HAL
open science

Les Grundgesetze der Arithmetik de Frege : idéographie : genèse, syntaxe, sémantique

Méven Cadet

▶ **To cite this version:**

Méven Cadet. Les Grundgesetze der Arithmetik de Frege : idéographie : genèse, syntaxe, sémantique. Philosophie. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2017. Français. NNT : 2017PA01H211 . tel-01685103

HAL Id: tel-01685103

https://theses.hal.science/tel-01685103

Submitted on 16 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON-SORBONNE

ED 280 – UFR DE PHILOSOPHIE

INSTITUT D'HISTOIRE ET DE PHILOSOPHIE
DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

THÈSE

pour l'obtention du grade de docteur en philosophie,
présentée et soutenue publiquement le 21 juin 2017 par :

Méven CADET

Les *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege
Idéographie : genèse, syntaxe, sémantique

Directeur de thèse :	Marco PANZA	IHPST
Examinateur :	Brice HALIMI	Université Paris 10
Examinateur :	Philippe de ROUILHAN	Université Paris 1
Rapporteur :	Marco RUFFINO	Université de Campinas
Rapporteur :	Gabriel SANDU	Université d'Helsinki

REMERCIEMENTS

Si j'ai pu réchapper, *in extremis*, des eaux tumultueuses du doctorat, je le dois pour beaucoup aux mains qui, tour à tour et depuis différentes berges, se sont portées à mon secours. C'est pourquoi j'exprime ici ma gratitude relativement aux pièges dont ces mains m'ont tiré, et notamment à celui qui fut pour moi le plus périlleux : ne jamais terminer. J'adresse donc de sincères remerciements à ceux qui, de mille manières et par mille patiences, ont su me convaincre d'apposer sur mon travail le point final qui lui manquait. Entre autres :

À mon directeur de thèse, Marco Panza, dont le tempérament eut raison de mon obstination, et qui maintint ainsi le cap loin des escales permanentes de ma fuite.

À Philippe de Rouilhan, pour avoir généreusement entendu mes intuitions, nourri mes réflexions et encouragé ma passion.

À Gabriel Sandu qui, le premier, m'a transmis son goût de la logique et sa curiosité – aussi critique soit-elle – de Frege.

À Brice Halimi et Marco Ruffino, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et le temps qu'ils ont consacré à sa lecture.

À Susana Berestovoy qui, par l'alliance du professionnel et de l'amical, a su charger ses mots d'autant de pertinence que de confiance.

À ma mère, pour m'avoir prouvé, lorsque mes doutes étaient les plus vifs, que certaines choses demeuraient évidentes.

À François, qui s'est discrètement imposé comme le moins contestable des amis et le plus têtu des alliés.

À Marie-Charlotte, pour sa joie bien trempée qui marqua son inspection (tenace mais salutaire) de mon travail et de ma personne.

À tous les membres de la colocation des « Toupoutous » qui, au plus près de la rupture, m'ont rappelé que le rire aussi pouvait éclater.

À Sébastien Barrier, pour son aide précieuse et désintéressée.

Aux autres membres de ma famille, amis ou collègues — dont ma sœur, mon père, Amélie, Coralie, Daniel, Fanny, Julien et Zab -– qui m'ont offert l'asile de leur soutien, de leur solidité et de leur calme.

Et enfin — et surtout -– à Manue qui conjura ma peur de finir par une juste combinaison de patience et de colère et, probablement avant tout, par ce quelque chose de bouleversant que la pudeur force à taire.

Préliminaires

Dans cette thèse de doctorat, nous proposons une étude du système de déduction introduit, développé et exploité au sein des *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege, une enquête sur les conceptions qui y sont mises en œuvre, et une reconstitution de la genèse de ces conceptions. Avant de préciser davantage le cadre et l'objectif de notre travail, il convient de procéder à quelques explications préliminaires.

Appellations

L'ouvrage de Frege s'ouvre sur l'affirmation suivante :

> Dans ce livre, on trouve les théorèmes sur lesquels l'arithmétique est fondée, prouvés en utilisant les signes que j'appelle collectivement *Begriffsschrift* (Frege 1893, p. I)

Par ce dernier terme, que nous laissons ici volontairement en allemand, Frege fait principalement référence au langage écrit *via* ces signes, et non, comme le suggère cette phrase, aux signes mêmes. Il parle par exemple des énoncés de la *Begriffsschrift* [*Begriffsschriftsätze*] (première apparition dans l'avant-propos, p. XII). Il emploie aussi ce nom pour désigner le système dans son ensemble, incluant les axiomes et les règles de déduction. C'est notamment le cas dans le titre de la première section : "Exposition de la *Begriffsschrift*" [*Darlegung der Begriffsschrift*], dans laquelle les règles et axiomes sont exposés. Ainsi, cet usage ne permet pas la distinction entre la pure collection des signes, *i.e.* l'alphabet du langage ; le langage lui-même, qui incorpore les règles de formation des noms et des énoncés du langage, et le système de déduction qui permet d'en démontrer des énoncés.[1] Au contraire, le choix de nos termes reflètera cette distinction. Nous désignerons le langage par 'idéographie', son alphabet par 'symboles de l'idéographie' et son système par 'Idéographie'. 'La langue formulaire' référera au premier langage exposé dans l'ouvrage de 1879[2], 'le système de la langue formulaire' au système de règles et d'axiomes qui l'accompagne et 'les symboles de la langue formulaire' aux symboles de ce langage.

Remarques sur la traduction

Notre travail nous conduira à user du jargon fregéen. Celui-ci induit des difficultés de traduction considérables, à la fois lorsqu'il s'agit de rendre compte des modifications que les sens de ces termes ont subi à travers l'évolution des thèses de Frege, et à la fois lorsqu'il s'agit de refléter

1. Un lecteur coutumier de la logique contemporaine s'étonnera sûrement de ne pas trouver 'termes et formules' en lieu et place de 'noms et énoncés', ainsi que 'démontrer des formules à partir d'autres formules' pour 'démontrer des énoncés'. Ces différences proviennent d'aspects spécifiques du système de Frege que nous expliquerons en temps et en heure.
2. (Frege 1879b)

les nuances complexes de ces sens au sein d'une même période. Actuellement, les différentes traductions des termes les plus cruciaux de ses thèses sont hétérogènes, aussi bien en français qu'en anglais.

En français par exemple, '*Bedeutung*' est traduit par 'dénotation' dans les *Écrits logiques et philosophiques* (Frege 1971), et par 'signification' dans les *Textes posthumes* (Frege 1994). '*Satz*' est rendu par 'proposition' dans le premier ouvrage, et par 'phrase' dans le second.

En anglais, c'est parfois à l'intérieur d'un même recueil que différentes versions interviennent. Avant la traduction complète des *Grundgesetze*, divers auteurs avaient partiellement réalisé ce travail, ce qui plaçait les responsables d'édition dans la position délicate de choisir entre l'uniformisation des traductions, en tranchant entre les partis-pris des auteurs, ou la publication d'un ouvrage dans lequel un même mot allemand correspondait à différents termes anglais. Dans *The Frege Reader* (Frege 1997c), M. Beanay ajusta la traduction de certains mots en fonction de l'époque du texte dans lequel ils apparaissent, tout en variant à l'intérieur d'une même période. '*Bedeutung*' fut traduit parfois par '*meaning*' et parfois par '*significance*' dans les textes antérieurs à 1891, et laissé en allemand dans les textes postérieurs. '*Satz*', pour sa part, ne prit pas moins de quatre visages différents : '*sentence*', '*proposition*', '*theorem*', '*clause*'.

Nous expliquerons nos traductions au fur et à mesure que nous introduirons et analyserons les termes en question. Ces choix seront répétés et réunis dans l'index (annexe B). Par la suite, nous nous conformerons à nos décisions *même lorsque nous citerons des traductions françaises qui en ont fait d'autres*. Ainsi, nous modifierons ces dernières conformément à nos choix. Lorsque nous estimerons nécessaire d'effectuer des changements plus importants, qui ne se cantonnent pas aux termes de la liste, nous le préciserons. Parfois, nous éviterons simplement d'utiliser les traductions existantes et fournirons directement la nôtre.

Enfin, lorsque nous jugerons nécessaire de rappeler le mot utilisé en allemand, nous le noterons entre crochets à la suite du terme français. À l'intérieur des citations, nous le conserverons sous sa forme fléchie originale. Hors des citations, au contraire, nous le laisserons sous sa forme canonique. L'allemand étant une langue dont les structures ne calquent pas celles du français, il serait inutile de respecter sa position dans une phrase que le lecteur devrait lui-même imaginer.

Le lexique de la syntaxe

Un langage logique contemporain exige la donnée de règles morphologiques qui spécifient, relativement à un ensemble déterminé de symboles, les expressions bien formées du langage. Une expression est une suite de symboles de ce langage. Une expression bien formée est donc une suite construite dans le respect des règles morphologiques.

L'idéographie fonctionne sur un autre mode. Ses expressions bien formées, définies mathématiquement, ne correspondent pas à des suites mais à des tableaux – ou des matrices – de symboles[3]. Par conséquent, la terminologie utilisée dans les *Grundgesetze* ne s'accorde pas avec le lexique contemporain.

Frege emploie le terme 'expression' [*Ausdruck*] pour désigner ce que nous nommons couramment une 'expression bien formée', *i.e.* grammaticalement correcte. Il s'en sert principalement dans le cas des langues distinctes de l'idéographie (par exemple : 1893, pp. XXII, XXIII, 6, 25, 45), mais aussi parfois pour son propre langage (par exemple : 1893, p. 25). N'ayant que très rarement à prendre en considération les expressions mal formées, nous réduirons également le sens

3. Ce point est une conséquence de l'utilisation des deux dimensions dans la langue formulaire et dans l'idéographie. Nous l'expliquerons en temps voulu.

d'‘expression’ à celui d'‘expression bien formée’, et préciserons ce qui doit l'être le cas échéant [4].

Cette règle admettra une unique exception qui provient d'une autre différence fondamentale entre l'idéographie et les langages logiques contemporains. Les alphabets de ces derniers sont constitués de *symboles* – par exemple ‘f’, ‘c’, ‘$\wedge$’, ‘$\forall$’ – à partir desquels les expressions bien formées sont construites, *via* des règles inductives – par exemple ‘$a = b$’ est formée à partir de ‘a’, ‘b’ et ‘$=$’. Dans l'idéographie au contraire, les expressions de base – Frege les appelle des ‘signes simples’ [*einfaches Zeichen*] – sont *déjà* composés de *plusieurs* symboles – par exemple ‘$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \varphi(\mathfrak{a})$’. Plus important encore, elles ne sont pas elles-mêmes des expressions bien formées de l'idéographie. Il s'agit en vérité de quasi-expression (d'expressions incomplètes, de noms de fonctions). Ainsi, contrairement aux langages logiques contemporains, la construction d'une expression de l'idéographie implique des expressions *extérieures à l'idéographie*. Nous verrons cet aspect dans les moindres détails. Pour l'heure, contentons-nous de présenter notre exception : par le terme ‘expression’, nous désignerons les expressions bien formées du langage *ainsi que* les quasi-expressions que sont les noms de fonctions.

En outre, Frege préfère généralement au mot ‘expression’ les termes ‘signe’ [*Zeichen*], ‘combinaison de signes’ [*Zeichenverbindung*], ‘signe simple’ [*einfaches Zeichen*] et ‘signe composé’ [*zusammengesetztes Zeichen*]. Néanmoins, nous venons de voir que, contre toute attente, le terme ‘signe simple’ ne lui servait pas à désigner des symboles – par exemple ‘$\forall$’–, mais des combinaisons de symboles – par exemple ‘$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \varphi(\mathfrak{a})$’. Notons que cela n'advint qu'à partir de l'avènement de la hiérarchie des fonctions, que nous daterons entre 1881 et 1882. En 1879, ‘signe simple’ et ‘symbole’ étaient encore synonymes. Par ailleurs, l'usage du terme ‘signe’ est extrêmement fluctuant. Dans les *Grundgesetze*, Frege l'utilise dans le sens que nous donnons à ‘expression’, car il lui sert à désigner aussi bien des symboles (par exemple p. 11) que des signes simples (par exemple p. 43) et des signes composés (par exemple p. 44).

Ces multiples variations ne facilitent pas la compréhension de ses systèmes. Nous tenterons de remédier à ce défaut en expliquant les différents glissements et en établissant progressivement les sens rigoureux acquis dans les *Grundgesetze* par les expressions ‘combinaison de signes’, ‘signe simple’ et ‘signe composé’.

Dans tous les cas et pour toutes les époques, nous utiliserons le terme ‘symbole’ selon son sens contemporain – ainsi ‘$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \varphi(\mathfrak{a})$’ n'est *pas* un symbole.

Quant au terme ‘signe’, il ne nous a pas semblé judicieux de respecter l'utilisation contemporaine. Cela aurait engendré un décalage trop important entre l'usage frégeen, visible dans nos différentes citations, et le nôtre. Nous l'utiliserons donc dans le sens général que lui attribue Frege, laissant au contexte le soin de préciser les choses, et choisissant soigneusement un autre mot si cela est préférable.

Guide de lecture de la bibliographie

Longtemps après leurs premières publications, les textes de Frege suscitèrent tour à tour l'intérêt des chercheurs, engendrant soudainement de nombreuses réimpressions et traductions. La diversité des thèmes abordées par l'auteur donna lieu à différentes organisations (philosophie, logique, philosophie du langage, philosophie des mathématiques, etc.) dans divers recueils. Nous avons constitué notre bibliographie avec l'intention de guider le lecteur parmi ces nombreux ouvrages et non d'en écrire la liste exhaustive.

Nous nous sommes permis une exception. Cette thèse de doctorat constitue une étude des

4. notamment et surtout dans le cadre de constructions techniques dans lequel nous stipulerons rigoureusement le sens conféré à ce terme.

Grundgesetze, nous considérons donc naturel de proposer au lecteur le détail des publications, réimpressions et traductions anglaises (partielles puis complète) de cette œuvre, retraçant la genèse de la seule traduction complète disponible en langue anglaise, qui dut attendre le gigantesque travail de P.A. Ebert, M. Rossberg et C. Wright abouti en 2013, alors qu'aucune traduction française n'existe encore à ce jour.

Ceci figure en première partie de notre bibliographie. Viennent ensuite, dans l'ordre, les travaux et les recueils (cités) de Frege. Concernant les travaux, nous avons réuni dans la même entrée, séparées par des passages à la ligne, la référence originale, une réimpression dans un recueil (si besoin), et la traduction française (si possible). La version originale étant souvent difficile à consulter, il est préférable d'indiquer la page d'une citation dans un recueil accessible. C'est pourquoi, lorsque l'entrée en question incorpore une réimpression et une traduction, nous indiquons entre parenthèses, en fin de citation, la référence accompagnée de la ou des pages du passage en allemand *de la réimpression* puis en français de la version traduite. Il suffit alors au lecteur de se référer au recueil dans la langue de son choix. Lorsque l'entrée en question n'incorpore aucune réimpression, comme pour le cas des ouvrages, alors les premiers numéros de pages en fin de citation se rapportent naturellement à la référence originale. Si aucune traduction n'existe, nous proposons la nôtre et indiquons seulement la ou les pages de la version allemande. Si nous estimons judicieux de modifier la traduction existante, nous l'indiquons en note de bas de page.

Voici, en guise d'exemple, une citation suivie de l'entrée à laquelle elle se rapporte :

> La notion d'égalité propose à la réflexion quelques questions irrémissibles, auxquelles il n'est pas aisé de répondre. (Frege 1892b, p. 143 / 102)

Frege, G. (1892b). "Über Sinn und Bedeutung". In : *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* NF 100, pp. 25–50.
Réimpression in : Frege *1967a*, pp. 143–162.
Version française : G. Frege. "Sens et dénotation". In : Frege *1971*, pp. 102–126.

Enfin, notre étude nécessite l'examen de travaux inédits du vivant de Frege : ses textes posthumes. Nous en indiquons les références dans la seconde section : "Travaux de Frege cités" selon la même méthode : version allemande puis version française. Néanmoins, ces écrits consistent parfois en de simples ébauches que Frege escomptait corriger ou, au moins, compléter. Ils ne peuvent être considérés au même titre que les textes publiés. Pour marquer la différence, nous faisons apparaître leurs titres en caractères gras. Le lecteur se voit ainsi informé de leur statut d'un simple coup d'œil. Par exemple :

Frege, G. (1924-1925c). "**Zahlen und Arithmetik**". In : Frege *1969b*, pp. 295–297.
Version française : "**Nombre et arithmétique**". In : Frege *1994*, pp. 325–327.

En résumé : la première section contient les références liées aux *Grundgesetze*, la seconde section les travaux de Frege cités selon les conventions expliquées ci-dessus, la troisième section les recueils de travaux de Frege cités et, bien sûr, la quatrième et dernière section contient les travaux d'autres auteurs cités.

Table des matières

Introduction **1**

1 Entre la *Begriffsschrift* et les *Grundgesetze* : un sentier accidenté **33**
1.1 Deux distinctions fondamentales . . . 33
1.2 Le lexique de 1879 . . . 34
1.2.1 Contenus et contenants . . . 34
1.2.2 Usage et mention . . . 36
1.2.3 Enoncés et assertions . . . 37
1.2.4 Inventaire . . . 38
1.3 Jugement . . . 39
1.3.1 Le point de Frege . . . 39
1.3.2 Le jugement dans la *Begriffsschrift* . . . 41
1.3.3 Affinement de la notion . . . 48
1.3.4 Synthèse . . . 53
1.4 Expressions et contenus : un premier mouvement entre 1880 et 1882 . . . 54
1.4.1 Introduction . . . 54
1.4.2 Sphère linguistique et sphère sensible . . . 56
1.4.3 Coloration . . . 57
1.4.4 Enoncés et vérité . . . 63
1.4.5 Mise au point . . . 65
1.4.6 *Combinaisons* d'idées . . . 67
1.4.7 Deux modèles de "composition" des contenus . . . 72
1.4.8 Annonce des thèses défendues . . . 74
1.4.9 L'analyse en termes de fonction-argument . . . 75
1.4.9.1 Introduction . . . 75
1.4.9.2 Fonction-argument et concept-objet : deux matrices entremêlées 77
1.4.9.3 Les signes primitifs contiennent-ils des concepts ? . . . 87
1.4.9.4 La quantification . . . 90
1.4.9.5 Synthèse . . . 97
1.4.10 La quantification en termes de concepts de niveaux supérieurs . . . 99
1.4.10.1 Entre la *Begriffsschrift et les Grundlagen* . . . 99
1.4.10.2 Dans les *Grundlagen* . . . 102
1.4.11 Des contenus structurés ? . . . 106
1.4.12 "Un manuscrit presque complet" . . . 109
1.4.13 Le système de la langue formulaire . . . 112
1.4.13.1 Le trait de jugement . . . 113
1.4.13.2 La quantification . . . 113

1.4.13.3 Les lettres gothiques et latines . . . 113
1.4.13.4 Le trait de contenu . . . 115
1.4.13.5 L'implication . . . 117
1.4.13.6 La négation . . . 118
1.4.13.7 L'identité de contenu conceptuel . . . 118
1.4.13.8 Morphologie . . . 120
1.4.13.9 Syntaxe . . . 124
1.5 Sémantique et logicisme : les causes du premier mouvement . . . 125
1.5.1 Introduction . . . 125
1.5.2 L'avènement du logicisme . . . 128
1.5.3 L'analyse du concept de *nombre* . . . 133
1.5.3.1 La relation d'accessibilité . . . 133
1.5.3.2 Les nombres : objets ou concepts ? . . . 136
1.5.3.3 Les nombres comme concepts de second niveau. . . . 142
1.5.3.4 Les nombres comme objets . . . 151
1.5.3.5 Synthèse . . . 162
1.5.4 Forme et substance . . . 164
1.5.4.1 Retour à la période pré-logiciste . . . 164
1.5.4.2 La thèse de Linnebo . . . 164
1.5.4.3 La quantification : de l'indéterminé au général . . . 165
1.5.4.4 La cause du changement : le développement des mathématiques 167
1.5.4.5 Synthèse . . . 171
1.6 Expressions et contenus : un second mouvement en 1890 . . . 173
1.6.1 Identité de contenu conceptuel, identité d'objet et égalité arithmétique . . 174
1.6.1.1 La lecture orthodoxe . . . 175
1.6.1.2 L'égalité arithmétique . . . 178
1.6.1.3 L'identité dans les *Grundlagen* . . . 187
1.6.1.4 Les modes de détermination : des objets aux énoncés . . . 193
1.6.2 Concepts et fonctions : entre intensionnalité et extensionnalité . . . 204
1.6.2.1 Les concepts : une vision intensionnaliste durant la première période 204
1.6.2.2 Entre premier et second mouvements : l'exil des fonctions . . . 210
1.6.2.3 La cause du second mouvement : une dissymétrie entre fonctions et concepts . . . 217
1.6.2.4 Les énoncés comme noms propres et les concepts comme fonctions 223
1.6.3 Retour sur le rôle des fonctions au sein de chaque mouvement . . . 226
1.7 Synthèse . . . 228

2 Présentation détaillée de l'Idéographie 231
2.1 Composition de la première partie des *Grundgesetze* . . . 231
2.2 Fragment propositionnel (ou presque) . . . 232
2.2.1 Morphologie . . . 233
2.2.1.1 Clauses . . . 233
2.2.1.2 Remarques . . . 234
2.2.2 Syntaxe . . . 236
2.2.2.1 Préliminaires . . . 236
2.2.2.2 Règles et axiomes . . . 240
2.2.2.3 Écriture des démonstrations . . . 243
2.2.3 Métathéorèmes . . . 248

2.2.3.1 Métathéorèmes de complétude et d'adéquation 248
2.2.3.2 Métathéorème de déduction 249
2.2.4 Quelques réserves 250
2.3 La morphologie de l'idéographie : la grammaire des noms 252
2.3.1 Trois "anomalies" du langage 253
2.3.2 La mécanique de combinaison des noms 253
2.3.2.1 Le lexique des noms 256
2.3.2.2 La hiérarchie des fonctions 257
2.3.2.3 Logique de l'Idéographie et logique de Frege 259
2.3.2.4 Les lettres indicatrices 261
2.3.2.5 La mécanique de saturation 264
2.3.2.6 La mécanique de désaturation 278
2.3.3 Définition générale des noms 284
2.3.3.1 Gestion des types 284
2.3.3.2 L'alphabet 286
2.3.3.3 Gestion des indices 288
2.3.3.4 Les expressions du langage 291
2.3.3.5 La méthode par marqueurs 294
2.3.3.6 La méthode par saturation 297
2.3.3.7 Preuve de l'équivalence des deux méthodes 316
2.3.3.8 Les expressions bien formées de l'idéographie 330
2.3.3.9 Remplacements 335
2.3.3.10 Synthèse 339
2.3.4 La lecture de Gregory Landini 341
2.3.4.1 Une pénurie d'indices 341
2.3.4.2 Résumé des arguments 344
2.3.4.3 Substitutions 345
2.3.4.4 Examen de la reconstruction 350
2.3.4.5 Amélioration de la reconstruction 353
2.3.4.6 Le problème du sens 356
2.3.4.7 Synthèse 361
2.4 La morphologie de l'idéographie : la grammaire des termes 365
2.4.1 Le problème des lettres latines 365
2.4.1.1 Leur rôle intra-énoncé 365
2.4.1.2 Leur rôle inter-énoncés 368
2.4.2 Définition générale des marqueurs latins 371
2.4.3 Les substitutions 373
2.5 La morphologie de l'idéographie : les noms primitifs 373
2.5.1 Le problème du trait horizontal 374
2.5.1.1 L'écriture en deux dimensions est facultative 376
2.5.1.2 Le trait horizontal est facultatif 379
2.5.2 Les parcours-de-valeurs dans les *Grundgesetze* 384
2.5.2.1 La désescalade verticale 385
2.5.2.2 La désescalade : une illustration du rôle du trait horizontal . . . 387
2.5.2.3 La compression horizontale 389
2.5.3 Les extensions avant 1890 390
2.5.3.1 Le cadre de 1884 390
2.5.3.2 Les nombres : des extensions de concepts de *premier* niveau . . 393

2.5.3.3 La relation d'appartenance . . . 395
2.5.3.4 Paires ordonnées et double parcours-de-valeurs . . . 400
2.5.3.5 La démonstration du principe de Hume . . . 403
2.5.3.6 Synthèse . . . 404
2.5.4 Parcours-de-valeurs et incohérence . . . 405
2.5.5 Introduction des noms primitifs . . . 406
2.5.6 Définition des noms, marqueurs latins et énoncés de l'idéographie . . . 408
2.5.6.1 Définition des noms de l'idéographie . . . 408
2.5.6.2 Définition des marqueurs latins de l'idéographie . . . 409
2.5.6.3 Définition des énoncés de l'idéographie . . . 409
2.5.6.4 Récupération des conventions de Frege . . . 409
2.6 La syntaxe de l'Idéographie . . . 412
2.6.1 Les règles de l'Idéographie . . . 412
2.6.1.1 Détail des règles . . . 413
2.6.1.2 Remarques . . . 414
2.6.2 Les axiomes de l'Idéographie . . . 415
2.6.2.1 Détail des axiomes . . . 415
2.6.2.2 Quelques axiomes manquants . . . 415
2.6.3 Métathéorème de déduction . . . 416
2.6.4 Métathéorème d'adéquation . . . 417
2.7 Synthèse . . . 417

3 De la possibilité et du statut d'une sémantique fregéenne 421
3.1 Possibilité et statut : deux questions distinctes . . . 421
3.1.1 Genèse d'une polémique . . . 421
3.1.2 Un débat historique . . . 422
3.1.3 Formulation des questions . . . 423
3.1.3.1 L'idéographie : un langage formel interprété . . . 423
3.1.3.2 La théorie des modèles . . . 427
3.1.3.3 Deux différentes questions . . . 429
3.1.3.4 Synthèse . . . 430
3.1.4 Stigmates d'une théorie sémantique dans les *Grundgesetze* . . . 431
3.1.4.1 Un calcul sémantique . . . 431
3.1.4.2 La référence des noms . . . 432
3.1.4.3 La justification des règles et axiomes . . . 433
3.1.4.4 Mise au point et marche à suivre . . . 435
3.2 Les arguments du clan antisémantique . . . 436
3.2.1 Trois types d'"occurrences répétées de phrases spécifiques et de stratégies dialectiques" . . . 438
3.2.2 L'argument du rejet des langages schématiques . . . 441
3.2.2.1 Point historique . . . 441
3.2.2.2 Langage-objet et métalangage . . . 442
3.2.2.3 Variation d'interprétation . . . 445
3.2.3 L'idéographie : une grammaire idéale . . . 450
3.2.3.1 Le carcan universel des pensées . . . 450
3.2.3.2 Théorie et élucidations . . . 452
3.2.3.3 Élucidations et définitions . . . 454
3.2.3.4 Structure des pensées . . . 460

3.2.3.5 Catégories et non-sens . . . 477
3.2.3.6 Jugement et vérité . . . 507
3.2.3.7 Les élucidations dans les *Grundgesetze* . . . 514
3.2.3.8 Synthèse . . . 523
3.2.4 L'Idéographie : un système idéal . . . 531
3.2.4.1 Le problème de la justification . . . 531
3.2.4.2 Le problème des paradoxes . . . 538
3.2.4.3 Le rôle des théorèmes d'adéquation . . . 541
3.2.4.4 Un théorème d'adéquation *en guise* d'élucidations . . . 546
3.2.5 Synthèse : la double captivité logique . . . 548
3.3 §§10, 29-31 et assimilés . . . 550
3.3.1 Préambule . . . 550
3.3.2 Le principe de complétude pour les fonctions . . . 551
3.3.2.1 Présentation . . . 551
3.3.2.2 Domaines de quantification . . . 552
3.3.3 Quelques questions concernant la référentialité . . . 557
3.3.3.1 Une notion substantielle pour un usage théorique ? . . . 557
3.3.3.2 Localisation des §§29-31 . . . 558
3.3.3.3 Présentation du critère de référentialité . . . 558
3.3.3.4 Une notion contextuelle ? . . . 561
3.3.4 Le §30 . . . 564
3.3.4.1 La saturation . . . 564
3.3.4.2 La désaturation . . . 568
3.3.5 Le pas de récurrence : examen et rejet de la lecture contextuelle . . . 580
3.3.5.1 L'objection de Heck . . . 580
3.3.5.2 Deux approches du critère contextuel . . . 584
3.3.5.3 La circularité de la seconde approche . . . 588
3.3.5.4 Détermination de la référence . . . 594
3.3.6 Le pas de récurrence : examen et adoption de la lecture non contextuelle . 596
3.3.6.1 Critère de référentialité et principe de complétude . . . 596
3.3.6.2 Un travail en deux étapes . . . 600
3.3.6.3 Présentation transgressive de la sémantique fregéenne . . . 603
3.3.6.4 Théorème d'adéquation . . . 607
3.3.6.5 Synthèse . . . 619
3.3.7 Lectures alternatives . . . 620
3.3.7.1 La lecture de Weiner . . . 621
3.3.7.2 La lecture de Linnebo . . . 625
3.3.7.3 La lecture de Landini . . . 628
3.3.7.4 La lecture de Heck . . . 629
3.3.8 Sémantique fregéenne . . . 629
3.3.8.1 Mise au point . . . 629
3.3.8.2 Deux causes *indépendantes* de la morphologie de l'idéographie . 632
3.3.8.3 Présentation fregéenne de la sémantique fregéenne . . . 638
3.3.8.4 Morphologie sous-jacente à la sémantique fregéenne . . . 641
3.3.8.5 Preuve que chaque nom dispose d'une unique référence . . . 642
3.3.8.6 Analyse du sens . . . 644
3.3.8.7 Synthèse . . . 649
3.3.9 Les §§10, 31 . . . 651

3.3.9.1 Un autre usage des lettres grecques majuscules 652
3.3.9.2 Le §10 655
3.3.9.3 Le §31 : la méthode 663
3.3.9.4 Le §31 : le défaut 668
3.3.9.5 Quelques remarques au sujet du principe du contexte 676
3.3.10 Deux approches des parcours-de-valeurs 681
3.3.10.1 Un problème transversal à deux époques 681
3.3.10.2 Préservation du sens 683
3.3.10.3 La première approche 692
3.3.10.4 La seconde approche 696
3.3.10.5 Confrontation des deux approches 700
3.4 Retour sur la limitation du domaine 703

Conclusion **709**

A Démonstrations **719**

B Traductions **737**

Introduction

Introduction générale

> Lorsque je pense à des actes d'intégrité et de grâce, je réalise qu'il n'y a rien, à ma connaissance, de comparable au dévouement de Frege à la vérité. Il était sur le point d'achever l'œuvre de sa vie entière, beaucoup de son travail avait été ignoré au profit d'hommes infiniment moins capables, son second volume était en cours de publication et, apprenant que ses hypothèses fondamentales étaient erronées, il répondit avec un plaisir intellectuel qui submergeait manifestement tout sentiment de déception personnelle.

Ces mots furent écrits par Lord Bertrand Russell au Professeur van Heijenoort le 23 novembre 1962, renouvelant un témoignage d'admiration qu'il fut le premier à adresser au logicien Gottlob Frege, et dans lequel il entraîna finalement une communauté considérable de chercheurs qui ne cesse de croître depuis. Pourtant, "l'œuvre de sa vie entière", les *Grundgesetze der Arithmetik*, dont ne sont parus que deux des trois volumes prévus, ne fut traduite intégralement en anglais qu'en 2013, alors que la grande majorité des textes dont nous disposons, publiés ou non par Frege, existent depuis longtemps en anglais et en français. Ce fait assez singulier s'explique à différents niveaux. D'une part, le projet de Frege se solda par un échec aussi spectaculaire que les moyens et le courage déployés à sa poursuite : le système présenté dans ces volumes était incohérent, et c'est Russell qui l'en informa par une lettre qui occasionna, lors de sa publication en anglais, l'échange précédemment cité. L'influence de Frege sur des philosophes et logiciens de premier rang fut peu à peu établie, et il occupe désormais une place privilégiée au panthéon de la logique, de la philosophie et des mathématiques. Néanmoins le désastre de la contradiction emporta avec lui l'édifice auquel il consacra sa vie. Les chercheurs se détournèrent des *Grundgesetze* au profit d'écrits plus philosophiques et moins techniques. Frege lui-même scella le verdict en renonçant à la publication du troisième opus. Cependant, ceci n'explique pas totalement le silence qui entoura longtemps ces ouvrages, car la majorité des positions philosophiques de Frege ne sont plus aujourd'hui défendues telles quelles, mais continuent pourtant d'être étudiées. Les *Grundgesetze* auraient pu suivre le même chemin s'ils ne souffraient d'un autre handicap, bien plus terrible. Le symbolisme utilisé, qui décourageait déjà ses contemporains, n'a pas été retenu par l'histoire. Il demeure donc extrêmement hermétique à un lecteur moderne. Son ombre s'étendit sur la totalité des travaux de Frege durant de longues années de recherche isolée, puis se resserra peu à peu autour de sa production immédiate : le système de déduction.

Certains travaux importants traitant du contenu des *Grundgesetze* dissipèrent progressivement le brouillard. Mais l'ouvrage ne fut réellement porté à la lumière qu'à l'occasion d'une singulière découverte. Crispin Wright montra en 1983 que le système de Frege devient cohérent (si ZFC l'est et) s'il subit quelques modifications, dont le prix est largement discuté depuis. Sans ressusciter *stricto sensu* le logicisme, ce résultat donna naissance à un courant important : l'abstractionnisme, aussi appelé 'neo-logicisme' ou encore 'neo-frégeanisme' et suscita un important

regain d'intérêt pour les *Grundgesetze*, dont une traduction complète fut enfin réalisée sous l'impulsion de Wright [5]. Ce renouveau permit bien sûr le développement de l'abstractionnisme, qui poursuit ses objectifs et possède ses enjeux propres, mais engendra d'un même geste de nouvelles et profondes études du système des *Grundgesetze* pour lui-même, dans la lignée desquelles notre travail s'inscrit.

Notre thèse de doctorat propose une étude approfondie des *Grundgesetze der Arithemtik* de Gottlob Frege ou, pour être plus précis, du système de déduction qui y est exposé, expliqué, exploité et, en un certain sens, justifié ; *ainsi que des conceptions qui y sont mises en œuvre.*

Ces précisions sont doublement essentielles. D'une part, si Frege poursuivit toute sa vie le même objectif, celui de déterminer les principes premiers et d'analyser le contenu réel des sciences mathématiques, ou d'une portion importante de celles-ci, les idées complexes qu'il fut amené à développer, souvent à sa propre surprise, évoluèrent parallèlement. Certaines étaient récentes lors de la rédaction de ces ouvrages et d'autres, parmi les plus fondamentales, furent abandonnées quelques années plus tard. Les *Grundgesetze* sont localisés à une période bien délimitée de sa vie scientifique : entre 1891, deux ans avant la publication du premier volume, et 1906, trois ans après la publication du second. Durant cette période, nous pouvons raisonnablement affirmer que ses positions ont peu évolué [6], les conséquences du paradoxe de Russell dont il fut informé en 1902 ne dessinèrent que (au moins) quatre ans plus tard le virage extrêmement serré qu'il négocia sur la route des fondements des mathématiques, quatre ans durant lesquels il espérait réussir à sauver son système par des arrangements superficiels. Notre but consiste à cerner les conceptions de cette période. S'il exigera certaines recherches propres à celle-ci, il n'en requerra pas moins une reconstitution des mouvements qui y ont conduit afin, en suivant au plus près la trajectoire épousée par Frege, de cerner au mieux le point auquel il aboutit.

D'autre part, les deux opus des *Grundgesetze* sont composés en majeure partie des dérivations de théorèmes de l'arithmétique et de l'analyse réelle dans le système. Seule la première partie, la première section de la troisième, l'épilogue, une part importante de l'avant-propos et quelques passages isolés se concentrent sur le système en lui-même. Celui-ci ne peut être étudié indépendamment des objectifs pour lesquels il a été construit, cependant nous ne nous intéresserons aux démonstrations, aux chemins empruntés pour aboutir à tel ou tel théorème, que dans la mesure où ils éclairent le fonctionnement du système et les conceptions philosophiques qu'il reflète ; et nous serons davantage focalisés sur les passages en question.

La majorité des travaux concernant les *Grundgesetze* traduisent le symbolisme de Frege, plus ou moins violemment, dans le sens des systèmes contemporains. Les auteurs espèrent ainsi épurer sa logique de traits secondaires et obsolètes afin de se focaliser plus directement sur les aspects essentiels et d'éviter d'imposer au lecteur l'apprentissage d'un langage peu orthodoxe. Au contraire, nous envisageons Frege *dans le texte*, et nous soutenons que certains problèmes ne peuvent être résolus qu'à condition de parler sa langue.

Dans cette perspective, une de nos tâches consistera en une reconstruction rigoureuse et contemporaine du système syntaxique des *Grundgesetze* : l'Idéographie. Nous disons 'contempo-

5. (Frege 2013)

6. Nous ne prétendons en aucun cas qu'elles soient restées absolument inchangées. Contrairement à certains logiciens, dont le plus éminent représentant pourrait être Russell, qui ont notoirement modifié leurs conceptions en permanence, parfois sans le signaler au lecteur, Frege est connu pour être explicite dans ses revirements. Néanmoins, nous verrons qu'il faut prendre garde à ne pas nous reposer entièrement sur cette qualité. Il mit parfois du temps à tirer toutes les conséquences d'un changement de cap. Qu'il nous soit seulement permis de faire référence à cette période relativement stable de sa vie scientifique en parlant de 'l'époque des *Grundgesetze*'.

raine', donc, non pas au sens de la traduction, mais au sens de l'exposé. Un système syntaxique exige la donnée d'une morphologie, d'axiomes et de règles ; la présentation de Frege pose, à cet égard, certains problèmes que nous nous proposons de résoudre. Néanmoins, nous ne nous contenterons pas de dispenser ces éléments à l'état brut, bien peu éclairants par eux-mêmes. Cette reconstruction pas-à-pas occasionnera – disons-le dans deux sens : exigera et permettra – une étude de chaque aspect de ce système : le "fragment propositionnel", la quantification, le rôle des "variables" [7], le statut ambigu des lettres grecques majuscules, mais aussi et surtout la fonction horizontale et la hiérarchie des fonctions. Ces deux derniers éléments sont sacrifiés dans une traduction en logique des prédicats de deuxième ordre. Le premier point dépend de l'analyse des valeurs de vérité comme objets, contre laquelle Dummett et d'autres menèrent une violente croisade ; souvent tenue pour une regrettable erreur. Le second repose sur la distinction fondamentale entre fonctions et objets dissoute depuis dans le développement des théories des ensembles. Il n'est pas essentiel au développement de l'arithmétique car Frege tenta de désamorcer l'ascension dans la hiérarchie, mais il constitue néanmoins l'environnement, l'élément naturel de ce développement. Métaphoriquement, si Frege n'eut pas à monter bien haut, il n'en marcha pas moins dans les montagnes. Celles-ci existent, elles font partie du monde, bien qu'il évitât soigneusement de les gravir ; et elles requièrent une analyse d'autant plus méticuleuse qu'elles jouent leur rôle déguisées. La distinction entre fonction et objet, à l'instar de bien d'autres facettes du système, dépend d'aspects cruciaux des conceptions de Frege. Nous nous laisserons donc emporter dans des questions de philosophie du langage lorsque de violents courants nous y entraîneront. Et cela adviendra, nous le verrons, assez fréquemment.

Reconstruction de l'Idéographie

La reconstruction de l'Idéographie nous placera face à un certain nombre de difficultés qu'il n'est pas inutile d'anticiper légèrement. Le §47 des *Grundgesetze* synthétise les axiomes du système et précède le résumé des règles établi au §48. Aucun de ces éléments n'est inédit à ce stade du développement. Chacun d'entre eux fut introduit plus tôt, parfois sous une forme légèrement différente, au cours de l'exposition de la première section de la première partie. Pour des raisons évidentes de pédagogie, Frege n'effectua pas d'emblée une présentation systématique de l'Idéographie, mais guida le lecteur à travers des explications et des exemples éclairants. Il craignait probablement d'effrayer celui-ci s'il le plongeait soudainement dans un symbolisme étranger et hermétique, et nourrissait peu d'espoir qu'il possédât suffisamment de motivation pour dénouer un travail aussi atypique de façon autonome, c'est-à-dire en comprendre à la fois les enjeux, la pertinence et le fonctionnement. Frege avait d'ailleurs fait les frais d'une telle entreprise lorsque la publication de la *Begriffsschrift* fut reçue par des critiques au mieux inexistantes, au pire superficielles, pour reprendre sa propre hiérarchie :

> Parce qu'un examen basé sur une lecture superficielle pourrait aisément faire plus de mal que de bien. (Frege 1893, p.XII)

Nous nous arrêterons longuement, durant notre introduction historique, sur le contexte défavorable dans lequel il rédigea ses *Grundgesetze*, ainsi que sur la présentation informelle, effectuée dans les *Grundlagen*, des idées qui sous-tendent la dérivation des lois de l'arithmétique dans la langue formulaire, soulignant l'importance considérable du travail philosophique au sein de ce projet. Il n'en reste pas moins que l'Idéographie est un système de déduction et qu'en tant que tel, il doit intégrer une morphologie sur un alphabet précis ainsi qu'une syntaxe, des règles et

7. Nous utilisons des guillemets car il n'existe rien, dans l'Idéographie, qui corresponde exactement aux variables et aux logiques propositionnelles contemporaines.

axiomes, sur cette morphologie. Frege est souvent accusé de n'avoir pas fourni proprement ces données, verdict qui serait prématuré s'il ne se basait que sur les détours pédagogiques effectués, faisant fi des règles et axiomes établis en bon ordre dans les §§47-48. Mais un tel jugement se fonde plus souvent sur la confusion ou, plutôt, l'enchevêtrement de la syntaxe et de la sémantique, même dans ces passages ; et sur l'absence d'une description de sa pure morphologie, car il est insuffisant d'exhiber les règles et axiomes si nous ne savons pas à quels termes (ou dans le lexique fregéen, quels noms) et énoncés ils s'appliquent. Concernant le premier point, des auteurs s'inscrivent en faux. Citons à cet égard Landini :

> Frege fut le premier à comprendre pleinement qu'un système formel de déduction fonctionne de telle sorte que ses pas inférentiels sont gouvernés *uniquement* par la syntaxe (forme) des symboles. Les historiens ne lui rendent pas justice lorsqu'ils imaginent que les étapes de déduction de ses systèmes formels et ses idées sémantiques sont entremêlées. (Landini 2012, p. 120)

Le second point exige un examen attentif afin de déterminer si cette morphologie est claire malgré l'absence d'exposé systématique. Dans tous les cas, il est crucial de distinguer les concessions pédagogiques de Frege, les imperfections ou raccourcis bénins et imputables à la nature avant-gardiste de son travail, et les véritables problèmes de fond de son système, qu'il faudrait alors à la fois confronter à la logique contemporaine et discuter pour eux-mêmes, dans le cadre de la théorie fregéenne.

Ainsi, afin de répondre à différentes questions, qu'elles soient historiques ou philosophiques, nous allons étudier Frege *dans le texte*, dans l'idéographie initiale. Jusqu'à présent, son langage fut souvent traduit et son système amendé, *via* cette traduction, par les commentateurs ; principalement dans le cadre de la logique des prédicats de deuxième ordre. Burgess réalise une excellente synthèse de ces diverses entreprises dans *Fixing Frege*[8]. Il s'agit essentiellement d'opérations de sauvetage de l'Idéographie qui poursuivent le meilleur – c'est-à-dire le plus petit – rapport modification/profit : de quelles modifications les plus légères peut-on tirer le plus grand profit, à la fois mathématique – en évitant la contradiction et en conservant un pouvoir expressif et déductif important – et philosophique – en restant proche des idées fregéennes ou, plus souvent, des idées de Frege partagées par certains philosophes contemporains ?

> Toute stratégie, pour être consistante, doit s'écarter de Frege ; mais certaines des approches que nous examinerons demeurent plus proches que d'autres de la stratégie de Frege. Il est parfois suggéré que, plus nous restons proches de Frege, plus nos bénéfices philosophiques sont importants. Je ne poursuis pas ici l'objectif de défendre ou contredire de telles affirmations. Ce sur quoi j'insiste est que tout gain philosophique doit être rapporté aux pertes mathématiques. Car notre examen à venir montre que certaines approches produisent bien plus de mathématiques que d'autres, et il semble souvent que moins nous conservons de Frege, plus nous obtenons de mathématiques. (J. Burgess 2005, p. 2)

Nous avons dit que le courant abstractionniste se situait aussi, d'une certaine façon, dans cette veine. Son objectif n'est pas de ressusciter coûte que coûte le système et les positions de Frege, mais de trouver dans le premier les éléments qui rendent possibles la défense d'idées clefs parmi les secondes, notamment celle de définition par abstraction[9]. Une telle tâche possède donc deux aspects : d'une part, en philosophie des mathématiques et de la logique, l'étude du statut de

8. (J. Burgess 2005)

9. Il existe une polémique autour de l'affirmation selon laquelle la loi V de l'Idéographie est bien une définition par abstraction. Par extension, se pose la question de savoir si Frege acceptait de telles définitions et surtout comment elles s'intégraient à sa philosophie des mathématiques. Nous reviendrons sur ce point.

ces définitions et des normes qu'elles doivent respecter, et d'autre part l'édification de systèmes servant de fondement aux mathématiques (arithmétique, analyse, théorie des ensembles, toutes ces questions sont abordées) dans le strict respect de ces normes.

Notre objectif est ici différent, car nous estimons, et nous verrons, que les traductions les plus minimes engendrent parfois les différences les plus inattendues et, surtout, *les moins visibles de l'extérieur*. Nous poursuivons le double objectif de comprendre certaines thèses de Frege de philosophie de la logique et des mathématiques qui posent toujours question, et de dénouer certains problèmes relatifs à ces thèses. Nous ne sélectionnons pas dans l'Idéographie des outils précis nécessaires à une réalisation particulière, nous nous éclairons de la plus pure lumière fregéenne puis voyons ce que, encore aujourd'hui, elle révèle et, dans l'élan, analysons la composition de cette lumière. Ceci nous semble d'autant plus important que diverses propriétés du système sont toujours laissées sur la touche lors de traductions bien qu'elles soient, nous le verrons, loin d'être anodines ; et donc que, pour les raisons fournies plus haut, l'Idéographie n'a été qu'extrêmement rarement analysée et observée dans son intégralité. C'est pourquoi il nous semble impératif de la reconstruire proprement et rigoureusement. Ainsi, nous disons de cette reconstruction qu'elle est *contemporaine* seulement dans le sens où elle fixe la morphologie et la syntaxe selon les canons actuels, *i.e.* sans intégrer aucun élément sémantique dans les différentes clauses du système et sans rien abandonner à l'implicite. Nous avons, conjointement avec Marco Panza, déjà présenté une partie de l'Idéographie dans (Cadet et Panza 2015) [10]. Landini est, à notre connaissance, le seul à avoir entrepris un exposé rigoureux du symbolisme de Frege [11] (Landini 2012, section 2.6) en justifiant longuement ses partis-pris, très différents des nôtres. Par ailleurs, si ces points font débat, c'est que le texte de Frege n'est pas transparent à leur égard ; notre reconstruction ira donc main dans la main avec une étude de celui-ci, et succédera aux explications préliminaires qui nous semblent nécessaires.

En effet, la présentation du système exige, au même titre que les recherches qui lui succèderont, un examen approfondi du chemin qui conduisit Frege aux thèses sophistiquées des *Grundgesetze*. Nous soutenons que ces dernières ne doivent en aucun cas être abordées *ex nihilo*. Il importe au contraire de comprendre les problèmes qu'elles sont censées résoudre et ainsi les conceptions, parfois sourdes et profondes, qui les sous-tendent. Cette étude préparatoire est d'autant plus importante que, disons-le déjà, nous nous apprêtons à lire Frege, sous divers aspects, comme un dissident de la logique contemporaine. Offrir abruptement un système si atypique générerait plus d'obscurité que de lumière. Nous procèderons donc étape par étape, jusqu'à parvenir à une reconstruction rigoureuse, pierre angulaire de notre future analyse.

Il reste à préciser l'objectif que servira cette reconstruction. À travers elle, nous désirons poser – et nous espérons répondre à – un certain nombre de questions concernant les conceptions

10. en y incorporant les considérations sémantiques formulées par Frege lui-même, mais en les détachant clairement de la construction syntaxique.

11. Roy T. Cook, dans son appendice à la traduction anglaise des *Grundgesetze* : "How to read *Grundgesetze*" (Cook 2013), entreprend un projet analogue, qu'il présente ainsi :

> Cette appendice est destinée à assister le lecteur dans sa familiarisation avec les notations, les règles et les définitions des *Grundgesetze* de Frege. Le but n'est *pas*, cependant, de fournir un guide de "traduction" des formules et preuves de Frege en notations modernes. [...] Le système formel des *Grundgesetze* est unique, avec ses propres forces, faiblesses et curiosités, et le lecteur qui souhaite en apprendre plus sur la logique et la philosophie de Frege devrait s'attacher à comprendre le système formel dans ses propres termes, plutôt que plongé dans des systèmes contemporains (et donc anachroniques, si son but est de comprendre Frege). (p. A-1)

Après deux pages traitant de la terminologie fregéenne, l'auteur rédige trois longues parties éclairantes sur le langage, les règles et les définitions. Néanmoins, sans rentrer en contradiction avec l'annonce de son objectif, car il existe plusieurs moyens d'"assister" le lecteur, il ne fournit aucune présentation systématique de la morphologie du langage.

de Frege. Ces interrogations seront prises au sein d'un déploiement très précis. Car l'étude de ces conceptions, nous pensons qu'il importe de l'aborder sous un angle spécifique. Avant d'indiquer proprement la manière dont nous allons opérer, il nous faut procéder à quelques rappels concernant d'une part l'objectif de Frege, et d'autre part sa vie scientifique.

Le projet fregéen

L'étude du système logique des *Grundgesetze* à laquelle nous nous destinons se doit d'intégrer deux autres dimensions du travail de Frege sur lesquelles cet ouvrage s'appuie : l'analyse du langage développée dans trois articles parus entre 1891 et 1892 [12] et la définition informelle du nombre cardinal fournie en 1884 dans les *Grundlagen der Arithmetik* [13], que nous retrouvons – modulo quelques ajustements dûs précisément au travail sur le langage postérieur à 1884 – dans les *Grundgesetze*. Nous venons de dresser les trois échelles selon lesquelles l'œuvre de Frege est traditionnellement mesurée. Nous pouvons dire, assumant l'anachronisme, que Frege fut à la fois un logicien, un philosophe du langage et un philosophe des mathématiques, si nous n'oublions pas ce qui demeura, au milieu des modifications, des développements et des analyses diverses, son objectif invariant : l'analyse mathématique, entendue à l'exclusion de la géométrie [14]. Celui-ci exigeait, comme il le note dans les *Grundlagen*, de la philosophie :

> Une recherche fondamentale sur le concept de nombre ne peut manquer d'être marquée de philosophie. La tâche est commune aux mathématiques et à la philosophie. (1884, p. V / 118)

Il incombe de "définir" proprement le concept de nombre, mais aussi les autres éléments – employé dans un sens neutre – des mathématiques, et de déterminer proprement la nature des démonstrations. Autrement dit, il faut savoir exactement de quoi nous parlons pour apprendre comment en parler, pour s'assurer que les raisonnements menés en mathématiques sont corrects. D'une part, cela éclairera le mathématicien sur son objet, d'autre part, cela lui procurera des outils sécurisés pour mener sereinement ses preuves. Frege poursuit ce but tout au long de ses recherches, par-delà les évolutions et les déconvenues. Dès 1882, dans un court article consacré à la défense de son premier système, il écrit :

> Les sciences abstraites ont besoin, et ce besoin est ressenti de plus en plus vivement, d'un moyen d'expression qui permette à la fois de prévenir les erreurs d'interprétation et d'empêcher les fautes de raisonnement. (Frege 1882c, p. 106 / 63)

"De plus en plus vivement", le contexte ne laissait aucun doute. Frege s'exprime alors que les mathématiques s'émancipent chaque jour davantage de la géométrie ; que, essayant de séparer la fonction de son graphe, les chercheurs entreprennent de prouver des choses qui "se voient" – le théorème des valeurs intermédiaires de Bolzano en est un exemple – et découvrent en retour des propriétés troublantes qui contredisent ce qui "se voit" : des fonctions continues non dérivables en tous points – fonction de Weierstrass – ; alors qu'ils se demandent à quoi de tels monstres peuvent correspondre, envisageant parfois l'extrême possibilité de les rejeter ; alors que l'algèbre, toujours dans cet effort d'émancipation, s'étend et se ramifie ; alors que, plus tardivement, Cantor, théorisant la notion de cardinal *via* celle de bijection, après avoir prouvé que $[0, 1]$ est en bijection avec $[0, 1]^2$, que le carré rentre dans un segment donc, montre qu'il est aussi en bijection avec

12. (Frege 1891 ; Frege 1892b ; Frege 1892a)
13. (Frege 1884)
14. Pour éviter des redites, il nous arrivera souvent de parler des mathématiques dans ce sens restreint.

$[0,1]^n$ et déclare à Dedekind, stupéfait : "Je le vois, mais je ne le crois pas" [15]. Alors que les mathématiques donc, gagnant douloureusement leur indépendance, s'interrogent sur leur identité, Frege n'est pas, loin s'en faut, le seul à soulever ces problèmes. Il fut néanmoins le premier à prendre au sérieux la part de philosophie que ces derniers incorporaient, car il connaissait le danger de la régression à l'infini et, sur ce point aussi, resta ferme tout au long de sa vie : *tout ne se définit pas*. Il existe un travail préalable, antérieur à celui des définitions.

Il faut d'abord creuser jusqu'à apercevoir les racines, c'est-à-dire enquêter, sur le langage d'une part, et parallèlement sur ce qu'il exprime, sur ce qui est ultimement jugé vrai ou faux, sur la nature du contenu du savoir, faire le lien entre les deux, observer selon quels principes le langage parvient à exprimer des contenus. Il ne s'agit pas là de définir donc, car tout ceci est premier et constitue les entités pensables les plus simples, car "on ne saurait demander que tout soit défini, pas plus qu'on ne pourrait demander à un chimiste qu'il analyse toute matière" [16]. Il s'agit plutôt de fournir le cadre de l'élaboration d'un langage qui respecte ces principes. Car les langues naturelles les transgressent trop souvent, générant des erreurs plus ou moins malheureuses, plus ou moins dangereuses. Frege, en effet, se débattit inlassablement contre leur emprise, dénonçant un fonctionnement hérité de leur rôle premier : celui de la communication quotidienne ; imprécises, pressées et gouvernées par certains objectifs pragmatiques transversaux à la pure assertion d'une pensée, la stricte transmission d'un savoir ; qui ne pouvait seoir à l'expression scientifique dans toute sa rigueur. Dès 1979, il écrivait :

> La logique s'est jusqu'ici toujours rattachée trop étroitement à la langue et la grammaire. (Frege 1879b, p. VII / 8)

Et cette lutte l'accompagna toute sa vie, au point d'affirmer entre 1924 et 1925, dans un des derniers textes inédits :

> L'acte de compter, né psychologiquement d'une exigence de vie active, a induit les savants en erreur. (Frege 1924-1925c, p. 297 / 327)

À cette occasion, il blâma sa propre analyse du concept de *nombre cardinal* qu'il avait pourtant défendue dans ses ouvrages les plus importants, et par laquelle il pensait être enfin parvenu à rendre compte de cet acte de compter, où qu'il intervienne, sous toutes ses formes, et à l'asseoir sur la véritable nature des nombres. Mais une fois de plus, il s'était, pensa-t-il, laissé piéger par l'acte en lui-même, et par une langue qui s'en laisse teinter, alors qu'elle devrait, aux yeux de Frege, se contenter, au moins dans la sphère scientifique, de permettre l'expression et l'assertion, neutre et impartiale. Une fois encore, cette langue aura caché la vraie nature des choses ; et des choses auxquelles Frege a pourtant consacré toute sa vie intellectuelle : les nombres. Jusqu'au bout, il demeura aux prises avec cette langue, résistant implacablement à ses effets insidieux, essayant coûte que coûte d'instruire, par l'élaboration d'un langage artificiel, un diktat plus dur encore ; mais dont l'autoritarisme constitue une force, car "en tant que moyen d'expression d'une pensée, la langue doit se modeler sur ce qui relève des pensées" (Frege 1923, p. 279 / 306), et sur rien d'autre, sur aucun acte, sur aucune intention contextuelle du locuteur, sur rien, en somme, qu'il réunit sous la bannière de la poésie, nommant ainsi un peu rapidement le coupable, faute de l'identifier proprement. Mais coupable de quoi exactement ? Ou plutôt, coupable où et quand ? Car innocente, voire vertueuse, la langue naturelle et tout ce qu'elle contient de poésie l'est indéniablement lorsqu'elle s'en tient à son rôle premier, celui d'un outil de communication quotidien et spontané, naturel donc, comme son nom l'indique ; mais elle ne l'est plus lorsqu'elle habille le contenu des sciences, où surtout rien d'autre ne doit circuler que ce qui peut être jugé

15. (Cavailles 1962, p. 211)
16. (Frege 1892a, p. 167 / 128)

vrai ou faux, ce que certains logiciens contemporains appellent 'propositions' et que Frege, lui, qualifie de 'pensées'. Lorsque, en hâte, elle crée des ambiguïtés, des homonymies malheureuses, le mal est réel mais superficiel, car facilement identifiable. Mais le problème est bien plus profond lorsqu'elle transgresse la grammaire logique pure, travestissant la forme sous-jacente du langage, c'est-à-dire la façon dont les sens s'articulent les uns avec les autres, dissimulant, finalement, la façon dont les mots font sens. C'est en abordant le problème sous cet angle, en questionnant comment le langage peut faire signe à l'extérieur de lui-même, et comment ce signe peut être compris et transmis ; en posant des questions de *sémantique* ; en dialoguant hors de la stricte communauté mathématique de son époque : avec Husserl – à qui nous avons emprunté plus haut l'expression de 'grammaire logique pure' qui se prête si bien à Frege – et Russell, qui prenaient comme lui cette dimension au sérieux, que Frege a abreuvé nombre de philosophes du langage.

Ainsi la première tâche était celle-ci : la construction d'un langage artificiel adapté à la seule expression de ce qui peut être jugé vrai ou faux, à l'expression scientifique : une *Begriffsschrift*. Par deux fois il s'y attela : en 1879, dans l'ouvrage du même nom [17], et en 1893-1903, dans nos *Grundgesetze*. Il ne disposa malheureusement ni d'assez de temps ni, peut-être, d'enthousiasme, pour une troisième tentative, après 1906, lorsque la contradiction eût bouleversé ses conceptions les plus profondes. Frege emportait donc toute son ontologie et toute sa sémantique dans ces différentes entreprises qui ne peuvent en être étudiées indépendamment, fondées et justifiées par elles.

C'est seulement arrivé à ce stade que le processus de définition prend tout son sens, et nous comprenons que cette seconde besogne est subordonnée à la première. Frege entreprit d'exprimer le contenu des expressions mathématiques, à l'exception de la géométrie, en exploitant les strictes ressources de sa langue idéale. C'est ainsi qu'il espérait notamment, avant la découverte de la contradiction, "définir" les nombres. Nos guillemets s'expliquent par un certain raccourci que Frege s'autorisa fréquemment. Le concept de *nombre* n'est pas un signe, et seuls les signes se définissent. À proprement parler, il ne s'agit pas de définir le concept de *nombre*, mais d'*analyser* logiquement le sens du terme qui réfère à ce concept, *i.e.* de reconnaître ce sens comme composé de sens d'expressions – les symboles primitifs de son système – qui réfèrent à des fonctions *logiques*. Si nous voulons éviter d'user si tôt du jargon fregéen, disons seulement qu'il faut analyser, c'est-à-dire décomposer, le sens d'une expression mathématique en d'autres sens qui possèdent un caractère particulier, et qui s'expriment dans le système logique. Par exemple, "définir" – en empruntant le raccourci de Frege – le concept de *nombre cardinal* consiste à reconnaître dans le sens d'une expression du système logique celui que l'expression "nombre cardinal" possède *réellement* en mathématiques [18].

Dans un troisième temps, il est nécessaire de dériver les théorèmes de cette discipline, au moins les théorèmes fondamentaux, dont Frege pensait – de façon compréhensible, car personne ne suspectait alors le (méta)théorème d'incomplétude de Gödel – que les autres se déduisaient à leur tour (en excluant toujours la géométrie). Ces dérivations doivent être menées, non pas dans son langage, mais dans son système d'axiomes et de règles. Une vérité est donc logique – il dirait aussi, adaptant la terminologie kantienne à ses conceptions, 'analytique' – si elle s'exprime (se traduit) dans le langage logique et se dérive des règles et axiomes du système logique, c'est en ce sens spécifique que Frege parlait de réduction à la logique.

Il soutint qu'une telle vérité n'a sa source dans aucune intuition sensible, qu'elle soit *a priori* ou *a posteriori*, car les vérités sur lesquelles elle repose, *i.e.* à partir desquelles elle est prouvable,

17. (Frege 1879b)

18. Nous décrivons son objectif tel que Frege le présenta lui-même, bien que ces explications soulèvent certaines difficultés sérieuses, que nous examinerons en cours de route.

sont elles-mêmes logiques. C'est pourquoi il lui était essentiel d'édifier un système de démonstrations rigoureuses dans lesquelles aucune information invisible, aucune prémisse implicite ne pouvait se glisser ; afin de reconnaître immédiatement la justification d'une vérité dans les autres vérités qui en constituent la racine. Bien sûr, cela implique que les axiomes et les règles eux-mêmes possèdent un statut particulier. Dummett remarqua ici un certain vice de présentation :

> Avec une négligence peu commune, Frege a posé ses définitions [19] de sorte qu'elles ne couvrent pas les prémisses initiales elles-mêmes (Dummett 1991b, p. 24)

En effet, si certains signes sont primitifs, *i.e.* ne sont pas définissables, certaines vérités sont aussi premières, ne sont pas prouvables, il s'agit des axiomes [20]. Or si les vérités logiques sont exactement celles qui se prouvent dans le système, alors les axiomes, ne s'y prouvant pas, ne sont pas reconnus comme logiques. Il s'agit bien sûr d'une simple étourderie : Frege tint aussi ces vérités premières pour des vérités *logiques*. Mais elle permet de remarquer ce que Frege lui-même admit volontiers : si certaines vérités sont reconnues logiques *par le système*, d'autres voient leur statut reconnu *en amont*. Il les nommerait des 'vérités triviales' [*einleuchten*].

Notons que la logicité d'une vérité non triviale repose doublement sur la possibilité d'être exprimée dans le langage logique et d'être déduite *via* les axiomes et les règles logiques. Comprendre le premier point exige indéniablement d'étudier l'analyse logique du langage de Frege. Quant au second, il pose immédiatement la question du statut privilégié des axiomes et des règles. Tout cela attend que nous pénétrions la sémantique complexe et, pour l'époque, novatrice de Frege.

Nous avons fait l'esquisse du projet auquel il se consacra, et introduit la forme prise jusqu'à l'ultime changement de cap, lorsque Frege, sans modifier l'essentiel de sa théorie sémantique, bouleversa sa "définition" du nombre et, par voie de conséquence, sa conception du contenu des mathématiques dans leur ensemble.

Nous pouvons décrire son programme sans tenir compte de cette forme particulière :

1. Bâtir un système de déduction *logique* grâce à une rigoureuse analyse logique du langage.
2. Analyser le contenu des sciences qui se réduisent à la logique en l'exprimant directement dans ce langage.
3. Dériver les théorèmes fondamentaux de ces sciences dans ce système.

L'idée selon laquelle les sciences qui se réduisent à la logique sont précisément les sciences mathématiques (à l'exclusion de la géométrie), voilà ce qu'on appelle traditionnellement 'le logicisme' ; et le projet issu de cette idée – la forme précise que Frege lui donna jusqu'à son revirement –, voilà ce qui est nommé 'projet logiciste' ou 'réduction des mathématiques à la logique'.

Dans l'introduction à sa *Begriffsschrift* de 1879, Frege usa de la métaphore de l'œil, imageant la langue naturelle, et du microscope, le langage artificiel, pour expliquer que le second n'avait pas vocation à remplacer le premier dans son rôle quotidien, mais à permettre localement, au sein du discours scientifique, d'accéder à une précision dont le premier était par nature incapable. Il rejoignait ainsi Leibniz dans sa tentative d'édification d'une *lingua characterica*, mais en s'attribuant à lui-même une tâche plus modeste : la dérivation des sciences mathématiques (hors géométrie) dans le système selon les trois phases décrites ci-dessus. Il pensait d'ailleurs parvenir à son but en rédigeant les *Grundgesetze*. La suite du programme leibnizien, Frege ne manifesta jamais sa volonté de s'y atteler, précisément car il savait la tâche considérable. Néanmoins, il

19. Dummett fait ici référence à la manière dont Frege a introduit la notion de vérité analytique en 1884, qu'il abandonnerait bientôt au profit de celle de vérité logique.

20. Notons que Frege n'évoluait pas dans des systèmes qui se passent d'axiomes grâce au procédé de décharge d'hypothèses. À ses yeux, une preuve est une suite d'application des règles du système à partir des axiomes du système.

la présenta comme un prolongement naturel et légitime : adapter le fabuleux microscope aux autres sciences. Bien sûr, leurs contenus ne se laissent pas réduire à la logique. Mais en introduisant proprement de nouveaux signes pour exprimer ces contenus – *non logiques* cette fois-ci – et de nouveaux axiomes pour régir l'usage de ces signes, alors ces sciences pourraient tirer partie d'un tel instrument, assurées du fait que tout raisonnement mené est correct, et ainsi, lorsqu'une conclusion s'avère inexacte, en mesure d'identifier rapidement la ou les prémisses en cause.

Dans l'introduction au premier système, Frege en dit quelques mots :

> Il me paraît même plus facile d'étendre le domaine de ce langage formulaire à la géométrie. Il faudrait seulement ajouter encore quelques signes pour les rapports intuitifs qui y apparaissent. De cette manière, on obtiendrait une sorte d'*analysis situs*. (Frege 1879b, p. VI / 8)

Ensuite viendraient, selon lui, la mécanique et la physique. Concernant la géométrie, un signe notamment serait réservé au concept de *droite*, un autre encore pour celui de *direction*. Il s'agirait alors d'intégrer des domaines dont la généralité est moindre. Si la relation d'égalité est, disons pour l'instant, pertinente entre deux objets quelconques, celle de parallélisme ne l'est pas entre, par exemple, deux nombres entiers. Qu'à cela ne tienne, il aurait suffi de "définir" les signes de sorte que les cas dégénérés soient inoffensifs vis-à-vis du reste du système, nous verrons que Frege, dans un autre cadre, autorisait tout à fait ce procédé.

Il envisageait donc, pour d'autres ou pour lui-même, l'étape supplémentaire :

4. Ajouter de nouveaux symboles pour exprimer le contenu des autres sciences et construire les théories de ces sciences *via* des axiomes qui régissent l'usage de ces symboles.

Frege a peu publié après avoir admis que la contradiction condamnait son système, et les textes inédits dont nous disposons ne permettent pas de trancher, mais il n'est pas certain qu'il ait eu à redire sur l'essence du projet décrit en quatre étapes. Ce qu'il déserta assurément, ce fut le logicisme, c'est-à-dire la forme particulière donnée à la seconde étape. En effet, durant la dernière période de ses recherches, il affirma que le contenu des mathématiques ne pouvait finalement s'exprimer dans un système *logique*, estimant que les nombres se fondaient sur des intuitions géométriques – exigeaient le contenu de la géométrie –, et que ce dernier ne se réduisait en rien à celui de la logique. Il aurait néanmoins pu envisager, s'il en avait eu le temps, d'ajouter à un système purement logique, différent bien sûr de celui des *Grundgesetze*, les signes et axiomes de la géométrie afin, dans un deuxième temps, de définir les nombres et dériver les théorèmes fondamentaux des mathématiques.

Assurément, après Gödel, il n'est pas clair qu'aucun ensemble (récursivement énumérable) de théorèmes permette de dériver *toutes les mathématiques*, et le sens de cette dernière expression s'est obscurci du même coup. Assurément, après le succès des géométries non euclidiennes et leur utilisation dans les sciences physiques, il est douteux que la géométrie euclidienne constitue *la géométrie du monde*. Mais nous nous plaçons ici à l'époque de Frege, dans une perspective fregéenne.

En vérité, Frege n'évoqua plus son projet, mais ne dit rien qui s'y opposât non plus, et nous ignorons ce qu'il serait advenu s'il avait pu suivre jusqu'au bout le sentier qu'il rejoignit à la fin de sa vie. Jamais, dans les derniers textes publiés ou inédits, il ne déclara que son renoncement au logicisme impliquait du même coup l'impossibilité de la réalisation du programme décrit ci-dessus, c'est-à-dire, *in fine*, l'établissement d'un moyen d'expression adapté aux sciences grâce à une juste analyse logique du langage. Au contraire, cette dernière continua d'occuper une place

de choix dans ses écrits.

L'ébauche du projet fregéen est achevée, et nos dernières précisions permettent de rappeler un fait souvent omis dans certaines discussions auxquelles nous voulons prendre part : le système (considéré par Frege comme) logique avait vocation à s'étendre et se corrompre hors de la logique afin que les théories du monde y soient développées. Cela, bien sûr, devait survenir postérieurement aux trois premières étapes qui, durant la seconde période de la vie scientifique de Frege – selon un découpage désormais standard –, était le propos de nos *Grundgesetze*. Quelques mots sont nécessaires sur ce découpage, afin de bien cerner notre objet.

Quelques points d'histoire

A l'exclusion des articles, critiques et commentaires, la bibliographie de Frege se limite à quatre ouvrages, publiés durant une carrière universitaire excédant les quarante années. Paradoxalement, son œuvre généra une littérature surabondante qui croît encore aujourd'hui. Ce phénomène s'explique par le caractère tardif avec lequel son travail fut découvert. Durant ses principales années d'activité, Frege fut peu et mal lu, et ainsi tourmenté à la fois par un cruel manque d'interlocuteurs et par une relation difficile aux éditeurs. Le sort a voulu que le premier véritable signe de reconnaissance s'accompagne de la découverte qui détruisit son projet : la lettre de Russell dans laquelle le paradoxe du même nom est exposé.

Frege effectua des études classiques de mathématiques, qui incorporaient alors quelques enseignements de philosophie et de chimie. Il officia toute sa carrière dans l'université qui le forma, à Iéna, à l'exception de cinq semestres à Göttingen où il soutint un doctorat de géométrie en 1873. L'année suivante, l'habilitation lui fut décernée et un poste de *Privatdozent* attribué. En 1879, il devint professeur assistant puis, en 1896, accéda à la fonction de professeur ordinaire honoraire. Moins gratifiante qu'une chaire, elle l'exposait en retour à des tâches administratives plus légères. Les rares témoignages existant donnent de Frege l'image d'un professeur extrêmement rigoureux et d'un excellent pédagogue. Il eut néanmoins peu d'étudiants, parmi lesquels on compta Carnap, entre 1910 et 1914. Dans la même période, il orienta le jeune Wittgenstein, qu'il rencontra brièvement, vers les travaux de Russell. Le philosophe autrichien soutint financièrement Frege lorsqu'une santé fragile contraignit celui-ci à se retirer, en 1918.

Frege eut une vie personnelle sobre et douloureuse. Né en 1848, il perdit son père rapidement. Marié en 1887, la disparition de ses enfants précéda celle de sa femme en 1904. Seul Alfred, un fils adopté en 1900, survécut. Frege mourut en 1925, ses derniers textes révèlent un pessimisme profond, souvent caractéristique d'une existence malheureuse qui fut, dans son cas, aggravée par une carrière ingrate [21].

Sa pensée évolua tout au long de ses recherches, mais ses publications permettent difficilement de dater les différents mouvements avec précision ; et sa correspondance scientifique ainsi que ses écrits inédits ne fournissent pas toujours assez d'éléments. Ceux-ci sont partie d'un *Nachlass* qui fut transmis, dans les années 30, par Alfred Frege à H. Scholz, de l'université de Münster. Malheureusement, ces textes originaux disparurent durant la seconde guerre mondiale. Scholz avait prudemment réalisé des typographies de certains d'entre eux, mais il mourut avant la publication, laissant les documents à son successeur, H. Hermes, en emportant avec lui les informations concernant la part (et notamment la quantité) perdue. Le projet se transforma puis aboutit

21. Lorsque les travaux de Frege suscitèrent l'intérêt des universitaires, il était trop tard pour réunir les éléments nécessaires à la rédaction d'une biographie personnelle. T.W. Bynum (1972) tenta de composer avec ce handicap et fournit un certain nombre de détails d'où nous tirons ce court récit.

à la publication en deux volumes, dont l'un comprend les textes posthumes (Frege 1969b) – disponible en traduction française (Frege 1994) – et dont l'autre comprend la correspondance (Frege 1976) – dont une part importante est disponible en traduction anglaise (Frege 1980). Ces échanges impliquent des philosophes ou mathématiciens aussi éminents que Hilbert, Husserl, Peano, Russell, Löwenheim et Wittgensetein.

En 1879, cinq ans après son habilitation, Frege publia son premier ouvrage dédié aux fondements des mathématiques : *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1879b), dans lequel est développé le premier système de déduction au sens moderne, c'est-à-dire d'axiomes et de règles établis dans une langue formulaire. Pour saisir son caractère révolutionnaire, il est utile de le comparer aux deux autres traités parus sur le sujet à la même époque. Il s'agit, en 1888 du *Was sind und was sollen die Zahlen ?* de Dedekind [22], et en 1889, des *Arithmetices principia, nova methodo exposita* de Peano [23]. Ce dernier avait lu l'ouvrage de Dedekind, dans lequel sont présentés les ancêtres des axiomes de Peano, justement. En revanche, rien ne suggère que ces auteurs aient eu connaissance du travail de Frege.

Les deux ouvrages possèdent certaines failles au regard du programme fregéen présenté plus haut. Le système de déduction de Peano n'est pas hérité d'une analyse logique, les notions centrales y sont introduites axiomatiquement. C'est donc les étapes 1 et 2 qui font défaut. Dedekind, au contraire, entreprit une analyse logique du concept de *nombre naturel*, mais sans la conduire jusqu'à l'édification d'un système rigoureux. Ainsi, les règles de déduction ne sont pas spécifiées et les raisonnements toujours menés dans la langue naturelle. Frege souligna le défaut :

> Il est facile de raccourcir l'écriture d'une preuve sur le papier, en omettant plusieurs étapes intermédiaires de la chaîne d'inférence ou en se cantonnant à les signaler. (Frege 1893, p. VIII)

C'est donc vis-à-vis des étapes 1 et 3 du programme que ce travail pêcha, bien que Frege fût aussi en désaccord sur la résolution particulière du problème 2 proposée par Dedekind.

En toute justice, il convient de rappeler que les reproches formulés aujourd'hui sont permis par les décennies d'évolution de la logique contemporaine. Ces écrits précurseurs amorçaient l'élaboration d'une réglementation que nous nous contentons aujourd'hui d'appliquer. La mise au point d'une telle machinerie, l'édification d'une telle bâtisse, à une époque où les mathématiques se déployaient à l'air libre, s'accompagna naturellement de soubresauts et de faux mouvements. La prise en compte de toutes les données importantes fut le résultat d'un nettoyage progressif des éléments implicites qui entraient alors en jeu dans l'écriture des mathématiques. Nous devrons conserver ce contexte en mémoire lors de notre étude, car Frege lui-même fut responsable d'un certain nombre de manquements à la rigueur attendue aujourd'hui lors de la construction d'un langage et d'un système logiques. Cependant, malgré ces failles bien compréhensibles, la confrontation de son premier système aux travaux de ses contemporains témoignent du sérieux avec lequel il envisageait, dès 1879, l'élaboration d'une langue artificielle. Il exposa clairement les règles et les axiomes, à l'exception des règles de substitution, et incorpora le premier système propositionnel [24] (sémantiquement) complet de l'histoire de la logique. Il fut moins pointilleux concernant la morphologie, défaut qui gangrène aussi les *Grundgesetze*.

Cette rigueur, donc, s'est progressivement étendue parmi les logiciens, mais elle était à l'époque peu commune et entrava grandement la réception de son ouvrage. Frege sala l'addition en réalisant, en première partie, un travail préalable d'analyse logique en rupture avec la tradition. Il abandonna la distinction entre sujet et prédicat au profit d'un découpage en termes

22. (Dedekind 1888)
23. (Peano 1889)
24. ou quelque chose qui s'en rapproche, nous le verrons.

de fonctions et d'arguments afin d'introduire la quantification. Le processus de substitution, tout implicite soit-il, constitue un progrès non moins central, nous y viendrons. Ainsi, ce sont peut-être les bouleversements considérables que Frege préparait qui lui valurent de travailler dans une indifférence quasi-générale. Aucun logicien ne cerna l'intérêt de la *Begriffsschrift*. Celle-ci n'occasionna que des critiques superficielles. Parmi les six connues, les plus importantes furent proposées par J. Venn [25] et E. Schröder [26]. Elles comparaient défavorablement son travail à celui de Boole. Frege rédigea une réponse détaillée [27], mais cumula les refus des éditeurs. Seuls deux courts plaidoyers informels [28] furent finalement publiés.

Frege entrevoyait clairement l'impasse dans laquelle il se trouvait. Son travail comportait une importante dimension philosophique qui ennuyait les mathématiciens. Au contraire, les difficiles développements techniques effrayaient les philosophes. De plus, son symbolisme atypique rebutait les deux types de lecteurs. Il exprima souvent son désarroi à cet égard, expliquant, dans une lettre à Anton Marty [29], que les chercheurs ne prenaient pas la peine de manipuler ses notations sans en connaître l'intérêt, mais que cet intérêt n'était visible qu'après une certaine familiarisation avec ces notations.

Afin de s'évader de ce cercle vicieux, il rédigea un deuxième ouvrage duquel sa langue artificielle fut intégralement absente : les *Grundlagen der Arithmetik*, paru en 1884 [30]. Malgré cette concession, la situation ne s'améliora guère. Débarrassé provisoirement du handicap de son symbolisme, Frege ne s'en exposait pas moins à une réception difficile car il prit pour cible les thèses d'écoles très actives à l'époque : celles du psychologisme, du formalisme et d'un certain empirisme radical. Il débattit aussi les idées de Cantor et suscita une réponse terriblement injuste [31]. Seul Husserl discuta le texte en profondeur [32], amorçant leur correspondance. Ces différentes critiques, menées de front dans la première partie de l'ouvrage, avaient vocation à préparer la présentation de sa propre analyse logique du concept de *nombre cardinal*, centrale à la résolution complète du problème 2. Dans la *Begriffsschrift*, le langage logique était construit et certains concepts centraux analysés. Aux yeux de Frege, l'analyse du concept de *nombre cardinal fini* puis, rapidement, de *nombre naturel*, s'effectuait à partir de ces derniers et de celui de *nombre cardinal*. Dans les *Grundlagen*, il posait donc le dernier jalon. Les naturels en poche, plus aucun obstacle sérieux ne se dressait devant l'analyse des notions restantes et la dérivation des théorèmes fondamentaux dans le système. Il ne restait qu'à intégrer le travail des *Grundlagen* à son symbolisme pour pouvoir y achever la troisième et dernière étape du programme. Le projet était transparent, et Frege escomptait le réaliser rapidement. Pourtant, à partir de 1886, il se tut, mettant fin à la première période de sa vie scientifique. Car lorsqu'il revint, cinq ans plus tard, il ne brandit pas des démonstrations réalisées dans sa langue formulaire, mais trois articles rédigés en allemand qui modifièrent en profondeur ses conceptions.

Ce n'est qu'en 1893 qu'il tint sa parole, dans le premier volume nos *Grundgesetze*. Alors qu'il pensait atteindre enfin son objectif initial, il expliqua son silence préalable :

> La raison pour laquelle la réalisation intervient si tard après l'annonce tient en partie à des changements internes à mon langage qui m'ont forcé à jeter un manuscrit presque complet. (Frege 1893, p. IX)

25. (Venn 1980)
26. (Schröder 1880)
27. (Frege 1881)
28. (Frege 1882c ; Frege 1882b)
29. (Frege 1976, p. 165)
30. (Frege 1884)
31. (Cantor 1885)
32. (Husserl 1891)

Le système logique des *Grundgesetze* n'est *pas* celui de la *Begriffsschrift*, et il ne fut *pas* suffisant d'intégrer l'analyse des *Grundlagen* au travail de cette dernière pour achever naturellement l'étape 2 et accomplir l'étape 3. Frege le crut tout d'abord, mais il se confronta à des difficultés qui l'amenèrent à modifier intégralement ses conceptions sémantiques, altérant ainsi la première étape du programme.

Le contenu des trois papiers parus entre 1891 et 1892 présente ces modifications en élaborant une théorie sémantique novatrice et sophistiquée au point d'être aujourd'hui reconnue comme fondatrice de la philosophie du langage. La célèbre distinction entre le sens –*Sinn* – et la référence –*Bedeutung* –[33] d'une expression est mise à jour dans l'article "Über Sinn und Bedeutung" de 1892[34], traduit en français par "Sens et référence". Un long développement sur les notions de fonction et de concept fut alors jugé nécessaire et réalisé dans "Funktion und Begriff", publié en 1892[35] et traduit en français par "Fonction et concept"[36]. Enfin, une critique adressée par B. Kerry[37] l'exhorta à discuter un point particulièrement délicat de sa théorie, auquel Ph. de Rouilhan donna plus tard le nom de 'paradoxe de Frege'[38], dans un troisième papier : "Über Begriff und Gegenstand"[39], paru en 1892 et traduit en français par "Concept et objet".

Ses conceptions sémantiques furent bouleversées, ce qui modifia la langue artificielle et le système de déduction donc, en dernier lieu, toute la première étape du programme. Nous avons vu que les stades postérieurs sont subordonnés à celle-ci. Pour autant, le travail des *Grundlagen*, qui s'inscrit dans la résolution du second problème, ne fut pas abandonné. Frege y appuya au contraire une partie du développement des *Grundgesetze*. Expliquer ce point nécessite de présenter la structure de ces ouvrages.

Les deux volumes des *Grundgesetze der Arithmetik* parurent respectivement en 1893[40] et en 1903[41]. Ils contiennent collectivement trois parties. La première, qui occupera la majorité de notre analyse, intègre l'exposition du système de déduction, puis la définition de nouveaux symboles nécessaires à l'expression des contenus arithmétiques *suivant l'analyse effectuée dans les* Grundlagen. C'est au moins ce que Frege prétendit, et il ne commenta jamais les modifications induites par ses nouvelles thèses, comme si elles étaient suffisamment légères ou manifestes pour qu'il puisse s'en dispenser sans risque. Au moment clef, il écrivit :

> Nous pouvons maintenant parvenir à notre objectif de définition du nombre. (Frege 1893, p. 56)

Il fit ensuite librement référence aux développements des *Grundlagen*, comme s'il se contentait de les traduire dans sa langue formulaire. Seuls les §§43, 45 contiennent une trace de prudence :

> Je vais donner ici ma définition (*Grundlagen §76*), dans une formulation légèrement modifiée (Frege 1893, p. 58)

> Je répète en des termes légèrement différents l'explication fournie dans le §79 de mes *Grundlagen* et dans la *Begriffsschrift* (Frege 1893, p. 59)

33. Nous dirons plus loin quelques mots concernant ces traductions.
34. (Frege 1892b)
35. (Frege 1891)
36. Les papiers apparurent dans l'ordre inverse pour des raisons purement éditoriales. "Fonction et concept" développe la thèse générale de "Sens et référence" dans un cadre particulier, et se lit donc dans un deuxième temps.
37. (Kerry 1887)
38. (Rouilhan 1988)
39. (Frege 1892a)
40. (Frege 1893)
41. (Frege 1903a)

Ainsi, les idées des *Grundlagen* furent *adaptées* aux récentes conceptions sémantiques, et conséquemment au nouveau système, sans qu'aucun ajustement ne soit signalé ou étudié. À l'instar de Dummett, certains commentateurs affirment que les mouvements effectués entre 1886 et 1891 ont eu peu d'incidence sur le travail réalisé dans ces passages :

> Que la construction logique effective des nombres naturels, et des nombres cardinaux en général, demeure la même est incontestable, puisqu'elle est répétée dans les *Grundgesetze* avec plus de détails mais globalement de la même façon qu'elle est esquissée dans les *Grundlagen* ; il doit surtout être établi si ses idées philosophiques restèrent les mêmes, adaptées à la logique philosophique plus élaborée que Frege a développée entre-temps. (Dummett 1991b, p. 4).

