



**HAL**  
open science

# Modélisation des mécanismes d'hystérésis des composites tissés à l'aide d'un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable a dérivées fractionnaires

Alina Krasnobrizha

## ► To cite this version:

Alina Krasnobrizha. Modélisation des mécanismes d'hystérésis des composites tissés à l'aide d'un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable a dérivées fractionnaires . Matériaux composites et construction. Ecole Centrale Nantes, Université Bretagne Loire; Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique – UMR CNRS 6183, 2015. Français. NNT : . tel-01684162

**HAL Id: tel-01684162**

**<https://theses.hal.science/tel-01684162>**

Submitted on 15 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





**Alina KRASNOBRIZHA**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Ecole Centrale de Nantes  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : SPIGA

Discipline : Mécanique des solides, des matériaux, des structures, et des surfaces

Unité de recherche : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) – UMR CNRS 6183

Soutenue le 3 Décembre 2015

**MODELISATION DES MECANISMES  
D'HYSTERESIS DES COMPOSITES TISSES A  
L'AIDE D'UN MODELE COLLABORATIF  
ELASTO-PLASTIQUE ENDOMMAGEABLE A  
DERIVEES FRACTIONNAIRES**

**JURY**

Président : **Pierre LADEVEZE**, Professeur des Universités, LMT, ENS Cachan

Rapporteurs : **Fodil MERAGHNI**, Professeur des Universités, LEM3, ENSAM Campus de Metz  
**Marco GIGLIOTTI**, Professeur des Universités, PPRIME, ISAE-ENSMA Poitiers

Examineurs : **Philippe OLIVIER**, Professeur des Universités, ICA, Université de Toulouse  
**Pierre LADEVEZE**, Professeur des Universités, LMT, ENS Cachan

Directeur de Thèse : **Laurent GORNET**, Maître de conférences HDR, GeM, Ecole Centrale de Nantes

Co-directeur de Thèse (13) : **Patrick ROZYCKI**, Maître de conférences HDR, GeM, Ecole Centrale de Nantes  
**Pascal COSSON**, Maître de conférences, GeM, Ecole Centrale de Nantes



## **REMERCIEMENTS**

---

*Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés à l'Ecole Centrale de Nantes au sein du GeM, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, dans l'équipe « Structure et Simulation ». La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.*

*Je veux tout d'abord remercier Monsieur Fodil MERAGHNI, Professeur de l'Université de Lorraine, et Monsieur Marco GIGLIOTTI, Professeur de l'Université de Poitiers pour m'avoir fait l'honneur de bien vouloir rapporter ce mémoire.*

*Je suis ensuite très reconnaissante à Monsieur Philippe OLIVIER, de l'Institut Clément Ader et Monsieur Pierre LADEVEZE, de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan d'avoir accepté de participer à mon jury.*

*Il me faut également remercier chaleureusement mes encadrants qui m'ont aidé tout au long de la thèse.*

*Je tiens à exprimer ma plus vive reconnaissance à Laurent GORNET qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Ses conseils judicieux sont autant de briques qui resteront dans mon esprit comme les fondations de ce travail.*

*Je remercie également Patrick ROZYCKI dont l'engagement m'a fait plonger dans le monde passionnant des matériaux composites. Je le remercie pour les différents challenges qu'il m'a poussés à relever, afin de pouvoir réaliser cette thèse. Il s'est avéré être un guide et un conseiller précieux tant sur le plan humain que sur le plan professionnel.*

*Je souhaite aussi exprimer toute ma gratitude à Pascal COSSON, qui a fait pour moi la lumière sur la théorie du calcul fractionnaire. Sa patience, sa gentillesse et son soutien dans les moments les plus difficiles m'ont été très précieux.*

*Je vous remercie tous pour votre aide primordiale dans l'avancée de ces travaux et pour votre confiance qui m'ont permis d'arriver là où je suis aujourd'hui.*

*Je tiens à remercier Modesto MATEOS pour ses conseils et nos discussions constructives.*

*Je voudrais également remercier tous les thésards avec qui j'ai passé ces dernières années. Ayant mon bureau au sein du GeM, je remercie Prashant, Romain, Benoit, Quentin et particulièrement Cyril pour leur aide, les discussions passionnantes, l'ambiance conviviale et surtout leur amitié ! Je vous adresse un grand merci pour votre support moral et votre aide dans la rédaction de ce manuscrit en français. Merci aussi à Dasha et Dasha, mes charmantes compatriotes, pour leur bonne humeur communicative et leur soutien particulièrement proche.*

*Et enfin je remercie mes proches et ma famille, particulièrement ma mère et mon frère Pavel qui m'ont toujours aidé et soutenu malgré la distance. Un grand merci doit être adressé à François qui a cru en moi parfois plus que moi-même. Leur patience infinie et leur confiance ont toujours résonné dans ma tête et dans mon cœur pour me donner le courage de finir ce travail.*



## SOMMAIRE

---

<b>Principales notations</b>	<b>11</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
Motivation et contexte	15
Objectifs	16
Organisation du mémoire	16
<b>Chapitre 1 : Théorie mathématique du calcul fractionnaire</b>	<b>19</b>
<b>1.1 Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1.2 Fonction Gamma : Intégrale d'Euler de 2<sup>ième</sup> espèce</b>	<b>21</b>
<b>1.3 Fonction Beta : Intégrale d'Euler de 1<sup>ère</sup> espèce</b>	<b>22</b>
<b>1.4 Coefficient binomial</b>	<b>22</b>
<b>1.5 Fonction Mittag-Leffler</b>	<b>23</b>
<b>1.6 Eléments d'analyse fonctionnelle</b>	<b>24</b>
1.6.1 Espace des fonctions sommables $L_p([a, b])$	24
1.6.2 Espace des fonctions absolument continues $AC([a, b])$	24
<b>1.7 Intégration et dérivation d'ordre non entier et propriétés élémentaires</b>	<b>25</b>
1.7.1 Intégrale et dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	25
1.7.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	27
1.7.3 Dérivée fractionnaire au sens de Marchaud	28
1.7.4 Intégrale et dérivée fractionnaires au sens de Weyl	29
1.7.5 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov	30
1.7.6 Exemples d'illustration à propos des dérivées fractionnaires	31
1.7.7 Résumé des définitions des dérivées fractionnaires	32
<b>1.8 Propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires</b>	<b>33</b>
1.8.1 Linéarité	33
1.8.2 Règle de la composition des ordres d'intégration	33
1.8.3 Opération inverse	34
<b>1.9 Transformations intégrales</b>	<b>34</b>
1.9.1 Transformation de Fourier	34
1.9.2 Transformation de Fourier de l'intégrale de Riemann-Liouville	35
1.9.3 Transformation de Fourier de la dérivée de Riemann-Liouville	35
1.9.4 Transformation de Laplace	35
1.9.5 Transformation de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville	36
1.9.6 Transformation de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville	36
<b>1.10 Equations différentielles fractionnaires</b>	<b>36</b>
1.10.1 Transformation en une équation intégrale	36
1.10.2 Méthode de transformation de Laplace	39
<b>1.11 Implémentation numérique</b>	<b>40</b>
1.11.1 Approximation de l'intégrale et de la dérivée de Grunwald-Letnikov	40
1.11.2 Approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville – algorithme R1	40
1.11.3 Approximation de la dérivée de Riemann-Liouville – algorithme L1	41
1.11.4 Approximation de l'intégrale et de la dérivée de Riemann-Liouville	42
<b>1.12 Exemple avec les dérivées fractionnaires</b>	<b>43</b>

**Modélisation des mécanismes d'hystérésis des composites tissés  
à l'aide d'un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaires**

1.12.1	Estimation d'une erreur du calcul au premier point	47
<b>1.13</b>	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>
<b>Chapitre 2 : Etude générale du comportement viscoélastique</b>		<b>51</b>
<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>51</b>
<b>2.2</b>	<b>Comportement mécanique</b>	<b>52</b>
2.2.1	Comportement des polymères	52
2.2.2	Comportement des composites	54
<b>2.3</b>	<b>Méthode phénoménologique globale</b>	<b>54</b>
<b>2.4</b>	<b>Etat de l'art des modèles viscoélastiques à base de calculs fractionnaires</b>	<b>55</b>
2.4.1	Introduction	55
2.4.2	Les processus de relaxation et de fluage	56
2.4.3	Modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt	58
2.4.4	Modèle fractionnaire de Maxwell	59
2.4.5	Modèle fractionnaire de Zener	60
2.4.6	Modèle héréditaire de Rabotnov	63
<b>2.5</b>	<b>Modèle fréquentiel de Bagley–Torvik</b>	<b>65</b>
<b>2.6</b>	<b>Modèle moléculaire de Rouse : liaison entre les micro et méso-mécaniques</b>	<b>66</b>
<b>2.7</b>	<b>Modélisation des boucles d'hystérésis et applications à la fatigue</b>	<b>68</b>
2.7.1	Modèle de Drozdov	68
2.7.2	Modèle fractionnaire de Caputo	72
2.7.3	Modélisation de la boucle d'hystérésis pour le matériau composite	74
2.7.4	Méthode d'auto-échauffement	77
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>
<b>Chapitre 3 : Modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaires</b>		<b>81</b>
<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>81</b>
<b>3.2</b>	<b>Modèle élasto-plastique endommageable avec prise en compte des vitesses de déformation</b>	<b>82</b>
3.2.1	Introduction	82
3.2.2	Aspect thermodynamique	83
3.2.3	Modélisation d'endommagement	86
3.2.4	Couplage plasticité-endommagement	88
3.2.5	Prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation	89
<b>3.3</b>	<b>Implémentation numérique du modèle élasto-plastique endommageable</b>	<b>91</b>
<b>3.4</b>	<b>Loi de comportement à base de dérivées fractionnaires</b>	<b>94</b>
3.4.1	Introduction	94
3.4.2	Relation constitutive fractionnaire	94
3.4.3	Explication des paramètres du modèle fractionnaire	96
<b>3.5</b>	<b>Couplage des deux modèles</b>	<b>98</b>
<b>3.6</b>	<b>Méthodologie de calcul numérique d'une boucle d'hystérésis</b>	<b>99</b>
<b>3.7</b>	<b>Implémentation numérique du couplage des modèles</b>	<b>100</b>
<b>3.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>102</b>
<b>Chapitre 4 : Identification et validation du modèle collaboratif pour matériau composite tissé</b>		<b>105</b>
<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>105</b>
<b>4.2</b>	<b>Description du matériau composite à matrice thermodurcissable</b>	<b>106</b>
<b>4.3</b>	<b>Description du matériau composite à matrice thermoplastique</b>	<b>106</b>
<b>4.4</b>	<b>Procédure expérimentale et post-traitement</b>	<b>107</b>
<b>4.5</b>	<b>Essais de traction sur des stratifiés orientés à 0°</b>	<b>107</b>
4.5.1	Traction longitudinale pour le composite à matrice thermodurcissable	108
4.5.2	Traction longitudinale pour le composite à matrice thermoplastique	109

**Modélisation des mécanismes d'hystérésis des composites tissés  
à l'aide d'un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaires**

---

4.5.3	Résumé de la campagne expérimentale de traction longitudinale (transversale)	110
<b>4.6</b>	<b>Essais de traction sur des stratifiés orientés à <math>\pm 45^\circ</math></b>	<b>111</b>
4.6.1	Tractions cycliques en cisaillement pour le composite à matrice thermodurcissable avec différentes vitesses de déformation	111
4.6.2	Tractions cycliques en cisaillement pour le composite à matrice thermoplastique	113
4.6.3	Résumé de la campagne expérimentale en cisaillement	114
<b>4.7</b>	<b>Méthode d'identification des paramètres du modèle elasto-plastique endommageable</b>	<b>115</b>
<b>4.8</b>	<b>Identification des évolutions de l'endommagement dans la direction des fibres</b>	<b>115</b>
4.8.1	Identification pour le composite à matrice thermodurcissable	115
4.8.2	Identification pour le composite à matrice thermoplastique	116
4.8.3	Résumé de l'évolution de l'endommagement dans le sens des fibres	117
<b>4.9</b>	<b>Identification des évolutions de l'endommagement en cisaillement</b>	<b>117</b>
4.9.1	Identification pour le composite à matrice thermodurcissable	117
4.9.2	Identification pour le composite à matrice thermoplastique	119
4.9.3	Résumé de l'évolution de l'endommagement et de la plasticité en cisaillement	121
<b>4.10</b>	<b>Validation numérique du modèle élasto-plastique endommageable</b>	<b>121</b>
<b>4.11</b>	<b>Méthode d'identification des paramètres du modèle fractionnaire</b>	<b>123</b>
4.11.1	Description de la méthode d'identification des paramètres	123
4.11.2	Identification des paramètres pour le composite à matrice thermodurcissable	124
4.11.3	Identification des paramètres pour le composite à matrice thermoplastique	126
<b>4.12</b>	<b>Validation numérique du modèle fractionnaire</b>	<b>127</b>
<b>4.13</b>	<b>Validation numérique du modèle en charge dynamique</b>	<b>131</b>
4.13.1	Identification des paramètres du modèle dynamique	131
4.13.2	Modèle élasto-plastique endommageable en dynamique	132
4.13.3	Modélisation des boucles d'hystérésis en chargement dynamique	133
<b>4.14</b>	<b>Conclusion</b>	<b>134</b>
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>137</b>
<b>Table des illustrations</b>		<b>149</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>153</b>



## PRINCIPALES NOTATIONS

---

$(O, \vec{x}, \vec{y})$	Repère global
$(O, \vec{1}, \vec{2})$	Repère d'orthotropie d'un pli élémentaire
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$AC$	Ensemble des fonctions absolument continues
$L_p$	Ensemble des fonctions sommables
$\beta(z, w)$	Fonction Beta
$\Gamma(z)$	Fonction Gamma
$E_{\alpha,1}(z)$	Fonction de Mittag-Leffler
$E_{\alpha,\beta}(z)$	Fonction de Mittag-Leffler généralisée
$\mathfrak{E}_\alpha(\beta, z)$	Fonctions exponentielles fractionnaires de Rabotnov
$\mathcal{H}(z)$	Fonction d'Heaviside
$\delta(z)$	Fonction de Dirac
$(f)_n$	Fonction de Pochhammer
$[g * f]$	Produit de convolution
$A$	Paramètre associé au modèle fractionnaire
$A_{j+1}^\alpha$	Coefficient de Grunwald
$\alpha$	Ordre de dérivation ou d'intégration fractionnaire
$B$	Paramètre associé au modèle fractionnaire
$b_A, b_B, b_\alpha$	Coefficients associés à l'évolution des paramètres fractionnaires $A, B$ et $\alpha$
$\beta$	Coefficient d'écrouissage
$\mathbf{C}$	Tenseur d'ordre quatre des rigidités
$D^{\alpha}_{analyt}$	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ calculée analytiquement
$D^{\alpha}_{approx}$	Approximation de la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$
$(D_a^\alpha)_C$	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure $a$ au sens de Caputo
$(D_a^\alpha)_{GL}$	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure $a$ au sens de Grunwald-Letnikov
$(D_+^\alpha)_L(x)$	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ non bornée à gauche au sens de Liouville
$(D_0^\alpha)_M(x)$	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure 0 au sens de Marchaud
$(D_a^\alpha)_{RL}$	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure $a$ au sens de Riemann-Liouville
$(D_a^\alpha)_W$	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure $a$ au sens de Weyl
$(D_0^\alpha)_{L1}$	Approximation de la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure 0 par l'algorithme $L1$
$(D_0^\alpha)_{M1}$	Approximation de la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure 0 par l'algorithme $M1$
$(D_0^\alpha)_{M2}$	Approximation de la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure 0 par l'algorithme $M2$

<i>deriv</i>	Valeur estimée de la dérivée fractionnaire
<i>d</i>	Variable scalaire d'endommagement
$\delta$	Erreur numérique moyenne
$\delta_i^{relative}$	Erreur numérique relative en un point
<i>E</i>	Module d'Young
$\varepsilon$	Variable de déformation unidimensionnelle
$\boldsymbol{\varepsilon}^t$	Tenseur des déformations totales
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tenseur des déformations élastiques réversibles
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tenseur des déformations permanentes
$\varepsilon^{ir}$	Variable de déformations irréversibles
$\varepsilon^{boucle}$	Variable de déformation dans la boucle
$\varepsilon^{ve}$	Variable de déformations viscoélastiques
$F^d$	Fonction décrivant la propagation d'endommagement
$F^E$	Fonction de viscosité
<i>f</i>	Fonction convexe indicatrice du domaine de plasticité ou d'endommagement
$\mathcal{F}$	Transformation de Fourier
$\mathcal{F}^{-1}$	Transformation inverse de Fourier
$\Phi$	Pseudo-potentiel de dissipation
<i>G</i>	Module de cisaillement
$G_{12}^1$	Paramètre associé au modèle fractionnaire
<b>G</b>	Fonction relaxation
<b>I</b>	Tenseur unité
$(I_a^\alpha)_{GL}$	Intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure $a$ au sens de Grunwald-Letnikov
$(I_a^\alpha)_{RL}$	Intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure $a$ au sens de Riemann-Liouville
$(I_a^\alpha)_W$	Intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure $a$ au sens de Weyl
$(I_0^\alpha)_{R1}$	Approximation de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha$ avec borne inférieure 0 par l'algorithme R1
<b>J</b>	Fonction retard, fonction fluage
$\eta$	Module de pseudo-rigidité
$k(x, t)$ ,	Noyau de la transformation intégrale de Fourier et Laplace
$K(t - \tau)$	Noyau d'intégrale de type Abel
<i>K</i>	Module élastique du monomère
<i>k</i>	Constante de Boltzmann
<i>l</i>	Longueur de la chaîne moléculaire
$\mathcal{L}$	Transformation de Laplace
<b>A</b>	Matrice de rigidité en dynamique
$\lambda$	Multiplicateur positif de plasticité ou d'endommagement
<i>M</i>	Masse moléculaire
<i>m</i>	Coefficient d'écrouissage
$m_A, m_B, m_\alpha$	Coefficient associé à l'évolution des paramètres fractionnaires <i>A</i> , <i>B</i> et $\alpha$
$\mu$	Module de rigidité
<i>v</i>	Constante viscoélastique
$\nu_{12}^0, \nu_{21}^0$	Coefficients de Poisson
<i>P</i>	Pression
<i>p</i>	Déformation plastique cumulée
<i>R</i>	Variable thermodynamique associée à l'écrouissage
$R_0$	Limite élastique
$R_m$	Constante universelle des gaz

$\rho$	Masse volumique
$\sigma$	Tenseur des contraintes
$\tilde{\sigma}$	Contrainte effective
$\sigma$	Variable de contrainte unidimensionnelle
$\sigma^e$	Contrainte élasto-plastique
$\sigma^v$	Contrainte visqueuse
$T$	Température
$t$	Variable de temps
$\Delta t$	Pas de temps
$\tau_p$	Temps de relaxation
$\theta$	Angle des fibres par rapport à l'axe $x$ du repère local de l'élément
$Y$	Variable thermodynamique associée à l'endommagement
$\bar{Y}$	Fonction seuil de non-endommagement relative à l'endommagement $d$
$\nu_0$	Viscosité du fluide
$\nu_s$	Viscosité du polymère
$x_{data}$	Tableau contenant la déformation élastique correspondant à la boucle d'hystérésis
$\psi$	Energie libre d'Helmholtz
$W$	Taux d'humidité
$W_e$	Energie de déformation élastique
$\omega$	Pulsation
$\dot{z}$	Dérivée d'ordre 1 par rapport au temps de la fonction $z$
$\hat{z}$	Transformée intégrale de la fonction $z$
$z_{analyt}$	Expression analytique de la fonction $z$
$z^R$	Valeur de $z$ à la rupture
$z^{dyn}$	Valeur de $z$ en dynamique
$z^{stat}$	Valeur $z$ en quasi-statique
$z^0$	Valeur initiale de $z$
$z_{min}$	Valeur minimale de $z$
$z_{max}$	Valeur maximale de $z$
$z^{exp}$	Valeur expérimentale de $z$
$z^{modèle}$	Valeur de $z$ déterminée pour le modèle développé



---

## INTRODUCTION GENERALE

---

### MOTIVATION ET CONTEXTE

De nos jours, les matériaux composites sont utilisés pour la fabrication de grandes structures de formes complexes dans les domaines du naval, l'aéronautique ou encore de l'automobile. En effet, ce sont des matériaux plus qu'intéressants lorsque les critères de légèreté et de grande résistance deviennent des facteurs déterminants et prépondérants pour le design des structures. On peut citer par exemple, les matériaux composites stratifiés tissés carbone/époxy ou verre/époxy qui possèdent de très bonnes propriétés en fatigue en regard des matériaux métalliques. C'est pour cela qu'ils sont naturellement retenus pour la réalisation de pâles d'hélicoptère ou d'éolienne [1], [2], [3], [4]. Actuellement, on tend même à utiliser des matériaux composites avec des architectures de fibres plus complexes (tridimensionnelles) que l'on retrouve dans la réalisation des aubes de la soufflante des moteurs Leap Snecma [5], [6]. Pour tous ces matériaux destinés à la réalisation de structures primaires supportant de grands efforts, la phase de validation doit inclure les simulations des essais mécaniques. Les cas de chargements dynamiques ou de fatigue (cas qui nous intéressera plus particulièrement dans nos travaux) demeurent un des points essentiels devant être maîtrisé par les industriels en vue de la certification des structures.

La détermination expérimentale des limites de fatigue d'un matériau composite requiert un grand nombre d'essais sur plusieurs stratifications de manière à identifier les différentes composantes du tenseur des contraintes. Cette détermination sur une stratification donnée, est faite habituellement grâce à la construction de courbes, appelées courbes de Wöhler : on applique sur une éprouvette des chargements cycliques pendant une durée assez conséquente (habituellement plusieurs semaines) afin que les chargements se rapprochent de la limite de fatigue de l'éprouvette. Pour estimer en quelques heures seulement cette limite de fatigue, une approche alternative a été développée au laboratoire en se basant sur l'effet d'auto-échauffement du matériau composite [7]. Ce type d'approche a été initialement proposée pour évaluer la limite de fatigue de matériaux isotropes comme les alliages métalliques [8], les élastomères [9] et plus récemment sur des composites à fibres courtes [10]. Dans le cas des matériaux composites à fibres de carbone, cette méthode consiste à appliquer à une éprouvette une séquence de blocs de chargement cyclique avec un niveau de contrainte fixe et à mesurer la température stabilisée de l'échantillon sur chaque bloc de chargement imposé. Lorsque la valeur de la température stabilisée augmente de manière significative, on considère que la limite en fatigue est atteinte. Des études tomographiques combinées à des essais traditionnels de fatigue ont permis de mettre au point la méthode. Au cours des campagnes expérimentales menées tant sur des unidirectionnels carbone/époxy que tissés carbone/PA66, les résultats obtenus par la méthode « d'auto-échauffement » ont été corrélés de manière plus que satisfaisante à ceux issus des essais classiques de fatigue conduisant à la construction de la courbe de Wöhler. Des simulations numériques ont aussi été effectuées en utilisant un modèle élasto-plastique endommageable [11] : elles ont montré que la dissipation des boucles d'hystérésis devait être

prise en compte pour retrouver la température de l'éprouvette observée lors des différents blocs de chargement de la méthode « d'auto-échauffement ». La simulation de la dégradation du comportement mécanique du matériau composite tissé ainsi que celle des dissipations responsables de l'élévation de la température de l'éprouvette passent donc par l'élaboration d'un modèle de comportement qui soit fiable d'un point de vue mécanique et dissipatif. En conséquence, nous proposons d'utiliser le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles combiné à la théorie des dérivées fractionnaires pour élaborer un tel modèle. Cette théorie des dérivées fractionnaires a été initialement introduite au 19<sup>ième</sup> siècle [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]. Cependant, ce n'est que dans la seconde partie du 20<sup>ième</sup> siècle que cet outil mathématique a été employé dans les sciences de l'ingénieur [19], [20] et en particulier dans le domaine antivibratoire automobile [21], [22], [23].

## **OBJECTIFS**

L'objectif de cette thèse est de développer un modèle de comportement dédié aux matériaux composites tissés carbone à matrice thermodurcissable ou thermoplastique et qui soit capable de reproduire simultanément les essais mécaniques et à terme les élévations de température du matériau. Le modèle proposé est de type élasto-plastique endommageable et intègre les effets de vitesse du matériau dus à la matrice polymère. Le cadre des dérivées fractionnaires a été utilisé pour représenter les boucles d'hystérésis survenant lors de chargements cycliques qui sont issues des mécanismes visqueux combinés à la dégradation du matériau. Ce modèle permet par conséquent de reproduire les contributions des différents mécanismes de dissipation.

La modélisation retenue est dite collaborative puisqu'elle sera composée de deux sous-modèles : le premier est basé sur les travaux initialement proposés par Ladevèze [11] au LMT de Cachan. Ce modèle est de type élasto-plastique endommageable [24] et prend en compte la sensibilité à la vitesse de déformation [25], [26], [27], [28]. Il agira uniquement lors de l'évolution de la surface de charge correspondant à la description des déformations irréversibles. Le second sous-modèle est une loi de comportement écrite à l'aide de dérivées fractionnaires afin d'y intégrer les effets visqueux survenant dans les boucles d'hystérésis. Ce second modèle n'agira que lorsque le matériau subit une décharge et tant que l'état des déformations irréversibles précédents n'est pas atteint de nouveau. Nous avons donc une modélisation que l'on peut décrire comme « collaborative » et qui constitue le point innovant de ces travaux. Nous montrerons que cette modélisation collaborative prend toujours en compte les effets de vitesses de déformation, notamment lors de chargements cycliques et qu'elle est tout à fait adaptée à représenter non seulement le comportement mécanique mais aussi à terme les sources de dissipations conduisant à l'évolution de la température du matériau lors de sollicitations de type dynamique et de fatigue.

## **ORGANISATION DU MEMOIRE**

Le mémoire est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre correspond à une brève introduction des éléments essentiels permettant d'aborder la théorie du calcul fractionnaire. Nous rappelons les principaux points que l'on peut trouver dans les ouvrages mathématiques de référence portant sur le calcul fractionnaire. Les

éléments mathématiques utilisés pour construire ou identifier le modèle de comportement de composite tissé sont présentés et plus particulièrement les fonctions auxiliaires Gamma, Beta et Mittag-Leffler permettant d'obtenir des solutions aux problèmes fractionnaires. Les définitions et principales propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires classiquement rencontrées dans la littérature sont étudiées et illustrées. Les transformations de Fourier et de Laplace qui peuvent être employées pour résoudre les équations fractionnaires sont aussi présentées. Enfin un des points forts du chapitre est de présenter des méthodes d'approximation numérique dédiées aux dérivées fractionnaires. La présentation de l'ensemble de ces aspects théoriques à propos des dérivées fractionnaires nous semble important car ils sont mis en œuvre dans les chapitres ultérieurs, notamment afin de proposer et d'identifier le modèle de comportement dédié aux tissus à fibres de carbone.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle les spécificités du comportement mécanique des matériaux composites à matrice organique. Nous présentons en particulier des exemples d'applications simples permettant de mettre en œuvre des modèles fractionnaires pour des matériaux viscoélastiques correspondant à des matrices polymères. Nous poursuivons la présentation par des modèles fractionnaires plus complexes comme ceux dit de Kelvin-Voigt [29], Maxwell [30], [31], [32], Zener [33] et Rabotnov [34], [35], [36]. Ces modèles de comportement permettent de décrire les processus de fluage et de relaxation des polymères pour de larges gammes de temps caractéristiques. Ensuite, nous proposons aussi de nous attarder sur les résultats intéressants dans le domaine temporel pour le cas de modèles fractionnaires développés pour les polymères initialement dans le domaine fréquentiel [20], [37]. Enfin nous terminons par l'interprétation physique des dérivées fractionnaires, en illustrant les liens qui existent entre le modèle moléculaire de Rouse [38] et la physique fractionnaire. Dans une dernière section, nous rappelons que d'autres modèles sont également capables de représenter le comportement hystérétique des matériaux Drozdov [39], Caputo [40] et Matéos [41].

Le troisième chapitre constitue le cœur de notre travail. Le modèle théorique développé pour représenter le comportement du matériau composite tissé sous chargements cycliques est présenté. L'endommagement du pli élémentaire de composite est décrit à l'aide de la mécanique continue de l'endommagement. Le modèle du pli élémentaire est élasto-plastique endommageable. L'écrouissage du modèle de plasticité est supposé isotrope. Les effets de vitesse de déformation sont pris en compte pour décrire l'évolution du comportement du pli élémentaire pour des chargements dynamiques. Afin de décrire le comportement hystérétique observé lors de charges/décharges, nous étendons la loi précédente en y adjoignant un modèle à base des dérivées fractionnaires. Nous proposerons les points clés de la collaboration entre ces deux modèles.

Le chapitre quatre propose les validations numériques du modèle développé en regard d'essais expérimentaux de caractérisation pour des matériaux composites tissés à matrice therm durcissable ou thermoplastique. Nous proposons aussi la méthodologie d'identification de l'ensemble des paramètres de la modélisation collaborative.

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion et un bilan général sur les travaux menés et nous proposerons les perspectives futures, plus qu'intéressantes à propos non seulement des

possibilités offertes par ce modèle collaboratif en regard de la sensibilité à la vitesse de déformation mais aussi de son implémentation au sein d'un code de calcul commercial.

## **CHAPITRE 1 : THEORIE MATHÉMATIQUE DU CALCUL FRACTIONNAIRE**

---

*Ce chapitre introduit le cadre mathématique du calcul fractionnaire utilisé dans cette thèse afin de modéliser le comportement viscoélastique des polymères ou celui des matériaux composites à matrice thermodurcissable ou thermoplastique. Dans un premier temps, les fonctions auxiliaires (Gamma, Beta, Mittag-Leffler, etc.) sont rappelées car elles servent de base aux méthodes fractionnaires. Ensuite, les différentes définitions des intégrales et dérivées fractionnaires ainsi que leurs propriétés sont présentées. Puisqu'ils sont le fondement du développement des lois de comportement viscoélastique, nous poursuivons l'exposé sur le cadre théorique des transformations intégrales de Fourier et de Laplace ainsi que sur les équations différentielles fractionnaires et leurs méthodes de résolution. Les méthodes d'approximation numérique des opérateurs fractionnaires sont enfin étudiées en détail et nous permettent de justifier l'approximation utilisée pour la suite de nos travaux.*

### **1.1 INTRODUCTION**

Dans le cadre de ce travail de thèse, on s'intéresse au développement d'un modèle de comportement dédié aux matériaux composites soumis à des chargements cycliques. Comme on l'a évoqué dans l'introduction générale, les modèles de comportement classiques [11], [28] ne permettent pas de représenter les boucles d'hystérésis associés aux mécanismes de viscoélasticité du matériau. Afin de décrire de tels phénomènes dissipatifs, il est important que ces modèles de comportement puissent prendre en compte l'histoire des sollicitations. Nous proposons donc d'introduire les dérivées fractionnaires dans le développement de lois afin de représenter les effets de mémoire dans le comportement mécanique des matériaux.

La théorie de la dérivation non entière est une branche des mathématiques qui a trouvé récemment des applications multiples dans les sciences de l'ingénieur. Classiquement en thermodynamique des processus irréversibles, on propose un modèle impliquant des variables primales et des lois d'évolution exprimées en fonction des variables duales. La solution est recherchée à l'aide d'équations différentielles respectant le premier et le second principe de la thermodynamique [42]. Cependant l'évolution des variables primales mesurées expérimentalement en fonction des variables duales est parfois la solution d'équations différentielles à exposant non entier traduisant un mécanisme physique de type fractal. C'est notamment le cas pour la viscosité des polymères [30], [32], [33]. C'est dans ce cadre que les dérivées fractionnaires ont été introduites afin de décrire de façon réaliste les courbes expérimentales tout en limitant le nombre de paramètres dans les modélisations viscoélastiques des matériaux.

Le calcul fractionnaire est un domaine des mathématiques qui a pour objet d'étendre les définitions des intégrales et des dérivées traditionnelles à des ordres non entiers. L'intégrale et la dérivée fractionnaires représentent respectivement la généralisation à des ordres non entiers de l'intégrale et de la dérivée, tout comme la fonction puissance à exposant réel qui correspond à la « prolongation » de la fonction puissance à exposant entier. Plusieurs définitions ont été

proposées pour la dérivation non entière. Il faut cependant noter que ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont globalement équivalentes pour un grand nombre de fonctions.

A titre d'illustration, considérons l'exemple de la fonction puissance, les exposants entiers correspondent à une multiplication répétitive d'une valeur, par exemple  $x^3 = x * x * x$ . Par contre cette définition n'est visiblement pas applicable si l'exposant prend une valeur réelle. L'expression de  $x^{3.4}$  ne peut pas être calculée comme une multiplication de la valeur  $x$  par elle-même 3.4 fois. Par contre, cette valeur existe si l'on revient à la définition générale qui inclut les fonctions exponentielle et logarithmique et elle peut être déterminée aisément en utilisant une calculatrice.

De la même façon, si on considère les définitions de l'intégrale et de la dérivée d'une fonction, elles sont définies uniquement pour des ordres entiers. Pour des intégrales et des dérivées d'ordre entier  $n$  supérieur à 1 ( $n \in \mathbb{N}$ ), cela ne pose évidemment pas de difficultés car il suffit d'appliquer l'intégration ou la dérivation comme une opération répétitive. Mais finalement que représente et comment calculer une intégrale ou une dérivée avec un ordre non entier ? En particulier, il faut se souvenir que la fonction puissance à exposant réel est couramment utilisée en physique. Il convient de noter que les solutions des équations différentielles fractionnaires font plutôt intervenir des fonctions puissances [43], [44] alors que les solutions des équations différentielles ordinaires s'expriment sur une base exponentielle...

Le sens à donner à ces opérateurs différentiels d'ordre non entier est une question essentielle que les mathématiciens se sont rapidement posée. Cette question fondamentale a été abordée dans une lettre de L'Hôpital adressée à Leibniz concernant la signification de la dérivée d'ordre un demi ( $n = 1/2$ ). Leibniz a répondu de la manière elliptique suivante : c'est « *Un paradoxe apparent, d'où des conséquences utiles seront établies un jour* » [12]. Cette réponse est datée du 30 septembre 1695 et elle est considérée comme l'origine du calcul fractionnaire. Cependant la première « réelle » application du calcul fractionnaire semble être proposée par Niels H. Abel en 1823 [13] qui montra que le problème de la Tautochrone généralisée s'écrivait à l'aide d'une équation différentielle d'ordre non entier dont il exprima la solution à l'aide d'une équation intégrale.

La plus grande partie de la théorie mathématique fractionnaire a été développée au 19<sup>ième</sup> siècle. Par contre, l'augmentation des capacités de calcul numérique a provoqué un important accroissement de la mise en œuvre du calcul fractionnaire pour des applications scientifiques et industrielles durant le 20<sup>ième</sup> siècle. Cette théorie est appliquée dans toutes les branches où des équations différentielles sont utilisées pour décrire des phénomènes physiques [19], [45].

Ce chapitre constitue une introduction aux principes fondamentaux de la théorie du calcul fractionnaire. Afin de simplifier l'identification des solutions issues d'équations différentielles fractionnaires, on introduit les fonctions auxiliaires suivantes : la fonction Gamma (paragraphe 1.2), la fonction Beta (paragraphe 1.3), le coefficient binomial (paragraphe 1.4) et la fonction de Mittag-Leffler (paragraphe 1.5). On fait un rappel d'analyse fonctionnelle dans le paragraphe 1.6 qui permet d'établir la différence entre les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

Historiquement, la première définition de l'intégrale et de la dérivée d'ordre non entier a été établie par Riemann et Liouville comme une conséquence de la solution aux équations intégrales d'Abel [13]. Ces intégrales et dérivées ont été nommées en leur honneur comme les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville [14], [15]. Ces définitions sont présentées dans le paragraphe 1.7.1. Les définitions déférentes ont été développées comme des cas particuliers de la définition de Riemann-Liouville. On peut notamment citer les dérivées de Caputo [46] qui sont utilisées lorsque la condition initiale d'un système d'équations différentielles fractionnaires a un sens physique. Ensuite, dans le cas de problèmes posés sur des domaines non-bornés, on utilise couramment la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Marchaud [47]. Enfin, Weyl [48] a proposé une définition de la dérivée fractionnaire applicable pour des problèmes où il est important de conserver la fréquence de fonctions périodiques.

Dans le paragraphe 1.7.5, une définition alternative de la dérivée fractionnaire est proposée par Grunwald-Letnikov [17], [18]. Elle se base sur la définition de la dérivée à l'aide de la formule des accroissements finis. Les propriétés générales des intégrales et dérivées fractionnaires sont présentées dans le paragraphe 1.8. A titre d'illustration, on présente la transformation de Fourier de l'intégrale et de la dérivée de Riemann-Liouville dans les paragraphes 1.9. En effet, cette méthode est très souvent utilisée lorsque l'on recherche les solutions de problèmes physiques formulés dans le domaine fréquentiel [20], [37], [40].

L'utilisation de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est une des méthodes utilisées pour résoudre les équations différentielles fractionnaires qui sont étudiées au paragraphe 1.10. Dans le domaine de la mécanique des matériaux, les équations différentielles fractionnaires sont souvent appliquées pour décrire les processus de relaxation et de fluage des matériaux viscoélastiques [29], [30], [33], [35], [36], [49]. Nous développerons quelques exemples d'illustration dans le chapitre 2.

L'implémentation numérique du calcul fractionnaire est présentée dans le paragraphe 1.11. On considère différentes méthodes d'approximation numérique d'intégrale et de dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov. La précision de ces méthodes est étudiée sur l'exemple de la fonction puissance et la fonction linéaire comme cas particulier (paragraphe 1.12). Les résultats des approximations sont comparés avec les solutions analytiques. Les conclusions à partir des résultats en erreur, nous amènent à proposer la méthode la plus adéquate pour nos travaux.

## 1.2 FONCTION GAMMA : INTEGRALE D'EULER DE 2<sup>IEME</sup> ESPECE

La fonction **Gamma**, correspondant à l'intégrale d'Euler de deuxième espèce, est largement présente dans les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires. Cette fonction permet de généraliser la définition de la fonction factorielle aux nombres réels. On peut donc calculer la fonction factorielle d'un réel à partir de la fonction Gamma. Cette fonction est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx, \quad z \in \mathbb{R}_+^* \tag{1.1}$$

### **Propriétés**

Lorsque  $z$  est positif, on montre la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.2)$$

Elle peut être obtenue par intégration par parties de l'expression (1.1). Cette relation (1.2) permet de définir un prolongement de la fonction  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ .

Après l'application successive de la formule (1.2), la relation suivante apparaît :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n)}{(z)_n} \quad (1.3)$$

où  $(z)_n$  est la fonction de Pochhammer qui se définit par la formule :

$$\begin{aligned} (z)_n &= z(z + 1) \dots (z + n - 1), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ (z)_0 &= 1, \quad (1)_n = n! \end{aligned} \quad (1.4)$$

Comme nous l'avons déjà souligné, la fonction Gamma représente le prolongement de la définition de la factorielle d'un entier naturel pour des nombres réels. Elle est également compatible avec la définition classique de factorielle :

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

### **1.3 FONCTION BETA : INTEGRALE D'EULER DE 1<sup>ERE</sup> ESPECE**

Classiquement, on introduit lors du calcul de l'intégrale fractionnaire d'une fonction puissance, la fonction Beta. Cette fonction est définie par l'intégrale :

$$\beta(z, w) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx, \quad z \in \mathbb{R}_+^* \quad w \in \mathbb{R}_+^* \quad (1.6)$$

On peut exprimer la fonction **Beta** à l'aide de la fonction Gamma grâce à la relation suivante :

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (1.7)$$

### **1.4 COEFFICIENT BINOMIAL**

Le coefficient binomial est utilisé lorsque l'on recherche la définition d'une dérivée fractionnaire à l'aide de développements en série. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . Les coefficients binomiaux se définissent sous la forme suivante :

$$\binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{(-\alpha)_j}{j!} \quad (1.8)$$

où  $(-\alpha)_j$  représente la fonction de Pochhammer (1.4).

Dans le cas particulier où  $m$  et  $n$  sont entiers positifs, les coefficients binomiaux s'expriment à partir de la factorielle :

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!} & , \quad \text{si } m \geq n \\ 0 & , \quad \text{si } 0 \leq m < n \end{cases} \quad (1.9)$$

La définition (1.9) peut être étendue pour deux réels  $n$  et  $m$ . Dans le cas général avec  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ ,  $\beta \in \mathbb{R}_+$  et  $\beta < \alpha + 1$ , les coefficients binomiaux s'expriment par la formule (1.10). Cette définition s'obtient en utilisant les propriétés de la fonction Gamma (1.1).

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \quad (1.10)$$

### Propriétés

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . En utilisant la définition des coefficients binomiaux (1.8), la propriété suivante peut être obtenue :

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} = \binom{j - \alpha - 1}{j} \quad (1.11)$$

La formule (1.11) peut être exprimée à partir de la fonction Gamma (1.1). Le coefficient binomial s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\binom{j - \alpha - 1}{j} = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(-\alpha)} \quad (1.12)$$

## 1.5 FONCTION MITTAG-LEFFLER

Pour mémoire, la solution d'une équation différentielle ordinaire se construit à l'aide de la fonction exponentielle. Dans le cas des équations différentielles fractionnaires, nous montrerons que les solutions s'expriment à l'aide des fonctions de Mittag-Leffler (paragraphe 1.9). La fonction de *Mittag-Leffler* est définie par la série :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (1.13)$$

On peut aussi définir la fonction Mittag-Leffler généralisée :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (1.14)$$

où  $\Gamma(z)$  est la fonction Gamma définie par la relation (1.1).

A titre d'illustration, on présente quelques exemples où des fonctions connues sont approchées par des séries de Mittag-Leffler. Dans le cas où  $\alpha = \beta = 1$ , on retrouve l'expression d'une exponentielle :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.15)$$

Si  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ , on obtient la somme d'une suite géométrique :

$$E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad \text{pour } |z| < 1 \quad (1.16)$$

Si  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$ , on a :

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad (1.17)$$

## 1.6 ELEMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

On rappelle quelques définitions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

### 1.6.1 Espace des fonctions sommables $L_p([a, b])$

Soit  $\varphi$  une fonction définie et mesurable sur  $[a, b]$  qui appartient à l'ensemble  $L_p([a, b])$ , où  $p$  est un entier positif. La norme  $L_p([a, b])$  est définie par :

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p dx < \infty \quad (1.18)$$

### 1.6.2 Espace des fonctions absolument continues $AC([a, b])$

#### **Définition**

La fonction  $f$  est dite absolument continue sur un intervalle  $[a, b]$  si pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un réel  $\delta$  strictement positif, tel que pour tout système fini d'intervalles disjoints  $[a_k, b_k] \in [a, b], k = 1, 2, \dots, n$ , on a la relation :

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \quad (1.19)$$

L'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[a, b]$  est noté  $AC([a, b])$ .

#### **Théorème**

Les fonctions absolument continues sur un intervalle  $[a, b]$  possèdent une dérivée sommable sur  $[a, b]$ , dit autrement :

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L_1([a, b]) / \forall x \in [a, b], f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (1.20)$$

## 1.7 INTEGRATION ET DERIVATION D'ORDRE NON ENTIER ET PROPRIETES ELEMENTAIRES

Dans cette partie les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville [14], [15], Caputo [46], Marchaud [47], Weyl [48] et Grunwald-Letnikov sont rappelées [17], [18].

### 1.7.1 Intégrale et dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

L'intégration successive de la fonction  $f(x)$  se définit par la formule de Cauchy qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, n \in \mathbb{N} \quad (1.21)$$

En généralisant cette relation, l'intégrale d'ordre non entier de la fonction  $f(x)$  peut être définie en utilisant la fonction Gamma (1.5).

#### **Définition**

Soit  $\varphi \in L_1([a, b])$ . L'**intégrale fractionnaire** d'ordre  $\alpha$  au sens de **Riemann-Liouville** s'écrit :

$$(I_a^\alpha \varphi)_{RL}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad \alpha > 0 \quad (1.22)$$

L'intégrale fractionnaire d'une fonction puissance  $f(x) = x^\lambda$  peut être obtenue avec des manipulations algébriques simples. Le résultat s'écrit sous la forme suivante :

$$(I_0^\alpha x^\lambda)_{RL} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+\alpha)} x^{\lambda+\alpha} \quad (1.23)$$

Si  $\alpha = 1$ , en utilisant la formule (1.23), on obtient l'expression classique de l'intégrale d'une fonction puissance :

$$(I_0^1 x^\lambda)_{RL} = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \quad (1.24)$$

La dérivée fractionnaire est introduite comme une opération inverse à l'intégration fractionnaire. Soit  $\alpha$  un réel strictement positif et  $n$  l'entier vérifiant  $n-1 < \alpha < n$ . La dérivée d'ordre  $\alpha$  s'obtient en dérivant  $n$  fois la fonction  $f$  intégrée à l'ordre  $n-\alpha$ .

Par exemple, pour  $0 < \alpha < 1$ , la dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $f$  s'obtient en dérivant 1 fois la fonction intégrée à l'ordre  $1-\alpha$ , ce qui peut se noter :

$$(D_a^\alpha f)_{RL}(x) = \frac{d}{dx} (I_a^{1-\alpha} f)_{RL}(x) \quad (1.25)$$

Ce qui amène à la forme alternative suivante :

$$(D_a^\alpha f)_{RL}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.26)$$

avec  $f \in L_1([a, b])$ .

La définition (1.26) correspond à la **dérivée fractionnaire** au sens de **Riemann-Liouville**.

**Lemme**

Si  $f \in AC([a, b])$  et  $\alpha$  un réel compris entre 0 et 1, alors la dérivée  $(D_a^\alpha f)_{RL}$  existe et est continue sur  $[a, b]$  ; elle peut être représentée sous la forme :

$$(D_a^\alpha f)_{RL}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right], \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.27)$$

A titre d'exemple, on s'intéresse à la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction puissance de la forme :

$$f(x) = (x-a)^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (1.28)$$

La définition (1.26) est utilisée afin d'obtenir la dérivée à l'ordre  $\alpha$  :

$$(D_a^\alpha f)_{RL}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(t-a)^\lambda}{(x-t)^\alpha} dt \quad (1.29)$$

On peut intégrer directement en utilisant les propriétés des fonctions Gamma (1.2) et Beta (1.6). On obtient les résultats suivants :

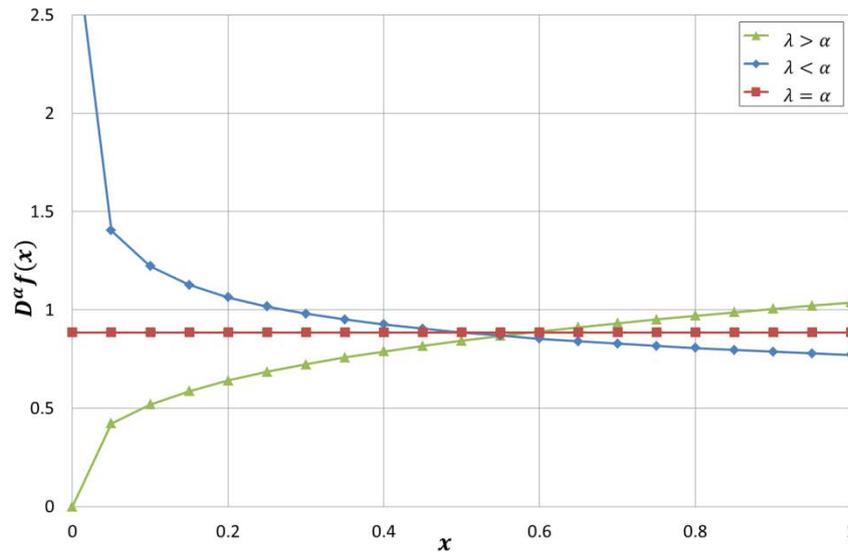
$$(D_a^\alpha f)_{RL}(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)} (x-a)^{\lambda-\alpha} \quad (1.30)$$

Le calcul de la limite de la dérivée  $(D_a^\alpha f)_{RL}(x)$  (équation (1.30)), lorsque  $x$  tend vers  $a$  par valeur supérieure, donne :

$$\lim_{x \rightarrow a} (D_a^\alpha f)_{RL}(x) = \begin{cases} +\infty & , \text{ si } \lambda < \alpha \\ \Gamma(\lambda+1) & , \text{ si } \lambda = \alpha \\ 0 & , \text{ si } \lambda > \alpha \end{cases} \quad (1.31)$$

Cette condition est présentée sur la **Figure 1.1**. Les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha = 0.5$  ont été calculées pour trois valeurs de  $\lambda$  différentes :

$$\lambda_1 = 0.3 \quad \lambda_2 = 0.5 \quad \lambda_3 = 0.8$$



**Figure 1.1. Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'une fonction puissance**

Un autre exemple intéressant est la dérivée fractionnaire d'une fonction constante  $f(x) = c, c > 0$  :

$$(D_a^\alpha f)_{RL}(x) = c \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (1.32)$$

avec une limite de dérivée lorsque  $x$  tend vers  $a$  par valeur supérieure :

$$\lim_{x \rightarrow a} (D_a^\alpha f)_{RL}(x) = +\infty \quad (1.33)$$

On établit ainsi que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante est non nulle. Pour que la dérivée fractionnaire  $D_a^\alpha f$  d'une fonction  $f$  reste bornée sur  $[a, b]$ , il faut que  $f(a)$  soit nul afin que sa dérivée d'ordre  $\alpha$  ne diverge pas lorsque  $x$  tend vers  $a$  par valeur supérieure.

### 1.7.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Pour calculer la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in ]0,1[$ , il faut calculer l'intégrale d'ordre  $1 - \alpha$  et ensuite dériver le résultat obtenu. Pour la définition de Caputo, une construction différente est utilisée avec un ordre d'opération inverse : en premier la fonction  $f(x)$  est dérivée et puis l'intégrale d'ordre  $1 - \alpha$  est déterminée.

