $\{\varrho_0, \dots, \varrho_r\}$ associée à C_1 est la seule collection primitive centrée, on conclut du théorème 3.3.13 que

Proposition 3.4.4. $\alpha(Q_0, X) = \deg C_1 = 1 + r$.

Dans la suite on cherche la constante essentielle $\alpha_{\text{ess}}(Q_0)$. On se place sur le l'ouvert $U_{\sigma_{r,n+1}}$ avec le paramétrage donné par le cône $\sigma_{r,n+1}$. Le paramétrage est le suivant (cf. (3.2.4))

$$\begin{aligned} \pi : \pi^{-1}(U_{\sigma_{r,n+1}}) &\rightarrow U_{\sigma_{r,n+1}} \simeq \mathbf{A}^n \\ (X_0, \dots, X_{n+1}) &\mapsto (y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{X_1}{X_0 X_{n+1}^{b_1}}, \dots, \frac{X_r}{X_0 X_{n+1}^{b_r}}, \frac{X_{r+1}}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Les coordonnées vérifient la condition de coprimalité

$$\text{pgcd}(X_i X_{r+j}, 0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s) = \text{pgcd}(X_i, 0 \leq i \leq r) \text{pgcd}(X_{r+j}, 1 \leq j \leq s) = 1. \quad (3.4.15)$$

Autrement-dit,

$$\text{pgcd}(X_i, 0 \leq i \leq r) = \text{pgcd}(X_{n+j}, 1 \leq j \leq s) = 1. \quad (3.4.16)$$

On définit une application de $T_Q(U_{\sigma_{r,n+1}})_{\mathbf{R}}$ dans \mathbf{R}^n par

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n) = (y_1 - 1, \dots, y_n - 1),$$

avec la distance naturelle

$$d = \max_{1 \leq m \leq n} |y_m - 1|.$$

Par convention, une *droite générale* est une droite dans $U_{\sigma_0} \simeq \mathbf{A}^n$ avec le paramétrage (3.4.14) passant par Q_0 qui n'est pas dans certain fermé de Zariski. Une telle droite l est l'adhérence dans X du morphisme suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^1 &\longrightarrow U_{\sigma_{r,n+1}} \\ t &\longmapsto (m_1 t + 1, \dots, m_n t + 1) \end{aligned}$$

où les $m_i, 1 \leq i \leq n$ sont des paramètres satisfaisant à certaines conditions ouvertes (dépendant du fermé de Zariski). Elle est de même classe que celle du caractère $\lambda \mapsto (\lambda, \dots, \lambda)$ au paramètre $\varrho = \sum_{i=0}^{r-1} \varrho_i + \sum_{j=1}^s \varrho_{r+j}$. Si $\forall i, b_i > 0$, comme l'élément

$$-\varrho = v_{n+1} + \sum_{i=1}^r (b_i - 1)v_i = \varrho_{n+1} + \sum_{i=1}^{r-1} (b_i - 1)\varrho_i + (b_r - 1)\varrho_0 \in \sigma_{r,r+j}, \quad \forall 1 \leq j \leq s,$$

appartient à l'intérieur relatif d'un cône de l'éventail, sa classe $[l]$ est C_3 . Donc

$$\deg l = \deg C_3 = 1 + s + \sum_{i=1}^r b_i.$$

S'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $b_i = 0$, on a $b_{r-1} = 0$ et donc le même raisonnement pour l'élément

$$-\varrho = \varrho_{n+1} + \varrho_r + \sum_{i=1}^{r-1} b_i \varrho_i$$

nous permet de conclure que $[l] = C_1 + C_3$ et

$$\deg l = \deg C_1 + \deg C_3 = r + s + 2 + \sum_{i=1}^n b_i.$$

On conclut de la proposition 3.4.3 que dans tous les cas les droites générales sont des courbes rationnelles *très libres* de plus petit degré. Par ailleurs, en utilisant les deux relations (3.4.3), (3.4.4), on peut démontrer que

$$T_X|_l = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus s-1} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(b_i) \right) & \text{si } b_i \neq 0, \forall i; \\ \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus s-1} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(b_i + 1) \right) & \text{si } \exists b_i = 0. \end{cases}$$

Cela est en accord avec le fait qu'on peut varier les paramètres m_i pour déformer l en fixant Q_0 de sorte qu'elles couvrent une partie ouverte de X .

Théorème 3.4.5. — Si $b_i > 0$ ($1 \leq i \leq r$), alors on a

$$\alpha_{\text{ess}}(Q) = 1 + s + \sum_{i=1}^r b_i.$$

— S'il existe $b_i = 0$, alors on a

$$\alpha_{\text{ess}}(Q) = n + 2 + \sum_{i=1}^n b_i.$$

Dans tous les cas, en dehors d'un fermé de Zariski, les approximations optimales peuvent s'obtenir sur les droites générales passant par Q . Par conséquent, la constante essentielle est atteinte sur des courbes rationnelles très libres de degré minimal.

Démonstration. On note Z le fermé de Zariski défini par

$$Z = \bigcup_{i=1}^n (y_i = 1)^{\text{Zar}}.$$

Rappelons que, d'après (3.2.10),

$$H_{\omega_X^{-1}}(\pi(X_0, \dots, X_{n+1})) \geq |\mathbf{x}^{D(\sigma_{r,n+1})}| = |X_0^{1+r} X_{n+1}^{1+s+\sum_{i=1}^r b_i}|.$$

Soit $P = (y_1, \dots, y_n) \in U = X - Z$, on fixe $1 \leq j \leq s$. Comme $y_{r+j} \neq 1$, on a alors

$$d(P)^{1+s+\sum_{i=1}^r b_i} H_{\omega_X^{-1}}(P) \geq \frac{|X_{r+j} - X_{n+1}|^{1+s+\sum_{i=1}^r b_i}}{|X_{n+1}^{1+s+\sum_{i=1}^r b_i}|} |X_0^{1+r} X_{n+1}^{1+s+\sum_{i=1}^r b_i}| \geq 1.$$

Si $\exists b_i = 0$, ce qui revient à $b_{r-1} = 0$, la $(r-1)$ -ème coordonnée est de la forme $\frac{X_{r-1}}{X_0}$. On a donc

$$d(P)^{n+2+\sum_{i=1}^r b_i} H_{\omega_X^{-1}}(P) \geq \left| \frac{X_0 - X_{r-1}}{X_0} \right|^{1+r} \left| \frac{X_{r+j} - X_{n+1}}{X_{n+1}} \right|^{1+s+\sum_{i=1}^r b_i} |X_0^{1+r} X_{n+1}^{1+s+\sum_{i=1}^r b_i}| \geq 1.$$

Ces minoration nous fournissent que

$$\alpha_{\text{ess}\omega_X^{-1}}(Q_0) \geq \deg_{\omega_X^{-1}}(l) = \begin{cases} 1 + s + \sum_{i=1}^r b_i & \text{Si } b_i > 0, \forall i; \\ n + 2 + \sum_{i=1}^n b_i & \text{Si } \exists i \text{ tel que } b_i = 0. \end{cases}$$

Puisqu'une droite l générale dans $U_{\sigma_{r,n+1}} - Z$ est lisse en Q et donc

$$\alpha_{\text{ess}\omega_X^{-1}}(Q_0, l) = \alpha_{\text{ess}\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\langle \omega_X^{-1}, l \rangle)}(\phi^{-1}(Q_0), \mathbf{P}^1) = \langle \omega_X^{-1}, l \rangle$$

pour certain paramétrage $\phi : \mathbf{P}^1 \rightarrow l$. Cela démontre les égalités dans les deux cas. \square

Chapitre 4

APPROXIMATION DIOPHANTINNE ET DISTRIBUTION LOCALE SUR LA SURFACE X_3

4.1 Introduction

4.1.1 Notations et définitions

4.1.1.1 Énoncé du problème

Une surface de del Pezzo de degré 6 est isomorphe sur \mathbf{C} à l'éclatement de \mathbf{P}^2 en trois points non-alignés. Dans le cas où ces points sont rationnels, nous pouvons nous ramener à la surface X_3 dont les trois points éclatés sont donnés en coordonnées homogènes par $P_1 = [1 : 0 : 0]$, $P_2 = [0 : 1 : 0]$, $P_3 = [0 : 0 : 1]$. On vérifie alors que X_3 est isomorphe à une sous-variété de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ définie par l'équation $u_1 u_2 u_3 = v_1 v_2 v_3$, où $[u_i, v_i]$ sont les coordonnées homogènes du i -ème \mathbf{P}^1 . On note ω_X^{-1} le fibré en droites anticanonique de X_3 . Avec ce plongement ω_X^{-1} est isomorphe au tiré en arrière du fibré $\mathcal{O}(1, 1, 1)$. On note $\pi : X_3 \rightarrow \mathbf{P}^2$ le morphisme d'éclatement et E_1, E_2, E_3 les diviseurs exceptionnels. Puisque π est un isomorphisme en dehors $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, on abrège souvent $\pi^{-1}([\alpha : \beta : \gamma])$ en $[\alpha : \beta : \gamma]$ pour $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

Pour tout point $P = \pi^{-1}([x : y : z])$ qui n'appartient pas aux diviseurs exceptionnels, on utilise la hauteur de P calculée par la formule suivante :

$$H_{\omega_X^{-1}}(\pi^{-1}([x : y : z])) = \frac{\max(|x|, |y|) \max(|y|, |z|) \max(|x|, |z|)}{\text{pgcd}(x, y) \text{pgcd}(y, z) \text{pgcd}(x, z)}.$$

L'application $H = H_{\omega_X^{-1}}$ est une hauteur de Weil absolue associée à ω_X^{-1} . Comme les autres surfaces de del Pezzo de degré ≥ 7 , la formule de la hauteur (associée au fibré en droites anticanonique ample) reflète le nombre de points éclatés.

Le groupe $G = \mathbf{G}_m^3 / \mathbf{G}_m$ agit sur X_3 de la manière suivante

$$(\lambda, \mu, \delta) \times [x : y : z] \mapsto [\lambda x : \mu y : \delta z]$$

Pour $\alpha\beta\gamma \neq 0$, il existe un élément de G qui envoie $[\alpha : \beta : \gamma]$ sur $Q = [1 : 1 : 1]$. On peut donc se ramener pour notre étude au point neutre Q .

Il y a trois courbes $\{l_i\}_{i=1}^3$ passant par Q , définies par les transformations strictes des trois droites dans \mathbf{P}^2 d'équations respectives :

$$x = y, \quad y = z, \quad x = z.$$

Nous verrons qu'il s'agit des sous-variétés localement accumulatrices en Q . On note $Z = \cup_i l_i$. Sur $X_3 \setminus Z$, les points rationnels s'approchent plus lentement de Q que ceux dans Z , mais ils ne se concentrent pas sur les sous-variétés strictes. On s'intéresse à la manière dont ils sont distribués.

On fixe quelques notations pour une utilisation ultérieure. La lettre p désigne un nombre premier. Rappelons qu'une fonction $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ est dite *multiplicative* si elle vérifie les conditions suivantes :

$$f(1) = 1, \quad f(mn) = f(m)f(n) \text{ si } \text{pgcd}(m, n) = 1.$$

On note μ la fonction de Möbius, τ la fonction donnant le nombre total de diviseurs, ω la fonction donnant le nombre total de facteurs premiers, φ la fonction d'indicatrice d'Euler et on définit la fonction ϕ par

$$\phi(n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (4.1.1)$$

On a $\varphi(n) = n\phi(n)$.

4.1.1.2 La distance projective

On introduit une fonction de distance pour X_3 . Elle est déjà définie pour toute place d'un corps de nombre dans ([MR15] §2). Pour $x = [x_0 : \dots : x_n], y = [y_0 : \dots : y_n] \in \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, la distance projective naturelle (associée à la place infinie) $d_\infty(x, y)$ est définie par

$$d_\infty(x, y) = \frac{\sum_{0 \leq i \neq j \leq n} |x_i y_j - x_j y_i|}{\sqrt{\sum_{i=0}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n |y_i|^2}}. \quad (4.1.2)$$

Pour une sous-variété projective Y de \mathbf{R}^n , la *distance projective naturelle* sur Y est obtenue par restriction. Les distances induites par des immersions différentes sont équivalentes dans un voisinage compact de Q ([MR15]

Lemma 2.4). On appelle une fonction $d : Y(\mathbf{R}) \times Y(\mathbf{R}) \mapsto \mathbf{R}_{\geq 0}$ une *distance projective* si elle équivaut à une distance projective naturelle sur Y .

Dans notre cas on définit la fonction $d : X_3(\mathbf{Q}) \times X_3(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}$ de la façon suivante. On plonge X_3 dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Pour $W = [s_1 : t_1] \times [s_2 : t_2] \times [s_3 : t_3]$ et $V = [x_1 : y_1] \times [x_2 : y_2] \times [x_3 : y_3]$, on définit

$$\begin{aligned} d(W, V) &= d_{12}(W, V) + d_{23}(W, V) + d_{13}(W, V) \\ &= \frac{|s_1 y_1 - t_1 x_1|}{\sqrt{s_1^2 + t_1^2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{|s_2 y_2 - t_2 x_2|}{\sqrt{s_2^2 + t_2^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{|s_3 y_3 - t_3 x_3|}{\sqrt{s_3^2 + t_3^2} \sqrt{x_3^2 + y_3^2}}. \end{aligned}$$

Par un calcul de routine on voit que d équivaut à la distance projective naturelle sur X_3 induite par l'immersion de Segre. Donc d est une distance projective. La raison pour laquelle on choisit cette distance est que l'on peut déduire une borne inférieure pour le produit de d avec certaine puissance de la hauteur anticanonique (voir la Section 4.2).

4.1.1.3 Les constantes d'approximation

Pour chaque l_i , on a

$$\omega_X^{-1}|_{l_i} = \mathcal{O}_{l_i}((\omega_X^{-1} \cdot l_i)) = \mathcal{O}_{l_i}(2).$$

Par la functorialité de la hauteur ([Ser97] 2.3), $H_{\omega_X^{-1}|_{l_i}}$ équivaut à la hauteur associée au fibré en droites $\mathcal{O}(2)$ de $l_i \simeq \mathbf{P}^1$. Le théorème 2.1.7 implique que $\alpha(Q, Z) = 2$ (rappelons qu'ici Z est la réunion des trois droites l_i).

Notre premier résultat, démontré dans le §2, est le suivant.

Théorème 4.1.1. *On a $3 \in B(Q, X_3 \setminus Z)$ (cf. (2.1.1)) et $\alpha(Q, X_3 \setminus Z) = 3$. En particulier, $\alpha_{\text{ess}}(Q) = 3$ et Z est la variété localement accumulatrice maximale.*

Ainsi, pour trouver une partie ouverte de X_3 dont la constante d'approximation atteint la constante essentielle, il faut supprimer toutes les sous-variétés localement accumulatrices, à savoir les trois droites.

4.1.2 Énoncé du théorème principal

Comme Z est localement accumulatrice, on la supprime et on étudie la distribution locale des points rationnels sur $X_3 \setminus Z$. Nous pouvons toujours modifier le voisinage U de Q de sorte que tous les points $[x : y : z]$ de $U(\mathbf{Q})$ vérifient

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Les trois droites définies au début divisent U en six parties (selon les d'ordre induit de $\{x, y, z\}$). Les symétries naturelles nous permettent de nous ramener à l'ensemble $R \cap U$ où

$$R = \{[x : y : z] : x > y > z > 0\}.$$

On fixe des coordonnées (s, t) de $T_Q X_3$, le difféomorphisme local $\rho : U(\mathbf{Q}) \rightarrow T_Q X_3$ que l'on va utiliser est donné sous ces coordonnées par

$$[x : y : z] \mapsto \left(\frac{x}{z} - 1, \frac{y}{z} - 1 \right) \in \mathbf{R}^2. \quad (4.1.3)$$

Ainsi Q est envoyé sur $(0, 0)$ et l'image de R dans \mathbf{R}^2 par le difféomorphisme ρ ci-dessus est la région

$$\bar{R} = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 : s > t > 0\}.$$

On introduit la distance euclidienne sur $T_Q X_3$ définie par

$$d((s, t), (w, z)) = \max(|s - w|, |t - z|). \quad (4.1.4)$$

Cette distance est équivalente à la distance projective définie précédemment.

Théorème 4.1.2. *Pour toute fonction f intégrable à support compact dans la région*

$$\bar{R} = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 : s > t > 0\},$$

on a pour $B \rightarrow \infty$,

$$\int f \, d\delta_{U, Q, B, \alpha_{\text{ess}}} = B^{\frac{1}{3}} \log B \int f(s, t) \frac{\beta(st(s-t))}{st(s-t)} \, ds \, dt + O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B) \quad (4.1.5)$$

où

$$\beta(s) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{u,e \\ u^3 e < s}} u \phi(ue) \mathfrak{Z}^{\omega(e)} \sum_{k|u} \frac{\mu(k) \mathfrak{Z}^{\omega(k)}}{k}$$

et ϕ, ω, μ sont des fonctions arithmétiques définies au début. La constante implicite dépend de f .

La mesure asymptotique a une densité, alors que dans les cas de \mathbf{P}^2, X_1 et X_2 (ici X_i signifie la surface obtenue par éclater \mathbf{P}^2 en i points en position générale), la mesure asymptotique est concentrée sur les droites, dont la dimension de Hausdorff est 1 ([Pag08]). De plus, la fonction de densité fait apparaître les trois droites qui sont les variétés localement accumulatrices qu'on a retirées. On va discuter de ce phénomène à la fin du texte.

4.1.3 Les méthodes utilisées pour le comptage

La preuve du Théorème 4.1.1 est élémentaire grâce au choix de la distance. Cette preuve est faite au §2. Les détails du comptage forment le §4. La difficulté significative en comparant ce type de problème aux problèmes classiques de comptage des points rationnels sur les variétés algébriques est l'apparence de la distance. Puisque chaque point rationnel est situé sur une droite unique passant par Q (comme précédemment, cela veut dire la transformation stricte des droites dans \mathbf{P}^2), on introduit une paramétrisation naturelle pour ces droites. Cela peut, dans une certaine mesure, simplifier l'expression des pgcd. Ensuite on va définir quelques paramètres concernant les pgcd et décomposer l'ensemble considéré suivant ces paramètres grâce à l'observation que dans un voisinage borné de Q , certains de ces paramètres ne prennent qu'un nombre fini de valeurs qui est indépendant de la borne de la hauteur. Puis en fixant ces paramètres, on compte sur chaque droite et on somme pour obtenir la quantité totale. Au cours de cette étape la transformation de Cremona joue un rôle important. Elle envoie tous les points ayant une « grande » pente sur ceux dans l'autre région, dont la pente est « petite », si bien que l'on peut les traiter directement. Enfin pour obtenir une mesure, on va échanger des sommes et des intégrales.

Notre méthode peut être adaptée facilement aux cas \mathbf{P}^2, X_1 , et X_2 .

4.2 Détermination de la constante essentielle

4.2.1 Borne inférieure

On établit d'abord une borne inférieure pour $\alpha(Q, X)$ et $\alpha_{\text{ess}}(Q)$.

On fixe un point $P = \pi^{-1}([x : y : z]) \in X_3 \setminus Z$. Par symétrie on peut supposer que $x > y > z$. On introduit les notations :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x}{\text{pgcd}(x, y)}, & u_2 &= \frac{y}{\text{pgcd}(x, y)}, \\ v_1 &= \frac{y}{\text{pgcd}(y, z)}, & v_2 &= \frac{z}{\text{pgcd}(y, z)}, \\ w_1 &= \frac{x}{\text{pgcd}(x, z)}, & w_2 &= \frac{z}{\text{pgcd}(x, z)}. \end{aligned}$$

Alors on a $u_1 > u_2, v_1 > v_2, w_1 > w_2$. Avec ces notations, $H(P) = u_1 v_1 w_1$. En utilisant l'inégalité fondamentale

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & d(P, Q) H_{\omega_X^{-1}}(P)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|u_1 - u_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} + \frac{|v_1 - v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} + \frac{|w_1 - w_2|}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \right) (u_1 v_1 w_1)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq \frac{1}{2} \left((u_1 - u_2) u_1^{-\frac{2}{3}} v_1^{\frac{1}{3}} w_1^{\frac{1}{3}} + (v_1 - v_2) u_1^{\frac{1}{3}} v_1^{-\frac{2}{3}} w_1^{\frac{1}{3}} + (w_1 - w_2) u_1^{\frac{1}{3}} v_1^{\frac{1}{3}} w_1^{-\frac{2}{3}} \right) \\ &\geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{(u_1 - u_2)(v_1 - v_2)(w_1 - w_2)} \\ &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Cela montre que $3 \in B(Q, X_3 \setminus Z)$ et donc on a $\alpha_{\text{ess}}(Q) \geq \alpha(Q, X_3 \setminus Z) \geq 3$.

4.2.2 Borne supérieure

Prenons une droite D différente de l_i , on a

$$\omega_X^{-1}|_D = \mathcal{O}_D((\omega_X^{-1} \cdot D)) = \mathcal{O}_D(3).$$

Et $H_{\omega_X^{-1}|_D}$ équivaut à la hauteur associée au fibré en droites $\mathcal{O}(3)$ de $D \simeq \mathbf{P}^1$. D'après le théorème 4.1.2, $\alpha(Q, D) = 3$. Puisque $\cup_{D \neq l_i} D$ est dense dans X_3 , pour toute partie ouverte V de X_3 de sorte que $d(Q, V) = 0$ on a $\alpha(Q, V) \leq 3$, donc $\alpha_{\text{ess}}(Q) \leq 3$.

4.2.3 Une remarque sur un résultat de McKinnon et Roth

Supposons pour le moment que X est une variété projective définie sur corps algébriquement clos et L est un fibré en droites ample sur X . On note Q un point rationnel de X .

Définition 4.2.1. On dit que $\alpha(Q, X)$ est calculée sur une sous-variété fermée stricte Z de X si $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que pour toute suite de points rationnels $(P_i) \rightarrow Q$ de X vérifiant $\alpha(Q, (P_i)) \leq \varepsilon_0 + \alpha(Q, X)$, tous sauf un nombre fini d'entre eux se trouvent dans Z . Autrement dit, $\alpha(Q, Z) < \alpha(Q, X - Z)$. Dans ce cas là, Z est localement accumulatrice.

Il convient de distinguer les deux notions « est calculée » et « peut être calculée ». La première signifie que toute suite de points ayant la constante d'approximation assez petite se trouve uniquement dans Z (ou bien, tout sauf un nombre fini d'éléments), alors que la deuxième dit simplement que l'on peut choisir une suite qui atteint la constante d'approximation donnée dans une sous-variété. Le corollaire suivant donne un exemple sur la différence entre ces notions.

Rappelons un des principaux théorèmes dans ([MR15]). Il nous donne une condition suffisante pour que α soit calculée sur une sous-variété fermée stricte de X . En d'autres termes, il fournit un critère de l'existence d'une sous-variété localement accumulatrice.

Théorème 4.2.2 ([MR15], Théorème 6.2). *On note $n = \dim X$. Alors $\alpha(Q, X)$ est calculée sur une sous-variété fermée stricte de X pourvu que $\alpha(Q, X) < \frac{n}{n+1} \varepsilon_L(Q)$.*

Maintenant, revenons à notre exemple précédent à savoir $X = X_3$ une surface de del Pezzo de degré 6 et L le fibré anticanonique de X_3 .

Corollaire 4.2.3. *La constante d'approximation $\alpha(Q, X_3)$, qui est égale à 2, est calculée sur la sous-variété des trois droites Z . La constante essentielle $\alpha_{\text{ess}}(Q)$ peut être calculée sur toute droite passant par Q différente de celle dans Z .*

Démonstration. Cela découle de $\alpha(Q, X_3 \setminus Z) = 3$, $\alpha(Q, Z) = 2$ et de la discussion dans la Section 2.2. \square

Remarque 4.2.4. D'après ([Bro06]), $\varepsilon_{\omega_X^{-1}}(Q) = 2$. Donc $\alpha(Q, X_3) > \frac{2}{3} \varepsilon_{\omega_X^{-1}}(Q)$. Cela signifie que l'hypothèse dans Théorème 4.2.2 ci-dessus n'est pas vérifiée ici, alors qu'il existe des sous-variétés localement accumulatrices.

4.3 Transformation de Cremona et paramétrisation des droites

4.3.1 La transformation de Cremona

On définit une application rationnelle $\psi : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ par

$$\psi : [x : y : z] = [yz : xz : xy]. \quad (4.3.1)$$

Cette application ψ est bien définie sauf en les trois points P_1, P_2, P_3 . Elle est d'ordre 2 et induit un morphisme :

$$\Psi : X_3 \rightarrow X_3$$

$$\Psi([u_1 : v_1] \times [u_2 : v_2] \times [u_3, v_3]) = [v_1 : u_1] \times [v_2 : u_2] \times [v_3, u_3].$$

En dehors des trois diviseurs exceptionnels E_i , Ψ est calculé par la formule (4.3.1). Ce morphisme établit une bijection entre les points rationnels dans la région R et ceux dans la région

$$S = \{[x : y : z] : z > y > x > 0\}. \quad (4.3.2)$$

Par un calcul très simple que l'on omet, on a

Proposition 4.3.1. *La transformation de Cremona préserve la hauteur :*

$$H \circ \Psi = H.$$

4.3.2 La paramétrisation

Tout d'abord on introduit quelques paramètres intrinsèques pour les points rationnels dans R .

Définition 4.3.2. Pour $V = [x : y : z] \in R$ avec $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$, on note

$$d_1 = \text{pgcd}(y, z), \quad d_2 = \text{pgcd}(x, z), \quad d_3 = \text{pgcd}(x, y), \quad d_4 = \text{pgcd}(x - z, y - z), \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} m(V) &= \frac{y - z}{d_4}, & n(V) &= \frac{x - z}{d_4}, \\ e_1 &= \frac{y - z}{d_1 d_4}, & e_2 &= \frac{x - z}{d_2 d_4}, & e_3 &= \frac{x - y}{d_3 d_4}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

on voit que

$$\text{pgcd}(e_i, e_j) = 1.$$

La *pen*te est définie par

$$\mu(V) = \frac{y - z}{x - z} = \frac{m(V)}{n(V)}. \quad (4.3.5)$$

On va noter $u(V) = d_4$ et $\mathbf{e}(V)$ le triplet (e_1, e_2, e_3) pour le point V .

Les nombres correspondants pour les points rationnels dans S sont définies en échangeant x et z . Pour éviter toute confusion, on les donne en détails. Pour $U = [x : y : z] \in S$ avec $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$, on définit

$$d'_1 = \text{pgcd}(y, x), \quad d'_2 = \text{pgcd}(x, z), \quad d'_3 = \text{pgcd}(z, y), \quad d'_4 = \text{pgcd}(x - z, y - z),$$

$$\begin{aligned} m'(U) &= \frac{y - x}{d'_4}, & n'(U) &= \frac{z - x}{d'_4}, \\ e'_1 &= \frac{y - x}{d'_1 d'_4}, & e'_2 &= \frac{z - x}{d'_2 d'_4}, & e'_3 &= \frac{z - y}{d'_3 d'_4}. \\ \mu'(U) &= \frac{y - x}{z - x} = \frac{m'(U)}{n'(U)}. \\ u'(U) &= d'_4, & \mathbf{e}'(U) &= (e'_1, e'_2, e'_3). \end{aligned}$$

On décrit maintenant comment la transformation de Cremona se traduit sur ces paramètres.

Proposition 4.3.3. Soit $V = [x : y : z] \in R$. On note $\mathbf{e}(V) = (e_1, e_2, e_3)$ et $U = \Psi(V) \in S$. Alors on a

$$\begin{aligned} u(V) &= u'(U), & \mathbf{e}'(U) &= (e_3, e_2, e_1), \\ m'(U) &= \frac{e_1 e_2 e_3 z}{m(V) n(V)}, & n'(U) &= \frac{e_1 e_2 e_3 y}{m(V) (n(V) - m(V))}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$U = \left[\frac{yz}{d_1 d_2 d_3} : \frac{xz}{d_1 d_2 d_3} : \frac{xy}{d_1 d_2 d_3} \right].$$

Ces coordonnées de U sont premières entre elles. On vérifie directement que

$$\begin{aligned} u'(U) &= \text{pgcd} \left(\frac{y(x - z)}{d_1 d_2 d_3}, \frac{x(y - z)}{d_1 d_2 d_3} \right) \\ &= \text{pgcd}(x - z, y - z) = u(V). \\ d'_1 &= \frac{z}{d_1 d_2}, & d'_2 &= \frac{y}{d_1 d_3}, & d'_3 &= \frac{x}{d_2 d_3}, & d'_4 &= d_4. \\ e'_1 &= \frac{1}{d_1 d_2 d_3} \frac{xz - yz}{d'_1 d'_4} = \frac{x - y}{d_3 d_4} = e_3, \\ e'_2 &= \frac{1}{d_1 d_2 d_3} \frac{xy - yz}{d'_2 d'_4} = \frac{x - z}{d_2 d_4} = e_2, \\ e'_3 &= \frac{1}{d_1 d_2 d_3} \frac{xy - xz}{d'_3 d'_4} = \frac{y - z}{d_1 d_4} = e_1. \end{aligned}$$

$$m'(U) = \frac{z(x-y)}{d_1 d_2 d_3 d_4} = \frac{e_1 e_2 e_3 z}{m(V)n(V)},$$

$$n'(U) = \frac{y(x-z)}{d_1 d_2 d_3 d_4} = \frac{e_1 e_2 e_3 y}{m(V)(n(V) - m(V))}.$$

□

Maintenant on introduit une paramétrisation pour les droites passant par Q (sauf $l_i (1 \leq i \leq 3)$). En termes de cette paramétrisation l'expression des pgcd est relativement simple. Toutes ces droites sont les transformations strictes des droites dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ de la forme

$$ax + by + cz = 0, \quad a + b + c = 0, \quad abc \neq 0.$$

On peut toujours supposer que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Pour une telle droite l , on définit le morphisme de paramétrisation sur la région R par :

$$\begin{aligned} \phi_{a,b} : \mathbf{P}^1 &\rightarrow l \subset X_3 \\ [u : v] &\mapsto [ub + v : -ua + v : v]. \end{aligned}$$

Pour la région S , il suffit d'échanger les coordonnées.

$$\begin{aligned} \phi'_{a,b} : \mathbf{P}^1 &\rightarrow l \subset X_3 \\ [u : v] &\mapsto [v : -ua + v : ub + v]. \end{aligned}$$

Proposition 4.3.4. *Il existe une bijection entre l'ensemble*

$$\{(a, b, u, v) \in \mathbf{Z}^4 : 0 < -a < b, u > 0, v > 0, \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(u, v) = 1\}$$

et l'ensemble des points rationnels dans R (resp. S).

Démonstration. Il suffit de montrer cela pour R car les deux régions et les paramétrisations sont complètement symétriques. Une direction est déjà donnée par les paramétrisations. Pour l'inverse, on se donne un point rationnel $[x : y : z] \in R$ avec $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$, on définit $0 < -a < b$ et $u, v > 0$ de sorte que

$$-\frac{a}{b} = \frac{y-z}{x-z}, \quad \frac{u}{v} = \frac{x-1}{b} = \frac{y-1}{-a}$$

avec

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(u, v) = 1.$$

Cela veut dire que ce point correspond à un quadruplet unique (a, b, u, v) vérifiant la condition souhaitée. Cela établit la bijection. □

Pour $V = [x : y : z] \in R \cap l$, on vérifie la relation suivante entre notre paramétrisation et les paramètres introduits précédemment.

$$u = u(V), \quad a = -m(V), \quad b = n(V), \tag{4.3.6}$$

$$d_1 = \text{pgcd}(-ua + v, v) = \text{pgcd}(a, v), \quad e_1 = -\frac{a}{d_1},$$

$$d_2 = \text{pgcd}(ub + v, v) = \text{pgcd}(b, v), \quad e_2 = \frac{b}{d_2},$$

$$d_3 = \text{pgcd}(ub + v, -ua + v) = \text{pgcd}(ub + v, a + b) = \text{pgcd}(-ua + v, a + b), \quad e_3 = \frac{a + b}{d_3}.$$

4.3.3 Lien avec le torseur universel

Le torseur universel \mathcal{C} au-dessus de X_4 (éclaté de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ en $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ et $[1 : 1 : 1]$) est une partie ouverte de la sous-variété de $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}}^{10} = \text{Spec } \mathbf{Q}[z_{i,j}, 1 \leq i < j \leq 5]$ définie par les équations de Plücker ([Pey98], exemple 4.2.4)

$$\begin{aligned} z_{1,2}z_{3,4} - z_{1,3}z_{2,4} + z_{1,4}z_{2,3} &= 0, \\ z_{1,2}z_{3,5} - z_{1,3}z_{2,5} + z_{1,5}z_{2,3} &= 0, \\ z_{1,3}z_{4,5} - z_{1,4}z_{3,5} + z_{1,5}z_{3,4} &= 0, \\ z_{1,2}z_{4,5} - z_{1,4}z_{2,5} + z_{1,5}z_{2,4} &= 0, \\ z_{2,3}z_{4,5} - z_{2,4}z_{3,5} + z_{2,5}z_{3,4} &= 0. \end{aligned}$$

Dans la région R , la relation entre $\{z_{i,j}\}$ satisfaisant aux conditions (on identifie $z_{i,j}$ à $z_{j,i}$ lorsque $i > j$)

$$\text{pgcd}(z_{i,j}, z_{i,k}) = 1, \quad \text{pgcd}(z_{i,k}, z_{j,k}) = 1$$

et les coordonnées intrinsèques sont les suivantes. On note

$$f_1 = \frac{x}{d_2 d_3}, \quad f_2 = \frac{y}{d_1 d_3}, \quad f_3 = \frac{z}{d_1 d_2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} d_i &= z_{1,6-i}, \quad f_i = z_{2,6-i}, \\ e_1 &= z_{3,4}, \quad e_2 = z_{3,5}, \quad e_3 = z_{4,5}. \end{aligned}$$

Du point de vue de la Proposition 4.3.4, il existe une bijection entre $\{z_{i,j}\}$ satisfaisant aux équations de Plücker avec les conditions de co-primalité ci-dessus et nos paramètres $\{a, b, u, v\}$. Cette bijection est donnée par

$$(z_{i,j}, 1 \leq i < j \leq 5) \mapsto (-z_{3,4}z_{1,5}, z_{3,5}z_{1,4}, z_{1,2}, z_{1,4}z_{1,5}z_{2,3}) = (a, b, u, v).$$

En particulier, la paramétrisation

$$x = ub + v, \quad y = -ua + v, \quad a + b + c = 0$$

équivalent aux trois premières équations de Plücker.

Avant de faire le calcul, on remarque qu'une autre paramétrisation, qui est celle d'origine, est de paramétrer les coordonnées directement :

$$(z_{i,j}, 1 \leq i < j \leq 5) \mapsto (z_{1,4}z_{1,3}z_{2,5}, z_{1,5}z_{1,3}z_{2,4}, z_{1,4}z_{1,5}z_{2,3}, z_{1,5}, z_{1,4}, z_{1,3}) = (x, y, z, d_1, d_2, d_3).$$

Elle vient du torseur universel au-dessus de X_3 . En l'utilisant on peut aussi éliminer les pgcd dans la formule de la hauteur. Mais la difficulté viendra du calcul de la distance. Rappelons que dans la formule de la distance sur le plan de tangent, l'expression " $x - z$ " apparaît. Cela va produire une condition linéaire sur les paramètres. C'est cette condition qui ajoute certaines difficultés pour contrôler les termes d'erreur.

4.4 Calcul global

Pour obtenir une meilleure compréhension sur la distribution des points rationnels, on calcule d'abord la limite du nombre total des points rationnels dans un voisinage compact de Q dans $T_Q X_3$. Comme indiqué précédemment, on peut se ramener à la région R . On va calculer la limite de la suite $\{\delta_{U,Q,B,\alpha_{\text{ess}}}(\chi(\varepsilon))\}_B$ où $\chi(\varepsilon)$ désigne la fonction caractéristique du domaine $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > y > 0, d(Q, (x, y)) \leq \varepsilon\} \subset T_Q X_3$ avec $\varepsilon > 0$ quelconque. On va voir que pour ε fixé, on obtient la finitude des paramètres u, e_i , ce qui nous permet d'écrire la formule de somme d'une manière plus facile.

On a

$$\delta_{U,Q,B,\alpha_{\text{ess}}}(\chi(\varepsilon)) = \# \left\{ \begin{array}{l} P = [x : y : z] \\ x > y > z > 0 \\ \text{pgcd}(x, y, z) = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \max\left(\left|\frac{x}{z} - 1\right|, \left|\frac{y}{z} - 1\right|\right) \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{\max(|x|, |y|) \max(|x|, |z|) \max(|y|, |z|)}{\text{pgcd}(x, y) \text{pgcd}(x, z) \text{pgcd}(x, z)} \leq B \end{array} \right. \right\} \quad (4.4.1)$$

On va sommer d'abord sur chaque droite.

$$\delta_{U,Q,B,\alpha_{\text{ess}}}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{\substack{0 < -a < b \\ \text{pgcd}(a,b)=1}} \#F_B(a, b) \quad (4.4.2)$$

où en introduisant les paramètres $u, v, a, b, d_1, d_2, d_3$ comme (4.3.6) (pour (a, b) fixé),

$$F_B(a, b) = \left\{ \begin{array}{l} P = [x : y : z] \\ x > y > z > 0 \\ \text{pgcd}(x, y, z) = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \left| \frac{x}{z} - 1 \right| \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{3}}; \mu(P) = -\frac{a}{b} \\ \frac{\max(|x|, |y|) \max(|x|, |z|) \max(|y|, |z|)}{\text{pgcd}(x, y) \text{pgcd}(x, z) \text{pgcd}(x, z)} \leq B \end{array} \right. \right\} \quad (4.4.3)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in \mathbf{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ \text{pgcd}(u, v) = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{u}{v} \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{3}} b^{-1} \text{ ①} \\ (ub + v)^2(-ua + v) \leq B d_1 d_2 d_3 \text{ ②} \end{array} \right. \right\} \quad (4.4.4)$$

On note $e = e_1 e_2 e_3$ et $\lambda = -\frac{a}{b}(1 + \frac{a}{b})$. D'une part, pour tout $(u, v) \in F_B(a, b)$, l'inégalité ② nous donne

$$v^3 < (ub + v)^2(-ua + v) \leq B d_1 d_2 d_3.$$

Compte tenu de l'inégalité ①,

$$u \leq \frac{\varepsilon v}{B^{\frac{1}{3}} b} < \frac{\varepsilon}{b} (d_1 d_2 d_3)^{\frac{1}{3}} = \frac{\varepsilon}{b} (|a| b (a + b))^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}} = \varepsilon (\lambda e^{-1})^{\frac{1}{3}}$$

ce qui entraîne que

$$\lambda \geq \frac{u^3 e}{\varepsilon^3},$$

d'où

$$\left| \frac{a}{b} \right| \in]\frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} + C_0[. \quad (4.4.5)$$

avec

$$C_0 = C_0(u, e, \varepsilon) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4eu^3}{\varepsilon^3}}. \quad (4.4.6)$$

Cela nous donne une borne pour la pente des droites intervenant.

D'autre part, on a

$$u \leq \varepsilon (\lambda e^{-1})^{\frac{1}{3}} < \frac{\varepsilon}{4^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{1}{3}} \quad (4.4.7)$$

d'où

$$ue^{\frac{1}{3}} \leq \frac{\varepsilon}{4^{\frac{1}{3}}}. \quad (4.4.8)$$

Cela signifie que si l'on fixe $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de choix pour u et e et donc pour (e_1, e_2, e_3) aussi. En particulier si $\varepsilon \leq 4^{\frac{1}{3}}$, $F(a, b) = \emptyset$. Donc il y a un « trou » autour de Q . En remarquant que cette valeur est indépendante de B , cela correspond exactement à la « borne inférieure » que l'on a démontré dans la section précédente (notons que l'on a changé la fonction de distance).

Nous pouvons écrire (4.4.2) sous la forme

$$\delta_{U,Q,B,\alpha_{\text{ess}}}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{u, e_i} \#F(u, e_i, \varepsilon) = \sum_{u, e_i} \sum_{\substack{0 < -a < b \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b}} \#F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) \quad (4.4.9)$$

où

$$F(u, e_i, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} P = [x : y : z] \\ x > y > z > 0 \\ \text{pgcd}(x, y, z) = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \left| \frac{x}{z} - 1 \right| \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{3}}, u(P) = u, \mathbf{e}(P) = (e_1, e_2, e_3); \\ \frac{\max(|x|, |y|) \max(|x|, |z|) \max(|y|, |z|)}{\text{pgcd}(x, y) \text{pgcd}(x, z) \text{pgcd}(x, z)} \leq B \end{array} \right. \right\} \quad (4.4.10)$$

et $F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b)$ est l'ensemble des $v \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ vérifiant les deux conditions suivantes

$$(ub + v)^2(-ua + v) \leq B |a| b (a + b) e^{-1}, v \geq \varepsilon^{-1} B^{\frac{1}{3}} ub, \quad (4.4.11)$$

$$\text{pgcd}(a, v) = -\frac{a}{e_1}, \text{pgcd}(b, v) = \frac{b}{e_2}, \text{pgcd}(-ua + v, a + b) = \frac{a + b}{e_3}, \text{pgcd}(u, v) = 1. \quad (4.4.12)$$

Maintenant on fixe $\varepsilon, u, e_1, e_2, e_3$ avec $\text{pgcd}(e_i, e_j) = 1$ pour $1 \leq i < j \leq 3$. Rappelons que $e = e_1 e_2 e_3$. Nous analysons les conditions (4.4.11) et (4.4.12) séparément.