Il nous incombera de préciser l'adverbe 'globalement' utilisé par Dummett. La construction arithmétique de l'Idéographie constitue un solide point d'ancrage pour évaluer l'écart avec la version de 1884 en mesurant les modifications apportées. Mais Dummett soulève un problème encore plus sérieux. Nous ne disposerons pas toujours d'équivalent concernant d'autres doctrines philosophiques de Frege, dont les effets ne sont pas reflétés clairement dans les construction et l'exploitation du système. Il sera donc difficile de statuer sur leur maintien ou leur rejet en 1893.

La seconde partie des *Grundgesetze* amorce l'étape 3 du programme *via* la dérivation des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique. En revanche, la troisième partie est divisée en deux sections : Frege entame la dérivation des théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle, poursuivant la réalisation de l'étape 3, après une analyse logique des notions inhérentes à cette discipline [42]. La première section constitue donc l'équivalent des *Grundlagen* dans le cas de l'analyse réelle. Frege n'intégra rien de tel à la seconde partie car il estimait que le travail avait été abattu en 1884, ce qu'il affirma à de nombreuses reprises.

Nous ne supposerons pas pour autant que les thèses des *Grundlagen*, lorsqu'elles ne sont pas répétées dans des écrits postérieurs à 1891, rencontrent encore l'adhésion de Frege dans les *Grundgesetze*. Il est vrai que celui-ci, contrairement à certains de ses contemporains, fit souvent preuve de vigilance dans la présentation des modifications de ses conceptions. Néanmoins, nous verrons que certaines d'entre elles s'effectuèrent dans l'ombre, soit parce qu'il n'estimait pas nécessaire de les souligner, n'étant pas centrales dans les débats de l'époque – le devenant parfois depuis –, soit parce qu'elles étaient l'effet d'autres mouvements, que Frege peina à apercevoir. Quoi qu'il en soit, il nous appartient de détecter par l'exégèse et l'analyse la part des *Grundlagen* qui fut conservée et celle qui fut abandonnée.

La troisième partie des *Grundgesetze* ne fut jamais achevée. Frege envisageait un autre volume pour la compléter, probablement aux côtés d'une quatrième partie traitant de l'analyse complexe. Ce volume ne parut jamais, et il est difficile de délimiter précisément ce qu'il devait contenir car Frege n'écrivit plus à ce sujet après l'abandon du projet qui succéda à la découverte du paradoxe de Russell. Néanmoins, l'avant-propos du premier volume fournit quelques indices :

> On peut constater que la recherche n'inclut pas les nombres négatifs, irrationnels et complexes, ni l'addition, la multiplication etc. De plus, les énoncés concernant les nombres cardinaux ne sont pas présents dans la totalité prévue à l'origine. [...] Des raisons extérieures m'ont poussé à décaler à la fois ceci et le traitement des autres

42. Nous voyons ici que les trois étapes présentées plus haut ne se réalisent pas nécessairement dans cet ordre strict. Nous avons expliqué que la première doit impérativement venir d'abord ; les autres en dépendent. Par ailleurs, la dérivation d'un théorème impliquant des notions (étape 3) doit nécessairement être précédée de l'analyse logique de ces notions (étape 2). Néanmoins il est parfaitement envisageable d'analyser logiquement certaines notions et de dériver des théorèmes les concernant *avant* l'analyse d'autres notions *non impliquées* dans ces théorèmes. Frege procéda ainsi en dérivant les théorèmes fondamentaux de l'arithmétique avant l'analyse du concept de *nombre réel*.

> nombres, ainsi que des opérations mathématiques, à une suite dont la publication dépendra de la réception de ce premier volume. (Frege 1893, p. V)

Les nombres complexes étaient donc annoncés. De plus, les raisons extérieures invoquées correspondent à des contingences d'édition et, probablement, de disponibilité personnelle. Par conséquent, contrairement à la division en parties, le découpage en volumes n'est pas motivé scientifiquement : le premier volume s'interrompt au milieu de la deuxième partie, et le deuxième au milieu de la troisième. Ce fait s'explique aisément. Le faible retentissement des précédents écrits de Frege n'encourageaient pas les éditeurs à publier un ouvrage aussi technique. Finalement, il fut convenu que la prise en charge du deuxième volume dépendrait du succès du premier. Ce dernier n'obtint que deux critiques superficielles et défavorables, ce qui contraignit Frege à publier le second à compte d'auteur.

Un évènement important se produisit néanmoins à cette occasion. Peano (1895) rédigea un des deux comptes-rendus du premier volume, Frege lui adressa une réponse qui suscita sa curiosité, induisant une longue correspondance entre eux. C'est dans ce contexte que Peano conseilla à Russell la lecture des *Grundgesetze*, I. Ce dernier découvrit en 1901 le paradoxe qui gangrenait le système. Il en informa Frege par une célèbre lettre le 16 juin 1902, alors que la parution du second volume était imminente. En hâte, Frege intégra une postface contenant la présentation du problème et plusieurs tentatives de résolution. Sa conclusion ne laisse aucun doute : il était convaincu que la solution proviendrait d'arrangements périphériques dont le système sortirait plus ou moins intact.

> Bien que ce problème ne soit pas résolu au point où je le pensais en rédigeant ce volume, je ne doute pas que le chemin vers la solution est trouvé. (Frege 1893, p. 265)

Son optimisme perdura au moins jusqu'en 1906, les textes dont nous disposons sont suffisamment explicites à cet égard. En 1918 au contraire, Frege avait définitivement abandonné cette idée en prononçant son renoncement au logicisme, et n'évoqua plus jamais ses différentes pistes de correction de l'Idéographie. La réduction des mathématiques à la logique exploitait l'idée d'extensions de concepts, déployée à travers une fonction particulière qui avait reçu un nom dans l'idéographie. Cette méthode fut déclarée incorrecte en 1918. Pour autant, le chemin parcouru entre les deux moments demeure mystérieux, Frege laissant peu de matériel susceptible de nous renseigner.

En effet, entre 1906 et 1918, rien dans les publications, les textes posthumes et la correspondance ne traite directement du sujet. Dummett [43] situe le point de basculement dans l'esquisse d'une critique d'un texte de M. Schoenflies [44] préparée en 1906. Le contenu révèle qu'à cette date, Frege restait convaincu qu'une solution était possible. Selon Dummett, s'il n'a pas publié cet article, c'est justement parce qu'il découvrit le pot aux roses durant sa rédaction. Dans les textes posthumes, un court brouillon de la même année contient une ébauche de liste des résultats de son travail, dans laquelle nous trouvons la phrase suivante :

> L'extension de concept ou de classe n'est pas selon moi ce qui vient en premier. (Frege 1906f, p. 200 / 219)

Dummett y lit un renoncement à sa théorie des extensions et à la réduction logique des mathématiques qu'elle permettait. Cette interprétation nous semble incorrecte. En effet, rien n'indique ici que Frege hiérarchise ses résultats par ordre d'importance. Il semble davantage qu'il exprime la

43. (Dummett 1991b, pp. 5-6)
44. (Frege 1906e)

primauté ontologique du concept sur la classe, déjà revendiquée dans (Frege 1891). Ce passage ne peut être lu comme une condamnation de l'analyse du nombre en termes d'extensions et de la conception logiciste qui en découle.

Au sein des écrits antérieurs à 1918 dont nous disposons, Frege ne fit plus aucun commentaire concernant l'incohérence de son système et la fondation des mathématiques. Dans son ébauche de biographie [45], Bynum invoque les témoignages de ceux qui ont côtoyé Frege à cette époque afin de combler les lacunes. Il affirme que Frege ne douta pas du chemin à emprunter jusqu'en 1914, se basant sur des déclarations de Carnap qui séjourna jusqu'à cette date à Iéna. Néanmoins, si Carnap tire bel et bien cette conclusion, il ne fournit aucun argument décisif permettant de l'asseoir :

> Je ne me souviens pas qu'il [Frege] ait jamais discuté dans ses lectures le problème de l'antinomie et la question de possibles modifications de son système pour l'éliminer. Mais d'après la postface du second volume, il est clair qu'il était confiant sur la possibilité de surmonter la difficulté. Il ne partageait pas le pessimisme vis-à-vis de la "crise des fondements" des mathématiques que d'autres auteurs exprimèrent parfois. (Carnap 1963, p. 5)

La conclusion de Carnap est, elle aussi, beaucoup trop précipitée. Tout ce que ce passage révèle, c'est que, oralement comme à l'écrit, Frege se tût.

Le silence se brisa après 1918 à l'occasion d'une lettre, sans date précise [46], adressée à K. Zsigmondy :

> Vous devez connaître les efforts considérables que j'ai réalisés afin d'éclaircir ce à quoi nous voulons référer en parlant de 'nombre'. Vous devez aussi savoir que ces efforts se sont apparemment soldés par un échec. Ceci a agi comme une stimulation permanente, empêchant la question de se taire en moi. Elle continuait de travailler en moi, même si, officiellement, je ne m'occupais pour ainsi dire plus du sujet. Et ce travail, qui a pris place en moi indépendamment de ma volonté, m'a brusquement surpris en projetant une nouvelle lumière sur la question. (Frege 1976, pp. 269-270)

Durant tout ce temps, Frege était occupé ailleurs. Par des drames personnels, d'une part : le décès de sa femme en 1905, sa propre santé qui se fragilisait. Et par des projets scientifiques d'autre part, alors que son travail trouvait enfin un certain écho parmi ses contemporains : une correspondance accrue, une polémique l'opposant à Hilbert au sujet des fondements de la géométrie, la préparation d'un texte exposant sa philosophie de la logique. Mais il ne parvint pas pour autant à échapper à la question qui l'avait occupé toute sa vie, et s'il ne s'y consacra pas directement, ses réflexions progressaient d'elles-mêmes, jusqu'à signer son renoncement au logicisme.

Les écrits postérieurs à 1918 ne fournissent pas davantage d'indications sur ce cheminement. Trois textes rédigés entre 1924 et 1925 abordent rapidement ses nouvelles idées. Dans (1924-1925a), Frege localise l'infini au cœur du problème. La suite des nombres naturels étant infinie, la connaissance mathématique ne peut se fonder sur la perception sensible, sur les connaissances *a posteriori*. En effet :

> Il est évident que l'on ne peut rien atteindre d'infini par la perception sensible. Quelle que soit la multitude d'étoiles que nous puissions enregistrer dans nos inventaires, il

45. (Bynum 1972)

46. Nous savons seulement qu'elle n'est pas antérieure à 1918 car Frege y discute un ouvrage de Zsigmondy datant de cette année.

> n'y en aura jamais une infinité, et il en est de même des grains de sable au bord de la mer. Par conséquent, là où nous reconnaissons à bon droit de l'infini, nous ne l'avons pas atteint à partir de la perception sensible. (Frege 1924-1925a, p. 294 / 323)

Elle se fonde donc sur une connaissance *a priori*. Frege croyait déjà à cela au moment des *Grundgesetze*, c'est pourquoi il concevait la logique comme source de la connaissance mathématique. En 1924, sa conclusion fut modifiée, il estima que "nous avons besoin d'une source particulière de connaissance, et telle est la source géométrique". Ceci fut développé ailleurs :

> C'est important parce que, de ce fait, l'arithmétique et la géométrie, donc les mathématiques tout entières, découlent d'une seule et même source de connaissance, à savoir la source géométrique, qui s'élève ainsi au rang de vraie source de connaissance mathématique ; cependant que, naturellement, la source logique de connaissance a toujours sa part. (Frege 1924-1925b, p. 299 / 330)

Comment, si la source logique possède sa part, la source géométrique peut-elle être la *seule* source d'où découlent toutes les mathématiques ? Car la logique possède un statut particulier, n'étant basée, selon Frege, sur aucune intuition. Cela n'empêche pas, nous le verrons, qu'elle soit partie prenante de certaines connaissances, mais d'une manière différente. En réalité, Frege l'estimait partie prenante de *toute connaissance*, car fixant les normes générales auxquelles la connaissance est soumise. Jusqu'en 1906 (au moins), il considérait que la source logique – dans laquelle la généralité n'est jamais restreinte – était suffisante pour développer les mathématiques (hors géométrie). L'infini, Frege le récupérait *via* sa théorie des extensions – ou plutôt sa théorie des parcours-de-valeurs – construite *via* une fine analyse logique du langage. En 1924, il affirma au contraire que cet infini provenait des intuitions spatiales et temporelles, intuitions *a priori* certes, non sensibles, mais synthétiques, privant les mathématiques de leur caractère logique et, ceci était synonyme à ses yeux, en limitant la généralité.

Pourquoi donc se rétracta-t-il ? Pourquoi estima-t-il que les parcours-de-valeurs n'étaient pas, après tout, en mesure de jouer ce rôle ? Peu de choses sont indiquées à ce sujet, mais nous pouvons émettre différentes hypothèses. La loi V, responsable de la contradiction, régissait l'usage du symbole lié aux parcours-de-valeurs. Dans sa postface au second volume, Frege proposait d'affaiblir cet axiome. Nous savons aujourd'hui que cette alternative n'évitait pas la contradiction. Frege, pour sa part, n'en fut pas tout de suite conscient. À ses yeux, la solution évitait l'incohérence, mais affaiblissait le système. Il suffisait donc de s'assurer que les preuves essentielles restaient réalisables dans ce cadre, ce que Frege échoua probablement à montrer, croyant que les chemins empruntés par les démonstrations de la partie 2 n'étaient plus tous praticables, et ainsi que le système péchait par faiblesse. Frege découvrit-il qu'au contraire, il était encore beaucoup trop fort, car incohérent ? Rien ne l'atteste dans ses écrits. Peut-être le réalisa-t-il, ou peut-être conclut-il seulement qu'aucun équilibre n'était possible : trop affaibli, l'axiome ne permettait pas la dérivation des lois fondamentales ; trop peu affaibli, il provoquait la contradiction.

Depuis quelques années, de nombreux amendements de l'Idéographie sont examinés. La voie la plus pratiquée consiste à renoncer à définir les nombres comme des extensions. Elle fut tracée par Bob Hale et Crispin Wright [47] et utilise, en guise de loi V, un axiome qui, procédant par abstraction, permet une définition des nombres sans la médiation des parcours-de-valeurs. Ce programme est celui du néologicisme. Mais ce n'est pas le seul chemin possible. Heck a suggéré de conserver les extensions en restreignant le procédé de compréhension, *i.e.* en se focalisant

47. (Hale et Wright 2001), avec l'aide de George Boolos, qui s'est opposé autant qu'il a contribué au programme.

uniquement sur la portion prédicative de l'Idéographie [48] [49]. Divers auteurs ont tenté d'explorer en profondeur cette piste [50]. D'autres encore ont proposé d'affaiblir l'axiome V selon l'idée esquissée dans la postface du second volume, en modifiant néanmoins la définition des nombres cardinaux [51]. Récemment, une élégante solution intégrant deux types de quantificateurs a été suggérée [52]. La cohérence (relative à celle de l'arithmétique du second ordre) est bien sûr un réquisit incontournable. Mais il convient aussi d'examiner la portée déductive de ces systèmes : quelle part des mathématiques incorporent-ils ?

Ces questions suscitent de nombreuses recherches, mais elles ne furent pas ou plus abordées par Frege. Or, bien que sa solution fût, telle quelle, insuffisante, rien n'interdisait de creuser plus profondément cette piste, ou d'en envisager d'autres. Pourquoi en vint-il au contraire à rejeter d'un bloc le logicisme, et à placer la géométrie au fondement des mathématiques ? Cette question, de nature historique, ne sera probablement jamais totalement éclaircie. La part de psychologie qu'elle contient restera à jamais un mystère. La vie difficile de Frege l'avait considérablement fatigué, ces solutions ne lui vinrent peut-être simplement pas à l'esprit. Sans espérer résoudre ce problème historique, il est possible d'accomplir un autre travail, de nature philosophique celui-là : étudier si ces pistes sont en accord, non pas avec ce que Frege a fait ou aurait pu faire, mais avec les conceptions profondes qui sous-tendent sa vision de la logique de 1893. La cohérence ne fut jamais à ses yeux une fin en soi. Selon lui, il ne suffisait pas de construire un système consistant capable de dériver les lois fondamentales, il fallait – c'était même tout l'enjeu – que ce système soit *logique*. L'affaiblissement d'un axiome n'était donc pas un mouvement anodin, il devait être justifié. La loi ainsi obtenue devait conserver son caractère logique. Or Frege émettait déjà des réserves sur ce point concernant la loi V en 1893, malgré sa conclusion :

> Autant que je sache, un désaccord peut seulement survenir au sujet de ma loi fondamentale pour les parcours-de-valeurs (V), qui n'a peut-être pas encore été explicitement formulée telle quelle par les logiciens, bien qu'ils raisonnent en accord avec elle lorsque, par exemple, ils parlent d'extensions de concepts. Je la tiens pour purement logique. (Frege 1893, p. VII)

La nécessité d'ôter à cette loi son caractère général renforça peut-être ses doutes. Il est probable qu'il en vint progressivement à penser que, lorsque nous parlons d'extensions de concepts, loin de raisonner en accord avec la loi V, nous ne raisonnons pas *du tout*. Il expliqua sur le tard que l'expression 'extension de concept' était un ultime mensonge du langage, nommant ce qui n'existe pas. C'est ce mensonge que la contradiction vint finalement dénoncer. Frege estima qu'il avait sombré dans ce piège en incorporant la loi V (et un signe de fonction pour les parcours-de-valeurs) au système (et au langage), *i.e.* en croyant distinguer dans les parcours-de-valeurs – dont les extensions – les ressources essentielles à l'analyse des contenus arithmétiques. C'est en tous cas ce que suggère un écrit tardif dans lequel il expliqua, au sujet de l'expression 'le concept *étoile fixe*' :

> Cette expression semble désigner un objet, à cause de l'article défini ; mais il n'y a aucun objet qui pourrait linguistiquement être désigné ainsi. De là sont nés les paradoxes de la théorie des ensembles, paradoxes qui ont ruiné celle-ci. J'ai moi-même succombé à cette illusion, dans ma tentative de fondation logique des nombres,

48. (Heck 1996)
49. Contrairement à la logique contemporaine du second ordre, le système fregéen n'incorpore pas d'axiome de compréhension. La compréhension est dissimulée dans les règles de substitution.
50. (K. Wehmeier 1999 ; Ferreira et K. Wehmeier 2002 ; Ferreira 2005)
51. (Antonelli et May 2005)
52. (Ferreira 2015)

> en voulant les concevoir comme des ensembles. (Frege 1924-1925a, pp. 288-289 / p. 318)

La loi V est telle quelle – régissant le passage *logique* de *n'importe quel* concept à son extension – ou elle n'est pas. Si la transition entre un concept et son extension est de nature logique, rien ne justifie qu'elle soit réalisée pour certains concepts et pas pour d'autres, comme l'envisageait son esquisse de solution. La contradiction trancha en faveur de la seconde alternative. Il n'y a *pas* de passage logique d'un concept à son extension : les extensions n'existent pas ou, au moins, ce qu'on entend logiquement par ce terme n'existe pas. On peut considérer des classes, des ensembles, des collections d'objets, mais rien de tout cela ne se situe dans le domaine de la logique, et ainsi n'autorise la réduction d'une portion des mathématiques à cette dernière.

Cette interprétation ne résout cependant pas la question historique. Si l'alternative était si tranchée, pourquoi Frege mit-il si longtemps à tirer sa conclusion ? Là encore, certains éléments de réponses nous échapperont à jamais. Frege disparut en 1925, il n'eut pas le temps de développer ses idées neuves. Ce que nous pouvons entreprendre en revanche, et nous le ferons, c'est d'oublier volontairement tous les éléments contingents de cette histoire – ce que Frege fit ou ne fit pas à la suite de la lettre de Russell, immédiatement ou après mûres réflexions – et nous concentrer exclusivement sur le problème de la contradiction vis-à-vis des conceptions sous-jacentes aux *Grundgesetze*, sans tenir compte du fait que Frege tira correctement ou non, instantanément ou non, les justes conséquences de ces conceptions. Nous verrons qu'à bien des égards, il échoua dans cette tâche. Il présentait des vues si novatrices qu'il était difficile d'en mesurer tous les effets. Notre travail permettra d'éclaircir si ses conceptions sont conciliables avec telle ou telle modification *ad hoc* du système : l'affaiblissement de l'axiome V, la définition des nombres par abstraction sans la médiation des extensions, etc [53]. Le fait que ses yeux, usés par les épreuves, ne le laissèrent pas toujours voir nettement à travers la poussière soulevée par une activité si intense, c'est quelque chose dont nous ne devrons pas tenir compte. Aujourd'hui la poussière est retombée, et c'est humblement qu'il nous faut accepter, et surtout assumer, que Frege ne perçut pas toujours les conséquences de ses propres idées, tout comme les tensions internes qui gangrènent parfois ces dernières.

Voici donc le contexte historique de notre recherche. Nous placerons la période des *Grundgesetze* entre 1891 et 1906, non que nous soyons convaincus que Frege abandonna le logicisme précisément à cette dernière date, mais parce qu'aucun écrit ne viendra plus témoigner de son adhésion à cette thèse à partir de là. De même, nous ne prétendons pas que ses positions soient restées absolument fixes durant quinze années, nous prendrons garde aux différents mouvements internes à cette époque, mais nous affirmons qu'ils ont été moins incidents sur sa pensées que les périodes critiques de 1886-1891 [54] et de 1906-1918.

53. Nous n'aborderons pas les détails techniques de ces différentes révisions. Une description de ces dernières, conséquente sans être exhaustive, est contenue dans (J. Burgess 2005). Mais notre thèse de doctorat ne concerne directement ni le néo-logiciste ni toute autre entreprise d'exploitation de l'Idéographie à des fins différentes. Notre but est d'étudier le système *lui-même*, l'objectif qu'il servait et les conceptions qu'il transportait. La nature des extensions, le statut de la loi V, tout cela nous concerne, mais nous ne nous prononcerons pas sur la compatibilité de tel ou tel amendement avec les thèses fregéennes.

54. En réalité, nous verrons que le basculement conduisant à la période des *Grundgesetze* eut probablement lieu en 1890. Nous aurons beaucoup à dire sur ce qui le précéda et, surtout, sur ce qui le causa.

Axe de lecture

Prises dans le tumulte de la pensée fregéenne, deux distinctions persistent. De 1879 à 1925, *i.e.* de son premier à son dernier texte traitant de logique, Frege démarqua fermement l'expression syntaxique sensible du contenu non sensible exprimé, ainsi que l'acte subjectif de jugement du contenu objectif jugé. Bien sûr, l'analyse des deux éléments de chaque distinction s'affina, mais les frontières se maintinrent, immuables. Elles furent en vérité les deux colonnes sur lesquelles s'appuyait sa vision de la logique et, si nous serons davantage conduits à examiner la première, il nous paraît essentiel de les présenter toutes deux brièvement.

L'expression et son contenu

Pour Frege, la logique est une science à part entière, possédant ses propres vérités. Par conséquent, le logicien ne peut se dispenser de réfléchir au *contenu* des signes qu'il emploie. Ce sont les *contenus* des énoncés qui sont vrais ou faux et qui entretiennent entre eux certains rapports de causalité ; non les énoncés eux-mêmes. Pourtant, nous communiquons par l'intermédiaire de ces derniers. Ils sont ce que nous écrivons, prononçons, lisons et entendons. Il est donc essentiel d'étudier la manière dont ils nous donnent *accès* à leurs contenus, d'examiner le lien *sémantique* qui les attache à ces derniers. Une part considérable des travaux non techniques de Frege fut ainsi, dans toutes les périodes de sa vie scientifique [55], consacrée à la sémantique.

C'est à ce travail que correspond l'analyse logique du langage, évoquée plus haut. L'utilisation d'une langue artificielle permet le respect, sur le terrain linguistique, des catégories logiques du sens et ontologiques de la référence. En science, chaque signe doit posséder un sens et une référence *fixes*. Un énoncé exprime idéalement une pensée lorsque sa composition reflète, d'une façon qu'il nous incombera de préciser, celle de cette pensée. Ce faisant, il expose aussi les opérations s'effectuant sur le terrain des références. Une fois la composition d'une pensée dévoilée à travers la forme de l'énoncé qui l'exprime, il importe de déterminer les éléments dont cette pensée est composée, *i.e.* les sens des signes simples qui composent cet énoncé. Certains d'entre eux, de nature logique, correspondent à – ou, pour respecter dès maintenant les étonnantes conceptions de Frege, *sont* – des rapports entre des pensées. Un langage idéal dont les signes simples expriment des sens logiques manifeste ainsi les rapports logiques entre les pensées, et dévoile de cette manière les liens de causalité logique qui existent entre celles-ci, et sur lesquels se basent les déductions logiques effectuées lors des démonstrations. C'est sur ce socle que Frege développa son système de dérivation dans les *Grundgesetze*.

L'analyse du lien entre expression et contenu – la sémantique – de Frege, est donc d'une importance capitale dans la réalisation de la première étape de son programme. Nous n'apercevons pourtant pas ici les limites de son action. En effet, c'est elle aussi qui fournit le cadre permettant de décomposer les pensées mathématiques (hors géométrie) en des sens qui appartiennent indéniablement au domaine de la logique, comme l'exige la deuxième étape du programme. C'est elle qui rompt les chaînes qui nous lient à nos propres représentations internes et donc subjectives lorsque nous parlons (par exemple) des nombres pour faire jaillir le sens *réel et objectif* de ce mot. Car Frege n'était aucunement *agnostique* concernant le concept de *nombre*. Tout le travail des *Grundlagen* concernait la décomposition – l'analyse – du sens de ce terme. Il n'était pas question de définir une structure qui se *comportait* comme la structure des entiers naturels, il s'agissait de caractériser la structure *elle-même*. En cela, Frege se détachait largement de l'orthodoxie contemporaine. Nul ne songe par exemple à affirmer que les ordinaux finis tels que les

55. Certains auteurs estiment que Frege ne reconnut pas d'emblée l'importance de cette question (voir par exemple Heck et May 2013). Nous nous opposerons à cette interprétation.

présente la théorie de Zermelo-Fraenkel sont les *vrais* entiers naturels. C'est donc à travers ses considérations sémantiques que Frege envisagea, en dernière instance, de reconnaître les sources *logiques* de notre connaissance mathématique (hors géométrie), *via* l'analyse logique des énoncés mathématiques. Ainsi, la distinction entre expression et contenu – et les conceptions sémantiques qui la sous-tendent – sont d'une importance capitale dans la réalisation du projet fregéen.

Le jugement et son contenu

La seconde distinction fondamentale intervient entre l'acte subjectif de jugement et le contenu objectif – la pensée – jugé. Un passage fait l'objet de nombreuses discussions à ce sujet :

> Le mot 'vrai' a un sens qui n'apporte rien au sens de la phrase entière dont il est le prédicat. Mais c'est justement en cela que le mot semble convenir à la tâche d'indiquer l'essence de la logique. Tout autre terme attributif d'une propriété, en raison de son sens particulier, conviendrait moins bien. Ainsi le mot 'vrai' semble (vouloir) rendre possible l'impossible, notamment en faisant apparaître ce qui correspond à la force assertive comme étant une contribution à la pensée. [...] Ce qui contient la plus claire indication de la nature de la logique, c'est bien la force assertive avec laquelle une phrase est prononcée. Il ne correspond cependant à celle-ci aucun mot, aucune partie de phrase. La même expression peut être prononcée parfois avec une force assertive, parfois sans. (Frege 1915a, p. 272 / 298)

Les deux énoncés 'A' et 'le sens de 'A' est vrai' sont synonymes. Le prédicat 'est vrai' n'ajoute rien au sens d'un énoncé. Il relève d'une vaine tentative de traduire sur le terrain du sens un élément qui lui est fondamentalement étranger : la force assertive. Un locuteur charge un énoncé de cette force lorsqu'il reconnaît son sens comme vrai, lorsqu'il effectue un *jugement*. La force assertive n'a donc aucun rapport avec le sens objectif d'une phrase – la pensée –, mais avec l'attitude du locuteur vis-à-vis de ce sens, le fait qu'il le reconnaisse comme vrai. En d'autres termes, elle concerne l'acte subjectif de jugement. Frege sépare les énoncés non assertifs – qui expriment une pensée – des énoncés assertifs – qui, en plus d'exprimer une pensée, contiennent la trace que le locuteur ou l'auteur reconnaît cette pensée comme vraie. Cette trace consiste en signe particulier de son langage qui, loin d'exprimer un sens quelconque, se limite à *manifester* l'acte de jugement.

Il s'agit là d'une constante parmi les thèses fregéennes [56], si bien qu'elle reçut le nom de 'point de Frege' sous la plume de Peter Geach (1965). Frege espérait ainsi corriger une confusion, aussi fréquente qu'incontestable, qui gangrenait les ouvrages de logique de son époque. Il réalisa progressivement les importantes conséquences d'un geste qui lui avait semblé, au moment de l'effectuer, parmi les plus anodins. Le prédicat de vérité n'ajoute rien au sens d'une phrase, il résulte d'une volonté (stérile) d'exprimer ce qui ne peut qu'être manifesté : la force assertive. Dans ce cadre, il convenait de s'interroger sur la nature de la notion de vérité. Frege proposa, au crépuscule de sa vie, une discussion extrêmement pointue concernant le lien entre la logique et cette notion. Il amorça ainsi son propos :

> Toutes les sciences ont la vérité pour but, mais la logique s'en occupe d'une toute autre manière encore. Elle a trait à la vérité comme la physique a trait à la pesanteur ou à la chaleur. Découvrir la vérité est la tâche de toutes les sciences, mais c'est à la logique qu'il appartient de connaître les lois de l'être vrai (Frege 1918, 1923, p. 342 / 170).

56. Certains auteurs soutiennent au contraire qu'elle mit un certain temps à émerger (voir par exemple Heck et May 2017). Nous discuterons cette question.

Lu sous l'angle de nos dernières considérations, ce passage indique que la logique a pour objet de connaître les lois attachées à la force assertive. Et nous rejoignons la première citation, dans laquelle Frege affirmait que cette force contient la plus claire indication de la nature de la logique. Tous les auteurs n'interprètent pas ce passage de cette manière. Mais le problème posé est extrêmement délicat. Nous avons dit que Frege caractérisait la logique comme étant la science la plus générale. Ici, il lui confie le rôle de déterminer les lois de l'être vrai. Or *a priori*, il n'y a rien d'évident à ce que les lois les plus générales soient précisément celles de l'être vrai, à ce qu'une science sans domaine particulier soit justement celle qui étudie l'essence de la vérité. Ces deux aspects ne sont pas simples à réconcilier, et ne laissent pas facilement déterminer ce dont traite véritablement l'idéographie, articuler les liens entretenus par l'idée de généralité, la notion de vérité et la force assertive.

Pour Frege, les propriétés se situent, au même titre que les objets, sur le terrain des références. Le lien qui unit un objet à une propriété est localisé horizontalement dans cette sphère. Au contraire, le rapport d'une pensée à sa valeur de vérité intervient verticalement entre un sens – la pensée – et un objet – la valeur de vérité. Le jugement est "le progrès qui va d'une pensée à sa valeur de vérité" (1892b, p. 162 / 126). En prononçant un énoncé avec force assertive, un locuteur s'engage sur ce sentier vertical. Ces différentes images, suggérées directement par Frege, n'ont malheureusement pas été éclaircies par ses soins. Elles révèlent néanmoins la relation ambigüe qu'il entretint avec la notion de vérité avant de déclarer sur le tard, comme s'il s'était agi de sceller définitivement le mystère :

> Il est donc vraisemblable que le contenu du mot 'vrai' est unique en son genre et indéfinissable. (Frege 1918, 1923, p. 344 / 173).

Objectifs

Présentation générale

Tout est en ordre, désormais, pour que nous présentions le défi que nous espérons relever dans cette thèse de doctorat : nous voulons mener à bien une étude détaillée de l'Idéographie, c'est-à-dire d'un système contradictoire, construit il y a plus d'un siècle, et que Frege lui-même s'appliqua à présenter dans la première partie des *Grundgesetze*. Notre dessein appelle donc quelques précisions – voire quelques justifications –, et nous avons à cœur d'en formuler deux.

D'une part, s'il est possible de concevoir des versions affaiblies et cohérentes de l'Idéographie, il est extrêmement peu probable que celles-ci soient un jour exploitées [57]. Elles présentent beaucoup trop d'inconvénients, notamment une complexité grammaticale dont les logiciens ont su se débarrasser depuis. Néanmoins, ces différentes réserves ne retirent rien à sa position historique : celle du premier système de déduction (conçu comme) logique jamais élaboré. C'est avant tout comme *objet d'histoire* d'une importance considérable qu'elle mérite notre attention. Lu sous cet angle, notre but soulève une objection immédiate : le fonctionnement d'un système aussi célèbre, aussi discuté, n'a-t-il pas déjà été proprement établi ? À cette question, le plus fermement du monde, nous répondons par la négative. Dans une solitude quasi-totale, Frege débusqua et se confronta à des problèmes totalement neufs. Ces handicaps expliquent – et même, s'il en était besoin, excusent – qu'il ait échoué à présenter (et parfois à cerner) divers caractéristiques de sa propre création. Or, pour des raisons que nous avons synthétisées plus haut, les chercheurs se sont préoccupés très tardivement de cette dernière. Malgré ce récent retour en grâce, aucune

57. Même les neo-logicistes, qui s'inspirent de certaines stratégies fregéennes, ne les développent pas dans son langage.

présentation exhaustive n'en a encore été proprement entreprise [58]. Voilà donc notre premier objectif : procéder à la construction systématique, précise, rigoureuse de l'Idéographie. C'est, nous croyons, un travail qui possède un intérêt historique intrinsèque, justifié doublement par le rôle central que ce système joua dans la genèse de la logique contemporaine, et par la place privilégiée qu'il occupe dans les discussions contemporaines.

Ceci nous conduit à une seconde objection : si ce travail n'a jamais été réalisé dans le détail, n'est-ce pas seulement car il ne présente aucune difficulté ? La finesse, la diversité, la richesse de nos systèmes contemporains ne nous offrent-elles pas un recul suffisant pour appréhender sans mal un objet aussi archaïque ? Les chercheurs ne conviennent-ils pas implicitement d'une compréhension collective, qui rend superflue toute présentation approfondie ? Sur ce point, nous ne pouvons nous prononcer, car nous sommes ici juge et partie. Il ne nous appartient pas de statuer sur les épreuves que nous avons traversées. Nous laissons au lecteur le soin d'arbitrer la question et, lorsqu'il sera aux prises avec les développements techniques exigés par cette présentation, de décider s'il s'agit ou non de simples formalités. Qu'il nous soit seulement permis d'assurer que, quels qu'ils soient, nous n'en sommes pas venus à bout facilement.

Nous connaissons donc notre premier objectif, posé comme un travail technique à vocation historique, que nous tenons à réaliser pour lui-même. Il nous sera cependant précieux pour atteindre un autre but. Au moment d'introduire l'Idéographie, Frege ne s'est pas contenté d'aborder son fonctionnement, il s'est aussi efforcé de discuter son statut, son rôle et sa portée. Ses explications soulèvent un certain nombre de questions qui, cette fois, concernent ses positions philosophiques et sont connues depuis longtemps, mais qui ont souvent été abordées *indépendamment* de l'Idéographie. Or, s'il est bien une chose que nous ne devons pas perdre de vue, c'est qu'il développa ses conceptions *relativement* à l'objectif poursuivi dans les *Grundgesetze*. Nous souhaitons donc renverser, pour le remettre à l'endroit, le lien de subordination : résoudre divers problèmes qui ont trait à ses idées philosophiques *afin de* comprendre ses explications relatives à l'idéographie. Ceci exige en retour une grande acuité vis-à-vis du fonctionnement *technique* de celle-ci. Notre reconstruction se révèlera donc, à ce stade, un allié indispensable. Finalement, nous nous situons dans la perspective qu'un brillant commentateur de Frege a récemment décrite, et nous souhaitons reprendre à notre compte le plaidoyer par lequel il introduisit un ouvrage auquel, à bien des titres, nous aurons affaire :

> Nous avons parfois l'impression que les *Grundgesetze der Arithmetik* ont quasiment nui à la réputation de Frege, comme s'il aurait mérité plus de respect en ne les écrivant pas du tout, au moins pour les parties les plus mathématiques. C'est probablement pourquoi ils ne furent pas traduits pendant si longtemps. Ainsi, plus que tout autre chose, j'espère que cet ouvrage restaurera les *Grundgesetze* à la place qu'ils auraient toujours dû occuper : parmi ses autres célèbres écrits de la même période. Les *Grundgesetze* sont en fait, ainsi que Frege lui-même l'entendait, sa plus grande réussite. (Heck 2012, p. 24)

Avant d'en dire davantage, tirons de ces considérations une présentation à la fois brève et fidèle de notre projet. Dans son "Exposition de l'Idéographie", Frege entendait expliquer doublement le fonctionnement et le statut de son système. Pourtant, plus de cent ans plus tard, certains points demeurent problématiques aux deux niveaux. C'est à leur étude que cette thèse se consacre.

58. À l'exception de Landini (2012) mais, répétons-le, d'une manière qui nous semble incorrecte. Qu'il puisse exister des désaccords concernant le fonctionnement du système, donnant lieu à des reconstructions inconciliables, est d'ailleurs un indice du fait que Frege n'en a pas dit assez.

Autrement dit, notre objectif consiste à faire toute la lumière, à la fois technique et philosophique, sur cette pièce centrale de son œuvre : la première partie des *Grundgesetze der Arithmetik*.

Problématiques

Dans ce texte, on trouve principalement deux types d'explications : celles par lesquelles Frege voulait instruire le lecteur sur la syntaxe de son système, et celles par lesquelles il entendait s'accorder avec lui sur la référence des termes de son langage. On comprend dès lors que, si les premières nous aideront à construire proprement le système, ce sont les secondes qui soulèveront les problèmes philosophiques qui nous attendent. Et ceux-ci auront trait à des questions de *sémantique*.

Nous avons promis d'isoler le premier versant, afin d'édifier rigoureusement le système de déduction des *Grundgesetze*. Au contraire, Frege réunit les deux aspects au sein d'un même exposé, bien qu'il fût très loin de les *confondre*. À n'en pas douter, il savait que la construction syntaxique de l'Idéographie pouvait être détachée de toute considération sémantique, mais il craignait (à raison) que les enjeux qu'elles rencontrent en devinssent totalement incompréhensibles. C'est pourquoi il s'efforça de discuter ses choix au fur et à mesure où il les présentait. Notre objectif nous contraint d'emprunter une autre route. Néanmoins, nous procèderons à la construction du système seulement lorsque nous en aurons dit suffisamment pour cerner son propos. Et nous utiliserons ce résultat pour approfondir certains questionnements essentiels à ce sujet. Cette stratégie se révèlera particulièrement éclairante, car la forme particulière de l'Idéographie constitue à la fois le produit et la manifestation des conceptions de Frege. Elle les explique (et les questionne) autant qu'elle en exige l'exposé (et l'examen). Nous avons choisi de structurer notre travail à partir de ce fait singulier. Il convient donc d'en donner le détail avant d'introduire précisément la manière dont nous allons procéder.

Les nombreuses spécificités de l'Idéographie sont autant d'exemples de cette situation. Rappelons que Frege a clairement indiqué quels étaient les termes primitifs de sa langue, ainsi que les axiomes et la quasi-totalité des règles de son système. En revanche, les informations concernant la grammaire de l'idéographie [59] sont parcellaires [60], au point que les commentateurs en proposent différentes lectures. La difficulté semble donc entièrement contenue dans l'établissement de cette morphologie. Une fois l'étape franchie, il ne reste qu'à rassembler les éléments dispersés par Frege. Pourtant, lorsque nous parviendrons à ce stade, nous constaterons que la forme générale que sa grammaire dicte aux termes primitifs n'est pas toujours – voire rarement – celle qu'épouse effectivement ses termes primitifs. Autrement dit, il existe un décalage important entre la manière dont lui-même prescrivit de construire les formules de son langage et les résultats auxquels il parvient. Il n'y a néanmoins aucune raison de s'alarmer pour l'instant. Frege s'autorisait juste un procédé quasi-systématique en logique : l'usage de conventions d'écriture essentielles à la lisibilité – dans son cas déjà compromise – des énoncés. Aujourd'hui encore, il est fréquent de s'écarter de la grammaire canonique d'un langage afin de prodiguer un aspect plus conventionnel à un signe particulier [61]. Cependant, dans un tel cas, et lorsqu'elles ne sont pas notoires, nous prenons garde à *spécifier* ces conventions. Pour sa part, Frege ne s'est pas donné cette peine. Or nos yeux trempés de logique contemporaine peinent à les identifier. Cela est dû au fait que l'idéographie

59. dont une grande part est située aux §§26 et 30 du premier volume.

60. Par conséquent, il a aussi échoué à décrire précisément les règles de substitution. Il faut en effet, pour spécifier proprement les remplacements permis au sein des formules, avoir clairement indiqué les constituants en jeu dans ces remplacements, *i.e.* les termes du langage.

61. Par exemple, nous n'hésitons pas à écrire '$x \leq y$' en lieu et place de '$\leq (x, y)$', même lorsque la définition générale des formules exige la seconde version.

ne s'apparente totalement à *aucun* langage dont nous sommes familiers, mais qu'elle semble à tel niveau se rapprocher de celui-ci, et à tel autre de celui-là. Il est donc tentant de laisser nos accointances particulières dicter nos décisions. Et diverses conventions d'écriture peuvent facilement passer pour des propriétés essentielles du langage, tandis que certaines de ces dernières se travestissent parmi les premières. Loin d'être anecdotique, le problème peut s'avérer fatal. Une mauvaise lecture à cet endroit se propage rapidement jusqu'à l'interprétation des positions fondamentales de Frege. Pour l'exemple, disons dès maintenant que le fossé qui sépare notre construction de celle de Landini provient d'une seule divergence : celui-ci estime que la présence de lettres gothiques *et* latines dans l'idéographie relève d'une simple commodité syntaxique – et choisit donc de les identifier – tandis que nous croyons qu'elles possèdent des *statuts* différents – et conservons la distinction. De là découle non seulement deux présentations discordantes de l'Idéographie, mais aussi et surtout deux lectures inconciliables des conceptions *philosophiques* de Frege.

Une pure inspection syntaxique ne permet donc pas de repérer, parmi les choix de Frege, lesquels relèvent des caractéristiques de sa langue, et lesquels répondent à de simples enjeux de lisibilité. Elle est trompeuse à bien d'autres niveaux. Par exemple, Frege maintint une séparation absolue entre fonctions et objets, aussitôt répercutée *entre* certaines fonctions. Le double rôle de ces dernières – compléter et être complétée – donne lieu à une multiplication infinie des catégories ontologiques, reflétée sur le terrain linguistique. Pourtant, l'idéographie ne contient qu'un nombre *fini* – et même assez modeste – de types, suffisant pour atteindre l'objectif que Frege se fixait [62]. À proprement parler, elle ne constitue donc qu'une portion *limitée* de sa langue idéale, dans laquelle les manipulations syntaxiques impliquées par la hiérarchie de fonctions se maintiennent à un niveau relativement simple. Frege tira parti de cette restriction, en omettant la présentation *générale* de l'appareil linguistique exigé par la hiérarchie. Pour nous qui souhaitons en faire l'étude, cette carence fait figure de piège. Les cas élémentaires exploités dans les *Grundgesetze*, aisément manipulables, conservent un caractère équivoque. Il est possible d'y voir les traces de *différentes* grammaires. Seule une construction complète de l'appareil linguistique en cause, sur laquelle Frege fit l'impasse, est en mesure de clarifier la situation.

La construction de l'Idéographie ne peut donc s'appuyer seulement ni sur les explications syntaxiques contenues dans les *Grundgesetze*, ni sur la manière dont Frege exploita ce système. Afin de cerner son symbolisme, il est *indispensable* de saisir ce qui a motivé sa création ; et c'est *seulement à ce point* qu'il devient possible de comprendre et questionner ses conceptions. Voilà l'idée qui, nous guidant tout au long de notre travail, en déterminera la structure. Avant de présenter cette dernière, il convient de procéder à quelques illustrations.

Selon Frege, la structure d'une langue idéale reflète les compositions entre les sens et les opérations entre les références. C'est ainsi qu'elle permet l'analyse des pensées et manifeste les rapports logiques entretenus par celles-ci. Le choix d'une grammaire n'est donc en aucun cas arbitraire, il est dicté par des enjeux sémantiques et ontologiques. Pour déterminer celui de Frege, il faut comprendre la manière dont il a progressivement abordé et répondu à ces enjeux. En 1879, il appuya l'édification de son premier langage – la langue formulaire – sur une notion de contenu indéterminé qui ne rendait qu'imparfaitement compte de la quantification. Il fut contraint de mener une investigation à son sujet pour prolonger le travail entamé dans sa *Begriffsschrift* : la démonstration des lois fondamentales de l'arithmétique ; car cet objectif appelait une analyse du concept de *nombre* dans laquelle la quantification jouait un rôle déterminant. Voilà ce qui, menant au rejet radical et définitif de la notion de contenu indéterminé, donna naissance à

62. ou, du moins, le pensait-il.

l'appareil linguistique adapté à la hiérarchie de fonctions. En effet, celui-ci régit les combinaisons de noms dont la référence est *déterminée* : fixe et unique. Or, si l'idéographie incorpore à la fois ce qui s'apparente, dans une perspective tarskienne, à des formules ouvertes – telles que '$\Phi(a)$' – et à des formules closes – telles que '$\forall a \Phi(a)$' –, elle use dans chaque cas de lettres différentes en lieu et place de 'a'. On ne peut comprendre que cette différence a trait au *rôle* des lettres en question, et non à une convention linguistique superflue, qu'en tenant compte des exigences sémantiques de Frege : pour que la structure d'un nom reflète les phénomènes ayant lieu dans la sphère de la référence, un tel nom ne peut être composé qu'à partir de noms qui ont eux-même une référence déterminée, ce dont nos variables libres contemporaines sont incontestablement dénuées. Frege fut donc conduit à exclure purement et simplement les "formules ouvertes" du domaine des noms. Ceci, en retour, soulève d'importantes questions concernant leur statut et la manière dont elles s'intègrent à ses conceptions.

Cet exemple élémentaire est tout à fait symptomatique de ce que nous avons annoncé. L'idéographie incorpore un florilège de lettres distinctes : gothiques, grecques, latines, majuscules et minuscules. Les explications de la première partie des *Grundgesetze* ne suffisent pas à uniformiser ce langage, c'est-à-dire à séparer les nuances qui améliorent sa lisibilité – par exemple l'emploi de 'β' et 'ε' – de celles qui proviennent d'une différence substantielle entres les statuts des lettres en cause – par exemple entre '$\mathfrak{a}$' et 'a'. Pour émanciper l'idéographie de toute convention d'écriture, et parvenir à dégager sa grammaire générale, il faut tenir compte des nombreuses impulsions subies par les idées de Frege. La construction rigoureuse de son système, basée sur la présentation systématique du rôle de chaque symbole, est à la fois *tributaire de* et *indispensable dans* une enquête sur ses conceptions philosophiques. Ainsi il est nécessaire de savoir comment il corrigea sa lecture de la quantification en analysant le concept de *nombre* pour mesurer l'écart qui sépare les formules "ouvertes" et "closes" de l'idéographie, ainsi celui-ci fait immédiatement émerger des questions concernant le statut des formules "closes". L'édification de l'Idéographie ne possède pas l'unique intérêt – pourrait-on dire – archéologique de présenter proprement le système qui donna naissance à la logique contemporaine, elle permet aussi de rendre saillant un certain nombre de problèmes de philosophie de la logique ; et c'est à ce titre que nous allons l'exploiter.

Nous voulons donner une seconde illustration, car la singularité du langage de Frege, ainsi que les problèmes qu'elle précise, ne se limitent aucunement à sa grammaire. D'ailleurs, celle-ci n'est pas transparente dans les *Grundgesetze*, et ne se laisse pas deviner facilement. Une autre spécificité est à l'origine de l'étonnement que l'idéographie suscite encore aujourd'hui : l'utilisation des deux dimensions. Frege emprunta cette direction sans tenir compte de sa propre morphologie qui tolérait – voire prescrivait – une écriture traditionnelle sous la forme de suites de symboles. Pour nommer une relation binaire particulière, il employa un signe dont les arguments s'écrivent l'un *au-dessus* de l'autre. Néanmoins, cette méthode, alliée à un peu de pratique, présente des avantages graphiques non négligeables sur lesquels il a fréquemment insisté. Peut-être son geste répondait-il seulement à des enjeux pragmatiques. À ce titre, il serait possible de choisir un autre signe, conforme à sa grammaire, puis de traduire systématiquement les termes du langage en remplaçant l'ancien par le nouveau. Ceci établirait qu'il s'agit à nouveau d'une convention innocente qui ne s'oppose nullement à la manière dont, ailleurs, Frege décrivit (sommairement) la construction de ses termes. Néanmoins, la conclusion n'est pas immédiate, parce que ce signe, conjointement avec un autre – le trait horizontal –, permet l'exploitation d'une règle – la fusion des horizontaux – qui semble à la fois tributaire de l'usage des deux dimensions et essentielle au projet fregéen. Une fois retranchée de l'Idéographie, la démonstration du principe de Hume, sur laquelle s'appuie celle des théorèmes de l'arithmétique, est bloquée [63]. Or le trait horizon-

63. À ce sujet, les *Grundlagen* et les *Grundgesetze* sont très différents. Dans les premiers, Frege s'appuie direc-

tal n'appartenait pas à la langue formulaire [64]. Frege l'introduisit lorsque, à travers son analyse du sens et de la référence, il attribua aux valeurs de vérité une place parmi les objets, résorbant ainsi la distinction contemporaine qui intervient entre termes et formules, et identifiant le rapport qu'un énoncé entretient avec une valeur de vérité à celui qu'un nom entretient avec un objet. Le trait horizontal permet justement de dissoudre le "fragment propositionnel" dans le reste du système. Il accompagne donc techniquement ce mouvement philosophique. Certains auteurs suggèrent même qu'il l'ait *produit*. Selon eux, Frege aurait développé l'idée selon laquelle les valeurs de vérité sont des objets en remarquant qu'il était incapable de réaliser entièrement les démonstrations esquissées dans les *Grundlagen*. Autrement dit, l'introduction de ce signe et de la règle associée répondrait à un problème *mathématique*, qui aurait bouleversé ses positions philosophiques fondamentales. Pour notre part, nous apporterons une autre explication. Néanmoins, nous convenons avec ces auteurs que la majorité des conceptions de Frege se sont formées sous l'impulsion de son objectif logiciste. Surtout, cet exemple révèle combien les problèmes techniques et philosophiques sont entremêlés, *i.e.*. à quel point l'étude de l'Idéographie est instructive sur les causes et le contenu des idées fregéennes.

Voilà pourquoi, au moment de bâtir le système, nous tenterons de nous affranchir de toute présupposition induite par la pratique de la logique moderne. Un certain nombre de formulation, auxquelles Frege eut recours dans son contexte historique, contiennent aujourd'hui une part trompeuse d'implicite. Tant que nous ne comprendrons pas le sens qu'*il* leur conférait, nous prendrons soin de les éviter. Nous définirons progressivement l'alphabet, les termes primitifs et complexes du langage, puis les règles et axiomes du système. Nous ne présumerons rien du fonctionnement de ce gigantesque appareil linguistique. Nous démontrerons soigneusement certaines choses sur lesquelles Frege fit l'impasse, mais qui sont essentielles à sa bonne tenue. C'est seulement ainsi, croyons-nous, que des réponses peuvent être apportées à divers problèmes ardemment discutés quant au contenu de ses idées.

L'un d'entre eux tiendra une place privilégiée au sein de notre texte. Cette fois, les réponses que nous y apporterons n'influenceront pas la forme que nous confèrerons au système. Néanmoins, il conservera un lien étroit avec certains passages techniques des *Grundgesetze*. En effet, les lettres grecques *majuscules*, bien qu'elles n'appartiennent pas *stricto sensu* à l'idéographie, sont abondamment utilisées dans sa présentation. Une grande part des commentateurs s'accordent à y voir des métavariables grâce auxquelles Frege indiquerait, dans un métalangage informel, la référence des noms primitifs de sa langue. Autrement dit, il en stipulerait l'*interprétation*. À ce titre, il aurait bâti une véritable *sémantique*, au sens tarskien du terme. Dans certains textes – notamment les plus tardifs –, nous trouvons d'ailleurs les termes '*Darlegungssprache*' ('langage d'exposition') '*Hilfssprache*' ('langage auxiliaire') dans des contextes dans lesquels nous parlerions volontiers de métalangage et de langage-objet :

> Pour servir ainsi de noms propres des phrases de la langue auxiliaire, j'utilise ces phrases même, mais encadrées de guillemets. (Frege 1923, p. 281 / 308)

Aux prises avec les divers indices qui militent dans ce sens, Dummett développa une lecture sophistiquée des écrits de Frege, selon laquelle celui-ci "fut le premier à nous offrir une sémantique" [65]. Cette affirmation, reprise à leur compte par d'autres auteurs, suscita une véritable levée

tement sur ce principe pour effectuer ses principales démonstrations. Son problème consiste à le justifier. Dans les seconds, le principe n'apparaît plus tel quel, il n'est plus *directement* impliqué. Nous nous intéresserons à cette question. Mais nos présentes considérations en sont indépendantes. Qu'elles fassent ou non étape par le principe de Hume, la démonstration des théorèmes de l'arithmétique est impossibles sans un usage particulier de cette règle qui, semble-t-il, s'appuie sur les deux dimensions.

64. ou, plus précisément, il y tenait un tout autre rôle.

65. (Dummett 1978, p. 118).

de boucliers. Divers exégètes considèrent que Frege n'aurait jamais rien reconnu de tel que nos théories de la vérité contemporaines, et aurait résisté encore davantage à la possibilité d'accomplir ce que, par elles, nous prétendons réaliser. Ils s'inspirent de l'interprétation de deux philosophes, Van Heijenoort et Hintikka, qui ont mis en lumière l'*universalisme logique* de Frege :

> Selon les dogmes de [la] tradition [universaliste], nous sommes (pour ainsi dire) prisonniers de notre langage. Nous ne pouvons ni en sortir, ni le réinterpréter globalement, ni même, à l'intérieur des limites qui sont les siennes, en exprimer la sémantique. (J. Hintikka 1988, p. 209)

Frege n'établirait donc pas de sémantique dans un métalangage, il tenterait seulement d'apprendre au lecteur le sens des expressions de l'idéographie. Les (nombreux) passages sur lesquels Dummett s'appuie auraient une dimension purement *propédeutique*, ils seraient dépourvus de toute vocation *théorique*, régnant dans le domaine de l'ineffable, de l'indication et de l'élucidation [*Erläuterung*], mais bannie *de jure* de toute sphère scientifique.

Nous ne souhaitons pas présenter ici les arguments avancés par les membres de chaque camp, car un nombre considérable d'auteurs sont impliqués dans la discussion. Le problème est en réalité abordé sous des angles extrêmement divers, traitant à la fois de la *possibilité* et du *statut* d'une sémantique. Mais il est clair que ce débat a dévoilé une scission aussi franche que profonde entre les auteurs – scission d'autant plus surprenante qu'elle concerne un logicien qui compte parmi les plus étudiés et, de réputation, les plus clairs. Il a donné naissance à deux grandes familles d'interprétations, dont les membres respectifs présentent leurs propres spécificités, mais acceptent de s'unir sous une même bannière. Notons aussi que la question des lettres grecques majuscules constitue une pièce centrale, ardemment discutée, du désaccord. Dans son guide de lecture des *Grundgesetze*, Cook s'exprima à leur sujet :

> Frege 'glisse' fréquemment des objets aux noms d'objets [...] et vice versa lorsqu'il utilise les mêmes expressions (en particulier, les métavariables 'Δ', 'Γ', '$\Phi(\xi)$', '$\Psi(\xi)$'), pour les deux. (Cook 2013, p. A-3)

D'autres objectent que Frege ne dérape pas, car ces lettres ne sont en aucune manière des métavariables. Et nous y voici à nouveau ! Une question cruciale d'histoire de la logique – celle de savoir si Frege était un précurseur ou un adversaire de la sémantique contemporaine – exige d'observer le détail des développements *techniques* des *Grundgesetze*. La réponse dépend largement de l'interprétation de quatre sections de la première partie de cet ouvrage : les §§10, 29-31. Frege y déploya un raisonnement à consonance sémantique d'une manière à la fois troublante et spectaculaire. À n'en pas douter, ces paragraphes comptent parmi les plus complexes des écrits fregéens, et leur analyse requerra d'exploiter tous les résultats auxquels nous serons alors parvenus. Ils constituent, en quelque sorte, le véritable point de mire de notre travail.

Stratégie et structure

Les problématiques introduites ont montré que la colonne vertébrale de notre travail – l'étude de l'idéographie – soutiendra et se nourrira des différentes enquêtes qui seront conduites. Elles ont aussi dévoilé un certain nombre de problèmes auxquels ces dernières seront attachées : la généralité, la notion de référence, la force assertive, les élucidations ou encore le logicisme. Il importe à présent d'y mettre de l'ordre, et d'annoncer proprement le sentier que nous allons emprunter.

Initialement, nous comptions proposer une étude *complète* de la conception fregéenne de la logique. À nos yeux, elle devait comporter trois éléments principaux : une reconstruction de l'idéographie, une enquête sur la sémantique et une étude de la notion de jugement. Les deux derniers

thèmes nous apparaissaient – et nous apparaissent toujours – comme les clefs de cette conception, explicables à la seule lumière du système logique de Frege. Ainsi, nous voulions d'abord entreprendre l'édification rigoureuse de l'Idéographie, après avoir seulement réuni les quelques éléments essentiels à cette dernière. Mais de nombreuses questions se sont progressivement imposées, toujours distinctes, souvent dépendantes. Des problèmes abondamment discutés dans la littérature – liés à la première notion de fonction, à la date et aux raisons de l'émergence du logicisme, à la relation d'identité – se sont révélés à nos yeux en étroite relation avec la forme que reçut l'idéographie. En définitive, nous avons appris à nos dépens ce qui fut expliqué plus tôt : les positions et le symbolisme de Frege entretiennent des liens terriblement ténus. Pour cerner le second, il est essentiel de comprendre la source des premières, et ainsi de retracer proprement leur genèse. En approfondissant nos réflexions, nous avons peu à peu développé une lecture précise de la première période de la vie scientifique de Frege, nous trouvant parfois en accord, parfois en conflit avec l'orthodoxie. Bien entendu, cette lecture exige elle-même de pénétrer la langue fregéenne. Néanmoins, elle s'appuie davantage sur le *premier* système – *i.e.* sur celui de la langue formulaire – que sur l'Idéographie au sens strict. Disons-le autrement : la meilleure préparation à l'examen des conceptions *et* du symbolisme de 1893, qui vont main dans la main, réside dans une reconstitution de la manière dont ils ont *évolué* main dans la main.

Cette reconstitution a largement excédé nos premières estimations, à la fois en difficulté, en profondeur et en richesse. C'est pourquoi il nous a semblé préférable de l'unifier dans un chapitre complet. Simultanément, nous avons réalisé combien notre projet débordait du cadre d'une thèse de doctorat. Nous avions considéré comme "préliminaire" une recherche qui s'étalait sur plusieurs centaines de pages, nous ne fondions donc plus beaucoup d'espoir sur la disposition des "choses sérieuses" à se soumettre au carcan que nous leur destinions. Puisque nous tenions à reconstruire proprement l'idéographie, nous ne pouvions conserver qu'un des deux thèmes initialement envisagés. Notre étude demeurant généralement concentrée autour des *Grundgesetze*, nous nous sommes naturellement décidés pour le problème qui y brûlait le plus ardemment : celui de la sémantique [66].

Lorsque ce renoncement fut consenti (de mauvaise grâce), la structure définitive de notre recherche s'imposa d'elle-même : la reconstitution liée à la première période préparerait le terrain de la reconstruction de l'Idéographie, elle-même nécessaire pour aborder de front le problème de la sémantique. Nous allons donc procéder selon ces trois grands moments. En outre, nous tenions à offrir au lecteur deux manières différentes de les aborder. Ils pourront être lus comme un tout unifié, parce qu'ils servent collectivement un même objectif : faire la lumière sur l'Idéographie et, d'un même geste, sur le texte dans lequel elle fut présentée, *i.e.* sur la première partie des *Grundgesetze*. Néanmoins, chacun est marqué par une thématique particulière. En forçant le trait quelque peu, nous parlerions de la dimension principalement historique du premier, technique du second, et philosophique du troisième. Chaque chapitre possède une véritable homogénéité, qui permit d'en aménager une lecture autonome. Dans ce but, nous avons soigneusement indiqué la section à laquelle se référer à chaque utilisation d'un résultat établi dans un précédent chapitre. Un lecteur curieux du problème de la sémantique fregéenne se verra ainsi dispensé d'une étude exhaustive de la difficile reconstruction du second chapitre. Il lui suffira de se référer aux passages essentiels que nous lui indiquerons. Bien entendu, il nous semble qu'une compréhension complète des enjeux et du fonctionnement de l'idéographie requiert d'aborder ce système à travers les trois axes que nous proposons : la genèse, la syntaxe et la sémantique. Néanmoins, au cas où l'un d'entre eux serait, pour une raison ou pour une autre, l'objet précis de l'intérêt du lecteur,

66. Précisons que nous serons parfois amenés à aborder la notion de jugement. Il nous semble inenvisageable d'amorcer une étude fregéenne sans en proposer *au minimum* une présentation. Cependant, nous n'en ferons pas l'étude approfondie que nous espérions mener.

celui-ci sera en mesure de s'y consacrer directement, en utilisant le ou les chapitres précédents comme de simples boîtes à outils, que nous ouvrirons pour lui aux moments opportuns.

Notre thèse admet donc un découpage extrêmement franc : le premier chapitre présente l'évolution des conceptions fregéennes durant la première période, le second contient l'édification de l'Idéographie, et le troisième traite du débat sur la sémantique. Par conséquent, si nos trois chapitres s'unissent dans l'objectif commun d'expliquer le fonctionnement du symbolisme de Frege jusque dans ses moindres recoins, chacun répond néamoins à ses enjeux propres, qu'il est temps de décrire plus précisément.

Le premier consistera en une reconstitution de la trajectoire intellectuelle épousée par Frege entre son premier écrit de logique et l'avènement de la distinction sens-référence, *i.e.* entre 1879 et 1890[67]. Nous identifierons deux mouvements importants : l'un conduisit des positions de la *Begriffsschrift* à celles des *Grundlagen*, et l'autre transforma les idées des *Grundlagen* en celles des *Grundgesetze*. L'importance du premier est souvent minimisée, à cause de l'extrême discrétion dont Frege fit preuve à son égard. Par ailleurs, si le rôle du second est unanimement reconnu, la plupart des commentateurs l'expliquent d'une manière que nous contesterons. En somme, notre tâche consistera à cerner les modifications occasionnées par ces deux mouvements *ainsi que* les causes de ces modifications. En particulier, nous développerons une interprétation précise des conceptions sous-jacentes aux *Grundlagen*, à partir de laquelle nous expliquerons comment Frege dériva *formellement* les théorèmes de cet ouvrage *avant* le grand basculement de 1890. Nous espérons faire ainsi la lumière sur le "manuscrit presque complet" qu'il expliqua avoir dû jeter après ce basculement, et qui constitue finalement l'ancêtre direct de nos *Grundgesetze*.

La reconstruction de l'Idéographie sera réalisé dans le second chapitre. Les étapes exigées par un tel travail y seront rigoureusement observées. Dans un premier temps, nous décrirons la grammaire des noms de la langue idéale fregéenne, étendue à la totalité des types. Cette partie contiendra la grande majorité des problèmes techniques auxquels nous serons confrontés. Ensuite, il suffira de répéter ce travail dans le cadre des autres expressions bien formées du langage, mais dénuées de référence, que Frege appelait des 'marqueurs latins'. Nous pourrons alors introduire les noms primitifs, puis les règles et les axiomes de l'Idéographie. Nous aurons rarement l'occasion de discuter les positions d'autres auteurs, car seul Landini s'est engagé dans une entreprise similaire. Il nous faudra néanmoins nous confronter à ses résultats, profondément différents des nôtres, doublement tributaires et responsables d'une vision des idées fregéennes fondamentalement distincte de la nôtre. Car – disons-le une dernière fois – ces idées sont visibles à travers le comportement de l'Idéographie, notamment et surtout sa morphologie, qu'il importe donc de mettre en lumière une fois pour toutes.

Dans le troisième chapitre, nous prendrons part au difficile débat concernant la possibilité et le statut d'une *théorie* sémantique fregéenne. À ce stade, la naissance des idées sémantiques de Frege aura été étudiée, notamment à travers l'examen de ses différentes explications à ce sujet. Néanmoins, nous aurons soigneusement laissé de côté la question du *statut* que Frege prêtait à ces dernières. Les tenait-il pour de simples élucidations à vertus propédeutiques, dans une perspective pré-wittgensteinienne, ou pour des affirmations proprement théoriques ? Cette question oppose deux grandes familles d'exégètes, et le fossé qui les sépare est profond. Cependant, la plupart des lieux qui ont jusqu'alors accueilli son traitement, lorsqu'ils ne prenaient pas la forme d'articles, ne lui étaient pas intégralement dédiés. Nous tirerons avantage du format d'un doctorat pour en scruter toutes les facettes, pour l'aborder sous tous les angles. Nous aurons néanmoins à cœur

67. Suivant l'orthodoxie, nous avons grossièrement daté la première période de la vie scientifique de Frege entre 1879 et 1886. En réalité, malgré une pénurie d'écrits entre 1886 et 1891, il existe de bonnes raisons de croire que la distinction en question fut opérée durant l'année 1890.

d'offrir une place privilégiée aux passages sur lesquels repose, à nos yeux, une grande part du problème : les §§10, 29-31 de la première partie des *Grundgesetze*. L'examen de ces paragraphes, qui comptent parmi les plus captivants de l'ouvrage, constitue le véritable point d'orgue de notre longue enquête.

Chapitre 1

Entre la *Begriffsschrift* et les *Grundgesetze* : un sentier accidenté

1.1 Deux distinctions fondamentales

Parmi les éléments transversaux à toutes les époques de la vie scientifique de Frege, on trouve deux distinctions importantes. L'une intervient entre un élément syntaxique et son contenu, l'autre entre le jugement et l'expression d'un contenu. À la période qui nous intéresse, elles impliquent trois termes essentiels : '*Gedanke*', uniformément traduit par 'pensée' ; '*Urteil*', uniformément traduit par 'jugement' ; et enfin '*Satz*', diversement traduit par 'proposition', 'phrase' ou 'énoncé'. Nous nous décidons pour la dernière option, et expliquerons bientôt ce choix.

Voici deux passages dans lesquels Frege fait état de ces différences :

> Le mot 'énoncé' [*Satz*] est diversement employé. Le sens purement linguistique de ce mot est certes le suivant. C'est celui selon lequel le langage humain consiste en énoncés. Mais ce qui proprement importe dans le discours ce n'est pas l'énoncé lui-même, c'est le sens ou contenu, qui est associé à l'énoncé et que l'on veut communiquer. Puisque le sens n'est pas lui-même sensiblement perceptible, nous sommes contraints à nous servir de quelque chose de sensible pour communiquer. C'est ainsi que l'énoncé et sens de l'énoncé, sensible et non sensible, sont liés. J'appelle pensée le sens d'un énoncé ayant un sens. Les pensées sont vraies ou fausses. [...] Je suis déterminé, quant à moi, à désigner toujours par le mot 'énoncé' l'élément linguistique, ce dont le sens est une pensée. Je distingue ainsi entre énoncé et pensée. (Frege 1899-1906, p. 182 / 199)

> Nous pouvons exprimer une pensée sans l'asserter. Mais il n'y a pas de mot ou de signe du langage dont la fonction soit simplement d'asserter quelque chose. C'est la raison pour laquelle, même semble-t-il, chez les logiciens, prédiquer est confondu avec juger. On ne sait plus alors si ce que les logiciens appellent un jugement renvoie à une pensée seule ou à une pensée accompagnée du jugement qu'elle est vraie. D'après le mot, on penserait que cela envoie à une pensée *accompagnée* du jugement ; mais l'usage commun est souvent tel que l'effectuation du jugement, la reconnaissance de la vérité ne sont pas incluses. *J'utilise le mot 'pensée' à peu près dans le sens où les logiciens utilisent le mot 'jugement'.* Penser est saisir une pensée. Une fois la pensée saisie, nous pouvons la reconnaître comme vraie (*juger*) ou donner une expression à notre reconnaissance de sa vérité (*asserter*). (Frege 1906b, p. 201/ 221)

Dans le premier passage, on reconnaît la distinction établie par certains philosophes contemporains entre un énoncé et son contenu, souvent appelé 'proposition'. Dans le second, Frege sépare l'expression de l'assertion de la pensée. La notion de *Gedanke* – de pensée – se tient au centre de ces extraits. Cette notion ne fut mise à jour qu'en 1891, dans trois articles essentiels [1]. Pourtant, les deux distinctions traversent l'ensemble de son œuvre. Pour bien les comprendre, il est donc nécessaire d'examiner la forme qu'elles ont prise lors des différentes périodes de ses recherches. Il convient de remonter jusqu'à la rédaction de sa *Begriffsschrift*, loin avant le triomphe des pensées, bien en amont du grand chamboulement de 1891.

Le présent chapitre est dédié à cette tâche. Nous y présenterons les courants, aussi violents que silencieux, qui ont emporté ces deux distinctions jusqu'à leur destination finale. Il s'agit bel et bien d'un prélude – à la fois à la présentation de l'idéographie et à l'étude qui lui succèdera –, mais en aucun cas d'une formalité. Les indices dont nous disposons pour reconstituer la trajectoire empruntée par Frege entre 1879 et 1891 sont extrêmement rares. Et pourtant, c'est bien à travers celle-ci que son cap se dessine avec précision. Nous allons donc procéder à une longue exégèse, et débattre avec les auteurs qui s'y sont risqués, afin de collecter toutes les informations qui nous seront nécessaires par la suite.

1.2 Le lexique de 1879

1.2.1 Contenus et contenants

Le symbolisme de Frege compte parmi les singularités de l'histoire de la logique, si bien que la lecture de ses langues s'avère ardue pour un logicien contemporain. Curiosité parmi les curiosités, le signe '$\vdash$' [2] occupe une place privilégiée au sein des deux langages, aussi bien celui de 1879 – la langue formulaire – que celui de 1893 – l'idéographie. En 1879, Frege expliquait que ce symbole "se trouve à gauche du signe, ou de la combinaison de signes, qui fournit le contenu [*Inhalt*] de jugement. Si l'on *retranche* le petit trait vertical qui se trouve à gauche du trait horizontal, cela a pour effet de transformer le jugement en *une simple combinaison d'idées* [*Vorstellungsverbindung*], à partir de laquelle celui qui l'écrit n'exprime pas s'il lui attribue [*zuerkenne*] la vérité [*Wahrheit*] ou non." [3] (Frege 1879b, pp. 1-2 /p. 15).

Le signe '$\vdash$' est composé d'un trait vertical et d'un trait horizontal. Le premier est appelé 'trait de jugement'. Il permet le passage de la simple expression d'un contenu à celle d'un jugement, *i.e.* à une affirmation [*Bejahung*]. Le second est nommé 'trait de contenu' et permet, quant à lui, de "combiner les signes qui le suivent en une totalité", de telle sorte que "l'affirmation [*Bejahung*] exprimée [*ausgedrückt*] par le trait vertical à gauche de l'horizontal se rapporte à cette totalité." (p. 2 / 16).

Par ailleurs, Frege expliqua que "tout contenu ne peut pas devenir un jugement par $\vdash$ mis devant son signe, par exemple l'idée 'maison' ne le peut pas [4]. C'est pourquoi nous distinguons les contenus *jugeables* des contenus *non jugeables*." (p. 2 / p. 16).

Frege séparait donc le jugement de la simple combinaison d'idées qu'il contient. Néanmoins, il importe de lever une ambiguïté liée au double-emploi du terme 'contenu'. Si ce dernier se

1. (1891, 1892b et 1892a)
2. En dépit des apparences, *ce symbole ne correspond pas* au symbole contemporain de déduction syntaxique.
3. Nous avons légèrement modifié la traduction, afin que le verbe "exprimer", qui importe ici, ne corresponde pas à différents mots allemands.
4. À cette époque, Frege ne paraît pas toujours vigilant sur la différence entre usage et mention dans sa langue d'exposition. Bien qu'il semble se servir déjà des guillemets pour nommer des énoncés (par exemple p. 3 / 16), on voit qu'il les omet ici lorsqu'il parle du *signe* de jugement et qu'il en utilise pour parler de l'idée *exprimée par* le terme 'maison', et non du terme lui-même. Il existe une explication à ces impairs. Nous la présenterons bientôt.

rapportait toujours au même contenant – le jugement – alors les expressions ‘contenu jugeable’ [*beurteilbare Inhalt*] et ‘contenu non jugeable’ [*unbeurteilbare Inhalt*] seraient respectivement un pléonasme et un oxymore. Heureusement, plusieurs passages renseignent quant à un autre type de contenant : les *expressions.* Voici le plus explicite d'entre eux :

> D'ordinaire, les signes[5] ne font rien d'autre que représenter leurs contenus. (p. 13 / 28)

Quelques lignes plus loin, Frege parla d'une pensée [*Gedanke*] comme contenu d'expression[6]. Ainsi il distinguait entre deux genres différents de contenants : le jugement [*Urteil*] et l'expression [*Ausdruck*]. Un jugement contient toujours une idée ou combinaison d'idées. Cependant, certaines idées et combinaisons d'idées sont inaptes à devenir des contenus de jugement, elles ne sont pas *jugeables.*

Une expression [*Ausdrucke*], quant à elle, peut contenir une (combinaison d') idée(s) *jugeable ou non.* Frege parle par exemple d'"une expression dont le contenu n'a pas besoin d'être jugeable" (p. 16 / 30). En outre, elle peut aussi contenir un *jugement.*

Il existe donc trois types de contenus d'expressions[7] :

– les jugements ;

– les idées ou combinaisons d'idées jugeables ;

– les idées ou combinaisons d'idées non jugeables.

Le rapport qui unit le jugement à son contenu est complexe. En 1879, Frege expliquait qu'effectuer un jugement consiste à attribuer ou non la vérité à son contenu (p. 2 / 15). Notre prochaine section dévoilera ce que les explications de cette époque avaient d'imparfait et de lacunaire. Quant au rapport d'une expression à son contenu, Frege disait aussi bien que la première exprime [*ausdrücken*] ou signifie [*beteuten*] le second, qu'il s'agisse d'un jugement, d'une idée ou combinaison d'idées, jugeable ou non. Quelques citations illustreront ces deux points.

S'il s'agit d'un jugement, cela est expressément stipulé dès l'introduction du trait vertical :

> Posons par exemple que $\vdash A$ signifie [*bedeuteu*] le jugement ‘les pôles magnétiques opposés s'attirent mutuellement’[8] ; ainsi $— A$ n'exprime [*ausdrücke*] pas ce jugement. (p. 2 / pp. 15-16)

Dans le cas d'une idée ou combinaison d'idées, Frege expliqua :

> Tandis que d'ordinaire les signes ne font rien d'autre que représenter leur contenu, si bien que chaque combinaison dans laquelle ils entrent n'exprime [*ausdrücke*] qu'une relation à leurs contenu (p. 13 / 28).

Ailleurs, Frege parla des "significations [*bedeutungen*] des termes : si, et, ne ... pas, ou, il y a, quelques, tous, etc." (p. VII / 9), auxquels ne correspond aucun contenu *jugeable*, tandis qu'il affirma que divers contenus jugeables sont *signifiés* [*bedeuten*] par des expressions, par exemple de la forme ‘$—\!\!\!\top A$’ (p. 8 / 21).
$\quad\;\; B$

5. Comme nous l'avons expliqué (p. vi), Frege variait dans son usage du terme ‘signe’. Dans ce contexte, le mot désigne une quelconque expression du langage.

6. Notons qu'il s'agit là d'une des rares occurrences du terme ‘*Gedanke*’ dans l'ouvrage. Ce dernier n'y tenait pas le rôle crucial qu'il acquit en 1891, et fut employé dans le sens général d'‘idée ou combinaison d'idées’.

7. Frege n'évoque pas de combinaisons d'idées inaptes à devenir un contenu d'expression. Tout indique que, selon lui, n'importe quelle combinaison peut, en principe, être le contenu d'une expression.

8. Patientons encore quelques instants avant d'expliquer cette apparente entorse aux règles associées à l'usage des guillemets.

Frege s'autorisait à choisir librement entre les verbes 'exprimer' et 'signifier'. Précisons néanmoins qu'il conférait une dimension plus technique au dernier, qu'il favorisait lorsque, après avoir introduit les termes de sa langue, il écrivait les clauses précises qui en expliquaient le contenu. Il s'autorisait au contraire l'usage d''exprimer' dans des contextes moins spécifiques, lorsqu'il n'était pas question de connecter une expression à son contenu. Il parla notamment d'exprimer une *déduction* (p. 13/ 27). En dépit de cette nuance, les utilisations demeuraient extrêmement proches. La scission entre les deux verbes n'avait pas encore été opérée. Elle surviendrait en 1891, accompagnée d'une seconde entre '*Sinn*' et '*Beduntung*'. En 1879, le premier de ces deux termes n'apparut qu'à de rares occasions, concernant les lettres latines (pp. 1, 21 / 16, 35) ou autre (pp. 3, 17 / 17, 31), pour désigner le contenu d'une expression sans qu'aucune dissemblance ne semble introduite vis-à-vis du mot '*Bedeutung*'. Dans la *Begriffsschrift*, aucune démarcation explicite ne distinguait donc ni les sens de '*ausdrücken*' et '*bedeuten*', ni ceux de '*Sinn*' et '*Beduntung*'.

Partout où il apparaît, nous traduirons '*Sinn*' par 'sens'. Pour l'instant, nous dédions à '*Bedeutung*' le nom 'signification' – et à '*Bedeuten*' le verbe 'signifier' – qui convient parfaitement à cette époque. Nous verrons plus loin ce qu'il convient de faire pour la deuxième période. Ces termes sont probablement les éléments du lexique fregéen les plus délicats à traduire. Non seulement leur sens a subi d'importantes modifications, mais les thèses matures de Frege leur sont à ce point liées qu'ils en deviennent difficilement pensables indépendamment. Certains auteurs en vinrent à considérer qu'ils méritaient un nom totalement neuf, non empreint d'un usage préexistant, et décidèrent de ne pas les traduire. Nous ne ferons pas ce choix.

1.2.2 Usage et mention

Dans la *Bregriffsschrift*, Frege semble commettre un certain nombre d'impairs concernant la différence entre usage et mention, car il n'entoure pas systématiquement une expression de guillemets pour la mentionner. Une explication a été avancée par Baker (2001) et Hacker (Baker et Hacker 2003). Selon eux, Frege n'exploitait pas les guillemets comme nos conventions actuelles nous y incitent, car il ne se préoccupait pas de séparer l'usage de la mention, mais de distinguer les exemples empruntés à la langue naturelle de ceux provenant d'un langage formel. Les extraits suivants, tirés de différents textes situés entre 1879 et 1891, attestent qu'il ne respectait ni ne dérogeait systématiquement à notre règle :

- "l'idée 'maison' ne le peut pas" (Frege 1879b, p. 2 / 16)
- "sur un objet a et sur un objet b" (Frege 1884, p. 82 / 196)
- "l'expression 'chaque nombre entier positif'" (Frege 1879b, p. 17 / 31)
- "le signe A et le signe B" (Frege 1879b, p. 15 / 29)

Dans les premier et dernier cas, Frege déroge à la convention contemporaine. Dans le premier, il fait *usage* d'un terme – il signifie un *contenu* : une idée – mais le place pourtant entre guillemets. Dans le dernier, il fait *mention* d'un signe et omet les guillemets. Dans les deuxième et troisième cas, il respecte la convention contemporaine. Dans le deuxième, il fait *usage* d'un terme – il signifie des contenus : des objets – sans encadrer leurs noms de guillemets. Dans le troisième, il fait *mention* d'une expression qu'il place entre guillemets.

L'interprétation de Baker et Hacker dissipe efficacement le trouble généré par ces passages : Frege employait les guillemets pour illustrer son propos par des exemples écrits dans la langue naturelle. Il laissait au seul contexte le soin de révéler lequel du contenu ou de l'expression était signifié. Il était pourtant loin d'ignorer l'importante distinction entre ces deux derniers éléments, mais il choisit simplement l'utilisation des guillemets qui lui parut la plus favorable à la lisibilité de ses écrits. En effet, le cadre suffisait à comprendre sans effort lequel du signe ou du contenu était visé. En revanche, lorsque la langue naturelle était utilisée pour procéder à une illustration,

qu'il s'agisse de faire usage ou mention d'une expression, les guillemets lui semblaient nécessaires. Et ceci se comprend aisément. Des formulations telles que 'le concept est un homme subsume au moins un objet' – respectivement 'l'expression est un homme contient trois mots' – manquent de clarté, car le nom 'concept' – respectivement 'expression' – y apparaît comme sujet du verbe 'est', ce qu'il n'est pas. Qu'il s'agisse de référer au contenu ou à l'expression, les guillemets assuraient la fluidité en manifestant la structure de la phrase : 'Le concept 'est un homme' subsume au moins un objet' – respectivement 'l'expression 'est un homme' contient trois mots'. Au contraire, la rupture engendrée par l'usage d'un langage formel au sein d'un énoncé exprimé en langue naturelle permettait à elle seule de présenter l'exemple comme un bloc et n'appelait aucun autre procédé. Nulle confusion n'était à redouter par les formulations 'le concept Φ subsume au moins un objet' et 'le signe Φ est issu de l'alphabet grecque'.

La totalité des occurrences de guillemets dans les textes antérieurs à 1891 est conforme à l'explication proposée par Baker et Hacker [9]. Jusqu'à cette date, Frege a donc dédié à ces symboles un rôle différent de celui qu'ils tiennent aujourd'hui en logique [10]. Entre 1879 et 1891, il révisa progressivement sa conception des concepts et des fonctions, questionnant simultanément la manière dont il fallait écrire leurs *noms*. Nous verrons en détail l'appareil développé pour échapper aux imperfections de la langue naturelle [11]. Ceci le conduisit à renoncer à son premier usage des guillemets et à épouser les conventions contemporaines, ainsi qu'il l'expliqua dans un texte tardif :

> *Pour servir ainsi de noms propres des phrases de la langue auxiliaire, j'utilise ces phrases même, mais encadrées de guillemets.* (Frege 1923, p. 281 / 308)

1.2.3 Enoncés et assertions

Dans la *Begriffsschrift*, Frege ne précisa pas à quels éléments linguistiques il dédiait le terme 'énoncé' [*Satz*]. Dans les faits, il l'utilisa exclusivement pour désigner des expressions dont le contenu est un jugement. Par la suite, il nommerait ainsi toutes les expressions dont le sens est un contenu jugeable – après 1891 : une pensée –, que ce contenu – cette pensée – *soit jugé ou non*.