#### **Définition**

Soit  $f \in AC([a, b])$ , la **dérivée fractionnaire** d'ordre  $\alpha, \alpha \in ]0,1[$  au sens de **Caputo** est donnée par :

$$(D_a^\alpha f)_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.34)$$

La condition d'existence de la dérivée d'ordre non-entier au sens de Caputo de la fonction  $f(x)$  est que la fonction  $f$  soit absolument continue sur  $[a, b]$  et que la dérivée première  $f'$  appartienne à l'ensemble des fonctions sommables sur  $[a, b]$  :

$$f(x) \in AC([a, b]) \quad f'(x) \in L_1([a, b]) \quad (1.35)$$

Dans le cas général, la **dérivée fractionnaire** de **Caputo (1.34)** ne coïncide pas avec la dérivée de Riemann-Liouville **(1.26)**. La relation entre les deux définitions peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$(D_a^\alpha f)_{RL}(x) = (D_a^\alpha f)_C(x) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} \quad (1.36)$$

On remarque que, de toute évidence, les définitions seront équivalentes uniquement si  $f(a) = 0$ .

Cela amène à la principale différence avec la dérivée de Riemann-Liouville qui est que la dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'une constante ( $f(x) = c$ ), est égale à zéro :

$$(D_a^\alpha f)_C(x) = 0 \quad (1.37)$$

L'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Caputo permet de formuler des équations différentielles fractionnaires avec des conditions initiales de type Dirichlet ou Neumann. Par contre, nous montrerons dans la partie 1.10 que des équations différentielles fractionnaires résolues avec la définition de Riemann-Liouville possèdent des conditions initiales en termes d'intégrale fractionnaire [43], [44], [50]. Dans ce cas, cela peut engendrer un problème lors de l'identification de cette condition initiale ; c'est pour cela que les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont préférées à celles au sens de Riemann-Liouville.

### 1.7.3 Dérivée fractionnaire au sens de Marchaud

Dans certains problèmes physiques, la représentation des dérivées fractionnaires sur un intervalle non borné peut être nécessaire. La prolongation de la dérivée fractionnaire sur un intervalle infini peut être obtenue directement en utilisant la définition de Riemann-Liouville **(1.26)**. Ce type de dérivée fractionnaire est nommé d'après Liouville et elle est définie sous la forme suivante :

$$(D_+^\alpha f)_L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad -\infty < x < \infty \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.38)$$

La dérivée fractionnaire de Liouville peut être représentée sous une forme différente qui est plus commode à utiliser que l'équation **(1.38)**.

Soit  $f(x)$  une fonction décroissante et dérivable. Sa dérivée est supposée monotone décroissante. Dans le cas  $x \in (0, +\infty)$ , la dérivée fractionnaire au sens de Liouville **(1.38)** peut être réduite :

$$\begin{aligned}
 (D_+^\alpha f)_L(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty t^{-\alpha} f(x-t) dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha} f'(x-t) dt = \\
 &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty f'(x-t) dt \int_t^\infty \xi^{-1-\alpha} d\xi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

### Définition

La définition de la **dérivée fractionnaire** au sens de **Marchaud** se dérive de la formule précédente dans le cas  $x \in [0, +\infty[$  :

$$(D_0^\alpha f)_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1.40}$$

Les conditions d'équivalence entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Marchaud sont présentées dans l'article de Samko et al. [44]. La différence la plus remarquable est que la dérivée de Marchaud appliquée à une fonction constante  $f(x) = c$  est égale à zéro, ce qui n'est pas vrai pour la dérivée de Riemann-Liouville.

### 1.7.4 Intégrale et dérivée fractionnaires au sens de Weyl

Dans le cas des fonctions périodiques  $\varphi$ , il peut être utile de définir les opérations d'intégration et de dérivation fractionnaires de manière à ce que la période des fonctions soit conservée après application des opérateurs d'intégration ou de dérivation. La définition de Riemann-Liouville, dans le cas général, ne répond pas à cette condition. C'est pour cette raison que l'intégrale de Weyl a été initialement introduite.

### Définition

Soit  $\varphi$  une fonction  $2\pi$  – périodique et de valeur moyenne nulle :

$$2\pi\varphi_0 = \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0 \tag{1.41}$$

L'**intégrale fractionnaire** d'ordre  $\alpha$  au sens de **Weyl** est définie sous la forme suivante :

$$(I_a^\alpha \varphi)_W(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{(\pm ik)^\alpha} \varphi(x-t) dt, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1.42}$$

La **dérivée fractionnaire** de **Weyl** d'ordre  $\alpha$  se définit à partir de l'intégration au sens de Weyl. En constatant que  $0 < \alpha < 1$ , il vient :

$$(D_a^\alpha \varphi)_W(x) = \frac{d}{dx} (I_a^{1-\alpha} \varphi)_W(x) \tag{1.43}$$

où  $(I_a^{1-\alpha} \varphi)_W$  et  $(D_a^\alpha \varphi)_W$  représentent respectivement l'intégration et la dérivation d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  au sens de Weyl.

### 1.7.5 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

On peut utiliser une approche alternative pour définir les expressions des dérivées fractionnaires en considérant des différences finies. Il est connu que la dérivée entière d'une fonction  $f(x)$  s'exprime sous la forme suivante :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.44)$$

En utilisant la définition (1.44), la dérivée seconde est définie par :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^2} \quad (1.45)$$

Pour généraliser les relations précédentes, la dérivée générale d'ordre,  $n \in \mathbb{N}$ , aura la forme suivante :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\Delta x) \quad (1.46)$$

où  $\binom{n}{j}$  représentent les coefficients binomiaux définis par la relation (1.8).

La dérivée d'ordre non entier peut être obtenue en remplaçant un entier  $n$  par un réel  $\alpha$  positif et en utilisant les égalités (1.11) et (1.12).

#### **Définition**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $[a, b]$  et  $f(a) = 0$ . La **dérivée fractionnaire** au sens de **Grunwald-Letnikov** est définie par l'expression :

$$(D_a^\alpha f)_{GL}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(\Delta x)^\alpha} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} f(x - j\Delta x) \text{ avec } K = \left[ \frac{x - a}{\Delta x} \right] \quad (1.47)$$

où  $[z]$  représente la partie entière de  $z$ .

L'**intégrale fractionnaire** au sens de **Grunwald-Letnikov** se définit en utilisant la propriété suivante :

$$(I_a^\alpha f)_{GL}(x) = (D_a^{-\alpha} f)_{GL}(x) \text{ avec } \alpha > 0 \quad (1.48)$$

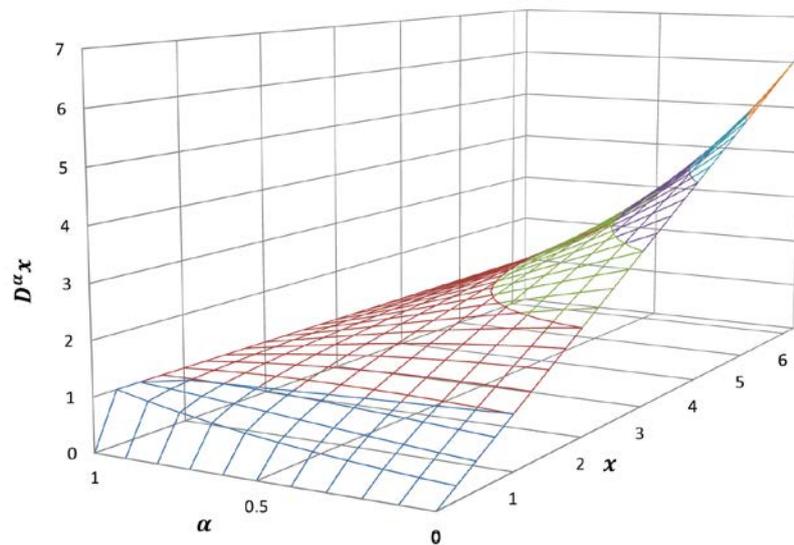
En effet, dans le cas  $\alpha = 1$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} (D_a^{-\alpha} f)_{GL}(x) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(\Delta x)^{-1}} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\Gamma(j + 1)}{\Gamma(1)\Gamma(j + 1)} f(x - j\Delta x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{K-1} f(x_i) \Delta x \\ &= \int_a^x f(x) dx = (I_a^1 f)_{GL}(x) \text{ avec } i = K - j \text{ et } x_i = a + i\Delta x \end{aligned} \quad (1.49)$$

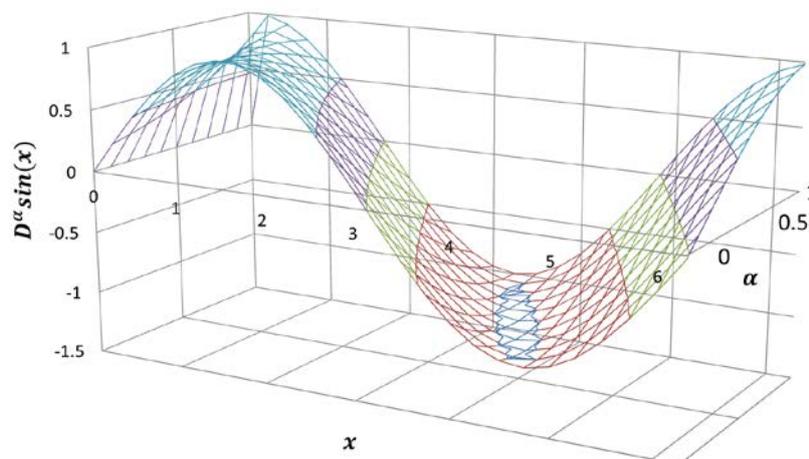
La définition de Grunwald–Letnikov présente la dérivée fractionnaire sous la forme d'une série infinie. Cette formulation est moins utilisée dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Cependant cette forme est généralement employée pour obtenir une approximation numérique des dérivées ou intégrales fractionnaires.

### 1.7.6 Exemples d'illustration à propos des dérivées fractionnaires

A titre d'exemple, les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville des fonctions linéaire  $f_1 = x$  et sinusoïdale  $f_2 = \sin(x)$  sont présentées respectivement sur la **Figure 1.2** et sur la **Figure 1.3**. L'ordre de la dérivation  $\alpha$  varie de 0 à 1. Si  $\alpha = 0$ , on a les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ . Si  $\alpha = 1$  on retrouve les dérivées d'ordre 1 des fonctions respectivement  $f_1' = x$  et  $f_2' = \cos(x)$ . Les dérivées d'ordre non entier correspondent finalement à l'état de la fonction entre sa propre valeur et sa dérivée première.



**Figure 1.2. Dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville pour  $f_1 = x$**



**Figure 1.3. Dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville pour la fonction  $f_2 = \sin(x)$  avec  $0 < \alpha < 1$**

### *1.7.7 Résumé des définitions des dérivées fractionnaires*

En résumé, différentes définitions de dérivées et intégrales fractionnaires ont été présentées dans ce chapitre. Elles sont rappelées dans le **Tableau 1.1**. Toutes les expressions des dérivées sont définies pour un ordre de dérivation appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$ .

Du point de vue mathématique, l'intégration peut être interprétée comme l'opération inverse à la dérivation, et vice versa. Ceci permet de distinguer deux façons différentes de définir les opérations fractionnaires qui sont nommées comme : Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov.

L'approche de Riemann-Liouville se base sur la définition d'intégrale fractionnaire comme une « prolongation » de l'intégration d'ordre entier à un ordre réel. Ensuite, la dérivée fractionnaire se définit comme une opération inverse à l'intégration fractionnaire en dérivant un nombre entier de fois une fonction intégrée à un ordre non entier.

Par exemple, afin de calculer la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$  au sens de Riemann-Liouville, il est nécessaire de :

- déterminer l'intégrale fractionnaire d'ordre  $1 - \alpha$  de la fonction considérée ;
- dériver à l'ordre 1 l'intégrale fractionnaire obtenue.

La définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le cas particulier des dérivées au sens de Riemann-Liouville. Si la fonction est absolument continue et si l'intégrale de sa dérivée existe, les opérations d'intégration et de dérivation peuvent être permutées : on calcule l'intégrale fractionnaire de la dérivée de la fonction. On dit alors que la dérivation fractionnaire obtenue ainsi est définie au sens de Caputo. Les deux définitions des dérivées coïncident lorsque  $f(a) = 0$ . Les dérivées au sens de Caputo sont plus familières du point de vue physique car elles conduisent à une valeur nulle pour la dérivée d'une constante. De plus, les conditions initiales d'une équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo s'expriment en termes de dérivée d'ordre entier tandis que les conditions initiales d'une équation différentielle fractionnaire au sens de Riemann-Liouville s'expriment par des opérateurs fractionnaires qui n'ont pas de sens physique défini [43], [50].

Les intégrales fractionnaires utilisées dans les définitions de Riemann-Liouville et Caputo sont définies sur un segment. Par contre dans certains problèmes physiques, la définition des opérateurs fractionnaires sur un intervalle non borné est nécessaire. Dans ce cas, la définition de Marchaud doit être utilisée. Pour les fonctions périodiques, la définition de Weyl est plus adaptée. Dans le cadre de cette thèse, on ne s'intéresse qu'aux problèmes définis sur un segment par conséquent ces définitions ne seront pas utilisées.

La définition de Grunwald-Letnikov, contrairement à la définition de Riemann-Liouville, n'utilise pas l'intégration. Elle définit la dérivée fractionnaire comme la limite des différences finies pour un ordre réel. L'existence de ces différentes formulations pose la question de leur équivalence. Dans le cas général, les définitions de Grunwald-Letnikov et Riemann-Liouville sont identiques. La justification de ce fait est assez longue cependant la preuve détaillée est présentée dans le travail de Samko [44].

Dérivée fractionnaire	Définition	Remarque
<b>Riemann-Liouville</b>	$(D_a^\alpha f)_{RL}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt$	$f \in L_1([a, b])$ ,
<b>Caputo</b>	$(D_a^\alpha f)_C(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt$	$f \in AC([a, b])$
<b>Marchaud</b>	$(D_0^\alpha f)_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt$	$x \in [0, +\infty[$
<b>Weyl</b>	$(D_a^\alpha \varphi)_W(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{(\pm ik)^{1-\alpha}} \varphi(x-t) dt$	$\varphi$ est une fonction $2\pi$ – périodique
<b>Grunwald-Letnikov</b>	$(D_a^\alpha f)_{GL}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(\Delta x)^\alpha} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f(x-j\Delta x)$	$f$ est la fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $f(a) = 0$ .

**Tableau 1.1. Définitions des dérivées fractionnaires**

## 1.8 PROPRIETES DES INTEGRALES ET DERIVEES FRACTIONNAIRES

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques propriétés générales des intégrales et dérivées fractionnaires.

### 1.8.1 Linéarité

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions appartenant à  $L_1([a, b])$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels. On a alors linéarité de l'opérateur de dérivée fractionnaire :

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D_a^\alpha(f) + \mu D_a^\alpha(g) \tag{1.50}$$

Ceci résulte directement des propriétés de l'intégration. Cette relation peut être étendue. Soit  $f$  une suite de fonctions appartenant à  $L_1([a, b])$  tel que  $\sum_{k=0}^\infty f_k$  et  $\sum_{k=0}^\infty (D_a^\alpha f_k)$  convergent uniformément sur  $[a, b]$ , alors :

$$D_a^\alpha \sum_{k=0}^\infty f_k(x) = \sum_{k=0}^\infty (D_a^\alpha f_k)(x) \tag{1.51}$$

### 1.8.2 Règle de la composition des ordres d'intégration

$$I_a^\beta (I_a^\alpha f(x)) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \tag{1.52}$$

avec  $f \in L_1([a, b])$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$

### 1.8.3 Opération inverse

La dérivée d'une intégrale du même ordre fractionnaire est la fonction elle-même :

$$D_a^\alpha (I_a^\alpha f(x)) = f(x) \quad (1.53)$$

avec  $f \in L_1([a, b])$  et  $\alpha > 0$

Par contre, la relation inverse ne donne pas le même résultat. Si  $I_a^{1-\alpha} f \in AC([a, b])$ , pour l'intégrale et la dérivée au sens de Riemann-Liouville on obtient (cf. [44]) :

$$I_a^\alpha (D_a^\alpha f(x)) = f(x) - (I_a^{1-\alpha} f)(a) \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.54)$$

Ces résultats sont du même type que ceux obtenus pour un ordre  $\alpha$  entier. Soit  $\alpha = 1$ , de (1.53) on obtient classiquement :

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (1.55)$$

Et la formule (1.54) nous donne :

$$\int_a^x \frac{df(t)}{dt} dt = f(x) - f(a) \quad (1.56)$$

## 1.9 TRANSFORMATIONS INTEGRALES

Les transformations intégrales d'une fonction  $f$  se représentent sous la forme suivante :

$$K(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x, t) f(t) dt = \hat{f}(x) \quad (1.57)$$

où  $k(x, t)$  représente le noyau de la transformation,  $f$  est la fonction originale définie dans l'ensemble des fonctions et  $K(f)$  également notée  $\hat{f}$  est une transformée de la fonction  $f$ . Les transformations de Fourier et Laplace sont usuelles dans la résolution des équations différentielles. Elles sont généralisables au cas des dérivées fractionnaires.

### 1.9.1 Transformation de Fourier

Soit  $f$  une fonction satisfaisant à  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ . La transformation de Fourier est définie par :

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \hat{f}(i\omega) \quad (1.58)$$

La transformation inverse se définit par la formule suivante :

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \quad (1.59)$$

### 1.9.2 Transformation de Fourier de l'intégrale de Riemann-Liouville

Soit  $f$  une fonction tel que  $\mathcal{F}(f)$  et  $\mathcal{F}(I^\alpha f)$  existent. La transformée de Fourier de l'intégrale de Riemann-Liouville satisfait la relation :

$$\mathcal{F}(I^\alpha f) = (i\omega)^{-\alpha} \mathcal{F}(f) = (i\omega)^{-\alpha} \hat{f}(i\omega) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.60)$$

### 1.9.3 Transformation de Fourier de la dérivée de Riemann-Liouville

De même, soit  $f$  une fonction pour laquelle  $\mathcal{F}(f)$  et  $\mathcal{F}(I^\alpha f)$  sont définies. Alors la transformée de Fourier de la dérivée au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = (i\omega)^\alpha \mathcal{F}(f) = (i\omega)^\alpha \hat{f}(i\omega) \quad (1.61)$$

### 1.9.4 Transformation de Laplace

La transformation intégrale de Laplace généralise la transformation de Fourier. Elle se définit de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.62)$$

Le produit de convolution est défini par l'intégrale :

$$[g * f] = \int_0^x g(x-t) f(t) dt \quad (1.63)$$

#### ***Théorème (Théorème de la convolution)***

Si  $f, \varphi \in L_1([0, b]), \forall b > 0$  alors  $(f * \varphi) \in L_1([0, b])$  et la transformation de Laplace du produit de convolution des deux fonctions originales est le produit des transformées de Laplace des fonctions  $f$  et  $\varphi$ .

$$\mathcal{L}(f * \varphi) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(\varphi) \quad (1.64)$$

Si  $f \in AC^n([0, b]), \forall b > 0$  et  $\mathcal{L}(f)$  et  $\mathcal{L}(f^{(n)})$  existent la transformation de Laplace de la dérivée d'ordre  $n$  est définie par :

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(f) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0) \quad (1.65)$$

### 1.9.5 Transformation de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville

Soit  $f \in L_1([0, b]), \forall b > 0$ . L'intégrale de Riemann-Liouville peut être définie comme un produit de convolution de deux fonctions :

$$I^\alpha f = \left[ \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f \right] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt \quad (1.66)$$

La transformation de Laplace est définie par la formule (1.62) comme une conséquence du théorème de convolution et de la formule (1.66) :

$$\mathcal{L}(I^\alpha f) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f) \quad (1.67)$$

### 1.9.6 Transformation de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville

Soit  $f, \varphi \in L_1[0, b], \forall b > 0$ . On suppose que  $0 < \alpha < 1$  et que  $\mathcal{L}(f)$  et  $\mathcal{L}(f')$  existent. La transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est déduite de (1.65) :

$$\mathcal{L}(D^\alpha f) = s^\alpha \mathcal{L}(f) - I^{1-\alpha} f(0) \quad (1.68)$$

Si on suppose que la fonction  $f(x)$  est continue en 0 on a  $I^{1-\alpha} f(0) = 0$  et la formule (1.69) se déduit de la relation (1.68) :

$$\mathcal{L}(D^\alpha f) = s^\alpha \mathcal{L}(f) \quad (1.69)$$

## 1.10 EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES

Les équations différentielles fractionnaires peuvent être classifiées tout comme les équations différentielles ordinaires d'ordre entier. Il existe des équations différentielles fractionnaires dites linéaires homogènes et non homogènes. Les équations différentielles fractionnaires peuvent être à coefficients constants ou non constants.

Considérons le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle fractionnaire linéaire d'ordre  $\alpha$  présenté en (1.70) avec sa condition initiale (1.71) :

$$(D_0^\alpha \varphi)(x) - \lambda \varphi(x) = f(x), \quad x \in [0, b] \quad \forall b > 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.70)$$

$$(I_0^{1-\alpha} \varphi)(0) = \eta, \quad \eta \in \mathbb{R} \quad (1.71)$$

avec  $(D_0^\alpha \varphi)(x) = (D_0^\alpha \varphi)_{RL}(x)$  dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et  $\varphi \in L_1[0, b], \forall b > 0$ . Dans cette partie on considère que la borne inférieure est nulle  $a = 0$ .

### 1.10.1 Transformation en une équation intégrale

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.71) est donnée par Samko et al. [44]. Une des méthodes de résolution de problème Cauchy (1.70), (1.71) consiste à intégrer à l'ordre  $\alpha$  l'équation (1.70). On obtient :

$$I_0^\alpha((D_0^\alpha \varphi)(x) - \lambda \varphi(x) - f(x)) = 0 \quad (1.72)$$

D'où, on déduit que :

$$I_0^\alpha(D_0^\alpha \varphi)(x) - \lambda I_0^\alpha(\varphi)(x) = I_0^\alpha(f)(x) \quad (1.73)$$

En utilisant la relation **(1.54)**, on a :

$$I_0^\alpha(D_0^\alpha \varphi)(x) = \varphi(x) - (I_0^{1-\alpha} \varphi)(0) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.74)$$

On obtient finalement :

$$\varphi(x) - \lambda(I_0^\alpha \varphi)(x) = \eta \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + (I_0^\alpha f)(x) \quad (1.75)$$

ou la forme équivalente :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(t) dt = \eta \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt \quad (1.76)$$

Les équations **(1.75)** et **(1.76)** sont des équations intégrale de Volterra de second type [51]. On peut trouver la solution de ces équations par une méthode itérative [43]. La suite des fonctions est construite selon la règle :

$$\varphi_0(x) = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi_0(x) + (I_0^\alpha f)(x) + \lambda(I_0^\alpha \varphi_0)(x) = \\ &= \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \lambda \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} (I_0^\alpha t^{\alpha-1})(x) + (I_0^\alpha f)(x) = \\ &= \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \lambda \frac{\eta}{\Gamma(2\alpha)} x^{2\alpha-1} + (I_0^\alpha f)(x) = \\ &= \eta \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k\alpha)} x^{k\alpha-1} + (I_0^\alpha f)(x) \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \varphi_0(x) + (I_0^\alpha f)(x) + \lambda(I_0^\alpha \varphi_1)(x) = \\ &= \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \lambda \eta \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k\alpha)} (I_0^\alpha(x^{k\alpha-1}))(x) + \lambda(I_0^\alpha I_0^\alpha f)(x) + (I_0^\alpha f)(x) = \\ &= \eta \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k\alpha)} x^{k\alpha-1} + \int_0^x \left[ \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda^{k-1} (x-t)^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)} \right] f(t) dt \end{aligned} \quad (1.79)$$

... ..

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \varphi_0(x) + (I_0^\alpha f)(x) + \lambda (I_0^\alpha \varphi_{n-1})(x) = \\ &= \eta \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda^{k-1} x^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)} + \int_0^x \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1} (x-t)^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)} \right] f(t) dt \end{aligned} \quad (1.80)$$

... ..

Si  $n \rightarrow +\infty$ , la suite de fonctions  $\varphi_n(x)$  converge vers la solution exacte de l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = \eta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} + \int_0^x \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (x-t)^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} \right] f(t) dt \quad (1.81)$$

En utilisant la fonction Mittag-Leffler **(1.14)**, on a :

$$\varphi(x) = \eta x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x E_{\alpha,\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.82)$$

L'expression précédente est une solution du problème Cauchy **(1.70)** et **(1.71)**. La solution de l'équation différentielle homogène se présente sous la forme :

$$\varphi(x) = \eta x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) \quad (1.83)$$

Si  $\alpha = 1$  et  $f(t) = C$ , la relation **(1.82)** s'écrit :

$$\varphi(x) = \eta E_{1,1}(\lambda x) + \int_0^x E_{1,1}(\lambda(x-t)) f(t) dt \quad (1.84)$$

avec :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z \text{ et } f(t) = C \quad (1.85)$$

Ce qui donne :

$$\varphi(x) = \eta e^{\lambda x} + \int_0^x e^{\lambda(x-t)} C dt \quad (1.86)$$

Soit :

$$\varphi(x) = \eta e^{\lambda x} + \frac{C}{\lambda} e^{\lambda x} - \frac{C}{\lambda} \quad (1.87)$$

Ce qui correspond bien à la solution du problème de Cauchy **(1.70)** et **(1.71)** lorsque  $\alpha = 1$  :

$$\varphi' - \lambda \varphi = C \quad (1.88)$$

$$\varphi(0) = \eta, \quad \eta \in \mathbb{R} \quad (1.89)$$

### 1.10.2 Méthode de transformation de Laplace

Pour le problème de Cauchy défini par les relations (1.70) et (1.71), on peut rechercher la solution à l'aide de la transformation de Laplace de l'équation différentielle fractionnaire à second membre constant. La transformée s'écrit :

$$s^\alpha \mathcal{L}(\varphi) - \lambda \mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(f) + I^{1-\alpha} \varphi(0) \quad (1.90)$$

La solution de l'équation (1.90) peut être obtenue à l'aide de la transformation inverse :

$$\varphi(x) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\mathcal{L}(f)}{s^\alpha - \lambda} + \frac{I^{1-\alpha} \varphi(0)}{s^\alpha - \lambda} \right) (x) \quad (1.91)$$

Pour trouver la transformation inverse on représente le multiplicateur  $\frac{1}{s^\alpha - \lambda}$  sous la forme suivante :

$$\frac{1}{s^\alpha - \lambda} = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{s^\alpha}\right)} = \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{s^{k\alpha}} \quad (1.92)$$

En utilisant le fait que :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^\alpha} \right) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.93)$$

On obtient :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^\alpha - \lambda} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^{k\alpha + \alpha}} \right) = x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} = x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^\alpha) \quad (1.94)$$

où  $E_{\alpha, \alpha}(x)$  représente la fonction de Mittag-Leffler (1.14). En utilisant le théorème de la convolution (1.64) :

$$\frac{1}{s^\alpha - \lambda} \mathcal{L}(f) = \mathcal{L} \left( x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^\alpha) \right) \mathcal{L}(f) = \mathcal{L} \left( x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^\alpha) * f \right) \quad (1.95)$$

On obtient la solution du problème de Cauchy (1.70) et (1.71):

$$\varphi(x) = \eta x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) f(t) dt \quad (1.96)$$

Cette solution coïncide avec la solution définie par (1.82).

## 1.11 IMPLEMENTATION NUMERIQUE

Dans cette partie on présente les schémas numériques des intégrales et des dérivées fractionnaires. Ces schémas peuvent être utilisés pour résoudre numériquement le modèle de comportement dédié aux matériaux composites tissés présenté dans le chapitre suivant. En particulier, les approximations des intégrales et des dérivées au sens de Riemann-Liouville et de Grunwald–Letnikov utilisées dans nos travaux sont exposées.

### 1.11.1 Approximation de l'intégrale et de la dérivée de Grunwald–Letnikov

L'approximation de la dérivée fractionnaire de Grunwald–Letnikov est la plus facile à mettre en œuvre numériquement car cette dérivée est définie par une série de fonctions. En considérant le fait que la série infinie  $K \rightarrow \infty$  peut être tronquée (1.47) on obtient l'algorithme **G1** :

$$D_0^\alpha f(x) \approx (D_0^\alpha f(x))_{G1} = \frac{1}{(\Delta x)^\alpha} \sum_{j=0}^{K-1} A_{j+1}^\alpha f(x - j\Delta x) \quad (1.97)$$

où  $A_{j+1}^\alpha$  s'appelle le coefficient de Grunwald. Il est défini par la formule suivante :

$$A_{j+1}^\alpha = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} \quad (1.98)$$

Afin d'éviter l'utilisation explicite de la fonction Gamma, le coefficient de Grunwald (1.98) peut être exprimé par la formule de récurrence :

$$A_{j+1}^\alpha = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} = \frac{(j - \alpha - 1)\Gamma(j - \alpha - 1)}{\Gamma(-\alpha)j\Gamma(j)} = \frac{(j - \alpha - 1)}{j} A_j^\alpha \quad (1.99)$$

Sachant que  $A_1^\alpha = 1$ , et en tenant compte que  $0 < \alpha < 1$ , la valeur absolue  $\left| \frac{(j-\alpha-1)}{j} \right|$  est inférieure à 1, par conséquent on obtient :

$$|A_{j+1}^\alpha| < |A_j^\alpha| \quad (1.100)$$

La condition précédente signifie que la valeur du coefficient de Grunwald  $A_{j+1}^\alpha$  décroît lorsque  $j$  augmente. Autrement dit, cette condition caractérise le principe de l'évanescence de la mémoire : à un instant donné, le passé lointain a moins d'influence que le passé récent. On retrouve ici le fait que les dérivées fractionnaires sont des opérateurs héréditaires au sens où l'entend Volterra [45], à savoir qu'elles permettent de prendre en compte le passé en introduisant une atténuation de plus en plus forte pour des événements lointains.

### 1.11.2 Approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville – algorithme R1

Soient  $a = 0$  et  $\alpha > 0$ . La définition de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (1.22) se réécrit sous la forme suivante :

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}} dt \quad (1.101)$$

Soit  $\Delta x = \frac{x}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $x_j = j\Delta x$  avec  $j = 0, 1 \dots N-1$ . L'intégrale apparaissant dans la formule (1.101) peut être transformée en une somme :

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}} dt \quad (1.102)$$

En utilisant l'approximation de l'intégrale de (1.102) sous la forme suivante :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}} dt = \frac{f(x-x_{j+1}) + f(x-x_j)}{2\alpha} [x_{j+1}^\alpha - x_j^\alpha] \quad (1.103)$$

On obtient l'algorithme **R1** :

$$I_0^\alpha f(x) \approx (I_0^\alpha f(x))_{R1} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(x-x_{j+1}) + f(x-x_j)}{2} [x_{j+1}^\alpha - x_j^\alpha] \quad (1.104)$$

Pour augmenter la précision du calcul numérique de l'intégrale, Oldham et Spanier proposent de choisir une approximation d'ordre supérieur à la place de (1.103) [19]. Cette approximation consiste à supposer que sur l'intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $f(x)$  varie linéairement.

### 1.11.3 Approximation de la dérivée de Riemann-Liouville – algorithme L1

Soient  $a = 0$  et  $0 < \alpha < 1$ . Les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville (1.27) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(0)}{x^\alpha} + \int_0^x \frac{1}{t^\alpha} \left( \frac{df(x-t)}{dt} \right) dt \right] \quad (1.105)$$

On considère  $\Delta x = \frac{x}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $x_j = j\Delta x$  avec  $j = 0, 1 \dots N-1$ . L'intégrale dans la formule précédente peut être présentée sous la forme d'une somme :

$$D_0^\alpha f(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(0)}{x^\alpha} + \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{t^\alpha} \left( \frac{df(x-t)}{dt} \right) dt \right] \quad (1.106)$$

L'approximation d'intégrale dans (1.106) s'écrit :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{t^\alpha} \left( \frac{df(x-t)}{dt} \right) dt = \frac{f(x-x_{j+1}) - f(x-x_j)}{\Delta x} \frac{[x_{j+1}^{1-\alpha} - x_j^{1-\alpha}]}{1-\alpha} \quad (1.107)$$

L'algorithme **L1** basé sur l'approximation (1.107) s'écrit :

$$D_0^\alpha f(x) \approx (D_0^\alpha f(x))_{L1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(0)}{x^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(x-x_{j+1}) - f(x-x_j)}{\Delta x} [x_{j+1}^{1-\alpha} - x_j^{1-\alpha}] \quad (1.108)$$

Dans les approximations (1.104) et (1.108), l'erreur de calcul numérique dépend des valeurs de  $\alpha$  et du nombre de points  $N$  utilisés pour discrétiser le domaine d'intégration. On remarque aussi que l'expression (1.108) pose un problème lorsque  $f(0) \neq 0$ . Pour contourner ce point, on se propose d'utiliser la formule générale (1.26) pour calculer la dérivée fractionnaire.

#### 1.11.4 Approximation de l'intégrale et de la dérivée de Riemann-Liouville

Soit  $a = 0$ . L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (1.26) se réécrit sous la forme suivante :

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (1.109)$$

Avec le changement de variable  $t = xu$ , l'intégrale (1.109) se représente dans la forme alternative suivante :

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} f(xu) du \quad (1.110)$$

On propose le changement des variables comme suit :

$$v = (1-u)^{q+\alpha} \rightarrow u = 1 - v^{\frac{1}{q+\alpha}} \quad (1.111)$$

$$dv = -(q+\alpha)(1-u)^{q+\alpha-1} du$$

Ce qui permet de réécrire le terme suivant :

$$(1-u)^{\alpha-1} du = -\frac{v^{-\frac{q}{q+\alpha}}}{(q+\alpha)} dv \quad (1.112)$$

Si on fait le choix que  $q = 0$ , alors :

$$\begin{aligned} v &= (1 - u)^\alpha \rightarrow u = 1 - v^{\frac{1}{\alpha}} \\ (1 - u)^{\alpha-1} du &= -\frac{1}{\alpha} dv \end{aligned} \tag{1.113}$$

L'expression pour intégrale **(1.109)** sera la suivante :

$$(I_0^\alpha f(x))_{M1} = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 f\left(x \left(1 - v^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right) dv \tag{1.114}$$

On note l'expression **(1.114)** comme intégrale **M1**.

Si on fait le choix  $q = -\frac{\alpha}{2}$  :

$$\begin{aligned} v &= (1 - u)^{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow u = 1 - v^{\frac{2}{\alpha}} \\ (1 - u)^{\alpha-1} du &= -\frac{2}{\alpha} dv \end{aligned} \tag{1.115}$$

On obtient l'intégrale **M2** :

$$(I_0^\alpha f(x))_{M2} = \frac{2x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 f\left(x \left(1 - v^{\frac{2}{\alpha}}\right)\right) dv \tag{1.116}$$

L'implémentation numérique des intégrales **(1.114)**, **(1.116)** est simple si la forme analytique de la fonction  $f$  est connue. L'approximation des intégrales est alors possible à l'aide par exemple de la méthode de quadrature de Gauss. L'intérêt de ces deux formulations consiste dans le fait que toutes les intégrales sont à prendre sur un intervalle fixe  $[0,1]$ . Les abscisses des points d'intégration ainsi que leurs poids sont définis en début de calcul. Il suffit uniquement, pour chaque nouvelle valeur de  $x$  où il faut calculer  $I_0^\alpha f(x)$ , de calculer la valeur de l'intégrant à chaque point de Gauss.

Pour obtenir les approximations des dérivées fractionnaires en accord avec **(1.25)**, la dérivée d'ordre 1 doit être calculée à partir des intégrales **M1** **(1.114)**, **M2** **(1.116)**. Les approximations des dérivées fractionnaires **M1**, **M2** sont obtenues en utilisant le schéma des différences finies :

$$(D_0^\alpha f(x))_{M1} = \frac{(I_0^{1-\alpha} f(x + \Delta x))_{M1} - (I_0^{1-\alpha} f(x))_{M1}}{\Delta x} \tag{1.117}$$

$$(D_0^\alpha f(x))_{M2} = \frac{(I_0^{1-\alpha} f(x + \Delta x))_{M2} - (I_0^{1-\alpha} f(x))_{M2}}{\Delta x} \tag{1.118}$$

## 1.12 EXEMPLE AVEC LES DERIVEES FRACTIONNAIRES

La précision de chaque approximation numérique est examinée sur l'exemple de la fonction puissance pour  $x \in [0,1]$  :

$$f(x) = x^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{1.119}$$

La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction (1.119) se calcule par la formule suivante :

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 - \alpha)} x^{\lambda - \alpha} \quad (1.120)$$

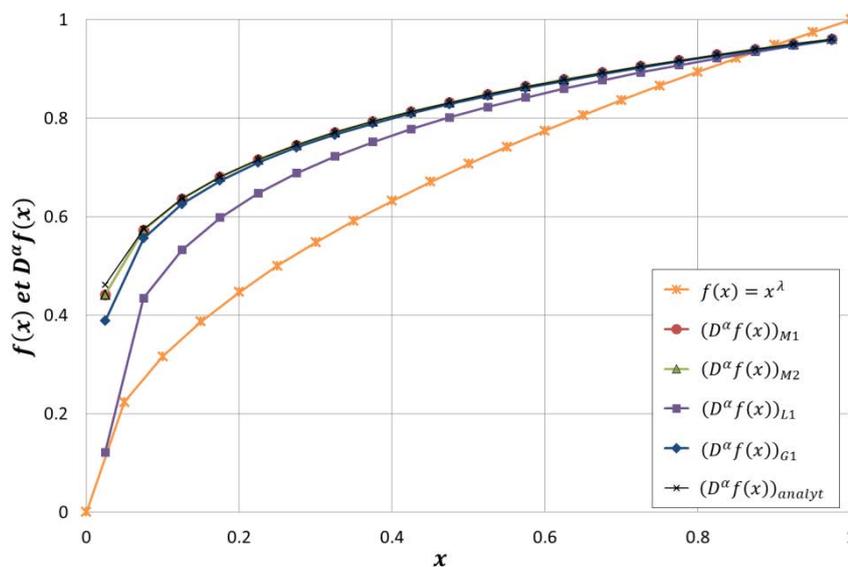
Soit  $\lambda = 0.5, \alpha = 0.3$  et  $N = 20$  alors le pas  $\Delta x = 0.05$ . Pour la fonction puissance, les approximations des dérivées fractionnaires (1.97), (1.108), (1.117) et (1.118) sont comparées avec la formule analytique (1.120). Les résultats sont présentés sur la Figure 1.4.

Afin d'estimer la précision de chaque méthode les valeurs des erreurs relatives (1.121) sont calculées en chaque point. Les résultats sont présentés sur la Figure 1.5 et dans le Tableau 1.2. La somme des erreurs numériques  $\delta$  est calculée suivant la formule (1.122). Les résultats sont présentés dans le Tableau 1.3.

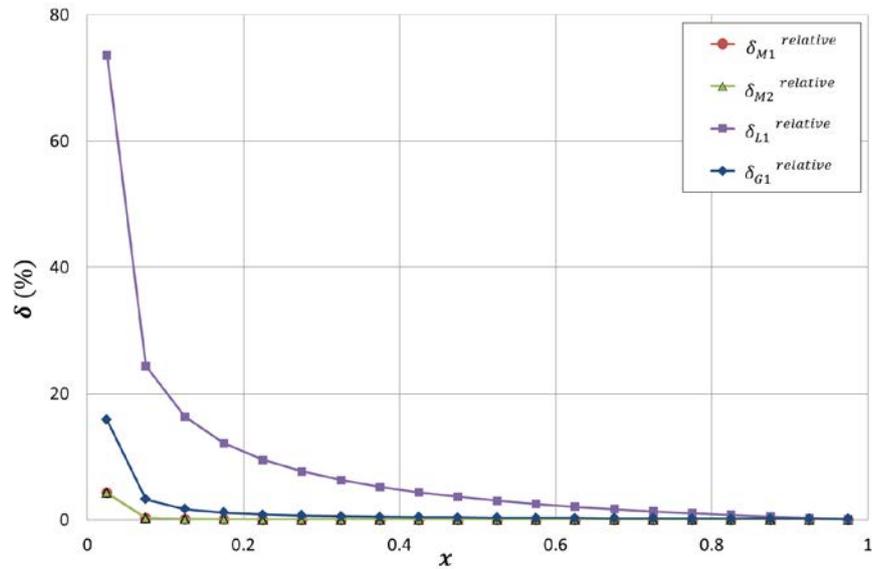
$$\delta_i^{relative} = \frac{|D^\alpha f(t_i)_{analyt} - D^\alpha f(t_i)_{approx}|}{D^\alpha f(t_i)_{analyt}} 100\% \quad (1.121)$$

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i^{relative} \quad (1.122)$$

Dans les équations (1.121) et (1.122),  $D^\alpha f(t)_{analyt}$  représente la dérivée fractionnaire analytique et  $D^\alpha f(t)_{approx}$  correspond respectivement aux approximations numériques (1.97), (1.108), (1.117) et (1.118). La méthode de Gauss a été utilisée pour calculer les approximations  $M1, M2$  (1.117) et (1.118). L'intervalle  $[0,1]$  est divisé en dix sous-intégrales et cinq points de Gauss sont utilisés dans chaque sous-intervalle. On constate que les plus grandes erreurs sont observées autour de la valeur initiale zéro. Les algorithmes  $M1$  et  $M2$  sont les plus précis. Ils donnent des valeurs d'erreurs relatives inférieures à 1%. Dans la suite de ce travail on utilisera les algorithmes  $M1$  et  $M2$  pour intégrer la partie fractionnaire du comportement.



**Figure 1.4. Comparaison des approximations numériques des dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha = 0.3$  pour une fonction puissance  $f(x) = x^\lambda, \lambda = 0.5$**



**Figure 1.5. Erreurs relatives des approximations numériques des dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha = 0.3$  pour une fonction puissance  $f(x) = x^\lambda, \lambda = 0.5$**

$x$	$\delta_{iM1}^{relative} (\%)$	$\delta_{iM2}^{relative} (\%)$	$\delta_{iL1}^{relative} (\%)$	$\delta_{iG1}^{relative} (\%)$
0.025	4.272	4.266	73.608	15.847
0.075	0.302	0.296	24.390	3.261
0.125	0.104	0.099	16.352	1.714
0.175	0.051	0.045	12.159	1.147
0.225	0.030	0.024	9.516	0.857
0.275	0.019	0.013	7.669	0.683
0.325	0.013	0.007	6.292	0.566
0.375	0.009	0.003	5.219	0.483
0.425	0.006	0.000	4.355	0.421
0.475	0.004	0.002	3.643	0.373
0.525	0.003	0.003	3.043	0.334
0.575	0.002	0.004	2.530	0.303
0.625	0.001	0.005	2.086	0.277
0.675	0.000	0.006	1.697	0.255
0.725	0.000	0.006	1.353	0.236
0.775	0.000	0.006	1.046	0.220
0.825	0.001	0.007	0.771	0.206
0.875	0.001	0.007	0.523	0.193
0.925	0.001	0.007	0.297	0.182
0.975	0.002	0.008	0.091	0.172

**Tableau 1.2. Comparaison des erreurs relatives des approximations numériques pour chaque point dans le cas d'une fonction puissance  $f(x) = x^\lambda$**

$\delta_{M1}$ (%)	$\delta_{M2}$ (%)	$\delta_{L1}$ (%)	$\delta_{G1}$ (%)
0.241	0.240	8.832	1.387

**Tableau 1.3. Comparaison des sommes des erreurs relatives pour la fonction  $f(x) = x^\lambda$**

A titre d'exemple d'utilisation de l'algorithme, on considère la dérivée fractionnaire d'une fonction linéaire (1.123). Cet exemple est important car on choisit régulièrement d'interpoler les courbes expérimentales de manière linéaire par morceau.

$$f(x) = x \tag{1.123}$$

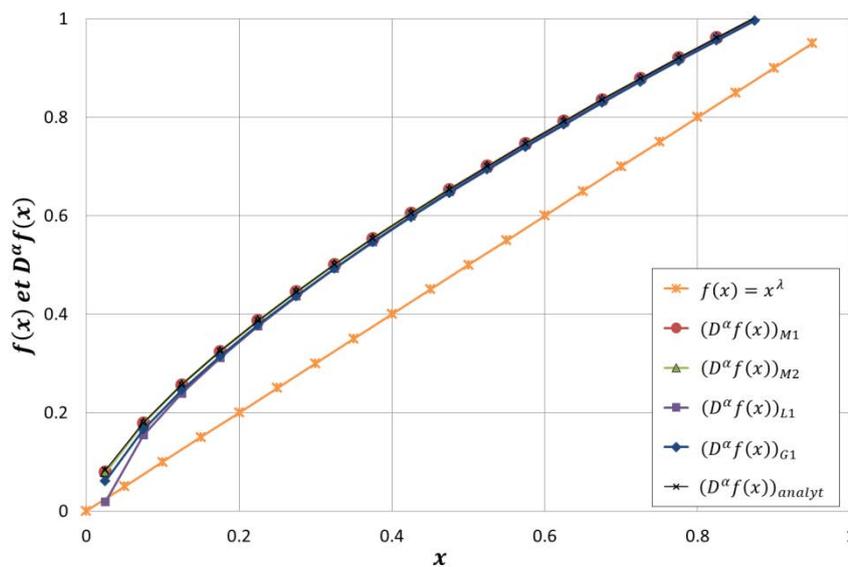
Par conséquent, la formule (1.120) est utilisée pour calculer les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$ . Dans le cas  $\lambda = 1$  on a :

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \tag{1.124}$$

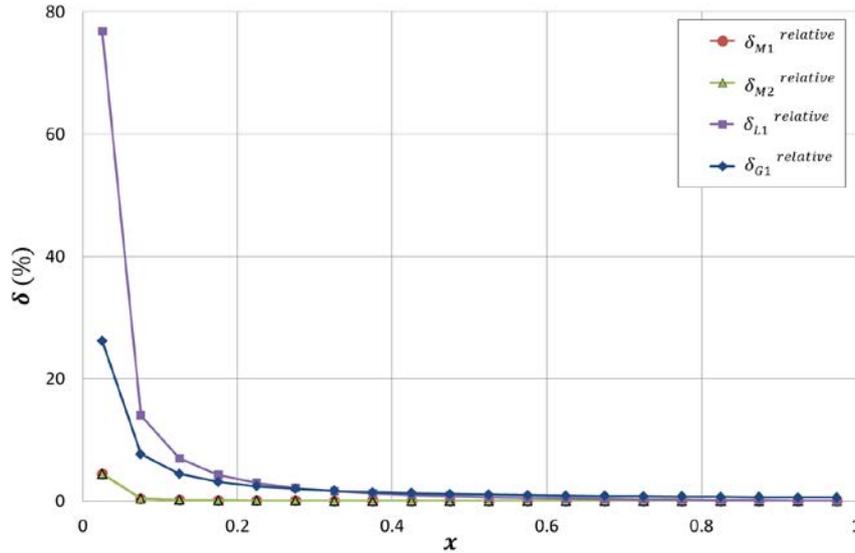
Soit  $\alpha = 0.3$  et  $N = 20$  points de contrôle sur le domaine. Les approximations (1.97), (1.108), (1.117) et (1.118) sont comparées avec la solution analytique (1.124) sur la Figure 1.6. Comme dans le cas précédent, les erreurs les plus importantes sont localisées au début de l'intervalle (Figure 1.7). Les valeurs relatives des erreurs sont présentées dans le Tableau 1.4.

$\delta_{M1}$ (%)	$\delta_{M2}$ (%)	$\delta_{L1}$ (%)	$\delta_{G1}$ (%)
0.261	0.261	5.712	2.927

**Tableau 1.4. Comparaison des sommes des erreurs relatives pour la fonction  $f(x) = x^\lambda$**



**Figure 1.6. Comparaison des approximations numériques des dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha = 0.3$  pour une fonction  $f(x) = x$**



**Figure 1.7. Erreurs relatives des approximations numériques des dérivées fractionnaires pour la fonction linéaire  $f(x) = x$**

### 1.12.1 Estimation d'une erreur du calcul au premier point

La plus grande erreur numérique obtenue lors du calcul des dérivées fractionnaires est observée au premier point de l'intervalle. Ce point correspond à la valeur  $x = \frac{\Delta x}{2}$ . Dans cette partie on analyse cette erreur pour le calcul de la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction puissance  $(x) = x^\lambda$ . Les résultats sont présentés pour les algorithmes  $M1$  et  $M2$  retenue pour la suite de nos travaux. La valeur analytique de l'intégrale fractionnaire d'ordre  $1 - \alpha$  pour une fonction puissance est :

$$I_0^{1-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 2 - \alpha)} x^{\lambda - \alpha + 1} \quad (1.125)$$

D'où on obtient la valeur analytique de la dérivée fractionnaire au point  $\frac{\Delta x}{2}$  par la formule :

$$\left( D_0^\alpha f \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \right)_{analytique} = \frac{d}{dx} I_0^{1-\alpha} f \left( \frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 - \alpha)} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^{\lambda - \alpha} \quad (1.126)$$

Si on considère que  $I_0^{1-\alpha}(0) = 0$ , alors la valeur numérique de la dérivée fractionnaire définie par le schéma central au point  $\frac{\Delta x}{2}$  s'écrit :

$$\left( D_0^\alpha f \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \right)_{numerique} = \frac{I_0^{1-\alpha} f(\Delta x) - I_0^{1-\alpha} f(0)}{\Delta x} = \frac{I_0^{1-\alpha} f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 2 - \alpha)} \Delta x^{\lambda - \alpha} \quad (1.127)$$

En conséquence, l'erreur relative peut être calculée sous la forme suivante :

$$\delta^{relative} = \frac{\left| \left( D_0^\alpha f \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \right)_{analytique} - \left( D_0^\alpha f \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \right)_{numerique} \right|}{\left( D_0^\alpha f \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \right)_{analytique}} 100\% \quad (1.128)$$

En utilisant les expressions (1.126) et (1.127), on obtient la valeur de l'erreur relative :

$$\delta^{relative} = \left| 1 - \frac{2^{\lambda-\alpha}}{\lambda + 1 - \alpha} \right| 100\% \quad (1.129)$$

On remarque que l'erreur déterminée par la formule (1.129) ne dépend pas de la valeur du pas.