I. La condition (4.4.11).

Puisque la condition

$$(ub + v)^3 \leq B|a|b(a + b)e^{-1}$$

implique la première condition de (4.4.11), qui elle-même entraîne que

$$v^3 \leq B|a|b(a + b)e^{-1},$$

l'ensemble des solutions v de la condition (4.4.11) est l'intersection avec \mathbf{Z} de l'intervalle

$$I = I_{a,b,u,e,\varepsilon} = [\varepsilon^{-1}B^{\frac{1}{3}}ub, B^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}}(|a|b(a + b))^{\frac{1}{3}} - ubC_{a,b,u,B}] \quad (4.4.13)$$

où $C_{a,b,u,B} \in]0, 1[$ est une constante qui dépend de a, b, B, u . Pour que l'intervalle I soit non-vidé, on doit avoir

$$e^{-\frac{1}{3}}B^{\frac{1}{3}}(|a|b(a + b))^{\frac{1}{3}} - ubC_{a,b,u,B} \geq \varepsilon^{-1}B^{\frac{1}{3}}ub.$$

Il en découle que

$$\left| \frac{a}{b} \right| \in \left] \frac{1}{2} - C_1, \frac{1}{2} + C_1 \right[. \quad (4.4.14)$$

où

$$C_1 = C(a, b, u, \varepsilon, B) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4eu^3}{\varepsilon^3} (1 + \varepsilon C_{a,b,B} B^{-\frac{1}{3}})^3} < C_0. \quad (4.4.15)$$

avec

$$C_0 - C_1 = O_{\varepsilon,u,e}(B^{-\frac{1}{3}}). \quad (4.4.16)$$

II. La condition (4.4.12). La condition (4.4.12) implique la relation

$$\text{pgcd}\left(u, \frac{ab(a + b)}{e}\right) = 1. \quad (4.4.17)$$

Nous restreignons donc la somme aux (a, b) vérifiant cette condition. Fixons une paire (p, q) telle que

$$pa + qb = 1.$$

Lemme 4.4.1. *Les v satisfaisant la condition (4.4.12) sont les éléments de*

$$\Gamma'(a, b) = \{u(q - p)ab + ab(a + b)e^{-1}n : n \in \mathbf{Z}, \text{pgcd}(n, ue) = 1\}. \quad (4.4.18)$$

Démonstration. Les v satisfaisant à

$$\frac{a}{e_1} | v, \quad \frac{b}{e_2} | v, \quad \frac{a + b}{e_3} | -ua + v$$

forment le translaté d'un réseau

$$\Gamma(a, b) = \{u(q - p)ab + ab(a + b)e^{-1}n : n \in \mathbf{Z}\}.$$

Puis les conditions sur les pgcd impliquent que n doit être premier à u et e . Réciproquement, puisque l'on a la condition (4.4.17), on vérifie sans difficulté que tous les éléments de $\Gamma'(a, b)$ vérifient la condition (4.4.12). \square

On va démontrer une version préliminaire de la distribution globale avec quelques paramètres fixés.

Proposition 4.4.2. *On fixe $\varepsilon, u, e_1, e_2, e_3$ et on note $e = e_1 e_2 e_3$. Rappelons la définition de $F(u, e_i, \varepsilon)$ (4.4.10). On a*

$$\#F(u, e_i, \varepsilon) = \sum_{\substack{0 < -a < b \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b}} \#F_{u,e_i,\varepsilon}(a, b) = \frac{2Z(\varepsilon, u, e)}{\pi^2} B^{\frac{1}{3}} \log B + O_{u,e,\varepsilon}(B^{\frac{1}{3}} \log \log B). \quad (4.4.19)$$

où

$$Z(\varepsilon, u, e) = \phi(ue) \sum_{k|u} \frac{\mu(k)3^{\omega(k)}}{k} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \int_{\theta \in]\frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} + C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1 - \theta))^{\frac{2}{3}}} - \frac{u}{\varepsilon} \int_{\theta \in]\frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} + C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1 - \theta))} \right). \quad (4.4.20)$$

Pour traiter une somme sur un réseau, il faut en déterminer l'indice. On fixe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (\mathbf{N} \setminus \{0\})^3$ avec $\text{pgcd}(\alpha_i, \alpha_j) = 1$, on considère l'ensemble

$$H(\alpha_i) = \{(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3 : a + b + c = 0, \alpha_1 | a, \alpha_2 | b, \alpha_3 | c\}. \quad (4.4.21)$$

C'est un sous-groupe de

$$G = \{(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3 : a + b + c = 0\} \simeq \mathbf{Z}^2.$$

La projection des deux premières variables

$$(a, b, c) \mapsto (a, b)$$

établit un isomorphisme des réseaux $H(\alpha_i)$ et

$$\{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 : \alpha_1 | a, \alpha_2 | b, \alpha_3 | a + b\}. \quad (4.4.22)$$

Proposition 4.4.3.

$$[G : H(\alpha_i)] = \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3. \quad (4.4.23)$$

Démonstration. Puisque $H = H(\alpha_i)$ est un sous-module de G , c'est un \mathbf{Z} -module libre. En tensorisant $H(\alpha_i)$ avec \mathbf{Q} , on voit que le rang de $H(\alpha_i)$ est 2. Par le théorème des restes chinois, le morphisme naturel

$$G/H \rightarrow \bigoplus_{i=1}^3 G/H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/\alpha_i \mathbf{Z}$$

est un isomorphisme. De plus,

$$G/H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/\alpha_i \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/\alpha_i \mathbf{Z}.$$

Donc

$$[G : H] = \#(\bigoplus_{i=1}^3 \mathbf{Z}/\alpha_i \mathbf{Z}) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3. \quad \square$$

D'après l'analyse précédente, la condition (4.4.11) nous fournit un intervalle (4.4.13) et la condition (4.4.12) nous donne un réseau. Quand la longueur de l'intervalle est plus petite que la période du réseau, le cardinal que l'on cherche est 0 ou 1 et n'est pas équivalent à la longueur de l'intervalle. C'est pourquoi ensuite nous allons discuter les deux cas séparément.

Pour $\varepsilon > u(4e)^{\frac{1}{3}}$, on définit une constante

$$D = D(\varepsilon, u, e) = \sqrt{((4e)^{-\frac{1}{3}} - u\varepsilon^{-1})e(4^{-1} - C_0^2)^{-1}} > 0.$$

On vérifie qu'on a pour $B \gg O_{u,e,\varepsilon}(1)$ et $b > DB^{\frac{1}{6}}$,

$$\begin{aligned} |a|b(a+b)e^{-1} &= b^3 \left(\left| \frac{a}{b} \right| \left(1 - \left| \frac{a}{b} \right| \right) \right) e^{-1} \\ &> b^3 \left(\frac{1}{4} - C_0^2 \right) e^{-1} \\ &> bD^2 B^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{4} - C_0^2 \right) e^{-1} \\ &> bB^{\frac{1}{3}} \left(\left(\frac{1}{4e} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{u}{\varepsilon} \right) \\ &> B^{\frac{1}{3}} \left((|a|b(a+b)e^{-1})^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^{-1}ub \right). \end{aligned}$$

Donc l'intervalle I (4.4.13) ne contient qu'au plus un point du réseau $\Gamma(a, b)$. Nous allons donc décomposer la somme (4.4.9) en deux termes selon la taille de a et b :

$$\delta_{U,Q,B,\alpha_{\text{ess}}}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{u,e_i} \left(\sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1 \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b \\ b \leq DB^{\frac{1}{6}}}} + \sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1 \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b \\ b > DB^{\frac{1}{6}}}} \right) \#F_{u,e_i,\varepsilon}(a, b). \quad (4.4.24)$$

Cas I. $b \leq DB^{\frac{1}{6}}$. La longueur de I est « assez grande ». La contribution de ce cas est la suivante.

Proposition 4.4.4.

$$\sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1 \\ e_1|a,e_2|b,e_3|a+b \\ b \leq DB^{\frac{1}{6}}}} \#F_{u,e_i,\varepsilon}(a,b) = \frac{Z(\varepsilon, u, e)}{\pi^2} B^{\frac{1}{3}} \log B + O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B), \quad (4.4.25)$$

où $Z(\varepsilon, u, e)$ est donné par (4.4.20) et $F_{u,e_i,\varepsilon}(a,b)$ est défini par (4.4.11) et (4.4.12).

On a besoin du lemme suivant qui nous permet de changer les sommes sur un réseau en intégrales.

Lemme 4.4.5. Pour $DB^{\frac{1}{6}} \geq M \gg e$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ fixé, on note $k = k_1 k_2 k_3$, $\alpha_i = k_i e_i$ et $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Considérons deux régions

$$S'(M) = S'(e, u, \varepsilon, M, B) = \{(m, n) \in \mathbf{Z}^2 : 1 \leq m < n \leq M, \frac{m}{n} \in]\frac{1}{2} - C_1, \frac{1}{2} + C_1]\},$$

$$T(M) = T(u, e, \varepsilon, M) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq y < x \leq M, \frac{y}{x} \in]\frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} + C_0]\},$$

avec $C_1 = C_1(m, n, u, e, \varepsilon)$ dépendant de m, n définie par l'équation (4.4.15) et $C_0 = C_0(u, e, \varepsilon)$ par (4.4.6). Alors on a

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in S'(M) \cap H(\alpha_i)} (|m|n(m+n))^{-\frac{2}{3}} &= \iint_{T(M)} \frac{dx dy}{\alpha(xy(x-y))^{\frac{2}{3}}} + O_{u,e,\alpha,\varepsilon}(\log \log B), \\ \sum_{(m,n) \in S'(M) \cap H(\alpha_i)} (m(n-m))^{-1} &= \iint_{T(M)} \frac{dx dy}{\alpha y(x-y)} + O_{u,e,\alpha,\varepsilon}(\log \log B). \end{aligned}$$

Démonstration du lemme. L'idée est qu'on fait une partition sur le domaine de (m, n) .

On définit un sous-ensemble de \mathbf{N}^2 auxiliaire

$$S(M) = \{(m, n) \in \mathbf{Z}^2 : 1 \leq m < n \leq M, \frac{m}{n} \in]\frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} + C_0]\}.$$

La première étape est de comparer la somme sur $S(M)$ et $S'(M)$. Pour $(m, n) \in S(M)$, on note $C_2 = C_2(m, n, u, e, \varepsilon) = C_0 - C_1$. Rappelons, d'après (4.4.16), que l'on a $C_2 = O_{u,e,\varepsilon}(B^{-\frac{1}{3}})$. La différence entre la somme sur $S(M)$ et $S'(M)$ s'écrit

$$\begin{aligned} &\sum_{(m,n) \in S(M) \cap H(\alpha_i)} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}} - \sum_{(m,n) \in S'(M) \cap H(\alpha_i)} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}} \\ &\leq \sum_{\substack{n \leq M \\ \frac{m}{n} \in]\frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} - C_1] \\ \cup]\frac{1}{2} + C_1, \frac{1}{2} + C_0]}} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}} \\ &= \sum_{n \leq M} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{(\frac{1}{2} - C_0)n < m \leq (\frac{1}{2} - C_1)n \\ \text{ou } (\frac{1}{2} + C_1)n \leq m < (\frac{1}{2} + C_0)n}} \left(\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Or pour $(m, n) \in S(M)$, on a $n \leq M \leq DB^{\frac{1}{6}}$. Donc pour B assez grand, d'après (4.4.16),

$$C_2 n = \left(\frac{1}{2} - C_1\right) n - \left(\frac{1}{2} - C_0\right) n = \left(\frac{1}{2} + C_0\right) n - \left(\frac{1}{2} + C_1\right) n = O_{u,e,\varepsilon}(B^{-\frac{1}{6}}).$$

Donc pour B suffisamment grand, $C_2 n < 1$. Cela nous dit qu'ayant fixé n , il y a au plus deux m possibles dans la somme. On obtient la majoration suivante pour la dernière somme ci-dessus.

$$\begin{aligned} &\sum_{n \leq M} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{(\frac{1}{2} - C_0)n < m \leq (\frac{1}{2} - C_1)n \\ \text{ou } (\frac{1}{2} + C_1)n \leq m < (\frac{1}{2} + C_0)n}} \left(\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= O_{u,e,\varepsilon}(1) \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n^2} = O_{u,e,\varepsilon}(1). \end{aligned}$$

Ensuite on fixe une constante

$$l = l(\alpha) = \log_{\frac{2}{3}}(\log_{\alpha} M) = \frac{\log \log M - \log \log \alpha}{\log(\frac{2}{3})}.$$

Alors on a $M^{(\frac{2}{3})^l} = \alpha$. Pour $0 \leq k \leq l-1$, on note

$$F_{k,\alpha_i} = \sum_{\substack{(m,n) \in S(M) \cap H(\alpha_i) \\ M^{(\frac{2}{3})^{k+1}} < n \leq M^{(\frac{2}{3})^k}}} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}},$$

$$G_{\alpha_i} = \sum_{\substack{(m,n) \in S(M) \cap H(\alpha_i) \\ n \leq \alpha}} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}}.$$

On décompose la somme de la façon suivante.

$$\begin{aligned} & \sum_{(m,n) \in S(M) \cap H(\alpha_i)} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq l-1} \sum_{\substack{(m,n) \in S(M) \cap H(\alpha_i) \\ M^{(\frac{2}{3})^{k+1}} < n \leq M^{(\frac{2}{3})^k}}} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}} + \sum_{\substack{(m,n) \in S(M) \cap H(\alpha_i) \\ n \leq \alpha}} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq l-1} F_{k,\alpha_i}(M) + G_{\alpha_i}(M). \end{aligned}$$

Premièrement on a

$$G_{\alpha_i}(M) = O_{\alpha,\varepsilon,u,\varepsilon}(1).$$

Ensuite on compare chaque morceau $F_{k,e}(M)$ avec l'intégrale. Pour cela on va fixer les domaines fondamentaux du réseau $H(\alpha_i)$. On peut choisir une base $(e_1(\alpha_i), e_2(\alpha_i))$ engendrant $H(\alpha_i)$ telle que

$$\|e_j(\alpha_i)\| \leq 2\lambda_j(\alpha_i), \quad (1 \leq j \leq 2)$$

où λ_j désigne le j -ième successif minima par rapport à la norme euclidienne standard $\|\cdot\|$ (voir, par exemple, [Cas97], p.135). Les termes d'erreur viennent des bords de notre partition et du passage à l'intégrale sur un domaine fondamental. On note $\mathbf{B}(M, k)$ la réunion des domaines fondamentaux du réseau $H(\alpha_i)$ dont l'intersection avec le bord du domaine

$$\mathbf{D}(M, k) = \{(x, y) \in T(M) : M^{(\frac{2}{3})^{k+1}} < x \leq M^{(\frac{2}{3})^k}\} \quad (4.4.26)$$

est non-vide. On a que

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in \mathbf{B}(M,k) \cap \mathbf{D}(M,k)} (xy(x-y))^{-\frac{2}{3}} &\leq \sup_{(x,y) \in \mathbf{B}(M,k) \cap \mathbf{D}(M,k)} \left(\frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x}\right) \right)^{-\frac{2}{3}} \sup_{M^{(\frac{2}{3})^{k+1}} < x \leq M^{(\frac{2}{3})^k}} \frac{1}{x^2} \\ &= O_{u,\varepsilon,\varepsilon}(1) \sup_{M^{(\frac{2}{3})^{k+1}} < x \leq M^{(\frac{2}{3})^k}} \frac{1}{x^2} \\ &= O_{u,\varepsilon,\varepsilon}(M^{-2(\frac{2}{3})^{k+1}}). \end{aligned}$$

Maintenant on fixe $(m, n) \in S(M) \cap H(\alpha_i)$ avec $M^{(\frac{2}{3})^{k+1}} < n \leq M^{(\frac{2}{3})^k}$. On prend un domaine fondamental \mathcal{F} contenant (m, n) . Soit $(x, y) \in \mathcal{F}$. Alors

$$(x, y) = (m, n) + se_1 + te_2,$$

avec $s, t \in [-1, 1]$. On note $\lambda(\alpha_i) = 2(\lambda_1(\alpha_i) + \lambda_2(\alpha_i))$. D'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\lambda(\alpha_i) \leq 4\lambda_1(\alpha_i) \leq 8\sqrt{\frac{\det(H(\alpha_i))}{\text{vol}(\mathbf{B}(0, 1))}} = \frac{8}{\sqrt{\text{vol}(\mathbf{B}(0, 1))}} \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3},$$

où $\text{vol}(\mathbf{B}(0, 1))$ est le volume de la boule unité par rapport à la norme choisie. Donc

$$|x - m| \leq \|e_1(\alpha_i)\| + \|e_2(\alpha_i)\| \leq 2(\lambda_1(\alpha_i) + \lambda_2(\alpha_i)) = \lambda(\alpha_i) = O_{\alpha_i}(1),$$

$$|y - n| = O_{\alpha_i}(1).$$

Comme pour $n > \lambda(\alpha_i)$,

$$\frac{m - \lambda(\alpha_i)}{n + \lambda(\alpha_i)} < \frac{y}{x} < \frac{m + \lambda(\alpha_i)}{n - \lambda(\alpha_i)},$$

on a

$$\left| \frac{y}{x} - \frac{m}{n} \right| \leq \max \left(\frac{m}{n} - \frac{m - \lambda(\alpha_i)}{n + \lambda(\alpha_i)}, \frac{m + \lambda(\alpha_i)}{n - \lambda(\alpha_i)} - \frac{m}{n} \right) = O_{u, \varepsilon, \alpha_i} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Considérons la fonction suivante définie sur $] \frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} + C_0[$:

$$\lambda \mapsto (\lambda(1 - \lambda))^{-\frac{2}{3}}.$$

En reportant les majorations ci-dessus et en utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient que

$$\left| \left(\frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} \right| = O_{u, \varepsilon, \alpha} \left(\frac{1}{n} \right).$$

On a en outre que

$$\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2} \right| = \frac{(x - n)(x + n)}{x^2 n^2} \leq \frac{2\lambda(\alpha_i)(n + \lambda(\alpha_i))}{n^4} = O_{\alpha}(M^{-3(\frac{2}{3})^{k+1}}).$$

Tout cela nous fournit la majoration suivante.

$$\begin{aligned} & |(xy(x - y))^{-\frac{2}{3}} - (mn(n - m))^{-\frac{2}{3}}| \\ &= \left| \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{y}{x} \right)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{m}{n} \right)^{-\frac{2}{3}} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x^2} \left(\frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{n^2} \left(\frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} \right| + \left| \frac{1}{n^2} \left(\frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{n^2} \left(\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} \right| \\ &= O_{u, \varepsilon, \alpha}(1) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2} \right) + O_{u, \varepsilon, \alpha} \left(\frac{1}{n^3} \right) \\ &= O_{u, \varepsilon, \alpha}(M^{-3(\frac{2}{3})^{k+1}}). \end{aligned}$$

En remarquant que le périmètre du bord et l'aire du domaine $\mathbf{D}(M, k)$ (4.4.26) sont de grandeur $O_{u, \varepsilon, \alpha}(M^{(\frac{2}{3})^k})$ et $O_{u, \varepsilon, \alpha}(M^{2(\frac{2}{3})^k})$ respectivement, il suit des estimations ci-dessus que

$$\begin{aligned} & \left| F_{k, \alpha_i}(M) - \iint_{\substack{(x, y) \in T(M) \\ M^{(\frac{2}{3})^{k+1}} < x \leq M^{(\frac{2}{3})^k}}} \frac{dx dy}{\alpha(xy(x - y))^{\frac{2}{3}}} \right| \\ &\ll \left(\sup_{(x, y) \in \mathbf{B}(M, k) \cap \mathbf{D}(M, k)} (xy(x - y))^{-\frac{2}{3}} \right) O_{\alpha, \varepsilon, u, \varepsilon}(M^{(\frac{2}{3})^k}) \\ &+ O_{u, \varepsilon, \alpha}(M^{-3(\frac{2}{3})^{k+1}}) \iint_{\substack{(x, y) \in T(M) \\ M^{(\frac{2}{3})^{k+1}} < x \leq M^{(\frac{2}{3})^k}}} dx dy \\ &= O_{u, \varepsilon, \alpha}(M^{-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k}) + O_{u, \varepsilon, \alpha}(1) \\ &= O_{\alpha, \varepsilon, u, \varepsilon}(1). \end{aligned}$$

En reportant ce que nous avons obtenu,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{(m,n) \in S(M) \cap H(\alpha_i)} (mn(n-m))^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq l-1} F_{k, \alpha_i}(M) + G_{\alpha_i}(M) \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq l-1} \iint_{\substack{(x,y) \in T(M) \\ M(\frac{2}{3})^{k+1} < x \leq M(\frac{2}{3})^k}} \frac{dx dy}{\alpha(xy(x-y))^{\frac{2}{3}}} + O_{\alpha, e, u, \varepsilon}(1) \sum_{0 \leq k \leq l} 1 + O_{\alpha, e, u, \varepsilon}(1) \\
 &= \iint_{T(M)} \frac{dx dy}{\alpha(xy(x-y))^{\frac{2}{3}}} + O_{u, \alpha, e, \varepsilon}(\log \log M) \\
 &= \iint_{T(M)} \frac{dx dy}{\alpha(xy(x-y))^{\frac{2}{3}}} + O_{u, \alpha, e, \varepsilon}(\log \log B).
 \end{aligned}$$

La seconde égalité se démontre exactement de la même façon, d'où le lemme. \square

On introduit la fonction arithmétique ψ donnée par

$$\psi(n) = \text{Card } K(n) \tag{4.4.27}$$

où

$$K(n) = \{(e_1, e_2, e_3) \in \mathbf{N}^3 : n = e_1 e_2 e_3, \forall i \neq j, \text{pgcd}(e_i, e_j) = 1\}.$$

Proposition 4.4.6. *La fonction ψ est multiplicative. On a $\psi(n) = 3^{\omega(n)}$.*

Démonstration. On se donne $m, n \in \mathbf{N}$ avec $\text{pgcd}(m, n) = 1$. L'application

$$\begin{aligned}
 & K(m) \times K(n) \longrightarrow K(mn) \\
 & (e_1, e_2, e_3) \times (f_1, f_2, f_3) \mapsto (e_1 f_1, e_2 f_2, e_3 f_3)
 \end{aligned}$$

est une bijection. Donc

$$\psi(n) = \prod_{p|n} \psi(p^{v_p(n)}) = \prod_{p|n} 3 = 3^{\omega(n)}.$$

\square

Démonstration de la proposition 4.4.4. D'après (4.4.17), on suppose que

$$\text{pgcd}\left(u, \frac{ab(a+b)}{e}\right) = 1. \tag{4.4.28}$$

On utilise la formule classique (voir [Bro11], Exercice 5.2) pour l'intervalle (4.4.13), compte tenu des conditions (4.4.11) et (4.4.12) et du fait que la condition (4.4.12) équivaut à la condition de l'ensemble $\Gamma'(a, b)$ (4.4.18) plus la condition (4.4.17),

$$\begin{aligned}
 \text{Card}(F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b)) &= \frac{B^{\frac{1}{3}}((e^{-1}|a|b(a+b))^{\frac{1}{3}} - ub\varepsilon^{-1})}{e^{-1}|a|b(a+b)} \phi(eu) + O(2^{\omega(eu)}) + O_{u, e}(1) \\
 &= B^{\frac{1}{3}} \phi(eu) \left(e^{\frac{2}{3}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}} - eu\varepsilon^{-1} (|a|(a+b))^{-1} \right) + O_{u, e}(1).
 \end{aligned} \tag{4.4.29}$$

Le terme d'erreur peut être contrôlé par

$$\sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) \neq \emptyset}} 1 \leq \sum_{\substack{b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} + C_0[}} 1 = O_{u, e, \varepsilon}(B^{\frac{1}{3}}).$$

On réécrit la somme dans la Proposition 4.4.4 pour éliminer la condition de pgcd (4.4.28).

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ (a,b) \in H(e_i), \text{pgcd}(u, \frac{ab(a+b)}{e})=1 \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_1, \frac{1}{2}+C_1]}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}} \\
&= \sum_{k|u} \mu(k) \sum_{\substack{k_1 k_2 k_3 = k \\ \text{pgcd}(k_i, k_j)=1}} \sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ e_1 k_1 | a, e_2 k_2 | b, e_3 k_3 | a+b \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_1, \frac{1}{2}+C_1]}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Pour k_1, k_2, k_3 fixés,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ e_1 k_1 | a, e_2 k_2 | b, e_3 k_3 | a+b \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_1, \frac{1}{2}+C_1]}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}} \\
&= \sum_{d \in \mathbf{N}} \mu(d) \sum_{\substack{d|a, d|b, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ (a,b) \in H(e_i k_i) \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_1, \frac{1}{2}+C_1]}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}} \\
&= \left(\sum_{d \leq D(ek)^{-1} B^{\frac{1}{6}}} + \sum_{d > D(ek)^{-1} B^{\frac{1}{6}}} \right) \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{\substack{1 \leq a < b \leq DB^{\frac{1}{6}} d^{-1} \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_1, \frac{1}{2}+C_1] \\ (a,b) \in H(e_i k_i)}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}}.
\end{aligned} \tag{4.4.30}$$

La seconde somme est bornée. En écrivant « O » pour « $O_{u,e,k,\varepsilon}$ », le Lemme 4.4.5 nous fournit que la somme ci-dessus est égale à

$$\begin{aligned}
& \sum_{d \leq D(ek)^{-1} B^{\frac{1}{6}}} \frac{\mu(d)}{d^2} \left(\iint_{T(DB^{\frac{1}{6}} d^{-1})} \frac{dx dy}{ek(xy(x-y))^{\frac{2}{3}}} + O(\log \log B) \right) + O(1) \\
&= \sum_{d \leq D(ek)^{-1} B^{\frac{1}{6}}} \frac{\mu(d)}{ek d^2} \iint_{\substack{1 \leq x \leq DB^{\frac{1}{6}} d^{-1} \\ \theta \in]\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0[}} \frac{d\theta dx}{x(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} + O(\log \log B) \\
&= \sum_{d \leq D(ek)^{-1} B^{\frac{1}{6}}} \frac{\mu(d)}{ek d^2} \left(\frac{1}{6} \log B + \log D - \log d \right) \int_{\theta \in]\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} + O(\log \log B).
\end{aligned}$$

Comme précédemment on peut rajouter une quantité bornée pour obtenir une somme où d parcourt l'ensemble des entiers naturels. Puisque l'on a des formules bien connues

$$\sum_{d \in \mathbf{N}} \frac{\log d}{d^2} < \infty, \quad \sum_{d \in \mathbf{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2},$$

la somme (4.4.30) est finalement de la forme

$$\begin{aligned}
&= \sum_{d \in \mathbf{N}} \frac{\mu(d)}{ek d^2} \frac{1}{6} \log B \int_{\theta \in]\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} + O(\log \log B) \\
&= (ek)^{-1} \pi^{-2} \int_{\theta \in]\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} \log B + O(\log \log B).
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ (a,b) \in H(e_i k_i) \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_1, \frac{1}{2}+C_1]}} (|a|(a+b))^{-1} \\
&= \frac{1}{ek \pi^2} \int_{\theta \in]\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))} \log B + O(\log \log B)
\end{aligned}$$

Il en résulte que, en rappelant la définition de la fonction ψ (4.4.27) et la Proposition 4.4.6,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ (a,b) \in H(e_i), \text{pgcd}(u, \frac{ab(a+b)}{e})=1 \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_1, \frac{1}{2}+C_1]}} \#F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) \\
&= B^{\frac{1}{3}} \phi(eu) \left(\sum_{k|u} \mu(k) \psi(k) \sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ (a,b) \in H(e; k_i) \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_1, \frac{1}{2}+C_1]}} \left(e^{\frac{2}{3}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}} - eu\varepsilon^{-1} (|a|(a+b))^{-1} \right) + O(B^{\frac{1}{3}}) \right) \\
&= B^{\frac{1}{3}} \log B \left(\phi(eu) \sum_{k|u} \mu(k) \mathfrak{Z}^{\omega(k)} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}} k \pi^2} \int_{\theta \in [\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0]} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} - \frac{u}{\varepsilon k \pi^2} \int_{\theta \in [\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0]} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))} \right) \right) \\
&+ O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B) \\
&= \frac{Z(\varepsilon, u, e)}{\pi^2} B^{\frac{1}{3}} \log B + O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B),
\end{aligned}$$

ce qui clôt la démonstration. \square

On termine en remarquant que le terme principal ne dépend pas de la constante D . Dans la suite, nous utiliseront le lemme suivant qui montre directement cette indépendance.

Lemme 4.4.7. *Fixons deux constantes $C_1, C_2 > 0$, on a*

$$\sum_{\substack{\text{pgcd}(a,b)=1 \\ C_2 B^{\frac{1}{6}} \leq b \leq C_1 B^{\frac{1}{6}}}} \#F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) = O_{C_1, C_2, u, e, \varepsilon}(B^{\frac{1}{3}}).$$

Démonstration. En fait ce lemme découle du calcul précédent dont le terme d'erreur a la grandeur $O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B)$, qui est acceptable pour la suite. On donne une preuve directe avec la grandeur de contrôle souhaitée. D'après la formule (4.4.29), il suffit de contrôler la somme sur les quantités $(|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}}$ et $(|a|(a+b))^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{C_2 B^{\frac{1}{6}} \leq b \leq C_1 B^{\frac{1}{6}} \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0]}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}} \\
&\leq \sup_{\substack{C_2 B^{\frac{1}{6}} \leq b \leq C_1 B^{\frac{1}{6}} \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0]}} (|a|b(a+b))^{-\frac{2}{3}} \sum_{\substack{C_2 B^{\frac{1}{6}} \leq b \leq C_1 B^{\frac{1}{6}} \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0]}} 1 \\
&= O_{C_1, C_2}(B^{-\frac{1}{3}}) O_{C_1, C_2}(B^{\frac{1}{3}}) = O_{C_1, C_2}(1).
\end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\sum_{\substack{C_2 B^{\frac{1}{6}} \leq b \leq C_1 B^{\frac{1}{6}} \\ |\frac{a}{b}| \in [\frac{1}{2}-C_0, \frac{1}{2}+C_0]}} (|a|(a+b))^{-1} = O_{C_1, C_2}(1).$$

Notons que le nombre de (a, b) possibles est $O(B^{\frac{1}{3}})$. On obtient le résultat souhaité. \square

Cas II. $b \geq DB^{\frac{1}{6}}$.

Dans ce cas là, le terme principal et le terme d'erreur ont le même ordre de grandeur (du point de vue de la démonstration de la Proposition 4.4.4). Mais grâce à la symétrie de la transformation de Cremona on peut se ramener presque totalement au cas précédent. Dans la section 3.2 on a défini les paramètres correspondant aux points dans S en échangeant x avec z . De façon similaire on peut fixer le difféomorphisme $\tilde{\rho}$ donné par

$$[x : y : z] \mapsto \left(\frac{z}{x} - 1, \frac{y}{x} - 1 \right) \in \mathbf{R}^2,$$

qui s'identifie S avec son image dans $T_Q X_3$. On redéfinit l'ensemble $F(u, e, \varepsilon)$ (4.4.10) pour la région S (4.3.2) comme suit :

$$F'(u, e_i, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} P = [x : y : z] \\ z > y > x > 0 \\ \text{pgcd}(x, y, z) = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \left| \frac{z}{x} - 1 \right| \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{3}}, u(P) = u, \mathbf{e}(P) = (e_3, e_2, e_1); \\ \frac{\max(|x|, |y|) \max(|x|, |z|) \max(|y|, |z|)}{\text{pgcd}(x, y) \text{pgcd}(x, z) \text{pgcd}(x, z)} \leq B \end{array} \right. \right\} \quad (4.4.31)$$

D'après les Propositions 4.3.1 et 4.3.3, la transformation de Cremona Ψ échange les points dans $F(u, e_i, \varepsilon)$ avec ceux dans $F'(u, e_i, \varepsilon)$. Et symétriquement on a des résultats analogues à ceux du début de la Section 4. En particulier (voir (4.4.5)), pour $U \in F'(u, e_i, \varepsilon)$, on a

$$\mu'(U) = \frac{m'(U)}{n'(U)} \in \left] \frac{1}{2} - C_0, \frac{1}{2} + C_0 \right[.$$

Lemme 4.4.8. *On note*

$$E = E(\varepsilon, u, e) = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{(\frac{1}{2} - C_0)24^{\frac{1}{3}}D}, \quad G = G(\varepsilon, e, u) = \frac{ue}{\varepsilon(\frac{1}{2} + C_0)^2D},$$

$$A_1 = \{V \in F(u, e_i, \varepsilon) : n(V) > DB^{\frac{1}{6}}\},$$

$$A'_2 = \{U \in F'(u, e_i, \varepsilon) : n'(U) \leq EB^{\frac{1}{6}}\},$$

$$A'_3 = \{U \in F'(u, e_i, \varepsilon) : n'(U) \leq GB^{\frac{1}{6}}\}.$$

Alors on a pour $B \gg_{u, e, \varepsilon} 1$,

$$A'_3 \subseteq \Psi(A_1) \subseteq A'_2, \quad (4.4.32)$$

Démonstration. On note $\lambda = -\frac{a}{b}(1 + \frac{a}{b})$. Fixons $V \in A_1$ avec ses paramètres a, b, v, u et notons $U = \Psi(V) \in F'(u, e_i, \varepsilon)$. D'après la Proposition (4.3.3),

$$m'(U) = -\frac{e_1 e_2 e_3 v}{ab}, \quad n'(U) = \frac{e_1 e_2 e_3 (-ua + v)}{-a(a + b)}. \quad (4.4.33)$$

La condition (4.4.11) (4.4.11) fournit que

$$\frac{uB^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon} \leq \frac{v}{b} < \frac{B^{\frac{1}{3}}\lambda^{\frac{1}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.4.34)$$

d'où

$$\frac{ueB^{\frac{1}{3}}}{|a|\varepsilon} \leq m'(U) < \frac{e^{\frac{2}{3}}B^{\frac{1}{3}}\lambda^{\frac{1}{3}}}{|a|}. \quad (4.4.35)$$

et donc

$$m'(U) < \frac{e^{\frac{2}{3}}B^{\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{2} - C_0)4^{\frac{1}{3}}b} \leq \frac{e^{\frac{2}{3}}B^{\frac{1}{6}}}{(\frac{1}{2} - C_0)4^{\frac{1}{3}}D},$$

$$n'(U) < \frac{m'(U)}{\frac{1}{2} - C_0} < \frac{e^{\frac{2}{3}}B^{\frac{1}{6}}}{(\frac{1}{2} - C_0)24^{\frac{1}{3}}D} = EB^{\frac{1}{6}}$$

Cela montre que

$$\Psi(A_1) \subseteq A'_2.$$

En revanche, pour tout $U \in A'_3$, on a de la même façon que (4.4.35),

$$m(\Psi(U)) \geq \frac{ueB^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon m'(U)} \geq \frac{ueB^{\frac{1}{6}}}{\varepsilon(\frac{1}{2} + C_0)G},$$

et donc

$$n(\Psi(U)) > \frac{m(\Psi(U))}{\frac{1}{2} + C_0} > \frac{ueB^{\frac{1}{6}}}{\varepsilon(\frac{1}{2} + C_0)^2G} = DB^{\frac{1}{6}}.$$

Cela montre que

$$\Psi(A'_3) \subseteq A_1.$$

Puisque $\Psi^2 = \text{Id}$, on obtient que

$$A'_3 \subseteq \Psi(A_1).$$

□

On peut maintenant prouver notre résultat.

Démonstration de la Proposition 4.4.2. Par symétrie, l'étude de la convergence de la suite de mesures de Dirac dans la région S revient au même problème dans la région R . Pour u', e'_i, a, b fixés, on définit l'ensemble $F'_{u', e'_i, \varepsilon}(a, b)$ comme un sous-ensemble de $F'(u', e'_i, \varepsilon)$ (4.4.31) de la même manière que pour (4.4.11)(4.4.12). Le lemme précédent fournit que

$$\sum_{\substack{(a,b) \in H(e'_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b \leq GB^{\frac{1}{6}}}} \#F'_{u', e'_i, \varepsilon}(a, b) \leq \sum_{\substack{(a,b) \in H(e_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b > DB^{\frac{1}{6}}}} \#F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) \leq \sum_{\substack{(a,b) \in H(e'_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b \leq EB^{\frac{1}{6}}}} \#F'_{u', e'_i, \varepsilon}(a, b).$$

D'après la Proposition 4.3.3, $(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_3, e_2, e_1)$, $u' = u$ et donc

$$e = e_1 e_2 e_3 = e'_1 e'_2 e'_3.$$

D'après le Lemme 4.4.7,

$$\sum_{\substack{(a,b) \in H(e'_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b \leq EB^{\frac{1}{6}}}} \#F'_{u', e'_i, \varepsilon}(a, b) - \sum_{\substack{(a,b) \in H(e'_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b \leq GB^{\frac{1}{6}}}} \#F'_{u', e'_i, \varepsilon}(a, b) = O_{u, e, \varepsilon}(B^{\frac{1}{3}}).$$

Il découle de la Proposition 4.4.4 que

$$\sum_{\substack{(a,b) \in H(e'_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b \leq GB^{\frac{1}{6}}}} \#F'_{u', e'_i, \varepsilon}(a, b) = \frac{Z(\varepsilon, u, e)}{\pi^2} B^{\frac{1}{3}} \log B + O_{u, e, \varepsilon}(B^{\frac{1}{3}} \log \log B).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(a,b) \in H(e_i) \\ 0 < -a < b \\ \text{pgcd}(a,b)=1}} \#F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) &= \sum_{\substack{(a,b) \in H(e_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b \leq DB^{\frac{1}{6}}, F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) \neq \emptyset}} + \sum_{\substack{(a,b) \in H(e_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b > DB^{\frac{1}{6}}, F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) \neq \emptyset}} \#(F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b)) \\ &= 2 \sum_{\substack{(a,b) \in H(e_i) \\ \text{pgcd}(a,b)=1 \\ b \leq DB^{\frac{1}{6}}, F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) \neq \emptyset}} \#(F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b)) + O_{u, e, \varepsilon}(1) \\ &= 2 \frac{Z(\varepsilon, u, e)}{\pi^2} B^{\frac{1}{3}} \log B + O_{u, e, \varepsilon}(B^{\frac{1}{3}} \log \log B). \end{aligned}$$

□

Enfin pour obtenir la formule de $\rho_{B, Q}(\chi(\varepsilon))$, il ne reste qu'à sommer sur l'ensemble fini des u, e_i possibles.