En outre, la nature de l'affirmation [*Bejahung*] n'était pas réellement éclaircie. Frege parlait de "l'affirmation [*Bejahung*] exprimée [*ausgedrückt*] par le trait vertical", suggérant qu'elle soit le contenu de ce trait. En ce cas néanmoins, il n'y aurait qu'une seule et unique affirmation possible, car le trait vertical est censé posséder un contenu fixe [12]. Cette surprenante conclusion est heureusement contredite par d'autres passages du texte dans lesquels Frege expliqua que si A et B sont deux contenus jugeables potentiellement différents, alors il est possible que A

9. Baker (2001, pp. 529-534) présente un nombre conséquent d'exemples.

10. Notons que Frege commit néanmoins quelques erreurs quant aux verbes qui accompagnent une mention, indépendamment du problème des guillemets :

> On peut imaginer une langue dans laquelle l'énoncé 'Archimède périt lors de la prise de Syracuse' serait exprimé [*ausgedrëckt*] de la manière suivante : 'la mort violente d'Archimède lors de la prise de Syracuse est un fait' (p. 3 / 17).

Selon sa propre distinction entre une expression et un contenu, la première peut être écrite, dite ou formulée, mais pas, comme il l'affirme ici, exprimée. Cette capacité appartient au contenu seul. Il s'agit là d'une simple imperfection que le lecteur est en mesure de rectifier sans difficulté.

11. Le problème lié au paradoxe du concept de cheval surviendra à cette période, nous le discuterons longuement. Pour l'heure, notons seulement que lorsque Frege continuait d'évoquer des concepts dans la langue naturelle après 1891, il utilisait l'italique, par exemple : 'le concept de *carré*' (Frege 1893, p. XIV).

12. Frege explique (p. 1 / 16) que tous les symboles de son langage ont un contenu déterminé, à l'exception des lettres.

soit affirmé et B soit affirmé (p. 5 / 19). Deux affirmations *différentes* sont ainsi en jeu. En vérité, Frege fit usage d'une formulation imprécise dans le seul but de signaler que le caractère spécifique de l'affirmation est octroyé par le trait vertical, *i.e.* que le caractère affirmatif de l'énoncé est marqué par la présence du trait vertical ; mais l'affirmation n'est *pas* le contenu du trait *seul*. Est-elle le contenu de l'énoncé global ? Dans ce cas, rien ne la distinguerait plus du jugement, lui aussi présenté comme contenu de l'énoncé total. Voici ce qu'il convient d'observer pour l'instant : relativement aux notions d'affirmation et de jugement, les différents indices de ce texte s'opposent. Les éclaircissements appropriés ne seraient fournis que plus tard par Frege, et nous les présenterons bientôt.

1.2.4 Inventaire

Récapitulons les différents liens entre les notions importantes. Nous plaçons un tiret entre deux termes lorsqu'ils peuvent indifféremment être utilisés dans un même contexte :

<table>
<tr><td colspan="3">Une expression</td></tr>
<tr><td colspan="3">exprime – signifie</td></tr>
<tr><td colspan="3">son sens – sa signification – son contenu :</td></tr>
<tr><td>Jugement</td><td>Combinaison d'idées jugeable</td><td>Combinaison d'idées non jugeable

Idée non jugeable</td></tr>
</table>

Quelques lignes éclairciront les raisons de cette rapide mise au point. Frege n'attendit pas le tournant de 1891 pour modifier considérablement son vocabulaire. Il y procéda au fur et à mesure qu'il précisa et transforma des idées qu'il s'était contenté de balbutier dans la *Begriffsschrift*. Déterminer la date de naissance exacte de tel ou tel point parmi ses conceptions est une tâche non seulement complexe, mais souvent absurde. Les intuitions profondes et novatrices qui le guidaient ne le préservaient pas de certaines incohérences, elles en furent au contraire régulièrement responsables. Lorsque Frege accomplissait une partie du chemin dans une direction sans réaliser la distance qui le séparait encore de son objectif, *i.e.* lorsqu'il manquait d'étendre la portée d'une idée à tout son champ d'action légitime, il générait une certaine hétérogénéité au sein de ses propres écrits, laissant coexister des éléments incompatibles. Déclarer que tel ou tel aspect de ses thèses apparut dès les premiers signes pointant dans leur direction ou lorsqu'ils furent véritablement installés au sein de l'environnement fregéen est finalement une simple question terminologique. La réponse apportée est relative à notre objectif : souhaitons-nous localiser le moment où Frege débuta ou celui où il acheva le travail ?

Nous verrons que certains désaccords historiques concernant l'émergence des thèses fregéennes proviennent de ce genre de quiproquos. Au contraire, décrire les différentes étapes qui l'ont mené du commencement à la fin d'un tel travail, autrement dit retracer la manière dont les diverses facettes d'un aspect de ses conceptions ont été progressivement aperçues, réunies et articulées nous semble d'un intérêt bien plus tangible, permettant de comprendre les primes motivations liées à l'émergence d'une idée ainsi que les résistances que celle-ci a entraîné lorsqu'il fallut la déployer entièrement. En somme, il s'agit d'un moyen efficace pour saisir les raisons profondes de ses choix, parfois invisibles au sein des écrits tardifs rédigés, non pas pendant, mais à l'issue

du processus. Cette rapide description du vocabulaire de la *Begriffsschrift* – son premier texte de logique – nous place donc en position, sur la ligne de départ, prêts à examiner l'affinement des formulations et autres glissements sémantiques, *i.e.* les différentes saccades par lesquelles Frege parvint à se mouvoir en des lieux qui étaient totalement vierges, au moment où il les explora.

1.3 Jugement

1.3.1 Le point de Frege

À diverses reprises, Frege dénonça chez les logiciens une confusion trop fréquente entre le jugement et son contenu. Plus tardivement, la notion de *force assertive* [*Behauptende Kraft*] émergea de cette distinction. Son rôle peut être révélé par une comparaison entre les modes affirmatif et interrogatif. Considérons les expressions suivantes, et utilisons pour l'instant le lexique des contenus jugeables et des combinaisons d'idées :

- E_1 : 'Il y a des êtres vivants sur Mars. En revanche il n'y en a pas sur Saturne.'
- E_2 : 'Y a-t-il des êtres vivants sur Mars ?'
- E_3 : 'S'il y a des êtres vivants sur Mars, alors il y a de la vie sur Mars.'
- E_4 : 'Il y a des êtres vivants sur Mars'
- E_5 : 'Il y a de la vie sur Mars'

Selon Frege, E_2 et E_4 contiennent la même combinaison d'idées – nommons-la 'C'. Ce qui distingue des locuteurs qui prononcent ces énoncés ne réside pas dans la combinaison d'idées communiquée par E_2 ou E_4 – il s'agit de C dans tous les cas –, mais dans leur *attitude* vis-à-vis de C.

Supposons trois locuteurs qui prononcent E_1, E_2 et E_3 (notons que E_4 est partie de E_1 et de E_3).

Un locuteur L_1 qui prononce E_4 dans le contexte de E_1 *s'engage* vis-à-vis de la vérité de C. Il ne se contente pas d'exprimer C, il l'*affirme*. Un auditeur estimant au contraire qu'il n'existe aucun être vivant sur Mars sera tenté de *contredire* cette affirmation.

Un locuteur L_2 qui prononce E_2 ne s'engage pas vis-à-vis de la vérité de C. Il n'est plus question pour un auditeur de le contredire. L'attitude de L_2 n'appelle ni adhésion ni contestation, mais une simple *réponse*.

Un locuteur L_3 qui prononce E_4 dans le contexte de E_3 ne s'engage pas vis-à-vis de la vérité de C. Il n'appelle, en ce qui la concerne, ni contestation ni adhésion, ni même aucune réponse. L_3 n'affirme ni ne questionne C. Il se contente d'affirmer que C se tient dans un certain *rapport* – en l'occurrence un rapport d'implication – avec le contenu de E_5.

Lorsqu'un locuteur exprime un contenu jugeable en formulant un énoncé, il peut simultanément asserter ou questionner ce contenu jugeable. Dans le premier cas, Frege dira qu'il prononce l'énoncé avec 'force assertive', dans le second avec 'force interrogative'. Il importe alors de déterminer ce qui dénote la force avec laquelle le locuteur prononce un énoncé, ce qui manifeste l'attitude du locuteur vis-à-vis du contenu jugeable.

Selon Frege, les langues naturelles laissent souvent au seul contexte le soin d'établir ce point. Une même expression peut porter la force assertive, la force interrogative ou encore être dénuée de l'une et l'autre, selon le cadre et la manière dont elle est dite. Reprenons notre exemple E_4. Dans le contexte de E_1, il porte la force assertive. Prononcé avec une intonation ascendante, il porte la force interrogative. Dans le contexte de E_3, il ne porte ni l'une ni l'autre.

Au contraire, il arrive que la force soit liée à certaines parties d'une expression. Par exemple lorsque L_2 prononce E_2, son attitude vis-à-vis de C est visible directement à travers l'inversion entre sujet et verbe. Frege expliqua lui-même que la force assertive est régulièrement attachée à l'indicatif du verbe principal. Cependant, nous avons vu qu'il n'en va pas toujours ainsi :

> À cette force assertive ne correspond souvent aucun mot ni aucune partie d'énoncé, si bien que souvent cette force peut être seulement ressentie. (Frege 1899-1906, p. 183 / 206)

Non seulement la force assertive ne dépend souvent que du contexte – ce qui peut en dissimuler l'existence –, mais de plus elle est parfois attachée à une *partie* de l'énoncé – ce qui peut laisser croire qu'elle appartient au sens de cette partie. Or la force assertive n'appartient au sens d'aucune partie de l'énoncé, ni même au contenu jugeable complet. Elle ne concerne pas ce qui peut être jugé vrai ou faux, mais l'attitude du locuteur vis-à-vis de ce qui peut être jugé vrai ou faux. *La force assertive, c'est ce dont le locuteur charge l'énoncé lorsqu'il reconnaît comme vrai le sens de cet énoncé, lorsqu'il effectue un jugement ; elle est elle-même extérieure à ce sens.* Le fait que, dans les langues naturelles, aucun élément syntaxique ne soit dédié *exclusivement et systématiquement* à signaler la présence de cette force est responsable de l'aveuglement des logiciens vis-à-vis de celle-ci. Ces derniers ne sont pas parvenus à la distinguer isolément car elle n'était liée à rien d'isolé, fondue dans le contexte ou attachée à telles ou telles expressions différentes.

Frege entendait remédier à ce défaut en introduisant un signe chargé *uniquement* de marquer la présence de la force assertive. Il s'agit du trait vertical situé à gauche du symbole '$\vdash$'. Frege ne s'intéressait qu'à développer un rigoureux système de déduction, il n'avait donc pas besoin de prendre en charge le problème des interrogations en réitérant l'opération pour la force interrogative. Seul importait de distinguer proprement jugement et contenu jugeable, et le trait vertical levait parfaitement l'ambiguïté.

Frege fut le premier à octroyer une place aussi importante à la distinction entre juger et exprimer. Ceci a conduit certains philosophes à lui attribuer le nom de 'point de Frege'. Peter Geach initia ce mouvement :

> Une PENSÉE peut avoir exactement le même contenu que sa vérité soit reconnue ou non ; une proposition peut se trouver dans un discours tantôt assertée, tantôt non, et pourtant être identifiable comme la même proposition. Ceci paraît si trivialement vrai qu'il ne semble pas nécessaire de le préciser ; mais nous allons voir qu'il est nécessaire de le préciser, en contrastant avec d'autres théories erronées de l'assertion, et aussi parce qu'une juste vision de l'assertion est cruciale vis-à-vis de certaines conceptions philosophiques notoires concernant d'autres sujets.
>
> J'appellerai cet aspect de l'assertion le point de Frege, du nom du logicien qui fut le premier (à ma connaissance) à établir ce point avec autant de clarté et d'insistance. (P.T. Geach 1965, p. 449)

Notre présent développement se prête à une rapide description du rapport que Frege entretenait avec les langues naturelles. Il reprocha aux logiciens d'ignorer la différence entre jugement et contenu jugeable en privant leurs propres langages d'un signe consacré à la force assertive. Jamais néanmoins il ne jeta l'opprobre sur les langues naturelles. Seuls les langages logiques sont gangrenés par l'absence d'un tel symbole. Les langues naturelles n'ont absolument pas vocation à l'introduire, car leur usage quotidien exige un fonctionnement qui, conforme à leur rôle de

communication rapide et commode, les affranchit de la rigueur requise dans le discours scientifique. La force assertive constitue une première manifestation d'une tension qui intervient entre commodité et rigueur. Il n'a pas été nécessaire d'y associer un symbole, ni de perdre temps ou espace à le dire ou l'écrire, car le contexte (ou telle partie d'énoncé) accomplit à lui (elle) seul(e) ce travail. Les erreurs ou incompréhensions qui peuvent parfois en découler sont rendues bénignes par le rôle de la communication quotidienne. Le véhicule de nos messages importe peu, ceux-ci n'ayant pas besoin d'être rendus et transmis avec exactitude. En revanche, le discours scientifique exige une toute autre rigueur, car la moindre imprécision peut s'avérer désastreuse dans ses conséquences, ou celles qui lui seraient attribuées par voie de déductions erronées. Le cas des mathématiques est paradigmatique. Pour assurer les fondements de cette science, dont les démonstrations consistent en un grand nombre de déductions assez simples à partir d'axiomes, eux aussi assez simples, il n'est pas d'autre solution que d'inspecter ces règles et axiomes et de décider une fois pour toutes lesquels doivent être employés et lesquels rejetés. C'est au moins ce que Frege pensa toute sa vie.

Les messages transmis au quotidien suscitent en majorité des erreurs de compréhension ou de raisonnement qui peuvent être facilement constatées et corrigées. Celles qui ne le peuvent ne justifient en aucun cas un alourdissement du langage qui nuirait grandement à sa commodité et, ainsi, à la rapidité de communication essentielle à son usage. Au contraire, le discours scientifique est plus complexe et ses énoncés, notamment mathématiques, moins trivialement réfutables. Il devient donc légitime de scruter en détail les outils utilisés dans notre mode d'expression et de les transformer pour prévenir tout amalgame dans l'étude logique de la langue et dans celle, corrélative, des raisonnements. C'est pourquoi Frege compara l'œil à la langue naturelle, et le microscope à la langue formulaire [13]. Dans les deux cas, le premier n'est pas censé remplacer le second, il est destiné à un usage différent, plus performant dans l'ordre de la précision, moins dans celui de la rapidité. On ne cherchera pas à voir en permanence au microscope, et on ne parlera pas toujours dans la langue de l'idéographie. En revanche, dans la poursuite de précision et d'exactitude, l'un comme l'autre constituent des armes redoutablement efficaces. C'est pourquoi Frege éloigna considérablement son idéographie des langues naturelles sans jamais en appeler à aucun amendement de ces dernières. Le premier pas, non des moindres, fut d'introduire un signe attaché à la force assertive : la barre verticale située à gauche du symbole '$\vdash$'.

Il distingua ainsi l'expression d'un contenu apte à être jugé vrai ou faux et le jugement lui-même. En quoi consiste réellement ce dernier et quel rapport entretient-il avec ce contenu ? Cette question n'est pas suffisamment liée à nos futures affaires pour que nous y apportions une réponse précise. Il nous faudra néanmoins éclaircir certaines choses à ce sujet lors de notre troisième chapitre. Pour l'heure, et cela nous sera utile à cette occasion, nous allons nous attacher à retracer la genèse et l'évolution de cette distinction en nous appuyant sur les différents écrits de Frege.

1.3.2 Le jugement dans la *Begriffsschrift*

La notion de force assertive était absente de la *Begriffsschrift* et les explications liées au jugement restaient extrêmement bancales. Richard Heck et Robert May en vinrent à affirmer que Frege ne tenait pas encore la position que nous venons de présenter :

> Contrairement à ce qu'affirme Geach, [...] le point de Frege n'était pas encore là dans la *Begriffsschrift*. (Heck et May 2017, p. 13)

13. (Frege 1879b, p. 5 / pp. 6-7)

Heck et May nuancent néanmoins leur verdict, en reconnaissant que des 'indications de ce point' figuraient dans le traité (p. 13). En réalité, les explications imparfaites de 1879 n'aident pas à déterminer quelles étaient exactement les vues de Frege à ce sujet. Nous allons cependant tenter de défendre la position suivante. La distinction entre jugement et contenu jugeable, aussi intuitive soit-elle, possède de surprenantes conséquences. Frege réalisa progressivement ces dernières, ce qui lui permit d'adapter son lexique. Mais le cœur de l'affaire était déjà réglé en 1879, car le cœur de l'affaire consistait précisément à introduire un signe pour l'affirmation. Et ce geste, Frege l'accomplit au sein même de son premier ouvrage de logique. Par la suite, il ne restait qu'à emprunter le sentier qui permettait d'en mesurer les effets. Frege s'engagea sur cette route avec insouciance, il réalisa lentement où elle le conduisait.

Nous ne nous opposons donc pas à Heck et May lorsqu'ils soutiennent que 'Frege n'avait pas totalement pris la mesure de [cet aspect]' (p. 13). Nous allons justement examiner les différentes étapes de cette prise de conscience, en récoltant quelques indices présents au sein de ses écrits et en observant les nombreuses évolutions de ses explications, de son lexique et de ses formulations.

Suivons à la lettre les explications que Frege fournit en 1879. Un jugement *contenu* dans une expression *contient* lui-même une combinaison d'idées. Dans la langue formulaire, un jugement est contenu dans une expression qui incorpore, à son extrême gauche, un trait vertical. Ce jugement contient lui-même la combinaison d'idées (jugeable) contenue dans l'expression initiale privée du trait vertical. Autrement dit, le contenu du jugement contenu dans '$\vdash A$' est la combinaison d'idées (jugeable) contenue dans '$— A$'[14]. Doit-on en conclure que les jugements et les combinaisons d'idées appartiennent à des catégories d'intersection vide ? Est-il correct qu'aucun jugement n'est une combinaison d'idées, et qu'aucune combinaison d'idées n'est un jugement ? A priori, rien ne l'assure. Les deux éléments sont contenus dans des expressions. On pourrait donc en principe envisager que les jugements soient des combinaisons d'idées particulières qui contiennent d'autres combinaisons d'idées. Et c'est bien là l'enjeu principal. Le point de Frege réside dans la distinction entre l'expression d'un élément objectif et le jugement subjectif, *i.e.* dans l'exclusion de ce dernier du terrain objectif du *sens*. Autrement dit, effectuer un jugement ne consiste en *aucun cas* à combiner une idée (exprimée par le trait vertical) avec un contenu jugeable. Sinon le jugement ne serait rien de plus qu'une combinaison d'idées (objective) particulière et la différence entre assertion et expression serait résorbée. Il nous faut comprendre jusqu'où, en 1879, Frege avait progressé dans la mise au point de cette distinction.

Au sein du §2 de la *Begriffsschrift*, il expliquait déjà :

> Posons par exemple que
>
> $$\vdash A$$
>
> signifie le jugement 'les pôles magnétiques s'attirent mutuellement' ; ainsi
>
> $$— A$$
>
> n'exprime pas ce jugement, mais doit simplement provoquer l'idée d'attraction mutuelle des pôles magnétiques opposés chez le lecteur, peut-être pour en tirer des conclusions et, à partir d'elles, mettre à l'épreuve la justesse de la pensée. Dans ce cas, nous *paraphrasons* par les mots : '*la circonstance que*', '*l'énoncé que*'. (Frege 1879b, p. 2 / p. 16)

14. Nous verrons bientôt que, dans la langue formulaire, la barre horizontale joue le rôle (inutile) du ciment entre les idées. Elle permet(soi-disant) de composer entre elles des idées, de les mettre en rapport. Pour l'instant, contentons-nous de rappeler que seule la barre verticale est liée au jugement.

Quel est l'intérêt de paraphraser ? Pourquoi répéter autrement ce qui est déjà exprimé en omettant le trait vertical ? Pour quelle raison ajouter les expressions 'la circonstance que' et 'l'énoncé que' en début de phrase, si le contenu résultant de cette addition est totalement identique à celui de la phrase initiale ? Frege procéda ainsi afin d'illustrer la distinction entre assertion et expression dans la langue naturelle. Nous avons vu que dans cette dernière la force assertive est fondue dans une partie quelconque de l'expression, ou dans le seul contexte de son énonciation. Une expression telle que 'Paris est en France' peut, selon le contexte, contenir ou non un jugement. Pour éclairer sur sa distinction, Frege cherchait des expressions qui, tout en exprimant un contenu jugeable, ne contenait *jamais* de jugement.

Il expliqua que si E contient un jugement [15], alors la combinaison d'idées contenue dans ce jugement est aussi contenue dans 'la circonstance que E' et 'l'énoncé que E', sans qu'aucun jugement ne soit impliqué. Il s'agit donc bien d'un procédé qui illustre dans les langues naturelles ce que le retranchement du trait vertical engendre dans la langue formulaire. Le deuxième exemple est problématique. L'énoncé désigne l'élément *linguistique*, 'l'énoncé que E' n'a pas de sens car la partie 'que E' ne se rapporte pas à E, mais à son contenu. La première formule est plus éclairante. Elle est couramment utilisée au sein d'expressions telles que 'la circonstance que E est réalisée' ou 'la circonstance que E est peu probable'. En 1879, Frege estimait que sa fonction consistait à exprimer un contenu jugeable sans l'asserter. En 1891, il reviendrait sur cette position, considérant que 'la circonstance que E' – ou 'la pensée que E' – signe le passage de l'expression au nom de la pensée exprimée par E [16]. Mais nous n'avons pas encore à nous préoccuper de cela car, en 1879, le *Sinn* et la *Bedeutung* étaient confondus. Ce qui importe ici, c'est de remarquer que Frege fut explicite sur un point : il existe des combinaisons d'idées qui ne sont *pas* des jugements, par exemple la circonstance que la Terre est une planète.

Il reste donc trois possibilités, dont la dernière est elle-même divisée en deux :

1. aucune combinaison d'idées n'est un jugement et aucun jugement n'est une combinaison d'idées ;
2. seuls certains jugements sont des combinaisons d'idées, et seules certaines combinaisons d'idées des jugements ;
3. tous les jugements sont des combinaisons d'idées ...
   (a) ... et une combinaison d'idées, jugement ou non, peut être composée de – avoir pour constituant(s) – un ou plusieurs jugements ;
   (b) ... et une combinaison d'idées, jugement ou non, n'est jamais composée de – n'a jamais pour constituant(s) – un ou plusieurs jugements.

Il est possible d'exprimer en toute neutralité une simple combinaison d'idées jugeable, et il est possible de renoncer à cette neutralité, de s'engager vis-à-vis de cette combinaison d'idées, c'est alors seulement que nous *jugeons*. Combiner des idées revient à les mettre en rapport ; juger revient à attribuer la vérité à ce rapport. Plus tard, Frege détaillerait ce point avec soin. En 1879, il l'énonça abruptement à une seule occasion, au sein du §2 (p. 2 / 15). Qu'entendait-il alors par là ? En quoi consiste l'attribution de la vérité à une combinaison d'idées ?

Affirmer la combinaison d'idées A, n'est-ce pas seulement exprimer que A est vrai, *i.e.* exprimer un nouveau rapport entre l'idée A et l'idée d'être vrai ? Dans l'hypothèse d'une réponse

15. Puisque nous transposons l'argument dans notre langue, considérons que E est une énoncé français contenant un jugement.

16. En 1910, Frege expliqua à Jourdain qu'il disait désormais 'pensée' à la place de 'circonstance' et 'proposition' (Jourdain 1912, p. 184). Mais cela ne suffisait pas à adapter la citation à ses vues de l'époque, car il ne tenait alors plus 'la pensée que E' pour une paraphrase de 'E'. À cette date, il estimait que la première expression nomme ce que la seconde exprime.

positive, cette nouvelle combinaison d'idées – la circonstance que A est vrai – ne peut-elle être à nouveau combinée avec d'autres idées ? En 1879, Frege ne se prononça pas explicitement sur ces questions, mais les indices qu'il fournit, et qui semblent à première vue témoigner d'une conciliation bien difficile entre une réponse positive à la première question et une réponse négative à la seconde, traduisent en définitive une réponse fermement négative à la première, sur laquelle il ne reviendra jamais.

Indéniablement, la morphologie [17] de la langue formulaire ne permet pas la combinaison d'un jugement avec d'autres idées parce que le trait vertical n'apparaît *jamais* plus d'une fois au sein d'une expression. Dans une expression bien formée, soit aucun trait vertical n'apparaît, alors la combinaison globale n'est pas un jugement et elle combine des idées qui, elles non plus, ne sont pas des jugements ; soit un *seul* trait vertical apparaît, alors le contenu de l'expression est un jugement, mais la combinaison d'idées, exprimée à droite du trait, n'est pas non plus un jugement et ne combine que des idées qui ne sont pas non plus des jugements. Il n'existe pas d'expressions au milieu desquelles un trait vertical apparaît. Si celui-ci est intégré, il est unique et placé à l'extrême-gauche. Ce point sera conservé dans l'idéographie, et exclut d'emblée la possibilité 3.(a) ainsi qu'une réponse positive à la seconde question : une combinaison d'idées n'admet *jamais* de jugement pour constituant propre.

La première question demeure : un jugement est-il une combinaison d'idées ? Le problème est plus délicat et recommande l'examen d'un passage problématique de l'ouvrage, dans lequel Frege entreprit de montrer que la distinction entre sujet et prédicat n'était pas une distinction *logique* mais seulement *grammaticale*. Il expliqua que les énoncés 'Les Grecs vainquirent les Perses à Platées' et 'Les Perses furent vaincus par les Grecs à Platées' ne présentent aucune différence aux yeux de la logique [18]. Il conclut qu'une langue idéale peut se contenter d'un seul et unique prédicat : 'est un fait' [*Tatsache*] (p. 4 / 17). Les énoncés ci-dessus seraient par exemple traduits, toujours sans modification de leur contenu logique, par : 'La victoire des Grecs sur les Perses à Platée est un fait'. Frege expliqua :

> *Notre idéographie est une telle langue, et le signe* $\vdash$ *est son prédicat commun à tous les jugements.* (p. 4 / 17).

Le parallèle établi entre 'furent vaincus par les Grecs à Platées' et 'est un fait' laisse supposer que le premier comme le second contient une idée ou une combinaison d'idées. Si tel était le cas, l'idée d'être un fait serait contenue dans la barre verticale de l'idéographie et un jugement serait une combinaison d'idées particulière. Juger consisterait à combiner l'idée d'être un fait avec une combinaison d'idées jugeable. Cependant deux objections déterminantes s'opposent à cette conclusion.

D'une part, dans la langue naturelle, les prédicats expriment des idées bien que leur statut de prédicat soit, selon Frege, exclusivement grammatical, *i.e. accidentel* aux yeux de la logique. Mais Frege clama sans relâche que l'usage du signe '$\vdash$' était *essentiel* à la logique. Il semble donc que le statut de 'est un fait' soit différent de celui des autres prédicats.

17. Nous employons les termes 'morphologie' et 'grammaire' dans des sens plus restreints que ceux qu'ils expriment en linguistique. Le premier y est très lié à certaines caractéristiques des langues naturelles absentes des langages artificiels, par exemple le rôle des suffixes et des préfixes. Le second y désigne l'étude générale des règles complexes et nombreuses qui régissent une langue. Or les langages artificiels furent justement introduits pour octroyer un caractère mathématique aux expressions (bien formées) *via* une caractérisation simple et rigoureuse de ces dernières. L'immense difficulté des langues naturelles, que l'histoire a lentement confectionnées, est donc évitée, et des disciplines comme la grammaire et la morphologie, entendu dans le sens de la linguistique, perdent leur intérêt. C'est pourquoi en logique contemporaine les deux termes – on parle aussi de 'grammaire formelle' – sont utilisés pour désigner simplement les règles de construction des expressions (bien formées) à partir des signes simples. Nous suivrons cet usage et les emploierons comme de stricts synonymes.

18. Nous reviendrons bientôt sur la différence entre structure logique et structure grammaticale.

D'autre part, si un jugement est une combinaison d'idées, pourquoi ne pas autoriser à le combiner avec d'autres idées, par exemple en écrivant la tautologie : 'Si la victoire des Grecs sur les Perses à Platée est un fait alors la victoire des Grecs sur les Perses à Platée est un fait' ? Pourquoi ne pas permettre d'intégrer plusieurs traits verdicaux au sein d'une seule et même expression ? La réponse est triviale. Si Frege interdit ce procédé, c'est précisément parce que, contrairement à ce que ce passage suggère, il ne tenait pas le jugement pour un rapport entre des idées. Une lecture moins superficielle permet d'aboutir à cette conclusion. Le paragraphe en jeu expose en son sein le prisme à travers lequel il doit être lu :

> Certes, si l'on veut, il est aussi possible de distinguer ici le sujet et le prédicat, mais alors le sujet contient tout le contenu, et le prédicat a pour seul but de le présenter comme jugement. (pp. 3-4 / p. 17)

La réfraction s'opère dans la formule 'pour seul but'. La fonction de ce prédicat n'est *pas* d'exprimer une idée, mais *seulement* de "présenter un contenu comme jugement". Un second extrait indique la même direction :

> Si l'on *retranche* le petit trait vertical qui se trouve à gauche du trait horizontal, cela a pour effet de transformer le jugement en *une simple combinaison d'idées*, à partir de laquelle celui qui l'écrit n'exprime pas s'il lui attribue la vérité ou non. (p. 2 / 15)

Juger, c'est attribuer ou non la vérité [19]. Le terme 'simple' [*blosse*] est ici déterminant. Un jugement n'est pas une simple combinaison d'idées. Il ne se *limite* pas à une telle combinaison, il contient autre chose que Frege nommerait bientôt la *force judicative* [*urteilende Kraft*] [20].

Juger que A ne consiste pas à combiner A avec l'idée d'être vrai. Le jugement possède un caractère irréductible aux idées. Cet aspect de ses conceptions – le point de Frege – était déjà en place en 1879. Il est manifeste lorsque Frege explique que le prédicat 'est un fait' a *pour seul but* de présenter le sujet comme jugement, et que le retrait du trait vertical transforme ce dernier en une *simple* combinaison d'idée. Plus important encore, il est révélé par la morphologie de la langue formulaire, spécifiquement par l'interdiction de multiplier les occurrences du trait vertical au sein d'une même expression. Si ce trait contenait une simple idée, rien n'aurait justifié une telle limitation.

Le choix 1. fut donc bel et bien celui de Frege dès 1879 : aucune combinaison d'idées n'est un jugement et aucun jugement n'est une combinaison d'idées. Cependant, il n'avait pas encore mesuré les conséquences de sa découverte. Il ne s'était pas encore interrogé profondément sur cette composante spécifique du jugement : la force judicative. Il n'avait pas encore questionné le statut de la *reconnaissance* de la vérité d'une combinaison d'idées. Cette négligence fut à la source de différentes erreurs, qu'il rectifierait peu à peu, et qu'il importe ici de présenter.

En parlant de l'*expression* d'un jugement, il plaçait ce dernier sur le même plan que les combinaisons d'idées, qui sont elles-aussi *exprimées*.

En parlant sans réserve du *contenu* du trait vertical, il semblait lui octroyer le même statut qu'aux autres signes de son langage, et le ramenait ici encore sur le terrain des idées.

En établissant un parallèle entre le trait vertical et le prédicat 'est un fait' de la langue naturelle, il se laissa bercer d'une illusion incompatible avec sa propre thèse. Ce parallèle est

19. Levons d'emblée une ambiguïté. 'Ou non' n'est pas ici synonyme de 'ne pas pas attribuer la vérité', dans le sens de 'suspendre son jugement'. Cela, c'est précisément ce qui est accompli lorsqu'une simple combinaison est exprimée : le locuteur n'attribue pas de vérité. Au contraire, juger consiste à attribuer la vérité *ou la fausseté*. Lorsqu'un locuteur exprime, sans s'engager, une simple combinaison d'idées, il n'attribue ni ne *conteste* la vérité de cette dernière, il ne se prononce pas à cet égard.

20. (Frege 1906b, p. 201 / 221)

correct concernant les rôles syntaxiques de ces élément, mais totalement inadapté du point de vue sémantique. La fonction du trait vertical consiste *exclusivement* à présenter comme jugement la combinaison d'idées contenue dans l'expression qui lui succède. *Ce n'est pas la fonction du prédicat 'est un fait' dans la langue naturelle.* À première vue, il ne semble pas absurde de considérer qu'un lien existe entre le jugement et ce prédicat. Après tout, ne sommes-nous pas *systématiquement* en train de juger lorsque nous disons que A est un fait ? La réponse est pourtant négative, et il est aisé de le constater. Dans la phrase 'la circonstance que A est un fait n'est pas un fait', 'A est un fait' *ne contient pas de jugement.* L'expression 'la circonstance que' le décharge de sa force assertive. Le problème réside précisément dans ce que la langue autorise et que l'idéographie interdit : placer l'expression dans laquelle apparaît le prédicat au sein d'expressions plus complexes. Il est alors possible de le priver de sa force assertive, et ainsi il se distingue clairement de la barre verticale.

Nous pouvons traduire dans le lexique de 1879 ce que Frege dirait lui-même plus tard : le prédicat 'est un fait' semble rendre possible l'impossible, notamment en faisant apparaître ce qui correspond à la force assertive comme étant une idée. Ce qui est exprimé par 'que A est un fait', c'est-à-dire la circonstance que A est un fait, n'est *pas* un jugement. Il n'y a là aucun engagement. Il y a, et c'est le point, une simple combinaison d'idées. La circonstance que A est un fait est une combinaison d'idées. Ceci vaut pour l'expression 'est un fait' au même titre que pour *n'importe quelle autre* expression de la langue naturelle, car celles-ci expriment des idées et car le jugement est *irréductible* à un quelconque rapport entre des idées ou combinaison d'idées. La force assertive attachée à l'indicatif de l'énoncé 'la Terre est une planète', attachée aussi à l'expression 'être un fait' dans 'la circonstance que la Terre est une planète est un fait", n'est *pas* ce qu'exprime le verbe à l'indicatif et n'est *pas* l'idée d'être un fait. Cette force possède un rôle unique et irréductible. Dans les langues naturelles, sa présence dépend du contexte. Ainsi, elle s'*agrège* à certaines idées dans certains contextes et non dans d'autres, mais elle ne se *confond* pas avec ces idées. Elle n'est elle-même ni une idée ni une partie d'idée. En toute rigueur, il est donc essentiel de l'en détacher une fois pour toutes, et c'est ce que fit Frege *via* le trait vertical. À lui seul correspond la force assertive, aux autres signes ne correspondent que des idées.

En choisissant pour éclairer le lecteur le prédicat de la langue naturelle qui se "rapprochait" le plus de son trait, Frege dissimula l'essentiel. Il commit la même erreur que l'enseignant qui utilise *sans avertissement* l'exemple d'une feuille de papier pour guider un étudiant vers la notion de plan. Le bond qui conduit du prédicat 'être un fait' au jugement est *exactement* le même que celui qui conduit du prédicat 'être rouge' au jugement : c'est le passage d'une combinaison d'idées à la reconnaissance de sa vérité. Le bon qui conduit d'une feuille de papier au plan est exactement le même que celui qui conduit d'une sphère au plan : c'est le passage de trois à deux dimensions. L'illusion qui consiste à identifier 'est un fait' au trait vertical, ou à assimiler une feuille de papier au plan, dissimule le fossé plutôt qu'il ne permet de le franchir. Il n'existe *rien* dans les langues naturelles qui corresponde au trait vertical, c'est justement pour cette raison que, comme le critiquera inlassablement Frege, les logiciens ont si souvent confondu le jugement et le contenu jugeable.

Enfin, la dernière erreur survint lors de l'introduction de son signe pour l'implication :

> Si A et B signifient des contenus jugeables, il y a alors les quatre possibilités suivantes :
>
> (1) A est affirmé et B est affirmé ;
>
> (2) A est affirmé et B est nié ;
>
> (3) A est nié et B est affirmé ;
>
> (4) A est nié et B est nié.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top A \\ \llcorner B \end{array}$$

> signifie ainsi le jugement selon lequel *la troisième de ces possibilités n'a pas lieu, mais l'une des trois autres a lieu.* (p. 5 / 19)

Représentons dans la langue formulaire – à l'exception du symbole contemporain de conjonction – le jugement que la première possibilité a lieu, *i.e.* est un fait :

$$\text{‘}A \text{ est affirmé et } B \text{ est nié’ se traduit ‘}\vdash (\vdash A \wedge \vdash B)\text{’}$$

Frege transgressa son propre principe en intégrant plusieurs traits verticaux au sein d'un même énoncé. Bien sûr, ceci eut lieu dans le langage d'exposition et non dans la langue formulaire. Mais le problème est le même. Frege escomptait présenter son signe pour l'implication. Or, d'après sa propre distinction entre jugement et contenu jugeable, le sens de ‘$\begin{array}{l} \top B \\ \llcorner A \end{array}$’ est indépendant de tout jugement porté sur A et B, il est indépendant du fait que A et/ou B soient affirmés. Le signe n'exprime aucun rapport entre des jugements ou des affirmations, mais entre des contenus jugeables.

Dans ses premiers écrits, Frege exploitait avec parcimonie les notions de vérité et de fausseté. Bien qu'il identifiât dès la *Begriffsschrift* le jugement et la reconnaissance de la vérité, il se garda d'employer des tournures telles que ‘A est vrai’, leur préférant ‘A est un fait’ ou ‘A a lieu’ [21]. Mais ces dernières permettaient facilement d'éviter l'erreur commise dans ce paragraphe. Voici trois formulations correctes qu'il aurait pu donner à la place de (1) :

- A et B ;
- A est un fait et B est un fait ;
- A a lieu et B a lieu.

Pourtant, il choisit les verbes inadéquats ‘affirmer’ et ‘nier’ [22]. Il s'agit indéniablement d'une faute importante qui atteste, s'il en était encore besoin, que Frege n'avait pas pris la mesure de sa distinction entre jugement et contenu jugeable. Elle n'autorise en aucun cas à conclure que cette distinction n'était pas encore établie – comme nous l'avons montré plus haut – ni, d'ailleurs, que Frege ne tenait pas encore l'implication pour un rapport entre contenus jugeables. Il affirma expressément en 1881 que "le rapport hypothétique n'[était] pas, selon [lui], un rapport entre jugements mais entre contenus jugeables" (1881, p. 11 / 19), ce qui ne l'empêcha pas d'utiliser à nouveau le lexique de l'affirmation dans ce texte (pp. 45-46 / 52-53) et un an plus tard (1882, p. 55 / 63) [23].

---

21. La synonymie, en germe dès 1879, entre ‘A est vrai’ et ‘A est un fait’ survivrait à toutes les évolutions de ses thèses. On la retrouve dans le texte tardif des *Recherches logiques* où, après avoir expliqué que le prédicat ‘est vrai’ convenait aux pensées, Frege écrivit : ‘Un fait est une pensée qui est vraie’ (Frege 1918, 1923, p. 359 / 191). Attention, il est seulement question ici du sens de prédicats, et non du caractère particulier de la vérité, lui-même lié au statut du jugement. Nous examinerons ces questions durant notre troisième chapitre.

22. C'est ce qui motiva la conclusion de Heck et May (2017, pp. 12-13) présentée ci-dessus.

23. Sluga (2002) tire une conclusion différente. Il perçoit à ce sujet une nette évolution entre le Frege de 1879 et celui de 1881-1882 :

> [En 1881-1882, Frege] saisit l'opportunité de reformuler ses hypothèses et concepts logiques fondamentaux. Il le fit en partie à travers son ancien langage de l'affirmation et de la négation. [...] Mais dans la caractérisation générale du conditionnel lui-même, il emprunta une route totalement nouvelle. La première indication de cela est qu'il définit alors le *connecteur* conditionnel et non, comme il le faisait plus tôt, le jugement conditionnel. (p. 81)

1.3.3 Affinement de la notion

En 1879, Frege octroyait déjà un statut particulier au jugement en l'écartant des combinaisons d'idées. Pourtant, il l'identifiait à certains sens d'éléments linguistiques, *i.e.* à ce que ces derniers *expriment*. Ces erreurs révèlent que, tout en appuyant sa distinction entre jugement et contenu jugeable, il ne s'était pas directement questionné sur le statut du jugement, se limitant à reconnaître qu'il était différent de celui des idées. À travers les indices éparpillés dans ses quelques écrits de l'époque, nous pouvons raisonnablement faire remonter ce questionnement à la période 1882-1884.

Nous savons qu'il ne précéda pas 1882. Résumons les indices qui vont dans ce sens. Dans une réponse non publiée (Frege 1881) aux différentes recensions de sa *Begriffsschrift*, spécialement

---

Sluga estime que Frege a développé, en 1879, une logique du *jugement*, avant de revenir progressivement sur cette vision. Il base son analyse sur le lexique de l'affirmation et de la négation. Frege aurait d'abord conçu ses signes primitifs, notamment pour l'implication, comme exprimant des rapports entre des *jugements*. Et, en effet, comme nous l'avons traduit plus haut en dévoilant de multiples traits verticaux dans une même expression, une lecture littérale de son introduction du signe pour l'implication octroie à ce dernier, en guise de contenu, une relation entre des jugements et non entre des contenus jugeables. Cependant, cette interprétation rentre en contradiction frontale et immédiate avec le rôle octroyé au trait vertical. Ce dernier ne laisse aucun doute sur le fait que Frege distinguait le jugement du contenu jugeable (quelle que soit la nature de cette distinction). S'il avait véritablement voulu intégrer une implication entre des *jugements*, il lui aurait été extrêmement simple de la représenter en accord avec son usage du trait vertical :

$$\text{‘}\begin{array}{l}\vdash\\ \vdash\end{array}\text{’}$$

Or c'est précisément ce qu'il ne fit *pas*. Si nous suivons Sluga jusqu'au bout, les deux traits verticaux sur la droite seraient en vérité *intégrés* au signe global, car $\begin{array}{l}\vdash B\\ \quad A\end{array}$ signifierait le jugement selon lequel la circonstance que A est affirmé (donc jugé) et B est nié (donc aussi jugé) n'a pas lieu. Cette interprétation présente un premier problème que nous venons de dire : pourquoi ne pas représenter ces jugements grâce au signe dédié à cette tâche – le trait vertical – et écrire l'implication telle que nous l'avons fait ci-dessus ? La seconde objection est déterminante. Frege désirait construire un système de déduction pour les mathématiques, un appareil permettant de *démontrer* des théorèmes. Une logique des jugements n'aurait en aucun cas servi cet objectif. Les choses qu'il écrivit en lieu et place de 'A' et 'B' dans ses démonstrations sont du type de '$\forall x, x = x$' – en utilisant pour l'heure le symbolisme contemporain. Le fait que le contenu de ce dernier énoncé soit *affirmé* n'a rien à voir avec le fait qu'il soit *démontré*. Et Frege ne pouvait ignorer ce point, c'est ce qui l'exhorta à inventer un signe pour le jugement. La conjecture de Sluga est très coûteuse, elle prête à Frege une erreur considérable qui, répétons-le, est d'autant moins probable que ses explications lors de l'introduction du trait vertical sont justement destinées à démarquer les deux choses.

Pourquoi Frege retomba-t-il, en présentant l'implication, dans le genre de confusion qu'il voulait éviter ? Nous ne pouvons émettre que des hypothèses. La plus probable – la plus générale – est que les difficultés rencontrées durant la rédaction de cet ouvrage révolutionnaire (dérivations des théorèmes, formalisation de la quantification, etc.) ne lui ont pas laissé le temps nécessaire pour méditer davantage à sa distinction entre jugement et contenu jugeable, et pour éviter toutes les imperfections de ce type. L'interprétation de Sluga dessine un Frege s'engageant férocement dans une certaine direction – *via* l'introduction du trait vertical et l'annonce d'un système de *déduction* – avant de faire brutalement volte-face lorsqu'il s'est agi de présenter son signe pour l'implication. Elle se base sur une lecture littérale du paragraphe concernant l'implication, lecture qu'absolument rien d'autre n'appuie. Notre idée, selon laquelle Frege a simplement trébuché alors qu'il gravissait un sentier difficile et pentu, rend justice à tout son texte à l'exception de ce passage, celle de Sluga fait l'inverse. Le fait que Frege continua d'utiliser le lexique de l'affirmation en 1881 alors qu'il présenta expressément l'implication comme un rapport entre contenus jugeables montrent bien que le premier point était une étourderie et non, comme le pense Sluga, la marque d'une opposition au second.

En 1879 comme en 1881-1882, Frege envisageait des rapports entre contenus jugeables, et non entre jugements. Il entreprit dans ce but de dédier un symbole au jugement (ou à l'assertion, la différence n'était pas encore claire pour lui), afin de maintenir le reste de l'expression au niveau des contenus jugeables. Il savait déjà à ce moment que juger et combiner des idées sont deux choses différentes ; c'est ce qui motiva son geste. Néanmoins, il n'avait pas encore réfléchi en détail au jugement – il avait tant fait, et en si peu de temps – et se rendit ainsi coupable de certaines formulations incorrectes. Il les corrigerait bientôt, lorsqu'il se pencherait proprement sur la nature du jugement. Nous daterons dans un instant cette étape.

à celle de Schröder (1880), Frege utilisait encore la tournure 'exprimer un jugement' (p. 17 / 24) et le lexique de l'affirmation (pp. 45-46 / 52-53). Dans une autre réponse à ses détracteurs, plus courte, non publiée (Frege 1882a), il employa à nouveau les termes 'affirmer' et 'nier' pour caractériser l'implication (p. 55 / 63).

En revanche, c'est bel et bien avant 1884 que Frege se posa la question suivante : si le jugement ne consiste pas en une combinaison d'idées, qu'est-il exactement ? Car la réponse était déjà visible dans les *Grundlagen* lorsqu'il évoqua "l'acte de juger" (Frege 1884, p. 3 / 127). Elle fut développée dans un autre texte des *Écrits posthumes* que les éditeurs de cet ouvrage situent entre 1879 et 1891, mais que nos précédentes considérations permettent de repousser au moins à 1882 :

> En reconnaissant [*anerkennen*] intérieurement [*innerlich*] *quelque chose comme vrai*, nous jugeons et, en donnant une expression à [*aüssern*] ce jugement, nous faisons une assertion [*behaupten*]. (Frege 1879-1891, p. 2 / 10) [24]

Voici le point central : juger – reconnaître la vérité – est un *acte accompli* par un individu. En cela, il *dépend* de l'individu. Au contraire, au yeux de Frege : le sens véhiculé par les expressions est *objectif* et *indépendant*. Bien sûr, en langue naturelle, une même expression – par exemple 'je suis un homme' – peut exprimer des sens différents selon l'individu qui l'énonce. Néanmoins, le sens n'est produit ni par l'homme ni par l'expression, il existe tout à fait indépendamment de ceux-ci. Au contraire, en tant qu'acte, le jugement est lié d'une toute autre manière à celui qui l'effectue. Il n'en dépend pas seulement en cela que différents jugements peuvent être contenus dans une même expression selon l'individu qui l'énonce, il en dépend en cela qu'il n'existe que lorsque cet individu le réalise, il est *produit* par lui. Le jugement n'est donc pas une combinaison d'idées, il ne possède pas le caractère indépendant de ces dernières [25]. Il s'agit d'un acte *intérieur*. Afin de mieux souligner ce caractère, Frege favorisera rapidement le verbe 'reconnaître' [*anerkennen*] à 'attribuer' [*zuerkennen*] utilisé en 1879 (p. 2 / 15). Tout aussi rapidement, il substituera le terme 'asserter' [*behaupten*] au mot 'affirmer' [*bejahen*] (p. 5 / 19). En "donnant une expression" à un jugement, nous faisons une assertion. Il semble donc que l'assertion ne soit ni le jugement lui-même, ni le *contenu* du trait vertical, comme le suggérait un extrait de la *Begriffsschrift*, ni non plus l'expression du jugement, mais l'*acte* qui consiste à en "donner une expression".

Les chamboulements de 1891 modifieront les thèses sémantiques de Frege. Avant cette date, ce qui est jugé vrai ou faux n'est autre que le contenu jugeable. Après cette date, il s'agit de la *pensée*. Néanmoins, aussi fondamentale que soit ce bouleversement, il n'eut aucun impact sur notre présente affaire. C'est pourquoi nous nous apprêtons à utiliser librement des citations qui

24. Nous modifions ici légèrement la traduction initiale pour que les termes '*aussern*' à '*ausdrücken*' ne soient pas traduits par le même verbe 'exprimer'. Cela a son importance.

25. Nous verrons bientôt que dans la *Begriffsschrift*, Frege fut coupable de certaines incohérences vis-à-vis de sa conception du caractère objectif du sens des énoncés. À l'occasion d'un article publié en 1912 sur les travaux de Frege, Philip Jourdain introduisit une note qu'il tenait de Frege lui-même, et dans laquelle ce dernier revenait sur son ancienne notion d'idée :

> À la place de ce mot je dis simplement 'pensée'. Le mot 'idée' [*Vorstellung*] est utilisée parfois dans un sens psychologique, parfois dans un sens logique. Puisque cela génère de l'obscurité, j'estime préférable de ne pas l'utiliser du tout en logique. (Jourdain 1912, p. 202)

Déjà en 1879, Frege ne voulait teinter le terme 'idée' d'aucune dimension subjective. Mais les explications qu'il fournit sont défectueuses. Le fait qu'il existe une composante objective au contenu d'un énoncé, et que celle-ci soit la seule pertinente d'un point de vue logique, était – nous le verrons – *maladroitement* annoncé dans ce texte. À ce sujet aussi, il ajusta progressivement ses différents formulations, nous le verrons en détail lorsque nous examinerons la distinction entre expression et contenu.

incorporent l'expression 'contenu jugeable' et d'autres qui intègrent le terme 'pensée'.

Frege procéda à la distinction essentielle entre les causes et les justifications d'un jugement :

> Les causes qui ne font que nous porter à juger le font selon des lois psychologiques ; elles peuvent conduire aussi bien à l'erreur qu'à la vérité (Frege 1879-1891, p. 2 / 10)

L'acte de jugement est lié d'une manière particulière à la vérité : il peut être légitime, *justifié*. Il n'y a là rien de subjectif, rien qui dépende de l'acteur. En revanche, ce dernier peut parfois se tromper, et diverses causes peuvent être à la source de l'erreur. Selon Frege, les causes qui induisent tel jugement chez tel individu sont *indépendantes du fait que ce jugement soit ou non justifié*. Elles sont *psychologiques*, ce qui laisse entendre que l'acte de jugement possède aussi cette nature. Frege l'affirmerait sans détour :

> Le jugement [est un] acte de celui qui connaît et doi[t] être assigné à la psychologie. (Frege 1919, p. 273 / pp. 299-300)

Si une expression n'incorpore pas la barre verticale, elle possède un contenu objectif : l'idée ou la combinaison d'idées qu'elle exprime. L'usage que Frege fait du mot 'expression' est, à ce titre, conforme à son sens originel. Un énoncé peut être l'*expression* sensible d'un élément non sensible : une combinaison d'idées. En revanche, un individu n'est pas l'*expression* d'une combinaison d'idées. À proprement parler, il est donc incorrect de dire qu'il l'*exprime*. L'homme se contente de livrer le sens, objectif et indépendant, en produisant l'énoncé. Rigoureusement, donc, 'Michel exprime A' n'est qu'un raccourci pour : 'Michel prononce (ou écrit) 'A' qui, lui, exprime A'. En revanche, juger – reconnaître la vérité d'une combinaison d'idées – est un acte perpétré par un individu ; il *dépend* de ce dernier. À proprement parler, l'assertion n'est donc pas l'*expression* d'un élément *indépendant*, mais le témoignage d'un acte *dépendant* de l'individu, au même titre, par exemple, que des yeux qui se baissent peuvent *témoigner* d'un renoncement. Asserter, c'est donner un témoignage sensible de l'acte de jugement. C'est donc (directement cette fois) l'individu qui asserte, et non l'assertion. Par ce témoignage, un individu *manifeste* [*kundgeben*] son jugement [26] :

> Lorsque nous reconnaissons intérieurement une pensée comme vraie, alors nous jugeons ; lorsque nous manifestons [*kundgeben*] cette reconnaissance, alors nous assertons. (Frege 1897a, p. 150 / 163)

> Nous manifestons [*geben wir kund*] la reconnaissance d'une vérité en prononçant une phrase avec une force assertive. (Frege 1899-1906, p. 183 / 200)

Ainsi, un individu (indirectement) ou une expression (directement) exprime, un homme (directement) asserte et, par ce biais, *manifeste* un jugement. Le jugement et l'assertion sont deux actes perpétrés par un individu, le premier intérieurement, le second publiquement. Le premier est le témoignage physique, extérieur, d'un acte *psychologique*, il le rend visible, le communique, comme l'acte de baisser les yeux témoigne parfois de l'acte psychologique de renoncement. En

26. Frege emploie le mot allemand '*kundgeben*' qui, contrairement au terme français 'manifester', incorpore l'idée d'un destinataire. De plus, ce dernier verbe est soumis au même fonctionnement que 'exprimer'. Ce qui manifeste, ce qui reflète, ce qui indique, ce qui témoigne du jugement, ce n'est pas l'homme, mais la manifestation elle-même. Or nous venons d'expliquer que c'est bien l'individu qui *asserte*. L'expression 'faire part' semble donc convenir davantage. Néanmoins, aucun nom n'en dérive qui correspondrait à la traduction de '*Kundgebung*' ; tandis que 'manifestation' permet de conserver la même proximité en français qui existe en allemand. En dépit des premières remarques, auxquelles est ainsi conféré un statut d'avertissement, nous utiliserons donc le verbe 'manifester'.

revanche, le lien qui unit une expression à son sens est d'une toute autre nature, car ni l'un ni l'autre ne sont des actes.

Dans le premier extrait cité au sein de cette section, Frege usa du verbe '*aussern*' en lieu et place de '*kundgeben*'. Cela arriva à diverses reprises [27]. Comme '*ausdrücken*', il peut être traduit par 'exprimer', mais cette fois dans le sens de 'formuler', de 'dire'. Il est souvent joint au pronom réflexif '*sich*', l'ensemble se traduisant par 's'exprimer', 'se manifester'. Il convient donc davantage à l'idée de l'acte d'énonciation ou d'écriture qu''*ausdrücken*'. En accord avec la version française des textes posthumes, nous le traduirons par 'donner l'expression'.

Revenons quelques instants sur la notion de force assertive. Elle accompagne le passage de la combinaison d'idées à son assertion, c'est-à-dire à la manifestation de la reconnaissance de sa vérité :

> Nous manifestons la reconnaissance de ce qu'une pensée est vraie, ou, comme nous pouvons encore dire, la reconnaissance d'une vérité, en prononçant une phrase avec une force assertive. (Frege 1899-1906, p. 183 / 200)

Parce qu'aucun signe ne correspond au trait vertical dans les langues naturelles, l'énonciation d'une seule et même expression peut, selon le contexte, parfois se cantonner à communiquer une combinaison d'idées, parfois manifester la reconnaissance de la vérité de cette combinaison. La *façon* dont elle est énoncée, c'est-à-dire le contexte, le ton, tout ce qui va permettre à l'auditeur de *ressentir* la présence ou l'absence de cette force, est l'unique moyen de produire cette dernière. Il s'agit d'un trait particulier des langues naturelles coupable d'engendrer des quiproquos et des confusions, notamment l'identification entre combinaisons d'idées et jugements. Ce travers, Frege entendait y remédier par l'introduction de son trait vertical, qui permet de poser le contenu comme vrai [28]. Il permet d'accomplir un *acte*, non pas celui – intérieur – de reconnaître le contenu comme vrai, mais celui – publique – de témoigner de cette reconnaissance. Autrement dit, poser comme vrai, c'est *montrer* qu'on reconnaît comme vrai, c'est-à-dire asserter.

Nous sommes à présent en mesure de comprendre pourquoi Frege cessa d'utiliser les verbes 'exprimer' [*ausdrucken*] et 'signifier' [*bedeutung*] dans le cadre de l'étude du jugement. Voici un autre extrait d'une note adressée à Jourdain :

> D'un jugement, nous ne pouvons correctement dire qu'il est signifié ni qu'il est exprimé. Nous avons certainement une pensée dans un jugement, et celle-ci peut être exprimée. Mais nous avons davantage, nous avons la reconnaissance de la vérité de cette pensée. (Jourdain 1912, p. 202)

Parce que le jugement n'est pas un élément indépendant, nous ne pouvons dire qu'un constituant syntaxique qui incorpore le trait vertical *exprime* un jugement. Si par 'expression', nous entendons 'qui exprime', alors un tel constituant syntaxique n'est *pas* une expression. Cependant, ce dernier terme admet une seconde acception, détournée mais très présente en logique : une expression d'une langue est un élément linguistique formé selon des règles morphologiques

27. Par exemple (Frege 1906b, p. 201 / 221 ; Frege 1906c, p. 214/ 236).
28. Frege l'expliqua dès 1882 :

> Pour poser [*hinzustellen*] maintenant un contenu comme vrai, je fais usage d'un court trait vertical (Frege 1882a, p. 58 / 65)

Il avait dit en 1879 qu'il servait à exprimer que le locuteur attribuait la vérité au contenu jugeable. Le terme 'poser' dénote davantage un acte qu'une expression. Malgré ce progrès, comme nous l'avons vu plus haut, Frege n'avait pas encore totalement éclairci les choses à cette période. Il tentait encore de préciser ses différentes intuitions.

précises. En ce sens, '$\vdash A$' *est* une expression, et Frege la qualifiera ainsi. Néanmoins, parce qu'elle n'est pas attachée au jugement comme 'A' est attaché au sens, il ne dira plus qu'elle *exprime* $\vdash A$.

Frege confèrera deux noms particuliers aux constituants syntaxiques qui incorporent le trait vertical. Dans l'idéographie, il les nommera purement et simplement des 'énoncés' [*Satz*] (les représentations [*Darstellung*] des jugements) ; ailleurs, il les appellera des 'énoncés assertifs' [*Behauptungssatz*] :

> Dans l'idéographie, la représentation [*Darstellung*] d'un jugements au moyen du symbole '$\vdash$', je l'appelle un *énoncé de l'idéographie* [*Begriffsschriftsatz*] ou, en bref, un *énoncé* [*Satz*]. (Frege 1893, p. 9)

> Dans les énoncés assertifs [*Behauptungssatz*], deux éléments sont, d'ordinaire, liés de la manière la plus intime : la pensée exprimée, et l'assertion de sa vérité. Et de là vient que, la plupart du temps, ces deux choses ne sont pas clairement distingués. (Frege 1897a, p. 150 / 163)

Ceci confirme notre analyse : un énoncé assertif n'exprime pas un jugement. L'écriture ou l'énonciation d'un tel énoncé constitue l'affirmation, *i.e.* l'acte extérieur qui témoigne de l'acte psychologique. Notons que l'affirmation implique deux éléments. Pour manifester la reconnaissance de la vérité d'une combinaisons d'idées A, il faut d'une part manifester la reconnaissance de la vérité – ce qui est accompli par l'écriture du trait vertical – d'autre part communiquer A – ce qui est accompli par l'écriture de l'expression qui succède au trait vertical et qui *exprime* A. Ainsi, l'énoncé assertif – qui permet de manifester le jugement – incorpore le trait vertical *et* l'expression dont le sens est la combinaison d'idées reconnue comme vrai. Pour cette raison, Frege dit que l'expression contient à la fois l'assertion et la pensée – le contenu jugeable, avant 1891. Nous avons déjà décelé une polysémie du terme 'contenu', en ceci qu'il se rapporte à deux contenants différents : parfois à l'expression, parfois au jugement. À partir de 1884, Frege ne dit plus qu'un énoncé assertif contient un jugement, mais qu'il *contient* à la fois l'assertion et la pensée – le contenu jugeable –, et qu'un énoncé non assertif *contient* la pensée – le contenu jugeable – :

- l'énoncé non assertif 'A' contient A ;
- le jugement $\vdash A$ contient A ;
- l'énoncé assertif '$\vdash A$' contient à la fois A et l'assertion.

À travers cette dernière formulation, Frege escomptait articuler proprement les choses. Il désirait lier le rôle de l'affirmation au trait vertical, et celui de l'expression de A à 'A'. *Il est crucial de noter que cette présentation est particulièrement trompeuse.* Rigoureusement, l'énoncé ne *contient* pas l'*acte* d'assertion. *Ce dernier est seulement réalisé par l'écriture de l'énoncé.* Il est vrai qu'une assertion est toujours assertion *de* quelque chose ; et que, pour effectuer cette assertion, il est nécessaire d'écrire à la fois ce qui porte l'assertion – le trait vertical – et l'expression de ce quelque chose. Cependant l'assertion n'est ni le trait vertical seul, ni l'expression complète ; elle est l'acte d'énonciation ou d'écriture de cette expression complète. Les rapports des énoncés assertif et non assertif à leurs contenus respectifs sont tout à fait différents. L'énoncé non assertif exprime la pensée, tandis que, à proprement parler, l'énoncé assertif n'exprime ni l'assertion ni la pensée. Son écriture et son énonciation constituent l'assertion – manifestent la reconnaissance de la vérité – du sens exprimé par l'expression *à droite* du trait vertical, et non par l'expression entière. À partir de 1891, Frege renoncerait à dire qu'un énoncé assertif exprime une assertion, mais persisterait à dire qu'il exprime une pensée.

La description de l'évolution de son lexique nous semblait essentiel. Il importe en effet d'être très au clair sur les différentes acceptions du terme 'contenu' afin de ne pas se méprendre sur la nature des actes de jugement et d'assertion. Procédons à une dernière remarque dans ce sens. Frege évoque la force *judicative* [*urteilende Kraft*] (1906b, p. 201 / 221) sans expliquer proprement en quoi elle consiste. Pour l'heure, disons seulement qu'à l'instar de la force assertive qui assure le passage de l'expression d'une combinaison d'idées jugeable à son assertion, la force judicative assure le passage d'une combinaison d'idées jugeable à la reconnaissance de sa vérité, *i.e.* au jugement.

1.3.4 Synthèse

Dès 1879, Frege entendait distinguer le jugement des contenus jugeables. Un examen approfondi de la notion de jugement fut nécessaire au perfectionnement de son vocabulaire. Le fait que le jugement est un *acte* est déjà expliqué dans les *Grundlagen*, et la caractérisation définitive du jugement comme reconnaissance de la vérité – et de l'assertion comme manifestation de cette reconnaissance – apparaît dans (Frege 1879-1891). Le tableau ci-dessous est valable pour *toutes* les époques postérieures à la rédaction de ce texte (que nous savons situé entre 1882 et 1891 – avant la distinction entre sens et référence –, aucun indice ne permet malheureusement une localisation plus précise) :

Le jugement $\vdash A$	est un acte psychologique	accompli par un sujet :
la reconnaissance de la vérité de A		
Asserter A	est un acte publique	accompli par un sujet : (*via* l'écriture de l'expression '$\vdash A$')
la manifestation du jugement $\vdash A$ **(de la reconnaissance de la vérité de A)**		

Incontestablement, il y aurait beaucoup à dire sur la notion de jugement, surtout sur les liens qui l'unissent à celle de vérité. Mais le prélude indispensable à la reconstruction de l'idéographie se limite à l'introduction des importantes distinctions fregéennes qui se trouvent reflétées dans son symbolisme. C'est désormais chose faite concernant la différence entre un jugement et son contenu. Bien entendu, Frege mit un certain temps à fixer le lexique le plus approprié à cette distinction, ce qui engendra l'abandon de certains termes au profit d'autres. À dire vrai, il n'y parvint jamais totalement, échouant par exemple à se débarrasser d'un usage ambigu du mot 'contenu'. Nous avons montré qu'il était incorrect d'imputer toutes les évolutions et faiblesses terminologiques à des modifications ou des carences touchant à sa conception du jugement, alors qu'elles sont simplement les stigmates inévitables de l'introduction d'une notion neuve à l'aide de mots anciens. Il est clair que Frege n'avait pas aperçu immédiatement l'ensemble des conséquences induites par sa distinction entre le jugement et ce qui est jugé, mais celle-ci fut présente dès le début et perdura jusqu'au bout. Le *point de Frege* émergea en 1879 à travers le fossé creusé entre les combinaisons d'idées et l'attribution de la vérité à ces dernières. Frege affina son analyse et statua clairement, par la suite, sur les natures respectivement psychologique et publique des actes

de jugement et d'assertion, et sur le caractère objectif du sens des expressions. Il y parvint avant le tsunami de 1891, et ce dernier laissa indemne toute cette affaire.

Ou plutôt, ce tsunami ne modifia rien de ce qui fut dit dans cette section, mais permit d'en *préciser* les divers aspects. Dans "Sens et référence", Frege expliqua que le jugement constituait le passage d'un sens à une référence [29]. Or nous n'avons rien dit qui permette d'éclairer une telle affirmation. Finalement, nous n'avons pas questionné le rapport du jugement à la notion de vérité, le lien particulier qui intervient entre un acte subjectif et un élément objectif. Nous n'avons pas, en définitive, éclairci l'acte de reconnaissance de la vérité, que tient une place privilégiée au cœur de la conception fregéenne de la logique, comme le signale le passage suivant :

> Ce qui contient la plus claire indication de la nature de la logique, c'est bien la force assertive avec laquelle une phrase est prononcée. (Frege 1915a, p. 272 / 298)

Dès l'introduction, nous avons soutenu que les conceptions de Frege allaient sur deux jambes : le jugement et la sémantique. Nous avons prévenu que nous n'allions pas offrir un examen approfondi du premier aspect, nous limitant aux explications essentielles à la poursuite de notre objectif : l'éclaircissement de la première partie des *Grundgesetze*. Il reste encore à ajouter quelques commentaires importants, qui figureront au sein de notre troisième chapitre [30]. Mais, globalement, l'essentiel a été dit. Il était indispensable d'introduire la distinction entre jugement et contenu, afin de pouvoir parler la langue de Frege sans risquer des confusions dont, malgré quelques souplesses de langage, il ne fut pas lui-même responsable. Son lexique varia progressivement, mais seulement pour donner corps à une conception qui, elle, resta figée : celle d'un rapport entre un jugement et son contenu. Il nous fallait poser cette distinction dans son environnement terminologique, en tentant de fournir quelques intuitions centrales à sa compréhension. Cette tâche suffira à introduire proprement les éléments syntaxiques de l'idéographie, à leur assigner le rôle adéquat, et à discuter les passages problématiques des *Grundgesetze*. Les mots sont donc en ordre de bataille pour nous aider à mener ces combats. Il est néanmoins incontestable que la notion de jugement n'en est pas clarifiée pour autant. Il est par ailleurs certain que cette notion est essentielle aux thèses de Frege, lequel peina parfois à mesurer les effets de ses conclusions à son sujet. Néanmoins, ces questions ne sont pas les nôtres, et notre recherche en restera obstinément éloignée [31]. En revanche, celle-ci nous conduira au cœur du deuxième aspect fondamental de la pensée fregéenne, qui repose sur la distinction intervenant entre une expression et son *sens*, et auquel il est temps de nous consacrer.

1.4 Expressions et contenus : un premier mouvement entre 1880 et 1882

1.4.1 Introduction

Le jugement était exclu de la sphère des idées dès 1879. Par la suite, la distinction se précisa entre l'acte psychologique de reconnaissance de la vérité – le jugement – et l'élément objectif jugé.

29. (Frege 1892b, p. 162 / 126)

30. précisément en section 3.2.3.6.

31. Il nous faut ici confesser que nous sommes les premiers à le déplorer, car ces questions nous semblent aussi fascinantes que celles auxquelles nous allons nous consacrer. Notre ambition initiale consistait à développer une interprétation *complète* de la conception fregéenne de la logique, incluant les deux problèmes du jugement et de la sémantique. Cette entreprise s'est rapidement révélée trop ambitieuse pour un travail de thèse. Puisque nous tenions à nous concentrer sur l'ouvrage central de la carrière de Frege – les *Grundgesetze* –, nous avons choisi d'approfondir le problème qui y brûle le plus ardemment : celui de la sémantique. Mais nous ne désespérons pas de nous attaquer plus tard (et ailleurs) au jugement, en exploitant autrement le travail que nous avons réalisé ici.

Une autre activité, elle aussi psychologique, consiste à *saisir* cet élément objectif sans pour autant le reconnaître comme vrai ou faux. Voyons, au crépuscule de sa vie, comment Frege présentait les choses :

> Sans vouloir donner une définition, j'appelle pensée ce dont on peut se demander s'il est vrai ou faux. [...] Je dirai : la pensée est le sens d'un énoncé [...] La pensée, en elle-même inaccessible au sens, revêt l'habit sensible de l'énoncé et devient ainsi plus saisissable. (Frege 1918, 1923, pp. 344-345 / p. 173)

> Quand on saisit une pensée, elle produit des modifications dans le seul monde intérieur de qui la saisit, et demeure, au cœur de son être, inchangée. [...] Les pensées ne sont absolument pas irréelles, mais leur réalité est d'une nature différente de celles des choses. [...] l'homme qui pense ne produit pas les pensées, il doit les prendre comme elles sont. (Frege 1918, 1923, p. 362 / 195)

À partir de 1891, Frege nomma 'pensée' le sens d'un énoncé. En opposition aux subjectivistes [32], il attribuait une certaine indépendance aux pensées. Selon lui, un homme est capable d'entrer en relation avec ces dernières, il peut les saisir ou les juger. Mais ces activités n'ont aucune incidence sur elles, ne les produisant ni ne les altérant. Les pensées n'appartiennent donc pas au monde intérieur de celui qui pense. Pour autant, Frege ne les localisait pas non plus dans le monde sensible. Il s'opposait ainsi aux formalistes [33], en détachant rigoureusement l'énoncé de la pensée, et plus généralement l'expression de son sens. Il a inlassablement défendu l'idée selon laquelle les expressions sont *sensibles* car constituées d'éléments visibles (des symboles écrits) ou audibles (des suites de sons). En produisant ces éléments, un individu parvient à les montrer ou les faire entendre. Néanmoins, aucune communication ne peut s'accomplir sans qu'il transmette autre chose par ces actes : un *contenu non sensible*, qui permet ultimement la communication. L'expression sensible doit donc incorporer un message. Sans lui, rien de ce que Frege appelait en 1879 'une idée' ou 'une combinaison d'idées' ne serait transmis. La suite de lettres 'Barack Obama' n'aurait aucun lien avec l'individu que l'on désire désigner grâce à elle.

Les signes sont les véhicules d'un contenu qui excède leur être sensible. Les notions corrélatives de contenu, de sens et de signification apparurent en 1879 sous une forme inaboutie. Elles exigèrent les profondes modifications apportées jusqu'en 1891. Ainsi, Frege prit extrêmement au sérieux le problème de la possibilité de *faire sens*, et localisa la question du fonctionnement du langage au fondement de sa philosophie. Il n'aborda pas cette difficulté en linguiste, en étudiant le propriétés particulières des différentes langues existantes. Il traqua les principes fondamentaux communs à *tous* les langages et enquêta sur la possibilité même du sens [34]. Il analysa donc le langage en philosophe, là où les linguistes le manipulent, le dissèquent, le décomposent en naturalistes. Les deux tâches sont distinctes. Voilà pourquoi Dummett situa Frege à l'origine du *tournant linguistique* [35], à travers lequel la philosophie analytique intronisa les questions fondamentales du langage, du discours et du sens. Nous pouvons d'ailleurs reconnaître, dans la distinction fregéenne entre une expression et son contenu, un ancêtre de la différence établie par certains philosophes contemporains entre un *énoncé* et une *proposition*.

32. Voir par exemple l'introduction des *Grundgesetze*.

33. Voir par exemple (Frege 1885, Frege 1906a, Frege 1908).

34. La prudence nous exhorte ici à mettre des gants. Nous questionnerons, au dénouement de cette aventure, la manière dont il convient d'interpréter cette enquête. Si Dummett estime que Frege a véritablement tenté de *rendre compte* de la possibilité de faire sens, Ricketts soutient qu'il a présupposé cette possibilité et tiré ses lois de cette présupposition. Quel que soit l'ordre de causalité – et la question est centrale –, il est incontestable que le problème du sens fut au centre de ses préoccupations.

35. Voir (Dummett 1994).

Frege tenait une position délicate. Écartant le sens des deux sphères sensible et psychologique, il le localisa au sein d'un *troisième royaume*. La question du lien *sémantique* entre une expression et son sens était essentielle à son objectif, afin d'expliquer pourquoi une dérivation écrite comme une suite (ou un arbre) d'énoncés représentait bel et bien une démonstration de la vérité du *sens* de ces énoncés [36]. Durant cette reconstitution historique, nous ne soulèverons pas la difficulté liée au statut des considérations sémantiques de Frege. Nous aborderons ces problèmes dans notre troisième chapitre, lorsque le travail préparatoire aura été réalisé. Celui-ci consiste à retracer les différentes étapes qui ont conduit Frege de la notion de combinaison d'idées à celles de *Sinn* et de *Bedeutung*. Il nous permettra de récolter les informations nécessaires à la reconstruction de l'Idéographie, puis au traitement de ces sujets.

1.4.2 Sphère linguistique et sphère sensible

Débutons par une rapide mise au point. À toutes les époques, Frege parlait des lettres, des signes, des mots, des phrases, des énoncés et des expressions comme appartenant au domaine du sensible. Il fut particulièrement clair sur ce point lorsqu'il tenta de réduire à l'absurde le projet formaliste d'identification des nombres à des *signes*, *i.e.* à des éléments linguistiques :

> Considérons à présent sérieusement l'affirmation selon laquelle $\frac{1}{2}$ ne désigne rien. Bien, ainsi il s'agit d'un artéfact constitué, peut-être, d'encre d'imprimante. Les propriétés de cette chose sont géométriques, physiques et chimiques. Il nous faut maintenant distinguer entre les moitiés qui sont imprimées, écrites à l'encre ou au crayon ou à la craie, car elles diffèrent dans la plupart de leurs propriétés. Ainsi, plutôt que de déterminer un objet spécifique – le nombre $\frac{1}{2}$ – nous avons à présent une espèce entière d'artéfacts qui entretiennent une certaine relation seulement en vertu de leur forme. Mais quelles choses essentielles sommes-nous en mesure d'inférer à partir de cette forme ? (Frege 1885, p. 106)

Cet extrait ne laisse aucun doute. Frege situait les éléments linguistiques dans la sphère sensible, constitués d'encre, de crayon ou de craie. Cependant, suivant cette caractérisation, 'a' et 'a' sont deux signes différents, car il s'agit bien de *deux*, et non d'une seule, entités physiques – toutes semblables soient-elles – composés d'encre ou de pixels. Or cette conclusion, Frege ne l'acceptait pas. Il expliqua que deux *occurrences* instancient une *même* lettre seulement si "dans l'intention de l'auteur, elles [sont] de même forme et de même taille, quand cette intention est identifiable, même si sont but n'est en toute rigueur pas atteint." (Frege 1923, p. 281 / 308). S'il est légitime de différencier, en suivant Frege, la lettre 'a' de ses deux occurrences dans le mot 'chapeau' ; il paraît tout aussi raisonnable de distinguer, contrairement à lui, les occurrences elles-mêmes, qui sont fixées une fois pour toutes et ne dépendent en rien de l'endroit et de la façon dont le mot est écrit ou prononcé, de leurs incarnations sensibles composés d'encre sur une feuille ou de suites de sons. Considérons la phrase suivante :

L'eau est **la** principale cause de **la** vie sur Terre.

À travers l'expression 'la phrase suivante', nous avons désigné une entité propre à laquelle nous pouvons accéder *via* différents moyens : en écoutant une suite de sons, en parcourant des yeux un groupement d'encre sur une feuille de papier – notamment celui qui se trouve ci-dessus

36. Ici encore, ce point est indépendant de la position adoptée. Que nous estimions, à l'instar de Dummett et Heck, que Frege a véritablement voulu *théoriser* une sémantique pour *rendre compte* de la possibilité du sens ou, comme Ricketts, qu'il s'est contenté d'*élucidations* sur la base de *présuppositions*, il est incontestable que ce lien fut au cœur de ses réflexions.

– ou de pixels sur un écran, etc. Cette entité est abstraite, elle ne diffère pas relativement aux biais sensibles qui y conduisent. Elle est nommée 'type', tandis que ces divers biais sont appelés des 'tokens' [37].

À présent, considérons la phrase-token ci-dessus, conçue comme groupement d'encre sur la feuille. Nous pouvons constater qu'elle contient *deux* mots-tokens – deux groupements d'encre *différents* (bien que semblables) plus denses que les autres – par lesquels nous accédons au mot-type 'la'. En revanche, ce dernier est unique, il n'est donc pas possible que notre phrase-type en intègre plusieurs. Nous ne pouvons pas dire non plus qu'elle contient deux mots-tokens liés à ce mot-type car, en tant qu'entité abstraite, elle n'est pas constituée d'éléments concrets. Il nous faut ainsi reconnaître deux *occurrences* du mot-type 'la', *elles aussi abstraites*, à la fois distinctes du mot-type *et* des mots-tokens.

Nous ne discuterons pas leur nature, ni leur rôle d'intermédiaire entre types et tokens. Ce problème n'est pas le nôtre. Nous voulons seulement signaler que, si Frege s'est battu sans relâche contre l'idée que les nombres soient réductibles au sensible ou issus de celui-ci par abstraction, il n'a pas reproduit ce travail concernant les constituants syntaxiques des langages. La notion d'occurrence aurait pourtant pu l'y conduire naturellement. Si, comme il l'expliqua, un signe est distinct de ses différentes places dans un mot, il l'est *a fortiori* des différents agrégats d'encre qui permettent d'écrire ces occurrences. Frege aurait donc naturellement dû parvenir à séparer les constituants syntaxiques, pris comme types, de leurs incarnations concrètes, *i.e.* leurs tokens. Peut-être échoua-t-il parce qu'il rencontrait suffisamment de difficultés à défendre ses analyses devant ses contemporains pour ne pas s'encombrer d'une nuance supplémentaire qui lui semblait secondaire, ou peut-être parce qu'il ne poussa pas jusqu'aux conclusions que ses propres remarques imposaient. Quelle qu'en soit la raison, la confusion entre entités linguistiques abstraites et concrètes persista au sein de ses écrits de toutes les époques

1.4.3 Coloration

En 1910, Frege s'adressa à Jourdain dans les termes suivants :

> À la place de ce mot je dis simplement 'pensée'. Le mot 'idée' [*Vorstellung*] est utilisée parfois dans un sens psychologique, parfois dans un sens logique. Puisque cela génère de l'obscurité, j'estime préférable de ne pas l'utiliser du tout en logique. (Jourdain 1912, p. 202)

Ce passage suggère qu'il écartait déjà, en 1879, toute composante psychologique de la notion d'idée, et qu'il modifia son terme uniquement pour clarifier ce point [38]. Il aurait tenu les idées et

37. Sylvain Bromberger publia un article éclairant à ce sujet : (Bromberger 1992).

38. Profitons de cette occasion pour effectuer une mise au point de traduction. En 1879, Frege escomptait tenir toute composante psychologique à l'écart du nom '*Vorstellung*'. Au contraire, après 1891, il localisa ce dernier *entièrement* sur le terrain psychologique, modifiant ainsi radicalement son sens.

Au sein des ouvrages existants, on trouve deux traductions françaises : 'idée' – par exemple dans (Frege 1999) – et 'représentation' – par exemple dans (Frege 1971) et (Frege 1994). Il est clair que la dimension psychologique de ces termes convient mal à la notion de la *Begriffsschrift*. Néanmoins, ainsi que Frege l'expliqua à Jourdain, il fut lui-même responsable de cette maladresse. En effet, le nom allemand '*Vorstellung*' présente la même faiblesse, qu'il serait malheureux de camoufler en français.

À ce titre, les deux termes semblent convenir également. Cependant, le mot 'représentation' suggère que *quelque chose* est représenté, ce qui ne s'accorde pas du tout au contexte de 1879. En revanche, cela convient idéalement à l'époque post-1891, durant laquelle Frege parlait fréquemment du lien entre le *Vorstellung* psychologique et l'entité objective à laquelle il se rapporte.

Deux raisons nous ont motivés à lui préférer 'idée'. D'une part, nous aurons davantage affaire au terme '*Vorstellung*' dans le cadre de la première période de la vie scientifique de Frege. Nous le rencontrerons rarement dans celui de la seconde et, lorsque ce sera le cas – par exemple en section 3.2.3.6 du troisième chapitre –, l'usage

combinaisons d'idées – et notamment les contenus jugeables – pour indépendantes et objectives dès la *Begriffsschrift*. Nous allons voir que telle était bien son intention, mais qu'il procéda à des explications imparfaites et trompeuses.

Nous savons que Frege discernait deux éléments au sein du contenu des énoncés assertifs [39] – l'assertion et le contenu jugeable – en dépit du fait que, rigoureusement, l'assertion ne soit pas contenue dans l'énoncé mais manifestée par son écriture ou son énonciation. Il ne s'arrêta pas en si bon chemin, et reconnut deux différentes composantes au contenu jugeable lui-même. L'affaire fut engagée au §3 de l'ouvrage :

> Je remarque que les contenus de deux jugements peuvent différer de deux manières : selon la première, les conclusions qui peuvent être tirées à partir de l'un d'eux en relation avec d'autres découlent toujours du second en relation avec ces mêmes autres jugements ; selon la deuxième, ceci n'est pas le cas. Les deux énoncés : 'les Grecs ont vaincu les Perses à Platée' et 'les Perses ont été vaincus par les Grecs à Platée' diffèrent suivant la première manière. Or, bien que l'on puisse reconnaître une petite différence de sens, la similarité l'emporte. J'appelle alors *contenu conceptuel*, cette partie du contenu qui est *la même* pour les deux. (pp. 2-3 / 16-17).

Frege marquait ainsi une rupture avec l'orthodoxie et s'appliquait à la justifier. Selon lui, l'analyse d'un énoncé en termes de sujet et prédicat, qui prévalait traditionnellement, est exclusivement grammaticale. Aux yeux de la logique, elle est accidentelle et ne convient donc pas. La raison invoquée ici est la suivante : la logique n'est concernée que par le contenu *conceptuel*, *i.e.* par ce qui, au sein du contenu jugeable, a trait aux conséquences qui peuvent être tirées. Or, des deux énoncés ci-dessus, on peut déduire les mêmes énoncés. Un langage logique n'aurait donc pas pour fonction de les distinguer, il se devrait de les confondre, et ainsi d'abandonner la distinction entre sujet et prédicat :

> Comme *seul celui-ci* [le contenu conceptuel] a une signification pour l'idéographie, elle n'a pas besoin de faire de distinction entre des énoncés qui ont le même contenu conceptuel. (p. 3 / 17)

Les catégories grammaticales de sujet et de prédicat autoriseraient différentes écritures d'un même contenu conceptuel, or la langue formulaire aurait vocation à consacrer un seul énoncé à chaque contenu conceptuel, elle ne devrait donc pas être structurée selon ces catégories. Voilà ce que laisse entendre une interprétation littérale de ces passages. Mais une telle lecture pose un problème trop immédiat, trop évident, pour que nous puissions l'admettre sans réserve.

En effet, si Frege n'explique pas ce qu'il entend par le terme 'conséquence', son exemple suggère – et nous voyons mal quelle autre interprétation donner à ce passage – qu'il s'agit des conséquences *logiques*. Autrement dit, deux énoncés ont mêmes conséquences si et seulement s'ils sont logiquement équivalents. Néanmoins, à ce titre, il existe clairement des énoncés *de la langue formulaire* différents qui possèdent exactement les mêmes conséquences donc, selon cette caractérisation, le même contenu conceptuel. En voici un exemple : [40]

$$\text{`}\vdash (a \to a) \to a\text{'} \qquad\qquad \text{`}\vdash a\text{'}$$

du terme 'idée' ne posera aucun problème fondamental. D'autre part, cette décision libère le nom 'représentant' pour traduire '*Vertretung*', terme qui aura une importance considérable relativement aux parcours-de-valeurs.