Si  $\lambda = 0.5$  et  $\alpha = 0.3$ , on trouve  $\delta^{relative} = 4.27\%$ , valeur qui correspond à ce qu'on a obtenu numériquement (Tableau 1.3).

Afin de corriger ces valeurs mal calculées, on propose la méthode suivante :

- Calculer numériquement la valeur suivante :

$$deriv(x) = \frac{I_0^{1-\alpha} f(x + \varepsilon) - I_0^{1-\alpha} f(x - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (1.130)$$

avec  $\varepsilon \ll \Delta x$  ;

- Comparer le résultat obtenu  $deriv(x)$  avec les données analytiques  $(D_0^\alpha f(x))_{analytique}$ .

Si l'écart est supérieur à la tolérance, on conserve  $deriv(x)$  comme valeur estimée de  $D_0^\alpha f \left( \frac{\Delta x}{2} \right)$ . Cette méthode de correction peut être appliquée pour chaque valeur où  $D_0^\alpha f(x)$  est estimée.

Afin de limiter le volume de calcul, on arrête de calculer les corrections dès que l'écart relatif entre  $(D_0^\alpha f(x))_{M1}$  et  $deriv(x)$  est inférieur à une tolérance donnée.

### 1.13 CONCLUSION

Dans ce chapitre on a rappelé des éléments mathématiques liés aux définitions usuelles utilisées lors de calculs fractionnaires [19], [43], [44], [45]. Les intégrales et les dérivées fractionnaires sont définies avec leurs principales propriétés. Parmi toutes les définitions présentées, on distingue deux approches principales : la définition de Riemann-Liouville [14], [15] qui se base sur une formulation intégrale et la définition de Grunwald-Letnikov [17], [18] obtenue en considérant une série infinie. L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ont été introduites en premier. Des définitions alternatives ont été proposées par Caputo [46], Marchaud [47] et Weyl [48]. Elles peuvent être obtenues comme des cas particuliers de la définition de Riemann-Liouville. Dans le cadre de cette thèse, on utilise la dérivée fractionnaire proposée par Riemann-Liouville ou la dérivée fractionnaire de Caputo qui est un cas particulier bien adapté lors d'une intégration exacte. Les transformations intégrales de

Fourier et de Laplace des intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville sont présentées. Ces transformations peuvent être utilisées pour résoudre les équations différentielles fractionnaires linéaires d'ordre  $\alpha$ . Comme on le verra au chapitre suivant, dans le cas de matériaux polymères viscoélastiques, les processus de fluage et de relaxation sont décrits par ce type d'équations différentielles si on convient d'exprimer les lois de comportement à l'aide de dérivées fractionnaires [29], [30], [31], [32], [33], [35], [36]. Un autre intérêt de la transformation de Fourier réside dans le fait qu'elle permet de définir des caractérisations des matériaux qui correspondent à des grandeurs mesurables expérimentalement lors d'essais en vibration [20], [21], [37].

La résolution d'équation différentielle fractionnaire est obtenue de deux façons différentes. La première méthode implique la transformation de l'équation initiale en équation intégrale de Volterra de second type. Cette équation peut alors être résolue par une méthode itérative. La deuxième approche de résolution consiste à utiliser une transformation de Laplace.

Lors de nos travaux, une attention particulière a été portée sur la précision des algorithmes numériques d'évaluation des opérateurs fractionnaires. Différentes méthodes d'approximation ont été programmées et comparées à la solution analytique dans le cas des fonctions puissances. La dérivation fractionnaire de la fonction linéaire et de la fonction puissance ont permis de tester les performances des algorithmes  $M1$  et  $M2$ . Les résultats numériques sont confrontés aux solutions exactes. Dans les deux cas évoqués, ces algorithmes consistent à déterminer l'intégrale d'ordre  $1 - \alpha$  d'une fonction analytique. La méthode de quadrature de Gauss est finalement employée pour calculer l'expression de l'intégrale permettant d'obtenir la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ . L'erreur relative dans les deux cas traités est inférieure à 1%. L'écart le plus grand est observé pour le premier point de la discrétisation. On a montré que cette erreur est finalement indépendante de la taille du pas et doit être corrigée pour atteindre une erreur nulle. Dans la suite des travaux, l'algorithme d'approximation  $M1$  est utilisé pour évaluer numériquement la dérivée fractionnaire.



## **CHAPITRE 2 : ETUDE GENERALE DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE**

---

*Ce chapitre met l'accent sur la modélisation du comportement viscoélastique en utilisant la théorie des dérivées fractionnaires. Après un bref aperçu du comportement des polymères, les limites des modèles viscoélastiques existants sont présentées. Ensuite, nous nous intéresserons aux chargements de fluage et de relaxation et nous montrerons qu'ils peuvent être reproduits grâce aux modèles fractionnaires de Kelvin-Voigt [29], Maxwell [30], [31], [32], Zener [33] et Rabotnov [34], [35]. Nous proposerons, aussi, un aperçu des modèles de comportement viscoélastique dans le domaine fréquentiel [20], [37]. On montre que la relation fractionnaire entre la déformation et la contrainte peut être retrouvée en utilisant la théorie moléculaire des polymères [38], [52], [53]. Pour finir, on présente quelques modèles tels que ceux de Drozdov [39], Caputo [40] et Mateos [54] qui sont capables de représenter le comportement hystérétique des matériaux composites. L'hystérésis du matériau apparaît classiquement lors d'essais de fatigue.*

### **2.1 INTRODUCTION**

Les matériaux composites initialement réservés aux industries aéronautiques et aérospatiales sont maintenant mis en œuvre dans de nombreux secteurs industriels tels que l'automobile et celui du naval. Ils sont effectivement employés pour réaliser les structures primaires qui supportent les efforts. En fonction du niveau d'optimisation désiré, des campagnes expérimentales doivent être mises en place afin de valider le comportement mécanique de ces matériaux pour différents types de chargements (statique, dynamique, fatigue). Ensuite, il convient de proposer un modèle de comportement mécanique afin de pouvoir simuler au mieux la réponse de ces structures. Actuellement, les modèles de comportement classiques ne peuvent toujours pas décrire le comportement de ces matériaux pour l'ensemble des sollicitations précitées. Les composites étant des matériaux fortement hétérogènes, qui de surcroît possèdent dorénavant des microstructures de plus en plus complexes, imposent le développement d'actions de recherche afin de mieux les comprendre et les modéliser. Développer ou améliorer donc les modèles de comportement existants afin de prendre en compte les nouvelles spécificités des matériaux composites constitue un axe de recherche actif [11], [55], [56], [57].

Une des approches envisagées qui répond aux problématiques précédentes, serait d'ajouter des paramètres supplémentaires dans les lois phénoménologiques existantes afin de les enrichir. Cependant, cette solution entraîne impérativement une augmentation significative des temps de calculs, sans forcément introduire plus de sens physique. C'est pourquoi le développement de nouveaux modèles plus adaptés est nécessaire. Ce travail peut être appréhendé de différentes façons, et notamment comme on l'a vu dans le chapitre précédent, par le biais des modèles fractionnaires. Les modèles constitutifs à base de dérivées fractionnaires sont de plus en plus utilisés pour décrire des phénomènes physiques [20], [21], [36], [45]. Ils sont particulièrement bien adaptés à la modélisation des phénomènes héréditaires viscoélastiques. En accord avec les propriétés principales des opérateurs fractionnaires, cette approche est prometteuse pour

décrire le comportement mécanique des structures hétérogènes naturelles ou artificielles : polymères, alliages, strates géologiques.

Dans ce chapitre, on propose une analyse critique des modèles de comportement visqueux dédiés à l'étude des polymères et des matériaux composites (paragraphe 2.2). Afin de décrire le comportement mécanique, on rappelle les méthodes phénoménologiques globales dans le paragraphe 2.3. Ensuite, notre attention se porte sur l'application du calcul fractionnaire à différents problèmes viscoélastiques. On présente les modèles viscoélastiques fractionnaires de Kelvin-Voigt [29], Maxwell [30], [31], [32] et Zener [33] (paragraphe 2.4). Ces modèles permettent de faire apparaître des fonctions de relaxation et de fluage dédiées à l'étude des polymères. Nous résumerons aussi la théorie proposée par Rabotnov [35] concernant la mécanique héréditaire et son ensemble de fonctions d'exponentielles fractionnaires. Ensuite, nous exposerons le traitement dans le domaine fréquentiel des modèles fractionnaires [20], [37] qui permettent de correctement représenter la réponse des structures viscoélastiques amorties (paragraphe 2.5). Enfin, nous terminerons cette partie par les relations qu'il peut y avoir entre un modèle empirique fractionnaire et un modèle moléculaire pour polymères développé par Rouse [38] (paragraphe 2.6) : cela nous permettra de démontrer les fondements physiques des équations fractionnaires.

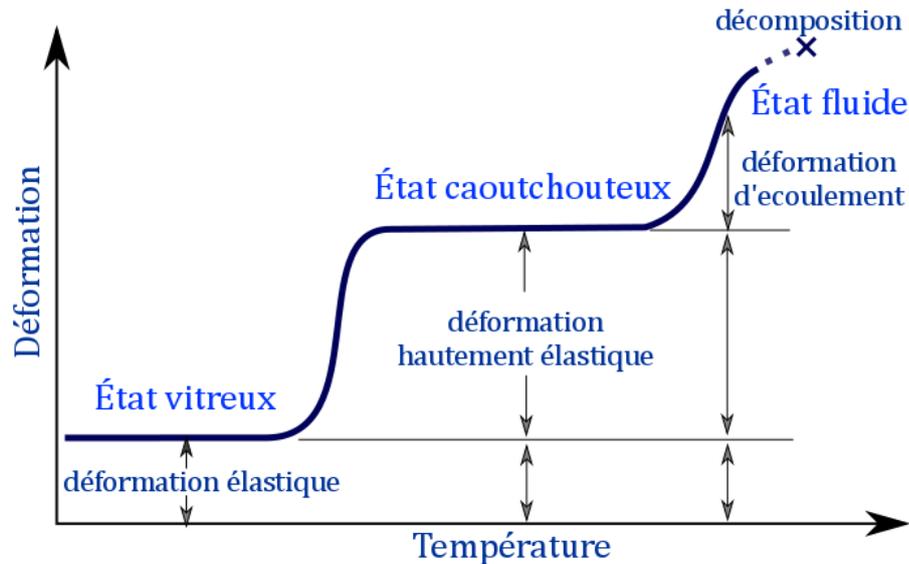
Pour conclure ce chapitre (paragraphe 2.7), les modèles destinés à décrire les boucles d'hystérésis lors d'essais de fatigue sont présentés. On s'intéressera plus particulièrement au modèle de Drozdov [39] qui permet de déterminer la limite en fatigue de polymères grâce à une représentation des quelques premiers cycles, à l'aide d'équations polynomiales. Nous proposerons ensuite un résumé de l'approche de Caputo [40] qui permet également de déterminer la limite en fatigue par la modélisation des boucles d'hystérésis avec des dérivées fractionnaires dans le domaine fréquentiel. Nous terminerons enfin cette présentation par le modèle de comportement développé par Mateos [41] pour représenter les boucles d'hystérésis lors de chargements cycliques pour des matériaux composites. Dans un tout dernier point, nous décrirons les grandes lignes d'une méthode « d'auto-échauffement » qui a été développée au sein de notre laboratoire [7], [58] pour déterminer rapidement la limite en fatigue de matériaux composites à matrice thermodurcissable ou thermoplastique. Les fondements de cette méthode reposent sur l'identification de quantités d'énergie dissipée au cours des essais expérimentaux : posséder un modèle permettant d'identifier numériquement et rapidement ces quantités d'énergie perdues, entre autres dans les boucles d'hystérésis, se révélerait donc plus qu'intéressant et être un atout majeur.

## **2.2 COMPORTEMENT MECANIQUE**

### *2.2.1 Comportement des polymères*

Le comportement d'un matériau polymère est fonction de sa structure moléculaire. Il est possible de trouver des polymères non-organiques et organiques, amorphes et cristallins. Ces derniers se composent de monomères connectés formant de longues macromolécules (polymère). Les polymères ont un comportement mécanique qui est fonction du poids moléculaire. Le nombre de monomères dans le polymère (ou le degré de polymérisation) doit

être suffisamment grand pour atteindre de bonnes propriétés mécaniques. On considère que le nombre de monomères dans la chaîne est suffisamment grand si en ajoutant un autre monomère, les propriétés moléculaires ne changent pas [59]. Un polymère est dit **thermodurcissable** si les molécules sont connectées par des réactions chimiques et il est dit **thermoplastique** si les liaisons entre les molécules sont obtenues par des forces de Van der Waals. A hautes températures le polymère thermoplastique va fondre puis « re-polymériser » après refroidissement alors que le polymère thermodurcissable va s'endommager jusqu'à brûler. A cause de ce fait, les polymères thermoplastiques peuvent être mis en forme plusieurs fois et recyclés.



**Figure 2.1. Dépendance des propriétés de polymère de la température**

Les propriétés mécaniques des polymères sont fortement dépendantes de la température. Un polymère peut se trouver dans trois états différents en fonction de la température du matériau (**Figure 2.1**). L'augmentation de la température conduit à l'accroissement des volumes libres intermoléculaires et à la diminution des forces de liaisons [60].

**L'état vitreux.** Dans cet état les déformations élastiques (ou réversibles) sont relativement petites (1-10%). Un polymère vitreux est plus rigide s'il a un fort poids moléculaire. Le polymère à l'état vitreux peut être représenté par un corps solide fragile.

**L'état caoutchouteux.** Le polymère dans cet état est dit caoutchoutique. Il se présente sous la forme de très longues molécules reliées entre elles par des points de jonction relativement rares. Le polymère caoutchoutique est capable de se déformer réversiblement pour des déformations de plusieurs centaines de pourcent. Cet état est spécifique aux polymères.

**L'état fluide.** Le polymère à l'état fluide se comporte comme un liquide très visqueux. Les déformations réversibles sont absentes. Cet état est généralement réalisé aux températures élevées. Le polymère à l'état fluide est utilisé dans la production de structures de polymères.

### 2.2.2 Comportement des composites

Un matériau composite est un matériau qui se compose de deux phases : la matrice et le renfort. Parmi tous les types de matériau composite possibles, notre attention se concentre sur le comportement de composites à fibres longues et à matrice polymère.

Le comportement des matériaux composites est assez complexe : il dépend du comportement de la matrice, des fibres et de la liaison entre eux. La matrice du composite, comme la plupart des polymères, possède un comportement viscoélastique [61], [62]. Dans le domaine réversible, les efforts sur le composite sont partiellement repris par le polymère, ce qui provoque le mouvement et le réarrangement des chaînes mais pas leurs destructions. Les déformations sont élastiques. Par contre un phénomène dissipatif demeure présent, traduisant une viscosité du polymère. Cette dissipation est associée à l'existence de phénomènes thermiques actifs. Ces phénomènes sont dépendants de la contrainte et de la vitesse de déformation. A partir d'une certaine valeur de chargement, les réarrangements des chaînes deviennent irréversibles et des déformations plastiques apparaissent. Les déformations plastiques sont supérieures aux déformations élastiques. L'apparition de ces déformations permanentes est associée à la destruction de la structure moléculaire : les liaisons se rompent et de nouvelles liaisons peuvent se former en rapprochant des éléments de polymère actifs. Si le niveau du chargement augmente encore, l'amorçage de la rupture se forme aux endroits où des liaisons moléculaires disparaissent. Ces ruptures sont favorisées par les sollicitations externes. Ce phénomène est également dépendant de la vitesse de déformation. Le mécanisme de rupture peut varier en fonction de la température. On considère que la rupture a un caractère fragile si le polymère est à l'état vitreux ou un caractère ductile pour les polymères à l'état caoutchoutique. L'interface entre la matrice et les fibres est un endroit potentiellement faible où la rupture peut se localiser.

## 2.3 METHODE PHENOMENOLOGIQUE GLOBALE

La méthode phénoménologique globale consiste à étudier le comportement du matériau par un élément de volume représentatif au sens de la mécanique des solides. L'élément de volume doit être choisi suffisamment grand pour inclure les hétérogénéités de matière et suffisamment petit pour que les dérivées partielles des équations de la mécanique des milieux continus aient un sens.

Afin de modéliser le comportement des matériaux, il existe trois grandes méthodes phénoménologiques différentes :

**L'approche microscopique.** Les mécanismes de rupture et de déformation sont modélisés à l'échelle des atomes ou des molécules. Le comportement du matériau à l'échelle macroscopique est le résultat d'une intégration ou d'une homogénéisation des variables microscopiques à l'échelle de l'élément de volume de la mécanique.

**L'approche thermodynamique.** En suivant cette approche, le milieu réel se représente par un milieu équivalent homogénéisé. Les phénomènes physiques microscopiques sont représentés par des « variables internes » macroscopiques. Un exemple d'application de cette approche est montré dans le chapitre 3.

**L'approche fonctionnelle.** Avec cette approche, les lois sont représentées sous une forme héréditaire faisant intervenir un produit de convolution, afin de décrire le comportement des matériaux à mémoire. Cette approche décrit correctement le comportement des matériaux viscoélastiques. Par contre, l'histoire des variables observables doit être connue.

Chacune de ces approches a des avantages et des inconvénients et doit être choisie en fonction du type de problèmes, des paramètres mesurables, du matériau, etc.

Au cours d'un essai on peut mesurer quatre grandeurs mécaniques : le déplacement, la force, la température, le temps. En utilisant ces grandeurs, on peut construire les variables physiquement sur l'élément de volume représentatif :

- La déformation totale  $\epsilon$ , les déformations élastiques réversibles  $\epsilon^e$  ou permanentes  $\epsilon^p$  et leurs vitesses,
- La contrainte  $\sigma$ ,
- La température  $T$ ,
- Le temps  $t$  ou le nombre de cycles à rupture  $N_R$ .

L'application généralisée en industrie des polymères et des composites à matrice polymère nécessite une étude complexe de leur comportement en fonction du type de chargement. Il serait souhaitable d'obtenir un modèle général avec un ensemble de paramètres qui permettrait de décrire le comportement sous différentes sollicitations : fluage, relaxation, chargement cyclique quasi-statique, fatigue, chargement dynamique, etc. Malheureusement cela n'est toujours pas possible et on a donc des modèles spécifiques adaptés pour tel type de matériau et pour telle sollicitation : c'est l'objet des paragraphes suivants où nous faisons une revue des modèles existants afin de décrire le comportement des polymères et des matériaux composites pour différentes sollicitations.

## **2.4 ETAT DE L'ART DES MODELES VISCOELASTIQUES A BASE DE CALCULS FRACTIONNAIRES**

### *2.4.1 Introduction*

Aujourd'hui, de nouveaux matériaux apparaissent dans de nombreux secteurs d'activités tels que l'aéronautique, l'industrie automobile, navale ou encore le domaine spatial. Le comportement mécanique de ces matériaux ne peut pas être toujours décrit par des modèles classiques. De fait, ces nouveaux matériaux ont une structure complexe et souvent hétérogène. Par conséquent, cette hétérogénéité localisée majoritairement à l'échelle microscopique induit des couplages physiques observables, par exemple, lors de chargements mécaniques. C'est pourquoi un axe de recherche consiste à développer de nouveaux modèles correspondant aux spécificités de ces nouveaux matériaux ou alors, tout au moins, à améliorer les modèles existants. Une première approche envisageable est d'enrichir les modèles existants en ajoutant des paramètres dans la loi constitutive. Cette solution va entraîner cependant une augmentation significative des temps de calculs. C'est pourquoi le développement de nouveaux modèles plus adaptés est nécessaire : les dérivées fractionnaires apparaissent être un outil idéal et à investiguer.

Dans les parties suivantes, on analyse les modèles fractionnaires existants qui sont appliqués à différentes situations. Nous verrons que l'application du calcul fractionnaire peut décrire le comportement mécanique héréditaire. Nous proposerons aussi les liens qui existent pour les modèles fractionnaires avec les phénomènes physiques. Enfin, nous montrerons que les modèles fractionnaires peuvent également être utilisés pour décrire le comportement mécanique viscoplastique des polymères et des composites.

#### 2.4.2 Les processus de relaxation et de fluage

L'équation viscoélastique est une des premières applications du calcul fractionnaire. Il a été constaté expérimentalement que la fonction de la relaxation des contraintes est proportionnelle au temps élevé à une puissance fractionnaire pour certains matériaux au comportement viscoélastique [63]. Cette conclusion est en contradiction avec la loi classique décrivant la relaxation comme une fonction exponentielle du temps [49], [52], [64], [65]. La loi de comportement sous une forme intégrale permet de prendre en compte l'histoire du chargement du matériau contrairement à une équation sous une forme différentielle.

En fonction des données expérimentales, la relation entre la contrainte et la déformation peut être présentée comme une fonction des valeurs précédentes des vitesses de déformation [66]. Dans ce cas, la relation constitutive se représente sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \int_0^t K(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

où  $K(t - \tau)$  est un noyau d'intégrale.

Le comportement héréditaire des matériaux polymères peut être représenté par la loi intégrale de type (2.1) avec le noyau de type Abel qui est une fonction puissance [63] :

$$K(t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{G}{(t - \tau)^\alpha} \quad (2.2)$$

où  $G$  est un paramètre du matériau strictement positif,  $\Gamma(1 - \alpha)$  est la fonction Gamma définie par l'équation (1.1) et  $\alpha$  est une valeur comprise entre zéro et un. Avec un noyau de la forme précisée par la relation (2.2), et en considérant que  $\varepsilon(0) = 0$ , la relation entre le contrainte et déformation se représente sous la forme suivante [66]:

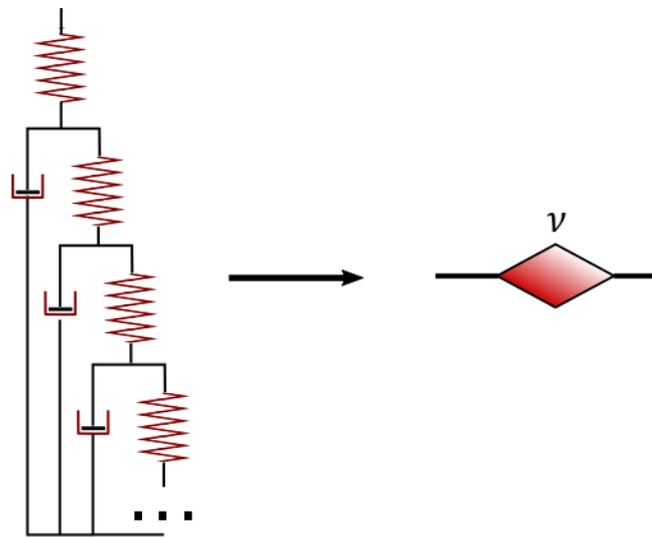
$$\sigma(t) = \frac{G}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau = GD_0^\alpha \varepsilon(t) \quad (2.3)$$

où  $D_0^\alpha f(t)$  est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville (1.26).

De cette manière, la loi viscoélastique occupe une position intermédiaire entre le corps élastique ( $\alpha = 0$ ) et un état visqueux anélastique ( $\alpha = 1$ ) :

$$\sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon(t), & \text{Loi de Hooke} \\ \nu \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, & \text{Loi de Newton} \end{cases} \quad (2.4)$$

Au sens rhéologique, la dérivée fractionnaire dans la loi de comportement peut être interprétée comme un élément qui s'appelle le **spring-pot** [29]. Cet élément est une représentation asymptotique d'assemblage d'éléments élastiques (**spring**) et viscoélastiques (**dash-pot**) connectés en série et en parallèle (Figure 2.2) [67]. De cette façon, l'élément spring-pot permet de modéliser plusieurs types de comportement mécanique en faisant varier l'ordre de dérivation  $\alpha$ . Si  $\alpha \rightarrow 0$ , le comportement de l'élément fractionnaire tend vers la réponse élastique ; dans le cas où  $\alpha \rightarrow 1$ , la viscosité augmente.



**Figure 2.2. L'élément rhéologique fractionnaire « spring-pot »**

Les modèles rhéologiques fractionnaires standards et leurs réponses pour les essais de fluage et relaxation sont présentés dans les parties suivantes.

**Rappel**

Soit un modèle, initialement au repos, sans historique du chargement, soumis à une contrainte externe  $\sigma_0$  appliquée à partir d'un instant  $t = 0$  :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \mathcal{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sigma_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\mathcal{H}(t)$  est la fonction d'Heaviside.

La contrainte reste constante pendant l'intervalle de temps  $0 \leq t \leq \tau$ . La fonction de fluage ou fonction retard  $J(t)$  détermine la déformation  $\varepsilon(t)$  correspondante à une charge constante  $\sigma(t) = \sigma_0$

Soit une extension constante  $\varepsilon_0$  appliquée au modèle à l'instant  $t = 0$  :

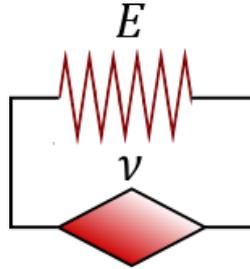
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \varepsilon_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (2.6)$$

Afin de définir la réponse en contrainte  $\sigma(t)$  à une extension constante  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ , on introduit une fonction de relaxation  $\mathbf{G}(t)$ .

Dans les calculs suivants on suppose que  $(I^{1-\alpha}\varepsilon)(0) = (I^{1-\alpha}\sigma)(0) = 0$ .

### 2.4.3 Modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt

Le modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt a été proposé dans [29]. Ce modèle est composé d'un ressort et d'un élément fractionnaire (le spring-pot) qui sont connectés en parallèle (**Figure 2.3**).



**Figure 2.3. Modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt**

L'équation différentielle de ce modèle est :

$$E\varepsilon(t) + \nu D^\alpha \varepsilon(t) = \sigma(t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.7)$$

où  $E$  est le module élastique et  $\nu$  est une constante viscoélastique.

La solution de l'équation différentielle fractionnaire (2.7) en accord avec (1.82) ou (1.96) est :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{E}{\nu} (t-x)^\alpha \right) (t-x)^{\alpha-1} \frac{\sigma(x)}{\nu} dx \quad (2.8)$$

Grâce à cette solution, la fonction du fluage  $\mathbf{J}(t)$  peut être définie. Soit le système soumis à une sollicitation sous la forme comme (2.5), la réponse du système est donnée par :

$$\varepsilon(t) = \mathbf{J}(t)\sigma_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - E_{\alpha,1} \left( -\frac{E}{\nu} t^\alpha \right) \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.9)$$

En admettant que  $\alpha = 1$ , on retrouve la forme de la réponse du modèle de Kelvin-Voigt classique :

$$\varepsilon(t) = \mathbf{J}(t)\sigma_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\nu}t} \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.10)$$

La fonction retard  $\mathbf{J}(t)$  tend exponentiellement vers la loi de Hooke  $\mathbf{J} = \frac{1}{E}$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

La fonction relaxation  $\mathbf{G}(t)$  est définie par la dérivation fractionnaire d'ordre  $\alpha$  d'une constante :

$$\sigma(t) = \mathbf{G}(t)\varepsilon_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}(t) = \left( E + \nu \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.11)$$

On rappelle que dans le cas du modèle de Kelvin-Voigt classique, la réponse en contrainte à un échelon s'écrit :

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0\mathcal{H}(t) + \nu\varepsilon_0\delta(t) \quad (2.12)$$

où  $\delta(t)$  est une fonction de Dirac.

On retrouve dans [65], les études correspondant aux fonctions de fluage et de relaxation pour le modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire.

#### 2.4.4 Modèle fractionnaire de Maxwell

Le modèle de Maxwell est un autre modèle rhéologique souvent utilisé dans la littérature. L'implémentation des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville dans ce modèle a été étudiée dans les travaux [30], [31], [32]. Le modèle de Maxwell est composé d'un ressort et d'un spring-pot connectés en série (Figure 2.4).



**Figure 2.4. Modèle fractionnaire de Maxwell**

L'équation différentielle de ce modèle est :

$$D^\alpha \sigma(t) + \frac{E}{\nu} \sigma(t) = E D^\alpha \varepsilon(t) \quad (2.13)$$

La réponse du système et la fonction de relaxation  $\mathbf{G}(t)$  sont définies sous la forme :

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}(t) = E E_{\alpha,1} \left( -\frac{E}{\nu} t^\alpha \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.14)$$

On rappelle que pour un modèle Maxwell classique, l'équation (2.14) s'écrit sous la forme suivante :

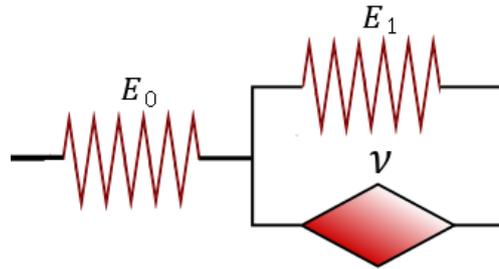
$$\sigma(t) = \mathbf{G}(t)\varepsilon_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}(t) = E e^{-\frac{E}{\nu}t} \mathcal{H}(t) \quad (2.15)$$

La fonction de fluage (2.16) est obtenue par l'intégration d'ordre  $\alpha$  de l'équation (2.13) avec un  $\sigma(t)$  défini par la formule (2.5).

$$\varepsilon(t) = \mathbf{J}(t)\sigma_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}(t) = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{\nu} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.16)$$

### 2.4.5 Modèle fractionnaire de Zener

Les modèles de Kelvin-Voigt ou de Maxwell ne permettent pas de décrire correctement le comportement viscoélastique d'un matériau lors de sollicitations de fluage et de relaxation. Le modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire est associé à un module de relaxation infini en  $t = 0$  (2.11). Le modèle de Maxwell fractionnaire est associé à une fonction retard qui croît sans admettre de borne supérieure lorsque  $t$  devient grand (2.16). Afin de reproduire à l'aide d'un modèle unique les deux modes de sollicitation, on peut introduire un modèle fractionnaire de Zener [33]. Ce modèle se compose du modèle de Kelvin-Voigt et d'un élément élastique connecté en série (Figure 2.5).



**Figure 2.5. Modèle fractionnaire de Zener**

L'équation constitutive du modèle de Zener fractionnaire est :

$$\sigma(t) + bD^\alpha\sigma(t) = E(\varepsilon(t) + aD^\alpha\varepsilon(t)) \quad (2.17)$$

avec :

$$b = \frac{\nu}{E_0 + E_1}, \quad E = \frac{E_0E_1}{E_0 + E_1}, \quad a = \frac{\nu}{E_1} \quad (2.18)$$

Comme conséquence de la définition de ce modèle, on constate que  $a > b$ . Ce fait peut être prouvé par l'application de cas particuliers de chargement sur le modèle de Zener classique en admettant que  $\alpha = 1$ .

$$\sigma(t) + b\dot{\sigma}(t) = E(\varepsilon(t) + a\dot{\varepsilon}(t)) \quad (2.19)$$

Soit le système (2.19) sous une charge dynamique telle que la valeur  $\dot{\sigma}(t)$  soit très grande. Alors la valeur  $\dot{\varepsilon}(t)$  sera également grande et donc les valeurs  $\sigma(t)$  et  $\varepsilon(t)$  peuvent être négligées. Dans ce cas on retrouve que :

$$\dot{\sigma}(t) = E \frac{a}{b} \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.20)$$

où  $E \frac{a}{b}$  s'appelle le module d'élasticité instantanée.

Supposons maintenant que la charge évolue très lentement en fonction du temps. Puisque la déformation évoluera également lentement, les valeurs  $\dot{\sigma}(t)$  et  $\dot{\varepsilon}(t)$  seront négligeables. L'équation (2.19) se simplifiera de la façon suivante :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \quad (2.21)$$

où  $E$  est le module d'élasticité de longue durée.

Considérons l'application soudaine d'une charge qui reste ensuite constante. Au début apparaît la déformation qui correspond au module d'élasticité instantanée  $E \frac{a}{b}$ . Cette déformation croît et tend vers une valeur qui se définit avec le module d'élasticité de longue durée  $E$ . Pour que le second principe de la thermodynamique soit vérifié, il est nécessaire que  $J(t)$  soit une fonction positive et croissante et  $G(t)$  une fonction positive et décroissante, ce qui conduit à un travail des forces externes positif lorsque la déformation augmente. Alors, la déformation instantanée est inférieure à la déformation de longue durée. Donc, à l'inverse, le module d'élasticité d'instantanée  $E \frac{a}{b}$  est supérieur au module d'élasticité de longue durée  $E$ . On en déduit que  $a$  doit être supérieur à  $b$ .

En supposant que  $\sigma(t)$  est déterminé par la formule (2.5), la réponse du système mécanique et la fonction du fluage sont définies comme la solution d'équation (2.17). On retrouve que :

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0 \quad \text{avec} \quad J(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - \left( 1 - \frac{b}{a} \right) E_{\alpha,1} \left( -\frac{t^\alpha}{a} \right) \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.22)$$

Dans le cas où  $\alpha = 1$ , la solution d'équation fractionnaire (2.22) se transforme sous la forme classique suivante :

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0 \quad \text{avec} \quad J(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - \left( 1 - \frac{b}{a} \right) e^{-\frac{t}{a}} \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.23)$$

On considère un essai de recouvrance. Soit un système mécanique soumis à la charge constante  $\sigma_0$  appliquée de l'instant  $t = 0$  à l'instant  $t = t_1$  :  $\sigma(t) = \sigma_0$  pour  $0 < t < t_1$  et  $\sigma(t) = 0$  pour  $t > t_1$ . Dans ce cas, la réponse à un essai de recouvrance, avec un modèle de Zener fractionnaire se définit par la formule :

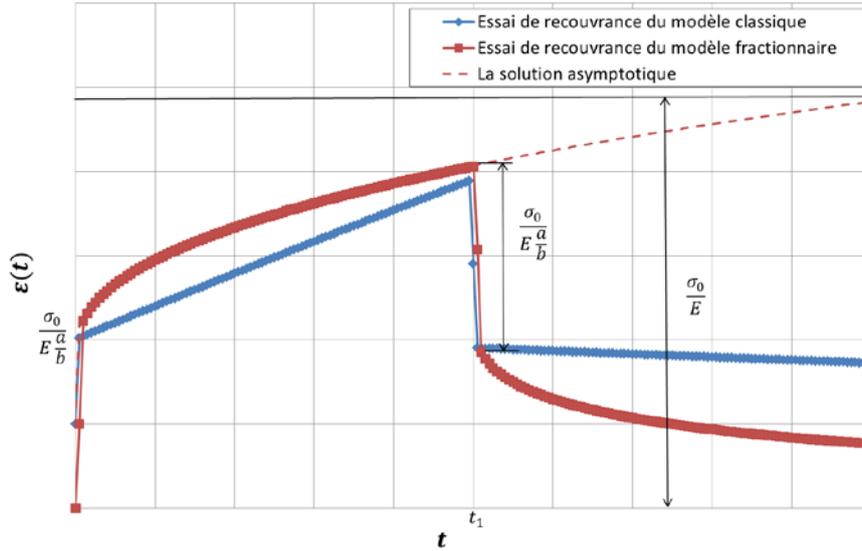
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \left( E_{\alpha,1} \left( -\frac{(t-t_1)^\alpha}{a} \right) - E_{\alpha,1} \left( -\frac{t^\alpha}{a} \right) \right) \sigma_0 \mathcal{H}(t-t_1) \quad (2.24)$$

Ou sous la forme alternative suivante, si  $\alpha = 1$  :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \left( e^{-\frac{t-t_1}{a}} - e^{-\frac{t}{a}} \right) \sigma_0 \mathcal{H}(t-t_1) \quad (2.25)$$

La réponse du système définie par les équations (2.24) et (2.25) est illustrée sur la **Figure 2.6**.

On remarque que la différence entre les valeurs de  $\varepsilon(t)$  obtenues par la formule (2.24) et (2.25) à l'instant  $t = t_1$  correspond à la valeur inverse du module instantanée  $\left( \frac{1}{E \frac{a}{b}} \right)$ . Si le temps  $t$  tend vers infini, la déformation devient élastique.



**Figure 2.6. Essai de recouvrance**

La fonction de la relaxation  $\mathbf{G}(t)$  peut être obtenue de la même façon que la fonction du fluage (2.22) sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \mathbf{G}(t)\varepsilon_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}(t) = E \left( 1 + \left( \frac{a}{b} - 1 \right) E_{\alpha,1} \left( -\frac{t^\alpha}{b} \right) \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) se transforme sous la forme classique suivante, si  $\alpha = 1$  :

$$\sigma(t) = \mathbf{G}(t)\varepsilon_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}(t) = E \left( 1 + \left( \frac{a}{b} - 1 \right) e^{-\frac{t}{b}} \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.27)$$

On considère un essai d'effacement. Soit un système mécanique soumis à la déformation constante  $\varepsilon_0$  de l'instant  $t = 0$  à l'instant  $t = t_1$  :  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  pour  $0 < t < t_1$  et  $\varepsilon(t) = 0$  pour  $t > t_1$ . Dans ce cas, la réponse à un essai d'effacement, avec un modèle de Zener fractionnaire se définit par la formule :

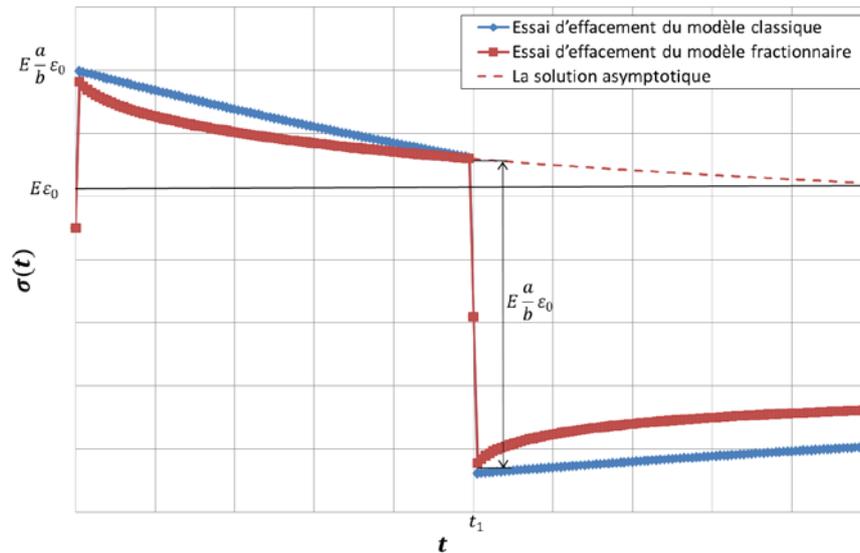
$$\sigma(t) = -E \left( \frac{a}{b} - 1 \right) \left( E_{\alpha,1} \left( -\frac{(t-t_1)^\alpha}{b} \right) - E_{\alpha,1} \left( -\frac{t^\alpha}{b} \right) \right) \varepsilon_0 \mathcal{H}(t-t_1) \quad (2.28)$$

ou encore avec  $\alpha = 1$  :

$$\sigma(t) = -E \left( \frac{a}{b} - 1 \right) \left( e^{-\frac{t-t_1}{b}} - e^{-\frac{t}{b}} \right) \varepsilon_0 \mathcal{H}(t-t_1) \quad (2.29)$$

Le graphe sur la Figure 2.7 représente les essais d'effacement définis par les équations (2.28) et (2.29) sur un intervalle temporel :  $0 < t < t_1$ .

Ainsi, avec un modèle de Zener, si on impose à  $t = 0$  un échelon de déformation unitaire  $\varepsilon_0$ , la contrainte à l'instant initial correspond au module instantané  $E \frac{a}{b}$ . Cette contrainte se relaxera jusqu'à atteindre une valeur correspondant au module de longue durée  $E$ .



**Figure 2.7. Essai d'effacement**

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont les temps caractéristiques respectivement de fluage et de relaxation. Sachant que l'on a démontré que  $a > b$ , cela montre que le temps de relaxation est inférieur au temps du fluage.

Le modèle (2.17) permet de reconstruire les données expérimentales plus précisément que les modèles standards entiers. Les résultats de ce modèle avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et les fonctions de fluage (2.22) et de relaxation (2.26) sont présentés dans les travaux [64], [68], [69], [70] et [71]. Le comportement mécanique d'élastomères sous un chargement harmonique dans le domaine des basses fréquences a été étudié par Cosson [72].

L'implémentation de dérivées fractionnaires de Caputo dans le modèle (2.17) a été proposée dans les travaux [73] et [74]. Les résultats de ce modèle ont été validés pour le verre et les métaux. Les paramètres  $E$ ,  $a$ ,  $b$ , et  $\alpha$  ont été définis pour les métaux dans le cadre de la théorie de la thermodynamique par Zener [75]. La fonction Mittag-Leffler a été proposée par Gross [76] pour améliorer l'approximation des données expérimentales dans les essais de fluage.

#### 2.4.6 Modèle héréditaire de Rabotnov

Rabotnov, dans ses travaux sur la mécanique héréditaire, a développé un modèle de comportement dédiée aux matériaux à mémoire [35] et [36]. Il a montré que le comportement des matériaux peut être décrit par l'équation intégrale de Volterra de deuxième type sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = E_0 \left[ \varepsilon(t) - \lambda \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(\beta, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] \quad (2.30)$$

ou sous une forme équivalente telle que :

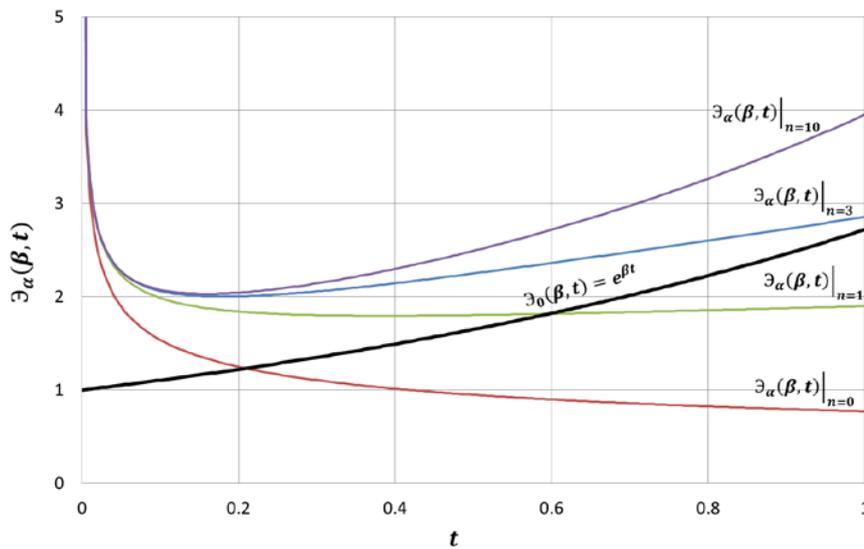
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \left[ \sigma(t) + \lambda \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(\beta, t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (2.31)$$

où  $\mathfrak{D}_\alpha(\beta, t)$  s'appelle la fonction de Rabotnov qui est définie par la somme :

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta, t) = t^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)]} \quad (2.32)$$

La fonction (2.32) appartient à la classe de fonctions exponentielles fractionnaires. La théorie de ces fonctions est développée dans [36]. L'intégrale avec le noyau  $\mathfrak{D}_\alpha(\beta, t)$  satisfait les conditions héréditaires de Volterra [51].

La représentation graphique de la fonction exponentielle fractionnaire (2.32) est illustrée sur la Figure 2.8 pour différents valeurs de  $n, n = \{0, 1, 3, 10\}$  en supposant  $\beta = 1$  et  $\alpha = 0.3$ . Le cas particulier de la fonction (2.32) pour  $\alpha = 0$  (équation (2.33)) est présenté sur la Figure 2.8.



**Figure 2.8. Fonction exponentielle fractionnaire de Rabotnov pour différents nombres  $n, n = \{0, 1, 3, 10\}$  en supposant  $\beta = 1, \alpha = 0.3$  et la fonction exponentielle  $e^t$**

Si  $\alpha = 0$ , la fonction exponentielle fractionnaire (2.32) se transforme en fonction exponentielle :

$$\mathfrak{D}_0(\beta, t) = e^{\beta t} \quad (2.33)$$

Soit  $\alpha > 0$ . Les premiers membres de la série (2.32) tendent vers l'infini quand  $t$  tend vers zéro. Par exemple, si  $n = 0$ , la formule (2.32) se transforme en un noyau simple de type Abel (2.34) :

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta, t) \approx \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = K(t) \quad (2.34)$$

A partir d'un certain  $n$ , l'exposant de paramètre  $t$  est positif et la série (2.32) tend vers l'infini :

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta, \infty) = \infty \quad \beta > 0 \quad (2.35)$$

Il a été montré que les équations intégrales avec le noyau de type Abel (2.34) représentent correctement le comportement du matériau dans les premiers instants après l'application du chargement. Par contre, expérimentalement, la relaxation du matériau se passe plus rapidement que ne le prévoit la modélisation. Il est par conséquent préférable d'utiliser une équation intégrale avec un noyau exponentiel fractionnaire de type (2.32) pour représenter le comportement plus précisément.

L'influence des facteurs climatiques, comme la température ou l'hygrométrie, a été prise en compte dans le travail [36]. Les équations de Rabotnov sont enrichies avec des fonctions qui dépendent de la température et de l'humidité, sous la forme suivante :

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(\beta, t - \tau) f_1(T) f_2(W) \sigma(\tau) d\tau \quad (2.36)$$

où  $T$  est la température et  $W$  est le taux d'humidité.

Dans [34] Rabotnov introduit l'équation rhéologique généralisée (2.37) avec une dérivée fractionnaire pour décrire le comportement des milieux héréditaires.

$$\sum_{i=0}^n a_i D_0^{i\alpha} \sigma(t) = \sum_{k=0}^n b_k D_0^{k\alpha} \varepsilon(t) \quad (2.37)$$

Koeller étudie une forme particulière de l'équation (2.37) pour certains problèmes de mécanique viscoélastique. Il s'intéresse à une relation contrainte déformation sous la forme suivante [77]:

$$\sum_{i=0}^2 a_i D_0^{i\alpha} \sigma(t) = \sum_{k=0}^2 b_k D_0^{k\alpha} \varepsilon(t) \quad (2.38)$$

Les formules (2.37) et (2.38) s'appellent les équations de Rabotnov-Koeller [78].

## 2.5 MODELE FREQUENTIEL DE BAGLEY-TORVIK

Des recherches importantes pour les modèles viscoélastiques ont été réalisées par Bagley et Torvik [37]. Ils considèrent une équation générale de type (2.17) avec des ordres de dérivation différents :

$$\sigma(t) + bD^\beta \sigma(t) = E\varepsilon(t) + E_1 D^\alpha \varepsilon(t) \quad (2.39)$$

où  $\alpha, \beta, E, a$  et  $b$  sont les paramètres réels du modèle. Ils appliquent la transformation de Fourier (1.61) sur l'équation (2.39) pour obtenir l'expression suivante dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{\sigma}(i\omega) = \hat{E}(i\omega) \hat{\varepsilon}(i\omega) \quad (2.40)$$

où  $\hat{E}(i\omega)$  est le module fréquentiel défini par la formule suivante :

$$\hat{E}(i\omega) = \frac{E + E_1(i\omega)^\alpha}{1 + b(i\omega)^\beta} \quad (2.41)$$

Dans les domaines des basses fréquences, le module  $\hat{E}(i\omega)$  tend vers  $E$  (le module de la résine) et le comportement du matériau tend vers une réponse absolument élastique. En augmentant la fréquence, le module  $\hat{E}(i\omega)$  peut s'approximer par  $(i\omega)^{\alpha-\beta} \frac{E_1}{b}$ ; de ce fait, la réponse de matériau correspond au domaine vitreux. Dans le cas où  $\alpha = \beta$ , lorsque  $\omega$  devient grand, le module  $\hat{E}(i\omega)$  tend vers la constante:  $\frac{E_1}{b}$ . De nombreux résultats expérimentaux valident l'existence de la zone de transition entre l'état vitreux et l'état caoutchoutique des polymères. Bagley et Torvik [37], démontrent, à l'aide du travail interne et du taux de dissipation qui doit demeurer non négatif, les conditions que doivent satisfaire les paramètres du modèle. Ces conditions s'écrivent :

$$\alpha = \beta \quad E > 0 \quad b > a \quad (2.42)$$

Dans le cadre de ce travail, la réponse du matériau soumis à une sollicitation sinusoïdale en déformation est une contrainte sinusoïdale. Cela a pour conséquence la création d'une boucle d'hystérésis elliptique. Il a été prouvé que la fonction de dissipation d'énergie par cycle est toujours positive pour les paramètres respectant les conditions thermodynamiques (2.42).

Les résultats sont valides pour de nombreux matériaux polymères. Le modèle nécessite quatre paramètres. L'équation du modèle (2.39) est également liée à la théorie moléculaire présentée par Rouse [38]. Le modèle de Bagley et Torvik peut être très pertinent pour reproduire la réponse de structures viscoélastiques amorties.

## 2.6 MODELE MOLECULAIRE DE ROUSE : LIAISON ENTRE LES MICRO ET MESO-MECANIKES

L'explication physique du modèle fractionnaire pour les solutions diluées de polymères est démontrée à partir de la théorie moléculaire proposée par Rouse [20], [38]. Une molécule de polymère se compose de chaînes de  $N$ -atomes ou de groupes atomiques (monomères) dont les actions sont modélisées par des ressorts élastiques de module  $K$ . Les segments connectés tournent librement autour de leurs extrémités. Les molécules sont dans un fluide newtonien à la température  $T$  (Figure 2.9). On suppose une sollicitation de forme sinusoïdale transverse entraînant la déformation de la surface. En conséquence, chacune des  $N$  molécules de la chaîne aura une vitesse composée de :

- la vitesse du fluide,
- la vitesse due au déplacement relatif des molécules les unes par rapport aux autres.

