



HAL
open science

Analyse et contrôle de systèmes de dynamiques d'opinions

Florian Dietrich

► **To cite this version:**

Florian Dietrich. Analyse et contrôle de systèmes de dynamiques d'opinions. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2017. Français. NNT : 2017LORR0214 . tel-01684698

HAL Id: tel-01684698

<https://theses.hal.science/tel-01684698>

Submitted on 15 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Analyse et contrôle de systèmes de dynamiques d'opinions

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 22/11/2017

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

Spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique.

par

Florian DIETRICH

Composition du jury :

<i>Présidente :</i>	Isabelle QUEINNEC	Directrice de Recherche CNRS, LAAS-CNRS, Toulouse
<i>Rapporteurs :</i>	Emmanuel TRÉLAT Julien HENDRICKX	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, LJLL, Paris 6 Associate Professor, Université Catholique de Louvain
<i>Examineurs :</i>	Paolo FRASCA Marc JUNGERS Samuel MARTIN	Chargé de Recherche CNRS, GISPA-lab, Grenoble Directeur de Recherche CNRS, CRAN (Directeur de thèse) Maître de Conférences, CRAN (Co-directeur de thèse)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants de thèse, Samuel et Marc, pour m'avoir fait confiance pour mener à bien ce projet de recherche, qui est également le leur. Je les remercie tout particulièrement pour tous les enseignements et toutes les compétences que j'ai pu acquérir (aussi bien scientifiques qu'humaines) au cours de ces trois années sous leur direction au CRAN. J'ai également apprécié leur enthousiasme et leur passion très contagieuse pour la recherche scientifique.

J'aimerais ensuite remercier les membres du jury d'avoir accepté de rapporter et d'examiner mon travail de thèse, ainsi que de s'être déplacé pour assister à ma soutenance.

Je remercie également les enseignants de l'ENSEM avec qui j'ai eu la chance de donner des TP, ainsi que tout le personnel du CRAN à l'ENSEM, avec mention spéciale pour Christine.

Je tiens à remercier tous les membres de ma famille, en particulier mes parents pour leur soutien indéfectible, mon frère pour m'avoir fait découvrir l'ambiance de la Meinau, à Pascal pour les tours en camion et à ma mamie pour ses délicieuses conserves de cerises.

Je n'oublie pas de remercier tous mes collègues doctorants et stagiaires, en particulier mes collègues de bureau Tommaso (à qui souhaite bon courage pour la fin de sa thèse) et Julien, Loïc le meusien, Hervé le togo, Jihene la berbère, Gaëtan le geek, Balou le parigo, sans oublier l'indétrônable Hamadou et sa titouille ! Merci aussi à mes amis de l'ENSEM, notamment Damien mais également à tous les Chupa !

Un dernier merci à tous ceux qui ont fait le déplacement pour venir assister à ma soutenance.

Table des matières

Notations	1
Introduction générale	3
1 Contexte des dynamiques d'opinions	3
2 Organisation du manuscrit	4
3 Publications	6
Chapitre 1 Notions introductives	9
1.1 Notions de mathématiques	9
1.2 Modèles de dynamiques d'opinions	13
1.3 Régime asymptotique du modèle Hegselmann-Krause en temps discret	17
1.4 Contrôle de dynamiques d'opinions	21
1.5 Conclusion	22
Chapitre 2 Formation de clusters en régime transitoire	25
2.1 Formulation du problème	26
2.2 Résultats préliminaires	31
2.3 Prédiction de la durée d'un cluster transitoire	35
2.4 Illustrations	37
2.5 Conclusion et perspectives	40
2.6 Annexe 2.A : Preuve de la Proposition 2.2.2	41
2.7 Annexe 2.B : Preuve de la Proposition 2.2.3	45
Chapitre 3 Contrôle par un leader avec fonction d'influence dépendant du temps et de l'état	47
3.1 Formulation du problème	48
3.2 Obtention de la loi de commande	51
3.3 Illustrations	62
3.4 Conclusion	65

Chapitre 4 Contrôle par un leader en temps minimal	67
4.1 Présentation du système	68
4.2 Formalisation du problème et résultats préliminaires	69
4.3 Cas général avec interactions entre les agents	71
4.4 Cas particulier sans interaction entre agents	78
4.5 Illustrations	83
4.6 Conclusion	90
4.7 Annexe 4.A : Preuve de la Proposition 4.4.6	92
Conclusion générale	95
Bibliographie	99

Notations

\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
\mathbb{N}^*	ensemble des entiers naturels non-nuls
\mathbb{R}	ensemble des réels
\mathbb{R}^+	ensemble des réels positifs ou nuls
\mathbb{R}^*	ensemble des réels non-nuls
\mathbb{R}^n	ensemble des vecteurs de dimension $n \in \mathbb{N}^*$
X^T	transposée du vecteur $X \in \mathbb{R}^n$
$ x $	valeur absolue pour $x \in \mathbb{R}$
$ E $	cardinalité de l'ensemble E
$\mathcal{C}^0(E, F)$	classe des fonctions continues de $E \rightarrow F$
$\mathcal{C}^n(E, F)$	classe des fonctions de $E \rightarrow F$ qui sont $n \in \mathbb{N}$ fois dérivables et à dérivées continues
PMP	Principe du Maximum de Pontryagin
HK	Modèle Hegselmann-Krause

Introduction générale

1 Contexte des dynamiques d'opinions

Ces dernières décennies ont vu croître l'intérêt porté à l'étude de la grande famille des systèmes multi-agents, et cela notamment grâce à la multiplication des champs applicatifs, dont les dynamiques d'opinions font partie. Les systèmes multi-agents sont des systèmes constitués d'une multitude d'individus ou agents, réalisant certaines tâches et interagissant les uns avec les autres. Les systèmes multi-agents en général permettent par exemple la conception d'algorithmes de calculs distribués en informatique, ou encore de lois de commandes distribuées en automatique. Un des attraits des systèmes multi-agents est également l'émergence d'un comportement global du système à partir de règles locales qui s'appliquent aux agents. Des règles simples d'attraction et de répulsion permettent par exemple de rassembler des robots en évitant les collisions. Ce principe se retrouve dans d'autres domaines tels que la biologie (modéliser la propagation d'une maladie dans un organisme ou une population), les réseaux électriques intelligents (chaque élément du réseau participe à la production/consommation d'énergie et à la stabilité du réseau), mais également en sociologie, où les interactions entre différents individus induisent une évolution de leurs opinions respectives, ce qui peut mener à des accords ou des désaccords entre des groupes de personnes.

En effet, l'apparition des réseaux sociaux sur internet a généré un regain d'intérêt de la part des communautés de Mathématiques Appliquées et d'Automatique pour l'étude des dynamiques d'opinions, avec pour objectif l'étude des comportements et des données issus de ces réseaux. Différents modèles ont été proposés pour décrire les interactions dans nos sociétés et pour prédire l'évolution des opinions d'une population, avec des applications potentielles lors d'élections politiques ou de sondages. Dans ces modèles de dynamiques d'opinions, l'état d'un agent est son opinion et est modélisé par un réel. L'évolution de cette opinion est sujette à une équation de la dynamique, qui peut être donnée en temps discret ou en temps continu.

L'étude des systèmes de dynamiques d'opinions a notamment engendré un grand nombre de résultats sur la caractérisation du régime asymptotique de ces systèmes. Dans la littérature, l'accent a été mis sur l'étude du consensus, qui intervient lorsque tous les agents du système convergent vers la même opinion. D'autres contributions s'intéressent également aux désaccords observés une fois le régime permanent du système atteint. Le régime transitoire de ces systèmes reste cependant moins bien connu, d'où notre intérêt pour la détection de la formation de clusters d'opinions transitoires. Ces phénomènes consistent en la formation d'accords locaux temporaires entre plu-

sieurs agents lors du régime transitoire. L'étude du régime transitoire représente un intérêt puisque de nombreuses applications ont des durées finies, ce qui ne permet pas d'utiliser les résultats de la littérature sur le régime asymptotique.

D'autre part, une thématique émergente dans les dynamiques d'opinions concerne l'introduction d'agents dont l'opinion est contrôlable dans le système. Le système n'est plus autonome et les agents contrôlés permettent d'altérer l'évolution des opinions des agents autonomes, et ainsi de modifier le comportement du système. Le régime asymptotique d'une dynamique d'opinions pouvant consister en plusieurs groupes d'agents en désaccord, l'introduction d'agents contrôlables est une solution fréquente pour essayer d'obtenir un consensus entre tous les agents du système. Cette approche fait appel à des éléments de la théorie du contrôle et ouvre de nombreuses perspectives. Nous nous intéresserons au contrôle de dynamique d'opinions via un unique leader : un agent supplémentaire dont l'opinion est contrôlable. Nos objectifs sont de rassembler tous les agents du système dans le voisinage de ce leader en temps minimal, pour ensuite forcer les agents au consensus à une valeur d'opinion désirée.

2 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est structuré en quatre chapitres principaux. Une conclusion générale résumera l'ensemble des contributions présentées au cours de ces chapitres.

Chapitre 1 : Notions introductives

Ce premier chapitre a pour objectif de fournir les pré-requis nécessaires à la compréhension des problèmes et des résultats présentés dans cette thèse. Les principales approches de la théorie du contrôle optimal y sont ensuite présentées. Le Principe du Maximum de Pontryagin est énoncé succinctement. Vient ensuite une introduction aux modèles de dynamiques d'opinions, qui débute par une présentation des différentes manières de modéliser une opinion. Par la suite, un modèle d'interactions générique est exposé ainsi que plusieurs cas particuliers issus de celui-ci. La validité de ces modèles mathématiques vis-à-vis d'expériences de dynamiques d'opinions réelles est ensuite examinée. Par la suite, l'accent est mis sur les principaux résultats de la littérature pour le modèle Hegselmann-Krause en temps discret, qui sont représentatifs de l'état des connaissances du régime asymptotique des dynamiques d'opinions. Ces résultats comprennent la conservation de l'ordre des opinions des agents, la convergence du modèle en temps fini, ainsi qu'une explication de la distance entre les accords locaux une fois le régime asymptotique atteint. Enfin, on décrira les contributions existantes portant sur le contrôle des dynamiques d'opinions via l'introduction d'agents contrôlés. Différents problèmes de contrôles sont exposés, mettant en œuvre un seul ou plusieurs agents contrôlés.

Chapitre 2 : Formation de clusters en régime transitoire

Ce deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un système de dynamique d'opinions à temps discret, pour lequel on cherche à caractériser le régime transitoire. Ce

régime a été peu étudié jusqu'à présent dans la littérature, et cela au profit du régime asymptotique qui est bien connu. Pour les systèmes de dynamique d'opinions, selon les exemples, on peut observer lors du régime transitoire, la formation de groupes d'agents réalisant des accords locaux. Ces accords locaux peuvent persister indéfiniment ou incorporer des agents supplémentaires. Plusieurs accords locaux peuvent également fusionner au cours du temps, pour former un nouvel accord local, ou bien tendre vers le consensus lorsque tous les agents convergent vers la même opinion.

Ce chapitre propose un critère permettant de détecter la formation de ces phénomènes transitoires. Ce critère est fondé sur deux grandeurs caractéristiques d'un groupe d'agents : son diamètre δ (la plus grande distance séparant les opinions des agents de ce groupe) et la distance Δ séparant le groupe des autres agents du système. À partir de ces deux paramètres, un *cluster transitoire en formation* est défini comme un groupe d'agents dont le quotient δ/Δ décroît entre deux itérations. Pour détecter la formation de clusters transitoires, il est établi que le couple (δ, Δ) vérifie la relation $\delta(t)/\Delta(t) \leq \rho(\delta, \Delta) \delta(t+1)/\Delta(t+1)$, où la quantité $\rho(\delta, \Delta)$ est définie explicitement. Le critère de détection d'un cluster transitoire en formation est vérifié si la quantité $\rho(\delta, \Delta)$ présentée est inférieure à un. Cette quantité est une borne sur l'évolution du quotient δ/Δ obtenue en considérant des configurations d'agents pire-cas. Ce critère permet également de prédire la durée de ces phénomènes grâce à l'obtention d'une borne inférieure sur le nombre d'itérations, ou durée, pendant lesquelles le critère de détection précédemment défini est vérifié.

Les résultats obtenus concernant la détection et la prédiction de clusters transitoires en formation sont illustrés par des simulations numériques.

Chapitre 3 : Obtention du consensus via le contrôle d'un leader.

Le troisième chapitre est consacré au contrôle d'une classe de systèmes de dynamique d'opinions en temps continu dont l'influence dépend du temps et de l'état. L'introduction d'agents contrôlables est une solution fréquente pour essayer d'obtenir un consensus entre tous les agents du système.

Dans ce chapitre, le contrôle du système s'effectue via un unique leader commandé en vitesse et à commande saturée. Le leader influence les autres agents du système lorsque ceux-ci sont suffisamment proches de lui. Une loi de commande générique est détaillée permettant d'amener tous les agents du système au consensus à une valeur d'opinion donnée. Cette loi de commande est composée de plusieurs étapes temporelles. Premièrement le leader rassemble tous les agents dans son voisinage en temps fini. Pour ce faire, il a été choisi de manière arbitraire d'amener d'abord le leader vers l'agent ayant l'opinion la plus basse. Ensuite le leader entraîne cet agent vers l'agent avec l'opinion la plus élevée avec une vitesse suffisamment faible. Cette vitesse est, entre autres, conditionnée par la fonction d'influence du leader sur les agents. Le système étudié vérifie la propriété de conservation de l'ordre des opinions des agents, donc lorsque les deux agents extrêmes sont dans le voisinage du leader, tous les autres agents intermédiaires y sont également. Le leader emmène ensuite tous les agents vers la valeur d'opinion désirée sans perdre son influence sur les agents. Une fois la valeur d'opinion atteinte par le leader, le consensus est asymptotiquement atteint en maintenant l'opinion du leader constante.

Un résultat complémentaire porte sur l'obtention du consensus entre les agents pendant une phase de suivi de trajectoire. Le consensus peut être atteint sous certaines conditions portant sur le contrôle appliqué au leader lorsque tous les agents sont dans son voisinage.

Les différents aspects de la loi de commande proposée sont illustrés par des simulations numériques.

Chapitre 4 : Rassemblement des agents autour d'un leader en temps minimal.

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de contrôle en temps optimal suscité par l'obtention au chapitre précédent d'une loi de commande permettant à un leader contrôlé de rassembler tous les agents du système dans son voisinage en temps fini. Le problème en temps minimal associé est abordé via une approche par le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) avec une formulation Hamiltonienne, pour des systèmes de dynamique d'opinions avec influence dépendant exclusivement de l'état. Cette approche permet d'obtenir des conditions nécessaires sur les lois de commandes optimales solutions de ce problème.

Deux cas sont examinés dans ce chapitre. Tout d'abord, dans le cas général où les interactions entre les agents sont autorisées, des conditions implicites et difficiles à résoudre sont obtenues. Les lois de commandes sont alors composées d'arcs saturés lorsque le contrôle appliqué au leader est saturé, et d'arcs singuliers lorsque le contrôle appliqué au leader n'est pas saturé. Une expression implicite de la commande singulière est obtenue en fonction de l'état du système et des états adjoints (introduits par le PMP). Cependant, la commutation de la commande sur ces différents arcs se fait à des instants définis implicitement grâce à la connaissance du signe de la fonction de commutation, qui dépend des états adjoints du système. À cause de la complexité du problème et de sa sensibilité numérique lorsqu'il y a des interactions entre les agents, les outils numériques utilisés pour résoudre le problème n'ont pu donner que des résultats peu précis.

Le cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre les agents entraîne des simplifications sur la dynamique du système et sur les équations du PMP. Ces simplifications permettent d'approfondir les résultats du cas général. Deux stratégies de commande candidates à l'optimalité sont identifiées : une où le contrôle appliqué est constant et saturé, et l'autre qui reste indéterminée analytiquement mais qui peut être obtenue numériquement. Ces résultats permettent de déterminer en pratique la loi de commande optimale pour toutes les conditions initiales du système de dynamique d'opinions considéré.

Des simulations numériques sont présentées pour illustrer les résultats obtenus.

3 Publications

Les résultats obtenus pendant cette thèse ont permis la rédaction des contributions suivantes

Revue internationale avec comité de lecture

- Florian Dietrich, Samuel Martin, and Marc Jungers. Control via leadership of opinion dynamics with state and time-dependent interactions. Technical Note in *IEEE Transactions on Automatic Control*, en ligne, 2017, à paraître en 2018, DOI: [10.1109/TAC.2017.2742139](https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2742139).
- Florian Dietrich, Samuel Martin, and Marc Jungers. Time optimal control via leadership of opinion dynamics. En préparation, 2017.

Conférences internationales avec comité de lecture

- Florian Dietrich, Samuel Martin, and Marc Jungers. Opinion dynamics control by leadership with bounded influence. In *55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Las Vegas, USA, pages 1–6, 2016.
- Florian Dietrich, Samuel Martin, and Marc Jungers. Transient cluster formation in generalized Hegselmann-Krause opinion dynamics. In *European Control Conference (ECC)*, Aalborg University, Aalborg, pages 531–536, 2016.

Chapitre 1

Notions introductives

Ce chapitre a pour objectif de fournir les pré-requis nécessaires à la compréhension des problèmes et des résultats présentés dans cette thèse mais aussi un état de l'art succinct de la littérature.

Nous introduirons tout d'abord, dans la Section 1.1, les définitions et résultats techniques utilisés dans les chapitres suivants. Les principales approches de la théorie de la commande optimale y sont ensuite présentées. Le Principe du Maximum de Pontryagin est énoncé succinctement. La Section 1.2 est une introduction aux modèles de dynamiques d'opinions. La modélisation d'une opinion y est évoquée et plusieurs modèles d'évolution sont présentés, dont un modèle d'interactions générique à partir duquel plusieurs cas particuliers sont ensuite dérivés. Dans la Section 1.3, l'accent est mis sur les principaux résultats de la littérature pour le modèle Hegselmann-Krause en temps discret, qui sont représentatifs de l'état des connaissances du régime asymptotique des dynamiques d'opinions. Enfin, la Section 1.4 décrit les contributions existantes portant sur le contrôle des dynamiques d'opinions via l'introduction d'agents contrôlés. La Section 1.5 conclut ce chapitre.

1.1 Notions de mathématiques

Cette section est consacrée aux notions de mathématiques utilisées dans cette thèse. Les définitions usuelles ainsi que des lemmes techniques sont précisés dans la sous-section qui suit.

1.1.1 Définitions et lemmes techniques

On notera $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des indices des agents non-commandés d'un système multi-agents. On rappelle également la définition d'une fonction lipschitzienne.

Définition 1.1.1. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite k -lipschitzienne avec $k \in \mathbb{R}^+$ si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

Une fonction lipschitzienne permet de majorer l'écart des images en fonction de l'écart des antécédents. Cette propriété sera utilisée dans les preuves des résultats présentés dans ce manuscrit.

Les lemmes présentés dans la suite de cette section sont utilisés ponctuellement dans les preuves de ce manuscrit et concernent des inégalités différentielles.

Lemme de Gronwall

Ce lemme, issu de [Gronwall, 1919], permet d'intégrer une inégalité différentielle. En majorant la dynamique d'un agent on peut borner sa trajectoire.

Lemme 1.1.2. *Soit ϕ et ψ des fonctions continues et différentiables et telles que $\psi \geq 0$. Si l'inégalité différentielle suivante est vérifiée pour $t \in [t_0, +\infty)$:*

$$\dot{\phi}(t) \leq \psi(t) \phi(t),$$

alors pour tout $t \geq t_0$, on a l'inégalité :

$$\phi(t) \leq \phi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s) ds\right).$$

Lemme de comparaison

Issu de [Khalil et Grizzle, 2002, Chapitre 3, Lemme 3.4], ce lemme permet également de borner une trajectoire à partir d'une borne sur la dynamique.

Lemme 1.1.3. *Soit l'équation différentielle scalaire :*

$$\dot{u}(t) = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0,$$

où la fonction $f : \mathbb{R}^+ \times J \rightarrow J$ avec $J \subset \mathbb{R}$ est continue par rapport à la variable t et localement Lipschitz en la variable u . Soit $[t_0, T)$ avec $T \geq t_0$ l'intervalle de longueur maximale tel que la solution $u(t)$ existe et vérifie $u(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Soit $v(t)$ une fonction continue vérifiant l'inégalité différentielle suivante :

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0$$

et telle que $v(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Alors on a $v(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in [t_0, T)$.

La sous-section suivante est une introduction à la théorie de la commande optimale.

1.1.2 Introduction à la théorie de la commande optimale

Un problème de commande optimale a pour objectif l'obtention d'une loi de commande à appliquer à un système et qui optimise un critère de performance. Ce critère de performance se traduit comme un coût à maximiser ou à minimiser. Il peut servir à minimiser l'énergie dépensée par le système, ou encore minimiser le temps pour atteindre un point de fonctionnement. Un problème de commande optimale peut être sujet à des contraintes sur la commande, telles des saturations, et à des contraintes

sur l'état du système, par exemple liées à la physique du système. Des contraintes sur le temps peuvent également être introduites. La théorie de la commande optimale a de nombreuses applications puisqu'elle permet d'obtenir la meilleure commande permettant de minimiser une fonction coût donnée. Elle est notamment utilisée dans les industries aéronautique, chimique, etc. Cette théorie comporte plusieurs approches qui sont présentées succinctement par la suite.

Aperçu des approches disponibles

Le cadre général consiste à considérer un système dynamique en temps continu donné par :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

avec le temps $t \in \mathbb{R}^+$, l'état du système $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et où le contrôle $u(t)$ prend des valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. On cherche à minimiser un coût de forme générique :

$$J = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} h(t, x(t), u(t)) dt,$$

où t_f est l'instant final. Ce coût est composé d'une partie terminale avec la fonction $g(t_f, x(t_f))$ et d'une partie intégrale. Deux approches existent pour traiter les problèmes de commande optimale.

- La première approche utilise le Principe de Maximum de Pontryagin, qui a été développé par Lev Pontryagin dans [Pontryagin et al., 1962], et sera abrégé PMP par la suite. Le PMP donne des conditions nécessaires d'optimalité sur la commande à partir d'équations différentielles ordinaires. Une des conditions est notamment la minimisation de la fonction Hamiltonienne :

$$H(t, x(t), \lambda(t), \lambda^o, u(t)) = \lambda^T f(t, x(t), u(t)) + \lambda^o h(t, x(t), u(t)),$$

où $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur adjoint du système et $\lambda^o \leq 0$ une constante. Les lois de commandes déduite du PMP ne sont donc pas toutes optimales au sens du critère choisi. D'autre part, le PMP donne lieu, sauf cas particulier, à une commande en boucle ouverte (qui ne dépend que du temps et pas l'état du système).

- La deuxième approche est la programmation dynamique, et a été développée par Richard Bellman dans [Bellman, 1958]. La programmation dynamique génère des conditions suffisantes d'optimalité sur la commande, via l'utilisation d'équations aux dérivées partielles, introduites par l'équation d'Hamilton-Jacoby-Bellman :

$$\dot{V}(x(t), t) + \min_{u \in \Omega} \{ \nabla V(x(t), t) f(t, x(t), u(t)) + h(t, x(t), u(t)) \},$$

où ∇ est l'opérateur gradient et $V(x(t), t)$ la fonction valeur à déterminer. La loi de commande déduite la programmation dynamique est en boucle fermée, et dépend donc de l'état du système.

Ces deux approches ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Le PMP est cependant plus facile à mettre en oeuvre car il n'implique pas la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Le paragraphe suivant présente de manière succincte le PMP, afin d'introduire son utilisation dans le Chapitre 4.

Présentation du Principe du Maximum de Pontryagin

On considère ici un système dynamique non-linéaire en temps continu de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

avec le temps $t \in \mathbb{R}^+$, l'état du système $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et où le contrôle $u(t)$ prend des valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. On cherche à minimiser un coût de forme générique :

$$J = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} h(s, x(s), u(s)) ds.$$

Le Principe du Maximum de Pontryagin assure alors que si le contrôle u est optimal pour le système et le coût défini précédemment, alors il existe un vecteur *état adjoint* $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et un réel $\lambda^o \leq 0$ qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), \lambda(t), \lambda^o, u(t)), \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \lambda(t), \lambda^o, u(t)), \end{aligned} \quad (1.1)$$

où l'Hamiltonien H du système est défini par :

$$H(t, x(t), \lambda(t), \lambda^o, u(t)) = \lambda^T f(t, x(t), u(t)) + \lambda^o h(t, x(t), u(t)). \quad (1.2)$$

L'Hamiltonien relie la dynamique du système avec la dynamique de l'état adjoint. La condition suivante est également vérifiée :

$$H(t, x(t), \lambda(t), \lambda^o, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), \lambda(t), \lambda^o, v(t)), \quad (1.3)$$

ce qui signifie que le contrôle $u(t)$ maximise l'Hamiltonien à tout instant. Des conditions supplémentaires sur l'état adjoint λ , appelées *conditions de transversalité*, sont données en fonctions des contraintes posées sur le temps final ainsi que sur les états initial et final du système.

La trajectoire de l'état adjoint λ , conditionnée par les équations précédentes, permet dans certains cas l'obtention de l'expression analytique du contrôle optimal. Lorsque cela n'est pas le cas, les équations précédentes et les différentes conditions sur l'état initial et final du système sont utilisées pour générer un problème aux deux bouts, qui peut alors être résolu numériquement.

Remarque : Pour le cas des systèmes linéaires en temps continu de la forme :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t),$$

et lorsque le critère de performance à minimiser est mis sous forme quadratique :

$$J = x^T(t_f) K_f x(t_f) + \int_0^{t_f} \left(x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt,$$

où t_f est l'instant final, la commande optimale u^* est complètement déterminée en utilisant les deux approches précédentes et sous certaines conditions. Ce résultat s'appuie notamment sur la résolution d'une équation de Riccati et le contrôle est en boucle fermée $u^*(t) = -K x^*(t)$. L'expression de la matrice K fait intervenir les matrices de l'équation d'état et du critère. Ce cas particulier a été introduit par R. Kalman dans [Kalman, 1960], voir [Lee et Markus, 1967, Chapitre 2] pour plus de détails.

Cette section a permis de présenter les notions de mathématiques nécessaires à la compréhension des résultats de cette thèse. La section suivante introduit les modèles de dynamiques d'opinions, dont cette thèse fait l'étude.

1.2 Modèles de dynamiques d'opinions

Cette section est consacrée à la présentation de modèles de dynamiques d'opinions. Ces modèles ont des similarités avec les modèles de systèmes multi-agents, qui sont par exemple appliqués à des flottes de robots. La différence réside dans le fait que l'état d'un agent ne représente pas l'état d'un robot ou d'un système quelconque. Dans le cas des dynamiques d'opinions, l'état d'un agent représente l'opinion d'une personne ou d'un groupe de personnes à propos d'un certain sujet. La modélisation d'une opinion est le sujet de la sous-section suivante.

1.2.1 Définitions de l'opinion d'un agent

La difficulté principale pour la modélisation d'un système de dynamique d'opinion est la modélisation de l'opinion d'un agent. Cet agent représente généralement une personne et l'état de cet agent représente l'opinion de cette personne à propos d'un ou plusieurs sujets. Modéliser une opinion s'avère être un problème compliqué au vu de la complexité de la nature humaine et des phénomènes sociologiques de nos sociétés. L'opinion d'un individu à propos d'un certain sujet dépend potentiellement d'un infini de paramètres : le milieu social, le vécu, la sensibilité, l'intérêt pour le sujet, etc... Plusieurs modélisations d'une opinion ont été proposées dans la littérature.

Une opinion peut tout d'abord être représentée par un simple nombre scalaire : un réel ou un entier. Le domaine d'évolution d'une opinion peut être continu, un intervalle dans \mathbb{R} , ou bien discret, comme un ensemble de \mathbb{N} . Cette représentation, bien que très simplifiée, est néanmoins utilisée car elle a l'avantage d'être simple à étudier. Afin de rendre compte de phénomènes sociologiques de plus complexes, il est néanmoins nécessaire de disposer de modèles plus étoffés.

Une solution consiste à rajouter un deuxième paramètre, en plus de l'opinion scalaire. Ce second paramètre traduit l'influencabilité d'une personne, sa force de conviction et sa résistance à l'opinion des autres. Ce paramètre est modélisé par une fonction appelée *fonction d'influence*. Cela permet alors de modéliser des agents ayant des rôles différents. Il est alors possible d'avoir des agents qui ont plus d'influence que les autres, comme un leader ou un média d'information de masse, ou encore des agents qui sont fermés à toute interaction, pour modéliser des personnes bornées ou extrémistes. La fonction d'influence d'un agent permet donc de rendre compte de phénomènes sociaux plus complexes.

On évoquera enfin une dernière manière de rendre le système plus réaliste. Cela consiste à considérer l'opinion d'un agent non pas comme un scalaire mais comme un vecteur dans \mathbb{R}^n . Cette approche permet de modéliser la vision du monde d'une personne, composée d'une multitude d'opinions sur des sujets divers. L'évolution d'une composante du vecteur d'opinion peut alors dépendre des autres composantes de ce vecteur, afin de mieux modéliser la complexité de l'opinion d'une personne, comme c'est le cas dans [Friedkin et al., 2016]. Ces modèles sont néanmoins plus difficiles à analyser à cause de la potentielle grande dimension du système.

Cette thèse est exclusivement consacrée à l'étude et au contrôle de dynamiques d'opinions où l'opinion d'un agent du système est représentée par un scalaire. Les modèles de dynamiques d'opinions utilisés contiennent également une fonction d'influence pour les agents. Le cas où l'opinion d'un agent est modélisée par un vecteur ne sera pas considéré par la suite, mais certains résultats présentés dans ce manuscrit peuvent faire l'objet d'une extension dans ce sens.

Cette sous-section a abordé la question de la modélisation d'une opinion. La sous-section suivante présente un modèle de dynamique d'opinions générique.

1.2.2 Modèle d'interactions générique

Cette sous-section présente un modèle d'interactions générique, qui peut se décliner en plusieurs cas particuliers en fonction de certains choix, évoqués par la suite.

Soit n le nombre d'agents d'un système de dynamique d'opinions. Une dynamique générique pour un système de dynamique d'opinions est la suivante, pour $i \in \mathcal{N} \triangleq \{1, \dots, n\}$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n F_{ij}(t, x_j(t) - x_i(t)) (x_j(t) - x_i(t)),$$

en temps continu et pour $t \in \mathbb{N}$:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j=1}^n \frac{F_{ij}(t, x_j(t) - x_i(t)) (x_j(t) - x_i(t))}{\sum_{k=1}^n F_{ik}(t, x_k(t) - x_i(t))},$$

en temps discret, avec $x_i(t) \in \mathbb{R}$, l'opinion au temps t de l'agent d'indice $i \in \mathcal{N}$. Les fonctions F_{ij} sont les fonctions d'influences régissant l'action de l'agent j sur l'agent i . Ce modèle permet à chaque agent d'influencer de manière différente chaque autre agent du système. Il permet notamment la modélisation d'agents bornés en posant, pour tout $j \in \mathcal{N}$:

$$F_{i_0 j} \equiv 0,$$

où $i_0 \in \mathcal{N}$ est l'indice de l'agent borné. Les fonctions d'influences dépendent généralement de deux paramètres : l'état et le temps. La dépendance en temps permet par exemple de modéliser la perte d'intérêt pour un sujet ou la baisse de motivation à communiquer avec les autres. D'autre part, l'opinion d'une personne évolue en fonction de l'opinion des agents avec qui il communique. L'opinion d'une personne peut également évoluer différemment en fonction de l'écart entre son opinion et celle des autres. Le deuxième argument des fonctions d'influences est alors la différence entre

les opinions des deux agents qui interagissent. Dans les dynamiques précédentes, les fonctions d'influences entre deux agents sont pondérées par la distance entre les opinions de ces deux agents. La validité de cette hypothèse est examinée à la Section 1.2.4. Dans le cas à temps discret, les pondérations sont divisées par la somme des pondérations pour éviter que le système ne diverge, et pour modéliser la répartition de l'influence entre plusieurs sources.

Ce modèle d'interactions générique peut se décliner en une multitude de cas particuliers suivants la forme des fonctions d'influences choisies. Cependant, la plupart des modèles présentés dans cette thèse utilisent des fonctions d'influences communes à tous les agents, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N}^2, F_{ij} \equiv F_{ji} \equiv F.$$

Cela permet une simplification de l'écriture du modèle et son analyse en réduisant le nombre de paramètres.

Le modèle générique de dynamique d'opinions présenté dans cette sous-section peut se décliner en une multitude de cas particulier en fonction de la classe de fonction d'influence considérée. Certains exemples sont donnés dans la sous-section suivante.

1.2.3 Modèles particuliers

On s'intéresse désormais à des cas particuliers de fonctions d'influence, qui permettent des modélisations variées.

Sans dépendance explicite en temps

On peut dans certains cas considérer que les agents gardent un intérêt constant à communiquer, permettant de justifier un modèle où les interactions ne dépendent pas explicitement du temps. Cela permet une simplification de l'écriture du modèle de la manière suivante, pour $i \in \mathcal{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n f(x_j(t) - x_i(t)) (x_j(t) - x_i(t)),$$

en temps continu et pour $t \in \mathbb{N}$:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j=1}^n \frac{f(x_i(t) - x_j(t)) (x_j(t) - x_i(t))}{\sum_{k=1}^n f(x_i(t) - x_k(t))},$$

en temps discret. Dans ce cas, les interactions dépendent uniquement de l'opinion des agents. Néanmoins, cela ne signifie pas que le réseau d'interactions soit statique. Les interactions entre deux agents dépendent de la fonction d'influence, qui peut s'annuler en fonction de l'écart d'opinion des deux agents. Le cas particulier suivant en est un exemple simple où l'influence est limitée par la distance entre les agents.

Modèle d'Hegselmann-Krause à influence bornée

On s'intéresse désormais au modèle proposé dans [Hegselmann et Krause, 2002], dont l'étude a fait l'objet d'un nombre important de publications, voir [Lorenz, 2007] pour une vue d'ensemble sur les modèles à influence bornée. Bien que simple à appréhender, la démonstration des phénomènes observés en simulations n'est pas aisée. Ceci est notamment dû à la non-linéarité de la fonction d'influence associée au modèle, qui est définie de la manière suivante. Soit $\varepsilon > 0$ le rayon d'influence des agents. La fonction d'influence du modèle HK est alors définie comme :

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } |y| < \varepsilon, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si les opinions de deux agents sont séparées d'une distance supérieure au seuil ε , alors les deux agents n'interagissent pas. Le régime asymptotique de ce système peut consister en plusieurs accords locaux ou en le consensus, voir Figure 1.1 pour une illustration. Les propriétés de ce modèles sont évoquées plus en détails dans la Section 1.3.

Des variantes de ces modèles existent. Le rayon d'influence peut par exemple être choisi asymétrique. Il existe alors deux rayons, un pour le voisinage supérieur de l'agent et un pour le voisinage inférieur. Les évolutions de ce modèle présentent alors des enveloppes de convergence asymétriques, voir [Hegselmann et Krause, 2002] pour des illustrations.

On peut également affecter des poids pour chaque agent afin de modéliser des agents très ou peu influents. Cela permet aussi de modéliser un groupe de personnes ayant la même opinion, grâce à un seul agent de poids élevé, afin de réduire la dimension du modèle.

Autres modèles

D'autres modèles de système multi-agents et de dynamiques d'opinions existent et ont été étudiés en détails dans la littérature. On peut citer le modèle de Cucker-Smale, présenté dans [Cucker et Smale, 2007], qui propose une fonction d'influence continue pour du contrôle de flotte en deux ou trois dimensions, mais qui s'applique également en dimension 1. Le modèle de Vicsek, proposé dans [Vicsek et al., 1995] est similaire au modèle de Krause puisqu'il utilise une influence bornée dans l'espace d'état.