39. qu'il appelait simplement, à cette époque, des 'énoncés'.

40. Disons une fois pour toutes que, en attendant d'introduire le symbolisme particulier de Frege, nous userons des signes contemporains.

Pire encore : toutes les vérités logiques sont logiquement équivalentes. Elles devraient donc posséder le même contenu conceptuel. Si la langue formulaire ne faisait pas la différence entre deux énoncés qui possèdent les mêmes conséquences, alors toutes ces vérités seraient exprimées par un seul et même énoncé. La remarque vaut aussi pour les énoncés absurdes à partir desquels n'importe quel autre énoncé se déduit. Ainsi, la langue formulaire ne devrait incorporer que deux symboles, l'un pour les contenus absurdes et l'autre pour les contenus logiquement vrais. Il y a fort à parier qu'un tel langage n'aurait pas suscité l'enthousiasme de Frege. Son objectif était précisément situé dans la direction opposée. Il consistait à montrer qu'une grande part des vérités mathématiques, informatives, à la fois substantielles et différentes, sont des vérités logiques. Ces dernières ne doivent en aucun cas être ramenées à une expression unique. La logique a vocation à distinguer entre des contenus qui possèdent les mêmes conséquences – par exemple entre la circonstance que $1+1=2$ et celle que $2+2=4$ –, et la langue formulaire fait incontestablement cette distinction [41].

Au moins une des deux clauses suivantes est donc incorrecte :

(1) Deux énoncés ont même contenu conceptuel si et seulement s'ils ont les mêmes conséquences.

(2) Deux énoncés de la langue formulaire sont différents si et seulement s'ils possèdent des contenus conceptuels différents.

Pourtant, Frege semble avoir émis lui-même ces clauses [42]. Nous allons tenter d'expliquer cette erreur en nous concentrant sur la première équivalence. Nous ne soutenons pas que la seconde est juste pour autant. Nous serons amenés à réfléchir plus tard à son sujet [43]. Nous disons simplement qu'elle n'est pas en cause ici. Notre problème est lié à (1), que certains auteurs prennent pour argent comptant [44] bien qu'il provienne, à notre avis, d'une mauvaise interprétation de l'objectif que Frege poursuivait à travers le passage en question [45].

Pour le comprendre, il faut examiner le détail de ce passage de la *Begriffsschrift*. Prolongeant l'exemple de la différence entre sujet et prédicat, Frege écrivait :

> Pour la langue, la place du sujet dans la suite de mots a la signification d'une place *spéciale* où l'on met ce sur quoi l'on veut diriger particulièrement l'attention de l'auditeur. [...] Par exemple, cela peut avoir pour but d'indiquer une relation de ce jugement à d'autres, et, de cette manière, faciliter à l'auditeur la compréhension de tout le contexte. Or, tous les phénomènes dans la langue qui ne résultent que de l'interaction entre le locuteur et l'auditeur [...] n'ont aucun correspondant dans mon langage formulaire, puisque n'entre en considération dans les jugements que ce qui a une influence sur les *conclusions possibles*. Tout ce qui est nécessaire à une conclusion correcte est entièrement exprimé, mais ce qui n'y est pas nécessaire n'est le plus souvent pas indiqué ; *rien n'est laissé à deviner*. (Frege 1879b, p. 3 / 17)

Frege tenta ici de mettre en relief une part spécifique du contenu de l'expression qui est liée au contexte d'énonciation ou d'écriture, et qui dépend de l'objectif poursuivi par le locuteur ou

41. Parce que notre argument n'en souffre pas, nous allons ici un peu vite en besogne. En vérité, Frege n'envisageait pas encore clairement de réduire l'arithmétique à la logique en 1879, ni n'identifiait expressément les contenus arithmétiques aux contenus logiques. Mais, et c'est ce qui nous importe pour l'instant, il distinguait entre *différentes* vérités logiques, *i.e.* différents contenus induisant les mêmes conséquences. Nous retracerons proprement la genèse de ses idées logicistes en sections 1.5.2 et 1.5.4.

42. La réciproque de la seconde équivalence, que nous n'avons pas abordée ci-dessus, est triviale : un énoncé ne possède qu'un seul contenu conceptuel.

43. Voir p. 67.

44. Pour un exemple récent, voir (Beaney 2007).

45. Nous ne sommes pas les seuls à tenir cette position. Heck et May (2010, p. 135) vont aussi dans ce sens.

l'auteur. Imaginons que deux candidats, nommons les 'Bertrand' et 'Marie', participent à une même compétition. Pour des raisons relatives au fonctionnement du classement, Bertrand ne peut être qualifié que si Marie gagne une épreuve, ce qu'elle fait. Supposons aussi que Bertrand soit un ami proche et que je veuille informer un autre camarade de la qualification de Bertrand. Me précipitant à sa rencontre, je m'exclame : "C'est Marie qui a gagné". Le jugement que je manifeste l'aurait été tout autant par 'Marie a gagné'. Néanmoins, la forme du premier énoncé me permet d'insister sur le fait que, puisque c'est Marie, ce n'est pas quelqu'un d'autre, et qu'il y a une conséquence précise, compte tenu des règles du jeu, à tirer de ce point : Bertrand reste en lice.

Un jugement possède de multiples conséquences, la plupart d'entre elles sont indifférentes à la conversation. *Via* l'usage d'un mot ou d'une intonation, *via* la forme d'un énoncé, l'interlocuteur peut être guidé vers la conclusion qui est recherchée, et ainsi la déduire lui-même. Lorsque le locuteur prend tout de même la peine de la formuler, l'auditeur se trouve préparé à l'entendre, et peut simultanément attester son bien-fondé. Le gain de temps procuré par ce genre de procédés est d'autant plus précieux que, souvent, les déductions se succèdent rapidement.

Par l'usage de certains termes, il est aussi possible de manifester la surprise ou, au contraire, la confirmation d'une attente, ainsi que la réprobation ou l'assentiment. Plus tardivement, notamment dans ses *recherches*, Frege fournirait de nombreux exemples à cet égard :

> Maint trait du langage a pour fonction d'aider la compréhension de l'auditeur ; ainsi met-on en lumière un membre de phrase par l'intonation ou la construction. Pensons à des mots comme 'encore', 'déjà'. Dans l'énoncé 'Alfred n'est pas encore venu' et on dit qu'Alfred n'est pas venu et on indique que l'on attend sa venue, mais on l'indique seulement. On ne peut pas dire que le sens de l'énoncé soit faux s'il se trouve que la venue d'Alfred n'est pas attendue. (Frege 1918, 1923, p. 177)

La dimension non conceptuelle du contenu peut donc agir comme une boussole : susciter certaines images qui permettent à l'auditeur de se tourner dans la bonne direction, *i.e.* celle que le locuteur s'apprête à suivre ; tout en instaurant des nuances et des précisions qui, elles non plus, n'ont aucune incidence sur la vérité de la phrase.

Frege possédait de bonnes raisons pour insister sur cette division entre contenu conceptuel et non conceptuel. Il discuta fréquemment le second dans l'intention de révéler l'*objectivité* du premier. Une fois nettoyé de tout ce qui n'influe pas sur la vérité de l'énoncé, et notamment des aspects psychologiques, alors le contenu devient conceptuel. La partie non conceptuelle consiste en ce que l'énoncé peut sous-entendre sans mettre en cause sa vérité. C'est par exemple le rôle du terme 'encore' dans l'exemple ci-dessus. Ce mot ne contribue pas à ce qui est jugé. Si Alfred est absent au moment de la prononciation de l'énoncé, ce dernier est vrai, *indépendamment des attentes du locuteur*. Frege distingue ce que le locuteur affirme de ce qu'il veut indiquer simultanément, mais indépendamment, ainsi que des tours dont il use pour préparer l'auditeur à la suite de son propos. En manifestant une attente, en attirant vers telle conclusion plutôt que telle autre, le locuteur joue avec l'imagination de l'auditeur, mais il n'altère pas ce qui est jugé vrai ou faux : *ce qui est jugé est indépendant du sujet qui juge*. Cette part du contenu est épurée de toute intrusion psychologique ; ce que le contenu global n'est pas. Il était ainsi nécessaire de réunir dans un même bloc les éléments du contenu qui n'ont pas vocation à être jugé, et notamment la part dépendante du sujet. Ce bloc – le contenu non conceptuel – prendra le nom de 'coloration" [*Färbung*]. On en trouve la formulation la plus claire dans un texte de 1906 :

> On extraira ainsi du contenu d'une phrase une partie qui seule peut être reconnue comme vraie ou rejetée comme fausse. [...] C'est seulement avec cette partie du

> contenu que la logique a affaire. Ce qui, en plus de cela, contribue au contenu d'une phrase, je l'appelle coloration de la pensée. (Frege 1906c, pp. 213-214 / p. 236)

Notre interprétation présente une faiblesse. Nous disons que Frege entendait délimiter au sein du contenu une part épurée de tout ce qui est sous-entendu, indiqué, suggéré, afin de ne laisser que ce qui est *jugé* vrai ou faux. Pourtant, dans la *Begriffsschrift*, il identifia le contenu *jugeable* – la combinaison d'idées – au contenu *global* de l'énoncé (moins l'affirmation), y incorporant ainsi la coloration. Nous pensons néanmoins qu'il s'agit là d'une simple maladresse, et nous voulons donner quatre arguments dans ce sens.

Le premier ne sert qu'à faire peser sur toute lecture alternative la même charge qui accable la nôtre. Nous avons vu que les explications fournies concernant le contenu conceptuel sont *contradictoires* – et trivialement contradictoires – avec ce qui fut effectué dans la langue formulaire. Il faut donc, quelle que soit l'interprétation choisie, nous écarter à un moment donné ou à un autre de Frege. Il n'est pas possible de s'en tenir rigoureusement à ses explications. Il importe au contraire de chercher à comprendre la cause de son erreur pour déterminer ce qu'il tentait (maladroitement) de caractériser à travers le contenu conceptuel.

Deuxièmement, sa propre description des composantes non conceptuelles du contenu localise incontestablement ces dernières à l'*extérieur* de ce qui est jugé vrai ou faux. En effet, les indications de relations entre des jugements, ce qui permet de faciliter à l'auditeur la compréhension du contexte, les phénomènes de la langue qui ne résultent que de l'interaction entre le locuteur et l'auditeur sont autant d'éléments *indépendants* de ce qui est reconnu vrai ou faux, et n'appartiennent donc pas au contenu *jugeable*.

D'autre part, Frege ne choisit pas au hasard le terme 'combinaison d'idées' [*Vorstellungsverbindung*]. Il envisagea bel et bien un processus de combinaison des contenus des composantes d'une expression, mais ce processus se limitait au contenu *conceptuel*. En effet, jamais Frege n'examina sérieusement la nature et le fonctionnement de la coloration des énoncés, il se contenta d'en constater l'existence pour circonscrire son enquête autour de ce qui en était indépendant. Jamais, ni en 1879 ni plus tard, il ne dévoila une quelconque mécanique de combinaison des colorations. Le terme 'idée' était ainsi exclusivement destiné au contenu *conceptuel*. Et le contenu jugeable – une combinaison particulière d'idées – appartenait aussi à cette catégorie, bien que les formulations utilisées semblent indiquer le contraire.

Enfin, notre interprétation offre une explication convaincante des raisons qui ont motivé Frege à s'engager dans l'équivalence (1), pourtant fallacieuse. S'il identifia distraitement le contenu jugeable au contenu *total* de l'énoncé (moins l'affirmation), c'est parce qu'il ne s'était pas concentré *directement* sur ce qui, dans un énoncé, était jugé vrai ou faux, mais avait immédiatement traduit cet aspect en termes de conséquences. Il s'agit là d'un mouvement intuitif tout à fait compréhensible, car les conséquences d'un énoncé sont liées exclusivement à ce qui est jugé à travers lui, et non aux processus psychologiques par lesquels ce jugement s'effectue ou aux images qui lui sont associées. En invoquant les conséquences, Frege voulait cibler ce qui a valeur pour elles, autrement dit ce qui est reconnu comme vrai ou faux, et non les mouvements internes qu'un individu y attache. Malheureusement, si les conséquences ne dépendent que de ce qui est jugé, l'inverse – le sens $\Leftarrow$ de (1) – est incorrect : deux contenus conceptuels différents induisent parfois les mêmes conséquences. La caractérisation était donc inadéquate. Frege s'en aperçut plus tard, probablement parce qu'il remarqua que, trivialement, son critère ne fonctionnait pas pour les énoncés exprimant des vérités logiques, ces dernières possédant toutes les mêmes conséquences. En 1906, à l'occasion d'une lettre à Husserl, il répéta le même critère d'identité – cette fois des pensées, et cette fois clairement formulé en termes d'équivalence logique –, mais prit soin d'ajouter une

condition permettant d'écarter certains énoncés logiquement vrais [46]. Notre interprétation est en accord avec cette évolution. Frege remarqua que son critère ne pouvait s'appliquer à tous les énoncés de la logique malgré la pertinence qu'il continuait de lui prêter notamment du fait de la vérité de sa *réciproque* : si deux énoncés partagent un même contenu *jugeable* alors ils ont les mêmes conséquences. Il tenta de l'adapter à l'idée qu'il existe des vérités logiques différentes [47].

Frege désirait bel et bien caractériser la portion jugeable du contenu d'un énoncé à travers le contenu conceptuel, mais il s'égara à la concevoir en termes de conséquences. Il réalisa son erreur en comprenant que ce critère était inapplicable à tous les énoncés logiques, et se rétracta [48]. Dans les autres écrits pré-1891, Frege employa toujours le terme 'contenu' pour désigner ce qui était indépendant de toute coloration, qu'il s'agisse de concepts, d'objets ou de contenus jugeables (nous verrons tout cela dans un instant). Cependant, il ne rectifia jamais explicitement la formulation de la *Begriffsschrift*, si bien que l'erreur qui consistait à identifier le contenu jugeable au contenu total de l'énoncé demeura en arrière-fond jusqu'en 1891. À cette date, il opéra les corrections nécessaires. Il expliqua que la coloration était exclue du *sens* de l'énoncé : la pensée [*Gedanke*] – la part de son contenu apte à être jugée –, et limita le sens d'un constituant de cet

46. La condition, formulée après la distinction entre *Sinn* et *Bedeutung*, est la suivante : les sens des deux énoncés en question ne doivent intégrer aucun constituant *logiquement trivial* (Frege 1976, pp. 105 - 106). Frege n'en dit pas davantage, ni ici ni ailleurs, mais il est clair que cette précision visait à exclure certains énoncés logiques du champ d'action du critère, afin d'éviter une synonymie entre toutes les vérités logiques, qui aurait contredit l'idée – essentielle à son projet de réduction des mathématiques – selon laquelle la logique était informative.

47. Nous traiterons la question de l'identité des pensées exprimées par des énoncés différents dans le troisième chapitre (section 3.3.10.2. Ces analyses n'ont pas leur place au sein de cette partie. Précisons simplement que l'enjeu est de taille, car l'entreprise de Frege semble exiger la possibilité d'une traduction des énoncés mathématiques traditionnels dans sa langue artificielle, *i.e.* de *conserver les pensées exprimées par ces énoncés*, bien que la coloration puisse être modifiée :

> On peut exprimer différemment le même sens, et [...] la différence n'est pas alors celle du sens mais une différence de manière de voir, d'insistance, de coloration, que la logique ne prend pas en compte. (Frege 1892a, p. / 131)

48. Linnebo (2003) avance une autre interprétation. Selon lui, le Frege de 1879 n'attribuait pas le moindre contenu aux énoncés de sa langue formulaire, son objectif consistait exclusivement à 'développer un langage dans lequel les composantes formelles et matérielles [seraient] apparues à leurs justes places' (p. 243). La langue formulaire se serait limitée à la première dimension, et aurait nécessité l'ajout de signes pour les contenus arithmétiques. Linnebo explique :

> Comme toutes les vérités logiques sont équipollentes, il peut ainsi être soutenu qu'elles partagent le même contenu conceptuel, en l'occurrence le contenu nul qui n'entraîne rien d'autre que lui-même. (p. 244)

Les énoncés de la langue formulaire – ceux de la *pensée pure* – ne disposeraient réellement d'aucun contenu mais, afin d'uniformiser cette dernière notion, Frege leur en aurait artificiellement attribué un : le "contenu nul". Linnebo présente donc une interprétation littérale du critère d'identité des contenus conceptuels : deux énoncés induisant les mêmes conséquences auraient véritablement même contenu conceptuel. Il entend alors l'expression 'contenu conceptuel' comme une simple façon de parler dans le cas des énoncés de la langue formulaire. C'est dans une volonté d'homogénéisation, et en parfaite conformité avec son critère – tous ces énoncés n'ayant aucun contenu, on peut sans crainte supposer qu'ils ont le même – que Frege leur aurait attribué un contenu *nul*.

Il est vrai qu'en 1879, Frege ne localisait pas avec assurance le contenu mathématique sur le terrain de la pensée pure. En section 1.5, nous découvrirons que la première revendication explicite de son logicisme se situe en 1882. Cependant, si Frege avait vraiment identifié les contenus conceptuels de tous les énoncés de la langue formulaire, il n'aurait jamais affirmé que 'comme seul [*le contenu conceptuel*] a une signification pour l'idéographie, elle n'a pas besoin de faire de distinction entre des énoncés qui ont le même contenu conceptuel.' (p. 3 / 17). Nous verrons bientôt qu'une tension importante gangrenait la notion de contenu de 1879, qui ne fut que progressivement dissoute. Mais, pas plus à cette date qu'à une autre, Frege n'évoqua les contenus conceptuels des énoncés logiques comme une simple façon de parler. Le flou qui entoure la *Begriffsschrift* n'a trait à aucune intention de priver les énoncés logiques de contenu.

énoncé à sa contribution à cette pensée. Ce redressement terminologique découla naturellement de ce qui était visé à travers la coloration : tout ce que l'énoncé suggère, indique, indépendamment de ce qui est (apte à être) jugé vrai ou faux.

Nous pouvons à présent résumer une fois pour toutes les différents éléments qui, aux yeux de Frege, constituaient le contenu de l'énoncé assertif, en tenant compte des corrections de 1891 :

1. l'assertion ;
2. la pensée (son sens) : la part du contenu qui est jugée, indépendante du sujet qui juge ;
3. la coloration : la somme de tous les éléments transmis par l'énoncé indépendamment de ce qui est jugé.

En 1891, Frege expliquait qu'un énoncé assertif exprime son sens [49] et non plus, comme en 1879, qu'il exprime la *totalité* de son contenu, car le jugement comme la coloration étaient désormais exclus du sens. Voici la formulation conforme à ces modifications. Un énoncé assertif :

- permet la manifestation du jugement ;
- exprime son sens ;
- possède une coloration.

1.4.4 Enoncés et vérité

Dès 1879, Frege expliqua qu'un locuteur pouvait attribuer la vérité ou la fausseté au *contenu* d'un énoncé (p. 2 / 15). Il tenait la circonstance que Berlin est en Allemagne, et non l'énoncé 'Berlin est en Allemagne', pour vraie ou fausse, *i.e.* un fait ou non. Le contenu jugeable incorporait à tort la coloration. À partir de 1891, cette erreur fut rectifiée. La coloration fut exclue du sens de l'énoncé, *i.e.* de la *pensée*. Frege tint alors la pensée que Berlin est en Allemagne, et non l'énoncé 'Berlin est en Allemagne', pour vraie ou fausse, *i.e.* un fait ou non.

Ce ne fut donc jamais à des éléments linguistiques qu'il attribua les propriétés d'être vrais ou faux, mais à des contenus d'éléments linguistiques. L'énoncé – véhicule sensible du sens – ne possède aucune valeur de vérité. La formule 'énoncé vrai' n'est qu'un raccourci commode : ce qui est ainsi qualifié de vrai n'est pas l'énoncé mais la pensée qu'il exprime. Frege fit lui-même usage de ce raccourci [50], en insistant pour que la nuance ne soit pas perdue de vue :

> Le mot 'énoncé' est diversement employé. Le sens purement linguistique de ce mot est certes le suivant. C'est celui selon lequel le langage humain consiste en énoncés. Mais ce qui proprement importe dans le discours ce n'est pas l'énoncé lui-même, c'est le sens ou contenu, qui est associé à l'énoncé et que l'on veut communiquer. Puisque le sens n'est pas lui-même sensiblement perceptible, nous sommes contraints à nous servir de quelque chose de sensible pour communiquer. C'est ainsi que l'énoncé et sens de l'énoncé, sensible et non sensible, sont liés. J'appelle pensée le sens d'un énoncé ayant un sens. Les pensées sont vraies ou fausses. [...] Je suis déterminé, quant à moi, à désigner toujours par le mot 'énoncé' l'élément linguistique, ce dont le sens est une pensée. Je distingue ainsi entre énoncé et pensée. On conçoit à présent comment on en vient facilement à attribuer à l'énoncé quelque chose qui revient proprement à la

49. Nous ne répéterons plus ce que nous avons établi à l'issue de la section 1.3. Rigoureusement, seule la partie privée du trait vertical exprime le sens. Nous suivons la formulation inexacte de Frege, car nous savons désormais sous quel jour elle doit être lue.

50. De nombreux exemples sont éparpillés dans son œuvre. Le lecteur peut se référer, s'il désire consulter un passage dans lequel l'affaire est claire, au §3 des *Grundlagen*.

> pensée, et comment on parle d'énoncés vrais au lieu de parler de pensées vraies. On dit qu'un énoncé est vrai lorsque le sens de cet énoncé, la pensée exprimée par lui, est vrai. (Frege 1899-1906, p. 182 / pp. 199-200)

À cette mise en garde en succède une autre :

> Ce que nous démontrons [*beweisen*], ce n'est pas un *Satz*[51], mais une pensée. Et peu importe la langue que nous utilisons pour cela. Il est vrai qu'en mathématiques, on parle souvent de démontrer un *Lehrsatz*, et que l'on met sous le mot '*Satz*' ce que j'appelle pensée, ou que l'on ne fait peut-être pas bien la différence entre l'expression sous forme de mots ou de signes et la pensée exprimée. Mais si l'on veut être clair, il vaut mieux faire cette différence. Une pensée n'est pas perceptible par les sens, mais nous lui donnons, dans le *Satz*, un représentant audible ou visible. Pour cette raison, je ne parle pas de '*Lersatz*' mais de '*Theorem*', ni de '*Grundsatz*' mais d''*Axiom*', et j'entends par théorèmes et axiomes, des pensées vraies. (Frege 1914, pp. 222-223 / p. 245)

Démontrer, c'est établir la vérité d'une pensée, *i.e.* prouver cette pensée, et non l'énoncé qui l'exprime. C'est pourquoi Frege dénonçait l'usage de tout terme qui, par sa racine commune avec *Satz*, mettrait l'accent sur l'élément syntaxique plutôt que sur son sens. En toute rigueur, il faut donc distinguer la *dérivation*, l'arbre ou la suite syntaxique qui permet de représenter la preuve, de la démonstration elle-même. De même, il faut séparer la conclusion de cette dernière, la pensée dont la vérité est établie – le théorème – de l'énoncé qui l'exprime, le dernier élément de la dérivation. Notons néanmoins qu'une telle rigueur est très contraignante en pratique. Frege lui-même y dérogea dans les *Grundgesetze*. Il ne parla ni d'*Axiom*, ni de *Grundsatz* mais de *Gesetz* ou de *Grundgesetz*, que nous traduirons respectivement par 'loi' et 'loi fondamentale'. Les théorèmes sont le plus souvent désignés par '*Abgeleitete Gesetze*' : 'lois dérivées'. Jusque-là, on n'observe aucune entorse à ses propres prescriptions. Lorsqu'il présentait une loi (par exemple p. 61), il excluait les guillemets, ce qui semble indiquer qu'il désignait ainsi le contenu, et non l'expression. Néanmoins, il y incorporait le trait vertical. Or la loi n'est pas ce qui permet l'*acte* de manifestation du jugement de la pensée. Elle est la pensée elle-même, *indépendante* du sujet.

C'est plus tôt dans le texte que Frege viola frontalement sa propre règle. Voici les premières lignes de l'ouvrage :

> Dans ce livre, on trouvera les théorèmes [*Lehrsätze*] sur lesquels l'arithmétique est basée, prouvée [*beweisen*] en utilisant des signes que j'appelle collectivement l'idéographie. Les plus importants de ces énoncés [*Sätze*] [...] (p. V)

Le terme '*Lehrsatz*' ne convient pas, il ne doit en aucun être associé au verbe '*beweisen*'. De plus, la science arithmétique n'est pas basée sur des énoncés particuliers – sur des *Lehrsätze* – mais bien sur des *pensées* particulières – des *Axiome*. Ainsi, dans les *Grundgesetze* comme ailleurs, Frege s'autorisa des tournures imparfaites. Ceci s'explique par la rigidité de langage qu'une rigueur absolue aurait imposée, contraignant par exemple au remplacement systématique de 'cet énoncé est faux' par 'la pensée exprimée par cet énoncé est fausse'. Dans l'exposé d'un système si complexe, la fluidité s'en trouverait lourdement affectée. Au contraire, l'usage de raccourcis offre une plus grande souplesse de rédaction. C'est pourquoi, à l'instar de Frege, nous parlerons parfois d'énoncés vrais et d'énoncés démontrés, étant entendu qu'il s'agit seulement de *raccourcis*.

Frege utilisait le terme '*Satz*' pour désigner les constituants syntaxiques des langages dont

51. Nous ne traduisons pas le terme '*Satz*' (énoncé) car sa racine commune avec certains autres mots allemands est en jeu.

le sens était susceptible d'être jugé. Avant 1891, il s'agissait du contenu jugeable, et après cette date, de la pensée. Les énoncés *assertifs* [*Behauptungssatz*] permettent aussi de manifester la reconnaissance de la vérité de la pensée – du contenu jugeable, avant 1891 – exprimée, tandis que les énoncés non assertifs se contentent d'exprimer cette pensée – ce contenu jugeable. Les langues naturelles provoquèrent une importante confusion à cet égard, car un même *Satz* peut y jouer les deux rôles différents, selon les contextes. Frege corrigea ce point dans ses langues artificielles en introduisant le trait vertical pour porter la force assertive. Les *Sätze* du premier type – les *Behauptungssätze* – incorporent ce trait à l'extrême gauche, les autres en sont dénués. C'est uniquement dans les *Grundgesetze* que Frege nomma '*Satz*' les seuls énoncés assertifs. Cela ne constitue pas une raison suffisante pour imiter ce geste, car les explications générales concernant cette notion s'en trouveraient extrêmement obscurcies.

Nous choisissons de rendre '*Satz*' par le terme 'énoncé'. Ce faisant, nous nous écartons de la traduction utilisée dans la majorité des textes publiés en français (1971, 1969a), qui emploient le mot 'proposition'. En philosophie contemporaine, ce dernier terme désigne principalement le *contenu* d'un énoncé que Frege, pour sa part, nommait '*Gedanke*' et distinguait expressément du *Satz*. Cette traduction nous semble donc tout à fait inappropriée, aussi répandue soit-elle [52].

En revanche, les traducteurs des textes posthumes (Frege 1994) optèrent pour le mot 'phrase' qui désigne aussi, en philosophie du langage, un élément linguistique, et non son contenu. Finalement, un choix s'imposait entre ces deux alternatives, dont chacune nous semblait acceptable. L'usage du terme 'énoncé' en logique contemporaine est teinté d'une dimension plus technique qui convient davantage à notre propos, car la plupart des *Sätze* qui vont occuper notre attention consistent en des formules d'un langage artificiel : l'idéographie. À nos yeux, la décision dépend des textes étudiés. S'il s'agit de la *Begriffsschrift* ou des *Grundgesetze*, alors 'énoncé' s'avère être le meilleur candidat, si au contraire l'attention est portée sur les développements informels dans lesquels Frege considère principalement des *Sätze* de la langue naturelle, alors 'phrase' s'impose comme l'option la plus adéquate. Étant dans le premier cas, nous avons adopté la traduction 'énoncé'.

1.4.5 Mise au point

Reprenons notre souffle. À plusieurs reprises désormais, nous avons contesté que Frege ait tenu certaines positions pourtant expressément revendiquées dans ses écrits. Analyser un texte en s'opposant à ce qui y est explicitement stipulé peut déconcerter de prime abord. Dans chaque cas, nous avons justifié notre geste en dévoilant les étapes à travers lesquelles Frege corrigea ses formulation en développant ce qui était déjà en germe dans un premier texte. Nous ne sommes pas les seuls à défendre une interprétation non littérale de ses écrits, et notamment des plus précoces. Nous allons reproduire ce mouvement concernant un problème plus délicat encore : sa conception des compositions des contenus. Cette périlleuse entreprise exige d'interroger la notion de contenu conceptuel de 1879. Là encore, il serait inutile de croire Frege sur parole. À cette date, son projet n'en était qu'à ses balbutiements, et une bonne compréhension de la notion de contenu conceptuel s'en trouve délicate à atteindre. C'est justement un retour sur cette notion qui l'obligea à opérer différents changements dans les textes qui suivirent, notamment les *Grundlagen*, jusqu'à son éclatement dans les notions de sens et de référence en 1891. Nous allons décrire les différents à-coups à travers lesquels Frege corrigea progressivement ses conceptions afin de leur octroyer une cohérence dont elles étaient originellement dépourvues. Il serait donc aussi absurde de procéder coûte que coûte à une "réparation" totalement artificielle de la notion

52. Ce reproche s'adresse aussi à la récente traduction anglaise des *Grundgesetze* (Frege 2013) qui emploie le terme 'proposition', car ce dernier rencontre en anglais le problème que nous venons de dire.

de contenu conceptuel que d'observer uniquement sa description, ignorant la manière dont elle est *mise en œuvre*. C'est au contraire dans cette dernière qu'il nous incombe de déceler les intuitions qui conduisirent à de profondes révisions de ses formulations et affirmations.

Frege jouit d'une réputation de clarté et d'honnêteté intellectuelle. D'aucuns estiment qu'il a su avertir et répondre de ses différents revirements. Le découpage en trois périodes que nous avons réalisé en introduction est généralement accepté par la plupart des chercheurs. Il est induit par deux bouleversements profonds qui marquèrent les transitions entre ces moments : la substitution des notions de *Sinn* et *Bedeutung* à celle de contenu conceptuel puis l'abandon du logicisme. Néanmoins, certains mouvements internes à chacune de ces phases existent, plus discrets mais non moins déterminants. Ils correspondent parfois, et notamment durant la période qui nous occupe ici, à une clarification des intuitions qui présentaient initialement un visage imparfait. C'est pourquoi il est toujours pertinent de mettre en perspective un passage avec le texte complet, avec d'autres articles rapprochés et avec les objectifs qui y sont poursuivis. Deux faits sont particulièrement fréquents. Frege rencontrait les difficultés que nous avons dites à communiquer et défendre ses vues. Cela le contraignit à restreindre drastiquement le nombre de points proprement développés dans la maigre tribune qui lui était accordée, et ainsi à recourir à diverses approximations concernant d'autres sujets. Sa plume, qu'il savait pourtant rendre précise et lapidaire, ne le préservait pas toujours de certaines inexactitudes qui confinaient parfois à l'erreur lorsque, comme ce fut souvent le cas, la place lui faisait terriblement défaut. D'autre part, il fut régulièrement en peine lorsqu'il fallait articuler les différentes composantes de ses vues novatrices ou en mesurer les conséquences. Ceci généra des affirmations en opposition frontale avec les développements réalisés dans le même texte. La mise en ordre de ses intuitions les plus fondamentales fut un long et périlleux pèlerinage, si bien qu'il s'avère ardu de déterminer si, dans tel ouvrage, Frege ne tenait pas encore telle position ou si le germe était déjà présent mais attendait toujours d'éclore. Parfois, la question est purement et simplement dénuée de sens. Revenons rapidement sur les différents cas rencontrés jusqu'à présent.

Nous avons expliqué que, dès 1879, Frege déplorait explicitement l'absence de signe dédié au jugement, dénonçant une confusion très problématique en logique. Le dispositif de la langue formulaire, précisément le rôle du trait vertical, suggère que Frege tendait bel et bien à séparer l'acte d'affirmation de la pure expression du contenu. Pourtant, dans la présentation de sa langue, il localisa le jugement *au sein du contenu* de l'énoncé et parla de son *expression*, qu'il proposa de traduire par le prédicat 'est un fait'. Cela a conduit certains auteurs à conclure que Frege n'avait alors pas proprement distingué le jugement des combinaisons d'idées. Cependant, la langue formulaire fut bâtie en vertu de cette distinction, sans quoi le trait vertical aurait été totalement inutile ou, au moins, autorisé à apparaître plusieurs fois dans un même énoncé. De plus, Frege précisa que le prédicat a "*pour seul but*" de présenter le contenu comme jugement. Certes, ses erreurs terminologiques révèlent qu'il n'avait pas anticipé les lourdes conséquences auxquelles sa distinction entre contenu et jugement – et celle, corrélative, entre affirmation et expression – allaient conduire. Comme nous l'avons longuement expliqué, il n'avait pas réfléchi à la nature de l'*acte psychologique* du jugement. Il s'y appliqua entre 1882 et 1884. Mais, par l'introduction du trait vertical, il avait amorcé le processus et annonçait déjà sa surprenante notion de jugement. C'est pourquoi, dans la section 1.3.2, nous n'avons ni soutenu ni nié que, en 1879, cette conception était déjà intégrée. La question ne possède, ainsi posée, aucune pertinence. Le dispositif était déjà incorporé à la langue formulaire à travers le trait vertical, mais la nature spécifique du jugement qui en découlait n'avait pas encore été interrogée par Frege. Il nous fallut donc repérer les différences incohérences et imprécisions dans la présentation de ses vues afin de parcourir à ses

côtés le chemin qui permit leur avènement ; autrement dit il fut nécessaire d'observer leur mise en place *progressive*. C'est dans ce cadre qu'il est crucial de distinguer les brusques revirements dûs à des découvertes spécifiques – ainsi l'abandon du logicisme fut entraîné par la révélation du paradoxe de Russell – de la mise en ordre de certaines intuitions et de la prise en considération de leurs conséquences – comme ce fut le cas pour le jugement.

Nous avons dégagé deux autres mouvements de ce type. En 1879, Frege introduisit le contenu conceptuel comme le seul élément pertinent du point de vue de la logique. L'idée que cette discipline ne s'intéresse, parmi le contenu d'un énoncé, qu'à ce qui est jugé vrai ou faux sous-tend toute la première section de la *Begriffsschrift*, et fut explicitée dans les textes postérieurs à 1891. Elle suggère une identification, à laquelle Frege résista pourtant, entre contenu jugeable et contenu conceptuel des énoncés. En 1879, le premier incluait aussi la coloration, ce qui rentre en conflit immédiat avec le rôle que Frege dédiait au second. Il s'aperçut de ce défaut et y remédia lors de l'introduction des pensées.

Enfin, nous avons relevé un problème concernant le critère selon laquelle deux énoncés ont même contenu conceptuel si et seulement s'ils possèdent les mêmes conséquences. Nous avons expliqué que Frege en était venu à proposer ce critère parce que ce qui est déductible d'un énoncé est indépendant de tout ce qu'il tenait à exclure du domaine de la logique, et qu'il réunit plus tard sous le nom 'coloration'. Malheureusement, il réalisa que l'autre sens de cette équivalence était incorrect, ce qui le conduisit à une révision du critère.

Nous allons, dans la besogne plus sérieuse qui nous attend à présent, continuer dans cette direction. Si nous voulons rendre compte des différentes incohérences qui gangrènent les premiers textes de Frege, ainsi que de l'ajustement progressif de ses thèses, il faut impérativement prendre des distances avec ses propres affirmations.

1.4.6 *Combinaisons* d'idées

Jusqu'à présent, nous n'avons traité du contenu conceptuel que dans le cas des énoncés. Or, dans la langue formulaire comme dans les langues naturelles, ces derniers sont le résultat de compositions de signes – ou de mots – selon certaines règles grammaticales. Frege a entrepris la construction d'un langage artificiel adapté au seul contenu conceptuel car il jugeait la grammaire des langues naturelles totalement inappropriée à cette tâche, leur rôle quotidien les contraignant à de nombreuses concessions vis-à-vis de la coloration des expressions. La langue formulaire fut donc construite dans le but de remédier à ce défaut en se débarrassant de tout ce qui a trait à cette dernière.

Cela ne signifie pas que ses termes sont dénués de coloration. Frege n'en dit rien en 1879 et ne se prononça pas davantage dans le cas de l'idéographie en 1893. Il est cependant douteux qu'une telle chose soit concevable à ses yeux. La coloration réunit tout ce que l'énoncé véhicule en dehors de ce qui peut être jugé vrai ou faux, incluant les différentes images induites chez le lecteur. Un changement de symboles ou une modification dans leur organisation – par exemple en plaçant le trait vertical à la fin ou en écrivant '$(a)\Phi$' au lieu de '$\Phi(a)$' – entraîneraient potentiellement quelques différences en colorant différemment les énoncés. Pourtant, le langage ainsi modifié aurait un fonctionnement totalement identique à celui de la langue formulaire. Frege se désintéressait de nettoyer les expressions de leur coloration. Il lui importait en revanche que son langage ne soit pas *adapté* à cette coloration mais *seulement* au contenu conceptuel. Il nous faut donc comprendre ce que peut signifier une telle adéquation.

Voici une première interprétation possible, suggérée par le passage traitant des modes de l'actif et du passif : un langage est adapté au contenu conceptuel si une seule expression est dédiée à chaque contenu conceptuel. Nous retrouvons l'équivalence (2) de la section 1.4.3, que

nous avions promis de discuter plus tard [53]. Il est temps de tenir parole. Étendons cette clause aux noms de contenus non jugeables : deux expressions ne seraient différentes que si leurs contenus conceptuels le sont en retour, jamais en vertu de leur simple coloration. Rappelons les indices qui appuient cette lecture. D'une part, Frege reprochait à l'analyse en termes de sujet-prédicat de distinguer entre des énoncés partageant le même contenu conceptuel, selon qu'ils sont rédigés au passif ou à l'actif. D'autre part, il a formulé directement cette clause limitée aux énoncés dans le passage suivant :

> Comme *seul* [*le contenu conceptuel*] a une signification pour la langue formulaire, elle n'a pas besoin de faire de distinction entre des énoncés qui ont le même contenu conceptuel. (Frege 1879b, p. 3 / 17)

Avant toute chose, précisons que Frege procéda à certaines définitions pour raccourcir ses formules. Il attribua à de nouveaux signes simples le contenu d'expressions complexes n'incorporant que des signes primitifs. Dans ce cas, il est clair que le *definiens* et le *definiendum*, aussi différents soient-ils, partagent le même contenu conceptuel. Par conséquent, les noms définis ne doivent pas être pris en considération dans cette clause. Par ailleurs, il est clair que les deux formules ci-dessous ont même contenu conceptuel [54] :

$$\text{`}\vdash \forall \mathfrak{f} \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{f}(\mathfrak{a})\text{'} \qquad\qquad \text{`}\vdash \forall \mathfrak{g} \forall \mathfrak{b}, \mathfrak{g}(\mathfrak{b})\text{'}$$

Ainsi, l'équivalence doit admettre pour exceptions les énoncés qui ne diffèrent que parce que des lettres pour des objets (respectivement des concepts) ont été remplacées par d'autres lettres pour des objets (resp. des concepts) [55].

Ceci étant dit, examinons la clause restreinte aux énoncés. D'un côté, comme nous le verrons en section 1.6.1.4, la notion de mode de détermination développée en 1879 s'appuyait en effet sur l'idée que deux énoncés différents (modulo les précisions ci-dessus) de la langue formulaire présentaient des contenus conceptuels différents. D'un autre côté, le développement du §5 – repris dans (1881, 1882a) – suggère que Frege ne distinguait pas les contenus conceptuels de 'p' et '$\neg\neg p$' [56].

Notre enquête n'exige pas de lever cette tension, car nous discutons l'hypothèse selon laquelle un langage idéal ne conférerait qu'un contenu conceptuel à chaque expression, qu'il s'agisse *ou non* d'un énoncé. Cette hypothèse ne peut être correcte que si l'équivalence générale l'est à son tour. Or, dans le §8, Frege expliqua qu'il était parfois essentiel d'utiliser deux noms propres différents pour un même contenu conceptuel, sans qu'il ne soit ni question de définition ni de simples remplacements de lettres [57]. C'était l'objet de l'introduction de son symbole '$\equiv$' exprimant l'identité de contenu conceptuel entre des expressions. Il n'estimait donc pas qu'un langage idéal doive intégrer une seule expression par contenu conceptuel, bien que certaines raisons l'aient poussé à formuler cette idée (incorrecte) dans le cas des énoncés.

Pour éclaircir cette dernière notion, il convient en réalité d'observer l'application spécifique à laquelle il comptait dédier son langage. Frege souhaitait permettre une représentation rigoureuse des démonstrations qui ne fasse l'impasse sur aucune étape, aussi simple soit-elle. Selon lui, une

53. Voir p. 59.

54. Nous omettons pour l'instant le trait de contenu et conservons un symbolisme contemporain.

55. de telle sorte qu'aucune lettre ainsi substituée ne figure, dans l'ancien énoncé, dans la portée d'un quantificateur attaché à la lettre qui s'est vu remplacée.

56. Les années n'ont pas amélioré cette situation. Nous verrons dans le troisième chapitre que le rapport entretenu par ce genre d'énoncés n'était pas éclairci au moment des *Grundgesetze*.

57. En section 1.6.1.4, nous en dirons davantage sur la différence qui existait, à cet égard, entre énoncés et noms propres.

preuve débute par la réalisation d'un ou plusieurs jugements. Il s'agit là d'un trait invariable de la pensée fregéenne qui interdit tout processus de décharge d'hypothèse, car une démonstration ne peut en aucun cas se baser sur des contenus dont la vérité n'est pas reconnue :

> *C'est seulement d'une pensée reconnue comme vraie qu'on peut faire une prémisse d'une inférence.* (Frege 1923, p. 281 / 308)

Une preuve se poursuit ensuite étape par étape, en effectuant de nouveaux jugements. Chaque jugement inédit doit être *justifié* par les anciens. Il convient donc de s'interroger sur la manière dont un ou plusieurs jugements peuvent en *justifier* un autre. Dans un fameux passage des *Grundlagen*, Frege expliqua :

> Les distinctions de l'*a priori* et de l'*a posteriori*, de l'analytique et du synthétique, ne concernent pas à mon avis le contenu du jugement, mais la légitimité de l'acte de juger. [...] [L'objet des mathématiques] est de trouver une preuve, et de la poursuivre régressivement jusqu'aux vérités premières. Si l'on ne rencontre sur ce chemin que des lois logiques générales et des définitions, on a une vérité analytique. (Frege 1884, p. 3 / 127)

Par ce passage, Frege traduisait en termes kantiens ce qu'il affirmait déjà en 1879 :

> Dans cette partie, quelques jugements de la pensée pure, ceux pour lesquels cela est possible, vont être représentés en signes. Il est aisé de démontrer les plus composés de ces jugements [58] à partir des plus simples, non pas pour les rendre plus certains, ce qui serait pour la plupart inutile, mais pour mettre en évidence les relations des jugements entre eux. Ce n'est manifestement pas la même chose que de connaître simplement les lois ou de savoir comment les unes sont données par les autres. (Frege 1879b, p. 25 / 40)

L'objectif n'est pas de prouver que $1 + 1 = 2$, mais de déterminer le socle sur lequel une telle vérité repose, c'est-à-dire les contenus de jugements qui la "contiennent en puissance" [*der Kraft nach*] [59], ceux à partir desquels il est possible de la démontrer par une succession de jugements dont les uns *justifient* leurs successeurs. Il faut donc déterminer en quoi consiste cette justification, et cela n'est possible qu'en mettant "en évidence la relation des jugements entre eux". Qu'est cette relation ? Comment un ou plusieurs jugements peuvent-ils en justifier un autre ? Comment la vérité d'un ou plusieurs contenus conceptuels peut-elle assurer celle d'un autre ?

Considérons le cas du *Modus Ponens*, et supposons deux énoncés non assertifs p et q tels que les contenus conceptuels de p et $\ulcorner p \to q \urcorner$ soient vrais. Alors s'impose la conclusion que q est vrai :

$$\frac{\vdash p \qquad \vdash p \to q}{\vdash q}$$

Il semble que nous soyons autorisés à écrire cette dérivation en vertu de la *forme* de ses constituants, indépendamment des énoncés p et q considérés. Mais au rapport de forme entre des énoncés doit correspondre une relation entre leurs contenus conceptuels, car c'est la reconnaissance de la vérité du *contenu conceptuel* de l'énoncé – et non de l'énoncé lui-même – écrit en

58. Rectifions une nouvelle formulation imprécise de Frege : ce n'est pas le jugement – l'acte psychologique – mais bien le contenu conceptuel objectif qui est démontré.

59. (Frege 1879b, p. 25), notre traduction.

conclusion qui est justifiée par celles des *contenus conceptuels* des énoncés écrits en prémisses. Le lien entre énoncés doit *manifester* un lien entre les contenus conceptuels, et permettre le passage du terrain linguistique – celui des dérivations – au terrain du sens – celui de la preuve.

La connexion entre des contenus conceptuels d'énoncés est lisible à travers le lien qui intervient entre les contenus conceptuels des différentes expressions qui composent les énoncés. C'est parce que le contenu conceptuel de $\ulcorner p \to q \urcorner$ est *déterminé*, d'une manière ou d'une autre, par les contenus conceptuels de p, q et '$\to$' que nous sommes assurés de la vérité du contenu conceptuel de q sur la base de celles des contenus conceptuels de p et de $\ulcorner p \to q \urcorner$, et donc que nous pouvons déduire q à partir de p et de $\ulcorner p \to q \urcorner$.

Un langage est ainsi adapté au contenu conceptuel lorsque ses énoncés sont formés de telle sorte que leurs contenus conceptuels sont déterminés à partir de ceux de leurs constituants. La composition d'un énoncé par ses constituants reflète celle de son contenu conceptuel par les contenus conceptuels de ces constituants. Le lien *sémantique* entre un énoncé et son contenu conceptuel est en étroite relation avec le lien *sémantique* qui intervient entre ses constituants et les contenus conceptuels de ces derniers. C'est donc à la fois à travers le choix des signes de base et de leur contenus conceptuels, et à la fois à travers la grammaire d'une langue artificielle, que cette adéquation est atteinte. C'est ainsi que le passage du langage au contenu est effectué. C'est pourquoi les règles générales de dérivations entre des énoncés correspondent bien à des règles logiques valables pour tous les contenus composés d'une certaine manière, c'est-à-dire à un rapport de justification entre des jugements.

Cette interprétation confirme que Frege commit une erreur importante en laissant le contenu jugeable – et plus généralement les combinaisons d'idées – excéder le contenu conceptuel. Les langues naturelles sont soumises à des enjeux multiples et ne présentent pas une grammaire adaptée à la structure logique du sens, à la manière dont les idées se combinent. Cette grammaire dépend pour beaucoup de ce que le locuteur peut suggérer ou indiquer, *i.e.* de la coloration de l'énoncé. Frege entreprit d'examiner au sein des énoncés la manière dont ce qui est jugé vrai ou faux résulte d'une combinaison d'autres idées, et d'adapter son langage à cette enquête, *en tenant l'affaire hors de portée des colorations*. Les (combinaisons d')idées – et notamment les contenus jugeables – se limitent donc au contenu *conceptuel* des énoncés[60]. Son objectif allait tout entier dans ce sens, bien que ses formulations soient inexactes. C'est ainsi qu'il comptait expliquer les rapports de justification entre des jugements, les liens de conséquence entre des contenus conceptuels. Ce travail fut amorcé de façon magistrale en 1879. Nous allons en restituer les nombreuses étapes en accordant toute notre attention aux liens entre les différents contenus conceptuels des expressions, indépendamment de leurs colorations. Afin d'alléger la rédaction, *et hormis lorsque cela sera expressément spécifié*, nous utiliserons désormais les termes 'contenu', 'sens' et 'signification' afin de désigner le seul contenu *conceptuel*[61].

Reconstituer le cheminement de Frege n'est pas chose aisée, car nous disposons d'un maigre corpus de textes et de correspondances de cette époque, notamment à cause de la disparition

60. L'identification abusive des contenus aux combinaisons d'idées est répercutée dans les §§5-12, lorsque Frege expliqua la manière dont les *contenus* – au lieu des contenus *conceptuels* – se combinaient. Dans le §3, il n'aborda la notion de contenu conceptuel que relativement aux énoncés, à cause de la caractérisation (erronée) qu'il en fournit en termes de conséquences. Cette fois encore, le mal ne serait réparé qu'en 1891, lorsqu'il distinguerait le sens de la coloration dans *toute* expression d'un langage, et pas seulement dans les énoncés.

61. Il est incontestable que le terme technique de 1879 n'était ni '*Sinn*' ('sens') ni '*Bedeutung*' ('signification'), mais bien '*Inhalt*' ('contenu'). Néanmoins, comme nous l'avons vu en section 1.2, Frege s'autorisait l'usage des deux premiers noms sans qu'aucune différence substantielle avec le troisième ne soit par là introduite. Étant donné qu'aucune ambiguïté ne risque d'en résulter, nous reproduisons son geste, afin d'acquérir la même souplesse de rédaction.

d'une portion considérable de son *Nachlass*. C'est en partie ce qui provoque des désaccords entre les auteurs qui ont entrepris de réaliser ce délicat travail historique [62]. En exploitant les précieux résultats auxquels ils sont parvenus, nous allons à notre tour tenter d'indiquer et de défendre notre version des faits, afin d'amorcer une étude de la sémantique fregéenne que nous approfondirons lors de notre troisième chapitre.

Donnons dès maintenant un aperçu du fossé qui sépare différents auteurs. Certains s'opposent à l'interprétation que nous venons de décrire. Ils soutiennent que, malgré la formule 'combinaison d'idées', le Frege de 1879 ne concevait pas encore le contenu d'une expression en termes de compositions entre les contenus de ses constituants. Heck et May notamment (2010, 2013) affirment que les premières traces de cette analyse datent de 1881. Baker et Hacker (2003) tiennent la position inverse, et placent dans le premier Frege des vues extrêmement proches de celles de 1891.

Heck écrit :

> Pas une seule des doctrines caractéristiques de la philosophie mature de Frege n'était présente dans son premier ouvrage. (Heck 2017, p. 34)

Pour sa part, Backer conteste qu'il ai existé une quelconque évolution de la notion fregéenne de fonction, en proposant une analyse particulière des §§9-10 de la *Begriffsschrift* :

> Si le problème peut être amené à disparaître *complètement*, [...] rien ne contraindra plus à distinguer une conception précoce d'une conception mature de la fonction. (Baker 2001, p. 541).

Concernant la relation d'identité, Thau et Caplan se dressent contre l'interprétation orthodoxe en affirmant que "Frege n'a jamais renoncé à la vision selon laquelle les énoncés d'identité expriment des pensées métalinguistiques" (Caplan et Thau 2001, p. 163).

Pour notre part, nous allons défendre la position présentée plus haut : Frege introduisit la notion de contenu conceptuel afin de lier la structure de l'expression à la composition du sens. Les catégories de sujet et de prédicat ne furent pas rejetées sous prétexte qu'elles autorisaient, à travers les modes du passif et de l'actif, des expressions différentes d'un même contenu conceptuel, mais parce qu'elles rendaient compte de façon erronée de la mécanique de composition des contenus conceptuels. Elles donnaient des rôles similaires à des contenus conceptuels de natures différentes, et *vice versa*. Ce point s'éclaircira lorsque nous examinerons la formalisation de la quantification. Nous trouverons dès 1879 un large faisceau d'indices dans le sens de notre interprétation, malgré certaines explications inappropriées. Ces dernières sont aisément explicables car les conceptions sémantiques de Frege demeuraient alors à un stade très précoce. Nous allons étudier la manière dont il les corrigea et les approfondit. Mais nous tenons à insister sur un point. Nous avons vu que l'idée induite par une lecture littérale du §3 – selon laquelle la langue formulaire permettait *in fine* de ne jamais consacrer deux expressions différentes à deux contenus qui possèdent les mêmes conséquences – ne tenait pas, et ce pour des raisons triviales que Frege n'a pu (et n'a pas) manquer d'apercevoir par la suite. Nous avons fourni quelques hypothèses concernant les causes possibles de cette erreur et les liens entre ces explications imparfaites et l'objectif poursuivi. Notons par surcroît que, à partir du §5, toute la présentation est dédiée à l'introduction des signes primitifs de son langage, et que cette introduction s'opère à travers la manière dont le sens d'une expression *complexe* résulte du sens de ses constituants. Tout ceci s'accorde avec l'interprétation que nous allons défendre : la langue formulaire a été construite

62. Pour les discussions les plus récentes, voir par exemple (Baker 2001), (Baker et Hacker 2003), (Beaney 2007), (Caplan et Thau 2001), (Heck 2017), (Heck et May 2006), (Heck et May 2010), (Heck et May 2013), (Heck et May 2017), (Linnebo 2003), (May 2001).

dès l'origine dans un but de respect des catégories logiques du sens (des contenus conceptuels), mais cet objectif fut entrepris maladroitement puis, bien sûr, affiné progressivement.

Une dernière remarque nous permettra de débuter sereinement notre analyse. Nous avons dit que la question du rapport sémantique entre une expression et son contenu conceptuel était essentielle à l'élucidation du lien de justification entre jugements et ainsi à l'explication du système de dérivation adopté. Dummett insista longuement sur le travail novateur de Frege à cet égard :

> [Frege] fut le premier à nous offrir une sémantique, c'est-à-dire une analyse permettant de déterminer si une phrase est, ou non, vraie en fonction de la composition des mots qui la constituent. (Dummett 1978, p. 118).

La détermination d'un contenu conceptuel d'une expression à travers celui de ses constituants rappelle beaucoup le travail qui fut effectué quelques décennies plus tard par Tarski et qui permit l'avènement de la sémantique contemporaine. Néanmoins, il existe des différences profondes entre cette dernière et la sémantique entendue dans un sens fregéen. Ce problème donne lieu, depuis une quarantaine d'années, à un important débat entre divers philosophes, historiens et logiciens. Il sera l'objet de notre troisième chapitre. Pour l'heure, nous n'employons pas le terme 'sémantique' selon l'acception précise qu'il reçut à la suite des résultats de Tarski, mais seulement pour désigner le lien qui unit une expression à son sens et qui, comme nous venons de l'expliquer, était central au projet fregéen. Notons surtout que nous ne nous prononçons pas encore sur la *nature* de ce lien. Nous restons volontairement neutres quant à la question de savoir si Frege *théorisa* véritablement une sémantique, s'il établit ainsi une *science* proche de celle que nous connaissons aujourd'hui, ou s'il se contenta d'*exhiber* des liens ineffables, à la manière de Wittgenstein. Nous prenons soin à cette heure de tenir ces questions à distance, nous les rejoindrons plus tard.

1.4.7 Deux modèles de "composition" des contenus

Frege escomptait rendre compte de la légitimité d'une démonstration à travers les liens qui existent entre différents contenus. Quels sont-ils ? En philosophie contemporaine, il existe deux principaux modèles :

(1) Le modèle du rapport entre tout et parties : le contenu d'une expression est constitué de parties à la manière dont une table est constituée d'une planche et de quatre pieds. Ces parties sont elles-mêmes les contenus des expressions qui composent l'expression totale.

(2) Le modèle fonction-argument : le contenu d'une expression est déterminé par les contenus des constituants de cette expression comme une valeur est déterminée par une fonction en un argument.

Il existe des similitudes entre ces modèles. Tous deux autorisent que des énoncés distincts expriment un même contenu conceptuel. Selon le premier modèle, les parties d'une partie sont elles-mêmes parties du tout. Par exemple, si les pieds d'une table sont constitués d'un long cylindre posé sur un cône, le cône est à la fois une partie du pied et une partie de la table. Ainsi, le tout composé d'une planche et de quatre pieds et celui constitué d'une planche, de quatre cylindres et de quatre cônes sont identiques, et correspondent à la table. En ce sens, le contenu d'un énoncé peut admettre différentes décompositions. Selon le second modèle, rien n'interdit que la valeur d'une fonction en un argument soit identique à celle d'une autre fonction en un autre argument. Ce modèle autorise donc aussi l'expression d'un même contenu par différents énoncés.

Dans les deux cas, un élément supplémentaire à la donnée du contenu des constituants est nécessaire pour déterminer le contenu de l'expression. Dans le premier, il faut savoir comment

structurer ces contenus, à la manière dont il convient de connaître comment agencer la planche et les quatre pieds pour obtenir une table. Dans le second, il est insuffisant de connaître les fonctions et les arguments en jeu. Il importe aussi de savoir à quels arguments appliquer quelles fonctions et (potentiellement) dans quel ordre.

Malgré ces similitudes, certaines différences fondamentales séparent les deux modèles. Par exemple, le contenu n'est véritablement *structuré* – constitué de parties – que selon le premier. Selon le second, il est seulement atteint en appliquant des fonctions à des arguments.

En attendant de connaître à quel modèle Frege souscrivait, nous emploierons le terme 'composé' dans un sens étendu qui convient aux deux possibilités. Nous dirons aussi bien qu'un contenu est composé s'il est structuré que s'il est seulement le résultat de l'opération d'une fonction sur un ou plusieurs arguments. Nous convenons qu'il semble surprenant d'affirmer que le nombre 1 est composé du nombre 0 et de la fonction successeur. Mais nous nous appliquons ici à expliquer le choix de règles de dérivations et d'énoncés basant un système en vertu des contenus. Qu'un énoncé reflète la *structure* du contenu ou qu'il dévoile un moyen d'identifier ce dernier *via* une opération entre les contenus de ses constituants, il indique un accès au contenu de l'énoncé total à travers ceux de ses constituants, et permet d'envisager un rapport de causalité entre des contenus et ainsi une relation de justification entre des jugements. Il pourrait par exemple s'avérer, conformément au premier modèle, que le contenu du symbole '$\rightarrow$', agencé d'une certaine façon avec ceux de A et B, résulte en un contenu vrai si et seulement si A est faux ou B est vrai. Au contraire, selon le second modèle, nous pourrions découvrir que le contenu de '$\rightarrow$' est une fonction qui envoie deux contenus jugeables sur un contenu jugeable vrai si et seulement si le premier est faux ou le second est vrai. Chacune de ces interprétations expliquerait l'usage du *Modus Ponens* dans un système logique en dévoilant le lien sémantique qui unit les expressions à leurs contenus.

Heck et May ont récemment défendu la position suivante :

> Bien que Frege regardât les contenus conceptuels comme essentiellement non structurés dans la *Begriffsschrift*, il en vint quasiment immédiatement après à s'éloigner de cette conception au profit d'une autre, selon laquelle les contenus conceptuels sont composés de parties. (Heck et May 2010, p. 129)

Leur thèse est en vérité plus forte. Ils soutiennent qu'en 1879, Frege n'envisageait pas de révéler le rapport sémantique entre contenus et expressions. Ils avancent dans ce sens des raisons pertinentes (que nous allons néanmoins contester). Mais il convient de noter que le fait que le contenu soit non structuré ne constitue pas *en soi* un argument suffisant pour aboutir à leur conclusion. Le modèle fonction-argument pourrait rendre compte du lien sémantique entre contenus, et ainsi de la relation de justification entre jugements, au même titre que le modèle tout-partie.

Avant de trancher entre les deux alternatives, nous dirons donc que la structure de l'expression reflète la composition des contenus, qu'il s'agisse d'en imiter la structure ou d'indiquer les fonctions et arguments à partir desquels ce contenu peut être déterminé. Pour qu'un langage soit adapté au contenu conceptuel, il faut que la *grammaire* d'une langue convienne aux caractéristiques compositionnelles des contenus. Il faut que les combinaisons de signes correspondent à des compositions de contenus, que le contenu du signe composé soit lié aux contenus des signes dont il est composé, selon le premier modèle – qu'il soit constitué de ces contenus – ou selon le second – qu'il s'obtienne par des opérations sur ces contenus. Une langue est *logiquement adéquate* lorsque elle exhibe par ses signes un rapport entre des contenus sur lequel se fonde une relation de justification entre des jugements.

Nous allons tenter de montrer qu'il s'agit bien de l'idée que Frege avait en tête dès 1879, malgré une conception encore insatisfaisante et confuse, obscurcie par d'importantes maladresses

d'écriture, qui a conduit divers auteurs à une conclusion opposée [63].

1.4.8 Annonce des thèses défendues

Nous nous apprêtons à décrire le sentier qui conduisit Frege de la notion de contenu conceptuel à celles de *Sinn* et de *Bedeutung*. Les désaccords à ce sujet sont nombreux. Ils exigent que nous indiquions dès maintenant quelles positions nous allons défendre [64] :

Point de départ : la *Begriffsschrift*

1. La distinction entre objet et concept était déjà annoncée dans la *Begriffsschrift*, et destinée à rendre compte de la composition des contenus.
2. Frege échoua à implémenter correctement cette distinction dans la langue formulaire car il ne concevait pas encore nettement l'*insaturation* (ou incomplétude) des concepts.
3. Il introduisit le binôme fonction-argument. La fonction et l'argument sont à la fois linguistiques *et* extra-linguistiques. En outre, ni aucune expression ni aucun contenu n'est par nature une fonction ou un argument, mais *relativement* au rôle joué dans un énoncé ou un contenu jugeable.
4. Ce binôme servait deux propos :
   (i) rendre compte de la formation des concepts ;
   (ii) rendre compte de la composition des contenus dans le cas de la quantification.
5. Aucun signe primitif ne signifiait encore une fonction – rien n'était par nature une fonction –, et seul le signe pour l'identité de contenu conceptuels signifiait un concept.

Premier mouvement : entre la *Begriffsschrift* et 1882

6. Entre 1879 et 1881, Frege mit à jour l'insaturation du concept. Il réalisa que les notions de fonction et d'argument n'étaient pas nécessaires à la tâche (i). Elles restaient néanmoins indispensables à (ii).
7. Entre 1881 et 1882, Frege puisa dans l'idée d'insaturation la distinction entre concepts de différents *niveaux*. Pour la première fois, il conçut le sens de certains signes primitifs – ceux pour la quantification – comme des *concepts*. La paire fonction-argument n'était plus essentielle à la prise en charge de (ii). Frege n'avait donc plus d'usage pour sa notion de fonction, il y renonça *totalement*.
8. Dans la même période, ses conceptions subirent d'autres bouleversements profonds, causés par une réflexion concernant le concept de *nombre* :
   (a) l'abandon de l'analyse métalinguistique des énoncés d'identité ;
   (b) l'adhésion au logicisme ;
   (c) la substitution de la notion de généralité à celle d'indétermination au fondement de sa vision de la logique ;
   (d) l'extension des modes de détermination aux contenus jugeables, tandis qu'ils étaient préalablement limités aux objets.

63. Voir par exemple (Heck et May 2010) ou (Linnebo 2003).
64. Précisons que chacun de ces points est aujourd'hui controversé, c'est pourquoi nous tenterons de les justifier le plus rigoureusement possible.

Second mouvement : en 1890 [65]

9. En 1890, une crise frappa le cœur des conceptions de Frege. Contrairement à ce qui est souvent affirmé, elle ne provint pas de la polémique qui l'opposa aux formalistes, durant laquelle il fut confronté au problème de la différence de valeur cognitive entre les énoncés '$a = a$' et '$a = b$', et ainsi du statut des énoncés d'identité. En réalité, elle émergea de la prise en considération d'une *nouvelle* notion de fonction, qu'il tenta d'intégrer à sa sémantique générale. Cette crise eut trois conséquences déterminantes :
   (a) l'adoption d'une vision extensionnelle du concept ;
   (b) la distinction entre *Sinn* et *Bedeutung* ;
   (c) l'identification des valeurs de vérité à des objets standards.

1.4.9 L'analyse en termes de fonction-argument

1.4.9.1 Introduction

La première étape du programme de construction d'une langue idéale consiste en une juste analyse logique des énoncés des langues naturelles. Ces derniers possèdent une structure grammaticale complexe, répondant à des enjeux extérieurs à la seule expression des contenus conceptuels. Le logicien doit dévoiler, derrière ces caractéristiques superficielles, la composition profonde des contenus. Dans un second temps, il peut bâtir un langage dont la grammaire expose – en la reflétant – cette composition. Selon Frege, l'analyse en termes de sujet et de prédicat est incorrecte. Les raisons qu'il invoque en 1879 sont insuffisantes. Le fait que deux énoncés différents, l'un suivant le mode de l'actif, l'autre du passif, expriment le même contenu conceptuel n'est pas une objection concluante contre cette analyse. La langue formulaire elle-même exprime parfois différemment un même contenu conceptuel. Le problème que Frege a en vue, et qu'il éclaircira plus tard, est le suivant : les catégories grammaticales de sujet et de prédicat ne respectent pas les catégories du sens, *i.e.* les catégories d'objets et de concepts [66]. Dans l'énoncé 'Marie est une femme', le sujet signifie un objet et le prédicat un concept. En revanche, dans l'énoncé 'l'être humain possède un cœur', le sujet signifie lui-même un concept ou, plus précisément, l'énoncé exprime un rapport de subordination entre des concepts. Or c'est à travers cette différence catégoriale que la composition des contenus s'effectue. La distinction sujet-prédicat est donc inapte à exposer le fonctionnement compositionnel du sens.

Frege en vint rapidement à séparer deux catégories de contenus : les objets et les concepts. L'avantage de cette division se remarque en considérant les énoncés mathématiques dans lesquels la quantification tient une place privilégiée. Durant ses études scientifiques, Frege avait entretenu une importante proximité avec ces énoncés. La nécessité d'un nouveau découpage logique lui fut donc largement inspirée par sa formation. Selon l'analyse sujet-prédicat, les énoncés 'Socrate est mortel' et 'tous les hommes sont mortels' possèdent une forme identique. Ils sont constitués de deux parties : un sujet – 'Socrate', respectivement 'tous les hommes' –, et un prédicat – 'est mortel', respectivement 'sont mortels'. Or le premier énoncé exprime un rapport de subsomption entre un objet – Socrate – et un concept – être mortel –, tandis que le second exprime un rapport de subordination entre deux concepts – être un homme et être mortel. Deux rapports différents correspondent donc à une même structure d'énoncés, et le lien entre les deux énoncés

65. Jusqu'à présent, nous avons parlé du revirement de 1891, date à laquelle le premier des trois articles marquant ce revirement – "Fonction et Concept" – fut publié. Néanmoins, Sundholm (2001) montra que c'est très probablement au cours de l'année 1890 que les positions de Frege basculèrent.

66. Ces catégories deviendront, à partir de 1891, celles de la référence. Mais pour l'instant, sens et référence sont confondus.

et leurs contenus respectifs est ainsi dissimulé, masquant les déductions légitimes à partir de ces énoncés. Un rapide affinement suivant le mode syllogistique aristotélicien n'apporte pas beaucoup d'amélioration. Il permet de déduire 'b est mortel' à partir de 'tous les a sont mortels' et 'b est a', mais s'avère impuissant dès que les quantifications se multiplient dans un même énoncé, souvent masquées. Considérons par exemple les trois énoncés suivants :

- E_1 : 'un homme est plus grand[67] que tous les autres' ;
- E_2 : 'Martin est un homme' ;
- E_3 : 'il existe un homme plus grand que Martin'.

L'analyse traditionnelle ne permet pas la déduction de E_3 à partir de E_1 et E_2. L'énoncé E_1 incorpore deux quantifications. La première est dissimulée dans le nom de concept 'un homme' – présenté comme un nom d'objet – et la seconde manifestée par le terme 'tous'. La méthode du syllogisme prend en considération la seule quantification exhibée par le début de la phrase, elle est donc ici totalement impuissante. La solution proposée par Frege permet une prise en compte *générale* de la quantification. Elle consiste à distinguer scrupuleusement les noms de concepts des noms d'objets. Aucune idée ne fut plus centrale dans sa philosophie : un concept ne subsiste jamais par lui-même. Il est, en tant que tel, incomplet (ou insaturé). Il attend d'être complété par un objet. Une expression qui signifie un concept doit *toujours* respecter la nature du concept, *i.e.* être maintenue dans son rôle et ainsi accompagnée d'une expression pour un objet. Les langues naturelles respectent globalement ce réquisit lorsque l'objet en cause est déterminé. Par exemple, dans l'énoncé 'Marie est française', le nom d'objet 'Marie' occupe la place laissée vacante dans le nom de concept 'est française'. C'est par la quantification que le ver entra dans la pomme. E_1 n'assigne la propriété d'être un homme à aucun objet, aucun nom ne peut donc jouer le rôle tenu par 'Marie' dans l'énoncé précédent. Le terme 'un homme' semble signifier une entité complète, la formulation dissimule son statut. Frege corrigea cette erreur en utilisant des lettres latines et gothiques pour maintenir le nom de concept dans sa forme essentielle. Ainsi, E_1 fut écrit : 'Il existe $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}$ est un homme et que, quel que soit $\mathfrak{b}$, si $\mathfrak{b}$ est un homme, alors $\mathfrak{a}$ est plus grand que $\mathfrak{b}$'. Les expressions 'est un homme' – qui signifie une propriété – et 'est plus grand que' – qui signifie une relation – exposent leurs natures de noms de concepts à travers les places laissées vacantes, et occupées ci-dessus par les lettres '$\mathfrak{a}$' et '$\mathfrak{b}$'.

Il suffit d'employer les symboles contemporains pour les connecteurs et quantificateurs afin de reconnaître le procédé utilisé dans nos langages logiques :

- E'_1 : '$\exists\mathfrak{a}\,(H(\mathfrak{a}) \wedge \forall\mathfrak{b}(H(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}))$'
- E'_2 : '$H(M)$'
- E'_3 : '$\exists\mathfrak{a}(H(\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{a} \geq M)$'

Une fois que les rapports de subsomption et de subordination sont proprement distingués dans l'expression des contenus, il devient possible de spécifier clairement les règles pour la quantification afin de déduire E'_3 à partir de E'_1 et E'_2. C'est ce à quoi s'appliqua Frege, et c'est ce que n'importe quel cours introductif de logique enseigne encore aujourd'hui.

Frege apporta donc un éclairage nouveau sur les rapports entre contenus, dissipant le trouble autour de la quantification. Or, à l'époque où il rédigea sa *Begriffsschrift*, les mathématiques regorgeaient de quantifications imbriquées. Des définitions aussi élémentaires que celles de la continuité ou de la dérivabilité étaient touchées par le phénomène. Les règles de déductions héritées de la distinction sujet-prédicat étaient donc totalement insuffisantes pour effectuer les démonstrations. Les mathématiciens avaient déjà préparé le langage à la quantification en intro-

67. Nous entendons 'plus grand que' au sens large, autrement dit comme 'de taille supérieure ou égale à'.

duisant des lettres pour la généralité – telles que 'x', 'a', 'f', etc. Il restait encore à en éclaircir le statut. Là fut le geste révolutionnaire de Frege, qu'il accomplit en transportant cet outil sur le terrain général de la logique et en l'adaptant – ou plutôt en le généralisant – aux différentes composantes des contenus conceptuels des énoncés. Il l'annonça dès le premier paragraphe de l'ouvrage :

> *J'adopte cette idée fondamentale de distinction entre deux sortes de signes,* [...] *pour la rendre utilisable de manière générale dans le domaine plus étendu de la pensée pure.* Par conséquent, je divise tous les signes que j'emploie *en ceux par lesquels on peut se figurer des choses diverses* et *en ceux qui ont un sens totalement déterminé.*

Frege révolutionna la logique à travers la substitution de l'analyse concept-objet à celle sujet-prédicat. Il expliqua que certains contenus jugeables – par exemple la circonstance que Marie est française – résultent de la composition d'un concept – par exemple celui d'être française – et d'un objet – par exemple Marie. Cette composition est reflétée sur le terrain linguistique par la combinaison des expressions 'Marie' et 'est française' : 'Marie est française'.

À ce stade, nous ne savons pas encore si les contenus sont composés selon le modèle tout-partie ou fonction-argument. Les questions de la nature des concepts et du processus de composition entre objets et concepts demeurent intactes. D'autre part, certains contenus jugeables incorporent d'autres contenus jugeables. Le sens de 'si le temps est clément, alors Maris ira pique-niquer' est lui-même composé des sens de 'le temps est clément' et 'Marie ira pique-niquer'. L'analyse concept-object nous conduit à identifier le sens de 'si ..., alors ...' à un concept (relationnel). Dans ce cas néanmoins, les deux autres éléments du contenu global, qui sont des contenus jugeables, doivent être des *objets*. Peut-on identifier la circonstance que le temps est clément à un *objet* ?

Frege se heurta tour à tour à ces différentes difficultés, et les surmonta finalement en distinguant le *Sinn* et la *Bedeutung*. Le chemin parcouru entre 1879 et 1891 fut parsemé d'embûches. La *Begriffsschrift* constitue sa première véritable tentative, insatisfaisante à de nombreux égards. Par exemple, les notions d'objet et de concept en sont quasiment absentes. Elles n'acquirent leur place privilégiée qu'en 1881. En 1879, Frege ne se prononçait pas clairement en ces termes. Il n'introduisit pas une analyse distinguant les expressions pour des concepts – qu'ils soient relations ou propriétés – des expressions pour des objets, mais une division entre *fonctions* et *arguments*. Il ne faut *en aucun cas* conclure qu'il souscrivait au second modèle de composition des contenus, mais tenter de comprendre ce qu'il mettait derrière ces termes.

Sur la base de ce silence initial concernant les notions d'objet et de concept, certains commentateurs soutiennent qu'il ne s'intéressait pas encore à la composition de contenus, n'abordant le problème que deux ans plus tard. Il n'est pas simple de se décider pour ou contre cette conclusion, car l'exposition de la langue formulaire n'est pas conforme aux canons actuels. Par exemple, les règles de remplacement syntaxique ne sont stipulées nulle part. Plus grave encore, la morphologie n'est jamais proprement établie, si bien qu'il s'avère compliqué de s'interroger sur le lien entre contenus des signes simples et des signes composés sans savoir exactement comment les compositions entre signes s'effectuent. Il faut donc récolter autrement nos indices, notamment à travers la distinction entre fonction et argument, pour entamer notre périple et comprendre ce qui a guidé Frege, depuis la *Begriffsschrift*, jusqu'aux conceptions sémantiques de 1891.

1.4.9.2 Fonction-argument et concept-objet : deux matrices entremêlées

Dès l'introduction, Frege insista sur l'importance d'une nouvelle grille d'analyse du langage :

> Je crois que le remplacement des concepts *sujet* et *prédicat* par *argument* et *fonction* fera ses preuves à la longue. On reconnaît facilement comment la compréhension d'un contenu comme fonction d'un argument opère en formant des concepts. (Frege 1879b, p. VII, 9)

Frege avertit clairement qu'il abandonnait la matrice logique traditionnelle, à travers laquelle les constituants primitifs étaient conçus comme sujets et prédicats, au profit d'une nouvelle organisation dans laquelle les éléments de base sont la fonction et l'argument. Cette mise en garde trouve un écho dans la critique radicale de la distinction sujet-prédicat qui survient quelques pages plus loin, et que nous avons déjà discutée. La deuxième phrase est cruciale : elle suggère un lien entre les fonctions et les concepts. Néanmoins, celui-ci n'est jamais véritablement éclairci dans la *Begriffsschrift*. Il n'empêche donc pas divers auteurs de soutenir qu'il fallut plusieurs années à Frege pour établir sa distinction entre objets et concepts, ainsi que la division corrélative entre expressions pour un objet et expressions pour un concept, autrement dit que Frege ne prenait pas encore en considération le lien sémantique entre une expression et son contenu, essentiel à l'idée de justification d'un jugement par un ou plusieurs autres jugements. Nous allons défendre un point de vue intermédiaire : de nombreux indices révèlent que les développements futurs étaient déjà en germe dans cet ouvrage, mais que Frege se heurta à différents obstacles qu'il n'était pas encore en mesure de surmonter. Loin d'ignorer le problème de la composition des contenus en termes d'objets et de concepts, il était simplement incapable d'en rendre compte proprement, à la manière dont il s'y appliqua plus tard. Pour le comprendre, il est essentiel de cerner les notions de fonction et d'argument, telles qu'elles furent introduites en 1879 et telles que, nous le pensons, elles polluèrent considérablement la *Begriffsschrift*.

Il est vrai que l'intégration de ces notions mathématiques au domaine logique se tient parmi les grandes innovations fregéennes. Aujourd'hui encore, philosophes et logiciens rendent hommage à ce geste fondateur. Citons un exemple récent :

> La plus importante innovation de Frege fut l'utilisation de l'analyse fonction-argument dans le développement de son langage logique, qu'il nomma 'Begriffsschrift' [...] En effet, nous pouvons dire sans exagérer que sans cette innovation Frege ne tiendrait aucune place dans l'histoire de la logique, aucune de ses doctrines caractéristiques n'aurait été formulée, et la philosophie analytique du vingtième siècle aurait été très différente. (Beaney 2007, p. 93-94)

Cependant, les commentateurs font ainsi référence à la forme prise par ces notions *après* 1891. Nous allons voir que la fonction et l'argument de 1879 sont au contraire la cause profonde de tous les problèmes de la *Begriffsschrift*, et que Frege finit par y renoncer *totalement*. La fonction réapparut en 1891, mais sous une forme différente. Elle fut destinée à étendre le véritable *medium* de l'analyse logique de la première période : le concept. L'objectif de cette section consiste donc à examiner la *première* version de la distinction fonction-argument, et la manière dont celle-ci fut rapidement et totalement *supplantée* par la distinction concept-objet, avant de renaître sous des traits nouveaux.

Dans un premier temps, notons que les explications de 1879 sont lacunaires et parfois incorrectes. Nulle part, au sein de la présentation de sa langue, Frege n'expliqua comment une fonction opère pour *former* un concept. Cette dernière notion est quasiment absente de son développement. Quant à la première, il en fournit une surprenante caractérisation aux §§9-11 :

> Si, dans une expression dont le contenu n'a pas besoin d'être jugeable, un signe simple, ou composé, apparaît à une ou plusieurs places, et si nous pensons que ce signe est remplaçable à toutes ou à quelques-unes de ces places par autre chose, mais

> partout par la même chose, alors nous appelons la partie de l'expression se présentant invariablement, fonction et la partie remplaçable, son argument. (Frege 1879b, p. 16, pp. 30-31)

D'après ce critère, la fonction est un constituant *linguistique*, ce qui soulève immédiatement une difficulté. Comment une fonction – une expression – serait-elle capable d'opérer pour former un concept, ce dernier étant situé sur le terrain des contenus et non du langage ? Voilà qui motiva Heck et May à conclure :

> Si la fonction et l'argument sont des notions linguistiques, alors le complexe qui résulte de leur composition [...] est aussi linguistique ; ce que nous avons est un complexe linguistique dont les parties constituantes sont des expressions linguistiques, incluant une "fonction" et un "argument". Ce que la combinaison d'une fonction et d'un argument produit est ainsi seulement un énoncé. Mais dans ce cas, il est difficile de voir comment l'analyse en termes de fonction-argument nous aide à comprendre comment les propriétés formelles des énoncés de la langue formulaire peuvent refléter les propriétés logiques de leurs contenus ; aucun lien n'a été établi entre l'analyse en termes de fonction-argument d'un énoncé donné et une propriété quelconque de son contenu. Mais dans ce cas, alors il y a une importante lacune sémantique dans l'exposition de la langue formulaire : aucune raison n'a été donnée de supposer que les manipulations formelles fonctionnent comme convenu, c'est-à-dire non seulement qu'elles sont rigoureuses et sans aucun saut, mais encore qu'elles nous conduisent de vérités en vérités. (Heck et May 2010, pp. 131-132)

Heck et May ont parfaitement raison sur ce point. Si le découpage proposé se situe exclusivement sur le terrain du langage sans qu'il n'existe aucun pendant au niveau du sens, alors nulle relation entre des contenus ne peut être aperçue à travers la structure des énoncés. Mais ce qui est plus surprenant encore, c'est que Frege a critiqué la matrice traditionnelle du découpage en termes de sujet-prédicat précisément parce qu'elle était dénuée de pertinence vis-à-vis des contenus conceptuels. Lorsque, dans la préface, il annonça son remplacement par la distinction fonction-argument, tout laissait penser qu'il entendait ainsi corriger ce défaut. Pourtant, il introduisit les notions de fonction et d'argument en expliquant que "cette distinction n'a rien à voir avec le contenu conceptuel. Au contraire, elle est une simple question de point de vue." (p. 15 / 29). Pourquoi donc avoir entrepris cette transition, si la nouvelle version présente exactement le même défaut que l'ancienne ? Certes, l'analyse en termes de fonction-argument est plus générale, et donc plus riche, que l'analyse en termes de sujet-prédicat, car Frege autorise un nombre quelconque d'arguments aux fonctions (pp. 17-18 / p. 32), contrairement au prédicat qui n'est lié qu'à un sujet. Mais cela ne lui octroie aucun bien-fondé vis-à-vis des contenus conceptuels.

Heck et May ne sont pas seuls à soutenir que Frege présentait en 1879 une conception linguistique de la fonction. Angelelli (1967, p. 153), Bynum (1972, p. 13), Diamond (1991, p. 188 / 253) ; Dummett (1991a, p. 209), Kenny (1995, p. 17) et Russell (1903, p. 480) se tiennent à leurs côtés [68]. Baker s'y opposa, d'abord seul (2001), puis épaulé par Hacker (2003). Son premier mouvement consista à révéler que l'usage fregéen des guillemets ne correspondait pas, à cette époque, à leur utilisation contemporaine. Ce faisant, il expliqua que, dans un certain nombre de cas, la présence des guillemets ne signifiait pas que Frege traitait d'un élément linguistique plutôt que de son contenu. Ce point est correct [69], mais il s'avère impuissant à expliquer l'extrait

68. Nous reprenons ici les exemples réunis par Baker (2001).

69. Nous avons expliqué en section 1.2.2 combien cette interprétation permettait de dissoudre l'ambiguïté présente dans certains passages.

ci-dessus, dans lequel Frege identifie expressément la fonction et l'argument à des *expressions*, sans qu'aucune guillemet ne soit impliquée.