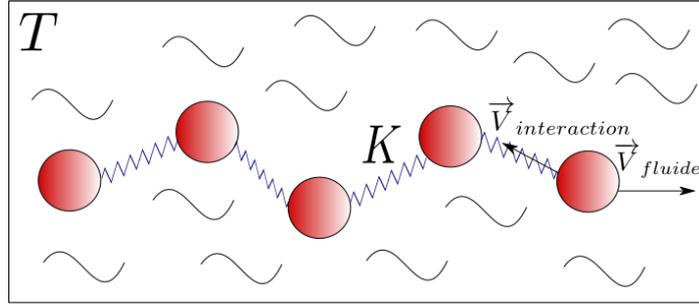
La théorie statistique proposée par Rouse conduit à établir un module de cisaillement de la solution visqueuse de polymère. Le module de cisaillement complexe s'écrit sous la forme suivante :

$$\hat{G}(\omega) = G_1(\omega) + iG_2(\omega) \quad (2.43)$$

où :

$$G_1(\omega) = nkT \sum_{p=1}^N \frac{\omega^2 \tau_p^2}{1 + \omega^2 \tau_p^2} \quad G_2(\omega) = \omega v_s + nkT \sum_{p=1}^N \frac{\omega \tau_p}{1 + \omega^2 \tau_p^2} \quad (2.44)$$

avec  $\tau_p$  le temps de relaxation du polymère,  $N$  le nombre d'atomes dans une chaîne,  $n$  le nombre de molécules dans le volume unitaire de polymère,  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue.



**Figure 2.9. Modèle moléculaire**

L'approximation du temps caractéristique de relaxation (2.45) est proposé par Rouse sous certaines hypothèses concernant les longueurs de la chaîne et la fréquence de rotation du dispositif (avec  $l < \frac{N}{5}$  et  $\omega \tau_1 < \frac{N^2}{250}$ ).

$$\tau_p \approx \frac{\tau_1}{l^2} \quad \text{avec} \quad \tau_1 \approx \frac{6(v_0 - v_s)}{\pi^2 nkT} \quad (2.45)$$

où  $v_0, v_s$  sont respectivement la viscosité du fluide et du polymère pour un écoulement stationnaire.

A partir des expressions (2.44) et (2.45), le module complexe se représente sous la forme suivante :

$$\hat{G}(\omega) = i\omega v_s + nkT \sum_{p=1}^{[N/5]} \left[ 1 - i \frac{l^2}{\omega \tau_1} \right]^{-1} \quad (2.46)$$

La somme dans l'expression précédente peut être remplacée par une intégrale. En utilisant l'équation (2.45) pour  $\tau_1$ , le module complexe devient :

$$\hat{G}(\omega) = i\omega v_s + \left[ \frac{3}{2} (v_0 - v_s) nkT \right]^{1/2} [i\omega]^{1/2} \quad (2.47)$$

La transformation intégrale inverse de l'expression (2.48) conduit au résultat souhaité dans le domaine temporel exprimé par la formule (2.49).

$$\hat{\sigma}(\omega) = \hat{G}(\omega) \hat{\epsilon}(\omega) \quad (2.48)$$

$$\sigma(t) = v_s \dot{\varepsilon}(t) + \left[ \frac{3}{2} (v_0 - v_s) n k T \right]^{\frac{1}{2}} D^{1/2} \varepsilon(t) \quad (2.49)$$

Le premier terme de la formule (2.49) correspond à la réponse en contrainte du fluide newtonien. Le deuxième terme correspond à la contribution de chaînes moléculaires [20]. L'histoire du chargement est prise en compte. Le modèle moléculaire de Rouse permet de montrer la présence des dérivées non-entières dans la loi empirique. Cette dérivée provient essentiellement de la modélisation des interactions par un réseau de ressorts infini.

Dans les travaux [53], une théorie de Rouse modifiée est proposée pour des polymères concentrés. Dans ce cas, la composante des contraintes associée au fluide newtonien est négligée. Avec une modification du temps de relaxation, l'équation (2.49) devient :

$$\sigma(t) = \left[ \frac{3\nu\rho RT}{2M} \right]^{\frac{1}{2}} D^{1/2} \varepsilon(t) \quad (2.50)$$

où  $M$  est la masse moléculaire,  $\rho$  est la densité,  $R_m$  est la constante universelle des gaz,  $T$  est la température absolue et  $\nu$  est la viscosité pour un écoulement stationnaire.

Dans les travaux de Schiessel et de ses collaborateurs [52], le modèle (2.49) est généralisé à tous les matériaux possédant une structure moléculaire complexe réticulée. Ils ont montré que le modèle fractionnaire d'ordre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , reproduit très bien la fonction de relaxation de nombreux polymères.

En conclusion, on peut finalement considérer que l'utilisation des dérivées fractionnaires dans la construction d'un modèle de comportement mécanique dédié aux polymères est physiquement justifiée par des modélisations moléculaires.

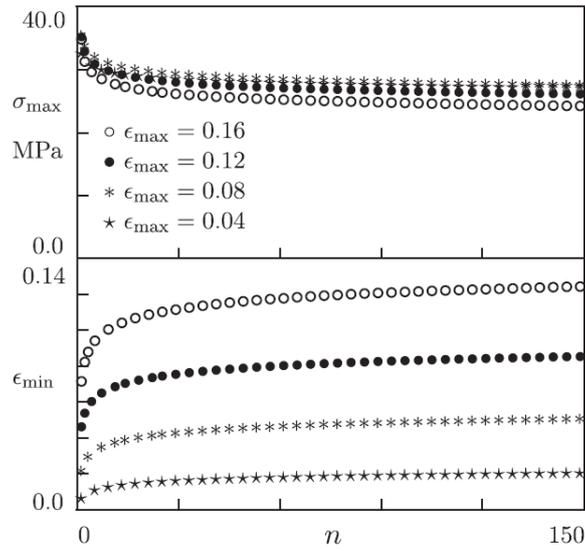
## 2.7 MODELISATION DES BOUCLES D'HYSTERESIS ET APPLICATIONS A LA FATIGUE

### 2.7.1 Modèle de Drozdov

Le modèle proposé par Drozdov dans [39] permet de décrire le comportement d'un polymère semi-cristallin sous un chargement cyclique. La campagne expérimentale proposée par Drozdov consiste en des essais de traction cyclique avec des déformations maximales variées. Le matériau étudié est un polypropylène isotactique Moplen HP 400R. C'est un polymère thermoplastique semi-cristallin de consommation courante. Pour chacun des tests expérimentaux, un échantillon est étiré avec une vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon} = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  jusqu'à la déformation maximale  $\varepsilon_{max}$  et ensuite déchargé jusqu'à une contrainte minimale  $\sigma_{min}$  avec une vitesse de déformation  $-\dot{\varepsilon}$ . Les valeurs de déformation maximale sont  $\varepsilon_{max} = 0.04, 0.08, 0.12$  et  $0.16$ . La contrainte minimale  $\sigma_{min}$  est posée égale à  $1 \text{ MPa}$  au lieu de  $\sigma_{min} = 0 \text{ MPa}$  pour éviter le flambage du spécimen. Les essais se composent de 150 cycles du charge-décharge.

Afin d'estimer les propriétés mécaniques de polypropylène lors des essais cycliques, la contrainte maximale  $\sigma_{max}$  (atteinte à  $\varepsilon_{max}$ ) et la déformation minimale  $\varepsilon_{min}$  (mesurée à  $\sigma_{min}$ ) sont enregistrées pour chaque série d'essais. A partir des résultats expérimentaux, on constate

que la contrainte maximale par cycle diminue alors que la déformation minimale croît avec l'augmentation du nombre de cycles (**Figure 2.10**).



**Figure 2.10. Contrainte maximale  $\sigma_{max}$  et déformation minimale  $\epsilon_{min}$  par cycle par rapport au nombre de cycles  $n$**

Le but ultime de ce travail est de développer un modèle de comportement destiné à prédire les contraintes maximales  $\sigma_{max}$  et les déformations minimales  $\epsilon_{min}$  pendant le chargement cyclique et pour un grand très grand nombre de cycles. Le modèle proposé par Drozdov est capable de représenter le comportement du polymère sous un chargement cyclique possédant un grand nombre de cycles en utilisant uniquement la modélisation des quelques premiers cycles de charge-décharge. La description de chaque cycle individuel de charge-décharge est faite à l'aide du modèle viscoplastique sous l'hypothèse des petites déformations en utilisant les hypothèses suivantes :

1. Le tenseur de déformation totale  $\epsilon$  se représente comme une somme des tenseurs de la déformation élastique  $\epsilon_e$  et plastique  $\epsilon_p$  :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \tag{2.51}$$

2. La vitesse de déformation viscoplastique est supposée proportionnelle à la vitesse de déformation totale :

$$\frac{d\epsilon_p}{dt} = \varphi \frac{d\epsilon}{dt} \tag{2.52}$$

où  $\varphi$  représente une fonction non négative qui est nulle dans l'état de référence et qui croît de façon monotone pendant le cycle de charge-décharge. La fonction est comprise entre zéro et un.

3. L'équation de comportement liant la contrainte à la déformation et qui inclut le paramètre  $\varphi$  qui dépend du temps se représente sous la forme suivante :

$$\sigma = -PI + \mu(1 - \varphi)\epsilon_e \tag{2.53}$$

où  $P$  est une pression inconnue,  $\mathbf{I}$  un tenseur unité et  $\mu$  la rigidité.

4. Le concept de mémoire lointaine des déformations précédentes.

Lors du premier cycle de charge-décharge (quand le polymère vierge est soumis à la première déformation), le changement du coefficient  $\varphi$  en fonction du temps  $t$  est décrit par l'équation phénoménologique suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= a_1(\Psi_1 + K_1\varepsilon_e^{eq} - \varphi)^2 \dot{\varepsilon}^{eq} \text{ (charge)} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= a_2(\Psi_2 + K_2\varepsilon_e^{eq} - \varphi)^2 \dot{\varepsilon}^{eq} \text{ (décharge)}\end{aligned}\tag{2.54}$$

avec la condition initiale  $\varphi(0) = 0$ .

Ici  $a_m, \Psi_m$  et  $K_m$  ( $m = 1, 2$ ) sont des constantes,  $\varepsilon_e^{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_e$  :  $\varepsilon_e$  représente l'intensité de la déformation élastique et  $\dot{\varepsilon}_e^{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{d\varepsilon_e}{dt}$  :  $\frac{d\varepsilon_e}{dt}$  la vitesse de déformation équivalente.

Afin de décrire la perte de mémoire au cours du chargement cyclique, la fonction  $\varphi$  au cycle  $n$  se représente comme une somme :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2\tag{2.55}$$

où le coefficient  $\varphi_1$  correspond au coefficient « ancien » qui décrit la réponse mécanique au cycle  $n - 1$  et qui diminue au cycle  $n$  et  $\varphi_2$  est la variation de la fonction  $\varphi$  durant le cycle  $n$  **(2.52)**.

La perte de mémoire du cycle précédent  $n - 1$  est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{dt} &= -A_n\varphi_1^2 \dot{\varepsilon}^{eq} \text{ (charge)} \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= 0 \text{ (décharge)}\end{aligned}\tag{2.56}$$

où  $A_n$  est un paramètre d'ajustement qui reste constant dans chaque cycle.

L'évolution du coefficient  $\varphi_2$  durant le cycle  $n$  est déterminée par le système suivant d'équations :

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_2}{dt} &= a_{1n}(\Psi_{1n} + K_1(\varepsilon_e^{eq} - \varepsilon_{en}^{eq}) - \varphi_2)^2 \dot{\varepsilon}^{eq} \text{ (charge)} \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= a_{2n}(\Psi_{2n} + K_2(\varepsilon_e^{eq} - \varepsilon_{en}^{eq}) - \varphi_2)^2 \dot{\varepsilon}^{eq} \text{ (décharge)}\end{aligned}\tag{2.57}$$

avec la condition initiale  $\varphi_2(t_n) = 0$ .

Dans les équations **(2.57)**, nous considérons que  $\varepsilon_{en}^{eq} = \varepsilon_e^{eq}(t_n)$ , que les coefficients  $a_{1n}, a_{2n}$  et  $\Psi_{1n}, \Psi_{2n}$  restent constants pour chaque cycle de déformation et enfin que les coefficients  $K_1$  et  $K_2$  coïncident avec les coefficients initiaux de l'équation **(2.54)**.

Pour diminuer le nombre de paramètres, Drozdov constate que les paramètres  $\Psi_{1n}$  et  $a_{2n}$  ne dépendent pas du nombre de cycles  $n$  pour  $n > 2$  [39]. Par contre les valeurs initiales  $\Psi_1 = \Psi_1^{(1)}$  et  $a_2 = a_2^{(1)}$ , qui correspondent au premier chargement appliqué sur le polymère initialement vierge, sont différentes des valeurs des cycles suivants  $\Psi_{1n} = \Psi_1^{(2)}$  et  $a_{2n} = a_2^{(2)}$ .

En conclusion, la déformation tridimensionnelle du polymère semi-cristallin peut être décrite par une relation entre la déformation et la contrainte (2.53) prenant en compte les équations cinématiques (2.51) et (2.52), et les équations cinétiques (2.54) – (2.57).

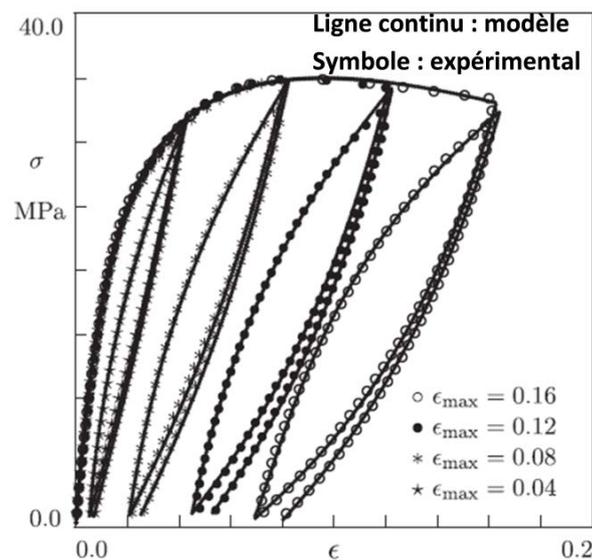
Enfin, les équations incluent :

- quatre paramètres du matériau :  $\mu, a_1, K_1, \Psi_1^{(1)}$ ,
- quatre paramètres dépendants du point du début de rétraction :  $a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, K_2, \Psi_1^{(2)}$ ,
- trois fonctions qui dépendent du nombre des cycles :  $A_n, a_{1n}, \Psi_{2n}$ .

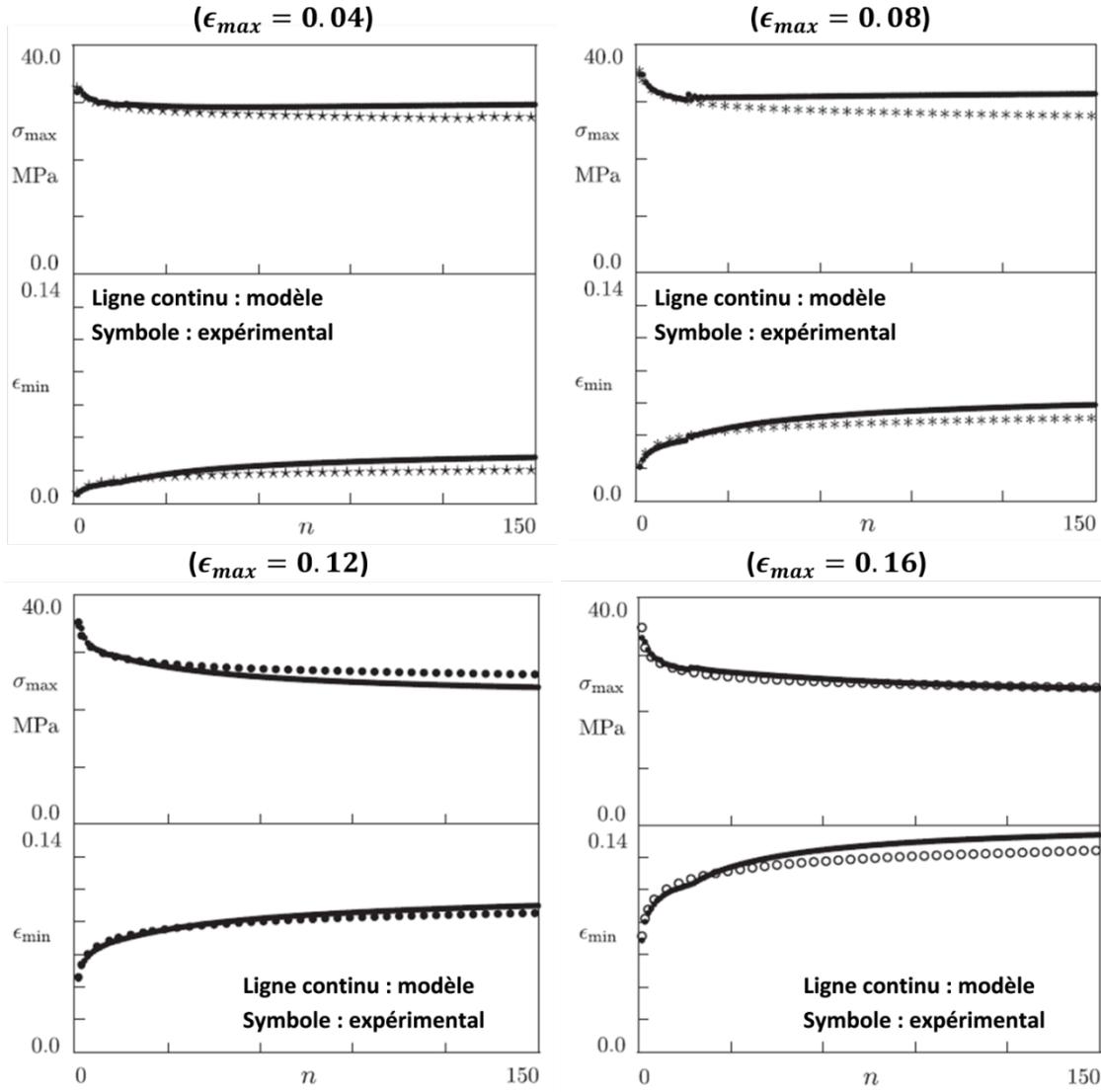
Afin de prédire correctement le comportement des polymères pour un chargement comportant un grand nombre de cycles, l'évolution de l'écoulement plastique et de l'endommagement doit être pris en compte. L'évolution de l'écoulement plastique est décrite par des fonctions des variables internes  $A_n$  et  $a_{1n}$ . Le variation de  $\Psi_{2n}$  en fonction de nombre de cycles  $n$  décrit l'accumulation d'endommagement et le développement de l'écoulement plastique.

Il a été montré que le modèle est capable de prédire qualitativement l'évolution de la contrainte maximale  $\sigma_{max}$  et de la déformation minimale  $\epsilon_{min}$  en fonction de nombre des cycles  $n$ . Les résultats de la simulation sont présentés sur la Figure 2.11 et la Figure 2.12. Ce type de modélisation peut être utile pour estimer le nombre de cycles définissant la limite de fatigue.

Pour augmenter l'efficacité de ce modèle, on doit ajouter des paramètres internes complémentaires qui représentent l'évolution de l'endommagement dans un matériau.



**Figure 2.11. Comparaison modèle/expérimental pour la représentation des hystérésis.**



**Figure 2.12. Contrainte maximale  $\sigma_{max}$  et déformation minimale  $\epsilon_{min}$  par cycle par rapport à un nombre de cycle  $n$ .**

### 2.7.2 Modèle fractionnaire de Caputo

Le comportement d'un milieu viscoélastique (non-élastique) peut être décrit en utilisant une dérivée fractionnaire. Cette approche a été initialement proposée par Caputo et al. [40] dans le domaine fréquentiel. La relation entre la contrainte et la déformation se base sur le modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire :

$$\sigma(t) = \mu\epsilon(t) + \eta \frac{d^\alpha \epsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.58)$$

où  $\mu$  et  $\eta$  représentent respectivement les modules de rigidité et de pseudo-rigidité et  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$  est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo :

$$\frac{d^\alpha \epsilon(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{-\alpha} \frac{d\epsilon}{dx} dx \quad (2.59)$$

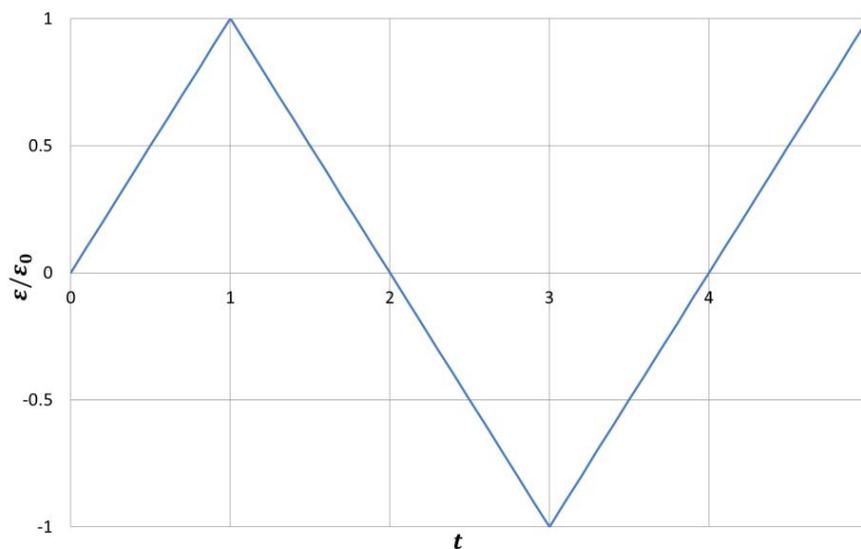
En utilisant la transformation de Fourier (1.61), l'équation (2.58) peut être présentée dans le domaine fréquentiel sous la forme suivante :

$$\hat{\sigma}(\omega) = \hat{\mu}(\omega)\hat{\varepsilon}(\omega) \tag{2.60}$$

où  $\hat{\mu}(\omega) = \mu + (i\omega)^\alpha \eta$  est le module de rigidité complexe avec  $\omega$  la pulsation.

Afin de montrer la capacité de ce modèle à reproduire les boucles d'hystérésis, un chargement en déformation est imposé. Le signal est un signal en dents de scie (Figure 2.13). La période de la fonction est  $a = 4$  s et l'amplitude est  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Les boucles d'hystérésis sont obtenues en utilisant le second terme de l'équation (2.58) qui représente la contribution anélastique du comportement du matériau. Les résultats sont présentés sur les Figure 2.14 et Figure 2.15 pour des ordres de dérivation respectivement de  $\alpha = 0.1$  et  $\alpha = 0.5$ . Il convient de noter que la taille de la boucle d'hystérésis augmente avec l'accroissement de l'ordre  $\alpha$  de la dérivation non-entier.

Ce modèle est capable de représenter des boucles d'hystérésis avec une contrainte qui croît avec l'augmentation du nombre de cycles. Ce phénomène s'appelle l'érouissage cyclique et il peut être observé dans le comportement de différents matériaux métalliques ou polymères. Ce processus de dissipation d'énergie visqueux lié à l'endommagement est la cause des chutes de propriétés mécaniques lors des essais de fatigue. En général, les critères de fatigue estiment le nombre des cycles avant la rupture du matériau comme une valeur inversement proportionnelle à l'amplitude et à la fréquence de déformation appliquée. Les résultats obtenus par le modèle proposé sont en bonne correspondance avec les données expérimentales dans le cas de plusieurs métaux [40]. Par contre ce modèle ne permet pas de distinguer la propagation d'endommagement et d'écoulement plastique. Afin de l'améliorer, il faut introduire la dégradation et les déformations irréversibles. C'est la voie que nous retiendrons pour établir notre modélisation présentée dans le chapitre 3. Cette voie a également été retenue dans le modèle [41].



**Figure 2.13. Fonction du signal en forme de dents de scie**

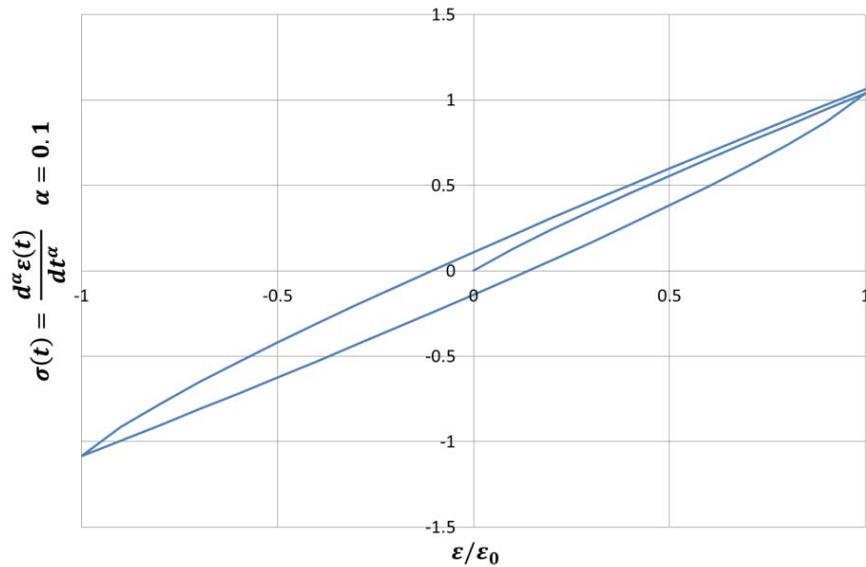


Figure 2.14. Boucle d'hystérésis modélisée par la dérivée de Caputo d'ordre  $\alpha = 0.1$

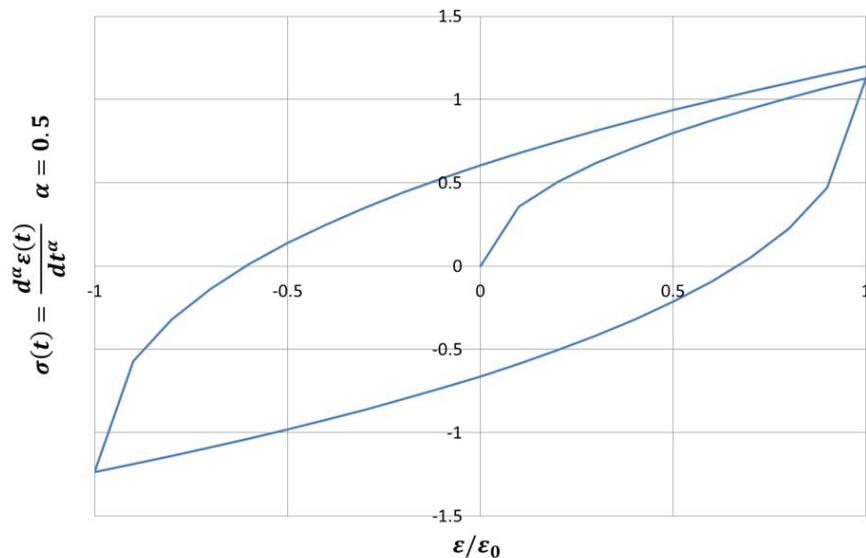


Figure 2.15. Boucle d'hystérésis modélisée par la dérivée de Caputo d'ordre  $\alpha = 0.5$

### 2.7.3 Modélisation de la boucle d'hystérésis pour le matériau composite

Dans le cas des matériaux composites carbone époxy, un modèle de comportement du pli élémentaire a été initialement proposé par Ladevèze et al. [11], [79]. Les effets de délaminage ont été inclus dans la modélisation des stratifiés [80], [81], [82]. Des versions des modèles pour des chargements de fatigue ont été plus récemment développées [83], [84], [85]. Ces modélisations décrivent parfaitement le comportement des matériaux composites à l'exception de la boucle d'hystérésis qui est liée aux effets combinés de l'endommagement et de la viscosité de la matrice. Ces modèles adaptés en fatigue peuvent correctement représenter le comportement mécanique. Cependant ils sont incapables de décrire les bons niveaux de dissipation. En conséquence, ils ne permettent pas de simuler les échauffements du matériau durant les sollicitations de fatigue.

Un premier travail a été mené au Laboratoire en développant un modèle fractionnaire permettant de décrire le comportement d'un composite carbone en cisaillement plan [41]. La dégradation du pli est décrite à l'échelle mésoscopique à l'aide de la mécanique de l'endommagement [79]. Les déformations irréversibles sont prises en compte et sont supposées être liées aux endommagements.

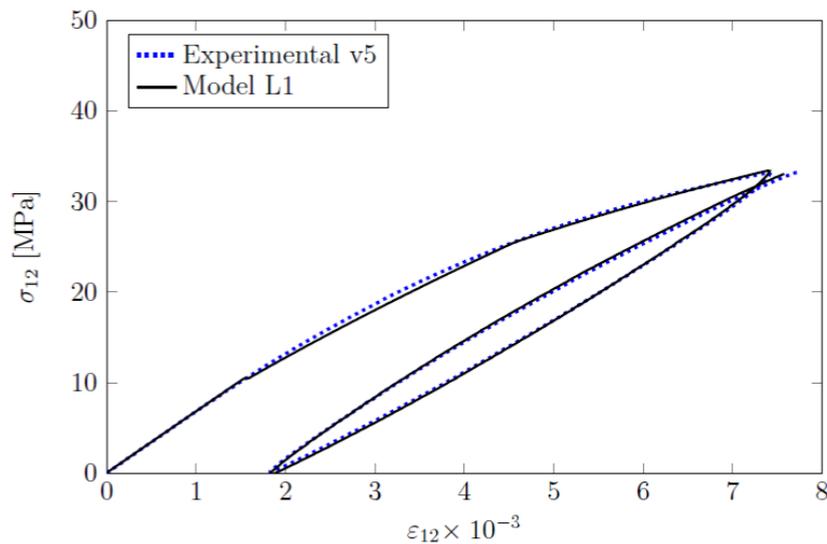
La loi de comportement correspond à une extension du modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt. La contrainte de cisaillement est définie sous la forme suivante :

$$\sigma_{12}(t) = 2G_{12}^0(1 - d_{12})\varepsilon_{12}^e(t) + 2G_{12}^1 D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t) \quad (2.61)$$

où :

- $G_{12}^0$  est le module élastique au cisaillement,
- $\varepsilon_{12}^e$  est la déformation élastique,
- $d_{12}$  correspond à l'endommagement pendant le chargement,
- $G_{12}^1$  et  $\alpha$  sont des fonctions de l'endommagement  $d_{12}$  et de la déformation irréversible  $\varepsilon_{12}^{ir}$ ,
- Et  $D^\alpha$  est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Ce modèle permet de représenter les boucles d'hystérésis que le matériau composite montre en cisaillement. La loi constitutive dépend de quatre paramètres déterminés à partir des données expérimentales par identification inverse. Les dérivées fractionnaires sont calculées par l'algorithme *L1* (1.108). Les résultats sont présentés sur les **Figure 2.16** à **Figure 2.18** pour les trois premières boucles du matériau carbone/époxy en cisaillement.



**Figure 2.16. Relation déformation - contrainte pour la première boucle d'hystérésis**

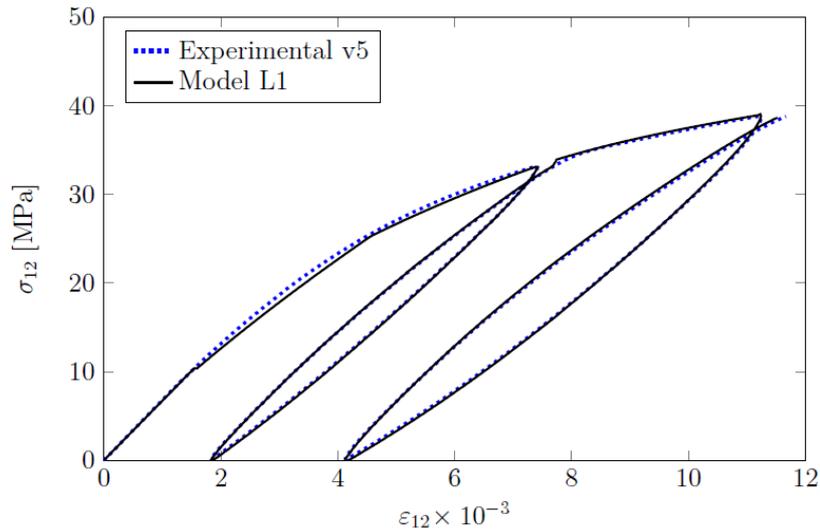


Figure 2.17. Relation déformation - contrainte pour la deuxième boucle d'hystérésis

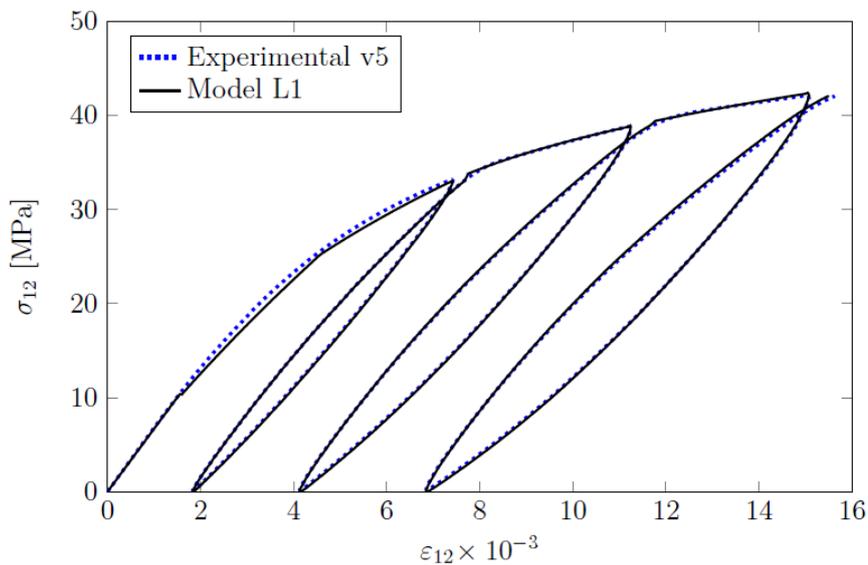


Figure 2.18. Relation déformation - contrainte pour la troisième boucle d'hystérésis

Les résultats sont en bonne correspondance avec les données expérimentales. Le modèle permet de décrire les boucles d'hystérésis avec seulement quatre paramètres. Ce modèle est développé dans le domaine temporel et ne dépend pas de la fréquence. Aussi, l'endommagement étant inclus, la dissipation d'énergie associée à celui-ci peut être calculée. Dans le travail [41], Mateos montre que le modèle est sensible au changement de vitesse de déformation et peut être appliqué aux problèmes dynamiques.

Par contre, les dérivées fractionnaires sont des opérateurs non locaux. A cause de cela, les paramètres associés aux dérivées fractionnaires changent à chaque instant du temps. La solution du problème d'optimisation pour les paramètres du matériau n'est donc pas unique. Un autre désavantage de ce modèle est que toute l'histoire du chargement à partir de  $t = 0$  doit être prise en compte, ce qui conduit à une augmentation importante du temps de calcul et du volume de

stockage des données. Pour augmenter les performances du modèle, l'écroutissage isotrope doit être pris en compte.

#### *2.7.4 Méthode d'auto-échauffement*

La limite de fatigue peut être déterminée rapidement en utilisant une instrumentation prenant en compte les aspects mécanique et thermique lors d'un essai d'auto-échauffement [7], [58]. La détection des premiers échauffements du matériau pendant le chargement cyclique représente la base de la méthode dite « d'auto-échauffement ». L'échauffement est corrélé à la limite de fatigue et la valeur identifiée est en accord avec celle provenant de la méthode classique (courbe de Wöhler). Cette méthode a été appliquée dans le passé avec succès pour certains métaux [8], [86] et résines [9], [87] et composites à fibres courtes [10].

La méthode « d'auto-échauffement » consiste en l'application d'un ensemble de cycles successifs à contrainte moyenne constante mais qui croît à chaque ensemble de cycle. Pour chaque niveau de contrainte moyenne, le changement de la température est mesuré jusqu'à sa valeur statique. Au-delà d'une limite donnée, la température commence à croître significativement. Cette augmentation de la température est associée au phénomène de dissipation qui gouverne le processus de la fatigue : c'est pour cela que l'on observe un emballement considérablement lorsque le niveau de fatigue est dépassé.

L'application de cette méthode aux matériaux composites carbone époxy unidirectionnels a été effectuée dans [58]. Les mesures de la température ont été effectuées pour différentes stratification ( $[\pm 45]_S$ ,  $[\pm 67.5]_S$ ,  $[0/90/0/90]_S$  et  $[\pm 45/90/0/90]_S$ ) pendant des essais classiques en tension et des essais charge-décharge. A partir des données expérimentales, on constate que la température décroît linéairement avant que la limite d'élasticité soit atteinte et que la température augmente immédiatement quand des fissures apparaissent. Ce comportement du matériau composite observé expérimentalement coïncide avec les observations de comportement des matériaux connus.

Dans les travaux [58], la limite de fatigue a été estimée avec la méthode « d'auto-échauffement » pour les stratifiés  $[\pm 45]_S$  et  $[0/90/0/90]_S$  en carbone/époxy et les résultats obtenus sont en bonne correspondance avec ceux issus de l'approche classique de Wöhler. Le principal avantage de la méthode « d'auto-échauffement » par rapport à la méthode classique est que l'identification de la limite en fatigue est réalisée beaucoup plus rapidement.

Cependant, il est à noter que l'implémentation numérique de cette approche permettrait encore d'augmenter son efficacité. Afin de faire la liaison entre le comportement mécanique et thermomécanique, la modélisation des boucles d'hystérésis doit être ajoutée au modèle du comportement élasto-plastique endommageable du matériau composite. Ceci nous permettrait de déterminer la quantité d'énergie dissipée et de calculer numériquement l'augmentation de la température. De cette façon, la limite de fatigue peut être déterminée facilement pour les différents types de matériau composite.

## **2.8 CONCLUSION**

Ce chapitre présente quelques modèles viscoélastiques qui peuvent être une source d'inspiration pour décrire le comportement des matériaux polymères. Les propriétés visqueuses des matériaux composites sont liées aux caractéristiques de la matrice (résine), le renfort (fibres) pouvant être considéré comme inerte. Dans le cas de la plupart des polymères, la déformation a un caractère non-linéaire. Ce fait peut être expliqué par la structure moléculaire du polymère. Le frottement entre les molécules génère un phénomène de dissipation qu'on représente comme une viscosité apparente. Ces phénomènes thermiques modifient les contraintes seuils et font apparaître une dépendance à la vitesse de déformation des propriétés mécaniques. Le comportement mécanique du matériau composite peut donc être modélisé par une réponse héréditaire, ce qui complique la méthode de description de son comportement. Des modèles simplifiés spectraux [88], [89] sont alors parfois employés pour prendre en compte la viscosité, le nombre de temps caractéristiques étant alors limité lors de la construction du modèle [62].

Parmi les différentes façons de construire des modèles de comportement dépendant du temps, la méthode fonctionnelle est une approche efficace car elle permet de prendre en compte l'influence de l'histoire du chargement dans le comportement du polymère. L'approche fonctionnelle est liée au choix du noyau dans l'intégrale. En fonction du noyau retenu, on fait apparaître la notion de dérivée fractionnaire. Des modèles fractionnaires de Kelvin-Voigt, Maxwell et Zener peuvent être construits pour décrire plus précisément les processus de fluage et de relaxation. Ces modèles, contiennent des dérivées des déformations d'ordre non-entier compris entre zéro et un. Bagley et Torvik ont développé des modèles fractionnaires dans le domaine fréquentiel afin de décrire le comportement des résines [20], [37]. Dans ses travaux, Rabotnov a développé des lois généralisées fractionnaires avec un ordre de dérivation arbitraire (ainsi qu'un ensemble de fonctions exponentielles fractionnaires) [34], [35], [36]. Les facteurs climatiques (humidité et température) peuvent également être pris en compte et modélisés à l'aide de théorie fractionnaire de Rabotnov [36]. La modélisation moléculaire des polymères introduite par Rouse [38] conduit à établir un modèle à dérivées fractionnaires.

Un des objectifs de nos travaux est de parfaitement décrire les dissipations thermiques liées aux boucles d'hystérésis. Les modèles fractionnaires sont donc la piste que nous suivons pour décrire le comportement viscoélastique des polymères et les dissipations thermiques associées. L'aire des boucles correspond à la quantité d'énergie dissipée pendant les chargements cycliques et elle peut être utilisée pour déterminer l'état du matériau vis-à-vis de son état limite de fatigue. Le modèle de Drozdov décrit les boucles d'hystérésis à l'aide de lois polynomiales. Ce modèle permet d'avoir une caractéristique précise du comportement de certaines résines sous un chargement cyclique en utilisant uniquement la modélisation des premières boucles [39]. Par contre, ce modèle ne permet pas de déterminer l'endommagement du matériau. Le modèle proposé par Caputo et al. [40] permet également de reproduire une boucle d'hystérésis mais, tout comme celui de Drozdov, il ne permet pas de distinguer l'endommagement de l'écoulement plastique. La dernière approche de modélisation des boucles d'hystérésis est proposée par Mateos [41]. Elle permet de reproduire le comportement hystérétique du matériau composite carbone/époxy en cisaillement. L'endommagement et les déformations irréversibles sont pris en compte également. Cependant la généralisation dans le cas tridimensionnel pour des matériaux

composites épais est délicate car il faut introduire des tenseurs supplémentaires pour décrire les déformations irréversibles liées aux endommagements [90]. Dans le cadre de nos travaux, un modèle destiné à reproduire le comportement du matériau composite sous des chargements cycliques est proposé dans le chapitre 3. Il est fondé sur les dérivées fractionnaires. L'objectif final est d'obtenir une modélisation des échauffements du composite lors de sollicitations cycliques en vue de simuler au mieux les essais d'auto-échauffement. La méthode « d'auto-échauffement » est considérée comme une approche rapide destinée à déterminer la limite de la fatigue d'un matériau par observation de la quantité d'énergie dissipée. Le point de départ était le modèle de comportement développé par Mateos [41]. Dans le chapitre suivant, un modèle de comportement collaboratif élasto-plastique-endommageable fractionnaire sera proposé afin de conserver les avantages des modélisations largement utilisées [11], [25], [27] tout en l'enrichissant de la description des boucles d'hystérésis.



## **CHAPITRE 3 : MODELE COLLABORATIF ELASTO-PLASTIQUE ENDOMMAGEABLE A DERIVEES FRACTIONNAIRES**

---

*Ce chapitre porte sur la modélisation du comportement mécanique des composites tissés soumis à des sollicitations quasi-statiques, dynamiques ou de fatigue. L'objectif est de proposer un modèle collaboratif permettant d'une part une représentation « classique » du comportement élasto-plastique endommageable (avec [25], [26], [27], [28] ou sans prise en compte de la vitesse de déformation [11], [79], [82], [83], [91]) et d'autre part une représentation des boucles d'hystérésis. En effet, comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, peu de modèles existent et sont disponibles afin de répondre à la problématique de l'identification de la limite en fatigue par la méthode d'auto-échauffement. Nous avons donc développé un modèle dit collaboratif dont l'objectif est de prendre en compte les déformations élastiques, irréversibles, les endommagements et la sensibilité à la vitesse de déformation dans le cas d'un chargement continu du composite tissé. Il a aussi pour objectif de décrire l'hystérésis via un modèle à dérivées fractionnaires lorsque le composite est déchargé. Nous proposons dans ce chapitre aussi, l'algorithme complet de ce modèle collaboratif avec une description détaillée de la méthodologie d'identification des paramètres des boucles d'hystérésis.*

### **3.1 INTRODUCTION**

L'utilisation intensive des matériaux composites dans les applications industrielles requiert une meilleure compréhension de leur comportement mécanique. Ce dernier doit traduire généralement non seulement l'évolution de déformations irréversibles mais aussi des endommagements et ce quelle que soit la direction d'orthotropie. Par ailleurs, il est aussi nécessaire de prendre en compte les phénomènes visqueux, tels que l'influence de la vitesse de déformation.

Depuis de nombreuses années, plusieurs modèles ont été développés et permettent de prendre en compte les déformations élastiques et inélastiques, les endommagements [24], [81], [83] et la sensibilité à la vitesse de déformation [25], [27]. Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, l'approche à base de dérivées fractionnaires permet de décrire des phénomènes visqueux, dépendant de l'histoire du matériau, comme les boucles d'hystérésis [41]. Par contre, il n'y a pas de la loi « globale » qui inclut l'ensemble des phénomènes précédemment cités et cela peut être un inconvénient pour certaines problématiques où les dépouillements nécessitent une description précise des dissipations (comme par exemple les problèmes thermomécaniques appliqués à la détermination de la limite en fatigue d'un matériau composite).

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode pour représenter le comportement élasto-plastique endommageable avec description des boucles d'hystérésis des matériaux composites sous un chargement quasi-statique ou dynamique. L'approche proposée se base sur la collaboration de deux modèles : le premier consiste à caractériser le comportement du composite pendant une phase de chargement. Les déformations élastiques et inélastiques sont

déterminées ainsi que l'endommagement dans le pli élémentaire. La sensibilité à la vitesse de déformation est également prise en compte. La deuxième partie du modèle utilise une approche par dérivées fractionnaires pour décrire le comportement pendant une phase de « décharge – recharge ». Notre modèle collaboratif est développé pour un matériau composite tissé à l'échelle mésoscopique d'un pli élémentaire sous l'hypothèse de contraintes planes.

Dans un premier temps, nous rappelons la modélisation du comportement d'un pli élémentaire de type élasto-plastique endommageable pour un matériau composite tissé (paragraphe 3.2). On utilise pour cela la mécanique continue de l'endommagement ainsi qu'un écrouissage de type isotrope. Enfin, l'effet de vitesse de déformation est ajouté pour décrire le comportement du pli élémentaire en dynamique. Nous présenterons ensuite l'algorithme d'implémentation au point d'intégration (paragraphe 3.3). Dans un second temps, nous présentons le modèle à base des dérivées fractionnaires utilisé pour représenter les boucles d'hystérésis (paragraphe 3.4). Nous y détaillerons aussi l'influence des paramètres du modèle fractionnaire sur la réponse du matériau. Enfin, nous décrivons la collaboration existante entre ces deux modèles dans le paragraphe 3.5 et nous reviendrons sur les détails du calcul numérique d'une boucle d'hystérésis (paragraphe 3.6). Nous terminerons par l'implémentation informatique de ce modèle collaboratif (paragraphe 3.7) au point d'intégration.

## **3.2 MODELE ELASTO-PLASTIQUE ENDOMMAGEABLE AVEC PRISE EN COMPTE DES VITESSES DE DEFORMATION**

### *3.2.1 Introduction*

La modélisation que nous avons adoptée est basée sur les travaux initiés dans les années 1980-1990 par Ladevèze et al. [11], [79], [80], [92]. Ces travaux ont abouti à l'élaboration de lois de comportement pour matériaux composites stratifiés unidirectionnels à matrice thermodurcissables pour des sollicitations quasi-statiques. Elles prenaient en compte cinq modes de dégradation différents : les ruptures de fibres, le micro-flambement des fibres, la fissuration matricielle, la décohésion fibre/matrice et enfin le délaminage. Ce dernier phénomène a fait l'objet d'études et de travaux un peu plus particulier [82], [91], [93], [94], [95]. On précise que dans le cadre de ce travail, nous supposons une interface parfaite entre chaque pli élémentaire et donc nous ne nous intéresserons pas au délaminage.

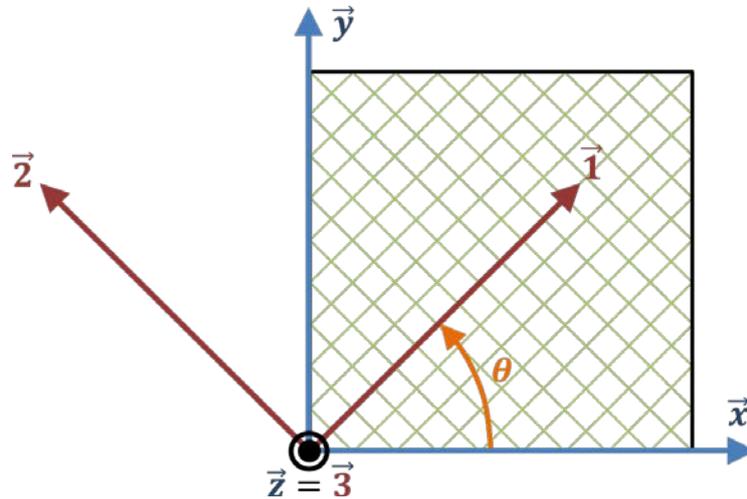
Ces lois constitutives sont développées à l'échelle mésoscopique [79], [82] : l'échelle mésoscopique ( $10^{-3}m$ ) se trouve entre l'échelle micromécanique qui correspond à celle des constituants (fibres/matrice) ( $10^{-5}m$ ) et l'échelle des stratifiés ( $10^{-2}m$ ). Pour les tissus, l'échelle mésoscopique est associée à celle des torons de fibres.

Sur la base des travaux précédemment cités, des lois de comportement ont été établies pour des matériaux composites stratifiés tissés à fibre de verre ou carbone et résine époxy [24], [25], [26], [84]. Ces lois permettent de transcrire les comportements longitudinaux, transversaux et de cisaillement. Typiquement, les travaux ont montré des comportements longitudinaux et transversaux de type non-linéaire fragile alors que le comportement en cisaillement est non-linéaire de manière globale puisqu'on constate un endommagement (chute du module de

cisaillement régulière), la présence de déformations irréversibles et enfin la présence de boucles d'hystérésis en cas de chargement cyclique.