Le modèle dit classique, où les fonctions d'influences des agents sont des constantes, permet de mettre la dynamique du système sous forme matricielle et de faire appel à la théorie des graphes pour son analyse. Cette approche, fondée sur l'étude de la topologie des réseaux d'interactions, a généré un grand nombre de publications, voir par exemple [Mesbahi et Egerstedt, 2010] pour une vue d'ensemble. Le modèle classique a fait son apparition dès 1950 avec la publication de [French Jr, 1956] puis notamment de [DeGroot, 1974], avec comme objectif premier l'étude de la réalisation d'un consensus parmi un groupe d'individus.

1.2.4 Validations expérimentales des modèles

La validation expérimentale des modèles précédemment présentés est importante pour justifier de l'intérêt porté à l'étude des dynamiques d'opinions par les commu-

nautés de Mathématiques Appliquées et d'Automatique.

Les modèles les plus simples, de type HK et variantes, bien qu'ayant généré un nombre important de résultats théoriques, ne sont pas suffisamment étoffés pour être validés expérimentalement. En particulier, la fonction d'influence du modèle HK présente une discontinuité. Une fois le rayon d'influence dépassé, l'influence est nulle. Des modèles comme celui de [Davis, 1996] propose une fonction d'influence qui décroît exponentiellement avec la distance et qui a pu être corrélé avec des données expérimentales, voir [Ohtsubo et al., 2002].

Par ailleurs, il a été montré que l'influencabilité est liée à des facteurs autres que l'écart des opinions des agents. L'expertise de l'influenceur ainsi que sa crédibilité entrent également en ligne de compte, voir [Aronson et al., 1963] et [Hovland, 1959]. L'implication et la motivation d'une personne à propos du sujet discuté a son importance, voir [Hovland et al., 1957]. Une personne peut également décider de l'effort qu'elle veut faire pour comprendre les arguments de ceux avec qui elle communique, comme évoqué dans [Cohen, 1959].

Dans [Vande Kerckhove et al., 2016], des modèles utilisant des fonctions d'influence dépendant explicitement du temps ont permis de prédire l'évolution de l'opinion de personnes participant à un jeu d'estimation. Le but consistait à estimer le nombre d'éléments d'un nuage de points ou la proportion d'une couleur dans une image.

Par conséquent, les résultats de cette thèse portent sur des systèmes de dynamiques d'opinions généralisés, qui sont compatibles avec un large panel de fonctions d'influences. Des fonctions décroissantes lisses peuvent être utilisées pour éviter la cassure de la fonction d'influence du modèle HK, et la dépendance en temps est spécifiquement traitée au Chapitre 3.

Cette section a tout d'abord servi à clarifier la notion d'opinion, et la manière dont elle est modélisée. Cette section a également permis de présenter différents modèles de dynamiques, du plus générique aux cas particuliers, ainsi qu'à faire le lien avec les résultats issus d'expérimentations. La section suivante est consacrée aux résultats de la littérature sur le régime asymptotique du modèle de dynamique d'opinions d'Hegselmann-Krause en temps discret.

1.3 Régime asymptotique du modèle Hegselmann-Krause en temps discret

Le régime asymptotique des dynamiques d'opinions a fait l'objet d'un nombre important de travaux. On s'attachera dans cette section à présenter les résultats significatifs sur le modèle HK en temps discret. La sous-section suivante rappelle la dynamique du modèle ainsi que des propriétés du système.

1.3.1 Propriétés du modèle

Pour rappel, la dynamique du système HK, composé de $n \in \mathbb{N}$ agents, est donnée, pour $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ et $t \in \mathbb{N}$, par :

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j=1}^n \frac{f(x_i(t) - x_j(t)) (x_j(t) - x_i(t))}{\sum_{k=1}^n f(x_i(t) - x_k(t))}, \quad (1.4)$$

avec la fonction d'influence $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } |y| < \varepsilon, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'influence d'un agent i est donc limitée à un voisinage de rayon ε autour de l'opinion de l'agent. Tous les agents au-delà de ce voisinage n'interagissent pas avec l'agent i en question. Le rayon d'influence d'un agent peut être normalisé à $\varepsilon = 1$ sans perte de généralité, puisqu'il est possible, par homothétie, de changer l'échelle du système sans changer l'allure des trajectoires. On fait donc l'hypothèse $\varepsilon = 1$ dans cette section.

Une propriété importante de ce modèle est la conservation de l'ordre des opinions des agents, énoncé comme suit de manière formelle.

Théorème 1.3.1. *L'ordre des agents du système (1.4) est préservé. C'est-à-dire :*

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N}^2, \forall t \in \mathbb{N}, x_i(t) \leq x_j(t) \implies x_i(t+1) \leq x_j(t+1).$$

Ce résultat a été démontré dans [Hendrickx, 2008, Théorème 2] pour tout type de fonctions d'influence vérifiant l'hypothèse $\ln(f)$ concave, avec \ln le logarithme naturel. Cette hypothèse est vérifiée pour la fonction d'influence du modèle HK. La conservation de l'ordre des agents permet notamment de ré-indicer les agents par ordre croissant des opinions et facilite ainsi l'analyse du système.

Cette sous-section a permis de présenter le système ainsi que la propriété élémentaire de conservation de l'ordre des opinions des agents. Dans la sous-section suivante, on s'intéresse au régime asymptotique du système HK en temps discret.

1.3.2 Caractérisation du régime asymptotique

Cette sous-section est consacrée aux principales contributions de la littérature sur l'analyse du régime permanent du système HK en temps discret. Le premier résultat concerne le temps de convergence du système.

Convergence en temps fini

Dans [Bhattacharyya et al., 2013], la convergence du modèle HK est étudiée pour différentes variantes (rayon d'influence bruité et opinion multi-dimensionnelle). Un résultat notable concerne la convergence en temps fini du système.

Théorème 1.3.2. *Le système HK (1.4) converge au plus en $N = O(n^3)$ itérations, avec $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'agents du système.*

Ceci s'explique par le fait que lorsque plusieurs agents d'un même groupe sont tous inter-connectés et qu'aucun de ces agents ne partage d'autres connexions avec un agent extérieur au groupe, alors la dynamique (1.4) de chacun de ces agents est la même et

leurs opinions sont toutes égales à l'itération suivante. Une illustration du phénomène est présentée Figure 1.1, où tous les agents d'opinions dans $[0, 1]$ convergent vers leur opinion finale en une itération. Cela est dû au fait qu'aucun autre agent n'a d'opinion dans $[-1, 0]$ ni dans $[1, 2]$.

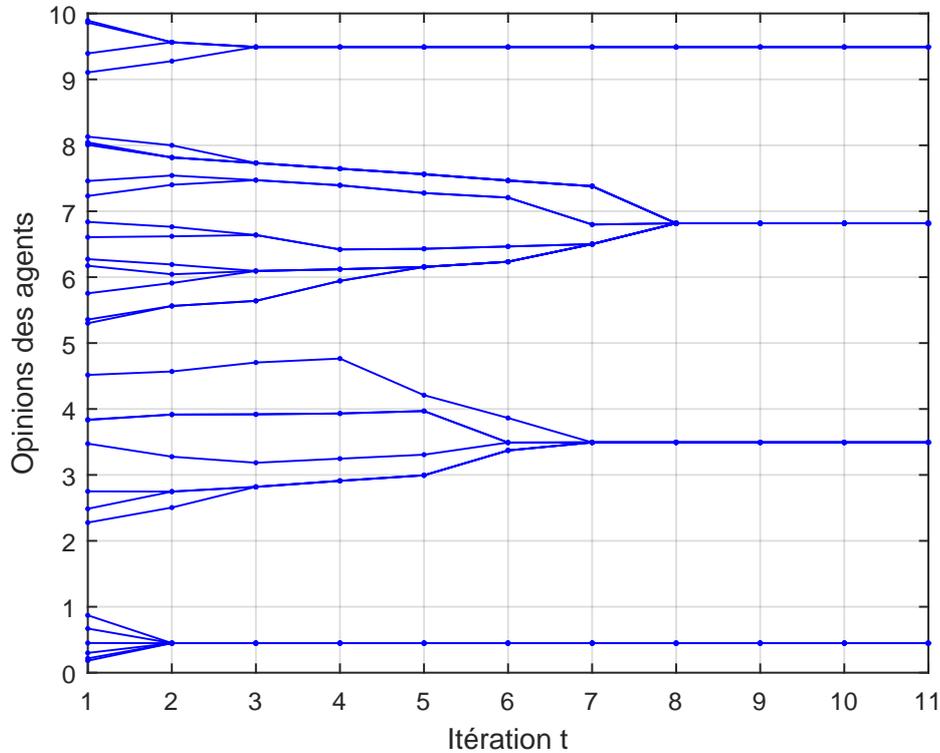


FIGURE 1.1 – Exemple de simulation du système (1.4) d’Hegselmann-Krause en temps discret pour un système à $n = 30$ agents avec un voisinage de rayon $\varepsilon = 1$. Le régime asymptotique est atteint en $N = 8$ itérations, ce qui est très faible par rapport à la borne n^3 donnée par le Théorème 1.3.2. Le régime asymptotique consiste en quatre clusters d’agents formant des accords locaux.

La convergence en temps fini du système peut également se traduire de la manière suivante, proposée dans [Blondel et al., 2009].

Théorème 1.3.3. *Pour tout agent $i \in \mathcal{N}$ du système (1.4), son opinion $x_i(t)$ converge vers une valeur x_i^* en temps fini. De plus, pour $(i, j) \in \mathcal{N}$, soit les deux agents forment un accord local $x_i^* = x_j^*$ (aussi appelé cluster) soit les deux agents sont en désaccord tel que $|x_i^* - x_j^*| \geq 1$.*

Une fois que le système a convergé, on peut donc observer plusieurs cas. Le premier est le consensus, qui consiste en un groupe contenant tous les agents du système. On a alors $\forall (i, j) \in \mathcal{N}, x_i^* = x_j^*$. Dans les autres cas, on note l’apparition de plusieurs groupes (ou clusters), ce qui signifie que plusieurs accords locaux ont été réalisés, comme illustré Figure 1.1.

L’étude de la distance entre ces différents clusters fait ensuite l’objet du paragraphe suivant.

Distances entre clusters asymptotiques

Une observation récurrente pour les systèmes HK discrets concernent le régime permanent et la formation de clusters. Un cluster A est défini comme un ensemble d'agents partageant la même opinion $x_A \in \mathbb{R}$ une fois le régime permanent atteint, soit :

$$\forall i \in A \subset \mathcal{N}, \forall t \geq T, x_i(t) = x_A,$$

où $T \in \mathbb{N}$ est l'instant à partir duquel les opinions des agents ne sont plus modifiées.

L'écart d'opinions entre deux clusters a été le sujet de conjectures. D'une part, la distance inter-clusters est supérieure au rayon d'influence $\varepsilon = 1$, sans quoi le régime permanent ne serait pas atteint. D'autre part, il a été observé des distances inter-clusters très supérieures à 1 et proche de $2\varepsilon = 2$, voir notamment [Krause, 2000, Lorenz, 2006]. Une explication de ces phénomènes a été donnée dans [Blondel et al., 2009] en introduisant la notion de stabilité d'un cluster asymptotique vis-a-vis d'un agent perturbateur. La stabilité d'un cluster asymptotique y est alors définie dans le cadre de l'introduction d'un agent perturbateur supplémentaire d'opinion arbitraire dans le système à l'équilibre. L'introduction de cet agent supplémentaire entraîne un nouvel équilibre au bout d'un nombre d'itérations fini. Un cluster est dit stable si pour n'importe quelle valeur d'opinion de l'agent supplémentaire, la valeur de l'opinion du cluster au nouvel équilibre tend vers celle de l'ancien équilibre lorsque le poids de l'agent supplémentaire tend vers zéro. C'est-à-dire que l'équilibre d'un cluster n'est pas perturbé par l'ajout d'un agent d'opinion arbitraire et de poids aussi faible que l'on veut. Cette définition de la stabilité permet d'obtenir le théorème suivant, qui donne une borne sur la distance entre clusters asymptotiques stables.

Théorème 1.3.4. *Soit deux clusters A et B d'opinions respectifs x_A et x_B et composés respectivement de n_A et n_B agents. Un équilibre entre ces deux clusters est stable vis-a-vis d'un agent perturbateur si la condition suivante est vérifiée :*

$$|x_A - x_B| \geq 1 + \frac{\min\{n_A, n_B\}}{\max\{n_A, n_B\}},$$

pour $n_A = n_B$. L'inégalité est stricte si $n_A \neq n_B$.

Ce résultat permet de justifier les observations de clusters séparés d'une distance plus petite que $2\varepsilon = 2$ lorsque les deux clusters ne possèdent pas le même nombre d'agents. Il permet également d'expliquer l'apparition moins fréquente de clusters séparés d'une distance proche de $\varepsilon = 1$. Ces clusters sont en fait instables d'après la définition donnée précédemment, ce qui explique une plus faible probabilité de se former.

Cette section a permis de faire l'état des connaissances sur le comportement asymptotique du système HK en temps discret. La section suivante s'intéresse au contrôle des dynamiques d'opinions en général, et cela via l'introduction d'un ou plusieurs agents contrôlés.

1.4 Contrôle de dynamiques d'opinions

L'analyse des dynamiques d'opinions autonomes a notamment permis de montrer que le régime asymptotique de ces systèmes ne consiste pas toujours en un accord global, ou consensus. L'introduction d'un ou plusieurs agents contrôlés dans le système permet alors d'avoir une action sur le système. Cela permet de réaliser des objectifs divers, comme décrit dans cette section, comme par exemple forcer l'obtention d'un consensus. Le contrôle de dynamiques d'opinion fait également l'objet des Chapitres 3 et 4. Une première approche consiste à n'insérer qu'un seul agent contrôlé dans le système. Cet agent est nommé *leader* et fait l'objet de la sous-section suivante.

1.4.1 Contrôle par un leader unique

Cette sous-section est consacrée à la présentation de résultats sur le contrôle de dynamiques d'opinions à l'aide d'un unique agent contrôlé appelé leader. Le leader influence les agents non-contrôlé du système mais les agents n'ont aucune influence sur l'opinion du leader. L'opinion du leader peut varier librement ou être sujet à des contraintes sur son évolution.

Dans [Hegselmann et al., 2015], les auteurs s'intéressent au problème de contrôle optimal suivant, pour un système HK à influence bornée et en temps discret. Via l'introduction d'un leader, l'objectif est de rassembler le maximum d'agents dans un intervalle d'opinion donné sur une période de temps finie. Ce problème a pour application la modification de l'opinion de personnes votants lors d'élections politiques ou d'un référendum. Dans le cas considéré, le leader peut modifier librement son opinion afin de réaliser son objectif. Les auteurs ont employé des techniques essentiellement numériques pour tenter de résoudre ce problème. Les algorithmes utilisés n'ont cependant permis de trouver des solutions à ce problème de commande optimale que pour des systèmes d'une dizaine d'agents et pour une durée d'un dizaine d'itérations. L'augmentation conséquente du nombre d'agents, à des fins de réalisme, augmente en effet la dimension et la complexité du problème.

Le contrôle de dynamiques d'opinions via un leader fait également l'objet de l'étude proposée dans [Wongkaew et al., 2015]. Cette fois-ci le modèle est en temps continu et les interactions dépendent de l'état de manière générique. Dans ce modèle à temps continu, le leader contrôle la vitesse d'évolution de son opinion. Cette vitesse d'évolution est bornée dans le modèle proposé par les auteurs. Les auteurs abordent alors le problème de la contrôlabilité du système lors de l'introduction du leader, de la stabilisation de ce système ainsi que de la possibilité de faire du suivi de trajectoire entre le leader et les agents. Dans cette étude, le leader peut posséder une fonction d'influence bornée ou non-bornée. Dans le cas d'une influence non-bornée, le consensus asymptotique a toujours lieu puisque le leader interagit avec tous les agents, quelle que soit leurs écarts d'opinions. Le problème de contrôle optimal, consistant à faire converger tous les agents vers une valeur de consensus désirée, est examiné et résolu numériquement via une approche par commande prédictive.

Cette sous-section a permis de présenter les problèmes de contrôle de dynamiques d'opinions par un unique leader. Le cas avec plusieurs leaders est présentée dans la sous-section suivante.

1.4.2 Contrôle via plusieurs agents stratégiques

Pour des systèmes de dynamiques d'opinions de grande dimension, il peut être intéressant et potentiellement plus efficace de pouvoir contrôler plusieurs agents.

Le problème posé dans [Kuruz, 2015] consiste à minimiser le temps de convergence d'un système HK en temps discret. Cette minimisation est justifiée par le fait que ce système converge en un nombre fini d'itérations vers son état asymptotique, qui peut ne pas être le consensus. L'étude a pour objectif de faire le lien entre la proportion d'agents contrôlés et la vitesse de convergence du système. Les agents contrôlés peuvent modifier librement leur opinion à chaque itération. Les résultats obtenus consistent alors en une amélioration significative des bornes sur la convergence du modèle HK.

Un problème de contrôle optimal sur un modèle de Cucker-Smale où tous les agents sont contrôlables est examiné dans [Piccoli et al., 2016]. L'obtention du consensus est notamment obtenue en appliquant uniquement un contrôle sur l'agent le plus éloigné d'une valeur du consensus désirée. Il est également montré que, sous certaines conditions, le contrôle optimal peut être initialement nul. Le système évolue alors librement pendant un certaine période de temps, avant la prise de contrôle de l'agent le plus éloigné du consensus.

Le modèle de Cucker-Smale fait également l'objet de [Caponigro et al., 2013], où une étude de la contrôlabilité du système lorsqu'il est possible de contrôler tous les agents. L'approche utilisée cherche à contrôler le moins d'agents possibles en utilisant une commande sporadique, dans le sens où la plupart des composantes de la commande sont nulles. Plusieurs exemples de commandes sporadiques sont proposés pour amener les système vers le consensus. Une commande creuse est notamment obtenue en considérant un problème de contrôle optimal avec une fonction coût à minimiser qui dépend de la norme du contrôle ainsi que de l'écart au consensus.

Dans [Caponigro et al., 2016], les auteurs cherchent spécifiquement à minimiser le nombre d'agents à contrôler afin de faire converger vers le consensus un système à temps continu générique. Les fonctions d'influences qui sont considérées peuvent être bornées ou non-bornées. Les résultats généraux qui sont présentés permettent d'affirmer que pour le cas particulier des dynamiques d'opinions, il est nécessaire de ne contrôler qu'un seul agent à la fois pour amener le système vers consensus. Cela permet de réduire la dimension du contrôle à un, ce qui donne un argument supplémentaire à la contrôlabilité d'une dynamique d'opinion par un unique leader.

Les contributions présentées dans cette section ont permis de présenter différents problèmes traitant du contrôle de dynamiques d'opinions. La section suivante conclut ce chapitre.

1.5 Conclusion

Ce chapitre contient les principaux pré-requis nécessaires à la compréhension des contributions de cette thèse. La modélisation des dynamiques d'opinion a été présentée via le détail de plusieurs modèles, dont celui d'Hegselmann-Krause à influence bornée. Les résultats principaux de la littérature sur ce modèle ont été détaillés et démontrent l'état avancé des connaissances du régime permanent de ce système. Enfin, le contrôle des dynamiques d'opinions a été abordé. Ce contrôle s'effectue par le biais d'un ou

plusieurs agents contrôlés, afin de modifier le comportement des agents et de réaliser certains objectifs, comme par exemple l'obtention du consensus.

Ce chapitre a permis de mettre en lumière la bonne connaissance du régime asymptotique du système, au détriment du régime transitoire qui est mal connu. Le chapitre suivant s'intéresse alors à la formation de clusters temporaires pendant le régime transitoire d'un système de dynamique d'opinions généralisé en temps discret.

Chapitre 2

Formation de clusters en régime transitoire

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un système de dynamique d'opinions à temps discret, pour lequel on cherche à caractériser le régime transitoire. Ce régime a été peu étudié jusqu'à présent dans la littérature, et cela au profit du régime asymptotique qui est désormais bien connu, voir [Blondel et al., 2009], [Lorenz, 2007].

L'étude du régime transitoire représente toutefois un intérêt puisque de nombreuses applications ont des durées finies, ce qui ne permet pas d'utiliser les résultats de la littérature sur le régime asymptotique. On citera notamment l'exemple d'une campagne électorale, voir [Hegselmann et al., 2015], qui prend place pendant une période de temps finie. L'étude du régime transitoire apporte également une meilleure connaissance des mécanismes sous-jacents à une dynamique d'opinions.

Pour les systèmes de dynamique d'opinions, selon les exemples, on peut observer lors du régime transitoire, la formation de groupes d'agents réalisant des accords locaux. Ces accords locaux peuvent persister indéfiniment ou incorporer des agents supplémentaires. Plusieurs accords locaux peuvent également fusionner au cours du temps, pour former un nouvel accord local, ou le consensus lorsque les opinions de tous les agents convergent vers la même opinion.

L'objectif ce chapitre est de proposer un critère permettant de détecter la formation de ces phénomènes transitoires. On cherchera également dans un second temps à prédire la durée de ces phénomènes. Les résultats obtenus concernant la détection et la prédiction sont illustrés par des simulations numériques.

La Section 2.1 suivante est consacrée à la présentation du système et du problème traité dans ce chapitre. Un critère de détection d'un cluster transitoire en formation est présenté Section 2.2. Ce critère est fondé sur la décroissance du ratio de deux paramètres d'un groupe d'agents : le diamètre de ce groupe ainsi que la distance séparant le groupe des autres agents. La contribution principale de ce chapitre sur la prédiction de la durée d'un cluster transitoire en formation fait ensuite l'objet de la Section 2.3. Cette prédiction se fait grâce au critère de détection précédemment présenté et d'un système pire-cas associé. Les résultats de ce chapitre sont enfin illustrés Section 2.4 et la Section 2.5 clôture ce chapitre et donne des perspectives.

Les résultats de ce chapitre ont donné lieu à la publication en conférence internationale (European Control Conference) de [Dietrich et al., 2016b].

2.1 Formulation du problème

Cette première section est consacrée à la présentation du système étudié dans ce chapitre. Le problème traité ainsi que sa motivation sont ensuite exposés.

2.1.1 Définition du système

On considère un système multi-agents en temps discret composé de n agents, indexés de 1 à n . L'opinion ou état d'un agent $i \in \mathcal{N} \triangleq \{1, \dots, n\}$ à l'instant $t \in \mathbb{N}$ est un scalaire noté $x_i(t) \in \mathbb{R}$. Lorsque il n'y a pas d'ambiguïté, on simplifiera les notations de la manière suivante, $x_i = x_i(t)$ et $x_i^+ = x_i(t + 1)$. L'opinion de l'agent $i \in \mathcal{N}$ au temps $t + 1$ est obtenue en utilisant l'algorithme de consensus suivant :

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij}(t, x_i(t), x_j(t))}{\sum_{k=1}^n \alpha_{ik}(t, x_i(t), x_k(t))} (x_j(t) - x_i(t)), \quad (2.1)$$

où les $\alpha_{ij}(t, x_i(t), x_j(t))$ sont les poids associés à l'influence de l'agent j sur l'agent i . Ces poids peuvent potentiellement dépendre explicitement du temps et de l'état de manière couplée. On utilisera dans ce chapitre des poids dépendant uniquement de l'état de la forme suivante :

$$\alpha_{ij}(t, x_i(t), x_j(t)) = f(|x_i(t) - x_j(t)|), \quad (2.2)$$

où la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée *fonction d'influence*.

2.1.2 Motivations et énoncé du problème

Comme souligné dans l'introduction, le comportement asymptotique du type de système étudié est bien connu. En particulier, quand la fonction d'influence est majorée et est à valeurs strictement positives, le système converge asymptotiquement vers le consensus, voir [Blondel et al., 2005]. L'étude du régime transitoire reste néanmoins un problème ouvert. En particulier, le comportement transitoire suivant peut être observé dans certains cas : avant que tous les agents ne convergent vers une valeur d'opinion commune, certains agents forment des accords locaux. La Figure 2.1 représente un tel phénomène avec un système de dynamique (2.1) et dont la fonction d'influence vaut $f : x \mapsto \exp(-|x|)$.

On distingue trois phases sur cette figure.

- Premièrement une formation rapide de deux accords locaux d'agents. On remarque visuellement pendant cette phase que la taille des deux groupes d'agents diminue jusqu'à ce qu'on ne puisse plus distinguer les agents entre eux. En réalité, dans ce cas, les trajectoires des agents ne se touchent pas. D'autre part, la distance entre les deux groupes est relativement grande et reste sensiblement la même.
- Deuxièmement, on observe une phase de rapprochement lent entre les groupes d'agents. Durant cette phase, les agents d'un groupe ont visuellement des opinions identiques, ils ont en réalité des opinions très proches mais de valeurs différentes. D'autre part, la distance entre les deux groupes est relativement grande et diminue peu.

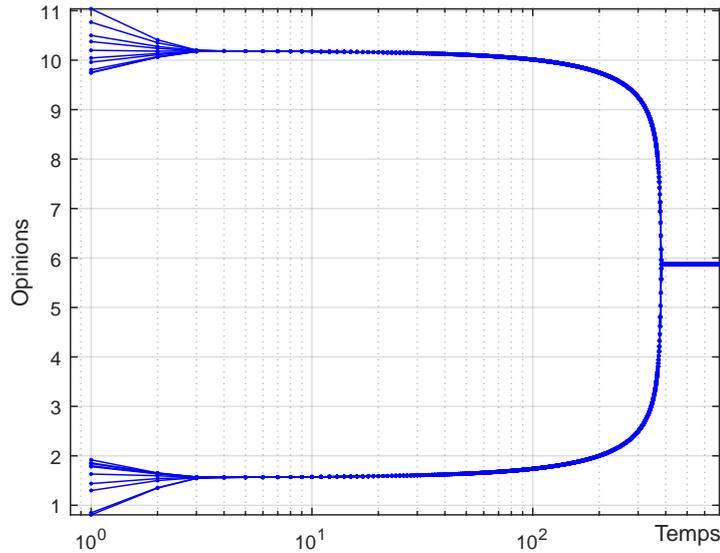


FIGURE 2.1 – Simulation sur 700 itérations d’un système multi-agents muni de la fonction d’influence $f(x) = \exp(-|x|)$ et de 20 agents, dont 10 sont initialement au-dessus de l’opinion 9 et les autres en-dessous de 2. En abscisse, l’échelle des temps est logarithmique.

- Finalement, les deux groupes d’agents se rapprochent de manière abrupte et finissent par se confondre visuellement. Tous les agents restent en réalité disjoints mais convergent asymptotiquement vers le consensus attendu. Le consensus est attendu parce que dans ce cas, la fonction d’influence est à support infini, c’est-à-dire que l’influence entre agents n’est jamais nulle, et ce quelque soit la distance entre les opinions de ces agents.

Afin de mieux caractériser ces comportements, on introduit les deux définitions suivantes, qui définissent deux distances clés pour caractériser le comportement transitoire d’un groupe d’agents et pour permettre de définir par la suite un cluster transitoire en formation.

Dans ce chapitre, notre approche consiste à considérer un groupe d’agents d’opinions consécutives noté $A \subseteq \mathcal{N}$ et défini de manière générique par :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, A = \{i \in \mathcal{N} \mid a \leq x_i \leq b\}, \quad (2.3)$$

cette définition étant précisée Section [2.1.3](#). On souhaite déterminer, à l’aide d’un critère défini par la suite, si le groupe d’agents A est un cluster transitoire en formation ou non. La première définition concerne le diamètre du groupe d’agents A , le groupe candidat à la dénomination cluster transitoire en formation.

Définition 2.1.1. *Le diamètre δ du groupe d’agents A est la distance maximale entre deux agents du groupe A , défini de manière formelle par :*

$$\delta = \max_{(i,j) \in A^2} |x_i - x_j|. \quad (2.4)$$

On introduit ensuite la distance suivante.

Définition 2.1.2. La distance Δ est la distance minimale entre tout agent du groupe A et tous les autres agents du système, soit :

$$\Delta = \min_{i \in A, j \notin A} |x_i - x_j|. \quad (2.5)$$

La figure suivante permet de visualiser les deux définitions précédentes.

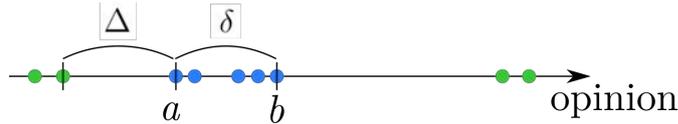


FIGURE 2.2 – Illustration des Définitions 2.1.1 et 2.1.2. Les agents sélectionnés dans le groupe A défini par (2.3) sont en bleu, les autres agents en vert.

La valeur des paramètres δ et Δ , ainsi que leur évolution induite par la dynamique (2.1), vont être des informations précieuses pour caractériser un groupe d'agents consécutifs comme cluster transitoire. À partir de l'intuition de l'exemple représenté Figure 2.1, on peut considérer deux approches différentes pour caractériser le groupe d'agents A comme cluster transitoire.

Une première approche consiste à caractériser le groupe A comme un cluster de manière statique en fonction de valeurs seuils sur les quantités δ et Δ précédemment définies. On dit alors que le groupe d'agent A est un μ - η -cluster transitoire si $\delta \leq \mu$ et si $\Delta \geq \eta$, les valeurs μ et η étant choisies arbitrairement ou avec des données expérimentales selon le domaine d'application. Cette définition ne sera pas retenue pour la suite puisqu'elle soulève la question du choix des valeurs des seuils. Il s'agit ainsi d'un concept statique comme il ne dépend que des valeurs de δ et de Δ et non de leur évolution.

La deuxième approche est dynamique et consiste à considérer l'évolution des quantités δ et Δ entre deux itérations. À partir des précédentes observations, on choisit de définir la période d'existence d'un *cluster transitoire en formation* comme la période pendant laquelle le diamètre δ d'un groupe d'agents diminue plus rapidement que ne diminue la distance Δ entre les deux groupes. Cette définition, présentée de manière formelle Définition 2.1.3, sera retenue pour la suite car elle ne nécessite pas de fixer des valeurs seuils, puisqu'elle considère l'évolution d'une quantité par rapport à l'autre. Elle s'attache également à l'évolution des paramètres δ et Δ , en adéquation avec le terme «en formation». Cependant, les travaux présentés ici pourraient être étendus pour traiter l'approche statique.

Le critère de détection de cluster transitoire en formation présenté dans ce chapitre n'est donc fondé que sur l'évolution dans le temps du couple (δ, Δ) , défini par les Définitions 2.1.1 et 2.1.2. Conformément aux précédentes observations, on dira que le groupe A est un cluster transitoire en formation lorsque ce groupe d'agents voit son diamètre δ décroître plus rapidement que Δ la distance le séparant des autres agents du système. Cela fait l'objet de la définition suivante.

Définition 2.1.3. Soit un groupe d'agents A , ce groupe est un cluster transitoire en formation au temps t si son ratio δ/Δ décroît entre t et $t + 1$, i.e. s'il vérifie :

$$\frac{\delta(t+1)}{\Delta(t+1)} \leq \frac{\delta(t)}{\Delta(t)}. \quad (2.6)$$

Le reste du chapitre est consacré à l'obtention d'une borne supérieure de l'évolution du quotient δ/Δ , présentée Section 2.2.4. Pour cela on obtient dans la Section 2.2.2 une majoration de l'évolution du diamètre δ du groupe et dans la Section 2.2.3 une minoration de l'évolution de la distance Δ entre le groupe et les autres agents. Ces bornes sont obtenues en considérant des scénarios pire-cas, ce qui permet d'obtenir un système pire-cas, présenté Section 2.3, bornant l'évolution du système réel. Une prédiction de la durée pendant laquelle la définition précédente reste valide est alors possible à partir de ce système pire-cas et fait également l'objet de la Section 2.3.

La sous-section suivante est consacrée aux hypothèses faites sur la fonction d'influence des agents du système.

2.1.3 Précision du cadre du problème

Des propriétés supplémentaires de la fonction d'influence sont énoncées dans l'hypothèse qui suit. Afin de simplifier les expressions, on introduit la fonction suivante :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x f(|x|) \end{cases}, \quad (2.7)$$

où f est la fonction d'influence définie par (2.2).

Hypothèse 2.1.4. La fonction d'influence f introduite par (2.2) possède les propriétés suivantes :

1. f est de classe \mathcal{C}^2 ,
2. f est à valeurs positives sur \mathbb{R}^+ et $f(0) > 0$,
3. f est décroissante sur \mathbb{R}^+ ,
4. la fonction $\ln(f)$ est concave sur \mathbb{R}^+ , \ln étant le logarithme naturel.

La fonction h définie par (2.7) possède les propriétés suivantes :

5. il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}^+$ tel que h soit concave sur $[0, \tilde{x}]$ et convexe sur $[\tilde{x}, +\infty)$,
6. la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ est finie,
7. et pour tout $\hat{x} \in \arg \max_{x \in \mathbb{R}^+} h(x)$, on a $h''(\hat{x}) < 0$.

Bien que cette hypothèse soit technique, on donnera par la suite des exemples de fonctions d'influences de la littérature qui la satisfasse.

Le point 1 de l'hypothèse précédente est nécessaire pour l'analyse du système, et permet notamment l'utilisation de développement de Taylor dans les preuves. Remarquons que la fonction d'influence du modèle Hegselmann-Krause, présenté dans [Hegselmann et Krause, 2002], ne satisfait pas le point 1 de l'hypothèse précédente à

cause de sa discontinuité. Cependant, il est possible de construire une suite de fonctions continues vérifiant l'Hypothèse 2.1.4 et se rapprochant arbitrairement de la fonction d'influence du modèle Hegselmann-Krause.

Le point 2 assure que les agents ne se repoussent pas et le point 3 assure que l'influence n'augmente pas avec la distance. Notons que d'après le point 5 de l'hypothèse précédente, \tilde{x} est un point d'inflexion de la fonction h . Le point 6 assure que les maxima de la fonction h sont sur l'intervalle où la fonction h est concave.

Il a été démontré dans [Hendrickx, 2008, Théorème 2] que le point 4 de l'hypothèse précédente assure que l'ordre des agents reste le même au cours du temps. La préservation de l'ordre des agents est énoncée plus formellement de la manière suivante.

Lemme 2.1.5 (Hendrickx, 2008, Théorème 2). *Sous l'Hypothèse 2.1.4, l'ordre des agents du système (2.1) est préservé. C'est-à-dire que pour $\forall (i, j) \in \mathcal{N}^2, x_i \leq x_j \implies x_i^+ \leq x_j^+$.*

On re-numérottera alors les agents de la manière suivante $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, et ce pour le reste de ce chapitre. Comme l'ordre des agents reste inchangé, on peut également préciser la définition du groupe d'agents A introduit Section 2.1.2, groupe dont on souhaite savoir s'il va former un cluster transitoire. Suivant cette renumérotation, comme le groupe A est constitué d'agents d'opinions consécutives, on peut préciser sa définition de la manière suivante :

$$\exists (m, M) \in \mathcal{N}^2, m \leq M, \text{ tels que } A = \{m, \dots, M\}.$$

La Définition 2.1.1 du diamètre δ du groupe A permet alors d'écrire, pour tout temps :

$$\delta = x_M - x_m.$$

Le reste de cette sous-section est consacrée à donner des exemples de fonctions d'influences satisfaisant l'Hypothèse 2.1.4. On donnera ainsi deux exemples de classes de fonctions vérifiant ces hypothèses. Premièrement, la classe des fonctions exponentielles décroissantes définies par :

$$f_{exp}(x) = \exp(-\alpha x) + \beta, \text{ avec } \alpha > 0 \text{ et } \beta \geq 0,$$

vérifie l'Hypothèse 2.1.4 et constitue une classe de fonctions d'influences classique dans la littérature, voir par exemple [Chatterjee et al., 2014].