4.5 Obtention de la mesure asymptotique

Pour u, e_1, e_2, e_3 fixés, en vertu de ce que nous avons obtenu, asymptotiquement tous les points sont dans l'intérieur de la région

$$\begin{aligned} T_{u^3 e} &= \left\{ (s, t) \in \mathbf{R}^2 : s \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4eu^3}{s^3}} \right) < t < s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4eu^3}{s^3}} \right) \right\} \\ &= \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 : st(s-t) > u^3 e\}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la mesure asymptotique, il suffit de trouver son expression sur un ensemble de domaines simples qui permettent de tester la convergence de la famille de mesures. Pour cela on commence par considérer les fonctions caractéristique des domaines de la forme suivante. Pour $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > (4e)^{\frac{1}{3}} u$ et $\tau_2, \tau_1 \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + C_0(u, e, \varepsilon_1)[, \tau_2 > \tau_1$ on considère la région

$$T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2} = \{(s, t) \in T_{u^3 e} : \tau_1 < \frac{t}{s} < \tau_2, \varepsilon_1 < s < \varepsilon_2\}.$$

Pour calculer le nombre total des points rationnels dans cette région, il suffit de compter l'ensemble suivant. Pour $\varepsilon > (4e)^{\frac{1}{3}}u$ et $\tau \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + C_0[$, on définit

$$F_{\tau, \varepsilon, u, e_i} = \left\{ \begin{array}{l} P = [x : y : z] \\ x > y > z > 0 \\ \text{pgcd}(x, y, z) = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \left| \frac{x}{z} - 1 \right| \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{3}} \\ H(P) \leq B, \mu(P) > \tau \\ u(P) = u, \mathbf{e}(P) = (e_1, e_2, e_3) \end{array} \right. \right\} \quad (4.5.1)$$

Alors la distribution locale de ce petit domaine peut être calculée par la différence de ceux des quatre domaines suivants :

$$\delta_{U, Q, B, \alpha_{\text{ess}}}(\chi_{T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2}}) = \sum_{u, e_i} (\#F_{\tau_1, \varepsilon_2, u, e_i} - \#F_{\tau_2, \varepsilon_2, u, e_i} - \#F_{\tau_1, \varepsilon_1, u, e_i} + \#F_{\tau_2, \varepsilon_1, u, e_i}). \quad (4.5.2)$$

En utilisant notre paramétrisation des droites, on a comme précédemment

$$\#F_{\tau, \varepsilon, u, e} = \sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} > \tau \\ \text{pgcd}(a, b) = 1 \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b}} F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b).$$

Proposition 4.5.1. *On a pour u, e_1, e_2, e_3 fixé,*

$$\sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} > \tau \\ \text{pgcd}(a, b) = 1 \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b}} F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) = \frac{2}{\pi^2} Z(\tau, u, e, \varepsilon) B^{\frac{1}{3}} \log B + O_{\tau, u, e, \varepsilon}(B^{\frac{1}{3}} \log \log B). \quad (4.5.3)$$

où

$$Z(\tau, u, e, \varepsilon) = \sum_{k|u} \frac{\phi(ue)\mu(k)3^{\omega(k)}}{k} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \int_{\theta \in]\tau, \frac{1}{2} + C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} - \frac{u}{\varepsilon} \int_{\theta \in]\tau, \frac{1}{2} + C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))} \right).$$

Toutes les méthodes que nous avons développées peuvent être appliquées. En outre, il faut étudier le comportement de la pente sous la transformation de Cremona.

Lemme 4.5.2. *Conservons les notations $E = E(u, e, \varepsilon)$ et $G = G(u, e, \varepsilon)$ du Lemme 4.4.7, et $F(u, e_i, \varepsilon)$, $F'(u, e_i, \varepsilon)$ définis par (4.4.10) et (4.4.31) respectivement. Soient*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{V \in F(u, e_i, \varepsilon) : n(V) > DB^{\frac{1}{6}}, \mu(V) > \tau\}, \\ B'_2 &= \{U \in F'(u, e_i, \varepsilon) : n'(U) \leq EB^{\frac{1}{6}}, \mu'(U) < 1 - \tau\}, \\ B'_3 &= \{U \in F'(u, e_i, \varepsilon) : n'(U) \leq GB^{\frac{1}{6}}, \mu'(U) < 1 - \tau - 2\varepsilon B^{-\frac{1}{3}}\}. \end{aligned}$$

Alors on a pour $B \gg_{u, e, \varepsilon} 1$,

$$B'_3 \subseteq \Psi(B_1) \subseteq B'_2. \quad (4.5.4)$$

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour la pente grâce aux Proposition 4.3.1 et 4.3.3. Prenons $V = [x : y : z] \in B_1$ et notons $\Psi(V) = U \in S$. Puisque $x > y > z$, on a

$$\mu'(U) = \frac{xz - yz}{xy - yz} = \frac{z}{y} \frac{x - y}{x - z} = \frac{z}{y} (1 - \mu(V)) < 1 - \tau.$$

Cela démontre que $\Psi(B_1) \subseteq B'_2$. Maintenant prenons $U = [x' : y' : z'] \in B'_3$ et notons $\Psi(U) = V \in R$. Puisque

$$\frac{y'}{x'} < \frac{z'}{x'} \leq 1 + \varepsilon B^{-\frac{1}{3}},$$

on a

$$\frac{x'}{y'} > \frac{1}{1 + \varepsilon B^{-\frac{1}{3}}} > 1 - \varepsilon B^{-\frac{1}{3}}.$$

Donc

$$\mu(V) = \frac{x'z' - x'y'}{y'z' - x'y'} = \frac{x'z' - y'}{y'z' - x'} = \frac{x'}{y'} (1 - \mu'(U)) > (1 - \varepsilon B^{-\frac{1}{3}})(1 - \varepsilon B^{-\frac{1}{3}}) > \tau.$$

Cela démontre que $\Psi(B'_3) \subseteq B_1$ et d'où $B'_3 \subseteq \Psi(B_1)$. \square

On a aussi à répéter le Lemme 4.4.5.

Lemme 4.5.3. *Sous l'hypothèse du Lemme 4.4.5, on suppose $B \gg_{u,e,\varepsilon} 1$ de sorte que $\frac{1}{2} + C_1 > \tau$ et on définit*

$$S'(\tau, M) = S'(\tau, e, u, \varepsilon, M) = \{(m, n) \in \mathbf{Z}^2 : 1 \leq m < n \leq M, \frac{m}{n} \in]\tau, \frac{1}{2} + C_1[\},$$

$$T(\tau, M) = T(\tau, e, u, \varepsilon, M) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq y < x \leq M, \frac{y}{x} \in]\tau, \frac{1}{2} + C_0[\}.$$

Alors on a

$$\sum_{(m,n) \in S'(\tau, M) \cap H(\alpha_i)} (|m|n(m+n))^{-\frac{2}{3}} = \iint_{T(\tau, M)} \frac{dx dy}{\alpha(xy(x-y))^{\frac{2}{3}}} + O_{u,e,\alpha,\varepsilon}(\log \log B),$$

$$\sum_{(m,n) \in S'(\tau, M) \cap H(\alpha_i)} (m(n-m))^{-1} = \iint_{T(\tau, M)} \frac{dx dy}{\alpha y(x-y)} + O_{u,e,\alpha,\varepsilon}(\log \log B).$$

Démonstration de la Proposition 4.5.1. On écrit « O » pour « $O_{u,e,\varepsilon,\tau}$ ». Comme précédemment on considère les deux cas : $b \leq DB^{\frac{1}{6}}$ et $b > DB^{\frac{1}{6}}$. Pour le premier cas, la démonstration de la Proposition 4.4.4 nous fournit le résultat

$$\sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} > \tau \\ \text{pgcd}(a,b)=1, b \leq DB^{\frac{1}{6}} \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b}} \#F_{u,e_i,\varepsilon}(a, b) = \pi^{-2} Z(\tau, u, e, \varepsilon) B^{\frac{1}{3}} \log B + O_{u,e,\varepsilon,\tau}(B^{\frac{1}{3}} \log \log B).$$

Pour l'autre cas, grâce à la transformation de Cremona, on obtient d'après le Lemme 4.5.2 que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} > \tau \\ \text{pgcd}(a,b)=1, b > DB^{\frac{1}{6}} \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b}} \#F'_{u,e_i,\varepsilon}(a, b) &\leq \sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} < 1-\tau \\ \text{pgcd}(a,b)=1, b \leq EB^{\frac{1}{6}} \\ e_3 | a, e_2 | b, e_1 | a+b}} \#F'_{u,e_i,\varepsilon}(a, b), \\ \sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} > \tau \\ \text{pgcd}(a,b)=1, b > DB^{\frac{1}{6}} \\ e_1 | a, e_2 | b, e_3 | a+b}} \#F_{u,e_i,\varepsilon}(a, b) &\geq \sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} < 1-\tau-2\varepsilon B^{-\frac{1}{3}} \\ \text{pgcd}(a,b)=1, b \leq EB^{\frac{1}{6}} \\ e_3 | a, e_2 | b, e_1 | a+b}} \#F'_{u,e_i,\varepsilon}(a, b). \end{aligned}$$

Du point de vue du Lemme 4.5.3, le même raisonnement que la Proposition 4.4.4 nous donne

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} < 1-\tau \\ \text{pgcd}(a,b)=1, b \leq EB^{\frac{1}{6}} \\ e_3 | a, e_2 | b, e_1 | a+b}} \#F'_{u,e_i,\varepsilon}(a, b) \\ &= \sum_{k|u} \frac{\phi(u\varepsilon)\mu(k)3^{\omega(k)}}{\pi^2 k} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \int_{\theta \in]\frac{1}{2}-C_0, 1-\tau[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} - \frac{u}{\varepsilon} \int_{\theta \in]\frac{1}{2}-C_0, 1-\tau[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))} \right) B^{\frac{1}{3}} \log B \\ &\quad + O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B) \\ &= \sum_{k|u} \frac{\phi(u\varepsilon)\mu(k)3^{\omega(k)}}{\pi^2 k} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \int_{\theta \in]\tau, \frac{1}{2}+C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} - \frac{u}{\varepsilon} \int_{\theta \in]\tau, \frac{1}{2}+C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))} \right) B^{\frac{1}{3}} \log B \\ &\quad + O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B) \\ &= \pi^{-2} Z(\tau, u, e, \varepsilon) B^{\frac{1}{3}} \log B + O_{u,e,\varepsilon,\tau}(B^{\frac{1}{3}} \log \log B). \end{aligned}$$

De l'autre côté, grâce à la symétrie de la transformation de Cremona (Lemme 4.5.2), le même procédé nous

fournit

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{0 < -a < b, -\frac{a}{b} < 1 - \tau - 2\varepsilon B^{-\frac{1}{3}} \\ \text{pgcd}(a,b)=1, b \leq EB^{\frac{1}{6}} \\ e_3 | a, e_2 | b, e_1 | a+b}} \#F_{u, e_i, \varepsilon}(a, b) \\
&= \sum_{k|u} \frac{\phi(ue)\mu(k)3^{\omega(k)}}{\pi^2 k} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \int_{\theta \in]\frac{1}{2} - C_0, 1 - \tau - 2\varepsilon B^{-\frac{1}{3}}[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} - \frac{u}{\varepsilon} \int_{\theta \in]\frac{1}{2} - C_0, 1 - \tau - 2\varepsilon B^{-\frac{1}{3}}[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))} \right) B^{\frac{1}{3}} \log B \\
&+ O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B) \\
&= \sum_{k|u} \frac{\phi(ue)\mu(k)3^{\omega(k)}}{\pi^2 k} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \int_{\theta \in]\tau, \frac{1}{2} + C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))^{\frac{2}{3}}} - \frac{u}{\varepsilon} \int_{\theta \in]\tau, \frac{1}{2} + C_0[} \frac{d\theta}{(\theta(1-\theta))} \right) B^{\frac{1}{3}} \log B \\
&+ O(\log B) + O(B^{\frac{1}{3}} \log \log B) \\
&= \pi^{-2} Z(\tau, u, e, \varepsilon) B^{\frac{1}{3}} \log B + O_{u, e, \varepsilon, \tau}(B^{\frac{1}{3}} \log \log B).
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve. \square

Démonstration du Théorème 4.1.2. Lorsque $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ et $\tau_2 - \tau_1$ sont suffisamment petits, d'après la proposition précédente et (4.5.2) on a

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_{U, Q, B, \alpha_{\text{ess}}}(\chi_{T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2}})}{B^{\frac{1}{3}} \log B} &= \sum_{u, e} \frac{2}{\pi^2} (Z(\tau_1, u, e, \varepsilon_2) - Z(\tau_2, u, e, \varepsilon_2) - Z(\tau_1, u, e, \varepsilon_1) + Z(\tau_2, u, e, \varepsilon_1)) \\
&= \sum_{\substack{u, e_i \\ \tau_1 < \frac{1}{2} + C_0(u, e, \varepsilon_1)}} \frac{2u\phi(ue)}{\pi^2} \sum_{k|u} \frac{\mu(k)3^{\omega(k)}}{k} (\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1}) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\theta}{\theta(1-\theta)} + o(1) \\
&= \sum_{\substack{u, e \\ yx^{-1} < \frac{1}{2} + C_0(u, e, x)}} \frac{2u\phi(ue)3^{\omega(e)}}{\pi^2} \sum_{k|u} \frac{\mu(k)3^{\omega(k)}}{k} \iint_{\substack{s \in]\varepsilon_1, \varepsilon_2[\\ \frac{t}{\varepsilon} \in]\tau_1, \tau_2[}} \frac{ds dt}{st(s-t)} + o(1) \\
&= \sum_{\substack{u, e \\ u^3 e < st(s-t)}} \frac{2u\phi(ue)3^{\omega(e)}}{\pi^2} \sum_{k|u} \frac{\mu(k)3^{\omega(k)}3^{\omega(e)}}{k} \iint_{T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2}} \frac{ds dt}{st(s-t)} + o(1).
\end{aligned}$$

Toute fonction continue de support compact est la limite uniforme d'une suite de fonctions intégrables qui sont des combinaisons linéaires des fonctions caractéristiques des ensembles définies au début. Cela termine la preuve. \square

4.6 À la recherche des interprétations

Le résultat révèle qu'il y a des « seuils »

$$\{(s, t) \in \mathbf{R}_{>0}^2 : st(s-t) = u^3 e\}$$

correspondant à des discontinuités de la mesure sur le bord de la région $T_{u^3 e}$. Le nombre de possibilités pour u, e croît avec x, y . On explique maintenant en quoi cela provient d'un phénomène similaire pour \mathbf{P}^1 . Rappelons ce que l'on a fait, on compte sur chaque droite et on somme leurs contributions. Cela équivaut à considérer ce problème sur chaque droite avec la hauteur et la distance induite. On rappelle le résultat sur la distribution asymptotique pour \mathbf{P}^1 ([Pag08]). On fixe la distance et la hauteur sur l définies par

$$d_l([u : v], [0 : 1]) = \left| \frac{u}{v} \right|, \quad H_l([u : v]) = H_{O(1)}([u : v]) = \max(|u|, |v|), \quad (\text{pgcd}(u, v) = 1).$$

Il est facile de voir que la constante d'approximation essentielle est 1 et aucune sous-variété n'est localement accumulatrice. On peut donc considérer le même problème d'étudier la distribution locale autour du point $O = [0 : 1]$. En identifiant l'espace tangent $T_O \mathbf{P}^1$ de O avec \mathbf{A}^1 canoniquement, on veut calculer la mesure asymptotique de la suite $\{\lambda_B\}$ où Pour toute fonction f intégrable à support compact,

$$\lambda_B(f) = \sum_{[u:v] \in F(\varepsilon, B)} f([u : v])$$

avec

$$F(\varepsilon, B) = \{P = [u : v] : d(P, O) < \varepsilon B^{-1}, H(P) \leq B\}.$$

Théorème 4.6.1 (Pagelot). *On a*

$$\lambda_B(f) = B \int f d\lambda + o(1),$$

où la mesure asymptotique est donnée par

$$\lambda = \frac{\sigma(x)}{x^2} dx, \quad \sigma(t) = \sum_{n \leq t} \varphi(n).$$

On voit que les seuils pour la mesure asymptotique sont $\{x = n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

Revenons à notre cas. On fixe une droite $l : ax + by + c = 0$. Le seuil restreint à l est

$$\{(s, t) \in l \cap \mathbf{R}_{>0}^2 : st(s - t) = u^3 e\} = \{(s, t) \in l \cap \mathbf{R}_{>0}^2 : s^3 \mu_l (1 - \mu_l) = u^3 e\}$$

où μ_l est la pente de l égale à $-ab^{-1}$. Rappelons que notre paramétrisation est donnée par

$$f_l : [u : v] \mapsto [ub + v : -ua + v : v].$$

On a $f([0 : 1]) = Q$. Comme asymptotiquement

$$H_{\omega_x^{-1}|_l} \sim \frac{e_1 e_2 e_3}{|ab(a+b)|} H_l^3,$$

$$d|_l = \max(|a|, |b|) d_l,$$

les constantes devant d_l et H_l modifient les seuils si l'on définit la suite de mesures par rapport à $H_{\omega_x^{-1}|_l}$ et $d|_l$. D'après (4.4.29), on en déduit que la mesure asymptotique dans ce cadre est donnée par

$$\lambda'_l = \frac{1}{b^2(\mu_l(1 - \mu_l))} \frac{\sigma'_l(x)}{x^2} dx,$$

où

$$\sigma'_l(t) = \sum_{u, e : u^3 e \leq \mu_l(1 - \mu_l)t^3} \varphi(ue).$$

Les seuils de σ'_l correspondent exactement au bord de $T_{u^3 e}$ restreint à l . Quand $B \rightarrow \infty$, le seuil *discret* qui est formé par les droites qui interviennent tend vers le seuil *continu* de la mesure asymptotique de la surface X_3 .

4.7 Résultats pour d'autres surfaces toriques

Notre méthode peut être utilisée pour traiter les surfaces \mathbf{P}_1, X_1, X_2 (rappelons que X_1, X_2 désignent les surfaces de del Pezzo en éclatant 1 ou 2 points généraux dans \mathbf{P}^2). La différence principale entre elles et X_3 est la suivante. Pour X_3 , pour un voisinage U de Q (de $T_Q X_3$) et B fixés, le nombre des droites $ax + by + cz = 0$ qui intervienne dans le comptage croît linéairement par rapport à $B^{\frac{1}{3}}$. Cela explique que la mesure asymptotique a une densité. Alors que pour les surfaces \mathbf{P}_1, X_1, X_2 , ce nombre est uniformément borné *a posteriori* (dépend seulement de U mais indépendant de B). Nous esquissons la preuve pour X_2 .

Soit X_2 l'éclatement de \mathbf{P}^2 en $[1 : 0 : 0]$ et $[0 : 1 : 0]$. Par un argument similaire à celui de la section 2, la constante d'approximation essentielle pour $Q = [1 : 1 : 1]$ est 3. Le fibré anticanonique très ample donne un plongement de X_2 dans \mathbf{P}^7 . Une hauteur de Weil absolue du point $P = [x : y : z]$ en dehors des diviseurs exceptionnels est donnée par

$$H(P) = H_{\omega_{X_2}^{-1}}(P) = \max(|x|, |y|, |z|) \frac{\max(|y|, |z|) \max(|x|, |z|)}{\text{pgcd}(y, z) \text{pgcd}(x, z)}.$$

Les variétés localement accumulatrice que l'on doit supprimer sont les droites

$$l_1 = \{y = z\}, \quad l_2 = \{x = z\}.$$

On note $U = X_i \setminus (\cup_{i=1}^2 l_i)$. On identifie l'espace tangent $T_Q X_2$ avec ($z \neq 0$) $\simeq \mathbf{A}^2$ et on étudie la distribution locale dans la région

$$\rho(U) = \bar{R} = \{(s, t) \in \mathbf{R} : s, t > 1\}.$$

En introduisant la même paramétrisation pour les droites, on se ramène au problème de comptage

$$\delta_{U,Q,B,\alpha_{\text{ess}}}(\chi_\varepsilon) = \sum_{\substack{0 < -a, b \\ \text{pgcd}(a,b)=1}} \#J_B(a, b)$$

avec (pour $0 < -a \leq b$)

$$J_B(a, b) = \left\{ (u, v) \in \mathbf{N}^2, \begin{array}{l} \frac{u}{v} \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{3}} b^{-1} \\ \text{pgcd}(u, v) = 1 \\ (ub + v)^2(-ua + v) \leq Bd_1 d_2 \end{array} \right\} \quad (4.7.1)$$

On note

$$e_1 = \frac{a}{d_1}, \quad e_2 = \frac{b}{d_2}, \quad u = d_4 = \text{pgcd}(x - z, y - z).$$

On a pour $0 < -a \leq b$,

$$b \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{3}} v u^{-1} \leq \varepsilon u^{-1} (d_1 d_2)^{\frac{1}{3}} \leq \varepsilon b^{\frac{2}{3}} u^{-1} (e_1 e_2)^{-\frac{1}{3}}.$$

Alors

$$b u^3 e_1 e_2 \leq \varepsilon^3.$$

On voit que non seulement e_1, e_2, u sont bornées, mais b (et *a fortiori* a) le sont aussi.

Étant donnés u, a, b, e_i , à une inversion de Möbius près, l'ensemble de v dans J_B est l'intersection avec un réseau de l'intervalle

$$[u\varepsilon^{-1} B^{\frac{1}{3}}, (Bd_1 d_2)^{\frac{1}{3}} - ubC'_{a,b,e_i,B,\varepsilon}].$$

Puisque l'ensemble des paires (a, b) telles que cette intervalle soit non-vidé est *fini* uniformément, le terme principal va avoir la grandeur $B^{\frac{1}{3}}$ et le terme d'erreur peut être contrôlé facilement. Donc on retrouve le résultat que Pagelot avait énoncé dans [Pag08].

Théorème 4.7.1. *Soit Y une surface de del Pezzo de degré ≥ 7 . Alors pour toute fonction f intégrable à support compact, on a*

$$\int f \, d\delta_{U,Q,B,\alpha_{\text{ess}}} = B^{\frac{1}{3}} \int f \, d\varrho_{Y,Q} + o(1),$$

où la mesure asymptotique est donnée par

$$\varrho_{Y,Q} = \sum_{\substack{l \ni Q \\ (\omega_x^{-1} \cdot l) = 3}} \lambda_l,$$

où λ_l est une mesure asymptotique sur la droite l (ayant des seuils et des valeurs différents selon le degré de Y , voir section 6.1). De plus, les termes $\lambda_l(f)$ sont presque tous nuls.

La grandeur de ces trois exemples est $B^{\frac{1}{3}}$, qui est inférieure à celle de X_3 , ce qui est naturel parce que plus on éclate des points, plus la hauteur diminue, ainsi plus les points s'accumulent. De plus, la mesure asymptotique, contrairement à celle de X_3 , n'a pas une densité continue (par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 dans $T_Q Y$).

Chapitre 5

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE ET DISTRIBUTION LOCALE SUR LA SURFACE Y_4

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se placera sur une surface torique définie sur \mathbf{Q} que l'on notera toujours Y_4 . Elle est obtenue en éclatant les 4 points invariants de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, ce qui correspond aux éventails

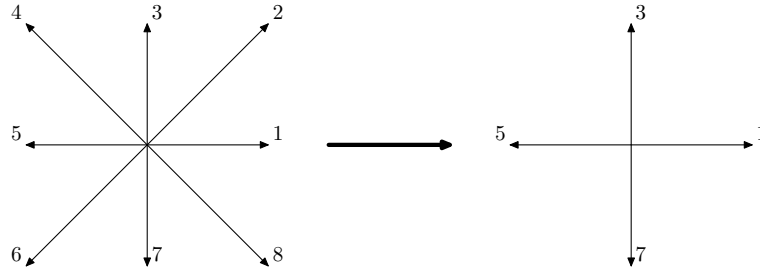


FIGURE 5.1 – L'éclatement $Y_4 \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

On choisit le relevé du point $Q = [1 : 1] \times [1 : 1]$ de l'orbite ouverte que l'on va approcher. Comme conjecturé par D. McKinnon (Conjecture 2.1.9 *infra*), les courbes rationnelles donnent les meilleurs approximaux. En effet, nous démontrons qu'il existe 4 courbes rationnelles $Z_i (1 \leq i \leq 4)$ passant par Q de degré anticanonique minimal qui donnent les meilleures approximations. Alors qu'en dehors des Z_i , les approximaux optimaux sont peu nombreux et se situent sur une famille de courbes nodales en Q de degré bas dont la réunion est dense dans Y_4 . Elles sont obtenues en considérant les courbes nodales dont les tangentes au point Q ont des pentes irrationnelles. Autrement dit, les points au-dessus de la désingularisation en Q de la courbe ne sont pas définis sur \mathbf{Q} (en fait ils sont définis sur une extension quadratique de \mathbf{Q}).

On énonce le théorème principal du texte.

Théorème 5.1.1 (cf. Théorèmes 5.4.5, 5.4.6, 5.4.7 *infra*). *On a $\alpha(Q, Y_4) = \alpha_{\text{ess}}(Q, Y_4) = 2$. Soit $U = Y_4 \setminus \cup_{i=1}^4 Z_i$. Soit r le facteur de zoom.*

1. *Si $0 < r < 2$, on a que $\delta_{Y_4, Q, B, r} = \delta_Q$ pour B suffisamment grand.*
2. *Si $r = 2$, on a que pour toute $f \in C_Q^b(X)$,*

$$\delta_{Y_4, Q, B, 2}(f) = B^{\frac{1}{2}}(\delta'_2(f) + o(1)),$$

où δ'_2 est une mesure à support $\cup_{i=1}^4 Z_i$. De plus, $\delta_{U, Q, B, r}(f) = O_f(1)$. Il n'existe pas de mesure limite dans ce cas.

3. *Si $2 < r < \frac{144}{55}$, alors il existe une constante $\eta \in]0, 1[$ telle que pour toute positive $f \in C_Q^b(X)$,*

$$\delta_{U, Q, B, r}(f) \gg \left(\int f \, d\delta_r \right) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^3 \quad (5.1.1)$$

où δ_r est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue planaire.

Ce résultat implique que le facteur de zoom $r = 2$ est critique, au sens qu'il y a un saut de dimension du support de la famille de mesure $\delta_{U, Q, B, r}$. Plus précisément, pour r petit (< 2) on ne compte que le point Q . Cependant si r est légèrement plus grand que 2, le support semble être de dimension 2. Dans le cas critique ($r = 2$), les points se concentrent sur les courbes Z_i puisque $\delta_{U, Q, B, 2}(f) = o(\delta_{Z_i, Q, B, 2}(f))$. Compte-tenu d'un résultat de Pagelot (cf. Théorème 6.1.1), ceci dit que le nombre d'approximaux sur les Z_i pour tout $r \geq 2$ domine celui dans le complémentaire bien que leur constantes d'approximation coïncident. La variété $\cup_{i=1}^4 Z_i$ est alors localement faiblement accumulatrice (cf. Définition 2.2.5).

Remarquons que d'après l'heuristique naïve du principe de Batyrev-Manin (cf. (5.4.8)), on souhaiterait que la puissance de B soit $2 - \frac{1}{r}$. C'est-à-dire que l'on voudrait pouvoir prendre $\eta = 1$. Nous démontrons la minoration (5.1.1) uniquement pour $\eta < \frac{1}{35}$ (cf. Théorème 5.4.7). Quand on restreint aux courbes nodales, l'approximation du point Q revient à l'approximation d'un point *algébrique quadratique*, ce qui nous amène à étudier plus soigneusement la distribution locale des points algébriques sur la droite projective. Notons qu'en dimension 1, il n'y a pas de sous-variétés localement accumulatrice.

Théorème 5.1.2 (cf. Théorèmes 5.3.1, 5.3.8 *infra*). *On munit le fibré $\mathcal{O}(1)$ sur \mathbf{P}^1 d'une hauteur de Weil (cf. (5.3.1)). Soit θ un nombre irrationnel algébrique. On identifie θ à un point rationnel $[\theta : 1]$ de \mathbf{P}^1 . Alors $\alpha(\theta, \mathbf{P}^1) = \frac{1}{2}$.*

— Si $r = \frac{1}{2}$ et θ est un nombre quadratique, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_\theta^b(\mathbf{P}^1)$,

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(f) = O_{\theta, f}(1)$$

et il existe certaines fonctions $g \in \mathcal{C}_\theta^b(\mathbf{P}^1)$ telles que

$$\liminf_B \delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(g) < \limsup_B \delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(g).$$

En d'autres termes, il n'existe pas de mesure limite pour le zoom critique.

— Si $r > \frac{1}{2}$. Alors pour toute $f \in \mathcal{C}_\theta^b(\mathbf{P}^1)$,

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, r}(f) = B^{2-\frac{1}{r}} \left(\frac{3}{\pi^2 \sup(1, |\theta|)^2} \int f(x) dx + o(1) \right).$$

En particulier, la mesure limite est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.

La constante d'approximation de θ est déduite des théorèmes de Dirichlet et Roth (ou de l'inégalité de Liouville). Pour les nombres quadratiques, le zoom critique est directement lié aux équations de Pell-Fermat. Trouver des points dans le zoom équivaut plus ou moins à trouver des solutions *primitives* (Définition 5.2.6) de ces équations. La théorie algébrique des nombres pour les corps $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ où D est un entier naturel sans facteur carré nous donne une bonne compréhension de la structure des solutions des équations $x^2 - Dy^2 = m$ pour $m \in \mathbf{Z}$. Pour les équations de la forme $ax^2 - by^2 = c$, grâce à la résolubilité de l'équation $ax^2 - by^2 = a$ on peut toujours localiser certaines solutions, qui suffisent pour l'utilisation que nous en faisons. On remarque aussi que la constante implicite dans le premier énoncé est explicitement calculable. Voir les détails et les énoncés précis dans la section 5.2.

Le deuxième énoncé nous dit qu'il existe beaucoup d'approximants ayant la constante d'approximation proche de $\frac{1}{2}$. Mais il semble difficile de construire des suites de points rationnels ayant cette propriété même pour un seul nombre cubique (voir [Chu83]). En fait dans la démonstration, on utilise le théorème de Roth sous la forme « ineffective » : pour tout $\lambda > 0$, il existe une constante $C = C(\theta, \lambda) > 0$ telle que pour tout rationnel $\frac{u}{v}$, on ait

$$\left| \frac{u}{v} - \theta \right| > \frac{C}{v^{2+\lambda}}.$$

Mais la constante C n'est pas explicite. En terme de l'expansion en fraction continue, on ne sait pas comment contrôler la croissance des quotients partiels sauf pour les nombres quadratiques. La conséquence est l'ineffectivité du terme d'erreur. La difficulté majeure pour le comptage est que (quand on prend une fonction caractéristique d'un intervalle par exemple) les points que l'on veut dénombrer sont des points entiers primitifs dans une région très fine. La formule empirique (le terme principal est le volume et le terme d'erreur est de grandeur de la longueur du bord) n'est plus applicable. L'idée que l'on va adapter est la théorie d'équirépartition modulo 1. Nous allons démontrer cet énoncé pour des nombres réels ayant la mesure d'irrationalité 2 (cf. définition 5.3.6), et pour certains nombres quadratiques particulier avec la constante implicite précisée (cf. la section 5.3).

Comme nous l'avons dit, la démonstration du théorème 5.1.1 utilise le paramétrage par des courbes nodales. La première partie se déduit de celle du théorème 5.1.2 en remarquant que dans un voisinage fixé du point Q , il n'y a qu'un nombre fini de courbes nodales qui interviennent pour le zoom critique. Pour le zoom sous-critique, sur certaines courbes nodales on trouve une équidistribution au sens du deuxième énoncé du Théorème 5.1.2 (cf. Proposition 5.4.8 *infra*). Chacune de ces courbes donne des points d'ordre de grandeur égale à une puissance de B . Le problème est de les sommer. Pour cela on utilise la technique développée par R. de la Bretèche et T. D. Browning dans [dB10], [dB11], [Bro11] pour traiter l'ordre moyen des diviseurs pour des forme binaires, qui nous entraîne une formule asymptotique pour le dénombrement de points sur les courbes dont le paramètre est petit. La mesure δ_r qui minore le zoom peut être vue comme une saturation de ces courbes nodales, chacune étant équipée d'une mesure uniforme. Ceci est analogue à l'exemple de la surface del Pezzo torique de degré 6 étudiée dans le chapitre 4, où la mesure limite existe pour le zoom critique, qui est obtenue en utilisant le paramétrage par des droites. Avec les techniques utilisées dans ce texte, on n'est pas capable de trouver une formule asymptotique pour le zoom sous-critique de la surface Y_4 (c'est-à-dire « \gg » remplacé par « \sim »). Toutefois le deuxième énoncé assure que l'ordre de croissance de la distribution locale est minoré par une puissance positive de B avec une mesure uniforme.

Esquissons l'organisation du chapitre. La section 5.2 est consacrée aux propriétés fondamentales des corps quadratiques réels et l'application aux équations de Pell-Fermat. En les utilisant, on démontre le théorème 5.1.2 en étudiant la distribution locale critique des nombres algébrique quadratiques dans la première partie de la section 5.3, et dans la deuxième partie on démontre la formule asymptotique pour le zoom sous-critique de certains

nombres réels basé sur les théorèmes classiques sur l'équirépartition modulo 1. L'étude de la distribution locale de la surface torique Y_4 (à tout niveau) est faite dans la dernière section 5.4, où nous démontrons le théorème 5.1.1. Nous renvoyons le lecteur aux appendices pour une présentation du résultat de S. Pagelot et l'adaptation de celui de R. de la Bretèche et T. D. Browning.

Notations : La lettre p désigne un nombre premier. On note v_p la fonction d'ordre p -adique, φ la fonction indicatrice d'Euler, τ le fonction arithmétique donnant le nombre total de diviseurs donnée par :

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (5.1.2)$$

et μ la fonction de Möbius. On définit, pour $n \geq 1$,

$$\phi(n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad (5.1.3)$$

alors l'indicatrice d'Euler est donné par

$$\varphi(n) = n\phi(n).$$

Pour un nombre réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x qui est le plus grand entier $\leq x$, $\lceil x \rceil$ le plus petit entier $\geq x$, et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ la partie fractionnaire de x . Fixons E un ensemble. Pour $A, B \subseteq E$, on note $A\Delta B$ le sous-ensemble de E défini par

$$A\Delta B = A - B \cup B - A = (A \cup B) - (A \cap B). \quad (5.1.4)$$

Pour F un sous-ensemble de \mathbf{Z}^2 , on note

$$F_{\text{prem}} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2 : \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1\}$$

l'ensemble des points primitifs de F .

5.2 Solutions des équations de Pell-Fermat

5.2.1 Rappels sur la théorie algébrique des corps de nombres quadratiques

On rappelle des faits classiques sur les corps quadratiques réels. Pour les détails, voir par exemple ([Sam03] 2.5, 4.6, 5.4). On fixe un entier $D > 0$ sans facteur carré. Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$. On note ε_D l'unité fondamentale de \mathcal{O}_K telle que $\varepsilon_D > 1$. Alors le groupe d'unités $\mathcal{O}_K^* = \{\pm 1\} \times \{\varepsilon_D^n, n \in \mathbf{Z}\}$. On introduit les sous-groupes de \mathcal{O}_K^* :

$$\mathcal{U}_D^+ = \{z \in \mathcal{O}_K : N(z) = 1\}, \quad (5.2.1)$$

$$\mathcal{U}_D^* = \{z \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{D} : N(z) = 1\}. \quad (5.2.2)$$

On note $\varepsilon_D^+ > 1$ (resp. $\varepsilon_D^* > 1$) l'élément de \mathcal{U}_D^+ (resp. \mathcal{U}_D^*) dont la classe engendre le groupe $\mathcal{U}_D^+/\{\pm 1\}$ (resp. $\mathcal{U}_D^*/\{\pm 1\}$).

Lemme 5.2.1 ([Sam03], p. 78).

$$\varepsilon_D^* = \begin{cases} \varepsilon_D^+ & \text{si } \varepsilon_D \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{D}; \\ (\varepsilon_D^+)^3 & \text{si } \varepsilon_D \notin \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{D}. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Pour $m \in \mathbf{Z}$, on désigne par $S_{D,m}^*$ l'ensemble des solutions entières de l'équation Pell-Fermat

$$x^2 - Dy^2 = m. \quad (5.2.4)$$

$$S_{D,m}^* = \{z = x + y\sqrt{D} \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{D} : N(z) = m\}.$$

On note aussi

$$S_{D,m} = \{z \in \mathcal{O}_K : N(z) = m\}.$$

La notation $I \triangleleft A$ signifie ici que I est un idéal de l'anneau A . On utilise $N_{K/\mathbf{Q}}(\cdot)$ pour désigner la norme des idéaux et $N(\cdot)$ pour désigner la norme des éléments. On définit

$$\mathcal{I}_{|m|} = \{I \triangleleft \mathcal{O}_K : N_{K/\mathbf{Q}}(I) = |m|\}.$$

On note In (resp. De, Ra) l'ensemble des nombres premiers qui sont inertes (resp. sont décomposés, se ramifient) dans l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt{D})/\mathbf{Q}$. Pour tout $z = x + y\sqrt{D} \in K$, sa conjugaison est définie par

$$\bar{z} = x - y\sqrt{D}.$$

On a besoin d'une estimation explicite du cardinal de l'ensemble $\mathcal{I}_{|m|}$ ainsi que celui de \mathcal{I}_m^* .

Proposition 5.2.2. *On fixe $m \in \mathbf{Z}$. Soient les entiers $m_1, m_2 > 0$ définis par la factorisation*

$$|m| = \prod_{p \text{ premier}} p^{v_p(m)} = \prod_{\substack{p \in \text{De} \\ p|m}} p^{v_p(m)} \cdot \prod_{\substack{p \notin \text{De} \\ p|m}} p^{v_p(m)} = m_1 \cdot m_2. \quad (5.2.5)$$

Alors on a

$$\#\mathcal{I}_{|m|} = \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } p \in \text{In}, p|m \text{ et } v_p(m) \text{ impair;} \\ \prod_{\substack{p \in \text{De} \\ p|m}} (v_p(m) + 1) = \tau(m_1) & \text{sinon;} \end{cases}$$

où τ désigne la fonction arithmétique de nombre du diviseur (cf. (5.1.2)).

On observe que l'ensemble $\mathcal{I}_{|m|}$ est parfois vide.

Corollaire 5.2.3.

$$\#\mathcal{I}_{|m|} \leq \tau(m_1) \leq \tau(|m|).$$

Démonstration de la proposition. Quelque soit $I \in \mathcal{I}_{|m|}$, on considère sa décomposition

$$I = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier} \triangleleft \mathcal{O}_K} \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}}.$$

Alors comme l'application $N_{K/\mathbf{Q}}(\cdot)$ est multiplicative,

$$|m| = N_{K/\mathbf{Q}}(I) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier} \triangleleft \mathcal{O}_K} N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p})^{e_{\mathfrak{p}}} = \prod_{\substack{p \in \text{De} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}}} p^{e_{\mathfrak{p}} + e_{\bar{\mathfrak{p}}}} \prod_{\substack{p \in \text{In} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}}} p^{2e_{\mathfrak{p}}} \prod_{\substack{p \in \text{Ra} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^2}} p^{e_{\mathfrak{p}}}.$$

La quantité à droite est en fait la factorisation de m (5.2.5). On en conclut que

$$v_p(m) = \begin{cases} e_{\bar{\mathfrak{p}}} + e_{\mathfrak{p}} & \text{si } p \in \text{De}; \\ e_{\mathfrak{p}} & \text{si } p \in \text{Ra}; \\ 2e_{\mathfrak{p}} & \text{si } p \in \text{In}. \end{cases}$$

En particulier $v_p(m)$ est pair pour $p \in \text{In}$. Réciproquement, pour tout $p \in \text{In}$, on choisit m_p pair et pour tout $p \in \text{De}$, donnons-nous un couple $(e_{\mathfrak{p}}^1, e_{\mathfrak{p}}^2) \in \mathbf{N}^2$ tel que $e_{\mathfrak{p}}^1 + e_{\mathfrak{p}}^2 = m_p$. Le produit

$$\prod_{\substack{p \in \text{De} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}}} \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}^1} \bar{\mathfrak{p}}^{e_{\mathfrak{p}}^2} \prod_{\substack{p \in \text{In} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}^{\frac{m_p}{2}} \prod_{\substack{p \in \text{Ra} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^2}} \mathfrak{p}^{m_p}.$$

est un idéal de norme $|m|$. Pour chaque $p \in \text{De}$, il y a $v_p(m) + 1$ tels couples d'entiers. D'où l'énoncé. \square

Lemme 5.2.4. *Le groupe \mathcal{U}_D^+ (5.2.2) agit sur $S_{D,m}$ librement et l'ensemble des orbites est en bijection avec*

$$\mathcal{I}_m^+ = \{I \triangleleft \mathcal{O}_K : \exists a_I \in \mathcal{O}_K, N(a_I) = m, I = (a_I)\}.$$

Proposition 5.2.5. *Le groupe \mathcal{U}_D^* (5.2.1) agit sur l'ensemble $S_{D,m}^*$ librement et on a la majoration suivante pour le cardinal de l'ensemble des orbites :*

$$\#\mathcal{I}_m^+ \leq \#\mathcal{I}_m^+ \leq 3\#\mathcal{I}_{|m|} \leq 3\tau(m).$$

Démonstration. D'après le lemme 5.2.1 on a $[\mathcal{U}_D^+ : \mathcal{U}_D^*] \leq 3$. Le cardinal des orbites de l'action de \mathcal{U}_D^* sur $S_{D,m}^*$, qui est aussi libre, est majoré par

$$\#\mathcal{I}_m^+ \leq \#\mathcal{I}_m^+ \leq \#\mathcal{I}_m^+ \leq 3\#\mathcal{I}_{|m|} \leq 3\tau(m).$$

La conclusion découle du corollaire 5.2.3. \square

Définition 5.2.6. Une solution $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ de l'équation (5.2.4) est dite *primitive* si $\text{pgcd}(x, y) = 1$.

Toute solution de (5.2.4) vérifie $\text{pgcd}(x, y)^2 | m$. Donc lorsque $\mu(m)^2 = 1$, toutes les solutions sont automatiquement primitives. Un avantage de la décomposition de $S_{D,m}^*$ par l'action de \mathcal{U}_D^* est le suivant.