Le modèle du comportement mécanique que nous présentons [25], [26], [28] est écrit dans le cadre thermodynamique des processus irréversibles en utilisant la méthode de l'état locale. Cette méthode peut se définir de la façon suivante : « l'état thermomécanique d'un milieu matériel en un point et à un instant donné est complètement défini par la connaissance des valeurs à cet instant d'un certain nombre de variables (variables internes ou variables d'état) ne dépendant que du point considéré » [42]. Dans le cadre des petites perturbations, le choix de variables internes conduit à la définition des forces thermodynamiques associées.

Nous rappelons aussi que la loi de comportement est développée dans le système de coordonnées orthotropes du pli élémentaire défini en Figure 3.1. Le repère global  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est utilisé pour décrire le comportement du stratifié et le repère local  $(O, \vec{1}, \vec{2})$  est attaché au pli élémentaire (1 : direction chaîne et 2 : direction trame [84], [96]). On suppose un état de contraintes planes, hypothèse justifiée par l'épaisseur des plis de stratifiés qui est petite.



**Figure 3.1. Pli élémentaire**

Le pli élémentaire du composite tissé est modélisé comme un matériau élastique orthotrope considéré homogène [25]. La matrice de rigidité du matériau élastique non-endommagé orthotrope est définie sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}^0 = \begin{pmatrix} C_{11}^0 & \nu_{21}^0 C_{11}^0 & 0 \\ \nu_{12}^0 C_{22}^0 & C_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^0 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} C_{11}^0 = \frac{E_{11}^0}{1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0} \text{ et } C_{22}^0 = \frac{E_{22}^0}{1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0} \\ \nu_{21}^0 E_{11}^0 = \nu_{12}^0 E_{22}^0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\nu_{12}^0$  et  $\nu_{21}^0$  sont les coefficients de Poisson,  $E_1^0$  et  $E_2^0$  sont les modules d'Young longitudinal et transversal et  $G_{12}^0$  est le module de cisaillement.

### 3.2.2 Aspect thermodynamique

En suivant le travail de Lemaitre et Chaboche [60], nous considérons un modèle élasto-plastique endommageable dans le cadre de la théorie thermodynamique des processus

irréversibles avec des phénomènes thermiques négligeables (processus isothermes). On s'intéresse à la modélisation des déformations élastiques, des endommagements et de la plasticité à l'aide d'un écrouissage isotrope. Pour décrire ces processus, nous choisissons les variables internes suivantes :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  est le tenseur des déformations élastiques,
- $d_i$  sont les variables internes d'endommagement,
- $p$  est la déformation plastique cumulée.

Après que les variables internes aient été choisies, on suppose l'existence d'un potentiel thermodynamique qui permettra d'écrire les lois d'état. Elles définissent les liaisons entre les phénomènes observables et les variables internes. Il y a quatre potentiels thermodynamiques couramment utilisés : l'énergie interne, l'enthalpie, l'énergie libre de Helmholtz et l'enthalpie libre de Gibbs (on en utilise que 2 classiquement). Afin de faciliter la réalisation numérique et afin d'exprimer les équations en déformation, on choisit le potentiel d'énergie libre volumique de Helmholtz  $\rho\psi$  qui dépend des variables internes :

$$\rho\psi = \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, d_i, p) \quad (3.2)$$

En accord avec le deuxième principe de la thermodynamique, la condition des transformations irréversibles s'exprime par l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\dot{\psi} \geq 0 \quad (3.3)$$

La dérivée du potentiel thermodynamique est définie sous la forme suivante :

$$\rho\dot{\psi} = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \rho\psi}{\partial d_i} \dot{d}_i + \frac{\partial \rho\psi}{\partial p} \dot{p} \quad (3.4)$$

L'hypothèse classique de partition de la déformation totale pour les petites déformations est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.5)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^t$  est le tenseur des déformations totales,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  est le tenseur des déformations irréversibles.

En utilisant les équations (3.4) et (3.5) et en tenant compte de l'inégalité de Clausius-Duhem (3.3), les variables associées à l'élasticité, à la plasticité et à l'endommagement deviennent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \\ Y_i = -\frac{\partial \rho\psi}{\partial d_i} \\ R = \frac{\partial \rho\psi}{\partial p} \end{cases} \quad (3.6)$$

où :

- $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy,
- $Y_i$  sont les forces thermodynamiques associées aux endommagements,
- $R$  est la fonction seuil associée à l'érouissage isotrope.

Le potentiel thermodynamique nous permet de définir les relations d'état entre les paramètres associés et les variables internes. Par contre, afin de définir les relations inverses, il faut introduire les lois complémentaires. Pour cette raison, on introduit le potentiel dissipatif (ou pseudo-potentiel)  $\Phi$  qui s'exprime comme une fonction scalaire, continue et convexe par rapport à la dérivée des variables internes **(3.7)** [41], [42]. On remarque que pour les processus isothermes, le potentiel dissipatif  $\Phi$  se compose uniquement de la dissipation mécanique (ou intrinsèque) car la dissipation thermique est négligeable.

$$\Phi = \Phi(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}, \dot{d}) \quad (3.7)$$

En accord avec l'inégalité de Clausius-Duhem **(3.3)**, le potentiel dissipatif  $\Phi$  doit être une fonction convexe, positive et nulle à l'origine dans l'espace des variables internes  $\dot{\epsilon}^p, \dot{p}$  et  $\dot{d}$ .

$$\Phi \geq 0 \quad \text{et} \quad \Phi(0, 0, 0) = 0 \quad (3.8)$$

La dissipation mécanique est définie comme la dérivée du potentiel dissipatif :

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\epsilon}^p} : \dot{\epsilon}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}} \dot{p} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}} \dot{d} \quad (3.9)$$

Les conditions complémentaires pour les variables associées ou les variables duales  $(\sigma, R, Y)$  s'expriment en utilisant la propriété de normalité (ou dissipativité normale) :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\epsilon}^p} \\ R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}} \\ Y = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}} \end{cases} \quad (3.10)$$

Alors, l'équation **(3.9)** peut être écrite de la manière suivante :

$$\varphi = \sigma : \dot{\epsilon}^p + (-R)\dot{p} + Y\dot{d} \quad (3.11)$$

Selon le deuxième principe thermodynamique, le potentiel  $\varphi$  est une fonction positive et convexe.

Les lois complémentaires **(3.10)** peuvent être exprimées pour les variables internes en fonction des variables duales. La transformation de Legendre-Fenchel permet de définir le potentiel dissipatif  $\Phi^*(\sigma, R, Y)$  dual du potentiel dissipatif  $\Phi$  par rapport aux variables internes  $\dot{\epsilon}^p, \dot{p}$  et  $\dot{d}$  en gardant la propriété de dissipativité normale. Alors les lois complémentaires d'évolution sont désignées par :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial d} \\ -\dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $f$  est la fonction de seuil qui définit le domaine élastique endommagé. Les propriétés de normalité conduisent à introduire un multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$ . Les lois d'évolution des variables d'endommagement sont définies dans le cadre non standard. En conséquence, les lois d'évolution respectant les observations expérimentales des endommagements sont définies à partir des forces thermodynamiques associées. La positivité de la dissipation doit être vérifiée à tout instant.

### 3.2.3 Modélisation d'endommagement

Sous une sollicitation donnée, l'endommagement peut se propager dans un pli élémentaire. Ce fait conduit à la dégradation des propriétés mécaniques puis à la rupture du matériau. Afin de décrire la dégradation du matériau, on utilise la mécanique d'endommagement des milieux continus à l'échelle mésoscopique [97]. En utilisant la notation des contraintes effectives [60], on introduit la matrice de rigidité dégradée de la manière suivante :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (1 - d_{11})C_{11}^0 & \nu_{21}^0 C_{11}^0 & 0 \\ \nu_{12}^0 C_{22}^0 & (1 - d_{22})C_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - d_{12})G_{12}^0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Les paramètres d'endommagement  $(d_{11}, d_{22}, d_{12})$  sont des variables internes qui représentent l'état dégradé du matériau dans les directions d'orthotropie. Ces paramètres sont définis entre 0 et 1 :

- Quand le matériau n'est pas dégradé on a :  $d_{ij} = 0, \{i, j = 1, 2\}$
- S'il y a un endommagement « complet », on a :  $d_{ij} = 1, \{i, j = 1, 2\}$ .

Dans le cadre de la théorie thermodynamique, on introduit l'énergie de déformation élastique du matériau endommagé  $W_e^d$  (qui est équivalente au potentiel thermodynamique d'énergie libre de Helmholtz  $\psi$ ) :

$$W_e^d = \frac{1}{2} \{ C_{11}^0 (1 - d_{11}) (\varepsilon_{11}^e)^2 + C_{22}^0 (1 - d_{22}) (\varepsilon_{22}^e)^2 + 2\nu_{21}^0 C_{11}^0 \varepsilon_{11}^e \varepsilon_{22}^e + G_{12}^0 (1 - d_{12}) (2\varepsilon_{12}^e)^2 \} \quad (3.14)$$

La loi de comportement mécanique d'un pli élémentaire du composite tissé est définie en utilisant (3.6) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-d_{11})C_{11}^0 & \nu_{21}^0 C_{11}^0 & 0 \\ \nu_{12}^0 C_{22}^0 & (1-d_{22})C_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-d_{12})G_{12}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12}^e \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Les forces thermodynamiques associées aux endommagements sont définies quant à elles par :

$$Y_{ij} = -\frac{\partial W_e^d}{\partial d_{ij}} \Rightarrow Y_{11} = \frac{1}{2} C_{11}^0 (\varepsilon_{11}^e)^2 \quad ; \quad Y_{22} = \frac{1}{2} C_{22}^0 (\varepsilon_{22}^e)^2 \quad ; \quad Y_{12} = \frac{1}{2} G_{12}^0 (2\varepsilon_{12}^e)^2 \quad (3.16)$$

Les forces thermodynamiques associées caractérisent la propagation d'endommagement. L'état d'endommagement ne peut que croître [11], [79], [98], par conséquent les forces thermodynamiques sont bornées à leur valeurs maximales pour toute l'histoire du chargement [24] :

$$\bar{Y}_{ij} = \sup_{\tau \leq t} (Y_{ij}(t)) \quad (3.17)$$

L'évolution des variables d'endommagement est choisie sous la forme :

$$\begin{cases} d_{11} = F_1^d \left( \sqrt{\bar{Y}_{11}} - \sqrt{\bar{Y}_{11}^0} \right) \text{ si } d_{11} < 1 \text{ et } \bar{Y}_{11} < \bar{Y}_{11}^R; \text{ sinon } d_{11} = 1 \\ d_{22} = F_2^d \left( \sqrt{\bar{Y}_{22}} - \sqrt{\bar{Y}_{22}^0} \right) \text{ si } d_{22} < 1 \text{ et } \bar{Y}_{22} < \bar{Y}_{22}^R; \text{ sinon } d_{22} = 1 \\ d_{12} = F_{12}^d \left( \sqrt{\bar{Y}_{12}} - \sqrt{\bar{Y}_{12}^0} \right) \text{ si } d_{12} < 1 \text{ et } \bar{Y}_{12} < \bar{Y}_{12}^R; \text{ sinon } d_{12} = 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $\bar{Y}_{11}^0, \bar{Y}_{22}^0$  et  $\bar{Y}_{12}^0$  correspondent aux taux d'énergie initiaux d'endommagement et  $\bar{Y}_{11}^R, \bar{Y}_{22}^R$  et  $\bar{Y}_{12}^R$  représentent les taux d'énergie à rupture relatifs aux directions longitudinale, transversale et de cisaillement. Les fonctions  $F_1^d, F_2^d, F_{12}^d$  doivent être choisies en fonction des observations expérimentales afin de représenter les évolutions identifiées :

#### **Loi linéaire**

$$d_{ij} = \frac{\sqrt{\bar{Y}_{ij}} - \sqrt{\bar{Y}_{ij}^0}}{\sqrt{\bar{Y}_c}} \text{ si } d_{ij} < 1 \text{ et } \bar{Y}_{ij} < \bar{Y}_{ij}^R; \text{ sinon } d_{ij} = 1 \quad (3.19)$$

#### **Loi polynomiale**

$$d_{ij} = \sum_{n=1}^N a_{ij}^n \left( \sqrt{\bar{Y}_{ij}} - \sqrt{\bar{Y}_{ij}^0} \right)^n \text{ si } d_{ij} < 1 \text{ et } \bar{Y}_{ij} < \bar{Y}_{ij}^R; \text{ sinon } d_{ij} = 1 \quad (3.20)$$

#### **Loi logarithmique**

$$d_{ij} = a_{ij}^0 \left( \ln \sqrt{\bar{Y}_{ij}} - \ln \sqrt{\bar{Y}_{ij}^0} \right) \text{ si } d_{ij} < 1 \text{ et } \bar{Y}_{ij} < \bar{Y}_{ij}^R; \text{ sinon } d_{ij} = 1 \quad (3.21)$$

**Fonction de Heaviside.** (Cette fonction peut être utilisée pour décrire le comportement élastique fragile)

$$d_{ij} = \mathcal{H} \left( \sqrt{\bar{Y}_{ij}} - \sqrt{\bar{Y}_{ij}^R} \right) \text{ si } d_{ij} < 1 \text{ et } \bar{Y}_{ij} < \bar{Y}_{ij}^R; \text{ sinon } d_{ij} = 1 \quad (3.22)$$

### 3.2.4 Couplage plasticité-endommagement

Lors des observations expérimentales liées au comportement mécanique de matériaux composites tissés [24], [25], [27], [96], on remarque l'apparition des déformations irréversibles et ce principalement dans la direction de cisaillement. Ces phénomènes doivent être intégrés dans la loi de comportement élastique endommageable précédente. Pour cela, on considère la partition de la déformation totale :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.23)$$

Pour satisfaire aux observations expérimentales, on considère pour les composites tissés que la rigidité des fibres ainsi que le tissage bloque l'écoulement plastique dans les directions longitudinales et transversales :

$$\varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{22}^p = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{12}^p \neq 0 \quad (3.24)$$

Le couplage en cisaillement de l'endommagement et de la plasticité est réalisé par le biais de la contrainte effective :

$$\tilde{\sigma}_{12} = \frac{\sigma_{12}}{(1 - d_{12})} \quad (3.25)$$

En considérant un écrouissage isotrope, la fonction critère  $f$  est définie de la manière suivante :

$$f = \frac{|\sigma_{12}|}{(1 - d_{12})} - R(p) - R_0 \quad (3.26)$$

où  $R_0$  est la limite élastique,  $R(p)$  est la fonction d'écrouissage. Cette dernière fonction,  $R(p)$ , doit être choisie en fonction des observations expérimentales et est souvent prise sous une forme de loi puissance :

$$R(p) = \beta p^m \quad (3.27)$$

La correction de la déformation plastique est effectuée avec le multiplicateur de plasticité  $\dot{\lambda}$  :

$$\dot{\varepsilon}_{12}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} \quad ; \quad -\dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} \quad , \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.28)$$

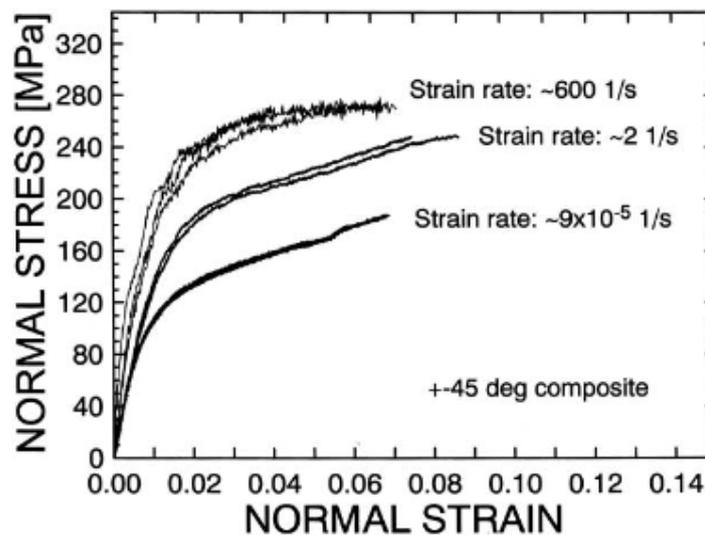
Qui se déduit de la condition de consistance  $\dot{f} = 0$  :

$$\dot{\lambda} = \frac{f}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} 2G_{12}^0(1 - d_{12}) - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} + \frac{\partial R}{\partial p}} \quad (3.29)$$

La déformation plastique cumulée s'exprimera sous la forme suivante :

$$\dot{p} = \int_0^{\varepsilon_{12}^p} (1 - d_{12}) d\varepsilon_{12}^p \quad (3.30)$$

### 3.2.5 Prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation

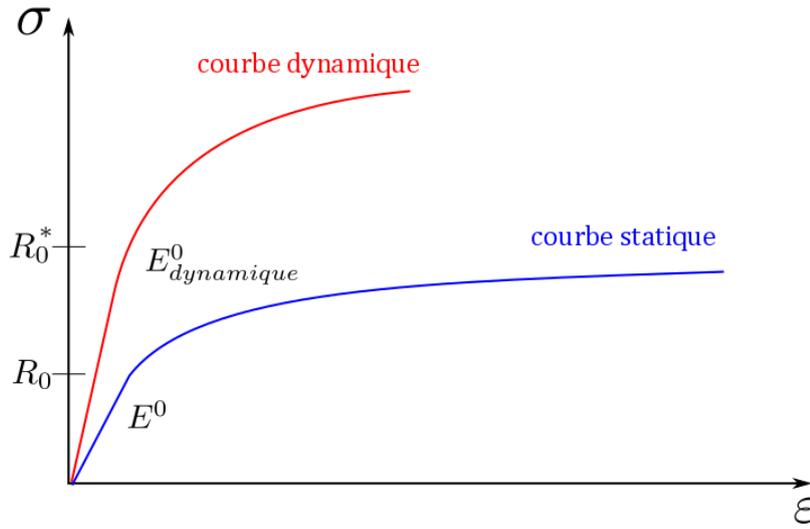


**Figure 3.2. Courbe contrainte-déformation à  $[\pm 45^\circ]$  à différentes vitesses de déformation [99]**

Une des propriétés importantes des matériaux composites à matrice polymère est leur sensibilité à la vitesse de déformation. Cela est conditionné principalement par les propriétés viscoélastiques de la matrice et par la cohésion relativement fragile entre la matrice et les fibres. Dans les travaux de Gilat et al. [99], la sensibilité au changement de la vitesse de déformation a été étudiée expérimentalement pour un composite IM7/977-2 carbone/époxy dans différentes configurations :  $[10^\circ]$ ,  $[90^\circ]$ ,  $[45^\circ]$  et  $[\pm 45^\circ]$ . Les conclusions montrent que la dépendance du comportement à la vitesse de déformation est surtout importante dans les directions  $[45^\circ]$  et  $[\pm 45^\circ]$  (Figure 3.2). On remarque que l'augmentation de la vitesse de déformation conduit à des changements non-négligeables du module élastique, de la contrainte d'écoulement initiale et de la déformation à rupture. Ces phénomènes importants doivent être pris en compte au sein de la modélisation pour la prise en compte de chargements dynamiques, comme on le retrouve dans les travaux [24], [25], [26], [62], [100] et [101].

De manière générale, la réponse typique du matériau composite au changement de vitesse de déformation peut être illustrée comme sur la Figure 3.3. On constate généralement qu'avec l'augmentation de la vitesse de déformation, les modules d'Young varient plus que sensiblement, les contraintes d'écoulement limite s'accroissent, tout comme les contraintes à rupture et enfin

l'aire sous la courbe « contrainte – déformation » diminue, ce qui tend à supposer que l'endommagement croit beaucoup plus rapidement. Afin de prendre en compte l'ensemble de ces phénomènes, des ajustements doivent être implémentés dans le modèle du comportement.



**Figure 3.3. Influence de la vitesse de déformation sur le comportement d'un matériau composite**

Dans les travaux de [25], [28], un modèle visqueux est proposé pour la prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation des matériaux composites unidirectionnels et tissés en fibres de verre et matrice époxy. Dans les travaux [26] et [27], ce modèle a été appliqué avec succès à d'autres types de composites, notamment en carbone époxy. L'idée principale est l'ajout d'une contrainte visqueuse dans la loi constitutive ce qui permet de représenter le comportement du matériau avec le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt :

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (3.31)$$

L'influence de cette contrainte visqueuse supplémentaire permet de décrire l'accroissement des modules élastiques et de la contrainte d'écoulement initiale en fonction de la vitesse de déformation. Cela revient pour les cas de chargements rapides [25], à faire évoluer les modules d'élasticité en fonction de la vitesse de déformation tels que :

$$\sigma = \mathbf{C}^0 \left( \mathbf{I} + \mathbf{F}^E(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0) \right) \varepsilon = \mathbf{A}^0(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0) \varepsilon \implies A_{ij}^0 = C_{ij}^0 (1 + F_{ij}^E(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0)) \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{A}^0(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0)$  est la matrice de rigidité en dynamique,  $F_{ij}^E$  sont les fonctions de viscosité,  $\dot{\varepsilon}$  est la vitesse de déformation et  $\dot{\varepsilon}_0$  est la vitesse de déformation « seuil » à partir de laquelle la vitesse de déformation a une influence sur le comportement du matériau.

La contrainte d'écoulement initiale varie aussi en fonction de la vitesse de déformation en cisaillement et l'on prend cette évolution sous la forme équivalente à l'expression (3.32) :

$$R_0^{dyn} = R_0^{stat} (1 + F^R(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0)) \quad (3.33)$$

où  $F^R(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0)$  est la fonction d'évolution de la contrainte d'écoulement initial  $R_0^{stat}$  en fonction de la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$ .

Les fonctions  $F^E(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}_0)$  et  $F^R(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}_0)$  sont dépendantes de la vitesse de déformation courante  $\dot{\epsilon}$  et de la vitesse de déformation « seuil »  $\dot{\epsilon}_0$  à partir de laquelle la vitesse de déformation affecte le comportement du matériau composite: si  $\dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0$ , les fonctions de viscosité sont nulles ( $F^E = F^R = 0$ ). Les fonctions de viscosité  $F^E(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}_0)$  et  $F^R(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}_0)$  doivent être identifiées avec les données expérimentales à partir des essais de traction à différentes vitesses de déformation. Elles peuvent être exprimées dans sous forme linéaire, polynomiale, puissance, etc. (tout comme pour les endommagements).

On remarque que le changement des paramètres élastiques  $C_{ij}^0$  et  $R_0^{stat}$  provoque respectivement l'évolution des seuils initiaux associés à l'endommagement et à la plasticité. En effet, les seuils de non endommagement des relations (3.18) suivent la forme :

$$\bar{Y}_{ij}^{dyn} = \bar{Y}_{ij}^{stat} \frac{1 + F^R(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}_0)}{\sqrt{1 + F_{ij}(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}_0)}} \quad (3.34)$$

Comme la valeur des modules d'élasticité augmente avec la vitesse de déformation, on peut postuler raisonnablement que l'endommagement évolue plus rapidement. Alors, le comportement du matériau composite qui est élasto-plastique endommageable en quasi-statique tend à être un comportement élastique endommageable « fragile » en dynamique. Cela implique que pour les coefficients des fonctions  $F_1^d, F_2^d, F_{12}^d$  des équations (3.18), l'évolution se fera sous une forme identique à l'équation (3.34).

### 3.3 IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU MODELE ELASTO-PLASTIQUE ENDOMMAGEABLE

Dans cette partie, on décrit l'algorithme (Figure 3.4) d'implémentation du modèle précédent pour matériaux composites tissés au point d'intégration: cet algorithme intègre le comportement élasto-plastique endommageable avec la sensibilité à la vitesse de déformation. Il se base aussi sur une méthode classique de type « prédiction – correction » qui été développée dans les travaux [25] [26] et [91].

Les entrées du programme sont constituées des déformations totales correspondant au cas de chargement désiré (traction ou compression, longitudinal/transversal ou de cisaillement), de la vitesse de déformation de l'essai, des constantes élastiques ainsi que des paramètres des lois d'évolution pour les endommagements, la plasticité et les vitesses de déformation.

La première étape consiste à adapter les constantes élastiques (3.32) ainsi que la contrainte initiale d'écoulement en cisaillement (3.33) en fonction de la vitesse de déformation de l'essai. Les paramètres d'évolution des endommagements sont ensuite aussi modifiés en conséquence (3.34). Rappelons que cet étape n'existe que si la vitesse de déformation courante est supérieure à la vitesse de déformation seuil, dans le cas contraire, les valeurs utilisées sont celles provenant du cas quasi-statique.

La seconde étape consiste à considérer que l'incrément de déformation courant est un incrément de déformation purement élastique. Grâce à cette prédiction, l'état d'endommagement (3.16), (3.17), (3.18) pour l'essai est déterminé et aboutit à obtenir l'état de contraintes associé (3.15). Cela permet aussi d'identifier la déformation plastique cumulée (3.30) et donc la valeur

de la fonction seuil (3.27). On teste ensuite la valeur de la fonction critère  $f$  (3.26) pour laquelle il existe deux cas possibles :

- La fonction critère  $f$  est négative ou nulle. Cela signifie que la prédiction était correcte et donc qu'à l'instant courant, la solution a été déterminée.
- La fonction critère  $f$  est positive. Cela signifie que la prédiction de l'incrément de déformation élastique n'est pas exacte (elle a été surévaluée) : il est nécessaire d'introduire une étape de correction des déformations plastiques.

Pour ce dernier cas, une méthode de Newton-Raphson peut être utilisée. On rappelle que l'écoulement plastique est bloqué dans les directions des fibres et donc que seule la correction de la déformation plastique en cisaillement  $\varepsilon_{12}^p$  est nécessaire. Pour cela, on calcule le multiplicateur de plasticité  $\lambda$  (3.29) afin de corriger la déformation plastique  $\varepsilon_{12}^p$  (3.28), la plasticité cumulée  $p$  (3.30). Ensuite, la déformation élastique, l'état d'endommagement et de contraintes ainsi que la fonction d'écrouissage sont mis à jour et la fonction critère  $f$  est de nouveau évaluée. Tant que la condition de nullité de la fonction critère  $f$  n'est pas satisfaite à une tolérance donnée, le processus est itéré sinon cela veut dire que la solution a été identifiée. Nous tenons à rappeler que ce processus itératif ne nécessite normalement que très peu d'itérations.

**ENTREES**

- Déformation totale  $\varepsilon_{ij}^t$
- Paramètres du modèle associés à l'élasticité, la plasticité, l'endommagement
  - Lois d'évolution des endommagements et des déformations irréversibles
- Vitesse de déformation référence  $\dot{\varepsilon}_0$
- Fonctions  $F^E(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0)$  et  $F^R(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0)$

**CALCUL DES PARAMETRES VISQUEUX**

Calcul de la vitesse de déformation :  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{|\varepsilon_{ij}^{k+1} - \varepsilon_{ij}^k|}{\Delta t}$

Si  $\dot{\varepsilon}_{ij} \geq \dot{\varepsilon}_0$  :

- Modification des modules élastiques  $\Lambda_{ij}^0$
- Modification de la contrainte d'écoulement initiale  $R_0^{dyn}$
- Modification des forces thermodynamiques associées aux endommagements  $\bar{Y}_{ij}$  et de leurs paramètres associés

**PREDICTION ELASTIQUE**

- Calcul de la déformation élastique  $\varepsilon_{ij,t+\Delta t}^e$  :  $\varepsilon_{ij,t+\Delta t}^e = \varepsilon_{ij,t+\Delta t}^t - \varepsilon_{ij,t}^p$
- Calcul des forces thermodynamiques  $\bar{Y}_{ij}$  :
  - $Y_{ij} = \frac{1}{2} \Lambda_{ij} (\varepsilon_{ij}^e)^2$  ;  $\bar{Y}_{ij} = \sup_{\tau \leq t} (Y_{ij}(\tau))$
- Calcul de l'endommagement  $d_{ij}$  :
  - si  $\bar{Y}_{ij} < Y_{ij}^R \rightarrow d_{ij} = F_{ij} \left( \sqrt{\bar{Y}_{ij}} - \sqrt{\bar{Y}_{ij}^0} \right)$
  - si  $\bar{Y}_{ij} \geq Y_{ij}^R \rightarrow d_{ij} = 1$
- Calcul des contraintes  $\sigma_{ij,t+\Delta t}$  :  $\sigma_{ij,t+\Delta t} = \Lambda_{ij} \varepsilon_{ij,t+\Delta t}^e$
- Calcul de la fonction critère  $f$  :  $f = \frac{|\sigma_{12}|}{(1-d_{12})} - R_0 - R(p)$

Si  $f > 0$

**CORRECTION PLASTIQUE**

**tant que**  $|f| > \text{tolerance}$  **et**  $j < 50$  *itérations maximales*

- Calcul de multiplicateur de plasticité  $\dot{\lambda}$
- Actualisations des variables plastiques :
  - $\varepsilon_{12,j+\Delta j}^p = \varepsilon_{12,j}^p + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$  ;  $p_{j+\Delta j} = p_j + \dot{\lambda}$  ;  $R_{j+\Delta j} = R_j + \dot{R}$
- Mettre à jour la déformation élastique  $\varepsilon_{12,t+\Delta t}^e$
- Mettre à jour la force thermodynamique associée  $\bar{Y}_{12}$
- Mettre à jour l'endommagement  $d_{12}$
- Mettre à jour la contrainte  $\sigma_{12,t+\Delta t}$
- Mettre à jour la fonction critère  $f, j = j + 1$

fin

fin

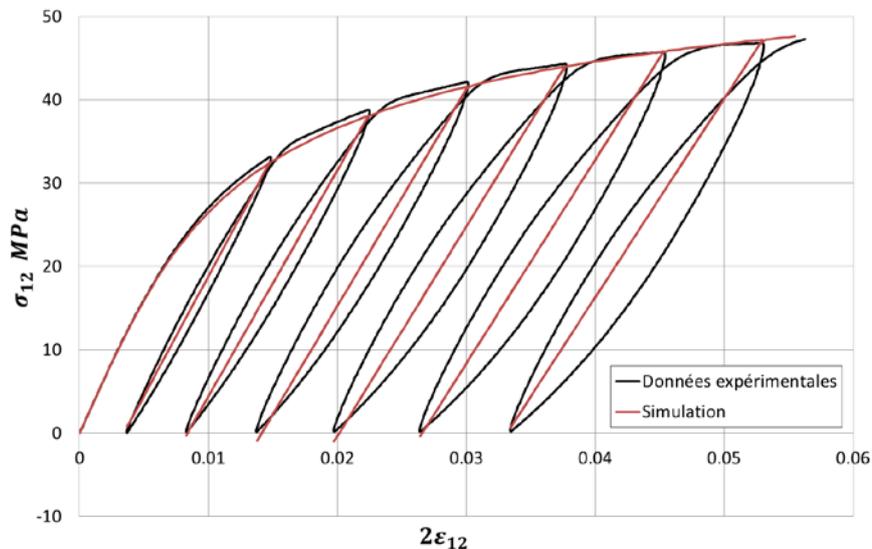
**Figure 3.4. Algorithme du modèle élasto-plastique endommageable pour matériaux tissés**

### 3.4 LOI DE COMPORTEMENT A BASE DE DERIVEES FRACTIONNAIRES

#### 3.4.1 Introduction

Pour certains cas de chargement (comme les chargements cycliques), les matériaux composites tissés ont un comportement développant des boucles d'hystérésis principalement dans la direction de cisaillement. Le précédent modèle permet, comme on le constate sur la **Figure 3.5**, de représenter correctement l'enveloppe de la charge, les déformations irréversibles et les endommagements. Par contre, ce modèle ne peut représenter les boucles d'hystérésis consécutives à une décharge/recharge du fait du modèle élastique (déformations irréversibles et endommagements constants). Cela peut être fortement pénalisant par exemple dans l'étude d'un couplage thermomécanique (comme pour les essais d'auto-échauffement).

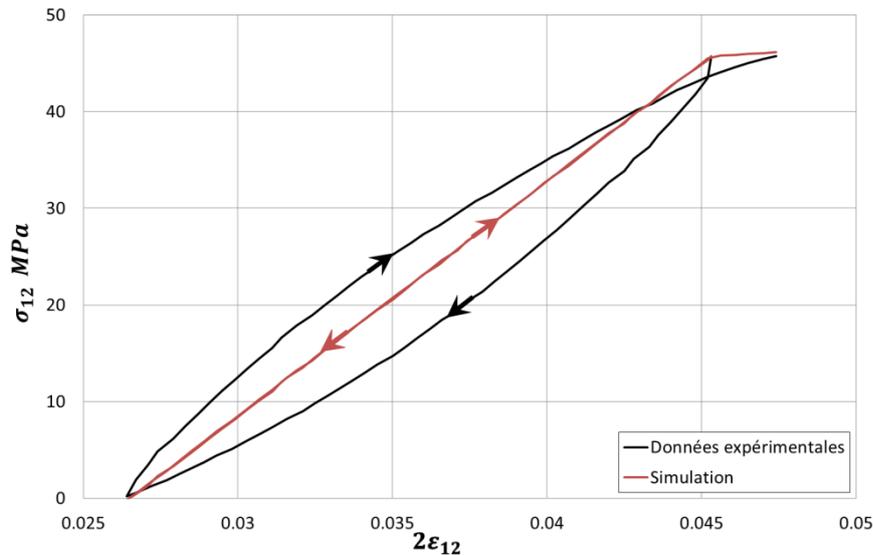
L'idée principale pour la modélisation de ces boucles d'hystérésis est de représenter les déformations provenant de celles-ci à l'aide de dérivées fractionnaires. Nous montrerons que ce modèle écrit est complémentaire par rapport à la loi élasto-plastique endommageable précédente. Ces deux modèles travaillent effectivement de manière collaborative, mais le modèle à base de dérivées fractionnaires est optionnel et n'agira que si la modélisation des boucles d'hystérésis est nécessaire. Nous montrerons enfin qu'il sera possible de représenter des boucles d'hystérésis sous des sollicitations dynamiques.



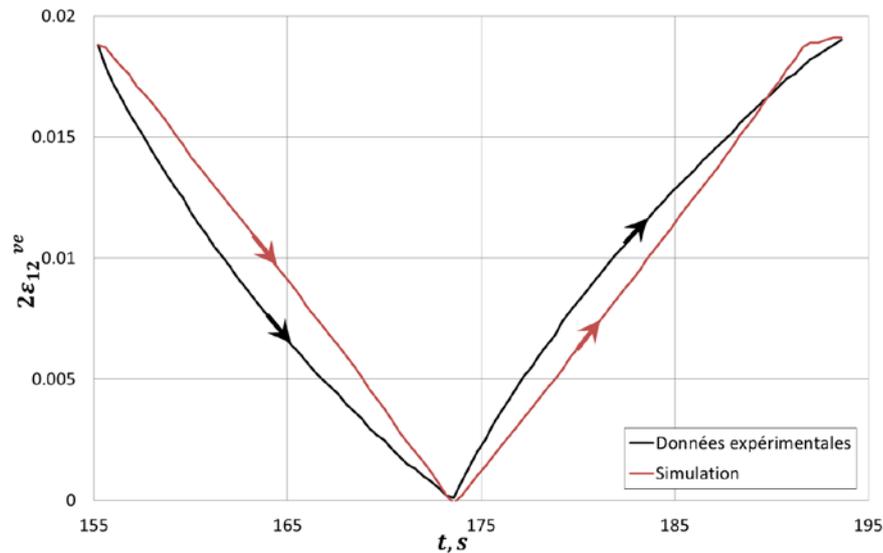
**Figure 3.5. Comparaison numérique/expérimental pour un essai en cisaillement pour un composite carbone/époxy**

#### 3.4.2 Relation constitutive fractionnaire

Considérons une décharge-recharge qui correspond à une boucle d'hystérésis. Conformément au modèle élasto-plastique endommageable (paragraphe 3.2), la déformation plastique reste constante et la déformation élastique est une fonction linéaire. Par contre, une non-linéarité peut être observée pendant la décharge-recharge (**Figure 3.6** et **Figure 3.7**).



**Figure 3.6. Contrainte - déformation correspondant à une boucle d'hystérésis**



**Figure 3.7. Déformation - temps correspondant à une boucle d'hystérésis**

De manière classique, pour prendre en compte la non-linéarité observée, une déformation viscoélastique  $\varepsilon^{ve}$  peut être ajoutée (**Figure 3.8**). Dans ce cas, la déformation totale est représentée comme une somme de trois déformations : élastique, plastique et viscoélastique :

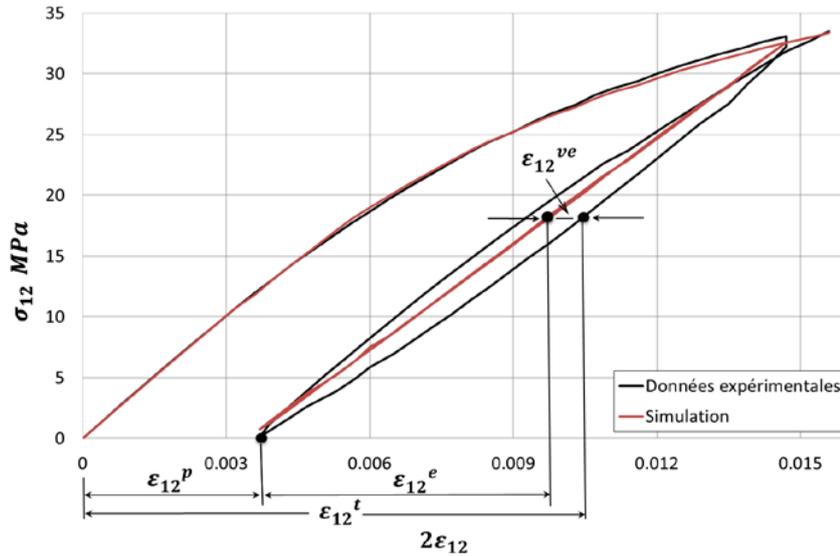
$$\varepsilon_{12}^t = \varepsilon_{12}^e + \varepsilon_{12}^p + \varepsilon_{12}^{ve} \quad (3.35)$$

Par contre, cette approche conduit vers un modèle complexe associé à un grand nombre de paramètres dans le cadre standard de développement de lois de comportement.

Nous proposons une approche alternative. Afin de modéliser la non-linéarité, on exprime la déformation totale dans la boucle comme une fonction non-linéaire de déformation élastique grâce au calcul fractionnaire. La déformation dans la boucle  $\varepsilon_{12}^{boucle}$  est donc une fonction à une dérivée fractionnaire de la déformation élastique qui s'écrit :

$$\varepsilon_{12}^{boucle} = A + 2BD^\alpha \varepsilon_{12}^e(t) \quad (3.36)$$

où  $\varepsilon_{12}^e$  est la déformation élastique déterminée avec le modèle élasto-plastique endommageable,  $D^\alpha$  est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (1.26) et  $A$ ,  $B$  et  $\alpha$  sont les paramètres du modèle fractionnaire.



**Figure 3.8. Composition des déformations**

Comme la plasticité est constante, la contrainte s'écrit sous la forme d'une loi élastique :

$$\sigma_{12}(t) = G_{12}^0(1 - d_{12}) \varepsilon_{12}^{boucle}(t) \quad (3.37)$$

En substituant l'équation (3.36) dans (3.37), le modèle devient :

$$\sigma_{12}(t) = G_{12}^0(1 - d_{12})A + 2G_{12}^1 D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t) \quad (3.38)$$

où  $G_{12}^1$ ,  $A$  et  $\alpha$  sont les paramètres associés au modèle fractionnaire qui seront définis dans la partie suivante.

L'équation (3.38) est une forme non-standard du modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire. On considère que  $A$  est une fonction de l'endommagement  $d_{12}$  ou de la déformation élastique  $\varepsilon_{12}^e$  en prenant en compte que  $d_{12} = d_{12}(\varepsilon_{12}^e)$ . Enfin, on rappelle que le modèle fractionnaire est intrinsèquement sensible à la vitesse de déformation donc aucune modification de ce paramètres n'est nécessaire [41].

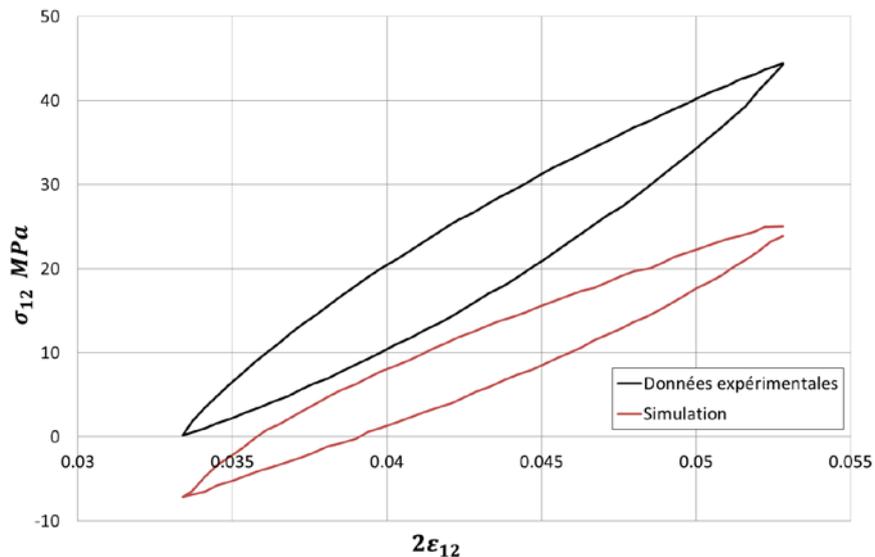
### 3.4.3 Explication des paramètres du modèle fractionnaire

Pour essayer de comprendre ce que représentent les paramètres de la loi fractionnaire (3.38), on se propose d'étudier l'influence de ceux-ci sur la réponse du matériau :

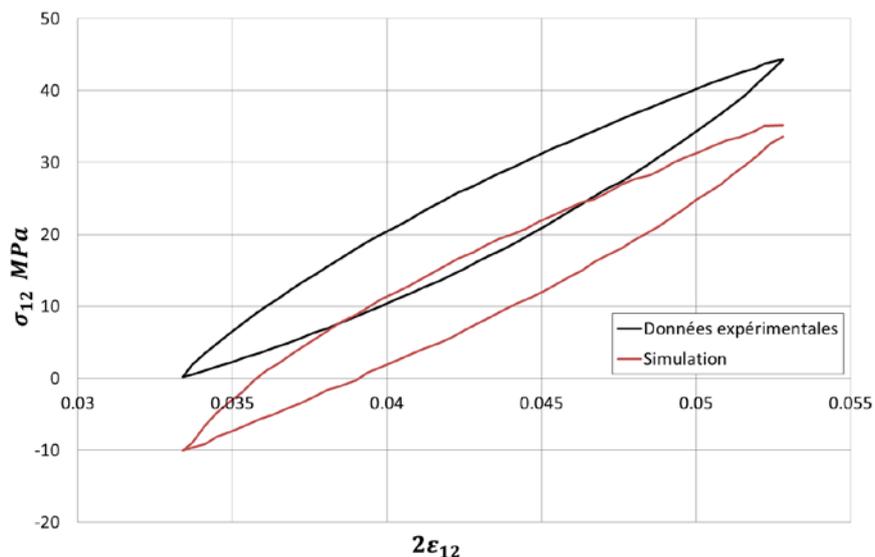
- La dérivée fractionnaire de la déformation élastique  $D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t)$  transforme la déformation linéaire en non-linéaire, ce qui fait apparaître la boucle d'hystérésis (Figure 3.9). L'ordre de dérivée non-entier  $\alpha$  représente l'ouverture de la boucle. L'augmentation de  $\alpha$

détermine la croissance de l'aire de la boucle et en conséquence la dissipation de l'énergie viscoélastique.

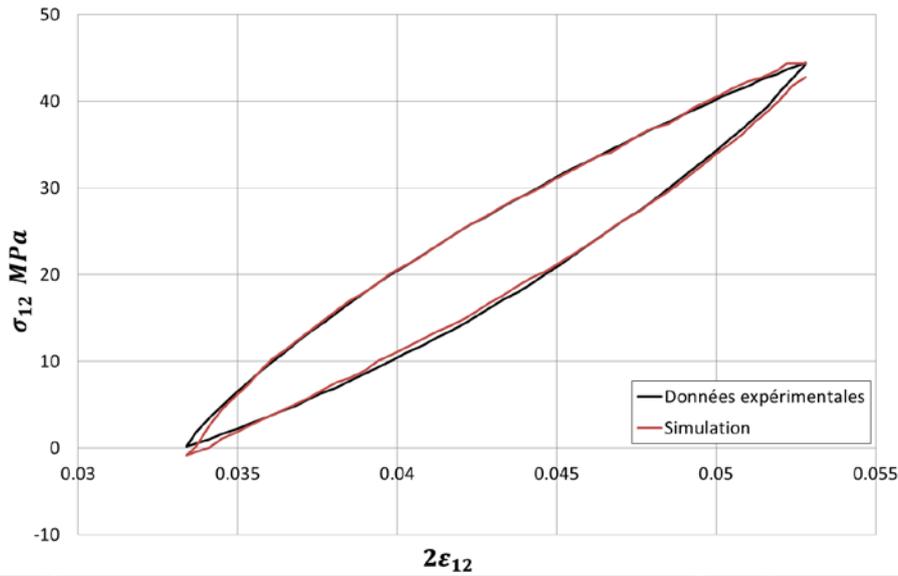
- Le multiplicateur  $G_{12}^1$  corrige la pente de la boucle en accord avec les données expérimentales (**Figure 3.10**). Grâce à ce coefficient, le niveau d'endommagement est corrigé à la valeur provenant du modèle élasto-plastique endommageable.
- Le terme  $G_{12}^0(1 - d_{12})A$  correspond à une contrainte de raccordement qui lie les deux modèles : le modèle fractionnaire et le modèle élasto-plastique endommageable (**Figure 3.11**).



**Figure 3.9. Représentation graphique de la dérivée fractionnaire  $\sigma_{12}(t) = D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t)$**



**Figure 3.10. Représentation graphique du terme  $\sigma_{12}(t) = G_{12}^1 D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t)$**

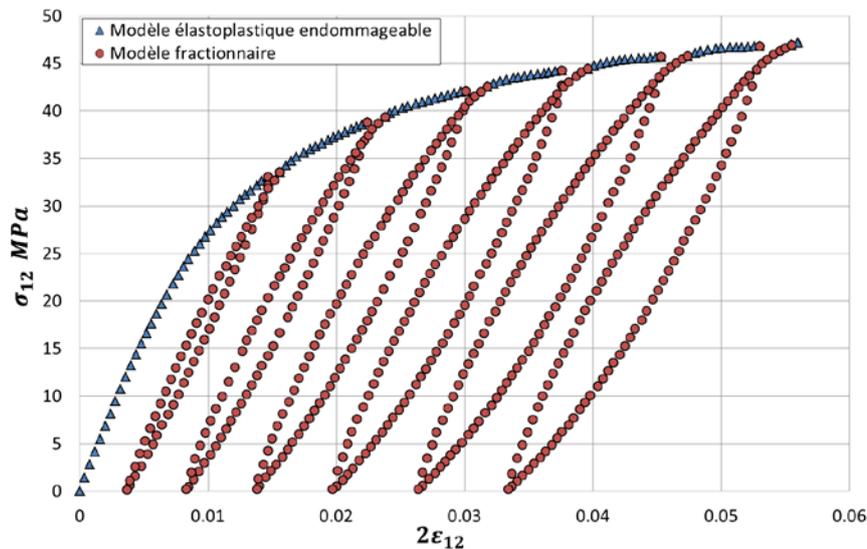


**Figure 3.11.** Représentation graphique du modèle fractionnaire  $\sigma_{12}(t) = G_{12}^0(1 - d_{12})A + G_{12}^1 D^\alpha \epsilon_{12}^e(t)$

### 3.5 COUPLAGE DES DEUX MODELES

Dans cette partie, le couplage entre le modèle élasto-plastique endommageable et le modèle fractionnaire est présenté afin de décrire la réponse hystérétique du matériau composite.

A titre d'exemple, on considère la réponse typique pour un matériau composite carbone/époxy tissé en cisaillement qui est illustré sur la **Figure 3.12**.



**Figure 3.12.** Couplage entre le modèle élasto-plastique endommageable et le modèle fractionnaire

La collaboration entre les deux modèles est assurée via la fonction critère  $f$  (3.26). Deux cas sont possibles :

- Si la fonction critère  $f$  et sa dérivée  $\dot{f}$  sont nulles ( $f = \dot{f} = 0$ ), on considère le développement d'un écoulement plastique et la propagation de l'endommagement. Le

modèle élasto-plastique endommageable est alors utilisé. C'est ce qui est illustré sur la **Figure 3.12** par des triangles bleus.

- Si la fonction critère  $f$  est négative ou si la fonction critère  $f$  est nulle et sa dérivée  $\dot{f}$  est inférieure à zéro ( $f < 0$  ou  $f = 0$  et  $\dot{f} < 0$ ), on considère alors une décharge viscoélastique. Les niveaux de plasticité et d'endommagement demeurent alors constants et égaux aux derniers calculs provenant du modèle élasto-plastique endommageable. C'est ce qui est illustré sur la **Figure 3.12** par des cercles rouges.

### 3.6 METHODOLOGIE DE CALCUL NUMERIQUE D'UNE BOUCLE D'HYSTERESIS

Dans cette partie, nous proposons de nous attarder sur la méthodologie de calcul d'une boucle d'hystérésis à l'aide du modèle fractionnaire.