Une autre classe de fonctions acceptable est celle que nous définissons comme des fonctions d'influences d'Hegselmann-Krause lissées avec un support infini. Comme la fonction échelon d'Hegselmann-Krause n'est pas \mathcal{C}^2 , elle ne vérifie pas le point 1 de l'Hypothèse 2.1.4 à cause de sa discontinuité. On cherche alors à construire une classe de fonctions vérifiant l'Hypothèse 2.1.4 convergeant vers la fonction d'Hegselmann-Krause. Un exemple de suite de fonctions Hegselmann-Krause lissées convergeant vers la fonction d'Hegselmann-Krause est construite en utilisant des sigmoïdes de la manière suivante :

$$f_{GHK}(x) = \frac{1 - \text{sig}(\alpha(x - 1))}{1 - \text{sig}(-\alpha)}, \text{ où } \text{sig}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad (2.8)$$

et où α est un paramètre permettant de contrôler l'atténuation de la pente. La Figure 2.3 représente quelques exemples de fonctions d'influences lissées d'équation (2.8) convergeant vers la fonction d'Hegselmann-Krause avec rayon d'influence de 1. Elle montre

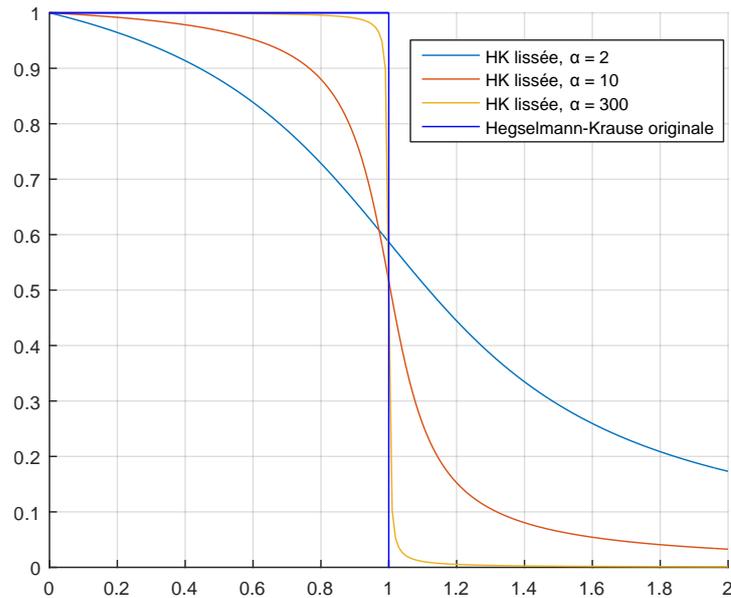


FIGURE 2.3 – Fonctions d’influences Hegselmann-Krause lissées d’équation (2.8) vérifiant l’Hypothèse 2.1.4 ainsi que la fonction Hegselmann-Krause d’origine ne vérifiant pas cette hypothèse.

que plus la valeur du paramètre α est grande, mieux la fonction lissée approche la fonction Hegselmann-Krause d’origine, tout est restant continue et à support infini.

Cette première section a permis de présenter le système ainsi que le problème à traiter. La section suivante est consacrée à des résultats préliminaires pour l’obtention des résultats de ce chapitre.

2.2 Résultats préliminaires

Cette section regroupe des résultats préliminaires à l’obtention des contributions principales de ce chapitre, qui permettent de caractériser un cluster transitoire. La sous-section suivante détaille des propriétés de la fonction h introduite précédemment et liée à la fonction d’influence f des agents.

2.2.1 Propriétés élémentaires

Cette sous-section comprend des propriétés de la fonction h , définie par (2.7), propriétés étant utilisées dans les preuves de ce chapitre.

Lemme 2.2.1. *Sous l’Hypothèse 2.1.4, les propriétés suivantes sont vérifiées pour la fonction h définie par (2.7) :*

- $\arg \max_{x \in \mathbb{R}^+} h(x)$ est un singleton dont l’unique élément est noté \hat{x} ,
- h est croissante sur $[0, \hat{x}]$ et décroissante sur $[\hat{x}, +\infty)$.

Preuve D'après le point 5 de l'Hypothèse 2.1.4, la fonction h est convexe sur l'intervalle $[\tilde{x}, +\infty)$. Montrons que la fonction h est décroissante sur le même intervalle. Raisonnons par l'absurde. Il existe alors $(x, y) \in [\tilde{x}, +\infty)^2$ avec $x < y$ tel que $h(x) < h(y)$. D'après le théorème des accroissement finis, il existe $z \in [\tilde{x}, +\infty)$ tel que $h'(z) > 0$. Comme la fonction h est convexe sur cet intervalle, le graphe de h reste au-dessus de ses tangentes. Par conséquent, la fonction h divergerait si elle n'était pas décroissante.

Puis, comme la fonction h est décroissante sur $[\tilde{x}, +\infty)$, on en déduit que tous les éléments de $\arg \max_{x \in \mathbb{R}^+} h(x)$ sont dans $[0, \tilde{x}]$. Prenons $\hat{x} \in \arg \max_{x \in \mathbb{R}^+} h(x)$ et montrons qu'il est unique. Par concavité de la fonction h sur $[0, \tilde{x}]$, la fonction h' est décroissante sur le même intervalle. Comme $h'(\hat{x}) = 0$, h' est positive ou nulle sur $[0, \hat{x}]$ négative ou nulle sur $[\hat{x}, \tilde{x}]$. Cela implique que la fonction h est croissante sur $[0, \hat{x}]$ et décroissante sur $[\hat{x}, \tilde{x}]$. La fonction h est donc croissante sur $[0, \hat{x}]$ et décroissante sur $[\hat{x}, +\infty)$.

D'après le point 1 de l'Hypothèse 2.1.4, la fonction h est de classe \mathcal{C}^2 . Son développement de Taylor à l'ordre deux en \hat{x} est alors :

$$h(x) = h(\hat{x}) + \frac{(x - \hat{x})^2}{2} h''(\hat{x}) + o((x - \hat{x})^2),$$

où le terme du premier ordre est nul puisque, par définition, \hat{x} est un extremum de la fonction h , donc $h'(\hat{x}) = 0$. En divisant l'équation précédente par $(x - \hat{x})^2$, on obtient, pour $x \neq \hat{x}$:

$$\frac{h(x) - h(\hat{x})}{(x - \hat{x})^2} = \frac{h''(\hat{x})}{2} + o(1).$$

Soit $\alpha = -\frac{1}{4}h''(\hat{x})$. D'après le point 7 de l'Hypothèse 2.1.4, $h''(\hat{x}) < 0$ et on a $\alpha > 0$. Étant donné la définition de $o(1)$ il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in [\hat{x} - \eta, \hat{x} + \eta] \setminus \{\hat{x}\}$ on ait :

$$\frac{h(x) - h(\hat{x})}{(x - \hat{x})^2} \leq \frac{h''(\hat{x})}{2} - \alpha = \frac{h''(\hat{x})}{4} < 0,$$

et ce grâce au point 7 de l'Hypothèse 2.1.4. En conséquence :

$$\forall x \in [\hat{x} - \eta, \hat{x} + \eta] \setminus \{\hat{x}\}, h(x) < h(\hat{x}). \quad (2.9)$$

Comme h est croissante sur $[0, \hat{x}]$ et décroissante sur $[\hat{x}, +\infty)$, en utilisant l'équation (2.9), on obtient que :

$$\forall x \in [0, \tilde{x}] \setminus \{\hat{x}\}, h(x) < h(\hat{x}),$$

ce qui termine la démonstration. ■

Cette sous-section a détaillé des propriétés supplémentaires de la fonction d'influence qui seront utilisées par la suite. La sous-section suivante présente une majoration de l'évolution du diamètre d'un groupe d'agents au cours du temps.

2.2.2 Majoration de l'évolution du diamètre d'un groupe

Cette sous-section est consacrée à l'obtention d'une borne supérieure sur l'évolution du diamètre δ d'un groupe d'agents entre deux itérations. Cette borne fait l'objet de la proposition suivante et est le minimum de deux bornes obtenues par des approches différentes.

Proposition 2.2.2. *Sous l'Hypothèse 2.1.4 et pour un groupe d'agents A défini Section 2.1.2 et tel que $\Delta \geq \tilde{x}$, on a la majoration suivante de l'évolution du diamètre δ du groupe d'agent A :*

$$\delta^+ \leq \mu(\delta, \Delta) \delta, \quad (2.10)$$

où le coefficient de proportionnalité $\mu(\delta, \Delta)$ est défini par :

$$\mu(\delta, \Delta) = 1 - \frac{|A| f(\delta)}{s_A(\delta, \Delta)} + \frac{(n - |A|)}{s_B(\delta, \Delta)} \mu_B(\delta, \Delta), \quad (2.11)$$

avec les dénominateurs suivants qui représentent des pire-cas :

$$s_A(\delta, \Delta) = f(\delta) + (|A| - 1)f(0) + (n - |A|) f(\Delta), \quad (2.12)$$

$$s_B(\delta, \Delta) = f(0) + (|A| - 1)f(\delta) + f(\Delta), \quad (2.13)$$

et la quantité qui donne une borne sur l'influence des agents non dans A :

$$\mu_B(\delta, \Delta) = \frac{1}{\delta} \left(h(\Delta) + \min\{M(\delta, \Delta) h(\Delta) - h(\Delta + \delta), 0\} \right), \quad (2.14)$$

qui permet une majoration plus fine grâce au terme :

$$M(\delta, \Delta) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0(\delta, \Delta)}{(s_B(\delta, \Delta) - \varepsilon_0(\delta, \Delta))} & \text{si } \varepsilon_0(\delta, \Delta) \leq \frac{s_B(\delta, \Delta)}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (2.15)$$

où la quantité :

$$\varepsilon_0(\delta, \Delta) = \delta \left(|A| \max_{[0, \delta]} |f'| + (n - |A|) \max_{[\Delta, +\infty)} |f'| \right). \quad (2.16)$$

est une majoration des dénominateurs présents dans l'expression de δ^+ .

La quantité μ donnée dans la proposition précédente est calculable à partir des seules variables δ , Δ , du nombre d'agents dans le groupe considéré et de la fonction d'influence f . Le résultat précédent est interprété de la manière suivante : si le calcul de $\mu(\delta, \Delta)$ donne une valeur plus petite que 1, alors le groupe d'agents se contracte entre deux itérations, c'est-à-dire que son diamètre décroît.

Preuve Voir Annexe 2.A à la fin du chapitre. ■

Cette sous-section a traité de l'obtention d'une majoration de l'évolution du diamètre d'un groupe d'agents. La sous-section suivante propose une minoration de l'évolution de la distance minimale entre un groupe d'agents et le reste des agents du système.

2.2.3 Minoration de l'évolution de la distance entre groupes

Cette sous-section présente une minoration de l'évolution de la distance Δ définie par (2.5) comme étant la distance minimale entre les agents d'un groupe et le reste des agents. Cette minoration est présentée dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.3. *Sous l'Hypothèse 2.1.4 et pour Δ grand tel que $\Delta \geq \hat{x}$, on a la minoration suivante de la distance entre le groupe d'agents A , défini Section 2.1.2, et le reste des agents :*

$$\Delta^+ \geq \eta(\delta, \Delta) \Delta, \quad (2.17)$$

avec le coefficient de proportionnalité :

$$\eta(\delta, \Delta) = 1 - |A| \eta_A(\delta, \Delta) - (n - |A|) \eta_B(\delta, \Delta), \quad (2.18)$$

où l'influence des agents du groupe A sur l'évolution de Δ est bornée par :

$$\eta_A(\delta, \Delta) = \frac{h(\Delta)}{\sigma_B(\delta, \Delta)}, \quad (2.19)$$

et l'influence du reste des agents par :

$$\eta_B(\delta, \Delta) = \frac{1}{\Delta} \max \left\{ \frac{h(\Delta)}{\sigma_A(\delta, \Delta)}, \frac{h(2\Delta + \delta)}{\sigma_B(\delta, \Delta)} \right\}, \quad (2.20)$$

avec les bornes suivantes sur les dénominateurs, obtenues en considérant des pire-cas :

$$\sigma_A(\delta, \Delta) = f(0) + (|A| - 1) f(\delta) + f(\Delta), \quad (2.21)$$

$$\sigma_B(\delta, \Delta) = f(0) + f(\Delta) + (|A| - 1) f(\delta + \Delta). \quad (2.22)$$

Tout comme la majoration sur δ^+ donnée par la Proposition 2.2.2, cette minoration ne nécessite que des paramètres du groupe A (distances δ et Δ et cardinalités) et de la fonction d'influence f pour être calculée .

Preuve Voir Annexe 2.B à la fin du chapitre. ■

Cette sous-section a présenté la minoration obtenue sur l'évolution de la distance d'un groupe d'agents avec le reste des agents du système. En combinant les résultats des Propositions 2.2.2 et 2.2.3, on obtient un critère de détection d'un cluster transitoire, critère faisant l'objet de la sous section suivante.

2.2.4 Critère de détection d'un cluster transitoire

Cette sous-section traite de l'obtention du critère de détection d'un cluster transitoire en formation présenté dans la Définition 2.1.3. En combinant la majoration sur δ^+ et la minoration sur Δ^+ obtenues précédemment, on obtient une majoration du quotient de ces deux quantités. Ce résultat fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.2.4. *Sous l'Hypothèse [2.1.4](#) et pour $\Delta \geq \tilde{x}$, les Propositions [2.2.2](#) et [2.2.3](#) s'appliquent et on a :*

$$\frac{\delta^+}{\Delta^+} \leq \rho(\delta, \Delta) \frac{\delta}{\Delta}, \text{ où } \rho(\delta, \Delta) = \frac{\mu(\delta, \Delta)}{\eta(\delta, \Delta)}. \quad (2.23)$$

Suivant la définition d'un cluster transitoire en formation donnée par la Définition [2.1.3](#), si un groupe d'agents A vérifie $\rho(\delta, \Delta) \leq 1$, alors il est considéré comme un cluster transitoire en formation. Dans le cas contraire, il n'est pas possible de conclure.

Cette section a permis d'expliciter le critère permettant la détection d'un groupe d'agents formant un cluster transitoire. La section suivante s'attachera à donner des éléments pour prédire pendant combien d'itérations ce critère reste vérifié.

2.3 Prédiction de la durée d'un cluster transitoire

Cette section est consacrée à la présentation du résultat principal de ce chapitre qui permet de prédire pendant combien d'itérations un groupe d'agents va respecter la définition d'un cluster transitoire en formation. Introduisons tout d'abord quelques notations permettant de simplifier l'énonciation du résultat.

Premièrement, on définit le domaine \mathcal{D} du plan (δ, Δ) dans lequel la quantité $\rho(\delta, \Delta)$ introduite Proposition [2.2.4](#) est plus petite que un. Cela signifie que le diamètre du groupe d'agents considéré diminue plus rapidement que la distance entre le groupe d'agents et le reste des agents. Ce domaine est défini de manière formelle de la façon suivante :

$$\mathcal{D} = \{(\delta, \Delta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid \rho(\delta, \Delta) \leq 1\}, \quad (2.24)$$

où $\rho(\delta, \Delta)$ est défini par [\(2.23\)](#). À partir des bornes présentées dans les Propositions [2.2.2](#) et [2.2.3](#), on construit également une fonction pire-cas notée W pour traduire l'évolution combinée du diamètre δ et de la distance Δ dans le plan (δ, Δ) . Cette fonction pire-cas est donnée par :

$$W = \begin{cases} (\mathbb{R}^+)^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\delta, \Delta) & \mapsto (\mu(\delta, \Delta) \delta, \eta(\delta, \Delta) \Delta) \end{cases}. \quad (2.25)$$

Comme le domaine \mathcal{D} à lui seul ne fournit pas suffisamment d'informations sur la durée d'un cluster transitoire, on définit alors une suite de domaines \mathcal{D}_τ , $\tau \in \mathbb{N}$. Cela afin d'obtenir des minorants du nombre d'itérations ou durée pendant lesquelles le critère $\rho(\delta, \Delta) \leq 1$ est valide pour un groupe d'agent A donné. La suite de domaines \mathcal{D}_τ est décroissante au sens de l'inclusion et est initialisée telle que :

$$\mathcal{D}_0 = \{(\delta_w, \Delta_w) \in \mathcal{D} \mid [0, \delta_w] \times [\Delta_w, +\infty) \subseteq \mathcal{D}\}, \quad (2.26)$$

et construite de manière itérative telle que :

$$\mathcal{D}_{\tau+1} = \{(\delta_w, \Delta_w) \in \mathcal{D}_\tau \cap W^{-1}(\mathcal{D}_\tau) \mid [0, \delta_w] \times [\Delta_w, +\infty) \subseteq \mathcal{D}_\tau \cap W^{-1}(\mathcal{D}_\tau)\}, \quad (2.27)$$

avec :

$$W^{-1}(\mathcal{D}_\tau) = \{(\delta, \Delta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid W(\delta, \Delta) \in \mathcal{D}_\tau\},$$

l'image inverse du domaine \mathcal{D}_τ par la fonction W . La suite de domaines \mathcal{D}_τ est représentée, dans un cas particulier, sur la Figure [2.4](#) dans la Section [2.4](#). Cette définition

de \mathcal{D}_τ permet de montrer que quand $W(\delta, \Delta) \in \mathcal{D}_\tau$ alors $(\delta^+, \Delta^+) \in \mathcal{D}_\tau$, et ce en utilisant les Propositions 2.2.2 et 2.2.3. En itérant cette propriété pour chaque instant, on démontre le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. *Soit un groupe d'agents A tel que $(\delta(0), \Delta(0)) \in \mathcal{D}_T$, pour $T \in \mathbb{N}$ et \mathcal{D}_T défini par (2.27), alors on a :*

$$\forall t \in \{0, \dots, T\}, \frac{\delta(t+1)}{\Delta(t+1)} \leq \frac{\delta(t)}{\Delta(t)}, \quad (2.28)$$

En d'autres termes et selon la Définition 2.1.3, le groupe A est un cluster transitoire en formation pendant au moins T itérations.

Preuve En utilisant la Proposition 2.2.4 et la définition du domaine \mathcal{D} donnée par (2.24), l'équation (2.28) est une conséquence de :

$$\forall t \in \{0, \dots, T\}, (\delta(t), \Delta(t)) \in \mathcal{D}.$$

Au lieu de démontrer la précédente équation, montrons plutôt que pour $t \in \{0, \dots, T\}$, $(\delta(t), \Delta(t)) \in \mathcal{D}_{T-t}$. Pour ce faire, raisonnons par récurrence. L'initialisation est évidente parce que si $(\delta(0), \Delta(0)) \in \mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}$ alors l'inégalité (2.28) est vérifiée pour $t = 0$. Prouvons l'hérédité en prenant $t \in \{0, \dots, T-1\}$ et en supposant $(\delta(t), \Delta(t)) \in \mathcal{D}_{T-t}$, on a alors :

$$W(\delta(t), \Delta(t)) = (\delta_w(t+1), \Delta_w(t+1)) \in \mathcal{D}_{T-t-1},$$

où :

$$\begin{aligned} \delta_w(t+1) &= \mu(\delta(t), \Delta(t)) \delta(t), \\ \Delta_w(t+1) &= \eta(\delta(t), \Delta(t)) \Delta(t). \end{aligned}$$

D'après les Propositions 2.2.2 and 2.2.3, on a :

$$\begin{aligned} \delta(t+1) &\leq \delta_w(t+1), \\ \Delta(t+1) &\geq \Delta_w(t+1), \end{aligned}$$

ce qui, par définition de \mathcal{D}_{T-t-1} , assure que :

$$(\delta(t+1), \Delta(t+1)) \in \mathcal{D}_{T-t-1},$$

achevant ainsi la démonstration du théorème. ■

Le théorème précédent permet alors de détecter si un groupe d'agents est un cluster transitoire en formation et de prédire pour combien d'itérations il le restera, potentiellement avant que d'autres agents ne se rapprochent trop.

Cette section a donc permis de présenter le résultat principal de ce chapitre, à savoir la prédiction du nombre d'itérations pendant lesquelles un groupe d'agents vérifie notre critère de cluster transitoire en formation. La section suivante illustre les résultats de ce chapitre au moyen de simulations numériques.

2.4 Illustrations

Cette section présente des simulations numériques permettant d'illustrer les résultats de ce chapitre.

Le système multi-agents considéré a pour dynamique (2.1) et possède les caractéristiques suivantes. La fonction d'influence du système est choisie telle que $f = x \mapsto \exp(-|x|)$. Le nombre d'agents du système est fixé à $n = 30$. Le groupe candidat, dénoté A et composé de 10 agents ($|A| = 10$) est le groupe d'agents dont on souhaite savoir s'il vérifie la définition d'un cluster transitoire en formation ou non, et si oui pendant combien d'itérations. À partir de ces seules données, il est possible de calculer (et de représenter) les domaines \mathcal{D} et \mathcal{D}_0 à \mathcal{D}_{10} tels que définis par les équations (2.24), (2.26) et (2.27). Ces différents domaines sont représentés Figure 2.4.

Considérons maintenant le système précédemment décrit avec deux conditions initiales différentes. Dans un premier cas, le groupe d'agent noté A a des conditions initiales dans le domaine \mathcal{D} . Dans l'autre cas, le groupe noté A' a des conditions initiales hors du domaines \mathcal{D} . Les groupes A et A' sont chacun composés de 10 agents initialement placés en deux points de telle sorte que $\delta(0) = 1.5$ pour le groupe A et $\delta(0) = 2.5$ pour le groupe A' . On place ensuite les agents restant en un point de telle sorte à avoir $\Delta(0) = 5.7$ pour le groupe A et $\Delta(0) = 3.5$ pour A' . Les conditions initiales précédemment décrites sont représentées par des carrés pleins sur la Figure 2.4. L'évolution temporelle des opinions des agents de ces deux jeux de conditions initiales est représentée sur les Figures 2.5 et 2.6. Ces trajectoires sont également représentées dans le plan (δ, Δ) sur la Figure 2.4.

La première observation est que le groupe noté A forme un cluster transitoire pendant un certain nombre d'itérations. Au contraire, le groupe A' ne forme pas de cluster transitoire. Plus précisément, on remarque que sur la Figure 2.5, le groupe A se contracte rapidement pour former un cluster transitoire. Ce cluster transitoire fusionnera avec le reste des agents au bout d'un nombre élevé d'itérations. A contrario, la Figure 2.6 montre que le groupe A' ne forme pas de cluster transitoire, même si initialement $\delta(0) < \Delta(0)$. Ceci illustre le fait qu'avoir un diamètre δ plus petit que la distance Δ ne constitue pas un critère de détection d'un cluster transitoire.

Par ailleurs, on a initialement $(\delta(0), \Delta(0)) \in \mathcal{D}_3$ pour le groupe A . D'après le Théorème 2.3.1, on sait que le groupe A formera un cluster transitoire pendant au moins trois itérations. Ce résultat est conservatif au vu de l'évolution du groupe A dans le domaine \mathcal{D} . Ceci s'explique par la considération de pire-cas disjoints pour l'obtention du Théorème 2.3.1. Au temps $t = 3$, la distance $\Delta(3) > \Delta(0)$ pour le groupe A et le couple $(\delta(3), \Delta(3)) \in \mathcal{D}_9$. Par conséquent, le Théorème 2.3.1 assure désormais que le groupe A formera un cluster transitoire pendant au moins 9 itérations après le temps $t = 3$.

Contrairement au groupe A , la dynamique du groupe A' ne présente pas de cluster transitoire. Ceci est cohérent avec le fait que pour tout $t \geq 0$ on ait $(\delta(t), \Delta(t)) \notin \mathcal{D}$. Cela souligne l'importance d'avoir un critère formel pour la détection de clusters transitoires.

Cette section a permis d'illustrer les résultats obtenus dans ce chapitre et de donner un exemple de détection cluster transitoire ainsi que de prédiction de durée de formation d'un cluster transitoire. La section suivante conclura ce chapitre.

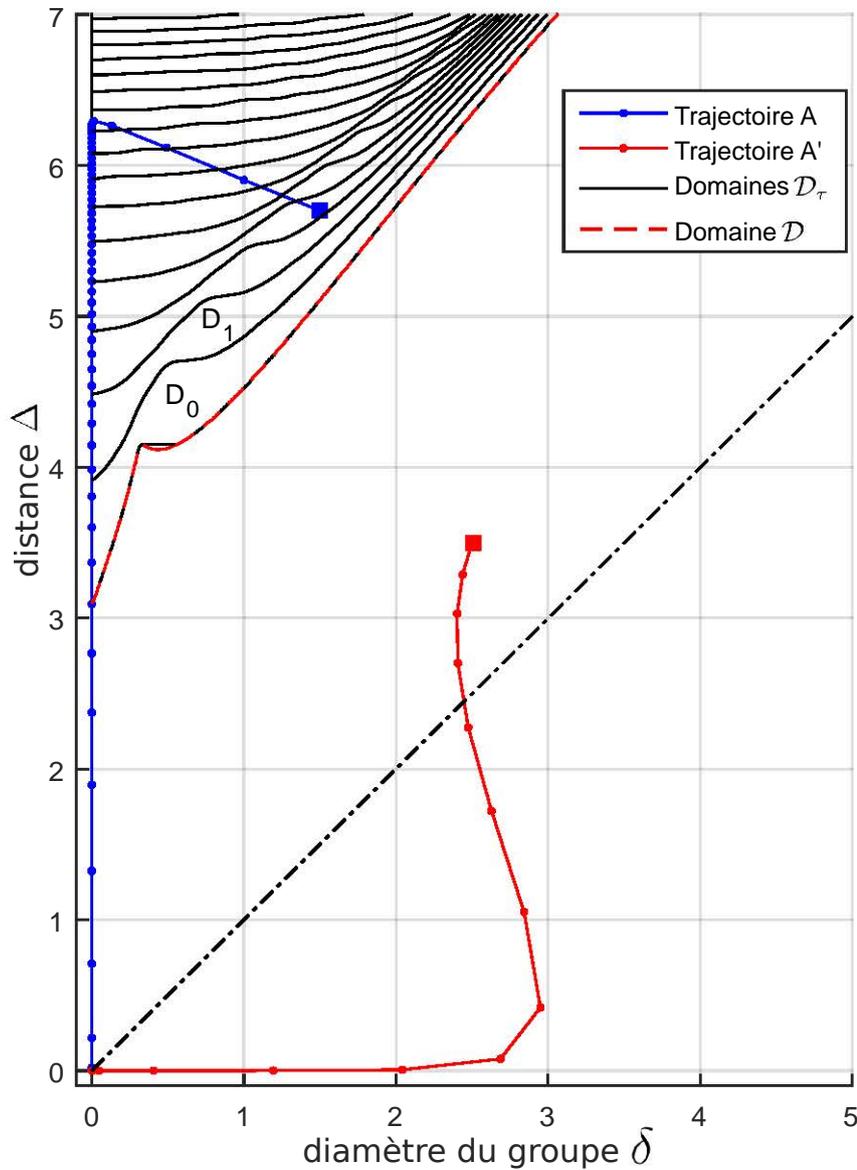


FIGURE 2.4 – Dans le plan (δ, Δ) , trajectoires des groupes A et A' composés de 10 agents dans des systèmes à 30 agents, dont les évolutions temporelles des opinions sont représentées Figures 2.5 et 2.6. La trajectoire du groupe A est représentée en bleue et celle du groupe A' en rouge. Le carré de couleur bleue (respectivement rouge) correspond au point initial $(\delta(0), \Delta(0))$ du groupe A (respectivement A'). Les points le long des trajectoires représentent la valeur à l'itération t du couple $(\delta(t), \Delta(t))$. Les limites du domaine \mathcal{D} sont représentées en tirets rouges et les limites basses des domaines \mathcal{D}_τ par des lignes noires. Pour rappel on a $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{D}_0 \supseteq \mathcal{D}_1 \dots \supseteq \mathcal{D}_{10}$. La droite pointillée noire est la première bissectrice.

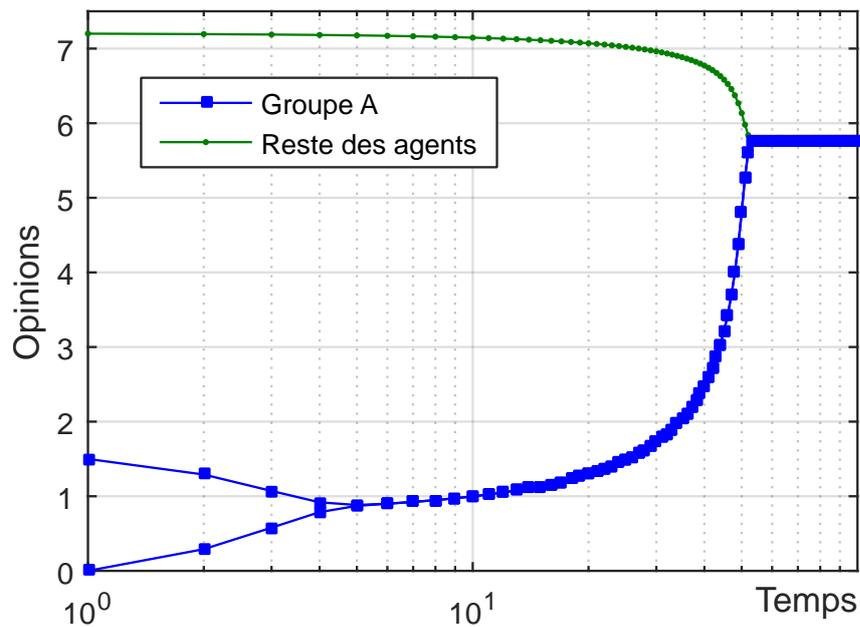


FIGURE 2.5 – Évolution d’un système à $n = 30$ agents doté d’une fonction d’influence $f(x) = \exp(-|x|)$. Le groupe d’agents A en bleu est composé de 10 agents, dont 5 sont initialement en 0 et les autres en 1.5. Le reste des agents sont représentés en vert et ont une opinion initiale de 7.2. À noter que l’échelle des temps est logarithmique.

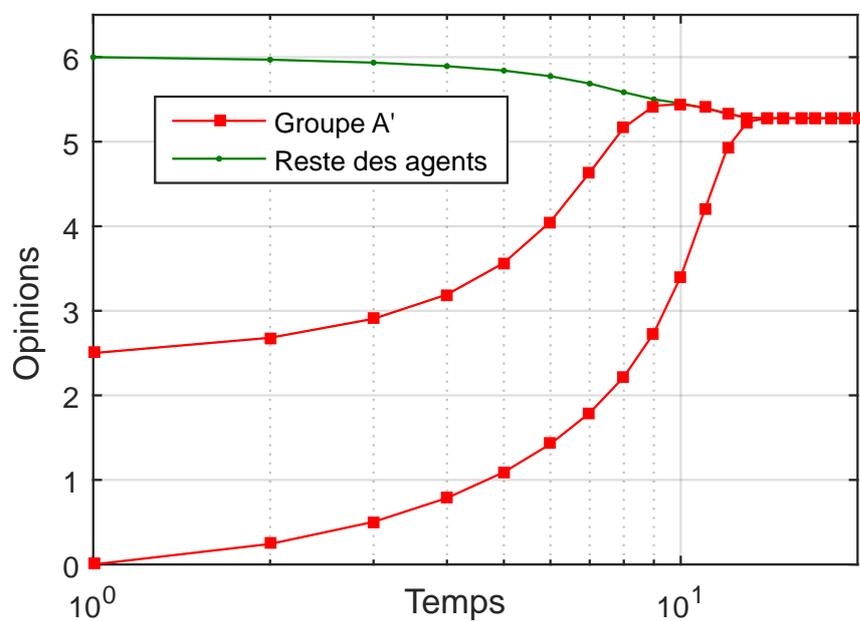


FIGURE 2.6 – Évolution d’un système à $n = 30$ agents doté d’une fonction d’influence $f(x) = \exp(-|x|)$. Le groupe d’agents A' en rouge est composé de 10 agents, dont 5 sont initialement en 0 et les autres en 2.5. Le reste des agents sont représentés en vert et ont une opinion initiale de 6. À noter que l’échelle des temps est logarithmique.

2.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a été consacré à la présentation des contributions sur l'analyse de systèmes de dynamiques d'opinions à temps discret autonomes, en privilégiant l'aspect transitoire pour compléter la connaissance du comportement de ces systèmes. Un critère facilement calculable, à partir d'un faible nombre de paramètres, permettant de détecter si un groupe d'agents forme un cluster transitoire a été proposé afin de répondre à la problématique posée. De plus, une méthode a été proposée afin de prédire pendant combien de temps ce critère reste valide, permettant de prédire la durée de formation d'un cluster transitoire, avant sa fusion potentielle avec d'autres agents. Ces résultats ont finalement été illustrés par des simulations numériques.

De multiples pistes de recherche supplémentaires s'ouvrent alors. On peut notamment se demander si d'autres approches que celle proposée dans ce chapitre permettent de caractériser un cluster transitoire. Pour des systèmes à grand nombre d'agents, où il y aurait potentiellement plusieurs clusters transitoires simultanément, on peut s'interroger sur de possibles imbrications de clusters les uns dans les autres et sur les propriétés de ces clusters imbriqués. Le problème de contrôle de ces systèmes survient naturellement lorsque l'on cherche à modifier le comportement du système en exerçant un contrôle sur un ou plusieurs agents afin de réaliser certains objectifs, comme favoriser le consensus ou la formation de cluster.

Le contrôle de systèmes de dynamique d'opinion est traité dans la suite de ce manuscrit. On cherchera, via l'introduction d'un leader, à faire converger tous les agents vers le consensus. Ce problème fait l'objet du chapitre suivant.

2.6 Annexe 2.A : Preuve de la Proposition 2.2.2

On détaillera dans un premier temps l'expression de δ^+ , le diamètre du groupe A à l'instant suivant. On découpe la somme globale de l'expression de δ^+ en trois parties : une pour le groupe A , une pour les agents ayant une opinion inférieure (respectivement supérieure) à celle des agents du groupe A et inclus dans un groupe noté B_1 (respectivement B_2). En reprenant la notation $A = \{m, \dots, M\}$ avec $(m, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $B_1 = \{1, \dots, m - 1\}$ et $B_2 = \{M + 1, \dots, n\}$. En utilisant la définition de δ donnée Définition 2.1.1, on a alors :

$$\delta^+ = x_M^+ - x_m^+,$$

où les expressions de x_M^+ et x_m^+ sont obtenues à partir de la dynamique (2.1). On regroupe ensuite les termes de l'équation précédente de la manière suivante :

$$\delta^+ = \delta - d_A + d_B,$$

où la somme :

$$d_A = \sum_{i \in A} \left(\frac{h(x_M - x_i)}{\sigma_M} + \frac{h(x_i - x_m)}{\sigma_m} \right),$$

représente l'influence des agents du groupe A sur l'évolution du diamètre de ce même groupe. On note $d_B = d_{B_1} + d_{B_2}$ l'influence des agents qui ne sont pas dans A sur l'évolution du diamètre du groupe A , où :

$$d_{B_1} = \sum_{i \in B_1} \left(\frac{h(x_m - x_i)}{\sigma_m} - \frac{h(x_M - x_i)}{\sigma_M} \right), \quad (2.29)$$

représente l'influence des agents non dans A ayant des opinions de valeurs supérieures aux opinions des agents de A et où :

$$d_{B_2} = \sum_{i \in B_2} \left(\frac{h(x_i - x_M)}{\sigma_M} - \frac{h(x_i - x_m)}{\sigma_m} \right), \quad (2.30)$$

représente l'influence des agents non dans A ayant des opinions de valeurs inférieures aux opinions des agents de A . On a simplifié les expressions en adoptant la notation suivante pour les dénominateurs, avec $i \in \mathcal{N}$:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^N f(|x_i - x_j|). \quad (2.31)$$

Afin d'obtenir une majoration de δ^+ , on cherche séparément des bornes sur les quantités d_A et d_B . Tout d'abord, remarquons que les quantités s_A et s_B définies respectivement par (2.12) et (2.13) vérifient les relations suivantes :

$$s_A(\delta, \Delta) \geq \max\{\sigma_m, \sigma_M\} \text{ et } s_B(\delta, \Delta) \leq \min\{\sigma_m, \sigma_M\},$$

où σ_i est défini par (2.31). Ces deux relations définissent des bornes sur les dénominateurs des quantités d_A et d_B . Afin d'obtenir une borne inférieure sur d_A , remarquons que pour un agent $i \in A$ on a :

$$x_M - x_i \leq \delta \text{ et } x_i - x_m \leq \delta.$$

D'après le point 3 de l'Hypothèse [2.1.4](#), la fonction d'influence f est décroissante sur \mathbb{R}^+ et donc :

$$f(x_M - x_i) \geq f(\delta) \text{ et } f(x_i - x_m) \geq f(\delta).$$

En multipliant les équations précédentes par $(x_M - x_i)$ et $(x_i - x_m)$ respectivement et en se rappelant que $h : x \mapsto x f(|x|)$, on obtient :

$$h(x_M - x_i) \geq (x_M - x_i)f(\delta) \text{ et } h(x_i - x_m) \geq (x_i - x_m)f(\delta).$$

En sommant les deux équations précédentes on obtient :

$$h(x_M - x_i) + h(x_i - x_m) \geq h(\delta),$$

ce qui nous permet de minorer d_A de la manière suivante :

$$d_A \geq \frac{|A| h(\delta)}{s_A(\delta, \Delta)},$$

terme que l'on retrouve dans l'expression de $\mu(\delta, \Delta)$ donnée par [\(2.11\)](#).