Lemme 5.2.7. *Supposons que $S_{D,m}^* \neq \emptyset$. Alors $\text{pgcd}(x, y)$ ne dépend pas des éléments $x + y\sqrt{D} \in S_{D,m}^*$ qui sont dans une même orbite.*

Démonstration. Soient $a, b \in S_{D,m}^*$ tels que $b \in a\mathcal{U}_D^*$. Alors $(a) = (b)$ comme idéaux. Donc pour tout nombre premier p , on a

$$(a) \subset (p) \Leftrightarrow (b) \subset (p).$$

□

On appelle *famille de solutions* de (5.2.4) l'ensemble des solutions correspondant à une orbite de l'action de \mathcal{U}_D^* dans $S_{D,m}^*$. S'il existe une solution $a = x + y\sqrt{D}$ qui est primitive, alors l'orbite par l'action de \mathcal{U}_D^* donne une famille de solutions primitives. Si la solution n'est pas primitive, on note $d = \text{pgcd}(x, y)$ et on a $d^2 | m$. Alors $\{z/d : z \in \mathcal{U}_D^* a\}$ est une famille de solutions *primitives* de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \frac{m}{d^2}$$

dont le coefficient est plus petit. On définit \mathcal{P}_D comme l'ensemble des familles des solutions primitives des équations (5.2.4) pour toutes les valeurs de m . Alors $\#\mathcal{P}_D = \infty$ puisque tout couple $(x_0, 1)$ engendre une famille de solutions primitives de (5.2.4) pour m arbitrairement grand. Cela est suffisant pour l'utilisation ultérieure, et l'on n'a pas besoin de décrire pour quels m , on a $S_{D,m}^* \neq \emptyset$.

5.2.2 Équations de Pell-Fermat généralisées

Maintenant on considère les équations diophantiennes

$$ax^2 - by^2 = c, \quad a, b \in \mathbf{N}, a < b, c \in \mathbf{Z}, \quad \text{pgcd}(a, b) = 1.$$

D'abord on démontre que les solutions sont contenues dans celles des équations de type $x^2 - Dy^2 = m$, dont la structure est connue d'après la discussion précédente. Deuxièmement on démontre que quand $c = a$, l'ensemble des solutions (modulo $\{\pm 1\}$) est engendré par une puissance de l'unité fondamentale ε_D . Cela nous permet de construire une suite de solutions primitives de l'équation

$$ax^2 - by^2 = c \tag{5.2.6}$$

pour a, b, c fixés à partir de n'importe quelle solution primitive.

On factorise

$$a = A'(a')^2, \quad b = B'(b')^2, \tag{5.2.7}$$

avec A', B' sans facteur carré. Ce qui nous ramène aux équations considérées précédemment est l'observation simple suivante.

Lemme 5.2.8. *On note $S_{a,b,c}^*$ l'ensemble des solutions (x, y) de (5.2.6). Alors on a une bijection $S_{a,b,c}^* \mapsto S_{A'B',A'C}^*$. Plus précisément, on a une bijection de $S_{a,b,c}^*$ sur*

$$\{(x, y) \in S_{A'B',A'C}^* : A'a' | x, b'|y\}.$$

Démonstration.

$$ax^2 - by^2 = c \iff (Aa'x)^2 - A'B'(b'y)^2 = Ac.$$

□

Maintenant comme toute solution (x, y) de l'équation

$$ax^2 - by^2 = a \tag{5.2.8}$$

vérifie $a | y$, en écrivant $y = az, w = a'b'z$ et en utilisant les notations (5.2.7), on obtient l'équivalence suivante

$$\exists (x, y) \in \mathbf{Z}^2, ax^2 - by^2 = a \iff \exists (x, z) \in \mathbf{Z}^2, x^2 - abz^2 = 1 \iff \exists (x, w) \in \mathbf{Z} \times a'b'\mathbf{Z}, x^2 - A'B'w^2 = 1.$$

Notons qu'ici $A'B'$ est un entier sans facteur carré. Ainsi chercher des solutions de (5.2.8) revient à résoudre une équation de Pell sous certaine condition de divisibilité, dont la résolubilité est assurée grâce à un théorème de Dirichlet. On en donne une preuve courte pour faciliter la lecture.

Théorème 5.2.9 (Dirichlet [Lej56]). *Soit D en entier positif qui n'est pas un carré. On note*

$$D = ds^2, \quad d, s \in \mathbf{N}, d \text{ sans facteur carré.}$$

Alors l'ensemble des solutions \mathcal{A}_D^ de l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

est un sous-groupe de $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})}^$ vérifiant que $\mathcal{A}_D^*/\{\pm 1\}$ est cyclique engendré par la classe d'une puissance de l'unité fondamentale ε_d du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.*

Démonstration. L'ensemble

$$\mathcal{A}_D^* = \{z = u + v\sqrt{d} \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{d} : s|v, N_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})/\mathbf{Q}}(z) = 1\} \quad (5.2.9)$$

est un sous-groupe (multiplicatif) de $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})}^*$. Puisque \mathcal{A}_D^* est le noyau du morphisme $i \circ j$ dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_D^* & \longrightarrow & \mathcal{B}_D^* = \{z \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{d} : N_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})/\mathbf{Q}}(z) = 1\} \\ \downarrow \ker(i) & & \downarrow j \\ \ker(i)^c & \longrightarrow & (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{d})^* \xrightarrow{i} (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{d}/(s))^* \end{array} \begin{array}{l} \nearrow i \circ j \\ \end{array}$$

qui part de l'ensemble \mathcal{B}_D^* de cardinal infini vers l'image $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{d}/(s)$ de cardinal fini. Donc le noyau \mathcal{A}_D^* doit être un ensemble infini. \square

Proposition 5.2.10. *Notons $\theta = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Le groupe \mathcal{A}_{ab}^* (5.2.9) agit sur l'ensemble des solutions de (5.2.6) de la manière suivante. Pour $u + v\sqrt{A'B'} \in \mathcal{A}_{ab}^*$, et $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ une solution de (5.2.6), on note*

$$w = \frac{av}{a'b'} \in a\mathbf{Z}.$$

Alors (x', y') défini par

$$x' + \theta y' = (x + \theta y)(u + \theta w).$$

est une solution de (5.2.6). De plus, $\text{pgcd}(x', y') = \text{pgcd}(x, y)$.

Démonstration. On vérifie que

$$au^2 - bw^2 = a \left(u^2 - \frac{abv^2}{(a')^2(b')^2} \right) = a(u^2 - A'B'v^2) = a.$$

Soit $L = \mathbf{Q}(\theta)$, alors

$$N_{L/\mathbf{Q}}(x' + \theta y') = (x')^2 - \frac{b}{a}(y')^2 = \left(x^2 - \frac{b}{a}y^2 \right) \left(u^2 - \frac{b}{a}w^2 \right) = \frac{c}{a},$$

d'où

$$a(x')^2 - b(y')^2 = c.$$

On a évidemment

$$\text{pgcd}(x, y) | \text{pgcd}(x', y').$$

Puisque (comme dans la démonstration du lemme 5.2.7)

$$x + \theta y = (x' + \theta y')(u - \theta w),$$

on en déduit que

$$\text{pgcd}(x', y') | \text{pgcd}(x, y),$$

d'où l'énoncé. \square

Remarque 5.2.11. Soit $u + v\sqrt{A'B'} \in \mathbf{N} + \mathbf{N}\sqrt{A'B'}$ qui engendre le groupe $\mathcal{A}_{ab}^*/\{\pm 1\}$. On fixe $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ une solution de (5.2.6) et soient (x_n, y_n) définis comme précédemment. Comme $x_n, y_n \rightarrow \infty$, on en conclut que les nombres rationnels $(\frac{x_n}{y_n})$ forment une suite d'approximants de $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Comme l'on a vu précédemment,

$$\#\{c \in \mathbf{Z} : \exists(x, y) \in \mathbf{Z}^2, \text{pgcd}(x, y) = 1, ax^2 - by^2 = c\} = \infty$$

puisque tout couple de types $(1, v)$ ou $(u, 1)$ donnent des éléments de cet ensemble. Ainsi on peut construire une infinité de suites de solutions primitives à l'aide de la procédure ci-dessus. Si (x, y) est primitif, on obtient alors une suite d'approximants *primitifs*.

5.3 Zoom sur les nombres algébriques

Dans cette section on étudie la distribution locale d'un point $\theta \in \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) - \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. On identifie localement \mathbf{P}^1 avec $T_\theta \mathbf{P}^1$ via l'application définie pour $v \neq 0$,

$$[u : v] \mapsto \frac{u}{v} \quad ([\theta : 1] \mapsto \theta).$$

On utilise la hauteur de Weil canonique associée à $\mathcal{O}(1)$:

$$H([u : v]) = \max(|u|, |v|), \quad (u, v) \in \mathbf{Z}^2, \quad \text{pgcd}(u, v) = 1. \quad (5.3.1)$$

On utilise la valeur absolue comme distance. Il convient de choisir, pour tout $\varepsilon > \eta > 0$, les fonction caractéristiques $\chi(\varepsilon)$ et $\chi(\varepsilon, \eta)$ définies par

$$\chi(\varepsilon) = \chi(\{y \in \mathbf{R} : |y - \theta| \leq \varepsilon\}), \quad \chi(\varepsilon, \eta) = \chi(\{y \in \mathbf{R} : \eta < |y - \theta| \leq \varepsilon\})$$

pour tester la répartition asymptotique des rationnels autour du point θ . On remarque que $\chi(\varepsilon, \eta)$ est en fait la fonction caractéristique de la réunion des intervalles

$$] \theta + \eta, \theta + \varepsilon], \quad [\theta - \varepsilon, \theta - \eta [.$$

On peut faire le même pour $\chi(\varepsilon)$. On fixe dans la suite $r > 1$ et l'on considère la famille de mesures $\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, r}$.

5.3.1 Cas critique pour des nombres quadratiques

On voit que $\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, r}(\chi(\varepsilon))$ vaut le nombre de point $[u : v] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ qui vérifient les conditions suivantes

$$\left| \frac{u}{v} - \theta \right| \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}, \quad (5.3.2)$$

$$\text{pgcd}(u, v) = 1, \quad \max(|u|, |v|) \leq B \quad (5.3.3)$$

Si $[\mathbf{Q}(\theta) : \mathbf{Q}] = 2$, i.e. θ est quadratique, un tel nombre est en général représenté de façon unique sous la forme

$$\theta = \frac{P}{Q} \pm \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(P, Q) = 1.$$

En vertu de (5.3.2), il suffit de considérer les nombres de la forme $\theta = \sqrt{\frac{b}{a}}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$. D'après les théorèmes de Roth et Dirichlet, on a $\alpha_{\text{ess}}(\theta) = \alpha(\theta, \mathbf{P}^1) = \frac{1}{2}$. Donc on prend $r = \frac{1}{2}$ correspondant au zoom critique. On réécrit l'inéquation (5.3.2) comme

$$\left| \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| \leq \varepsilon B^{-2}. \quad (5.3.4)$$

On a aussi l'inégalité de Liouville

$$\left| \frac{u}{v} - \theta \right| \geq \frac{\Xi(\theta)}{v^2}, \quad (5.3.5)$$

où la constante $\Xi(\theta) > 0$ est calculable (cf. la démonstration de la proposition 5.3.18). Le résultat principal de cette partie est le suivant, qui démontre la partie $r = \frac{1}{2}$ du Théorème 5.1.2.

Théorème 5.3.1. *Pour $C, D > 0$, il existe $\varepsilon > \eta > C$, $\varepsilon - \eta < D$ tels que*

$$0 = \liminf_B \delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) < \limsup_B \delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) = O_{\varepsilon, \eta}(1).$$

Par conséquent, il n'existe pas de mesure limite pour le zoom critique.

Ce théorème est une conséquence des propositions 5.3.3, 5.3.4 et 5.3.5.

Remarque 5.3.2. Dans [Lan65] S. Lang a considéré aussi le dénombrement d'approximants de nombres quadratiques mais sans l'opération de zoom (c'est-à-dire seulement la condition de borne de la hauteur est imposé). Il a obtenu une formule asymptotique du type $c \log B$, ce qui est une conséquence directe des conclusions sur la structure des solutions des équation de Pell-Fermat.

5.3.1.1 Lien avec des équations de Pell-Fermat

Nous trouvons d'abord le lien avec des équations de Pell-Fermat. Les équations (5.3.4) et (5.3.3) nous donnent

$$\begin{aligned} |au^2 - bv^2| &= av^2 \left| \left(\frac{u}{v} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left(\frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right| \\ &\leq av^2 \left(2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{\varepsilon}{B^2} \right) \frac{\varepsilon}{B^2} \\ &\leq 2\varepsilon\sqrt{ab} + \frac{a\varepsilon^2}{B^2} = 2\varepsilon\sqrt{ab} + o(1). \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

On en conclut que $|au^2 - bv^2|$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières et ce nombre est indépendant de B . Cela nous permet de décomposer la quantité $\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon))$ de la façon suivante

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)) = \# \left(\bigsqcup_{|m| \leq 2\varepsilon\sqrt{ab}+1} E(\varepsilon, B)_m \right), \quad (5.3.7)$$

où

$$E(\varepsilon, B)_m = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in \mathbf{N}^2 \\ \text{pgcd}(u, v) = 1 \\ \left| \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| \leq \varepsilon B^{-2}; \\ \max(|u|, |v|) \leq B; \\ au^2 - bv^2 = m. \end{array} \right\}. \quad (5.3.8)$$

De plus, on a, d'après (5.3.5),

$$\frac{\varepsilon}{B^2} \geq \frac{\Xi(\theta)}{v^2} \geq \frac{\Xi(\theta)}{B^2}, \quad (5.3.9)$$

d'où $\varepsilon \geq \Xi(\theta) > 0$. C'est-à-dire quand le diamètre du voisinage auquel la fonction caractéristique correspond est suffisamment petit, il n'y a pas de points rationnels pour tout B . On ne cherche pas à trouver la valeur maximale possible de $\Xi(\theta)$ puisque l'intérêt de cette inégalité est qu'il révèle, comme dans le cas de la distribution locale d'un point rationnel, un phénomène de « trou ». Voir les appendices pour un analogue du cas où θ est un nombre rationnel.

5.3.1.2 Suites de bornes évitant les solutions

On suppose comme précédemment que $\theta = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Le but de cette section est double. S'appuyant sur les résultats de la section 5.2.1, on donne une borne effective pour (5.3.7) et on construit des suites de bornes telles que $\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, r}(\chi(\varepsilon, \eta)) = 0$ pour toute fonction caractéristique $\chi(\varepsilon, \eta)$ suffisamment « petite ». On conserve les notations dans (5.2.7).

Proposition 5.3.3. *Pour tout $\varepsilon > \Xi(\theta)$ (cf. (5.3.5)), on a, pour tout $B \gg_\varepsilon 1$,*

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)) \leq 6 \sum_{|m| \leq 2\varepsilon\sqrt{ab}+1} \tau(A'm) \left(\left\lfloor \frac{\log(\varepsilon) - \log(\Xi(\theta))}{2 \log(\varepsilon_{A'B}^*)} \right\rfloor + 1 \right),$$

où A', B' sont définis par (5.2.7) et $\varepsilon_{A'B}^*$ par (5.2.1).

Proposition 5.3.4. *Il existe une fonction d'escalier $G(\cdot) : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>1}$ qui est décroissante et semi-continue inférieurement telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\eta \in]\frac{\varepsilon}{G(\varepsilon)}, \varepsilon[$, on puisse choisir une suite de bornes (B_n) qui tend vers ∞ de manière que*

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B_n, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) = 0.$$

Démonstration. Le lemme 5.2.8 nous permet de se ramener aux cas où $\theta = \sqrt{D}$ où $D = A'B'$ est sans facteur carré. Plus précisément, pour $\varepsilon > \eta > 0$ et pour chaque entier m , on note

$$\varepsilon' = \frac{A'a'}{b'}\varepsilon, \quad \eta' = \frac{A'a'}{b'}\eta,$$

et $E'(\varepsilon, \eta, B)_m$ l'ensemble des points $(u, v) \in \mathbf{N}^2$ vérifiant les conditions

$$\eta' B^{-2} < \left| \frac{u}{v} - \sqrt{D} \right| \leq \varepsilon' B^{-2}; \quad (5.3.10)$$

$$u^2 - v^2 D = A' m. \quad (5.3.11)$$

Il suffit de démontrer qu'il existe (B_n) telle que $\#E(\varepsilon, \eta, B_n) \equiv 0$ puisque

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \leq \sum_{m \in \mathbf{Z}} \#E'(\varepsilon, \eta, B)_m.$$

On est ramené à un problème concernant des solutions des équations de Pell-Fermat. On extrait un encadrement pour v . D'une part,

$$\frac{A'|m|}{v^2} = \frac{|u^2 - v^2 D|}{v^2} = \left| \frac{u}{v} - \sqrt{D} \right| \left| \frac{u}{v} + \sqrt{D} \right| \leq \frac{\varepsilon'}{B^2} \left(2\sqrt{D} + \frac{\varepsilon'}{B^2} \right),$$

d'où

$$v^2 \geq \frac{A'|m|}{\varepsilon'(2\sqrt{D} + \frac{\varepsilon'}{B^2})} B^2.$$

D'autre part,

$$\frac{A'|m|}{v^2} = \frac{|u^2 - v^2 D|}{v^2} \geq \frac{\eta'}{B^2} \left(2\sqrt{D} - \frac{\varepsilon'}{B^2} \right),$$

d'où

$$v^2 \leq \frac{A'|m|}{\eta'(2\sqrt{D} - \frac{\varepsilon'}{B^2})} B^2.$$

En résumé, on a

$$\sqrt{\frac{A'|m|}{\varepsilon'(2\sqrt{D} + \frac{\varepsilon'}{B^2})}} B \leq |v| \leq \sqrt{\frac{A'|m|}{\eta'(2\sqrt{D} - \frac{\varepsilon'}{B^2})}} B. \quad (5.3.12)$$

En reportant dans (5.3.10), on a

$$|u - v\sqrt{D}| \leq \frac{\varepsilon'|v|}{B^2} = O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{1}{B} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} |u + v\sqrt{D}| &\leq |u - v\sqrt{D}| + 2|v|\sqrt{D} \\ &= 2|v|\sqrt{D} + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{1}{B} \right) \\ &\leq 2\sqrt{\frac{A'|m|D}{\eta'(2\sqrt{D} - \frac{\varepsilon'}{B^2})}} B + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{1}{B} \right). \end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned} |u + v\sqrt{D}| &\geq 2|v|\sqrt{D} - |u - v\sqrt{D}| \\ &= 2|v|\sqrt{D} + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{1}{B} \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{A'|m|D}{\varepsilon'(2\sqrt{D} + \frac{\varepsilon'}{B^2})}} B + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{1}{B} \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{\log |u + v\sqrt{D}|}{\log(\varepsilon_D^*)} &\leq \frac{1}{\log(\varepsilon_D^*)} \left(\frac{1}{2} \log(4A'|m|D) - \frac{1}{2} \log(2\eta'\sqrt{D}) + \log B \right) + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{1}{B^2} \right) \\ \frac{\log |u + v\sqrt{D}|}{\log(\varepsilon_D^*)} &\geq \frac{1}{\log(\varepsilon_D^*)} \left(\frac{1}{2} \log(4A'|m|D) - \frac{1}{2} \log(2\varepsilon'\sqrt{D}) + \log B \right) + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{1}{B^2} \right) \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

D'après (5.3.9), on a que pour $\eta < \Xi(\theta)$,

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) = \delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)).$$

Donc (5.3.13) entraîne une borne pour le nombre de solutions dans toute famille de solutions de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = A'm, \quad |m| \leq 2\varepsilon\sqrt{ab} + 1. \quad (5.3.14)$$

L'application Φ_D est définie par

$$\Phi_D(x, y) = \frac{\log(|x + y\sqrt{D}|)}{\log(\varepsilon_D^*)}.$$

L'image d'une famille de solutions J

$$\frac{\log(J)}{\log(\varepsilon_D^*)} = \left\{ \frac{\log |a_i|}{\log(\varepsilon_D^*)} + n, n \in \mathbf{Z} \right\}$$

est un translaté de \mathbf{Z} dans \mathbf{R} . Prenons une famille de solutions $J = \{\pm a_i(\varepsilon_D^*)^n, n \in \mathbf{Z}\}$, on a (compte-tenu du signe) pour $B \gg_{\varepsilon, \eta} 1$,

$$\#(J \cap E(\varepsilon, \Xi(\theta), B)) \leq 2 \left(\left\lfloor \frac{\log(\varepsilon) - \log(\Xi(\theta))}{2 \log(\varepsilon_{A'B'}^*)} \right\rfloor + 1 \right).$$

La proposition 5.2.5 donne une majoration du nombre d'orbites, on arrive à la borne dans la proposition 5.3.3. Donc pour tout n fixé, l'ensemble des images de toutes les solutions de (5.3.14), noté $\mathcal{P}(\varepsilon)$, est une réunion finie de réseaux de même période dans \mathbf{R} par l'application Φ_D . Donc la fonction $F : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \mathcal{P}(\varepsilon) = \emptyset; \\ \min_{\lambda, \beta \in \Phi_D(\mathcal{P}(\varepsilon))} |\lambda - \beta| & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (5.3.15)$$

est évidemment décroissante et continue inférieurement. Elle est constante sur tout intervalle

$$\left[\frac{n-1}{2\sqrt{ab}}, \frac{n}{2\sqrt{ab}} \right], \quad (n \in \mathbf{N}).$$

On note $I(\varepsilon, \eta)$ l'intervalle

$$\left[\frac{1}{\log(\varepsilon_D^*)} \left(\frac{1}{2} \log(4A'|m|D) - \frac{1}{2} \log(2\eta'\sqrt{D}) \right), \frac{1}{\log(\varepsilon_D^*)} \left(\frac{1}{2} \log(4A'|m|D) - \frac{1}{2} \log(2\varepsilon'\sqrt{D}) \right) \right].$$

Si l'on prend η, ε assez proches tels que

$$0 < \frac{\log(\varepsilon) - \log(\eta)}{2 \log(\varepsilon_D^*)} = \frac{\log(2\varepsilon'\sqrt{D}) - \log(2\eta'\sqrt{D})}{2 \log(\varepsilon_D^*)} < F(\varepsilon),$$

à savoir

$$\frac{\varepsilon}{G(\varepsilon)} < \eta < \varepsilon, \quad G(\varepsilon) = (\varepsilon_D^*)^{2F(\varepsilon)},$$

on peut choisir $(B_n) \rightarrow \infty$ de sorte qu'il existe une constant $H(\varepsilon) > 0$ tel que l'intervalle $I_n = I(\varepsilon, \eta) + \frac{\log(B_n)}{\log(\varepsilon_D^*)}$ vérifie

$$\min_{\lambda \in \Phi_D(\mathcal{P}(\varepsilon))} \text{dist}(\lambda, I_n) > H(\varepsilon) > 0.$$

D'après (5.3.13), ceci démontre que $\#E(\varepsilon, \eta, B_n)_m = 0$ pour tout $|m| \leq 2\varepsilon\sqrt{ab} + 1$. La fonction G vérifie les même propriétés que celles de F , d'où la proposition 5.3.4. \square

5.3.1.3 Construction de suites de bornes avec des solutions

En imitant cette méthode, quand la fonction caractéristique choisie permet d'avoir une solution d'une équation Pell-Fermat généralisée, on peut choisir la suite (B_n) de la façon qu'elle donne au moins une famille de solutions.

Proposition 5.3.5. *Soit $\theta = \sqrt{\frac{b}{a}} > 1$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Pour tout couple (ε, η) , $\varepsilon > \eta > 0$, tel que l'intervalle $]2\sqrt{ab}\theta^{-2}\eta, 2\sqrt{ab}\theta^{-2}\varepsilon[$ contienne la valeur absolue d'un entier m de sorte que $S_{a,b,m}^*$ contienne une solution primitive (cf. les notations du lemme (5.2.8)). Alors il existe une suite de bornes $(B_n) \rightarrow \infty$ tel que*

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B_n, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geq 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Démonstration. On choisit $\lambda \in]0, 1[$ tel que $|m| \in]2\sqrt{ab}\theta^{-2}\eta, 2\sqrt{ab}\theta^{-2}\varepsilon\lambda^2[$. On suppose dans la suite que $m > 0$, la démonstration étant analogue lorsque $m < 0$. Soit $B > 0$ tel que

$$m > \frac{2\sqrt{ab}\eta}{\theta^2} + \frac{a\varepsilon\eta}{\theta^2 B^2}, \quad B^2 > \frac{m}{a\lambda^2 - (2\varepsilon)^{-1}\theta m}. \quad (5.3.16)$$

On définit l'ensemble $F(\lambda, B, m)$ des $(u, v) \in \mathbf{N}^2$ primitifs vérifiant

$$au^2 - bv^2 = m \text{ et } \lambda B \leq u \leq B. \quad (5.3.17)$$

Pour $(u, v) \in F(\lambda, B, m)$, on a, d'après (5.3.17),

$$v^2 = \frac{au^2 - m}{b} \leq \frac{a}{b}B^2 - \frac{m}{b} < \frac{a}{b}B^2.$$

En revanche, grâce à la deuxième inégalité de (5.3.16),

$$v^2 \geq \frac{a}{b}\lambda^2 B^2 - \frac{m}{b} > \frac{m}{2\sqrt{ab}\varepsilon} B^2.$$

On note $X = \frac{u}{v} - \theta$. Alors la positivité de m implique celle de X . Notons que $\frac{u}{v} + \theta = X + 2\theta$, on obtient, d'après l'hypothèse sur m ,

$$X = \frac{m}{av^2(X + 2\theta)} < \frac{m}{2\theta av^2} < \frac{\varepsilon}{B^2}.$$

Cela entraîne aussi la majoration

$$X + 2\theta \leq 2\theta + \frac{\varepsilon}{B^2},$$

ainsi que la minoration pour X :

$$X = \frac{m}{av^2(X + 2\theta)} \geq \frac{m}{a\theta^{-2}B^2(2\theta + \frac{\varepsilon}{B^2})} \geq \frac{\eta}{B^2}$$

par la première inégalité de (5.3.16). Cela montre que

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B_n, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geq \#F(\lambda, B, m).$$

On prend $(u_0, v_0) \in \mathbf{N}^2$ une solution primitive de l'équation

$$ax^2 - by^2 = m.$$

On définit $((u_n, v_n))_{n \in \mathbf{N}}$ comme dans la remarque (5.2.11). Comme $u_n \rightarrow \infty$, on peut choisir $(B_n) \rightarrow \infty$ de la manière que

$$\lambda B_n < u_n \leq B_n,$$

Donc pour tout n suffisamment grand, on a $(u_n, v_n) \in F(\lambda, B_n, m)$, d'où

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \theta, B_n, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geq \#F(\lambda, B_n, m) \geq 1.$$

□

Démonstration du théorème 5.3.1. Pour $C, D > 0$ fixés, on peut choisir $m \in \mathbf{N}$ tel que

$$\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} > 2C,$$

et que $S_{a,b,m}^*$ contienne une solution primitive (Remarque 5.2.11). Rappelons les propriétés des fonctions F et G dans la démonstration de la proposition 5.3.4. Il existe alors $\delta_0 > 0$ tel que

$$G(x) = G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right) \leq |\varepsilon_D^*|^2, \quad \forall x \in \left[\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}, \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} + \delta_0\right].$$

On définit

$$\delta_1 = \min\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\left(G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right) - 1\right), \frac{D}{2}, \delta_0, C\right) > 0.$$

Maintenant on prend

$$\varepsilon = \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} + \frac{\delta_1}{2}, \quad \eta \in \left] \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} - \frac{\delta_1}{2|\varepsilon_D^*|^2}, \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} \right[.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{G(\varepsilon)} &= \frac{\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} + \delta_1}{G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right)} - \frac{\delta_1}{2G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right)} \\ &\leq \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} - \frac{\delta_1}{2G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right)} \\ &\leq \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} - \frac{\delta_1}{2|\varepsilon_D^*|^2} < \eta, \end{aligned}$$

Le couple (ε, η) vérifie toutes les hypothèses des propositions 5.3.4, 5.3.5. Compte tenu de la majoration fournie par la proposition 5.3.3, il en découle donc que

$$\liminf_B \delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) = 0 < 1 \leq \limsup_B \delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \leq \limsup_B \delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)) = O_\varepsilon(1).$$

□

5.3.2 Zoom sous-critique

On va prouver un résultat sur la distribution locale en un point réel vérifiant des inégalités de type analogue à celle de Liouville, qui *a fortiori* s'applique aux nombres algébriques. Pour cela on rappelle des notions standard d'approximation diophantienne des nombres réels.

Définition 5.3.6. Soit $t > 0$. On dit qu'un nombre réel θ a un ordre d'irrationalité t s'il existe une constante $C = C(\theta, t)$ telle que

$$\left| \theta - \frac{m}{n} \right| \geq \frac{C}{n^t} \quad \forall (m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*. \quad (5.3.18)$$

La mesure d'irrationalité $m(\theta)$ est la borne inférieure de l'ensemble des ordres d'irrationalité de θ . De manière équivalente, elle est égale au maximum des nombres s tels que

$$\liminf_q q^{s-1} \min(\{q\theta\}, 1 - \{q\theta\}) = 0.$$

Si θ est algébrique, $m(\theta)$ est rien d'autre que la constante d'approximation $\alpha(\theta, \mathbf{P}^1)$ associée au fibré $\mathcal{O}(1)$.

Résumons les théorèmes classiques suivants (voir par exemple [Bug04, Chapitre 1] pour des détails).

Théorème 5.3.7 (Dirichlet, Liouville, Roth). *Le nombre 2 est un ordre d'irrationalité et la mesure d'irrationalité d'un nombre quadratique. Pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $2 + \varepsilon$ est un ordre d'irrationalité d'un nombre algébrique de degré ≥ 3 dont la mesure d'irrationalité est 2.*

Le résultat principal de cette section est le suivant, qui est valide pour tout nombre algébrique de degré ≥ 2 . Pour ceux dont le degré est 2, on a un meilleur contrôle du terme d'erreur.

Théorème 5.3.8. *Soient α un nombre réel et $r > \frac{1}{2}$. Alors pour tout $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq 0$ et $\tau > 0$,*

— *si $\frac{1}{2} < r \leq 1$, supposons que $m(\alpha) = 2$, on a*

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} \int \chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) dx + O_{\alpha, \varepsilon_i, \tau}(B^{1-\frac{1}{2r}+\tau}). \quad (5.3.19)$$

Si de plus 2 est un ordre d'irrationalité de α , à savoir $\exists \Xi(\alpha) \in]0, 1[$ tel que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ on ait

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\Xi(\alpha)}{q^2} \Leftrightarrow d(q\alpha, \mathbf{Z}) \geq \frac{\Xi(\alpha)}{q}, \quad (5.3.20)$$

on a, en notant

$$\Delta(\alpha) = \frac{\Xi(\alpha)^{-1}}{\log(\Xi(\alpha)^{-1})}, \quad (5.3.21)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) &= B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} \int \chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) dx \\ &+ O_{\varepsilon_i} \left(\Delta(\alpha) \Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \log(\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}) \right). \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

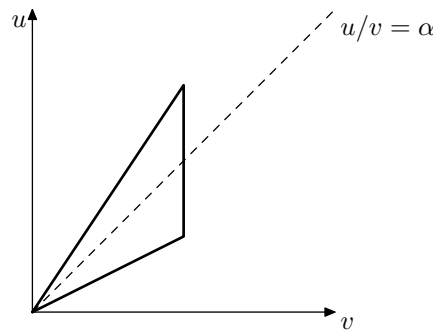
— si $r > 1$, on a

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} \int \chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) dx + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B \log B).$$

Remarque 5.3.9. La dépendance du terme d'erreur dans (5.3.19) sur α et τ est intrinsèque en un sens similaire au théorème de Roth. En effet, elle dépende des constantes $C(\alpha, t)$ dans (5.3.18) avec t proche de 2 (cf. aussi (5.3.31) *infra*). Alors que le terme d'erreur dans (5.3.22) ne dépende que de la taille de α .

Tout d'abord on reformule ce problème de zoom en un problème de dénombrement. Pour $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq 0, B > 0$, on définit $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$ l'ensemble des point $[u : v]$ vérifiant

$$\text{pgcd}(u, v) = 1, \quad \varepsilon_2 B^{-\frac{1}{r}} < \left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}, \quad \max(|u|, |v|) \leq B \quad (5.3.23)$$



Graphiquement, si l'on prend $\varepsilon_2 = 0$, c'est-à-dire on prend la fonction de test $\chi(\varepsilon)$ et on calcule $\delta_{\mathbf{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon))$, on compte des points entiers primitifs à l'intérieur du triangle dont l'aire est d'ordre de grandeur $B^{2-\frac{1}{r}}$ et celle de la longueur du bord est B . Donc la comparaison classique avec l'aire du triangle n'est utilisable que pour les cas où $r > 1$. Ceux où $r \leq 1$ nécessitent un travail supplémentaire. Notre approche s'appuie sur la théorie d'équirépartition modulo 1 utilisée dans [Pag08].

Définition 5.3.10. Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels. Elle est dite *équirépartie modulo 1* si pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{1 \leq n \leq N : \{x_n\} \in [a, b]\} = b - a.$$

Soit (x_n) une suite de nombres réels équirépartie modulo 1. Soit $N > 0$. La *discrédance* (à N) $D_{(x_n)}(N)$ de cette suite est définie par

$$D_{(x_n)}(N) = \sup_{\lambda \in [0, 1]} \left| \frac{\#\{n \leq N : \{x_n\} \in [0, \lambda]\}}{N} - \lambda \right|.$$

Si la suite $(x_n) = (n\alpha)$ pour un nombre α réel fixé, on notera $D_\alpha(N) = D_{(n\alpha)}(N)$.

On rappelle l'inégalité de Koksma-Denjoy pour les suites équiréparties modulo 1. (Voir, par exemple, [KN74] p. 143)

Théorème 5.3.11 (Koksma-Denjoy). Soient (x_n) une suite équirépartie modulo 1 et $N \geq 1$. Soit ϕ une fonction mesurable à variation bornée définie sur $[0, 1]$ (on note $V(\phi)$ la variation totale de ϕ). Alors

$$\left| \frac{1}{N} \sum_1^N \phi(\{x_n\}) - \int_0^1 \phi \right| \leq V(\phi) D_{(x_n)}(N).$$

L'inégalité de Erdős-Turán donne un contrôle de la discrédance (cf. [KN74] p. 122-123) pour les nombres irrationnels dont la mesure d'irrationalité est finie.

Théorème 5.3.12 (Erdős-Turán). Soit θ un nombre irrationnel ayant un ordre d'irrationalité $t > 0$. Alors pour tout $\sigma > 0$, on a

$$D_\theta(N) = O_{\sigma, \theta, t}(N^{-\frac{1}{t-1} + \sigma}).$$

Si les quotients partiels dans l'expansion en fraction continue d'un nombre irrationnel sont bornés, de manière équivalente, l'inégalité de Liouville (5.3.20) étant vérifiée, alors une meilleure majoration de la discrédance existe (cf. [KN74, Theorem 3.4], p. 125).

Théorème 5.3.13. Soient $\vartheta = [a_0; a_1, \dots]$ un nombre irrationnel. Supposons que les quotients partiels de ϑ sont bornés, i.e. il existe $M > 0$ tel que $a_i \leq M, \forall i \geq 1$. Alors

$$ND_{\vartheta}(N) \leq 3 + \left(\frac{1}{\log \xi} + \frac{M}{\log(M+1)} \right) \log N,$$

où $\xi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Lemme 5.3.14. Soit ϑ un nombre irrationnel. Supposons qu'il existe $C(\vartheta) \in]0, 1[$ tel que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, on ait

$$\left| \vartheta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\vartheta)}{q^2}. \quad (5.3.24)$$

Soit $\vartheta = [a_0; a_1, \dots]$ son expansion en fraction continue. Alors pour tout $i \geq 1$,

$$a_i \leq (C(\vartheta))^{-1}.$$

Par conséquent,

$$ND_{\vartheta}(N) = O\left(\frac{C(\vartheta)^{-1}}{\log(C(\vartheta)^{-1})} \log N \right).$$

Démonstration. Soient $(\frac{p_k}{q_k})_{n=-1}^{\infty}$ les convergents principaux de ϑ . Alors ils vérifient, pour tout $k \geq 1$, la règle de récurrence (voir [Khi64, Theorem 1])

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2};$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

et (voir [Khi64, Theorem 9]) pour tout $k \geq 0$,

$$\left| \vartheta - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Il en découle que $q_{k+1} > a_{k+1} q_k$ et donc

$$\left| \vartheta - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{a_{k+1} q_k^2}.$$

En reportant dans (5.3.24), on obtient que pour $k \geq 0$,

$$a_{k+1} \leq (C(\vartheta))^{-1}.$$

□

Démonstration du théorème 5.3.8. On peut supposer que $\alpha > 0$. On fixe $\varepsilon > 0, B > 0$.

Cas $\frac{1}{2} < r \leq 1$. On suppose que $\alpha > 1$. La première étape est de comparer le cardinal de $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$ (5.3.23) avec celui de $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$ qui consiste en les $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ de sorte que

$$\text{pgcd}(u, v) = 1, \quad \varepsilon_2 B^{-\frac{1}{r}} < \left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}, \quad v \leq B/\alpha \quad (5.3.25)$$

On prend $(u, v) \in S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$. Alors (5.3.23) implique que

$$|u - \alpha v| \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}} v \leq \varepsilon_1.$$

Donc pour un tel v choisi, il n'y a qu'un nombre fini de choix pour u . De plus on a

$$|v| \leq \alpha^{-1}(\varepsilon_1 + |u|) \leq B/\alpha + \varepsilon_1/\alpha.$$

On en conclut que

$$\#(S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) - T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)) = O_{\varepsilon_i}(1).$$

Réciproquement, si l'on prend $(u, v) \in T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$, (5.3.25) implique que

$$|u| \leq |v|(\alpha + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}) \leq B + \varepsilon_1/\alpha.$$

On en conclut de façon analogue que

$$\#(T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) - S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)) = O_{\varepsilon_i}(1),$$

et ainsi que

$$\#S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = \#T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) + O_{\varepsilon_i}(1). \quad (5.3.26)$$

On est ramené à calculer le cardinal de l'ensemble $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$. À l'aide de l'inversion de Möbius, on définit pour $d \in \mathbf{N}$,

$$T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = \sum_{d \in \mathbf{N}^*} \mu(d) (\#T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B) + \#T_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)), \quad (5.3.27)$$

où $T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)$ consiste en les $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ tels que

$$\varepsilon_2 B^{-\frac{1}{r}} < \frac{u}{v} - \alpha \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}, \quad v \leq \frac{B}{\alpha d} \quad (5.3.28)$$

et $T_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)$ consiste en les $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ tels que

$$-\varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{u}{v} - \alpha < -\varepsilon_2 B^{-\frac{1}{r}}, \quad v \leq \frac{B}{\alpha d} \quad (5.3.29)$$

On obtient une borne sur d plus fine que celle naïve $d \leq \frac{B}{\alpha}$ de la façon suivante. D'une part,

$$d(\alpha v, \mathbf{Z}) \leq |u - \alpha v| \leq \varepsilon_1 v B^{-\frac{1}{r}} \leq \varepsilon_1 \frac{B^{1-\frac{1}{r}}}{d}. \quad (5.3.30)$$

D'après l'hypothèse sur α , pour tout $\lambda > 0$, il existe une constante $C(\alpha, \lambda) > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$,

$$d(\alpha n, \mathbf{Z}) \geq \frac{C(\alpha, \lambda)}{n^{1+\lambda}}.$$

Donc

$$d(\alpha v, \mathbf{Z}) \geq \frac{C(\alpha, \lambda)}{v^{1+\lambda}} \geq \frac{C(\alpha, \lambda) d^{1+\lambda}}{B^{1+\lambda}}.$$

En combinant les deux inégalités on obtient

$$\varepsilon_1 \frac{B^{1-\frac{1}{r}}}{d} \geq C(\alpha, \lambda) \frac{d^{1+\lambda}}{B^{1+\lambda}},$$

Donc on peut restreindre la somme en d à ceux vérifiant

$$d \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{C(\alpha, \lambda)} \right)^{\frac{1}{2+\lambda}} B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}} = D(\alpha, \varepsilon_1, \lambda) B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}}. \quad (5.3.31)$$

Si de plus (5.3.20) est valide, alors

$$d(\alpha v, \mathbf{Z}) \geq \frac{\Xi(\alpha)}{v} \geq \frac{\Xi(\alpha) d}{B}.$$

Dans ce cas en combinant (5.3.30) on obtient

$$d \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{\Xi(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}. \quad (5.3.32)$$

On établit maintenant les formules asymptotiques suivantes un peu plus générales faisant intervenir une constante fixée K , qui permet de l'appliquer à une hauteur équivalente à celle donnée. Pour une utilisation ultérieure, on précise la dépendance en K du terme d'erreur.