Pour clarifier la démarche, on considère un des intervalles « décharge – recharge » sur la courbe « contrainte-déformation » de la **Figure 3.12** (qui est marqué par les cercles rouges). Cette zone est reproduite dans le domaine « déformation-temps » sur la **Figure 3.13**. On considère que le premier point de la décharge correspond à l'instant du temps  $t_M$  (le début de la boucle d'hystérésis) et le dernier point est noté par  $t_N$ . Sur l'intervalle temporel  $[t_M, t_N]$ , la fonction critère  $f$  satisfait les conditions :  $f < 0$  ou  $f = 0$  et  $\dot{f} < 0$ . C'est donc le modèle fractionnaire qui est utilisé.

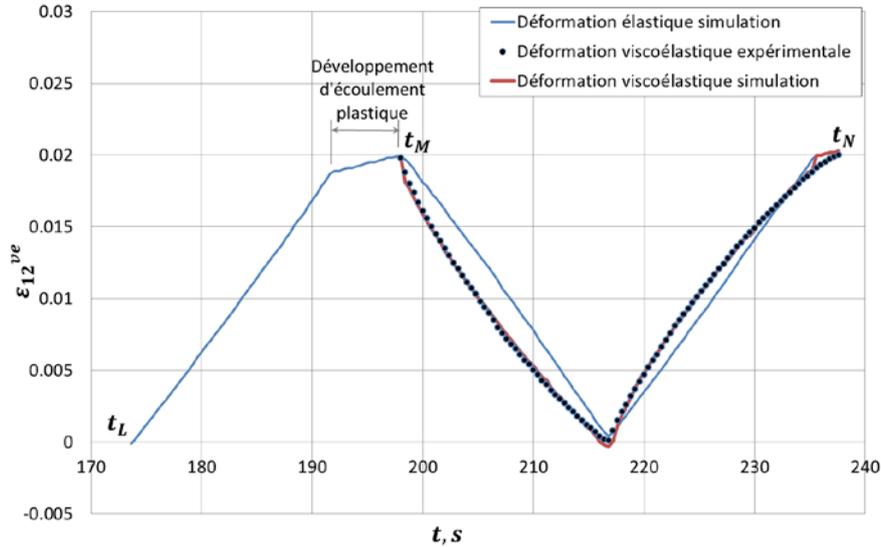
Dans ce modèle (3.38), la dérivée d'ordre non-entier de la déformation élastique  $D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t)$  doit être calculée sur l'intervalle temporel  $[t_M, t_N]$ . Toutefois, comme nous l'avons noté dans le chapitre 1, la fonction que l'on dérive doit être nulle à l'origine et malheureusement ceci n'est pas vrai dans notre cas :  $\varepsilon_{12}^e(t_M) \neq 0$ . Sans la précédente condition, la dérivée non-entière au sens de Riemann-Liouville tendrait vers l'infini au premier point de calcul :  $D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t_M) \rightarrow \infty$ . Afin d'éviter cette singularité, on propose d'inclure la déformation de la charge précédente ce qui revient à étendre l'intervalle temporel de calcul de la dérivée fractionnaire et de prendre comme support maintenant  $[t_L, t_N]$  (**Figure 3.13**). Dans ce nouvel intervalle, la condition  $\varepsilon_{12}^e(t_L) = 0$  est dorénavant satisfaite. Cette technique nous permet de définir la valeur de dérivée fractionnaire au premier point de la boucle  $D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t_M)$ . En d'autres termes, pour modéliser la boucle d'hystérésis qui correspond à l'intervalle temporel de « décharge-recharge »  $[t_M, t_N]$ , nous utilisons les valeurs de la dérivée fractionnaire sur l'intervalle « charge-décharge-recharge »  $[t_L, t_N]$  afin d'éviter des problèmes d'ordre purement mathématique.

Afin de calculer informatiquement les dérivées fractionnaires, différentes approximations numériques peuvent être utilisées. Comme nous l'avons décrit dans le paragraphe 1.11.4, l'erreur minimale du calcul numérique des dérivées fractionnaires correspond à l'approximation **M1 (1.114), (1.117)** qui peut être représentée de la façon suivante pour l'application à notre cas :

$$(I_0^{1-\alpha} \varepsilon_{12}^e(t))_{M1} = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \varepsilon_{12}^e \left( t \left( 1 - v^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \right) dv \quad (3.39)$$

$$(D_0^\alpha \varepsilon_{12}^e(t))_{M1} = \frac{(I_0^{1-\alpha} \varepsilon_{12}^e(t + \Delta t))_{M1} - (I_0^{1-\alpha} \varepsilon_{12}^e(t))_{M1}}{\Delta t} \quad (3.40)$$

Enfin, afin d'utiliser les formules (3.39) et (3.40), il est nécessaire de reconstruire l'expression analytique de la fonction  $\varepsilon_{12}^e(t)$  par des fonctions décrites par morceaux.



**Figure 3.13. Portion de déformation pour l'identification des paramètres de dérivées fractionnaires**

### 3.7 IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU COUPLAGE DES MODELES

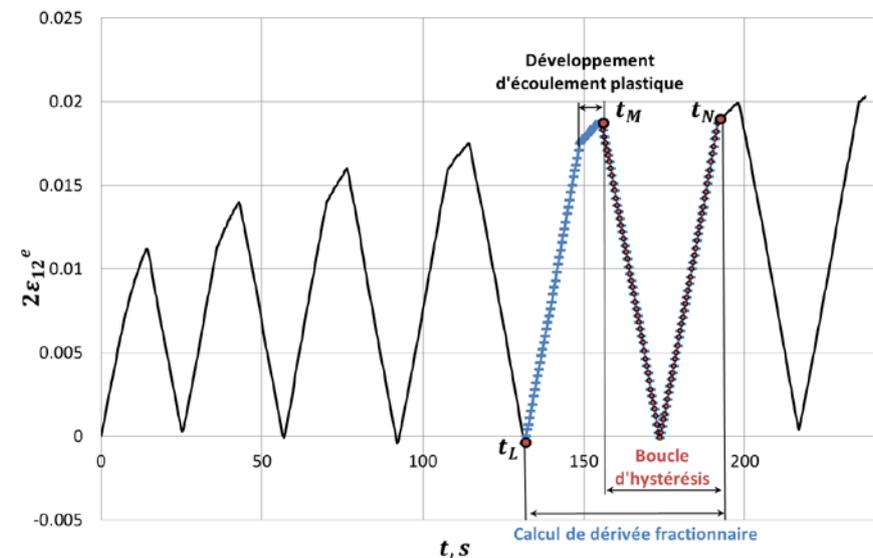
Dans cette section, nous proposons l'implémentation numérique du couplage entre le modèle élasto-plastique endommageable et le modèle fractionnaire. L'algorithme retenu, se base sur le schéma numérique du modèle élasto-plastique endommageable qui est décrit au paragraphe 3.3. Le modèle fractionnaire y est intégré de manière simple.

Dans un premier temps, il est nécessaire d'ajouter aux données d'entrée l'ensemble des paramètres du modèle fractionnaire :  $A$ ,  $G_{12}^1$  et  $\alpha$  ainsi que avec les points-indices ( $t_L$ ,  $t_M$  et  $t_N$ ) du début et de la fin de chacune boucle d'hystérésis. Ces points-indices peuvent être déterminés comme les instants du temps qui correspondent aux déformations élastiques (ou également aux déformations totales) maximales  $\varepsilon_{12}^{e_{max}}$  et minimales  $\varepsilon_{12}^{e_{min}}$ . Grâce à cela, on peut obtenir l'intervalle des déformations élastiques  $[\varepsilon_{12}^e(t_L), \varepsilon_{12}^e(t_N)]$  nécessaire au calcul de la dérivée fractionnaire (Figure 3.14). Cette technique nous permet ensuite de diminuer le temps du calcul. L'activation du modèle fractionnaire commence avec une décharge pour laquelle la fonction critère doit satisfaire des conditions ( $f \leq 0$ ) et pour laquelle bien entendu l'endommagement  $d_{12}$  est constant. Quand c'est le cas, des étapes supplémentaires sont à insérer :

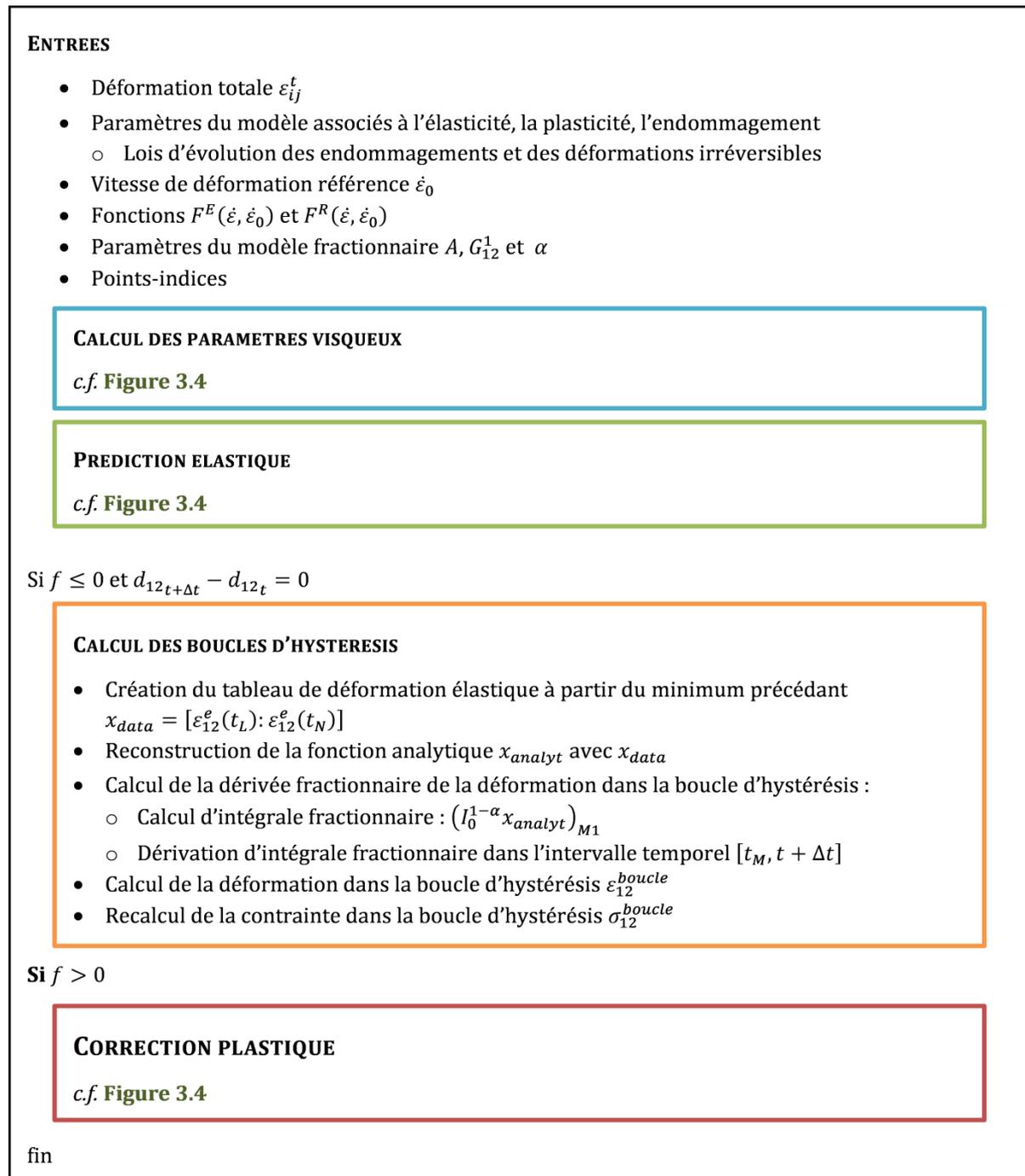
- On forme un tableau  $x_{data}$  qui contient la déformation élastique à partir de la recharge précédente :  $x_{data} = [\varepsilon_{12}^e(t_L) : \varepsilon_{12}^e(t_N)]$ .

- L'expression analytique  $x_{analyt}$  est reconstruite pour les données de déformation élastique collectée  $x_{data}$  grâce à une fonction définie par morceaux.
- Ensuite, pour obtenir les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$ , l'intégrale fractionnaire d'ordre  $1 - \alpha$  de la fonction  $x_{analyt}$  est calculée avec la méthode  $M1 \left( I_0^{1-\alpha} x_{analyt}(t) \right)_{M1}$  **(3.39)**.
- Afin de calculer numériquement l'intégrale de **(3.39)**, une méthode de quadrature de Gauss est utilisée. L'intervalle du calcul est divisé en 100 sous-intervalles et 7 points de Gauss sont utilisés dans chaque sous-intervalle. Ce choix a été fait après plusieurs essais numériques. On a remarqué que ce nombre de sous-intervalles et de points Gauss est suffisant pour avoir une erreur de calcul acceptable et minimiser ainsi le temps de traitement et les ressources informatiques nécessaires.
- On dérive l'intégrale fractionnaire ainsi déterminée  $\left( I_0^{1-\alpha} x_{analyt}(t) \right)_{M1}$  à l'aide d'un schéma basé sur la différence finie **(3.40)** dans l'intervalle temporel considéré  $[t_M, t_N]$  qui correspondent aussi à la boucle d'hystérésis (« décharge-recharge »).
- De cette façon, les dérivées d'ordre  $\alpha$  de la déformation élastique sont calculées pour la boucle d'hystérésis. Ensuite, la contrainte est recalculée en utilisant la formule **(3.38)**.

L'algorithme d'implémentation numérique du modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaire est présenté sur la **Figure 3.15**.



**Figure 3.14. Zone du calcul fractionnaire et de la boucle d'hystérésis**



**Figure 3.15. Algorithme du modèle élasto-plastique endommageable fractionnaire**

### 3.8 CONCLUSION

Dans ce chapitre, une stratégie est développée afin de modéliser le comportement du matériau composite tissé sous la charge quasi-statique ou dynamique. Le modèle se base sur la collaboration d'un modèle élasto-plastique endommageable complet et d'un modèle fractionnaire.

Le modèle élasto-plastique endommageable est écrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles isothermes. Grâce à la méthode d'état local, les lois de comportement

sont obtenues pour un état de contraintes planes. Ce modèle permet de prendre en compte des comportements non linéaires avec endommagements dans la direction des fibres (longitudinalement et transversalement) et permet dans le cas du cisaillement de prendre en compte, en plus, les déformations irréversibles. Enfin, ce modèle intègre aussi une sensibilité à la vitesse de déformation. L'implémentation numérique a été faite, au point d'intégration, avec un algorithme de type « prédicteur-correcteur ».

Pour avoir une simulation plus « complète », un modèle à base de dérivées fractionnaires a été ajouté [41]. L'approche fractionnaire permet de décrire des phénomènes historico-dépendants et est donc tout à fait adapté pour la représentation des boucles d'hystérésis. A la modélisation élasto-plastique endommageable, seuls trois paramètres supplémentaires doivent être ajoutés, ce qui constitue un atout majeur en regard de modélisations plus classiques. La jonction entre les deux modèles est réalisée à l'aide d'un paramètre du modèle fractionnaire qui représente une contrainte de raccordement. Nous rappelons que le modèle fractionnaire est complémentaire du modèle élasto-plastique endommageable : il est possible de l'ajouter uniquement si la modélisation requiert la représentation des boucles d'hystérésis. Enfin, le modèle fractionnaire est naturellement sensible à la vitesse de déformation : il ne nécessite donc aucune modification car ces paramètres sont amplement suffisants afin d'étendre le modèle aux problèmes dynamiques [41].

En conclusion, nous avons à disposition un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à base de dérivée fractionnaire pour les matériaux composites tissés qui peut être utilisé pour des sollicitations allant de la quasi-statique à la dynamique. Il permet la simulation numérique des boucles d'hystérésis ce qui peut être très utile pour certains types de problèmes comme par exemple, tout problème nécessitant l'expression de la quantité d'énergie dissipée lors de sollicitations thermomécaniques. On peut aussi souligner que cette modélisation peut ouvrir des voies d'un point de vue expérimental en ce qui concerne l'identification de la propagation et de la progression de l'endommagement en dynamique : en effet pour des raisons pratiques, il n'existe pas de moyens expérimentaux permettant de faire des chargements cycliques en dynamique « rapide ».



## **CHAPITRE 4 : IDENTIFICATION ET VALIDATION DU MODELE COLLABORATIF POUR MATERIAU COMPOSITE TISSE**

---

*Ce chapitre est consacré à la validation du modèle développé dans le chapitre précédent. Dans une première partie, nous nous attarderons sur l'identification expérimentale de l'ensemble des paramètres alimentant le modèle collaboratif. Cette identification sera faite pour des matériaux composites tissés à matrice thermodurcissable et thermoplastique. Dans une seconde partie, nous nous attacherons à reproduire grâce à la modélisation au point d'intégration, les comportements expérimentaux pour des sollicitations quasi-statiques ou dynamiques avec un chargement cyclique ou non. Les résultats des simulations seront comparés avec les données expérimentales et permettront de conclure sur les développements menés.*

### **4.1 INTRODUCTION**

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un modèle élasto-plastique endommageable couplé avec un modèle fractionnaire avec pour objectif la représentation du comportement hystérétique de matériau composite tissé sous chargement cyclique quasi-statique. Nous avons aussi montré que ce modèle collaboratif peut prendre en compte la sensibilité à la vitesse de déformation et donc est tout à fait adapté pour des chargements dynamiques. Dans ce chapitre, nous aborderons maintenant l'identification expérimentale de l'ensemble des paramètres constitutifs et les validations numériques au point d'intégration en regard des essais expérimentaux.

Les matériaux que nous avons choisi pour nos validations sont de deux types : composite tissé carbone à matrice thermodurcissable (époxy) et composite tissé carbone à matrice thermoplastique (PA66). Nous les décrirons dans les paragraphes 4.2 et 4.3. Pour ces deux matériaux, une campagne expérimentale complète de caractérisation quasi-statique a été menée (paragraphe 4.4). Les vitesses de sollicitations ont toujours été identiques à l'exception des essais de cisaillement sur le composite tissé carbone/époxy pour lesquels nous avons à disposition deux vitesses différentes ce qui nous permettra d'étudier l'effet de ces vitesses sur le comportement du matériau.

Dans les paragraphes 4.7 à 4.9, nous présentons l'exploitation des données expérimentales pour les deux types de matériaux et ce pour chacune des directions d'orthotropie. Les exploitations et observations expérimentales nous conduiront à proposer les paramètres de la loi élasto-plastique endommageable. Une première validation numérique au point d'intégration sera effectuée dans le paragraphe 4.10.

Suite à cela, nous détaillerons la méthodologie d'identification des paramètres de la loi fractionnaire (paragraphe 4.11). Nous exposerons ensuite une validation numérique de la loi collaborative en relation avec la représentation des boucles d'hystérésis, au sein du paragraphe 4.12, toujours pour les deux matériaux.

Enfin, nous clôturerons ce chapitre par les possibilités offertes par la loi collaborative d'un point de vue chargement dynamique (paragraphe 4.13). Nous détaillerons l'identification des paramètres de la loi élasto-plastique endommageable et nous proposerons une validation de cette loi pour terminer par la validation du modèle complet en regard des essais expérimentaux. Nous concluons par une discussion des résultats.

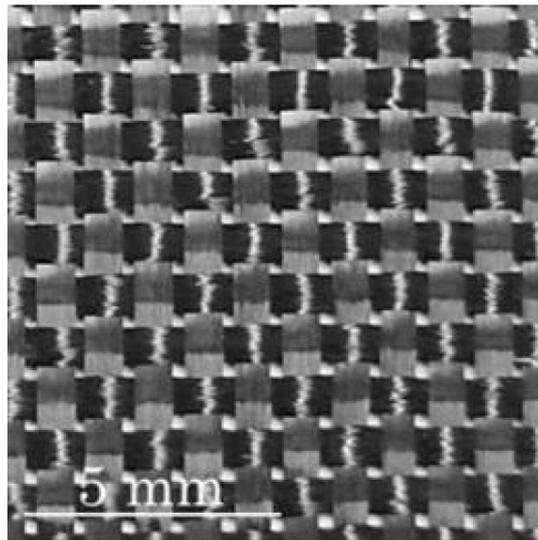
## **4.2 DESCRIPTION DU MATERIAU COMPOSITE A MATRICE THERMODURCISSABLE**

Le matériau composite à matrice thermodurcissable qui est utilisé dans cette thèse, a été élaboré dans le cadre du travail de Mateos [41]. C'est un matériau composite avec une matrice époxy et des fibres de carbone stratifiées à plis tissés équilibrés.

Une résine époxy à deux composants (SiComine et SR 8100) est choisie comme matrice avec un durcisseur SD 822 afin d'avoir une haute performance mécanique. La résine est mélangée avec le durcisseur dans un rapport de poids de 100:31. Ce dosage est souvent utilisé pour les procédés tels que l'injection à basse pression et l'infusion.

En ce qui concerne les fibres (Hexcel HexForce ® 43199) ce sont des fibres de carbone tissées planes qui ont été utilisées comme renfort. Le poids nominal est de  $200 \text{ g/m}^3$  avec une chaîne de 5 fils/cm et une trame de 5 torons/cm (Figure 4.1).

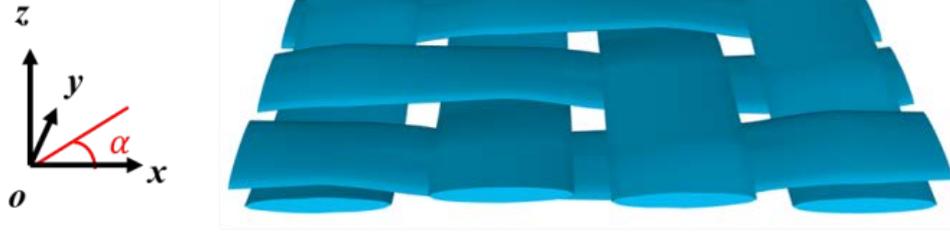
Enfin, le matériau composite est fabriqué par une méthode d'infusion.



**Figure 4.1. Tissu utilisé comme renfort**

## **4.3 DESCRIPTION DU MATERIAU COMPOSITE A MATRICE THERMOPLASTIQUE**

Le matériau composite choisi pour l'étude possède une matrice PA66 et des fibres de carbone T700 à plis tissés équilibrés stratifiés (Figure 4.2). C'est un matériau utilisé pour une thèse de doctorat portant sur l'étude expérimentale du comportement d'assemblage [102], [103]. Ces travaux sont réalisés en collaboration avec l'école Centrale de Nantes et le Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM).



**Figure 4.2. Représentation schématique du V.E.R. du stratifié T700/PA66 (TexGen®)**

#### **4.4 PROCEDURE EXPERIMENTALE ET POST-TRAITEMENT**

L'identification des paramètres de la loi élasto-plastique endommageable requiert des essais dans chaque direction d'orthotropie. Dans le cas particulier de nos matériaux, ces derniers sont des tissus quasi-équilibrés. Par conséquent, le canevas expérimental se résume aux essais suivants :

- Traction cyclique/à rupture sur des stratifiés orientés à 0° ou 90°,
- Traction cyclique/à rupture sur des stratifiés orientés à 45°.

Il convient de rappeler que le nombre de cycles ne doit pas être supérieur à six afin de rester dans le cadre du chargement quasi-statique [25] sinon des phénomènes de fatigue peuvent apparaître.

Les essais sont effectués pour des composites stratifiés tissés avec deux types de matrices différentes :

- thermodurcissable [41],
- thermoplastique [102], [103].

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 3.2.1, il est nécessaire pour le post-traitement d'effectuer des changements de base entre les repères globaux et d'orthotropie (**Figure 3.1**). Pour cela, on utilise les formules classiques (4.1) et (4.2) de changement de repère pour les tenseurs de déformation et de contrainte.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta & \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta & \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

#### **4.5 ESSAIS DE TRACTION SUR DES STRATIFIES ORIENTES A 0°**

Dans cette partie, on décrit les essais en traction sur des stratifiés orientés à 0° pour les matériaux composites précédemment cités. Dans ce cas, le repère du matériau coïncide avec le

repère global. En conséquence, les équations (4.1) et (4.2) pour  $\theta = 0^\circ$  conduisent aux formules suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} \end{cases} \quad (4.3)$$

La loi de comportement se réduit aux équations suivantes :

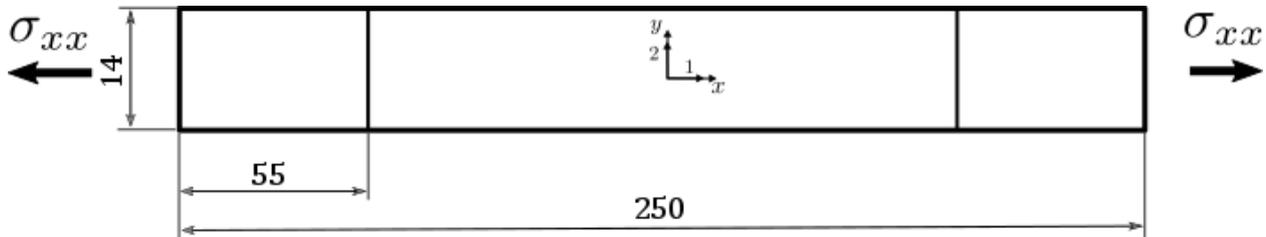
$$\begin{cases} \sigma_{11} = E_{11}^0(1 - d_{11})\varepsilon_{11}^e, & \sigma_{22} = 0 & \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{11} = -\frac{E_{11}^0}{\nu_{12}^0}\varepsilon_{22}^e \end{cases} \quad (4.4)$$

De ce type d'essai, les paramètres peuvent être identifiés facilement : en effet on a accès rapidement au module d'Young longitudinal, au coefficient de Poisson  $\nu_{12}^0$  ainsi qu'à la contrainte de rupture  $\sigma_{11}^R$ .

Nous rappelons enfin que nos composites tissés, quelle que soit leur matrice, sont considérés comme équilibrés : ainsi ce qui aura été identifié dans cette partie pourra être transposé complètement à la direction transversale.

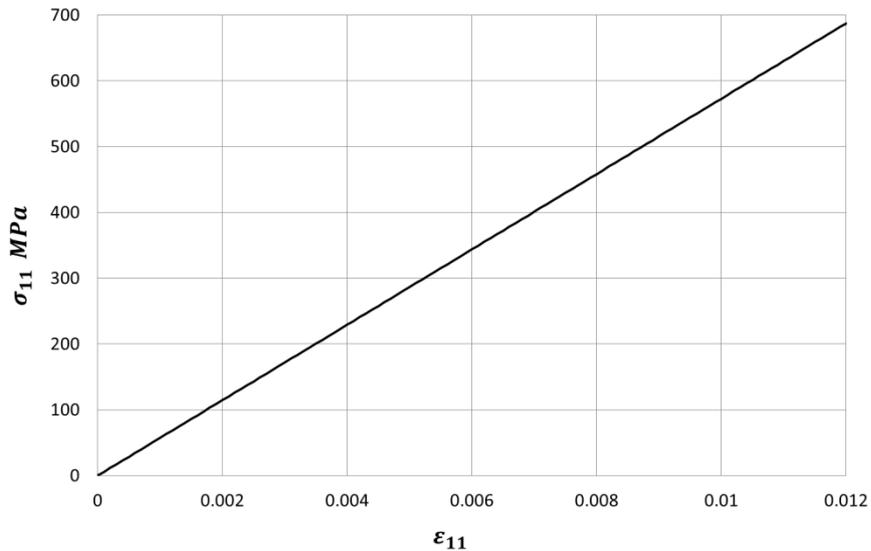
#### 4.5.1 Traction longitudinale pour le composite à matrice thermdurcissable

Les essais en traction sur stratifiés tissés à 8 couches ( $[0]_8$ ) à matrice thermdurcissable sont effectués en suivant la norme ASTM D3039 [104]. La géométrie de l'échantillon et les dimensions sont présentées sur la Figure 4.7.



**Figure 4.3. Eprouvette de traction pour le matériau composite carbone/époxy à  $0^\circ$**

Les essais de traction sont effectués sur une machine INSTRON 3369 avec une vitesse de sollicitation de  $5 \text{ mm/min}$ . Les mesures d'effort sont effectuées par une cellule de force INSTRON 2580-108. Les déformations longitudinale et transversale sont mesurées en utilisant des jauges TML FCA-3-23-1L. L'acquisition des données se fait avec un système externe (National Instruments®). Les résultats des essais en traction sont illustrés sur la Figure 4.4 dans le système de coordonnées du matériau.



**Figure 4.4. Courbe de traction longitudinale pour le matériau composite carbone/époxy**

Les paramètres identifiés de cet essai sont collectés dans le **Tableau 4.1**.

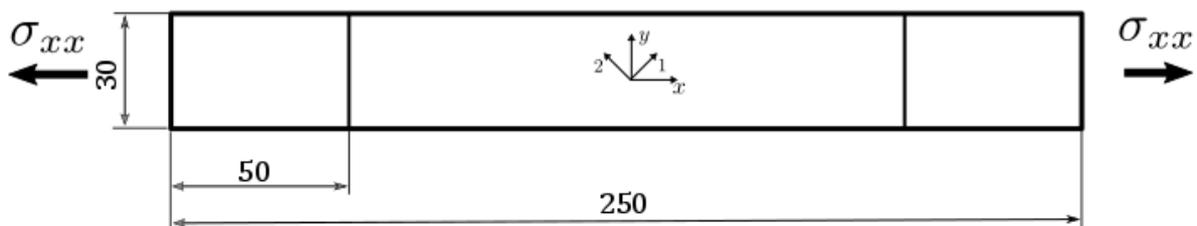
Paramètre	Valeur
$E_{11}^0 = E_{22}^0$	57.3 GPa
$\nu_{12}^0 = \nu_{21}^0$	0.07
$\sigma_{11}^R = \sigma_{22}^R$	687 MPa

**Tableau 4.1. Paramètres élastiques du matériau composite carbone/époxy**

Des cycles de charge/décharge ont été aussi réalisés mais n’ont pas démontré une évolution d’endommagement suffisante pour être pris en compte : le composite carbone/époxy a un comportement linéaire fragile dans les directions longitudinales et transversales.

#### 4.5.2 Traction longitudinale pour le composite à matrice thermoplastique

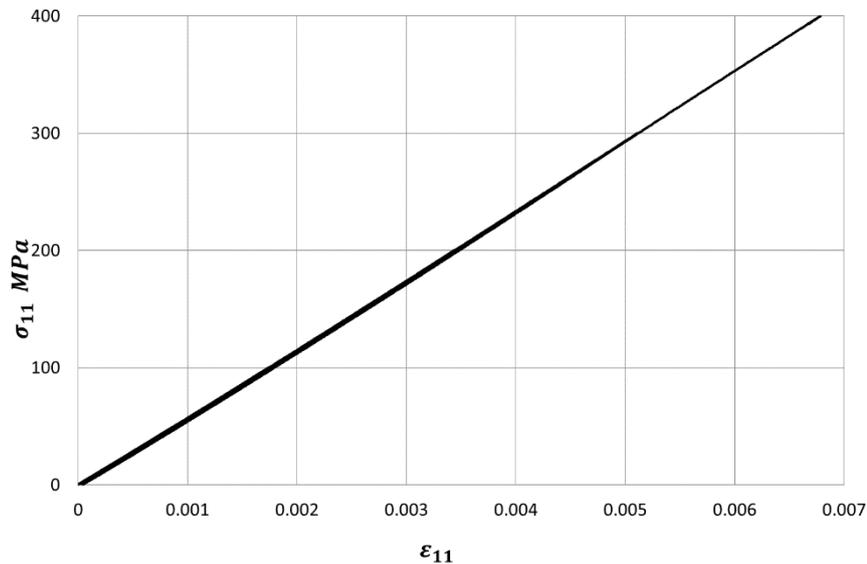
Dans ce paragraphe, on considère des essais en traction cyclique sur des stratifiés orientés à 0° d’une éprouvette en T700/PA66. La géométrie d’éprouvette et ses dimensions sont illustrées sur la **Figure 4.5**.



**Figure 4.5. Eprouvette de traction pour le matériau composite carbone/PA66 à 0°**

Les essais ont été effectués sur une machine à pilotage servo-hydraulique MTS. Les déformations longitudinale et transversale sont mesurées par des jauges instrumentées sur

l'éprouvette. Le pilotage des essais s'effectue à déplacement imposé à une vitesse de chargement de  $2 \text{ mm/min}$  ( $= 0.00022 \text{ 1/s}$ ). Les résultats du test expérimental sont proposés sur la **Figure 4.6** dans le système de coordonnées du matériau.



**Figure 4.6. Courbe de traction longitudinale pour le matériau composite T700/PA66**

Les paramètres élastiques identifiés pour le comportement longitudinal du composite T700/PA66 sont présentés dans le **Tableau 4.2**

Paramètre	Valeur
$E_{11}^0 = E_{22}^0$	56 GPa
$\nu_{12}^0 = \nu_{21}^0$	0.08
$\sigma_{11}^R = \sigma_{22}^R$	603 MPa

**Tableau 4.2. Paramètres élastiques du matériau composite T700/PA66**

Tout comme le composite à matrice thermodurcissable, le composite T700/PA66 ne semble pas montrer de non-linéarité suffisante pour prendre en compte un endommagement des modules longitudinaux et transversaux : en effet, sur la **Figure 4.6** on observe bien que les différents cycles se font à pente moyenne constante et que de surcroît le niveau de déformation irréversible est très faible. Par conséquent dans ces directions-là, le composite T700/PA66 possède tout comme l'autre composite un comportement de type élastique fragile.

### *4.5.3 Résumé de la campagne expérimentale de traction longitudinale (transversale)*

A partir des résultats des essais en traction sur les stratifiés orientés à  $0^\circ$  (et donc à  $90^\circ$  puisque les composites tissés sont supposés équilibrés), le comportement observé dans les deux cas de composites est de type élastique fragile. Les tractions cycliques réalisées dans la direction des fibres ne font pas apparaître suffisamment de déformations irréversibles et dissipent peu d'énergie puisque les boucles d'hystérésis sont absentes. Une synthèse des paramètres est proposée dans le **Tableau 4.3**.

Paramètre	Valeur	Valeur
$E_{11}^0 = E_{22}^0$	57.3 GPa	56 GPa
$\nu_{12}^0 = \nu_{21}^0$	0.07	0.08
$\sigma_{11}^R = \sigma_{22}^R$	687 MPa	603 MPa

**Tableau 4.3. Synthèse de l'identification longitudinale (transversale) des composites étudiés**

## 4.6 ESSAIS DE TRACTION SUR DES STRATIFIÉS ORIENTÉS À $\pm 45^\circ$

Dans cette partie, on s'intéresse à des tractions cycliques quasi-statiques en cisaillement pour les matériaux composites précédemment cités.

Le rapport entre les variables liées à la direction d'application de la sollicitation par la machine et les directions d'orthotropie du matériau sont calculées par les formules (4.1) et (4.2) avec  $\theta = 45^\circ$ . On obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{12} = -\frac{\sigma_{xx}}{2} \\ \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \end{cases} \quad (4.5)$$

La loi de comportement élastique se présente sous la forme suivante :

$$\sigma_{12} = 2G_{12}^0(1 - d_{12})\varepsilon_{12}^e \quad (4.6)$$

D'une façon similaire aux essais précédents, certains paramètres peuvent être identifiés directement à partir des données expérimentales : il s'agit du module de cisaillement  $G_{12}^0$ , de la contrainte d'écoulement initiale  $R_0$  et de la contrainte à rupture  $\sigma_{12}^R$  (identification proposée dans les sections suivantes). En ce qui concerne les paramètres liés à la propagation de l'endommagement de cisaillement, de la plasticité et des boucles d'hystérésis, nous proposons leur identification respectivement dans les paragraphes 4.7 à 4.11.

### 4.6.1 Tractions cycliques en cisaillement pour le composite à matrice thermodurcissable avec différentes vitesses de déformation

Pour ces essais, ils ont été réalisés suivant la norme ASTM D3518 [105]. La géométrie de l'échantillon et ses dimensions sont présentées sur la Figure 4.7.

Les essais cycliques en cisaillement sont effectués sur une machine INSTRON 3369. Afin de mesurer respectivement le chargement et les déformations longitudinale et transversale, une cellule de charge INSTRON 2580-108 et des jauges TML FCA-3-23-1L sont utilisées. L'acquisition des données se fait avec un système externe (National Instruments®). Les essais sont réalisés avec les vitesses de déformation différentes : 5 mm/min (= 0.00036 1/s) et 50 mm/min (= 0.0036 1/s). Les résultats de ces essais sont présentés sur les Figure 4.8 et Figure 4.9.

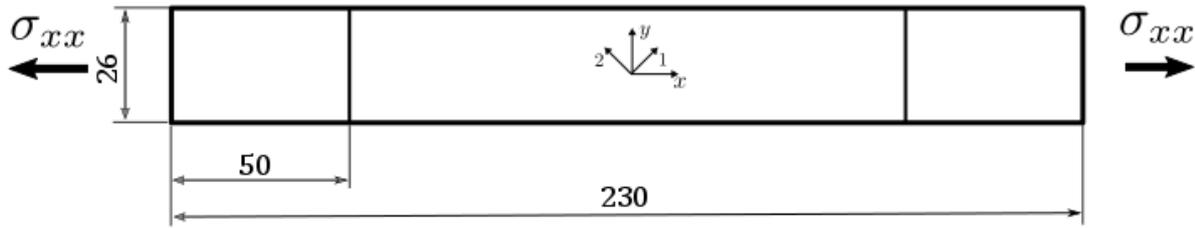


Figure 4.7. Eprouvette de traction pour le matériau composite carbone/époxy à 45°

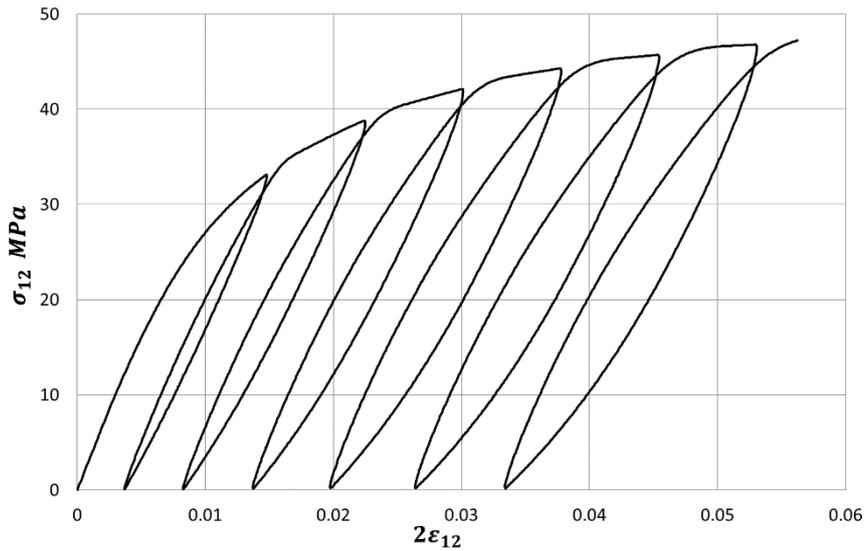


Figure 4.8. Courbe contrainte/déformation de cisaillement à 5 mm/min pour composite à matrice thermodurcissable

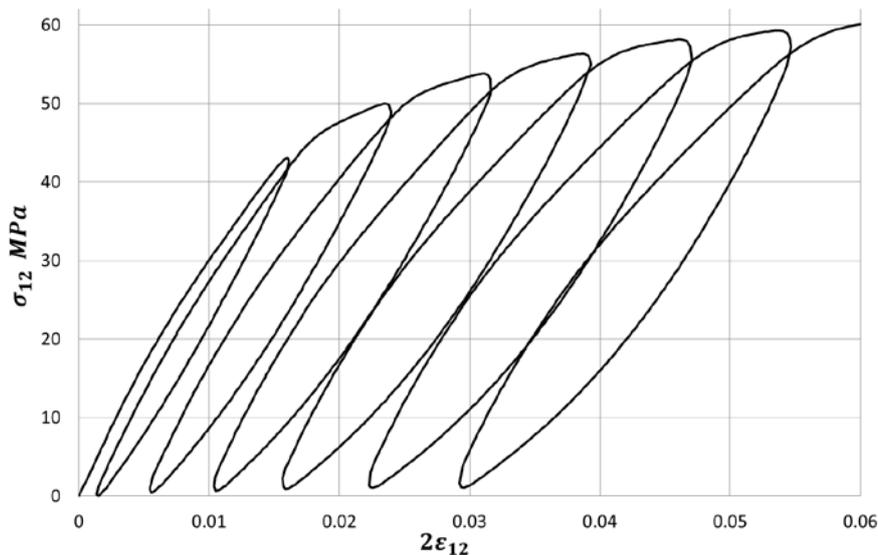


Figure 4.9. Courbe contrainte/déformation de cisaillement à 50 mm/min pour composite à matrice thermodurcissable

Le module de cisaillement non-endommagé  $G_{12}^0$  est obtenu à partir d'une régression linéaire sur le début de la courbe. La contrainte de la rupture  $\sigma_{12}^R$  correspond à la contrainte maximale

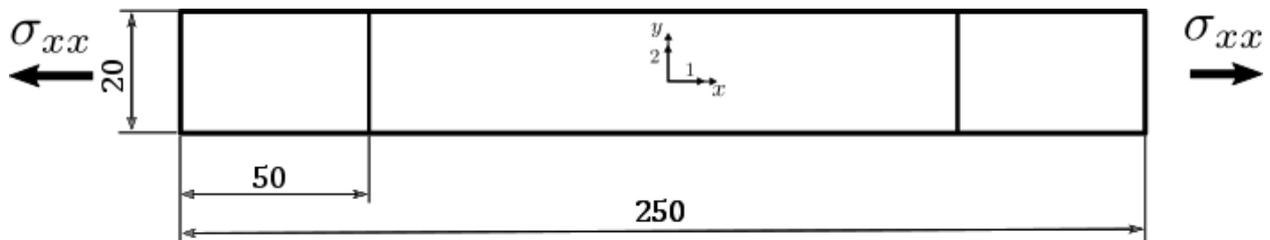
pendant l'essai. On observe pour ce composite une sensibilité à la vitesse de déformation des paramètres (à l'exception du module de cisaillement) et ce malgré la faible vitesse de chargement. Ces paramètres sont regroupés dans le **Tableau 4.4**.

Paramètre	Valeur pour 5 mm/min	Valeur pour 50 mm/min
$G_{12}^0$	3.36 GPa	3.37 GPa
$R_0$	12 MPa	20.2 MPa
$\sigma_{12}^R$	80 MPa	94 MPa

**Tableau 4.4. Paramètres élastiques en cisaillement du composite carbone/époxy**

#### 4.6.2 Tractions cycliques en cisaillement pour le composite à matrice thermoplastique

Pour les essais cyclés sur ce type de composite, nous avons utilisé des éprouvettes dont la géométrie est donnée sur la **Figure 4.10**.



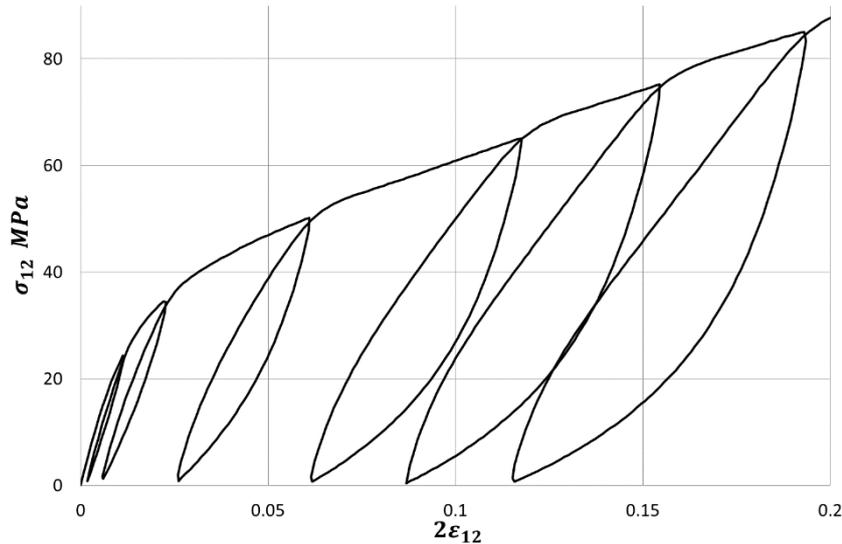
**Figure 4.10. Eprouvette de traction pour le matériau composite T700/PA66 à 45°**

Les essais expérimentaux ont été réalisés sur une machine à pilotage servo-hydraulique MTS d'une capacité de 10 t. Le pilotage des essais s'effectue à déplacement imposé à une vitesse de chargement de 2 mm/min (= 0.00022 1/s). Les mesures des déformations dans le plan sont réalisées par une méthode classique, via des jauges de déformation bidirectionnelles. Le résultat du test expérimental est proposé sur la **Figure 4.11** dans le système de coordonnées du matériau.

Les paramètres du matériau identifiés de la même manière que dans le point précédent sont regroupés dans le **Tableau 4.5**.

Paramètre	Valeur
$G_{12}^0$	2.66 GPa
$R_0$	10.4 MPa
$\sigma_{12}^R$	250 MPa

**Tableau 4.5. Paramètres élastiques en cisaillement du matériau composite T700/PA66**



**Figure 4.11. Courbe contrainte/déformation de cisaillement à 2 mm/min pour composite à matrice thermoplastique**

#### 4.6.3 Résumé de la campagne expérimentale en cisaillement

L'ensemble des paramètres élastiques en cisaillement pour les deux matériaux sont regroupés dans le **Tableau 4.7**.

Paramètre	Carbone/époxy 5 mm/min	Carbone/époxy 50 mm/min	Carbone/PA66 2 mm/min
$G_{12}^0$	3.36 GPa	3.37 GPa	2.66 GPa
$R_0$	12 MPa	20.2 MPa	10.4 MPa
$\sigma_{12}^R$	80 MPa	94 MPa	250 MPa

**Tableau 4.6. Synthèse de l'identification de cisaillement des composites étudiés**

Quel que soit le composite, les courbes de comportement de cisaillement (**Figure 4.8, Figure 4.9, Figure 4.11**) montrent qu'il existe :

- Des déformations irréversibles,
- Une diminution de la rigidité du matériau au cours des cycles caractérisant un accroissement de l'endommagement de cisaillement,
- Une dissipation d'énergie plus importante au fur et à mesure des cycles (boucles d'hystérésis),
- Une sensibilité à la vitesse de déformation (tout du moins pour le composite à matrice thermodurcissable).

Dans les sections suivantes, nous allons nous attarder sur l'identification de l'évolution non seulement des déformations irréversibles mais aussi des endommagements ce pour toutes les directions d'orthotropie. Cela nous permettra d'avoir l'ensemble des paramètres nécessaires à l'utilisation de la loi de comportement élasto-plastique endommageable sans prise en compte des vitesses de déformation dans un premier temps.

## 4.7 METHODE D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE ELASTO-PLASTIQUE ENDOMMAGEABLE

Dans le cadre du modèle élasto-plastique endommageable quasi-statique, les relations entre les paramètres internes et associés doivent être déterminées en fonction du comportement du matériau pour chaque direction d'orthotropie. On distingue les paramètres en trois groupes appropriés aux différents processus, tels que : l'élasticité, les endommagements et la plasticité. Les paramètres élastiques ont déjà été identifiés (**Tableau 4.3** et **Tableau 4.6**).

Afin de décrire les dégradations subies par le matériau, il est nécessaire de déterminer les lois **(3.18)** qui relient l'endommagement  $(d_{11}, d_{22}, d_{12})$  aux forces thermodynamiques associées  $(\sqrt{\bar{Y}_{11}}, \sqrt{\bar{Y}_{22}}, \sqrt{\bar{Y}_{12}})$  que l'on calcule via les équations **(3.16)** et **(3.17)**. Pour cela, on identifie pour chaque cycle, les modules associés ce qui permet en connaissant les modules initiaux de pouvoir remonter à l'endommagement ; à titre d'exemple, en cisaillement les endommagements sont donnés par :

$$d_{12} = 1 - \frac{G_{12}^i}{G_{12}^0} \quad (4.7)$$

Pour chacun de ces cycles, on peut donc relever aussi les déformations élastiques correspondantes ce qui permet d'identifier les forces thermodynamiques associées. Une fois cela fait, il est nécessaire d'ajuster le type de loi d'évolution **(3.19)**, **(3.20)**, **(3.21)** ou **(3.22)** en fonction des observations expérimentales. L'identification de la contrainte initiale d'écoulement permet d'accéder aussi à la déformation associée. Cela permet de déterminer les différents seuils initiaux d'endommagement  $(\bar{Y}_{ij}^0)$ . Les taux maximum de restitution d'énergie  $(Y_{ij}^R)$  sont quant à eux identifiés sur les derniers cycles, proches de la rupture du matériau.

En ce qui concerne l'évolution des déformations irréversibles en cisaillement, il est nécessaire de relever pour chaque cycle les déformations plastiques. Connaissant les endommagements associés, il est possible d'évaluer la déformation plastique cumulée **(3.30)**. L'identification de la fonction d'écoulement plastique  $R(p)$  est effectuée par :

$$R(p) = \frac{|\sigma_{12}|}{(1 - d_{12})} - R_0 \quad (4.8)$$

Une fois les deux quantités calculées, il est possible de choisir la meilleure approximation pour trouver l'évolution de la fonction d'écrouissage en fonction de la déformation plastique cumulée.