La borne suivante est proposée pour la quantité $d_B = d_{B_1} + d_{B_2}$:

$$d_B \leq (n - |A|) \left(\max_{u \in J} \frac{h(u)}{s_B(\delta, \Delta)} - \min_{u \in J} \frac{h(u + \delta)}{s_A(\delta, \Delta)} \right), \quad (2.32)$$

où $J = [\Delta, +\infty)$ et obtenue en réécrivant les quantités d_{B_1} et d_{B_2} données respectivement par [\(2.29\)](#) et [\(2.30\)](#) telles que :

$$d_{B_1} = \sum_{i \in B_1} \left(\frac{h(v_i)}{\sigma_m} - \frac{h(v_i + \delta)}{\sigma_M} \right),$$

avec $v_i = x_m - x_i$ pour $i \in \mathcal{N}$ et :

$$d_{B_2} = \sum_{i \in B_2} \left(\frac{h(w_i)}{\sigma_M} - \frac{h(w_i + \delta)}{\sigma_m} \right),$$

avec $w_i = x_i - x_m$ pour $i \in \mathcal{N}$. D'après le Lemme [2.2.1](#) sur les propriétés de la fonction h , pour $\Delta \geq \hat{x}$ on a ensuite :

$$\max_{u \in J} h(u) = h(\Delta),$$

et :

$$\inf_{u \in J} h(u + \delta) = 0.$$

L'équation [\(2.32\)](#) précédente devient alors :

$$d_B \leq (n - |A|) \frac{h(\Delta)}{s_B(\delta, \Delta)},$$

ce qui permet d'obtenir une première partie $\frac{1}{\delta} h(\Delta)$ de l'expression de $\mu_B(\delta, \Delta)$ donnée [\(2.14\)](#).

Comme la minoration $\inf_{u \in J} h(u + \delta) = 0$ est grossière, on cherche une minoration plus fine en introduisant la quantité Q_j pour $j \in B_1$, sachant que le raisonnement est le même pour B_2 , telle que :

$$Q_j = \frac{h(x_m - x_j)}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{h(x_M - x_j)}{\sigma_M},$$

où $\varepsilon = \sigma_m - \sigma_M$. Cette équation peut se réécrire comme la somme de deux termes :

$$Q_j = \frac{1}{\sigma_M} \left(h(x_m - x_j) - h(x_M - x_j) \right) + \left(\frac{1}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{1}{\sigma_M} \right) h(x_m - x_j).$$

Pour majorer d_B , on doit alors majorer la quantité Q_j pour un agent $j \in B_1$.

Premièrement, supposons $\Delta \geq \tilde{x}$, avec \tilde{x} le point d'inflexion de la fonction h défini dans le point 5 de l'Hypothèse 2.1.4. Soit $j \in B_1$, on a alors :

$$x_m - x_j \geq \Delta, \text{ et } x_M - x_j \geq \Delta + \delta.$$

D'après le point 5 de l'Hypothèse 2.1.4, la fonction h est convexe sur $[\tilde{x}, +\infty)$, ce qui implique que sa dérivée première h' est croissante, d'où :

$$h'(x_m - x_j) - h'(x_M - x_j) \leq 0.$$

Ce qui signifie que la fonction $u \mapsto h'(u) - h'(u + \delta)$ est décroissante sur l'intervalle $[\tilde{x}, +\infty)$, ce qui permet l'obtention de la borne supérieure suivante :

$$h(x_m - x_j) - h(x_M - x_j) \leq h(\Delta) - h(\Delta + \delta).$$

On obtient donc la majoration du premier terme de Q_j suivante :

$$\frac{1}{\sigma_M} \left(h(x_m - x_j) - h(x_M - x_j) \right) \leq \frac{1}{\sigma_M} \left(h(\Delta) - h(\Delta + \delta) \right).$$

Deuxièmement, sous l'hypothèse $\Delta \geq \hat{x}$ et d'après le Lemme 2.2.1, pour $j \in B_1$, on a $x_m - x_j \geq \Delta$ et donc $h(x_m - x_j) \leq h(\Delta)$. Cela permet d'obtenir une première majoration du second terme de la quantité Q_j :

$$\left(\frac{1}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{1}{\sigma_M} \right) h(x_m - x_j) \leq \left(\frac{1}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{1}{\sigma_M} \right) h(\Delta).$$

Pour conclure, il reste à trouver une borne supérieure de la quantité $\left(\frac{1}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{1}{\sigma_M} \right)$. Pour ce faire, on trouve une borne de la valeur absolue de ε , la quantité ε étant définie par :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n f(|x_i - x_m|) - f(|x_i - x_M|).$$

En utilisant ensuite l'inégalité triangulaire on obtient :

$$|\varepsilon| = \left| \sum_{i=1}^n f(|x_i - x_m|) - f(|x_i - x_M|) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| f(|x_i - x_m|) - f(|x_i - x_M|) \right|.$$

En découpant la somme obtenue en deux, suivant les groupes d'agents A et B on a :

$$\sum_{i=1}^n \left| f(|x_i - x_m|) - f(|x_i - x_M|) \right| = \sum_{i \in A} \left| f(|x_i - x_m|) - f(|x_i - x_M|) \right| + \sum_{i \in B} \left| f(|x_i - x_m|) - f(|x_i - x_M|) \right|$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis on obtient pour $i \in A$:

$$\left| f(|x_i - x_m|) - f(|x_i - x_M|) \right| \leq |x_M - x_m| \max_{[0, \delta]} |f'| = \delta \max_{[0, \delta]} |f'|,$$

et pour $i \in B$:

$$\left| f(|x_i - x_m|) - f(|x_i - x_M|) \right| \leq |x_M - x_m| \max_{[\Delta, +\infty)} |f'| = \delta \max_{[\Delta, +\infty)} |f'|.$$

La quantité $|\varepsilon|$ peut alors être majorée par :

$$|\varepsilon| \leq \delta \left(|A| \max_{[0, \delta]} |f'| + (n - |A|) \max_{[\Delta, +\infty)} |f'| \right) = \varepsilon_0(\delta, \Delta).$$

Le membre de droite de l'équation précédente correspond à la définition de $\varepsilon_0(\delta, \Delta)$ donnée par (2.16). Montrons finalement que :

$$\left(\frac{1}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{1}{\sigma_M} \right) \leq \frac{M(\delta, \Delta)}{s_B(\delta, \Delta)},$$

où $M(\delta, \Delta)$ est défini par (2.15) comme :

$$M(\delta, \Delta) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0(\delta, \Delta)}{(s_B(\delta, \Delta) - \varepsilon_0(\delta, \Delta))} & , \text{ si } \varepsilon_0(\delta, \Delta) \leq \frac{s_B(\delta, \Delta)}{2}, \\ 1 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le deuxième cas dans la définition de $M(\delta, \Delta)$ qui précède est obtenu de la manière suivante :

$$\left(\frac{1}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{1}{\sigma_M} \right) = \left(\frac{1}{\sigma_m} - \frac{1}{\sigma_M} \right) \leq \frac{1}{\min\{\sigma_m, \sigma_M\}} \leq \frac{1}{s_B(\delta, \Delta)}.$$

Montrons ensuite que si $\varepsilon_0(\delta, \Delta) < s_B(\delta, \Delta)$ alors :

$$\left(\frac{1}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{1}{\sigma_M} \right) \leq \frac{\varepsilon_0(\delta, \Delta)}{s_B(\delta, \Delta) (s_B(\delta, \Delta) - \varepsilon_0(\delta, \Delta))}.$$

Pour cela on considère le cas où $\varepsilon < 0$, le cas contraire donnant une borne nulle qui n'apporte pas plus de précisions. Donc pour $\varepsilon < 0$ on a :

$$\left(\frac{1}{\sigma_M + \varepsilon} - \frac{1}{\sigma_M} \right) = \frac{|\varepsilon|}{\sigma_M (\sigma_M - |\varepsilon|)},$$

et donc pour $\varepsilon_0(\delta, \Delta) < \sigma_M$ tel que $\varepsilon \leq |\varepsilon_0(\delta, \Delta)|$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{|\varepsilon|}{\sigma_M (\sigma_M - |\varepsilon|)} &\leq \frac{\varepsilon_0(\delta, \Delta)}{\sigma_M (\sigma_M - \varepsilon_0(\delta, \Delta))} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0(\delta, \Delta)}{s_B(\delta, \Delta) (s_B(\delta, \Delta) - \varepsilon_0(\delta, \Delta))}. \end{aligned}$$

En remarquant que $s_B(\delta, \Delta) \in (\varepsilon_0(\delta, \Delta), 2\varepsilon_0(\delta, \Delta)]$ il vient :

$$\frac{1}{s_B(\delta, \Delta)} \leq \frac{\varepsilon_0(\delta, \Delta)}{s_B(\delta, \Delta) (s_B(\delta, \Delta) - \varepsilon_0(\delta, \Delta))},$$

qui permet d'obtenir la quantité $M(\delta, \Delta)$ définie par (2.15). On en déduit alors l'expression de $\mu(\delta, \Delta)$ donnée par (2.11) en combinant les différents résultats obtenus. ■

2.7 Annexe 2.B : Preuve de la Proposition 2.2.3

En reprenant la notation $A = \{m, \dots, M\}$ avec $(m, M) \in \mathcal{N}^2$, on peut alors écrire $B_1 = \{1, \dots, m-1\}$ et $B_2 = \{M+1, \dots, n\}$. Introduisons tout d'abord la distance suivante :

$$\Delta_1 = \min_{i \in A, j \in B_1} |x_i - x_j|,$$

et de même Δ_2 pour le groupe B_2 . La preuve sera faite pour la distance Δ_1 , sachant que l'expression est similaire pour la distance Δ_2 . Écrivons tout d'abord l'expression de Δ_1^+ :

$$\Delta_1^+ = x_m^+ - x_{m-1}^+$$

où les expressions de x_m^+ et x_{m-1}^+ sont obtenues à partir de la dynamique (2.1). On regroupe ensuite les termes de l'équation précédente de la manière suivante :

$$\Delta_1^+ = \Delta_1 + D_A + D_B$$

où l'influence des agents du groupe A sur la distance Δ_1 vaut :

$$D_A = \sum_{j \in A} \left(\frac{h(x_j - x_m)}{\sigma_m} - \frac{h(x_j - x_{m-1})}{\sigma_{m-1}} \right),$$

et où l'influence des agents non dans A vaut $D_B = D_{B_1} + D_{B_2}$ avec :

$$D_{B_1} = \sum_{j \in B_1} \left(\frac{h(x_{m-1} - x_j)}{\sigma_{m-1}} - \frac{h(x_m - x_j)}{\sigma_m} \right),$$

et :

$$D_{B_2} = \sum_{j \in B_2} \left(\frac{h(x_j - x_m)}{\sigma_m} - \frac{h(x_j - x_{m-1})}{\sigma_{m-1}} \right),$$

avec σ_m et σ_M définis par (2.31). Les quantités $\sigma_A(\delta, \Delta)$ et $\sigma_B(\delta, \Delta)$ définies par (2.21) et (2.22) vérifient :

$$\sigma_A(\delta, \Delta) \leq \sigma_m \text{ et } \sigma_B(\delta, \Delta) \leq \sigma_{m-1}.$$

Puis, en utilisant le Lemme 2.2.1, on obtient les minoration suivantes pour $\Delta \geq \tilde{x}$:

$$\begin{aligned} D_A &\geq -\frac{|A| h(\Delta)}{\sigma_B(\delta, \Delta)} = -|A| \eta_A(\delta, \Delta), \\ D_{B_1} &\geq -\frac{|B_1| h(\Delta)}{\sigma_A(\delta, \Delta)}, \\ D_{B_2} &\geq -\frac{|B_2| h(2\Delta + \delta)}{\sigma_B(\delta, \Delta)}, \end{aligned}$$

qui donnent :

$$D_B \geq -(n - |A|) \max \left\{ \frac{h(\Delta)}{\sigma_A(\delta, \Delta)}, \frac{h(2\Delta + \delta)}{\sigma_B(\delta, \Delta)} \right\},$$

et qui permettent d'obtenir (2.20) et d'en déduire (2.18). ■

Chapitre 3

Contrôle par un leader avec fonction d'influence dépendant du temps et de l'état

Ce chapitre est consacré au contrôle d'une classe de systèmes de dynamique d'opinions en temps continu dont la dynamique dépend du temps et de l'état. Comme souligné dans le Chapitre 2 précédent, le régime asymptotique d'une dynamique d'opinions peut consister en plusieurs groupes d'agents en désaccord. L'introduction d'agents contrôlables est une solution fréquente pour essayer d'obtenir un consensus entre tous les agents du système, voir [Caponigro et al., 2016, Hegselmann et al., 2015]. Dans ce chapitre, le contrôle du système s'effectue via un unique leader commandé en vitesse et qui influence les autres agents du système lorsque ceux-ci sont suffisamment proches de lui. L'objectif du chapitre est l'obtention d'une loi de commande générique permettant d'amener tous les agents du système au consensus à une valeur d'opinion donnée. Pour ce faire on décomposera ce problème en différentes étapes de la manière suivante. Premièrement le leader cherchera à rassembler tous les agents dans son voisinage. Il entraînera ensuite les agents vers la valeur d'opinion désirée, où le consensus sera finalement atteint de manière asymptotique.

La Section 3.1 de ce chapitre est tout d'abord consacrée à la formulation du problème et à la présentation du système étudié. Les lois de commande permettant de résoudre le problème posé sont présentées Section 3.2 et illustrées Section 3.3. Finalement, ce chapitre sera conclu par la Section 3.4.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet des publications suivantes. Le problème d'amener le système vers le consensus lorsque les fonctions d'influences dépendent uniquement de l'état a été traité dans l'article de conférence internationale Conference on Decision and Control [Dietrich et al., 2016a]. Le cadre est étendu au cas où les fonctions d'influences peuvent dépendre de l'état et du temps dans l'article de revue internationale Transactions on Automatic Control [Dietrich et al., 2017a].

3.1 Formulation du problème

3.1.1 Présentation du système

Considérons un système composé de $n + 1$ agents, $n \in \mathbb{N}^*$, indicés de 0 à n , formant un système multi-agents en temps continu. Chaque agent possède un état scalaire, aussi appelé opinion, qui évolue dans le temps et est noté $x_i(t) \in \mathbb{R}$. Parmi les $n + 1$ agents, on distingue n agents non-contrôlés et un agent contrôlé appelé leader et d'indice 0. On considère que le leader peut influencer les autres agents du système mais qu'il n'est pas influencé par les opinions des agents. La dynamique du système multi-agents est alors donnée, pour $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = u(t), \\ \dot{x}_i(t) = F_0(t, x_0(t) - x_i(t)) (x_0(t) - x_i(t)) \\ \quad + \sum_{j=1}^n F(t, x_j(t) - x_i(t)) (x_j(t) - x_i(t)), \end{cases} \quad (3.1)$$

où $|u(t)| \leq \sigma$ est le contrôle appliqué au leader. Le contrôle est borné en norme par une saturation strictement positive notée σ . Les fonctions F et F_0 sont des fonctions continues par morceaux à valeurs positives qui dépendent du temps et de l'état et qui sont définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Ce modèle de dynamique d'opinions permet au leader d'influencer les agents avec une fonction d'influence différente de celle décrivant les interactions entre agents.

Les principales hypothèses de ce chapitre portent sur la fonction d'influence du leader F_0 . Cela signifie qu'aucune hypothèse supplémentaire n'est faite sur la fonction d'influence F des agents.

Hypothèse 3.1.1. *Les fonctions d'influences F et F_0 satisfont les hypothèses suivantes*

1. F et F_0 sont paires par rapport à leurs second argument, c'est-à-dire que :

$$\forall (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, F(t, y) = F(t, -y) \text{ et } F_0(t, y) = F_0(t, -y),$$

2. il existe des fonctions $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ paire et $g_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, toutes deux continues par morceaux et à valeurs positives telles que :

$$\forall t \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}, F_0(t, y) \geq g_0(t)f_0(y),$$

3. il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [-\eta; \eta]$, on ait $f_0(y) \geq f_0(\eta) > 0$,
4. l'intégrale de la fonction g_0 diverge sur \mathbb{R}^+ , c'est-à-dire que :

$$\int_0^{+\infty} g_0(t) dt = +\infty,$$

5. la fonction g_0 est bornée par valeur supérieure sur \mathbb{R}^+ et on note M_0 son supremum tel que :

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} g_0(t) < +\infty.$$

Le premier point de l'hypothèse assure que l'influence est symétrique par rapport aux opinions. Le point 2 assure que la fonction d'influence du leader peut être bornée par le produit d'un terme dépendant uniquement du temps et par un terme dépendant uniquement de l'état. On dira que l'agent i est dans l' η -voisinage du leader à l'instant t si $|x_i(t) - x_0(t)| \leq \eta$. Le point 3 assure alors que $f_0(x_i(t) - x_0(t)) \geq f_0(\eta)$, ce qui garantit une borne inférieure sur l'influence du leader dans son η -voisinage. Le point 4 permet de garantir que l'influence du leader sur l'agent ne peut rester nulle indéfiniment.

Du fait de la présence d'un leader et de la fonction F_0 , la dynamique (3.2) des agents n'est pas autonome. C'est pour cette raison que la notion de consensus doit être clarifiée. On distingue en effet deux types d'accords, chacun étant détaillé dans la définition suivante.

Définition 3.1.2. *On appelle consensus une synchronisation des agents sans le leader, c'est-à-dire :*

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N}^2, \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0.$$

On appelle accord avec le leader quand :

$$\forall i \in \mathcal{N}, \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_i(t) - x_0(t)| = 0.$$

Cette définition permet de dire qu'un accord avec le leader implique le consensus.

Comme tous les agents partagent la même dynamique, l'ordre des agents reste inchangé au cours du temps, et ce quelque soit le contrôle appliqué au leader. Cela qui signifie que :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N}^2, x_i(0) \geq x_j(0) \implies \forall t \geq 0, x_i(t) \geq x_j(t).$$

Cette propriété est valide puisque la dynamique (3.2) est la même pour deux agents partageant la même opinion, puisque les fonctions d'influence F et F_0 sont les mêmes pour tous les agents. Cela permet d'affirmer que l'ordre des agents reste inchangé.

Remarque 3.1.3. *Si les fonctions d'influences F et F_0 ne sont pas les mêmes pour tous les agents, alors la propriété de conservation de l'ordre des agents ne peut plus être garantie. Les résultats de ce chapitre resteraient néanmoins valables, sous conditions de re-numéroter les agents à chaque changement d'ordre. Ce cas n'est néanmoins pas considéré ici.*

Dans le reste du chapitre, on re-numérottera les agents par ordre croissant de leurs opinions, c'est-à-dire qu'on a :

$$\forall t \geq 0, x_1(t) \leq x_2(t) \leq \dots \leq x_n(t).$$

Comme le leader, d'indice zéro, est un agent contrôlé, sa dynamique (3.1) n'est pas la même que celle des agents (3.2). La réorganisation des indices ne s'applique donc pas au leader et il n'y a pas d'ordre établi entre les opinions du leader et des agents.

Cette sous-section a permis de présenter le système étudié dans ce chapitre, ainsi que ses principales propriétés. La sous-section suivante présente le problème qui fait l'objet de ce chapitre.

3.1.2 Énoncé du problème

La finalité de ce chapitre est de proposer une loi de commande qui permet de faire converger tous les agents vers une opinion de consensus désirée. Ceci est réalisé en considérant les objectifs suivants. On souhaite tout d'abord rassembler tous les agents dans un voisinage du leader. Par la suite, on désire entraîner tous les agents vers une opinion de consensus choisie, afin de faire converger le système vers un accord avec le leader à cette valeur d'opinion. On s'intéressera enfin aux conditions suffisantes pour qu'un consensus entre les agents puisse avoir lieu lors d'une phase de suivi de trajectoire (quand le leader entraîne tous les agents vers une opinion donnée).

Le problème général à résoudre est alors formulé de la manière suivante.

Problème 3.1.4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une valeur de consensus arbitrairement choisie et des conditions initiales $x_i(0) \in \mathbb{R}$, pour $i \in \mathcal{N}$ et $x_0(0) \in \mathbb{R}$. Trouver un contrôle $u(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $|u(t)| \leq \sigma$, $\sigma > 0$, tel que l'opinion de tous les agents convergent vers la valeur α , i.e. $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \alpha$.

Le problème précédemment décrit est divisé en trois sous-problèmes qui seront traités séparément dans la Section 3.2. Chaque problème se concentre sur la réalisation d'un objectif particulier. En concaténant les solutions des sous-problèmes, on résout alors le Problème 3.1.4.

Le premier sous-problème consiste à rassembler les agents dans un voisinage de rayon η autour du leader, et ce quelque soit la valeur de l'opinion autour de laquelle ce rassemblement a lieu.

Sous-problème 3.1.5. Étant fixés des conditions initiales et un paramètre $\eta > 0$, trouver un temps fini T et un contrôle $u(t)$ pour $t \in [0, T]$, avec $|u(t)| \leq \sigma$ et $\sigma > 0$, tel qu'on ait $\forall i \in \mathcal{N}$, $|x_i(T) - x_0(T)| < \eta$.

Le second sous-problème a pour objectif d'entraîner tous les agents préalablement rassemblés vers une opinion désirée que l'on nommera opinion cible.

Sous-problème 3.1.6. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$. Étant données une opinion cible $\alpha \in \mathbb{R}$ et des conditions initiales arbitrairement fixées vérifiant $\forall i \in \mathcal{N}$, $|x_i(t_0) - x_0(t_0)| < \eta$, trouver un temps $t_1 \geq t_0$ et un contrôle $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, tels que $\forall i \in \mathcal{N}$, on ait $|x_i(t_1) - x_0(t_1)| < \eta$, et $x_0(t_1) = \alpha$.

Pour complètement résoudre le Problème 3.1.4, il reste à faire converger les agents vers l'opinion cible une fois que le leader a atteint cette valeur. C'est l'objet du sous-problème suivant.

Sous-problème 3.1.7. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$. Étant données une valeur d'opinion cible $\alpha \in \mathbb{R}$ et des conditions initiales telles que $x_0(t_0) = \alpha$ et $\forall i \in \mathcal{N}$, $|x_i(t_0) - x_0(t_0)| < \eta$. Trouver un contrôle $u(t)$ avec $|u(t)| \leq \sigma$, $\sigma > 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, tel que tous les agents convergent vers l'opinion cible, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \alpha$.

Cette section a permis de présenter le système étudié ainsi que les problèmes à résoudre. La résolution des différents problèmes fait l'objet de la section suivante.

3.2 Obtention de la loi de commande

3.2.1 Résultats préliminaires

Cette sous-section présente des résultats qui serviront de base pour les résultats principaux de ce chapitre.

Le lemme suivant décrit le comportement des agents extrêmes (d'indices 1 et n) lorsque le leader se trouve entre ces derniers. Lorsque le leader est au-dessus de l'agent le plus bas, cet agent a une opinion croissante. De même lorsque le leader est sous l'agent ayant l'opinion la plus élevée, cet agent a une opinion qui décroît.

Lemme 3.2.1. *Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Sous l'Hypothèse 3.1.1, si $x_0(t) \geq x_1(t)$ alors :*

$$\dot{x}_1(t) \geq g_0(t) f_0(x_0(t) - x_1(t)) (x_0(t) - x_1(t)) \geq 0. \quad (3.3)$$

De même, si $x_0(t) \leq x_n(t)$, alors :

$$\dot{x}_n(t) \leq g_0(t) f_0(x_0(t) - x_n(t)) (x_0(t) - x_n(t)) \leq 0. \quad (3.4)$$

Preuve On montrera le résultat pour l'agent 1. Le résultat pour l'agent n est obtenu par le même raisonnement. Supposons que pour $t \in \mathbb{R}^+$ on ait $x_0(t) \geq x_1(t)$. Comme l'ordre des agents est préservé, l'agent 1 a donc l'opinion de valeur la plus faible et on a $\forall i \in \mathcal{N}$, $(x_i(t) - x_1(t)) \geq 0$, qui permet de déduire que :

$$\sum_{i=1}^n F(t, x_i(t) - x_1(t)) (x_i(t) - x_1(t)) \geq 0,$$

car la fonction F est à valeurs positives. À partir de la dynamique du système (3.2) et du point 2 de l'Hypothèse 3.1.1, on aboutit au résultat du lemme du fait que $x_0(t) \geq x_1(t)$ et que les fonctions F_0 , f_0 et g_0 sont à valeurs positives. ■

De manière intuitive, quand aucun agent, ni le leader n'a d'opinion plus faible que l'agent ayant l'opinion la plus faible, alors ce dernier n'est influencé que par des opinions de valeurs plus élevées, son opinion ne peut alors pas décroître. Si l'opinion du leader se trouve encadré par les opinions des agents extrêmes, alors les deux équations (3.3) et (3.4) sont valides et on en déduit que les agents extrêmes se rapprochent. Cette idée permettra de démontrer le Théorème 3.2.17 qui permet de résoudre le Sous-problème 3.1.7.

Le lemme suivant permet d'affirmer que dans le cas où le leader se situe sous l'agent ayant l'opinion la plus faible et si le contrôle appliqué au leader est de norme suffisamment faible, alors le leader est capable d'augmenter l'opinion de l'agent à volonté.

Lemme 3.2.2. *Sous l'Hypothèse 3.1.1, si :*

$$\exists t_0 \geq 0, x_1(t_0) > x_0(t_0) - \eta, \quad (3.5)$$

et si :

$$\forall t \geq t_0, |u(t)| \leq \eta f_0(\eta) g_0(t), \quad (3.6)$$

alors :

$$\forall t \geq t_0, x_1(t) > x_0(t) - \eta. \quad (3.7)$$

Preuve Supposons que (3.5) et (3.6) soient vérifiées. Montrons que (3.7) est vraie par l'absurde. Supposons donc que (3.7) est fausse. Par continuité des trajectoires, il existe alors un instant :

$$t_2 = \min\{\tau \geq t_0 \mid x_1(\tau) = x_0(\tau) - \eta\} < +\infty,$$

tel que l'agent 1 soit à la frontière du η -voisinage du leader. Par continuité des trajectoires, on définit également un instant $t_1 \in [t_0, t_2)$, suffisamment proche de t_2 , tel que $\forall t \in [t_1, t_2]$, $x_1(t) < x_0(t)$, ce qui assure que :

$$\forall t \in [t_1, t_2], x_1(t) \in [x_0(t) - \eta, x_0(t)). \quad (3.8)$$

Pour $t \in [t_1, t_2]$, l'équation (3.3) du Lemme 3.2.1 s'applique puisque le leader est au dessus de l'agent 1. De plus, l'équation (3.8) et le point 3 de l'Hypothèse 3.1.1 donnent :

$$g_0(t)f_0(x_0(t) - x_1(t)) \geq g_0(t)f_0(\eta),$$

ce qui permet de déduire de (3.3) que :

$$\dot{x}_1(t) + g_0(t)f_0(\eta) x_1(t) \geq g_0(t)f_0(\eta) x_0(t).$$

Pour analyser cette inégalité différentielle, on considère l'équation différentielle associée :

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) + g_0(t)f_0(\eta) \tilde{x}_1(t) = g_0(t)f_0(\eta) x_0(t),$$

avec la condition initiale $\tilde{x}_1(t_1) = x_1(t_1)$. Donc la trajectoire $\tilde{x}_1(t)$ vérifie :

$$\forall t \in [t_1, t_2], x_1(t) \geq \tilde{x}_1(t).$$

Par conséquent, l'équation (3.5) donne $\tilde{x}_1(t_1) > x_0(t_1) - \eta$. Montrons maintenant par l'absurde que :

$$\forall t \in [t_1, t_2], \tilde{x}_1(t) > x_0(t) - \eta. \quad (3.9)$$

Pour y parvenir, supposons l'existence de l'instant :

$$\tilde{t}_2 = \min\{\tau \in [t_1, t_2] \mid \tilde{x}_1(\tau) = x_0(\tau) - \eta\}.$$

Étudions désormais la quantité :

$$z(t) = \tilde{x}_1(t) - (x_0(t) - \eta),$$

pour $t \in [t_1, \tilde{t}_2]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{\tilde{x}}_1(t) - \dot{x}_0(t) \\ &= g_0(t)f_0(\eta)(x_0(t) - \tilde{x}_1(t)) - \dot{x}_0(t) \\ &= g_0(t)f_0(\eta)(\eta - z(t)) - \dot{x}_0(t). \end{aligned}$$

Comme d'après (3.6), pour $t \in [t_1, \tilde{t}_2]$, $\dot{x}_0(t) \leq \eta f_0(\eta) g_0(t)$, on a l'inégalité :

$$\dot{z}(t) \geq -f_0(\eta) g_0(t) z(t).$$

Remarquons que d'après (3.9) on a également $z(t_1) = \tilde{x}_1(t_1) - (x_0(t_1) - \eta) > 0$. Le Lemme de Gronwall (voir Lemme de Gronwall au Chapitre 1 Section 1.1) et le fait que l'instant t_2 soit fini assure que :

$$z(t_2) \geq z(t_1) \exp\left(-f_0(\eta) \int_{t_1}^{t_2} g_0(t) dt\right) > 0.$$

Cela contredit la définition de \tilde{t}_2 , et donc ni \tilde{t}_2 ni t_2 n'existent, ce qui finit de démontrer le lemme. ■

En considérant les trajectoires $x_i := -x_i$, on déduit le corollaire suivant du Lemme 3.2.2 précédent. Ce lemme a établi que le leader peut faire croître l'opinion de l'agent 1 à volonté grâce un contrôle borné en norme.

Corollaire 3.2.3. *Sous l'Hypothèse 3.1.1, s'il existe $t_0 \geq 0$ tel que :*

$$x_n(t_0) < x_0(t_0) + \eta,$$

et si pour tout $t \geq t_0$ on a :

$$|u(t)| \leq \eta f_0(\eta) g_0(t),$$

alors :

$$\forall t \geq t_0, x_n(t) < x_0(t) + \eta.$$

Le corollaire précédent établit que si le leader se situe dans l' η -voisinage de l'agent ayant l'opinion la plus haute et qu'il a une vitesse négative de norme suffisamment faible, alors il peut entraîner l'agent vers n'importe quelle opinion inférieure.

Cette sous-section a permis de présenter les résultats préliminaires à l'obtention des résultats de ce chapitre. La sous-section suivante s'attache à résoudre le premier sous-problème du problème général.

3.2.2 Rassemblement des agents autour du leader

Cette sous-section présente la loi de commande qui permet de résoudre le Sous-problème 3.1.5 en rassemblant tous les agents dans l' η -voisinage du leader.

Théorème 3.2.4. *Pour $t \geq 0$, soit $\kappa(t) = \min\{\eta f_0(\eta) g_0(t), \sigma\}$, soit $c \in (0, \sigma]$ et $\varepsilon \in (0, \eta)$. Sous l'Hypothèse 3.1.1, pour toute condition initiale $x_i(0) \in \mathbb{R}$ avec $i \in \mathcal{N}$, le contrôle suivant*

$$u(t) = \begin{cases} -c & \text{pour } t \in [0, T_1), \\ \kappa(t) & \text{pour } t \in [T_1, T_2], \end{cases} \quad (3.10)$$

où

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 \mid x_0(t) \leq x_1(t) + \varepsilon\} < +\infty, \quad (3.11)$$

et

$$T_2 = \inf\{t \geq T_1 \mid x_0(t) \geq x_n(t) - \varepsilon\} < +\infty, \quad (3.12)$$

résout le Sous-problème 3.1.5 avec $T := T_2$.

Remarque 3.2.5. Des bornes supérieures pour T_1 and T_2 sont données dans les Lemmes [3.2.7](#) et [3.2.8](#) ci-après.

La loi de commande proposée est divisée en deux parties. Tout d'abord le leader rejoint l'agent ayant l'opinion la plus basse au temps T_1 . Il l'entraîne ensuite vers l'agent ayant l'opinion la plus élevée jusqu'au temps T_2 , rassemblant tous les agents intermédiaires au passage. Pour prouver le Théorème [3.2.4](#), nous aurons besoin des lemmes qui suivent.

Remarque 3.2.6. Le choix de la valeur de $\varepsilon \in (0, \eta)$ est arbitraire. Il est néanmoins important que $\varepsilon < \eta$, cela étant crucial pour la seconde partie du contrôle.

Lemme 3.2.7. L'instant T_1 défini par [\(3.11\)](#) est fini et vérifie :

$$T_1 \leq T'_1 \triangleq \max \left\{ 0, \frac{x_0(0) - (x_1(0) + \varepsilon)}{c} \right\}. \quad (3.13)$$

De plus, on a $x_0(T_1) \leq x_1(T_1) + \varepsilon$.

Preuve Pour montrer que $T_1 \leq T'_1$ remarquons d'abord que si $T'_1 = 0$ alors $T_1 = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $T_1 > T'_1 > 0$. La définition de T_1 dans [\(3.11\)](#) permet d'écrire que :

$$\forall t \in [0, T_1), \quad x_0(t) > x_1(t) + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que le leader est au-dessus de l'agent 1. L'équation [\(3.3\)](#) du Lemme [3.2.1](#) assure alors que $x_1(t)$ est une fonction croissante pour $t \in [0, T_1)$. Comme $T'_1 < T_1$, l'opinion $x_1(t)$ est également croissante sur $t \in [0, T'_1]$. On en déduit que $x_1(0) \leq x_1(T'_1)$. Puis d'après la définition [\(3.13\)](#) de T'_1 et par intégration de la première étape de la loi de commande [\(3.10\)](#), $\forall t \in [0, T_1)$, $u(t) = -c$, on a :

$$x_0(T'_1) = x_0(0) - c T'_1 = x_1(0) + \varepsilon \leq x_1(T'_1) + \varepsilon.$$

Cela entre en contradiction avec [\(3.13\)](#), la définition de T'_1 , et permet de démontrer le lemme. ■

La seconde étape de la loi de commande consiste à entraîner l'agent 1 vers l'agent n . Pour réaliser cet objectif, le leader doit avoir une vitesse suffisamment faible pour que l'agent 1 reste dans son η -voisinage.

Lemme 3.2.8. Sous l'Hypothèse [3.1.1](#), l'instant T_2 défini par [\(3.12\)](#) est fini et majoré tel que :

$$T_2 \leq T'_2 \triangleq \inf \left\{ t \geq T_1 \mid x_0(T_1) + \int_{T_1}^t \kappa(s) ds \geq x_n(T_1) - \varepsilon \right\}.$$

De plus on a :

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall t \in [T_1, T_2], \quad x_i(t) > x_0(t) - \eta, \quad (3.14)$$

et :

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad |x_i(T_2) - x_0(T_2)| < \eta. \quad (3.15)$$

Preuve Montrons tout d'abord que l'instant T_2' est fini. Pour ce faire, introduisons les ensembles suivants :

$$I = \{t \in [T_1, +\infty) \mid \eta f_0(\eta) g_0(t) \geq \sigma\}$$

et $J = [t_1, +\infty) \setminus I$. Montrons d'abord que l'intégrale $\int_{T_1}^t \kappa(s) ds$ est croissante et non bornée en fonction de t . En utilisant la définition de $\kappa(t)$ on a :

$$\begin{aligned} L &\triangleq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{T_1}^t \kappa(t) dt \\ &= \int_{T_1}^{+\infty} \kappa(t) dt \\ &= \int_I \kappa(t) dt + \int_J \kappa(t) dt \\ &= \int_I \sigma dt + \eta f_0(\eta) \int_J g_0(t) dt. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $|I| = +\infty$. Comme la fonction g_0 est à valeurs positives :

$$\int_J g_0(t) dt \geq 0,$$

et on en déduit que $L = +\infty$.