Proposition 5.3.15. *Fixons $d \in \mathbf{N}, K > 0$ et $\varepsilon > \eta \geq 0$. Supposons que*

$$(\varepsilon - \eta) K B^{1-\frac{1}{r}} < \frac{\alpha}{4}. \quad (5.3.33)$$

On définit l'ensemble $T_K(\varepsilon, \eta, d, B)$ des $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ satisfaisant à $v \leq \frac{K}{\alpha d} B$ ainsi que

$$\eta B^{-\frac{1}{r}} < \frac{u}{v} - \alpha \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}. \quad (5.3.34)$$

Alors pour tout $\sigma > 0$ et pour tout $N > \max(1, \frac{4\eta K}{\alpha d})$,

$$\#T_K(\varepsilon, \eta, d, B) = \frac{(\varepsilon - \eta) K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{N d^2} \right) + O_{\sigma} \left(\frac{K^{\sigma} B^{\sigma} N}{d^{\sigma}} \right). \quad (5.3.35)$$

Si de plus (5.3.20) est vérifiée, on a

$$\#T_K(\varepsilon, \eta, d, B) = \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2} \right) + O(\Delta(\alpha)N \log(KB)). \quad (5.3.36)$$

Les formules ci-dessus restent valides si l'on remplace (5.3.34) par

$$-\varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{u}{v} - \alpha < -\eta B^{-\frac{1}{r}}. \quad (5.3.37)$$

Démonstration. Soit $N > 1$ fixé dans la suite. On peut supposer que N est un entier (quitte à rajouter des constantes absolues dans les termes d'erreur). On considère le découpage de l'intervalle $]0, \frac{K}{\alpha d} B]$ en les intervalles

$$\left] \frac{(k-1)KB}{\alpha d N}, \frac{kKB}{\alpha d N} \right], \quad (1 \leq k \leq N). \quad (5.3.38)$$

Soit $(u_0, v_0) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ tel que

$$\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v_0 \leq \frac{kKB}{\alpha d N} \text{ et } \eta B^{-\frac{1}{r}} < \frac{u_0}{v_0} - \alpha \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}},$$

on a

$$\eta v_0 B^{-\frac{1}{r}} > \frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, \quad \varepsilon v_0 B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{\varepsilon kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

et donc

$$\frac{\eta K(k-1)}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} < u_0 - \alpha v_0 \leq \frac{\varepsilon kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

D'après la condition (5.3.33) et le choix de N ,

$$\frac{\varepsilon kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - \frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} = \frac{(\varepsilon - \eta)kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} + \frac{\eta K B^{1-\frac{1}{r}}}{\alpha d N} < \frac{1}{2}.$$

On en conclut que pour tout $k \leq N$ et pour tout entier v fixé, il existe au plus un entier u tel que $(u, v) \in T_K(\varepsilon, \eta, d, B)$. Fixons dans la suite k et considérons l'intervalle

$$J_k = \left[-\frac{\varepsilon kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, -\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \right].$$

On cherche maintenant une équivalence à l'hypothèse suivante :

$$\text{(H)} \text{ Pour } v \in \mathbf{N} \text{ fixé, il existe un (unique) } u \in \mathbf{Z} \text{ tel que } u - \alpha v \in \left] \frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, \frac{\varepsilon kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \right[.$$

La difficulté de la démonstration qui suit vient du cas $r = 1$, pour lequel l'intervalle J_k peut contenir un entier, y compris pour des grandes valeurs de B . On a les deux possibilités suivantes :

Cas I : l'intervalle J_k contient un entier u_k . Alors on a

$$J_k - (u_k - 1) = \left[-\frac{\varepsilon kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1), 1 \left[\bigcup \left[1, -\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1) \right[\right.$$

Alors (H) revient à dire que

$$\{\alpha v\} = \alpha v - u - (u_k - 1) \in I_{k,1} = \left[-\frac{\varepsilon kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1), 1 \left[\right.$$

$$\text{ou } \{\alpha v\} = \alpha v - u - u_k \in I_{k,2} = \left[0, -\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - u_k \left[\right.$$

Réciproquement, si v vérifie l'une des conditions ci-dessus, l'entier u tel que (H) soit vérifiée existe et vaut $\alpha v - \{\alpha v\} - u_k + 1$ ou $\alpha v - \{\alpha v\} - u_k$ selon l'appartenance de $\{\alpha v\}$. Notons que $I_{k,1} \cap I_{k,2} = \emptyset$. En désignant $I_k = I_{k,1} \cup I_{k,2} \subset]0, 1[$, qui est soit un intervalle (si l'un des $I_{k,i}$ est vide), soit la réunion disjointe de deux intervalles, on conclut que la condition (H) est équivalente à $\{\alpha v\} \in I_k$.

Cas II : l'intervalle J_k ne contient aucun entier. Suppose que $J_k \subset]u_k - 1, u_k[$ où $u_k \in \mathbf{Z}$. Alors dans ce cas (H) est équivalente à

$$\{\alpha v\} = \alpha v - u - (u_k - 1) \in I_k = \left[-\frac{\varepsilon kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1), -\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1) \left[\subset]0, 1[.$$

On vérifie que l'on a une équivalence analogue si l'on suppose (5.3.37). Ayant établi cette équivalence, on peut réduire le comptage en deux variables (u, v) en une seule v . Par abuse de notations, pour une propriété $\mathcal{P}(x)$, on note $1_{\mathcal{P}(x)} = 1_{\mathcal{P}(x)}(x)$ la fonction qui vaut 1 si $\mathcal{P}(x)$ est vérifiée et vaut 0 sinon. Nous avons la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \#T_K(\varepsilon, \eta, d, B) &= \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} \sum_{u \in \mathbf{Z}} 1_{\eta v B^{-\frac{1}{r}} < u - \alpha v \leq \varepsilon v B^{-\frac{1}{r}}} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} 1_{\{\alpha v\} \in I_k} \right) + \text{Er}, \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} T_{\varepsilon, \eta, d, k, B} + \text{Er}. \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

où le terme d'erreur admet la majoration suivante.

$$\begin{aligned} |\text{Er}| &\leq 2 \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} 1_{\substack{\varepsilon v B^{-\frac{1}{r}} < u - \alpha v < \frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \\ \text{ou } \frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \leq u - \alpha v \leq \eta v B^{-\frac{1}{r}}}} \\ &\leq 2 \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} \left(1_{\frac{\varepsilon(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} < u - \alpha v < \frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}} + 1_{\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \leq u - \alpha v \leq \frac{\eta k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}} \right) \\ &= 2 \sum_{1 \leq k \leq N} E_{\varepsilon, d, k, B} + E_{\eta, d, k, B}. \end{aligned}$$

On traite d'abord le terme principal en appliquant les théorèmes 5.3.12 et 5.3.11. On définit la fonction $\phi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ comme

$$\phi_k(u) = 1_{I_k}(u). \quad (5.3.40)$$

On décompose $T_{\varepsilon, \eta, d, k, B}$ comme

$$T_{\varepsilon, \eta, d, k, B} = \sum_{v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} 1_{\{\alpha v\} \in I_k} - \sum_{v \leq \frac{(k-1)KB}{\alpha d N}} 1_{\{\alpha v\} \in I_k} = T_1 - T_2.$$

D'après le Théorème 5.3.11 et le théorème 5.3.12 (avec $t = 1$),

$$\begin{aligned} T_{1, k} &= \sum_{v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} 1_{\{\alpha v\} \in I_k} \\ &= \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} \left(\int_0^1 \phi_k + O \left(D_\alpha \left(\frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} \right) \right) \right) \\ &= \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} |I_k| + O \left(\frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} D_\alpha \left(\frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} \right) \right) \\ &= \frac{(\varepsilon - \eta)k^2 K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + \frac{\eta k K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O \left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} \right) \end{aligned}$$

où la constante implicite dépend de σ et α . De façon similaire on obtient

$$\begin{aligned} T_{2, k} &= \sum_{v \leq \frac{(k-1)KB}{\alpha d N}} 1_{\{\alpha v\} \in I_k} \\ &= \frac{(\varepsilon - \eta)k(k-1)K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + \frac{\eta(k-1)K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O \left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$T_{\varepsilon, \eta, d, k, B} = \frac{(\varepsilon - \eta)kK^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + \frac{\eta K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O \left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} \right). \quad (5.3.41)$$

On somme sur tous les k . Faisons-le d'abord pour le terme principal de $T_{\varepsilon, \eta, d, k, B}$ (5.3.41) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\frac{(\varepsilon - \eta)kK^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + \frac{\eta K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} \right) &= \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{N(N+1)}{2N^2} B^{2-\frac{1}{r}} + \frac{\eta K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N} \\ &= \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon, \eta} \left(\frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{N d^2} \right). \end{aligned}$$

Ensuite pour le terme d'erreur de $T_{\varepsilon,d,k,B}$ (5.3.41) :

$$\sum_{k=1}^N \frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} = O\left(\frac{K^\sigma B^\sigma N}{d^\sigma}\right). \quad (5.3.42)$$

On obtient

$$\sum_{k=1}^N T_{\varepsilon,\eta,d,k,B} = \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2}\right) + O_\sigma\left(\frac{K^\sigma B^\sigma N}{d^\sigma}\right) \quad (5.3.43)$$

où la constante implicite dépend de σ et α . Ensuite on estime le terme Er en utilisant la même méthode. En imitant la discussion pour $T_{\varepsilon,\eta,d,k,B}$, on en conclut l'existence des ensembles $L_{1,k}, L_{2,k}$ qui sont la réunion de au plus 2 intervalles disjoints de $[0, 1[$ et

$$|L_{1,k}| = \frac{\varepsilon K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, \quad |L_{2,k}| = \frac{\eta K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}$$

tels que

$$u - \alpha v \in \left[\frac{\varepsilon(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, \frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \right] \iff \{\alpha v\} \in L_{1,k}$$

$$u - \alpha v \in \left[\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, \frac{\eta k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \right] \iff \{\alpha v\} \in L_{2,k}$$

On décompose $E_{\varepsilon,d,k,B}$ comme

$$E_{\varepsilon,d,k,B} = \sum_{v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} \mathbf{1}_{\{\alpha v\} \in L_{1,k}} - \sum_{v \leq \frac{(k-1)KB}{\alpha d N}} \mathbf{1}_{\{\alpha v\} \in L_{1,k}} = S_{1,k} - S_{2,k}.$$

On estime les $S_{i,k}$ ($1 \leq i \leq 2$) en appliquant une autre fois les Théorèmes 5.3.11 et 5.3.12.

$$S_{1,k} = \frac{\varepsilon k K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O\left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma}\right); \quad S_{2,k} = \frac{\varepsilon(k-1)K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O\left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma}\right).$$

Donc

$$E_{\varepsilon,d,k,B} = \frac{\varepsilon K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O\left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma}\right).$$

On obtient aussi une formule analogue pour $E_{\eta,d,k,B}$. Ainsi

$$\begin{aligned} Er &= \sum_{k=1}^N O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2}\right) + O_\sigma\left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma}\right) \\ &= O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2}\right) + O_\sigma\left(\frac{K^\sigma B^\sigma N}{d^\sigma}\right). \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

En résumé de (5.3.43) et (5.3.44), on a démontré que pour α général ayant la mesure d'irrationalité 2,

$$\#T_K(\varepsilon, \eta, d, B) = \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2}\right) + O_\sigma\left(\frac{K^\sigma B^\sigma N}{d^\sigma}\right). \quad (5.3.45)$$

Maintenant, supposons la validité de l'inégalité (5.3.20). Il suffit de modifier tous les termes d'erreur concernant la discrétion, à savoir, les termes qui contiennent σ . Plus précisément, en utilisant le lemme 5.3.14, on a

$$\sum_{1 \leq k \leq N} \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} D_\alpha\left(\frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N}\right) = \sum_{1 \leq k \leq N} O\left(\Delta(\alpha) \log\left(\frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N}\right)\right) = O\left(\Delta(\alpha) N \log\left(\frac{KB}{\alpha d}\right)\right)$$

et donc,

$$\begin{aligned} \#T_K(\varepsilon, \eta, d, B) &= \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2}\right) + O\left(\Delta(\alpha) N \log\left(\frac{KB}{\alpha d}\right)\right) \\ &= \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2}\right) + O(\Delta(\alpha) N \log(KB)) \end{aligned}$$

□

Suite de la démonstration du théorème 5.3.8. On décompose $T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)$ (5.3.27) en des parties $T(\eta_{i-1}, \eta_i, d, B)$ où

$$T(\eta_{i-1}, \eta_i, d, B) = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \\ \text{pgcd}(u, v) = 1 \\ \eta_{i-1} B^{-\frac{1}{r}} < \left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \leq \eta_i B^{-\frac{1}{r}} \\ v \leq \frac{B}{\alpha d} \end{array} \right\}. \quad (5.3.46)$$

avec $\varepsilon_2 = \eta_0 < \dots < \eta_l = \varepsilon_1$ choisies de sorte que

$$\eta_i - \eta_{i-1} < \alpha/4.$$

En appliquant la proposition 5.3.15 à ces ensembles (avec $K = 1, \varepsilon = \eta_i, \eta = \eta_{i-1}$) on déduit que pour tout $\sigma > 0$ et $N > \max(4\varepsilon_1, 1)$,

$$\#T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i} \left(\frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2} \right) + O_\sigma \left(\frac{B^\sigma N}{d^\sigma} \right), \quad (5.3.47)$$

ce qui est valide aussi pour $T_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)$. Il reste à sommer sur tous les d . Rappelons d'après (5.3.31) que l'on a pour tout $\lambda > 0$,

$$d = O_{r, \alpha, \varepsilon_i} (B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}}).$$

On choisit

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{1}{2r} \right) \text{ et } N = \frac{B^{(1-\frac{\sigma}{4})(1-\frac{1}{2r})}}{d^{1-\frac{\sigma}{2}}}.$$

On vérifie que avec ce choix

$$\left(1 - \frac{1}{(2+\lambda)r} \right) \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) < \left(1 - \frac{\sigma}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{2r} \right)$$

et donc

$$N \gg B^{(1-\frac{\sigma}{4})(1-\frac{1}{2r}) - (1-\frac{1}{(2+\lambda)r})(1-\frac{\sigma}{2})} \gg \varepsilon_1$$

pour $B \gg_{\sigma, \varepsilon} 1$. On réécrit (5.3.47) comme

$$\#T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i, \sigma} \left(\frac{B^{1-\frac{1}{2r} + \sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r})}}{d^{1+\frac{\sigma}{2}}} \right).$$

En utilisant l'estimation élémentaire

$$\sum_{n=1}^M \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{M}\right),$$

la somme du terme principal de (5.3.47) est égale à

$$\begin{aligned} \sum_{d=O(B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}})} \mu(d) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i, \lambda} (B^{1-\frac{1+\lambda}{(2+\lambda)r}}) \\ &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + o_{\varepsilon_i, \lambda} (B^{1-\frac{1}{2r}}) \end{aligned}$$

Et celle du terme d'erreur est d'ordre de grandeur égal à

$$\sum_{d=O(B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}})} O_{\varepsilon_i, \sigma} \left(\frac{B^{1-\frac{1}{2r} + \sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r})}}{d^{1+\frac{\sigma}{2}}} \right) = O_{\varepsilon_i, \sigma} (B^{1-\frac{1}{2r} + \sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r})}).$$

Finalement en reportant dans (5.3.27) on en conclut que

$$\#T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i, \sigma} (B^{1-\frac{1}{2r} + \sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r})}). \quad (5.3.48)$$

Il ne reste qu'à prendre, pour $\tau > 0$ donné, $\sigma > 0$ tel que $\sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r}) \leq \tau$. En reportant dans (5.3.26), cela démontre finalement que

$$\delta_{\mathbf{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \#S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \alpha^2} \left(\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} + \int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_2} \right) dx + O_{\varepsilon_i, \tau} (B^{1-\frac{1}{2r} + \tau}). \quad (5.3.49)$$

Maintenant, supposons la validité de (5.3.20). Rappelons la borne pour d (5.3.32). Dans ce cas on prend

$$N = \frac{(16\varepsilon_1^{\frac{3}{2}} + 2\varepsilon_1^{\frac{1}{2}})\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}}B^{1-\frac{1}{2r}}}{d} > \max(4\varepsilon_1, 1).$$

Comme l'on suppose que $0 < \Xi(\alpha) < 1$, on déduit de (5.3.36)

$$\#T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i} \left(\frac{\Delta(\alpha)\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{d} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \right).$$

On somme sur tous les d dans le terme principal et le terme d'erreur respectivement.

$$\begin{aligned} & \sum_{d \leq \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}} \mu(d) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} \\ &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i}(\Xi(\alpha)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}), \\ & \sum_{d \leq \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}} O_{\varepsilon_i} \left(\frac{\Delta(\alpha)\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{d} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \right) \\ &= O_{\varepsilon_i} \left(\Delta(\alpha)\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \log(\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}) \right). \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} \#T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i}(\Xi(\alpha)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}) + O_{\varepsilon_i} \left(\Delta(\alpha)\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \log(\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}) \right) \\ &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i} \left(\Delta(\alpha)\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \log(\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}) \right). \end{aligned}$$

Cela démontre la formule (5.3.22).

Si $0 < \alpha < 1$, alors il suffit de modifier la définition de l'ensemble $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$ en remplaçant $|v| \leq B/\alpha$ par $|v| \leq B$.

Cas $r > 1$. Une inversion de Möbius nous fournit que

$$\#S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = \sum_{d \leq B} \mu(d) (\#S(d, \varepsilon_1, B) - \#S(d, \varepsilon_2, B))$$

où

$$S(d, \varepsilon, B) = \left\{ (u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \left| \begin{array}{l} \left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ \sup(|u|, |v|) \leq B/d \end{array} \right. \right\}.$$

On a, par la méthode de comparaison classique avec l'aire du domaine réel,

$$\#S(d, \varepsilon, B) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{\varepsilon}{\sup(1, \alpha^2) d^2} + O_{|\alpha|} \left(\frac{B}{d} + \frac{\varepsilon B^{1-\frac{1}{r}}}{d} \right) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{\varepsilon}{\sup(1, \alpha^2) d^2} + O_{|\alpha|, \varepsilon} \left(\frac{B}{d} \right).$$

Puis on somme sur tous les d possible (5.3.31) et l'on obtient

$$\begin{aligned} \#S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B^{1-\frac{1}{r}}) + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B \log B) \\ &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B \log B) \\ &= B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} \left(\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} + \int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_2} \right) dx + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B \log B). \end{aligned}$$

□

5.3.3 Généralisation à un réseau

Les résultats sur l'approximation d'un nombre réel qu'on a démontrés précédemment peuvent être vu comme le fait d'approcher une droite par des points primitifs de pente donnée. Pour une utilisation ultérieure, nous allons présenter une version plus générale du Théorème 5.3.8. C'est-à-dire, on compte des points primitifs sur un réseau proche d'une droite dont la pente est un nombre quadratique donné. Le but est d'essayer de préciser la dépendance des constantes implicites, qui fait intervenir le déterminant du réseau. L'idée est qu'à l'aide d'une transformation linéaire liée au réseau, l'approximation sur le réseau de la droite équivaut l'approximation sur \mathbf{Z}^2 d'une autre droite de pente égale à un autre nombre quadratique. Comme l'on a vu, l'un des inconvénients de la démonstration ci-dessus est que la constante $C(\lambda, \alpha)$ qui apparaît dans (5.3.31) est en général difficile à préciser, à cause de l'absence d'effectivité du théorème de Roth (ou bien de l'inégalité de Liouville). Cela mène aussi à une ineffectivité de la discrèpance, car dans la démonstration du corollaire 5.3.12, on a utilisé le théorème de Roth (voir [KN74], p 123). Pour les nombres quadratiques, cette difficulté disparaît parce que l'on peut préciser facilement les constantes dans l'inégalité de Liouville (5.3.5) et dans la majoration de la discrèpance. On remarque que la technique ci-dessous fonctionne aussi pour les réels dont les quotients partiels dans l'expansion en fraction continue sont bornés (ceux qui vérifient l'inégalité de Liouville à puissance 2). On ne rentrera pas dans les détails.

Notations et Conventions : On fixe un réseau $\Lambda \subset \mathbf{Z}^2$ et $\varepsilon, K > 0$. On suppose que Λ contient un point primitif, donc $\Lambda \not\subset (d\mathbf{Z})^2$ pour tout $d \in \mathbf{N}^*$. Les nombres quadratiques auxquels on s'intéresse sont de la forme $\sqrt{\frac{b}{a}} \notin \mathbf{Q}$ avec $a < b$, que l'on notera toujours comme α . En pratique, les constantes ε, α sont bornées et l'on n'a pas besoin d'indiquer leur rôles dans les constante implicites. On note $\Lambda_d = \Lambda \cap d\mathbf{Z}^2$. et l'on définit

$$\Theta(\Lambda) = \sum_{d \in \mathbf{N}} \frac{\mu(d)}{\det(\Lambda_d)}. \quad (5.3.50)$$

Il existe $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ une base de \mathbf{Z}^2 telle que $\Lambda = \mathbf{Z}\mathbf{f}_1 \oplus \mathbf{Z}\det(\Lambda)\mathbf{f}_2$ puisque Λ contient un point primitif, donc

$$\begin{aligned} \Theta(\Lambda) &= \sum_{d \in \mathbf{N}} \frac{\mu(d)}{d[d, \det(\Lambda)]} \\ &= \prod_{p|\det(\Lambda)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{p|\det(\Lambda)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p^{v_p(\det(\Lambda))}} \\ &= \frac{1}{\det(\Lambda)} \frac{6}{\pi^2} \prod_{p|\det(\Lambda)} \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-2}} = \frac{6}{\pi^2} \frac{\Psi_1(\det(\Lambda))}{\det(\Lambda)} \end{aligned} \quad (5.3.51)$$

où

$$\Psi_1(n) = \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}. \quad (5.3.52)$$

On voudrait estimer le cardinal de l'ensemble suivant

$$S(\varepsilon, K, \Lambda, B) = \left\{ (u, v) \in \Lambda \cap \mathbf{N}_{\text{prem}}^2 \left| \begin{array}{l} 0 < \frac{u}{v} - \alpha \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ v \leq KB \end{array} \right. \right\}. \quad (5.3.53)$$

Pour réduire la difficulté technique et pour obtenir une formule asymptotique, nous allons imposer plusieurs conditions techniques. On ne prétend pas que les coefficients dans (5.3.54) et (5.3.55) soient optimaux mais ils suffisent pour l'utilisation ultérieure.

$$\frac{1}{2} < r < \frac{7}{10}, \quad (5.3.54)$$

$$K^2 b \leq U(\alpha, \varepsilon) B^{\frac{4}{5}(\frac{1}{r}-1) - \frac{3}{5}(2-\frac{1}{r})}, \quad U(\alpha, \varepsilon) = (2^{21} \times 162 \alpha^2 \varepsilon^2)^{-\frac{2}{5}} \quad (5.3.55)$$

$$b \det(\Lambda)^2 \leq K^2 B^{2-\frac{1}{r}}. \quad (5.3.56)$$

En gros, le but d'imposer la condition (5.3.55) est de réduire le problème de dénombrement à l'équidistribution modulo 1, et celui de la condition (5.3.56) est d'obtenir un meilleur terme d'erreur.

Théorème 5.3.16. *Avec les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\#S(\varepsilon, K, \Lambda, B) = \frac{\Theta(\Lambda)\varepsilon K^2}{2} B^{2-\frac{1}{r}} + O(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} \log B + Kb^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log B). \quad (5.3.57)$$

Rappelons (5.3.50) que l'on peut aussi interpréter $\Theta(\Lambda)$, dans l'esprit de l'équidistribution, comme

$$\Theta(\Lambda) = \frac{1}{\#\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/\det(\Lambda)\mathbf{Z})} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

qui correspond à la probabilité pour un point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ de provenir d'un élément de Λ primitif dans \mathbf{Z}^2 .

Remarque 5.3.17. Le deuxième terme d'erreur peut facilement dépasser le terme principal quand $\det(\Lambda)$ est trop petit et b est trop grand, ce qui perd l'intérêt de la formule. Toutefois pour notre utilisation ultérieure il y aura des relations étroites entre $b, K, \det(\Lambda)$. Il s'avère qu'en fait ce sera le premier terme d'erreur qui contribuera plus que le deuxième.

L'idée de la démonstration est que les points que l'on veut dénombrer sont dans un triangle. Toute transformation définie par une matrice l'envoie sur un autre triangle dont l'aire est celle du triangle initial divisé par le déterminant et la pente de l'une des bords correspond à un nouveau nombre quadratique à approcher, que l'on notera $\theta(\alpha)$, ce qui nous permet de se ramener au cas traité précédemment et d'appliquer la même technique.

Commençons par quelques préparations. On prend un réseau $\Gamma \subset \mathbf{Z}^2$. On choisit une base

$$\mathbf{e}_1 = (\lambda_1, \mu_1), \quad \mathbf{e}_2 = (\lambda_2, \mu_2) \quad (5.3.58)$$

engendrant Γ telle que (cf. [Cas97] p. 135)

$$\|\mathbf{e}_1\| \leq 2\nu_2, \quad \|\mathbf{e}_2\| \leq 2\nu_1, \quad (5.3.59)$$

où ν_i désigne le i -ème minima successif de Γ par rapport à la norme $\|\cdot\|$:

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|).$$

Le théorème de Minkowski (cf. [Cas97, Theorem V, VIII 4.3]) dit que

$$\nu_1^2 \leq \nu_1 \nu_2 \leq 4 \det(\Gamma) = 4|\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2|. \quad (5.3.60)$$

On définit

$$\theta = \theta(\alpha) = -\frac{\lambda_1 - \alpha \mu_1}{\lambda_2 - \alpha \mu_2}. \quad (5.3.61)$$

Quitte à remplacer \mathbf{e}_i par son opposé, on peut supposer que

$$\lambda_2 - \alpha \mu_2 > 0 \quad \text{et} \quad \theta(\alpha) > 0. \quad (5.3.62)$$

On établit un théorème de Liouville « effectif », à savoir, avec des constantes explicites.

Proposition 5.3.18. *Pour tout $(u, v) \in (\mathbf{N} - \{0\})^2$, on a*

$$\left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \geq \frac{\Xi(\alpha)}{v^2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{u}{v} - \theta \right| \geq \frac{\xi(\theta)}{v^2}, \quad (5.3.63)$$

où on peut prendre

$$\Xi(\alpha) = (4\sqrt{ab})^{-1}, \quad \xi(\theta) = (162b \det(\Gamma))^{-1}. \quad (5.3.64)$$

Démonstration. On va reprendre la démonstration de l'inégalité de Liouville respectivement pour α et θ . On note $f(x) = ax^2 - b$ le polynôme minimal sur \mathbf{Z} du nombre quadratique $\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Alors

$$g(x) = a(\lambda_1 + x\lambda_2)^2 - b(\mu_1 + x\mu_2)^2$$

est un polynôme entier qui annule θ . D'une part comme $\alpha \notin \mathbf{Q}$, on a

$$\left| f\left(\frac{u}{v}\right) \right| \geq \frac{1}{v^2}, \quad \left| g\left(\frac{u}{v}\right) \right| \geq \frac{1}{v^2}. \quad (5.3.65)$$

D'autre part, d'après le théorème de la valeur moyenne, pour $z \in]\alpha - 1, \alpha + 1[$ et $y \in]\theta - 1, \theta + 1[$,

$$|f(z)| \leq \sup_{|x-\alpha|<1} |f'(x)| |z - \alpha|, \quad |g(y)| \leq \sup_{|x-\theta|<1} |g'(x)| |y - \theta|. \quad (5.3.66)$$

Or, on a les majorations

$$\sup_{|x-\alpha|<1} |f'(x)| = \sup_{|x-\alpha|<1} 2|ax| \leq 4\sqrt{ab}, \quad (5.3.67)$$

$$\begin{aligned} \sup_{|x-\theta|<1} |g'(x)| &= 2|(a\lambda_2^2 - b\mu_2^2)x + (a\lambda_1\lambda_2 - b\mu_1\mu_2)| \\ &\leq 2\sqrt{ab}|\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2| + 2|a\lambda_2^2 - b\mu_2^2| + 4|a\lambda_1\lambda_2 - b\mu_1\mu_2|. \end{aligned}$$

D'après les théorèmes de Minkowski (5.3.60), en rappelant le choix de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (5.3.59) et $b > a$, il en découle que

$$|a\lambda_2^2 - b\mu_2^2| \leq b\|\mathbf{e}_2\|^2 \leq 16b \det(\Gamma),$$

$$|a\lambda_1\lambda_2 - b\mu_1\mu_2| \leq 2b\|\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{e}_2\| \leq 32b \det(\Gamma), \quad (5.3.68)$$

d'où

$$\sup_{|x-\theta|<1} |g'(x)| \leq 162b \det(\Gamma). \quad (5.3.69)$$

Les inégalités (5.3.63) sont triviales si

$$\left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \geq 1, \quad \text{ou} \quad \left| \frac{u}{v} - \theta \right| \geq 1.$$

Dans le cas contraire les inégalités (5.3.63) résultent de (5.3.65), (5.3.66), (5.3.67), (5.3.69). \square

On en déduit l'encadrement suivant qui sera utilisé fréquemment.

Corollaire 5.3.19. *On a*

$$(16b\sqrt{\det(\Gamma)})^{-1} < \lambda_2 - \alpha\mu_2 < 8\alpha\sqrt{\det(\Gamma)}.$$

Démonstration. Premièrement,

$$\lambda_2 - \alpha\mu_2 < 2\alpha\|\mathbf{e}_2\| \leq 8\alpha\sqrt{\det(\Gamma)}.$$

Pour la minoration on utilise les inégalités (5.3.63) :

$$\lambda_2 - \alpha\mu_2 > \frac{\Xi(\alpha)}{|\mu_2|} \geq \frac{\Xi(\alpha)}{\|\mathbf{e}_2\|} > \frac{1}{16b\sqrt{\det(\Gamma)}}.$$

\square

Corollaire 5.3.20. *Pour $N > 1$, on a*

$$ND_\alpha(N) = O\left(\frac{b}{\log b} \log N\right) = O(b \log N),$$

$$ND_\theta(N) = O\left(\frac{b \det(\Gamma)}{\log(b \det(\Gamma))} \log N\right) = O(b \det(\Gamma) \log N).$$

Démonstration. Ceci résulte du Lemme 5.3.14 et de la Proposition 5.3.18. \square

Démonstration du théorème 5.3.16. Avant de commencer de dénombrer l'ensemble (5.3.53), on présente deux conditions supplémentaires qui sont des conséquences des conditions (5.3.54) et (5.3.55) pour $B \gg_{\alpha, \varepsilon} 1$,

$$K^6 b^3 \leq (2^{10}\varepsilon)^{-4} B^{4(\frac{1}{r}-1)-(2-\frac{1}{r})}, \quad (5.3.70)$$

$$K^2 b \leq (2^6\alpha)^{-4} B^{4-3(2-\frac{1}{r})}, \quad (5.3.71)$$

puisque

$$0 < \frac{4}{5} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) - \frac{3}{5} \left(2 - \frac{1}{r} \right) < \min \left(\frac{4}{3} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) - \frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{r} \right), 4 - 3 \left(2 - \frac{1}{r} \right) \right).$$

Premièrement, comme toujours, on utilise l'inversion de Möbius pour éliminer la coprimalité :

$$\#\mathcal{S}(\varepsilon, K, \Lambda, B) = \sum_{d \in \mathbf{N}} \mu(d) \#\mathcal{S}(\varepsilon, K, \Lambda_d, B),$$

où

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \left\{ (u, v) \in \Lambda_d \cap \mathbf{N}^2 \left| \begin{array}{l} 0 < u - v\alpha \leq \varepsilon v B^{-\frac{1}{r}} \\ v \leq KB \end{array} \right. \right\}. \quad (5.3.72)$$

Pour déduire une borne précise pour d nous suivons (5.3.31). Pour tout $(u, v) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ (5.3.53), on note $u' = u/d, v' = v/d$. En utilisant la proposition 5.3.18, on a

$$\frac{d\Xi(\alpha)}{KB} \leq \frac{\Xi(\alpha)}{v'} \leq u' - v'\alpha < \varepsilon v' B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{\varepsilon K}{d} B^{1-\frac{1}{r}},$$

d'où

$$d \leq \left(\frac{\varepsilon K^2}{\Xi(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} = D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}}. \quad (5.3.73)$$

Notons que

$$D(\alpha, K) = \left(\frac{\varepsilon K^2}{\Xi(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{\varepsilon} K b^{\frac{1}{2}} \ll K b^{\frac{1}{2}}. \quad (5.3.74)$$

L'étape suivante consiste à éliminer la condition de réseau sur u, v pour les d petits. Pour contrôler la contribution des d grands on peut utiliser la majoration donnée par (5.3.36). On utilisera les notations (5.3.58), (5.3.59), (5.3.61) pour le réseau $\Gamma = \Lambda_d$, c'est-à-dire $\Lambda_d = \mathbf{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{Z}\mathbf{e}_2$. On écrit

$$u = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2, \quad v = n_1\mu_1 + n_2\mu_2,$$

avec $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$. On voudrait se ramener au dénombrement sur (n_1, n_2) puisqu'il n'y a plus de contraintes sur la divisibilité de n_1, n_2 . Avec les notations ci-dessus l'ensemble (5.3.72) s'écrit

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \left\{ (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \left| \begin{array}{l} 0 < n_2 - n_1\theta \leq \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ 0 < n_1\mu_1 + n_2\mu_2 \leq KB \end{array} \right. \right\}.$$

Cas I. d est petit. On va estimer le cardinal de $S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ quand d vérifie la condition

$$d \leq \frac{K^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})}. \quad (5.3.75)$$

La condition (5.3.56) assure que tels d existent. D'abord on détermine les signes de n_1, n_2 . En utilisant le corollaire 5.3.19 et en rappelant la condition (5.3.70), on a

$$\begin{aligned} 0 < n_2 - n_1\theta &\leq \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{K\varepsilon}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} B^{1-\frac{1}{r}} \leq 16K\varepsilon b \sqrt{\det(\Lambda_d)} B^{1-\frac{1}{r}} \\ &\leq 16K\varepsilon b d \sqrt{\det(\Lambda)} B^{1-\frac{1}{r}} \leq 2^4 \varepsilon K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}} B^{1-\frac{1}{r} + \frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})} \leq \frac{1}{64}. \end{aligned} \quad (5.3.76)$$

Cela implique non seulement que pour n_1 fixé, il y a au plus un n_2 tel que $(n_1, n_2) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$, mais aussi que, pour un réseau Λ_d fixé, on a $n_1, n_2 \geq 0$ ou $n_1, n_2 \leq 0$. On ne peut avoir qu'une seule possibilité parce que le signe de n_1, n_2 détermine aussi le signe de v , que l'on a supposé être positif. Donc dans la suite, sans perte de généralité on suppose que n_1, n_2 sont positifs. En fait on a dans ce cas $n_1, n_2 > 0$ (sinon on aurait $n_1 = n_2 = 0$ et avec $v = 0$). On définit les ensembles $R_1(\varepsilon, K, \Lambda_d, B), R_2(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ des couples $(n_1, n_2) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ vérifiant respectivement

$$\begin{aligned} \frac{\det(\Lambda_d)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} < n_2 - n_1\theta &\leq \frac{\det(\Lambda_d)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} + 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} \\ n_1 &\leq 2 \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB \end{aligned} \quad (5.3.77)$$

et

$$\begin{aligned} 0 < n_2 - n_1\theta &\leq \frac{3}{2} \frac{\det(\Lambda_d)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB - \frac{\alpha}{2} &\leq n_1 \leq \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB + \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad (5.3.78)$$

et l'ensemble

$$T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \left\{ (n_1, n_2) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \left| \begin{array}{l} 0 < n_2 - n_1\theta \leq \frac{\det(\Lambda_d)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ n_1 \leq \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB \end{array} \right. \right\}. \quad (5.3.79)$$

Lemme 5.3.21. (*Rappelons la notation Δ (5.1.4).*)

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \Delta T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \subseteq R_1(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \cup R_2(\varepsilon, K, \Lambda_d, B).$$

Démonstration. Tout d'abord, rappelons l'égalité

$$|\mu_1 + \theta\mu_2| = \frac{\det(\Lambda_d)}{\lambda_2 - \alpha\mu_2}.$$

Soit $(n_1, n_2) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \cup T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$. On a

$$n_1|\mu_1 + \theta\mu_2| = |n_1\mu_1 + n_2\mu_2 - (n_2 - n_1\theta)\mu_2| \leq KB + |\mu_2|(n_2 - n_1\theta), \quad (5.3.80)$$

D'après (5.3.76) et le corollaire 5.3.19, on a, puisque

$$|\mu_2| \leq \|e_2\| \leq 4\sqrt{\det(\Lambda_d)},$$

$$n_2 - n_1\theta \leq \frac{K\varepsilon}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} B^{1-\frac{1}{r}} \leq 16K\varepsilon b \sqrt{\det(\Lambda_d)} B^{1-\frac{1}{r}}. \quad (5.3.81)$$

Donc

$$\frac{|\mu_2|(n_2 - n_1\theta)}{|\mu_1 + \theta\mu_2|} = \frac{|\mu_2|(n_2 - n_1\theta)(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{\det(\Lambda_d)} \leq 32\alpha(n_2 - n_1\theta) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Notons aussi que, d'après le corollaire 5.3.19, (5.3.71), et (5.3.75),

$$\frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB > \frac{KB}{16b \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{KB}{16b \det(\Lambda)^{\frac{3}{2}} d^3} \geq \frac{B^{1-\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})}}{2^7 K^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}} \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Donc

$$n_1 \leq \frac{KB + |\mu_2|(n_2 - n_1\theta)}{|\mu_1 + \theta\mu_2|} \leq \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB + \frac{\alpha}{2} \leq 2 \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB.$$

Si $(n_1, n_2) \in T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ est tel que $n_1\mu_1 + n_2\mu_2 \geq KB$, on a comme dans (5.3.80),

$$|n_1\mu_1 + n_2\mu_2| \leq n_1|\mu_1 + \theta\mu_2| + |\mu_2|(n_2 - n_1\theta),$$

et donc

$$n_1 \geq \frac{|n_1\mu_1 + n_2\mu_2|}{|\mu_1 + \theta\mu_2|} - \frac{|\mu_2|(n_2 - n_1\theta)}{|\mu_1 + \theta\mu_2|} \geq \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB - \frac{\alpha}{2}.$$

Deuxièmement, comme

$$\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} = \frac{n_1(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} + \frac{\mu_2(n_2 - \theta n_1)}{\lambda_2 - \alpha\mu_2}.$$

On va montrer que pour tout $(n_1, n_2) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \cup T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$,

$$\left| \frac{(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \right| \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \geq 2^{11} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} \geq 2 \left| \frac{\mu_2(n_2 - \theta n_1)}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} \right| \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}. \quad (5.3.82)$$

En particulier, comme on a $\det(\Lambda_d) = \lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2$, cela implique que

$$\left| \frac{\det(\Lambda_d)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \right| = \left| \frac{\mu_2(n_2 - \theta n_1)}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \right| \leq 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}},$$

et donc le lemme s'en suit. Pour tout $(n_1, n_2) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \cup T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$, d'après la proposition 5.3.18,

$$\lambda_2 - \alpha\mu_2 \geq \frac{\Xi(\alpha)}{|\mu_2|}, \quad n_2 - n_1\theta \geq \frac{\xi(\theta)}{n_1},$$

on déduit de (5.3.81) que

$$n_1 \geq \frac{B^{\frac{1}{r}-1} \xi(\theta)}{16K\varepsilon b \sqrt{\det(\Lambda_d)}} = \frac{B^{\frac{1}{r}-1}}{16 \times 162K\varepsilon b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.3.83)$$

et

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mu_2(n_2 - n_1\theta)}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} \right| \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} &\leq (\Xi(\alpha))^{-1} \mu_2^2(n_2 - n_1\theta) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ &\leq 2^{10} \varepsilon^2 K b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

Pour que (5.3.82) soit vraie, il reste à démontrer que

$$\frac{\det(\Lambda_d) n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \geq 2^{11} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}}.$$

Il suffit donc de démontrer la première inégalité qui suit du corollaire 5.3.19,

$$n_1 \geq 2^{17} \alpha^2 \varepsilon K b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{r}} \geq 2^{11} \varepsilon (\lambda_2 - \mu_2 \alpha)^2 K b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{r}}. \quad (5.3.84)$$