Néanmoins, quelques lignes plus loin, Frege aborda les fonctions et arguments comme constituants, non plus d'énoncés, mais de contenus :

> Les différentes manières d'interpréter le même contenu conceptuel en tant que fonction de tel ou tel autre argument (p. 17 / 31)
>
> Pour exprimer [*auszudrüken*] une fonction indéterminée (p. 18 / 32)

Et ces extraits ne sont pas isolés dans la *Begriffsschrift*. On trouve peu ou prou autant de cas dans lesquels la fonction est identifiée à un signe que de cas où elle est ramenée à un contenu. Frege la présentait parfois comme une expression, parfois comme un sens. Une certaine dichotomie y était donc incontestablement attachée. Ceux qui la considèrent comme exclusivement linguistique, en s'appuyant sur la manière dont elle fut introduite, font fi d'une bonne moitié des exemples fournis par Frege. Heck et May se tiennent parmi eux, et ils justifient ainsi leur choix :

> Dans la présentation du travail de Frege, Philip Jourdain mentionne, dans sa liste des "progrès réalisés par Frege entre 1879 et 1893", que "les traces de formalisme dans la langue formulaire ont disparu : une fonction cesse d'être appelée un nom ou une expression" (Frege 1980, p. 204). Frege lui même commenta abondamment l'écrit de Jourdain, et nombre de ses commentaires furent intégrés par Jourdain en notes de bas de pages (parfois très longues). Compte tenu de l'aversion de Frege pour le formalisme, il semble improbable qu'il n'eût pas corrigé Jourdain s'il avait considéré que cette remarque était incorrecte. Par conséquent, dans la *Begriffsschrift*, Frege traite la distinction entre fonction et argument comme purement linguistique. Au contraire, dans ses travaux plus tardifs, il traite la distinction entre fonction et objet comme métaphysique. (Heck et May 2013, p. 7)

Mais leur argument n'est valable que s'il faut *trancher* entre les deux interprétations : soit Frege considérait en 1879 que la fonction était partie d'une expression, soit il estimait qu'elle était partie d'un contenu. Or c'est précisément une radicalité à laquelle il résistait alors. La rédaction de sa présentation montre qu'il considérait que la fonction était *à la fois* un élément linguistique et un élément du contenu. Ainsi la remarque de Jourdain ne suscite plus aucun étonnement : en 1893, Frege s'était mis à considérer la fonction *exclusivement* comme non-linguistique, donc cette dernière perdit bel et bien le caractère linguistique qu'elle possédait en 1879, bien qu'elle fut *aussi* considérée comme non-linguistique à cette date. C'est précisément la position de Baker :

> Frege n'aurait pas accepté qu'une explication du concept de fonction qui mentionne les symboles ne puisse aussi être une explication correcte de comment appliquer le terme 'fonction' à ce que ces symboles symbolisent. Il ne se serait pas estimé face au dilemme logique qui confronte les commentateurs modernes. Il pouvait dire 'à la fois/et' au lieu de 'ou bien/ou bien'. (Baker 2001, p. 536)

Pour autant, il semble surprenant qu'un homme qui prévint toute sa vie des dangers de l'ambiguïté des mots ait octroyé sans avertissement un double sens à un terme central de son traité. Ce geste n'est explicable que s'il est totalement inoffensif, *i.e.* si le lecteur ne peut rencontrer aucune difficulté à placer le sens adéquat derrière chaque occurrence du terme. Et c'est bien là l'avis de Baker :

> Frege ne vit aucun risque de confusion (logique) ou de manque de rigueur à parler tantôt d'une expressions *de la langue formulaire*, tantôt du contenu conceptuel lui-même. Ce faisant, il n'imaginait pas qu'un lecteur averti puisse tenir ces deux versants

> de l'expression pour mutuellement inconsistants ; qu'il puisse être conduit à affirmer : 'Ici Frege dit 'le *symbole F* apparaît à une place dans l'*expression* $F(A)$', donc il ne *peut pas* parler d'un élément extra-linguistique'. Il ne pouvait pas davantage imaginer qu'un lecteur attentif puisse ignorer que la discussion se restreignait aux expressions de la langue formulaire. Seuls les symboles de la langue formulaire doivent entretenir un rapport d'isomorphisme avec les constituants des contenus jugeables qui étayent sa méthode d'exposition. (C'est précisément le point qu'il établit au §9 en démarquant la langue formulaire des langages ordinaires). (Baker 2001, pp. 538-539)

Baker développa cet argument avec Hacker (2003) dans le but de montrer que la sémantique de 1879 était limitée à la langue formulaire et n'avait aucune prétention à s'appliquer aux langages naturels. Selon eux, il y a "peu de raison de distinguer l'expression de son contenu" (p. 286) car il existe un isomorphisme entre – disons le en termes ensemblistes – la structure des contenus et celle des expressions de la langue formulaire. Le contenu d'une expression de la forme '$\Phi(A)$' est constitué du concept Φ et de l'objet A. La forme de l'expression dévoile la composition de son contenu. L'isomorphisme permet de parler librement de la fonction comme l'élément linguistique ou comme son contenu, non qu'il y ait identité entre les deux, mais parce qu'ils se déterminent l'un l'autre de façon univoque.

Cette interprétation présente un problème majeur : il ne peut y avoir isomorphisme car il n'y a pas *bijection*. Nous avons expliqué plus haut non seulement que différentes expressions de la langue formulaire pouvaient partager le même contenu, mais encore que Frege avait construit sa langue dans cette intention, comme en témoigne l'intégration d'un signe pour *l'identité des contenus* qui perdrait la quasi-totalité de son intérêt si une telle bijection existait. Si, comme Baker et Hacker l'affirment, Frege maintenait bel et bien la notion de fonction doublement sur le terrain linguistique et sur celui des contenus, la raison qu'ils invoquent pour l'expliquer est insatisfaisante. Frege n'a jamais cru que deux expressions différentes de la langue formulaire possédaient nécessairement deux contenus différents. Il n'a donc pas entretenu une certaine ambiguïté commode en pensant qu'une bijection la rendait inoffensive.

C'est finalement par excès que Baker et Hacker ont péché. Ils ont invoqué un argument non seulement fallacieux, mais surtout superflu pour conclure que Frege ne courait aucun risque à fissurer sa notion de fonction. Leur plaidoyer sert bien sûr un autre propos. Il tend à démarquer la langue formulaire des langages naturels, afin de localiser les développements de Frege exclusivement dans le domaine de la première. Mais ce propos n'est pas le nôtre. Et nous pouvons affirmer sans crainte qu'aucun isomorphisme n'est nécessaire pour justifier la cohabitation de notions linguistique et extra-linguistique au sein d'un même terme. En effet, si Frege n'a pas jugé utile d'ancrer une fois pour toute la fonction dans le sol des contenus ou celui de la langue en 1879, c'est parce que cette notion était, à cette époque, *contextuelle*. Aucune expression ni aucun contenu n'est en soi une fonction, mais relativement à notre attitude vis-à-vis d'un énoncé ou d'un contenu jugeable, ou directement à une expression ou son contenu. À travers elle, Frege ne cherchait pas encore à tracer les limites d'une catégorie ontologique (ou linguistique), mais à dévoiler un *rapport* qui peut être aussi bien envisagé du point de vue des contenus que des expressions.

En effet, Frege expliqua que la fonction était *relative* à notre façon de *regarder* l'expression totale. Le fait qu'une partie d'une expression soit fonction ou argument n'est pas inhérent à cette partie, mais provient de la manière dont nous l'abordons. Dans l'énoncé 'Marie est française', il est possible de considérer le mot 'Marie' ou l'expression 'est française' comme remplaçable (non remplaçable) – et ainsi comme étant l'argument (la fonction). De même, dans la circonstance que Marie est française, il est possible de considérer le contenu de 'Marie' ou celui de 'est française' comme remplaçable (non remplaçable) – et ainsi comme étant l'argument (la fonction). Les

deux gestes vont de pair : en abordant une expression comme remplaçable (non remplaçable), nous faisons de même concernant son contenu, et *vice versa*. Ainsi l'usage d'un même nom pour qualifier ce rapport dans la sphère de la langue et celle des contenus ne soulève aucune difficulté, le contexte est suffisant pour déterminer où nous nous situons.

Cependant les notions de fonction et d'argument ne furent pas introduites dans le but ultime de décrire notre rapport à une expression et son contenu. Ceci n'était qu'une étape vers la prise en charge de la quantification. Dans les cas qui intéressaient Frege, certaines expressions (contenus d'expressions) ne sont plus fonction ou argument relativement à notre manière de les aborder, mais relativement au contenu des énoncés où elles figurent (auquel ils appartiennent) :

> Pour nous, les différentes manières d'interpréter le même contenu conceptuel en tant que fonction de tel ou tel autre argument n'ont aucune importance aussi longtemps que la fonction et l'argument sont complètement déterminés. Mais si l'argument devient *indéterminé*, comme dans le jugement 'tu peux prendre comme argument pour 'être représentable par la somme de quatre nombres au carré' un nombre entier positif quelconque : l'énoncé reste toujours vrai', alors la distinction entre fonction et argument gagne en *contenu*. À l'inverse, l'argument peut aussi être déterminé, mais la fonction indéterminée. Dans les deux cas, par moyen de l'opposition entre le *déterminé* et l'*indéterminé*, ou entre le *plus* et le *moins* déterminé, la totalité est analysée en *fonction* et *argument* selon son contenu et pas selon notre point de vue. (p. 17 / 31)

Lorsque seul notre regard entre en considération, l'argument est ce que nous tenons pour remplaçable. Dans l'énoncé 'Marie est plus grande que Paul', nous pouvons considérer aussi bien 'Marie' que 'est plus grande que Paul' comme la partie modifiable, *i.e.* comme l'argument. Dans la circonstance que Marie est plus grande que Paul, nous pouvons considérer aussi bien le contenu de la première expression que celui de la seconde comme la partie modifiable, *i.e.* comme l'argument. La division s'applique aussi bien sur le terrain linguistique que sur celui des sens.

Mais il est possible de substituer au caractère remplaçable, situé dans l'intention du locuteur, un caractère *indéterminé*. Ceci advient lorsque nous transportons cette intention sur le terrain des contenus, et que nous la reflétons à travers l'expression. Quel est l'intérêt de rendre *indéterminée* une partie du contenu qui était alors envisagé comme remplaçable ? Aux yeux de Frege, la réponse ne faisait aucun doute : cela permet la *quantification*.

Dans l'énoncé 'Si Marie est plus grande que Paul, alors elle est plus grande que Martin', il est non seulement possible d'envisager le contenu de 'Marie' comme remplaçable, mais aussi de le rendre indéterminé. Pour ce faire, il suffit de substituer une lettre gothique à l'expression en cause. Et ceci permet d'opérer une *quantification* :

'Pour tout $\mathfrak{a}$, si $\mathfrak{a}$ est plus grand que Paul, alors $\mathfrak{a}$ est plus grand que Martin'

L'expression 'si ... est plus grande que Paul, alors ... est plus grande que Martin' possède un contenu déterminé. Au contraire, la lettre '$\mathfrak{a}$' possède un contenu *indéterminé*. À travers la notion d'indétermination, Frege espérait rendre compte de la quantification : certaines lettres sont destinées à porter la *généralité*, elles ne possèdent aucun contenu spécifique.

Voici l'exemple qu'il fournit lui-même : 'tu peux prendre comme argument pour 'être représentable par la somme de quatre nombres au carré' un nombre entier positif quelconque : l'énoncé reste toujours vrai' (p. 17 / 31). Cet énoncé exprime le théorème des quatre carrés de Lagrange. Il se traduit aisément dans un langage mathématique contemporain :

$$\text{`}\forall x \in \mathbb{N}, \exists y_1 \in \mathbb{N}, \exists y_2 \in \mathbb{N}, \exists y_3 \in \mathbb{N}, \exists y_4 \in \mathbb{N}, (x = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)\text{'}$$

Par la formulation ‘tu peux prendre comme argument pour [...] un nombre entier quelconque’, Frege voulait mettre en relief la *généralité* du contenu, exprimée dans notre énoncé mathématique par ‘$\forall x \in \mathbb{N}$’. Il n’y a rien ici qui puisse surprendre ou émouvoir nos yeux contemporains. Pour l’époque en revanche, l’introduction d’un signe pour la quantification constituait une avancée considérable. Frege fut le premier à en munir son système, lui offrant un atout dont la logique booléenne était privée[70]. Le signe (rétrospectivement) atypique qu’il utilisa fut conservé dans l’idéographie, il s’agit de ‘$\smile$’. Au-dessus de l’arc de cercle est écrite la lettre attachée au quantificateur, comme dans : ‘$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$’.

D’après la description fregéenne du déterminé et de l’indéterminé, il semble que l’argument corresponde à la partie indéterminée qui se trouve dans la portée du quantificateur. La fonction, au contraire, correspond au restant, *i.e.* à la partie déterminée qui se trouve dans la portée du quantificateur. Considérons l’énoncé ‘$(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2) \rightarrow 1^2 = 1$’, seule la partie ‘$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2$’ se trouve sous sa coupe. Ainsi :

– la fonction est le contenu (déterminé) de ‘$\cdots + \cdots = 2$’ ;

– l’argument est le contenu (indéterminé) de ‘$\mathfrak{a}$’.

Les notions de déterminé et d’indéterminé sont absolues, elles s’appliquent aux contenus et non aux éléments linguistiques : un contenu est en soi déterminé ou indéterminé. En revanche, les notions de fonction et d’argument restent relatives, non plus à l’intention du locuteur, mais à la place de la quantification dans un contenu conceptuel. Par exemple, le contenu de ‘$\cdots + \cdots = 2$’, fonction dans notre exemple précédent, perd ce statut dans l’énoncé ‘$(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, 1^2 = \mathfrak{a}) \rightarrow 1 + 1 = 2$’, bien qu’il soit encore partie du contenu global.

Si nous considérons le (contenu du) signe ‘3’ comme la partie modifiable (du contenu de) de l’énoncé ‘$3^2 \geq 0$’, alors il devient l’argument exclusivement vis-à-vis de notre intention. Afin de procéder à une quantification, nous reflétons l’indétermination sur le terrain de la langue – en utilisant le signe $\mathfrak{a}$ qui n’est le nom d’aucun objet – et nous l’établissons sur le terrain des contenus – en "retirant" une partie du contenu jugeable. Ce faisant, nous pouvons écrire l’expression ‘$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a}^2 \geq 0$’ qui exprime la circonstance que, quel que soit $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \geq 0$.

Nous pouvons donc, toujours sans risque de confusion, qualifier à la fois la lettre ‘$\mathfrak{a}$’ et son contenu indéterminé comme étant l’argument, et à la fois l’expression ‘$\ldots^2 \geq 0$’ et son contenu déterminé comme étant la fonction, puisqu’il ne s’agit pas là de décrire une propriété inhérente à un contenu, mais un contexte qui possède un pendant sur le terrain des contenus, et un autre sur le terrain linguistique. Cette ambiguïté est bel et bien bénigne. Que les notions de fonction et d’argument soient envisagées sous l’angle du remplaçable ou du déterminé, elles ne correspondent à aucune catégorie linguistique, logique ou ontologique, mais servent seulement à décrire un rapport entre des contenus ou entre des expressions. Ces deux rapports étant totalement parallèles, l’usage de mêmes mots, aussi peu rigoureux soit-il, ne porte pas à conséquence. Le contexte permet sans problème au lecteur de se situer sur le terrain souhaité. Les nombreuses tensions qui gangrènent la *Begriffsschrift* sont indépendantes de cette histoire. Elles proviennent de difficultés plus sérieuses que Frege n’était pas encore parvenu à surmonter. Car si, suivant son expérience des mathématiques, il entreprit naturellement de rapprocher la distinction de l’indéterminé et du déterminé à celle de la fonction et de l’argument, il échoua à décrire proprement le lien qui les unit. Les explications que nous venons de donner, et que Frege suggéra lui-même, posent certains problèmes, qui proviennent d’une seconde ambiguïté attachée à la notion de fonction.

70. Frege était conscient du bond qu’il effectuait. Dans un bref article de défense de sa langue formulaire, il expliqua qu’il tenait le signe pour la quantification pour "un des éléments les plus importants de [s]a langue formulaire ; c’est par lui que, en tant que simple représentation des formes logiques, elle marque un progrès définitif sur l’écriture de Boole" (Frege 1882b, p. 106 / 79).

Il est remarquable que celle-ci soit rarement relevée par les commentateurs de Frege, qui s'attachent davantage à discuter le problème du caractère linguistique de la fonction. Pourtant, ce dernier point ne pose pas de difficulté réelle. Il s'agit d'une ambiguïté tout à fait inoffensive. En revanche, la confusion que nous nous apprêtons à dévoiler est maligne. Nous espérons, à travers elle, apporter un éclairage neuf au problème.

La première difficulté importante intervint lors de présentation de la quantification :

> *Si l'on remplace cet argument par une lettre gothique, et si l'on met un creux, dans lequel cette lettre elle-même se trouve, dans le trait de contenu, comme dans*
> $\smile^{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})$,
> *alors cela signifie le jugement que cette fonction est un fait, quoi que l'on considère comme étant son argument.* (p. 19 / 33)

Cette formulation est incorrecte. La fonction, même localisée parmi les contenu, *n'est pas un fait.* Elle attend la donnée d'un argument pour pouvoir le devenir.

Une découverte bien plus déroutante accompagne un examen attentif du passage dans lequel Frege introduit sa notion d'indétermination. Il explique que "si l'argument devient *indéterminé*, [...] alors la distinction entre fonction et argument gagne en *contenu*", et conclut que "par moyen de l'opposition entre le *déterminé* et l'*indéterminé* [...] la totalité est analysée en *fonction* et *argument* selon son contenu" (p. 17 / 31). Il suggère ainsi clairement ce que nous avons traduit plus haut : l'analyse en fonction-argument s'opère à travers la distinction entre déterminé/indéterminé. Dans la portée d'un quantificateur, la fonction correspond au premier et l'argument au second. Pourtant, entre ces deux passages, Frege procède à une précision déconcertante :

> À l'inverse, l'argument peut aussi être déterminé, mais la fonction indéterminée. (p. 17 / 31)

Frege semble ici radicalement dévier de sa trajectoire. *Il est absolument incohérent de caractériser la fonction comme une certaine partie déterminée puis d'accepter qu'elle soit elle-même indéterminée.* Or il ne s'agit pas d'une simple maladresse de formulation. On retrouve cette idée plus loin :

> Pour exprimer [*auszudrüken*] une fonction indéterminée de l'argument A, nous mettons A entre parenthèses après une lettre, comme par exemple dans
>
> $$\Phi(A).$$
>
> De même,
>
> $$\Phi(A, B)$$
>
> signifie [*bedeutet*] une fonction des deux arguments A et B, qui n'est pas mieux déterminée. (p. 18 / 32)

Outre le raccourci relevé ci-dessus, qui consiste à dire que la fonction est le sens de '$\Phi(A)$' et non de 'Φ', ces explications soulèvent la difficulté que nous venons de voir : si A est présenté comme l'argument de $\Phi(A)$, il devrait donc être la partie *indéterminée* du contenu. Pourtant Frege parla de *fonction indéterminée*, ce qui est, d'après sa caractérisation, purement et simplement un oxymore. Ces passages sont incontestablement les plus troublants de la *Begriffsschrift.* Le caractère relatif de la notion de fonction a permis de résoudre l'ambiguïté liée aux oscillations

entre les terrains de la langue et des contenus. Mais il ne nous est d'aucun secours ici. Comment expliquer que Frege ait introduit la fonction comme ce qui est déterminé (dans un certain contexte), puis intégra des fonctions indéterminées ? L'interprétation que nous allons défendre présentera simultanément une réponse à la question posée plus haut : quel rôle jouait en 1879 la division entre objet et concept, qui n'était pas encore proprement spécifiée aux côtés de la distinction entre fonction et argument ?

Heck et May (2010) affirment que Frege ne présentait aucune conception de composition des contenus dans la *Begriffsschrift*. Ils basent leur analyse sur l'idée que le découpage en fonction-argument était exclusivement linguistique, et correspondait à la seule composition des *expressions*. Ainsi, il concernerait uniquement notre *accès* aux contenus, mais il n'en dévoilerait aucunement la composition. Il permettrait seulement d'envisager la partie d'une expression comme remplaçable – l'argument – ou fixe – la fonction. Au contraire, le concept (qu'il soit propriété ou relation) et l'objet seraient bel et bien des éléments de contenus qui se composeraient entre eux. Selon Heck et May, il aurait fallu attendre le découpage en termes de noms de concepts et de noms d'objets, spécifié en 1881, pour qu'apparaisse véritablement l'intention de révéler la composition des contenus à travers l'analyse des énoncés.

Nous avons vu que la notion de fonction de 1879 n'était pas exclusivement linguistique, mais cela n'ôte pas toute pertinence à l'argument de Heck et May. Bien sûr, la possibilité de rendre indéterminée une partie d'un contenu jugeable – possibilité présente dès 1879, quoi qu'ils en disent – ne peut s'appuyer que sur une décomposition de ce dernier. Mais comment procède cette décomposition ? Aucune catégorie de contenu ne peut être identifiée aux fonctions ou aux arguments qui sont *relatifs* : un contenu peut être fonction dans un cas, et argument dans un autre. Que sont, *in fine* et en eux-mêmes, ces contenus qui oscillent entre fonctions et arguments ? Les différents indices dispersés dans la *Begriffsschrift* suffisent à anticiper la réponse qu'il donnerait deux ans plus tard : il s'agit d'objets et de concepts. Frege entendait déjà, contrairement à ce qu'affirment Heck et May, induire un découpage en termes d'objets et de concepts à travers sa distinction fonction-argument. Mais, une fois encore, il se prononça maladroitement, ce qui engendra les surprenants passages relevés plus haut.

Voyons les indices. D'une part, *tous* les exemples fournis par Frege témoignent que le découpage en fonction et argument *respecte* la distinction entre objet et concept. Ce qu'il envisage de considérer comme remplaçable – l'argument – est *toujours* un objet (le nom d'un objet) ou un concept (le nom d'un concept). Il en va de même pour ce qu'il entreprend d'aborder comme non remplaçable – la fonction. Contrairement à l'analyse en terme de sujet et de prédicat, qui isole des parties d'expressions – par exemple 'tous les hommes' – qui ne nomment ni un objet ni un concept, le découpage (relatif) en termes de fonctions et d'arguments respecte celui (absolu) en termes d'objets et de concepts. *Tous* les arguments et fonctions envisagés par Frege signifient (sont) soit l'un soit l'autre.

Un deuxième signe montre qu'en parlant de 'combinaison d'idées', Frege entendait véritablement une composition des contenus. Dans une note de bas de page, il expliqua que "la circonstance qu'il y a des maisons (ou une maison) est un contenu jugeable. Mais l'idée 'maison' n'en est qu'une partie." (p. 2 / 16). Cette partie correspond, ici aussi, à un concept, et la décomposition en jeu n'implique manifestement pas les expressions, mais leurs contenus [71].

Voici le troisième indice :

> On peut lire

71. Rappelons que les guillemets autour de 'maison' (dans le texte de Frege, pas dans le nôtre) ne servent pas à désigner le terme.

$$\vdash \Phi(A)$$

comme 'A a la propriété Φ'.

$$\vdash \Psi(A, B)$$

peut-être traduit par 'B se trouve dans la relation Ψ à A' ou 'B est le résultat de l'application de la procédure Ψ à l'objet A'. (p. 18 / 31)

Frege le dit ici sans détour. Les symboles situés *devant* les parenthèses signifient une propriété ou une relation, *i.e.* un *concept*. Les symboles placés *entre* les parenthèses signifient un *objet*. Or, juste avant ce passage, Frege avait précisé que 'Φ' et 'A' pouvaient au même titre jouer le rôle de fonction et d'argument. Frege a donc, *en conscience*, réglé son découpage fonction-argument sur l'analyse concept-objet.

Il annonçait dans son introduction que la compréhension d'un contenu comme fonction d'un argument opérait en formant des concepts. Il lui semblait alors que ces derniers surgissaient lorsqu'une partie d'un contenu est conçue comme remplaçable. Il ne s'agit pas seulement d'accéder à un contenu, mais bien de dégager ses différentes parties à travers ce processus. Car, et cela Frege le dirait bientôt, un concept ne subsiste pas de façon autonome. Il est toujours impliqué dans un contenu plus complexe, qui permet son dévoilement [72]. D'ici peu, Frege comprendrait qu'il n'est pas nécessaire pour cela de concevoir une partie comme remplaçable, mais qu'il suffit de la vider de son contenu. Autrement dit, la notion de fonction ne lui semblerait plus nécessaire à l'élaboration de concepts. Il solliciterait à cette fin l'idée d'insaturation, ou d'incomplétude, et s'en tiendrait rapidement à la distinction entre concepts et objets [73]. Mais cette idée faisait

72. Frege oscille entre des formulations qui suggèrent un réalisme radical des concepts et d'autres qui, au contraire, confinent à l'antiréalisme. Notre dernière phrase traduit bien cette instabilité, en parlant d'abord d'une création puis d'un dévoilement de concepts. Nous aurons à dire sur ce sujet, mais cela attendra notre troisième et dernier chapitre.

73. Notre objectif est ici d'établir que Frege a introduit les notions relatives de fonction et d'argument pour expliquer la formation de *contenus*, ainsi que pour les gérer dans le cas de la quantification. Les signes que nous avons relevés ont permis d'identifier ces contenus : les objets et les concepts. Le découpage d'un énoncé en fonction et argument n'est pas arbitraire, il respecte la composition de son contenu en termes de concept et d'objet. Les notions de concept et d'objet étaient, dès 1879, au fondement même de celles de fonction et d'argument, elles constituaient leur raison d'être.

Il existe un passage qui semble à première vue affaiblir cette interprétation. Nous voulons montrer qu'au contraire, il la renforce. Mieux encore, il annonce déjà ce que nous verrons plus tard. Au moment d'introduire les fonctions, Frege expliqua qu'on pouvait considérer comme remplaçable une partie d'une expression "dont le contenu *n'a pas besoin d'être jugeable*" (p. 16 / 30, nous soulignons). Considérons une expression de ce type, par exemple '$1+1$'. Nous pouvons alors concevoir '1' comme la partie remplaçable – l'argument – et '$\cdots+\ldots$' comme la partie non remplaçable – la fonction. Le contenu de l'argument '1' est un objet, mais celui de la fonction '$\cdots+\ldots$' n'est *pas* un concept. Alors quel est-il ?

Frege ne le dirait pas avant 1891. Il s'agit d'une fonction : une entité qui envoie des objets sur des objets. Ce terme n'aurait donc pas à ce moment la même signification qu'en 1879. Il ne qualifierait plus une partie d'une expression ou d'un contenu relativement à notre manière de l'aborder. Il désignerait des contenus d'un certain type. Pour éviter l'ambiguïté, parlons de 'fonction$_2$'. En 1879, Frege avait mis à jour les notions relatives de fonction et d'objet. Il pensait ainsi révéler celles, absolues et ayant trait aux contenus, de concept et d'objet ; et entrevoyait simultanément celles de fonction$_2$ et d'objet. Ceci appuie notre analyse selon laquelle la distinction fonction-objet servait la mise à jour d'un découpage absolu de contenus. Mais il y a un autre point auquel nous tenons, car il sera d'une importance considérable pour comprendre le mouvement de 1891. Incontestablement, Frege ne pouvait pas ignorer que le couple concept-objet était insuffisant pour rendre compte de la composition des contenus. Les mathématiques intégraient des opérations telles que l'addition ou la multiplication qui lui échappaient. C'est pourquoi il entreprit de considérer aussi les expressions dont "le contenu n'a pas besoin d'être jugeable". *Néanmoins jamais il ne tenu compte de cette possibilité ni dans ses autres explications, ni dans ses exemples, ni dans la*

cruellement défaut en 1879, *et c'est là la clef de toute l'affaire.* La notion d'insaturation se substitua progressivement à celle d'indétermination. Elle permit de rendre un autre compte de la quantification et de développer tout l'appareil linguistique lié à la hiérarchie des concepts. En définitive, elle permit à Frege de se débarrasser totalement des notions de fonction et d'argument. Lorsque ces dernières réapparurent en 1891, elles étaient méconnaissables, très différentes de leurs ancêtres de la *Begriffsschrift.*

1.4.9.3 Les signes primitifs contiennent-ils des concepts ?

Afin de présenter notre hypothèse concernant les passages problématiques cités plus haut, nous allons examiner la manière dont Frege tenta de rendre compte du contenu de ses signes primitifs. Dans l'idéographie de 1893, la quasi-totalité [74] de ces derniers – par exemple pour l'implication, la négation et la quantification – sont conçus comme signifiant des concepts. À quelle période Frege a-t-il adopté cette position ? La question est aussi délicate qu'importante, car pour rendre compte de la composition des contenus, Frege était tenu d'expliquer le lien qui unissait le contenu de '$p \to q$' à ceux de 'p' de '$\to$' et de 'q'. Baker estime qu'il avait déjà franchi ce cap déterminant en 1879 :

> Il nous faut comprendre que la *Begriffsschrift* traite toutes les constantes logiques comme des *fonctions* et explorer les implications de cette doctrine relativement à la conception fregéenne de la langue formulaire. Cela expliquerait immédiatement pourquoi [Frege] estime que la langue formulaire présente *tout* contenu jugeable comme articulé en termes de fonctions et d'arguments, et vis-à-vis de la notion de fonction de *second niveau*, ceci fournirait le prototype mathématique de son analyse innovante de généralité multiple. Dans la structure de la *Begriffsschrift*, la conception des

constitution de sa langue formulaire. Il ne traduisit jamais '$\Phi(A)$' comme 'la valeur de la fonction$_2$ Φ en l'objet A', mais toujours comme 'l'objet A a la propriété Φ'. Dans sa langue, les symboles 'f' et '$\mathfrak{f}$' ne sont pas des lettres de fonctions$_2$, mais toujours de concepts.

En 1879, Frege ne s'est donc pas arrêté sur la notion de fonction$_2$, bien qu'il l'ait aperçue en arrière-fond. S'il l'avait fait, il aurait été poussé vers des changements plus brutaux que ceux – de 1879-1882 – qu'ont induit les problèmes de l'indétermination. Il aurait été brusquement conduit aux bouleversement de 1891 parce que, comme nous le verrons, c'est (notamment) en tentant d'adapter aux opérations mathématiques ce qu'il disait des concepts qu'il fut amené à modifier son cap. Frege était mathématicien, il connaissait l'existence de ces opérations, et n'a pu ignorer totalement les fonctions$_2$. Néanmoins, il fut en mesure de poursuivre assez loin son objectif sans en tenir compte, si bien que cette notion fut absente de la *Begriffsschrift*, des textes de 1881-1882, et des *Grundlagen.* Elle sommeillait paisiblement. Lorsque Frege se décida enfin à la prendre en considération, il pensait probablement qu'il suffirait d'adapter le travail réalisé dans le cas des concepts. C'est alors qu'il comprit l'étendue de son erreur, et la profondeur des modifications à effectuer pour la corriger.

L'usage d'un même terme pour différentes notions est à la source des nombreux débats concernant l'évolution de ses thèses, et n'aide pas à reconstituer proprement cette trajectoire. C'est pourtant ce à quoi nous nous appliquons ici. Le couple fonction-argument fut conçu pour rendre compte de la distinction entre certains contenus – les objets et les concepts – et pour permettre sa prise en charge dans le cadre de la quantification. Les fonctions$_2$ – ces contenus qui ne subsument pas, mais opèrent sur, des objets – étaient dans le champ de vision, mais furent laissées de côté. Sans en tenir compte, Frege comprit que les notions de concept et d'objet ne devaient rien à celles de fonction et d'argument, qu'il put abandonner sans risque. C'est lorsqu'il fixa enfin son regard sur les fonctions$_2$ qu'il subit un choc autrement plus violent. Le premier mouvement, que nous sommes en train de raconter, eut lieu entre 1879 et 1882. Le second, que nous décrirons en section 1.6, conduisit aux trois articles révolutionnaires de 1891-1892.

Pour l'heure, nous souhaitions seulement justifier notre (apparente) négligence de l'affirmation selon laquelle le couple fonction-argument servait aussi à décomposer des expressions "dont le contenu n'a pas besoin d'être jugeable". Frege lui-même la négligea ; cette affirmation n'eut d'écho ni dans la *Begriffsschrift*, ni dans aucun texte antérieur à 1891. Elle fut formulée dans un lointain désert et parcourut de longues distances en solitaire, avant de resurgir soudainement quelques douze ans plus tard.

74. à l'exception du signe pour les parcours-de-valeurs, absent de la langue formulaire.

> constantes logiques comme fonctions semble soutenir l'explication des itérations et des combinaisons des constantes logiques, et elle semble façonner sa conception du principe de substitution qu'il sollicite constamment dans ses dérivations formelles. Cette interprétation exhiberait l'inspiration purement *mathématique* des innovations frappantes de son système logique, et intégrerait cette explication du concept de fonction dans les accomplissements logico-mathématiques de la *Begriffsschrift*. (Baker 2001, p. 542)

L'analyse de Baker présente une première faiblesse. Si nous la suivons, nous acceptons que la notion de fonction ait, à cette date, déjà caractérisé une catégorie ontologique. Or nous avons vu qu'un contenu n'est fonction que *relativement* à un contexte (intention de l'auteur, contenu global dans la portée du quantificateur). Frege considérait donc qu'aucun contenu n'était par nature une fonction, pas davantage celui d'un signe primitif qu'un autre. Malgré cette erreur, l'argument de fond de Baker rejoint la question que nous avons posée ci-dessus. Frege était tenu de rendre compte de la composition des énoncés de la langue formulaire. Or ces derniers incorporent les signes primitifs. Selon Baker, Frege atteignit son objectif en intégrant une notion absolument générale de fonction, qui couvre aussi ces signes. Cela est incorrect, Frege n'envisageait pas d'*identifier* les signes primitifs (ou leurs contenus) à des fonctions. Mais il entendait peut-être expliquer comment l'analyse fonction-argument permettait de dévoiler les concepts (et non les fonctions) contenus dedans – par exemple dans '$\rightarrow$' à travers l'examen d'un énoncé '$p \rightarrow q$'. C'est, après tout, la seule et unique manière de justifier que *tout* contenu jugeable soit décomposable selon l'analyse fonction-argument. Cette dernière nous indique la décomposition du contenu de 'Marie est française' *via* l'objet 'Marie' et le concept 'est française'. En revanche, elle ne nous est plus d'aucune aide quant au contenu de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$' si ceux de '$\smile$' et '$\rightarrow$' ne sont pas eux-mêmes tenus pour des concepts. Les explications fournis aux §§9-10 pourraient bien être destinées à régler une fois pour toutes le problème, en expliquant comment accéder aux concepts contenus dans les signes primitifs à travers l'analyse fonction-argument.

Nous allons nous prononcer contre cette idée. En 1879, Frege ne concevait pas encore les contenus des signes primitifs comme des concepts[75]. Cette étape intervint plus tard, et fut motrice dans l'éclatement des notions de *Sinn* et de *Bedeutung*.

Procédons à une première remarque dans cette direction. Nulle part au sein de la *Begriffsschrift*, Frege n'a manifesté l'ambition d'analyser *tout* contenu jugeable *exclusivement* en termes de fonctions et d'arguments. Il s'est contenté d'annoncer la substitution de ce découpage à l'ancestrale analyse sujet-prédicat. Mais cette dernière ne possédait pas non plus la capacité de structurer *tous* les énoncés. Considérons par exemple : 's'il pleut, alors je prends mon parapluie'. Ni l'expression 'si ... alors ...', ni aucune de ses composantes ne joue le rôle de sujet ou de prédicat. Le signe '$\rightarrow$' ne trouve pas sa place au sein de la division sujet-prédicat. Rien n'indique que Frege voulait lui en attribuer une dans sa propre analyse. Certes, s'il désirait rendre compte de la composition des contenus de *tous* ses énoncés, il lui incombait de considérer *aussi* ceux qui intègrent ce signe. Mais il lui suffisait d'expliquer *autrement* la composition dont ils résultaient, sans impliquer ni fonction, ni argument. Nous dirons dans quelques instants comment il s'y appliqua.

75. Notons une fois pour toute l'*unique* exception suivante : le contenu du symbole '$\equiv$' était déjà conçu comme une relation en 1879. Néanmoins, nous n'allons pas en tenir compte ici, pour une raison simple : nous verrons – et nous expliquerons – que cette exception, et la manière dont elle évolua, furent déterminantes dans le second mouvement subi par les conceptions de Frege, mais ne jouèrent quasiment aucun rôle dans le premier, auquel nous nous intéressons actuellement. C'est donc lorsque nous nous consacrerons à l'étude du revirement de 1890 – précisément en section 1.6.1 – que nous traiterons du problème de l'identité. Il serait inutilement encombrant de nous y confronter dès maintenant.

De plus (et surtout), si la négation et l'implication étaient des concepts, ils ne seraient pas complétés par des objets, mais par des *contenus jugeables*[76]. Le contenu de 's'il pleut, alors je prends mon parapluie' résulterait de la composition du concept contenu dans 'si ..., alors ...' par les contenus *jugeables* de 'il pleut' et 'je prends mon parapluie'. Or, *avant 1891*, Frege ne fournit *jamais* le *moindre* exemple d'un concept de ce type. S'il avait envisagé leur existence en 1879, il aurait provoqué une (seconde) rupture radicale vis-à-vis de la logique traditionnelle. Cela aurait justifié de longues explications, en aucun cas un silence obstiné. Il est hautement improbable – et c'est un euphémisme – que Frege ait conçu un nouveau type de concepts, jamais relevé par aucun logicien, central pour expliquer le fonctionnement du langage, et qu'il soit resté *totalement* muet à ce sujet[77]. Lorsqu'en 1891, il permettrait aux pensées – les contenus jugeables des énoncés – de venir compléter des concepts, il justifierait longuement son geste.

Contrairement à ce que soutiennent Heck et May, les fonctions de la *Begriffsschrift* ne sont pas exclusivement linguistiques et la distinction objet-concept est sous-jacente dans tout le texte, démontrant que Frege prenait déjà en considération le problème de la composition des contenus. Contrairement à ce qu'affirme Baker, les termes primitifs de la langue formulaire ne sont ni des fonctions ni des concepts, et la composition de certains contenus fut prise en charge d'une manière différente. Nous défendons donc une vision intermédiaire. Contre Heck et May, nous disons que Frege tenta bel et bien de rendre compte de cette composition en 1879 ; contre Baker, nous disons qu'il ne le fit pas en identifiant ses signes primitifs à des concepts.

En 1881, Frege expliqua que 'le rapport hypothétique n'[était] pas selon [lui] un rapport entre jugements mais entre contenus jugeable.' (Frege 1881, p. 11 / 19). Selon cette analyse, '$p \to q$' exprime un certain *rapport* entre les contenus de 'p' et 'q'. L'expression 'il pleut $\to$ je prends mon parapluie' exprime que la circonstance qu'il pleut se tient dans le rapport d'implication avec la circonstance que je prends mon parapluie ou, pour le dire plus naturellement, que la seconde est conséquence de la première.

Mais la rédaction de 1879 est, une fois de plus, déconcertante. Dans le §5, Frege ne caractérisa pas le signe pour l'implication en vertu de formulations telles que 'p est faux ou q est vrai' ou, selon son lexique de l'époque, 'p est un fait ou q n'est pas un fait', ou encore 'p n'a pas lieu ou q a lieu' ; mais en termes de 'p est nié ou q est affirmé'. Le choix des mots 'affirmer' et 'nier' est terriblement maladroit, car il réintroduit la force assertive à l'intérieur du sens de l'énoncé alors que, nous l'avons vu, l'intégration du trait vertical au langage était précisément destinée à l'en écarter. Le contenu de '$p \to q$' est indépendant du fait que p ou q soient affirmés, niés, tenus pour vrai, tenus pour faux, tenus pour un fait ou non tenus pour un fait. Il serait cependant injuste de conclure, à partir de cette maladresse, d'une part que Frege liait véritablement l'acte de jugement au contenu de l'expression, car cela supposerait d'ignorer purement et simplement la présence et le rôle du trait vertical ; et d'autre part que Frege ne tenta pas de rendre compte de la composition des contenus des symboles '$\to$', 'p' et 'q'. Nous avons longuement développé ce point en note de bas de page 23. Voici un nouvel indice dans ce sens. Frege synthétisa en fin d'introduction les éléments importants de son ouvrage. Il écrivit notamment :

> Puisse [...] la mise en évidence du rapport entre les significations des termes : si, et , ne ... pas, ou, il y a , quelques, tous, etc. susciter l'attention. (p. VII / 9)

76. Rappelons qu'en 1879, les deux catégories étaient encore distinctes.
77. Heck et May aboutissent à une conclusion similaire :

> Il n'y a aucune indication dans la *Begriffsschrift* que Frege ait regardé les opérateurs propositionnels comme (étant ou signifiant) des fonctions. (Heck et May 2006, p. 15)

Mais Heck et May regardent ce point comme un signe que Frege ne présentait aucune conception de composition des contenus en 1879. Nous disons, pour notre part, qu'il abordait *autrement* la composition des contenus.

Il accordait donc un contenu propre aux signes primitifs de la langue formulaire. Le lien entre ces contenus et celui des expressions dans lesquelles ils apparaissent ne lui avait pas échappé, c'est même ce qui le préoccupait. C'était par la mise en évidence du rapport des *contenus* de ces termes qu'il escomptait rendre compte des règles et axiomes utilisées dans ses dérivations. Son objectif consistait déjà à mettre en relation les combinaisons des signes avec les compositions des contenus. Il était indéniablement focalisé sur la *sémantique* de ses symboles. Pour autant, il ne conçut pas leurs contenus en termes de concepts. Il se contenta de caractériser proprement leurs sens en décrivant celui des expressions dans lesquels ils apparaissent *relativement* à celui des autres signes qui figurent dans ces expressions. Observons par exemple les explications du signe pour la négation, qui ne souffrent pas des mêmes maladresses que l'introduction du signe pour l'implication :

> Si l'on met un petit trait vertical sous le trait de contenu, on exprime de cette manière la circonstance *que le contenu n'a pas lieu* [*nicht stattfinde*]. Ainsi, par exemple
>
> $$\vdash_{\top} A$$
>
> signifie : 'A n'a pas lieu'. (p. 10 / 24)

Le contenu de l'expression '$_{\top}\, p$' est la circonstance que p n'a pas lieu. Il est donc caractérisé en fonction de celui de 'p'. La manière employée pour introduire le sens des signes primitifs était la suivante : exprimer le sens des expressions dans lesquels ils sont, comme nous le dirions aujourd'hui, connecteurs ou quantificateurs principaux – '$_{\top}\, p$' – relativement au sens des autres constituants de ces expressions – 'p'. Les *significations* (le mot est de Frege) des signes primitifs (à l'exception des lettres gothiques et latines) sont donc – employons un terme contemporain – des *opérateurs*, qui transforment un ou plusieurs contenus en un nouveau contenu.

Disons-le en passant, nous insisterons plus tard : ce point s'oppose à l'idée que le contenu d'un énoncé soit une *structure* constituée des contenus de *tous* les symboles de l'énoncé. Si nous voulons malgré tout défendre l'idée que $\Phi(A)$ est structuré – au sens du rapport entre un tout et ses parties – par l'objet A et le concept Φ, il faut comprendre comment l'opération de négation *transforme* cette structure (sans en devenir un constituant) en $_{\top}\, \Phi(A)$. En revanche, et c'est ce qui nous importe pour l'instant, cela ne s'oppose pas du tout au fait que la composition du contenu (au sens large, impliquant l'action des opérateurs) soit reflétée par la combinaison des symboles, autrement dit au fait que les contenus des constituants d'un énoncé déterminent celui de l'énoncé.

Cette lecture en termes d'opérateurs constituait la manière la plus naturelle d'aborder le problème, et Frege n'avait *a priori* aucune raison de s'en écarter. Elle semblait fonctionner pour la totalité de ses symboles[78]. Seule une difficulté importante, liée à la quantification, le contraignit, *après* 1879, à préciser sa notion d'incomplétude afin de reconnaître un concept dans la signification du signe pour la quantification, puis dans celle de tous ses signes primitifs, et aboutit *in fine* à la division entre *Sinn* et *Bedeutung*. Voyons quel était cet obstacle.

1.4.9.4 La quantification

L'analyse sujet-prédicat divise l'énoncé 'tous les hommes sont mortels' en deux parties : le sujet 'tous les hommes' et le prédicat 'sont mortels'. Ce découpage ne permet pas d'intégrer généralement la quantification et s'avère donc totalement inadéquat à la formalisation des énoncés mathématiques. Pour remédier à ce défaut, Frege proposa d'écrire ainsi l'énoncé en question :

78. à l'exception du signe '≡' qui, répétons-le, ne joue aucun rôle dans cette affaire.

'$\smile^{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a}$ est un homme $\rightarrow$ $\mathfrak{a}$ est mortel)'

Nous arrivons à une des clefs de lecture de la *Begriffsschrift*. Frege se heurta immédiatement à une difficulté de taille lorsque, dans la première partie, il présenta le contenu de ses *symboles*. Il envisageait naturellement le sens d'un énoncé en termes de combinaison des sens des *symboles* qui constituent cet énoncé [79]. Tout se déroulait correctement vis-à-vis de de l'implication, la négation et l'identité, jusqu'à ce qu'il se heurte au problème de la quantification. Afin de réitérer pour '$\smile$' ce qu'il avait réalisé dans les précédents cas, il lui fallait caractériser le contenu de l'énoncé '$\smile^{\mathfrak{a}}$ $\Phi(\mathfrak{a})$' en fonction de ceux des autres symboles qui y figurent, *i.e.* '$\mathfrak{a}$' et 'Φ'. Or le rôle de '$\mathfrak{a}$' consistait à porter la *généralité*, et interdisait qu'il possédât un quelconque sens *déterminé*. C'est face à cette difficulté que Frege en vint à adopter l'analyse fonction-argument. Le contenu de '$\mathfrak{a}$' était l'argument, il était *indéterminé* et, à ce titre, pouvait porter la *généralité*. Malheureusement, ce procédé ne résolvait pas le problème.

En rendant indéterminé le contenu de '1' dans l'énoncé '$1^2 \geq 0$', nous n'obtenons pas directement le contenu de '$\smile^{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{a}^2 \geq 1$', mais celui de '$\mathfrak{a}^2 \geq 1$', dont Frege ne savait ni que dire ni ce qu'il était [80]. Quelques années plus tard, il substituerait l'idée d'insaturation à celle d'indétermination. Afin d'obtenir un concept, il soustrairait une partie du contenu total plutôt qu'il ne la rendrait indéterminée. Ce faisant, il serait confronté à l'expression '$\ldots^2 \geq 1$', et non plus à '$\mathfrak{a}^2 \geq 1$'. Mais en 1879 le cap n'était pas franchi. Et cette dernière expression posait problème, son sens n'étant pas plus déterminé que celui de la lettre qu'elle intégrait. Qu'à cela ne tienne, Frege l'expulsa de son langage. Il s'en tint à placer les lettres gothiques exclusivement dans la portée de quantificateurs : '$\smile^{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{a}^2 \geq 1$'. Mais cet énoncé incorpore aussi la lettre '$\mathfrak{a}$'. Son sens – qu'il voulait déterminé – dépend de celui de '$\mathfrak{a}$' – indéterminé. Il semble que nous soyons face au même problème. Frege entreprit de le résoudre à travers l'affirmation suivante :

> La lettre gothique ne fixe sa signification qu'à l'intérieur d[u] domaine [du quantificateur]. (p. 20 / 34)

Son intention est claire : il voulait permettre la variation de la valeur prise par la lettre '$\mathfrak{a}$' sous la stricte autorité du quantificateur. Il voulait détacher sa valeur à cet endroit de la valeur qu'elle prenait dans l'énoncé total. Tarski parvint à réaliser ce tour de force, à travers l'introduction des assignations. Mais Frege n'avait rien de tel à sa disposition, et sa phrase réclamait la solution plus qu'elle ne l'apportait. Des questions en émergent inexorablement. Quel est exactement le rôle du sens de cette lettre dans l'énoncé total ? Comment procède en définitive la composition des contenus dans cet énoncé ? Si '$\mathfrak{a}$' possède une signification déterminée sous le quantificateur, donc au sein de $\Phi(\mathfrak{a})$, alors ce dernier est aussi déterminé, et dépend de cette signification *précise*. Ainsi $\smile^{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{a}^2 \geq 1$, composé de $\mathfrak{a}^2 \geq 1$ et $\smile$, dépend à son tour de cette valeur, et '$\mathfrak{a}$' ne porte plus aucune généralité. Disons le différemment : par quel miracle l'opérateur de quantification $\smile$ parvient-il à *transformer* un contenu indéterminé en un contenu déterminé ? En creusant le problème, Frege comprit rapidement qu'il ne savait pas traduire en terme de composition des contenus le fait que "la lettre gothique ne fixe sa signification qu'à l'intérieur d[u] domaine" du quantificateur. Toutes ses formulations sont défectueuses. Il expliqua que '$\smile^{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{a}^2 \geq 1$' signifiait

79. Au même titre, et en utilisant des symboles étrangers à la langue formulaire, nous pourrions dire que le contenu de '$1 + 1 = 2$' est déterminé relativement à ceux de '1', '2', '+' et '='.

80. La prise en considération des expressions qui, dénuées de quantificateurs, incorporent des lettres latines – par exemple '$\vdash a^2 \geq 1$' – ne change rien à l'affaire. Frege caractérisa ainsi le sens de ces expressions :

> Un lettre latine a toujours pour domaine le contenu de tout le jugement, sans que cela ne soit désigné par un creux dans le trait de contenu. (p. 21 / 35)

Une lettre latine est donc une lettre gothique déguisée, dont le quantificateur (invisible) se trouve au début de l'expression.

que la fonction était un fait quel que soit son argument. Mais la fonction n'est pas un fait. Dans notre exemple, il s'agit d'un concept. Et si l'argument est par nature indéterminé, il n'est pas en mesure, une fois composé avec la fonction, de *déterminer* un fait.

Aucune de ses explications ne fut apte à rendre un juste compte de la composition des contenus dans le cas de la quantification. La notion d'indétermination qu'il avait introduite dans cette perspective n'aboutissait pas. Il lui manquait l'idée d'insaturation qui le délivrerait une fois pour toutes de ce fardeau. Nous allons voir qu'il en possédait déjà l'intuition en 1879. Mais cette intuition ne fut pas correctement exploitée, et la carence fut fatale. La totalité des confusions qui obscurcissent son traité en proviennent directement.

Frege ne spécifia pas correctement la différence entre – expressions pour des – concepts et – expressions pour des – objets. Hormis à de rares occasions, il s'est cantonné à la distinction fonction-argument. L'explication de ce point gît dans la manière dont la division concept-objet nous offre un accès à la composition des contenus à travers la structure des expressions. Frege éclairerait bientôt le cœur de l'affaire, dans une lettre à Anton Marty datant de 1882 :

> Un concept est insaturé [*ungesättigt*] en ceci qu'il exige que quelque chose tombe sous lui, ainsi il ne peut pas exister indépendamment. (Frege 1976, p. 164)

Le terme 'insaturé' apparut pour la première fois à cette date. Frege avait donc proprement établi sa distinction entre objets et concepts :

> En général, je représente le fait qu'un individu tombe sous un concept par $F(x)$, où x est le sujet (l'argument) et F est le prédicat (la fonction), et où la place vide dans les parenthèse qui suivent x indiquent l'insaturation. (Frege 1976, p. 164)

Il ne le dit pas clairement dans cette lettre, mais l'idée émergea (sous une forme imparfaite, nous le verrons) dès 1881 : le terme '$F(\ldots)$' incorpore une place vide. Celle-ci reflète, au niveau de l'expression, l'insaturation du concept qu'elle contient. Lorsqu'elle est complétée par un nom d'objet, alors il résulte un énoncé qui exprime que l'objet tombe sous le concept. Ainsi, Frege n'aborda plus le concept en termes d'indétermination, ce qui le forçait à traiter le cas de la lettre '$\mathfrak{a}$' dans l'expression '$F(\mathfrak{a})$', mais en termes d'incomplétude, traduisant la place vacante au sein de '$F(\ldots)$' comme la marque de l'insaturation de son contenu. Il put ainsi se passer de l'analyse fonction-argument pour former des concepts. L'analyse concept-objet fonctionnait en toute autonomie :

> Au lieu d'obtenir le jugement en assemblant un individu comme sujet avec un concept déjà tout formé comme prédicat, nous décomposons à l'inverse le contenu jugeable pour obtenir le concept. (Frege 1881, p. 18 / 26)

La décomposition du contenu de 'Marie est française' permet d'obtenir le concept d'être française. Aucune notion de fonction n'est plus impliquée ici, aucune différence entre déterminé et indéterminé n'est en jeu. L'ambiguïté présente en 1879 fut dissoute. La distinction entre concept et objet fut détachée de celle qui intervient entre fonction et argument. Cependant, Frege avait encore besoin de cette dernière dans le cas de la quantification, qu'il persistait à penser en termes d'indétermination, *i.e.* de fonctions et d'arguments.

Nous retrouvons, dans la lettre à Marty, le problème lié à la surprenante formule de 'fonction indéterminée'. Frege explique que le signe 'x' est l'argument et le signe 'F' est la fonction[81].

81. Contrairement à ce qu'affirment Heck et May (2010, 2013), à cette date la notion de fonction ne s'était pas du tout cristallisée dans la sphère des contenus. Étant donné l'emploi fregéen des guillemets (qui ne correspond pas à la distinction entre usage et mention), '$F(x)$' réfère ici à la *représentation* du fait qu'un individu tombe sous un concept, *i.e.* à l'expression elle-même. Ce point est cohérent, car si en 1882, Frege stipulait clairement la

Mais pourquoi tient-il 'F' et non pas 'x' comme étant la fonction ? Ici, aucune quantification n'est en jeu, l'indétermination n'intervient pas en vertu du contenu mais de la seule intention de l'auteur, et Frege n'a aucune raison de favoriser l'une ou l'autre possibilité, et encore moins de rester silencieux sur la nécessité d'un choix alors qu'il introduit auprès de Marty des notions que ce dernier ignore.

Notons qu'à chaque manifestation du problème, *i.e.* lorsque Frege choisit arbitrairement un composant comme étant la fonction, sa décision se porta sur le (nom du) concept. La situation est identique dans le cas de l'expression 'fonction indéterminée'. Il désigna toujours ainsi le (signe pour le) concept. Il y a une explication éclairante à ce problème. Il était, dès le départ, gêné à l'idée qu'une fonction soit, dans un contexte ou un autre, un (nom pour un) objet. Il eut d'emblée l'intuition qu'elle devait intrinsèquement être accompagnée d'autre chose, qu'elle attendait une donnée supplémentaire. Dans le cas où la fonction est le (nom du) concept, comme par exemple (')est française('), cette intuition est respectée, il faut ajouter (le nom d') un objet, par exemple (')Marie('). Mais dans le cas où la fonction est directement (le nom de) l' objet, par exemple (')Marie('), alors la difficulté surgit, car celui-ci subsiste parfaitement sans ajout d'argument. Or Frege était *contraint* de prendre ces cas en considération. Une fois de plus, ce problème est lié à la quantification.

En effet, la quantification de deuxième ordre exigeait l'extension de la notion de fonction en jeu dans les mathématiques de l'époque, qui attachaient systématiquement l'indétermination au symbole 'x' de l'expression '$f(x)$' :

> Etant donné que dans l'expression
>
> $$\Phi(A)$$
>
> le signe Φ apparaît à une place, et que nous pouvons penser qu'il est remplacé par d'autres signes – Ψ, χ – par lesquels d'autres fonctions de l'argument A seraient exprimées, *on peut comprendre '$\Phi(A)$' comme étant une fonction de l'argument* Φ. À cela, on voit très clairement que le concept de fonction de l'analyse que j'ai suivi en général est bien plus restreint que celui que j'ai développé ici. (pp. 18-19 / p. 33)

Il renforça cette conclusion au sein des *Grundgesetze*[82] :

> Comme moyen d'engendrer des fonctions, on a ajouté aux opérations fondamentales de l'arithmétique la prise en compte des limites sous les diverses formes des séries infinies, des quotients différentiels, des intégrales ; et le mot 'fonction' a finalement été entendu dans un sens si général que la connexion entre la valeur de la fonction et son argument ne peut plus être exprimée par les signes de l'analyse, mais seulement par des mots. Une extension supplémentaire a consisté à admettre des nombres complexes comme arguments et ainsi aussi comme valeurs de fonctions. J'ai été encore plus loin dans ces deux directions. (Frege 1893, p. 6)

Il était nécessaire à Frege de ne pas se limiter à une quantification sur les objets mais de l'autoriser dans le cas des concepts, car la définition des propriétés héréditaires (essentielle aux démonstrations de sa troisième partie) incorporait des quantifications d'ordre supérieur. Il permit donc à des signes pour des concepts de figurer au-dessus de la concavité, et intégra des expressions

différence entre les notions absolues d'objets et de concepts, qu'il s'était contenté de suggérer en 1879, il s'en tenait toujours à la distinction entre les notions relatives de fonction et d'argument, et non entre les notions absolues de fonction et d'objet. Il pouvait donc encore concevoir librement l'expression ou son contenu comme étant fonction ou argument.

82. L'enrichissement que nous discutons ici est une partie du premier abordé par Frege dans cet extrait.

de la forme '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mathfrak{f}(\Delta)$'. L'indétermination concernait au même titre le contenu de l'expression pour l'objet que celui de l'expression pour le concept. C'est pourquoi il était possible que l'objet (le nom de l'objet), et non le concept (nom du concept), soit lui-même une fonction. Si par exemple nous tenons le contenu de la partie 'nage' (la partie 'nage') pour déterminée dans 'John nage', alors le contenu de 'John' (l'expression 'John') est la fonction et le contenu de 'nage' (l'expression 'nage') est l'argument. Heck et May aboutissent à cette conclusion [83] :

> Qu'est-ce qui 'demeure invariant' quand nous faisons varier 'nage' ? La réponse naturelle est, quand 'nage' varie, ce qui demeure invariant est simplement 'John'. Rien de ce que Frege ne dit dans la *Begriffsschrift* ne contredit cette interprétation. (Heck et May 2013, p. 7)

Mais Frege était gêné par ce point. À ses yeux, et son expérience mathématique ne pouvait manquer de lui inspirer cette idée, une fonction requiert la donnée d'un argument, elle ne subsiste pas par elle-même. Il avait absolument besoin, pour la quantification de second ordre, d'autoriser l'indétermination des signes pour des noms de concepts, et de permettre corrélativement aux objets (aux noms d'objets) de devenir des fonctions. Pourtant, cela contredisait l'intuition selon laquelle une fonction attend la détermination d'un élément, car l'objet (le nom de l'objet) subsiste très bien par lui-même.

En 1879, le problème a engendré la tension dont nous avons fait état. Lorsqu'il expliqua 'si l'argument devient *indéterminé*' (p. 17), il parut envisager les cas où l'argument n'est plus seulement remplaçable vis-à-vis de l'intention du locuteur, mais indéterminé vis-à-vis du contenu. Malheureusement, cette interprétation échoue trois lignes plus loin : 'à l'inverse, l'argument peut aussi être déterminé, mais la fonction indéterminée' (p. 17). Non ! Par définition, la fonction *ne peut pas* être indéterminée. Si Frege en arrive à de telles extrémités, c'est parce qu'il se laisse guider par deux intuitions différentes. D'une part, la fonction ne peut être qu'un signe pour un concept – elle attend la donnée d'un argument, ce qu'un (nom d')objet n'attend pas –, d'autre part, la fonction est la partie déterminée – et le second ordre exige que cette partie soit parfois un objet (un nom d'objet). La même confusion gangrène la totalité du §10, dans lequel Frege tient tantôt la fonction pour le concept (le nom du concept) , tantôt pour la partie déterminée (le nom de la partie indéterminée) . Le problème intervient à nouveau dans la lettre à Marty, lorsqu'il qualifie arbitrairement 'F' de fonction.

Frege trouverait bientôt sa solution. Elle émergerait directement à partir de l'idée d'insaturation. Mais il lui faudrait envisager une incomplétude plus complexe, une incomplétude de niveau *supérieur*. Il comprendrait que, lorsqu'un contenu jugeable $F(A)$ est allégé du concept qui le compose (et que l'objet est maintenu), alors il ne résulte pas seulement l'objet A, mais le concept de *second* niveau $\ldots(A)$. Il ne lui resterait ainsi qu'un pas à effectuer pour concevoir la quantification de premier ordre comme un concept de second niveau :

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \ldots(\mathfrak{a})$$

et celle de second ordre comme un concept de troisième niveau [84] :

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \ldots(\mathfrak{f}(\ldots))$$

Il parviendrait donc à rendre compte de la quantification comme saturation d'un concept par un autre concept. *C'est ainsi que lui apparut pour la première fois l'idée qu'un signe primitif de sa*

83. sur le strict terrain linguistique pour leur part, comme nous l'avons vu.

84. Rigoureusement, il faudrait faire usage de symboles pour différencier les places vides – $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\xi(\mathfrak{f}(\xi))$ –, mais n'anticipons pas, et restons pour l'heure à un niveau intuitif.

langue pouvait contenir un concept[85]. Mais le prix à payer était important, car la composition des contenus n'imitait plus la combinaisons des symboles, *i.e.* des éléments de son alphabet. Elle exposait celle des signes *eux-mêmes déjà constitués de symboles.* '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$' n'exprimait plus une combinaison des contenus des symboles '$\smile$', '$\to$' et '$\mathfrak{a}$', mais une combinaison des contenus des signes '$\frown_{\mathfrak{a}} \ldots (\mathfrak{a})$' et '$\cdots \to \ldots$'. Cela le conduisit sur une route peu praticable. Les signes "simples" de son langage, sur la base desquels la morphologie fut spécifiée par induction, n'étaient plus les éléments de son alphabet, mais incorporaient eux-mêmes de nombreux symboles, et induisaient une grammaire extrêmement délicate. La résolution du problème de la quantification ne réclamait donc pas la caractérisation du sens de '$\mathfrak{a}$', mais le renoncement à l'idée que le contenu d'un énoncé résulte de la combinaison du contenu de ses symboles, privant une fois pour toutes '$\mathfrak{a}$' de contenu. Elle exigeait de réprouver un réflexe parfaitement naturel, et nous comprenons qu'il fallut quelque temps à Frege pour y parvenir, *i.e.* pour se débarrasser totalement – et à jamais – de la notion d'indétermination. Il fut aussi libéré des notions de fonction et d'argument qu'il avait mises à jour pour gérer la quantification. Elles réapparaîtraient plus tard, mais pour d'autres raisons, et sous une autre forme.

Nous pouvons à présent répondre à Baker qui affirme :

> La définition du terme 'fonction' au §9 est fournie expressément dans le but de caractériser le trait de condition, le trait de négation et la concavité comme des noms de fonctions. (Voilà assurément pourquoi il inclut cette définition dans la section intitulée 'explication des symboles [de la langue formulaire]'). (Baker 2001, p. 541)

Frege ne concevait le sens de ses signes primitifs ni comme des fonctions ni comme des concepts. Pourtant, il avait de bonnes raisons – qui nous apparaissent clairement désormais – d'intégrer cette définition à la section intitulée 'explication des symboles'. Il présenta les notions de fonction et d'argument juste avant l'introduction de son signe pour la généralité, précisément parce qu'elles servaient à expliquer ce signe, *i.e.* à rendre compte de la quantification. Elles n'étaient aucunement destinées à expliquer les autres signes (ce qui justifie sa place dans le texte), ni d'ailleurs à présenter celui de la quantification *lui-même* comme une fonction, mais seulement à montrer comment les notions corrélatives de fonction et de détermination répondaient du sens de l'expression '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \Phi(\mathfrak{a})$', non pas en présentant $\frown_{\mathfrak{a}} \ldots \mathfrak{a}$ et $\Phi(\ldots)$ comme deux fonctions de niveaux compatibles, mais en présentant Φ comme la fonction, $\mathfrak{a}$ comme l'argument, et '$\smile$' comme un *opérateur*. Cela est tout à fait cohérent avec la façon dont il annonça l'abandon de l'analyse sujet-prédicat dans le §3. Le défaut de cette dernière résidait précisément dans son impuissance à gérer la quantification, ce que la nouvelle analyse était au contraire censée permettre à travers la notion d'indétermination. Elle était néanmoins défectueuse, et Frege s'en aperçut rapidement. Il la modifia en deux temps. Il éclaircit d'abord la nature des concepts grâce à l'idée d'insaturation (ou d'incomplétude) en 1881. Puis il se débarrassa de l'indétermination *via* l'introduction d'un concept de second (troisième) niveau pour la quantification d'ordre un (deux). C'est alors qu'il put abandonner à bon droit l'indétermination, la fonction et l'argument.

Cette seconde étape n'est pas simple à dater, nous en discuterons bientôt. Disons pour l'heure qu'il n'en existe assurément aucun indice précédant 1882. Les termes 'fonction' et 'argument' disparurent totalement à partir de cette année. Nous avons rencontré leur dernière occurrence à l'occasion de la lettre à Marty. Déjà en 1881, Frege ne les employa qu'une seule fois, avant de se réfugier dans les notions de concept et objet à travers lesquelles la clef serait trouvée :

> On fait ici usage du concept généralisé de fonction défini aux §§9 et 10 de la *Begriffsschrift*. $X(\Delta)$ peut en conséquence être traduit : Δ a la propriété X ou tombe sous

85. à l'exception du symbole '$\equiv$', qui possède un statut très particulier, que nous questionnerons en section 1.6.1.

le concept X. (Frege 1881, pp. 28-29 / p. 35)

À partir de 1882, les deux notions hiberneraient totalement. Frege n'en aurait plus d'usage, jusqu'à leur résurrection, ou plutôt leur métamorphose, finale [86].

86. Nous souhaitons étayer notre propos de certaines considérations techniques. Nous allons donc utiliser abruptement le symbolisme fregéen, et le lecteur pourra s'il le souhaite revenir à cette note après avoir lu les explications adéquates.

Selon notre interprétation, Frege suivit dès 1879 le sentier qui le conduirait à penser la quantification en termes de concepts, mais était encore bien loin de ce résultat. Plusieurs auteurs contestent ce dernier point, à l'image de Baker et Hacker :

> La notion de fonction de second niveau, *i.e.* de fonction dont les arguments sont des fonctions (de premier niveau), est le cadre de l'analyse de la généralité (§§10-11). Le quantificateur universel est défini comme une expression constante de la langue formulaire, et la place de l'argument est occupée par le nom de la fonction (de premier niveau) qui est regardé comme remplaçable par les autres noms de fonctions (§11). Ainsi, par une stricte application des explications du §9, la concavité *est* une fonction. Les arguments de cette FONCTION sont toutes les FONCTIONS de premier niveau (§11). La formule
>
> $$\forall x \Phi(x)$$
>
> représente le jugement que la *fonction* Φ possède une certaine propriété, précisément qu'elle est vraie pour tout argument. (Baker et Hacker 2003, p. 288)

Baker et Hacker évoquent la quantification de premier ordre comme si elle reposait sur une fonction de second niveau, comme si, en somme, Frege était déjà parvenu à la notion de 1893. Et c'est bien leur propos : montrer qu'il n'y a aucune raison de "distinguer une conception précoce d'une conception mature de la fonction" (Baker 2001, p. 541). Mais dans les *Grundgesetze*, cette dernière n'était plus définie en vertu d'aucun contexte. De plus, aucune idée de concept ou de fonction de deuxième niveau n'apparaît dans la présentation de la *Begriffsschrift*. Voici le seul passage dans lequel des *concepts* (et non des fonctions) de différents rangs [*Rang*] sont évoqués :

> 'le nombre 20' et 'chaque nombre entier positif' ne sont pas des concepts de même rang. Ce qui peut être dit du nombre 20 ne peut pas être dit dans le même sens de 'chaque nombre entier positif', mais peut l'être de chaque nombre entier positif dans certaines circonstances. L'expression 'chaque nombre entier positif' ne donne pas à elle seule, contrairement à 'le nombre 20', une idée indépendante, mais elle reçoit un sens seulement dans le contexte de l'énoncé. (p. 17 / 31)

Ici encore, la formulation témoigne de la jeunesse des thèses fregéennes. Ni l'expression 'le nombre 20', ni son contenu, ni l'expression 'chaque nombre entier positif', ni son contenu n'est un concept. La première expression signifie un objet. La seconde, quant à elle, est proprement insensée. Frege voulait marquer la distinction entre l'objet signifié par 'le nombre 20' et le concept signifié par 'être un entier naturel'. Il voulait une fois de plus établir la différence catégoriale entre objets et concepts. Mais nous ne trouvons nulle trace de concept de niveau 2.

Donnons deux derniers arguments contre la lecture de Baker et Hacker. D'une part, si Frege avait estimé dès 1879 que la quantification d'ordre 1 était un concept d'ordre 2, il n'aurait pas manqué de le signaler, ainsi qu'il s'y appliqua dans les *Grundlagen*.

D'autre part, ses propres dérivations ne respectent pas les règles élémentaires imposées par la hiérarchie des concepts. Conçue selon cette dernière, la formule (76) de la *Begriffsschrift* est une définition d'un concept à trois arguments : un concept de niveau 1 à deux arguments et deux objets. Il n'apparaît pas dans les *Grundgesetze*, mais nous pouvons raisonnablement deviner la forme qu'il aurait pris (en conservant le symbole '$\sim$' utilisé en 1879) :

$$\text{`} \sim_{\beta,\gamma} (\varphi(\beta,\gamma), \xi, \zeta)\text{'}$$

Dans la *Begriffsschrift*, Frege n'utilisait pas de lettres pour marquer les places vides. Voilà qui constitue un argument supplémentaire dans notre sens. Mais soyons beaux joueurs, et acceptons d'employer ces lettres pour extraire le (prétendu) nom du concept à partir des énoncés dans lesquels il était impliqué :

$$\text{`} \overset{\gamma}{\underset{\delta}{\sim}} \varphi(\xi_\gamma, \zeta_\beta)\text{'}$$

Frege (1881, p. 24 / 31) en arriva ainsi à des formules telles que :

1.4.9.5 Synthèse

Nous nous sommes gardés à raison de nous fier à la réputation de Frege. Il a su, il est vrai, indiquer sans ambages ses virages les plus nets, mais fit preuve de moins de zèle pour prévenir de ses inflexions, lorsqu'elles étaient progressives. C'est pourquoi l'examen de cette période de sa vie scientifique divise largement les commentateurs. Pour comprendre comment sa vision de

---

$$\text{`}\vdash \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\sim}} (0_\gamma + 4 = 12_\beta)\text{'}$$

Le terme '$0_\gamma + 4 = 12_\beta$' est aussi surprenant que maladroit. Notre propre expression, en indiquant clairement les trois arguments, nous en préserve :

$$\text{`} \sim_{\beta,\gamma} (\gamma + 4 = \beta, 0, 12)\text{'}$$

Nous pouvons supposer que si Frege avait véritablement eu en main (et en tête) son dispositif pour la hiérarchie des concepts, il aurait clairement séparé les différents arguments afin d'éviter ces formules déconcertantes. Ceci étant dit, l'exemple ne présente pas de véritable *transgression* de la hiérarchie. Afin d'en repérer, il convient de s'intéresser aux substitutions.

En 1879, leur fonctionnement était proche de ce qu'il serait dans les *Grundgesetze* mais, là encore, l'absence des lettres pour marquer les places vides – et donc de l'idée d'insaturation, et ainsi de la hiérarchie des concepts – empêcha Frege de les traiter proprement.

Une lettre latine porte la généralité *pour son type et seulement pour son type*. Une lettre d'objet peut, dans une formule, être remplacée par n'importe quel nom (marqueur) d'*objet*. Une lettre de concept d'un certain type peut être remplacée par n'importe quel nom (marqueur) de concept *du même type*.

Dans la *Begriffsschrift*, Frege viola cette loi à plusieurs reprises. Il traitait certains termes *complexes* comme un bloc, s'autorisant à leur substituer n'importe quelle expression. Afin de dériver la formule (50), il remplaça notamment '$f(a)$' par '$\begin{array}{l}\top f(a)\\ \llcorner g(a)\end{array}$' en un seul geste. Rigoureusement, il est nécessaire de procéder en deux temps : associer 'f' à un nom (ou marqueur) de concept – dans notre cas à '$\begin{array}{l}\top f(\xi)\\ \llcorner g(\xi)\end{array}$' – et '$a$' à un nom (ou marqueur) d'objet – dans notre cas à 'a' . Le même résultat est ainsi obtenu, mais proprement cette fois, *i.e.* en tenant compte du *statut* de chaque lettre. En 1879, Frege était incapable d'agir ainsi, car pour écrire les remplacements des lettres de concepts, les symboles indiquant les places vacantes sont indispensables.

Il existe cependant un (seul) contre-exemple : son symbole 'Γ'. Afin de dériver la formule (75), Frege indiqua qu'il substituait 'Γ' à '$f(\Gamma)$', tandis que 'Γ' ne figurait ni dans l'énoncé de départ, ni dans celui d'arrivée. Il entendait ainsi remplacer 'f' par son argument, à chacune des occurrences du premier et quel que soit le second. À ce titre, 'Γ' semble jouer un rôle similaire au 'ξ' de 1893. Mais l'espoir est de courte durée, car plus loin, Frege l'impliqua dans deux remplacements qui violent *explicitement* les règles de la hiérarchie des concepts.

Reproduisons à travers un exemple simple l'erreur commise dans les dérivations des formules (77) et (93) (trop complexes pour que nous les restituions ici). Nous écrivons l'expression de départ, les remplacements effectués, et enfin le terme d'arrivée :

$$\text{`}f(a)\text{'}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{`}a\text{'} & \mapsto & \text{`}g\text{'} \\ \text{`}f(\Gamma)\text{'} & \mapsto & \text{`}\Gamma(b) \equiv \Gamma(b)\text{'} \end{array}$$

$$\text{`}g(b) \equiv g(b)\text{'}$$

À travers le premier remplacement, une lettre pour un concept est substituée à une lettre pour un objet. Dans le second, 'f' est remplacé par une expression pour une concept de *second* niveau. Enfin, 'Γ' joue le rôle d'une lettre pour un objet avant la substitution, et d'une lettre pour un concept après.

La méthode correcte consiste à remplacer 'f' par '$g(\xi) \equiv g(\xi)$' et 'a' par 'b'.

Frege fut coupable de la même faute à l'égard des lettres gothiques. Voici le type de remplacement qu'il effectua (toujours au sein des deux dérivations en cause) :

$$\text{`}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})\text{'}$$

la quantification évolua, nous n'avons eu d'autre choix que de braver son silence obstiné qui, concernant les notions de fonction et d'argument, succéda à la publication de la *Begriffsschrift*.

Contre les avocats d'une lecture exclusivement linguistique de la notion de fonction de 1879, Baker et Hacker demandent s'il est "raisonnable d'offrir une interprétation de la conception fregéenne du concept de fonction qui rende inintelligible la majorité de ses exemples de formations de concepts des §§9-10" (2003, p. 281). En effet, les illustrations invoquées par Frege, dans ces paragraphes et ailleurs, établissent assurément qu'il entendait bien introduire une distinction entre différents éléments au sein des *contenus*. Mais l'interprétation de ces paragraphes selon laquelle la fonction se situe à la fois dans les sphères du langage et des significations ne suffit malheureusement pas à les rendre intelligibles. Elle ne permet pas de justifier l'expression 'fonction indéterminée' totalement contradictoire et pourtant utilisée sans remords par Frege. Au contraire, notre lecture explique *pourquoi* ce passage est inintelligible et se voit renforcée par l'évolution de ses thèses.

Il est indéniable que la distinction entre concept et objet apparaît en filigrane dans tout le texte et qu'à travers elle, contrairement à ce qu'affirment Heck et May (2010, pp. 131-132), Frege entreprit résolument une élucidation de la composition des contenus des expressions. Il estimait que la compréhension d'un contenu comme fonction d'un argument opérait en formant des concepts et parlait des rapports entre les *contenus* de ses signes primitifs. La traduction de '$\Phi(A)$' par 'A a la propriété Φ' ainsi que les différents illustrations proposées en témoignent. Ces indices révèlent incontestablement que la distinction entre concepts et objets – située dans la sphère des contenus – émergea au sein même de ce texte, fondue dans – avant de se localiser parallèlement à, en 1881 – celle de fonction et d'argument. L'ambiguïté liée à la nature partiellement linguistique de ces derniers n'est aucunement problématique. En revanche, la confusion produite par le rejet (implicite) des fonctions qui n'attendent d'être complétées par aucun élément est bien plus sérieuse. Elle conduisit Frege à utiliser des expressions telles que 'fonction indéterminée' qui contredisent frontalement sa caractérisation de la fonction en termes de partie déterminée. L'éclaircissement de la nature du concept opéré en 1881 à travers l'idée d'insaturation apporta une lumière nouvelle, mais ne permit pas d'emblée la résolution du problème de la composition des contenus dans le cas de la quantification. Paradoxalement, l'élucidation rigoureuse de la composition du sens fut donc bloquée par l'apport majeur de la langue formulaire : la quantification. L'idée d'une hiérarchie des concepts et l'appareil linguistique approprié à cette hiérarchie sommeillaient toujours. Or ce sont eux qui apportèrent la solution, exigeant d'abandonner la mécanique naturelle de composition des symboles au profit de celle, complexe et sophistiquée, de compositions de *signes*. Si Frege échoua, c'est parce qu'il traita d'abord le problème de l'analyse du sens sous le premier angle, de loin le plus visible, suivant aveuglément le diktat de son alphabet. Malgré l'abandon du langage naturel, il n'était pas encore parvenu à s'émanciper suffisamment de ses préjugés.

$$\begin{array}{ccc} \text{`}\mathfrak{a}\text{'} & \mapsto & \text{`}\mathfrak{g}\text{'} \\ \text{`}f(\Gamma)\text{'} & \mapsto & \text{`}\Gamma(b) \equiv \Gamma(b)\text{'} \end{array}$$

$$\text{`}\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\, \mathfrak{g}(b) \equiv \mathfrak{g}(b)\text{'}$$

Là non plus, les niveaux ne sont aucunement respectés. En vérité, le second terme ne résulte pas du premier à travers de simples substitutions, mais exige d'invoquer les règles liées à la quantification.

D'une certaine façon, la hiérarchie des concepts était bel et bien en germe dans la langue formulaire. C'est en lui payant un tribut anticipé et insuffisant que Frege insista longuement sur la possibilité de rendre indéterminée 'Φ' aussi bien que 'A' dans une expression de la forme 'A a la propriété Φ'. Mais le point est précisément qu'il n'avait pas éclairci l'idée d'insaturation qui permettrait de concevoir des concepts de second niveau. Son usage des lettres latines nous en apporte une ultime confirmation.

La solution fut présentée en 1884. Elle exigeait la mise à jour de la hiérarchie des concepts qui le délivra définitivement de toute idée de contenu indéterminé. À ce stade, la notion de concept devenait apte à remplir entièrement le rôle auquel il avait dédié celle de fonction en 1879. Cela n'allait pas durer. La prise en charge de la quantification par la hiérarchie des concepts fut une étape importante car elle constitua la *première* identification d'un signe primitif de l'idéographie à une *expression pour un concept* (de niveau supérieur)[87]. Une fois ce pas effectué, il était naturel de questionner le statut du sens des autres signes. Conçus comme des concepts, ils présentèrent un visage bien surprenant. Mais l'engrenage dans lequel Frege mit le doigt fut plus terrible encore. Car les signes pour les *opérations* mathématiques ne peuvent, quant à eux, signifier aucun concept : de leur saturation ne résulte aucun contenu jugeable. C'est alors que les fonctions *réapparurent* au sein des thèses fregéennes, sous des traits totalement neufs. Nous allons reconstituer le détail de ce long périple, dont nous connaissons désormais le premier moment.

1.4.10 La quantification en termes de concepts de niveaux supérieurs

1.4.10.1 Entre la *Begriffsschrift et les Grundlagen*

Nous sommes à présent en 1881, la *Begriffsschrift* est derrière nous, Frege a dévoilé l'insaturation des concepts, et rejettera bientôt l'idée de contenu indéterminé. Il affirme une nouvelle fois son intention de régler sa langue artificielle sur la composition logique des contenus :

> Le problème le plus immédiat commun à Boole et à moi était celui de clarifier la représentation des rapports logiques au moyen de signes écrits. (Frege 1881, p. 15 / 22)

Néanmoins, leurs stratégies étaient différentes :

> Contrairement à Boole, je pars des jugements et de leur contenu au lieu des concepts. La relation hypothétique définie avec précision entre les contenus jugeables a pour la fondation de mon idéographie une importance analogue à celle de l'égalité d'extension pour la logique booléenne. Je fais remonter la formation initiale des concepts aux jugements. C'est-à-dire que, si, dans le contenu jugeable
>
> $$2^4 = 16,$$
>
> on conçoit le 2 comme remplaçable par quelque chose d'autre, disons par (-2) ou par 3, ce qui peut être indiqué par le fait que x est mis à la place de 2 :
>
> $$x^4 = 16,$$
>
> alors le contenu jugeable se décompose en une partie constante et une partie variable. La première considérée en elle-même, mais en maintenant ouverte la place pour la seconde, donne le concept 'racine quatrième de 16'.
>
> On peut alors rendre
>
> $$2^4 = 16$$
>
> par les énoncés '2 est une racine quatrième de 16' ou 'l'individu 2 tombe sous le concept de racine quatrième de 16', ou 'appartient à la classe des racines quatrièmes

87. Contrairement à ce qu'affirment Baker et Hacker (2003, p. 291 ; 2001, p. 542), la logique fregéenne n'était donc pas encore, dans la *Begriffsschrift*, une branche de la théorie des fonctions.

> de 16'. En ce cas, le 4 a été conçu comme remplaçable, et ainsi nous obtenons le concept 'logarithme de base 2 de 16' :
>
> $$2^x = 16.$$
>
> L'x indique ici la place que le signe de l'individu qui tombe sous le concept doit prendre. Nous pourrions, dans
>
> $$x^4 = 16,$$
>
> considérer maintenant également 16 comme remplaçable, ce que nous représentons disons par
>
> $$x^4 = y.$$
>
> Nous obtenons ainsi le concept d'une relation, à savoir la relation d'un nombre à sa puissance quatrième. (Frege 1881, pp. 17-18 / 25-26)

Le propos s'était affiné en deux ans. La distinction entre catégorie des individus et catégorie des concepts, qu'il s'agisse de propriétés ou de relations, était écartée de la distinction fonction-argument. Le terme 'variable' dans "le contenu jugeable se décompose [*zerfällt*] en une partie variable et une partie constante" semble néanmoins maintenir l'idée d'indétermination. Mais la phrase suivante remet les choses en ordre : "La première considérée en elle-même, mais en maintenant ouverte la place pour la seconde, donne le concept 'racine quatrième de 16'". Le concept lui-même n'incorpore aucune partie indéterminée ou variable, il présente une place *vacante*, destinée à accueillir un objet. Il faudrait néanmoins un certain temps pour que Frege corrige une erreur grave. Dans ce texte, il utilise les lettres latines pour deux propos inconciliables. D'une part, elles servent à porter la généralité – à la manière des lettres gothiques –, d'autre part elles servent à "indique[r] la place que le signe de l'individu qui tombe sous le concept doit prendre". En 1881, Frege ne conçoit pas encore la quantification en termes de concept, celle-ci requiert donc toujours l'idée d'indétermination et engendre ce type de confusions. En revanche, le concept en tant que tel en est enfin délivré. Frege ne tente plus de rendre compte de la place pour l'objet (le "creux" dans le concept) à travers un contenu indéterminé (quelque chose qui viendrait combler ce "creux" sans pour autant spécifier un objet particulier). Il *assume* purement et simplement le "creux" : le concept considéré en lui-même exhibe une place vacante, c'est pour cette raison qu'il ne *subsiste* pas par lui-même, et que son processus de dévoilement – débarrassé de l'indétermination (et donc des fonctions) – exige de passer à travers des contenus jugeables dans lesquels cette place vide est occupée par un objet spécifique. Le concept incorpore bel et bien un "creux" destiné aux objets, mais il ne se présente jamais seul. On le rencontre toujours impliqué dans un contenu jugeable, *saturé* par un ou plusieurs objets :

> Au lieu d'obtenir le jugement en assemblant un individu comme sujet avec un concept déjà tout formé comme prédicat, nous décomposons à l'inverse le contenu jugeable pour obtenir le concept. Sans doute faut-il que l'expression d'un contenu jugeable, pour pouvoir être ainsi décomposée, soit en elle-même articulée. On peut alors en inférer qu'au moins les propriétés et relations dont on ne peut poursuivre plus loin la décomposition doivent avoir une désignation élémentaire propre. Mais il ne s'ensuit pas que les représentations de ces propriétés et relations sont formées indépendamment des choses ; au contraire elles prennent naissance en même temps que le premier jugement par lequel elles sont attribuées aux choses. Par conséquent, leur désignation

> ne se présente pas dans l'idéographie à titre séparé, mais toujours dans la combinaison qui expriment des contenus jugeables. Je pourrais comparer cela avec le comportement des atomes, dont on suppose qu'on n'en trouve jamais un isolé, mais seulement dans une combinaison avec d'autres, qu'il ne quitte que pour entrer aussitôt dans une autre. Un signe de propriété n'apparaît jamais sans que soit au moins indiquée une chose à laquelle revienne cette propriété, la désignation d'une relation jamais sans indication des choses qui puissent l'entretenir. (Frege 1881, p. 18 / 26)

En pointant l'incomplétude ou, comme il le dirait l'année suivante[88], l'insaturation des concepts, Frege réalisa que leur processus de formation pouvait tranquillement se passer de l'action des fonctions[89]. En disant que les *représentations* des concepts "prennent naissance en même temps que le premier jugement par lequel elles sont attribuées aux choses", et que la lettre "x indique [...] la place que le signe de l'individu qui tombe sous le concept doit prendre", Frege esquissait maladroitement l'idée au cœur de la morphologie de l'idéographie : une expression pour un concept reflète la nature de ce dernier à travers le "creux" qu'elle incorpore à son tour. Dans les énoncés, ce creux est toujours rempli, les noms de concept sont tous complétés par un nom d'objet ou, nous le verrons bientôt, par autre chose. Le concept de *racine quatrième de* 16 est le contenu de '$^{\ 4} = 16$'. Il attend un objet – par exemple le nombre 2 –, à l'instar de son expression qui attend la donnée du nom d'un objet – par exemple '2' : '$2^4 = 16$'. La place vide précédant l'exposant est destinée à l'expression de l'argument. Elle doit être différenciée d'un simple blanc. En 1881, Frege utilisa à cette fin le symbole 'x', qui tenait pourtant un autre rôle au sein de son langage et possédait encore, à cette date, un contenu indéterminé. Or notre symbole ne doit servir qu'à marquer la place vacante, il ne doit posséder *aucun* contenu, ni déterminé ni indéterminé. Frege en viendrait finalement à utiliser les lettres 'ξ' et 'ζ'. Mais il attendrait de régler le problème de la quantification pour développer proprement l'appareil linguistique des noms de concepts. Pour l'instant, il restait tributaire de la notion d'indétermination à travers sa conception de la quantification, très proche de celle exposée dans la *Begriffsschrift*. Un certain progrès était néanmoins palpable, Frege parlant plus volontiers d'universalité que d'indétermination :

> Par là, je limite la portée de l'universalité désignée par les lettres gothiques au contenu dont le trait de contenu est pourvu d'une cavité. (Frege 1881, p. 21 / 29)

Malgré cela, on ne trouve aucune trace de son idée future. Rien ne suggère la prise en considération d'un concept de niveau 2 et le renoncement à l'idée d'une composition des contenus imitée par celle des *symboles*. En 1881, Frege avait introduit la notion d'incomplétude, qui permettait d'écarter l'indétermination des concepts, mais il n'avait pas encore réussi à l'exploiter suffisamment pour en débarrasser la quantification. C'est seulement à l'occasion d'un échange avec Bernard Pünjer (1884 au plus tard), malheureusement non daté[90], qu'il discuta sa nouvelle idée. L'évolution est manifeste à travers la comparaison d'un passage de la *Begriffsschrift* avec un extrait de ce nouveau texte :

> Puisse [...] la mise en évidence du rapport entre les significations des termes : si, et , ne ... pas, ou, il y a , quelques, tous, etc. susciter l'attention. (Frege 1879b, p. VII / 9)

88. à l'occasion d'une lettre à l'intention d'Anton Marty, comme nous l'avons vu.