Supposons ensuite que $|I| < +\infty$. On exprime alors l'intégrale de la fonction g_0 sur l'intervalle J comme une différence entre une intégrale sur l'intervalle I et une intégrale sur $[T_1, +\infty)$:

$$L = \int_I (\sigma - \eta f_0(\eta) g_0(t)) dt + \eta f_0(\eta) \int_{T_1}^{+\infty} g_0(t) dt.$$

Le point 5 de l'Hypothèse [3.1.1](#) permet d'écrire que :

$$g_0(t) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} g_0(t) = M_0 < +\infty.$$

On en déduit alors que pour $t \in I$ on a :

$$\sigma - \eta f_0(\eta) g_0(t) \geq \sigma - \eta f_0(\eta) M_0,$$

ce qui permet de dire que l'intégrale

$$\int_I (\sigma - \eta f_0(\eta) g_0(t)) dt$$

est finie. Grâce au point 4 de l'Hypothèse [3.1.1](#), l'intégrale de la fonction g_0 est infinie sur \mathbb{R}^+ et on en déduit que l'intégrale L diverge quelque soit $|I|$. On a montré que le temps T_2' est fini.

Pour montrer que $T_2 \leq T_2'$ on utilise la même technique que dans la preuve du Lemme [3.2.7](#) pour démontrer [\(3.13\)](#), une majoration du temps T_1 de la première étape du contrôle [\(3.10\)](#).

Montrons ensuite que tous les agents sont au-dessus de l'extrémité inférieure du η -voisinage du leader pendant la deuxième étape du contrôle (3.10). En posant $t_0 := T_1$, l'équation (3.5) du Lemme 3.2.2 est vérifiée, soit :

$$x_1(T_1) > x_0(T_1) - \eta$$

Le contrôle $\kappa(t) = \min\{\eta f_0(\eta) g_0(t), \sigma\}$ du Théorème 3.2.4 assure que la borne (3.6) sur le contrôle du Lemme 3.2.2 est également vérifiée. Par conséquent et grâce au point 3 de l'Hypothèse 3.1.1, le Lemme 3.2.2 s'applique. Le Lemme 3.2.2 a établi que le leader peut faire croître l'opinion de l'agent 1 à volonté grâce un contrôle borné en norme. Comme l'ordre des agents reste inchangé, l'équation (3.14) est une conséquence directe du Lemme 3.2.2.

Par définition de T_2 , on a $x_0(T_2) \geq x_n(T_2) - \varepsilon$, qui, combinée avec (3.14) donne (3.15). Cela fini de démontrer le lemme. ■

Le lemme précédent permet de résoudre le Sous-problème 3.1.5 en démontrant le Théorème 3.2.4.

Preuve du Théorème 3.2.4 En appliquant les Lemmes 3.2.7 et 3.2.8, on obtient la conclusion du Sous-problème 3.1.5 avec $T := T_2$. ■

Remarque 3.2.9. La loi de commande proposée dans le Théorème 3.2.4 permet de rassembler les agents aussi près que l'on veut du leader grâce au paramètre η . Le Théorème 3.2.4 garantit également la résolution du Sous-problème 3.1.5 quel que soit la valeur de la saturation sur le contrôle $\sigma > 0$: celle-ci peut être choisie aussi petite que l'on veut.

Remarque 3.2.10. L'hypothèse faite sur la fonction g_0 permet de considérer des cas où on aurait $g_0(t) = 0$ pour certains instants t . À de tels instants, le Théorème 3.2.4 impose $u(t) = 0$. En d'autres termes, le leader doit maintenir son opinion constante lorsqu'il n'a plus d'influence sur les agents. Cependant, comme le point 4 de l'Hypothèse 3.1.1 doit être vérifié, la fonction g_0 ne peut pas rester indéfiniment nulle. Le leader a donc l'assurance d'avoir de l'influence au cours du temps ce qui lui permet d'amener les agents vers n'importe quelle valeur d'opinion en temps fini.

Cette sous-section a permis de résoudre le Sous-problème 3.1.5, qui impose de rassembler en temps fini les agents dans un voisinage fini du leader. La sous-section suivante s'attache à résoudre le second sous-problème, Sous-problème 3.1.6, qui s'apparente à du suivi de trajectoire entre le leader et les agents.

3.2.3 Suivi de trajectoire

Cette sous-section présente un théorème donnant des conditions suffisantes sur la vitesse du leader pour que celui-ci puisse emmener les agents vers n'importe quelle valeur d'opinion.

Théorème 3.2.11. Sous l'Hypothèse 3.1.1, si la norme du contrôle est suffisamment faible :

$$\forall t \geq t_0, |u(t)| \leq \min\{\eta f_0(\eta) g_0(t), \sigma\}, \quad (3.16)$$

et que tous les agents sont initialement dans l' η -voisinage du leader :

$$\forall i \in \mathcal{N}, |x_i(t_0) - x_0(t_0)| < \eta$$

alors tous les agents restent dans l' η -voisinage du leader pour tout temps :

$$\forall t \geq t_0, \forall i \in \mathcal{N}, |x_i(t) - x_0(t)| < \eta.$$

Preuve Le Lemme 3.2.2 permet d'affirmer que $\forall t \geq t_0, x_1(t) > x_0(t) - \eta$. De plus, le Corollaire 3.2.3 assure que $\forall t \geq t_0, x_n(t) < x_0(t) + \eta$. Comme l'ordre des agents reste le même, le théorème est ainsi démontré. ■

Le précédent théorème donne des conditions suffisantes sur le contrôle appliqué au leader pour que celui-ci conserve tous les agents dans son voisinage. Cela permet en outre au leader de faire du suivi de trajectoire avec les agents, comme illustré Section 3.3. Le suivi de trajectoire motive par ailleurs des applications supplémentaires, comme par exemple le marketing ciblé. L'objectif est alors de faire évoluer l'opinion de clients en fonction des évolutions des produits qu'on souhaite leur vendre. Le Sous-problème 3.1.6, qui consiste amener le leader à l'opinion cible sans perdre d'agents, est un cas particulier du suivi de trajectoire. Le Théorème 3.2.11 permet alors de résoudre directement le Sous-problème 3.1.6, ce qui fait l'objet du corollaire suivant.

Corollaire 3.2.12. Si $\alpha = x_0(t_0)$ dans le Sous-problème 3.1.6, alors le sous-problème est résolu avec $t_1 = t_0$. Sinon, sous l'Hypothèse 3.1.1 et pour tout $t \in [t_0, t_1)$, la loi de commande suivante résout le Sous-problème 3.1.6 :

$$u(t) = \text{signe}(\alpha - x_0(t_0)) \min\{\eta f_0(\eta) g_0(t), \sigma\}, \quad (3.17)$$

où $t_1 = \inf \left\{ t \geq t_0 \mid x_0(t_0) + \int_{t_0}^t u(s) ds = \alpha \right\} < +\infty$.

Preuve Partant des conditions du Sous-problème 3.1.6, supposons qu'initialement on ait $\forall i \in \mathcal{N}, |x_i(t_0) - x_0(t_0)| < \eta$. Pour montrer que le temps t_1 est fini, on utilise la même technique que dans la preuve du Lemme 3.2.8 pour montrer que T'_2 est fini. On peut appliquer le Théorème 3.2.11 puisque $\forall t \in [t_0, t_1), |u(t)| \in [0, \min\{\eta f_0(\eta) g_0(t), \sigma\}]$. De plus, en intégrant la dynamique du leader (3.1) on a $x_0(t_1) = \alpha$, ce qui permet de résoudre le Sous-problème 3.1.6. ■

Notons que la Remarque 3.2.10 qui traitait du cas où g_0 s'annule s'applique aussi pour les lois de commande proposées dans le Théorème 3.2.11 et le Corollaire 3.2.12.

Cette sous-section a permis de résoudre le deuxième sous-problème relatif au suivi de trajectoire. La sous-section suivante concerne alors le troisième et dernier sous-problème traitant du consensus.

3.2.4 Consensus pendant le suivi de trajectoire

Cette sous-section présente des conditions suffisantes pour la réalisation du consensus asymptotique quand tous les agents sont dans la zone d'influence du leader pendant une phase de suivi de trajectoire, comme décrit dans la Section 3.2.3 qui précède.

L'étude de la réalisation du consensus lors d'un suivi de trajectoire peut présenter un intérêt pour réduire la dimension du modèle de dynamique d'opinions, grâce à la synchronisation d'un groupe d'agents. Ce qui est en lien avec le Chapitre 2 où un cluster transitoire est décrit avec un nombre limité de paramètres.

L'hypothèse suivante porte sur la fonction d'influence du leader.

Hypothèse 3.2.13. *La fonction d'influence du leader f_0 est dérivable localement sur un voisinage incluant zéro et $f_0(0) > 0$.*

Cette hypothèse n'a pas été nécessaire précédemment et apparaît dans cette sous-section en tant qu'hypothèse technique, cela afin d'obtenir des résultats sur le consensus pendant le suivi de trajectoire. Afin d'alléger les équations, on introduit également les fonctions

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y f(y) \end{cases}, \quad h_0 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y f_0(y) \end{cases},$$

qui sont liées aux fonctions d'influences f et f_0 et qui simplifient l'écriture de la dynamique (3.2) des agents. Le lemme qui suit se sert de l'hypothèse précédente pour assurer la stricte croissance de la fonction h_0 localement autour de zéro.

Lemme 3.2.14. *Sous l'Hypothèse 3.2.13, il existe $\delta > 0$ tel que la fonction $h_0 : x \mapsto x f_0(x)$ soit strictement croissante sur $[-\delta, \delta]$.*

Preuve D'après l'Hypothèse 3.2.13, la fonction f_0 est dérivable en zéro, la fonction h_0 l'est également et on a alors $h'_0(0) = f_0(0)$. Par ailleurs, grâce à l'Hypothèse 3.2.13 on a $h'_0(0) > 0$. En utilisant le développement limité de la fonction h_0 à l'ordre un autour de zéro $h_0(x) = h_0(0) + f_0(0)x + o(x)$, on en déduit que la fonction h_0 est localement croissante autour de zéro. Cela justifie l'existence de δ dans le lemme. ■

Le lemme précédent permet alors de considérer la restriction du point 3 de l'Hypothèse 3.1.1 comme suit.

Hypothèse 3.2.15. *Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$ on ait $f_0(x) \geq f_0(\delta)$ et tel que la fonction $h_0 : x \mapsto x f_0(x)$ soit strictement croissante sur $[-\delta, \delta]$.*

Contrairement aux hypothèses techniques précédentes qui s'appliquent à la fonction f_0 , l'hypothèse suivante donne les conditions initiales du système ainsi qu'une borne sur le contrôle du leader afin de pouvoir appliquer le Théorème 3.2.11, qui permet d'affirmer que tous les agents restent dans le δ -voisinage du leader pour tout temps.

Hypothèse 3.2.16. *La fonction d'influence du leader vaut $F_0(t, y) = g_0(t) f_0(y)$, avec les fonctions g_0 et f_0 vérifiant l'Hypothèse 3.1.1. Tous les agents sont initialement dans le δ -voisinage du leader, c'est-à-dire que $\forall i \in \mathcal{N}, |x_0(0) - x_i(0)| < \delta$. De plus, le contrôle du leader est borné tel que :*

$$\forall t \geq 0, |u(t)| \leq \min\{g_0(t) \delta f_0(\delta), \sigma\}.$$

L'hypothèse précédente renforce le point 2 de l'Hypothèse 3.1.1 et considérant une égalité à la place de l'inégalité. Cette hypothèse permet alors d'obtenir le résultat suivant, qui démontre que si l'opinion du leader évolue suffisamment lentement, alors les agents atteignent asymptotiquement le consensus.

Théorème 3.2.17. D'après les Hypothèses [3.1.1](#), [3.2.13](#), [3.2.15](#) et [3.2.16](#), on a :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N}^2, \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0,$$

ce qui signifie que tous les agents tendent asymptotiquement vers le consensus.

Preuve Dans le cas particulier où $x_1(0) = x_n(0)$, le consensus est déjà atteint initialement. On supposera que ce n'est pas le cas dans le reste de la démonstration. Premièrement, montrons que la quantité $x_n(t) - x_1(t)$ décroît dans le temps. D'après la dynamique des agents [\(3.2\)](#) avec $F_0(t, y) = g_0(t) f_0(y)$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) - \dot{x}_1(t) &= g_0(t) \left(h_0(x_0(t) - x_n(t)) - h_0(x_0(t) - x_1(t)) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(F(t, x_i(t) - x_n(t)) (x_i(t) - x_n(t)) - F(t, x_i(t) - x_1(t)) (x_i(t) - x_1(t)) \right). \end{aligned}$$

Comme l'ordre des agents reste le même, alors pour tout $t \geq 0$ et pour tout $i \in \mathcal{N}$ on a $(x_i(t) - x_n(t)) \leq 0$ et $(x_i(t) - x_1(t)) \geq 0$. Cela implique :

$$\sum_{i=1}^n \left(F(t, x_i(t) - x_n(t)) (x_i(t) - x_n(t)) - F(t, x_i(t) - x_1(t)) (x_i(t) - x_1(t)) \right) \leq 0.$$

On en déduit alors que :

$$\dot{x}_n(t) - \dot{x}_1(t) \leq g_0(t) \left(h_0(x_0(t) - x_n(t)) - h_0(x_0(t) - x_1(t)) \right).$$

Comme les quantités $(x_0(t) - x_1(t))$ et $(x_0(t) - x_n(t))$ évoluent dans $[-\delta, \delta]$, et comme on a l'Hypothèse [3.2.16](#), le Théorème [3.2.11](#) assure que tous les agents restent dans le δ -voisinage du leader pour tout temps. D'après l'Hypothèse [3.2.15](#), la fonction h_0 est strictement croissante sur $[-\delta, \delta]$ et on en déduit que :

$$h_0(x_0(t) - x_n(t)) - h_0(x_0(t) - x_1(t)) < 0.$$

Comme la fonction g_0 est positive, pour tout $t \geq 0$ on a :

$$\dot{x}_n(t) - \dot{x}_1(t) \leq g_0(t) \left(h_0(y_n(t)) - h_0(y_1(t)) \right) \leq 0,$$

avec $y_1(t) = x_0(t) - x_1(t)$ et $y_n(t) = x_0(t) - x_n(t)$. Montrons ensuite par l'absurde que $l \triangleq \lim_{t \rightarrow +\infty} x_n(t) - x_1(t) = 0$. Cette limite existe parce que la distance entre les deux agents extrêmes est décroissante et bornée inférieurement par zéro. On note ensuite :

$$\mu = \min_{\substack{(\alpha, \beta) \in [-\delta, \delta]^2 \\ |\alpha - \beta| \geq l}} |h_0(\alpha) - h_0(\beta)|,$$

qui satisfait $\forall t \geq 0, |h_0(y_n(t)) - h_0(y_1(t))| \geq \mu$. Comme la fonction h_0 est strictement croissante sur $[-\delta, \delta]$ on a $\mu > 0$. On en déduit donc que :

$$\forall t \geq 0, \dot{x}_n(t) - \dot{x}_1(t) \leq -g_0(t) \mu.$$

D'après le point 4 de l'Hypothèse [3.1.1](#), l'intégration de l'inégalité précédente sur $[0, +\infty)$ conduit à $l = -\infty$, ce qui contredit $l > 0$. Donc $l = 0$ et le théorème est démontré. ■

Le Théorème 3.2.17 assure que quand les agents sont initialement proches du leader, alors les agents peuvent tendre vers le consensus, à condition que l'opinion du leader n'évolue pas trop rapidement.

Une fois que le leader a atteint l'opinion cible α tout en ayant gardé les agents dans son δ -voisinage, la convergence vers le consensus est naturelle si le leader est maintenu à l'opinion cible. Ceci fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.2.18. *Supposons $x_0(t_0) = \alpha$. Sous l'Hypothèse 3.1.1, si à l'instant initial t_0 tous les agents sont initialement dans le η -voisinage du leader :*

$$\forall i \in \mathcal{N}, |x_i(t_0) - x_0(t_0)| < \eta,$$

et si un contrôle de valeur nulle est appliqué :

$$\forall t \geq t_0, u(t) = 0,$$

alors un accord avec le leader est obtenu asymptotiquement :

$$\forall i \in \mathcal{N}, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = x_0(t_0) = \alpha.$$

Preuve Le contrôle $\forall t \geq t_0, u(t) = 0$ vérifie la borne sur le contrôle :

$$\forall t \geq 0, |u(t)| \leq \min\{g_0(t) \eta f_0(\eta), \sigma\},$$

donnée Théorème 3.2.11 qui traite du suivi de trajectoire. Ce même théorème s'applique et on a :

$$\forall t \geq t_0, \forall i \in \mathcal{N}, |x_i(t) - x_0(t)| \leq \eta.$$

Tous les agents restent donc dans le η -voisinage du leader pour tout temps.

Introduisons désormais l'instant suivant :

$$T_3 = \min\{t \geq t_0 \mid x_n(t) \leq x_0(t) \text{ ou } x_1(t) \geq x_0(t)\},$$

qui est le plus petit instant tel qu'un agent extrême croise la trajectoire du leader. Deux cas sont alors possibles.

Premier cas : $T_3 < +\infty$. On montre alors que tous les agents vont rester du même côté du leader après l'instant T_3 . Sans perte de généralité, on suppose que $x_n(T_3) \leq x_0(T_3)$. Le cas symétrique $x_1(T_3) \geq x_0(T_3)$ étant prouvé de la même manière. Montrons alors par l'absurde que l'agent n reste sous le leader pour tout temps après T_3 :

$$\forall t \geq T_3, x_n(t) \leq x_0(t), \tag{3.18}$$

en supposant l'existence d'un instant $t_3 > T_3$ tel que l'agent n soit strictement au-dessus du leader, soit $x_n(t_3) > x_0(t_3)$. Par continuité des trajectoires, il existe un instant $t_1 \in [T_3, t_3]$ tel que l'agent n ait la même opinion que le leader, soit $x_n(t_1) = x_0(t_1)$. Toujours par continuité des trajectoires, l'instant t_3 peut être choisi aussi proche de t_1 de telle sorte que :

$$\forall t \in [t_1, t_3], x_n(t) \geq x_0(t).$$

D'une part on a $x_n(t_1) = x_0(t_1)$ et $x_n(t_3) > x_0(t_3)$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe un instant $t_2 \in (t_1, t_3)$ tel que $\dot{x}_n(t_2) > \dot{x}_0(t_2) = 0$. D'autre

part, $x_n(t_2) \geq x_0(t_2)$ donc le Lemme 3.2.1 s'applique et assure que $\dot{x}_n(t_2) \leq 0$. Cela contredit $\dot{x}_n(t_2) > 0$ donc on a prouvé que (3.18) est vraie.

Soit ensuite $t \geq T_3$. Comme le leader est au-dessus de l'agent 1, le Lemme 3.2.1 s'applique et assure que $\dot{x}_1(t) \geq 0$. Sachant que $\dot{x}_0(t) = 0$, l'opinion du leader reste la même, et on en déduit grâce au point 3 de l'Hypothèse 3.1.1 :

$$\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t) \leq -g_0(t) f_0(\eta) (x_0(t) - x_1(t)).$$

En utilisant le Lemme de Gronwall, (voir Lemme de Gronwall au Chapitre 1 Section 1.1), on obtient pour $t \in [T_3, +\infty)$:

$$0 \leq x_0(t) - x_1(t) \leq (x_0(T_3) - x_1(T_3)) \exp \left(-f_0(\eta) (t - T_3) \int_{s=T_3}^{s=+\infty} g_0(s) ds \right).$$

Comme d'après les points 4 et 5 de l'Hypothèse 3.1.1 l'intégrale de la fonction g_0 est infinie et bornée, on en déduit que l'opinion de l'agent 1 tend vers celle du leader :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) - x_1(t) = 0.$$

L'ordre des agents restant inchangé, en utilisant (3.18) on montre qu'il y a accord avec le leader pour le cas $T_3 < +\infty$.

Deuxième cas : $T_3 = +\infty$. Cela signifie que le leader est toujours entre les agents 1 et n . Dans ce cas le Lemme 3.2.1 s'applique et grâce au point 3 de l'Hypothèse 3.1.1 on a :

$$\dot{x}_n(t) - \dot{x}_1(t) \leq -g_0(t) f_0(\eta) (x_n(t) - x_1(t)).$$

En utilisant le lemme de Gronwall on obtient alors, pour tout $t \geq t_0$:

$$0 \leq x_n(t) - x_1(t) \leq (x_n(t_0) - x_1(t_0)) \exp \left(-f_0(\eta) (t - t_0) \int_{s=t_0}^{s=+\infty} g_0(s) ds \right).$$

Comme d'après les points 4 et 5 de l'Hypothèse 3.1.1 l'intégrale de la fonction g_0 est infinie et bornée, on en déduit que les 1 et n tendent vers la même opinion :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_n(t) - x_1(t) = 0.$$

Comme le leader reste encadré par les agents 1 et n pour tout temps et que l'ordre des agents est inchangé, on a montré qu'il y a accord avec le leader pour $T_3 = +\infty$. ■

Le théorème précédent permet de résoudre le Sous-problème 3.1.7, qui consiste à faire converger les agents vers le consensus une fois que le leader a atteint l'opinion souhaitée. Comme les Sous-problèmes 3.1.5 (rassembler tous les agents autour du leader) et 3.1.6 (entraîner les agents vers une opinion cible) ont été précédemment résolus, le Problème 3.1.4 (faire converger tous les agents vers le consensus à une opinion donnée) est résolu en concaténant les solutions des trois sous-problèmes.

La section suivante présente des simulations numériques illustrant les contributions principales ce chapitre.

3.3 Illustrations

Cette section est consacrée à des exemples numériques mettant en lumière la résolution du problème posé dans ce chapitre, à savoir comment forcer les agents à tendre vers le consensus en introduisant un leader contrôlé.

On s'attachera dans un premier temps à illustrer la loi de commande proposée dans le Théorème 3.2.4 pour résoudre le Sous-problème 3.1.5. Ce sous-problème consiste à rassembler tous les agents dans l' η -voisinage du leader.

Exemple 1 : On considère alors un système multi-agents composé de $n = 6$ agents de dynamique (3.2) et d'un leader de dynamique (3.1). Dans ce premier exemple, on choisit $F \equiv 0$, ce qui signifie que les agents ne s'influencent pas et donc qu'ils ne se rapprochent pas les uns des autres sans l'aide du leader. Ceci permet de mieux mettre en lumière le rôle du leader et d'éviter que le diamètre du système ne diminue trop rapidement. Le leader est doté d'une fonction d'influence de la forme $F_0(t, y) = g_0(t)f_0(y)$ où la fonction d'influence liée à l'état f_0 est du type Hegselmann-Krause, issue du modèle présenté dans [Hegselmann et Krause, 2002], et est de la forme suivante pour $y \in \mathbb{R}$:

$$f_0(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Cela signifie que le rayon d'influence du leader est de 1. En conséquence, un agent n'est influencé par le leader que si la différence entre son opinion et celle du leader est plus petite ou égale à 1. De plus, le leader a une fonction d'influence liée au temps de la forme suivante :

$$g_0(t) = \frac{1}{1 + t^{0.4}} \mathbb{1}_{\frac{t}{17} \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [k, k+3/4]}, \quad (3.20)$$

pour tout $t \geq 0$, où $\mathbb{1}_A = 1$ si l'affirmation A est vraie et $\mathbb{1}_A = 0$ sinon. Par conséquent, l'influence du leader sur les agents tend vers zéro au cours du temps tout en disparaissant complètement à intervalles réguliers. Le graphe de la fonction g_0 est présenté Figure 3.1.

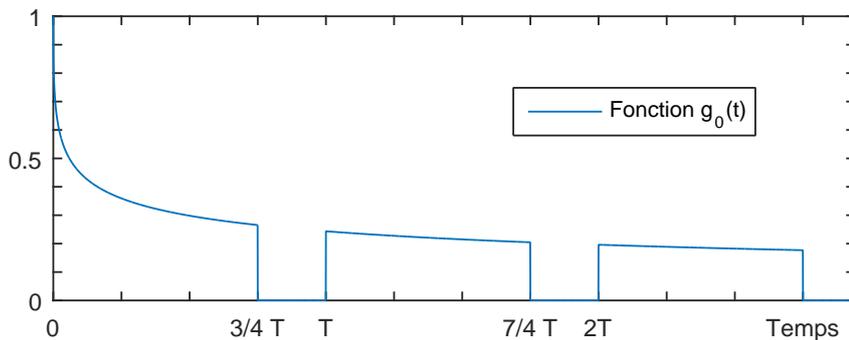


FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction g_0 donnée (3.20), partie temporelle de la fonction d'influence F_0 du leader sur les agents.

Malgré cela, la fonction g_0 présentée est à intégrale non-bornée et satisfait alors le point 4 de l'Hypothèse 3.1.1. On a donc un leader dont la force d'influence sur les

agents décroît au cours du temps. Dans notre cas, le point 3 de l'Hypothèse 3.1.1 est vérifié en prenant $\eta = 1$. Notons que toute valeur de $\eta \in (0, 1]$ conviendrait également. On fixe alors la valeur de la saturation sur le contrôle à $\sigma = 0.5$. La loi de commande appliquée au leader est divisée en deux étapes comme décrit dans le Théorème 3.2.4 : atteindre l'agent ayant l'opinion la plus basse puis rejoindre l'agent ayant l'opinion la plus élevée sans perdre le premier agent. Pour $t \in [0, T_1)$, la première étape est décrite avec les paramètres suivants, issus du Théorème 3.2.4. Le contrôle $u(t) = -c$, avec $c = \sigma = 0.5$ est appliqué au leader jusqu'à ce qu'il atteigne l'agent 1 au temps T_1 défini par le Théorème 3.2.4 et avec une distance $\varepsilon = 0.5$. Pour $t \in [T_1, T_2]$, la seconde étape du contrôle consiste à appliquer $u(t) = \kappa(t) = \eta f_0(\eta) g_0(t)$ pour que le leader entraîne l'agent 1 jusqu'à l'agent n . Le contrôle appliqué est borné en norme par $\eta f_0(\eta) g_0(t)$, donc le Lemme 3.2.2 nous assure que l'agent 1 suit le leader pendant cette seconde phase. Cette borne décroît dans le temps donc le contrôle appliqué au leader décroît également. Remarquons que quand $g_0(t) = 0$, le leader doit s'arrêter pour éviter de perdre les agents qu'il entraîne. Au temps T_2 défini par le Théorème 3.2.4, l'agent n est dans le ε -voisinage du leader donc tous les agents sont également dans le η -voisinage du leader. Le Sous-problème 3.1.5 est résolu. La Figure 3.2 représente les trajectoires du système multi-agents précédemment décrit, où tous les agents sont initialement répartis uniformément dans l'intervalle d'opinion $[0, 10]$ et où le leader a une opinion initiale de $x_0(0) = 9$.

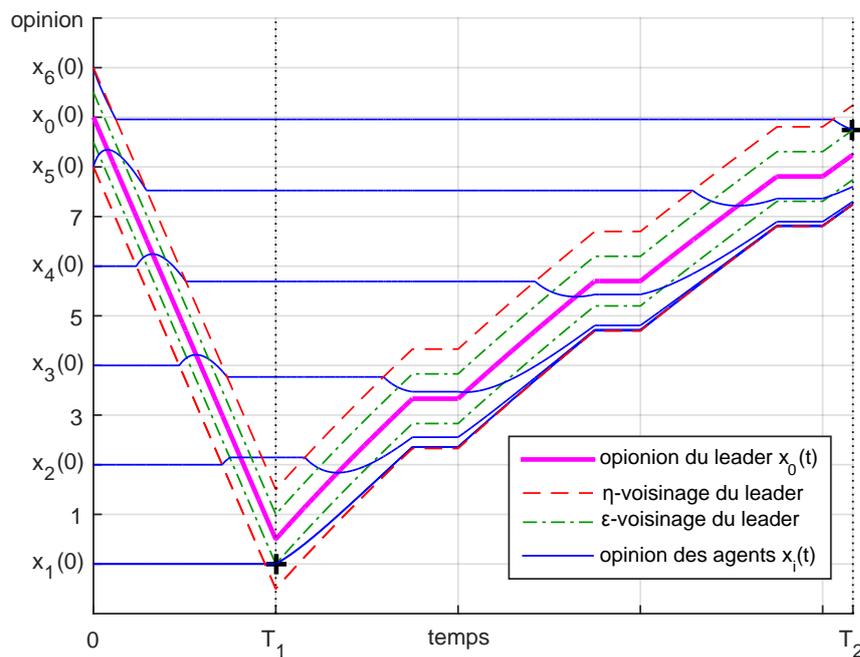


FIGURE 3.2 – Exemple de loi de commande donnée par le Théorème 3.2.4 et appliquée au système (3.1) et (3.2). La trajectoire du leader est représentée par la courbe magenta et celles des agents par les courbes bleues. Le η -voisinage du leader est représenté par des tirets rouge tandis que le ε -voisinage du leader est représenté par des tirets verts. Les deux croix noires précisent les événements survenant aux instants T_1 et T_2 .

On propose ensuite un exemple illustrant les résultats des Théorèmes 3.2.11 et 3.2.17 sur le consensus pendant une phase de suivi de trajectoire.

Exemple 2 : On utilisera le même système que précédemment, qui consiste en six agents et un leader. Les fonctions d'influences $F \equiv 0$ et f_0 définie par (3.19) restent inchangées mais on choisit désormais $g_0(t) = 2/(1+t)$. La fonction g_0 est désormais strictement positive, ce qui permet de visualiser le processus de consensus sans interruption. Les conditions initiales sont les suivantes. Tous les agents ont une opinion initiale dans l'intervalle $[-1, 1]$ et le leader démarre en $x_0(0) = 0$. La saturation sur le contrôle est fixée à $\sigma = 2$. Comme précédemment, le point 3 de l'Hypothèse 3.1.1 est validé en prenant $\eta = 1$. De plus, l'Hypothèse 3.2.15 est vérifiée en prenant $\delta = 1$. La loi de commande u est ensuite définie comme suit. Pour $t \in [0, t_1]$, l'amplitude du contrôle oscille entre les bornes données par (3.16) dans le Théorème 3.2.11. Puis, pour $t \in [t_1, t_2]$, le contrôle vaut la borne supérieure de la borne (3.16). Après l'instant t_2 , le contrôle est fixé constant à $u(t) = -1$. La trajectoire du système, ainsi que le contrôle appliqué au leader sont représentés Figure 3.3.

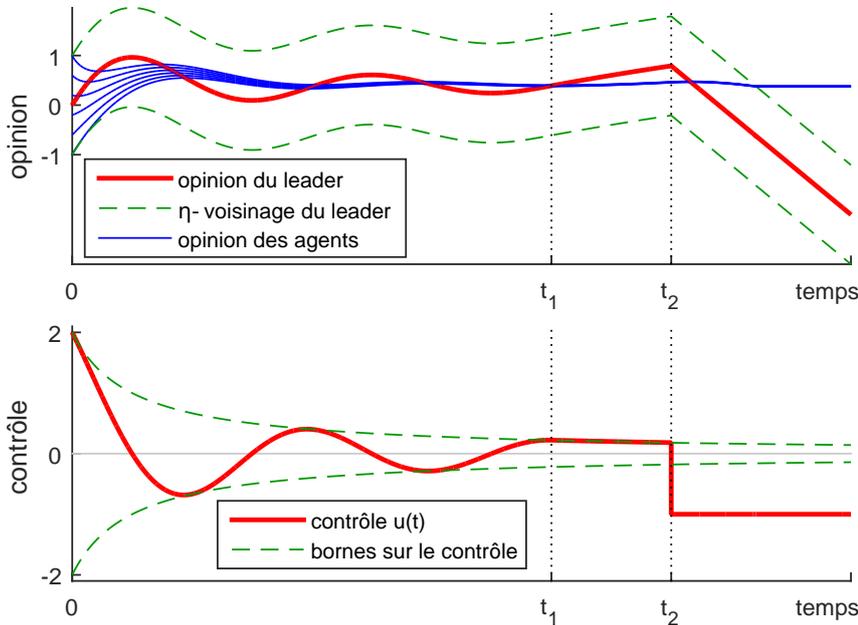


FIGURE 3.3 – Illustration des Théorèmes 3.2.11 et 3.2.17 qui concernent le suivi de trajectoire et le consensus. *Haut* : Trajectoire du système où les trajectoires des agents sont en bleu et celle du leader en rouge. Le η -voisinage du leader est représenté par des tirets verts. *Bas* : Le contrôle appliqué au leader est représenté en rouge et les tirets verts représentent la borne sur le contrôle donnée par le Théorème 3.2.11.

Comme tous les agents sont initialement dans le η -voisinage du leader et que les bornes sur le contrôle données par le Théorème 3.2.11 sont satisfaites pour $t \in [0, t_2]$, ce théorème s'applique et tous les agents restent dans l' η -voisinage du leader. Le leader est donc assuré de pouvoir faire du suivi de trajectoire sans perdre les agents dans son voisinage. De plus, le Théorème 3.2.17 s'applique également pour $t \in [0, t_2]$ et on observe que les agents tendent vers le consensus. Cependant, à partir du temps t_2 , les bornes sur le contrôle données par (3.16) ne sont plus respectées. De ce fait, le Théorème 3.2.11, qui donne des conditions suffisantes sur la norme du contrôle pour le suivi de trajectoire, ne s'applique plus, et le leader perd les agents au bout d'un certain

temps. Cet intervalle de temps où les agents restent dans le voisinage du leader malgré le non-respect des conditions du Théorème 3.2.11 souligne le caractère suffisant de ces conditions sur le contrôle. Par ailleurs, le Théorème 3.2.17 ne s'applique plus non plus. Comme dans notre cas il n'y a pas d'interactions entre les agents, le processus de consensus n'est plus garanti et s'arrête une fois que les agents ne subissent plus l'influence du leader. En effet, quand les agents ne sont plus influencés par le leader, $\dot{x}_i(t) = 0$ pour tout $i \in \mathcal{N}$ et les agents restent en désaccord.

Cette sous-section a permis d'illustrer graphiquement les lois de commande obtenues dans ce chapitre. On conclura ce chapitre par la section suivante.

3.4 Conclusion

Cette section a permis de présenter des résultats permettant de contrôler une large classe de systèmes de dynamique d'opinions au moyen d'un leader. Sont en effet considérés dans ce chapitre des systèmes dont la dynamique peut dépendre de l'état et du temps, potentiellement de manière couplée. Le problème résolu consistait à rassembler tous les agents du système autour de leader, pour que celui-ci puisse ensuite les amener au consensus à une valeur d'opinion désirée.

La loi de commande présentée résulte de certaines conventions ou choix. D'autres convention permette également de résoudre le même problème. Par exemple, le leader rejoint l'agent ayant l'opinion la plus basse. Rejoindre en premier l'agent ayant l'opinion la plus élevée engendre une loi de commande différente qui résout également le problème posé. Une autre stratégie totalement différente de la notre pour atteindre le consensus peut consister à osciller entre les agents extrêmes, comme évoqué dans [Caponigro et al., 2013, Caponigro et al., 2016].

Une extension ayant des applications en robotique serait également de considérer le problème de ce chapitre avec une opinion en deux (ou trois) dimensions. Le leader devra alors amener tous les robots d'un groupe à une position donnée dans le plan (ou l'espace), avec des lois de commande potentiellement similaires : d'abord rassembler les agents puis les emmener vers la cible.

Une des contributions à souligner est l'obtention d'une loi de commande en temps fini permettant de rassembler tous les agents dans un voisinage fini du leader. Ce résultat amène à considérer le problème de rassembler les agents en un temps minimal. Le problème de commande optimale associé est l'objet du chapitre suivant, où des outils comme le Principe du Maximum de Pontryagin sont utilisés pour résoudre ce problème. On remarquera alors des similitudes entre les lois de commandes proposées dans les différents chapitres.