## 4.8 IDENTIFICATION DES EVOLUTIONS DE L'ENDOMMAGEMENT DANS LA DIRECTION DES FIBRES

### 4.8.1 Identification pour le composite à matrice thermodurcissable

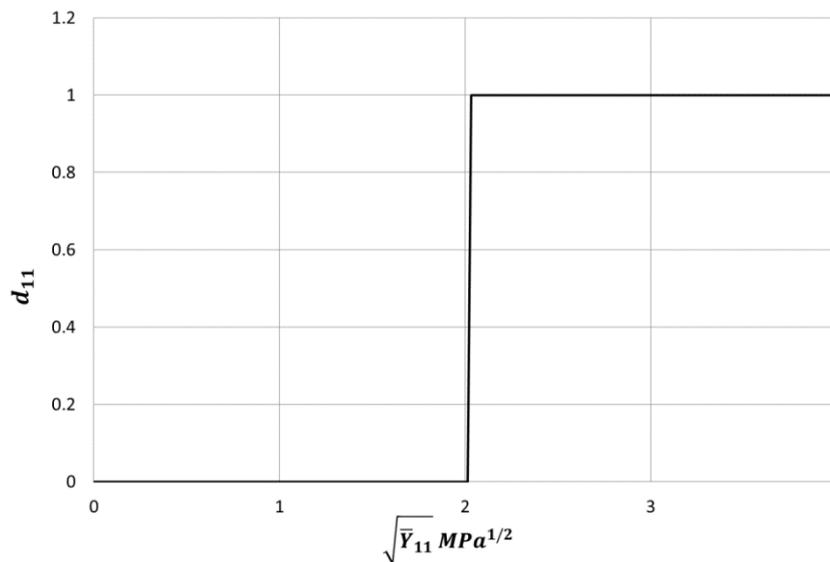
Comme nous l'avons noté dans les points précédents, le comportement du matériau composite dans le sens des fibres est de type élastique fragile. La rupture du matériau apparaît

« instantanément ». Par conséquent, nous proposons d'utiliser une fonction de type Heaviside (3.22) afin de décrire ce comportement. Dans ce cas, le seuil initial d'endommagement coïncide avec le seuil de la rupture :  $\bar{Y}_{11}^0 = \bar{Y}_{11}^R$ . Les paramètres associés à l'endommagement sont présentés dans le **Tableau 4.7**. La propagation d'endommagement est illustrée sur la **Figure 4.12**.

$$d_{11} = \mathcal{H} \left( \sqrt{\bar{Y}_{11}} - \sqrt{\bar{Y}_{11}^R} \right) \text{ si } d_{11} < 1 \text{ et } \bar{Y}_{11} < \bar{Y}_{11}^R; \text{ sinon } d_{11} = 1 \quad (4.9)$$

Paramètre	Valeur
$\sqrt{\bar{Y}_{11}^0} = \sqrt{\bar{Y}_{11}^R}$	$2 \text{ MPa}^{1/2}$

**Tableau 4.7. Paramètres d'endommagement du matériau composite carbone/époxy**



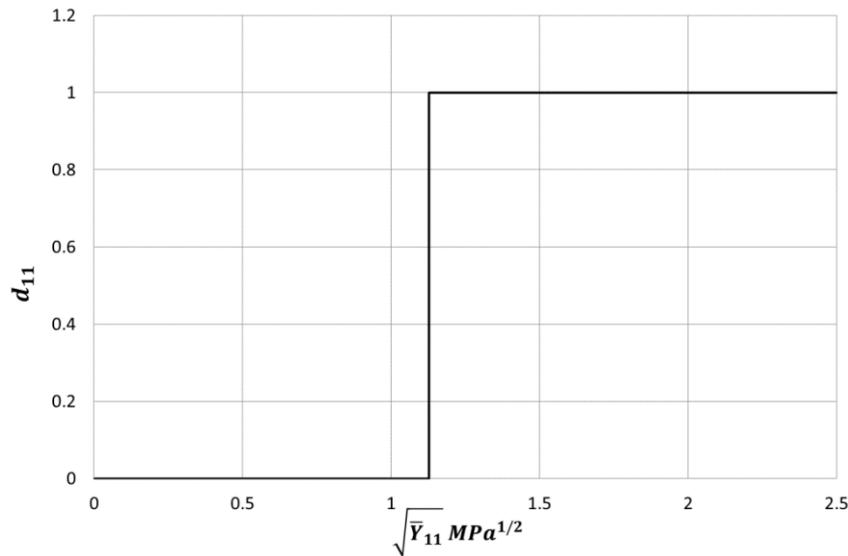
**Figure 4.12. Evolution de la fonction d'endommagement longitudinal pour le composite carbone/époxy**

#### 4.8.2 Identification pour le composite à matrice thermoplastique

Comme nous l'ont montré les essais expérimentaux, la propagation d'endommagement dans la direction des fibres pour le composite T700/PA66 est identique à celui-ci du composite carbone/époxy. Les résultats de l'identification de l'endommagement sont présentés dans le **Tableau 4.8** et sur la **Figure 4.14**.

Paramètre	Valeur
$\sqrt{\bar{Y}_{11}^0} = \sqrt{\bar{Y}_{11}^R}$	$1.13 \text{ MPa}^{1/2}$

**Tableau 4.8. Paramètres d'endommagement du composite T700/PA66**



**Figure 4.13. Evolution de la fonction d'endommagement longitudinal pour le composite T700/PA66**

#### 4.8.3 Résumé de l'évolution de l'endommagement dans le sens des fibres

Le **Tableau 4.9** propose une synthèse de l'identification des lois d'évolution d'endommagement pour les deux composites de notre étude. Rappelons que ces dernières, du fait des comportements de type élastique fragile, sont prises sous des approximations de type Heaviside.

Paramètre	Carbone/époxy	Carbone/PA66
$\sqrt{\bar{Y}_{11}^0} = \sqrt{\bar{Y}_{11}^R}$	$2 \text{ MPa}^{1/2}$	$1.13 \text{ MPa}^{1/2}$

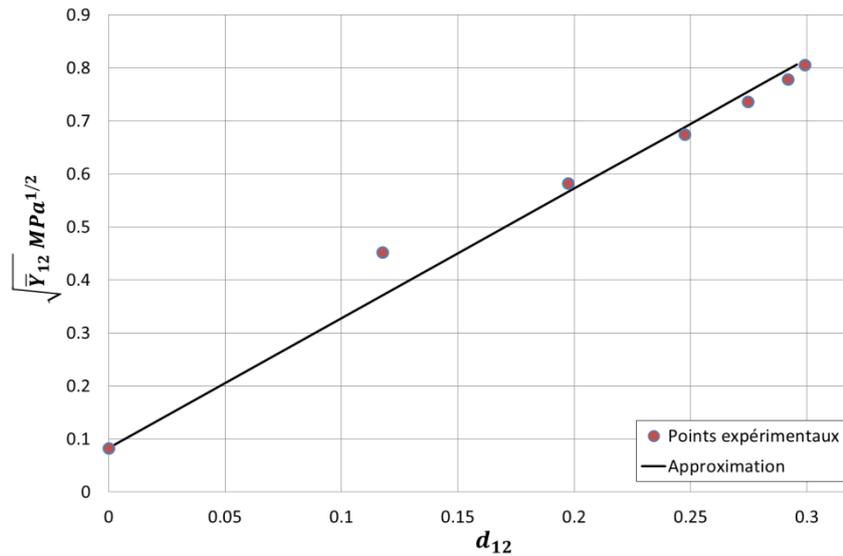
**Tableau 4.9. Synthèse des paramètres d'endommagement longitudinal (transversal) des composites étudiés**

## 4.9 IDENTIFICATION DES EVOLUTIONS DE L'ENDOMMAGEMENT EN CISAILLEMENT

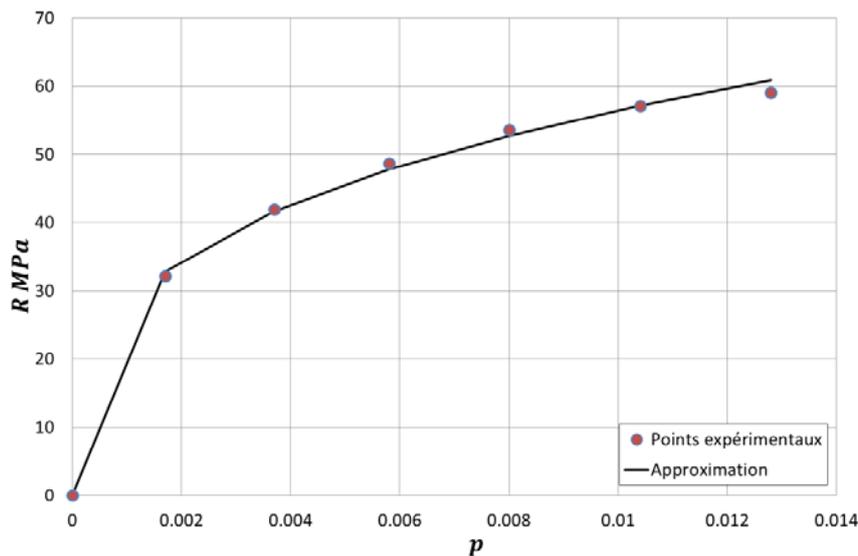
### 4.9.1 Identification pour le composite à matrice thermodurcissable

L'identification de la loi d'évolution de l'endommagement de cisaillement est proposée pour la plus faible vitesse de sollicitation ( $5 \text{ mm/min}$ ) considérée comme quasi-statique. Après avoir appliqué la méthode proposée dans le point 4.7, nous obtenons l'évolution proposée par la **Figure 4.14**. Les conclusions que l'on peut obtenir de l'aspect de cette évolution, nous pousse à proposer une évolution sous une forme linéaire **(3.19)**.

Dans ce cas particulier de loi, rappelons que le coefficient  $\sqrt{\bar{Y}_{12}^C}$  représente la vitesse de la propagation de l'endommagement de cisaillement. Les paramètres de cette loi sont proposés dans le **Tableau 4.10**.



**Figure 4.14. Evolution de la fonction d'endommagement en cisaillement pour le composite carbone/époxy**



**Figure 4.15. Fonction d'écroutissage  $R(p)$  pour le composite à la matrice thermodurcissable**

Paramètre	Valeur
$\sqrt{\bar{Y}_{12}^C}$	$2.25 \text{ MPa}^{1/2}$
$\sqrt{\bar{Y}_{12}^0}$	$0.15 \text{ MPa}^{1/2}$
$\sqrt{\bar{Y}_{12}^R}$	$0.8 \text{ MPa}^{1/2}$

**Tableau 4.10. Paramètres d'endommagement du composite carbone/époxy**

Comme l'évolution de l'endommagement de cisaillement a été effectuée, il est possible maintenant de construire l'évolution de la fonction d'écroutissage sur la base des données identifiées. En regard de notre identification (**Figure 4.15**), la meilleure approximation

correspond à une loi puissance (3.27). Les paramètres associés sont regroupés dans le **Tableau 4.11**.

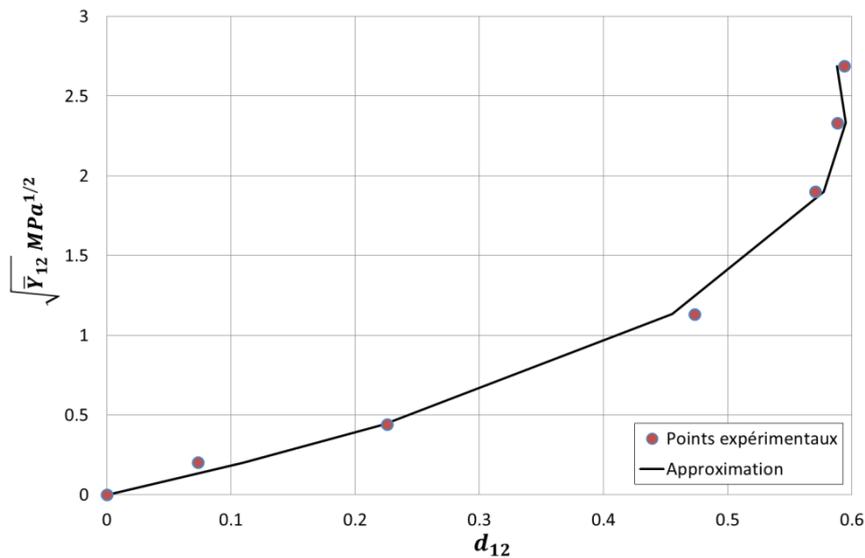
Paramètre	Valeur
$\beta$	266.6 MPa
$m$	0.36

**Tableau 4.11. Paramètres de plasticité du composite carbone/époxy**

#### 4.9.2 Identification pour le composite à matrice thermoplastique

L'exploitation des données expérimentales dans le cas du composite à matrice thermoplastique, en ce qui concerne l'évolution de l'endommagement de cisaillement, est très différente du composite à matrice thermodurcissable. En effet, l'approximation la plus adéquate aux résultats est un polynôme de degré 3 :

$$d_{12} = \sum_{p=1}^3 a_p \left( \sqrt{\bar{Y}_{12}} - \sqrt{\bar{Y}_{12}^0} \right)^p \tag{4.10}$$



**Figure 4.16. Evolution de la fonction d'endommagement en cisaillement pour le composite T700/PA66**

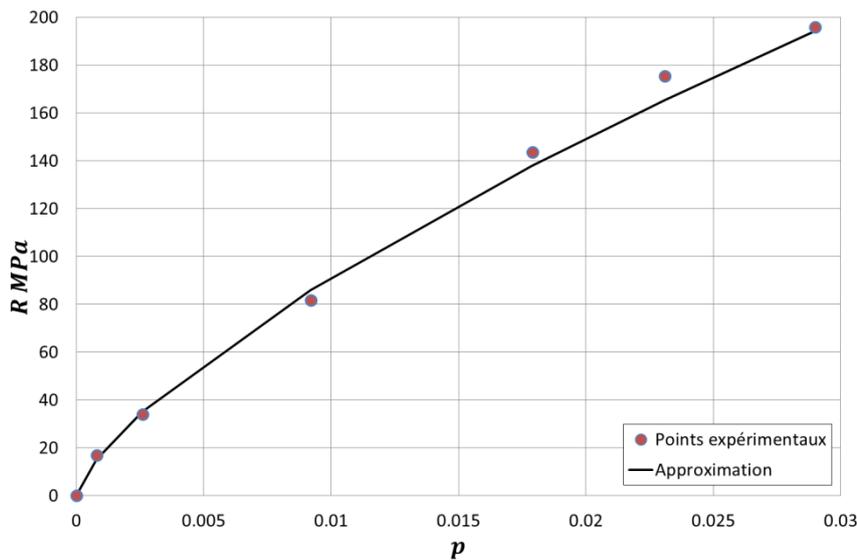
Avec les données identifiées, on constate effectivement que la propagation d'endommagement a un comportement visiblement plus non-linéaire pour la matrice thermoplastique (Figure 4.16). En effet, on remarque qu'au fur et à mesure des cycles, les boucles d'hystérésis commencent à perdre leur forme symétrique et elles prennent une forme de « haricot » (Figure 4.11). Du fait de la nature de la matrice, le matériau dissipe plus d'énergie : on a effectivement une largeur de boucle beaucoup plus importante que dans le cas de la matrice thermodurcissable. Par ailleurs, cette nature de matrice impose aussi probablement une réorientation des fibres plus forte que dans le cas du composite à matrice thermodurcissable. Cela se traduit par des hystérésis sous une forme de « haricot ». Cela veut dire aussi que nous

commettons une erreur lors de la mesure de l'endommagement, notamment sur les derniers cycles et cela se répercute sur la loi d'évolution obtenue. Il faudrait prendre en compte la réorientation des fibres au cours de la sollicitation afin d'obtenir une meilleure description de la propagation de l'endommagement. Ce point constitue une perspective importante pour les développements futurs.

Les paramètres de la loi d'évolution polynomiale sont regroupés dans le **Tableau 4.12**.

Paramètre	Valeur
$a_3$	$0.013 \text{ MPa}^{-3/2}$
$a_2$	$-0.167 \text{ MPa}^{-1}$
$a_1$	$0.575 \text{ MPa}^{-1/2}$
$\sqrt{\bar{Y}_{12}^0}$	$0.145 \text{ MPa}^{1/2}$
$\sqrt{\bar{Y}_{12}^R}$	$2.833 \text{ MPa}^{1/2}$

**Tableau 4.12. Paramètres d'endommagement du composite T700/PA66**



**Figure 4.17. Fonction caractéristique  $R(p)$  du matériau à matrice thermoplastique**

En ce qui concerne l'évolution de la fonction d'écroissage, la meilleure approximation en regard de l'exploitation des résultats correspond à une loi de type puissance tout comme pour le composite carbone/époxy. Les paramètres de cette loi sont présentés dans le **Tableau 4.13** et une représentation graphique est proposée sur la **Figure 4.17**.

Paramètre	Valeur
$\beta$	260.85 MPa
$m$	0.33

**Tableau 4.13. Paramètres de plasticité du composite T700/PA66**

### 4.9.3 Résumé de l'évolution de l'endommagement et de la plasticité en cisaillement

Les **Tableau 4.14** et **Tableau 4.15** proposent une synthèse de l'identification des lois d'évolution d'endommagement et des déformations irréversibles pour les deux composites de notre étude.

Paramètre	Carbone/époxy Loi linéaire	Carbone/PA66 Loi polynôme degré 3
$\sqrt{\bar{Y}_{12}^C}$	2.25 MPa <sup>1/2</sup>	-
$a_3$	-	0.013 MPa <sup>-3/2</sup>
$a_2$	-	-0.167 MPa <sup>-1</sup>
$a_1$	-	0.575 MPa <sup>-1/2</sup>
$\sqrt{\bar{Y}_{12}^0}$	0.15 MPa <sup>1/2</sup>	0.145 MPa <sup>1/2</sup>
$\sqrt{\bar{Y}_{12}^R}$	0.8 MPa <sup>1/2</sup>	2.833 MPa <sup>1/2</sup>

**Tableau 4.14. Synthèse des paramètres d'endommagement en cisaillement des composites étudiés**

Paramètre	Carbone/époxy	Carbone/PA66
$\beta$	266.6 MPa	260.85 MPa
$m$	0.36	0.33

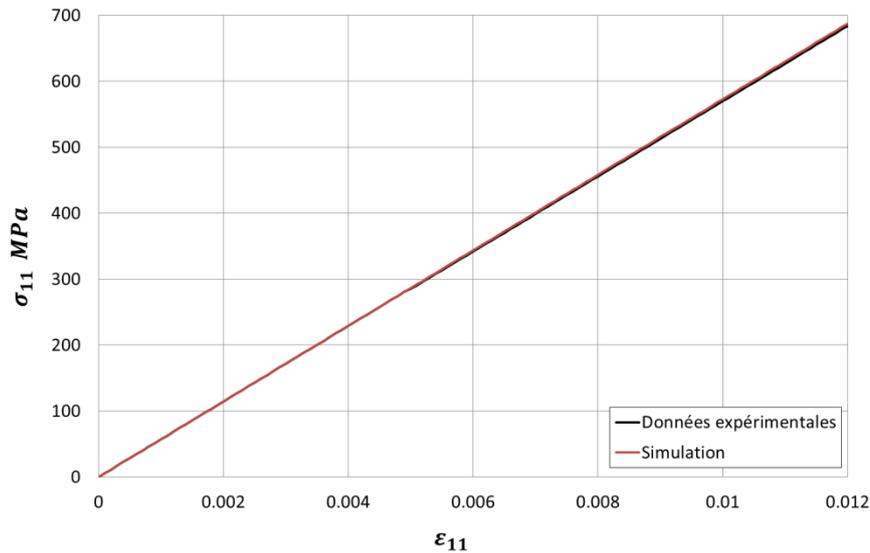
**Tableau 4.15. Synthèse des paramètres de plasticité en cisaillement des composites étudiés**

## 4.10 VALIDATION NUMERIQUE DU MODELE ELASTO-PLASTIQUE ENDOMMAGEABLE

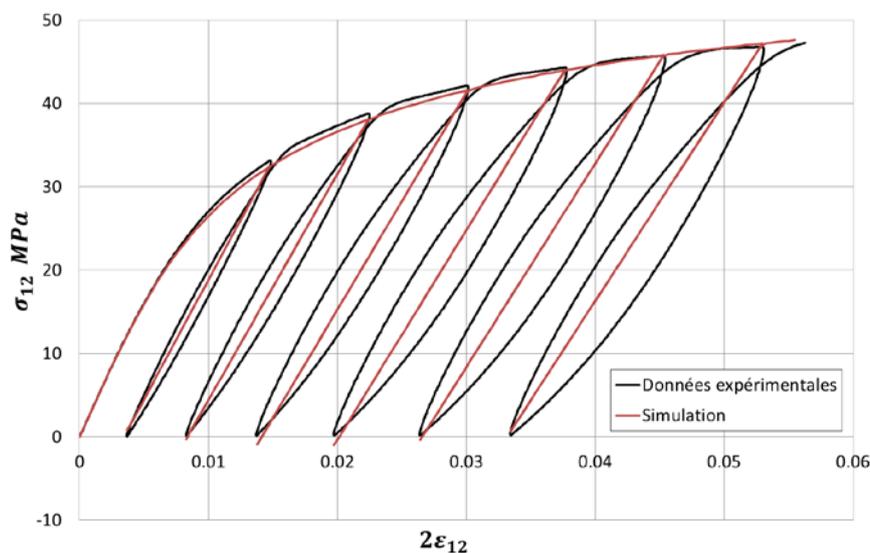
Suite à l'identification des paramètres du modèle élasto-plastique endommageable quasi-statique, nous proposons de valider les comportements et l'identification par des simulations numériques des essais expérimentaux au point d'intégration. Les résultats pour les différentes orientations sont donnés sur les **Figure 4.18** et **Figure 4.19** pour le matériau composite à matrice thermodurcissable et sur les **Figure 4.20** et **Figure 4.21** pour le matériau composite à matrice thermoplastique.

On remarque que l'identification menée sur les deux composites et que la loi de comportement développée permettent d'obtenir des résultats plus que satisfaisants pour le composite à matrice thermodurcissable et satisfaisants pour le composite à matrice thermoplastique. Il est à noter que dans la direction longitudinale, pour le composite thermoplastique, des incertitudes sur la mesure ont surement entaché les données expérimentales d'erreurs. Mais de manière générale l'approximation proposée demeure correcte. La différence observée sur la **Figure 4.21** entre les données expérimentales et la simulation en cisaillement provient de l'identification « imprécise » de l'endommagement. Une meilleure méthode doit alors être utilisée pour la détermination de l'évolution de l'endommagement dans le matériau à matrice thermoplastique comme nous l'avons souligné afin de prendre en compte la réorientation des fibres au cours de la sollicitation.

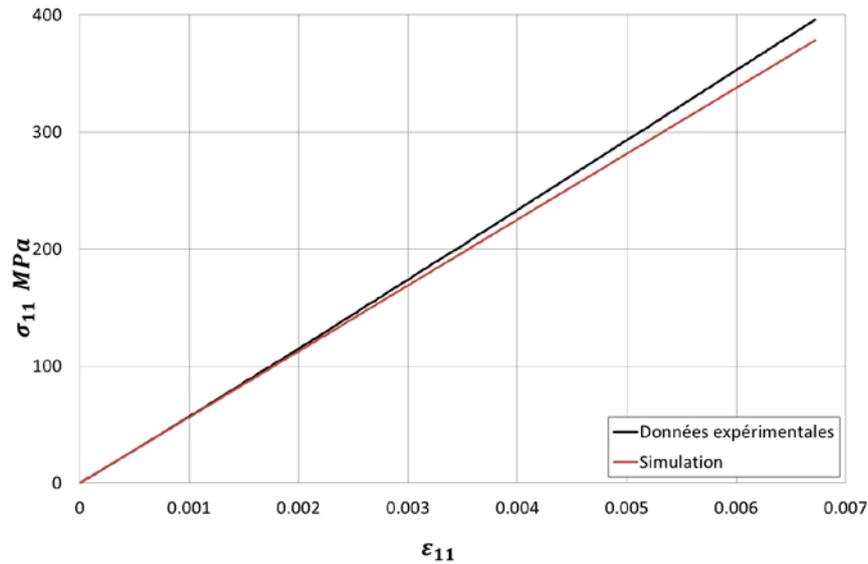
D'une manière très générale, on peut conclure que la loi de comportement élasto-plastique endommageable ainsi que l'identification effectuée permettent de prendre en compte différents phénomènes de manière assez précise et donc de reproduire les comportements de composites quelle que soit leur matrice et quelles que soient les directions d'orthotropie (hormis les boucles d'hystérésis).



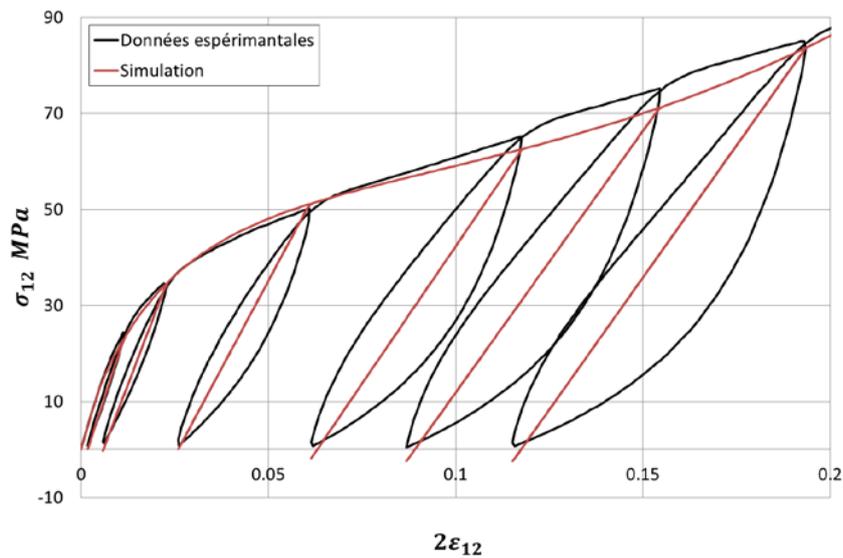
**Figure 4.18. Comparaison expérimental/numérique pour une traction dans la direction des fibres pour le composite carbone/époxy**



**Figure 4.19. Comparaison expérimental/numérique pour une traction en cisaillement pour le composite carbone/époxy**



**Figure 4.20. Comparaison expérimental/numérique pour une traction dans la direction des fibres pour le composite T700/PA66**



**Figure 4.21. Comparaison expérimental/numérique pour une traction en cisaillement pour le composite T700/ PA66**

## 4.11 METHODE D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE FRACTIONNAIRE

### 4.11.1 Description de la méthode d'identification des paramètres

Cette partie s'adresse à la méthodologie d'identification, pour les deux matériaux, des paramètres de la loi fractionnaire (3.38). Cela revient à identifier la déformation que l'on dénommera  $\varepsilon_{12}^{modèle}$  :

$$\varepsilon_{12}^{modèle} = A + BD^\alpha \varepsilon_{12}^e(t) \tag{4.11}$$

Les paramètres du modèle fractionnaire  $A, B$  et  $\alpha$  sont déterminés par la résolution d'un problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes. La contrainte principale est imposée sur les valeurs de l'ordre de la dérivation fractionnaire qui doit être tel que  $0 < \alpha < 1$ . La fonction « objectif » s'exprime sous la forme d'une fonction d'erreur (4.12) entre les déformations expérimentales ( $\varepsilon_{12}^{exp}$ ) et celles calculées par le modèle fractionnaire ( $\varepsilon_{12}^{modèle}$ ) (3.38).

$$\delta = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_{12}^{exp}(t_i) - \varepsilon_{12}^{modèle}(t_i))^2}}{N} \quad (4.12)$$

Les trois paramètres du modèle fractionnaire  $A, B$  et  $\alpha$  sont associés à chaque boucle d'hystérésis. En effet, comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 3.4.2, l'évolution de ces paramètres au cours de la charge complète est exprimée en termes d'endommagement qui reste constant pendant la « décharge-recharge ». Ensuite, on identifie les meilleures approximations qui décrivent les relations entre les paramètres fractionnaires et l'endommagement.

#### 4.11.2 Identification des paramètres pour le composite à matrice thermdurcissable

Suite à la méthodologie proposée précédemment qui consiste à identifier par optimisation les paramètres fractionnaires, il est possible d'obtenir les évolutions de chacun d'entre eux en fonction des endommagements obtenus pour chaque cycle. Leurs évolutions sont représentées sur la Figure 4.22, Figure 4.23 et Figure 4.24.

On remarque que les approximations les plus adaptées sont de type linéaire :

$$A = m_A d_{12} + b_A \quad (4.13)$$

$$B = m_B d_{12} + b_B \quad (4.14)$$

$$\alpha = m_\alpha d_{12} + b_\alpha \quad (4.15)$$

Les coefficients correspondant aux approximations (4.13), (4.14) et (4.15) sont donnés dans le Tableau 4.16.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$m_A$	0.0189	$b_A$	-0.0013
$m_B$	1.795	$b_B$	0.8605
$m_\alpha$	0.6944	$b_\alpha$	-0.0035

**Tableau 4.16. Coefficients de l'évolution des paramètres du modèle fractionnaire pour le composite carbone/époxy**

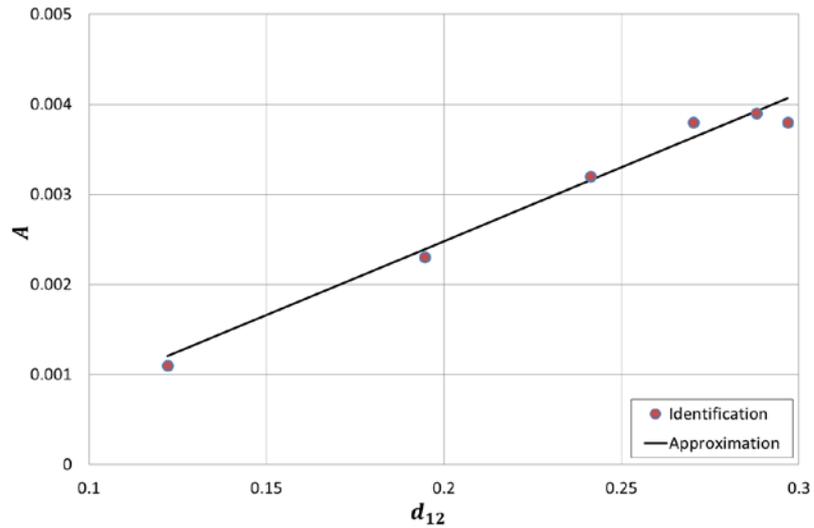


Figure 4.22. Evolution de paramètre  $A$  pour le composite carbone/époxy

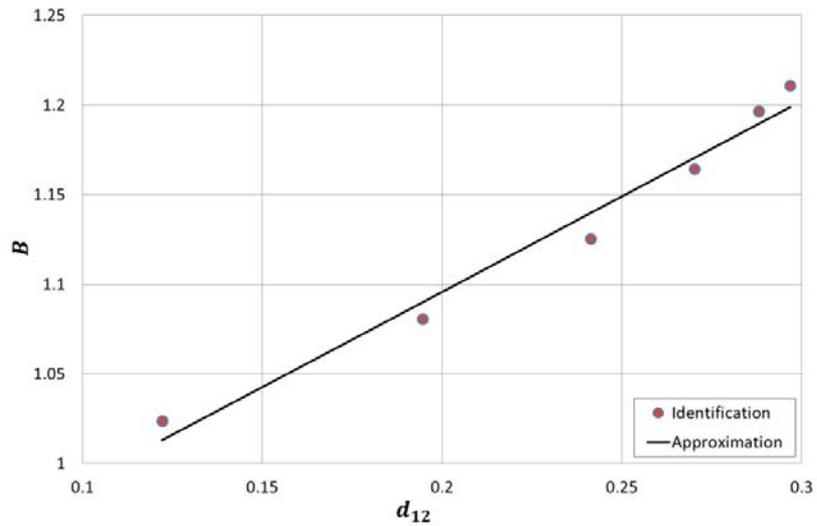


Figure 4.23. Evolution de paramètre  $B$  pour le composite carbone/époxy

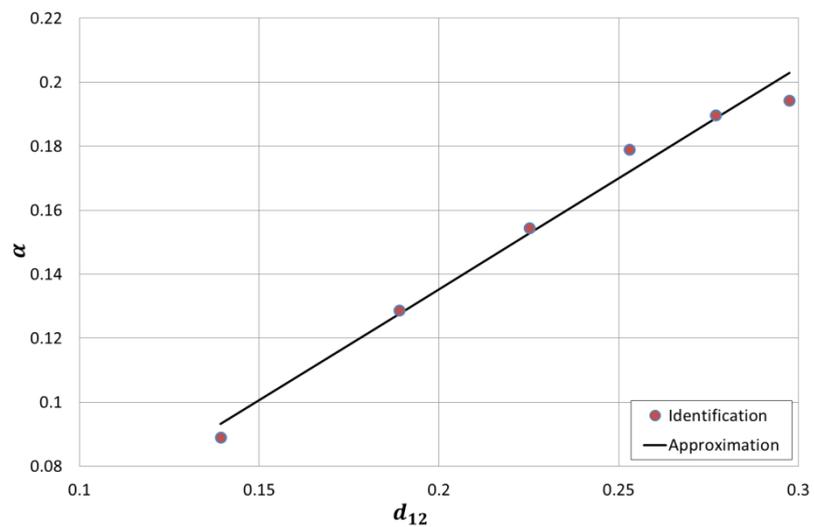


Figure 4.24. L'évolution de paramètre  $\alpha$  pour le composite carbone/époxy

### 4.11.3 Identification des paramètres pour le composite à matrice thermoplastique

De la même manière que précédemment, on post-traite les résultats en ce qui concerne les boucles d'hystérésis du composite à matrice thermoplastique. Tout comme pour l'endommagement, les approximations qui relient les paramètres du modèle fractionnaire à l'endommagement de cisaillement (**Figure 4.25**, **Figure 4.26** et **Figure 4.27**) ne sont pas identiques à celles du composite à matrice thermodurcissables, de manière générale. Cela peut être imputé à la nature différente de la matrice. Les meilleures approximations sont donc des fonctions polynomiales de troisième degré qui s'expriment sous les formes suivantes :

$$A = m_{A3}d_{12}^3 + m_{A2}d_{12}^2 + m_{A1}d_{12} + m_{A0} \quad (4.16)$$

$$B = m_{B3}d_{12}^3 + m_{B2}d_{12}^2 + m_{B1}d_{12} + m_{B0} \quad (4.17)$$

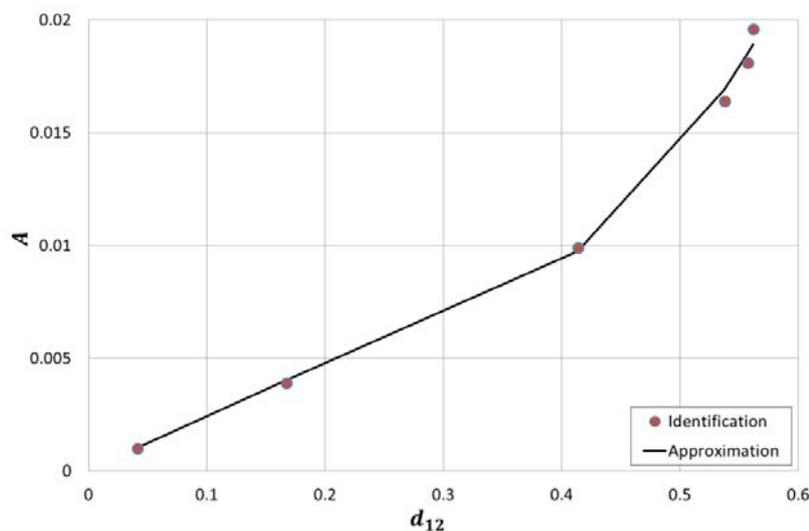
Par contre pour l'ordre de la dérivation non entière, la meilleure approximation est une fonction linéaire :

$$\alpha = m_{\alpha1}d_{12} + m_{\alpha0} \quad (4.18)$$

Les constantes associées aux différentes évolutions sont regroupées dans le **Tableau 4.17**.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$m_{A3}$	0.1918	$m_{A2}$	-0.121	$m_{A1}$	0.042	$m_{A0}$	-0.0005
$m_{B3}$	31.486	$m_{B2}$	-16.7832	$m_{B1}$	4.1613	$m_{B0}$	1.071
$m_{\alpha3}$	-	$m_{\alpha2}$	-	$m_{\alpha1}$	0.4453	$m_{\alpha0}$	0.0742

**Tableau 4.17. Paramètres du modèle fractionnaire pour le composite T700/PA66**



**Figure 4.25. Evolution du paramètre A pour le matériau composite T700/PA66**

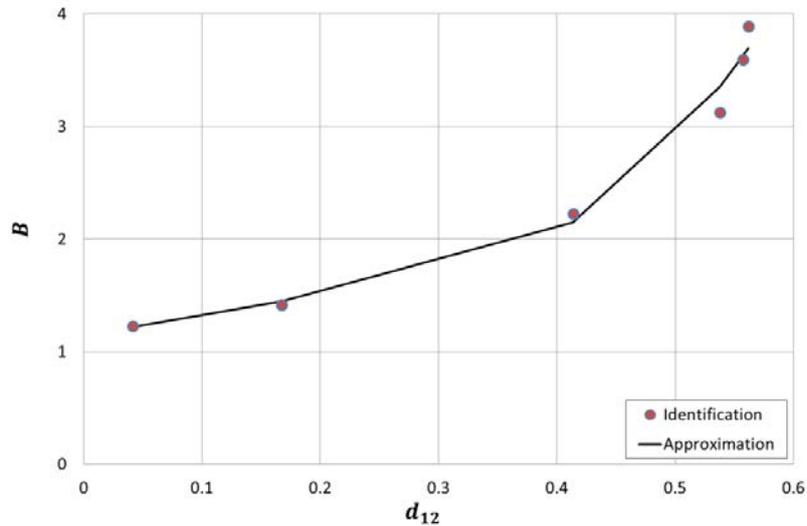


Figure 4.26. Evolution du paramètre  $B$  le matériau composite T700/PA66

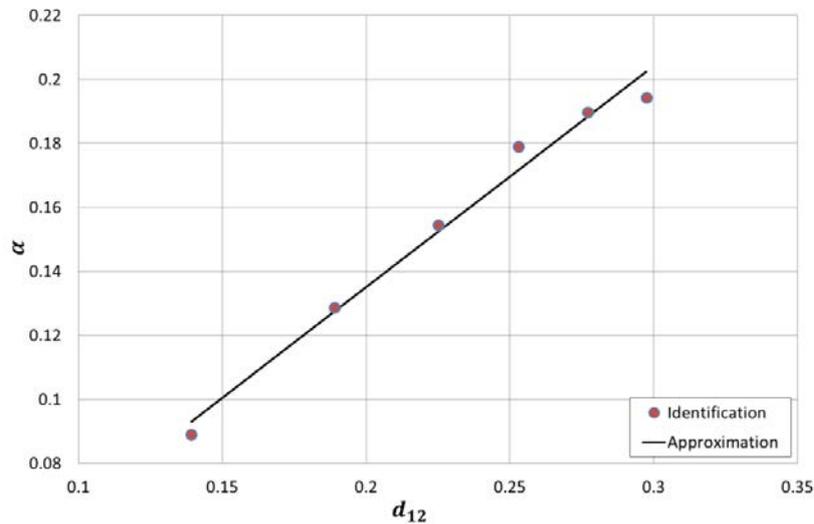


Figure 4.27. Evolution du paramètre  $\alpha$  pour le matériau composite T700/PA66

#### 4.12 VALIDATION NUMERIQUE DU MODELE FRACTIONNAIRE

Grâce aux paramètres précédemment identifiés, il est possible de déterminer les déformations correspondant aux boucles d'hystérésis avec le modèle fractionnaire (3.36)(3.38). Les résultats de la simulation concernant ces déformations en fonction du temps sont illustrées sur la **Figure 4.28** pour le composite carbone/époxy et sur la **Figure 4.30** pour le composite T700/PA66. On remarque que les paramètres identifiées permettent, dans le cas du composite à matrice thermodurcissable de reproduire fidèlement les déformations expérimentales et d'une manière satisfaisante dans le cas de l'autre matrice.

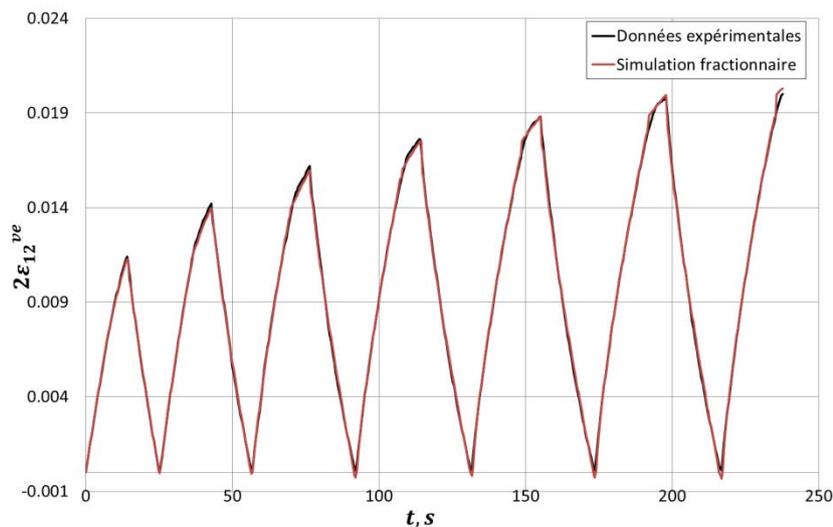
Une fois ces déformations identifiées, on calcule les contraintes en multipliant les déformations déterminées par le module élastique dégradé (4.19). Les résultats de la simulation des boucles d'hystérésis en termes de « déformation-contrainte » sont présentés sur la **Figure 4.29** pour le composite à matrice thermodurcissable et sur la **Figure 4.31** pour le composite à matrice thermoplastique.

$$\sigma_{12}(t) = G_{12}^0(1 - d_{12}) \varepsilon_{12}^{modèle}(t) \quad (4.19)$$

Les résultats de la simulation sont en bonne corrélation avec les données expérimentales pour le matériau composite carbone/époxy. De petites erreurs entre les données peuvent être observées au début et à la fin de la boucle d'hystérésis et au point du changement de signe de la déformation (transmission de la décharge en recharge). L'écart au début de la boucle est lié au problème mathématique du calcul des dérivées fractionnaires qui sont décrits dans le chapitre 1. Le décalage entre les données à la fin de la boucle est associé aux problèmes du calcul numérique car la solution du problème d'optimisation ne peut pas être déterminée précisément sur les derniers points. La différence entre la courbe expérimentale et la simulation au bas de la boucle associée au changement du signe de la déformation provoque une erreur dans le calcul des dérivées fractionnaires ou entières pour les fonctions par morceaux. L'identification d'endommagement inexacte peut être une raison supplémentaire qui provoque l'erreur sur le calcul numérique.

Une erreur plus importante est observée pour les résultats de la simulation numérique du modèle fractionnaire pour le matériau composite T700/PA66. L'identification non-exacte des paramètres (l'endommagement et la plasticité) provoque un décalage supplémentaire entre les données en plus des erreurs associées aux problèmes numériques et mathématiques qui sont notés pour le matériau composite carbone/époxy. On peut observer néanmoins qu'avec le modèle fractionnaire, l'aire des boucles d'hystérésis semble être quant à elle identifiée correctement malgré les erreurs successives. C'est un point important notamment pour les objectifs futurs à ce travail de doctorat.

D'une manière très générale, on peut signaler que la collaboration entre les deux modèles, les choix qui ont été faits pour l'un et pour l'autre, permettent d'apporter une solution plus que satisfaisante pour la simulation de matériaux composites quelle que soit la nature de la matrice en quasi-statique et pour des chargements cycliques.



**Figure 4.28. Comparaison des déformations de cisaillement pour le composite carbone/époxy**

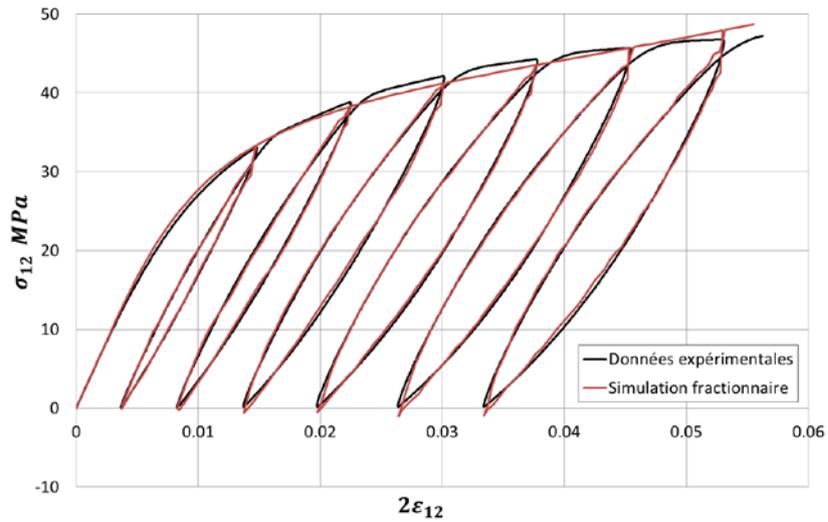


Figure 4.29. Comparaison expérimental/numérique pour le composite carbone/époxy

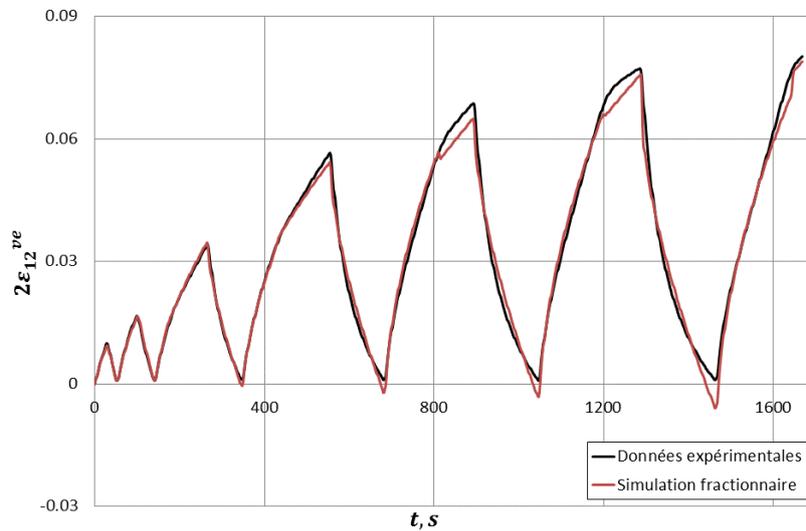


Figure 4.30. Comparaison des déformations de cisaillement pour le composite T700 /PA66

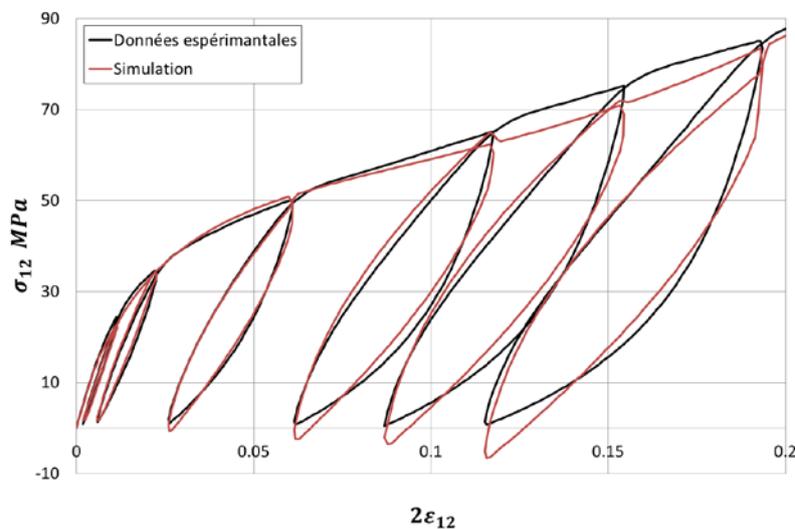
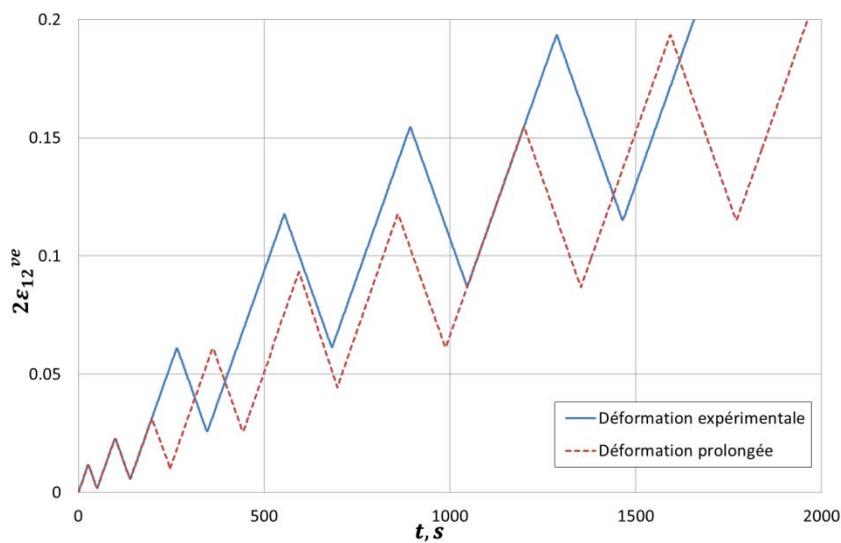
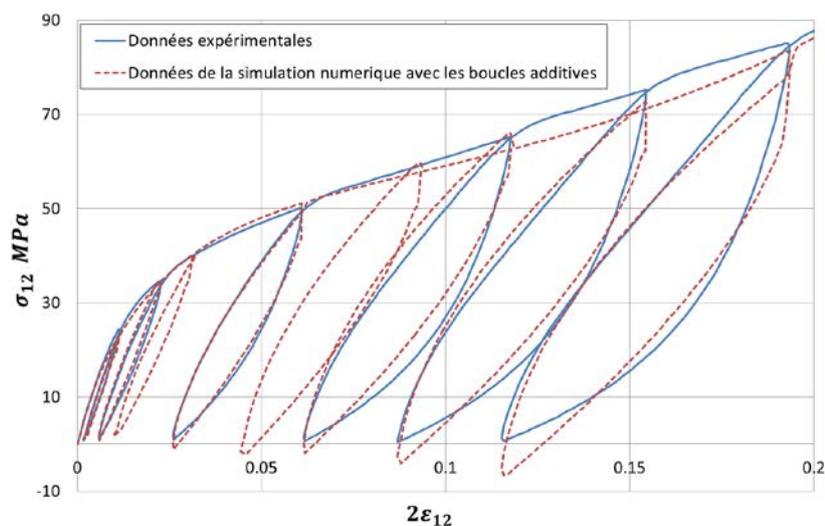


Figure 4.31. Comparaison expérimental/numérique pour le composite T700 /PA66

Afin de montrer les potentiels de la loi collaborative développée, nous proposons une dernière simulation numérique : nous allons imposer un chargement fictif qui possède 8 cycles (Figure 4.32) et non 6 comme lors des essais réels expérimentaux. Cela permettra de montrer la capacité du modèle fractionnaire à prédire l'apparence des boucles d'hystérésis additives. Le matériau composite que nous avons retenu est à matrice thermoplastique et nous utiliserons les paramètres identifiés tant pour le modèle élasto-plastique endommageable que pour le modèle fractionnaire. Les résultats de la simulation numérique sont présentés sur la Figure 4.33. On peut remarquer que la position et la taille des boucles d'hystérésis supplémentaires sont tout à fait correctes en regard de la courbe expérimentale. Cela justifie les choix que nous avons faits tant d'un point de vue modèle que méthodologie d'identification expérimentale des paramètres. Cela nous permet aussi d'entrevoir des perspectives plus qu'intéressantes pour de futurs travaux.