89. Le vocabulaire de ce texte est encore fluctuant. Dans une note de bas de page, Frege traite un exemple dans lequel "on n'a simplement rien de complet [Vollständiges], mais seulement le prédicat d'un jugement, auquel manque encore le sujet." (p. 18 / 26). Ici, le terme 'prédicat' désigne directement la partie incomplète – du contenu qu'il identifie fallacieusement au jugement –, c'est-à-dire le concept. Ainsi, selon cette formulation, le prédicat est – plutôt qu'il ne signifie – le concept. Ces questions lexicales furent progressivement réglées

90. Nous savons seulement qu'il n'excéda pas 1884.

> Hors contexte, le mot ‘quelques’ n’a pas de sens ; c’est un mot de forme tout comme ‘tout’, ‘chaque’, ‘aucun’, etc., qui, dans le contexte d’une phrase, doit remplir une fonction logique. (Frege 1884 au plus tard, p. 70 / 79)

En 1879, Frege avait attribué un sens au mot ’tous’, autrement dit au symbole ‘$\smile$’. Il s’était alors vu contraint de réfléchir à la signification du symbole ‘$\mathfrak{a}$’ qui l’accompagnait, et à la manière dont les contenus de ces symboles se combinaient. De là avait émergé la notion problématique d’indétermination. Dans le second extrait, au contraire, Frege expliqua que le mot ‘tous’ ne possédait aucun sens hors contexte. Autrement dit, le symbole ‘$\smile$’ se retrouva pris au sein d’un complexe qui, lui, possède un sens ; mais n’en disposa plus indépendamment de ce complexe, qui n’est autre que ‘$\smile\mathfrak{a}\ldots\mathfrak{a}$’. Pour la première fois apparut l’idée que la composition des contenus n’imite pas la combinaison des symboles, mais celle de constituants linguistiques plus complexes.

1.4.10.2 Dans les *Grundlagen*

Frege introduisit sa solution auprès de Pünjer, mais attendit les *Grundlagen* pour spécifier expressément une différence de niveaux[91] entre certains concepts :

> Quand je parle des propriétés qui sont dites d’un concept, je n’entends évidemment pas les caractères qui composent le concept. Ceux-ci sont des propriétés des choses qui tombent sous le concept, non du concept lui-même. Par exemple, ‘rectangle’ n’est pas une propriété du concept ‘triangle rectangle’. Mais l’énoncé qu’il n’y a pas de rectangle rectiligne équilatéral énonce une propriété du concept ‘triangle rectangle, rectiligne, équilatéral’ ; elle lui attribue le nombre 0. [...] Ainsi, on peut soumettre un concept à un autre concept plus élevé, de second ordre si l’on peut dire. Mais il ne faut pas confondre ce rapport avec la subordination des concepts. (Frege 1884, pp. 64-65 / 180-181)

Rappelons que les guillemets ne sont pas destinées à distinguer l’usage de la mention, et laissons pour l’instant de côté les discussions sur le nombre 0. Afin d’exposer proprement le lexique de Frege, considérons un concept P et un objet A. Les trois formulations suivantes sont équivalentes :

- A possède la propriété P ;
- le concept P subsume l’objet A ;
- l’objet A tombe *sous* le concept P.

Il semble que concepts et propriétés soient quasiment identifiés. La différence est principalement linguistique et permet à Frege de varier les tournures. Le seul écart substantiel provient de la distinction entre propriété et relation. Frege dirait que Marie et Paul tombent sous le concept *plus grand que* si et seulement si Marie est plus grande que Paul, si et seulement si Marie se trouve dans la *relation* d’être plus grande vis-à-vis de Paul. Ainsi n’importe quel nombre fini d’objets peuvent tomber (ensemble et dans cet ordre) sous un concept. En revanche, une propriété est attribuée à *un seul* objet, et une relation intervient entre *plusieurs* objets.

Considérons un second concept P'. Les trois formulations suivantes sont équivalentes :

- tous les objets qui tombent sous le concept P tombent sous le concept P' ;
- le concept P est subordonné au concept P' ;
- le concept P est un caractère du concept P'.

91. Il parlait de différents ordres [*Ordnung*] en 1884. Mais il se décida finalement pour le terme ‘niveau’ [*Stufe*] en 1891. Nous respecterons ce choix tout au long de notre thèse.

Par exemple, le concept de *triangle rectangle* est subordonné au – est un caractère du – concept de *triangle*. Tout triangle rectangle est aussi un triangle. Bien sûr, cela n'est valable que si P et P' sont des concepts sous lesquels peuvent tomber des *objets*. C'est le cas des exemples de Frege : ceux de *triangle*, de *triangle rectangle*, de *triangle rectangle rectiligne* et de *triangle rectangle rectiligne équilatéral*. Mais il en va autrement des concepts liés à la quantification. Voici comment, en 1884, Frege était parvenu à analyser cette dernière. Selon lui, l'énoncé 'il existe un triangle équilatéral' n'exprime rien d'aucun triangle ni d'aucun objet. Il exprime quelque chose du concept de *triangle équilatéral* : qu'au moins un objet tombe sous lui. Ce fait incorpore donc un concept de concepts, *i.e.* un concept de second niveau. L'existence – être un concept sous lequel tombe au moins un objet – est un tel concept.

Supposons Q un concept de second niveau. Les deux formulations suivantes sont équivalentes :

- le concept P tombe *dans* le concept Q ;
- le concept Q subsume le concept P.

Frege tenait alors la clef de son analyse du sens des énoncés. Un contenu peut être décomposé en un concept de niveau $n+1$ et un concept de niveau n si $n > 0$, un objet sinon. Un concept de niveau 1 est saturé par un objet. Un concept de niveau $n+1$ est saturé par un concept de niveau n.

La circonstance que Marie est française s'analyse *via* le concept *est française* et l'objet Marie.

La circonstance qu'il existe un triangle équilatéral s'analyse *via* le concept d'*existence* – de second niveau – et le concept *de triangle équilatéral* – de premier niveau.

En opérant cette avancée considérable, Frege mit le pied sur des terres inhospitalières. Une langue idéale doit imiter le processus de composition des contenus à travers sa morphologie. Dans la *Begriffsschrift*, Frege se dispensa purement et simplement de présenter la grammaire de son langage. Il demeura à un niveau très intuitif, générant de nombreuses imperfections dans ses substitutions et ses définitions [92]. La détermination du processus authentique de combinaison des contenus – et ainsi la distinction entre concepts de différents niveaux – dévoila la manière dont les *signes* doivent se combiner et exigea la mise en place d'un dispositif extrêmement sophistiqué adapté à celle-ci. Aucun des textes rédigés entre 1884 et 1891 qui nous sont parvenus n'impliquent la langue formulaire, si bien que nous ne savons pas clairement à quelle date Frege est parvenu à achever proprement ce dispositif. En revanche, ce dernier fut totalement incorporé à l'idéographie, malgré les différences profondes entre les deux langues, et il est utile de présenter dès maintenant les difficultés qu'il soulève.

L'idée fondamentale est la suivante : la mécanique de saturation qui vaut pour les contenus se retrouve, dans un langage idéal, au niveau des expressions. La circonstance que Marie est française résulte de la complétion du concept d'*être française* par l'objet Marie. La place vacante au sein de l'expression 'ξ est plus grande que Paul' permet de répéter aisément ce mouvement sur le terrain de la langue. L'énoncé 'Marie est française' provient de la saturation de 'ξ est française' par le nom 'Marie', *i.e.* du remplissage du "trou" marqué par ξ' par le nom 'Marie'. Proprement, il suffit de remplacer le symbole qui marque la place de l'argument par l'expression pour l'objet. La complétion d'une expression pour un concept de premier niveau ne pose donc aucun problème.

Mais le schéma se complique lorsque des niveaux supérieurs interviennent. Afin de marquer l'espace qui attend un signe de concept – et non plus un signe d'objet –, Frege utilisa le symbole 'φ'. Voyons les différentes étapes :

92. Nous en donnions quelques exemples dans la note de bas de page 86.

1. ‘Il existe un triangle équilatéral’ ;
2. ‘Il existe un $\mathfrak{a}$ tel que triangle équilatéral ($\mathfrak{a}$)’ ;
3. ‘Il existe un $\mathfrak{a}$ tel que $\varphi(\mathfrak{a})$’ et ‘Triangle équilatéral (ξ)’ ;

Par le passage de 1. à 2., nous nous attachons à respecter l'un des trois grands principes mis à jour par Frege dans les *Grundlagen* : "ne jamais perdre de vue la différence entre concepts et objets" (1884, p. X / 122). À cette fin, il est nécessaire de maintenir les expressions pour les concepts à leur juste place, ce que la langue naturelle manque régulièrement d'accomplir. En effet, la première version présente l'expression ‘un triangle équilatéral’ comme si elle convenait à un objet. La seconde, au contraire, indique sa nature par les parenthèses et la lettre ‘$\mathfrak{a}$’.

Rien de neuf jusqu'ici. Ce point motiva déjà l'abandon de l'analyse sujet-prédicat en 1879. C'est dans l'étape 2 $\rightarrow$ 3 que réside la nouveauté. La combinaison des contenus des deux expressions écrites en 3 – un concept de niveau deux et un concept de niveau un – correspond au contenu de l'expression totale écrite en 2. Nous pouvons répéter ce travail au sein de la langue formulaire en y ajoutant le signe ‘$T(\xi)$’ pour signifier le concept de *triangle équilatéral* :

1. ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, T(\mathfrak{a})$’ ;
2. ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$’ et ‘$T(\xi)$’.

La circonstance qu'il existe un triangle équilatéral résulte de la saturation du concept de second niveau de *subsumer au moins un objet* par le concept de premier niveau d'*être un triangle équilatéral*. Les choses se compliquent au niveau de la langue. Comment une expression qui présente elle-même une place vacante – ‘$T(\quad)$’ – peut-elle venir occuper l'espace libre d'une seconde expression – ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\quad(\mathfrak{a})$’ ? Si nous effectuons aveuglément cette opération, le résultat conserve un espace vacant : ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, T(\quad)(\mathfrak{a})$’. Heureusement, la partie ‘$(\mathfrak{a})$’ est destinée à marquer la place de l'argument du concept de premier niveau, autrement dit elle est là pour occuper l'espace laissé vacant dans le nom de ce concept. Les couples de parenthèses de ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$’ et ‘$T(\xi)$’ se "fondent" l'un dans l'autre. L'espace marqué par ‘ξ’ est occupé par ‘$\mathfrak{a}$’ et celui indiqué par ‘φ’ se voit rempli par ‘T’ : ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, T(\mathfrak{a})$’. Pratiquement, il suffit de remplacer ‘φ’ par ‘T’. L'affaire demeure donc tout à fait accessible. Mais considérons un cas à peine plus élaboré :

1. ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$’ ;
2. ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$’ et ‘$\xi = \xi$’.

La première expression signifie que tout objet est identique à lui-même. Elle résulte de la saturation du signe contenant le concept de second niveau de *subsumer tous les objets* par le signe contenant le concept de premier niveau d'*être identique à soi-même*. Dans la pratique néanmoins, l'action entreprise ci-dessus ne suffit plus à accomplir cette saturation. Le simple remplacement de ‘φ’ par ‘$=$’ produit l'expression ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, = (\mathfrak{a})$’. Il ne s'agit évidemment pas de celle que nous recherchons. Le système est en vérité bien plus délicat. Il impose de procéder en deux étapes :

(i) substituer ‘$\mathfrak{a}$’ à ‘ξ’ dans la seconde expression : ‘$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$’ ;

(ii) substituer ce résultat à ‘$\varphi(\mathfrak{a})$’ dans la première : ‘$\smile^{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$’.

Plus nous montons dans les niveaux, plus l'affaire se complique. Si bien que pour importer dans son langage le modèle de saturation des concepts, Frege dut mettre au point un dispositif *extrêmement* délicat. Nous en donnerons bientôt le détail [93]. Pour l'heure, nous désirons seulement illustrer ce que nous expliquions plus haut et souligner une première différence entre les langues

93. en section 2.3.

de Frege et les langages contemporains. En logique des prédicats (même d'ordres supérieurs), les termes puis les formules sont construits par induction *via* la concaténation des *symboles* du langage, *i.e.* des éléments de son *alphabet*. Si 'P' est un prédicat d'arité 2 et t_1, t_2 deux termes du langage, alors la *concaténation* de 'P', t_1 et t_2 est une formule. La vision fregéenne de composition des contenus bloque tout processus de ce type. Le contenu d'un énoncé n'est pas la combinaison des contenus de ses *symboles* parce que le nom d'un concept n'est pas un symbole, mais un signe lui-même composé de symboles. Le point est dissimulé lorsque nous nous en tenons au premier niveau. 'Marie = Marie' s'obtient bien à travers une concaténation du symbole '=' d'arité 2 et de l'expression 'Marie'. Seul le passage au second niveau expose le problème. En termes fregéens, '$\smile^{\mathfrak{a}} \varphi(\mathfrak{a})$' et '$\xi = \xi$' sont des signes *simples*, *primitifs* ou encore *atomiques*. Ils sont pourtant eux-mêmes composés de plusieurs éléments de l'alphabet. Et la complétion de l'un par l'autre ne s'effectue pas à travers de pures concaténations, ni même des remplacements simultanés, mais par une succession sophistiquée de remplacements. Il nous faudra, dans notre second chapitre, observer à la loupe les effets de ce singulier aspect de l'idéographie. Nous n'en faisons pas mystère : les variables seront mises en cause dans cette affaire. Le défi relevé par Frege consistait à répondre du statut de la lettre '$\mathfrak{a}$', et ainsi résoudre les difficultés soulevées par la notion d'indétermination. Il apporta sa solution, à travers l'idée d'insaturation ; Tarski trouva la sienne, grâce au processus d'assignations. Nous savons laquelle des deux l'histoire consacra. Ce que nous ignorons encore – pas pour longtemps –, c'est la largeur du fossé qui les sépare.

Dans la *Begriffsschrift*, Frege ne parvint qu'à une conception bancale de composition des contenus qui impliquait la notion problématique d'indétermination. La distinction entre objets et concepts, qu'il entrevoyait déjà en 1879, fut approfondie avant 1881 et permit d'exclure toute idée d'indétermination en lui substituant celles d'insaturation (ou d'incomplétude) des expressions et des concepts. Il parvint ainsi, avant 1884 [94], à une nouvelle lecture de la quantification *via* l'introduction des concepts de niveaux distincts et des divers rapports de subsomptions correspondants. Le contenu conceptuel des énoncés se vit composé de contenus eux-mêmes totalement déterminés, se saturant adéquatement. Mais Frege fut contraint de payer comptant. Il dût renoncer à construire les expressions de son langage *via* de simples concaténations de symboles,

94. Cette étape n'est pas simple à dater précisément. Heck estime qu'"il y a de solides preuves du fait que la distinction entre niveaux étaient déjà établie en 1882". (Heck 2017, pp. 20-21). Il se base sur une similitude entre le passage des *Grundlagen* dans lequel cette distinction est présentée et un extrait de la lettre à Marty datant de 1882. Voici les phrases en question :

> L'existence étant une propriété du concept, la preuve ontologique de l'existence de Dieu n'atteint pas son but. (Frege 1884, p. 65 / 180)

> Présentée à ma manière, la réfutation kantienne de l'argument ontologique devient triviale. (Frege 1976, p. 165)

En 1882, Frege assurait que sa langue formulaire permettait une réfutation fulgurante de l'argument ontologique. En 1884, il en fournit l'idée générale : l'argument traite l'existence comme une propriété d'objets, ce qu'elle n'est pas. Après l'établissement de la hiérarchie, Frege précisa qu'il s'agissait d'une propriété de *concepts*. Mais cette donnée n'était pas nécessaire à la réfutation en jeu. En effet, selon les conceptions de 1881, l'existence n'était pas une propriété *du tout*. Le signe $\smile$ était conçu comme un *opérateur* qui transformait un contenu indéterminé en un contenu déterminé (bien que Frege ne parvint pas à expliquer cette transformation, ce qui engendra les modifications que nous avons décrite). L'existence n'était donc pas regardée comme une propriété d'objets, ce qui invalidait déjà l'argument (aux yeux de Frege) sans impliquer la distinction entre niveaux de concepts.

Nous ne soutenons pas que cette dernière fut établie après 1882. Nous remarquons simplement que ce passage n'autorise pas à trancher. D'ailleurs, Frege parlait encore de fonctions et d'arguments dans la lettre à Marty, ce qui suggère qu'il concevait toujours la quantification en termes d'indétermination, ou au moins qu'il lui fallut du temps pour régler son lexique. Aucun signe déterminant ne nous permet, *pour l'instant*, une datation plus fine, nous nous en tenons donc à situer cette étape entre 1881 et 1884.

i.e. d'éléments de son *alphabet*. Son premier modèle procédait ainsi, et statuait sur le sens de la lettre '$\mathfrak{a}$' en termes d'indétermination. Ses nouvelles conceptions exigèrent de renoncer purement et simplement à attribuer un quelconque contenu à cette lettre, *i.e.* de cesser de la considérer comme un signe primitif de son langage. Elle devint un simple *constituant* de signes primitifs – par exemple de '$\smile^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$'. Afin de refléter dans le langage la combinaison des contenus, il fallait donc comprendre que les éléments primitifs d'un tel langage ne sont *pas* des symboles, pas même des symboles munis d'arités, mais des signes "atomiques" eux-mêmes constitués de plusieurs symboles, et qui se combinent selon des règles élaborées. Le délai qu'il a suffit à Frege pour y aboutir semble, regardé sous cet angle, étonnamment court. [95]

1.4.11 Des contenus structurés ?

Résumons la situation de 1884. Certains signes signifient – expriment, ont pour sens – un concept ; d'autres signifient – expriment, ont pour sens – un objet. Les compositions – ou, pour utiliser le terme de 1879, les combinaisons – de signes reflètent les compositions – combinaisons – de leurs contenus. Un énoncé a pour contenu la combinaison des contenus des signes qui le constituent. 'Signe' est désormais à prendre dans un sens différent de 'symbole', *i.e.* d''élément de l'alphabet' [96]. Le contenu de '$\smile^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' n'est pas composé à partir des contenus des *symboles* '$\smile$', '$\mathfrak{a}$' et '$=$', mais à partir de ceux des *signes* '$\smile^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$' et '$\xi = \xi$'. Voici trois remarques importantes :

1. À cette période, si Frege favorisait l'un ou l'autre des termes 'signifier', 'exprimer' et 'avoir pour sens' dans certains contextes, il n'avait pas encore introduit de différence entre eux. Rigoureusement, ces mots sont donc interchangeables, bien que la formule 'exprimer un objet' soit inhabituelle.
2. Frege n'exprima jamais clairement ce que nous venons d'affirmer, mais nous pensons en avoir dit suffisamment pour l'établir : le fait qu'il parlait de 'signes de concept' et de 'signes d'individus', le parallèle entre la complétion des premiers par les seconds et la saturation des concepts par les objets servant à régler la structure des énoncés sur la composition de leurs *sens*, le dévoilement du contenu de '$\Phi(A)$' par : l'*objet* A a la *propriété* Φ, etc.
3. En section 1.4.6, nous avons ramené le sens des termes 'contenu', 'sens' et 'signification' à celui de 'contenu conceptuel' afin d'alléger la rédaction. Durant nos derniers développements, c'est donc seulement du contenu *conceptuel* qu'il a été question. Suspendons ce geste pour un instant, et employons à nouveau ces termes en conformité avec les explications de 1879, *i.e.* pour désigner le complexe constitué du contenu conceptuel *et* de la coloration. Dans ce contexte, deux termes pour un même concept n'ont pas toujours même contenu, sens ou signification, mais possèdent (et le nom l'indique bien) le même contenu *conceptuel*, quels que soient les autres éléments suggérés ou indiqués par ces termes, *i.e.* quelles que soient leurs colorations. La distinction entre concept et objet permet de régler la composition d'un terme sur celle de son contenu conceptuel, et c'est bien en ce sens qu'un langage peut être adapté à ce dernier. Voilà qui renforce ce que nous disions déjà en section 1.4.3 : l'identification des *combinaisons* d'idées – et notamment des contenus jugeables – au contenu *total* de l'énoncé était une maladresse. Seuls les contenus *conceptuels* se combinent.

95. Bien entendu, nos affirmations sont relatives aux vues que Frege développaient. Les éléments atomiques des langages logiques contemporains *sont* leurs symboles (munis d'arités) car ces langages ne sont pas conformes aux conceptions fregéennes. C'est pourquoi toute traduction de l'idéographie en logique moderne trahit en profondeur la pensée fregéenne. Nous y viendrons.

96. Nous renvoyons le lecteur à nos préliminaires (p. vi) pour un exposé détaillé de l'usage fregéen des termes 'signe' et 'expression'.

Deux questions restent en suspens. D'une part, à partir de 1884, le signe pour la quantification de premier ordre exprime un concept de second niveau. Qu'en est-il des autres signes primitifs du langage ? D'autre part, quelle est la nature de l'opération de composition : de quelle manière un concept et un objet – ou deux concepts de niveaux différents – se joignent-ils pour former un contenu conceptuel ? Nous avons introduit deux modèles possibles. Selon le rapport du tout aux parties, un concept et un objet se structurent de telle manière qu'il en résulte le contenu de l'énoncé. Selon le modèle fonction-argument, le concept associe un contenu jugeable à l'objet qu'il prend en argument. Dans ce cas, l'objet et le concept ne sont pas parties du contenu final mais permettent néanmoins de le déterminer.

À la première interrogation, répondons qu'aucun indice ne suggère qu'à cette date, Frege ait étendu aux autres signes le geste effectué sur la quantification. L'obstacle qui se dressait sur sa route, la distinction entre objets et contenus jugeables, semble avoir été maintenu durant cette période. Seuls les objets tombent sous des concepts, or les autres signes [97] prennent des contenus jugeables en arguments. Aucun texte ne traite directement la question, mais tout laisse penser que Frege concevait encore la négation et l'implication comme des *opérateurs* qui *transforment* des contenus jugeables [98].

À la seconde question, plusieurs commentateurs répondent que Frege adopta le premier modèle. Beaney se joint à eux :

> Dans ses premiers travaux, malgré l'usage de l'analyse fonction-argument, Frege concevait probablement les 'contenus' en termes de tout-parties, c'est-à-dire, en un sens, "composé" à partir des objets et des concepts. (Beaney 2007, p. 114)

Il existe indéniablement plusieurs signes dans ce sens. Le vocabulaire employé appuie cette interprétation. L'idée d'insaturation induit celle d'une place vacante que l'objet viendrait occuper, formant ainsi un complexe : le contenu jugeable. L'incomplétude de l'expression reflète celle du concept exprimé. Rappelons l'extrait cité plus haut, qui constitue peut-être l'indice le plus déterminant à cet égard :

> Au lieu d'obtenir le jugement en assemblant un individu comme sujet avec un concept déjà tout formé comme prédicat, nous décomposons à l'inverse le contenu jugeable pour obtenir le concept. Sans doute faut-il que l'expression d'un contenu jugeable, pour pouvoir être ainsi décomposée, soit en elle-même articulée. (Frege 1881, p. 18 / 26)

Le contenu est *décomposé* et l'expression imite dans son *articulation* la composition du contenu. La structure de la phrase reflète la *structure* du sens. Cette position semble avoir été occupée par Frege à cette période. Elle soulève néanmoins d'importantes difficultés. Comment procède une telle composition ? Quels sont exactement les concepts et les objets qui constituent le contenu conceptuel ? Considérons le fait que 2 est plus petit que 3. Il semble possible d'en extraire trois différents concepts :

- C_1 : ξ est plus petit que 3 ;
- C_2 : 2 est plus petit que ξ ;
- C_3 : ξ est plus petit que ζ ;

Ces trois concepts font-ils *tous* partie du contenu conceptuel initial ? Si c'est le cas, comment s'agencent-ils pour former le contenu jugeable ? Voyons la suite du passage ci-dessus :

97. à l'exception de '$\equiv$', qui possédait un statut hybride à cet égard, nous en discuterons en section 1.6.1.
98. Nous en dirons davantage en section 1.5.4.

> On peut alors en inférer qu'au moins les propriétés et relations dont on ne peut poursuivre plus loin la décomposition doivent avoir une désignation élémentaire propre. (Frege 1881, p. 18 / 26)

Pas plus ici qu'ailleurs, Frege ne fut explicite à ce sujet. Mais une hypothèse semble tout à fait raisonnable : le contenu jugeable est ultimement constitué des concepts et objets *élémentaires*, *i.e.* de ceux qu'il n'est plus possible de décomposer. Considérons un tas de cinq billes (et supposons pour l'exemple qu'une bille ne soit décomposable en aucun élément plus simple). Il est possible de le décomposer en un tas de deux billes et un autre de trois billes. Mais chacun de ces tas est lui-même à nouveau décomposable. Nous pouvons répéter l'opération jusqu'à obtenir cinq billes qui, structurées correctement, forment notre tas initial. Il s'agit là de la décomposition complète de ce dernier.

Suivant ce modèle, il existerait donc des objets et concepts élémentaires (simples, primitifs, atomiques), qui sont aux contenus jugeables ce que les billes sont à notre tas. L'un des enjeux d'une langue idéale serait de consacrer des signe primitif exclusivement à des contenus *élémentaires*, afin d'exposer la structure *complète* du contenu jugeable à travers celle de l'énoncé.

Reprenons nos trois concepts ci-dessus. C_1 admet une décomposition en deux parties : l'objet 3 et la relation C_3, il n'est donc pas élémentaire. Un raisonnement semblable s'applique à C_2. Les constituants *élémentaires* du contenu jugeable pourraient être C_3, 2 et 3. Mais cela pose immédiatement une seconde question. Aux yeux de Frege, les contenus exprimés par '2 est plus petit que 3' et '3 est plus grand que 2' sont identiques. Quel concept est alors constitutif de ce contenu jugeable : C_3 ou ξ *est plus grand que* ζ ? Aucun des deux ne paraît plus élémentaire que l'autre. Peut-être qu'aucun des deux n'est élémentaire, chacun se décomposant à nouveau. Après tout, dans les *Grundgesetze*, Frege *définit* la relation d'ordre *via* d'autres concepts. Elle n'est le contenu d'aucun signe primitif.

Admettons. Mais ceci n'éclaire malheureusement pas un passage des *Grundlagen* :

> Le jugement 'La droite a est parallèle à la droite b', que l'on écrit symboliquement :
>
> $$a//b$$
>
> peut être compris comme une identité. Une telle interprétation fait apparaître le concept de direction, et l'on peut dire : 'la direction de la droite a est identique à la direction de la droite b'. On remplace le signe // par le signe =, plus général, et on répartit sur a et b le contenu particulier du signe primitif. On obtient ainsi un nouveau concept en analysant le contenu de jugement d'une manière différente. (Frege 1884, pp. 74-75 / p. 189)

On peut extraire d'un même jugement la relation d'identité et celle de parallélisme. Mais laquelle est véritablement constitutive du contenu jugeable ? Aucune ne semble ici se réduire – s'analyser grâce – à l'autre, et tout indique que Frege tenait pourtant le contenu du signe '=' pour élémentaire.

Nous n'allons pas encore développer ce problème [99] car rien dans les textes de cette époque n'indique que Frege en avait conscience. Beaney en tire la conclusion suivante :

99. Beaney (2007, pp. 104-107) l'expose longuement. Dans cette section de l'article, il tient pour acquis l'idée selon laquelle Frege identifiait en 1879 les contenus des énoncés logiquement équivalents. Nous avons résolument contesté cette interprétation. Néanmoins, cette partie de son développement n'en dépend pas directement, car tous les exemples impliqués mettent en jeu des énoncés dont les contenus étaient indéniablement identiques aux yeux de Frege, quoi qu'il en soit du critère de l'équivalence logique.

Sa première illustration n'est pas déterminante. Elle consiste à demander quel concept entre celui d'*être plus léger que*, et celui d'*être plus lourd que*, est constitutif de la circonstance que l'hydrogène est plus léger que le dioxyde de carbone, *i.e.* de la circonstance que le dioxyde de carbone est plus lourd que l'hydrogène. Rien n'assure

> La notion de contenu conceptuel semble être intrinsèquement instable et s'écrouler dès que nous soulevons la difficulté de ce qui y est précisément impliqué. Puisque la nature des concepts était l'un de ses principaux soucis philosophiques, il est raisonnable de supposer que Frege prit conscience du problème, et que ceci contribua à son abandon de la notion. (Beaney 2007, p. 107)

Ce n'est pas notre avis. Frege s'occupait certainement de rendre compte de la décomposition des contenus jugeables – essentiels à son objectif – en termes de concepts, mais il n'avait pas poussé si loin l'étude de leur *nature*. Le vocabulaire employé avant 1891 suggère incontestablement une décomposition en termes de tout-partie, mais Frege n'avait pas pénétré le détail de cette dernière, et ses conceptions furent bousculées par des prises de conscience indépendantes de la question d'entités *élémentaires*. Il est vrai que le bouleversement de 1891 viendra modifier la nature de la question, et notamment un aspect du problème que Beaney ne discute pas.

Les opérateurs n'étant ni concepts ni objets, ils ne sont pas des *constituants* du contenu jugeable, ils ne font pas partie de sa *structure*. Ainsi, le contenu de '$_{\top}\, p$' doit posséder les mêmes parties que celui de 'p', seul leur agencement doit avoir été modifié par l'application de $_{\top}$. Mais jamais, à aucun moment, cette question des opérateurs ne fut proprement soulevée. D'autre part, d'après le nouveau statut de la quantification, '$\mathfrak{a}\,(_{\top}\,\mathfrak{a})$' exprime que le *concept* $_{\top}\,\xi$ tombe dans $\mathfrak{a}\,\varphi(\mathfrak{a})$. Il faudrait donc qu'un opérateur – ici $_{\top}$ – puisse, d'une manière ou d'une autre, transformer un *concept* – ici ξ – en un autre, et n'agisse pas exclusivement sur des contenus jugeables.

Nous ne voulons pas nous attarder sur ces différentes questions, qui poseront encore problème après 1891 [100]. Nous préférons les aborder proprement dans ce cadre. Notons seulement que les indices laissés dans les textes matures sont tout aussi maigres. Rien n'assure que Frege ait jamais mesuré l'ampleur de la difficulté, et tout indique qu'il a échoué à la résoudre proprement. Par conséquent, il semble improbable qu'elle ait joué un rôle moteur dans son évolution. D'autre part, certaines difficultés surgissent bien plus immédiatement – et tout à fait naturellement – à partir des éléments qui se tenaient juste devant les yeux de Frege. Celui-ci n'eut aucun besoin de pousser jusqu'à la question du caractère complet d'une décomposition pour apercevoir la nécessité d'une révision profonde. Il lui suffit d'interroger les contenus jugeables qui résultaient de la composition des sens de ses signes primitifs, sans questionner véritablement la *structure* – l'agencement, les constituants élémentaires – de ces contenus jugeables ; et son projet logiciste l'y poussait résolument. C'est en tous cas l'hypothèse que nous allons défendre.

1.4.12 "Un manuscrit presque complet"

En 1884, la notion problématique de fonction avait été purement et simplement *dissoute*. L'établissement du caractère insaturé du concept avait signé sa disparition, en expliquant la production (ou le dévoilement) des concepts et la composition des contenus impliquant des quantifications. Il avait privé la fonction des seules raisons de son existence, et annulé les motivations à son introduction dans la *Begriffsschrift*. Rien de surprenant, donc, à ce que le terme disparut des textes postérieurs à 1882. Il revint pourtant, et en fanfare cette fois, dans les écrits dits 'matures', situés dans la seconde période de la vie scientifique de Frege, entre 1891 et 1906. Pour comprendre

que Frege ait tenu l'un ou l'autre de ces concepts pour élémentaire. Ainsi que nous venons de l'expliquer dans le cas de l'énoncé '2 est plus petit que 3', il est envisageable que chacun d'entre eux soit décomposable en d'autres concepts – ici physiques, et non plus mathématiques – élémentaires. En revanche, le problème soulevé et développé ensuite, lié au passage des *Grundlagen*, est bien tel qu'il explique.

100. La célèbre interprétation de Dummett à ce sujet (1981) engendra d'importantes discussions qui perdurent encore (Heck et May 2010, section 4 ; Landini 2012, Chapitre 5 ; Textor 2009). Nous en discuterons en temps voulu.

les bouleversements silencieux subis par ses conceptions, il faut regarder attentivement les raisons de ce retour et, surtout, examiner la métamorphose subie. Car la notion de fonction impliquée dans l'idéographie est terriblement éloignée de celle qui, pourtant présentée comme un remède, empoisonnait la langue formulaire. Frege fit usage d'un euphémisme trompeur en avant-propos de ses *Grundgesetze* :

> La nature des fonctions, en opposition aux objets, est caractérisée plus précisément que dans ma *Begriffsschrift*. (Frege 1893, p. X)

C'est peu dire. Il faut que le chemin ait été long pour en arriver à présenter "en opposition aux objets" des fonctions qui, en 1879, pouvaient *être* des objets. Il faut qu'en "caractéris[ant] plus précisément", Frege ait décrit le véritable basculement qui fit d'une notion aussi bien linguistique qu'extra-linguistique le nom d'une (ou plutôt plusieurs) catégorie(s) de significations. En 1893, la fonction s'était rapprochée du concept. Elle ne dépendait plus d'aucun contexte, n'entretenait plus de lien avec aucune notion d'indétermination. Bref, elle avait perdu tout ce qui faisait sa nature en 1879. Frege donna le même nom à quelque chose de *radicalement différent*[101].

La plupart des signes primitifs de 1893 sont des concepts, et tous des fonctions. Hormis '≡', aucun signe primitif de 1879 n'est ni concept ni fonction. Que s'est-il passé ? Le geste fondateur intervint entre 1881 et 1884. Il consista à reconnaître dans le signe pour la quantification le nom d'un *concept*. Cela, nous l'avons vu en détail. Ainsi nous avons déjà fait un bout de chemin, osé le pas qui coûte. Le reste découle naturellement. Car la question s'imposait alors d'elle-même, et nul doute qu'elle germa dans l'esprit de Frege : les autres signes de la langue formulaire contiennent-ils *aussi* des concepts ? La route semblait toute tracée. Il suffisait de regarder ces signes comme des expressions incorporant des places vides, et répéter pour eux ce qui avait été entrepris pour la quantification. Mais le prix à payer était nettement plus important. En effet, ces signes expriment (toujours ou parfois) des rapports entre contenus *jugeables*. Or dans la langue formulaire, les catégories de contenus jugeables et non jugeables sont *distinctes*. L'identification des signes primitifs à des noms de concepts exigeait donc de reconnaître que certains concepts subsument, non plus des objets tels que Marie, le nombre 1 ou la tour Eiffel, mais des contenus *jugeables*. Or on ne trouve, dans les écrits pré-1891, aucun exemple de ce type. Il faut dire d'une part qu'une telle évolution n'a pu précéder 1881, date à laquelle Frege présentait encore la quantification en termes d'indétermination de contenu, et d'autre part que le corpus disponible entre 1882 et 1891 est extrêmement maigre. Au sein des *Grundlagen*, le principal texte de cette époque, Frege n'aborda pas directement la question. Il était occupé à autre chose : l'analyse du concept *de nombre*. Et pourtant, en 1893, Frege en vint bel et bien à discuter les places *vacantes* de ses signes primitifs, qui reflètent l'incomplétude de leurs *contenus*. Pour tenter de comprendre l'évolution qui l'a conduit à étendre le travail réalisé pour la quantification aux autres signes de son langage, nous n'avons d'autres choix que d'émettre des conjectures concernant les questions et les difficultés auxquelles cette entreprise a pu le confronter, en nous appuyant notamment sur son objectif de l'époque.

101. Ce n'est pas la seule fois que Frege dissimula l'amplitude de ses mouvements, et nous tenons à insister sur ce point trop souvent ignoré dans la littérature. La plupart des commentateurs regardent l'affinement de la notion de concept comme un perfectionnement (simultané) de celle de fonction. Ils font une lecture *parallèle* des deux notions, quoi qu'ils pensent de leur état en 1879. Cette interprétation est incorrecte. La notion imprécise, incertaine, vacillante de fonction présentée dans la *Begriffsschrift* était liée à l'idée d'indétermination que Frege abandonna (pour de bon) au profit de l'insaturation et de la hiérarchie des concepts. Au contraire, la notion de concept ne fut *jamais* engagée dans cette voie. Les deux notions n'ont donc pas évolué en parallèle. Celle de concept fut précisée et éclaircie. Celle de fonction se *métamorphosa* (la première version fut *rejetée*) afin de rejoindre et d'étendre celle de concept.

Disons abruptement ce que nous défendrons en section 1.5.2 : cet objectif était clair dès 1879 [102], il consistait à démontrer les lois fondamentales de l'arithmétique à partir d'axiomes et de règles déterminés. Dans la *Begriffsschrift*, Frege amorça le travail sans l'achever. Il parvint seulement à prouver certains théorèmes concernant les propriétés héréditaires (chapitre 3). La suite attendrait (pour sa version formalisée) les *Grundgesetze*, postérieurs à l'éclatement du contenu conceptuel en les *Sinn* et *Bedeutung*. Néanmoins, certains indices témoignent que, dans un opuscule non publié, il était parvenu à un état avancé de son projet *avant* ce revirement. Le signe le plus explicite est localisé dans la préface des *Grundgesetze* :

> J'accomplis ici un projet que j'avais déjà en tête à l'époque de ma *Begriffsschrift* de l'année 1879, et que j'ai annoncé dans mes *Grundlagen der Arithmetik* de l'année 1884. [...] La raison pour laquelle la réalisation intervient si tard après l'annonce tient en partie à des changements internes à mon langage qui m'ont forcé à jeter un manuscrit presque complet. (Frege 1893, pp. VIII-IX)

Parmi les évolutions entre les deux versions se tenait l'abandon de la notion de contenu conceptuel :

> [Le contenu jugeable] est à présent scindé en ce que j'appelle une pensée et ce que j'appelle une valeur de vérité. Ceci est la conséquence de la distinction entre le [*Sinn*] et la [*Bedeutung*] d'un signe. (Frege 1893, pp. X)

Frege avait donc accompli une part importante du travail durant sa première période. Mais celle-ci fut elle-même remuée de nombreux mouvements. Quand exactement rédigea-t-il ce manuscrit ? Avant 1881, lorsque la quantification était pensée en terme d'indétermination de contenu ? Après 1884, lorsqu'elle fut clairement conçue en termes de concepts de niveaux supérieurs ? Un extrait de la lettre destinée à Marty, datant de 1882, suggère que son élaboration intervint très tôt :

> J'ai désormais quasiment achevé un livre dans lequel je traite du concept de nombre et démontre que les premiers principes du calcul, qui jusqu'à présent ont été tenus pour des axiomes indémontrables, peuvent être prouvés à partir des définitions au moyen exclusif des lois logiques, et qu'ainsi il devraient être considérés comme des jugements analytiques au sens de Kant (Frege 1976, p. 163)

Rien n'assure cependant qu'il soit question du même projet dans les deux passages. Après tout, Frege pourrait bien annoncer à Marty l'arrivée prochaine de ses *Grundlagen*. Heck remarque (2017, p. 2) que la suite de la lettre affaiblit cette hypothèse, car Frege base son assurance à l'égard de ses résultats sur "l'application de sa langue formulaire", absente des *Grundlagen*. D'autre part, Frege reçut une réponse de Carl Stumpf deux semaines plus tard [103], dans laquelle figure un conseil qui pourrait bien être à l'origine du projet de rédaction des *Grundlagen* :

> Concernant votre travail, que j'attends avec un intérêt extraordinaire, j'espère qu'il n'est pas déplacé de vous demander s'il ne serait pas approprié d'exposer d'abord votre pensée dans la langue ordinaire et ensuite – peut-être séparément à une autre

102. bien que Frege ne fût pas, à cette date, certain d'y parvenir, comme nous l'expliquerons en section 1.5.

103. La lettre débute ainsi :

> Je consentirais volontiers à discuter les vues développées dans votre lettre si j'avais votre *Begriffsschrift* entre les mains. (Frege 1976, p. 256)

Parmi les différentes correspondances de Frege ne figure aucune lettre à l'intention de Stumpf ni aucune réponse de Marty à celle de Frege. Les deux ont peut-être existé et été perdues. Il est aussi possible que le mot de Stumpf ait été rédigé au nom de Marty, et fasse suite à la lettre de Frege destinée à ce dernier. Les éléments en notre possession ne permettent pas de trancher.

> occasion ou au sein du même ouvrage – dans la langue formulaire : je pense que cela favoriserait la réception à un *double* niveau. (Frege 1976, p. 257)

En 1882, Frege avait essuyé sa première déconvenue suite à la publication de la *Begriffsschrift* : de très rares recensions – toutes négatives – ainsi qu'une importante difficulté à publier ses propres réponses. Le ton employé dans la lettre à Marty dénote un désir ardent d'interlocuteurs. Il est probable que, dans un tel contexte, le conseil avisé de Stumpf ne soit pas totalement extérieur au projet des *Grundlagen*[104]. Voici donc l'hypothèse qui s'appuie sur ces extraits : Frege aurait rédigé le manuscrit abandonné avant 1882 et, plutôt que d'envisager immédiatement sa publication, aurait entrepris la rédaction des *Grundlagen* (notamment) sur le conseil de Stumpf. Cette explication est avancée par plusieurs commentateurs qui tentent de reconstituer le contenu du manuscrit, celui-ci ayant malheureusement été perdu[105].

Nous ne voulons pas, pour notre part, accorder une valeur excessive à ces passages. Peut-être Frege s'est-il laissé emporter, dans le contexte d'une correspondance, à qualifier de 'déjà achevé' un travail qui nécessitait encore plusieurs apports substantiels. Peut-être a-t-il réalisé plus tard que la finition exigeait davantage. Au demeurant, rien n'interdit d'envisager qu'il ait utilisé, afin d'éviter des explication inutiles, l'expression 'un manuscrit presque complet' pour désigner en vérité plusieurs ébauches qui se sont succédées les unes les autres, au fur et à mesure où il modifiait ses conceptions. Quoi qu'il en soit, l'angle d'analyse qui consiste à interroger le contenu de ce ou ces manuscrits présente le mérite d'aborder la transformation des vues de Frege dans *le contexte de son objectif*, dont la première étape consistait à dériver les théorèmes fondamentaux de l'arithmétique dans une langue artificielle. Ainsi, en enquêtant sur la manière dont ses réflexions concernant la quantification se sont étendues aux autres signes de son langage, nous garderons à l'esprit qu'à côté des quelques textes dont nous disposons s'opérait une transformation progressive et silencieuse d'un premier "brouillon" qui aboutit à son œuvre majeure – les *Grundgesetze* – et dans lequel il déployait ses conceptions, tantôt suivant tantôt provoquant les fluctuations subies par celles-ci.

1.4.13 Le système de la langue formulaire

Jusqu'à présent, nous avons raconté à froid le premier mouvement subi par les positions sémantiques de Frege avant 1884. Nous avons laissé celles-ci s'épanouir en autarcie, constatant qu'elles prospéraient admirablement ainsi. Pourtant, Frege procéda à l'éclaircissement de ses conceptions pour des raisons qui leur étaient *extérieures*. Il régla bel et bien les problèmes tel que nous l'avons expliqué, mais il ne s'y appliqua que parce que ces difficultés se dressaient en travers de son projet initial. Nous ne pouvons passer ce point sous silence sans risquer de manquer, par effet domino, les causes du basculement de 1891, *i.e.* du second mouvement de sa première

104. Cette hypothèse est avancée en bas de page de la version anglaise des correspondances :

> Frege suivit la suggestion de Stumpf en publiant les *Grundlagen* avant les *Grundgesestze*, se passant ainsi, dans un premier temps, de la langue formulaire. (Frege 1980, p. 172)

Ceci rentre néanmoins en contradiction avec une autre note de bas de page attachée à la lettre destinée à Marty, à l'endroit où Frege annonce l'arrivée imminente d'un nouvel ouvrage :

> Le livre en question est les *Grundlagen*. Il semble que Frege ait suivi la suggestion de Stumpf et décidé de présenter une analyse du concept de nombre sans utiliser la langue formulaire. (Frege 1980, p. 100)

Les deux hypothèses sont incompatibles. Si la rédaction des *Grundlagen* est postérieure au conseil de Stumpf, Frege ne peut y faire référence dans une lettre qui lui est antérieure. Le manuscrit évoqué ne peut être celui-là.

L'erreur n'est pas commise dans la version allemande de la correspondance (voir Frege 1976, nbp. 5, p. 257).

105. Voir par exemple : (Duarte 2009) ; (Heck 2017) et (Landini 2012, Chapitre 4).

période. Voilà qui exige de cerner en détail le cadre technique de son projet. Il convient donc de présenter brièvement le système de la langue formulaire.

1.4.13.1 Le trait de jugement

Nous avons dit en section 1.3 tout ce qu'il importait de dire à ce sujet.

1.4.13.2 La quantification

Ajoutons une rapide précision au long développement dont la quantification fut l'objet. En 1879, Frege parlait du sens du terme 'tout' (p. VIII / 9), il attribuait un contenu fixe au symbole '$\smile$'. Dans le §11 de la *Begriffsschrift*, les quantifications de premier et de second ordres furent présentées d'un même geste. Frege n'estimait pas nécessaire de caractériser à deux reprises un même contenu – celui de '$\smile$' – qui jouait le même rôle dans chaque cas.

Après l'introduction des concepts de niveaux supérieurs, le contenu jugeable $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$ était enfin conçu comme résultant de la saturation de $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\varphi(\mathfrak{a})$ par $\Phi(\xi)$. Ainsi, '$\mathfrak{a}$' et '$\smile$' cessèrent d'être les constituants élémentaires de cette composition et se virent privés d'une quelconque signification, déterminée ou non. Les quantifications de différents ordres n'en appelaient plus au sens du même symbole '$\smile$', mais à des concepts différents, exprimés par des signes différents.

Frege présenterait proprement ces derniers en 1893. Nous connaissons déjà le premier, signifiant un concept de second niveau et correspondant au premier ordre :

$$\text{`}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\varphi(\mathfrak{a})\text{'}$$

Voici le second, signifiant un concept de troisième niveau et correspondant au deuxième ordre :

$$\text{`}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\,\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))\text{'}$$

La lettre 'μ' marque la place pour un nom de concept de second niveau. Elle peut notamment être "remplacée" par '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\varphi(\mathfrak{a})$', d'où résulte l'expression :

$$\text{`}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{a})\text{'}$$

Remarquons une fois de plus que ce "remplacement" exige des manipulations syntaxiques élaborées, parce qu'il ne s'agit pas de substituer un *symbole* à un autre, mais de combiner des signes syntaxiquement complexes. Nous verrons les détails de cette affaire dans notre second chapitre. Pour l'instant, notons que les quantifications de différents ordres ne furent proprement distinguées qu'entre 1881 et 1884, lors de la prise en considération des concepts de niveau 2.

1.4.13.3 Les lettres gothiques et latines

Nous n'avons rien à ajouter concernant les lettres gothiques, et pouvons sans difficulté présenter les lettres latines car celles-ci jouent, dans la langue formulaire, un rôle identique aux gothiques, à ceci près que la portée de leur quantificateur s'étend à l'ensemble de l'expression, que le signe de ce quantificateur n'apparaît pas, et qu'elles ne doivent jamais figurer que dans des expressions incorporant le trait de jugement, *i.e.* dans des énoncés assertifs :

> Puisque [le cas dans lequel le contenu de tout le jugement constitue le domaine de la lettre gothique] est remarquable, je veux introduire pour lui l'abréviation suivante : *une lettre latine a toujours comme domaine le contenu de tout le jugement*, sans que cela ne soit désigné par un creux dans le trait de contenu. Si une lettre latine apparaît dans une expression qui n'est pas précédé d'un trait de jugement, alors cette expression n'a pas de sens. (Frege 1879b, p. 21 / 35)

Les lettres latines permettent d'utiliser efficacement le *Modus Ponens*. À cause du quantificateur figurant en début d'énoncé, cette règle n'était pas utilisable en l'état sans leur concours. Par exemple, elle ne permettait pas de déduire la vérité de $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} \to (\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}))$ à partir de celles de $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} \to \mathfrak{a})$ et $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}) \to (\mathfrak{a} \to (\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}))$. Pour ce faire, une règle plus complexe était nécessaire :

$$\frac{\mathfrak{a}\; E_1(\mathfrak{a}) \qquad \mathfrak{a}\; E_1(\mathfrak{a}) \to E_2(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}\; E_2(\mathfrak{a})}$$

Dès lors qu'un énoncé contenant des lettres gothiques rentrait en jeu, il devenait indispensable d'utiliser une règle dans laquelle figurent les quantificateurs correspondants. Pour couvrir la totalité des cas possibles, il aurait donc fallu munir le système d'une infinité de règles, schématisable ainsi :

$$\frac{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{f}_1 \ldots \mathfrak{f}_n\; E_1(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) \;;\; \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{f}_1 \ldots \mathfrak{f}_n\; (E_1(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) \to E_2(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n))}{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n \mathfrak{f}_1 \ldots \mathfrak{a}_n\; E_2(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)}$$

L'adoption des lettres latines, ainsi que d'une règle et d'un axiome pour assurer la transition avec les lettres gothiques, permit de se limiter au seul *Modus Ponens*. Finalement, Frege fut en mesure de dériver sans encombre :

$$\frac{a \to a \qquad (a \to a) \to (a \to (a \to a))}{a \to (a \to a)}$$

Ce que nous venons de dire correspond peu ou prou aux explications fournies par Frege, et nous offre une occasion supplémentaire de souligner les imperfections entourant les lettres latines et gothiques dans la *Begriffsschrift*. En 1879, Frege considérait les premières comme des secondes déguisées, accompagnées d'un quantificateur invisible. Cependant, il les autorisait librement de contenir un objet *ou* un contenu jugeable (indéterminé). Ce point est visible à travers les énoncés suivants :

(1) '$\vdash_{\top} a$'

(2) '$\vdash f(a)$'

L'occurrence de 'a' dans (1) correspond à un contenu jugeable, car elle est précédée du signe pour la négation. Celle qui intervient dans (2) correspond à un objet, car elle figure entre parenthèse à la suite d'une lettre pour un concept. Or il semble que la caractérisation des lettres latines en termes de quantification déguisée ne conviennent pas dans le premier cas. En effet, jamais Frege ne parla, n'aborda ou ne fournit d'exemple de quantifications sur des contenus jugeables. Dans son langage comme dans les langues vernaculaires, il se limita à quantifier sur des objets ou des concepts. Aucune lettre gothique ne dénota jamais un contenu jugeable, ce qui serait tout à fait permis si 'a' tenait le même rôle dans (1) et (2). Frege ne discuta pas cette difficulté, mais nous aurons bientôt l'occasion d'en mesurer les conséquences.

1.4.13.4 Le trait de contenu

Jusqu'à présent, nous avons volontairement ignoré l'existence de ce signe. Ce faisant, nos explications n'ont rien perdu en rigueur, et ont beaucoup gagné en clarté. Car le trait de contenu ne présente *aucune* utilité, au point que Frege y renonça totalement dans les *Grundgesetze*. Seul le symbole fut conservé, mais ses nom et rôle modifiés :

> Ce qui était alors le trait de contenu réapparaît en tant qu'horizontal. (Frege 1893, p. X)

Plus précisément, dans la *Begriffsschrift*, Frege voulait lui octroyer deux fonctions : l'une que nous qualifierons de 'syntaxique' et l'autre de 'sémantique'. La première est aisément dispensable à travers un procédé trivial, la seconde est totalement superflue. Observons le passage en question :

> Le trait horizontal avec lequel le signe $\vdash$ est formé *combine les signes qui le suivent en une totalité, et l'affirmation exprimée par le trait vertical situé à gauche de l'horizontal se rapporte à cette totalité.* Le trait horizontal peut être appelé *trait de contenu* et le trait vertical *trait de jugement.* Le trait de contenu sert généralement à mettre en rapport n'importe quel signe à la totalité des signes qui le suivent. *Ce qui suit le trait de contenu doit toujours avoir un contenu jugeable.* (Frege 1879b, p. 2 / 16)

Frege bâtit son langage de telle sorte qu'au sein d'une expression, chaque combinaison de signes soit précédé d'un trait horizontal. Observons le cas de la quantification :

> Le trait horizontal qui se trouve à gauche du creux dans
>
> $$\smile^{\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{a})$$
>
> est le trait de contenu tel que $\Phi(\mathfrak{a})$ est valide, quoi que nous mettions à la place de $\mathfrak{a}$; celui qui est placé à droite du creux est le trait de contenu de $\Phi(\mathfrak{a})$, ce qui doit donner à penser que $\mathfrak{a}$ est remplacé par quelque chose de déterminé. (pp. 19-20 / p. 34).

À cette date, Frege envisageait la composition du sens du creux avec ceux de 'Φ' et '$\mathfrak{a}$'. Il se heurtait systématiquement à l'ambivalence de $\mathfrak{a}$ qui, tout indéterminé fut-il, devait être "remplacé par quelque chose de déterminé" afin d'obtenir un contenu jugeable spécifique. Le problème est manifeste dans ce passage. Frege y agite les mots comme pour dissiper une difficulté qu'il était bien en peine d'aborder de front, provenant de l'idée que le sens de '$\Phi(\mathfrak{a})$' résulte de la composition de deux contenus non jugeables, 'Φ' étant une lettre pour un concept et '$\mathfrak{a}$' pour un objet.

À cette composition correspond un trait de contenu qui précède l'expression '$\Phi(\mathfrak{a})$' : celui qui se trouve à la droite du creux. De même, la signification de '$\Phi(\mathfrak{a})$' était censée se composer avec celle du creux, ce qui induisit l'introduction du trait horizontal à gauche de ce dernier, et aboutit finalement à l'expression '$\smile^{\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{a})$'.

L'opération est systématique. Pour exprimer la négation de $\smile^{\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{a})$, il faut combiner ce dernier avec le sens du trait de négation [106], et un autre trait horizontal arrive en tête du nouveau terme [107] :

$$_{\top} \smile^{\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{a})$$

106. Le trait de négation est la barre verticale dans '$_{\top}$ ', elle figure entre deux traits de contenu.

107. Notons la redondance du trait de contenu, qui figure à la fois à droite du trait de négation et à gauche du creux. Frege s'accommodait très bien de ces (nombreuses) répétitions, l'essentiel étant qu'au moins un trait apparaisse à chaque fois.

Dans toute expression de la langue formulaire, chaque combinaison est donc précédée d'(au moins) un trait de contenu. À quoi était destinée cette étonnante mécanique ?

Son rôle syntaxique, nous pouvons le déceler dans la phrase suivante : "ce qui suit le trait de contenu doit toujours avoir un contenu jugeable", répétée à l'occasion de la réponse à Schröder (Frege 1881, p. 44 / 50). Dans l'idéographie, des combinaisons de signes dénoteraient parfois des contenus non jugeables. Ce n'était pas encore le cas dans la langue formulaire, qui leur consacrait exclusivement des symboles simples : les lettres latines et gothiques. Cependant, les premières pouvaient aussi servir à désigner des contenus jugeables, car Frege fit le choix malheureux d'utiliser les *mêmes* symboles pour référer à des éléments de catégories qu'il distinguait pourtant expressément. Le trait horizontal était donc nécessaire afin de lever l'ambiguïté dans les formules, et d'indiquer à quel type nous avions affaire. Reprenons l'exemple utilisé plus haut :

$$(1)\ \text{`}\vdash_{\top} a\text{'}$$

$$(2)\ \text{`}\vdash f(a)\text{'}$$

La lettre 'a' désigne dans le premier cas un contenu jugeable (indéterminé), et dans le second un objet (indéterminé). La distinction est opérée grâce au trait de contenu qui précède 'a' seulement dans (1). Cette information est essentielle, car elle signale quelles substitutions sont permises. Dans le premier énoncé, 'a' ne peut être remplacé par aucun nom qui dénote (toujours) un objet ; et dans le second par aucune expression qui réfère (toujours) à un contenu jugeable. En transgressant ce principe, il est possible de construire la formule : '$\vdash f(_{\top} a)$' à partir de (1) en remplaçant 'a' par '$_{\top} a$'. Or les distinctions catégoriales excluent ce type d'énoncé de la langue formulaire. Ceux-ci se verraient intégrés à l'idéographie lorsque les énoncés (non assertifs) seraient identifiés à des noms d'objets, et le trait de contenu perdrait alors son intérêt syntaxique. Mais Frege aurait pu s'en passer dès 1879 s'il avait consacré des lettres différentes selon le contenu envisagé (par exemple 'p', 'q', 'r' d'un côté et 'a', 'b', 'c' d'un autre, suivant l'usage aujourd'hui en vigueur).

Par ailleurs, l'introduction – citée plus haut – de ce symbole suggère une autre raison à sa présence. Le passage est assez obscur, et aucun autre texte à notre disposition ne permet de l'éclairer. Nous allons présenter trois interprétations. Nous croyons en la troisième, mais il nous importe surtout de montrer que, quel que soit notre choix, le procédé s'avère en réalité parfaitement inutile, ce qui explique que, une fois son rôle syntaxique rendu obsolète, Frege se soit totalement débarrassé de ce trait.

Selon ses explications, il sert à "mettre en rapport n'importe quel signe à la totalité des signes qui le suivent", à "combine[r] les signes [...] en une totalité". Il permettrait donc de grouper des *signes*. Cependant, cette lecture ne s'accorde pas avec les conception de Frege, pour qui des signes sont des éléments *sensibles* : de l'encre déposée sur le papier, des pixels sur un écran. Ils sont donc groupés – ils constituent une totalité – simplement en cela qu'ils se trouvent sur une même zone de la feuille ou de l'écran, et aucun symbole ne peut influer sur ce point.

Donnons une autre acception au terme 'signe', en distinguant l'élément sensible, le *token*, du signe lui-même, pris comme *type*. Le trait le plus à droite de l'expression pourrait réunir les signes qui lui succèdent dans une *suite* de signes (par exemple $(\text{`}\Phi', \text{`}\mathfrak{a}')$). Le trait précédant répéterait l'opération (par exemple $(\text{`}\smile', (\text{`}\Phi', \text{`}\mathfrak{a}')))$. Et ceci jusqu'à atteindre la suite finale (par exemple $(\text{`}|', (\text{`}\smile', (\text{`}\Phi', \text{`}\mathfrak{a}')))))$. L'expression consisterait donc en une suite imbriquée de suites de signes, exposant la combinaison des contenus. Cela est totalement compatible avec l'idée d'une composition du sens des *symboles* d'une expression, adoptée en 1879. La suite exhiberait

les symboles un à un, indiquant l'ordre dans lesquels leurs contenus doivent être combinés. Néanmoins deux éléments affaiblissent cette interprétation. D'une part, Frege n'a jamais fait la distinction entre signe et représentant. D'autre part, c'est *déjà* le rôle de l'expression que d'exhiber les symboles en indiquant, une fois que les conventions sont posées, l'ordre dans lequel les contenus doivent être combinés.

Venons-en à la troisième possibilité. Peut-être Frege a-t-il voulu donner à ce trait une fonction particulière : celle de combiner les contenus. Il faut préciser ce que nous entendons par là, car aucune expression n'est en mesure d'opérer sur un sens qui l'excède. Nous disons que Frege a voulu faire la distinction entre, par exemple, la succession de symboles '$\Phi(A)$', dont chacun possède un contenu propre, et l'expression qui exprime la combinaison de ces contenus '— $\Phi(A)$'. Cela expliquerait le nom 'trait de contenu' et permettrait d'insister sur le lien entre combinaisons de signes et combinaisons d'idées. Néanmoins, il s'agirait encore une fois d'une complication gratuite. Selon cette hypothèse, 'Φ' et 'A' possèdent chacun une signification, mais l'expression '$\Phi(A)$' est elle-même dénuée de sens, et il est nécessaire d'ajouter le trait horizontal pour obtenir la composition souhaitée. Pourquoi s'imposer un tel détour ? Il suffit de considérer *directement* que '$\Phi(A)$' exprime cette composition, et nous nous passons sans dommage du trait horizontal.

Il n'existe aucune explication satisfaisante à ce passage. Nous pouvons néanmoins constater que la présence du trait de contenu, aussi inutile soit-elle, provient d'une volonté de marquer que les combinaisons entre symboles reflètent celles de leurs significations. Soit parce que Frege réalisa la vanité de son propos, soit parce qu'il cessa de concevoir la combinaison des contenus en termes de symboles, il renonça à ce trait dès que la distinction catégoriale entre énoncé (non assertif) et nom d'objet fut résorbée [108]. Et nous pouvons nous-même l'abandonner à son sort sans craindre aucune incidence fâcheuse sur notre analyse.

1.4.13.5 L'implication

Nous avons discuté le rôle de l'implication en sections 1.3.2 et 1.4.9.3. Voici comment Frege le représentait :

$$\text{`}\begin{array}{l} B\text{'} \\ \llcorner A \end{array}$$

L'antécédent est indiqué en bas de la formule, et le conséquent en haut. Ce signe possède de nombreux avantages, dont nous pourrons nous rendre compte plus tard, mais il est aussi responsable d'une des propriétés les plus déroutantes de la langue formulaire : l'écriture arborescente en deux dimensions. Les expressions du langage ne s'écrivent pas sur une seule ligne ; elles ne consistent pas, à proprement parler, en une *suite de symboles*. Frege lui-même parle plus volontiers de *combinaisons*.

Or il existe un intérêt évident à ne traiter que de suites de symboles dans un langage formel. Contrairement aux langues naturelles régies par des règles multiples, imparfaites et gorgées d'exceptions, les langages logiques sont restreints à des éléments de base clairement définis sur

108. May tire une conclusion similaire :

> Frege a sûrement réalisé, étant donné la redondance de '— A' et 'A', que son appréhension du trait de contenu comme unifiant un contenu éclairait bien peu le lecteur de la *Begriffsschrift*. Ceci s'accentua à la lumière de la notion plus sophistiquée de contenu des *Grundgesetze*, dans lesquels il soutint que les deux expressions dénotaient (nommaient) la même valeur de vérité (§5). (May 2001, p. 5)

lesquels porte un procédé de génération tout aussi précis. En conservant une richesse et un pouvoir expressif conséquent, ils se soumettent donc à une étude "mathématique" ou, pour utiliser une formule moins polémique, possèdent des propriétés morphologiques aussi claires que rigides. Autrement dit, toutes les manipulations de signes licites sont proprement circonscrites, et elles le sont *via* des définitions sur des suites de symboles. Par exemple, construire '$p \wedge q$' à partir de 'p' et de 'q' revient à concaténer les symboles 'p', '$\wedge$' et 'q'. Dans la langue formulaire et l'idéographie, un tel procédé n'est pas permis. Cependant, si cette alternative perd en simplicité, elle ne cède rien en rigueur ; car les expressions peuvent parfaitement être caractérisées en termes de tableaux de symboles. Nous pourrions, en utilisant des matrices plutôt que des suites, spécifier par induction la morphologie du langage. Frege ne prit pas cette peine, et nous nous l'épargnerons aussi, parce que les opérations permises sont suffisamment intuitives. À l'heure où il s'agira d'établir la morphologie du langage, nous décrirons bien sûr l'induction en jeu, mais nous ne pousserons pas le détail jusqu'à stipuler les remplacements les plus simples à travers des tableaux de symboles. Il nous suffira de remarquer sans le prouver – ce serait aussi assommant qu'inutile – que nos définitions n'induisent aucune ambiguïté, et que nous savons immédiatement ce à quoi aboutit le remplacement d'une combinaison de signes par une autre dans une troisième.

1.4.13.6 La négation

Nous avons présenté la négation en section 1.4.9.3, rappelons que Frege l'exprimait ainsi :

$$\text{`}_{\top} A\text{'}$$

1.4.13.7 L'identité de contenu conceptuel

Au regard des nombreuses discussions qu'il suscite, il semble que le symbole '$\equiv$' soit le plus difficile de la langue formulaire. Il fut introduit ainsi :

> L'identité de contenu se distingue de l'implication et de la négation en ce qu'elle se rapporte à des noms et non pas à des contenus. Tandis que d'ordinaire les signes ne font rien d'autre que représenter leur contenu, si bien que chaque combinaison dans laquelle ils entrent n'exprime qu'une relation à leurs contenus, ils s'exhibent soudainement eux-mêmes dès qu'ils sont liés par le signe d'identité de contenu ; car c'est ainsi qu'est désigné la circonstance que deux noms ont même contenu. (Frege 1879b, pp. 13-14 / p. 28)

Remarquons d'abord que le contenu du symbole '$\equiv$' n'est pas un opérateur, mais une relation, *i.e.* un concept. De plus, cette relation est *métalinguistique*, car elle intervient entre des expressions, et non entre leurs contenus. Frege soulève immédiatement une objection à cette idée :

> Ceci donne d'abord l'apparence qu'il s'agit de quelque chose qui appartient seulement à l'*expression* et *non pas à la pensée*, et que l'on n'a aucunement besoin de signes différents pour le même contenu, donc, que l'on n'a pas besoin d'un signe pour l'identité de contenus. (Frege 1879b, p. 14 / 28)

Il est important de comprendre comment il va (tenter de) répondre à cette objection. Il ne fournira aucun argument contredisant la première partie du problème, *i.e.* montrant que les expressions ne sont pas les seules prises en considération dans cette affaire ; il va seulement soutenir que, *malgré cela*, il demeure crucial à l'étude d'une discipline d'octroyer différents noms à un même contenu.

Frege emprunte un exemple à la géométrie afin d'illustrer la manière dont l'identité de contenu entre deux expressions constitue parfois un résultat essentiel résultant d'une recherche interne à la discipline en question. Utilisons une image proche de la sienne qui nous servira par la suite. Disons qu'il appartient au géomètre – et non au linguiste – de prouver que le nom 'A' référant au point d'intersection entre une première et une seconde médiane d'un triangle a le même contenu que le nom 'B' référant au point d'intersection entre une seconde et une troisième médiane de ce triangle. Il s'agit là d'un jugement concernant les noms 'A' et 'B', mais ces noms sont associés à des modes de détermination – le point d'intersection entre la première et la seconde médiane ; le point d'intersection entre la seconde et la troisième médiane – tels que seule une étude géométrique permet de déterminer qu'ils conduisent au même point.

Frege explique ainsi qu'un jugement concernant les expressions peut être scientifiquement substantiel : différents modes de détermination d'un objet correspondent à différents noms, et une recherche qui concerne directement l'objet – et non les expressions – est essentielle pour montrer que ces divers modes de détermination conduisent au même objet :

> Il en résulte que les différents noms pour le même contenu ne sont pas toujours qu'une question indifférente de forme, mais qu'ils concernent la nature de la chose même lorsqu'ils sont liés à différents modes de détermination. (Frege 1879b, p. 15 / 29)

Cependant, *à aucun moment* sa réponse ne permet d'expliquer le lien entre une information concernant les expressions et un message ayant trait à leurs contenus. Elle ne rend aucun compte du saut du terrain de la langue vers celui du sens. Et cette carence est importante : le fait que deux noms désignent le même objet a trait à l'histoire de la langue, et en aucun cas à la science qui traite de cet objet. La décision d'associer tel signe plutôt que tel autre à tel objet est totalement arbitraire. En 1879, Frege se contente de *constater* qu'à travers l'importance d'admettre plusieurs modes de détermination, les jugements d'identité sont essentiels au développement d'une discipline. Il en conclut que, *bien que ces jugements concernent des questions de formes*, ces dernières sont *pertinentes* eu égard à la discipline étudiée. Mais jamais il n'explique par quel miracle une simple information sur des expressions excède, par sa portée, le pur domaine de la langue. Ce problème ne sera résolu qu'à travers l'introduction des notions de *Sinn* et *Bedeutung*, *via* une nouvelle articulation entre nom, mode de désignation et contenu. Pour l'heure, Frege prépare plus qu'il ne lève son objection future : il est incontestable que la reconnaissance que différents modes de désignations correspondent à un même objet constitue parfois une avancée considérable dans une science, pourtant, *selon ses propres dires*, cette reconnaissance n'informe que sur les expression du discours scientifique et pas sur les objets de la science eux-mêmes. Ses vues de 1879 conduisent fatalement à cette difficulté, et Frege la surmontera en se rétractant sur la seconde partie : les jugements d'identité ne statuent *pas* sur de simples questions de forme. Il abandonnera toute vision métalinguistique de l'identité en intégrant le mode de désignation au *contenu* d'une expression. Ainsi la reconnaissance que deux modes de désignation conduisent au même objet ne relèvera plus d'une enquête sur les expressions de la langue, mais bien sur leurs contenus ; elle appartiendra à la science elle-même. Frege distinguera le lien sémantique – résultant d'un choix humain – entre une expression et un mode de désignation et le lien ontologique – n'ayant trait à aucune décision des hommes – entre un mode de désignation et un objet [109].

109. Heck tire une conclusion similaire :

> Dans "Sens et référence", Frege objecte aux vues de la *Begriffsschrift* qu'elles impliquent que les jugements d'identité ne "concernent pas la chose même, mais la manière dont nous la désignons" : si cette vue était correcte, les jugements d'identités ne seraient jamais à propos de la géométrie, mais seulement à propos du langage. Rien dans la discussion de la *Begriffsschrift* ne répond à cette

Il ne serait pas convenable de présenter isolément un progrès qui résulte d'un mouvement global. L'évolution des positions de Frege concernant l'identité n'est pas la cause – en tous cas certainement pas la seule cause – de la révolution de 1891. Des réflexions à son sujet ont bien sûr pu jouer un rôle dans ce basculement – bien qu'aucun indice ne soit en mesure de l'assurer – mais celui-ci permit de résoudre un problème général dont l'identité n'est qu'un cas particulier. Il importe donc de garder une vue d'ensemble de cette affaire, et nous traiterons le cas de l'identité en temps voulu.

Pour l'heure, précisons que le symbole '$\equiv$' possède un autre rôle : il permet d'effectuer ce que Frege appelait des *définitions*, *i.e.* de donner à un nouveau signe le sens d'une expression complexe qui utilise exclusivement des signes anciens. Afin de distinguer l'activité de jugement, qui consiste par exemple à reconnaître la vérité d'une identité de contenu d'expression, de l'activité de définition, qui consiste à *stipuler* une identité pour octroyer un contenu à un signe antérieurement vide de sens, Frege doubla le trait vertical au début de l'énoncé. Ainsi, en supposant que 'A' et 'F' possèdent des contenus qui nous soient connus, nous pouvons injecter dans le symbole 'Δ' le sens de '$F(A)$' à travers l'expression suivante :

$$\text{‘}\Vdash \Delta \equiv F(A)\text{’}$$

Bien sûr, une fois que l'identité entre les contenus a été *posée*, rien n'interdit de l'*asserter* :

$$\text{‘}\vdash \Delta \equiv F(A)\text{’}$$

Lorsqu'il s'agissait de définir un signe pour un concept, et parfois pour un concept de niveau supérieur, Frege se prémunit adroitement de toute ambiguïté, mais échoua à donner à son expression la forme que la hiérarchie des concepts exigeait. Nous en avons fourni un exemple clair en note de bas de page 86.

1.4.13.8 Morphologie

Nous avons vu en section 1.4.9 que Frege entendait, dès 1879, respecter dans sa grammaire la composition des contenus, mais qu'il considérait encore, à travers la notion de contenu indéterminé, un processus en termes de symboles : le contenu d'une expression est composé des contenus des *symboles* qui la constituent. Nous savons par ailleurs qu'il n'a pas décrit la morphologie de son langage. Nous pouvons désormais accomplir cette tâche pour lui, en tenant compte de la place particulière du trait horizontal d'une part, et de l'association systématique des lettres gothiques à un quantificateur d'autre part :

---

charge particulière. Au contraire, dans la *Begriffsschrift*, l'objection est que la vue métalinguistique implique que les jugements d'identité concernent des "questions indifférentes de forme". Frege y répond en expliquant pourquoi nous avons besoin de jugement d'identités en géométrie, malgré le fait qu'ils concernent des signes et non des droites. Disons le autrement : dans la *Begriffsschrift*, l'objection est que si la conception métalinguistique était correcte, alors les jugements d'identités concerneraient des *questions indifférentes de forme* ; dans "Sens et référence", l'objection est que les jugements d'identité concernent des *questions de forme*. La réponse de Frege dans la *Begriffsschrift* concède que les jugements d'identité concernent des questions de forme, mais il souligne que ces questions interviennent naturellement en mathématiques et ainsi ne sont pas indifférentes. Cela ne constitue pas même une ébauche de réponse à l'objection soulevée dans "Sens et référence". (Heck 2003, pp. 100-101)

- 'a', 'b' et 'c' – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres latines de premier type ;
- '$\mathfrak{a}$', '$\mathfrak{b}$' et '$\mathfrak{c}$' – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres gothiques de premier type ;
- 'f', 'g' et 'h' – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres latines de second type ;
- '$\mathfrak{f}$', '$\mathfrak{g}$' et '$\mathfrak{h}$' – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres gothiques de second type.

- Toute lettre latine de premier type est un terme ;
- si x est une lettre latine de premier type et F une lettre latine de second type, $F(x)$ est un terme ;
- si t est un terme, $\vdash t$ est un terme ;
- si t_1 et t_2 sont des termes, $t_1 \equiv t_2$ est un terme ;
- si t_1 et t_2 sont des termes, $\begin{array}{l}\rule[0.5ex]{1.5em}{0.4pt}\,t_2\\ \rule[0.5ex]{0.4pt}{1.5ex}\rule[0.5ex]{1.5em}{0.4pt}\,t_1\end{array}$ est un terme ;
- si t est un terme contenant une lettre latine de premier ou second type δ, et δ' une lettre gothique du même type ne figurant pas dans t, alors $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, t[\delta'/\delta]$ est un terme [110] ;
- aucune autre expression n'est un terme.

- Si t est un terme alors $\vdash t$ est un énoncé assertif ;
- aucune autre expression n'est un énoncé assertif.

En l'état, cette construction présente un défaut important. Elle permet de générer des termes et énoncés que Frege rejetait, résultant d'une confusion entre contenus jugeables et non jugeables. Par exemple, nous obtenons aisément les deux expressions suivantes :

$$\text{`}\vdash f(a) \equiv \begin{array}{l}\rule[0.5ex]{1.5em}{0.4pt}\,a\\ \rule[0.5ex]{0.4pt}{1.5ex}\rule[0.5ex]{1.5em}{0.4pt}\,b\end{array}\text{'} \qquad\qquad \text{`}\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\left(\mathfrak{a} \equiv \begin{array}{l}\rule[0.5ex]{1.5em}{0.4pt}\,c\\ \rule[0.5ex]{0.4pt}{1.5ex}\rule[0.5ex]{1.5em}{0.4pt}\,b\end{array}\right)\text{'}$$

La première présente une hétérogénéité liée à la lettre 'a'. Rappelons qu'en 1879, les contenus non jugeables étaient des objets ou des concepts, tandis que les contenus jugeables résultaient de :

1. la composition d'un concept avec un ou plusieurs objets, par exemple la circonstance que Marie est française.
2. la mise en rapport d'autres contenus jugeables, par exemple la circonstance que s'il fait beau, alors Marie ira pique-niquer.

Un concept ne subsume jamais un contenu jugeable. Ainsi l'instance de gauche de la lettre 'a' joue le rôle d'un nom d'objet, tandis que celle de droite est une expression pour un contenu *jugeable*.

Dans le second cas, le membre de gauche de l'identité est mis en relation avec un contenu jugeable, il est donc aussi de ce type. Pourtant, Frege n'autorisait pas de quantification sur un contenu jugeable. Il n'a certes jamais formulé explicitement cette interdiction, mais trois indices ne laissent pas l'ombre d'un doute. D'une part, aucune des nombreuses formules de la *Begriffsschrift* n'incorpore rien de tel. D'autre part, aucun des exemples donnés dans la langue naturelle ne présente quelque chose de cet ordre. Enfin, Frege introduisit la quantification par

110. Nous notons $t[\delta'/\delta]$ le résultat du remplacement dans t de toutes les occurrences de δ par δ'.

‘$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a})$’ à travers la distinction fonction-argument qui respecte toujours le découpage entre concepts et objets. En 1879, ‘$\mathfrak{a}$’ était donc systématiquement une lettre pour un *objet*.

De ce défaut résulte une confusion entre termes et formules : le ‘a’ de gauche de notre premier énoncé est une lettre pour un objet, il s'agit d'un terme ; au contraire, celui de droite correspond à un contenu jugeable, il s'agit d'une formule. Nous pourrions corriger nos clauses à travers des précisions complexes et nombreuses. C'est d'ailleurs dans cet esprit que Frege contraignit le trait horizontal à précéder un contenu jugeable. Par ce biais, il interdisait notamment de substituer un nom d'objet à ‘a’ dans la formule ‘$\vdash\!\!\!\!\!\!\begin{array}{l}\top\\ \llcorner\, a\end{array}\, a$’, et maintenait une séparation entre les cas où ‘a’ joue le rôle d'un nom d'objet et ceux où il exprime un contenu jugeable. Mais Frege n'a donné le détail ni de la morphologie, ni des règles de substitutions. S'il s'y était appliqué, il se serait aperçu que cette seule précaution était insuffisante. Plutôt que de maintenir coûte que coûte des lettres identiques dans des rôles différents – et ainsi obscurcir considérablement la morphologie –, nous allons distinguer les lettres pour des objets – ‘a’, ‘b’, ‘c’ potentiellement indexées par les entiers naturels – et les lettres pour des contenus jugeables – ‘$\mathtt{a}$’, ‘$\mathtt{b}$’, ‘$\mathtt{c}$’ potentiellement indexées par les entiers naturels –[111]. Nous appellerons désormais les lettres de second types des ‘lettres pour des concepts’[112] :

- ‘$\mathtt{a}$’, ‘$\mathtt{b}$’, ‘$\mathtt{c}$’ – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres pour des contenus jugeables ;
- ‘a’, ‘b’ et ‘c’ – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres latines pour des objets ;
- ‘$\mathfrak{a}$’, ‘$\mathfrak{b}$’ et ‘$\mathfrak{c}$’ – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres gothiques pour des objets ;
- ‘f’, ‘g’ et ‘h’ – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres latines pour des concepts ;
- ‘$\mathfrak{f}$’, ‘$\mathfrak{g}$’ et ‘$\mathfrak{h}$’ – potentiellement indexées par les entiers naturels – sont des lettres gothiques pour des concepts.

- Les termes sont toutes et seulement les lettres latines pour les objets ;
- toute lettre pour un contenu jugeable est une formule ;
- si x est un terme et F une lettre latine pour un concept, $F(x)$ est une formule ;
- si ϕ est une formule, $_{\top}\, \phi$ est une formule ;
- si ϕ et ψ sont des lettres latines pour des objets, $\phi \equiv \psi$ est une formule ;
- si ϕ et ψ sont des formules, $\phi \equiv \psi$ est une formule ;
- si ϕ et ψ sont des formules, $\begin{array}{l}\_\_\_\_\ \psi\\ \llcorner\_\_\_\ \phi\end{array}$ est une formule ;
- si ϕ est une formule contenant une lettre latine une lettre latine δ pour un objet, respectivement un concept, et δ' une lettre gothique pour un objet, respectivement un concept, ne figurant pas dans ϕ, alors $\overset{\delta'}{\smile} \Phi[\delta'/\delta]$ est une formule ;
- aucune autre expression n'est un terme.

111. Landini (2012, Section 2.5) recourt aussi à ce procédé dans sa présentation de la langue formulaire. Le lecteur, s'il consulte ce passage, ne manquera pas de noter certaines différences entre notre reconstruction et la sienne. Nous les retrouverons dans l'étude de l'Idéographie, prises au sein d'un désaccord de fond que nous discuterons en détail à ce moment.

112. Puisque Frege ne quantifiait pas encore sur des contenus jugeables, nous n'avons pas besoin de lettres gothiques correspondant à ‘$\mathtt{a}$’, ‘$\mathtt{b}$’ et ‘$\mathtt{c}$’.

- si ϕ est une formule alors $\vdash \phi$ est un énoncé assertif ;
- aucune autre expression n'est un énoncé assertif.

Cette construction permet, à travers des clauses extrêmement simples, de construire tous les énoncés admis par Frege en 1879, et *seulement* ces énoncés. La distinction entre lettres pour des objets et des contenus jugeables bloque l'écriture des énoncés problématiques relevés plus haut. De plus, la différence entre termes et formules est à présent visible[113]. Enfin, cette méthode dévoile certains problèmes de fond sous-jacents à la langue formulaire.