Chapitre 4

Contrôle par un leader en temps minimal

Les résultats présentés au Chapitre 3 précédent ont permis de montrer l'existence d'une solution au problème traité dans celui-ci en mettant en avant une loi de commande permettant à un leader de rassembler tous les agents du système en temps fini. Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de contrôle en temps minimal associé suivant. Quel contrôle saturé appliquer à un leader d'une dynamique d'opinion afin qu'il rassemble tous les agents du système dans son voisinage (fermé et de diamètre fixé) en temps minimal ? Le problème de contrôle optimal en temps minimal est abordé en utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP), avec une formulation Hamiltonienne. Ce principe permet d'obtenir des conditions nécessaires sur les lois de commandes optimales.

La première section de ce chapitre est consacrée à la présentation du système multi-agents dont on souhaite regrouper les agents en temps minimal. La Section 4.2 est consacrée à la formulation du problème de contrôle en temps optimal. Les résultats du cas général avec interactions entre les agents sont présentés Section 4.3. Du fait de la complexité et de la non-linéarité des conditions du PMP, une expression implicite de la commande est obtenue en fonction de l'état du système et des états adjoints (introduits par le PMP). Cette condition, fondée sur un problème aux deux bouts avec un couplage non-linéaire entre l'état et l'état adjoint, apporte des informations sur les commandes optimales bien que leur résolution reste compliquée et numériquement sensible. Le cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre les agents est examiné à la Section 4.4. Cela engendre des simplifications sur les dynamiques des états et des états adjoints qui permettent de détailler et de compléter l'analyse. Il est alors possible de catégoriser les lois de commandes optimales en trois stratégies possibles. Les contributions de ce chapitre sont illustrées numériquement Section 4.5. Le cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre les agents y est résolu numériquement grâce aux résultats théoriques. Dans le cas général, les résultats des simulations numériques sont néanmoins peu précis, et cela à cause de la sensibilité numérique du problème aux deux bouts avec les dynamiques et la commande non-linéairement couplées. Une conclusion et des perspectives sont proposées à la Section 4.6.

Les résultats de ce chapitre ont donné lieu à la soumission de [Dietrich et al., 2017b] à un journal international.

4.1 Présentation du système

Cette première section est consacrée à la présentation du système ainsi que de ses propriétés. A l'instar du Chapitre 3, on considère un système de dynamique d'opinions muni d'un leader. Considérons un système composé de $n + 1$ agents, $n \in \mathbb{N}^*$, indicés de 0 à n , formant un système multi-agents en temps continu. Chaque agent possède un état scalaire, aussi appelé opinion, qui évolue dans le temps et est noté $x_i(t) \in \mathbb{R}$. Parmi les $n + 1$ agents, on distingue n agents non-contrôlés et un agent contrôlé appelé leader et d'indice 0. On considère que le leader peut influencer les autres agents du système mais qu'il n'est pas influencé par les opinions des agents. La dynamique du système multi-agents est alors donnée, pour $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = u(t), \\ \dot{x}_i(t) = h_0(x_0(t) - x_i(t)) + \sum_{k=1}^n h(x_k(t) - x_i(t)), \end{cases} \quad (4.1)$$

avec le contrôle $u(t) \in [-\sigma, \sigma]$, où $\sigma > 0$ est une saturation sur la commande et où les fonctions h_0 et h sont Lipschitz, \mathcal{C}^2 et définies par :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y f(y) \end{cases}, \quad h_0 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y f_0(y) \end{cases},$$

où les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions d'influences à valeurs positives, paires et \mathcal{C}^2 . Dans notre cas, le leader influence donc les agents avec une fonction d'influence propre, et les agents interagissent entre-eux avec une fonction d'influence commune. À la différence du Chapitre 3 où les fonctions d'influences du leader et des agents pouvaient explicitement dépendre du temps ou de l'état, les fonctions d'influences ne dépendent plus que de l'état dans ce chapitre.

Les objectifs du contrôle, qui seront formalisés par la suite, font intervenir le voisinage de l'opinion du leader, c'est-à-dire les opinions dans le référentiel de l'opinion du leader. Afin de faciliter la formulation du problème et de simplifier les équations de ce chapitre, on introduit le changement de variable naturel suivant :

$$\begin{cases} y_0(t) = x_0(t), \\ y_i(t) = x_i(t) - x_0(t), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \end{cases} \quad (4.2)$$

La variable y_i pour $i \in \mathcal{N}$ représente alors l'écart entre l'opinion de l'agent d'indice i et l'opinion du leader. En utilisant le changement de variable (4.2), la dynamique du système (4.1) peut alors se réécrire :

$$\begin{cases} \dot{y}_0(t) = u(t), \\ \dot{y}_i(t) = \sum_{k=1}^n h(y_k(t) - y_i(t)) - h_0(y_i(t)) - u(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

On notera par la suite $Y(t) = [y_0(t) \ y_1(t) \ \dots \ y_n(t)]^T$ le vecteur colonne des états concaténés. Par commodité, on désignera y_i comme l'opinion de l'agent i , et cela bien que la notation y_i désigne l'écart d'opinion entre le leader et l'agent i .

Cette section a permis de présenter le système utilisé dans ce chapitre. La section suivante présente le problème à résoudre ainsi que des résultats préliminaires sur les trajectoires des agents.

4.2 Formalisation du problème et résultats préliminaires

Cette section énonce de manière formelle le problème de contrôle optimal dont ce chapitre fait l'objet. L'obtention d'une synchronisation globale du système, c'est-à-dire le fait que tous les agents tendent vers la même opinion, est un problème récurrent dans la littérature des systèmes multi-agents et de dynamiques d'opinions. Il est cependant prouvé dans [Blondel et al., 2009] que pour des dynamiques d'opinions ayant une fonction d'influence dépendant de la distance, le régime asymptotique peut consister en des groupes d'agents en désaccord plutôt qu'au consensus global, comme il a été discuté au Chapitre 2. En choisissant comme voisinage un intervalle centré sur l'opinion du leader, de manière formelle, il a été montré au Chapitre 3 qu'il existe un temps fini t tel que :

$$\forall i \in \mathcal{N}, y_i(t) \in [-\eta, \eta], \quad (4.4)$$

et cela pour n'importe quel voisinage terminal de rayon $\eta > 0$. On s'intéressera dans le présent chapitre à vérifier cette contrainte terminale en temps minimal en considérant le problème de contrôle optimal suivant.

Problème 4.2.1. Soit $\eta > 0$ le rayon d'un voisinage terminal fixé et $Y(0)$ des conditions initiales fixées. Trouver un contrôle optimal u^* à appliquer au système (4.3) pour que tous les agents soient dans le η -voisinage du leader en un temps minimal t_f^* . Formellement on souhaite trouver :

$$\min_{u \in \Omega_\sigma} t_f$$

avec $\Omega_\sigma = \{u : t \mapsto u(t) \mid \forall t \geq 0, |u(t)| \leq \sigma\}$ et $t_f = \inf\{t \geq 0 \mid \forall i \in \mathcal{N}, y_i(t) \in [-\eta, \eta]\}$, c'est-à-dire que t_f est le plus petit temps tel que la contrainte terminale (4.4) soit vérifiée.

Le problème consiste donc à rassembler tous les agents à une distance η du leader en temps minimal. Dans le Chapitre 3 précédent, il été prouvé qu'il est possible de trouver une loi de commande $u \in \Omega_\sigma$ qui permette de rassembler tous les agents, quelles que soient leurs opinions initiales, dans un voisinage de rayon η du leader. Par conséquent, il existe une commande $u_0 \in \Omega_\sigma$ telle que le temps final associé $t_f^0 = t_f$ soit fini. Afin de vérifier s'il existe une solution au Problème 4.2.1, on considère la restriction de Ω_σ aux commandes u telle que le temps final associé soit fini et vérifie $t_f \leq t_f^0$. Cette restriction de l'espace des commandes est non-vide et compacte. On en déduit qu'il existe alors une solution au Problème 4.2.1. Dans la suite du chapitre, on utilisera le cadre du Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) pour résoudre le Problème 4.2.1. Avant cela, on considère l'hypothèse suivante, qui permet de simplifier le raisonnement et ce sans perte de généralité. Cette hypothèse assure que toutes opinions initiales des agents sont distinctes. Après permutation des indices, une formulation équivalente est la suivante.

Hypothèse 4.2.2. Pour tout $(i, j) \in \mathcal{N}^2$ tels que $i < j$, on a $y_i(0) < y_j(0)$.

Comme les fonctions d'influences f et f_0 sont les mêmes pour chaque agent, deux agents ayant la même opinion initiale auront la même trajectoire. Cependant, l'influence de deux agents superposés n'est pas la même que celle d'un seul agent. Pour pallier ce cas particulier, on peut néanmoins considérer que deux agents superposés peuvent être modélisés par deux agents ayant des opinions différentes mais aussi proches que l'on veut. Par conséquent, l'Hypothèse 4.2.2 n'entraîne pas de perte de généralité. On suppose alors que l'Hypothèse 4.2.2 est vérifiée pour l'ensemble de ce chapitre.

L'hypothèse précédente permet d'affirmer que l'ordre des agents reste le même et que leurs trajectoires ne se touchent pas.

Lemme 4.2.3. Sous l'Hypothèse 4.2.2 on a $\forall t \geq 0$:

$$y_1(t) < y_2(t) < \dots < y_n(t),$$

et ce indépendamment du contrôle $u(t)$.

Preuve Soit $(i, j) \in \mathcal{N}^2$ tels que $i < j$ et $y_i(0) < y_j(0)$. Montrons que cela reste vrai $\forall t \geq 0$. Pour cela on introduit d'abord la fonction dérivable $w(t) = y_i(t) - y_j(t)$ qui vérifie $w(0) < 0$. Soit $t \geq 0$. La dérivée de w vaut $\dot{w}(t) = \dot{y}_i(t) - \dot{y}_j(t)$. En utilisant l'équation de la dynamique (4.3) on a :

$$\dot{w}(t) = h_0(y_j(t)) - h_0(y_i(t)) + \sum_{k=1}^n \left(h(y_k(t) - y_i(t)) - h(y_k(t) - y_j(t)) \right). \quad (4.5)$$

Puisque la fonction h (respectivement h_0) est Lipschitz, il existe une constante $C > 0$ (respectivement $C_0 > 0$) telle que :

$$h(y_k(t) - y_i(t)) - h(y_k(t) - y_j(t)) \leq C |y_i(t) - y_j(t)| = C |w(t)|,$$

et respectivement :

$$h_0(y_j(t)) - h_0(y_i(t)) \leq C_0 |y_i(t) - y_j(t)| = C_0 |w(t)|.$$

Ce qui permet d'obtenir de (4.5) que :

$$\dot{w}(t) \leq (C_0 + n C) |w(t)|. \quad (4.6)$$

On introduit ensuite la fonction dérivable suivante :

$$p(t) = \exp \left(-(C_0 + n C) \int_{s=0}^{s=t} \text{signe}(w(s)) ds \right) w(t). \quad (4.7)$$

qui vérifie $p(0) = w(0) < 0$. La dérivée de la fonction p est, pour $t \geq 0$:

$$\dot{p}(t) = \exp \left(-(C_0 + n C) \int_{s=0}^{s=t} \text{signe}(w(s)) ds \right) \left(\dot{w}(t) - (C_0 + n C) |w(t)| \right).$$

Soit t fini et tel que $t \geq 0$. À partir de l'équation précédente et de (4.6) on a $\dot{p}(t) \leq 0$. Puis comme $p(0) < 0$, on en déduit que $p(t) < 0$. De (4.7) on en déduit que $w(t) < 0$, et donc que $y_i(t) < y_j(t)$. On vient donc de montrer que l'ordre des agents reste inchangé au cours du temps et que leurs trajectoires ne se touchent pas. ■

L'Hypothèse 4.2.2 suppose que les agents sont indicés par ordre croissant d'opinions et le Lemme 4.2.3 assure que cette propriété reste vraie pour tout temps. Un corollaire du Lemme 4.2.3 est le lemme suivant. Il permet de donner une expression équivalente de la contrainte terminale (4.4).

Lemme 4.2.4. *Sous l'Hypothèse 4.2.2, la contrainte terminale (4.4) est vérifiée au temps $t \geq 0$ si et seulement si :*

$$(y_1(t), y_n(t)) \in [-\eta, \eta]^2. \quad (4.8)$$

De plus, si $(y_1(0), y_n(0)) \in [-\eta, \eta]^2$, alors la contrainte terminale (4.4) est vérifiée au temps initial et $t_f^* = 0$.

L'expression des contraintes terminales ne fait intervenir que les agents d'indices 1 et n , que l'on appellera par la suite *agents extrêmes*. On nommera également les agents d'indices $i \in \{2, \dots, n-1\}$ les *agents intermédiaires*. On supposera pour le reste du chapitre que $t_f^* > 0$, ce qui signifie que $(y_1(0), y_n(0)) \notin [-\eta, \eta]^2$.

Cette section a permis de poser le problème de contrôle optimal ainsi que de préciser la contrainte terminale grâce au fait que les trajectoires des agents ne se touchent pas. La section suivante est consacrée aux résultats obtenus dans le cadre général où il y a interactions entre les agents.

4.3 Cas général avec interactions entre les agents

Dans cette section, on utilisera les conditions nécessaires du Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) [Pontryagin et al., 1962, Lee et Markus, 1967] avec des contraintes terminales de type intervalle (équation (4.4), voir [Chiang, 1992, Section 7.4]) afin de résoudre le Problème 4.2.1. On utilisera la formulation Hamiltonienne du PMP, formulation rappelée dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.1 (Principe du Maximum de Pontryagin). *Si le contrôle $u^* \in \Omega_\sigma$ associé à la trajectoire $Y^*(t)$ résout le Problème 4.2.1, c'est-à-dire si le contrôle $u^*(t)$ est optimal pour tout $t \in [0, t_f^*]$ pour la fonction coût t_f sous les contraintes de la dynamique (4.3) et sous la contrainte terminale (4.4), alors il existe une fonction absolument continue :*

$$\lambda : \begin{cases} [0, t_f] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ t & \longmapsto & [\lambda_0(t) \ \lambda_1(t) \ \dots \ \lambda_n(t)]^T \end{cases},$$

dénommée *vecteur d'état adjoint* et un réel $\lambda^0 \leq 0$ tels que :

$$\forall t \in [0, t_f^*], (\lambda^*(t), \lambda^0) \neq (0, 0),$$

et à partir desquels on peut construire l'Hamiltonien associé au Problème 4.2.1 :

$$H(t, Y, \lambda, \lambda^0, u) = \lambda^0 + \lambda^T F(Y, u).$$

La solution optimale satisfait alors, pour presque tout $t \in [0, t_f^*]$, la dynamique du système :

$$\dot{Y}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, Y^*(t), \lambda^*(t), \lambda^0, u^*(t)), \quad (4.9)$$

et la dynamique du vecteur d'état adjoint :

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial Y}(t, Y^*(t), \lambda^*(t), \lambda^o, u^*(t)), \quad (4.10)$$

La solution optimale maximise également l'Hamiltonien à chaque instant :

$$H(t, Y^*(t), \lambda^*(t), \lambda^o, u^*(t)) = \max_{v \in [-\sigma, \sigma]} H(t, Y^*(t), \lambda^*(t), \lambda^o, v), \quad (4.11)$$

et est telle que l'Hamiltonien soit nul :

$$H(t, Y^*(t), \lambda^*(t), \lambda^o, u^*(t)) = 0. \quad (4.12)$$

Pour finir, les conditions de transversalité sont données d'une part par :

$$\lambda_0^*(t_f^*) = 0 \quad (4.13)$$

et d'autre part, par l'existence des multiplieurs de Lagrange définis $\forall i \in \mathcal{N}$ tels que $\alpha_{i1} \geq 0$ et $\alpha_{i2} \geq 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha_{i1}(\eta + y_i^*(t_f^*)) = 0, \\ \alpha_{i2}(\eta - y_i^*(t_f^*)) = 0, \\ \lambda_i^*(t_f^*) = \alpha_{i1} - \alpha_{i2}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Preuve Le Principe du Maximum de Pontryagin étant un résultat standard, on n'en fera pas la preuve ici, voir [Pontryagin et al., 1962, Lee et Markus, 1967]. On donnera cependant des éléments afin d'expliquer les équations obtenues. Tout d'abord, l'équation (4.9) correspond à la dynamique du système donnée par (4.3). L'équation (4.10) permet d'obtenir la dynamique du vecteur d'état adjoint.

D'autre part montrons que l'Hamiltonien est nul. Pour presque tout $t \in [0, t_f^*]$ on a :

$$\frac{dH}{dt}(t, Y^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

pour les raisons suivantes (voir également [Lee et Markus, 1967]). La dynamique du système (4.3) est autonome et la fonction coût, qui vaut l'instant final, est invariante dans le temps. Par ailleurs, les contraintes sur les trajectoires optimales (4.9) et (4.10) sont vérifiées, et donc :

$$\frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = -\dot{\lambda} \dot{Y} = -\dot{Y} \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

L'Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, soit $\partial H / \partial t = 0$. Enfin, comme la saturation sur le contrôle ne dépend pas du temps, on a :

$$\dot{u} \frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

presque partout pour les raisons suivantes. Soit le contrôle u est saturé et constant sur un intervalle de temps et donc $\dot{u} = 0$, soit le contrôle évolue dans l'intervalle $(-\sigma, \sigma)$ et l'équation (4.11) donne $\partial H / \partial u = 0$. Pour ces raisons l'Hamiltonien est une constante.

De plus, comme il n'y a pas de coût terminal et que le temps final est libre, cette constante vaut zéro, ce qui finit de justifier l'équation (4.12).

L'équation (4.11) traduit le fait que le contrôle optimal u^* maximise l'Hamiltonien à chaque instant.

Les conditions de transversalité (4.13) et (4.14) sont déduites des contraintes terminales (4.4). Comme l'opinion du leader n'est pas contrainte au temps final, on en déduit (4.13). Dans l'équation (4.13), les $2n$ multiplicateurs de Lagrange, $\forall i \in \mathcal{N}$, α_{i1} , α_{i2} sont obtenus en appliquant les conditions de Kuhn-Tucker aux $2n$ inégalités suivantes :

$$\begin{cases} a_{i1}(y_i(t_f)) \triangleq \eta + y_i(t_f) \geq 0, \\ a_{i2}(y_i(t_f)) \triangleq \eta - y_i(t_f) \geq 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

qui permettent d'obtenir les conditions de transversalité :

$$\lambda_i^*(t_f) = \alpha_{i1} \frac{\partial a_{i1}}{\partial y_i(t_f)}(y_i^*(t_f)) + \alpha_{i2} \frac{\partial a_{i2}}{\partial y_i(t_f)}(y_i^*(t_f)),$$

soit en d'autres termes (4.14). ■

Les expressions présentées au Théorème 4.3.1 restent génériques. Une forme plus explicite de la dynamique du vecteur d'état adjoint et de la loi de commande optimale est obtenue en utilisant la structure du système (4.3) dans le cas du Problème 4.2.1 avec les contraintes terminales (4.4). Ces résultats font l'objet du Théorème 4.3.4.

Avant de présenter des résultats supplémentaires, notre étude est restreinte de la manière suivante. En se basant sur la littérature classique de la théorie de la commande optimale, on ne considérera que le cas dit *normal*, normalisé tel que $\lambda^o = -1$. Le cas dit *anormal*, où $\lambda^o = 0$, n'est pas traité ici. Pour plus de détails sur le cas anormal, voir [Bonnard et Trélat, 2001] et [Agrachev et Sarychev, 1995]. Cette considération permet la simplification suivant pour le reste de ce chapitre :

$$H(t, Y(t), \lambda(t), \lambda^o, u(t)) = H(t, Y(t), \lambda(t), u(t)) = -1 + \lambda^T(t) F(Y(t), u(t)).$$

Afin d'obtenir le Théorème 4.3.4 qui suit, on utilise principalement l'Hypothèse 4.2.2 (opinions initiales des agents disjointes) qui a permis d'obtenir les Lemmes 4.2.3 (trajectoires des agents disjointes) et 4.2.4 (les contraintes terminales ne portent que sur les agents extrêmes). En conséquences de ces lemmes, les contraintes terminales (4.4) sont précisées dans le lemme suivant.

Lemme 4.3.2. *Sous l'Hypothèse 4.2.2, la contrainte terminale (4.8) se décompose de manière équivalente en l'ensemble des trois conditions suivantes pour les agents extrêmes :*

$$y_1^*(t_f) = -\eta \quad \text{et} \quad y_n^*(t_f) \in (-\eta, \eta), \quad \text{ou} \quad (4.16)$$

$$y_1^*(t_f) \in (-\eta, \eta) \quad \text{et} \quad y_n^*(t_f) = \eta, \quad \text{ou} \quad (4.17)$$

$$y_1^*(t_f) = -\eta \quad \text{et} \quad y_n^*(t_f) = \eta. \quad (4.18)$$

Toujours sous l'Hypothèse 4.2.2, la condition (4.8) implique les appartenances strictes suivantes pour les agents intermédiaires :

$$\forall i \in \{2, \dots, n-1\}, y_i^*(t_f) \in (-\eta, \eta). \quad (4.19)$$

Preuve Le Lemme 4.2.4 précise que la contrainte terminale ne porte que sur les agents extrêmes et pas sur les agents intermédiaires. Pour prouver (4.16)-(4.18) on a seulement besoin de montrer que le cas $(y_1(t_f), y_n(t_f)) \in (-\eta, \eta)^2$ n'est pas optimal. Raisonnons par l'absurde et supposons que le cas $(y_1(t_f), y_n(t_f)) \in (-\eta, \eta)^2$ est optimal. Comme $t_f > 0$ on a soit $y_1(0) \notin [-\eta, \eta]$ soit $y_n(0) \notin [-\eta, \eta]$ ou les deux. Par continuité des trajectoires y_1 et y_n , il existe un instant $t_1 > 0$ tel qu'un des deux cas suivants ait lieu : on a soit $y_1(t_1) = -\eta$ et $y_n(t_1) \in (-\eta, \eta]$ ou bien $y_n(t_1) = \eta$ et $y_1(t_1) \in [-\eta, \eta)$. À l'instant t_1 les contraintes terminales sont satisfaites et on a également $t_1 < t_f$. On en déduit que t_f n'est pas optimal et que $t_f^* \leq t_1$. Sous l'Hypothèse 4.2.2 (opinions initiales des agents disjointes) et grâce aux conditions (4.16)-(4.18), le Lemme 4.2.3 affirme que l'ordre des agents reste le même et assure que les opinions des agents intermédiaires vérifient (4.19). ■

Dans la suite de ce chapitre, l'expression du contrôle optimal dépendra fortement de la somme des états adjoints. Pour simplifier les expressions, on introduit la fonction ϕ , dites de *commutation*, comme la somme des états adjoints.

Définition 4.3.3. La fonction de commutation ϕ est définie telle que :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \end{cases} .$$

On peut dès lors exprimer la dynamique des états adjoints et le contrôle optimal de manière plus explicite. Cela fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.3.4. Sous l'Hypothèse 4.2.2, si le contrôle $u^* \in \Omega_\sigma$ associé à la trajectoire Y^* résout le Problème 4.2.1, alors la fonction vecteur d'état adjoint $\lambda^*(\cdot)$ définie par (4.10) vérifie $\forall t \in [0, t_f^*]$, $\lambda_0^*(t) = 0$ et $\forall i \in \mathcal{N}$:

$$\dot{\lambda}_i^*(t) = \lambda_i^*(t) \left(h'_0(y_i^*(t)) + \sum_{k=1}^n h'(y_k^*(t) - y_i^*(t)) \right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \lambda_k^*(t) h'(y_i^*(t) - y_k^*(t)). \quad (4.20)$$

Les conditions de transversalité (4.14) se réécrivent comme :

$$\begin{cases} \lambda_1^*(t_f) = \alpha_{11} \geq 0, \\ \lambda_i^*(t_f) = 0, \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\}, \\ \lambda_n^*(t_f) = -\alpha_{n2} \leq 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

De plus, la commande en temps optimal est singulière, d'ordre de singularité¹ $q = 1$, et est de la forme :

$$u^*(t) = \begin{cases} -\sigma \text{ signe}(\phi(t)), & \text{si } \phi(t) \neq 0, \\ u_{\text{sing}}(t) \in \Omega_\sigma, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.22)$$

1. Lorsque la fonction ϕ s'annule sur intervalle de temps de mesure non-nulle, le contrôle optimal est dit singulier et l'ordre de singularité correspond alors au plus petit entier q strictement positif tel que la dérivée d'ordre $2q$ de la fonction ϕ par rapport au temps dépende explicitement de u .

où le contrôle singulier u_{sing} peut être obtenu sous certaines conditions, voir Proposition 4.3.5. Finalement, l'Hamiltonien est nul pour tout temps, soit :

$$\forall t \in [0, t_f], H(t, Y^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = 0. \quad (4.23)$$

Preuve Montrons d'abord que $\forall t \in [0, t_f], \lambda_0^*(t) = 0$. Puisque l'opinion du leader $y_0(t) = x_0(t)$ n'intervient pas dans la dynamique des agents (4.3), l'Hamiltonien ne dépend pas non plus de la variable $y_0(t)$. En utilisant la première composante de (4.10), on trouve que $\dot{\lambda}_0^*(t) = 0$ pour tout $t \in [0, t_f]$. Grâce aux conditions de transversalité (4.13) qui donnent la valeur de l'état adjoint au temps final, on a $\lambda_0^*(t_f) = 0$, ce qui finit de prouver que $\forall t \in [0, t_f], \lambda_0^*(t) = 0$. En développant les autres composantes de (4.10), on en déduit les équations différentielles (4.20).

Montrons ensuite (4.21). Comme les contraintes terminales des agents intermédiaires (4.19) portent sur un intervalle ouvert, les inégalités (4.14) ne sont pas actives pour ces mêmes agents. Les multiplieurs de Lagrange associés α_{i1} et α_{i2} pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$ sont donc tous nuls d'après (4.14). Pour les agents extrêmes, on a toujours $y_1^*(t_f) < \eta$ et $y_n^*(t_f) > -\eta$ qui donnent respectivement $\alpha_{12} = 0$ et $\alpha_{n1} = 0$. En résumé, les conditions de transversalité (4.14) se traduisent par (4.21). Plus précisément, les conditions sur les agents extrêmes (4.16)-(4.18) se traduisent respectivement par $\{\alpha_{11} > 0, \alpha_{n2} = 0\}$, $\{\alpha_{11} = 0, \alpha_{n2} > 0\}$ et $\{\alpha_{11} > 0, \alpha_{n2} > 0\}$.

Montrons enfin que $u^*(t) = -\sigma \text{signe}(\phi(t))$, quand $\phi(t) \neq 0$. Comme la dynamique du système (4.3) est affine en la commande u , l'Hamiltonien H l'est aussi. Dans l'expression de l'Hamiltonien, le terme dépendant du contrôle u s'écrit $-\phi(t) u(t)$, où ϕ est la fonction de commutation introduite par la Définition 4.3.3. Comme le contrôle optimal $u^*(t)$ maximise l'Hamiltonien à chaque instant t , on en déduit que :

$$\arg \max_{v \in [-\sigma, \sigma]} H(t, Y^*(t), \lambda^*(t), v) = \begin{cases} -\sigma, & \text{si } \phi(t) > 0, \\ +\sigma, & \text{si } \phi(t) < 0. \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire que $u^*(t) = -\sigma \text{signe}(\phi(t))$, quand $\phi(t) \neq 0$.

Dans le cas $\phi(t) = 0$, la fonction de commutation $\phi(t)$ est explicitement indépendante du contrôle $u(t)$. La dérivée première de la fonction de commutation $\dot{\phi}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{\lambda}_i(t)$ est aussi explicitement indépendante de $u(t)$ d'après l'équation (4.20). La dérivée seconde $\ddot{\phi}(t)$ fera intervenir la dynamique des agents $\dot{y}_i(t)$ donc dépendra explicitement de $u(t)$. L'ordre de singularité est bien $q = 1$. (Voir dans la suite la Proposition 4.3.5). ■

Le reste de cette section est consacré à l'obtention du contrôle singulier u_{sing} apparaissant dans l'équation (4.22). On cherche alors à obtenir le contrôle optimal lorsque la fonction de commutation ϕ s'annule sur un intervalle de temps de mesure non-nulle, voir également [Chitour et al., 2008].

Si, pour un intervalle donné, la fonction de commutation ϕ est non-nulle presque partout sauf sur un ensemble de mesure nulle, alors le contrôle est donné par (4.22) et est appelé *contrôle bang-bang*. Le contrôle bang-bang est ainsi dénommé parce qu'il est constamment saturé, avec de possibles commutations entre les différentes saturations (deux dans notre cas, $+\sigma$ et $-\sigma$), voir également [Lee et Markus, 1967]. Le problème

de savoir si le nombre de commutations est fini ou bien infini est difficile à résoudre. La technique utilisée dans [Sussmann, 1979] pour résoudre cette question utilise des crochets de Lie mais n'est pas applicable en pratique à notre système à cause des fortes non-linéarités des fonctions d'influences h_0 et h et à cause de la potentielle grande dimension $(n+1)$ du système. De ce fait, nous laissons la question du nombre de commutations ouverte. On notera juste qu'un nombre de commutations infini sur une durée finie engendre le phénomène de Zénon, aussi appelé Problème de Fuller en contrôle optimal, voir [Jurđjević, 1996, Section 10].

D'autre part, la fonction de commutation ϕ peut rester nulle sur un intervalle de temps non trivial. Le contrôle est alors appelé *contrôle singulier* comme dénommé dans [Johnson et Gibson, 1963]. Une expression du contrôle singulier u_{sing} introduite à l'équation (4.22) du Théorème 4.3.4 précédent peut alors être obtenue. Ceci grâce à l'hypothèse que les fonctions d'influences sont \mathcal{C}^2 et en utilisant le fait que le système est affine en la commande. Il est ainsi possible de dériver deux fois la fonction de commutation ϕ pour obtenir une expression implicite de la commande singulière. Ce résultat est contenu dans la proposition suivante.

Proposition 4.3.5. *Soit $\mathcal{T} \subset [0, t_f]$ un intervalle de temps non trivial tel que :*

$$\forall t \in \mathcal{T}, \sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i^*(t) h_0''(y_i^*(t)) \neq 0 \quad (4.24)$$

et

$$\phi(t) = 0, \dot{\phi}(t) = 0, \text{ et } \ddot{\phi}(t) = 0, \quad (4.25)$$

alors pour tout $t \in \mathcal{T}$, on obtient l'expression du contrôle singulier $u_{sing}(t) = \text{sat}(u_0(t))$ où

$$u_0(t) \triangleq \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} A_i(\lambda^*(t), Y^*(t))}{\sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i^*(t) h_0''(y_i^*(t))}, \quad (4.26)$$

avec les termes :

$$\begin{aligned} A_i(\lambda^*(t), Y^*(t)) = & \dot{\lambda}_i^*(t) \left(h_0'(y_i^*(t)) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n h'(y_k^*(t) - y_i^*(t)) \right) \\ & + \lambda_i^*(t) h_0''(y_i^*(t)) \left(\sum_{k=1}^n h(y_k^*(t) - y_i^*(t)) - h_0(y_i^*(t)) \right) \\ & + \lambda_i^*(t) \left(\sum_{k=1}^n (\dot{y}_k^*(t) - \dot{y}_i^*(t)) h''(y_k^*(t) - y_i^*(t)) \right) \\ & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \dot{\lambda}_k^*(t) h'(y_i^*(t) - y_k^*(t)) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \lambda_k^*(t) h''(y_i^*(t) - y_k^*(t)) (\dot{y}_i^*(t) - \dot{y}_k^*(t)). \end{aligned}$$

où les dérivées $\dot{\lambda}_i^*(t)$ et $(\dot{y}_i^*(t) - \dot{y}_k^*(t))$ ne sont bien fonction uniquement de la trajectoire optimale $(\lambda^*(t), Y^*(t))$ et explicitement indépendantes du contrôle $u(t)$.

Preuve Soit $t \geq 0$ tel que (4.25) soit vérifiée et soit $i \in \mathcal{N}$. Pour rappel on a :

$$\dot{\lambda}_i^*(t) = \lambda_i^*(t) \left(h'_0(y_i^*(t)) + \sum_{k=1}^n h'(y_k^*(t) - y_i^*(t)) \right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \lambda_k^*(t) h'(y_i^*(t) - y_k^*(t)).$$

Comme la fonction h est \mathcal{C}^2 on peut écrire :

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_i^*(t) &= \dot{\lambda}_i^*(t) \left(h'_0(y_i^*(t)) + \sum_{k=1}^n h'(y_k^*(t) - y_i^*(t)) \right) + \lambda_i^*(t) \dot{y}_i^*(t) h''_0(y_i^*(t)) \\ &\quad + \lambda_i^*(t) \sum_{k=1}^n (\dot{y}_k^*(t) - \dot{y}_i^*(t)) h''(y_k^*(t) - y_i^*(t)) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \dot{\lambda}_k^*(t) h'(y_i^*(t) - y_k^*(t)) \\ &\quad - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \lambda_k^*(t) (\dot{y}_i^*(t) - \dot{y}_k^*(t)) h''(y_i^*(t) - y_k^*(t)). \end{aligned}$$

L'unique terme où apparaît le contrôle $u(t)$ est $\lambda_i^*(t) \dot{y}_i^*(t) h''_0(y_i^*(t))$. Cette propriété provient du fait que la dépendance en $u(t)$ dans $\dot{y}_i(t)$ est linéaire selon (4.3) et indépendante de l'agent i . Ces contributions se compensent donc dans les différences $(\dot{y}_k^*(t) - \dot{y}_i^*(t))$ et $(\dot{y}_i^*(t) - \dot{y}_k^*(t))$. En annulant $\ddot{\phi}(t) = \sum_{i=1}^n \ddot{\lambda}_i(t)$, on obtient l'expression du contrôle singulier (4.26), et ce grâce à l'hypothèse (4.24). ■

Remarquons que la condition (4.24) est importante pour l'obtention de l'expression de la commande singulière u_{sing} . Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, le PMP ne permet pas d'obtenir l'expression du contrôle singulier à appliquer. On remarque également que dans la Proposition 4.3.5 le contrôle singulier est donné avec une saturation. Cette précaution, qui a pour but de rappeler que $u^* \in \Omega_\sigma$, est en fait superflue. Effectivement, si le contrôle $u_0(t) \notin [-\sigma, \sigma]$ s'applique à l'instant $t \geq 0$, alors le contrôle singulier n'est plus admissible et on a $|u^*(t)| = \sigma \neq |u_0(t)|$ et alors $\phi(t)$ ne peut plus être nulle.

La Proposition 4.3.5 donne une expression implicite du contrôle singulier fonction de la trajectoire optimale $(\lambda^*(t), Y^*(t))$. Un problème aux limites (ou aux deux bords) est obtenu en combinant la dynamique du système (4.3), la dynamique des états adjoints (4.20) avec les conditions de transversalité (4.21) et les lois de commande (4.22) et (4.26). Ce problème aux limites présente de fortes non-linéarités, un couplage entre les dynamiques et la commande, une expression implicite des temps de commutation et potentiellement une grande dimension en fonction du nombre d'agents du système. Par conséquent, obtenir la loi de commande en temps optimal via des méthodes numériques est un défi au vu de la sensibilité du problème. Des méthodes de tir peuvent être utilisées pour résoudre notre problème, voir [Maurer, 1976] et [Stoer et Bulirsch, 2002, Section 7.3] pour plus de détails. Bien que nous ne puissions pas le prouver, les simulations numériques présentées Section 4.5 confirment l'optimalité des lois de commande (4.22) et (4.26).

Le PMP ne donne que des conditions nécessaires d'optimalité. Plusieurs commandes candidates peuvent satisfaire à ces conditions nécessaires d'optimalité. Parmi ces commandes, certaines ne sont potentiellement pas optimales parce qu'elle génère une valeur de temps final plus élevée que celles données par d'autres commandes. En d'autres

termes, ces commandes ne sont pas optimales parce qu'elles aboutissent à une valeur de temps final représentant des minima locaux de l'application $u \mapsto t_f$. Les commandes qui sont optimales sont celles qui donnent le plus petit temps final parmi toutes les commandes vérifiant les conditions nécessaires du PMP.