D'après la condition (5.3.55) et la condition sur d (5.3.75), on a

$$\begin{aligned} 2^{21} \times 162 \alpha^2 \varepsilon^2 K^2 b^4 \det(\Lambda_d)^3 &\leq 2^{21} \times 162 \alpha^2 \varepsilon^2 K^2 b^4 \det(\Lambda)^3 d^6 \\ &\leq 2^{21} \times 162 \alpha^2 \varepsilon^2 K^5 b^{\frac{5}{2}} B^{\frac{3}{2}(2-\frac{1}{r})} \\ &\leq B^{2(\frac{1}{r}-1)}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{B^{\frac{1}{r}-1}}{16 \times 162 K \varepsilon b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}}} \geq 2^{17} \alpha^2 \varepsilon K b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

Donc la première inégalité dans (5.3.84) qui fallait démontrer découle de (5.3.83). \square

Maintenant on découpe l'intervalle

$$\left[1, \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)K}{\det(\Lambda_d)} B \right]$$

en N pièces (avec N à déterminer)

$$\left[\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B, \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B \right], \quad 1 \leq k \leq N. \quad (5.3.85)$$

On applique le Théorème 5.3.11.

$$\begin{aligned} &\#T(\varepsilon, K, \Lambda_d, b) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\substack{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K \\ N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} \mathbf{1}_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\substack{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K \\ N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} \left(\mathbf{1}_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1-\frac{1}{r}}} - \mathbf{1}_{\frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1-\frac{1}{r}}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{\substack{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK \\ N \det(\Lambda_d)} B} - \sum_{\substack{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K \\ N \det(\Lambda_d)} B} \right) \mathbf{1}_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1-\frac{1}{r}}} - \sum_{1 \leq k \leq N} \text{Er}_k. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq k \leq N$, on définit

$$\phi_k(u) = \mathbf{1}_{1 - \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1-\frac{1}{r}} \leq u < 1}(u),$$

on a

$$\int_0^1 \phi_k(u) \, du = \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

Donc d'après le théorème 5.3.11 avec le terme d'erreur précis (corollaire 5.3.20),

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} \mathbf{1}_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&= \frac{k^2 \varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O\left(V(\phi) b \det(\Lambda_d) \log\left(\frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B\right)\right) \\
&= \frac{k^2 \varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O\left(b \det(\Lambda_d) \log\left(\frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B\right)\right),
\end{aligned} \tag{5.3.86}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B} \mathbf{1}_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&= \frac{k(k-1)\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O\left(b \det(\Lambda_d) \log\left(\frac{(k-1)K(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \sum_{\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} \mathbf{1}_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&= \frac{k\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O\left(b \det(\Lambda_d) \log\left(\frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B\right)\right)
\end{aligned}$$

On calcule maintenant le terme d'erreur provenant du changement de n_1 en les valeurs du bord des intervalles (5.3.85). En appliquant le théorème 5.3.11 à la fonction auxiliaire

$$\mathbf{1}_{1 - \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}} \leq u \leq 1 - \frac{(k-1)\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\text{Er}_k &= \sum_{\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} \frac{\mathbf{1}_{\frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}}} \\
&\leq \sum_{\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} \frac{\mathbf{1}_{\frac{(k-1)\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}}} \\
&= \left(\sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} - \sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B} \right) \frac{\mathbf{1}_{\frac{(k-1)\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}}} \\
&= \frac{\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O\left(b \det(\Lambda_d) \log\left(\frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B\right)\right),
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
& \#T(\varepsilon, K, \Lambda_d, b) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq N} \left(\frac{k\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O\left(\frac{K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}}\right) + O\left(b \det(\Lambda_d) \log\left(\frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B\right)\right) \right).
\end{aligned}$$

Grâce à la condition (5.3.55),

$$\log(KB) \leq \log(Kb^{\frac{1}{2}}B) \ll \log B.$$

En sommant sur tous les k pour le premier terme (le terme principal)

$$\sum_{k=1}^N \frac{k\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} = \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O\left(\frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}}\right),$$

puis sur les termes d'erreur

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N \frac{K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) \log \left(\frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B \right) \\
& \ll \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) \sum_{1 \leq k \leq N} \log \left(\frac{kKB}{N} \right) \\
& \ll \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) N \log(KB) \\
& \ll \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) N \log(B)
\end{aligned}$$

On obtient que

$$\#T(\varepsilon, K, \Lambda_d, b) = \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + O \left(\frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) N \log(B) \right).$$

Il nous reste à majorer le terme d'erreur venant du cardinal de $R_1(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ (5.3.77) et $R_2(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ (5.3.78). Pour cela on utilise encore une fois le théorème 5.3.11.

$$\begin{aligned}
& \#R_1(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \\
& = \sum_{n \leq 2 \frac{\lambda_2 - \mu_2 \alpha}{\det(\Lambda_d)} KB} \mathbf{1}_{\frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} + 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}}} \\
& = O \left(K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} \times \frac{\lambda_2 - \mu_2 \alpha}{\det(\Lambda_d)} KB + b \det(\Lambda_d) \log \left(\frac{\lambda_2 - \mu_2 \alpha}{\det(\Lambda_d)} KB \right) \right) \\
& = O(K^2 b^2 \det(\Lambda_d) B^{2-\frac{2}{r}} + b \det(\Lambda_d) \log(KB)) \\
& = O(b \det(\Lambda_d) \log(B)).
\end{aligned}$$

grâce à la condition (5.3.55). Quant à $R_2(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$, le même raisonnement que (5.3.76) donne que

$$\#R_2(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = O(1).$$

On en conclut que

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + O \left(\frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) N \log(B) \right)$$

On choisit

$$N = \frac{2KB^{1-\frac{1}{2r}}}{b^{\frac{1}{2}} \det(\Lambda_d)}.$$

Comme $\det(\Lambda_d) \leq d^2 \det(\Lambda)$, la condition (5.3.75) assure que $N > 1$. On conclut que

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + O(Kb^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B)).$$

Maintenant on somme sur tous les d petits (5.3.75). D'abord faisons-le pour le terme principal. En rappelant la constante $\Theta(\Lambda)$ (5.3.50) et en remarquant que $\det(\Lambda_d) \gg d^2$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq d \leq K^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})}} \mu(d) \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} \\
& = \frac{\Theta(\Lambda) \varepsilon K^2}{2} B^{2-\frac{1}{r}} + \sum_{d > K^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})}} O \left(\frac{K^2}{d^2} B^{2-\frac{1}{r}} \right) \\
& = \frac{\Theta(\Lambda) \varepsilon K^2}{2} B^{2-\frac{1}{r}} + O \left(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} \right).
\end{aligned} \tag{5.3.87}$$

Ensuite pour le terme d'erreur

$$\sum_{1 \leq d \leq K^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})}} K b^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) = O\left(\frac{K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}}}{\det(\Lambda)^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} \log B\right). \quad (5.3.88)$$

Cas II. d est grand. Pour les d vérifiant

$$\frac{K^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})} < d \leq D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}},$$

on utilise la formule (5.3.36) de la proposition 5.3.15 avec $N = 1 + \frac{4\varepsilon K}{\alpha d}$, notant que la condition (5.3.55) implique l'hypothèse (5.3.33) de la proposition. On obtient

$$\begin{aligned} \#S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) &\leq \#\left\{ (u, v) \in \mathbf{N}^2 \left| \begin{array}{l} 0 < \frac{u}{v} - \alpha \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ v \leq \frac{KB}{d} \end{array} \right. \right\} \\ &= O\left(\frac{K^2}{d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + \Delta(\alpha) \left(1 + \frac{K}{d}\right) \log(KB)\right) \\ &= O\left(\frac{K^2}{d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + b \left(1 + \frac{K}{d}\right) \log B\right). \end{aligned}$$

Donc la contribution totale provenant de ces d est d'ordre de grandeur

$$\begin{aligned} &\sum_{K^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})} < d \leq D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}}} O\left(\frac{K^2}{d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + b \left(1 + \frac{K}{d}\right) \log B\right) \\ &= O(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} + b D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}} \log B + Kb \log(D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}}) \log B) \\ &= O(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} + Kb^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log B + Kb(\log B)^2) \\ &= O(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} + Kb^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log B) \end{aligned} \quad (5.3.89)$$

La formule (5.3.57) est déduite de (5.3.87), (5.3.88) et (5.3.89). \square

5.3.4 Perspective

Le théorème 5.1.2 ne couvre pas le zoom critique des nombres algébriques de degré plus grand que 2. Les experts semblent penser que l'expansion en fraction continue d'un nombre algébrique α de degré ≥ 3 n'a pas de quotients partiels bornés. C'est-à-dire que pour tout réel $C > 0$, il existe toujours des nombres rationnels $\frac{p}{q}$ vérifiant

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2}.$$

En terme de la distribution locale (critique), on pourrait interpréter cela comme : les nombres rationnels proches de α seraient « beaucoup plus nombreux » que dans le cas quadratique et on n'aurait plus de phénomène de « trou ».

5.4 Distribution locale sur la surface torique Y_4

La surface Y_4 est une surface torique qui n'est pas de Fano. Elle est construite comme l'éclatement des 4 points invariants de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Elle peut être aussi obtenue en éclatant plus de points invariants sous l'action du tore sur la surface torique X_3 , qui est une surface de del Pezzo torique de degré 6 étudiée dans le chapitre 3. Dans la suite on prend le premier point de vue.

5.4.1 Géométrie de Y_4 et courbes rationnelles sur Y_4

On considère la surface torique Y_4 obtenue en éclatant $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en 4 points invariants $[1 : 0] \times [1 : 0], [0 : 1] \times [1 : 0], [1 : 0] \times [0 : 1], [0 : 1] \times [0 : 1]$. L'éventail de V est le suivant.

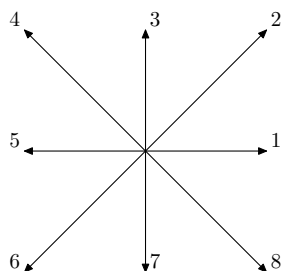


FIGURE 5.2 – L'éventail de Y_4

On note $\mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(0, 1)$ les tirés en arrière de sections hyperplans dans chaque \mathbb{P}^1 , et E_i ($1 \leq i \leq 4$) les images inverses des points éclatés. En dehors des points éclatés on utilise encore les coordonnées $[x : y] \times [s : t]$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Les générateurs $\{\rho_i\}_{i=1}^8$ des rayons de l'éventail de Y_4 vérifient les relations

$$\rho_i + \rho_{i+4} = 0 \quad (1 \leq i \leq 4).$$

Ce sont toutes les *collections primitives* ([Bat91] Définition 2.6, 2.7, Proposition 3.2) minimales centrées pour Y_4 . Pour les variétés toriques lisses complète, les collection primitives minimales centrées représentent les courbes rationnelles de degré anticanonique minimal. Dans notre cas elles correspondent à 4 courbes rationnelles de degré lisses 2 relativement au fibré anticanonique passant par $Q = [1 : 1] \times [1 : 1]$, que l'on appellera les courbes spéciales et l'on notera Z_i ($1 \leq i \leq 4$) d'équations respectives

$$x = y, \quad s = t, \quad xs = yt, \quad \text{et} \quad xt = ys. \tag{5.4.1}$$

Elles appartiennent, respectivement, aux classes de

$$\mathcal{O}(1, 0), \quad \mathcal{O}(0, 1), \quad \mathcal{O}(1, 1) - E_2 - E_3, \quad \mathcal{O}(1, 1) - E_1 - E_4$$

dans le groupe de Picard. Pour chacun de ces fibrés il existe un unique diviseur irréductible passant par Q . Il y a 4 familles de courbes rationnelles de degré 3 relativement au fibré anticanonique passant par Q qui sont lisses, dont les classes sont

$$\mathcal{O}(1, 1) - E_i, \quad (1 \leq i \leq 4).$$

Le diviseur anticanonique

$$\omega_{Y_4}^{-1} = \mathcal{O}(2, 2) - E_1 - E_2 - E_3 - E_4,$$

dont les sections globales sont des combinaisons linéaires des monômes

$$x^2st, \quad y^2st, \quad t^2xy, \quad s^2xy, \quad xyst,$$

est engendré par ses sections globales mais il n'est pas ample. Sur l'ouvert $(s \neq 0) \cap (x \neq 0)$, en utilisant les coordonnées $(w, z) = (\frac{y}{x}, \frac{t}{s})$, on identifie localement l'espace tangent de Q à \mathbb{A}^2 par le difféomorphisme

$$\varrho : [x : y] \times [s : t] \mapsto \left(\frac{y}{x} - 1, \frac{t}{s} - 1 \right) = (w - 1, z - 1). \tag{5.4.2}$$

Avec cette identification, les 4 courbes spéciales s'écrivent comme 3 droites et une hyperbole de degré anticanonique 2 :

$$z = 1, \quad w = 1, \quad z = w, \quad zw = 1.$$

Maintenant on associe une hauteur de Weil à $\omega_{Y_4}^{-1}$. Tout d'abord pour un point $P = [x : y] \times [s : t]$ avec

$$\text{pgcd}(x, y) = \text{pgcd}(s, t) = 1$$

n'appartenant pas aux diviseurs exceptionnels,

$$\begin{aligned} & \text{pgcd}(x^2st, y^2st, t^2xy, s^2xy, xyst) \\ &= \text{pgcd}(st \text{pgcd}(x^2, y^2), xy \text{pgcd}(t^2, s^2), xyst) \\ &= \text{pgcd}(st, xy, xyst) \\ &= \text{pgcd}(st, xy) \\ &= \text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t). \end{aligned}$$

Donc on peut prendre comme hauteur de Weil

$$H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P) = \frac{\max(|x^2st|, |y^2st|, |t^2xy|, |s^2xy|, |xyst|)}{\text{pgcd}(x^2st, y^2st, t^2xy, s^2xy, xyst)} = \frac{\max(|x^2st|, |y^2st|, |t^2xy|, |s^2xy|)}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)}.$$

La surface Y_4 possède un « gros » groupe d'automorphisme, dans lequel les permutations des coordonnées préservent la hauteur. On peut donc se ramener à la région

$$R = \{(w, z) : z > w > 1\}. \quad (5.4.3)$$

On note

$$V = \varrho^{-1}(R) \subset U = Y_4 - \cup_{i=1}^4 Z_i. \quad (5.4.4)$$

Pour $P = [x : y] \times [s : t] \in V$, la hauteur se calcule comme

$$H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P) = \frac{t^2xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)}.$$

La distance que l'on va utiliser est

$$d(P) = d(\varrho(P), \varrho(Q)) = \max(|z - 1|, |w - 1|) = z - 1.$$

5.4.2 Détermination des constantes d'approximation

5.4.2.1 Borne inférieure uniforme

Nous allons montrer que la meilleure constante d'approximation est 2 par une estimation directe.

Proposition 5.4.1.

$$\alpha(Q, Y_4) = 2.$$

Démonstration. Pour $P = [x : y] \times [s : t] \neq Q$ satisfaisant à $t \neq s$ (les cas où $x \neq y$ se démontre de façon analogue), on a

$$\begin{aligned} H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P)d(P)^2 &\geq \frac{t^2xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)} \left(\frac{t}{s} - 1\right)^2 \\ &= \frac{xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)} \frac{t^2}{s^2} (t - s)^2 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Cela montre que $\alpha(Q, Y_4) \geq 2$. Mais les courbes spéciales Z_i (5.4.1) donnent des sous-variétés avec $\alpha(Q, Z_i) = 2$ (remarque 2.1.8). Ceci clôt la démonstration. \square

Remarque 5.4.2. Cette majoration uniforme indique un phénomène de « trou » en dimension 2 dans le zoom critique. C'est-à-dire, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, et pour tout B , on ait $\delta_{U, Q, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)) = 0$. Ceci peut aussi s'interpréter comme une inégalité du type Liouville :

$$d(P) \geq \frac{1}{H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P)^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall P \in Y_4(\mathbf{Q}) - \{Q\}.$$

5.4.2.2 Constante d'approximation essentielle

Considérons les courbes

$$C_{a,b} : axy(t - s)^2 = bst(y - x)^2 \quad (a, b) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2, \text{pgcd}(a, b) = 1.$$

Avec les coordonnées $(w, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{t}{s}\right)$, cette équation s'écrit

$$aw(z - 1)^2 = bz(w - 1)^2.$$

Elles forment donc une famille de courbes cubiques passant par les 4 points invariants avec un point singulier Q . La classe de $C_{a,b}$ dans le groupe de Picard est la même que celle de $\omega_{Y_4}^{-1}$ et on a

$$\deg_{\omega_{Y_4}^{-1}} C_{a,b} = 4.$$

Si $a = b$, la courbe

$$xy(t - s)^2 = st(y - x)^2$$

a en fait deux composantes irréductibles

$$yt = xs \quad \text{et} \quad xt = ys.$$

Lemme 5.4.3. *Lorsque $a \neq b$, la courbe $C_{a,b}$ est une courbe cubique géométriquement intègre qui est nodale.*

Démonstration. Si $a \neq b$, le polynôme $aw(z - 1)^2 = bz(w - 1)^2$ est irréductible sur $\mathbf{C}[z, w]$. Une courbe cubique irréductible singulière ne peut pas avoir qu'un point singulier qui est nodal ou cuspidal. Les tangentes au point Q sont de pente

$$\lim_{(w,z) \rightarrow (1,1)} \frac{z-1}{w-1} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \lim_{(w,z) \rightarrow (1,1)} \sqrt{\left| \frac{z}{w} \right|} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Donc Q est un point nodal de $C_{a,b}$. □

Lemme 5.4.4. *Pour tout point rationnel $P = (z_0, w_0)$ où $z_0, w_0 > 0$, il existe une unique courbe $C_{a,b}$ passant par ce point.*

Démonstration. On écrit (de façon unique) le quotient en une fraction positive réduite :

$$\frac{z_0^2(w_0 + 1)}{w_0^2(z_0 + 1)} = \frac{a_0}{b_0}. \tag{5.4.5}$$

Alors $P \in C_{a_0, b_0}(\mathbf{Q})$. □

Géométriquement, on considère $\pi : \widetilde{Y}_4 \rightarrow Y_4$ l'éclatement de Y_4 en Q , et on note $\widetilde{C}_{a,b}$ la transformation stricte de $C_{a,b}$. Alors $\widetilde{C}_{a,b}$ est une normalisation de $C_{a,b}$ et $\pi^{-1}(Q) = \{Q_1, Q_2\}$. On peut voir $\pm \sqrt{\frac{b}{a}}$ comme l'une des coordonnées de Q_i .

Cas I. a, b sont deux carrés de nombres entiers.

Alors $\sqrt{\frac{b}{a}} \in \mathbf{Q}$ et $Q_1, Q_2 \in \widetilde{C}_{a,b}(\mathbf{Q})$. Approcher Q sur la courbe revient à approcher un nombre rationnel par des nombres rationnels. Donc

$$\alpha(Q, C_{a,b}) = \alpha(Q_i, \widetilde{C}_{a,b}) = \deg_{\mathcal{O}_{Y_4}^{-1}} C_{a,b} = 4. \tag{5.4.6}$$

Cas II. l'un des a, b n'est pas le carré d'un entier, (noté $(a, b) \notin \square^2$)

Comme a et b sont premiers entre eux, $\sqrt{\frac{b}{a}} \notin \mathbf{Q}$. Aucun des points Q_1, Q_2 n'est défini sur \mathbf{Q} . L'approximation du point Q le long une branche de $C_{a,b}$ est équivalente à l'approximation du point *irrationnel quadratique* Q_i (dépendant de la branche choisie) le long $\widetilde{C}_{a,b}$. Donc dans ce cas d'après le théorème 2.1.7,

$$\alpha(Q, C_{a,b}) = \alpha(Q_i, \widetilde{C}_{a,b}) = \frac{\deg_{\mathcal{O}_{Y_4}^{-1}} C_{a,b}}{2} = 2. \tag{5.4.7}$$

Cependant, pour les 4 courbes spéciales Z_i , l'approximation au point Q est vraiment une approximation d'un point rationnel défini sur \mathbf{Q} sur \mathbf{P}^1 , à savoir $\alpha(Q, Z_i) = 2$. Bien qu'elle aient la même constante d'approximation, le nombre des points rationnels que l'on trouve dans l'opération de zoom sont de grandeur très différente. C'est cette différence qui explique les phénomènes radicalement différents entre les deux types de courbes ci-dessus. On en conclut

Théorème 5.4.5. *On a*

$$\alpha_{\text{ess}}(Q) = \alpha(Q, Y_4) = 2.$$

Par conséquent, il n'y a pas de sous-variétés localement accumulatrices (Définition 2.1.3).

Démonstration. Cela résulte du fait que l'ensemble des $C_{a,b}$ vérifiant la condition (H) est dense (même pour la topologie analytique) et de la borne inférieure que l'on a établie précédemment (Proposition 5.4.1) □

Donc la famille $((C_{a,b})_{a,b})_{(a,b) \notin \square^2}$ donnent une autre façon de paramétrer les points rationnels bien adaptée à notre problème car la constante d'approximation sur elles est 2, plus petite que celle donnée par les droites générales.

5.4.3 Zoom sur la surface Y_4

Nous utiliserons les courbes nodales $C_{a,b}$ pour paramétrer les points rationnels autour de Q . Nous avons vu qu'elles n'ont pas la même constante d'approximation et nous avons constaté que l'approximation essentielle est prise sur celles vérifiant la condition $(a, b) \notin \square^2$. Regardons d'abord ce que la prédiction naïve nous donne. On note r le facteur de zoom et B la borne de la hauteur. Alors dans le zoom de facteur r le nombre de points rationnels dans le voisinage de diamètre ε devrait être

$$c_X B(\log B)^{\text{rg Pic}(Y_4)-1} \times O(B^{-\frac{\dim Y_4}{r}}) = O(B^{1-\frac{2}{r}}(\log B)^5). \quad (5.4.8)$$

Si $r > 2 = \alpha_{\text{ess}}(Q, Y_4)$, on devrait pouvoir trouver « beaucoup » de points c'est-à-dire de cardinal au moins une puissance de B . Si $r = 2$, *a priori* cette heuristique prédit qu'il existe très peu de points dans ce voisinage (le nombre étant d'ordre de grandeur \log). Nous allons montrer qu'en fait il y a au plus un nombre fini de points en dehors des courbes spéciales dans ce dernier cas.

5.4.3.1 Paramétrage par des courbes nodales

Nous nous bornons à la région R (5.4.3). Puisque les droites

$$\frac{x}{y} = \frac{t}{s}, \quad \frac{x}{y} = 1$$

forment le bord du domaine R , il reste à trouver la distribution dans l'intérieur de R . Grâce au lemme 5.4.4, les courbes nodales donnent un paramétrage local des points rationnels. Donc le dénombrement des points rationnels dans l'intérieur de R peut se décomposer en des sommes des points sur chaque $C_{a,b}$. On va calculer la formule de la hauteur restreinte à $C_{a,b}$ en choisissant un paramétrage rationnel des coordonnées de \mathbf{P}^1 pour la courbe nodale.

Par la formule (5.4.5), seulement les courbes $C_{a,b}$ avec $a < b$ intersectent R . On fixe un couple $(a, b) \in (\mathbf{N}^*)^2$ vérifiant la condition $a < b$. D'abord on change les coordonnées (w, z) en $(w', z') = (w - 1, z - 1)$. Alors l'équation de $C_{a,b}$ devient

$$C_{a,b} : az'^2(w' + 1) = bw'^2(z' + 1). \quad (5.4.9)$$

D'après le principe de Bézout, une droite générale intersecte $C_{a,b}$ en 3 points (comptant la multiplicité). La droite $D_\lambda : z' = \lambda w'$ passe par $(0, 0)$. La multiplicité d'intersection $C_{a,b} \cap D_\lambda$ en $(0, 0)$ est 2. Donc cette droite intersecte $C_{a,b}$ en un autre point rationnel (w'_λ, z'_λ) différent de $(0, 0)$ avec $z'_\lambda > w'_\lambda > 0$. Un calcul nous donne

$$w'_\lambda = \frac{a\lambda^2 - b}{\lambda(b - \lambda a)}, \quad z'_\lambda = \frac{a\lambda^2 - b}{b - \lambda a}, \quad \left(\sqrt{\frac{b}{a}} < \lambda < \frac{b}{a} \right). \quad (5.4.10)$$

Revenons aux coordonnées (w, z) .

$$w_\lambda = \frac{b(\lambda - 1)}{\lambda(b - \lambda a)}, \quad z_\lambda = \frac{\lambda a(\lambda - 1)}{b - \lambda a}, \quad \left(\sqrt{\frac{b}{a}} < \lambda < \frac{b}{a} \right).$$

Donc on obtient un morphisme de paramétrage

$$\begin{aligned} \psi_{a,b} : \mathbf{P}^1 &\longrightarrow C_{a,b} \\ [u : v] &\longmapsto \left(\frac{b(\frac{u}{v} - 1)}{\frac{u}{v}(b - \frac{u}{v}a)}, \frac{\frac{u}{v}a(\frac{u}{v} - 1)}{b - \frac{u}{v}a} \right) = \left(\frac{bv(u - v)}{u(bv - ua)}, \frac{ua(u - v)}{v(bv - ua)} \right). \end{aligned}$$

On introduit la notation

$$\begin{aligned} d_1 &= \text{pgcd}(u, b), & d_2 &= \text{pgcd}(v, a); \\ d_3 &= \text{pgcd}(u - v, b - a), & D_1 &= \text{pgcd}(u^2, b), & D_2 &= \text{pgcd}(v^2, a). \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Alors comme on a supposé que $\text{pgcd}(u, v) = \text{pgcd}(a, b) = 1$,

$$\begin{aligned} &\text{pgcd}(bv(u - v), u(bv - ua)) \\ &= \text{pgcd}(b, u(bv - ua)) \text{pgcd}(v, bv - ua) \text{pgcd}(u - v, bv - ua) \\ &= \text{pgcd}(u^2, b) \text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}(u - v, b - a) \\ &= D_1 d_2 d_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{pgcd}(ua(u-v), v(bv-ua)) \\
&= \text{pgcd}(a, v(bv-ua)) \text{pgcd}(u, bv-ua) \text{pgcd}(u-v, bv-ua) \\
&= \text{pgcd}(v^2, a) \text{pgcd}(u, b) \text{pgcd}(u-v, b-a) \\
&= d_1 D_2 d_3.
\end{aligned}$$

On trouve le paramétrage suivant pour les coordonnées primitives dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

$$x = \frac{u(bv-ua)}{D_1 d_2 d_3}, \quad y = \frac{bv(u-v)}{D_1 d_2 d_3}, \quad s = \frac{v(bv-ua)}{d_1 D_2 d_3}, \quad t = \frac{ua(u-v)}{d_1 D_2 d_3}. \quad (5.4.12)$$

On a alors, puisque $D_1 | d_1^2, D_2 | d_2^2$,

$$\begin{aligned}
\text{pgcd}(y, t) &= \frac{u-v}{d_3} \text{pgcd}\left(\frac{bv}{D_1 d_2}, \frac{ua}{d_1 D_2}\right) = \frac{u-v}{d_3}; \\
\text{pgcd}(y, s) &= \frac{v}{d_2} \text{pgcd}\left(\frac{b(u-v)}{D_1 d_3}, \frac{(bv-ua)d_2}{d_1 D_2 d_3}\right) = \frac{v}{d_2}; \\
\text{pgcd}(x, t) &= \frac{u}{d_1} \text{pgcd}\left(\frac{(bv-ua)d_1}{D_1 d_2 d_3}, \frac{a(u-v)}{D_2 d_3}\right) = \frac{u}{d_1}; \\
\text{pgcd}(x, s) &= \frac{bv-ua}{d_1 d_2 d_3} \text{pgcd}\left(\frac{ud_1}{D_1}, \frac{vd_2}{D_2}\right) = \frac{bv-ua}{d_1 d_2 d_3}.
\end{aligned}$$

Enfin on obtient la formule de la hauteur restreinte à $C_{a,b}$ induite par l'image inverse sur \mathbf{P}^1 dans la région R : pour $[u : v] \in \mathbf{P}^1$ satisfaisant à $\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{u}{v} < \frac{b}{a}$,

$$\begin{aligned}
H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(\psi_{a,b}([u : v])) &= \frac{t^2 xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)} \\
&= \frac{b(ua(u-v))^2}{(D_1 D_2 d_3)^2}.
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0, B > 0$ fixés, on prend la fonction de test $\chi(\varepsilon)$ et l'on regarde la distribution locale dans le voisinage de diamètre ε intersectant la région R , c'est-à-dire la quantité

$$\delta_{V,Q,B,r}(\chi(\varepsilon)) = \# \left\{ \begin{array}{l} P = [x : y] \times [s : t] \\ x, y, s, t > 0; \frac{t}{s} > \frac{x}{y} > 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{r}} d(P) = B^{\frac{1}{r}} \left(\frac{t}{s} - 1 \right) \leq \varepsilon \\ H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P) = \frac{t^2 xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)} \leq B \end{array} \right. \right\} \quad (5.4.13)$$

On le décrit comme un problème de dénombrement. Pour un couple $(a, b) \in \mathbf{N}_{\text{prem}}^2, u \neq v$ satisfaisant à $a < b$, considérons l'ensemble $E(a, b, \varepsilon, B, r)$ des $(u, v) \in \mathbf{N}_{\text{prem}}^2$ vérifiant (cf. (5.4.10))

$$\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{u}{v} < \frac{b}{a}, \quad B^{\frac{1}{r}} d(P) = B^{\frac{1}{r}} \frac{u^2 - b}{\frac{b}{a} - \frac{u}{v}} \leq \varepsilon, \quad (5.4.14)$$

$$H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(\psi_{a,b}[u : v]) = \frac{b(ua(u-v))^2}{(D_1 D_2 d_3)^2} \leq B. \quad (5.4.15)$$

Alors

$$\delta_{V,Q,B,r}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{a,b \in \mathbf{N}_{\text{prem}}^2, a < b} \# E(a, b, \varepsilon, B, r). \quad (5.4.16)$$

5.4.3.2 Zoom critique : la finitude

Théorème 5.4.6. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a que, pour tout $B \gg_{\varepsilon} 1$,*

$$\delta_{V,Q,B,2}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{\substack{(a,b) \notin \square^2 \\ a < b \leq \varepsilon^2}} \# E(a, b, \varepsilon, B, r) = O_{\varepsilon}(1).$$

Par conséquent, la sous-variété $\cup_{i=1}^4 Z_i$ est celle localement faiblement accumulatrice (définition 2.2.5). Il n'existe pas de mesure limite pour le zoom critique.

Démonstration. On démontre d'abord que, pour $\varepsilon > 0$ fixé, en utilisant le paramétrage ci-dessus, dans le cas critique ($r = 2$), il n'y a qu'un nombre fini de courbes $C_{a,b}$ qui interviennent.

En factorisant v , l'inégalité (5.4.15) s'écrit

$$v^4 b a^2 \left(\left(\frac{u}{v} \right)^2 \left(\frac{u}{v} - 1 \right)^2 \right) \leqslant B D_1^2 D_2^2 d_3^2.$$

Comme on a supposé que $u \neq v$, on a donc

$$v^4 \leqslant \frac{B D_1^2 D_2^2 d_3^2}{b a^2 \left(\left(\frac{u}{v} \right)^2 \left(\frac{u}{v} - 1 \right)^2 \right)} \leqslant \frac{B D_1^2 D_2^2 d_3^2}{b^2 a \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right)^2}. \quad (5.4.17)$$

Donc en combinant avec (5.4.14), on en déduit

$$\begin{aligned} |a u^2 - b v^2| &\leqslant \varepsilon a v^2 \left(\frac{b}{a} - \frac{u}{v} \right) B^{-\frac{1}{r}} \\ &\leqslant \varepsilon a \left(\frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \frac{D_1 D_2 d_3}{b \sqrt{a} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right)} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \\ &= \frac{\varepsilon D_1 D_2 d_3}{\sqrt{b}} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

d'où

$$b \leqslant \varepsilon^2 \left(\frac{|a u^2 - b v^2|}{D_1 D_2 d_3} \right)^{-2} B^{1 - \frac{2}{r}}. \quad (5.4.18)$$

Notons que D_1, D_2, d_3 sont premiers deux à deux. Une observation importante est que

$$D_1 D_2 |a u^2 - b v^2|, \quad d_3 |a(u^2 - v^2) - (b - a)v^2| = a u^2 - b v^2,$$

et donc

$$D_1 D_2 d_3 |a u^2 - b v^2|.$$

Cela nous donne la majoration du paramètre b pour $r = 2$:

$$b \leqslant \varepsilon^2 \left(\frac{|a u^2 - b v^2|}{D_1 D_2 d_3} \right)^{-2} \leqslant \varepsilon^2,$$

ce qui signifie que dans un voisinage fixé après zoom, le nombre de courbes nodales est uniformément majoré, à savoir

$$\delta_{V,Q,B,2}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{a < b \leqslant \varepsilon^2} \#E(a, b, \varepsilon, B, r).$$

Parmi ces courbes $C_{a,b}$ qui interviennent, si $(a, b) \in \square^2$, on a $\alpha(Q, C_{a,b}) = 4$ (5.4.6). Alors la Proposition 2.2.3 nous donne que

$$\delta_{Q,C_{a,b},B,2}(\chi(\varepsilon)) = \#E(a, b, \varepsilon, B, 2) = 0$$

pour tout $B \gg_\varepsilon 1$. Pour tous les $(a, b) \notin \square^2$, sur \mathbf{P}^1 (l'image inverse de $\psi_{a,b}$) on a une distance et une hauteur induites de celles sur Y_4 , la hauteur étant équivalente à la hauteur de Weil canonique $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1(4)}}$ (cf. (5.4.14), (5.4.15)). Comme (5.4.7), le zoom induit sur $C_{a,b}$ avec le facteur $r = 2$ est exactement le zoom critique. La majoration découle donc de la proposition 5.3.3. D'après le théorème 5.3.1, pour tout $\varepsilon > \eta > 0$ suffisamment proches, on a

$$\liminf_B \delta_{V,Q,B,2}(\chi(\varepsilon, \eta)) = \liminf_B \delta_{Q, \bigcup_{\substack{(a,b) \notin \square^2 \\ b \leqslant \varepsilon^2}} C_{a,b}, B, 2}(\chi(\varepsilon, \eta)) = 0,$$

alors que pour tout $(a, b) \notin \square^2$, il existe certains couples (ε, η) tels que

$$\limsup_B \delta_{V,Q,B,2}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geqslant \limsup_B \delta_{Q,C_{a,b},B,2}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geqslant 1.$$

Cela démontre la non-existence de mesure limite. Le fait que Z_i est localement faiblement accumulatrice découle du théorème 6.1.1 puisque $H_{\omega_{Y_4}^{-1}}|_{Z_i} \sim H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1(2)}}$ sur Z_i et donc

$$\delta_{Z_i, Q, B, 2}(\chi(\varepsilon)) \gg_{\ll \varepsilon} B^{\frac{1}{2}}.$$

□

5.4.3.3 Zoom sous-critique : une borne inférieure

On va démontrer une borne inférieure du nombre de points rationnels dans le zoom sous-critique ($r > 2$) basé sur le fait que sur certaines courbes nodales on trouve « beaucoup » de points avec la hauteur et la distance induites (théorème 5.3.16).

Fixons $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0, \tau_1 > \tau_2 > 1$. Nous nous bornons à la région

$$W = W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2) = \left\{ (w', z') \in \mathbf{R}^2 : \varepsilon_2 < z' \leq \varepsilon_1, \tau_2 \leq \frac{z'}{w'} \leq \tau_1 \right\} \subset R. \quad (5.4.19)$$

L'énoncé précis est le suivant. Rappelons que $V = \varrho^{-1}(R) \subset Y_4 = \bigcup_{i=1}^4 Z_i$.

Théorème 5.4.7. *Pour*

$$2 < r < \frac{144}{55}, \quad 0 < \eta < \frac{1}{35}, \quad (5.4.20)$$

on a

$$\begin{aligned} & \delta_{V, Q, B, r}(\chi(W\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2)) \\ & \geq B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^3 \left(C_2 \int \chi(W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2)) \frac{dw' dz'}{z'} + O_{\tau_i, \varepsilon_i} \left(\frac{1}{\log B} \right) \right), \end{aligned}$$

où

$$C_2 = C_2(r) = \frac{6}{\pi^2} \left(\eta \left(1 - \frac{2}{r} \right) \right)^3 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \left(1 + \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{18}{p(p+2)} \right).$$

5.4.3.3.1 Comptage sur les $C_{a,b}$

Au vu de (5.4.16), on va appliquer le théorème 5.3.16 pour compter le nombre de points dans le zoom de facteur r induit sur chaque $C_{a,b}$, à savoir le cardinal de chaque $E(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, B, r)$, avec un terme d'erreur précis. Rappelons la définition de la fonction Ψ_1 (5.3.52). On définit une fonction arithmétique $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ donnée par

$$g(n) = \prod_p p^{\lceil \frac{v_p(n)}{2} \rceil}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (5.4.21)$$

et deux fonctions arithmétiques multiplicatives

$$\Psi(n) = \sum_{d|n} \Psi_1(d) \sum_{e|d} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{d|n} \Psi_1(d) \phi(d). \quad (5.4.22)$$

$$\Phi(n) = \sum_{d|n} \frac{d\Psi_1(g(d))}{g(d)} \sum_{e|d} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{d|n} \frac{d\Psi_1(g(d))}{g(d)} \phi(d). \quad (5.4.23)$$

Proposition 5.4.8. *Supposons que*

$$2 < r < \frac{144}{55}. \quad (5.4.24)$$

Alors pour tout couple (a, b) satisfaisant à (5.4.35),

$$\tau_2^2 < ba^{-1} < \tau_1^2 \quad \text{et} \quad b^{\frac{1}{2}} \leq \frac{16\tau_2}{\tau_1 - 1} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}. \quad (5.4.25)$$

on a que, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \#E(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, B, r) &= \#E(a, b, \varepsilon_1, B, r) - \#E(a, b, \varepsilon_2, B, r) \\ &= \frac{3}{2\pi^2} \frac{\Phi(b)\Phi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} + O_{\tau_i, \varepsilon_i, \delta} \left(b^{\frac{23}{8} + \delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B \right) \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

Remarque 5.4.9. Si l'on identifie localement une branche de $C_{a,b}$ avec l'espace tangent de \mathbf{P}^1 en le point $\sqrt{\frac{b}{a}}$, la proposition 5.4.8 indique qu'il existe une équidistribution sur chaque $C_{a,b}$ ($(a, b) \notin \square^2$) avec la hauteur et la distance induites (cf. (5.4.14), (5.4.15)).