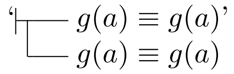
Le premier concerne les lettres pour les objets et les concepts. Le lien indéfectible qui attache une lettre gothique à son quantificateur interdit de construire directement les formules à travers de simples combinaisons de symboles, et exige de recourir à des remplacements *via* l'introduction de notre avant-dernière clause. Voilà qui reflète dans la morphologie le problème que Frege rencontrait au niveau des contenus. La notion d'indétermination ne permettait pas de rendre correctement compte du sens de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$' à travers ceux de ses constituants, car Frege ne parvenait pas encore à prendre en considération le rôle de '$\mathfrak{a}$' : il était incapable d'éclairer le statut sémantique de l'indétermination. Il ne savait comment déterminer un contenu à partir de celui, indéterminé, d'une expression telle que '$\Phi(\mathfrak{a})$', elle-même exclue des énoncés de la langue formulaire. Sa solution consista à penser la quantification en termes de concepts de niveaux supérieurs. Elle engendra la syntaxe terriblement complexe de l'idéographie. L'avant-dernière clause ci-dessus, en démasquant l'imposture de l'indétermination, annonce déjà le sac de nœuds à venir.

Le second problème concerne les lettres pour les contenus jugeables. Dans la *Begriffsschrift*, Frege dit expressément que les lettres latines étaient des "abréviations" (p. 21 / 35) de lettres gothiques avec leurs quantificateurs. Mais cette position ne peut être valable dans le cas des lettres pour les contenus jugeables, sur lesquelles la quantification ne fut jamais envisagée. Pourtant, Frege ne donne aucune explication démarquant les deux usages. La notion d'indétermination n'était pas plus efficace dans le cas de la généralité pour les contenus jugeables que dans celui de la quantification pour les objets et les concepts.

Le troisième problème est lié aux substitutions. Frege, qui tut le processus de construction morphologique de sa langue, omit aussi de décrire les règles de substitution de son système. Les deux éléments vont de pair. Il est nécessaire de connaître la totalité des termes – respectivement formules – du langage pour savoir quelles expressions sont candidates au remplacement d'une lettre pour un objet – respectivement contenu jugeable – dans un énoncé assertif. De plus, il est crucial de distinguer une autre catégorie d'expression afin de déterminer quoi substituer aux lettres pour des concepts. Or en 1879, Frege ne disposait pas encore de la notion d'insaturation et du dispositif linguistique associé : l'usage de la lettre 'ξ' pour marquer la place vide dans les noms de concepts. Ainsi, il ne lui était pas possible d'indiquer clairement par quoi remplacer 'f' – plus tard il dirait qu'il s'agit de '$g(\xi) \equiv g(\xi)$' – dans '$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(a) \\ f(a) \end{array}$ afin d'obtenir :

113. Notons une distinction supplémentaire qui n'existe pas dans la majorité des logiques contemporaines. Frege sépare l'énoncé non assertif – que nous avons appelé 'formule'– qui possède (indirectement) une valeur de vérité, de l'énoncé assertif qui permet de manifester la reconnaissance de la vérité. En logique contemporaine, les deux sont confondus : la formule possède une valeur de vérité (dans une structure sous une assignation), et elle permet *simultanément* de manifester la reconnaissance de la vérité. Frege dirait que la force assertive est (fallacieusement) intégrée au sens de la formule.

Nous avons donné le détail de cette affaire en section 1.3. Voici un exemple rapide : Frege estime que 'la circonstance que le chat est noir' possède (indirectement) une valeur de vérité et que '$\vdash$ la circonstance que le chat est noir' permet d'asserter que cette valeur est le Vrai. En logique contemporaine, 'le chat est noir' joue les deux rôles.

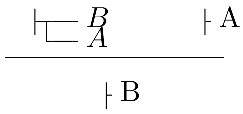


.

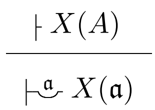
Plus sérieux encore : Frege commit d'importantes erreurs lorsqu'il indiqua des remplacements relatifs à des concepts de niveaux supérieurs, car il ne les avait pas encore identifiés comme tels et n'avait donc pas mis à jour l'appareil linguistique adapté. Nous invitons le lecteur, maintenant que les pré-requis techniques sont en place, à retourner, s'il le souhaite, consulter la note de bas de page 86. Il y trouvera divers exemples de ce problème, qui sont autant de preuves de ce que nous venons d'affirmer : Frege n'était pas en mesure d'écrire les règles de substitution car il n'avait pas encore correctement pensé ni l'insaturation ni la hiérarchie des concepts [114].

1.4.13.9 Syntaxe

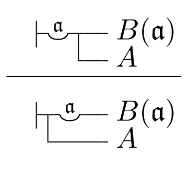
Dans la *Begriffsschrift*, Frege choisit de limiter considérablement le nombre de règles de son système. Il en présenta trois, en commençant par le *Modus Ponens* :



Selon la seconde, une lettre latine peut partout être remplacée par une lettre gothique qui ne figure pas dans l'énoncé, à condition que la concavité soit introduite immédiatement après le trait de jugement :

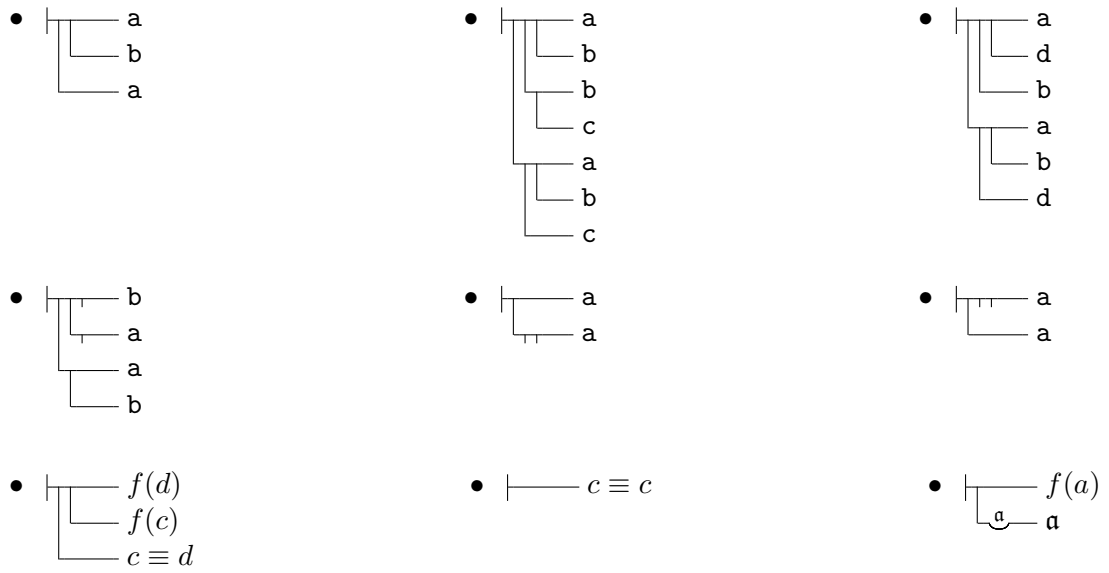


Selon la troisième, si une condition n'incorporant pas la lettre gothique associée à un quantificateur figure dans la portée de ce quantificateur, elle peut être exportée à l'extérieur de ce quantificateur :



Frege adjoint à ces trois règles les neufs axiomes suivants :

114. Les seules (maigres) indications fournies à propos des substitutions concernent l'obligation de modifier les lettres gothiques pour éviter une collision à l'intérieur d'un même quantificateur, et l'interdiction de faire suivre un trait horizontal d'un contenu non jugeable afin de maintenir la distinction avec les contenus jugeables, malgré l'usage des mêmes lettres latines pour exprimer les deux. Nul besoin de préciser qu'il s'agit là d'explications totalement insuffisantes.



Le signe '≡' intervient aussi bien entre des noms d'objets qu'entre des contenus jugeables. Ainsi, notre distinction entre les deux types de lettres nous contraint à répéter les septième et huitième axiomes pour les contenus jugeables :

Dans la pratique, Frege n'employa qu'une seule fois '≡' entre contenus jugeables (hormis lors des définitions) [115] et n'utilisa le premier de ces deux axiomes qu'à de très rares occasions [116]. Cependant, celui-ci incorpore une lettre pour un contenu jugeable comme argument d'une lettre pour un concept. Il transgresse donc à la fois les clauses de la morphologie décrite en dernière section, et l'idée qu'un concept ne prend que des objets en arguments. Il est probable qu'à cette époque, Frege y voyait un simple procédé pour gérer la substitution dans le cas de contenus jugeables identiques exprimés différemment, qui exigeait pourtant une caractérisation de la lettre 'f' indépendante de la quantification, caractérisation qu'il n'a pas fournie. Il s'agit d'une marque supplémentaire de la difficulté qu'il éprouvait à gérer la présence de différents types d'expressions complètes, qui serait uniformisés par l'intégration des valeurs de vérité aux objets [117].

Nous connaissons désormais le système de la langue formulaire telle qu'il fut introduit par Frege dans la *Begriffsschrift*, avec ses différents défauts et carences. Ces derniers vont naturellement peser sur les changements à venir, et nous sommes désormais en mesure de l'expliquer.

1.5 Sémantique et logicisme : les causes du premier mouvement

1.5.1 Introduction

Frege entendait construire, à travers sa langue formulaire, le langage de la pensée *pure* :

115. dans la formule (68).
116. par exemple dans la dérivation de (89).
117. Nous serons plus précis en section 1.6.2.2.

> Comme je me suis pour l'instant limité à l'expression de relations qui sont indépendantes de la caractéristique particulière des choses, je peux aussi utiliser l'expression 'langage formulaire de la pensée pure'. (Frege 1879b, p. IV / 6)

Cet aspect fut traduit d'une manière singulière : aucun signe primitif n'était le nom d'un contenu jugeable, d'un concept ou d'un objet *particulier*. Le langage ne devait intégrer que les symboles pour la négation, l'implication, etc., et les lettres pour porter la généralité. Il est intéressant de citer, dans toute sa longueur, un des rares passages dans lesquels Frege précisa sa pensée :

> On peut distinguer la partie formelle qui, dans le langage des mots, est constituée par les terminaisons, préfixes et suffixes, et les particules, de la partie proprement expressive du contenu. Les signes de l'arithmétique correspondent à la dernière. Ce qui manque encore, c'est le ciment logique qui permettra d'assembler solidement, les unes avec les autres, ces pierres de construction. Jusqu'à présent, le langage des mots en a tenu lieu, et il devient impossible par conséquent de s'en passer, non pas simplement dans les parties non essentielles à la rigueur de la suite inférentielle, et qui ne servent qu'à faciliter la saisie de l'enchaînement, mais bien aussi dans la démonstration elle-même. À l'inverse la langue symbolique de Boole ne représente que la partie formelle du langage, et même celle-ci de façon incomplète. Le langage formulaire de Boole et celui de l'arithmétique résolvent par conséquent chacun une partie du problème d'une langue formulaire. On aura maintenant, pour obtenir une solution plus complète, à compléter par une partie formelle les signes de la mathématique, car il serait non expédient de laisser ce qui est déjà disponible inutilisé. Mais à l'élaboration de ce complément, la logique de Boole est totalement impropre, du seul fait qu'elle utilise les signes +, 0, 1 en un sens qui diverge du sens arithmétique. Cela conduirait à de grands inconvénients, si dans la même formule le même signe se trouvait avec des significations différentes. On ne peut en faire le reproche à Boole, puisqu'une telle utilisation de ses formules est manifestement tout à fait étrangère à ses intentions. Le problème se pose ainsi de mettre en place des signes pour les relations logiques qui soient aptes à fusionner avec le langage mathématique, et ainsi de former, au moins pour un domaine donné, une langue formulaire complète. C'est ici que prend place mon opuscule. (Frege 1881, pp. 14 - 15 / p. 22)

Nous pouvons faire deux constats immédiats. D'une part, Frege semble ici faire écho à une vision traditionnelle de la logique. Un énoncé serait constitué d'une partie formelle, vide de contenu, structurante – le ciment logique – et d'une partie substantielle, dotée de contenu – extra-logique. D'autre part (et en conséquence), la constitution d'une langue formulaire *complète* pour l'arithmétique requerrait, outre les symboles logiques fournies dans la *Begriffsschrift*, l'addition de signes pour exprimer les contenus arithmétiques. Les premiers correspondraient bien sûr à la partie formelle, et les secondes à la portion substantielle. Ainsi, en 1881, Frege n'aurait pas encore envisagé la dérivation des théorèmes fondamentaux arithmétiques à partir des lois logiques, *i.e.* de réduire la première discipline à la seconde. Autrement dit, le logicisme aurait été étranger à ses vues de l'époque. Et ce n'est ni l'unique extrait ni l'unique écrit qui suggère une telle chose. À la fin du même texte, Frege recensa les différentes conclusions de ses développements, la première résume rapidement le passage ci-dessus :

> Ma langue formulaire a un objectif plus étendu que la logique booléenne, en ce qu'elle veut rendre possible la représentation d'un contenu en se combinant avec les signes arithmétiques et géométriques. (Frege 1881, p. 51 / 58)

Frege ne trouva jamais preneur pour cet article aussi technique que détaillé. Il tenta donc de synthétiser son contenu en un court plaidoyer en faveur de la *Begriffsschrift* qui parut l'année suivante. On y trouve, là aussi, une répétition quasi littérale de ce que nous venons de lire :

> Si l'on prend une vue d'ensemble du langage formulaire de Boole, on voit qu'il consiste à habiller la logique abstraite du vêtement des signes algébriques ; il n'est pas propre à l'expression d'un contenu et tel n'est pas non plus son but. Or c'est là précisément mon intention. Je veux fondre les quelques signes que j'ai introduits avec les signes mathématiques en un seul formulaire. Les signes existants correspondraient à peu près aux racines des mots, tandis que les signes introduits sont à comparer aux terminaisons et aux particules qui établissent des rapports logiques entre les contenus des racines. (Frege 1882b, p. 100 / 73)

Linnebo (2003) est probablement celui qui prend ces passages le plus au sérieux. En les lisant à la lettre, il en tire la conséquence radicale selon laquelle Frege n'aurait pas, à cette période, attribué le moindre contenu aux énoncés logiques. Nous avons déjà avancé divers arguments contre cette interprétation en section 1.4.3, et discuté les positions de Linnebo dans la note de bas de page 47. Nous voulons à présent pousser plus loin. Car si nos arguments nous semblent affaiblir sa lecture, il faut reconnaître que ces passages la renforcent au contraire. Ils exigent donc une explication. Voici ce que nous allons soutenir : entre 1879 et une certaine date située avant 1884 (probablement avant 1882), Frege ne savait pas exactement *dans quel cadre* dériver les théorèmes de l'arithmétique. Après la rédaction de la *Begriffsschrift*, toute son attention (lorsqu'elle n'était pas confisquée par ses détracteurs) se concentra sur le concept de nombre. Il engagea une recherche qui lui permit de comprendre que celui-ci se localisait dans la sphère logique, autrement dit que l'arithmétique se réduisait à la logique [118].

C'est la poursuite de cet objectif qui exigea une réflexion profonde sur la notion de concept, conduisant aux éclaircissements que nous avons décrits en détail. Il y eut donc une conséquence, incidente mais fondamentale, à cette enquête : Frege parvint à dissiper (partiellement) une tension extrême qui gangrenait sa conception des contenus, liée aux lettres pour la généralité et à la notion de contenu indéterminé ; tension qui explique (en même temps qu'elle dénonce) l'interprétation de Linnebo.

Peut-être aiderons-nous le lecteur à comprendre notre démarche en la décrivant ainsi : jusqu'ici, nous avons examiné à la loupe ce qui s'était produit au sein des conceptions sémantiques de Frege entre 1879 et 1884, nous allons voir à présent *pourquoi* cela s'est produit. Dans la section précédente, nous avons questionné la manière dont il entendait le lien entre expression et contenu mais, et ce point est trop souvent ignoré des commentateurs qui transforment Frege en philosophe du langage, ce n'était *pas* son problème principal. Il en vint à développer des idées sémantiques simplement parce qu'elles lui permettaient de surmonter les obstacles rencontrés dans son projet

118. Il est clair que Frege acceptait ce rapport de causalité. Dans le texte inédit rédigé en 1881, il prit soin de définir certaines relations sans impliquer la multiplication, et en exhibant les axiomes à attacher à l'addition :

> Les nombres dont on considère les multiples ne doivent être soumis à aucune autre restriction que le fait de vérifier les énoncés ci-dessous relatives à l'addition :
>
> $$\vdash (n+b)+a = n+(b+a) \qquad\qquad \vdash n = n+0$$
>
> En revanche, non seulement aucun énoncé relatif à la multiplication, mais pas même le concept de multiplication n'ont à être assumés. (Frege 1881, p. 30 / 37)

Frege était parvenu à analyser logiquement la relation de R-successeur. Une fois les concepts de *nombre cardinaux finis* et *infinis* en poche, il pensait aboutir sans encombre à l'addition et à la relation d'ordre. L'obstacle qui se tenait sur la route du logicisme était exclusivement l'analyse du concept de *nombre*. Nous en dirons davantage en section 1.5.4.

de démonstration des théorèmes de l'arithmétique. Voilà pourquoi ces idées demeurèrent longtemps dans un état précaire. Frege ne prit plus la peine de les examiner davantage lorsqu'elles lui semblaient tenir parfaitement leur rôle, et il n'amorça de révision qu'en constatant un défaut qui influait sur son entreprise première : le développement des mathématiques dans un système idéal. La première rupture – ou plutôt l'affinement progressif – survenue entre 1879 et 1884 fut motivée par une recherche sur le concept de nombre. Elle permit de perfectionner sa vision du lien entre expression et contenu, notamment à travers l'introduction des concepts de niveaux supérieurs et l'exclusion de la notion de contenu indéterminé, *sans régler la totalité des problèmes posés.* Ces derniers n'étaient pourtant pas si difficiles à entrevoir. Nous ne nous engageons pas ici dans un anachronisme qui consisterait à reprocher à Frege de ne pas avoir détecté ce qu'un siècle de philosophie a rendu patent. Au contraire, c'est bien parce que Frege était Frege – un penseur d'une rigueur à toute épreuve et d'une remarquable profondeur – que nous pouvons à bon droit nous étonner de ce délai. Et la réponse à notre étonnement éclairera notre route au-delà de toute espérance. Ainsi Frege parvint aux arrangements essentiels que nous avons décrits en enquêtant sur le concept de nombre, ainsi c'est en revenant sur la notion de fonction qui avait prit, à la suite de cette enquête, une nouvelle place au sein de son programme, qu'il engendra la véritable rupture de 1891.

Il y eut donc deux mouvements au sein de cette première période. Nous avons raconté le premier, situé entre 1879 et (au plus tard) 1884, et allons à présent décrire ses causes. En 1884, Frege pensait avoir conduit cette histoire de contenu suffisamment loin pour s'occuper sereinement de son problème, ce qu'il fit jusqu'en 1890. Il fut probablement stupéfait lorsque, sans quitter son objectif des yeux, il réalisa son erreur : ses conceptions sémantiques heurtaient de plein fouet le rôle neuf dont il chargeait les fonctions ; une révolution s'annonçait, que nous allons relater. Nous espérons qu'à l'issue de ce récit, le lecteur pourra constater combien la prise en considération du projet initial dans l'évolution des idées sémantiques de Frege explique cette dernière avec une simplicité qui, passée la surprise initiale, inspire la plus grande confiance.

1.5.2 L'avènement du logicisme

La question concernant la date à laquelle Frege souscrit au logicisme divise les commentateurs. Linnebo (2003) soutient que, dans les textes antérieurs à 1882, il réservait aux signes arithmétiques, irréductibles à ceux de sa langue formulaire, la tâche d'exprimer les contenus arithmétiques ; localisant cette discipline à l'extérieur de la logique. De même, May (2001, pp. 24-26) affirme que Frege séparait clairement les symboles logiques et arithmétiques, notamment ceux d'identité et d'égalité, avant de rebrousser chemin en adhérant au logicisme, lorsque 1881 fut révolue. Si Heck (2017, pp. 26-29) reconnaît aussi l'existence d'une distinction entre ces deux signes, il propose une définition *logique* du second à laquelle Frege aurait pu souscrire *avant* d'avoir précisé sa notion de concept, *i.e.* avant 1882.

Ces désaccords sont tout à fait compréhensibles, car les éléments textuels sont incontestablement contradictoires. Dans un premier temps, nous allons recenser les indices qui appuient l'idée selon laquelle Frege n'aurait envisagé la réduction des mathématiques à la logique qu'après la rédaction de la *Begriffsschrift* et des différents plaidoyers en sa faveur, i.e strictement après 1881.

Nous avons déjà présenté le premier, de loin le plus redoutable : dans les deux textes dans lesquels Frege compara son langage et celui de Boole, il affirma expressément que des signes *extérieurs* à sa langue formulaire étaient nécessaires afin d'exprimer des contenus mathématiques. Il prévoyait une *fusion* du langage mathématique et de sa langue formulaire, et non une réduction du premier au second.

Le deuxième indice a trait au symbole d'égalité arithmétique '='. Laissons pour l'instant de

côté le long texte de 1881 – nous y reviendrons –, en nous cantonnant à une conférence donnée peu de temps après la publication de la *Begriffsschrift* (1879a). Afin d'illustrer la portée considérable de sa langue formulaire, Frege débuta sa contribution en formalisant un énoncé *géométrique*. Dans ce contexte, il fit usage du symbole '≡' exprimant l'identité entre contenus. Ses autres exemples se limitèrent au domaine arithmétique. '≡' ne fut alors plus employé, et l'égalité arithmétique se vit exprimée grâce au traditionnel symbole '='. Si Frege avait décidé d'utiliser un signe connu de son auditoire dans l'unique but de simplifier son exposé – s'il avait simplement écrit '=' en lieu et place de '≡', lui octroyant implicitement le même rôle, mais ne souhaitant pas insister sur ce point délicat au sein d'une présentation elle-même insolite –, il aurait utilisé '=' dans *tous* ses exemples, y compris dans la partie géométrique. Or il s'encombra des deux symboles, chassant de l'arithmétique celui de la langue formulaire. Cela ne peut être un hasard : en 1879, Frege ne confondait *pas* l'égalité arithmétique – propre à ce domaine – et l'identité de contenu – absolument générale [119]. Pourtant il ne fournit aucune analyse logique de la première, la traitant comme si son contenu se situait en dehors du domaine de la logique.

Le troisième indice est localisé aussi bien au sein de cette conférence que dans les textes de 1881-1882 (1881, 1882a, 1882b). Lorsqu'il appliqua sa langue formulaire, Frege utilisa les symboles arithmétiques '+' et '<', là encore sans *jamais* proposer ou annoncer la moindre définition logique de ces derniers.

À ce stade, nous n'avons aucune raison de résister à l'interprétation de Linnebo : Frege aurait brutalement rejoint le logicisme après avoir, pendant quelques années, soutenu au contraire que l'arithmétique était intrinsèquement extérieure à la logique. Il ne faut pourtant pas céder si vite. Voici la manière dont Frege lui-même racontait son objectif, en introduction à la *Begriffsschrift* :

> Ainsi nous divisons toutes les vérités ayant besoin d'une justification en deux sortes selon que la preuve, pour les unes, peut avancer par la logique pure ou, pour les autres, doit s'appuyer sur des faits d'expérience. Mais sans doute est-il compatible qu'une proposition appartienne à la première sorte et pourtant ne puisse jamais venir à la conscience de l'esprit humain sans activité sensorielle. Donc, ce n'est pas le mode de formation psychologique, mais la méthode de démonstration la plus parfaite qui est au fondement de la distinction. Alors que je me demandais à laquelle de ces deux sortes de vérités les jugements arithmétiques appartenaient, je devais d'abord chercher jusqu'où l'on pourrait aller dans l'arithmétique grâce aux déductions seules, appuyé uniquement sur les lois de la pensée, qui sont au-dessus de toutes les particularités. Mon point de départ fut de chercher d'abord à réduire le concept de succession dans une suite à la conséquence *logique*, puis de progresser à partir de là [120] jusqu'au concept de nombre. (Frege 1879b, pp. IV-V / 5-6)

119. Notons que, déjà dans la *Begriffsschrift*, Frege utilisait '=' lorsqu'il sollicitait un exemple arithmétique (p. 5 / 19). Ceci eut néanmoins lieu *avant* l'introduction de l'identité de contenus, et l'ordre de présentation aurait pu expliquer ce choix. Seul le texte de la conférence permet de trancher dans le sens que nous indiquons.

En outre, la version anglaise de la conférence a substitué '≡' à certaines occurrences de '='. May s'est enquis auprès de Bynum des raisons de sa traduction :

> Lors de conversations avec le professeur Bynum, celui-ci fut malheureusement incapable de se rappeler pourquoi il décida de s'écarter du texte original. Il se contenta d'observer qu'il semblait raisonnable de supposer que, si peu de temps après avoir fini la *Begriffsschrift*, dans une lecture destinée à expliquer le système de cet ouvrage, Frege a employé la totalité des notions qui y furent introduites. (May 2001, nbp. 30)

L'argument n'est pas satisfaisant. Le point n'est pas que Frege aurait voulu dissimuler la notion d'identité de contenus, car il l'a de toute façon employée dans l'exemple géométrique. Le point est qu'il s'est abstenu de l'intégrer *seulement* dans le cas de l'arithmétique.

120. Nous modifions légèrement la traduction française qui ne tient pas compte des termes '*von hier*', qui ont

Ce passage suggère que Frege eut dès le départ l'intention, ou au moins l'espoir, d'établir la logicité du concept de nombre. Il est vrai que le déroulement de ses longues dérivations – qui constituent la majeure partie de l'opuscule : §§14-30 – est bel et bien pris au cœur de cette tâche. Pour le comprendre, observons le cours des opérations de 1884 et celui, très proche, de 1893. L'analyse logique du concept de *nombre cardinal fini* exige trois préliminaires [121] :

(1) analyser logiquement le concept de *nombre cardinal* ;

(2) analyser logiquement la relation de *successeur immédiat dans la suite naturelle des nombres* ;

(3) analyser logiquement la relation de *R-successeur*, relative à une relation binaire R.

Une fois ce travail effectué, il devient possible de circonscrire au sein des nombres cardinaux les nombres cardinaux finis en réunissant tous ceux qui sont des R-successeurs de 0, où R est la relation de *successeur immédiat dans la suite naturelle des nombres*. Nous éclaircirons plus tard ce processus. Ce qui nous importe ici, c'est de constater que les dérivations de la *Begriffsschrift* correspondent à la réalisation de la tâche (3). Frege y parvint à travers sa définition (76) qui propose une analyse logique de la relation de $R-$*successeur*. Il s'adonna ensuite à l'exploitation de cette définition, construisant une théorie *logique* des suites qui serait utilisable une fois les deux premières étapes effectuées.

Dans les *Grundlagen*, après avoir présenté son analyse du concept de *nombre cardinal*, Frege s'engagea sur le terrain des nombres finis :

> Je rappellerai en premier lieu, en des termes légèrement différents, la définition que j'ai donnée dans ma *Begriffsschrift* de la succession dans une suite. (Frege 1884, p. 92 / 204)

C'est donc en utilisant le travail préliminaire de la *Begriffsschrift* qu'il atteignit son objectif, poussant jusqu'à la démonstration (informelle) de certains théorèmes concernant les nombres finis :

> On peut employer une expression plus brève, que je définis comme suit :
>
> l'énoncé
>
> 'n appartient à la suite naturelle des nombres commençant par 0'
>
> veut dire la même chose que
>
> 'n est un nombre fini'.
>
> On peut alors formuler le dernier énoncé comme suit : 'aucun nombre fini ne se succède à lui-même dans la suite naturelle des nombres. (Frege 1884, p. 96 / 208)

Le travail de la *Begriffsschrift* était bel et bien destiné à jouer ce rôle. En 1879, Frege avait déjà à l'esprit le processus dans sa totalité [122]. C'est à lui qu'il pensait lorsqu'il expliqua maladroitement qu'il voulait progresser *à partir de là* (à partir de (3)) jusqu'au concept de *nombre* (il aurait dû dire 'de *nombre fini*') [123].

Il nous faut comprendre comment réconcilier ce passage avec les extraits des textes datant de 1880-1882. Si Frege s'était contenté de présenter un langage formel attendant sa complétion par des symboles pour les contenus arithmétiques, *i.e.* visant à prendre en charge les pures composantes structurelles des énoncés, pourquoi aurait-il développé une théorie exclusivement logique, toute insuffisante et marginale soit-elle ? Pourquoi ne pas avoir exhibé sa langue formulaire dans

leur importance.

121. Nous reviendrons bien sûr sur le détail de cette affaire. Le lecteur peut, s'il le souhaite, en consulter une synthèse particulièrement limpide proposée par Rouilhan (1988, pp. 18-20).

122. ou, nous le verrons, quelque chose de très proche.

123. Nous expliquerons bientôt cette maladresse, qui n'en était pas une au moment où il rédigeait son traité.

les habits qu'il lui destinait ? Il aurait suffit, en intégrant les symboles '+' et '<', de procéder à des définitions et démonstrations bien plus centrales pour l'analyse ou l'arithmétique, par exemple concernant la continuité d'une fonction à valeurs réelles ou le caractère premier d'un entier, ainsi qu'il s'y appliqua en 1881 [124]. Pourquoi a-t-il, au contraire, monté la première marche de l'escalier qui mènerait au logicisme ?

Il existe une explication simple. En premier lieu, notons que la phrase d'introduction de la *Begriffsschrift* est ambiguë. Elle ne permet pas de déterminer si Frege était *parvenu* à la définition du concept de *nombre* à partir de celui de *successeur*, ou s'il indiquait seulement son *intention*. Nous savons qu'il aboutit au préliminaire (3) de la réalisation plus générale de 1884, et qu'il n'avait aucune raison d'y recourir sans posséder une idée globale du projet. Il était donc convaincu que sa théorie des suites était purement logique, il l'avait montré (pensait-il). À l'opposé, il était tout aussi certain que la géométrie excédait le cadre logique. Mais Frege a pu – et nous verrons qu'il a effectivement – rencontrer des obstacles liés au préliminaire (1). Ainsi, concernant l'arithmétique dans son ensemble, la question était plus délicate.

Dans la *Begriffsschrift*, Frege annonça l'objectif – analyser le concept de *nombre* sur la base de la relation de succession – qu'il atteindrait dans les *Grundlagen* en utilisant (modulo quelques modifications) tous les développements effectués à travers les définitions et dérivations de la *Begriffsschrift*. Il poursuivait donc déjà son projet de dérivation des théorèmes de l'arithmétique, et il en accomplissait une portion conséquente à travers la réalisation du préliminaire (3). Néanmoins, il ne savait pas encore que cet objectif pouvait être atteint à partir *des seules lois logiques*, car il lui manquait encore l'idée centrale des *Grundlagen* qui permettrait d'analyser *logiquement* le nombre 0 et la relation de *successeur immédiat*, tous deux essentiels à la récupération des cardinaux finis. Autrement dit, en 1879, Frege ne pouvait être déjà convaincu de la possibilité de réduire l'arithmétique à la logique – ou, sans prétendre pénétrer le secret de son âme, il n'était pas en mesure de l'affirmer – car il ne savait pas comment incorporer à cette dernière les deux éléments manquants : le 0 et le successeur immédiat.

Nous donnerons le détail complet de cette affaire dans les prochaines sections. Pour l'heure, nous voulons seulement nuancer les affirmations contenues dans les écrits de 1880-1882, et invoquer à ce titre des raisons *académiques*.

Nous pouvons comprendre pourquoi Frege affirma soudainement, dans les textes de 1881-1882, que "le langage formulaire de Boole et celui de l'arithmétique résolvent [...] chacun une partie du problème d'une langue formulaire" : il lui semblait peut-être encore nécessaire d'incorporer les symboles 's' et '0', qu'il considérait comme extra-logiques, à la langue formulaire. Néanmoins, cela n'explique pas pourquoi il appuya son propos de définitions et démonstrations qui utilisent directement – sans réduction – des symboles arithmétiques tels que '+' et '<', ces derniers se définissant directement à partir des deux premiers symboles et de ceux de la langue formulaire. Plus généralement, nous ne comprenons pas pourquoi il resta *totalement* muet concernant le projet de développement de l'arithmétique à partir de la relation de R-successeur amorcé dans la *Begriffsschrift*.

Nous pourrions conclure qu'il avait momentanément abandonné ce but, pour une raison ou une autre. Mais nous croyons au contraire que le brasier du logicisme fut nourri précisément durant ces années clefs, et que le contexte à la fois scientifique et académique dans lequel Frege se trouvait apporte une explication simple.

Quelles étaient ses alternatives en 1881 ? Rappelons qu'il venait d'encaisser de sévères critiques de la part d'universitaires qui n'avaient pas compris son système. Il devait donc à tout prix éclaircir le propos de sa langue formulaire, et se trouvait face à deux possibilités. Il pouvait

124. (Frege 1881, pp. 25-27 / 32-33)

annoncer d'emblée sa volonté de développer l'arithmétique à travers les trois étapes introduites ci-dessus. Mais cette perspective le confrontait à trois dangers sérieux. D'une part, il n'avait pas encore résolu tous les problèmes liés à cette entreprise. D'autre part, justifier une telle affirmation serait l'objet d'un ouvrage entier, et excèderait largement le cadre d'un article de quelques dizaines de pages. Enfin, ses détracteurs avaient déjà échoué à comprendre le travail *préliminaire* de la *Begriffsschrift*, il n'était certainement pas judicieux de le leur expliquer en compliquant drastiquement l'affaire, à travers une analyse pointue du concept de *nombre*.

Frege s'engagea donc dans l'autre direction : il s'en tint à décrire le rôle plus modeste que sa langue formulaire pouvait tenir, *quel que soit le résultat de ses recherches concernant le concept de nombre*. L'adjonction des symboles arithmétiques à son langage offrait *de toute façon* un cadre rigoureux de développement de l'arithmétique, ce que la logique de Boole ne permettait pas. Or les critiques les plus détaillées de sa *Begriffsschrift* se basaient précisément sur celle-ci. Frege prit le parti d'expliquer une fonction possible (et plus modeste) de sa langue formulaire en attendant de déterminer si elle pouvait convenir à une tâche plus ambitieuse, que la mauvaise réception de son ouvrage le poussait à taire provisoirement. Tandis qu'il dévoilait au grand jour ce que son système pouvait *au minimum* accomplir, il poursuivait clandestinement ses recherches dans l'espoir de découvrir qu'il était capable de prouesses plus admirables encore.

En outre, la première annonce explicite de ses convictions logicistes intervint en 1882, au début de la lettre à Marty :

> J'ai désormais quasiment achevé un livre dans lequel je traite du concept de nombre et démontre que les premiers principes du calcul, qui jusqu'à présent ont été tenus pour des axiomes indémontrables, peuvent être prouvés à partir des définitions au moyen exclusif des lois logiques, et qu'ainsi il devraient être considérés comme des jugements analytiques au sens de Kant (Frege 1976, p. 163)

Pourtant, la même année voyait la publication de l'article synthétique dans lequel Frege opposait les signes de l'arithmétique et ceux de la logique. Un si brusque changement de point de vue relèverait d'un véritable coup de théâtre. Mais Frege s'adressait à Marty dans l'intimité confidentielle d'un échange épistolaire avec un chercheur qui manifestait de la bienveillance à l'égard de ses travaux. Il ne se trouvait pas, comme à travers les articles de 1881-1882, publiquement exposé à la vindicte de ses contradicteurs. Il pouvait donc librement annoncer ses intentions, même si certaines embûches se dressaient encore sur sa route. Les recherches effectuées entre 1879 et 1881 avaient d'ailleurs probablement permis d'en surmonter bon nombre.

Synthétisons notre propos. Dans la *Begriffsschrift*, Frege annonça sa tentative d'analyser le concept de *nombre (fini)*, et réalisa une partie de ce projet qui serait reprise (quasiment) telle quelle dans les *Grundlagen*. Dans les articles de 1881-1882, il sembla faire volte-face en destinant sa langue formulaire à une tâche plus modeste, taisant toute ambition d'y développer cette architecture. En août 1882, il renforça sa première idée en annonçant une réduction radicale de l'arithmétique à la logique, affirmant à Marty son succès définitif.

En dépit des apparences, l'aller-retour n'a pas réellement eu lieu. Nous avons décrit les raisons académiques qui l'ont conduit à se focaliser sur une capacité certaine et attestée de sa langue formulaire – servir de carcan rigoureux au développement de l'arithmétique *une fois ajouté un grand nombre de symboles de cette discipline* – plutôt que sur un pouvoir plus ambitieux qu'il entrevoyait sans être en mesure de le justifier, ou au moins de le justifier *simplement* – développer directement l'arithmétique ou, au moins, à l'aide de la seule adjonction des symboles pour le 0 et le successeur immédiat. Ainsi, nous ne pouvons conclure à partir des seuls extraits cités plus haut que Frege n'était pas encore logiciste en 1881. En effet, il dissimulait *volontairement* une part du

projet de 1879 : la réalisation des étapes (1)-(3). Peut-être la pensait-il encore extérieure au strict cadre logique, peut-être avait-il compris comment elle s'y intégrait. Nous savons assurément qu'il travestit ses intentions, mais nous ignorons *jusqu'où* il les déguisa. Pour le déterminer, il convient d'examiner les raisons *scientifiques* du basculement dans le giron du logicisme. C'est seulement en comprenant ce qui lui permit de restreindre les étapes (1) et (2) à la logique que nous saurons si ce cap avait été franchi lors de la rédaction de ces articles. Au cours cette enquête, nous découvrirons qu'en procédant aux différents éclaircissements sémantiques de 1879-1884, Frege se battait en vérité avec l'analyse du concept de *nombre*. Il existe des traces très précises de cette lutte à l'intérieur même des textes dans lesquels le logicisme est pourtant passé sous silence.

Avant de nous lancer, faisons droit à une objection que Linnebo pourrait à ce stade nous adresser, et que le lecteur a peut-être déjà formulée :

> Vous affirmez que Frege envisageait, durant la rédaction des articles de 1881-1882, la réduction des notions mathématiques selon le schéma en trois étapes suivi dans les *Grundlagen* (qu'il ait ou non déjà compris comment contenir l'entreprise dans le strict cadre logique), mais qu'il a choisi, pour diverses raisons, de ne pas exposer son intention en présentant une tâche plus humble que son système pouvait assurément remplir. Très bien, va pour cette idée ! Mais vous êtes contraint d'admettre une conséquence immédiate : puisque Frege distinguait la partie formelle d'un énoncé – relative à la logique – de la partie proprement expressive du contenu ; si l'arithmétique (ou une frange de celle-ci, la théorie des suites) est réductible à la logique, alors elle est elle-même purement formelle. Vos arguments ne pèsent aucunement sur une autre révélation de ces textes : Frege ne concevait pas encore les vérités logiques comme substantielles et générales, mais comme formelles et vides de sens.

Et pourtant, nos arguments iront bien à l'encontre de cette idée. Heureusement, soit dit en passant, car tout le travail de notre dernière section permit de dévoiler la manière dont Frege envisageait la composition des sens des signes *de la langue formulaire*. Nous verrons comment les problèmes posés par ses premières positions sémantiques ont naturellement pu le conduire à de telles affirmations, et comment son enquête sur le concept *de nombre* lui permit de résoudre ces difficultés. Le lecteur ne sera pas surpris de retrouver au cœur de cette affaire la question des lettres pour la généralité et des contenus indéterminés, objets de la longue analyse menée plus haut. Nous restons donc sur les rails que nous avons posés : après avoir décrit à brûle-pourpoint les éclaircissements sémantiques auxquels Frege était parvenu, nous allons expliquer comment ceux-ci émanèrent de son objectif principal : le développement de l'arithmétique dans un langage artificiel.

1.5.3 L'analyse du concept de *nombre*

1.5.3.1 La relation d'accessibilité

Dans toute cette section, lorsqu'il s'agira de définir un concept, nous rappellerons le nom de ce concept dans la langue naturelle – **N** –, avant d'en proposer une définition dans un langage logique contemporain – **C** –, que nous traduirons dans celui de Frege – **F**.

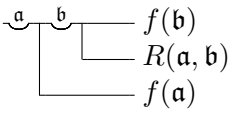
Il convient de commencer cette aventure ainsi que Frege la débuta lui-même, *i.e.* par la définition du R-successeur dans la *Begriffsschrift*. Nous allons très légèrement modifier sa version afin de la simplifier [125] et d'en adapter l'écriture à la hiérarchie des concepts.

125. Frege a curieusement défini la relation large de R-successeur à partir de la relation stricte, alors que la sens inverse allège considérablement le travail. Le lecteur trouvera ces deux définitions aux numéros (76) et (99) des

En préalable, disons qu'une propriété est R-héréditaire pour un concept f si et seulement si tous les objets en relation par R avec un quelconque a qui tombe sous f tombent aussi sous f [126] :

(**N**) f est R-héréditaire

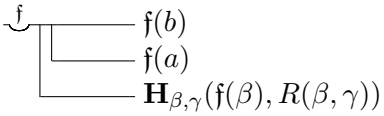
(**C**) $\mathbf{H}_{\beta,\gamma}(f(\beta), R(\beta,\gamma)) := \forall x(f(x) \to \forall y(R(x,y) \to f(y)))$

(**F**) $\Vdash \mathbf{H}_{\beta,\gamma}(f(\beta), R(\beta,\gamma)) \equiv$ 

À présent, nous pouvons définir la relation de R-succession que nous appellerons 'la relation de R-accessibilité' pour éviter toute ambiguïté vis-à-vis de la notion de successeur dans $\mathbb{N}$. Nous disons que y est R-accessible à partir de x si et seulement s'il possède toutes les propriétés R-héréditaires de x [127] :

(**N**) y est R-accessible à partir de x

(**C**) $\mathbf{A}_{\beta,\gamma}(R(\beta,\gamma), x, y) := \forall f((\mathbf{H}_{\beta,\gamma}(f(\beta), R(\beta,\gamma)) \wedge f(x)) \to f(y))$

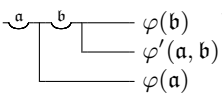
(**F**) $\Vdash \mathbf{A}_{\beta,\gamma}(R(\beta,\gamma), x, y) \equiv$ 

À travers cette définition, Frege avait réussi une véritable prouesse. Il était parvenu à formaliser la circonstance qu'il existe un "chemin" entre deux objets a et b par R, c'est-à-dire des objets $x_1, \ldots, x_n$ (n potentiellement nul) tels que $R(a, x_1), R(x_1, x_2), \ldots, R(x_n, b)$ [128]. Mais à quoi

dérivations de la *Begriffsschrift*. Elles s'appuient sur celle d'hérédité, qui correspond au numéro (69).

126. Notons qu'il s'agit là d'un concept de niveau 2 sous lequel tombent simultanément une propriété de niveau 1 et une relation de niveau 1. Ici, 'β' et 'γ' marquent la place des arguments de f et R.

Dans la *Begriffsschrift* ou les *Grundgesetze*, lorsque Frege définit un nom de concept, il n'utilisa jamais les lettres qui servaient à indiquer les places vacantes, telles que 'φ' pour le premier niveau. Il n'écrivait donc pas :

'$\Vdash \mathbf{H}_{\beta,\gamma}(\varphi(\beta), \varphi'(\beta,\gamma)) \equiv$ 

'

Au contraire, il se servait toujours des lettres latines pour porter la généralité. Ainsi, il indiquait que, quels que soient les noms substitués à f et R, le sens des expressions à droite et à gauche du signe '$\equiv$' étaient les mêmes.

Nous avons déjà rapidement (et non systématiquement) introduit l'étrange appareil linguistique lié à la hiérarchie des concepts. La présente recherche offrira une acclimatation opportune avant la construction rigoureuse du second chapitre.

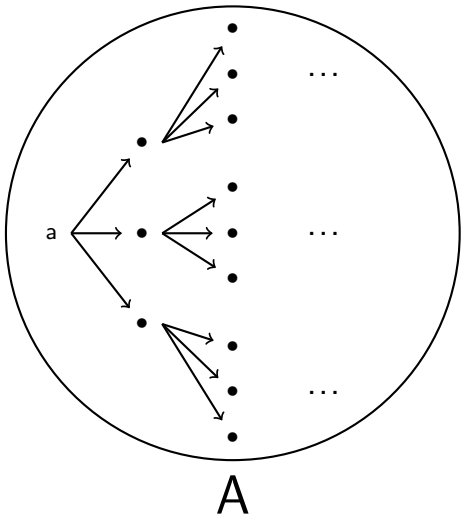
127. Il s'agit d'une relation de niveaux inégaux, car elle prend trois arguments : une relation de niveau 1 et deux objets.

128. Il n'est pas inutile de recourir au vocabulaire ensembliste pour cerner ce tour de force. Ceci exige d'identifier concept et ensemble, ce contre quoi Frege s'est régulièrement insurgé. Notre explication n'est donc pas fregéenne, mais nous la pensons éclairante. Considérons l'ensemble A qui contient a, ainsi que tous les objets avec lesquels a est en relation par R, ainsi que tous ceux avec lesquels ces derniers sont en relation par R, etc. *ad infinitum*. Autrement dit, A se construit à partir de a en intégrant progressivement tous les objets rencontrés par R.

Notons que R n'est pas nécessairement fonctionnelle. À chaque étape, plusieurs objets peuvent donc être récupérés et plusieurs branches développées :

voulait-il l'employer ? Voici la réponse : il comptait définir le nombre 0 et la relation de successeur S afin, ultimement, d'isoler les entiers naturels [129] dans la propriété d'être S-accessible à partir de 0. Ce premier mouvement, nous le découvrirons bientôt hésitant et incertain, mais nous pouvons dès maintenant repérer deux traces de sa présence. D'une part, c'est une entreprise de cette sorte que Frege envisagea au §55 des *Grundlagen* avant de la rejeter au §56, comme s'il évoquait une tentative avortée. Et en effet, il emprunterait un autre sentier. Il réaliserait une analyse préalable des nombres cardinaux *incluant les infinis* avant de circonscrire les finis parmi cet ensemble en utilisant, cette fois pour de bon, le nombre 0 et la relation de S-accessibilité (§83). Voilà donc l'explication de la maladresse initiale, et notre second indice à son bras : si Frege expliqua dans la *Begriffsschrift* qu'il espérait progresser de la relation d'accessibilité au concept de nombre, c'est parce qu'il s'occupait alors des nombres *finis*, projetant de les capturer *directement* grâce à cette relation. Il y renoncerait, et devrait traiter indépendamment des nombres cardinaux *en général*, les détachant de la relation d'accessibilité. Mais ça, il ne le savait pas encore.

Il nous faut donc comprendre comment il envisageait la définition du 0 et de S, ainsi que ce qui l'a détourné de sa méthode initiale. Il est l'heure d'abandonner les suites au profit des nombres, et d'observer, quelque cent-trente ans plus tard, Frege sonder scrupuleusement leur mystère.



D'une part, A contient exactement les x tels qu'il existe un chemin entre a et x. D'autre part, cet ensemble est lui-même R-héréditaire – car tout élément x se voit par définition accompagné des y tels que $R(x, y)$ – et il est de plus l'intersection de toutes les relations R-héréditaires qui contiennent a. En effet, considérons un ensemble B R-héréditaire et tel que $a \in B$ et $A \not\subseteq B$. Il existe au moins un élément x qui se trouve sur un chemin de a (qui appartienne à A) et qui n'appartienne pas à B. Considérons y un des éléments les plus "proches" de a de cette sorte, autrement dit ceux que nous pouvons atteindre en appliquant R le moins de fois possible. Alors il existe un z (juste avant y sur le chemin) qui appartient à B tel que $R(z, y)$. B n'est donc pas R-héréditaire. Ainsi, toute propriété héréditaire inclut A.

En conséquence, un objet b possède toutes les propriétés R-héréditaires de a si et seulement s'il est dans A, si et seulement s'il existe un chemin entre a et b.

129. Cette expression ne désigne pas chez nous les nombres entiers positifs *appartenant aux réels* que Frege distinguait des cardinaux. Puisque nous n'aurons jamais affaire à eux, nous pouvons sans risque utiliser les termes 'entier naturel' dans le sens de 'nombre cardinal', afin de varier nos formulations.

1.5.3.2 Les nombres : objets ou concepts ?

On trouve toute la substance de sa vision du concept de *nombre* dans la célèbre phrase par laquelle il amorça la partie décisive des *Grundlagen* :

> Attribuer un nombre, c'est dire quelque chose d'un concept. (Frege 1884, p. 67 / 182)

Voilà précisément l'idée qui manquait à Frege lorsqu'il rédigeait la *Begriffsschrift*. Elle seule permit la réduction logique des étapes (1) et (2) du projet, *i.e.* l'analyse logique du nombre 0 et de la relation de successeur. En 1879, Frege n'avait pas mis à jour la hiérarchie des concepts, *totalement* constitutive de cette idée.

En section 1.5.4, nous verrons *pourquoi* il enquêta dans cette direction. Nous pouvons déjà affirmer que Frege ne cherchait pas coûte que coûte à résoudre les difficultés sémantiques posées par les conceptions de la *Begriffsschrift*, notamment la quantification et la première distinction fonction-argument. Son but consistait à trouver le cadre adéquat de réalisation des étapes (1) et (2). C'est cet objectif qui entraîna l'éclaircissement de la distinction concept-objet ainsi que l'émergence des concepts de niveaux supérieurs et qui permit, *en conséquence*, d'éclaircir le fonctionnement de la quantification. Pour s'en convaincre, il suffit de constater le lien profond qui existe entre les deux problèmes à travers un autre passage des *Grundlagen* :

> La proposition qu'il n'y a pas de triangle rectangle rectiligne équilatéral énonce une propriété du concept 'triangle rectangle, rectiligne, équilatéral' ; elle lui attribue le nombre zéro. (Frege 1884, p. 64 / 180)

Lorsqu'on affirme qu'il n'existe pas d'habitant sur Mars, on attribue la propriété de *ne subsumer aucun objet* au concept d'*habiter sur Mars*, autrement dit on lui attribue le nombre 0.

Le contenu de notre jugement est alors constitué d'un concept de niveau 1 : *habiter sur Mars*, que nous noterons '$H(\xi)$' ; et d'un concept de niveau 2 : *ne subsumer aucun objet*, que nous noterons '$0_\beta(\varphi(\beta))$'. On peut traduire l'énoncé 'il n'existe pas d'habitant sur Mars' par '$0_\beta(H(\beta))$'.

Frege généralisa le processus. Lorsqu'on affirme que Marie a deux enfants, on attribue le nombre 2 (la propriété de *subsumer deux objets*) au concept d'*être un enfant de Marie*. En écrivant '$2_\beta(\varphi(\beta))$' cette première propriété et $E(\xi)$ ce dernier concept, on peut formaliser l'énoncé 'Marie a deux enfants' par '$2_\beta(E(\beta))$'.

La notion de nombre est toute entière comprise dans certaines propriétés que possèdent des concepts de premier niveau, *i.e.* dans des concepts de second niveau. C'est en adoptant cette vision que Frege parvint à polir sa notion de concept, et à établir la hiérarchie en question. C'est ainsi qu'il régla le problème de la quantification et se débarrassa des contenus indéterminés. Dans la *Begriffsschrift*, il utilisait des concepts de niveau 2 [130], mais ne les présentait ni ne les concevait comme tels [131]. En examinant son idée de nombre, qui en dépendait irréductiblement, il ne put ignorer longtemps la nécessité d'examiner plus sérieusement la notion de concept. Il en résulta les précisions (encore incomplètes) apportées en 1881 puis la nouvelle lecture de la quantification de 1884, permettant l'exclusion des notions de contenu indéterminé et de fonction (dans sa première version). L'établissement précis de la hiérarchie des concepts intervint donc quelque part entre 1881 et 1884, *et avec elle l'adoption du logicisme qui en était tributaire*. C'est de ce point que nous allons partir, repoussant le moment de nous intéresser au chaos qui l'a précédé. Nous allons tenter de reconstituer la route qu'il a pu prendre, ou plutôt de recenser les nombreuses pistes qu'il a pu suivre, grâce aux quelques cailloux semés sur ces chemins.

130. Par exemple pour les définitions (69) et (76).
131. Nous l'avons montré dans la note de bas de page 86.

Lorsqu'il réalisa l'existence des concepts de niveaux supérieurs, il parvint à aménager son langage pour accueillir les noms de concepts de second niveau 'il y a n φ' :

- '$\mathbf{0}_\beta(\varphi(\beta))$'
- '$\mathbf{1}_\beta(\varphi(\beta))$'
- '$\mathbf{2}_\beta(\varphi(\beta))$'

Plus important encore, il devenait possible d'en proposer une analyse *logique*, *i.e.* de définir ces termes à partir des seuls symboles de la langue formulaire :

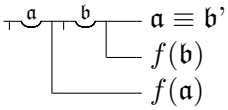
- (**N**) 'Il y a zéro f'

  (**C**) '$\mathbf{0}_\beta(f(\beta)) := \neg\exists x f(x)$'

  (**F**) '$\Vdash \mathbf{0}_\beta(f(\beta)) \equiv$ $f(\mathfrak{a})$'

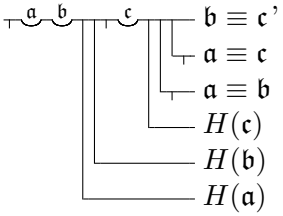
- (**N**) 'Il y a un f'

  (**C**) '$\mathbf{1}_\beta(f(\beta)) := \exists x(H(x) \wedge (\forall y(H(y) \to x = y)))$'

  (**F**) '$\Vdash \mathbf{1}_\beta(f(\beta)) \equiv$ 

- (**N**) 'Il y a deux f'

  (**C**) '$\mathbf{2}_\beta(f(\beta)) := \exists x\exists y(H(x) \wedge H(y) \wedge \forall z(H(z) \to (x = y \vee x = z \vee y = z))))$'

  (**F**) '$\Vdash \mathbf{2}_\beta(f(\beta)) \equiv$ 

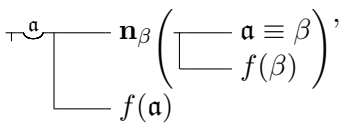
Cette stratégie consiste donc à proposer l'analyse suivante de l'énoncé 'il y a $n+1$ f' :

> 'il existe des objets $x_1, \ldots, x_{n+1}$, tous différents, qui tombent sous le concept f et tels que tout y qui tombe sous f soit égal à l'un d'entre eux'

Nous pouvons aussi utiliser la définition de '$\mathbf{n}_\beta(f(\beta))$' pour procéder à celle de '$(\mathbf{n+1})_\beta(f(\beta))$'. À ce titre, l'énoncé ci-dessus devient :

(**N**) 'Il existe un x qui tombe sous f et tel qu'il y a n f différents de x'

(**C**) '$(\mathbf{n+1})_\beta(f(\beta)) := \exists x(f(x) \wedge \mathbf{n}\beta(f(\beta) \wedge \beta \neq x))$'

(**F**) '$\Vdash (\mathbf{n+1})_\beta(f(\beta)) \equiv$ 

'

À ce stade, Frege faisait face à son principal problème. S'il était parvenu à analyser les énoncés du type 'il y a huit planètes dans le système solaire', il ignorait encore ce qu'était le nombre 8. La première pièce était posée, mais il manquait un pont pour atteindre le concept de *nombre* lui-même. Il tenta de le bâtir en rapprochant deux questions. L'une est épistémique : comment les nombres nous sont-ils donnés ? L'autre est sémantique : quelle est le sens des énoncés dans lesquels figurent les chiffres ?

> Si nous n'avons aucune idée ni intuition d'un nombre, comment peut-il jamais nous être donné ? Les mots n'ont de signification qu'au sein d'un énoncé ; il s'agira donc de définir le sens d'un énoncé où figure un terme numérique. (Frege 1884, p. 73 / 188)

Pour comprendre le sens des termes numériques, il suffit (et il faut) comprendre le sens des énoncés dans lesquels ils figurent. C'est le célèbre principe du contexte, qu'il proposa en introduction des *Grundlagen* :

> On doit rechercher ce que les mots veulent dire non pas isolément mais pris dans leur contexte. (Frege 1884, p. X / 122)

Le sens d'un mot consiste en sa contribution dans le sens des énoncés dans lesquels il figure. Or nous venons précisément d'analyser les énoncés dans lesquels les chiffres figurent, il semble donc que nous soyons au bout du chemin. Frege n'en croit rien, il poursuit :

> Cette prescription laisse encore s'exercer notre libre choix. Mais nous avons précédemment établi que, sous les termes numériques, il convient d'entendre des objets indépendants. Ainsi nous disposons d'un genre d'énoncés qui doivent avoir un sens, celui des énoncés traduisant le fait qu'on reconnaît un objet. (Frege 1884, p. 73 / 188)

Selon l'analyse réalisée ci-dessus, la circonstance qu'il n'y pas d'habitant sur Mars est composée de deux concepts : $\mathbf{0}_\beta(\varphi(\beta))$ et $H(\xi)$. Quel est le lien entre le nombre 0, conçu comme un objet, et le concept $\mathbf{0}_\beta(\varphi(\beta))$? Frege proposa de traduire 'il y a n φ' par 'n appartient au concept φ', et expliqua :

> Dans l'énoncé : 'le nombre 0 appartient au concept F', 0 n'est qu'une partie du prédicat, – si nous prenons le concept F comme sujet réel. (Frege 1884, p. 68 / 184)

Le défi consiste donc à isoler cette partie – le nombre 0 – du prédicat. Et nous n'avons pour l'instant rien effectué dans ce sens. *Mais cette étape n'est nécessaire que parce que les nombres sont des objets*, et Frege n'avait, contrairement à ce qu'il affirmait, jamais établi ce point de façon décisive. Les différents arguments qu'il fournit contiennent quelque chose de circulaire qu'il vaut la peine d'expliquer. Voilà la suite immédiate du dernier passage :

> C'est pourquoi j'ai évité d'appeler 'propriété d'un concept' un nombre tel que 0, 1, ou 2. Chaque nombre particulier se manifeste comme un objet indépendant en ceci, justement, qu'il constitue seulement une partie de l'assertion portée sur le concept. J'ai déjà remarqué plus haut qu'on dit 'le 1', et qu'on fait de 1 un objet par l'emploi de l'article défini. Cette indépendance est manifeste dans toute l'arithmétique, par exemple dans l'équation $1+1 = 2$. Puisque notre but est de saisir le concept de nombre tel que la science l'emploie, nous ne devons pas nous laisser troubler par le fait que, dans le langage quotidien, le nombre prend également l'aspect d'un attribut. On peut toujours y remédier. Par exemple, on transformera l'énoncé : 'Jupiter à quatre lunes' en : 'le nombre des lunes de Jupiter est quatre'. Il ne faut pas prendre ici 'est' pour une simple copule, comme dans l'énoncé 'le ciel est bleu'. La preuve en est qu'on peut

> dire : 'le nombre des lunes de Jupiter, c'est quatre', ou : 'c'est le nombre quatre'. 'est' a ici le sens de 'est identique à', 'est le même que'. Nous avons donc une identité où l'on affirme que l'expression : 'le nombre des lunes de Jupiter' désigne le même objet que le mot 'quatre'. Et l'identité se trouve être la forme d'assertion la plus usité en arithmétique. (Frege 1884, pp. 68-69 / p. 184)

Frege donne trois arguments dans le sens de sa conclusion. Le premier concerne l'égalité, on le retrouve quelques pages plus loin dans un autre contexte (qui nous est ici indifférent) :

> Je ne peux pas encore dire '$n = m + 1$', car la présence du signe = fait de $m + 1$ un objet. (Frege 1884, p. 90 / 202)

Autrement dit, les termes qui entourent le signe d'égalité doivent désigner des objets, car ce signe exprime une relation qui intervient entre des objets. Cette conception de l'égalité arithmétique était assez récente en 1884. Nous verrons bientôt que Frege a longtemps laissé planer le doute autour du symbole '=', hésitant sur la signification à lui attribuer. Et il avait pour cela de bonnes raisons. L'égalité arithmétique met en rapport des nombres. Rien n'interdit *a priori* de l'envisager comme une relation (de troisième niveau) intervenant entre des concepts (de second niveau). Il pourrait s'agir de la relation d'*avoir la même extension que*[132] :

(**N**) 'Les concepts qui tombent dans M sont exactement les concepts qui tombent dans M'

(**C**) $\asymp_\psi (M_\beta(\psi(\beta)), M'_\beta(\psi(\beta)))' := \forall f(M_\beta(f(\beta)) \leftrightarrow M'_\beta(f(\beta)))$

(**F**) $\Vdash \asymp_\psi (M\beta(\psi(\beta)), M'\beta(\psi(\beta)))' \equiv \mathfrak{f} (M\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \equiv M'_\beta(\mathfrak{f}(\beta)))$

Qu'est ce qui, concernant l'égalité arithmétique, pourrait faire pencher la balance en faveur d'une relation objectuelle plutôt que d'une relation de ce type, intervenant entre des concepts ? La réponse est simple : le fait que les nombres soient des objets. Mais c'est précisément ce que nous cherchons à montrer. Il faut donc chercher ailleurs une confirmation du caractère objectuel des nombres.

Les deux autres arguments présentés dans ce sens sont liés. Selon Frege, lorsqu'on dit 'le 1', on fait de 1 un objet par l'emploi de l'article défini. Le même processus intervient dans l'expression 'c'est 4'. Le problème est ici plus délicat, il a trait aux distinctions catégoriales établies par Frege. L'article défini, contrairement à l'égalité arithmétique, n'est pas un concept. S'il reçoit un concept en argument (par exemple celui de *capitale de la France*), il renvoie toujours à un *objet* (Paris) et non à un contenu jugeable. En 1893, Frege dirait qu'il s'agit d'une fonction et que la valeur d'une fonction en un argument est toujours un objet. Ainsi peut-on conclure que 1 est un objet.

Il existe deux objections à opposer à cette idée. La première dépend de l'époque de rédaction des *Grundlagen*. En 1884, Frege n'avait pas encore mis à jour la notion mature de fonction qui triompherait dans les *Grundgesetze*. Cependant, ses remarques concernant l'article défini démontrent qu'il en possédait déjà une certaine intuition, qui put malgré tout le conduire à sa conclusion.

La seconde est plus générale, elle a trait au rapport paradoxal que Frege entretenait avec les langues vernaculaires. Il affirmait que les expressions de la forme 'le x' ou 'x' dans 'c'est x' réfèrent toujours à des objets, qu'ainsi les nombres sont des objets et que les énoncés du type

132. Ici, 'M' porte la généralité pour un concept de deuxième niveau, et 'ψ' marque la place de l'argument pour ce concept. Une difficulté est attachée à la deuxième occurrence de '$\equiv$'. Nous sollicitons, à cet égard, la patience du lecteur. Nous y viendrons bientôt.

'Jupiter a quatre lunes' ou 'il y a quatre lunes de Jupiter' camouflent leur véritable structure, correctement rendue à travers la phrase 'le nombre des lunes de Jupiter est quatre'. Il serait donc incorrect d'analyser ces énoncés, comme nous l'avons fait jusqu'ici [133] :

$$\text{`}\mathbf{4}_\beta(L(\beta))\text{'}$$

Au contraire, il conviendrait de leur attribuer la forme [134] :

$$\text{`}\mathbf{N}_\beta(L(\beta)) = 4\text{'}$$

Ainsi la langue naturelle dissimulerait-t-elle la véritable nature des nombres en présentant les termes numérique sous une forme attributive. Mais si Frege était disposé à adresser un tel reproche à l'allemand (et au français), pourquoi ne pas le formuler aussi à l'égard des expressions 'le 1' et '1' dans 'c'est 1' ? Pourquoi se défier de ces langues dans un cas, et se fier à elles dans l'autre ? Bien sûr, pour des raisons structurelles, les deux expressions en cause ne peuvent que désigner *au mieux* des objets. Néanmoins, rien n'assure qu'elles signifient quoi que ce soit. Peut-être n'ont-elles un sens qu'au sein des énoncés qui les incorporent correctement. C'est d'ailleurs le cas d'autres expressions de même forme. 'L'homme' ne désigne rien dans l'énoncé 'l'homme est bipède'. La langue naturelle dissimule la structure logique de la phrase, qui s'expose ainsi :

'quel que soit x, si x est un homme, x est bipède' [135]

Dans ce contexte, l'article défini est lié à la quantification. Pris isolément, il est dépourvu de sens. En revanche, dans le contexte de l'énoncé, il est partie d'une expression sensée – 'le ... est ...' – qui exprime un concept de second niveau à deux arguments. Nous pourrions définir ainsi la formule 'le f est g' pour ces cas :

(**N**) le f est g

(**C**) $\text{le}_\beta\ f(\beta)\ \text{est}_\beta\ g(\beta) := \forall x(f(x) \to g(x))$

(**F**) $\vdash\ \text{le}_\beta\ f(\beta)\ \text{est}_\beta\ g(\beta) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \text{———}\ g(\mathfrak{a}) \\ \text{└———}\ f(\mathfrak{a}) \end{array}$

Pourquoi Frege estimait-t-il que dans l'expression 'le 4', la fonction de l'article défini est correctement exposée – comme au sein de 'Paris est la capitale de la France' – et non pas dissimulée – comme au sein de 'l'homme est bipède' ? Pourquoi se fier à elle plutôt qu'à l'énoncé 'il y a quatre lunes', dont Frege prétendait qu'il ne respectait pas sa structure logique véritable ? Rien ne favorise *a priori* l'une ou l'autre possibilité, et Frege ne présente aucun argument dans le sens de sa décision. Dummett tire la même conclusion :

> Si l'analyse peut légitimement se détourner de la surface apparente afin de trouver dans des énoncés contenant des attributifs numériques une référence déguisée au nombre considéré comme un objet ; il serait tout aussi légitime, si c'était possible, d'interpréter les énoncés scientifiques sur les nombres comme ayant seulement l'apparence de contenir des termes singuliers pour des nombres, étant en fait représentables, à travers une analyse correcte de leur structure cachée sous-jacente, par des énoncés

133. Nous formalisons 'ξ est une lune de Jupiter' par '$L(\xi)$'.
134. où $\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$ est l'opérateur qui envoie chaque concept sur son nombre.
135. ou, pour respecter les nuances de cette phrase : 'quel que soit x, si x est un homme normalement constitué, x est bipède'.

> dans lesquels les mots pour des objets sont toujours attributifs. (Dummett 1991b, p. 109)

Il s'agit d'un problème important car, tout au long de la carrière de Frege, ses positions furent largement influencées par sa lecture de l'article défini auquel il octroyait une fiabilité à toute épreuve, nonobstant quelques exceptions aisément repérables :

> La chose n'est pas si simple dans le cas de l'article défini, surtout lorsqu'il est employé au pluriel ; mais mon critère ne touche pas à ce dernier cas. Il y a doute, autant que j'y vois clair, quand le singulier tient lieu d'un pluriel ; par exemple dans les énoncés 'le Turc assiégea Vienne', 'le cheval est un quadrupède'. Toutefois on y reconnaît aisément des cas particuliers et notre règle ne saurait en être affectée. (Frege 1892a, p. 170 / pp. 130-131)

Et Frege stoppa là son plaidoyer. Jamais il n'expliqua sa loyauté envers cet article. Celle-ci le conduisit pourtant bien loin, trop loin devrait-on dire, jusqu'à sa théorie des extensions et la contradiction qui s'en suivit, ainsi qu'il le déplora tardivement, incriminant l'expression 'le concept d'étoile fixe' :

> Cette expression semble désigner un objet, à cause de l'article défini ; mais il n'y a aucun objet qui pourrait linguistiquement être désigné ainsi. De là sont nés les paradoxes de la théorie des ensembles, paradoxes qui ont ruiné celle-ci. J'ai moi-même succombé à cette illusion, dans ma tentative de fondation logique des nombres, en voulant les concevoir comme des ensembles. (Frege 1924-1925a, pp. 288-289 / p. 318)

Frege revint donc, sur le tard, de cette confiance aveugle accordée à l'article défini, qui semble d'autant plus surprenante qu'il se défiait fréquemment des tours et des mensonges de la langue naturelle. En définitive, ce problème n'est que la manifestation d'une difficulté plus profonde, plus philosophique, posée par son projet tout entier. Lorsque Kerry lui reprocha, dans ce contexte précis, de s'appuyer trop lourdement sur le langage, voici quelle fut sa réponse :

> Il est vrai que Kerry estime impossible de fonder aucun principe logique sur des distinctions linguistiques ; mais on ne pourra pas éviter de procéder comme je le fais si on veut parvenir à des principes logiques. Sans le langage, nous ne pourrions pas nous comprendre et nous en serions réduits à un acte de foi, à croire qu'autrui comprend les mots, les formes, et les constructions comme nous les comprenons nous-mêmes. (Frege 1892a, p. 169 / 130)

Frege était dans une position délicate. Il voulait détecter *derrière* les langues naturelles la structure profonde des énoncés, mais n'avait d'autre point d'ancrage à celle-ci que la forme qu'en proposaient les langues naturelles. C'était là l'unique départ possible. Il lui fallut donc se battre *contre* le langage parce qu'il n'existait aucun moyen de *se passer* du langage. Il s'agissait d'une bataille insolite, livrée avec le soutien de son adversaire. Dans cette lutte, la langue fut à la fois l'allié incontournable et l'ennemi mortel. Comment était-il possible de distinguer, en "vivant" dans la langue, là où elle instruit de là où elle trompe ? Voilà une question qui nous occupera durant le troisième chapitre. Pour l'heure, tout ce que ce que nous pouvons dire, c'est que la confiance accordée à l'article défini joua un rôle, assurément injustifié, dans la décision de considérer les nombres comme des objets. Ce ne fut néanmoins pas le seul élément, bien que les deux autres paragraphes consacrés à cette question n'apportent pas d'argument plus convaincant. Au §55, Frege proposa une analyse du concept de *nombre fini* suivant la route envisagée en 1879 : à travers la définition du nombre 0, des relations de succession et de R-accessibilité. Il rejeta cette méthode

au §56 en y opposant le problème de Jules César. Mais, à nouveau, son objection *présuppose* que les nombres sont des objets, et ne peut donc sans circularité conduire à cette conclusion.

C'est seulement plus loin dans le texte que nous trouvons les traces de ce qui engendra probablement, aux côtés de l'article défini, son choix final :

> Une définition trouve confirmation dans sa fécondité. (Frege 1884, p. 81 / 195)

Or la définition des nombres comme concepts de second niveau ne permet *pas* la dérivation de tous les théorèmes fondamentaux de l'arithmétique. Frege n'a pu manquer de suivre cette piste, au moins un temps, avant de s'en apercevoir. Il faut donc nous y engager à notre tour, pour comprendre ce qui fut susceptible de l'en détourner.

1.5.3.3 Les nombres comme concepts de second niveau.

Nous allons provisoirement chasser la langue formulaire du corps du texte [136]. Il y a plusieurs raisons à cela. Tout d'abord, nous connaissons l'inutilité du trait de contenu [137], nous pouvons donc sans crainte utiliser les signes contemporains de négation, de quantification et d'implication, et abolir ainsi les deux dimensions. Quant au trait de jugement, le lecteur est capable de détecter la force assertive dans la phrase qu'il lit actuellement, il ne lui sera pas plus compliqué de la déceler dans nos énoncés formels. Cette question n'impacte pas notre présente affaire. De plus, cela améliorera la perméabilité de formules compliquées par le dispositif relatif à la hiérarchie des concepts. Cette dernière est au cœur du problème, nous devons la respecter et affronter le mal de l'air. Nous allons en effet monter assez haut [138].

Voilà l'hypothèse à scruter : les nombres sont des concepts de second niveau, et la langue naturelle expose correctement la structure du sens lorsqu'elle intègre des termes numéraux sous une forme attributive. La difficulté déterminante provient de la vision intensionnaliste des concepts entretenue jusqu'en 1890 [139]. Dans ce cadre, Frege ne disposait d'aucun moyen pour choisir (par exemple) le nombre 1 entre les différents concepts coextensifs dans lesquels tombent exactement tous les concept subsumant un seul objet. Bien sûr, il pouvait concevoir l'égalité arithmétique comme la relation d'équivalence extensionnelle $\asymp$ qui intervient entre concepts de second niveau, et ainsi décréter que les concepts coextensifs en jeu étaient arithmétiquement égaux. Cependant, son objectif ne consistait pas à reproduire une structure isomorphe à celle des nombres cardinaux, mais à identifier les *authentiques* nombres cardinaux. Or cette stratégie ne lui permettait pas de localiser *le* nombre 1, ni parmi les concepts de second niveau, ni même comme concept de troisième niveau subsumant tous ces candidats de second niveau, car différents concepts de ce genre existaient à leur tour, entre lesquels rien ne permettait de trancher. En réalité, le problème contenait la solution : puisque seule importe l'extension commune des concepts de second niveau en question, alors le nombre 1 doit *être* cette extension, que Frege concevait comme un objet [140].

136. en conservant néanmoins la distinction entre lettres gothiques et latines.

137. Attention, nous parlons bien du signe de la *langue formulaire*. Le même symbole, dans *l'idéographie*, ne se laissera pas oublier si facilement.

138. Notre première intention était de réunir en annexe les versions fregéennes des définitions fournies et des preuves conduites. Nous y avons renoncé, car le lecteur y aurait trouvé, soudés en un bloc incompréhensible, les mystères que nous espérons dissoudre progressivement. Si la curiosité l'y conduit, il ne lui sera pas difficile de les écrire *a posteriori*, afin de tremper "à la source" nos diverses hypothèses et constater, nous l'espérons, qu'elle s'y fondent idéalement.

139. Comme nous le verrons en section 1.6.2.

140. Nous ne disons pas qu'il traitait *techniquement* les nombres comme des extensions de concepts de second niveau. Il pouvait les concevoir comme des extensions de concepts de premier niveau sous lesquels tombent les *extensions* des concepts adaptés, *i.e.* des objets. Cette méthode fut adoptée dans les *Grundgesetze*, et nous pensons qu'elle avait déjà cours dans les *Grundlagen*, bien qu'il se garda d'évoquer de telles complications. La question

Sa vision intensionnaliste des concepts l'a donc peut-être en partie guidé jusqu'à sa vision objectuelle des nombres. Néanmoins, il se cantonna à la seconde même lorsqu'il renonça à la première. Par ailleurs, puisque nous cherchons ici à retracer les différentes pistes qu'il a pu explorer, nous devons admettre la possibilité qu'il ait brièvement envisagé la solution la plus simple à son problème : admettre provisoirement l'extensionnalité des concepts, afin de voir où cette hypothèse le conduisait. S'il s'y est appliqué, alors il a immanquablement découvert un autre problème situé sur la route d'une analyse des nombres comme concepts, et qui, cette fois, conserva toute sa substance en 1890. Pour le comprendre, faisons droit quelques instants à l'hypothèse selon laquelle les concepts sont extensionnels, et identifions l'égalité arithmétique à la relation $\asymp$ qui, dans ce cadre, n'est autre que la coïncidence entre concepts. Il nous faut adapter à ce cadre les théorèmes fondamentaux de l'arithmétique tels que Frege les concevait en 1884. Commençons par rappeler ces derniers, en notant $\mathbb{N}(\xi)$ la propriété d'être un entier naturel – un nombre cardinal fini – et $S(\xi, \zeta)$ la relation d'*avoir pour successeur* :

(1) (**N**) Tout entier naturel possède au plus un successeur qui soit un entier naturel

(**C**) $\forall \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} \forall \mathfrak{c}((\mathbb{N}(\mathfrak{a}) \wedge \mathbb{N}(\mathfrak{b}) \wedge \mathbb{N}(\mathfrak{c}) \wedge S(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \wedge S(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})) \rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{c})$

(2) (**N**) Tout entier naturel possède au plus un prédécesseur qui soit un entier naturel

(**C**) $\forall \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} \forall \mathfrak{c}((\mathbb{N}(\mathfrak{a}) \wedge \mathbb{N}(\mathfrak{b}) \wedge \mathbb{N}(\mathfrak{c}) \wedge S(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \wedge S(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})) \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b})$

(3) (**N**) Tout entier naturel à l'exclusion de 0 possède un prédécesseur qui soit un entier naturel

(**C**) $\forall \mathfrak{b}((\mathbb{N}(\mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{b} \neq 0) \rightarrow \exists \mathfrak{a}(S(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \wedge \mathbb{N}(\mathfrak{a}))) \wedge \forall \mathfrak{a} \neg(\mathbb{N}(\mathfrak{a}) \wedge S(\mathfrak{a}, 0))$

(4) (**N**) Tout entier naturel possède un successeur qui soit un entier naturel

(**C**) $\forall \mathfrak{a}(\mathbb{N}(\mathfrak{a}) \rightarrow \exists \mathfrak{b}(S(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \wedge \mathbb{N}(\mathfrak{b})))$

Frege formula ces axiomes [141] dans le cadre des nombres cardinaux en général. Ils y demeurent vrais parce que sa construction fait de tout nombre cardinal infini son propre successeur. Il manque néanmoins un dernier axiome pour capturer proprement les cardinaux *finis*. Celui-ci n'est pas évoqué dans les *Grundlagen*, car il provient immédiatement de la *définition* des entiers naturels. Écrivons-le sous sa forme traditionnelle :

(5) (**N**) $\mathbb{N}(\xi)$ est subordonné à toute propriété S-héréditaire de 0

(**C**) $\forall \mathfrak{f}((\mathfrak{f}(0) \wedge \forall \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b}((\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \wedge S(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) \rightarrow \mathfrak{f}(\mathfrak{b}))) \rightarrow \forall \mathfrak{c}(\mathbb{N}(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathfrak{f}(\mathfrak{c})))$

En outre, le preuve de (2) se voit facilitée par l'intermédiaire suivant [142] :

n'influe pas sur notre présente affaire, nous l'examinerons plus tard (en section 2.5.3).

141. aux §§78-79 des *Grundlagen*.

142. discuté au §83 des *Grundlagen*.

(2') (**N**) Aucun entier naturel n'est son propre successeur

(**C**) $\forall \mathfrak{a}(\mathbb{N}(\mathfrak{a}) \to \neg S(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}))$

Ces axiomes s'adaptent sans difficulté à l'idée que les nombres sont des concepts de second niveau [143] :

$$(1)\ \forall \mathfrak{M}_1 \forall \mathfrak{M}_2 \forall \mathfrak{M}_3 \Big(\Big(\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta))) \wedge \mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta))) \wedge \mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{3,\beta}(\psi(\beta))) \wedge S_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta))) \wedge (S_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{3,\beta}(\psi(\beta)))\Big) \to \asymp_\psi (\mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{3,\beta}(\psi(\beta)))\Big)$$

$$(2)\ \forall \mathfrak{M}_1 \forall \mathfrak{M}_2 \forall \mathfrak{M}_3 \Big(\Big(\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta))) \wedge \mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta))) \wedge \mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{3,\beta}(\psi(\beta))) \wedge S_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{3,\beta}(\psi(\beta))) \wedge (S_\psi(\mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{3,\beta}(\psi(\beta)))\Big) \to \asymp_\psi (\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta)))\Big)$$

$$(2')\ \forall \mathfrak{M}_1 \Big(\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta))) \to \neg S_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)))\Big)$$

$$(3)\ \forall \mathfrak{M}_2 \Big(\Big(\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta))) \wedge \neg \asymp_\psi (\mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta))), \mathbf{0}_\beta(\psi(\beta)))\Big) \to \exists \mathfrak{M}_1 \Big(S_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta))), \mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta))) \wedge \mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)))\Big)\Big) \wedge \forall \mathfrak{M} \neg \Big(\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))) \wedge \mathbf{S}_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta)), \mathbf{0}_\beta(\psi(\beta)))\Big)$$

$$(4)\ \forall \mathfrak{M}_1 \Big(\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta))) \to \exists \mathfrak{M}_2 \Big(S_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta))) \wedge \mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta)))\Big)\Big)$$

$$(5)\ \forall \mathfrak{A} \Big(\Big(\mathfrak{A}_\psi(\mathbf{0}_\beta(\psi(\beta))) \wedge \forall \mathfrak{M}_1 \forall \mathfrak{M}_2 ((\mathfrak{A}_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta))) \wedge S_\psi(\mathfrak{M}_{1,\beta}(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta)))) \to \mathfrak{A}_\psi(\mathfrak{M}_{2,\beta}(\psi(\beta))))\Big) \to \forall \mathfrak{M}_3 (\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_{3,\beta}(\psi(\beta))) \to \mathfrak{A}_\psi(\mathfrak{M}_{3,\beta}(\psi(\beta))))\Big)$$

Il manque bien sûr les définitions de 0, $\mathbb{N}$ et S. En 1884, la stratégie de Frege, traduite en termes ensemblistes, consistait à identifier n à l'ensemble dont les éléments sont exactement les

143. en quantifiant sur des concepts de second – à l'aide de la lettre gothique '$\mathfrak{M}$' – et de troisième – à l'aide de la lettre gothique '$\mathfrak{A}$' – niveaux ; la relation de successeur et la propriété d'être un entier naturel deviennent, quant à elles, des concepts de troisième niveau.

ensembles à n éléments. Dans notre contexte, il s'agit donc d'identifier n au concept de second niveau dans lequel tombent tous les concepts de premier niveau subsumant exactement n objets.

Nous pouvons constater, à travers les axiomes (3) et (5), que '0' se traduit à présent comme un nom de concept de second niveau : '$\mathbf{0}_\beta(\varphi(\beta))$'. Ainsi, l'entier naturel n *est* le concept de second niveau $\mathbf{n}_\beta(\varphi(\beta))$ tel que nous l'avons présenté au début de cette section. Encore faut-il être en mesure de le définir proprement. Le 0 se traite sans difficulté :

$$\mathbf{0}_\beta(f(\beta)) := \neg\exists\mathfrak{a}(f(\mathfrak{a}))$$

Nous pouvons aussi définir 1, 2 ou n'importe quel autre entier naturel sur la base de :

$$\mathbf{n{+}1}_\beta(f(\beta)) := \exists x(f(x) \wedge \mathbf{n}_\beta(f(\beta) \wedge \beta \neq x))$$

Notre problème, néanmoins, est d'exprimer logiquement la propriété qui subsume tous ces entiers, ceux-ci étant (censés constituer) une infinité, *i.e.* de ramasser d'un geste cette totalité infinie. Disons-le en termes contemporains : la difficulté réside dans l'infini *actuel*. La stratégie, nous l'avons dit, gît dans l'identification des entiers naturels aux éléments S-accessibles à partir de 0. L'accessibilité a été définie pour des objets, et elle est ici requise pour des concepts de second niveau. Il nous faut donc l'adapter [144] :

- (**N**) A est A'-héréditaire

  (**C**)

$$H_{\Sigma,\Sigma'}\Big(A_\psi\Big(\Sigma_\beta(\psi(\beta))\Big), A'_\psi\Big(\Sigma_\beta(\psi(\beta)), \Sigma'_\beta(\psi(\beta))\Big)\Big)$$

$$:=$$

$$\forall\mathfrak{M}\Big(A_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))) \to \forall\mathfrak{M}'\Big(A'_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta)), \mathfrak{M}'_\beta(\psi(\beta))) \to A_\psi(\mathfrak{M}'_\beta(\psi(\beta)))\Big)\Big)$$

- (**N**) M' est A-accessible à partir de M

  (**C**)

$$\mathbf{A}_{\Sigma,\Sigma',\psi}\Big(A_\psi\Big(\Sigma_\beta(\psi(\beta)), \Sigma'_\beta(\psi(\beta))\Big), M_\beta(\psi(\beta)), M'_\beta(\psi(\beta))\Big)$$

$$:=$$

$$\forall\mathfrak{A}\Big(\Big(H_{\Sigma,\Sigma'}\Big(\mathfrak{A}_\psi\Big(\Sigma_\beta(\psi(\beta))\Big), A_\psi\Big(\Sigma_\beta(\psi(\beta)), \Sigma'_\beta(\psi(\beta))\Big)\Big) \wedge \mathfrak{A}_\psi(\Sigma_\beta(\psi(\beta)))\Big) \to \mathfrak{A}_\psi(\Sigma'_\beta(\psi(\beta)))\Big)$$

Jusqu'à présent, nous avons obtenu nos diverses formules, aussi vertigineuses soient-elles,

144. Voici notre limite pour cette section : nous n'excèderons pas le quatrième niveau. Notons que la multiplication des indices complique déjà terriblement la lecture, et l'ontologie fregéenne intègre une infinité de niveaux. Nous examinerons cette difficile morphologie dans le prochain chapitre (section 2.3).