Dans la section suivante on considère le cas simplifié où il n'y a pas d'interaction entre les agents et où seul le leader influence les agents. Dans ce cas, l'analyse sera plus approfondie grâce aux simplifications induites.

4.4 Cas particulier sans interaction entre agents

Dans certains cas de figure, il se peut que les communications entre agents d'un système soient difficiles (grandes distances géographiques entre les agents, faibles capacités de communication, etc ...). Dans de tels cas, un accord global ne serait possible que par l'introduction d'un leader pour rassembler tous les agents. On considère alors dans cette section le cas particulier du système (4.3) où les agents ne s'influencent pas les uns les autres. Seul le leader influence alors les agents. Cela permet également de mettre en avant le rôle du leader. Cette propriété est contenue dans l'hypothèse suivante. Cela permet également d'approfondir l'analyse, notamment grâce aux simplifications de l'Hamiltonien et de la dynamique des états adjoints.

Hypothèse 4.4.1. La fonction d'influence f est la fonction nulle, c'est-à-dire $f \equiv 0$.

Cette hypothèse simplifie les expressions données Sections 4.1 et 4.2 puisque toute influence entre agents est supprimée. En effet, sous l'Hypothèse 4.4.1, la dynamique du système (4.3) devient, pour tout $i \in \mathcal{N}$:

$$\begin{cases} \dot{y}_0(t) &= u(t), \\ \dot{y}_i(t) &= -h_0(y_i(t)) - u(t). \end{cases} \quad (4.27)$$

Les résultats de la Section 4.3 précédente restent valides sous l'Hypothèse 4.4.1. La principale conséquence de l'Hypothèse 4.4.1 est que tous les états adjoints des agents intermédiaires sont nuls et que seuls les états adjoints des agents extrêmes peuvent ne pas l'être. Ceci est donné par le théorème suivant.

Théorème 4.4.2. Sous les Hypothèses 4.2.2 et 4.4.1, si le contrôle $u^* \in \Omega_\sigma$ associé à la trajectoire Y^* résout le Problème 4.2.1 de commande optimale, alors pour tout $t \in [0, t_f]$ on a :

$$\forall i \in \{2, \dots, n-1\}, \lambda_i^*(t) = 0, \quad (4.28)$$

et les états adjoints des agents extrêmes vérifient :

$$\forall i \in \{1, n\}, \dot{\lambda}_i^*(t) = \lambda_i^*(t) h'_0(y_i^*(t)), \quad (4.29)$$

avec les conditions de transversalité :

$$\begin{cases} \lambda_1^*(t_f) = \alpha_{11} \geq 0, \\ \lambda_n^*(t_f) = -\alpha_{n2} \leq 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Le contrôle optimal est singulier, d'ordre de singularité $q = 1$ et est de la forme :

$$u^*(t) = \begin{cases} -\sigma \text{signe}(\lambda_1^*(t) + \lambda_n^*(t)), & \text{si } (\lambda_1^*(t) + \lambda_n^*(t)) \neq 0, \\ u_{\text{sing}}(t) \in \Omega_\sigma, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.31)$$

L'Hamiltonien vérifie (4.23) et s'écrit :

$$H(t, Y^*(t), \lambda^*(t), u(t)) = -1 - (\lambda_1^*(t) + \lambda_n^*(t))u(t) - \lambda_1^*(t)h_0(y_1(t)) - \lambda_n^*(t)h_0(y_n(t)). \quad (4.32)$$

Preuve Grâce à l'Hypothèse (4.4.1) appliquée à la dynamique des états adjoints (4.20), on obtient (4.29). Combiné aux contraintes terminales sur les agents intermédiaires dans (4.21), on en déduit que :

$$\forall (i, t) \in \mathcal{N} \times [0, t_f], \lambda_i^*(t) = 0.$$

La fonction de commutation s'écrit alors :

$$\phi(t) = \lambda_1^*(t) + \lambda_n^*(t).$$

et permet d'en déduire l'expression de l'Hamiltonien donnée par (4.32). ■

Le Théorème (4.4.2) donne une forme générique du contrôle optimal lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre les agents. Afin de déterminer si le contrôle est saturé ou bien singulier, il est nécessaire d'obtenir plus d'informations sur les états adjoints. C'est l'objectif du résultat intermédiaire suivant.

Lemme 4.4.3. *Sous les Hypothèses (4.2.2) et (4.4.1) les quantités $\lambda_1^*(t)$ et $\lambda_n^*(t)$ gardent le même signe pour tout $t \in [0, t_f]$.*

Preuve Soit $i \in \{1, n\}$ et supposons $\lambda_i(t_f) < 0$, le cas où $\lambda_i(t_f) > 0$ étant obtenu via le même raisonnement. Notons $t' = t_f - t$ la variable de temps rétrograde. On note également $\gamma_i(t') = \lambda_i(t_f - t)$ et $z_i(t') = y_i(t_f - t)$. Comme :

$$\frac{dt}{dt'} = -1,$$

on a :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i(t') &= \frac{d\gamma_i(t')}{dt'} \\ &= \frac{d\lambda_i(t_f - t)}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ &= -\dot{\lambda}_i(t_f - t) \\ &= -\lambda_i(t_f - t) h'_0(y_i(t_f - t)), \end{aligned}$$

qui donne :

$$\dot{\gamma}_i(t') = -\gamma_i(t') h'_0(z_i(t')). \quad (4.33)$$

Notons alors $w(t')$ tel que $w(0) = \gamma_i(0) = \lambda_i(t_f) < 0$ et :

$$\dot{w}(t') = -w(t') h'_0(0).$$

Par intégration sur $[0, t_f]$ on a :

$$w(t') = w(0) \exp(h'_0(0) t').$$

qui vérifie $\forall t' \in [0, t_f]$, $w(t') < 0$ car $w(0) < 0$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'_0(x) \leq h'_0(0)$, on a $\forall t' \in [0, t_f]$:

$$-w(t') h'_0(z_i(t')) \leq -w(t') h'_0(0).$$

Le Lemme de Comparaison de [Khalil et Grizzle, 2002, Chapitre 3, Lemme 3.4] appliqué à l'équation précédente et (4.33) permettent d'affirmer que pour tout $t' \in [0, t_f]$, on a $\gamma_i(t') \leq w(t')$. Mais $\forall t' \in [0, t_f]$, $w(t') < 0$ donc pour tout $t' \in [0, t_f]$, on a $\gamma_i(t') < 0$. Ce qui permet de déduire que $\forall t \in [0, t_f]$, $\lambda_i(t) < 0$. ■

Le lemme précédent donne des informations séparées sur le signe des états adjoints, mais ne permet pas de conclure, à ce stade dans sa forme générique, sur la somme des états adjoints, à savoir la fonction de commutation ϕ , permettant de déterminer le contrôle optimal $u^*(t)$ donné par le Théorème 4.4.2.

Afin d'obtenir une expression explicite du contrôle optimal fondée sur les conditions nécessaires du Théorème 4.4.2, on distingue désormais deux cas. Le premier cas, dont la Section 4.4.1 fait l'objet, concerne les conditions (4.16) et (4.17) lorsqu'un seul des agents extrêmes est à une distance η du leader au temps final. Le second cas, étudié Section 4.4.2, concerne la condition (4.18) où les deux agents extrêmes sont chacun à une distance η du leader. Dans les deux cas, les résultats sont obtenus grâce au précédent lemme.

4.4.1 Contrainte active à un bord

Dans cette sous-section on considère les configurations finales décrites par (4.16) et (4.17), lorsqu'un seul agent extrême se trouve à une distance η du leader au temps final. On présentera également la loi de commande qui satisfait les conditions nécessaires d'optimalité du PMP pour ces configurations.

Proposition 4.4.4. *Sous les Hypothèses 4.2.2 et 4.4.1, si la configuration finale est (4.16) ou (4.17), alors :*

$$\forall t \in [0, t_f], u^*(t) = \sigma \text{signe}(y_{i_0}^*(t_f)), \quad (4.34)$$

est l'unique loi de commande vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité, avec $i_0 \in \{1, n\}$ tel que $|y_{i_0}^*(t_f)| = \eta$.

Preuve Considérons la configuration finale (4.16) telle que $y_1(t_f) = -\eta$ et $y_n(t_f) \in (-\eta, \eta)$. L'idée de la preuve est la même pour la configuration restante (4.17). Soit $i_0 = 1$. Les conditions de transversalité (4.30) donnent alors $\lambda_1^*(t_f) > 0$ et $\lambda_n^*(t_f) = 0$. D'après le Lemme 4.4.3, on a pour tout $t \in [0, t_f]$, $\lambda_1^*(t) > 0$ et $\lambda_n^*(t) = 0$. On en déduit que la fonction de commutation $\phi(t) = \lambda_1^*(t) > 0$ est de signe opposé à celui de $y_1^*(t_f) = -\eta < 0$, ce qui conclut la preuve. ■

Le théorème précédent donne la loi de commande à appliquer quand la configuration finale ne fait intervenir qu'une seule contrainte active sur les deux (configurations (4.16) et (4.17)). Cette loi consiste à appliquer un contrôle saturé à chaque instant.

Remarquons également que cette loi de commande ne dépend pas des états adjoints, mais uniquement de l'état de l'agent qui se trouve au bord de l'intervalle $[-\eta, \eta]$ au temps final. Comme la commande donnée par le Théorème 4.4.4 ne dépend pas des états adjoints, la trajectoire du système peut être obtenue numériquement grâce à un solveur d'équation différentielle ordinaire (o.d.e). Cette technique est utilisée dans la Section 4.5.1

Le corollaire suivant donne la contraposée de la Proposition 4.4.4

Corollaire 4.4.5. *Sous les Hypothèses 4.2.2 et 4.4.1, si le contrôle optimal n'est pas uniformément égal à un des extrêmes σ ou $-\sigma$, alors la configuration finale est celle de (4.18), où chaque agent extrême se trouve à un bord de l'intervalle $[-\eta, \eta]$.*

Les seules lois de commande candidates qui satisfont aux conditions nécessaires du PMP lorsqu'un seul agent extrême est au bord du voisinage du leader au temps final sont les contrôles uniformément saturés $\forall t \geq 0, u^*(t) = \sigma$ ou $\forall t \geq 0, u^*(t) = -\sigma$.

On traitera le cas de la configuration (4.18) restante dans la sous-section suivante.

4.4.2 Contraintes actives aux deux bords

Cette sous-section est consacrée à la configuration finale (4.18) qui se présente lorsque les deux agents extrêmes sont tous les deux à une distance η du leader au temps final.

La proposition suivante, similaire à la Proposition 4.3.5, donne une expression du contrôle singulier à appliquer lorsque la fonction de commutation reste nulle sur un intervalle de temps non trivial.

Proposition 4.4.6. *Sous les Hypothèses 4.2.2 et 4.4.1, soit $\mathcal{T} \subset [0, t_f]$ un intervalle de temps tel que :*

$$\forall t \in \mathcal{T}, h_0''(y_n(t)) \neq h_0''(y_1(t)) \quad (4.35)$$

et :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \phi(t) = 0, \dot{\phi}(t) = 0, \text{ et } \ddot{\phi}(t) = 0, \quad (4.36)$$

alors pour tout $t \in \mathcal{T}, (y_1^*(t), y_n^*(t)) \in \mathcal{M}$ où la variété \mathcal{M} s'écrit :

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_0'(x) = h_0'(y)\}.$$

De plus, la loi de commande optimale est singulière avec $u^*(t) = u_{sing}(t) = \text{sat}(u_0(t))$ où :

$$u_0(t) = \frac{h_0''(y_1(t)) h_0(y_1(t)) - h_0''(y_n(t)) h_0(y_n(t))}{h_0''(y_n(t)) - h_0''(y_1(t))}. \quad (4.37)$$

Preuve Voir Annexe 4.A à la fin du chapitre. ■

Grâce à la proposition précédente et au Théorème 4.4.2, on peut connaître le contrôle à appliquer à chaque instant, à condition de connaître le vecteur des états adjoints à chaque instant. Remarquons également que si la valeur de u_0 donnée par (4.37) dépasse la valeur de la saturation, alors le contrôle réellement appliqué au leader sera la saturation et il n'y a alors aucune garantie que (4.36) reste valable aux instants suivants. Ce phénomène sera observé dans la Section 4.5.1. Le corollaire suivant considère un cas particulier où le contrôle singulier u_0 devient plus simple à interpréter.

Corollaire 4.4.7. *Sous les Hypothèses [4.2.2](#) et [4.4.1](#), soit $t \in [0, t_f]$. Si $y_1^*(t) = -y_n^*(t)$ et si les conditions [\(4.35\)](#) et [\(4.36\)](#) sont vérifiées, alors on a $u^*(t) = 0$.*

Preuve Soit $t \in [0, t_f]$ tel que $y_1^*(t) = -y_n^*(t)$. Comme la condition [\(4.35\)](#) est vérifiée, le dénominateur du contrôle singulier [\(4.37\)](#) n'est pas nul. Par définition, les fonctions h_0 et h_0'' sont impaires, donc le numérateur du contrôle singulier [\(4.37\)](#) vaut zéro. Ceci démontre le résultat. ■

En d'autres termes, si la fonction de commutation s'annule lorsque le leader est au milieu des deux agents extrêmes, alors le contrôle singulier est nul, ce qui signifie que le leader ne modifie pas son opinion. Le corollaire précédent permet d'obtenir le résultat suivant, qui décrit un comportement particulier du système.

Lemme 4.4.8. *Soit $t_1 \geq 0$ tel que $y_1^*(t_1) = -y_n^*(t_1)$, et tel que la fonction de commutation satisfasse à $\phi(t_1) = 0$ et $\dot{\phi}(t_1) = 0$. Alors le contrôle singulier $\forall t \geq t_1, u^*(t) = 0$ satisfait les conditions nécessaires d'optimalité du PMP et donne $y_n^*(t_f) = -y_1^*(t_f) = \eta$.*

Preuve Pour tout $t \geq t_1$, en appliquant la commande $u(t) = 0$ on a pour tout $i \in \{1, n\}$, $\dot{y}_i(t) = -h_0(y_i(t))$. Comme $y_1(t_1) = -y_n(t_1)$ et que la fonction h_0 est impaire, on obtient que pour tout $t \geq t_1$, $\dot{y}_1(t) = -\dot{y}_n(t)$. Ce qui amène au résultat du lemme. ■

Le lemme précédent engendre des trajectoires qui ont été observées lors de simulations numériques qui sont présentées Section [4.5.1](#). Lorsque le contrôle singulier s'applique et que le leader est au milieu des deux agents, alors le leader ne modifie plus son opinion jusqu'au temps final.

Cette section a permis de proposer des lois de commande candidates qui dépendent du signe de la fonction de commutation ϕ . Cependant, le PMP ne permet pas de connaître le comportement de la fonction de commutation quand la configuration finale est celle de [\(4.18\)](#) (les deux agents extrêmes sont au bords du voisinage du leader). Dans ce cas, on se tournera alors vers des techniques d'optimisation numérique pour résoudre le Problème [4.2.1](#). Comme cela sera détaillé dans la Section [4.5.1](#), il y a une corrélation claire entre les valeurs du contrôle obtenues numériquement et la valeur théorique du contrôle singulier donnée dans la Proposition [4.4.6](#).

4.4.3 Résumé de l'approche

Les deux sous-sections précédentes ainsi que le Lemme [4.3.2](#) montrent que les lois de commandes en temps optimal candidates figurent parmi les trois stratégies ou famille de lois suivantes :

- \mathcal{S}_+ (respectivement \mathcal{S}_-) désigne la stratégie de contrôle qui consiste à appliquer un contrôle de valeur constante $\forall t \geq 0, u(t) = +\sigma$ (respectivement $u(t) = -\sigma$) comme suggéré par la Proposition [4.4.4](#). Pour ces stratégies, le contrôle est indépendant des états adjoints. Les temps finaux induits t_f^+ (respectivement t_f^-) sont obtenus par intégration des équations différentielles ordinaires des deux agents extrêmes d'indices 1 et n , avec les conditions initiales $(y_1(0), y_n(0))$. Comme l'influence entre les agents est nulle dans cette section, les agents intermédiaires ne jouent aucun rôle quand à la valeur du temps final. Il n'est donc pas nécessaire d'intégrer leurs dynamiques pour connaître t_f .

- \mathcal{S}_0 désigne toutes les autres stratégies autres que \mathcal{S}_+ et \mathcal{S}_- . La stratégie \mathcal{S}_0 peut potentiellement impliquer des commutations et/ou consister à appliquer le contrôle singulier donné dans la Proposition 4.4.6 sur un intervalle de temps de mesure non-nulle. Cette stratégie implique la résolution d'un problème aux limites avec les conditions initiales $(y_1(0), y_n(0))$ données et les conditions finales fixées au point $(y_1(t_f), y_n(t_f)) = (-\eta, \eta)$. D'un point de vue numérique, cette stratégie est la plus difficile pour l'obtention du temps final t_f^0 . Voir [Trélat, 2008, Chapitre 9, Section 3] pour plus de raffinement à propos des méthodes numériques.

Afin de savoir laquelle ou lesquelles des stratégies décrites précédemment sont optimales, il suffit d'appliquer celles parmi \mathcal{S}_+ , \mathcal{S}_- et \mathcal{S}_0 qui donnent le temps final le plus faible, à savoir $t_f^* = \min\{t_f^+, t_f^-, t_f^0\}$.

Cette section a permis de présenter les résultats obtenus dans le cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre les agents. La section suivante est consacrée à des illustrations numériques des contributions de ce chapitre.

4.5 Illustrations

Cette section présente des simulations numériques afin d'illustrer les résultats obtenus dans ce chapitre. On donnera d'abord des exemples détaillés du cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre les agents, afin d'illustrer les résultats les plus aboutis et les plus explicites de ce chapitre. On s'intéressera ensuite au cas général où il y a interactions entre les agents, cas pour lequel les simulations numériques sont plus délicates à mettre en œuvre.

4.5.1 Cas sans interaction entre les agents

Cette section est consacrée aux résultats de simulations numériques qui complètent ceux théoriques donnés Section 4.4 pour résoudre le Problème 4.2.1 quand il n'y a pas d'interaction entre les agents du système. Nous montrons également comment choisir la loi de commande optimale pour des cas pratiques de fonction d'influence f_0 . La méthodologie proposée se généralise à toute autre fonction satisfaisant les hypothèses données lors de la présentation du système Section 4.1. Sous l'Hypothèse 4.4.1 qui stipule que la fonction d'influence entre agents f est nulle et grâce au Théorème 4.4.2 qui affirme que les états adjoints des agents intermédiaires sont nuls, nous avons montré que le Problème 4.2.1 de dimension n se réduit à un problème de dimension 2 en ne considérant que les agents extrêmes (d'indices 1 et n) et le leader. Seules les trajectoires des agents extrêmes y_1 et y_n interviennent dans l'évolution des états adjoints (voir Théorème 4.4.2). Nous proposons alors une analyse plus approfondie en visualisant les résultats dans les plans $(y_1(t), y_n(t))$ et $(y_1(0), y_n(0))$.

Présentons d'abord la méthodologie utilisée pour déterminer la stratégie de commande optimale parmi \mathcal{S}_+ , \mathcal{S}_- et \mathcal{S}_0 en fonction des conditions initiales des agents extrêmes $(y_1(0), y_n(0))$. Cette détermination permettra, par la même occasion de fournir les valeurs optimales suivantes : le temps final t_f^* , la commande u^* et les trajectoires Y^*

et λ^* . Pour résoudre le Problème 4.2.1 associé à la condition initiale $(y_1(0), y_n(0))$, on procède de la manière suivante.

- Premièrement, en utilisant le Théorème 4.4.4, on calcule les temps finaux quand la stratégie utilisée est \mathcal{S}_+ ou \mathcal{S}_- , c'est-à-dire en appliquant $u(t) = -\sigma$ ou $u(t) = \sigma$ uniformément pour tout $t \in [0, t_f]$. Comme ces stratégies ne dépendent pas des états adjoints λ , il suffit d'intégrer numériquement (4.3) avec une condition d'arrêt quand les contraintes terminales $(y_1(t_f), y_n(t_f)) \in [-\eta, \eta]^2$ sont satisfaites. Si les contraintes terminales ne sont jamais atteintes, alors on a $t_f = +\infty$ et on sait déjà que la stratégie associée n'est pas optimale.

- Deuxièmement, pour obtenir la loi de commande associée à la stratégie \mathcal{S}_0 , il est nécessaire de connaître la fonction de commutation ϕ , somme des états adjoints. En pratique la fonction ϕ n'a pas pu être déterminée. Une version discrétisée en temps du Problème 4.2.1 est résolue numériquement à l'aide d'un schéma d'optimisation non-linéaire contraint suivant qui n'utilise pas la fonction de commutation ϕ , sur le modèle de [Trélat, 2008, Chapitre 9, Section 3].

Méthode numérique : Le problème de minimiser le temps final t_f est traité avec la fonction `fmincon` du logiciel de calcul MATLAB comme suit. Les variables d'optimisation sont le temps final t_f et le contrôle discrétisé en temps u_k , pour $k \in \{1, \dots, N\}$ où N est le nombre d'échantillons. Le contrôle en temps continu $u(t)$ est discrétisé en temps de la manière suivante :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \forall t \in \frac{t_f}{N}[k-1, k], u(t) = u_k,$$

À partir des conditions initiales du système $Y(0)$, des contrôles u_k et de l'instant t_f , on déduit l'état du système au temps final $Y(t_f)$ par intégration de (4.3) avec un solveur o.d.e. Les contraintes du problème sont la saturation du contrôle $u_k \in [-\sigma, \sigma]$ pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, ainsi que les conditions finales $y_1(t_f) = -\eta$ et $y_n(t_f) = \eta$. En effet, d'après le Corollaire 4.4.5, si la stratégie \mathcal{S}_0 est optimale, alors la configuration finale est celle de (4.18) (les agents extrêmes sont aux deux bords du voisinage du leader).

- Finalement, pour obtenir la ou les commandes optimales, on compare les trois temps finaux obtenus à partir des trois stratégies et on retient la ou les commandes candidates associée(s) à la valeur la plus faible.

On considère par la suite un système multi-agents de dynamique (4.3) avec $n = 10$ agents. On fixe la fonction d'influence entre agents à $f \equiv 0$, conformément à l'Hypothèse 4.4.1 puisqu'il n'y a pas d'interaction entre agents. La fonction d'influence du leader sur les agents est fixée telle que $f_0 = x \mapsto 1/(1+x^2)$, la saturation de la commande est fixée à $\sigma = 1.5$ et le rayon du voisinage dans lequel rassembler les agents autour du leader est de $\eta = 0.5$.

Exemple 1 : Considérons le cas particulier suivant, composé des conditions initiales $(x_0(0), x_1(0), x_n(0)) = (0, 1, 1.9)$, et où les huit agents restant sont uniformément répartis entre les agents extrêmes. À partir de cette condition initiale, les trois stratégies sont

appliquées séparément. D'une part la stratégie \mathcal{S}_- donne un temps final $t_f^- = +\infty$ car les contraintes finales ne sont pas atteignables avec cette loi de commande. D'autre part, la stratégie \mathcal{S}_+ donne un temps final fini $t_f^+ = 0.27$. Enfin, on applique la stratégie \mathcal{S}_0 via le schéma d'optimisation précédemment décrit et on obtient $t_f^0 = 0.68$. En comparant les temps finaux, on en déduit que la stratégie optimale est la stratégie \mathcal{S}_+ . La trajectoire du système est illustrée Figure 4.1.

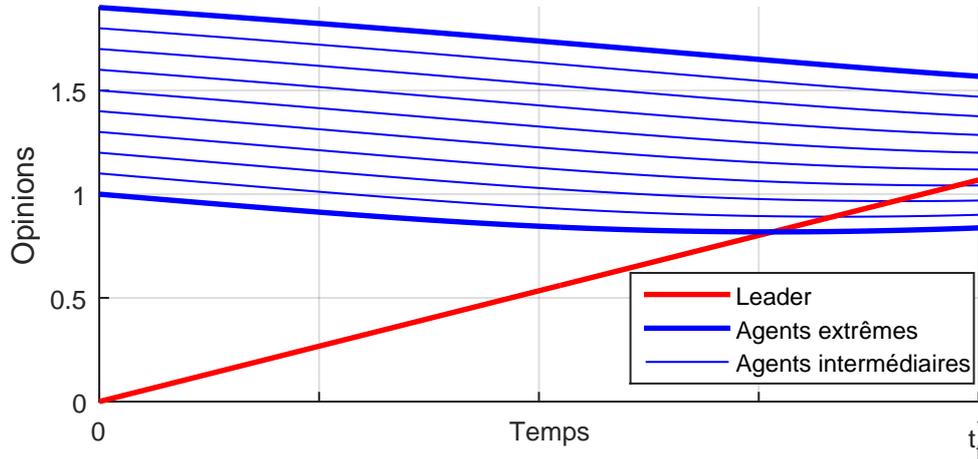


FIGURE 4.1 – Trajectoires des opinions des agents (en bleu) et du leader (en rouge) lorsque la stratégie \mathcal{S}_+ est optimale et appliquée.

Sur la Figure 4.1, remarquons tout d'abord que le leader se situe initialement sous les agents. Conformément à la stratégie \mathcal{S}_+ , le leader augmente son opinion avec une vitesse maximale égale à σ . Au temps final, la seule contrainte active est $y_n(t_f) = \eta$, ce qui concorde avec le Théorème 4.4.4. Remarquons également que lorsque le leader croise l'agent 1, ce dernier diminue d'abord son opinion puis la ré-augmente légèrement une fois que le leader l'a dépassé.

Exemple 2 : On applique ensuite notre méthodologie à un autre cas, avec les conditions initiales $(x_0(0), x_1(0), x_n(0)) = (0, 1, 6)$. En appliquant en premier lieu les stratégies \mathcal{S}_+ et \mathcal{S}_- on trouve $t_f^+ = t_f^- = +\infty$. Cela permet d'en déduire que la stratégie optimale est la stratégie \mathcal{S}_0 qui amène le système en $(y_1(t_f), (y_n(t_f))) = (-\eta, \eta)$. Le temps t_f^0 a ici été obtenu en deux étapes.

Un premier essai a consisté à résoudre le Problème 4.2.1 avec le schéma d'optimisation numérique direct pour une version en temps discret du système (4.3) précédemment décrite (comme dans [Irélat, 2008, Chapitre 9, Section 3]). Aucune hypothèse n'a été faite sur le contrôle, en dehors de $u^* \in \Omega_\sigma$.

Deuxièmement, en tenant compte du fait que le contrôle singulier u_0 ne dépend que de l'état des agents extrêmes, on contraint le contrôle optimal à valoir $u_0(t)$ lorsque l'on a $(y_1(t), y_n(t)) \in \mathcal{M}$, comme énoncé Proposition 4.4.6. En utilisant cette contrainte, on obtient une diminution de 1% de la valeur de t_f^0 , soit $t_f^* = t_f^0 = 5.4$. On conserve donc cette dernière stratégie comme stratégie optimale.

La Figure 4.2 montre, dans le plan $(y_1(t), y_n(t))$, la trajectoire obtenue en appliquant la stratégie \mathcal{S}_0 au système via le schéma d'optimisation numérique précédemment détaillé.

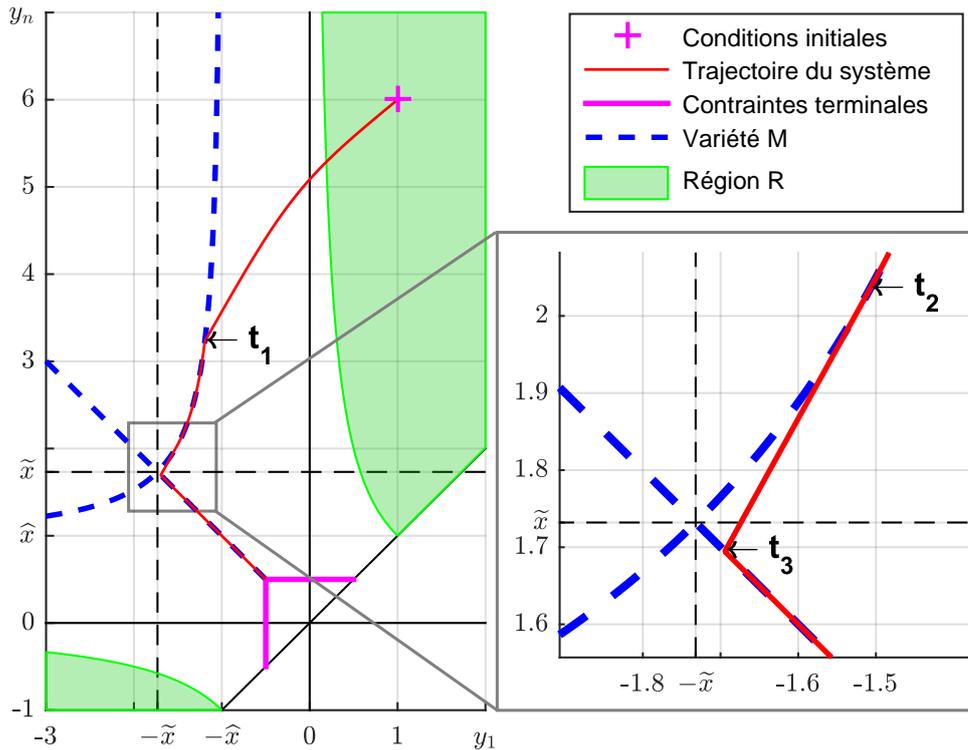


FIGURE 4.2 – Trajectoires des agents extrêmes dans le plan $(y_1(t), y_n(t))$. La condition initiale est marquée par une croix violette. La courbe rouge désigne la trajectoire du système correspondant à la stratégie S_0 . Les contraintes terminales sont représentées par le demi-carré violet. La variété \mathcal{M} où la fonction de commutation ϕ peut rester nulle pour sur un intervalle de temps est désignée par des tirets bleus. La zone verte désigne la région \mathcal{R} définie en Annexe par (4.38), région où la fonction de commutation ϕ ne peut pas s’annuler. Les notations \tilde{x} et \hat{x} désignent respectivement le point d’inflexion et le maximum de la fonction h_0 utilisée dans cet exemple.

Remarquons tout d’abord que les conditions initiales se situent dans la zone \mathcal{R} définie dans le Corollaire 4.7.3 en Annexe 4.A à la fin de ce chapitre. Dans cette région, la fonction de commutation ϕ ne peut pas s’annuler, donc le contrôle reste saturé à $+\sigma$. On remarque ensuite que pour $t \in [t_1, t_2]$ et $t \in [t_3, t_f]$, la trajectoire du système passe sur la variété \mathcal{M} définie dans le Lemme 4.7.4.

Comme on peut le voir sur la Figure 4.2, la variété \mathcal{M} consiste, dans notre cas, en une parabole et en la deuxième bissectrice. La parabole et la bissectrice se croisent au point $(-\tilde{x}, \tilde{x})$, où \tilde{x} est le point d’inflexion de la fonction h_0 . Par ailleurs, la parabole est tangente aux droites $y_1 = -\hat{x}$ et $y_n = \hat{x}$, où \hat{x} est le maximum de la fonction h_0 . Cela montre que pour amener un agent extrême vers l’autre, le PMP nous indique que le leader doit se placer à une distance telle que son influence soit maximale sur l’agent à emmener. De plus, afin de mieux expliquer ce qui se passe à l’instant t_2 , lorsque la trajectoire quitte la variété \mathcal{M} , on peut montrer que la norme du contrôle singulier non-saturé u_0 tend vers l’infini lorsque l’on reste sur la parabole et que l’on se déplace vers le point $(-\tilde{x}, \tilde{x})$. Ainsi, la trajectoire du système quitte la variété \mathcal{M} au temps t_2 parce que le contrôle à appliquer pour rester sur la variété \mathcal{M} est supérieur en norme

à la saturation σ .

La Figure 4.3 représente alors les trajectoires des opinions obtenues en appliquant la stratégie \mathcal{S}_0 .

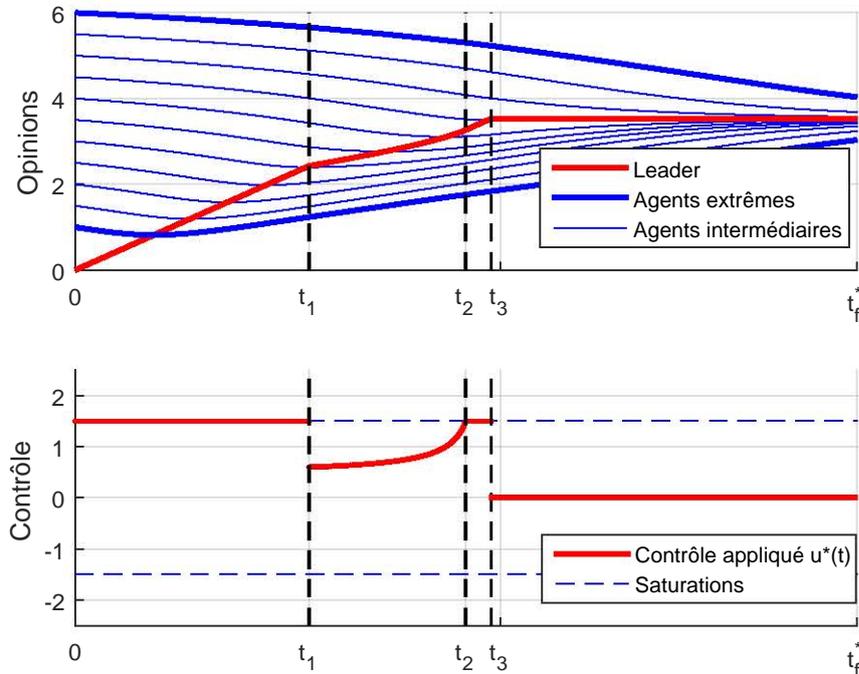


FIGURE 4.3 – *Haut* : Trajectoires des opinions des agents en bleu et du leader en rouge. *Bas* : Contrôle $u(t)$ appliqué au leader en rouge, et saturation du contrôle en tirets bleus.

Sur la Figure 4.3, on observe que le leader commence par rejoindre l'agent 1 à pleine vitesse jusqu'à l'instant t_1 . Il va ensuite amener l'agent 1 vers l'agent n avec le contrôle singulier u_0 défini Proposition 4.4.6 jusqu'au temps t_2 . Au temps t_2 , la valeur de u_0 dépasse la saturation $\sigma = 1.5$ sur le contrôle et un contrôle saturé est appliqué jusqu'au temps t_3 . À l'instant t_3 , le leader se trouve au milieu des agents extrêmes et un contrôle nul est appliqué jusqu'à satisfaction des contraintes terminales. Ce comportement a été décrit dans le Lemme 4.4.8.

On remarque que cette trajectoire est similaire à celles proposées au Chapitre 3 précédent ainsi que celle de [Dietrich et al., 2016a]. Bien que dans ces cas là, l'objectif n'était pas de proposer une loi de commande en temps minimal, on remarque des similitudes dans le comportement du leader. Dans un premier temps, le leader rejoint un agent extrême, pour ensuite le tirer, sans le perdre, vers l'autre agent extrême.

La Figure 4.4 montre, dans le plan des opinions initiales $(y_1(0), y_n(0))$, la stratégie de commande optimale à appliquer pour résoudre le Problème 4.2.1 en utilisant la méthodologie décrite précédemment. Remarquons que les conditions initiales ne vérifiant pas l'Hypothèse 4.2.2 sont exclues (i.e. $y_1(0) > y_n(0)$).

Il est intéressant de noter que l'on distingue trois régions contiguës correspondant chacune à une stratégie de commande différente. Notons également la symétrie des régions qui traduit la symétrie du problème.