**Figure 4.32. Cycle de chargement fictif pour le composite T700/PA66**



**Figure 4.33. Simulation avec un chargement fictif pour un essai en cisaillement sur le composite T700/PA66**

## 4.13 VALIDATION NUMERIQUE DU MODELE EN CHARGE DYNAMIQUE

### 4.13.1 Identification des paramètres du modèle dynamique

Dans les paragraphes précédents, on a montré que le modèle élasto-plastique endommageable fractionnaire était capable de représenter le comportement des matériaux composites subissant des tractions cycliques ou non en quasi-statique. Dans cette partie, notre attention se concentre sur la modélisation de l'effet de sensibilité du matériau à la vitesse de déformation.

Dans nos travaux, nous ne disposons pas de plusieurs essais expérimentaux à différentes vitesses. En effet, d'après les préconisations des travaux [25], [26], il serait nécessaire de disposer au moins de 5 vitesses de déformation différentes afin d'établir correctement une loi d'évolution des paramètres élastiques et de la contrainte d'écoulement initiale en fonction de la vitesse de déformation. De plus, il faudrait avoir un large spectre de vitesse de déformation pour affiner encore plus les résultats.

Malheureusement, nous ne disposons dans le cadre des travaux de cette thèse que de deux essais cycliques à des vitesses de déformation différentes (basses de surcroît) et uniquement pour le composite tissé à matrice thermodurcissable. Mais nous allons voir qu'il est possible d'obtenir des conclusions plus qu'encourageantes.

Les paramètres du matériau du modèle élasto-plastique endommageable sont identifiés pour les vitesses de sollicitations différentes (5 mm/min et 50 mm/min). Les données identifiées expérimentalement sont proposées dans le **Tableau 4.18**.

Paramètre	Valeur pour 5 mm/min	Valeur pour 50 mm/min
$G_{12}^0$	3.36 GPa	3.37 GPa
$R_0$	12 MPa	20.2 MPa
$\sqrt{\bar{Y}_C}$	2.25 MPa <sup>1/2</sup>	2.54 MPa <sup>1/2</sup>
$\sqrt{\bar{Y}_0}$	0.15 MPa <sup>1/2</sup>	0.25 MPa <sup>1/2</sup>
$\sqrt{\bar{Y}_R}$	0.8 MPa <sup>1/2</sup>	0.99 MPa <sup>1/2</sup>
$\beta$	266.6 MPa	227.6 MPa
$n$	0.36	0.28

**Tableau 4.18. Synthèse des paramètres fonction de la vitesse de déformation pour le composite carbone/époxy**

Comme nous l'avons stipulé précédemment, par manque d'information (nombre de vitesses de déformation différentes), nous utiliserons des lois d'approximation linéaires. Comme proposé dans les travaux [25], nous introduisons la notion de module normalisé par rapport à une vitesse de référence :

$$X_{normalisé} = \frac{X_{courant}}{X_{réfèrence}} \quad (4.20)$$

où  $X_{courant}$  est la valeur du paramètre à la vitesse de déformation courante et  $X_{réfèrence}$  correspond à la valeur du paramètre à la vitesse de déformation référence (la vitesse en quasi-statique). Dans notre cas, la vitesse de déformation de référence est donnée pour la vitesse de sollicitation la plus petite, autrement dit pour 5 mm/min.

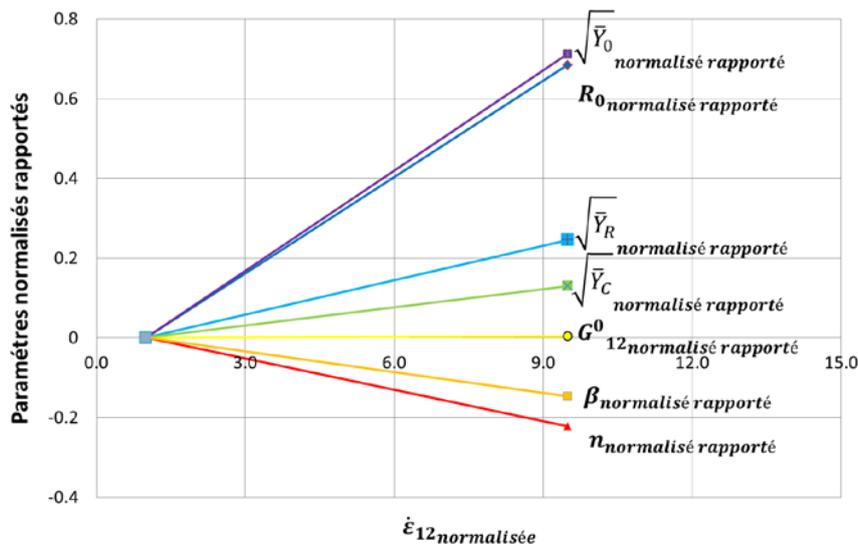
Ensuite, on introduit la notation de paramètre normalisé rapporté sous la forme suivante :

$$X_{normalisé\ rapporté} = X_{normalisé} - 1 \quad (4.21)$$

Enfin, l'identification des fonctions de viscosité (paragraphe 3.2.5) s'effectue en fonction sur rapport des vitesses de déformation courante et de référence :

$$X_{normalisé\ rapporté} = f\left(\frac{\dot{\epsilon}_{courant}}{\dot{\epsilon}_{réfèrence}}\right) \quad (4.22)$$

La dépendance des paramètres normalisés rapportés en fonction de la vitesse de déformation normalisée est illustrée sur la **Figure 4.34**.

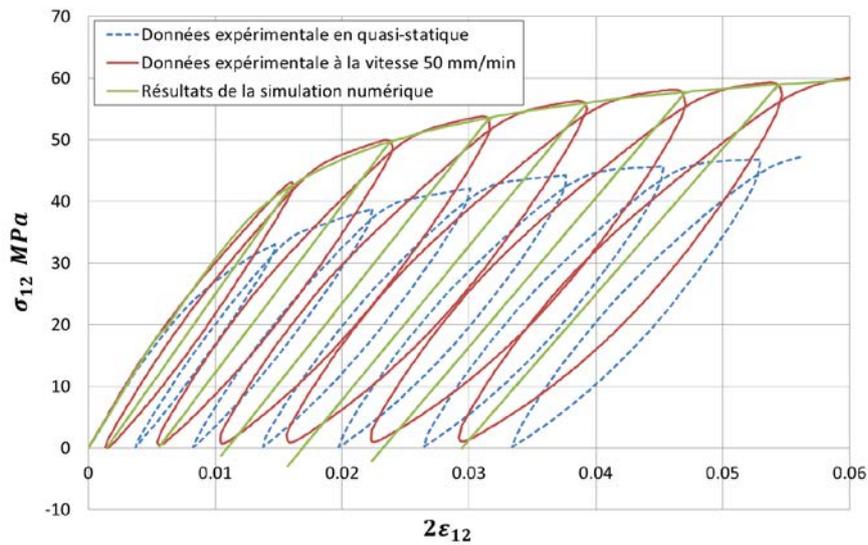


**Figure 4.34. Evolution des paramètres normalisés rapportés du modèle élasto-plastique endommageable en fonction de la vitesse de déformation normalisée**

#### 4.13.2 Modèle élasto-plastique endommageable en dynamique

En utilisant les évolutions des fonctions de viscosité (**Figure 4.34**), on peut reproduire la réponse du matériau sous un chargement dynamique (**Figure 4.35**). A partir de la comparaison des résultats entre simulation et expérimental, on observe que l'identification d'endommagement n'est pas correcte et donc celle des déformations irréversibles non plus. En effet, étant donné le nombre réduit de mesures expérimentales, les erreurs commises sur les mesures entachent l'identification expérimentale des paramètres et donc la qualité de la

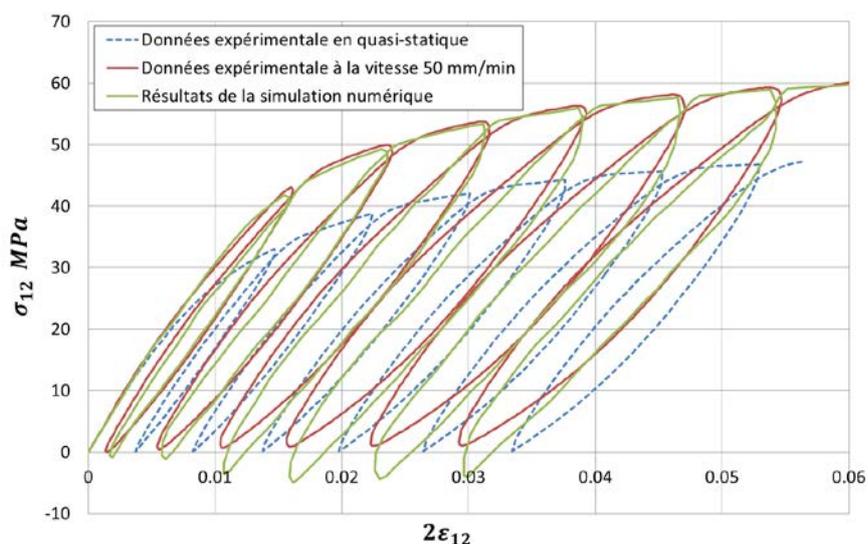
simulation numérique. Cependant on remarque quand même que la courbe enveloppe est représentée de manière plus que satisfaisante.



**Figure 4.35. Comparaison expérimental/numérique pour le modèle élasto-plastique endommageable pour un chargement dynamique**

#### 4.13.3 Modélisation des boucles d'hystérésis en chargement dynamique

Dans cette partie, nous proposons d'utiliser le modèle élasto-plastique endommageable avec prise en compte des vitesses de déformation (étudié dans le paragraphe précédent) couplé au modèle à dérivée fractionnaire. Rappelons que dans ce cas, les paramètres du modèle fractionnaire ne nécessitent pas de nouvelles identifications et seront strictement ceux déterminés en quasi-statique dans le paragraphe 4.11.2.



**Figure 4.36. Comparaison expérimental/numérique avec le modèle collaboratif pour un chargement dynamique**

L'analyse des résultats (**Figure 4.36**) de la simulation numérique montre que les deux premières boucles sont en accord avec les données expérimentales. Par contre, une erreur est présente dans les résultats pour les boucles suivantes. La source de cette erreur réside, comme nous en avons discuté précédemment, dans la détermination incorrecte de la déformation élastique et de l'endommagement par le modèle élasto-plastique endommageable. En effet, le manque de données expérimentales ne permet pas de décrire finement l'évolution des caractéristiques en fonction de la vitesse de déformation. Ceci provoque donc une représentation inexacte des boucles d'hystérésis. Mais il faut noter que la représentation générale est quand même satisfaisante et ouvre des perspectives diverses et variées pour peu que le canevas expérimental soit un peu plus étoffé.

#### **4.14 CONCLUSION**

Dans ce chapitre, nous avons proposé une étude du comportement de deux matériaux composites tissés. La différence principale entre ces deux matériaux résidait dans la nature de la matrice qui était soit thermodurcissable soit thermoplastique. Cette étude a été menée d'un point de vue numérique en utilisant notre modèle collaboratif.

Expérimentalement, nous avons constaté que le comportement de ces matériaux dans la direction des fibres est principalement de type élastique fragile. La méthodologie d'identification des paramètres s'en trouve simplifiée. Enfin, dans ce cas, le modèle élasto-plastique endommageable permet avec des lois d'évolution d'endommagement adaptée de reproduire correctement les observations expérimentales.

En ce qui concerne le cisaillement, les deux matériaux ont montré expérimentalement que leur comportement était sujet au développement de l'endommagement et d'une déformation irréversible, que la forme des hystérésis pouvait être différente (du fait de la nature de la résine) et enfin que la vitesse de déformation pouvait jouer un rôle non négligeable. Néanmoins, la procédure de caractérisation expérimentale demeure dans le cadre du modèle élasto-plastique endommageable ainsi que dans le cas du modèle fractionnaire simple à mettre en œuvre et de compréhension aisée. Les résultats des simulations numériques pour les deux composites permettent de conclure à une « bonne » identification expérimentale et à une validation des choix en ce qui concerne les modèles adoptés (extension des lois d'évolution à des formes de type polynomiale par exemple). Cependant, comme nous l'avons souligné, il demeure encore quelques problématiques en ce qui concerne les matériaux tissés à matrice thermoplastique telle que la prise en compte de la réorientation des fibres qui entachent les résultats de simulation numériques.

La prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation est, rappelons-le, naturelle pour le modèle fractionnaire. En ce qui concerne la loi élasto-plastique endommageable, les résultats des simulations numériques ont montré, malgré le manque d'information pour une meilleure précision, qu'elle était capable de reproduire correctement la relation contrainte/déformation en fonction de la vitesse de déformation. La collaboration des deux modèles permet elle aussi de pouvoir représenter des boucles d'hystérésis pour des vitesses différentes sans avoir recours à la modification des paramètres des lois fractionnaires.

Enfin le dernier point, qui nous est apparu important de montrer, est le fait qu'imposer un autre chargement comportant un nombre de cycles plus important était réalisable via le modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivée fractionnaire. Ce fait constitue le point de départ de perspectives futures et intéressantes en ce qui concerne la caractérisation expérimentale du matériau composite.

En conclusion de cette partie, le modèle élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaires est donc capable de représenter le comportement des matériaux composites tissés subissant un chargement cyclique en quasi-statique en incluant les boucles hystérésis. Le modèle est simple et efficace et donne une bonne corrélation entre les résultats numériques et les données expérimentales. Afin d'augmenter la précision du modèle, plusieurs essais identiques sont nécessaires pour identifier correctement les paramètres du matériau. Une nouvelle méthode doit également être proposée afin de déterminer la propagation de l'endommagement en cisaillement pour l'essai avec les boucles non-symétriques. Pour augmenter la performance du modèle aux chargements dynamiques, l'évolution des paramètres élastiques doit être déterminée correctement en utilisant plusieurs essais en traction à différentes vitesses de déformation.



## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* »<sup>1</sup>  
Leopold Kronecker.

Pendant des dizaines de siècle, les humains ont utilisé les nombres entiers, puis ils ont découvert les fractions et ensuite les nombres réels et complexes. Les nombres réels forment la base de l'analyse mathématique qui fournit une propriété importante : la continuité. Grâce à l'extension du calcul aux nombres réels, les opérations mathématiques relatives aux puissances et également aux racines sont apparues. De la même manière, les nombres réels peuvent être implémentés dans le calcul d'intégration et de dérivation. Les opérateurs des intégrales et des dérivées fractionnaires ont rempli « l'espace » entre ces opérations entières. La théorie mathématique développée permet facilement d'appliquer ces opérateurs aux lois physiques.

Les dérivées fractionnaires par rapport au temps décrivent les processus héréditaires. Ceci permet de les appliquer aux lois viscoélastiques afin de décrire le comportement des polymères ou des matériaux composites à matrice organique. Une des applications importantes de la théorie du calcul fractionnaire est la modélisation des processus de relaxation et de fluage. Pour les décrire, les modèles rhéologiques fractionnaires de Kelvin-Voigt [29], Maxwell [30], [31], [32] et Zener [33] et Rabotnov [34], [35], [36] sont utilisés dans plusieurs travaux afin de représenter le comportement des matériaux réels avec une structure complexe, non-homogène. D'une autre manière, les lois fractionnaires peuvent être exprimées en fonction de l'amplitude dans le domaine fréquentiel. Cela permet d'écrire le comportement des polymères soumis à des vibrations. La justification physique des opérateurs fractionnaires dans les équations constitutives est obtenue à partir de la théorie moléculaire des polymères. Ce fait confirme le caractère raisonnable de l'utilisation des dérivées fractionnaires dans la loi de comportement. Les boucles d'hystérésis sont encore un des phénomènes qui est lié aux propriétés viscoélastiques du matériau. Parmi les travaux considérés [39], [40] pour représenter les boucles d'hystérésis, on s'intéresse au travail de Mateos [41] qui est appliqué aux matériaux composites. Ce modèle permet de représenter le comportement endommagé hystérique sous une charge cyclique à l'aide du modèle Kelvin-Voigt fractionnaire mais pas le développement de la plasticité.

De plus, plusieurs modèles existants sont capables de prendre en compte la description de la plasticité et de l'endommagement [11], [55], [56], [57] ainsi que la sensibilité au changement de vitesse de déformations [25], [26], [41], [100]. Par contre, il n'y a pas un modèle unifié qui permet de reproduire l'ensemble des phénomènes suivants : endommagement, plasticité, boucles d'hystérésis et sensibilité au changement de la vitesse de déformation.

---

<sup>1</sup>« Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. » Leopold Kronecker

Dans ce travail, nous avons proposé un modèle unique pour des matériaux composites tissés en faisant collaborer deux modèles : le premier un modèle élasto-plastique endommageable complet [25] et le second un modèle fractionnaire. La capacité du modèle élasto-plastique endommageable de reproduire correctement le comportement du matériau composite a été validée de nombreuses fois. Le modèle fractionnaire est représenté par un schéma de Kelvin-Voigt non-standard à trois paramètres qui utilise la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Ce modèle est appliqué seulement pendant la « décharge-recharge », ce qui permet de diminuer le temps de calcul. En plus, le modèle fractionnaire est complémentaire du modèle élasto-plastique endommageable car il peut être utilisé de manière optionnelle.

La validation du modèle a été effectuée pour deux matériaux composites à matrice différente : thermodurcissable et thermoplastique. On constate que le modèle proposé est capable de représenter le comportement élasto-plastique endommageable hystérétique à différentes vitesses de déformation. Les résultats sont en bonne concordance avec les données expérimentales. Cependant, on peut remarquer que le modèle fractionnaire n'est pas capable de représenter les boucles non-symétriques qui sont observées dans la réponse du matériau composite à matrice thermoplastique. En effet, il est nécessaire de poursuivre les travaux, notamment en ce qui concerne la prise en compte de la variation des angles des fibres en cours de chargement.

Néanmoins, les perspectives offertes par ce modèle collaboratif sont plus qu'encourageantes pour les problèmes thermomécaniques tels que celui proposé par la méthode d'auto-échauffement pour identifier la limite en fatigue de matériaux composites. Il permet en effet de calculer assez précisément les quantités d'énergie dissipée pendant un chargement cyclique. Il permettrait donc d'être un outil numérique en support de la méthodologie expérimentale développée au sein de notre laboratoire. Ce modèle collaboratif propose un autre aspect : les possibilités qu'il offre d'un point de vue caractérisation et développement d'outils expérimentaux appropriés pour déterminer l'évolution des endommagements en dynamique rapide. En effet, pour l'instant la caractérisation expérimentale pâtit fortement du manque de moyens expérimentaux adaptés à contrôler ces évolutions.

Les conclusions générales et les observations que nous avons pu avoir en ce qui concerne cette loi collaborative permettent d'avoir des perspectives riches et novatrices pour certaines telles que :

- L'utilisation de la loi collaborative pour améliorer la quantification de l'évolution de l'endommagement en dynamique rapide.
- L'identification du sens physique des paramètres fractionnaires liés à la matrice : sont-ils propres au tissage du composite ?
- L'utilisation du modèle collaboratif pour faciliter les campagnes expérimentales de caractérisation : si un sens physique ainsi que des propriétés sont identifiés pour les paramètres des dérivées fractionnaires, on pourrait alors envisager de simplifier les campagnes expérimentales de caractérisation.

- L'extension de cette loi à d'autres matériaux composites à architecture de fibres différentes comme par exemple les 2.5D ou 3D. Pour ces composites, les boucles d'hystérésis sont présentes dans toutes les directions d'orthotropie.
- L'implémentation dans un code éléments finis afin de pouvoir servir de support à des calculs numériques qui nécessitent une description fine des quantités d'énergie dissipée principalement par la viscosité.
- L'application de cette loi collaborative en tant qu'outil d'aide à la décision pour la détermination de la limite en fatigue par la méthode d'auto-échauffement [7].



## BIBLIOGRAPHIE

---

- 1 Scheerer M, Simon Z, Roser T, Rittenschober B, Reinhold R, Schmidhuber S. *Multi-scale, multi-physical process simulation of the production of multicurved cfrp reinforcements*. 20th International Conference on Composite Materials (ICCM20), Copenhagen, 2015.
- 2 Zangenberg J, Jacobsen T, Østergaard R, Koefoed M. *Material design and reliability of advanced composite materials*. 20th International Conference on Composite Materials (ICCM20), Copenhagen, 2015.
- 3 Castro O, Lennie M, Branner K, Pechlivanoglou G, Brøndsted P, Nayeri CN, Paschereit CO. *Comparing fatigue life estimations of composite wind turbine blades under various load cases and fatigue methods*. 20th International Conference on Composite Materials (ICCM20), Copenhagen, 2015.
- 4 Caous D, Bois B, Wahl JC, Palin-Luc T, J. V. *An approach to identify multiaxial fatigue life model dedicated to wind turbine blades*. 20th International Conference on Composite Materials (ICCM20), Copenhagen, 2015.
- 5 Elias A, Kaminski M, Laurin F, Gornet L. *Study of low velocity impact defects in organic interlock woven composite*. 16th European Conference on Composite Materials (ECCM16) June, Seville, 2014.
- 6 Guldner J, Rozycki P, Gornet L, Cartraud P, Marcin L. *Numerical modelling of strain rate effects on a woven composite fabric*. 16th European Conference on Composite Materials (ECCM16), Seville, 2014.
- 7 Westphal O. *Analyse thermomécanique de l'endommagement en fatigue de stratifié de carbone/époxy: détermination de la limite de durée à partir d'essais d'auto-échauffement*. Thèse de Doctorat. Nantes: Ecole centrale de Nantes; 2014.
- 8 Giancane S, Chrysochoos A, Dattoma V, Wattrisse B. *Deformation and dissipated energy for high cycle fatigue of 2024-T3 aluminium alloy*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2, pp. 117-121, 2009.
- 9 Le Saux V, Marco Y, Callocha S, Doudarda C, Charrierb P. *An energetic criterion for the fatigue of rubbers: an approach based on a heat build-up protocol and microtomography measurements*. Procedia Engineering. 2, pp. 949-958, 2010.
- 10 Jegou L, Marco Y, Le Saux V, Calloch S. *Fast prediction of the Wöhler curve from heat build-up measurements on Short Fiber Reinforced Plastic*. International Journal of Fatigue. 47, pp. 259-267, 2013.

- 11 Ladevèze P, Le Dantec E. *Damage modelling of the elementary ply for laminated composites*. Composites Science and Technology. 43, pp. 257-267, 1992.
- 12 Leibniz GW, L'Hopital G. *Leibniz ensgesammelte Werke, Lebinizens mathematische Schriften, Erste Abtheilung, Band II*. Pertz G. H. et Gerhardt C. J.; 1849.
- 13 Abel NH. *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*. Ouvres complètes. 1, pp. 11-27, 1881.
- 14 Liouville J. *Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions*. Journal de l'École Royale Polytechnique. 13(21), pp. 1-69, 1832.
- 15 Riemann GFB. *Versuch Einer Allgemeinen Auffassung Der Integration und Differentiation*. , 1876. M Riesz. In: Mathematiker in Göttingen. Leipzig: Teubner; 1876. p. 331-344.
- 16 Holmgren H. *Om differentialkalkylen : med indices af hvad natur som helst*. Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Hand. 5(11), pp. 1-83, 1865-1866.
- 17 Grünwald AK. *XVIII. Ueber "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung*. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 12, pp. 441-480, 1867.
- 18 Letnikov AV. *Teoriya differencirovaniya s proizvolnim ukazatelem*. Matematicheskij sbornik. 3, pp. 1-68, 1868.
- 19 Oldham KB, Spanier J. *The fractional calculus*. New York and London: Academic Press; 1974.
- 20 Bagley RL, Torvik PJ. *A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity*. Rheology. 27(201-210), pp. 201:1–201:10, 1983.
- 21 Cosson P, Michon JC. *Identification by a non-integer order model of the mechanical behaviour of an elastomer*. Chaos, Solitons & Fractals. 7(11), pp. 1807-1824, 1996.
- 22 Sjöberg M. *On dynamic properties of rubber isolators*. Stockholm 2002.
- 23 Lion A, Kardelky C. *The Payne effect in finite viscoelasticity: constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales*. International Journal of Plasticity. 20, pp. 1313–1345, 2004.
- 24 Johnson AF, Pickett AK, Rozycki P. *Computational methods for predicting impact damage in composite structures*. Composites Science and Technology. 61(15), pp. 2183-2192, 2001.
- 25 Rozycki P. *Contribution au développement de lois de comportement pour matériaux composites soumis à l'impact*. Thèse de Doctorat. Valenciennes : Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis; 2000.

- 26 Marguet S. *Contribution to the modelling of the mechanical behaviour of sandwich structures subjected to dynamic loadings*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2007.
- 27 Marguet S, Rozycki P, Gornet L. *A rate dependence constitutive model for carbon-fiber reinforced plastic woven fabrics*. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 14(8), pp. 619-631, 2007.
- 28 Rozycki P. *Loi de comportement pour composite et outils numériques en dynamique rapide*. Habilitation à Diriger des Recherches. Nantes: Habilitation à Diriger des Recherches; 2015 Ecole Centrale de Nantes.
- 29 Koeller RC. *Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity*. *Journal of Applied Mechanics*. 51(2), pp. 299–307, 1984.
- 30 Schiessel H, Blumen A. *Hierarchical analogues to fractional relaxation equations*. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 26, pp. 5057–5069, 1993.
- 31 Alemany P, Blumen A. *Dynamics in disordered systems*. *Progress in Colloid and Polymer Science*. 96, pp. 15–21, 1994.
- 32 Schiessel H, Blumen A. *Mesoscopic pictures of the sol-gel transition: ladder models and fractal networks*. *Macromolecules*. 28, pp. 4013–4019, 1995.
- 33 Heymans N. *Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior*. *Rheologica Acta*. 33(3), pp. 210–219, 1994.
- 34 Rabotnov YN. *Ravnovesie uprugoj sredi s posledstviem*. *Prikladnaya Matematika i Mechanika*. 12, pp. 53-62, 1948.
- 35 Rabotnov YN. *Polzuchest elementov konstrukcij*. Moscou: Nauka; 1966.
- 36 Rabotnov YN. *Elementy Naledstvennoj Mehaniki Tverdyh Tel*. Moscou: Nauka; 1977.
- 37 Bagley RL, Torvik PJ. *On the fractional calculus model of viscoelastic behavior*. *Rheology*. 30(1), pp. 133-155, 1986.
- 38 Rouse RE. *The theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers*. *Chemical Physics*. 21, pp. 1272–1280, 1953.
- 39 Drozdov AD. *Multi-cycle viscoplastic deformation of polypropylene*. *Computational Materials Science*. 50, pp. 1991-2000, 2011.
- 40 Caputo M, Carcione JM. *Hysteresis cycles and fatigue criteria using anelastic models based on fractional derivatives*. *Rheologica Acta*. 50, pp. 107-115, 2011.
- 41 Mateos MH. *Hysteretic and damage behaviour modelling of composite materials by fractional*

- operators. Thèse de Doctorat. Nantes: Ecole Centrale de Nantes; 2014.
- 42 Lemaitre J, Chaboche JL, Benallal A, Desmorat R. *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod; 2009.
- 43 Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. *Theory And Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: ELSEVIER; 2006.
- 44 Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. *Fractional integrals and derevatives. Theory and applications publishers*. Amsterdam: Gordon and breach science; 1993.
- 45 Uchaikin VV. *Metod drobnih proizvodnih*. Ulianovsk: Artishok; 2008.
- 46 Caputo M. *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent*. *Annales di Geofisica*. 19(4), pp. 383-393, 1966.
- 47 Marchaud A. *Sur les dérivées et sur les differences des fonctions de vareables reéles*. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 6(4), pp. 337-425, 1927.
- 48 Weyl H. *Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung*. *Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*. 62(1-2), pp. 296-302, 1917.
- 49 Friedrich C. *Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives*. *Rheologica Acta*. 30, pp. 151-15, 1991.
- 50 Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San-Diego: Academic Press; 1999.
- 51 Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. Mineola and New York : Courier Corporation; 2005.
- 52 Schiessel H, Friedrich C, Blumen A. *Applications to problems in polymer physics and rheology*. *Applications of Fractional Calculus in Physics*., pp. 331-376, 2000.
- 53 Ferry JD, Landel RF, Williams ML. *Extensions of the Rouse theory of viscoelastic properties to undiluted linear polymers*. *Applied Physics*. 26(4), pp. 359-362, 1955.
- 54 Mateos M, Gornet L, Rosycki P, Aretxabaleta L. *Hysteretic shear behavior of fiber-reinforced composite laminates*. 16th European Conference on Composite Materials, Sevilla, 2014.
- 55 Ladevèze P, Daghia F, Abisset E, C. LM. *A micromechanics-based interface mesomodel for virtual testing of laminated composites*. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*. 1(1), pp. 1-16, 2014.
- 56 Maire JF, Chaboche JL. *A new formulation of continuum damage mechanics (CDM) for composite materials*. *Aerospace Science and Technology*. 1(4), pp. 247-257, 1997.

- 57 Marcin L. *Modélisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures*. Université de Bordeaux 1: Thèse de doctorat ; 2010.
- 58 Westphal O, Gornet L, Stainier L, Rozycki P. *Thermomechanical analysis of fatigue degradations in carbon/epoxy laminates*. 15th European Conference on Composite Materials-ECCM15, Venice, 2012.
- 59 Kargin VA. *Enciklopediya polimerov*. Moscou: Sovetskaya Enciklopediya; 1972-1977.
- 60 Lemaitre J, Chaboche JL. *Mécanique des matériaux solides*. Paris: Dumond; 1996.
- 61 Minervino M, Gigliotti M, Lafarie-Frenot MC, Grandidier JC. *A coupled experimental/numerical approach for the modelling of the local mechanical behaviour of epoxy polymer materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 67, pp. 129–151, 2014.
- 62 Barthe J. *Comportement thermo-visco-élastique des composites CMO – De la statique à la dynamique grande vitesse*. Thèse de doctorat ; 2013.
- 63 Nutting PG. *A new general law deformation*. Journal of the Franklin Institute. 191, pp. 678–685, 1921.
- 64 Schiessel H, Metzler A, Blumen A, Nonnenmacher TF. *Generalized viscoelastic models: Their fractional equations with solutions*. Journal of Physics A: Mathematical and General. 28, pp. 6567–6584, 1995.
- 65 Nonnenmacher TF, Metzler R. *On the Riemann-Liouville fractional calculus and some recent applications*. Fractals. 3(3), pp. 557–566, 1995.
- 66 Gerasimov AN. *Obobshenie linejnih zakonov deformacii i ih prilozhenie k zadacham vnutrennego treniya*. Prikladnaya matematika i mehanika. 12, pp. 251-260, 1948.
- 67 Magin RL. *Fractional calculus in Bioengineering*. Connecticut : Begell House; 2006.
- 68 Atanackovic TM. *A modified Zener model of a viscoelastic body*. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 14, pp. 137–148, 2002.
- 69 Padovan J, Sawicki JT. *Diophantine type fractional derivative representation of structural hysteresis. Part I: Formulation*. Computational Mechanics. 19, pp. 335–340, 1997.
- 70 Padovan J, Sawicki JT. *Diophantine type fractional derivative representation of structural hysteresis. Part II: Fitting, Computational Mechanics*. Computational Mechanics. 19, pp. 341–355, 1997.
- 71 Padovan J, Sawicki JT. *Diophantinized fractional representations for nonlinear elastomeric*

- media*. Computers & Structures. 66, pp. 613–626, 1998.
- 72 Cosson P. *Contribution a la modelisation du comportement mecanique des solides viscoelastiques par des operateurs différentiels d'ordre non-entier*. Thèse de Doctorat. Nantes: thesis; 1995 Ecole Centrale de Nantes.
- 73 Caputo M, Mainardi F. *A new dissipation model based on memory mechanism*. Pure and Applied Geograph. 91((134)), pp. 134-147, 1971.
- 74 Caputo M, Mainardi F. *Linear models of dissipation in anelastic solids*. La Rivista del Nuovo Cimento. 1(II), pp. 161-198, 1971.
- 75 Zener CM. *Elasticity and unelasticity of metals*. Chicago: Chicago University Press; 1948.
- 76 Gross B. *On creep and relaxation*. Journal of Applied Physics. 18, p.212, 1947.
- 77 Koeller RC. *Polynomial operators, Stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics*. Acta Mechanica. 58(3-4), pp. 251-264, 1986.
- 78 Rassikhin RC, Shitikova MV. *Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders*. FC&AA. 10(2), pp. 111-121, 2007.
- 79 Ladevèze P. *Sur la mécanique de l'endommagement des composites*. Journées Nationales sur les Composites JNC5, Paris, 1986.
- 80 Ladeveze P, Allix O, Daudeville L. *Mesomodeling of damage for laminate composites: Application to delamination*. In: Inelastic Deformation of Composite Materials. New York: Springer; 1990. p. 607-622.
- 81 Ladeveze P, Allix O, Deu JF, Leveque D. *A mesomodel for localization and damage computation in laminates*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 183, pp. 150-122, 2000.
- 82 Allix O, Gilletta D, Ladevèze P. *Mechanical behaviour of elementary constituents of laminates*. Fifth International Conference on Composite Materials, ICCM-V, San Diego, 1985.
- 83 Hochard C, Thollon Y. *A generalized damage model for woven ply laminates under static and fatigue loading conditions*. International Journal of Fatigue. 32(158-165), 2010.
- 84 Hochard C, Aubourg P, Charles J. *Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure*. Composites Science and Technology. 61(2), pp. 221 – 230, 2001.
- 85 Gornet L, Ijaz H. *High cycle fatigue damage model for delamination crack growth in CF/Epoxy composite laminates*. International Journal of Damage Mechanics. 20(5), pp. 783-807 , 2011.
- 86 Ezannoa A, Doudarda C, Callocha S, Millotb T, Heuzéc JL. *Fast characterization of high-cycle*

- fatigue properties of a cast copper–aluminum alloy by self-heating measurements under cyclic loadings.* Procedia Engineering. 2, pp. 967-976, 2010.
- 87 Le Saux V, Marco Y, Calloch S, C. D, Charrier P. *Fast Evaluation of the Fatigue Lifetime of Elastomers Based on a Heat Build-up Protocol and Micro-tomography Measurements.* International Journal of Fatigue. 32, pp. 1582-1590, 2010.
- 88 Schieffer A, Maire JF, Lévêque D. *A coupled analysis of mechanical behaviour and ageing for polymer-matrix composites.* Composites Science and Technology. 62(4), pp. 543–549, 2002.
- 89 Lévêque D, Schieffer A, Mavel A, Maire JF. *Analysis of how thermal aging affects the long-term mechanical behavior and strength of polymer–matrix composites.* Composites Science and Technology. 65(3-4), pp. 395–401, 2005.
- 90 Halm D, Dragon A. *A model for anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect.* Journal of Damage Mechanics. 5, pp. 384-402, 1986.
- 91 Gornet L. *Simulation des endommagements et de la rupture dans les composites stratifiés.* Thèse de Doctorat. Cachan: Thèse de doctorat; 1996 École Normale Supérieure de Cachan.
- 92 Ladevèze P, Allix O, Gornet L, Lévêque D, PL. *A computational damage mechanics approach for laminates: identification and comparison with experimental results.* Studies in Applied Mechanics. 46, pp. 481-500, 1998.
- 93 Lévêque D. *Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire.* Thèse de Doctorat. Cachan : Thèse de doctorat; 1998 École Normale Supérieure de Cachan.
- 94 Coutellier D, Walrick J, Geoffroy P. *Presentation of a methodology for delamination detection within laminated structures.* Composites Science and Technology. 66, pp. 837–845, 2006.
- 95 Prombut P, Michel L, Lachaud F, Barrau J. *Delamination of multidirectional composite laminates at 0 theta ply interfaces.* Engineering Fracture Mechanics. 73, pp. 2427–2442, 2006.
- 96 Hochard C, Payan J, Montagnier O. *Design and computation of laminated composite structures.* Composites Science and Technology. 65, pp. 467–474, 2005.
- 97 Ladevèze P. *Inelastic strains and damage.* In: Talreja R, editor. Damage Mechanics of Composite Materials. Vol 9. Amstardam: Elsevier; 1994. p. 117-138.
- 98 Herakovich CT. *Mechanics of Fibrous Composites.* New-York: Wiley ; 1998.
- 99 Gilat A, Goldberg RK, Roberts GR. *Experimental study of strain-rate-dependent behavior of carbon/epoxy composite.* Composite Science and Technology. 62, pp. 1469-1476, 2002.

- 100 Fitoussi J, Meraghni F, Jendli Z, Hug G, Baptiste D. *Experimental methodology for high strain-rates tensile behaviour analysis of polymer matrix composites*. Composites Science and Technology. 65(14), pp. 2174-2188, 2005.
- 101 Vogler M, Koerber H, Kuhn, P., Rolfes R, Camanho P. *Constitutive modeling and experimental characterization of the non-linear stress-strain behavior of unidirectional carbon-epoxy under high strain rates*. 20th International Conference on Composite Materials (ICCM20), Copenhagen, 2015.
- 102 Hamonou R. *Dimensionnement aux dommages des assemblages boulonnés des composites à matrice thermoplastique*. Ecole Centrale de Nantes: Thèse de doctorat ; Soutenance prévue pour octobre 2016.
- 103 Hamonou R. *Damage sizing of thermoplastic bolted joints on composite materials*. 18th International Conference on Composite Structures (ECCS18), Lisbonne, 2015.
- 104 ASTM, D3039. *Standard test method for tensile properties of polymer matrix composite materials*. 2008.
- 105 ASTM, D3518. *Standard test method for in-plane shear response of polymer matrix composite materials by tensile test of a  $\pm 45^\circ$  laminate*. 2013.
- 106 Alekseev SI. *Model nelinejnoj nasledstvennoj sredi s uchetem temperatury i vlazhnosti*. Dokladi Akademii Nauk., pp. 471-473, 2001.
- 107 Laurin F, Tableau N, Kaminski M, Aboura Z, Bouillon F. *Validation of the onera damage model through comparisons with multi-instrumented structural tests on interlock woven ceramic matrix composites*. 16th European Conference on Composite Materials, Seville, 2014.

## TABLE DES ILLUSTRATIONS

---

Figure 1.1. Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'une fonction puissance _____	27
Figure 1.2. Dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha$ au sens de Riemann-Liouville pour $f_1 = x$ _____	31
Figure 1.3. Dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha$ au sens de Riemann-Liouville pour la fonction $f_2 = \sin(x)$ avec $0 < \alpha < 1$ _____	31
Figure 1.4. Comparaison des approximations numériques des dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha = 0.3$ pour une fonction puissance $f(x) = x^\lambda$ , $\lambda = 0.5$ _____	44
Figure 1.6. Comparaison des approximations numériques des dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha = 0.3$ pour une fonction $f(x) = x$ _____	46
Figure 1.7. Erreurs relatives des approximations numériques des dérivées fractionnaires pour la fonction linéaire $f(x) = x$ _____	47
Figure 2.1. Dépendance des propriétés de polymère de la température _____	53
Figure 2.2. L'élément rhéologique fractionnaire « spring-pot » _____	57
Figure 2.3. Modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt _____	58
Figure 2.4. Modèle fractionnaire de Maxwell _____	59
Figure 2.5. Modèle fractionnaire de Zener _____	60
Figure 2.6. Essai de recouvrance _____	62
Figure 2.7. Essai d'effacement _____	63
Figure 2.8. Fonction exponentielle fractionnaire de Rabotnov pour différents nombres $n$ , $n = \{0, 1, 3, 10\}$ en supposant $\beta = 1$ , $\alpha = 0.3$ et la fonction exponentielle $e^t$ _____	64
Figure 2.9. Modèle moléculaire _____	67
Figure 2.10. Contrainte maximale $\sigma_{max}$ et déformation minimale $\varepsilon_{min}$ par cycle par rapport au nombre de cycles $n$ _____	69
Figure 2.11. Comparaison modèle/expérimental pour la représentation des hystérésis. _____	71
Figure 2.12. Contrainte maximale $\sigma_{max}$ et déformation minimale $\varepsilon_{min}$ par cycle par rapport à un nombre de cycle $n$ _____	72
Figure 2.13. Fonction du signal en forme de dents de scie _____	73
Figure 2.14. Boucle d'hystérésis modélisée par la dérivée de Caputo d'ordre $\alpha = 0.1$ _____	74
Figure 2.15. Boucle d'hystérésis modélisée par la dérivée de Caputo d'ordre $\alpha = 0.5$ _____	74
Figure 2.16. Relation déformation - contrainte pour la première boucle d'hystérésis _____	75
Figure 2.17. Relation déformation - contrainte pour la deuxième boucle d'hystérésis _____	76

Figure 2.18. Relation déformation - contrainte pour la troisième boucle d'hystérésis _____	76
Figure 3.1. Pli élémentaire _____	83
Figure 3.2. Courbe contrainte-déformation à $\pm 45^\circ$ à différentes vitesses de déformation [99]_	89
Figure 3.3. Influence de la vitesse de déformation sur le comportement d'un matériau composite __	90
Figure 3.4. Algorithme du modèle élasto-plastique endommageable pour matériaux tissés ____	93
Figure 3.5. Comparaison numérique/expérimental pour un essai en cisaillement pour un composite carbone/époxy _____	94
Figure 3.6. Contrainte - déformation correspondant à une boucle d'hystérésis _____	95
Figure 3.7. Déformation - temps correspondant à une boucle d'hystérésis _____	95
Figure 3.8. Composition des déformations _____	96
Figure 3.9. Représentation graphique de la dérivée fractionnaire $\sigma_{12}(t) = D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t)$ _____	97
Figure 3.10. Représentation graphique du terme $\sigma_{12}(t) = G_{12}^1 D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t)$ _____	97
Figure 3.11. Représentation graphique du modèle fractionnaire $\sigma_{12}(t) = G_{12}^0(1 - d_{12})A + G_{12}^1 D^\alpha \varepsilon_{12}^e(t)$	98
Figure 3.12. Couplage entre le modèle élasto-plastique endommageable et le modèle fractionnaire _	98
Figure 3.13. Portion de déformation pour l'identification des paramètres de dérivées fractionnaires	100
Figure 3.14. Zone du calcul fractionnaire et de la boucle d'hystérésis _____	101
Figure 3.15. Algorithme du modèle élasto-plastique endommageable fractionnaire _____	102
Figure 4.1. Tissu utilisé comme renfort _____	106
Figure 4.2. Représentation schématique du V.E.R. du stratifié T700/PA66 (TexGen®) _____	107
Figure 4.3. Eprouvette de traction pour le matériau composite carbone/époxy à $0^\circ$ _____	108
Figure 4.4. Courbe de traction longitudinale pour le matériau composite carbone/époxy ____	109
Figure 4.5. Eprouvette de traction pour le matériau composite carbone/PA66 à $0^\circ$ _____	109
Figure 4.6. Courbe de traction longitudinale pour le matériau composite T700/PA66 _____	110
Figure 4.7. Eprouvette de traction pour le matériau composite carbone/époxy à $45^\circ$ _____	112
Figure 4.8. Courbe contrainte/déformation de cisaillement à 5 mm/min pour composite à matrice thermodurcissable _____	112
Figure 4.9. Courbe contrainte/déformation de cisaillement à 50 mm/min pour composite à matrice thermodurcissable _____	112
Figure 4.10. Eprouvette de traction pour le matériau composite T700/PA66 à $45^\circ$ _____	113
Figure 4.11. Courbe contrainte/déformation de cisaillement à 2 mm/min pour composite à matrice thermoplastique _____	114
Figure 4.12. Evolution de la fonction d'endommagement longitudinal pour le composite carbone/époxy _____	116

Figure 4.13. Evolution de la fonction d'endommagement longitudinal pour le composite T700/PA66 _____	117
Figure 4.14. Evolution de la fonction d'endommagement en cisaillement pour le composite carbone/époxy _____	118
Figure 4.15. Fonction d'écrouissage $R(p)$ pour le composite à la matrice thermodurcissable _	118
Figure 4.16. Evolution de la fonction d'endommagement en cisaillement pour le composite T700/PA66 _____	119
Figure 4.17. Fonction caractéristique $R(p)$ du matériau à matrice thermoplastique _____	120
Figure 4.18. Comparaison expérimental/numérique pour une traction dans la direction des fibres pour le composite carbone/époxy _____	122
Figure 4.19. Comparaison expérimental/numérique pour une traction en cisaillement pour le composite carbone/époxy _____	122
Figure 4.20. Comparaison expérimental/numérique pour une traction dans la direction des fibres pour le composite T700/PA66 _____	123
Figure 4.21. Comparaison expérimental/numérique pour une traction en cisaillement pour le composite T700/ PA66 _____	123
Figure 4.22. Evolution de paramètre $A$ pour le composite carbone/époxy _____	125
Figure 4.23. Evolution de paramètre $B$ pour le composite carbone/époxy _____	125
Figure 4.24. L'évolution de paramètre $\alpha$ pour le composite carbone/époxy _____	125
Figure 4.25. Evolution du paramètre $A$ pour le matériau composite T700/PA66 _____	126
Figure 4.26. Evolution du paramètre $B$ le matériau composite T700/PA66 _____	127
Figure 4.27. Evolution du paramètre $\alpha$ pour le matériau composite T700/PA66 _____	127
Figure 4.28. Comparaison des déformations de cisaillement pour le composite carbone/époxy __	128
Figure 4.29. Comparaison expérimental/numérique pour le composite carbone/époxy _____	129
Figure 4.30. Comparaison des déformations de cisaillement pour le composite T700 /PA66 _	129
Figure 4.31. Comparaison expérimental/numérique pour le composite T700 /PA66 _____	129
Figure 4.32. Cycle de chargement fictif pour le composite T700/PA66 _____	130
Figure 4.33. Simulation avec un chargement fictif pour un essai en cisaillement sur le composite T700/PA66 _____	130
Figure 4.34. Evolution des paramètres normalisés rapportés du modèle élasto-plastique endommageable en fonction de la vitesse de déformation normalisée _____	132
Figure 4.35. Comparaison expérimental/numérique pour le modèle élasto-plastique endommageable pour un chargement dynamique _____	133
Figure 4.36. Comparaison expérimental/numérique avec le modèle collaboratif pour un chargement dynamique _____	133



## LISTE DES TABLEAUX

---

Tableau 1.1. Définitions des dérivées fractionnaires _____	33
Tableau 1.2. Comparaison des erreurs relatives des approximations numériques pour chaque point dans le cas d'une fonction puissance $f(x) = x^\lambda$ _____	45
Tableau 1.3. Comparaison des sommes des erreurs relatives pour la fonction $f(x) = x^\lambda$ _____	46
Tableau 1.4. Comparaison des sommes des erreurs relatives pour la fonction $f(x) = x^\lambda$ _____	46
Tableau 4.1. Paramètres élastiques du matériau composite carbone/époxy _____	109
Tableau 4.2. Paramètres élastiques du matériau composite T700/PA66 _____	110
Tableau 4.3. Synthèse de l'identification longitudinale (transversale) des composites étudiés	111
Tableau 4.4. Paramètres élastiques en cisaillement du composite carbone/époxy _____	113
Tableau 4.5. Paramètres élastiques en cisaillement du matériau composite T700/PA66 _____	113
Tableau 4.6. Synthèse de l'identification de cisaillement des composites étudiés _____	114
Tableau 4.7. Paramètres d'endommagement du matériau composite carbone/époxy _____	116
Tableau 4.8. Paramètres d'endommagement du composite T700/PA66 _____	116
Tableau 4.9. Synthèse des paramètres d'endommagement longitudinal (transversal) des composites étudiés _____	117
Tableau 4.10. Paramètres d'endommagement du composite carbone/époxy _____	118
Tableau 4.11. Paramètres de plasticité du composite carbone/époxy _____	119
Tableau 4.12. Paramètres d'endommagement du composite T700/PA66 _____	120
Tableau 4.13. Paramètres de plasticité du composite T700/PA66 _____	120
Tableau 4.14. Synthèse des paramètres d'endommagement en cisaillement des composites étudiés	121
Tableau 4.15. Synthèse des paramètres de plasticité en cisaillement des composites étudiés	121
Tableau 4.16. Coefficients de l'évolution des paramètres du modèle fractionnaire pour le composite carbone/époxy _____	124
Tableau 4.17. Paramètres du modèle fractionnaire pour le composite T700/PA66 _____	126
Tableau 4.18. Synthèse des paramètres fonction de la vitesse de déformation pour le composite carbone/époxy _____	131