Démonstration. Il suffit d'estimer le cardinal de $E(\varepsilon, a, b, B, r)$ pour ε fixé. La condition (5.4.15) correspond à la restriction de la hauteur $H_{\omega_{Y_4}^{-1}}$ sur $C_{a,b}$, et une inversion de Möbius conduit à une condition de réseau. Dans un premier temps on voudrait réduire la condition (5.4.14) en un zoom avec une distance induite sur l'image inverse de $\mathbf{P}^1 \rightarrow C_{a,b}$ pour que l'on puisse appliquer le théorème 5.3.16. On va approcher le cardinal de l'ensemble $E(\varepsilon, a, b, B, r)$ par celui de l'ensemble $F(\varepsilon, a, b, B, r)$ des $[u : v]$ satisfaisant à (rappelons les notations (5.4.11))

$$\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{u}{v} < \frac{b}{a}, \quad \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}}, \quad (5.4.27)$$

$$v^4 \leq \frac{BD_1^2 D_2^2 d_3^2}{b^2 a \left(\sqrt{ba^{-1}} - 1 \right)^2}. \quad (5.4.28)$$

On compare maintenant ces deux ensembles. Compte tenu l'encadrement sur $\frac{u}{v}$, la condition (5.4.14) implique que

$$\frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{ba^{-1} - uv^{-1}}{uv^{-1} + \sqrt{ba^{-1}}} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{ba^{-1} - \sqrt{ba^{-1}}}{2\sqrt{ba^{-1}}} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}.$$

En combinant avec la majoration de v obtenue à partir de la condition (5.4.15), on conclut que

$$E(\varepsilon, a, b, B, r) \subset F(\varepsilon, a, b, B, r).$$

De plus en rappelant l'hypothèse sur (a, b) , on a d'après (5.4.27),

$$\frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon(\tau_1 - 1)}{2} B^{-\frac{1}{r}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{ba^{-1} - uv^{-1}}{uv^{-1} + \sqrt{ba^{-1}}} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} &> \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - \left(\frac{uv^{-1} - \sqrt{ba^{-1}}}{uv^{-1} + \sqrt{ba^{-1}}} + \frac{ba^{-1} - \sqrt{ba^{-1}}}{2\sqrt{ba^{-1}}} - \frac{ba^{-1} - \sqrt{ba^{-1}}}{uv^{-1} + \sqrt{ba^{-1}}} \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ &> \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - \left(\frac{uv^{-1} - \sqrt{ba^{-1}}}{2\tau_2} + \frac{(uv^{-1} - \sqrt{ba^{-1}})(\tau_1^2 - \tau_1)}{4\tau_2} \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ &> \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - \frac{\varepsilon^2(\tau_1^2 - \tau_1 + 2)(\tau_1 - 1)}{8\tau_2} B^{-\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$F(\varepsilon, a, b, B, r) - E(\varepsilon, a, b, B, r) \subset G(\varepsilon, a, b, B, r),$$

où

$$G(a, b, \varepsilon, B, r) = \left\{ (u, v) \in \mathbf{N}_{\text{prem}}^2 \left| \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} - A(\varepsilon, \tau_i) B^{-\frac{2}{r}} \leq \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} \\ \sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{u}{v} < \frac{b}{a} \\ v^4 \leq \frac{BD_1^2 D_2^2 d_3^2}{b^2 a \left(\sqrt{ba^{-1}} - 1 \right)^2} \end{array} \right. \right\},$$

avec $A(\varepsilon, \tau_i) = \frac{\varepsilon^2(\tau_1^2 - \tau_1 + 2)(\tau_1 - 1)}{8\tau_2}$. Ensuite on va borner le cardinal de $G(\varepsilon, a, b, B, r)$. Par une inversion de Möbius, on a

$$\#G(a, b, \varepsilon, B, r) = \sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} \left(\prod_{i=1}^3 \mu(e_i) \right) \#G(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B)$$

où

$$\begin{aligned} &G(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B) \\ &= \left\{ (u, v) \in \mathbf{N}_{\text{prem}}^2 \left| \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} - A(\varepsilon, \tau_i) B^{-\frac{2}{r}} \leq \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} \\ \sqrt{ba^{-1}} < uv^{-1} < ba^{-1} \\ e_1 f_1 | u^2, e_2 f_2 | v^2, e_3 f_3 | u - v \\ v^4 \leq \frac{Bf_1^2 f_2^2 f_3^2}{b^2 a \left(\sqrt{ba^{-1}} - 1 \right)^2} \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Le points dans cet ensemble se trouvent dans l'intersection d'un triangle, dont l'origine est l'un de ses sommets et l'aire est de grandeur $O_{\tau_i}(B^{\frac{1}{2}-\frac{2}{r}}f_1f_2f_3b^{-1}a^{-\frac{1}{2}})$, avec le réseau

$$\begin{aligned}\Lambda_{e_i f_i} &= \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : e_1 f_1 | x^2, e_2 f_2 | y^2, e_3 f_3 | y - x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : g(e_1 f_1) | x, g(e_2 f_2) | y, e_3 f_3 | y - x\}.\end{aligned}\quad (5.4.29)$$

Puisque $\text{pgcd}(e_i f_i, e_j f_j) = 1$ pour $i \neq j$, on vérifie que

$$\det(\Lambda_{e_i f_i}) = g(e_1 f_1)g(e_2 f_2)e_3 f_3 \leq e_1 e_2 e_3 f_1 f_2 f_3.$$

Le lemme suivant nous permet de contrôler le nombre des points entiers primitifs dans une région planaire autour de l'origine. Pour une démonstration, voir [Hea84, Lemma 2].

Lemme 5.4.10. *Soit $\Lambda \subset \mathbf{Z}^2$ un réseau. Soit $E \subset \mathbf{R}^2$ une partie convexe dont le bord est lisse par morceaux avec $(0, 0) \in \overline{E}$. Alors*

$$\#\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Lambda \cap E : \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1\} \leq 4 \left(1 + \frac{\text{vol}(E)}{\det(\Lambda)}\right).$$

En utilisant ce lemme, on obtient que pour tout $0 < \delta_1 < 1$, comme $\tau(n) \ll_{\delta_1} n^{\delta_1}$ ([Ten95] I.5 Corollary 5.3), $\sigma_{\kappa}(n) \ll_{\delta_1} n^{\kappa+\delta_1}$ [Ten95, Theorem 5.7],

$$\begin{aligned}\#G(a, b, \varepsilon, B, r) &\ll \sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} \left(1 + O_{\tau_i} \left(\frac{B^{\frac{1}{2}-\frac{2}{r}}}{b^{\frac{3}{2}} e_1 e_2 e_3}\right)\right) \\ &\ll_{\tau_i} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} \tau(n_1)\tau(n_2)\tau(n_3) \\ &\ll_{\delta_1, \tau_i} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} (n_1 n_2 n_3)^{\delta_1} \\ &\ll_{\tau_i, \delta_1} \sigma_{\delta_1}(ba(b-a)) \\ &\ll_{\tau_i, \delta_1} b^{\delta_2}.\end{aligned}$$

où δ_1, δ_2 peuvent être arbitrairement petits. On en conclut que

$$\#E(\varepsilon, a, b, B, r) = \#F(\varepsilon, a, b, B, r) + O_{\tau_i, \delta}(b^{\delta}).$$

Maintenant on compte le cardinal de $F(a, b, \varepsilon, B, r)$. Comme on a fait pour $G(\varepsilon, a, b, B, r)$, et par une inversion de Möbius on obtient

$$\#F(a, b, \varepsilon, B, r) = \sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} \left(\prod_{i=1}^3 \mu(e_i)\right) \#F(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B, r), \quad (5.4.30)$$

où

$$F(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B, r) = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in \mathbf{N}_{\text{prem}}^2 \\ e_1 f_1 | u^2, e_2 f_2 | v^2, e_3 f_3 | u - v \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 < \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right) B^{-\frac{1}{r}} \\ v^4 \leq \frac{B f_1^2 f_2^2 f_3^2}{b^2 a (\sqrt{ba^{-1}} - 1)^2} \end{array} \right. \right\}. \quad (5.4.31)$$

Nous allons appliquer le théorème 5.3.16. À cette fin on prend dans (5.4.31)

$$\Lambda' = \Lambda_{e_i f_i}, \quad K' = \frac{(f_1 f_2 f_3)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} (\sqrt{ba^{-1}} - 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right).$$

Notons qu'ici la signification de B et r sont différentes. On prend

$$B' = B^{\frac{1}{4}}, \quad r' = \frac{r}{4}.$$

Lemme 5.4.11. *La condition (5.4.25) sur r et b implique les condition (5.3.54) - (5.3.56).*

Démonstration. La condition (5.3.56) se traduit en

$$bg(e_1f_1)^2g(e_2f_2)^2e_3^2f_3^2 \leq \frac{\prod_{i=1}^3 f_i}{ba^{\frac{1}{2}}(\sqrt{ba^{-1}} - 1)} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}},$$

qui est elle-même impliquée par la condition

$$b \prod_{i=1}^3 e_i^2 f_i^2 \leq \frac{\prod_{i=1}^3 f_i}{ba^{\frac{1}{2}}(\sqrt{ba^{-1}} - 1)} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \Leftrightarrow b^{\frac{5}{2}} \sqrt{ab^{-1}} (\sqrt{ba^{-1}} - 1) \prod_{i=1}^3 e_i^2 f_i \leq B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}.$$

En utilisant la majoration

$$\prod_{i=1}^3 e_i \leq \prod_{i=1}^3 e_i f_i \leq ba(b-a),$$

la condition (5.4.25) sur b entraîne que

$$\begin{aligned} b^{\frac{5}{2}} \sqrt{ab^{-1}} (\sqrt{ba^{-1}} - 1) \prod_{i=1}^3 e_i^2 f_i &\leq b^{\frac{5}{2}} \frac{\tau_1 - 1}{\tau_2} (ba(b-a))^2 \\ &= b^{\frac{17}{2}} \frac{\tau_1 - 1}{\tau_2} \left(\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right)^2 \\ &\leq b^{\frac{17}{2}} \frac{\tau_1 - 1}{16\tau_2} \leq B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

d'où la condition (5.3.56). De plus, (5.4.25) sur r entraîne que $\frac{1}{2} < r' < \frac{36}{55} < \frac{7}{10}$ et pour un tel r on a

$$\frac{2}{17} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) < \frac{2}{5} \left(\frac{4}{5} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) \right).$$

Donc (5.4.25) implique la condition suivante vérifiées de la même façon, qui elle-même implique (5.3.55) pour tout $B \gg_{\tau_i, \varepsilon} 1$

$$b^{\frac{5}{2}} \leq \tau_1^2 U(\tau_2, \varepsilon(\tau_2 - 1)/2) B^{\frac{4}{5}(\frac{1}{r} - \frac{1}{4}) - \frac{3}{5}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})}$$

□

Suite de la démonstration de la proposition 5.4.8. Donc on peut appliquer le théorème 5.3.16 avec les quantités $\Lambda_{e_i f_i}, K', \varepsilon', B', r'$ ci-dessus, et on obtient, compte-tenu du calcul (5.3.51),

$$\begin{aligned} &\#F(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B, r) \\ &= \frac{\Theta(\Lambda_{e_i f_i}) f_1 f_2 f_3}{4ba^{\frac{1}{2}}} \varepsilon B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} + O\left((K')^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda_{e_i f_i})^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B + K' b^{\frac{3}{2}} B^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2r}} \log B \right) \\ &= \frac{3}{2\pi^2} \frac{\Psi_1(\det(\Lambda_{e_i f_i})) f_1 f_2 f_3}{ba^{\frac{1}{2}} \det(\Lambda_{e_i f_i})} \varepsilon B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} + O\left(\frac{(e_1 e_2 e_3)^{\frac{1}{2}} (f_1 f_2 f_3)^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{7}{8}}} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B + b^{\frac{3}{4}} (f_1 f_2 f_3)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2r}} \log B \right). \end{aligned} \tag{5.4.32}$$

En reportant dans (5.4.30), on calcule la somme du coefficient du terme principal

$$\begin{aligned} &\sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} \left(\prod_{i=1}^3 \mu(e_i) \right) \frac{\Psi_1(\det(\Lambda_{e_i f_i})) f_1 f_2 f_3}{\det(\Lambda_{e_i f_i})} \\ &= \left(\sum_{e_1 f_1 | b} \frac{\Psi_1(g(e_1 f_1)) e_1 f_1}{g(e_1 f_1)} \frac{\mu(e_1)}{e_1} \right) \left(\sum_{e_2 f_2 | a} \frac{\Psi_1(g(e_2 f_2)) e_2 f_2}{g(e_2 f_2)} \frac{\mu(e_2)}{e_2} \right) \left(\sum_{e_3 f_3 | b-a} \Psi_1(e_3 f_3) \frac{\mu(e_3)}{e_3} \right) \\ &= \Phi(b) \Phi(a) \Psi(b-a). \end{aligned}$$

Rappelons la majoration pour la fonction σ_κ [Ten95, Theorem 5.7],

$$\sigma_\kappa(n) \ll n^\kappa, (\kappa > 1), \quad \sigma_\kappa(n) \ll_\delta n^{\kappa+\delta}, (0 < \kappa < 1, \forall \delta > 0).$$

On peut majorer le terme d'erreur de la façon suivante. Pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} \frac{(e_1 e_2 e_3)^{\frac{1}{2}} (f_1 f_2 f_3)^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{7}{8}}} &= b^{-\frac{7}{8}} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} (n_1 n_2 n_3)^{\frac{1}{2}} \sigma_{\frac{3}{4}}(n_1) \sigma_{\frac{3}{4}}(n_2) \sigma_{\frac{3}{4}}(n_3) \\ &\ll_{\delta} b^{-\frac{7}{8}} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} \sigma_{\frac{5}{4}+\delta}(b) \sigma_{\frac{5}{4}+\delta}(a) \sigma_{\frac{5}{4}+\delta}(b-a) \\ &\ll_{\delta} b^{\frac{15}{4}-\frac{7}{8}+\delta} = b^{\frac{23}{8}+\delta}. \end{aligned}$$

Et pour tout $\frac{5}{8} \geq \delta_2 > 3\delta_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} b^{\frac{3}{4}} (f_1 f_2 f_3)^{\frac{1}{2}} &= b^{\frac{3}{4}} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} \sigma_{\frac{1}{2}}(n_1) \sigma_{\frac{1}{2}}(n_2) \sigma_{\frac{1}{2}}(n_3) \\ &\ll_{\delta_1} b^{\frac{3}{4}} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} (n_1 n_2 n_3)^{\frac{1}{2}+\delta_1} \\ &\ll_{\delta_1} b^{\frac{3}{4}} \sigma_{\frac{1}{2}+\delta_1}(ba(b-a)) \\ &\ll_{\delta_2} b^{\frac{9}{4}+\delta_2}. \end{aligned}$$

Compte tenu le terme d'erreur provenant du cardinal de $G(a, b, \varepsilon, B, r)$, on en conclut la formule asymptotique (5.4.26) sur chaque courbe $C_{a,b}$. \square

5.4.3.3.2 Obtention de la borne inférieure

Démonstration du théorème 5.4.7. Tout d'abord rappelons le difféomorphisme local ϱ (5.4.2) et les notations de coordonnées de l'espace tangent

$$(w', z') = (w - 1, z - 1).$$

On déduit un encadrement des (a, b) tels que la courbe $C_{a,b}$ intervienne dans le dénombrement (5.4.13) quand on prend la fonction caractéristique $\chi(W(\varepsilon_1, \varepsilon, \tau_1, \tau_2))$ de la région $W = W(\varepsilon_1, \varepsilon, \tau_1, \tau_2)$ (5.4.19) dans R (5.4.3). La condition de zoom dit que

$$\max(w', z') = z' = z - 1 \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}. \quad (5.4.33)$$

Prenons un couple (a, b) vérifiant la condition (5.4.35), d'après l'équation (5.4.9) définissant l'image de la courbe $C_{a,b}$, on a

$$\frac{b}{a} = \frac{(z')^2(w' + 1)}{(w')^2(z' + 1)}.$$

On note

$$\delta(\varepsilon, B) = 1 + \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}.$$

S'il existe $(w', z') \in W \cap B^{-\frac{1}{r}} \varrho(C_{a,b})$, alors d'après (5.4.33) on a

$$\frac{\tau_2^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} = \frac{\tau_2^2}{1 + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}} < \frac{b}{a} < \tau_1^2 (1 + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}) = \tau_1^2 \delta(\varepsilon_1, B),$$

Maintenant prenons un couple (a, b) vérifiant (5.4.35) et

$$\tau_2^2 \delta(\varepsilon_1, B) < \frac{b}{a} < \frac{\tau_1^2}{\delta(\varepsilon_1, B)}.$$

Puisqu'un point $(w', z') \in \varrho(C_{a,b})$ vérifie

$$\frac{(z')^2}{(w')^2} = \frac{b(z' + 1)}{a(w' + 1)},$$

la condition de zoom implique que sur la courbe $C_{a,b}$, si $\max(w', z') \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}$,

$$\tau_2^2 = \frac{\tau_2^2 \delta(\varepsilon_1, B)}{1 + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}} < \frac{(z')^2}{(w')^2} < \frac{\tau_1^2 (1 + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}})}{\delta(\varepsilon_1, B)} = \tau_1^2.$$

Donc (w', z') donne un point de $W \cap B^{-\frac{1}{r}} \varrho(C_{a,b})$.

On restreint le dénombrement sur les (a, b) tels que $(a, b) \notin \square^2$ car c'est sur de telles $C_{a,b}$ qu'on trouve une équidistribution de points pour le zoom sous-critique (Proposition 5.4.8). On en conclut que

$$\begin{aligned} & \delta_{U,Q,B,r}(\chi(W\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2)) \\ & \geq \sum_{\tau_2^2 \leq \frac{b}{a} \leq \tau_1^2}^* \#E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, B) + O \left(\sum_{\substack{\frac{\tau_2^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} < \frac{b}{a} < \tau_2^2 \delta(\varepsilon_1, B) \text{ ou} \\ \frac{\tau_1^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} < \frac{b}{a} < \tau_1^2 \delta(\varepsilon_1, B)}}^* \#E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, B) \right), \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

où le symbole $*$ signifie que la somme est prise sur les $(a, b) \in \mathbf{N}_{\geq 1}^2$ tels que

$$\text{pgcd}(a, b) = 1, \quad a < b, \quad (a, b) \notin \square^2 \quad (5.4.35)$$

et les ensembles $E(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, B, r)$ sont définis de manière analogue à $E(a, b, \varepsilon, B, r)$ en remplaçant (5.4.14) par $\varepsilon_2 < B^{\frac{1}{r}}d(P) \leq \varepsilon_1$. Pour arriver à sommer le cardinal des $E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, B)$, on a besoin du lemme suivant, qui nous conduit au problème de diviseurs des formes en deux variables.

Lemme 5.4.12. *Rappelons les fonctions arithmétiques τ (5.1.2), Ψ (5.4.22) et Φ (5.4.23). On a pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$,*

$$\Psi(n) \leq \tau(n) \quad \text{et} \quad \Psi(n) \leq \Phi(n) \leq \sqrt{n}\Psi(n).$$

Démonstration. Puisque τ, Ψ, Φ sont positives et multiplicatives, il suffit de comparer leur valeurs en les puissances des nombre premiers. Fixons un nombre premier p et $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\Psi(p^k) = 1 + k \frac{1 - p^{-1}}{1 + p^{-1}} \leq 1 + k = \tau(p^k).$$

Quant à Φ , on a

$$\begin{aligned} \Phi(p^k) &= \sum_{l=0}^k \Psi_1(p^{\lceil \frac{l}{2} \rceil}) p^{l - \lceil \frac{l}{2} \rceil} \phi(p^l) \\ &= 1 + \frac{1 - p^{-1}}{1 + p^{-1}} \sum_{l=1}^k p^{l - \lceil \frac{l}{2} \rceil} \\ &\geq 1 + k \frac{1 - p^{-1}}{1 + p^{-1}} = \Psi(p^k), \end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned} \Phi(p^k) &= 1 + \frac{1 - p^{-1}}{1 + p^{-1}} \sum_{l=1}^k p^{l - \lceil \frac{l}{2} \rceil} \\ &\leq 1 + \frac{1 - p^{-1}}{1 + p^{-1}} \sum_{l=1}^k p^{\frac{l}{2}} \\ &\leq p^{\frac{k}{2}} \left(1 + k \frac{1 - p^{-1}}{1 + p^{-1}} \right) \\ &= p^{\frac{k}{2}} \Psi(p^k). \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

On voit ailleurs que la différence entre Ψ et τ est « petite ». Le terme principal (5.4.26) sur chaque courbe nodale admet donc une minoration de la forme

$$\frac{\Phi(b)\Phi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.4.36)$$

qui fait disparaître la fonction Φ et laisser la fonction Ψ qui ressemble à la fonction τ au sens de la convolution, dont l'ordre moyen de ce type est connu grâce à une série de travaux de R. de la Bretèche et T. D. Browning ([dB11], [dB10], [Bro11]). On donnera les détails dans les appendices, où nous décrivons ces résultats.

On est en mesure de sommer sur les courbes $C_{a,b}$ des paramètres (a, b) vérifiant

$$b \leq B^\eta(1 - \frac{2}{r}) = o(B^{\frac{2}{17}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})}),$$

qui correspond à (5.4.25). Tout d'abord d'après la proposition 5.4.8, on obtient, pour chaque tel (a, b) fixé, la minoration

$$\begin{aligned} \sharp E(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, B, r) &= \frac{3}{2\pi^2} \frac{\Phi(b)\Phi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} + O_{\tau_i, \varepsilon_i, \delta} \left(b^{\frac{23}{8} + \delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B \right) \\ &\geq \frac{3}{2\pi^2} \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} + O_{\tau_i, \varepsilon_i, \delta} \left(b^{\frac{23}{8} + \delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B \right) \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

Afin d'appliquer la proposition 6.2.3 sur l'ordre moyen des diviseurs de formes binaires, on étend la somme (5.4.34) sur les (a, b) vérifiant la condition (5.4.35) en rajoutant les (a, b) vérifiant la condition $(a, b) \in \square^2$. Le terme d'erreur correspondant est de grandeur

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq \max(a, b) \leq B^\eta(1 - \frac{2}{r}) \\ a < b, (a, b) \in \square^2}} \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} &\ll \sum_{\substack{1 \leq \max(c, d) \leq B^\eta(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}) \\ c > d}} \frac{\Psi(c^2)\Psi(d^2)\Psi(c^2 - d^2)}{c^2 d} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \\ &\ll \sum_{\substack{1 \leq \max(c, d) \leq B^\eta(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}) \\ c > d}} \frac{\tau(c^2)\tau(d^2)\tau(c^2 - d^2)}{c^2 d} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \\ &\ll_{\delta_1} \sum_{1 \leq \max(c, d) \leq B^\eta(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \frac{1}{c^{2 - \delta_1} d} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \\ &\ll_{\delta_1} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \log B \end{aligned}$$

pour tout $\delta_1 \in]0, 1[$. D'après la formule 6.2.3 de la proposition 6.2.1, la somme des termes principaux dans (5.4.37) est

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a < b \leq B^\eta(1 - \frac{2}{r}) \\ \tau_2^2 \leq \frac{b}{a} \leq \tau_1^2 \\ \text{pgcd}(a, b) = 1}} \frac{3}{2\pi^2} \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \\ &= \frac{6}{\pi^2} C_1 \left(\eta \left(1 - \frac{2}{r}\right) \right)^3 \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} (\log B)^3 + O(B^{(1+\eta)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} (\log B)^2) \\ &= \left(C_2 \int_{\substack{z' \in]\varepsilon_2, \varepsilon_1[\\ \theta \in]\tau_2, \tau_1[}} \frac{1}{\theta^2} d\theta dz' \right) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} (\log B)^3 + O(B^{(1+\eta)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} (\log B)^2) \\ &= \left(C_2 \int \chi(W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2)) \frac{dw' dz'}{z'} \right) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} (\log B)^3 + O(B^{(1+\eta)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} (\log B)^2). \end{aligned}$$

La contribution de la somme des termes d'erreur dans (5.4.37) est majorée de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \sum_{a < b \leq B^\eta(1 - \frac{2}{r})} b^{\frac{23}{8} + \delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B &\ll \sum_{b \leq B^\eta(1 - \frac{2}{r})} b^{\frac{23}{8} + 1 + \delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B \\ &\ll B^{(\frac{39}{4}\eta + \frac{3}{4} + 2\eta\delta)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B \\ &= O(B^{(1+\eta)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B), \end{aligned}$$

grâce à la condition (5.4.20) sur r et pour

$$0 < 8\delta \leq \frac{1}{\eta} - 35.$$

Pour contrôler la somme du terme d'erreur dans (5.4.34), on utilise la majoration pour la fonction Φ donné par le lemme 5.4.12. Le terme principal (5.4.26) admet donc la majoration de la forme

$$\frac{\Phi(b)\Phi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{b^{\frac{1}{2}}} \leq \tau(b)\tau(a)\tau(b-a).$$

Les $(a, b) \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ vérifiant la condition

$$\frac{\tau_2^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} < \frac{b}{a} < \tau_2^2 \delta(\varepsilon_1, B) \quad \text{ou} \quad \frac{\tau_1^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} < \frac{b}{a} < \tau_1^2 \delta(\varepsilon_1, B), \quad \text{et} \quad a < b \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})} \quad (5.4.38)$$

se trouvent dans deux triangles de l'aire

$$B^{2\eta(1-\frac{2}{r})} O_{\tau_i} \left(\delta(\varepsilon_1, B) - \frac{1}{\delta(\varepsilon_1, B)} \right) = O_{\tau_i} (B^{4\eta(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{r}}).$$

Rappelons le lemme 5.4.10 et la majoration pour la fonction τ , on obtient que, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(a,b) \text{ vérifie (5.4.38),} \\ \text{pgcd}(a,b)=1}} \sharp E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, B) \\ & \ll_{\varepsilon_i, \tau_i} \sum_{\substack{(a,b) \text{ vérifie (5.4.38),} \\ \text{pgcd}(a,b)=1}} \tau(b)\tau(a)\tau(b-a)B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} + \sum_{a < b \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})}} b^{\frac{23}{8}+\delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B \\ & \ll_{\varepsilon_i, \tau_i, \delta} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}+\delta} (B^{4\eta(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{r}} + 1) + B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B \\ & \ll_{\varepsilon_i, \tau_i, \delta} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}+\delta} + B^{(4\eta+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})+\delta-\frac{1}{r}} + B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B. \end{aligned}$$

Pour que cette majoration soit satisfaisante, il faut que

$$(4\eta + 1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} < (1 + \eta) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) \Leftrightarrow 3\eta < \frac{2r}{r-2}.$$

Cela est valide à cause de la condition (5.4.20). La preuve du théorème 5.4.7 est achevée. \square

5.4.3.3 Remarque

Nous expliquons une raison pour laquelle nous ne choisissons pas à établir une formule asymptotique pour le zoom sous-critique. Comme l'on a vu, la prédiction naïve affirme que la puissance de B devrait être $1 - \frac{2}{r}$. En fait on a

$$b = O_\varepsilon(B^{1-\frac{2}{r}})$$

d'après (5.4.18). Le terme principal de la borne inférieure (théorème 5.4.7) deviendrait $B^{1-\frac{2}{r}}(\log B)^3$ si l'on pourrait prendre la constante $\eta = 1$. Une difficulté se cache sur l'exactitude de la formule (5.4.26) pour les paramètres (a, b) grands (c'est-à-dire $a, b > B^\lambda$ pour certain $0 < \lambda < 1 - \frac{2}{r}$). Dans ce cas le zoom sur la courbe nodale $C_{a,b}$ compte au plus un point et la technique utilisée dans ce texte ne permet pas de déterminer s'il est non-nul ou pas. Dans 4, nous avons surmonté un obstacle similaire à l'aide de la transformation de Cremona. Mais cette astuce n'est plus applicable ici car la transformation de Cremona préserve les courbes $C_{a,b}$.

5.4.4 Interprétation en terme d'ensemble mince

Le but de cette section est de signaler le fait que les points de Y_4 sont en bijection avec un ensemble mince de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Notons que, outre le morphisme d'implosion utilisé jusqu'à maintenant, la surface Y_4 possède un autre morphisme vers $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ comme suit.

Le diviseur $\omega_{Y_4}^{-1}$ définit un morphisme birationnel

$$f : Y_4 \rightarrow V \subset \mathbf{P}^4$$

dont l'image V est une surface torique de del Pezzo de degré 4 singulière de type $4\mathbf{A}_1$ définie comme l'intersection de deux quadriques dans \mathbf{P}^4 :

$$x_0x_1 = x_2x_3 = x_4^2, \quad (5.4.39)$$

et l'éventail est un « croix » qui ressemble à celui de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Le morphisme f est en fait la désingularisation minimale torique de V puisque les diviseurs D_{2i-1} ($1 \leq i \leq 4$) ont le nombre d'auto-intersection -2 . L'équation

$$x_0x_1 = x_2x_3 \quad (5.4.40)$$

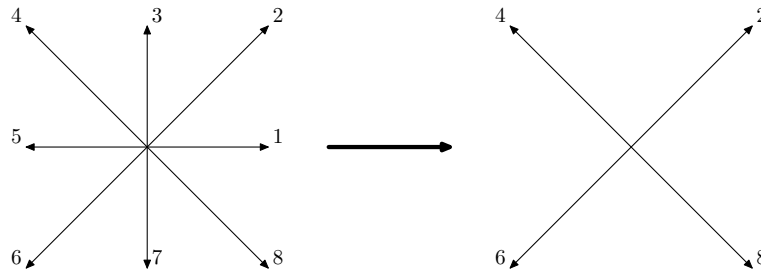


FIGURE 5.3 – La désingularisation $Y_4 \rightarrow V$

implique (comme pour toute surface de del Pezzo de degré 4 fibrée en conique) que Y_4 possède deux projections vers la droite projective, et donc un morphisme g vers $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ qui est fini de degré générique 2. Plus précisément, g est défini de la façon suivante. D’abord la projection $\varphi : \mathbf{P}^4 \rightarrow \mathbf{P}^3$ depuis le point $[0 : 0 : 0 : 0 : 1]$ est bien définie sur V . La variété de produit s’injette sur \mathbf{P}^3 comme une surface quadrique :

$$[u : v] \times [s : t] \mapsto [us : vt : ut : vs].$$

Si l’on utilise les coordonnées $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ venant de \mathbf{P}^4 , l’image de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est définie par l’équation (5.4.40). En rappelons les équations (5.4.39), φ induit un morphisme $V \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ de degré générique 2 dont l’image est un ensemble *mince* de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$:

$$\{[u : v] \times [s : t] : uvst \in \square\}. \tag{5.4.41}$$

En les composant, on voit que le morphisme $h = g \circ f : Y_4 \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est un revêtement lisse de degré générique 2. De plus, on a

$$\omega_{Y_4}^{-1} = f^*(\omega_V^{-1}) = h^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)).$$

Le lieu de ramification est sur les diviseur du bord, donc autour du point $[1 : 1] \times [1 : 1]$, f est un difféomorphisme. Par la functorialité de la hauteur on peut se ramener au cas de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ restreinte à l’ensemble mince (5.4.41). Ceci pourrait réexpliquer le fait que l’approximation rationnelle des nombres rationnels est équivalente à l’approximation rationnelle des nombres quadratiques.

5.4.5 Autres variétés toriques

Dans cette section, on produira des variétés toriques de dimension supérieure sur lesquelles en dehors un fermé de Zariski les meilleures approximations se trouvent dans une famille de courbes nodales, comme pour Y_4 . Elles sont construites en fait comme produits de Y_4 avec d’autres variétés toriques.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, considérons la variété $V_n = Y_4 \times \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$. On note π_1, π_2 les morphismes de projection vers Y_4 et \mathbf{P}^n .

Proposition 5.4.13. *Pour $Q \in V_n(\mathbf{Q})$ dans l’orbite ouverte, on a*

$$\alpha_{\text{ess } \omega_{V_n}^{-1}}(Q) = \alpha_{\text{ess } \omega_{Y_4}^{-1}}(\pi_1(Q)) + \alpha_{\text{ess } \omega_{\mathbf{P}^n}^{-1}}(\pi_2(Q)) = n + 3,$$

qui est atteinte sur une famille de courbes nodales couvrant un ouvert dense de V_n .

Démonstration. On peut supposer que $\pi_1(Q)$ a pour coordonnées $[1 : 1] \times [1 : 1]$ et $\pi_2(Q) = [1 : \dots : 1]$. Tout d’abord, comme $\omega_{V_n}^{-1} = \pi_1^*(\omega_{Y_4}^{-1}) \otimes \pi_2^*(\omega_{\mathbf{P}^n}^{-1})$, on choisit la hauteur de Weil associée à $\omega_{V_n}^{-1}$ comme

$$H_{\omega_{V_n}^{-1}}(x, [y_0 : \dots : y_n]) = H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(x) H_{\omega_{\mathbf{P}^n}^{-1}}([y_0 : \dots : y_n]), \quad H_{\omega_{\mathbf{P}^n}^{-1}}([y_0 : \dots : y_n]) = \max_{0 \leq i \leq n} (|y_i|)^{n+1},$$

et la distance d comme le maximum de celle d_1 sur Y_4 et d_2 sur \mathbf{P}^n définie par la formule (pour $y_0 \neq 0$),

$$d_2(\pi_2(Q), [y_0 : \dots : y_n]) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{y_i}{y_0} - 1 \right|.$$

Par définition, si $[y_0 : \dots : y_n] \neq Q$,

$$d_2(\pi_2(Q), [y_0 : \dots : y_n])^{n+1} H_{\omega_{\mathbf{P}^n}^{-1}}([y_0 : \dots : y_n]) \geq 1.$$

Donc pour un point général $P \in V_n(\mathbf{Q})$ tel que $d_1(\pi_1(Q), \pi_1(P)), d_2(\pi_2(Q), \pi_2(P)) \neq 0$, on a, d'après la Proposition 5.4.1,

$$d(Q, P)^{n+3} H_{\omega_{V_n}^{-1}}(P) \geq d_1(\pi_1(Q), \pi_1(P))^2 H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(\pi_1(P)) \times d_2(\pi_2(Q), \pi_2(P))^{n+1} H_{H_{\omega_{\mathbf{P}^n}^{-1}}}(\pi_2(P)) \geq 1.$$

Cela démontre que $\alpha_{\text{ess}\omega_{V_n}^{-1}}(Q) \geq n + 3$.

Ensuite on construit des courbes nodales dans V_n à partir de celles dans Y_4 . Avec les notations dans la section 5.4.2, pour $(a, b) \in \mathbf{N}_{\text{prem}}^*$, $a < b$, on a construit une courbe nodale $C_{a,b}$ dans Y_4 avec le morphisme de paramétrage $\psi_{a,b}$ (5.4.10). Maintenant on prend une droite l dans \mathbf{P}^n avec un paramétrage $\psi_l : \mathbf{P}^1 \rightarrow l$ qui envoie $[0 : 1]$ sur $\pi_2(Q)$. On définit un morphisme de paramétrage comme suit

$$\Psi_{a,b,l} : \mathbf{P}^1 \rightarrow V_n,$$

$$\Psi_{a,b,l}([u : v]) = (\psi_{a,b}([u : v]), \psi_l \circ \theta_{a,b}([u : v])),$$

où $\theta_{a,b} : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ est défini comme le revêtement double

$$\theta_{a,b}([u : v]) = [au^2 - bv^2 : v^2].$$

On voit que l'image de $\Psi_{a,b,l}$ est une courbe rationnelle $D_{a,b,l}$ nodale en $Q = \Psi_{a,b,l}([\pm\sqrt{\frac{b}{a}} : 1])$ avec

$$\deg_{\omega_{V_n}^{-1}}(D_{a,b,l}) = \deg_{\omega_{Y_4}^{-1}}(\pi_1(D_{a,b,l})) + \deg_{\omega_{\mathbf{P}^n}^{-1}}(\pi_2(D_{a,b,l})) = 4 + 2(n+1) = 2n + 6,$$

comme $\pi_2 \circ \psi_l \circ \theta_{a,b}$ définit une droite double. On en déduit que

$$\alpha_{\omega_{V_n}^{-1}}(Q, D_{a,b,l}) = \frac{\deg_{\omega_{V_n}^{-1}}(D_{a,b,l})}{2} = n + 3.$$

□

Plus concrètement, comme l'approximation diophantienne des nombres quadratiques est équivalente à la structure des équations de Pell-Fermat généralisées (cf. Section 5.2.2), en choisissant une famille de solutions primitives $(\frac{x_n}{y_n})$ de l'équation

$$ax^2 - by^2 = a,$$

on obtient automatiquement une suite d'approximants $P_n = \Psi_{a,b,l}([x_n : y_n])$ du point Q sur V_n . Puisque l'on a l'équivalence de hauteurs

$$H_{\omega_{V_n}^{-1}}(P_n) \sim H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2n+6)}([x_n : y_n]) \sim y_n^{2n+6},$$

et l'équivalence de distances

$$d_1(\pi_1(P_n), Q) \sim d_2(\pi_2(P_n), Q) \sim \left| \frac{x_n^2}{y_n^2} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| \sim \left| \frac{x_n}{y_n} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right|,$$

on est ramené au problème de l'approximation diophantienne d'un nombre quadratique particulier et la constante d'approximation se déduit des théorèmes de Dirichlet, Liouville, et Roth.

Chapitre 6

APPENDICES

6.1 Distribution locale d'un point rationnel sur la droite projective

Dans un souci de complétude, nous redémontrons le résultat de S. Pagelot concernant la distribution locale d'un \mathbb{Q} -point Q sur la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^1$. Pour simplicité on suppose que $Q = [0 : 1]$; le résultat pour un point général diffère par une constante.

6.1.1 Énoncé du théorème

Théorème 6.1.1 (Pagelot [Pag08]). *On a $\alpha(Q, \mathbf{P}^1) = \alpha_{\text{ess}}(Q) = 1$. On fixe la hauteur de Weil absolue associée au fibré $\mathcal{O}(1)$ définie par*

$$H([u : v]) = \max(|u|, |v|), \quad (u, v) \in \mathbf{Z}, \quad \text{pgcd}(u, v) = 1,$$

et l'on note $r \geq 1$ le facteur de zoom. Soit f une fonction intégrable à support compact sur $T_Q \mathbf{P}^1$. Alors

— si $r = 1$ alors

$$\delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, 1}(f) = B \int f(x) \frac{\sigma(x) dx}{x^2} + O_f(1),$$

où

$$\sigma(x) = \sum_{n \leq |x|} \varphi(n),$$

— si $r > 1$, alors

$$\delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, r}(f) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2} \int f(x) dx + O_f(B(\log B)^{\frac{2}{3}} (\log \log B)^{\frac{4}{3}}).$$

On voit que dans les deux cas la mesure asymptotique existe. Pour le zoom critique, si $\text{Supp}(f) \subset]-1, 1[$, alors $\delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, 1}(f) = 0$. On observe donc qu'il y a un « trou » autour du point Q . Pour un zoom sous-critique (c'est-à-dire $r > 1$), la distribution est uniforme.

6.1.2 Démonstration du théorème

Rien dans cette section n'est nouveau. Le but est de rappeler comment traiter ce type de problème dans le cas le plus simple. Une observation basique, qui est aussi celle que l'on va suivre dans la suite, est qu'au lieu de considérer des fonctions intégrables générales, il suffit de regarder les fonctions « simple », c'est-à-dire les fonctions caractéristiques d'intervalles, car ces fonctions suffisent pour caractériser la convergence faible de mesures de probabilité.

On note les coordonnées de $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^1$ par $[u : v]$. Sans perte de généralité on peut supposer que $u > 0$. Puisque le point à approcher est $Q = [0 : 1]$, on utilise le difféomorphisme local ρ défini par

$$[u : v] \mapsto \frac{u}{v} \in \mathbf{R}.$$

Alors Q est envoyé sur l'origine O . Sur $T_Q \mathbf{P}^1$ on utilise la distance canonique

$$d([u : v], Q) = \left| \frac{u}{v} \right|.$$

Par symétrie, il suffit d'examiner les fonctions caractéristique des intervalles $]\eta, \varepsilon] \subset]0, \infty[$. On désigne par $\chi(\eta, \varepsilon)$ une telle fonction. Nous remarquons ici que l'usage de cette notation a un sens légèrement différent dans les parties précédentes du texte. L'étude de la convergence de la suite $\{\delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, r}(\chi(\eta, \varepsilon))\}$ revient à l'estimation du cardinal de l'ensemble

$$F(\varepsilon, B, r) = \left\{ P = [u : v] \neq [0 : 1] \left| \begin{array}{l} 0 < B^{\frac{1}{r}} d(P, Q) = B^{\frac{1}{r}} \frac{u}{v} \leq \varepsilon \\ \text{pgcd}(u, v) = 1 \\ H(P) = \sup(u, v) \leq B \end{array} \right. \right\}, \quad (6.1.1)$$

puisque $\delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, r}(\chi(\eta, \varepsilon)) = \#F(\varepsilon, B, r) - \#F(\eta, B, r)$.

6.1.2.1 Cas critique : $r = 1$

Les conditions (6.1.1) sur (u, v) implique que

$$u \leq \frac{\varepsilon|v|}{B} \leq \varepsilon.$$

Cela implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de u dans un voisinage fixé et nous permet de fixer u tout en comptant v . On peut écrire

$$F(\varepsilon, B, 1) = \bigsqcup_{u \leq \varepsilon} F_u(\varepsilon, B, 1),$$

où

$$F_u(\varepsilon, B) = \{v \in \mathbb{N} : \text{pgcd}(u, v) = 1, u\varepsilon^{-1}B \leq v \leq B\}. \quad (6.1.2)$$

On rappelle la définition de la fonction ϕ (5.1.3) et l'on en déduit, en utilisant [Bro09, Exercice 5.2]

$$\#F_u(\varepsilon, B, 1) = \phi(u) \left(1 - \frac{u}{\varepsilon}\right) B + O(\tau(u)). \quad (6.1.3)$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, 1}(\chi(\eta, \varepsilon)) &= \sum_{u \leq \varepsilon} \#F_u(\varepsilon, B) - \sum_{u \leq \eta} \#F_u(\eta, B) \\ &= \sum_{u \leq \eta} u\phi(u) \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\varepsilon}\right) B + \sum_{\eta < u \leq \varepsilon} \phi(u) \left(1 - \frac{u}{\varepsilon}\right) B + O(\varepsilon) \\ &= B \int \chi(\eta, \varepsilon)(x) \frac{\sigma(x) dx}{x^2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Cela clôt la démonstration du cas critique.