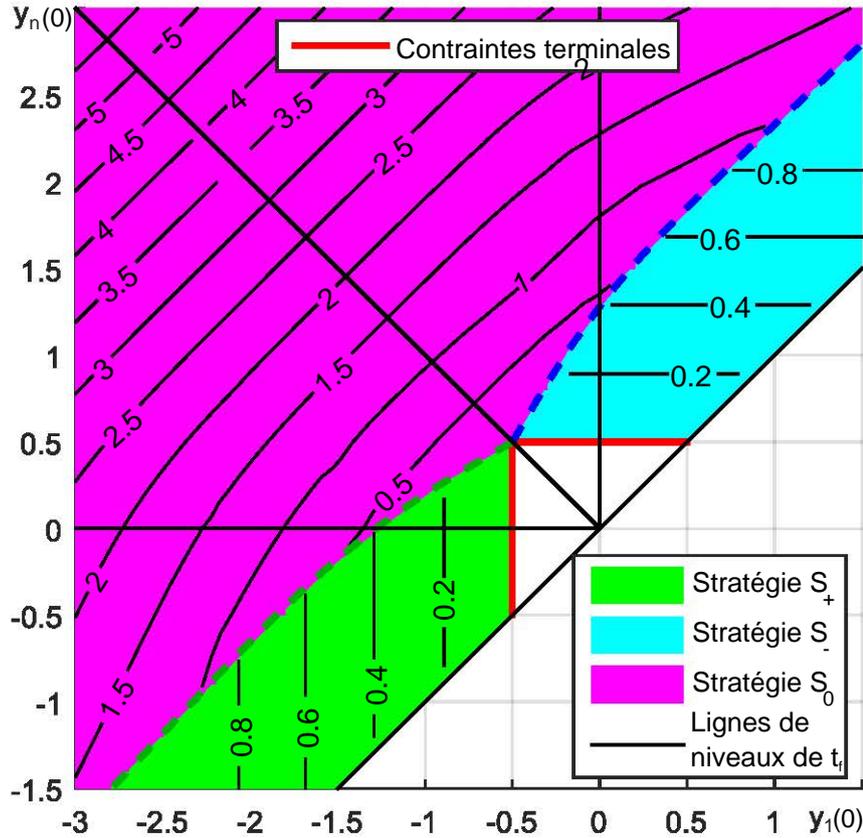


FIGURE 4.4 – Choix de la stratégie de contrôle optimal dans le plan des opinions initiales $(y_1(0), y_n(0))$. La zone où la stratégie S_0 est optimale est en violet. La zone verte (respectivement bleue) correspond aux conditions initiales pour lesquelles la stratégie S_+ (respectivement S_-) est optimale. Les tirets verts et bleus correspondent aux trajectoires limites quand les stratégies S_+ (respectivement S_-) sont appliquées et aboutissent à l'état final $(y_1(t_f), y_n(t_f)) = (-\eta, \eta)$. Les lignes de niveaux noires représentent le temps final t_f obtenu en appliquant la stratégie optimale.

4.5.2 Cas général

Cette sous-section est consacrée au cas général, sujet de la Section 4.3. On considère un système multi-agents de dynamique (4.3) avec $n = 6$ agents plus un leader. La fonction d'influence entre les agents est fixée à $f = x \mapsto 1/(1 + x^2)$ et est identique à la fonction d'influence du leader sur les agents $f_0 \equiv f$. La saturation sur le contrôle est fixée à $\sigma = 5$ et le rayon du voisinage dans lequel rassembler les agents autour du leader vaut $\eta = 0.5$. Les opinions initiales des agents sont les suivantes. Le leader a une opinion initiale $x_0(0) = 0$. Trois agents sont initialement regroupés autour de l'opinion de valeur 4 (plus précisément : 3, 3.5, 4). Les trois agents restant sont regroupés autour de l'opinion de valeur 13 (plus précisément : 12, 13, 14). La configuration initiale est visible Figure 4.5.

La loi de commande optimale donnée par le Théorème 4.3.4 nécessite de savoir quand la fonction de commutation ϕ , somme des états adjoints, s'annule. L'expression des états adjoints et les conditions du PMP ne permettent pas de déterminer analyti-

quement le signe de ϕ pour tout temps. Il est aussi difficile de l'obtenir numériquement. Par conséquent, nous nous tournons vers une méthode de résolution numérique qui n'est pas fondée sur le PMP. Le schéma d'optimisation utilisé consiste à discrétiser le système (4.3) dans le temps pour appliquer une méthode directe comme celle détaillée dans la Section 4.5.1 précédente (voir le paragraphe intitulé «Méthode numérique»). Les contraintes du problème sont la saturation du contrôle $u^* \in \Omega_\sigma$ et l'intervalle final $(y_1^*(t_f), y_n^*(t_f)) \in [-\eta, \eta]^2$.

Afin de vérifier si le contrôle $u^*(t)$ induit par cette méthode peut correspondre au contrôle singulier donné par la Proposition 4.3.5, la valeur de ce contrôle singulier $u_0(Y(t), \lambda(t), t)$ est obtenue de la manière suivante. Le schéma d'optimisation précédemment décrit permet d'obtenir la trajectoire $Y^*(t)$ pour tout temps dans $[0, t_f]$. De plus, la simulation numérique Figure 4.5 montre que le contrôle obtenu n'est pas constamment saturé. À la vue de cette simulation, on suppose que $\phi(t_f) = 0$, bien que cela n'ait pas été prouvé. De plus, le Théorème 4.3.4 prouve la nullité de l'Hamiltonien au temps final t_f . En utilisant les deux affirmations précédentes et les conditions de transversalité (4.21), on obtient deux relations entre $\lambda_1^*(t_f)$ et $\lambda_n^*(t_f)$. De ces relations, on déduit les valeurs de $\lambda_1^*(t_f)$ et $\lambda_n^*(t_f)$. En intégrant en temps rétrograde la dynamique des états adjoints avec les conditions finales $(\lambda_1^*(t_f), \lambda_n^*(t_f))$, on obtient les trajectoires $\lambda^*(t)$. On peut ainsi calculer la valeur de $u_0(Y^*(t), \lambda^*(t), t)$, à titre de comparaison avec le contrôle $u^*(t)$, qui a lui été obtenu via une méthode numérique sans les trajectoires $\lambda^*(t)$. Cela fini d'expliquer comment ont été obtenues les courbes présentées Figure 4.5.

Sur la Figure 4.5, on remarque deux comportements différents du leader. De l'instant initial au temps $t \approx 0.8$, le contrôle appliqué est proche de la saturation $+\sigma$ et cela jusqu'à ce que le leader soit au-dessus du premier groupe d'agents. On en déduit que $\phi(t) < 0$ durant cette phase. A partir du temps $t \approx 0.8$ et jusqu'au temps final t_f , le contrôle appliqué appartient à l'intervalle ouvert $(-\sigma, \sigma)$. On en déduit que la fonction de commutation ϕ est nulle sur cet intervalle de temps. Remarquons également la proximité entre le contrôle singulier u_0 calculé à partir de (4.26) et le contrôle appliqué lorsque le contrôle n'est pas saturé. Cependant, entre les instants $t \approx 3.5$ et $t \approx 4$, le contrôle appliqué et la valeur de u_0 ne sont plus similaires due à une forte augmentation de la valeur de u_0 . Une augmentation similaire est également observée dans la sous-Section 4.5.1 qui suit. Nous pensons que cette différence est due au fait que l'application que lie $u \mapsto t_f$ possède un minimum plat. La sensibilité du problème numérique induit des erreurs, ce qui résulte en un contrôle dont les valeurs sont dispersées.

Afin d'améliorer les résultats des simulations, on peut considérer les pistes suivantes. L'utilisation de toolbox d'optimisations plus performantes peut être une alternative à la fonction `fmincon` de MATLAB. On peut également considérer des méthodes de tir multiples. Ces méthodes permettent de découper l'intervalle $[0, t_f]$ en plusieurs sous-intervalles. Pour chaque sous-intervalle, on peut alors contraindre le contrôle d'une certaine manière : saturé ou singulier. L'utilisation d'outils dédiés à la résolution de problèmes aux deux bouts serait également à envisager, puisque notre problème peut se mettre sous cette forme.

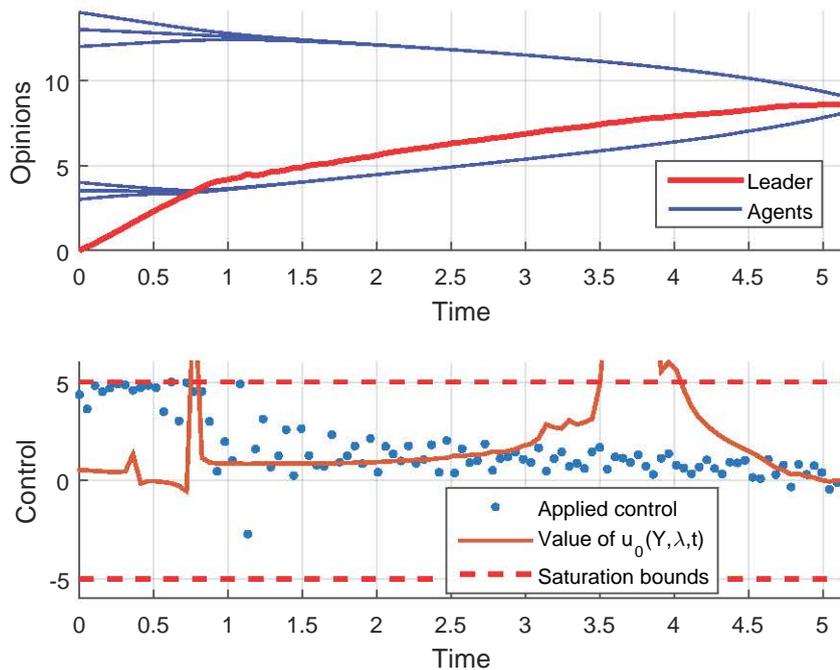


FIGURE 4.5 – *Haut* : Trajectoires des opinions du leader (en rouge) et des agents (en bleu). *Bas* : Contrôle appliqué au leader (points bleus), saturation du contrôle (tirets rouges) et contrôle singulier (en orange) pour comparaison.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les contributions apportées au contrôle optimal de dynamiques d'opinions. Le problème consistant à rassembler tous les agents du système autour du leader en temps minimal a été traité via une approche utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin. Des lois de commande optimales, potentiellement singulières, et vérifiant les conditions nécessaires du PMP ont été présentées et illustrées dans ce chapitre. Une analyse approfondie du problème a notamment été réalisée pour le cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre les agents. Dans ce cas, une étude numérique fondée sur les résultats théoriques a permis de donner la stratégie de commande en temps optimal à appliquer en fonction des conditions initiales du système.

Le problème de contrôle optimal traité dans ce chapitre pourrait également être traité avec d'autres outils, comme par exemple la programmation dynamique, qui pourrait permettre l'obtention de conditions suffisantes d'optimalité. Une approche par la programmation dynamique rajoute cependant des difficultés supplémentaires, notamment l'introduction d'équations aux dérivées partielles et la question de la compatibilité de la contrainte terminale de type intervalle.

Par la suite, on peut également s'intéresser à d'autres problèmes de contrôle optimal pour les dynamiques d'opinions. Par exemple, on peut rajouter une contrainte

terminale sur le leader, afin que celui-ci rassemble tous les agents dans un voisinage autour d'une valeur d'opinion désirée (problème traité de manière non-optimale au Chapitre 3). Le problème d'amener, via un leader, un maximum d'agents au-delà d'une opinion seuil en un temps fini fixé est également intéressant. Ce problème pourrait être résolu à l'aide du PMP, avec une approche similaire à celle utilisée dans ce chapitre. La difficulté réside alors dans la fonction coût, qui ne prendrait que des valeurs discrètes, à savoir le nombre d'agents étant au dessus de l'opinion seuil une fois le temps fixé écoulé.

4.7 Annexe 4.A : Preuve de la Proposition 4.4.6

Pour rappel on se place dans la configuration finale (4.18) suivante

$$y_1^*(t_f) = -\eta \text{ et } y_n^*(t_f) = \eta,$$

où les deux agents extrêmes sont aux deux bords de l' η -voisinage du leader. Cette hypothèse permet, à partir des conditions de transversalité, de déterminer le signe des états adjoints des agents extrêmes.

Lemme 4.7.1. *Sous les Hypothèses 4.2.2 et 4.4.1, la condition finale (4.18) implique que pour tout $t \in [0, t_f]$, $\lambda_1^*(t) > 0$ et $\lambda_n^*(t) < 0$.*

Preuve Sous les hypothèses mentionnées, le Lemme 4.4.3 s'applique et donc le signe des états adjoints est constant au cours du temps. D'après le Théorème 4.4.2, les conditions de transversalité donnent $\lambda_1^*(t_f) > 0$ et $\lambda_n^*(t_f) < 0$, ce qui permet de démontrer le résultat du lemme. ■

Le lemme précédent donne des informations séparées sur le signe des états adjoints, mais ne permet pas de conclure sur la somme des états adjoints, à savoir la fonction de commutation ϕ , permettant de déterminer le contrôle optimal $u^*(t)$ donné par le Théorème 4.4.2. Le lemme suivant s'attache à donner des conditions pour que la fonction de commutation ϕ s'annule.

Lemme 4.7.2. *Sous les Hypothèses 4.2.2 et 4.4.1, soit $t \in [0, t_f]$ tel que $\phi(t) = 0$, alors $h_0(y_1^*(t)) < h_0(y_n^*(t))$.*

Preuve D'après le Théorème 4.4.2, l'Hamiltonien est constant et nul. Puis, en utilisant l'expression de l'Hamiltonien (4.32) et le fait que $\phi(t) = 0$, on a

$$\lambda_1^*(t) h_0(y_1^*(t)) + \lambda_n^*(t) h_0(y_n^*(t)) = -1,$$

le long des trajectoires. Comme $\phi(t) = 0$ on a $\lambda_1^*(t) = -\lambda_n^*(t)$ et d'après les conditions de transversalité (4.30), on a $\lambda_1^*(t) > 0$. D'après le Lemme 4.2.3, on a $y_1^*(t) \neq -y_n^*(t)$. Comme la fonction h_0 est impaire on obtient $h_0(y_1^*(t)) \neq -h_0(y_n^*(t))$. Ce qui amène à :

$$h_0(y_1^*(t)) - h_0(y_n^*(t)) = \frac{-1}{\lambda_1^*(t)} < 0,$$

et qui permet de démontrer le lemme. ■

Ce lemme permet de traduire une équation ne dépendant que des états adjoints en une équation ne dépendant que des états des agents extrêmes, et cela sans intégrer la dynamique des états adjoints (4.29). Ce lemme permet d'écrire le corollaire suivant.

Corollaire 4.7.3. *Sous les Hypothèses 4.2.2 et 4.4.1, soit $T \subseteq [0, t_f]$ un intervalle tel que pour tout $t \in T$ on ait $(y_1^*(t), y_n^*(t)) \in \mathcal{R}$, où*

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, h_0(a) \geq h_0(b)\}. \quad (4.38)$$

Alors pour tout $t \in T$, $\text{signe}(\phi)$ reste constant et la loi de commande est saturée sans commutation, ce qui signifie que $\forall t \in T, u^*(t) = -\sigma$ ou $\forall t \in T, u^*(t) = \sigma$.

Preuve En utilisant la contraposée du Lemme 4.7.2, on obtient que $\forall t \in T, \phi(t) \neq 0$. Par continuité de la fonction ϕ , elle reste de signe constant. La loi de commande (4.31) proposée Théorème 4.4.2 fini de démontrer le résultat. ■

Le corollaire précédent souligne le fait que le contrôle optimal menant à la configuration finale (4.18) peut consister à appliquer un contrôle saturé pendant une certaine période de temps. Le lemme suivant donne l'expression d'une variété \mathcal{M} sur laquelle la fonction de commutation ϕ peut s'annuler sur un intervalle de temps non-trivial.

Lemme 4.7.4. *Sous les Hypothèses 4.2.2 et 4.4.1, supposons la condition finale (4.18) vérifiée et soit $t \in [0, t_f]$. Si $\phi(t) = 0$ et $\dot{\phi}(t) = 0$ alors $(y_1^*(t), y_n^*(t)) \in \mathcal{M}$, où la variété \mathcal{M} s'écrit :*

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h'_0(x) = h'_0(y)\}.$$

Preuve En utilisant la dynamique des états adjoints (4.29) on déduit de $\phi(t) = \lambda_1^*(t) + \lambda_n^*(t)$ que

$$\dot{\phi}(t) = \lambda_1^*(t) h'_0(y_1^*(t)) + \lambda_n^*(t) h'_0(y_n^*(t)).$$

Comme $\phi(t) = 0$ on peut réécrire l'équation précédente comme

$$\dot{\phi}(t) = \lambda_1^*(t) \left(h'_0(y_1^*(t)) - h'_0(y_n^*(t)) \right).$$

Le Lemme 4.7.1 s'applique et on a $\lambda_1^*(t) > 0$. En considérant $\dot{\phi}(t) = 0$, on obtient alors l'expression de la variété \mathcal{M} . ■

La variété \mathcal{M} permet de localiser dans le plan $(y_1(t), y_n(t))$, le lieu où le contrôle singulier peut s'appliquer.

Preuve [Proposition 4.4.6] Sous les conditions de la Proposition 4.4.6, les Lemmes 4.7.1, 4.7.2 et 4.7.4 qui précèdent s'appliquent. La condition (4.24) de la Proposition 4.3.5 se simplifie en (4.4.6) puisque

$$\lambda_1^*(t) = -\lambda_n^*(t) > 0,$$

et que les états adjoints des agents intermédiaires sont nuls d'après le Théorème 4.4.2. Finalement, en utilisant l'Hypothèse 4.4.1 (la fonction d'influence entre agents est nulle) et le fait que $\lambda_1^*(t) > 0$ dans l'expression du contrôle singulier (4.26) avec interactions entre les agents, on obtient l'expression du contrôle singulier (4.37) sans interaction entre les agents. ■

Conclusion générale

Les travaux de cette thèse sont consacrés à l'étude des systèmes de dynamiques d'opinions. Un premier objectif de la thèse est l'analyse des phénomènes transitoires dans les dynamiques d'opinions, et notamment la formation d'accords locaux temporaires. Dans la littérature, l'accent a été mis sur l'étude du régime asymptotique, notamment sur l'obtention du consensus, lorsque l'opinion de tous les agents tend vers la même valeur. L'étude du régime transitoire représente un intérêt puisque de nombreuses applications ont des durées finies, ce qui ne permet pas d'utiliser les résultats de la littérature sur le régime asymptotique. Par ailleurs, d'autres contributions de la littérature montrent que le régime asymptotique d'une dynamique d'opinions peut consister en plusieurs groupes d'agents en désaccord. L'introduction d'agents contrôlables est une solution pour essayer d'obtenir un consensus entre tous les agents du système. Le système n'est plus autonome et le leader permet d'agir sur l'évolution des opinions des agents, et ainsi de modifier le comportement du système.

Les principales contributions de cette thèse sont détaillées dans les trois points suivants :

- La première contribution de cette thèse concerne un critère de détection de clusters d'opinions transitoires en formation. Ce critère s'applique à des systèmes de dynamiques d'opinions en temps discret avec une fonction d'influence générique dépendant uniquement de l'état. Ce critère est fondé sur deux grandeurs caractéristiques d'un groupe d'agent : le diamètre du groupe δ ainsi que la distance Δ séparant le groupe considéré des autres agents du système. Un cluster transitoire en formation est alors défini comme un groupe d'agents dont le ratio δ/Δ décroît entre deux itérations. Une majoration $\rho(\delta, \Delta)$ de la décroissance de ce ratio est proposée et permet de définir le critère de détection d'un cluster transitoire en formation lorsque la quantité $\rho(\delta, \Delta) \leq 1$. Cette quantité est obtenue à partir de bornes sur des configurations d'agents pire-cas. Ce critère est facilement calculable car il ne dépend que des paramètres δ et Δ d'un groupe d'agents, ainsi que de cardinalités et de la fonction d'influence. L'utilisation de ce critère est ensuite étendue à la prédiction de la durée pendant laquelle un groupe d'agents vérifie le critère.
- La seconde contribution concerne le contrôle de dynamique d'opinions en temps continu grâce à l'introduction d'un leader, un agent dont l'opinion est contrôlable. Le cas des systèmes à fonctions d'influence génériques dépendant explicitement du temps et de l'état est considéré. Une loi de commande générique est proposée permettant au leader de faire tendre l'opinion des agents vers une valeur de consensus désirée. Cet objectif est atteint en trois phases temporelles dis-

tinctes. Tout d'abord, le leader rassemble tous les agents dans son voisinage en temps fini. Il les entraîne ensuite vers une valeur d'opinion désirée, afin d'y réaliser le consensus de manière asymptotique. Sous certaines conditions, les agents peuvent également tendre vers le consensus lors d'une phase de suivi de trajectoire avec le leader.

- La dernière contribution de cette thèse concerne le problème de contrôle en temps optimal suivant, soulevé par la contribution précédente. Quelle est la stratégie de commande appliquée à un leader d'une dynamique d'opinions afin que celui-ci rassemble tous les agents du système dans son voisinage en temps minimal. Ce problème est étudié pour le cas de systèmes à fonction d'influence dépendant uniquement de l'état. Le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) est utilisé pour obtenir des conditions nécessaires sur la commande optimale associée au problème considéré. Ces conditions permettent l'obtention de loi de commande définie implicitement en fonction de l'état du système et des états adjoints (introduit par le PMP). Le problème aux deux bouts est difficile à résoudre numériquement dans le cas général, du fait du couplage non-linéaires des dynamiques et de la complexité des conditions du PMP. Le cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre les agents induit néanmoins des simplifications sur les conditions du PMP qui permettent une résolution numérique du problème. Deux stratégies de commande candidates à l'optimalité sont identifiées : une où le contrôle appliqué est constant et saturé, et l'autre qui reste implicite mais qui peut être obtenue numériquement.

Cette thèse a permis de caractériser la formation d'accords locaux transitoires dans les dynamiques d'opinions. Des lois de commandes sont proposées pour contrôler le système à l'aide d'un leader permettant, entre autres, d'amener les agents vers le consensus à une valeur d'opinion donnée. Ces différents résultats ouvrent également de nouvelles perspectives, dont certaines sont citées par la suite.

- Dans la première partie de la thèse, on s'intéresse à caractériser un groupe d'agents comme cluster transitoire ou non. Il serait alors intéressant de disposer d'un algorithme permettant, pour un système donné et à un instant donné, de recenser tous les groupes d'agents vérifiant le critère de détection. Cela permettrait par exemple de classer ces groupes suivant plusieurs paramètres : diamètre du groupe, durée de validation du critère. Cela permettrait également de s'interroger sur de possibles imbrications des clusters transitoires et soulève la question de la hiérarchisation de ces clusters imbriqués.
- Le problème d'amener tous les agents à converger vers une valeur de consensus a été traité de manière non-optimale au Chapitre 3. En effet, il était question d'exhiber une loi de commande qui remplissait cet objectif. Il pourrait être intéressant de considérer le problème en temps optimal associé, à savoir quel contrôle appliqué pour que le leader atteigne en temps minimal une valeur d'opinion désirée en ayant tous les agents du système dans son voisinage. Ce problème introduit une contrainte sur le leader qui n'apparaît pas dans le problème traité Chapitre 4, où l'objectif était seulement de rassembler les agents dans le voisinage du leader en temps minimal.

-
- Le problème de commande optimale qui consiste à amener, via un leader, un maximum d'agents au-delà d'une opinion seuil en un temps fini fixé est également intéressant. Ce problème pourrait être résolu à l'aide du PMP, avec une approche similaire à celle utilisée dans ce chapitre. La difficulté réside alors dans la fonction coût, qui ne prendrait que des valeurs discrètes, à savoir le nombre d'agents étant au dessus de l'opinion seuil une fois le temps fixé écoulé.

Bibliographie

- [Agrachev et Sarychev, 1995] Agrachev, A. A. et Sarychev, A. V. (1995). On abnormal extremals for Lagrange variational problems. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, 5(1):1–31.
- [Aronson et al., 1963] Aronson, E., Turner, J. A. et Carlsmith, J. M. (1963). Communicator credibility and communication discrepancy as determinants of opinion change. *The Journal of Abnormal and Social Psychology*, 67(1):31.
- [Bellman, 1958] Bellman, R. (1958). Dynamic programming.
- [Bhattacharyya et al., 2013] Bhattacharyya, A., Braverman, M., Chazelle, B. et Nguyen, H. L. (2013). On the convergence of the Hegselmann-Krause system. In *Proceedings of the 4th conference on Innovations in Theoretical Computer Science*, pages 61–66. ACM.
- [Blondel et al., 2005] Blondel, V. D., Hendrickx, J. M., Olshevsky, A. et Tsitsiklis, J. N. (2005). Convergence in Multiagent Coordination, Consensus, and Flocking. In *44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference.*, pages 2996–3000.
- [Blondel et al., 2009] Blondel, V. D., Hendrickx, J. M. et Tsitsiklis, J. N. (2009). On Krause’s multi-agent consensus model with state-dependent connectivity. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(11):2586–2597.
- [Bonnard et Trélat, 2001] Bonnard, B. et Trélat, E. (2001). On the role of abnormal minimizers in sub-Riemannian geometry. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série*, 10(3):405–491.
- [Caponigro et al., 2013] Caponigro, M., Fornasier, M., Piccoli, B. et Trélat, E. (2013). Sparse stabilization and optimal control of the cucker-smale model. *Mathematical Control and Related Fields*, 3(4):447–466.
- [Caponigro et al., 2016] Caponigro, M., Piccoli, B., Rossi, F. et Trélat, E. (2016). Sparse feedback stabilization of multi-agent dynamics. In *55th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4278–4283. IEEE.
- [Chatterjee et al., 2014] Chatterjee, A., Sarwate, A. D. et Vishwanath, S. (2014). Generalized opinion dynamics from local optimization rules. *arXiv preprint arXiv :1409.7614*.
- [Chiang, 1992] Chiang, A. C. (1992). *Elements of Dynamic Optimization*. Waveland Press Inc., Long Grove, Illinois.
- [Chitour et al., 2008] Chitour, Y., Jean, F. et Trélat, E. (2008). Singular trajectories of control-affine systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(2):1078–1095.

- [Cohen, 1959] Cohen, A. R. (1959). Communication discrepancy and attitude change : A dissonance theory approach. *Journal of Personality*, 27(3):386–396.
- [Cucker et Smale, 2007] Cucker, F. et Smale, S. (2007). On the mathematics of emergence. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(1):197–227.
- [Davis, 1996] Davis, J. H. (1996). Group decision making and quantitative judgments : A consensus model. In E. Witte and J. H. Davis (Eds.), *Understanding group behavior : Consensual action by small groups*, 1:35–60.
- [DeGroot, 1974] DeGroot, M. H. (1974). Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical Association*, 69(345):118–121.
- [Dietrich et al., 2016a] Dietrich, F., Martin, S. et Jungers, M. (2016a). Opinion dynamics control by leadership with bounded influence. In *55th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1–6. IEEE.
- [Dietrich et al., 2016b] Dietrich, F., Martin, S. et Jungers, M. (2016b). Transient cluster formation in generalized Hegselmann-Krause opinion dynamics. In *European Control Conference (ECC)*, pages 531–536.
- [Dietrich et al., 2017a] Dietrich, F., Martin, S. et Jungers, M. (2017a). Control via leadership of opinion dynamics with state and time-dependent interactions. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. Online.
- [Dietrich et al., 2017b] Dietrich, F., Martin, S. et Jungers, M. (2017b). Time optimal control via leadership of opinion dynamics. Submitted.
- [French Jr, 1956] French Jr, J. R. (1956). A formal theory of social power. *Psychological review*, 63(3):181.
- [Friedkin et al., 2016] Friedkin, N. E., Jia, P. et Bullo, F. (2016). A theory of the evolution of social power : Natural trajectories of interpersonal influence systems along issue sequences. *Sociological Science*, 3:444–472.
- [Gronwall, 1919] Gronwall, T. H. (1919). Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. *Annals of Mathematics*, pages 292–296.
- [Hegselmann et Krause, 2002] Hegselmann, R. et Krause, U. (2002). Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 5(3).
- [Hegselmann et al., 2015] Hegselmann, R., Kurz, S., Niemann, C., Rambau, J. et al. (2015). Optimal Opinion Control : The Campaign Problem. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 18(3).
- [Hendrickx, 2008] Hendrickx, J. M. (2008). Order preservation in a generalized version of Krause’s opinion dynamics model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 387(21):5255–5262.
- [Hovland, 1959] Hovland, C. I. (1959). Reconciling conflicting results derived from experimental and survey studies of attitude change. *American psychologist*, 14(1):8.
- [Hovland et al., 1957] Hovland, C. I., Harvey, O. et Sherif, M. (1957). Assimilation and contrast effects in reactions to communication and attitude change. *The Journal of Abnormal and Social Psychology*, 55(2):244.

- [Johnson et Gibson, 1963] Johnson, C. et Gibson, J. (1963). Singular solutions in problems of optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 8(1):4–15.
- [Jurdjevic, 1996] Jurdjevic, V. (1996). *Geometric Control Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.
- [Kalman, 1960] Kalman, R. (1960). Contributions to the theory of optimal control.
- [Khalil et Grizzle, 2002] Khalil, H. K. et Grizzle, J. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall New Jersey.
- [Krause, 2000] Krause, U. (2000). A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation. *Communications in difference equations*, pages 227–236.
- [Kurz, 2015] Kurz, S. (2015). Optimal control of the freezing time in the Hegselmann–Krause dynamics. *Journal of Difference Equations and Applications*, 21(8):633–648.
- [Lee et Markus, 1967] Lee, E. B. et Markus, L. (1967). *Foundations of optimal control theory*. Wiley.
- [Lorenz, 2006] Lorenz, J. (2006). Consensus strikes back in the hegselmann-krause model of continuous opinion dynamics under bounded confidence. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 9(1).
- [Lorenz, 2007] Lorenz, J. (2007). Continuous opinion dynamics under bounded confidence : A survey. *International Journal of Modern Physics C*, 18(12):1819–1838.
- [Maurer, 1976] Maurer, H. (1976). Numerical solution of singular control problems using multiple shooting techniques. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 18(2):235–257.
- [Mesbahi et Egerstedt, 2010] Mesbahi, M. et Egerstedt, M. (2010). Graph theoretic methods in multiagent networks.
- [Ohtsubo et al., 2002] Ohtsubo, Y., Masuchi, A. et Nakanishi, D. (2002). Majority influence process in group judgment : Test of the social judgment scheme model in a group polarization context. *Group processes & intergroup relations*, 5(3):249–261.
- [Piccoli et al., 2016] Piccoli, B., Pouradier Duteil, N. et Scharf, B. (2016). Optimal control of a collective migration model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 26(02):383–417.
- [Pontryagin et al., 1962] Pontryagin, L., Boltyanski, V., Gamkrelidze, R. et Michtchenko, E. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, Wiley Interscience.
- [Stoer et Bulirsch, 2002] Stoer, J. et Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*, volume 12. Springer, New York, third edition édition.
- [Sussmann, 1979] Sussmann, H. J. (1979). A bang-bang theorem with bounds on the number of switchings. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17(5):629–651.
- [Trélat, 2008] Trélat, E. (2008). *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert.
- [Vande Kerckhove et al., 2016] Vande Kerckhove, C., Martin, S., Gend, P., Rentfrow, P. J., Hendrickx, J. M. et Blondel, V. D. (2016). Modelling influence and opinion evolution in online collective behaviour. *PLoS ONE*, 11(6):1–25.

- [Vicsek et al., 1995] Vicsek, T., Czirók, A., Ben-Jacob, E., Cohen, I. et Shochet, O. (1995). Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical review letters*, 75(6):1226.
- [Wongkaew et al., 2015] Wongkaew, S., Caponigro, M. et Borzì, A. (2015). On the control through leadership of the Hegselmann-Krause opinion formation model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 25(03):565–585.

Titre : Analyse et contrôle de dynamiques d'opinions

Résumé : Les dynamiques d'opinions suscitent un regain d'intérêt de la part des communautés d'Automatique et de Mathématiques Appliquées. Cela peut s'expliquer par l'émergence des réseaux sociaux en ligne et de la possibilité d'exploiter et comprendre les comportements et données associés. Les modèles de dynamiques d'opinions sont des cas particuliers de systèmes multi-agents. Ces systèmes ont des applications diverses comme par exemple le contrôle du comportement d'une flotte de robots collaboratifs. Un système de dynamique d'opinions est ainsi constitué de plusieurs agents. L'état de chaque agent est alors modélisé par un réel qui représente l'opinion de celui-ci à propos d'un certain sujet. Les modèles mathématiques de dynamiques d'opinions décrivent alors l'évolution des opinions des agents dans le temps.

De nombreux résultats ont été obtenus sur le régime asymptotique de ces systèmes, notamment sur la convergence vers le consensus, lorsque les opinions de tous les agents du système tendent vers la même valeur. Le régime transitoire, moins bien connu, présente également des phénomènes intéressants comme la formation d'accords locaux transitoires mais qui sont plus délicats à définir. Une étude de ces phénomènes est présentée pour des systèmes de dynamiques d'opinions à temps discret avec fonctions d'influence génériques dépendant de l'état. La contribution principale propose un critère de détection de la formation de ces accords locaux, ainsi que la prédiction de la durée pendant laquelle ce critère est vérifié.

La seconde partie de cette thèse se concentre sur les dynamiques d'opinions en temps continu dont un des agents, appelé leader, a un rôle particulier : l'évolution de son opinion est contrôlable. Le leader est utilisé pour rassembler tous les agents dans son voisinage en temps fini, puis pour les amener vers une valeur de consensus désirée. La loi de commande proposée est valide pour des systèmes à fonctions d'influence dépendant du temps et de l'état et sous certaines conditions. De plus, le problème de contrôle en temps optimal consistant à rassembler tous les agents dans le voisinage du leader en temps minimal est examiné. Ceci est effectué dans le cas particulier de fonctions d'influence dépendant uniquement de l'état. Afin de déterminer la classe des commandes optimales admissible, le Principe du Maximum de Pontryagin est utilisé. Dans un cadre général, la commande optimale est précisée sous la forme de relations implicites. Pour le cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre les agents, la loi de commande en temps optimal a été obtenue en pratique pour toute condition initiale.

Mots clés : dynamiques d'opinions, systèmes multi-agents, clusters transitoires, commande par un leader, commande optimale.

Title : Analysis and control of opinion dynamics

Abstract : Opinion dynamics systems aroused renewed interest in the Control System Theory and Applied Mathematics communities. This can be explained by the emergence of online social networks and the possibility of exploiting and understanding associated behaviours and data. Opinion dynamic models are special cases of multi-agent systems. These systems have various applications such as controlling the behaviour of a fleet of collaborative robots. A system of opinion dynamics is thus composed of several agents. The state of each agent is then modeled by a real number, which represents the agent's opinion on a certain subject. The mathematical models of opinion dynamics then describe the evolution of agents' opinions over time.

Many results have been obtained on the asymptotic behaviour of these systems, notably on convergence towards consensus, when the opinion of all agents of the system tend towards the same value. The less well known transient state also presents interesting phenomena such as the formation of local transient agreements, which are more tricky to define. A study of these phenomena is presented for discrete-time opinion dynamics systems with generic state dependent influence functions. The main contribution proposes a criterion for detecting the formation of these local agreements, as well as a prediction of the duration during which this criterion is verified.

The second part of this thesis focuses on opinion dynamics in continuous time in which one of the agents, called leader, has a particular role: the evolution of its opinion is controllable. For systems with time and state-dependent influence functions and under certain conditions, a control law is presented that allows the leader to gather all agents in its neighbourhood in finite time and then steer them to a desired consensus value. In addition, the problem of time optimal control which consists in bringing all agents together in the neighborhood of the leader in minimal time is also examined for the case of only state-dependent influence functions. The Pontryagin Maximum Principle specifies the class of admissible optimal controls with implicit expressions within a general framework. For the particular case where there is no interaction between agents, the time-optimal control law has been obtained in practice for any initial conditions.

Keywords : opinion dynamics, multi-agent systems, transient clusters, control via leader, optimal control.