6.1.2.2 Cas $r > 1$

Comme précédemment on a la décomposition

$$F(\varepsilon, B, r) = \bigsqcup_{u \leq \varepsilon} F_u(\varepsilon, B, r),$$

où

$$F_u(\varepsilon, B, r) = \{v \in \mathbf{N} : u\varepsilon^{-1}B^{\frac{1}{r}} \leq v \leq B\}.$$

Fixons u dans cette réunion. Pour que $F_u(\varepsilon, B, r)$ soit non-vidé, il faut que

$$u\varepsilon^{-1}B^{\frac{1}{r}} \leq B \Leftrightarrow u \leq \varepsilon B^{1-\frac{1}{r}}.$$

Avant de calculer le cardinal, citons d'abord quelques formules asymptotique bien connues (voir [Ten95] §3.2, §3.4) :

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x(\log x)^{\frac{2}{3}} (\log \log x)^{\frac{4}{3}}), \quad (6.1.4)$$

$$\sum_{n \leq x} \phi(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O((\log x)^{\frac{2}{3}} (\log \log x)^{\frac{4}{3}}), \quad (6.1.5)$$

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = O(x \log x). \quad (6.1.6)$$

En appliquant ces formules, on obtient, encore d'après [Bro09, Exercice 5.2]

$$\begin{aligned} \#F(\varepsilon, B, r) &= \sum_{u \leq \varepsilon B^{1-\frac{1}{r}}} \left(\phi(u) \left(B - \frac{uB^{\frac{1}{r}}}{\varepsilon} \right) + O(\tau(u)) \right) \\ &= \left(\frac{6}{\pi^2} \varepsilon B^{2-\frac{1}{r}} - \frac{3}{\pi^2} \varepsilon B^{2-\frac{1}{r}} \right) + O_\varepsilon(B(\log B)^{\frac{2}{3}} (\log \log B)^{\frac{4}{3}}) + O_\varepsilon(B^{1-\frac{1}{r}} \log B) \\ &= \frac{3}{\pi^2} \varepsilon B^{2-\frac{1}{r}} + O_\varepsilon(B(\log B)^{\frac{2}{3}} (\log \log B)^{\frac{4}{3}}), \end{aligned}$$

d'où

$$\delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, r}(\chi(\eta, \varepsilon)) = B^{2-\frac{1}{r}} \left(\frac{3}{\pi^2} \int \chi(\eta, \varepsilon)(x) dx \right) + O_\varepsilon(B(\log B)^{\frac{2}{3}}(\log \log B)^{\frac{4}{3}}).$$

L'expression finale est achevée.

Remarque 6.1.2. Quand $r > 1$, les points à dénombrer se trouvent dans un triangle dont la longueur du bord est négligeable par rapport à l'aire. On pourrait adapter la méthode utilisée dans la démonstration du même problème pour les nombres irrationnels (cf. Théorème 5.3.8). Le raisonnement décrit ici donne un meilleur terme d'erreur au niveau de la puissance de $\log B$.

6.1.3 À propos des mesures limites

L'ordre de grandeur des nombres de points dans les zooms pour \mathbf{P}^1 étant en accord avec celui prévu, nous discutons maintenant à quoi correspondent les mesures limites.

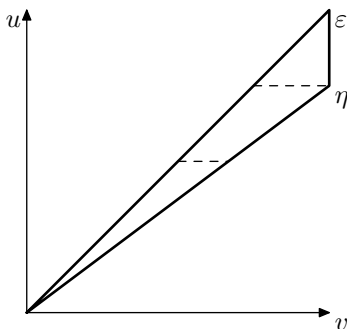
Prenons comme d'habitude la fonction caractéristique $\chi(\varepsilon, \eta)$. Si l'on identifie $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ avec l'ensemble des points primitifs dans \mathbf{Z}^2 le comptage de points de hauteur bornée $N(B) = \{P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) : H(P) \leq B\}$ équivaut au comptage des points primitifs dans le rectangle $R(B) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leq B\}$. L'opération de zoom revient à prendre des points primitifs dans l'intérieur du triangle $\Delta(\eta, \varepsilon, B, r)$ dont la taille dépend du facteur de zoom r et de la borne B .

Pour les zooms sous-critiques $r > 1$, l'ordre de grandeur de l'aire domine celui du bord, donc elle donne le terme principal. On a que

$$\frac{\delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, r}(\chi(\eta, \varepsilon))}{\text{Vol}(\Delta(\eta, \varepsilon, B, r))} = \frac{\#N(B)}{\text{Vol}(R(B))}.$$

On voit que dans ce cas là les points primitifs sont équidistribués et l'on obtient une mesure proportionnelle à la mesure de Lebesgue. Cela coïncide avec celui du zoom sous-critique pour tous les nombres algébriques.

Pour le zoom critique $r = 1$, l'aire de $\Delta(\eta, \varepsilon, B)$ et son bord ont la même d'ordre de grandeur B . Comme l'on a vu dans la démonstration, les points se trouvent en fait dans les droites horizontales dans l'intérieur du triangle dont la longueur est $u \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$.



Puisque

$$\frac{\delta_{\mathbf{P}^1, Q, B, 1}(\chi(\eta, \varepsilon))}{B} = \sum_u \#L(u),$$

où

$$L(u) = \left\{ v \in \mathbf{N} : \frac{u}{v} \text{ est une fraction réduite, } v \in \left] \frac{u}{\eta}, \frac{u}{\varepsilon} \right] \right\}.$$

On en conclut que sur chaque droite on compte des nombres rationnels avec le numérateur fixé. Cela explique d'où viennent la fonction densité $\frac{1}{x^2}$ et la fonction arithmétique σ . On remarque que le phénomène pour des nombres algébriques est radicalement différent (pour eux dans le zoom de facteur 1 on trouve aussi une équidistribution, voir la section 5.3.2).

6.2 Le problème des diviseurs pour des formes binaires cubiques déployées

6.2.1 Énoncé du résultat

Dans [Bro11], T. D. Browning a étudié l'ordre moyen du nombre de diviseurs pour des formes binaires cubiques déployées, dont la technique remonte à [dB10], où les auteurs ont déduit une formule asymptotique de l'ordre

moyen primitif de fonctions arithmétiques « ressemblant » à la fonction donnant le nombres de diviseurs pour certaines formes binaires quartique. Ils l'utilisent pour démontrer que le nombre de points de hauteur bornée sur une surface de del Pezzo de degré 4 s'accorde avec la prédiction de Batyrev-Manin-Peyre. En les imitant, nous allons déduire une telle formule pour une forme binaire cubique particulière (la même démonstration marche pour toutes les formes binaires cubiques déployées, ce dont nous n'aurons pas besoin ici). On considère les fonctions arithmétiques

$$\Psi_1(n) = \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad \Psi(n) = \sum_{d|n} \Psi_1(d) \sum_{e|d} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{d|n} \Psi_1(d) \phi(d),$$

et la constante C_1 :

$$C_1 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{18}{p(p+2)}\right). \quad (6.2.1)$$

Proposition 6.2.1. *Soient $\tau_1 > \tau_2 > 1, X \gg 1$, on a*

$$\sum_{\substack{\max(x_1, x_2) \leq X \\ 1 < \tau_2 \leq x_2 x_1^{-1} \leq \tau_1 \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \Psi(x_1) \Psi(x_2) \Psi(x_2 - x_1) = \frac{C_1}{2} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right) X^2 (\log X)^3 + O(X^2 (\log X)^2), \quad (6.2.2)$$

$$\sum_{\substack{\max(x_1, x_2) \leq X \\ 1 < \tau_2 \leq x_2 x_1^{-1} \leq \tau_1 \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \frac{\Psi(x_1) \Psi(x_2) \Psi(x_2 - x_1)}{x_2 x_1^{\frac{1}{2}}} = 4C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\right) X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2). \quad (6.2.3)$$

6.2.2 Préliminaires et résultats connus

On fixe trois formes linéaires à coefficients entiers primitives L_1, L_2, L_3 en deux variables deux à deux linéairement indépendantes et \mathcal{R} un sous-ensemble convexe fermé borné de \mathbf{R}^2 dont les coordonnées sont notées $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Pour $X > 0$, on note

$$X\mathcal{R} = \{X\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{R}\}.$$

On suppose que $L_i(\mathbf{x}) > 0$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$. On note

$$L_\infty = L_\infty(L_i) = \max\{\|L_1\|, \|L_2\|, \|L_3\|\},$$

où $\|L_i\|$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients de L_i . On note aussi

$$r_\infty = r_\infty(\mathcal{R}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \max(|x_1|, |x_2|),$$

$$r' = r'(L_i, \mathcal{R}) = \max_{1 \leq i \leq 3} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} L_i(\mathbf{x}).$$

Pour $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3) \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3$, on note $D = D_1 D_2 D_3$ et

$$\Lambda(\mathbf{D}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 : D_i | L_i(\mathbf{x})\}, \quad \varrho(\mathbf{D}, L_i) = \#\{\Lambda(\mathbf{D}) \cap [0, D]^2\}.$$

La fonction ϱ se calcule comme

$$\varrho(\mathbf{D}) = \frac{D^2}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))},$$

elle est donc multiplicative en dimension 3 :

$$\varrho(g_1 h_1, g_2 h_2, g_3 h_3) = \varrho(g_1, g_2, g_3) \varrho(h_1, h_2, h_3),$$

pourvu que $\text{pgcd}(g_1 g_2 g_3, h_1 h_2 h_3) = 1$. Pour p un nombre premier, on définit

$$\sigma_p(L_i) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; L_i)}{p^{2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)}}. \quad (6.2.4)$$

On note $\delta(\mathbf{D})$ le plus grand entier tel que $\Lambda(\mathbf{D}) \subset \delta \mathbf{Z}^2$. Pour $\mathbf{d}, \mathbf{D} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3$ tels que $d_i | D_i$, on a besoin de l'ordre moyen de la quantité suivante

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{D}) \cap X\mathcal{R}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) \tau\left(\frac{L_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) \tau\left(\frac{L_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \quad (6.2.5)$$

Théorème 6.2.2 ([Bro11], Theorem 3). *Soient $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{4} < \theta < 1$. Supposons que $r'X^{1-\theta} \geq 1$. Alors il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[T]$ de degré 3 tel que*

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \text{vol}(\mathcal{R})X^2P(\log X) + O_\varepsilon \left(\frac{D^\varepsilon L_\infty^{2+\varepsilon} r_\infty^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} (r_\infty r'^{\frac{3}{4}} + r_\infty^2) X^{\frac{7}{4}+\varepsilon} \right),$$

où

$$\|P\| = O_\varepsilon(D^\varepsilon L_\infty^\varepsilon r_\infty^\varepsilon (1 + r'^{-1})^\varepsilon \det \Lambda(\mathbf{D})^{-1}),$$

et le coefficient du terme principal de P est $C(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, L_i)$ avec

$$\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, L_i) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}}, \quad (6.2.6)$$

et pour $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3$,

$$N_i = \max(v_p(D_i), \nu_i + v_p(d_i)), \quad (6.2.7)$$

Pour une utilisation ultérieure, nous voudrions en savoir un peu plus sur la constante $\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, L_i)$ ainsi que sur la constante $C(\mathbf{d}, \mathbf{D})$. Nous procédons comme dans [Bro11] §3. On choisit une base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ minimale pour $\Lambda(\mathbf{D})$ au sens suivant

$$\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_2\| \ll \det(\Lambda(\mathbf{D})),$$

et on définit les formes linéaires binaires M_i via le changement de variables

$$d_i^{-1} L_i(\mathbf{x}) = M_i(\mathbf{v}), \quad \mathbf{x} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2).$$

Comme $\det(\Lambda(\mathbf{D})) |D_1 D_2 D_3$, les formes M_i nouvellement construites satisfait à

$$L_\infty(M_i) = \max_{1 \leq i \leq 3} (\|M_i\|) \leq D_1 D_2 D_3 L_\infty(L_i) = D L_\infty. \quad (6.2.8)$$

Soient m_i ($1 \leq i \leq 3$) les entiers tels que M_i/m_i soient des formes primitives. Alors $m_i | \det(\Lambda(\mathbf{D}))$ puisque l'on a supposé que les formes L_i sont primitives. On note

$$M_* = \text{ppcm}(m_1, m_2, m_3) | \det(\Lambda(\mathbf{D})). \quad (6.2.9)$$

Fixons un nombre premier p et $\nu \in \mathbf{Z}^3$. Rappelons la définition de N_i (6.2.7) et considérons le réseau

$$\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 : p^{N_i} | L_i(\mathbf{x})\}.$$

On a que

$$\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i) = \frac{p^{2(N_1+N_2+N_3)}}{\det(\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu}))}.$$

Après ce changement de variables on réécrit le réseau $\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu})$ comme

$$\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu}) = \{\mathbf{x} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \in \mathbf{Z}^2 : p^{\nu_i} | M_i(\mathbf{v})\}.$$

En même temps on définit un réseau

$$\Lambda'(\mathbf{D}_{p,\nu}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{Z}^2 : p^{\nu_i} | M_i(\mathbf{v})\}.$$

Alors on obtient

$$\det(\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu})) = \det(\Lambda'(\mathbf{D}_{p,\nu})) \det(\Lambda(\mathbf{D})),$$

d'où

$$\begin{aligned} C(\mathbf{d}, \mathbf{D}) &= \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, L_i) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} (\det(\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu})))^{-1} \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} (\det(\Lambda'(\mathbf{D}_{p,\nu})) \det(\Lambda(\mathbf{D})))^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; M_i)}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}} \\ &= \frac{1}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))} \prod_p \sigma_p(M_i). \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

On écrit le produit $\prod_p \sigma_p(M_i)$ en une somme des fonctions multiplicatives en dimension 3 :

$$\prod_p \sigma_p(M_i) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3} \frac{(\mu * f)(\mathbf{k})}{k_1 k_2 k_3}, \quad (6.2.11)$$

où

$$\mu(\mathbf{d}) = \prod_{i=1}^3 \mu(d_i), \quad f(\mathbf{d}) = \frac{\varrho(\mathbf{d}, M_i)}{d_1 d_2 d_3}.$$

L'avantage de cette représentation est présenté dans le lemme suivant, qui sera utile pour la suite.

Lemme 6.2.3 ([Bro11], Lemma 2.4). *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \geq 0$ telle que $\sum_{i=1}^3 \delta_i < 1$, on a*

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3} \frac{|(\mu * f)(\mathbf{k})|}{k_1^{1-\delta_1} k_2^{1-\delta_2} k_3^{1-\delta_3}} \ll_{\varepsilon, \delta_i} L_\infty(M_i)^\varepsilon M_*^{\sum_{i=1}^3 \delta_i}.$$

En particulier, on a

$$\prod_p \sigma_p(M_i) \ll_\varepsilon L_\infty(M_i)^\varepsilon.$$

6.2.3 Démonstration des formules asymptotiques

On définit une fonction arithmétique multiplicative $h = \Psi * \mu * \mu$. Rappelons la formule (5.4.22). Un calcul donne

$$\Psi * \mu(p^k) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{p+1} & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases}.$$

Donc

$$h(p^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 2; \\ -\frac{2}{p+1} & \text{si } k = 1; \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

On obtient que

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1; \\ \prod_{p|n} -\frac{2}{p+1} & \text{si } n \neq 1 \text{ et } \mu^2(n) = 1; \\ 0 & \text{si } \mu^2(n) = 0. \end{cases}$$

En particulier

$$|h(n)| \leq \frac{2}{n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}_{\geq 1}. \quad (6.2.12)$$

Donc h est *petite* dans le sens de (2.19) dans [dB10] : il existe δ_0 petit tel que la série

$$\sum_{d \in \mathbf{N}_{\geq 1}} \frac{|h(d)|}{d^{\frac{1}{2}-\delta_0}}$$

converge. Cette propriété jouera un rôle important dans le traitement des termes d'erreur. Dans la suite on fixe nos formes L_i comme

$$L_1 = x_1, \quad L_2 = x_2, \quad L_3 = x_2 - x_1,$$

et la région

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau_1, \tau_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1, x_2 \leq 1, \tau_2 \leq x_2 x_1^{-1} \leq \tau_1\}.$$

Le but est d'obtenir la formule asymptotique pour la somme des points entiers dont les coordonnées x_1, x_2 sont premières entre elles. Cela consiste en une application directe du théorème 6.2.2 avec une inversion de Möbius comme fait dans [dB10, Corollaire 1] pour certaines formes binaires de degré 4. Malheureusement cela n'est pas fait dans [Bro11]. Nous suivons les techniques venant de [dB10] pour démontrer les formules asymptotiques (6.2.3).

On définit pour $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3$,

$$\varrho^*(\mathbf{d}) = \varrho^*(\mathbf{d}, L_i) = \#\{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{d}) \cap [0, d_1 d_2 d_3]^2 : \text{pgcd}(x_1, x_2, d_1 d_2 d_3) = 1\}.$$

Soient $\mathbf{D}, \mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3$ comme précédemment avec $\text{pgcd}(d_i, d_j) = \text{pgcd}(D_i, D_j) = 1$. La sommation dont la formule asymptotique cherchée est

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \cap \Lambda(\mathbf{D}) \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) \tau\left(\frac{L_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) \tau\left(\frac{L_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \quad (6.2.13)$$

Lemme 6.2.4.

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = C^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O_\varepsilon\left(X^2 (\log X)^2 \left(1 + \frac{D^\varepsilon}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))}\right)\right) + O_\varepsilon\left(\left(\frac{D^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} + 1\right) X^{\frac{23}{12} + \varepsilon}\right), \quad (6.2.14)$$

où $C^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \prod_p \sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D})$ avec

$$\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho^*(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3})}{p^{2(N_1 + N_2 + N_3)}} \text{ si } v_p(D) \geq 1 \\ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geq 1}} \frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{p^{2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)}}\right) \text{ si } v_p(D) = 0 \end{cases} \quad (6.2.15)$$

Démonstration. Par une inversion de Möbius, on a

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sum_{e \in \mathbf{N}_{\geq 1}} \mu(e) \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \cap \Lambda(\mathbf{D}) \\ e | \text{pgcd}(x_1, x_2)}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) \tau\left(\frac{L_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) \tau\left(\frac{L_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \quad (6.2.16)$$

On définit $y_i = x_i/e$, et on note

$$\Lambda_e(\mathbf{D}) = \Lambda(\mathbf{D}, eL_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 : D_i | eL_i(\mathbf{x})\}.$$

Comme

$$\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \cap \Lambda(\mathbf{D}) \cap e\mathbf{Z}^2 \Leftrightarrow \mathbf{y} \in (X/e)\mathcal{R} \cap \Lambda_e(\mathbf{D}),$$

La somme 6.2.13 s'écrit comme

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sum_{e \in \mathbf{N}_{\geq 1}} \mu(e) S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i) \quad (6.2.17)$$

$$= \sum_{e \leq X} \mu(e) \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda_e(\mathbf{D}) \cap (X/e)\mathcal{R}} \tau\left(\frac{eL_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) \tau\left(\frac{eL_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) \tau\left(\frac{eL_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \quad (6.2.18)$$

On divise cette somme en deux parties, une pour les e petits et l'autre pour les e grands. On applique le théorème 6.2.2 à $S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i)$ en notant que

$$L_\infty(eL_i) = e, \quad r'(eL_i) = e, \quad r_\infty = 1,$$

et on obtient en notant

$$C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) = \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i), \quad (6.2.19)$$

$$\begin{aligned} & S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i) \\ &= C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) \text{vol}(\mathcal{R}) \left(\frac{X}{e}\right)^2 \left(\log\left(\frac{X}{e}\right)\right)^3 \\ &+ O_\varepsilon\left(\frac{D^\varepsilon e^{2+\varepsilon}}{\delta(\mathbf{D})} (e^{\frac{3}{4}} + 1) \left(\frac{X}{e}\right)^{\frac{7}{4} + \varepsilon}\right) + O_\varepsilon\left(X^2 (\log X)^2 \frac{\log e}{e^2} \frac{D^\varepsilon e^\varepsilon}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))}\right) \\ &= C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) \text{vol}(\mathcal{R}) \left(\frac{X}{e}\right)^2 \left(\log\left(\frac{X}{e}\right)\right)^3 \\ &+ O_\varepsilon\left(\frac{D^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} e X^{\frac{7}{4} + \varepsilon}\right) + O_\varepsilon\left(X^2 (\log X)^2 \frac{\log e}{e^{2-\varepsilon}} \frac{D^\varepsilon}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))}\right). \end{aligned}$$

En outre, on a une majoration ([Bro11], (2.5))

$$S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i) \ll e^\varepsilon \left(\frac{X}{e}\right)^{2+\varepsilon} = \frac{X^{2+\varepsilon}}{e^2}. \quad (6.2.20)$$

Donc on peut majorer le terme d'erreur comme

$$\begin{aligned} \sum_{e \leq X^{\frac{1}{12}}} \frac{D^\varepsilon}{\delta(\Lambda(\mathbf{D}))} eX^{\frac{7}{4}+\varepsilon} &\ll \frac{D^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} X^{\frac{23}{12}+\varepsilon}, \\ \sum_{X^{\frac{1}{12}} \leq e \leq X} \frac{X^{2+\varepsilon}}{e^2} &\ll \frac{X^{2+\varepsilon}}{X^{\frac{1}{12}}} = X^{\frac{23}{12}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

En reportant dans (6.2.16), on obtient

$$\begin{aligned} S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) &= \sum_{e \leq X^{\frac{1}{12}}} + \sum_{X^{\frac{1}{12}} \leq e \leq X} \mu(e) S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i) \\ &= \sum_{e=1}^{\infty} \frac{\mu(e)}{e^2} C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) \operatorname{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O_\varepsilon \left(X^2 (\log X)^2 \left(1 + \frac{D^\varepsilon}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))} \right) \right) + O_\varepsilon \left(\left(\frac{D^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} + 1 \right) X^{\frac{23}{12}+\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On note pour $k \in \mathbf{N}_{\geq 1}, \nu \in \mathbf{Z}^3$,

$$\bar{\varrho}_k(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}, L_i) = \frac{\#\{\mathbf{x} \in [0, p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}[^2 : p^{\nu_i} | p^{v_p(k)} L_i(\mathbf{x})\}}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}}.$$

on calcule maintenant la constante, avec les notations (6.2.6) et (6.2.19),

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{\infty} \frac{\mu(e)}{e^2} C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) &= \sum_{e \in \mathbf{N}_{\geq 1}} \mu(e) \left(\frac{1}{e^2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}_\nu(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i) \right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \sum_{k \in \{0,1\}} (-1)^k \frac{\bar{\varrho}_{p^k}(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2k}} \\ &= \prod_p \sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}). \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

Vérifions que les facteurs locaux $\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D})$ sont donnés par (6.2.15). Si $v_p(D) \geq 1$, on définit le réseau

$$\Lambda' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 : p^{N_i} | pL_i(\mathbf{x}), 1 \leq i \leq 3\}.$$

Alors on a

$$\#\{\Lambda' \cap [0, p^{N_1+N_2+N_3}[^2\} = \frac{p^{2(N_1+N_2+N_3)}}{\det(\Lambda')} = p^2 \#\{\Lambda' \cap [0, p^{N_1+N_2+N_3-1}[^2\}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) &= \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \left(\frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} - \frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, pL_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3+1)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \left(\frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} - \frac{\#\{\Lambda' \cap [0, p^{N_1+N_2+N_3}[^2\}}{p^{2(N_1+N_2+N_3+1)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \left(\frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} - \frac{\#\{\Lambda' \cap [0, p^{N_1+N_2+N_3-1}[^2\}}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \left(\frac{\#\{\mathbf{x} \in [0, p^{N_1+N_2+N_3}[^2 : p^{N_i} | L_i(\mathbf{x})\}}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} - \frac{\#\{\mathbf{y} \in [0, p^{N_1+N_2+N_3}[^2 : p | y_i, p^{N_i} | L_i(\mathbf{y})\}}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho^*(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3})}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}}. \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

Si $v_p(D) = 0$, on a dans ce cas pour $\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3$, $N_i = \nu_i$ et donc en remarquant que

$$\sum_{k \in \{0,1\}} (-1)^k \frac{\bar{\varrho}_p^k(1, 1, 1; L_i)}{p^{2k}} = 1 - \frac{1}{p^2},$$

on obtient

$$\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^3 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geq 1}} \frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{p^{2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)}}\right). \quad (6.2.23)$$

□

Maintenant on est prêt à déduire la formule asymptotique pour la fonction Ψ .

Démonstration de la Proposition 6.2.2. On voit que, d'après $h = \Psi * \mu * \mu$ et $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$,

$$\Psi = \Psi * \mu * \mu * \mathbf{1} * \mathbf{1} = h * \mathbf{1} * \mathbf{1} = h * \tau.$$

On fixe les trois formes linéaires

$$L_1(\mathbf{x}) = x_1, \quad L_2(\mathbf{x}) = x_2, \quad L_3(\mathbf{x}) = x_2 - x_1, \quad (6.2.24)$$

et la région

$$\mathcal{R} = \left\{ (x_1, x_2) \in]0, 1]^2 : \tau_2 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq \tau_1 \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}^3} \prod_{i=1}^3 h(d_i) \tau\left(\frac{x_1}{d_1}\right) \tau\left(\frac{x_2}{d_2}\right) \tau\left(\frac{x_2 - x_1}{d_3}\right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j) = 1}} \left(\prod_{i=1}^3 h(d_i) \right) \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \cap \Lambda(\mathbf{d}) \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \tau\left(\frac{x_1}{d_1}\right) \tau\left(\frac{x_2}{d_2}\right) \tau\left(\frac{x_2 - x_1}{d_3}\right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j) = 1}} \left(\prod_{i=1}^3 h(d_i) \right) S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d}), \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

la quantité $S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d})$ étant nulle s'il existe d_i tel que $d_i > X$. D'après (6.2.14), on a, en notant $C^*(\mathbf{d}) = C^*(\mathbf{d}, \mathbf{d})$,

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d}) = C^*(\mathbf{d}) \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O_\varepsilon((d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-1} X^2 (\log X)^2) + O_\varepsilon((d_1 d_2 d_3)^\varepsilon B^{\frac{23}{12} + \varepsilon}).$$

Le terme principal de la sommation est

$$C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3,$$

où d'après (6.2.21),

$$C_1 = \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j) = 1}} \left(\prod_{i=1}^3 h(d_i) \right) C^*(\mathbf{d}) = \prod_p C_{1,p}. \quad (6.2.26)$$

Grâce à notre choix des formes linéaires (6.2.24), fixons un nombre premier p , on a que pour $\#\{i : \nu_i \geq 1\} \geq 2$,

$$\begin{aligned} & \varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \\ &= \#\{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 : p^{\nu_1} | x_1, p^{\nu_2} | x_2, p^{\nu_3} | x_2 - x_1, p \nmid \text{pgcd}(x_1, x_2)\} \cap [0, p^{\sum_{i=1}^3 \nu_i} [^2] = 0. \end{aligned}$$

On calcule pour $\nu \geq 1$,

$$\begin{aligned} \varrho^*(p^\nu, 1, 1) &= \#\{(\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 : p^\nu | x_1, p \nmid \text{pgcd}(x_1, x_2)) \cap [0, p^\nu]^2\} \\ &= \#\{(\mathbf{x} = (0, x_2) : p \nmid x_2\} \cap [0, p^\nu[\\ &= \varphi(p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1}. \end{aligned}$$

De façon analogue on a

$$\varrho^*(1, p^\nu, 1) = \varrho^*(1, 1, p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1}.$$

On en déduit les valeurs de σ_p^* (6.2.15) comme suit.

$$\begin{aligned} \sigma_p^*(1, 1, 1) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + \sum_{\nu \in \mathbf{N}_{\geq 1}} \left(\frac{\varrho^*(p^\nu, 1, 1) + \varrho^*(1, p^\nu, 1) + \varrho^*(1, 1, p^\nu)}{p^{2\nu}}\right)\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + 3 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \in \mathbf{N}_{\geq 1}} \frac{1}{p^\nu}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^*(p, 1, 1) &= \sigma_p^*(1, p, 1) = \sigma_p^*(1, 1, p) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbf{N}_{\geq 1}} \frac{\varrho^*(p^\nu, 1, 1) + \varrho^*(1, p^\nu, 1) + \varrho^*(1, 1, p^\nu)}{p^{2\nu}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \times \frac{3}{p}. \end{aligned}$$

Donc le facteur local (6.2.26) se calcule, en rappelant que $h(p) = -\frac{2}{p+2}$,

$$\begin{aligned} C_{1,p} &= \sum_{\substack{\nu \in \mathbf{N}^3 \\ \#\{i: \nu_i \geq 1\} \leq 1}} \left(\prod_{i=1}^3 h(p^{\nu_i})\right) \sigma_p^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \\ &= h(1)\sigma_p^*(1, 1, 1) + h(p) (\sigma_p^*(p, 1, 1) + \sigma_p^*(1, p, 1) + \sigma_p^*(1, 1, p)) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{18}{p(p+2)}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$C_1 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{18}{p(p+2)}\right). \quad (6.2.27)$$

Or on a aussi une majoration pour $S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d})$ ([Bro11], (3.1)) :

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{d}) \ll \frac{X^{2+\varepsilon}}{d_1 d_2 d_3} + X^{1+\varepsilon},$$

qui découle des majorations standards pour le nombre de diviseurs et pour le dénombrement des points sur un réseau. Soit $\delta > 0$ tel que $\delta > \varepsilon$ et $\varepsilon(1+3\delta) < \frac{1}{12}$. Comme précédemment on décompose la somme en deux parties

$$\max_{1 \leq i \leq 3} (d_i) \leq X^\delta \text{ et } \exists i, d_i > X^\delta$$

selon la taille de \mathbf{d} . Cela nous permet de contrôler les termes d'erreur, compte-tenu de (6.2.12),

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3} \prod_{i=1}^3 |h(d_i)| (d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-1} X^2 (\log X)^2 \\ &\ll \sum_{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3} (d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-2} X^2 (\log X)^2 \ll X^2 (\log X)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \max(d_i) \leq X^\delta}} \prod_{i=1}^3 |h(d_i)| (d_1 d_2 d_3)^\varepsilon X^{\frac{23}{12} + \varepsilon} \\
& \ll \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \max(d_i) \leq X^\delta}} (d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-1} X^{\frac{23}{12} + \varepsilon} \\
& \ll X^{\frac{23}{12} + \varepsilon(1+3\delta)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \max(d_i) \leq X \\ \exists i: d_i > X^\delta}} \prod_{i=1}^3 |h(d_i)| \left(\frac{X^{\varepsilon+2}}{d_1 d_2 d_3} + X^{1+\varepsilon} \right) \\
& \ll \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \exists d_i > X^\delta}} \frac{X^{\varepsilon+2}}{(d_1 d_2 d_3)^2} + \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \max(d_i) \leq X}} \frac{X^{1+\varepsilon}}{d_1 d_2 d_3} \\
& \ll X^{2+\varepsilon-\delta} + X^{1+\varepsilon} (\log X)^3.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 6.2.3 et la majoration (6.2.8), on a

$$C^*(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \leq C(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = \frac{1}{\det(\Lambda(\mathbf{d}))} \prod_p \sigma_p(M_{i, \mathbf{d}}) \ll_\varepsilon (d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j) = 1 \\ \max(d_i) \leq X^\delta}} \prod_{i=1}^3 h(d_i) C^*(\mathbf{d}) = C_1 + O \left(\sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \exists i: d_i > X^\delta}} \prod_{i=1}^3 |h(d_i)| C(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \right) \\
& = C_1 + O \left(\sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \exists i: d_i > X^\delta}} \frac{1}{(d_1 d_2 d_3)^{2-\varepsilon}} \right) \\
& = C_1 + O(X^{\delta(\varepsilon-1)}).
\end{aligned}$$

On en conclut que (6.2.25) peut se calculer comme

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \Psi(x_1) \Psi(x_2) \Psi(x_2 - x_1) \\
& = \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j) = 1 \\ \max(d_i) \leq X^\delta}} + \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbf{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j) = 1 \\ \exists i, d_i > X^\delta}} \left(\prod_{i=1}^3 h(d_i) \right) S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d}) \tag{6.2.28} \\
& = C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O(X^2 (\log X)^2 + X^{\frac{23}{12} + \varepsilon(1+3\delta)}) + O(X^{2-\delta(1-\varepsilon)} (\log B)^3 + X^{2-(\delta-\varepsilon)}) \\
& = C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O(X^2 (\log X)^2).
\end{aligned}$$

Cela démontre la formule 6.2.2 de la Proposition 6.2.1 en remarquant que

$$\text{vol}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right).$$

□

Démonstration de la formule 6.2.3. Tout d'abord on traite la somme

$$T(\mathcal{R}) = T(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.2.29)$$

Comme

$$\frac{1}{x_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} \int_{x_2}^X \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{X^{\frac{3}{2}}},$$

on obtient, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} T(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1) \left(\frac{3}{2} \int_{x_2}^X \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{X^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \int_1^X \frac{3}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1) \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} + X^{-\frac{3}{2}} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1) \\ &= \frac{3C_1}{2} \text{vol}(\mathcal{R}) \int_1^X \frac{(\log t)^3}{t^{\frac{1}{2}}} dt + O\left(\int_1^X \frac{(\log t)^2}{t^{\frac{1}{2}}} dt\right) + C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2). \end{aligned}$$

Comme

$$\int_1^X \frac{(\log t)^3}{t^{\frac{1}{2}}} dt = 2X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2), \quad \int_1^X \frac{(\log t)^2}{t^{\frac{1}{2}}} dt = O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2),$$

l'égalité ci-dessus s'écrit

$$T(\tau_1, \tau_2) = 4C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2). \quad (6.2.30)$$

Finalement on arrive à sommer

$$\frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2 x_1^{\frac{1}{2}}}.$$

On définit $f(t) = \sqrt{t}$ et on rappelle que

$$\mathcal{R}(t, \tau_1) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1, x_2 \leq 1, t \leq \frac{x_2}{x_1} \leq \tau_1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2 x_1^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} \left(f(\tau_2) + \int_{\tau_2}^{\frac{x_2}{x_1}} f'(t) dt \right) \\ &= f(\tau_2) T(\tau_1, \tau_2) + \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} \int_{\tau_2}^{\frac{x_2}{x_1}} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Il résulte de (6.2.30) que

$$f(\tau_2) T(\tau_1, \tau_2) = 2C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{\sqrt{\tau_2}}{\tau_1} \right) X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2).$$

Il faut traiter le deuxième terme. D'après le théorème de Fubini et (6.2.30) en remplaçant τ_2 par t ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2-x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} \int_{\tau_2}^{\frac{x_2}{x_1}} f'(t) dt \\
&= \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R}(t, \tau_1) \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2-x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} f'(t) dt \\
&= 4C_1 X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau_1} \right) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2) \\
&= 2C_1 X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 \left(\frac{\sqrt{\tau_2}}{\tau_1} + \frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{2}{\sqrt{\tau_1}} \right) + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2).
\end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$\sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2-x_1)}{x_2\sqrt{x_1}} = 4C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \right) X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2). \quad (6.2.31)$$

□

Bibliographie

- [Bat91] Victor V. Batyrev. On the classification of smooth projective toric varieties. *Tohoku Math. J. (2)*, 43(4) :569–585, 1991.
- [BC94] Victor V. Batyrev and David A. Cox. On the Hodge structure of projective hypersurfaces in toric varieties. *Duke Math. J.*, 75(2) :293–338, 1994.
- [BM86] V.V. Batyrev and D.A. Mel’nikov. A theorem on non-extensibility of toric varieties. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 41(3) :23–27, 1986.
- [BM90] V.V. Batyrev and Yu.I. Manin. Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. *Math. Ann.*, 286(1-3) :27–43, 1990.
- [Bro06] Amaël Broustet. Constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo. *Enseign. Math. (2)*, 52(3-4) :231–238, 2006.
- [Bro09] Timothy D. Browning. *Quantitative arithmetic of projective varieties*. Basel : Birkhäuser, 2009.
- [Bro11] Tim Browning. The divisor problem for binary cubic forms. *J. Théor. Nombres Bordx.*, 23(3) :579–602, 2011.
- [BT95] Victor V. Batyrev and Yuri Tschinkel. Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori. *Int. Math. Res. Not.*, 1995(12) :591–635, 1995.
- [BT98] Victor V. Batyrev and Yuri Tschinkel. Manin’s conjecture for toric varieties. *J. Algebr. Geom.*, 7(1) :15–53, 1998.
- [Bug04] Yann Bugeaud. *Approximation by algebraic numbers*, volume 160. Cambridge University Press, 2004.
- [Cas97] J.W.S. Cassels. *An introduction to the geometry of numbers*. Berlin : Springer, 1997.
- [CFH14] Yifei Chen, Baohua Fu, and Jun-Muk Hwang. Minimal rational curves on complete toric manifolds and applications. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 57(1) :111–123, 2014.
- [Chu83] G.V. Chudnovsky. On the method of Thue-Siegel. *Ann. Math. (2)*, 117 :325–382, 1983.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*, volume 124 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [Cox95a] David A. Cox. The functor of a smooth toric variety. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(2) :251–262, 1995.
- [Cox95b] David A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebr. Geom.*, 4(1) :17–50, 1995.
- [CS87] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. La descente sur les variétés rationnelles. II. *Duke Math. J.*, 54 :375–492, 1987.
- [dB10] R. de la Bretèche and T.D. Browning. Le problème des diviseurs pour des formes binaires de degré 4. *J. Reine Angew. Math.*, 646 :1–44, 2010.
- [dB11] R. de la Bretèche and T.D. Browning. Manin’s conjecture for quartic del Pezzo surfaces with a conic fibration. *Duke Math. J.*, 160(1) :1–69, 2011.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to toric varieties*. Annals of Mathematics Studies 131. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [Hea84] D.R. Heath-Brown. Diophantine approximation with square-free numbers. *Math. Z.*, 187 :335–344, 1984.
- [Ito14] Atsushi Ito. Seshadri constants via toric degenerations. *J. Reine Angew. Math.*, 695 :151–174, 2014.
- [Jac94] Krzysztof Jaczewski. Generalized Euler sequence and toric varieties. In *Classification of algebraic varieties. Algebraic geometry conference on classification of algebraic varieties, May 22-30, 1992, University of L’Aquila, L’Aquila, Italy*, pages 227–247. Providence, RI : American Mathematical Society, 1994.

- [Khi64] A.Ya. Khinchin. Continued fractions. Chicago and London : The University of Chicago Press. xi, 95 pp., 1964.
- [Kle88] Peter Kleinschmidt. A classification of toric varieties with few generators. *Aequationes Math.*, 35(2-3) :254–266, 1988.
- [KN74] Lauwerens Kuipers and Harald Niederreiter. Uniform distribution of sequences. Pure and Applied Mathematics. New York. John Wiley & Sons, xiv, 390 p., 1974.
- [Kol96] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Lan65] Serge Lang. Asymptotic approximations to quadratic irrationalities. I, II. *Am. J. Math.*, 87 :481–487, 488–496, 1965.
- [Lej56] P.-G. Lejeune-Dirichlet. Sur une propriété des formes quadratiques à déterminant positif. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Paris. 1.*, , pages 76–79, 1856.
- [LM09] Robert Lazarsfeld and Mircea Mustața. Convex bodies associated to linear series. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(5) :783–835, 2009.
- [LS16] Brian Lehmann and ShoTanimoto. On the geometry of thin exceptional sets in Manin’s Conjecture. *À paraître dans Duke Math. J. arXiv :1607.03499*, 2016.
- [LTT15] Brian Lehmann, Sho Tanimoto, and Yuri Tschinkel. Balanced line bundles on Fano varieties. *À paraître dans Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2015.
- [McK07] David McKinnon. A conjecture on rational approximations to rational points. *J. Algebr. Geom.*, 16(2) :257–303, 2007.
- [Mig16] Teddy Mignot. Points de hauteur bornée sur les hypersurfaces lisses des variétés toriques. *Acta Arith.*, 172(1) :1–97, 2016.
- [MR15] David McKinnon and Mike Roth. Seshadri constants, Diophantine approximation, and Roth’s theorem for arbitrary varieties. *Invent. Math.*, 200(2) :513–583, 2015.
- [MR16] David McKinnon and Mike Roth. An analogue of Liouville’s Theorem and an application to cubic surfaces. *European Journal of Mathematics.*, 2(4) :929–959, 2016.
- [Pag08] Sébastien Pagelot. *Étude de la distribution asymptotique fine des points rationnels de hauteur bornée*. Manuscrit non-publié. Université de Grenoble I, 2008.
- [Pey95] Emmanuel Peyre. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.*, 79(1) :101–218, 1995.
- [Pey98] Emmanuel Peyre. Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels. In *Nombre et répartition de points de hauteur bornée*, pages 259–298. Paris : Société Mathématique de France, 1998.
- [Pey03] Emmanuel Peyre. Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 15(1) :319–349, 2003.
- [Pey14] Emmanuel Peyre. Liberté et accumulation. *arXiv :1602.03806*, 2014.
- [Sal98] Per Salberger. Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. In *Nombre et répartition de points de hauteur bornée*, pages 91–258. Paris : Société Mathématique de France, 1998.
- [Sam03] Pierre Samuel. *Théorie algébrique des nombres. (Deuxième et troisième cycles)*. Paris : Hermann, 2003.
- [Ser97] Jean-Pierre Serre. *Lectures on the Mordell-Weil theorem. Transl. and ed. by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt*. Wiesbaden : Vieweg, 3rd edition, 1997.
- [Ten95] Gérald Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Paris : Société Mathématique de France, 2ème éd. édition, 1995.
- [Voj87] Paul Vojta. Diophantine approximations and value distribution theory. Lecture Notes in Mathematics, 1239. Berlin etc. : Springer-Verlag. x, 132 p., 1987.