à travers une stricte traduction de la méthode des *Grundlagen*. La relation de successeur, au contraire, apporte son lot de changements. Pour des raisons qui ont trait à l'objectualité des nombres, Frege fut contraint de baser sa définition sur celle des nombres cardinaux, à laquelle était ainsi subordonnée l'analyse du concept de nombre fini. Au contraire, nous sommes en mesure de définir *généralement* la relation de successeur, et ainsi d'atteindre les naturels sans passer par les cardinaux, tel qu'il l'avait d'abord envisagé en 1879 [145].

Les concepts qui tombent sous le nombre N sont ceux qui subsument N éléments. Le successeur de N subsume donc exactement les concepts sous lesquels tombent *un seul* objet de plus que sous ceux subsumés par N ; et nous tenons notre définition [146] :

> Un concept f tombe dans le successeur de M si et seulement s'il existe un objet x qui tombe sous ce concept et tel que le concept de *subsumer exactement les mêmes objets que f hormis x* tombe dans M.

Pour une fois, la version formalisée nous semble plus éclairante :

(**N**) M' est le successeur de M

$$(\mathbf{C})\ \mathbf{S}_\psi\Big(M_\beta(\psi(\beta)), M'_\beta(\psi(\beta))\Big) := \forall \mathfrak{f}\Big(M'_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \leftrightarrow \exists \mathfrak{a}\Big(\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \wedge M_\beta\left(\mathfrak{f}(\beta) \wedge \beta \neq \mathfrak{a}\right)\Big)\Big)$$

Le tour est joué : il ne reste qu'à définir les nombres finis comme les concepts accessibles à partir de 0 par la relation de successeur :

(**N**) $M_\beta(\varphi(\beta))$ est un entier naturel

$$(\mathbf{C})\ \mathbb{N}_\psi(M_\beta(\psi(\beta))) := \mathbf{A}_{\Sigma,\Sigma',\psi}\Big(\mathbf{S}_\psi\Big(\Sigma_\beta(\psi(\beta)), \Sigma'_\beta(\psi(\beta))\Big), \mathbf{0}_\beta(\psi(\beta)), M_\beta(\psi(\beta))\Big)$$

Confrontons à présent notre analyse aux cinq théorèmes fondamentaux de l'arithmétique. L'élégance de la stratégie fregéenne s'observe à travers le dernier d'entre eux. Les nombres naturels sont précisément définis comme étant les concepts de second niveau qui possèdent toutes les propriétés S-héréditaires de 0. N'importe laquelle de ces dernières est donc, par définition, subordonnée au concept d'*entier naturel*. La preuve est immédiate.

L'énoncé (3) ne présente pas davantage de difficulté. La propriété d'être égal à 0 ou d'avoir un prédécesseur dans $\mathbb{N}$ s'exprime sans difficulté à l'aide de nos différentes définitions :

$$\asymp_\psi (\mu_\beta(\psi(\beta)), \mathbf{0}_\beta(\psi(\beta))) \vee \exists \mathfrak{M}\Big(\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))) \wedge \mathbf{S}_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta)), \mu_\beta(\psi(\beta)))\Big)$$

Tout concept de second niveau $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ possédant cette propriété est un entier naturel, soit parce qu'il s'agit de 0, soit parce qu'il est successeur d'un entier naturel, donc successeur d'un concept qui possède toutes les propriétés S-héréditaires de 0, donc lui-même détenteur de ces propriétés. Ainsi, un successeur de $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ est successeur d'un entier naturel et possède lui-aussi la propriété cherchée. Cette dernière est donc S-héréditaire. Elle est trivialement possédée

145. Bien sûr, il est aussi possible d'effectuer ce détour dans notre contexte. Néanmoins, le passage de la *Begriffsschrift* suggère que Frege l'emprunta seulement lorsqu'il y fut contraint. Puisque nous souhaitons reconstruire ses diverses tentatives, nous allons tenter de suivre sa première intention, et de l'éviter.

146. Des variantes sont possibles. Nous donnons la formulation la plus proche de celle des *Grundlagen* (§76), en l'adaptant afin d'éviter d'y mêler la définition particulière du concept de *nombre cardinal*.

par 0. Elle est donc partagée par tous les entiers naturels. Nous venons d'établir que tout entier naturel non nul possède un prédécesseur dans $\mathbb{N}$, *i.e.* (3) [147].

Passons à (4) : si N est un entier naturel, il possède toutes les propriétés S-héréditaires de 0. S'il possède un successeur par S, celui-ci possède aussi toutes les propriétés S-héréditaires de 0 – précisément parce qu'elles sont S-héréditaires –; il est donc un entier naturel. Notre travail se limite à montrer qu'au moins un successeur de N existe. Mais cela nous est directement assuré par la définition du successeur. Affirmons sans détour ce que nous montrerons en détail dans le prochain chapitre : la logique de Frege intègre, dissimulée dans les règles de substitutions, des lois de compréhension (non restreintes) à chaque niveau. Traduit dans le jargon fregéen, cela signifie que tout nom de concept possède une signification. Quels que soient les noms de concepts '$\Phi(\xi)$' et '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$', respectivement de premier et second niveaux, nous pouvons démontrer les théorèmes suivants :

- (**N**) '$\Phi(\xi)$' possède une signification

  (**C**) $\exists \mathfrak{f} \forall \mathfrak{a}(\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \Phi(\mathfrak{a}))$

- (**N**) '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' possède une signification

  (**C**) $\exists \mathfrak{M} \forall \mathfrak{f}(\mathfrak{M}_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \leftrightarrow \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta)))$

Dans notre affaire, il suffit de remplacer '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' par '$\exists \mathfrak{a}\Big(\varphi(\mathfrak{a}) \wedge N_\beta\left(\varphi(\beta) \wedge \beta \neq \mathfrak{a}\right)\Big)$' afin d'obtenir ce que nous cherchons :

$$\exists \mathfrak{M} \forall \mathfrak{f}\Big(\mathfrak{M}_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \leftrightarrow \exists \mathfrak{a}\Big(\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \wedge N_\beta\left(\mathfrak{f}(\beta) \wedge \beta \neq \mathfrak{a}\right)\Big)\Big)$$

En utilisant la définition du successeur, cela donne :

$$\exists \mathfrak{M}, \mathbf{S}_\psi\Big(N_\beta(\psi(\beta)), \mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))\Big)$$

N possède un successeur, et (4) est montrée.

Cette définition entraîne aussi l'établissement immédiat de (1). Avant toute chose, notons une nouvelle différence entre les deux stratégies, selon que les nombres sont conçus comme objets ou comme concepts de second niveau. Dans le premier cas, prouver (1) revient à déterminer que tout nombre possède au plus un successeur, car l'égalité arithmétique est conçue comme l'identité entre objets. Dans le second cas, cela consiste à déterminer que deux successeurs d'un même nombre possèdent la même extension, car l'égalité arithmétique est vue comme la relation $\asymp_\psi$, qui est équivalente à l'identité entre concepts seulement si ces derniers sont extensionnels ; et nous n'avons pas encore discuté ce point. Contentons-nous, dans un premier temps, de prouver (1) telle qu'elle fut exprimée plus haut dans le cas des concepts, *i.e.* :

> Si $N_\beta(\varphi(\beta))$ est un nombre dont $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ et $\Omega'_\beta(\varphi(\beta))$ sont les successeurs, alors $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ et $\Omega'_\beta(\varphi(\beta))$ ont la même extension.

147. Le fait que 0 n'ait pas de prédécesseur est, bien sûr, une conséquence immédiate du fait que le seul concept qu'il subsume ne subsume aucun objet.

Supposons les prémisses. Si $\Phi(\xi)$ tombe dans $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$, alors par définition du successeur il existe un objet Δ tel que $\Phi(\Delta) \wedge \Phi(\xi) \wedge \xi \neq \Delta$ tombe dans $N_\beta(\varphi(\beta))$. Donc, toujours par définition, $\Phi(\xi)$ tombe dans $\Omega'_\beta(\varphi(\beta))$. Il n'y a aucune surprise, nous avons *exactement* indiqué, à travers notre définition, les concepts qui tombent dans le successeur à partir de ceux qui tombe dans $N_\beta(\varphi(\beta))$, deux successeurs sont donc forcément égaux, au sens de $\asymp_\psi$.

Notons la généralité de cette dernière preuve : tout concept de second niveau – qu'il soit ou non un nombre – possède au plus un successeur. Au contraire, cela n'est certainement pas vrai en ce qui concerne les prédécesseurs. Pour s'en apercevoir, un rapide retour à la perspective ensembliste n'est pas inutile. Traduisons notre définition : B est le successeur de A si et seulement si les éléments de B sont exactement les éléments de A enrichis d'un unique élément. Nous pouvons la formaliser des deux manières suivantes :

$$S(A) = \{b \ /\exists y, \exists a, y \notin a \wedge a \in A \wedge \{y\} \cup a = b\}$$

$$S(A) = \{b \ /\exists y, y \in b \wedge b - \{y\} \in A\}$$

Considérons l'ensemble B de tous les ensembles à $\aleph_0$ éléments [148]. Par définition, tout élément du successeur de B est de cardinal $\aleph$, donc $S(B) \subseteq B$. De plus, soit b appartenant à B et y un objet quelconque, $b \cup \{y\}$ est de cardinal $\aleph$ et appartient donc à B. Ainsi B est son propre successeur.

À présent, retranchons b à B : $A = B - \{b\}$. Le même raisonnement nous assure que tous les éléments de A appartiennent au successeur de A. De plus, soit x un élément de B, alors $b - \{x\}$ est un ensemble différent de b de cardinal $\aleph$, il appartient donc à A. Ainsi b appartient au successeur de A : $B \subseteq S(A)$. Enfin, tous les éléments de $S(A)$ sont de cardinal $\aleph$. Nous pouvons conclure que $S(A) = B$.

B est le successeur de deux ensembles différents. Cette preuve se traduit sans problème dans l'environnement fregéen des concepts.

Cette fois, il faut donc nous limiter aux nombres pour tenter de prouver (2), *i.e.* utiliser une propriété particulière de ces derniers. Nous savons que N est un concept qui subsume exactement les concepts sous lesquels tombent N objets. La propriété suivante exprime qu'il y autant d'objets qui tombent sous deux concepts :

(**N**) f et g sont équinumériques

(**C**) $\approx_\beta (f(\beta), g(\beta)) :=$
$$\exists \mathfrak{h}\Big(\forall \mathfrak{a}\forall \mathfrak{b}\forall \mathfrak{a}'\forall \mathfrak{b}'\big((\mathfrak{h}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{h}(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}')) \to (\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \leftrightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{b}')\big)$$
$$\wedge \forall \mathfrak{a}\exists \mathfrak{b}\mathfrak{h}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \wedge \forall \mathfrak{b}\exists \mathfrak{a}\mathfrak{h}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$
$$\wedge \forall \mathfrak{a}\forall \mathfrak{b}\big(\mathfrak{h}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \to (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{b}))\big)\Big)$$

Nous pouvons à présent exprimer que tous les concepts tombant dans un concept de second niveau sont équinumériques :

$$\mathbf{C}_\psi(M_\beta(\psi(\beta))) := \forall \mathfrak{f}\forall \mathfrak{g}\Big((M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \wedge M_\beta(\mathfrak{g}(\beta))) \to \approx_\beta (\mathfrak{f}(\beta), \mathfrak{g}(\beta))\Big)$$

148. On entend d'ici le grondement des paradoxes ensemblistes. Mais tentons d'imiter Frege, et d'y rester sourds.

Avant tout, il convient de s'assurer que les entiers naturels vérifient tous cette propriété, *i.e.* :

$$\forall \mathfrak{M}_\beta \Big(\mathbb{N}_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))) \rightarrow \mathbf{C}_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))) \Big)$$

Il suffit de montrer que $\mathbf{C}_\psi(M_\beta(\psi(\beta)))$ est une propriété **S**-héréditaire de 0. L'initialisation est triviale, car 0 ne subsume qu'un concept.

L'hérédité ne soulève pas davantage de difficulté. Supposons que $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ possède cette propriété et nommons '$\Omega'_\beta(\varphi(\beta))$' un concept qui lui succède. Si $\Phi(\xi)$ et $\Phi'(\xi)$ sont deux concepts qui tombent dans $\Omega'_\beta(\varphi(\beta))$, alors par définition du successeur il existe deux objets Δ et Γ tombant respectivement sous $\Phi(\xi)$ et $\Phi'(\xi)$ tels que $\Phi(\xi) \wedge \xi \neq \Delta$ et $\Phi'(\xi) \wedge \xi \neq \Gamma$ tombent dans $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$. Puisque ce dernier possède notre propriété, il existe une relation $\Phi''(\xi, \zeta)$ fonctionnelle, bijective, qui envoie tout objet qui tombe (respectivement ne tombe pas) sous $\Phi(\xi) \wedge \xi \neq \Delta$ sur un objet qui tombe (respectivement ne tombe pas) sous $\Phi'(\xi) \wedge \xi \neq \Gamma$.

Nous pouvons alors utiliser $\Phi''(\xi, \zeta)$ pour construire la relation souhaitée entre $\Phi(\xi)$ et $\Phi'(\xi)$. Il suffit de faire correspondre Δ à Γ, et l'antécédent de Γ à l'image de Δ. Les caractères fonctionnels et bijectifs de la fonction sont ainsi indemnes. De plus, les seuls objets supplémentaires tombant respectivement sous $\Phi(\xi)$ et $\Phi'(\xi)$ sont Δ et Γ. Notre nouvelle relation attache donc bien tout objet tombant (respectivement ne tombant pas) sous $\Phi(\xi)$ à un objet qui tombe (respectivement ne tombe pas) sous $\Phi'(\xi)$. Elle se formalise ainsi :

$$(\xi \neq \Delta \wedge \zeta \neq \Gamma \wedge \Phi''(\xi, \zeta)) \vee (\xi = \Delta \wedge \zeta = \Gamma) \vee (\Phi''(\xi, \Gamma) \wedge \Phi''(\Delta, \zeta))$$

Comme convenu, nous concluons que tout entier naturel possède cette propriété. Il est temps d'utiliser ce résultat pour tenter de prouver (2), ce qui dévoilera la difficulté fatale posée par cette stratégie.

Soit un entier naturel N qui possède deux prédécesseurs N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$. Notre but est de montrer que N_1 et N_2 sont égaux. D'après notre dernier théorème, il suffit de prouver qu'il existe deux concepts équinumériques tels que N_1 subsume l'un et N_2 subsume l'autre. Commençons par faire une moitié du chemin – c'est l'autre moitié qui se révèlera impraticable – en supposant qu'au moins un concept $\Phi(\xi)$ tombe sous N.

Par définition du successeur, il existe deux objets Δ et Γ qui tombent sous $\Phi(\xi)$ tels que $\Phi(\xi) \wedge \Delta \neq \xi$ tombe dans N_1 et $\Phi(\xi) \wedge \Gamma \neq \xi$ tombe dans N_2. $\Phi(\xi) \wedge \Delta \neq \xi$ et $\Phi(\xi) \wedge \Gamma \neq \xi$ subsument donc les mêmes objets à l'exception de Γ qui ne tombe pas sous le premier et Δ qui ne tombe pas sous le second. Afin d'établir que ces concepts sont équinumériques, il suffit d'utiliser la relation qui associe tout objet à lui-même, hormis Γ et Δ qui sont associés l'un à l'autre :

$$(\xi = \zeta \wedge \xi \neq \Gamma \wedge \xi \neq \Delta) \vee (\xi = \Delta \wedge \zeta = \Gamma) \vee (\xi = \Gamma \wedge \zeta = \Delta)$$

Les choses se déroulent idéalement si N subsume au moins un concept, *i.e.* s'il n'est pas le "concept vide" [149]. L'énoncé (2') achèverait le travail. En effet, par définition, le "concept vide" est égal à son propre successeur. Si aucun entier naturel n'est son propre successeur, alors aucun n'est le "concept vide" et le raisonnement ci-dessus suffit. Malheureusement (2') n'est pas prouvable en l'état. Pour le comprendre, considérons un domaine fini à N objets. L'entier $N + 1$ subsume tous les concepts sous lesquels tombent $N + 1$ objets, mais il n'existe aucun concept de ce type. Les entiers $N + i$ sont donc tous égaux au "concept vide", et ainsi à leurs propres successeurs.

Voilà donc ce qui manque à cette analyse des nombres : l'infini. À ce stade, Frege aurait pu

149. Notons que le "concept vide" (de second niveau) n'est pas l'entier zéro. Celui-ci est un concept de second niveau sous lequel tombe *un seul* concept : le "concept vide" de premier niveau.

contourner la difficulté en ajoutant artificiellement un axiome d'infini, mais c'est précisément ce que son objectif interdisait. Afin d'établir la nature *exclusivement* logique des connaissances arithmétiques, il ne pouvait introduire un quelconque élément extra-logique : ni physique, ni géométrique, ni – à l'instar de nos axiomes contemporains – ensembliste. L'existence d'une infinité de nombres naturels devait émaner de l'analyse de ce concept, à l'aide des seules ressources logiques [150]. Il y eut donc peut-être trois causes au rejet d'une stratégie de ce type. La première – que nous avons vu illégitime – avait trait aux expressions du genre 'le 1' et 'c'est 1', la seconde résidait dans une vision intensionnaliste des concepts, et la troisième était liée au problème de l'infini.

Notons que, si cette méthode avait abouti, Frege aurait trivialement pu atteindre les nombres cardinaux en général à travers la propriété $\mathbf{C}_\psi(\mu_\beta(\psi(\beta)))$ définie plus haut. Il aurait alors, comme nous l'avons fait, montré que tout entier naturel est un nombre cardinal, précisément un nombre cardinal *fini*. En remarquant qu'un nombre infini est son propre successeur, il aurait établi que l'énoncé (2') s'appliquait spécifiquement aux naturels. L'arithmétique se serait alors entièrement développée dans ce cadre. Bien sûr, cela aurait donné lieu à une avalanche de formules indigestes, à l'image des quelques échantillons exposés ci-dessus, mais rien n'interdisait de recourir à des raccourcis. Frege a très probablement envisagé cette stratégie. Sous quelle forme et jusqu'à quelle point l'a-t-il conduite, cela est impossible à déterminer à partir des rares écrits récupérés dans le *Nachlass*. Nous savons cependant qu'en 1879, tandis qu'il envisageait déjà l'analyse logique du concept de *nombre*, il ne permit l'écriture d'aucun nom d'objet particulier dans sa langue formulaire [151], donc d'aucune expression pour un nombre conçu comme objet. Au contraire, les définitions des *concepts* $\mathbf{0}_\beta(\varphi(\beta))$, $\mathbf{1}_\beta(\varphi(\beta))$, $\mathbf{2}_\beta(\varphi(\beta))$, etc., y étaient aisément formulables. Bien sûr, Frege ne les concevait pas encore comme des concepts de *second* niveau, et proposait une définition de l'accessibilité pour des objets, non pour de tels concepts. Voilà précisément le désordre auquel il dut faire face entre 1879 et 1884. Mais si son premier mouvement fut véritablement d'analyser le concept de *nombre fini* directement à partir de la relation d'accessibilité, tel que le suggère l'introduction de la *Begriffsschrift* et tel qu'y incite sa conception profonde des nombres, alors il fit certainement une escale plus ou moins longue, plus ou moins aventureuse, sur les terres que nous venons d'arpenter. L'autre stratégie, à laquelle il souscrivit finalement, exigeait une définition *en amont* des nombres cardinaux en général afin de pouvoir y tracer les frontières plus serrées des nombres finis. De plus, la principale difficulté posée par sa solution de 1884, célébrée sous le nom de 'problème de Jules César', est étrangère à la piste suivie dans cette section, car aucune définition par abstraction n'est réalisée [152]. Frege avait donc d'excellentes raisons de

150. C'est aussi une des principales questions de l'entreprise néologiciste.

151. Rappelons que les seuls noms d'objets étaient les lettres grecques et latines, dont le contenu était alors présenté comme indéterminé.

152. Dans le §55 des *Grundlagen*, Frege envisagea une tactique proche de celle qui fut la nôtre. Il proposa de définir les naturels par le bas – en partant de 0 – sans solliciter aucune définition général des nombres cardinaux pour servir de limite extérieure. Sa définition du successeur ressemble à s'y méprendre à celle que nous avons fourni plus haut. Cependant, Frege ne précisa pas s'il la concevait dans le cadre des concepts ou des objets, et la formulation en langue naturelle ne permet évidemment pas de trancher. De plus, il n'alla pas jusqu'à invoquer la relation d'accessibilité pour ramasser tous les naturels. Enfin, il présenta dans le §56 des raisons de rejeter cette stratégie. Heck considère que Frege payait alors un tribut à l'idée selon laquelle les nombres sont des concepts. Il aurait souhaité montrer qu'il fallait, *même dans ce contexte*, recourir à la notion d'équinumericité :

> Il est important d'observer où cette discussion intervient dans les *Grundlagen*. À ce point du livre, rien n'a été dit à propos de l'équinumérocité et des relations bijectives. Si la juste réponse à l'objection consiste à insister sur le fait que les nombres sont des quantificateurs numériquement définis [donc des concepts de second niveau] – et c'est assurément la bonne réponse – alors l'objection nous oriente vers la question de l'équinumérocité et ainsi prépare la voie de l'introduction du principe de Hume au §63. (Heck 2011, pp. 143-144)

regarder dans cette direction, avant de s'en détourner définitivement.

Résumons brièvement nos conclusions. L'idée initiale de Frege consistait à définir les naturels à travers la relation d'accessibilité. La langue formulaire de 1879 ne pouvait la servir, interdisant l'écriture de noms d'objets particuliers tout en présentant l'accessibilité entre *objets*. Deux possibilités s'offraient alors : traduire la relation d'accessibilité en termes de concepts ou introduire un nom d'opérateur apte à la production d'expressions pour des objets particuliers. La première ouvrait sur une méthode fidèle à sa première intention. La seconde fut adoptée, et exigea d'ajuster le processus. Frege a peut-être envisagé simultanément, peut-être successivement, ces différentes perspectives. Quoi qu'il en soit, au sein des *Grundlagen*, il présenta de bien maigres arguments en faveur de sa décision, se cantonnant à un examen peu concluant d'expressions de la langue naturelle. En revanche, deux autres raisons s'y dessinaient en filigrane, sûrement plus déterminantes que ce que ce texte laisse penser : l'intensionnalité des concepts et l'impossibilité de démontrer l'énoncé (2') même dans un cadre extensionnaliste.

1.5.3.4 Les nombres comme objets

Frege choisit d'identifier les nombres à des objets. Il devint donc nécessaire, afin d'exprimer logiquement des contenus jugeables arithmétiques, de permettre la construction de noms d'objets *particuliers* au sein de son langage. Pour ce faire, il introduisit un signe pour un opérateur de second niveau qui "envoyait" – nous verrons de quelle manière – des concepts sur des objets. La saturation de ce nom par des noms de concepts particuliers générait des noms d'objets spécifiques et plus précisément, c'était l'objectif, des noms de nombres. L'opérateur avait pour fonction d'associer à chaque concept de premier niveau le nombre cardinal qui lui appartient, *i.e.* le nombre d'objets (fini ou infini) qu'il subsume. Encore fallait-il s'assurer de sa logicité. Il pourrait bien, pour le peu que nous savons, planter ses racines dans le terreau géométrique ou physique. Jusqu'alors, Frege avait invariablement adopté le procédé suivant face à ce problème : n'est

---

L'objection en question est la suivante : en définissant un à un les nombres à partir de la relation de successeur, il demeure impossible de déterminer si un objet quelconque, par exemple Jules César, est un nombre. Selon Heck, Frege aurait donné libre cours à l'ancienne confusion, présentée en section 1.4.9, entre l'objet Jules César et le concept de niveau 2 : φ(Jules César). L'objection se traduirait ainsi : il demeure impossible de déterminer si un concept de second niveau quelconque, par exemple φ(Jules César), est un nombre. Ceci exigerait la notion d'équinumérocité dont Frege aurait ainsi préparé l'arrivée.

Le principal argument contre cette lecture est fournie dans l'introduction : "ne jamais perdre de vue la distinction entre concept et objet" (p. 10 / 122). Dès l'instant où Frege parvint à dissiper le trouble autour de la notion de concept – trouble qui avait tant obscurci sa vision du nombre, et ainsi paralysé son projet logiciste –, il évita *systématiquement* ce genre de maladresses. D'autre part, l'objection ainsi formulée n'est *pas* valable. Nous avons vu que la notion d'équinumérocité était nécessaire à la preuve de (2) sous l'hypothèse (2'). Elle n'est cependant pas essentielle à la *définition* des nombres naturels, ni à la preuve que φ(Jules César) n'est pas un nombre (preuve qui nécessite qu'un autre objet existe, sans quoi φ(Jules César) est le nombre 1).

Dans le §55, Frege proposa une caractérisation de la relation de successeur. Il aurait alors pu l'utiliser pour capturer, sur la base de l'accessibilité, les entiers naturels comme concepts de second niveau. S'il s'abstint, c'est parce qu'il concevait les nombres comme des objets, et qu'il savait que sa caractérisation du successeur n'était pas suffisante dans ce cadre. Il profita de l'occasion pour introduire le problème de Jules César au §56, qui n'aurait pas cours si les nombres étaient des concepts mais, et cela est une prémisse à son développement, les nombres ne sont rien de tels.

Frege ne préparait pas l'entrée en jeu de l'équinumérocité, mais bien l'exigence systématique d'un processus permettant en principe de déterminer si deux objets sont égaux. Il opposait à une première hypothèse inaboutie le contre-argument de Jules César, qui viendrait dramatiquement heurter une proposition bien plus sérieuse. Ce contre-argument n'intervient que si les nombres sont conçus comme objets, et c'est bien sur cette base qu'il se tenait. Mais Heck a raison sur un point : Frege présenta en guise de prélude une stratégie très proche de celle qui convient si les nombres sont conçus comme des concepts. Voici une trace supplémentaire du fait qu'il avait lui-même étudié cette possibilité.

logique que ce dont la décomposition révèle des constituants exclusivement logiques, *i.e.* ce qui peut s'exprimer à l'aide des seuls signes de la langue formulaire. Ainsi, il fallait parvenir à définir dans ce langage un nom de la forme '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$'de telle sorte qu'il signifie précisément l'opérateur visé. Cependant, nous savons d'emblée que la langue formulaire n'incorpore de noms particuliers que pour des concepts [153] et des opérateurs qui envoient des contenus jugeables sur des contenus jugeables, étant parfaitement inapte à générer des noms d'opérateurs qui associent des concepts à des objets. On tourne en rond. C'est pourquoi Frege envisagea un nouveau type de définitions, lesquelles fixaient autrement le sens du nouveau symbole à travers ceux des anciens :

(**N**) Le nombre qui appartient au concept f est identique au nombre qui appartient au concept g si et seulement si f et g sont équinumériques.

(**C**) $\mathbf{N}_\beta(f(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(g(\beta)) := \approx_\beta (f(\beta), g(\beta))$

Exprimée comme une équivalence, cette formule n'aurait absolument rien de choquant. L'opérateur associe son nombre à un concept. Il envoie donc deux concepts sur un même nombre si et seulement s'ils sont équinumériques. Mais notre contexte est différent. Nous ne disposons pas d'entrée de jeu d'un signe pour nommer cet opérateur, nous désirons *définir* un signe qui puisse l'exprimer. Le problème réside précisément en ce que notre formule n'est pas un énoncé assertif mais une définition. Nous ne pouvons présupposer le sens de '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' pour attester la vérité de la formule, nous devons utiliser celle-ci pour fixer celui-là. L'objectif consiste à montrer d'une part que cette définition attribue effectivement un sens au signe en question, et d'autre part que ce sens correspond à l'opérateur qui envoie tout concept sur son nombre. S'il est atteint, alors nous aurons donné une définition purement logique – tous les autres constituants de la formule ayant des sens logiques – d'un signe qui réfère à l'opérateur visé, et la logicité de ce dernier sera établie.

Ce type de définitions a depuis reçu le nom de 'définition par abstraction'. Frege examina leur pertinence dans les §§64-67. Selon lui, le sens d'un signe est déterminé par celui des énoncés dans lesquels il figure. Par conséquent, il suffit de regarder si notre définition octroie réellement un sens aux énoncés dans lesquels figure le nom '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$'. Frege concentra sa recherche sur les phrases qui expriment une identité, notamment celles qui prennent la forme suivante :

$$\text{`}\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(\Phi'(\beta))\text{'}$$

Jusqu'ici, tout se déroule bien. Notre définition nous livre le sens de cet énoncé, il s'agit de celui de :

$$\text{`}\approx_\beta (\Phi(\beta), \Phi'(\beta))\text{'}$$

Nous connaissons le contenu de tous les constituants de cette phrase, donc celui de la phrase elle-même. Le problème se corse lorsque nous envisageons des expressions du type :

$$\text{`}\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta)) = \Delta\text{'}$$

Frege fournit un exemple : quel sens convient à la phrase 'César est le nombre 1' ? Notre définition ne permet en aucun cas de la traduire en des termes que nous comprenons. Elle échoue à en fixer le sens, et ne remplit donc pas son rôle. Face à ce problème, Frege se décida pour une autre manière de définir les nombres. Avant d'aborder sa solution, nous voulons présenter

153. notamment les concepts liés à la quantification.

une alternative proposée par Heck qui soulève une difficulté à laquelle nous nous confronterons bientôt. Il s'agit donc d'une remarque incidente, préliminaire à de futures enquêtes.

Le problème de Jules César nous barre la route seulement parce que nous désirons octroyer un sens aux énoncés '$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta)) = \Delta$'. Nous pourrions tout aussi bien nous estimer satisfaits d'avoir fixé celui des phrases '$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(\Phi'(\beta))$', les seules qui nous importent, et d'abandonner les autres à leur sort. D'ailleurs, la réaction de perplexité qu'induisent des énoncés du type 'Jules César est le nombre 1' suggère une telle démarche. Rien ne dit *a priori* qu'il soit faux, et pas seulement dépourvu de sens, *i.e.* que l'objet 1 et l'objet Jules César ne soient ni différents ni identiques, qu'ils ne se comparent pas, qu'ils possèdent – disons-le ainsi – des *types* différents. La relation d'identité n'interviendrait jamais entre des objets de types distincts, comme elle n'intervient pas entre tel objet et tel concept. Les deux expressions ci-dessous seraient insensées :

$$\text{'Jules César} = \mathbf{N}_\beta(\beta \neq \beta)\text{'} \qquad \text{et} \qquad \text{'Jules César} = \exists \mathfrak{a}\varphi(\mathfrak{a})\text{'}$$

On pourrait nous objecter que la seconde expression n'est pas un énoncé, car elle est *insaturée*. D'ailleurs, elle n'est pas insensée, mais possède un sens *conceptuel* qui attend la donnée d'un sens saturé. Il n'empêche que le signe '=' qui y figure ne permet pas de mettre en relation un objet et un concept. On peut donc aussi imaginer une telle inaptitude concernant deux objets de différents types. Heck et May estiment que Frege n'a jamais avancé d'argument contraignant contre cette position, en questionnant l'identification des valeurs de vérité aux objets réalisée en 1891 :

> Pourquoi Frege traite-t-il les valeurs de vérité comme des objets ? Il est souvent suggéré qu'il n'avait pas d'autre choix car, selon ses conceptions, il n'y avait que deux types de "choses", les complètes et les incomplètes. Les objets sont les entités complètes paradigmatiques ; les concepts et les fonctions, les entités incomplètes. Puisque les valeurs de vérité ne sont pas incomplètes, elles doivent être complètes, et ainsi être des objets. Mais ce raisonnement est au mieux stérile. Il n'existe aucune raison claire pour laquelle Frege n'aurait pas pu reconnaître plus d'un type d'entités complètes. (Heck et May 2017, p. 16)

On pourrait renforcer leur argument en disant que, durant la première période, Frege reconnaissait différents types d'entités qui partageaient pourtant la même espèce d'insaturation. Mais il faut être clair concernant la question qui sous-tend ce problème, et qui concerne l'*ontologie* fregéenne. Il est vrai qu'en 1884, Frege reconnaissait deux types d'expressions complètes : les énoncés – qui expriment des contenus jugeables – et les noms d'objets – qui signifient des objets. La phrase [154] :

$$\text{'}\begin{array}{l}\text{Jules César}\\ \text{Marie Curie}\end{array}\text{'}$$

ne viole pas les règles de la hiérarchie des concept. Deux noms complets sont insérés aux bons endroits. Pourtant, Frege proscrit sa formation à travers l'interdiction de faire figurer un contenu non jugeable après un trait de jugement. Il estimait qu'une expression bien formée devait posséder un contenu, mais la bonne formation n'était pas encore exclusivement une affaire de niveaux et de nombres d'arguments, elle prenait en compte la distinction entre différents types d'expressions *de même niveau* : celles pour les contenus jugeables et celles pour les objets.

154. Si nous voulons éviter d'employer des mots de la langue naturelle, nous pouvons présenter l'exemple suivant, dans lequel a joue à tort le rôle d'un objet et d'un contenu jugeable :

$$\text{'}\begin{array}{l}f(a)\\ a\end{array}\text{'}$$

Ceci étant dit, il n'avait pas encore fait la différence entre ce qu'un nom désigne – ce à quoi il réfère – et ce qu'il exprime. Il intégrait à tort la *Bedeutung* d'un nom propre au sein du *Sinn* d'un énoncé. Pour autant, il n'estimait pas qu'un contenu jugeable était désigné par un énoncé au sens où un objet l'est par un nom propre. Pour le dire autrement, il n'envisageait pas que les contenus jugeables puissent posséder des propriétés ou être mis en relation. Il ne les avait pas encore intégrés à son ontologie ; le cap ne serait franchi qu'en 1891 à travers l'étude du discours indirect. Les contenus jugeables n'étaient donc pas, à ses yeux, des *entités* complètes d'un type différent des objets standards. Au contraire, c'est bien un tel statut qu'il faudrait ici attribuer aux nombres, auxquels il réservait incontestablement une place dans son ontologie.

En revanche, Frege distinguait inccontestablement deux types d'entités partageant un autre genre d'insaturation : les fonctions et les concepts. Par exemple, $\xi + \zeta$ et $\xi < \zeta$ attendaient tous deux d'être complétés par deux objets, mais la première était conçue comme une fonction tandis que le second était regardé comme un concept. Cependant, nous faisons ici droit à une *nouvelle* notion de fonction, radicalement éloignée de celle de la *Begriffsschrift*. Or, comme nous le verrons en section 1.6, le mouvement de 1891 fut provoqué par la prise en considération de cette nouvelle notion, qu'il avait jusqu'alors laissée dans l'ombre. Et son premier geste consista précisément à résorber la différence catégoriale entre fonctions et concepts.

En somme, bien que la situation se soit lentement stabilisée, Frege a toujours suivi l'intuition selon laquelle le type d'une entité est déterminé à travers son espèce d'incomplétude (éventuellement nulle). Nous ne nous engagerons pas, contre Heck et May, à affirmer qu'il avait de sérieuses raisons d'adhérer à cette idée, pas avant d'avoir examiné les notions d'entité et d'insaturation, lesquelles seront au cœur de notre troisième chapitre. Nous constatons seulement que la piste de Heck, en interdisant la construction des énoncés envisagés à travers le problème de Jules César, n'est pas conforme à cette intuition.

Tentons néanmoins de la suivre, et distinguons deux catégories d'entités saturées : les nombres et les objets dits 'standards'. Les premiers peuvent être comptés au même titre que les seconds. La phrase 'le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 6 est le nombre de nains qui accompagnent Blanche-Neige' possède un sens parfaitement déterminé. Il ne faut donc pas exclure, lorsque Φ et Φ' sont des concepts qui subsument respectivement des nombres et des objets standards, les expressions de la forme :

$$\text{`}\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(\Phi'(\beta))\text{'}$$

Jusqu'ici, tout va bien : les deux membres de cette égalité sont toujours des objets de même type, quoi qu'il en soit des concepts Φ et Φ'. Cependant, la division entre plusieurs catégories influe sur la quantification. Celle-ci ne peut être transversale aux deux types, sinon l'énoncé '$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{a} =$ Jules César' serait lui-même mal formé. De la distinction entre deux types jaillit une différence entre deux quantifications : celle qui parcourt les nombres et celle qui parcourt les autres objets. Or notre définition intègre plusieurs quantifications, à travers la relation $\approx$. Si nous choisissons de les limiter aux nombres, nous renonçons à attribuer un sens à '$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta))$' lorsque Φ subsume d'autres objets, et vice-versa. Autrement dit, nous perdons la possibilité de compter ou bien les objets, ou bien les nombres. Heck (2011, p. 150-151) tente d'apporter une solution à travers la donnée de *trois* différentes versions de la définition, selon que nous comparons des nombres de nombres, des nombres d'objets standards, ou un nombre de nombres avec un nombre d'objets standards. Traduisons ici sa démarche, en indiçant par 'n' les variables et les concepts lorsqu'ils concernent les nombres, et par 'a' sinon :

(n,n) • $\mathbf{N}_\beta(f_n(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(g_n(\beta)) := \approx_{n,n,\beta} (f_n(\beta), g_n(\beta))$

• $\approx_{n,n,\beta} (f_n(\beta), g_n(\beta)) :=$
$\exists \mathfrak{h}_{n,n}\Big(\forall \mathfrak{a}_n \forall \mathfrak{b}_n \forall \mathfrak{a}'_n \forall \mathfrak{b}'_n \Big((\mathfrak{h}_{n,n}(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n) \wedge \mathfrak{h}_{\mathfrak{n},\mathfrak{n}}(\mathfrak{a}'_n, \mathfrak{b}'_n)) \rightarrow (\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}'_n \leftrightarrow \mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}'_n)\Big)$
$\wedge \forall \mathfrak{a}_n \exists \mathfrak{b}_n \mathfrak{h}_{n,n}(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n) \wedge \forall \mathfrak{b}_n \exists \mathfrak{a}_n \mathfrak{h}_{n,n}(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n)$
$\wedge \forall \mathfrak{a}_n \forall \mathfrak{b}_n \Big(\mathfrak{h}_{n,n}(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n) \rightarrow (f_n(\mathfrak{a}_n) \leftrightarrow g_n(\mathfrak{b}_n))\Big)\Big)$

(n,a) • $\mathbf{N}_\beta(f_n(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(g_a(\beta)) := \approx_{n,a,\beta} (f_n(\beta), g_a(\beta))$

• $\approx_{n,a,\beta} (f_n(\beta), g_a(\beta)) :=$
$\exists \mathfrak{h}_{n,a}\Big(\forall \mathfrak{a}_n \forall \mathfrak{b}_a \forall \mathfrak{a}'_n \forall \mathfrak{b}'_a \Big((\mathfrak{h}_{n,a}(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_a) \wedge \mathfrak{h}_{\mathfrak{n},\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}'_n, \mathfrak{b}'_a)) \rightarrow (\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}'_n \leftrightarrow \mathfrak{b}_a = \mathfrak{b}'_a)\Big)$
$\wedge \forall \mathfrak{a}_n \exists \mathfrak{b}_a \mathfrak{h}_{n,a}(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_a) \wedge \forall \mathfrak{b}_a \exists \mathfrak{a}_n \mathfrak{h}_{n,a}(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_a)$
$\wedge \forall \mathfrak{a}_n \forall \mathfrak{b}_a \Big(\mathfrak{h}_{n,a}(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_a) \rightarrow (f_n(\mathfrak{a}_n) \leftrightarrow g_a(\mathfrak{b}_a))\Big)\Big)$

(a,a) • $\mathbf{N}_\beta(f_a(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(g_a(\beta)) := \approx_{a,a,\beta} (f_a(\beta), g_a(\beta))$

• $\approx_{a,a,\beta} (f_a(\beta), g_a(\beta)) :=$
$\exists \mathfrak{h}_{a,a}\Big(\forall \mathfrak{a}_a \forall \mathfrak{b}_a \forall \mathfrak{a}'_a \forall \mathfrak{b}'_a \Big((\mathfrak{h}_{a,a}(\mathfrak{a}_a, \mathfrak{b}_a) \wedge \mathfrak{h}_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}'_a, \mathfrak{b}'_a)) \rightarrow (\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}'_a \leftrightarrow \mathfrak{b}_a = \mathfrak{b}'_a)\Big)$
$\wedge \forall \mathfrak{a}_a \exists \mathfrak{b}_a \mathfrak{h}_{a,a}(\mathfrak{a}_a, \mathfrak{b}_a) \wedge \forall \mathfrak{b}_a \exists \mathfrak{a}_a \mathfrak{h}_{a,a}(\mathfrak{a}_a, \mathfrak{b}_a)$
$\wedge \forall \mathfrak{a}_a \forall \mathfrak{b}_a \Big(\mathfrak{h}_{a,a}(\mathfrak{a}_a, \mathfrak{b}_a) \rightarrow (f_a(\mathfrak{a}_a) \leftrightarrow g_a(\mathfrak{b}_a))\Big)\Big)$

Techniquement, cette solution fonctionne. **(n,n)** permet à elle seule la dérivation de nos axiomes (1)-(5), tandis que les trois définitions fixent collectivement le sens du signe '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' tel que nous l'envisageons – *i.e.* permet d'exprimer des identités entre nombres quel que soit le type des objets subsumés par les concepts en jeu. Le problème de Jules César est, d'une certaine façon, évité. Par ailleurs, Heck remarque que, pour Frege, les concepts se comptent aussi bien que les objets [155]. Compter des concepts revient à attribuer un nombre à un concept de second niveau et exige la donnée d'un opérateur de troisième niveau. Or la solution de Frege, qui n'intègre qu'un opérateur pour la totalité des objets – nombres ou non –, ne fait pas directement droit à cette possibilité. Elle autorise seulement l'attribution d'un nombre au *représentant* d'un concept de second niveau – *via* l'usage des extensions –, et non directement au concept lui-même. Celle de Heck, au contraire, permet d'intégrer des opérateurs pour les concepts de différents niveaux, auxquels doivent s'ajouter les axiomes correspondants, par exemple :

$$\mathbf{(f_a,a)} \bullet \mathbf{N}_{\psi_a}(M_\beta(\psi_a(\beta))) = \mathbf{N}_\beta(g_a(\beta)) := \approx_{f,a,\psi_a,\beta} (M_\beta(\psi_a(\beta)), g_a(\beta))$$

Il est parfois avancé que Frege céda à une volonté illégitime de simplification ontologique lorsqu'il calqua ses catégories sur les différentes espèces d'insaturations. La solution de Heck illustre efficacement les raisons d'une telle affirmation. La prise en considération de deux types

155. Cette position est défendue expressément dans la lettre à Marty de 1882 (Frege 1976, p. 163) et dans une critique des thèses formalistes (Frege 1885, p. 103).

d'entités complètes se répercute au sein des entités de niveaux supérieures, exigeant de distinguer catégorialement les concepts de premier niveau selon les types d'entités saturés qu'ils subsument, et ainsi de suite pour les niveaux supérieurs. Bien sûr, il est possible que d'autres enjeux aient renforcé la décision de Frege. Nous avons précisé la dimension préparatoire de cette parenthèse lorsque nous l'avons ouverte. L'hypothèse de Heck nous semblait, dans le contexte de notre présente recherche, une introduction adéquate aux interrogations soulevées par les distinctions catégoriales. C'est plus tard, lors de notre troisième chapitre, que nous règlerons ces questions. Nous espérons que le lecteur acceptera de les garder au chaud jusque-là.

Retournons au contenu des *Grundlagen*. Le problème de Jules César incita Frege à rejeter la définition par abstraction du signe '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$'. Il importait alors de trouver une autre manière de le définir, afin de *démontrer* le principe de Hume :

$$\mathbf{N}_\beta(f(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(g(\beta)) \leftrightarrow \approx_\beta (f(\beta), g(\beta))$$

Une fois en possession de ce théorème, le problème rencontré dans la section précédente se résorbe rapidement. Nous n'allons pas répéter dans ce cadre tous les raisonnements menés plus haut, il nous suffit d'indiquer la mécanique de leur traduction. La différence essentielle provient de la relation de successeur :

$$\mathbf{S}(a, b) := \exists \mathfrak{f} \exists \mathfrak{c} \left(\mathfrak{f}(\mathfrak{c}) \wedge b = \mathbf{N}_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \wedge a = \mathbf{N}_\beta(\mathfrak{f}(\beta) \wedge \beta \neq \mathfrak{c} \right)$$

Notre ancienne définition n'utilisait rien de tel qu'un opérateur de type $\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$, si bien que tous les concepts de second niveau – et pas seulement les nombres – se voyaient associer un successeur. Nous nous en servions pour définir directement les naturels à travers la relation d'accessibilité, sans caractérisation préalable des nombres cardinaux. Notre nouvelle définition se base sur cet opérateur. Elle exige donc comme préliminaire la caractérisation des cardinaux [156], et n'associe de successeurs qu'à ces derniers.

À cette différence près, les deux stratégies sont assez proches. Il s'agit de définir les entiers naturels comme **S**-accessibles à partir de 0 [157], puis d'aboutir à (1)-(5). (4) et (5) se démontrent de manière similaire. (2) ne pose plus le même moindre problème car le réquisit d'*existence* d'un concept $\mathfrak{f}$ qui satisfasse nos conditions vient sauver la mise.

En effet, supposons deux prédécesseurs N_1 et N_2 d'un entier naturel N. Alors, il existe :

- un concept $\mathfrak{f}$ et un objet $\mathfrak{a}$ tels que $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$, $\mathbf{N}_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) = N$ et $\mathbf{N}_\beta(\mathfrak{f}(\beta) \wedge \beta \neq \mathfrak{a}) = N_1$;
- un concept $\mathfrak{g}$ et un objet $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{g}(\mathfrak{b})$, $\mathbf{N}_\beta(\mathfrak{g}(\beta)) = N$ et $\mathbf{N}_\beta(\mathfrak{g}(\beta) \wedge \beta \neq \mathfrak{b}) = N_2$.

Or $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ sont équinumériques, donc il existe une relation $\mathfrak{h}$ (fonctionnelle bijective) qui envoie tout objet vrai (respectivement faux) de $\mathfrak{f}$ sur un objet vrai (respectivement faux) de $\mathfrak{g}$. Il suffit d'inverser deux valeurs – envoyer $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{b}$ et l'antécédent de $\mathfrak{b}$ sur l'image de $\mathfrak{a}$ – pour établir que $\mathfrak{f}(\xi) \wedge \xi \neq \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}(\xi) \wedge \xi \neq \mathfrak{b}$ sont équinumériques, et donc que $N_1 = N_2$. (1) se montre de manière analogue.

156. a est un nombre cardinal s'il existe $\mathfrak{f}$ tel que $a = \mathbf{N}_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$.
157. Sans surprise, 0 est défini par :

$$0 := \mathbf{N}_\beta(\beta \neq \beta)$$

Le problème de l'infini s'est en vérité déplacé de (2) à (3). Notre définition n'assure plus l'existence systématique d'un successeur par simple compréhension. Dans le cas d'un domaine fini, le dernier cardinal est purement et simplement dépourvu de successeur. Néanmoins, et c'est le progrès de cette stratégie, le domaine ne peut *pas* être fini. Le domaine ne peut être vide car il contient au moins le nombre 0. Par conséquent, il contient aussi le nombre $\mathbf{N}_\beta(\beta = 0)$ qui est le successeur de 0, et clairement distinct de ce dernier. Il contient donc au moins deux éléments. Le processus continue indéfiniment. Frege comprit qu'il n'était pas nécessaire, pour engendrer les nombres cardinaux, de se donner des objets particuliers à compter, mais qu'il suffisait de compter ces nombres *eux-mêmes*. $N + 1$ n'est autre que le nombre de nombres qui viennent avant N, *i.e.* le nombre de nombres à partir desquels N est **S**-accessible. C'est ainsi que l'axiome d'infini fut localisé directement dans le processus d'énumération.

Procédons rapidement à la démonstration. En toute rigueur, nous allons prouver que, pour tout nombre cardinal fini N, (a) le nombre appartenant au concept d'accéder à N par la relation **S** est le successeur de N et (b) ne permet pas lui-même d'accéder à N [158] :

$$\mathbf{S}(N, \mathbf{N}_\beta(\mathbf{A}_{\gamma,\gamma'}(\mathbf{S}(\gamma,\gamma'), \beta, N))) \wedge \neg\mathbf{A}_{\gamma,\gamma'}(\mathbf{S}(\gamma,\gamma'), \mathbf{N}_\beta(\mathbf{A}_{\gamma,\gamma'}(\mathbf{S}(\gamma,\gamma'), \beta, N)), N)$$

L'initialisation s'effectue comme suit : 0 n'a pas de prédécesseur donc n'est **S**-accessible qu'à partir de lui-même [159]. La relation d'identité suffit pour montrer que $\xi = 0 \wedge \xi \neq 0$ est équinumérique à $\xi \neq \xi$, et qu'ainsi $\mathbf{N}_\beta(\beta = 0)$ est le successeur de 0.

Le pas de récurrence est à peine plus complexe. Supposons que le nombre des entiers à partir desquels N est **S**-accessible soit le successeur N' de N et ne permette pas d'accéder à N. Afin d'établir que le nombre des entiers à partir desquels N' est **S**-accessible – nommons le 'N''' – est le successeur de N', il suffit de montrer que :

il existe un $\mathfrak{a}$ tel que $\mathbf{N}_\beta(N'$ est accessible à partir de β et $\beta \neq \mathfrak{a})$ est équinumérique à N'

Autrement dit :

il existe un $\mathfrak{a}$ tel que $\mathbf{N}_\beta(N'$ est accessible à partir de β et $\beta \neq \mathfrak{a})$
est équinumérique à
$\mathbf{N}_\beta(N$ est accessible à partir de $\beta)$

La première étape consiste à montrer que si N' est accessible à partir d'un entier M différent de lui-même, alors N est aussi accessible à partir de cet entier. La propriété d'avoir un prédécesseur accessible à partir de M ou d'être égal à M est **S**-héréditaire et possédée par M. Ainsi N' admet un prédécesseur accessible à partir de M. Mais nous avons établi l'unicité du prédécesseur, il s'agit donc de N : N est accessible à partir de M.

La seconde étape consiste à montrer que N' est différent de tous les entiers qui permettent d'accéder à N. Cela est immédiat grâce à (b) pour N.

Nous savons désormais que le concept de *permettre d'accéder à* N et le concept de *permettre d'accéder à* N' *et d'être différent de* N' ont la même extension. En choisissant $\mathfrak{a} = N'$, l'équinumériсité ci-dessus est établie : N'' est bien le successeur de N'.

Pour finir, il faut prouver (b) pour N' : N'' ne permet pas d'accéder à N'.

Procédons par l'absurde, et supposons qu'il en soit capable.

158. (a) seul correspond à (3), mais (b) nous servira dans la preuve.

159. L'intuition pourrait être trompeuse ici, et la preuve de cet énoncé plus difficile que prévue. Ce n'est pas le cas, il suffit de montrer que la propriété d'être différent de 0 est partagée par tout entier naturel N non nul et **S**-héréditaire.

Si $N' = N''$, alors par unicité du prédécesseur $N' = N$ donc N' permet d'accéder à N : cela est interdit par notre hypothèse.

Si $N' \neq N''$ alors nous avons vu que N est aussi accessible à partir de N'', donc à partir de son prédécesseur N' : cela est interdit par notre hypothèse ; et la preuve est achevée.

Finalement, le principe de Hume permet la démonstration des lois fondamentales de l'arithmétique (1) - (5). Mais Frege, nous l'avons vu, refusait de l'adopter abruptement comme un principe. Comme axiome, il ne permettait pas d'établir le caractère logique des mathématiques. Comme définition, il n'était pas capable de fixer le sens du signe '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$'. Il fallait procéder en deux moments :

I. Fixer autrement le sens de '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$'

II. Démontrer le principe de Hume

Pour accomplir la première étape, Frege prit acte de l'échec des définitions par abstraction, et retourna à son ancienne méthode. Il envisagea de décomposer le sens de l'opérateur en des significations exclusivement logiques. Cela demeurait impossible en exploitant les seules ressources de la langue formulaire, qui ne permettent d'exprimer que des *concepts* particuliers, en aucun cas des opérateurs. Il fallait donc nécessairement intégrer un nouveau signe qui contiendrait un opérateur. Mais Frege ne pouvait ajouter d'emblée '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$', car il entreprenait de dévoiler la logicité de son contenu. En procédant ainsi, il aurait simplement décrété arbitrairement cette dernière, et injecté sa conclusion dans les prémisses. Il convenait au contraire de constater que la langue formulaire de 1879 avait laissé sur la touche un autre contenu donc la logicité ne faisait, cette fois-ci, aucun doute ; puis s'en servir pour exprimer $\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$.

À ce titre, il choisit l'opérateur qui associe à un concept son *extension*. Il clamerait tout au long de la seconde période, comme pour dissiper ses propres doutes [160], que l'opération de passage à l'extension est une opération purement *logique* :

> L'extension d'un concept ne consiste pas en les objets qui tombent sous le concept à la manière, par exemple, dont une forêt consiste à des arbres. Il s'attache au concept et uniquement à lui. Le concept prend ainsi la préséance logique sur son extension. (Frege 1895, p. 210)

Nous savons aujourd'hui que ce geste fut fatal, ouvrant la voie à la loi V des *Grundgesetze* et, conséquemment, à la contradiction. Pour sa part, Frege l'ignorait et pensait parvenir ainsi à une définition explicite du signe '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' :

> Le nombre qui appartient au concept F est l'extension du concept "équinumérique au concept F". (Frege 1884, pp. 80-81 / p. 194)

Rappeler que Frege ne suivait pas l'usage contemporain des guillemets n'ôte pas toute ambiguïté à cette définition. Lue à la lettre, celle-ci indique que l'opérateur de passage à l'extension, – que nous noterons suivant l'écriture des *Grundgesetze* [161]– est localisé au troisième niveau :

160. doutes qu'il exprimerait néanmoins à quelques rares reprises, nous le verrons.

161. Lorsqu'il employait une lettre générale pour un concept (ou plus généralement une fonction) de second niveau, Frege indiquait en indice la lettre utilisée pour la place de l'argument du concept (de la fonction) pris(e) en argument, par exemple 'β' dans '$M_\beta(\varphi(\beta))$'. Sa méthode variait sensiblement dans le cas des noms primitifs. Il écrivait notamment '$\smile_{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$' au lieu de '$\smile_{\mathfrak{a}}(\varphi(\mathfrak{a}))$', ou encore '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' à la place de '$\jmath_\varepsilon(\varphi(\varepsilon))$'. La multiplication des lettres 'β', 'ε' et '$\mathfrak{a}$' – qui ont pourtant *exactement* le même statut – ainsi que de leurs positions permettait une lecture plus fluide des formules.

(**N**) Le nombre qui appartient au concept f est l'extension du concept d'*être équinumérique au concept f*

(**C**) $(\mathbf{N}_\beta(f(\beta)) := \dot{\psi}(\approx_\beta (\psi(\beta), f(\beta)))$

Cependant, Frege n'évoqua jamais, dans cet ouvrage ou ailleurs, d'extension de concepts de second niveau. De plus, dans les *Grundgesetze*, l'opérateur reçoit des concepts de *premier* niveau en arguments. Ceci [162] nous suggère une autre lecture de ce passage :

(**N**) Le nombre qui appartient au concept f est l'extension du concept d'*être équinumérique à l'extension du concept f*

(**C**) $\mathbf{N}_\beta(f(\beta)) := (\dot{\varepsilon}(\varepsilon \approx \dot{\alpha}(f(\alpha)))$

Quelle était sa position en 1884 ? C'est une question que nous allons laisser quelque temps en suspens, aux côtés d'une autre : comment démontrer le principe de Hume à partir de l'une ou l'autre de ces définitions ? Frege lui-même n'apporta aucun éclaircissement à la première, et expédia la seconde en quelques considérations imprécises dans le §69 et en une esquisse de preuve dans le §73. Il y a une raison simple à ce manque d'approfondissement : en 1884, il n'était pas encore certain d'emprunter ce sentier.

Pour le comprendre, il faut dire quelques mots du projet néologiciste. Il est clair que, dans les *Grundlagen*, Frege concevait la démonstration des lois fondamentales de l'arithmétique à partir du principe de Hume, sans solliciter les extensions de concepts. Les preuves des §§70-83 ne laissent aucun doute. L'appel aux extensions n'était qu'un préliminaire, essentiel pour établir la logicité de l'opérateur $N_\beta(\varphi(\beta))$, mais qu'il n'envisageait plus d'invoquer une fois le principe de Hume démontré. Charles Parsons le remarqua dès 1965 :

> Nous pouvons exposer [la méthode de Frege] de la manière suivante : définir les trois signes primitifs de Peano '0', 'nombre naturel' et 'successeur', et prouver les axiomes de Peano. [...] Il n'est pas nécessaire d'utiliser un quelconque axiome d'existence d'ensembles hormis pour définir les termes du type '$NxFx$' et pour prouver [le principe de Hume], donc le résultat peut être obtenu en prenant [le principe de Hume] comme axiome. (Parsons 1965, p. 194)

Cette idée fut développée par Crispin Wright (1983) qui ouvrit, à travers une traduction en deuxième ordre de la théorie en question, un vaste champ de recherche concernant les vertus du principe de Hume, ainsi que de ses proches variantes. Car une fois établie la consistance (relative à celle de ZFC) de cette théorie, se posent les questions respectivement philosophique et mathématique du statut de ce principe – analytique ou non – et de la quantité de mathématiques accessibles à travers lui – l'analyse réelle et complexe, la théorie des ensembles, etc. Des avancées considérables ont été et sont encore réalisées dans cette voie.

Néanmoins, s'il est clair que, dans les *Grundlagen*, Frege localisait le principe de Hume à la base de l'édifice et n'invoquait les extensions que pour dévoiler les racines logiques de celui-ci, le chemin emprunté dans les *Grundgesetze* est plus opaque. L'omniprésence des extensions interdit de déterminer d'un coup d'œil s'il parvint à dériver *rigoureusement* – rappelons que les preuves ne sont qu'esquissées dans les *Grundlagen* – les principaux théorèmes de l'arithmétique à partir du principe de Hume, n'utilisant les extensions que pour simplifier ou accélérer certaines démonstrations ; ou s'il s'est détourné de sa première intention en faisant, même une fois le

162. renforcé par d'autres éléments que nous présenterons en section 2.5.3.2.

principe de Hume démontré, un usage des extensions non réductible à ce dernier. En discutant l'ouvrage de Wright, Dummett prit position en faveur de la première possibilité :

> Crispin Wright consacre un chapitre entier de son livre *Frege's Conception of Numbers as Objects* à la démonstration que, s'il s'agit de considérer le [principe de Hume] comme une définition implicite ou contextuelle de l'opérateur de cardinalité, nous pouvons aussi dériver les mêmes théorèmes que Frege. Il aurait pu atteindre paisiblement le même objectif en remarquant que Frege lui-même fournit de telles dérivations de ces théorèmes. Il les dérive à partir du [principe de Hume] sans plus en appeler à ses définitions explicites. (Dummett 1991b, p. 123)

Cependant, Dummett n'appuie son affirmation sur aucune étude des *Grundgesetze*. Il se contente de montrer qu'il est, en effet, assez simple de procéder ainsi. Mais rien dans les *Grundgesetze* n'est explicite à cet égard. Frege n'y dérive même pas un principe de Hume unifié, il prouve les deux sens de l'équivalence à deux endroits différents (§53 et §69). S'il comptait parvenir à ce principe grâce aux extensions, puis tout bâtir sur le premier sans un recours essentiel aux secondes, il existait certainement de meilleurs moyens de le signaler. Depuis, Richard Heck a mené l'étude nécessaire pour aboutir à une réponse claire et, finalement, positive :

> Cela m'a pris des semaines, mais j'ai eu ma réponse : modulo les emplois superflus des parcours-de-valeurs [163], Frege avait véritablement dérivé les axiomes de l'arithmétique à partir du principe de Hume en logique du second ordre. (Heck 2012, p. X)

Bien qu'il ait su l'indiquer plus nettement dans les *Grundlagen* que dans les *Grundgesetze*, Frege suivit globalement le même chemin dans les deux ouvrages : faire jaillir la logicité du principe de Hume à partir des extensions, puis construire l'arithmétique sur la base de ce principe. S'il n'a pas jugé utile d'insister sur ce point technique dans les *Grundgesetze*, c'est parce que la valeur qu'il accordait aux extensions s'était renforcée entre 1884 et 1893. Pourtant, il n'eut pas recours à celles-ci de gaieté de cœur. Dans les *Grundgesetze*, il émit des réserves à leur sujet :

> Autant que je sache, un désaccord peut seulement survenir au sujet de ma loi fondamentale pour les parcours-de-valeurs (V), qui n'a peut-être pas encore été explicitement formulée telle quelle par les logiciens, bien qu'ils raisonnent en accord avec elle lorsque, par exemple, ils parlent d'extensions de concepts. Je la tiens pour purement logique. Quoi qu'il en soit, l'endroit est ainsi toujours indiqué où la décision doit être prise. (Frege 1893, p. XII)

Ses craintes (et plus encore) furent confirmées par la découverte de la contradiction. Il répondit à la lettre de Russell par l'aveu immédiat que sa loi V était fausse [164]. Très tôt, il avait compris qu'il pouvait atteindre son objectif à partir du principe de Hume, mais il fallait en assurer la logicité (et c'est ainsi que le ver entra dans la pomme). En 1884, la manière dont cette dernière tâche serait accomplie était plus ou moins indifférente à Frege. La structure du livre le révèle clairement. Totalement orientée vers le principe de Hume, elle ne laisse qu'une place infime à la question des extensions. Si nous retranchons les §66-69 dans lesquels le problème de Jules César est soulevé puis contourné, le §73 dans lequel l'idée d'une preuve du principe de Hume à partir des extensions est transmise, et le §107, conclusif, dans lequel ces questions sont résumées, alors tout le contenu tient parfaitement debout. Le signe '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' est défini par abstraction, et permet la dérivation des lois fondamentales de l'arithmétique. On se prendrait presque à croire que Frege introduisit ces sections sur le tard, afin de régler un problème (Jules César) qu'il avait aperçu au

163. Les parcours-de-valeurs constituent, dans les *Grundgesetze*, une généralisation des extensions.
164. (Frege 1976, pp. 212-213)

dernier moment. Une autre hypothèse est néanmoins plus convaincante, et nous dispense de tout pronostic concernant l'heure à laquelle le problème frappa sa conscience [165] : Frege n'attachait aucune importance à la *manière* dont il serait résolu, c'est-à-dire à la façon dont l'opérateur de cardinalité serait analysé logiquement. Le principe de Hume réunissait tout ce qui était essentiel au concept de nombre, et *n'importe quelle* stratégie aboutissant au dévoilement de sa logicité conviendrait, qu'elle procède à travers les extensions ou autrement. D'ailleurs, Frege ne fournit aucun argument en faveur de sa solution sinon qu'elle atteignait ce but. Tout autre méthode présentant le même avantage aurait été également justifiée. Cela, il l'exprima sans ambages à l'issue de son parcours, comme s'il faisait offrande d'un morceau superflu du fruit de son labeur :

> Nous avons supposé connu le sens de l'expression 'extension d'un concept'. Cette manière de vaincre la difficulté ne rencontrera pas un accord unanime et beaucoup préfèreront lever le doute exprimé ci-dessus [166] d'une autre manière. Pour ma part, je n'attache pas une importance décisive à l'introduction des extensions de concepts. (Frege 1884, p. 117 / 227)

Il est probable que le manuscrit évoqué auprès de Marty – dans lequel les dérivations formelles étaient conduites – ne contînt même pas la définition explicite de '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' en termes d'extensions. En dérivant les axiomes de l'arithmétique à partir du principe de Hume, Frege pensait avoir fait le plus dur. Le reste suivrait, il suffirait de choisir la solution la plus adaptée. C'est pourquoi nous reculons l'examen de cette définition explicite et de la démonstration conjointe du principe de Hume. À partir d'une récente découverte de Duarte (2009), certains commentateurs prétendent que les choses ne se sont pas passées aussi facilement que Frege le croyait en 1884, n'ayant pas encore pénétré le détail d'une solution qu'il n'avait pas encore adoptée définitivement. Nous admettons que, indifférent à la stratégie choisie, il a peut-être tardé à en examiner le détail. Néanmoins, nous montrerons qu'au moment où il s'y appliqua, aucun obstacle ne s'est dressé sur sa route. Pour cela, il nous faudra reconstituer proprement la preuve du principe de Hume dans le cadre des *Grundlagen*. Une telle tâche exige certains développements techniques concernant les extensions, dont notre second chapitre constitue l'environnement naturel. Nous y ferons donc une rapide halte pour, en apportant cet ultime complément, achever la reconstitution historique du premier [167].

Nous avons dit que le rôle des extensions se renforça entre 1884 et 1893. Proposons une première hypothèse pour expliquer ce changement, ainsi que la différente place octroyée au principe de Hume dans les deux ouvrages. Frege s'opposait fermement à tout agnosticisme concernant le concept de *nombre*. Il ne cherchait pas *une* construction adaptée au développement des mathématiques, mais *la* juste analyse révélant la structure profonde de ce concept ou, pour le dire différemment, *la* bonne définition coïncidant avec le sens du mot 'nombre'. Il conclut finalement que le principe de Hume était inapte à cette tâche, parce qu'il ne pouvait révéler le sens de ce mot lorsqu'il était employé dans les énoncés du type 'Jules César est un nombre'. Soit ! Il était donc nécessaire que la nouvelle définition, explicite celle-ci, posée en termes d'extensions, octroie à notre nom le sens qu'il possède réellement dans cette phrase. Le fait qu'elle permette la dérivation du principe de Hume ne peut être un critère suffisant, précisément parce que ce principe est muet vis-à-vis de ce type de phrases. Qu'elle n'incorpore aucun élément extra-logique ne nous assure pas non plus de son bien-fondé. Toutes les stratégies couronnées de succès dans ces deux tâches n'ont donc, *a priori*, aucune raison de se valoir, contrairement à ce que Frege affirma

165. D'ailleurs, Tappenden (2005) argumente efficacement en faveur de l'importance du problème de Jules César dans le contexte mathématique de Frege. Il est donc probable que celui-ci réalisa rapidement cet obstacle.
166. relatif au principe de Hume et causé par le problème de Jules César.
167. Ceci aura lieu en section 2.5.3.

en conclusion. Et le même problème peut être formulé en termes d'objets. Si les nombres sont véritablement les extensions en jeu dans la définition explicite, ils ne peuvent être autre chose. Une caractérisation logique qui ne les présenterait pas tels qu'ils sont – des extensions – serait donc inadaptée, qu'elle aboutisse ou non à la démonstration du principe de Hume [168].

Toutes les stratégies ne sont donc pas équivalentes. Frege s'en apercevrait plus tard. C'est pourquoi il cesserait d'insister sur le principe de Hume dans les *Grundgesetze*. Si ce dernier conservait techniquement sa position centrale – Frege dériva sous son autorité les lois fondamentales de l'arithmétique –, il avait perdu ses privilèges quant à l'analyse du concept de *nombre*. Il n'était plus question de trouver une *quelconque* stratégie permettant sa démonstration à travers une définition logique. Il fallait que cette définition provienne de *la* juste analyse du concept de *nombre* ; et cela, le principe de Hume ne pouvait s'en porter garant. Frege avait ses doutes (légitimes), mais il défendit néanmoins une analyse en termes d'extensions, *et pas seulement parce qu'elle enracinait logiquement le concept de nombre tout en permettant la dérivation du principe de Hume*. Il n'avait donc plus aucune raison de construire son livre autour de ce dernier. Il convenait au contraire de le bâtir autour des extensions, leur conférant la place qui leur revenait de droit, étant donné leur rôle fondamental dans l'analyse des nombres.

Face à la contradiction, il livra à Russell les raisons de son parcours :

> Je fus moi-même longtemps réfractaire aux parcours-de-valeurs et ainsi aux classes ; mais je ne voyais pas d'autres possibilités pour installer l'arithmétique sur des fondations logiques. Mais la question est : comment appréhende-t-on les objets logiques ? Et je n'ai trouvé d'autres réponses que celle-ci : nous les appréhendons comme extensions de concepts, ou plus généralement comme parcours-de-valeurs de fonctions. (Frege 1976, p. 223)

Dans un premier temps, il ne voyait pas d'autre moyen que l'introduction des extensions afin de parvenir à une définition logique ouvrant sur la démonstration du principe de Hume. *Mais* la question centrale n'était pas celle-ci, elle concernait les objets logiques, et notamment (surtout) les nombres. Frege ne l'avait pas aperçue sous son jour le plus fidèle en 1884. Il était finalement resté sourd au problème de Jules César : si le principe de Hume n'est pas suffisant pour rendre compte de notre appréhension des nombres, alors il faut trouver une autre voie qui tire sa justification d'elle-même, et non de ce principe. Cette voie – celle des extensions –, il l'avait maladroitement ouverte dès 1884, présentée comme un choix parmi d'autres.

Quel crédit apporter à une telle hypothèse ? Si elle est correcte, il reste encore à expliquer pourquoi Frege finit par s'accrocher aux extensions malgré ses doutes, *i.e.* pourquoi il estima que les nombres sont appréhendés comme des extensions quoi qu'il en soit du principe de Hume. Nous ne pouvons en dire davantage avant d'avoir inspecté les §§29-31, ce qui aura lieu dans le troisième chapitre. La résolution de ces questions constituera donc notre ultime défi, et nous prions le lecteur de s'armer de patience jusque là [169].

1.5.3.5 Synthèse

En 1879, Frege indiqua qu'il espérait parvenir à l'analyse du concept de *nombre via* la relation d'accessibilité. Il avait déjà à l'esprit de s'en servir comme clôture inductive. Cette mécanique

168. Les deux formulations se valent. Les nombres sont bien les extensions en jeu dans la définition explicite si et seulement si les sens des mots 'nombre', '0', '1' etc. sont bien ceux qui sont révélés par la traduction dans le langage des extensions, *i.e.* si le sens des phrases dans lesquels ils figurent écrites sous forme synthétique ou en impliquant le nom pour l'opérateur d'extensions est toujours le même, *y compris les phrases du type 'Jules César est un nombre'*.

169. précisément jusqu'à la section 3.3.10.

fonctionne idéalement si les nombres sont identifiés à des concepts *extensionnels* de second niveau. Elle permet une définition par le bas des cardinaux finis et une caractérisation explicite des cardinaux en général, sans solliciter les extensions. Elle exige en revanche l'ajout d'un axiome d'infini, et ne s'adapte pas à une vision intensionnelle des concepts. Soit parce que Frege s'en aperçut, soit à cause d'une fidélité locale (étrangement prise au sein d'une défiance générale) à la langue naturelle, soit – plus probablement – pour ces deux raisons, il décida d'adopter une autre stratégie, et d'identifier les nombres à des objets. Il comprit qu'il n'était plus nécessaire de procéder à un ajout *ad hoc* d'un axiome d'infini, et que toutes les lois fondamentales se déduisaient du seul principe de Hume. Encore fallait-il parvenir à démontrer celui-ci à travers la caractérisation de l'opérateur cardinal. Il était impossible de procéder à une définition explicite de cet opérateur dans la langue formulaire de 1879. Frege envisagea donc, dans un premier temps, de poser le principe de Hume comme une définition par abstraction, non plus explicite donc, mais contextuelle. Le projet avorta à cause du problème de Jules César, et Frege n'eut d'autre choix que d'ajouter un nouveau symbole à son langage afin de recourir à une définition explicite. Le contenu de celui-ci ne devait excéder le domaine de la logique afin d'assurer la réduction des mathématiques. Frege croyait, malgré quelques réserves, au caractère logique du passage aux extensions. Il sollicita donc ces dernières dans l'analyse du concept de *nombre*, s'engageant pour la première fois dans la voie de la contradiction. Il franchit le cap avec négligence, n'y voyant rien d'irréversible, car il "n'attach[ait] pas une importance décisive à l'introduction des extensions de concepts". Celles-ci allaient pourtant acquérir progressivement un caractère plus central. Peut-être est-ce parce qu'il ne placerait plus pour longtemps toutes les stratégies aptes à révéler la logicité du principe de Hume sur un pied d'égalité, et peut-être est-ce à ce moment qu'il scellerait véritablement le destin de son programme. Nous tenterons de résoudre ce problème à l'issue de notre long périple au sein des §§29-31 des *Grundgesetze*.

En outre, ces questions peuvent sembler, au premier regard, tout à fait orthogonales à notre affaire de sémantique. Au contraire, il existe des liens profonds entre les deux problèmes. Frege plaça rapidement la notion la bijection au cœur du concept de *nombre*. Elle lui permettait d'expliquer dans quelles circonstances un même nombre appartient à deux concepts et, plus techniquement, de définir une relation de successeur apte à collecter les nombres finis grâce à la relation d'accessibilité, ainsi qu'il l'envisageait en 1879. Il entrevoyait donc le moyen de lier entre eux deux concepts auxquels appartiennent un même nombre – ou un nombre et son successeur –, mais il ne savait comment relier les nombres aux concepts auxquels ils appartiennent, or c'est justement à travers ce lien que les nombres nous sont donnés. En définitive, il ne savait donc pas encore ce qu'*étaient* les nombres. Seule la hiérarchie des concept lui livra la solution, quelque part entre 1881 et 1884[170]. *C'est ainsi et seulement ainsi qu'il résolut le problème de la quantification et qu'il se débarrassa des contenus indéterminés.* Il savait désormais que la composition du contenu d'un énoncé n'imitait pas celle des *symboles* de cet énoncé, mais de signes complexes dont les lettres gothiques n'étaient que de vides constituants. L'affinement de sa sémantique ne fut pas le produit d'une recherche obstinée dans ce secteur, mais une conséquence incidente à la poursuite de l'objectif d'édification des mathématiques. Avant d'introduire les problèmes qui résistèrent à ces importants ajustements, et entraînèrent le second (et célèbre) basculement de 1891, il nous reste à raconter l'histoire qui *précéda* cette mise en ordre, *i.e.* l'aventure éphémère (et peu connue) d'un Frege qui n'était pas *encore* logiciste.

170. Plus probablement entre 1881 et 1882. On voit mal comment il pourrait annoncer à Marty le succès de son entreprise, au cours de cette dernière année, sans avoir tiré au clair la question du second niveau. Nous y reviendrons dans un instant.

1.5.4 Forme et substance

1.5.4.1 Retour à la période pré-logiciste

Dans cette perspective, il nous faut répondre à deux questions. D'une part, *comment* Frege aboutit-il à cette conception des nombres, édifiant ainsi toute la hiérarchie des concepts ? Pourquoi ne se contenta-t-il pas, comme il l'envisageait en 1879, d'intégrer tels quels la notion extra-logique de successeur ainsi que l'objet 0, lui aussi extra-logique ? D'autre part, comment doit-on interpréter sa première distinction entre forme logique et contenu non logique ? Nous venons de reconstituer l'histoire postérieure à la découverte fondamentale de l'idée qu'attribuer un nombre, c'est dire quelque chose d'un concept. Nous allons désormais nous occuper du chemin qui lui fut antérieur. À cette fin, il nous faut revenir aux arguments de Linnebo, par lesquels nous avons ouvert cette longue section.

1.5.4.2 La thèse de Linnebo

Linnebo attribue à Kant la paternité d'une partie des idées de la *Begriffsschrift*. Selon lui, Kant soumettait sa logique générale pure à la thèse formaliste :

> La thèse formaliste : la logique est strictement formelle. Sa relation à la pensée est comme la relation d'une "grammaire générale" au langage. (Linnebo 2003, p. 238)

Or Frege y aurait aussi attachée sa logique de 1879 :

> L'étroite similarité entre les comparaisons, chez Kant et Frege, de la logique avec la grammaire formelle d'un langage laisse penser que Frege était informé des vues de Kant et y adhérait. (Linnebo 2003, p. 240)

Linnebo fait référence aux quelques passages des textes écrits entre 1880 et 1882 que nous avons cités plus haut. Répétons le plus explicite d'entre eux :

> On peut distinguer la partie formelle qui, dans le langage des mots, est constituée par les terminaisons, préfixes et suffixes, et les particules, de la partie proprement expressive du contenu. Les signes de l'arithmétique correspondent à la dernière. Ce qui manque encore, c'est le ciment logique qui permettra d'assembler solidement, les unes avec les autres, ces pierres de construction. (Frege 1881, pp. 14 - 15 / p. 22)

Un énoncé serait donc constitué d'une partie substantielle et d'une partie logique, purement formelle, seule prise en charge par la théorie formulaire. Notre section 1.4 est rudement mise à mal par cet extrait, car nous y avons longuement décrit les rapports entre les *contenus* des signes de cette langue. Nous étions pourtant guidés par des éléments solides, par exemple la manière dont Frege lui-même évoqua le *contenu* de ses énoncés. Linnebo considère rapidement cette objection, et envisage une réponse possible. Il propose une lecture littérale du critère d'identité des contenus. Étant donné que tous les énoncés de la langue formulaire ont les mêmes conséquences, on peut leur octroyer artificiellement un même "contenu nul". Frege aurait ainsi généralisé son critère aux énoncés logiques, qui n'ont en vérité *aucun* contenu, à travers une simple façon de parler. Mais Linnebo ne tient pas coûte que coûte à sa solution :

> Bien que cette explication me paraisse possible, je ne la poursuivrai pas plus loin. Pour mon propos, il suffit que Frege ait construit sa logique en accord avec la thèse formaliste. (Linnebo 2003, p. 240)

Ce revirement est surprenant. Il ne voit pas, en fin de compte, de contradiction entre la thèse formaliste et l'existence de contenus purement logiques. Pourtant, si tous les signes de la langue

formulaire, en tant que garants du ciment logique des pensées, sont dénués de contenu, les énoncés de ce langage en sont aussi privés. Mais Linnebo présente, fondue dans son développement, une autre lecture de la théorie formaliste :

> Les règles [de la logique] font complètement abstraction des différences entre les objets.
> [...]
> [La thèse formaliste] s'oppose aux vues des *Grundlagen* selon lesquelles les nombres sont des objets logiques. Si les objets logiques existent, alors la logique est une science avec son propre royaume d'objets. (Linnebo 2003, pp. 236, 241)

Il identifie deux aspects totalement indépendants de la *Begriffsschrift* : le fait que la logique ne traite d'aucun contenu déterminé et le fait que les opérateurs logiques ne soient pas des concepts. C'est seulement le dernier point qui inspira à Frege des passages tels que nous en avons rencontrés, et il excéda partiellement la rédaction des *Grundlagen*. Frege n'a jamais soutenu que les énoncés logiques étaient vides de sens, ni même identifié leurs contenus. En revanche, durant la longue transition entre 1879 et 1891, il passa d'une vision de la logique en termes d'opérateurs et d'indétermination à une vision en termes de concepts *généraux*. C'est seulement en décrivant cette métamorphose que s'éclairera sa première distinction entre forme et substance.

1.5.4.3 La quantification : de l'indéterminé au général

En premier lieu, il faut distinguer, parmi les symboles de la langue formulaire, les lettres (latines et gothiques) et les caractères spéciaux ('$_{\top}$', '$\smile$', etc.). Écoutons May établir la différence :

> Le contenu des [caractères spéciaux] est fourni par leur rôle logique, spécifié par ce qui équivaut à un système de table de vérité ; leur signification réside dans la relation entretenue avec les (signes) complets qu'ils connectent ensemble. Le contenu des symboles, en revanche, est sémantique ou, comme Frege le dirait, "conceptuel" ; leur signification réside dans le fait qu'ils désignent des concepts ou des objets. (May 2001, p. 4)

May fait écho à ce que nous avons vu en section 1.4 : la façon dont Frege présenta les contenus des caractères spéciaux correspond à la manière dont nous expliquons aujourd'hui le rôle des symboles logiques. Ils déterminent un nouveau contenu à partir de contenus anciens, mais ne se tiennent en aucune manière parmi les concepts. Cette conception des caractères spéciaux a sans surprise inspiré à Frege sa distinction entre ciment logique – des contenus qui *transforment* d'autres contenus – et pierres de construction – les contenus de base, sur lesquels ces opérations s'effectuent. À ce compte là néanmoins, un énoncé logique serait fatalement privé de matière première, il ne pourrait arborer le moindre contenu. Or Frege s'élevait déjà contre cette idée en 1879 :

> On voit [...] comment la pensée pure, faisant abstraction de tout contenu donné par les sens, ou même par une intuition *a priori*, peut produire des jugements ne paraissant être possibles à première vue qu'en se fondant sur une intuition quelconque, à partir du contenu qui provient uniquement de sa propre nature [171] [*welcher seiner eigenen Beschaffenheit*]. On peut faire une comparaison avec la condensation par laquelle on est parvenu à changer l'air, qui paraît n'être rien à la conscience d'un enfant, en un liquide visible formant des gouttes. (Frege 1879b, p. 56 / 75)

171. Nous modifions légèrement la traduction.

Ce passage précède le développement de la théorie des suites, et notamment la définition de l'accessibilité qui servirait, cinq ans plus tard, à isoler les cardinaux finis. À cette époque, Frege constatait donc déjà que certains agencements purement *logiques* conduisent à l'expression de contenus qui ne semblent accessibles "qu'en se fondant sur une intuition quelconque". Voilà qui semble en totale contradiction avec la métaphore du ciment, et ceci tient à la situation ambiguë de 1879.

À cette date, Frege concevait le contenu de ses caractères spéciaux comme des convertisseurs. Par exemple l'opérateur d'implication transforme la signification de 'la terre est plate' en un nouveau sens, exprimé par :

$$\text{‘}\begin{array}{l}\text{—— la terre est plate’}\\ \text{└—— la terre est plate}\end{array}$$

Le problème (et le progrès) fut amené par un "opérateur" d'un genre nouveau, représenté par le symbole '$\smile$' :

$$\text{‘}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l}\text{—— } \mathfrak{a} \text{ est plat’}\\ \text{└ } \mathfrak{a} \text{ est plat}\end{array}$$

Il est nécessaire qu'une partie de la matière première fournie à l'opérateur $\smile$ – le contenu de '$\mathfrak{a}$' – conserve toute son *indétermination.* C'est ainsi, et seulement ainsi, que des énoncés logiques deviennent formulables. En effet, sans la quantification, nous sommes limités à des *schémas* de type :

$$\text{‘}\begin{array}{l}\text{—— } A\text{’}\\ \text{└—— } A\end{array}$$

'A' joue le rôle d'une lettre schématique qui se voit substituer un énoncé (non assertif) substantiel. On retrouve proprement la thèse formaliste de Linnebo, selon laquelle les signes logiques attendent de transformer des contenus *extérieurs* à la logique. Mais ce schéma n'appartient pas à la langue formulaire car, pour Frege, le premier des deux énoncés suivants n'est qu'une *abréviation* du second :

$$\text{‘}\begin{array}{l}\text{—— } f(a)\text{’}\\ \text{└—— } f(a)\end{array} \qquad\qquad \text{‘}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l}\text{—— } \mathfrak{f}(\mathfrak{a})\text{’}\\ \text{└ } \mathfrak{f}(\mathfrak{a})\end{array}$$

Tous les énoncés de la langue formulaire sont dotés d'un contenu propre, car *tous les énoncés de la langue formulaire contiennent une quantification,* masquée ou non. Aucune lettre schématique n'est impliquée dans l'écriture des expressions de ce langage. L'idée que la logique est basée sur des opérateurs – le ciment – fut ainsi ajustée pour permettre l'élaboration de contenus purement logiques. Une matière première fut offerte à ces opérateurs : les contenus *indéterminés* des lettres gothiques. Ces derniers constituaient la substance élémentaire à laquelle les opérateurs pouvaient s'appliquer. Aux yeux de Frege, leur caractère logique était garanti par leur indétermination.

Dans son parallèle avec Kant, Linnebo ignore un des deux types de symboles de la langue formulaire. Frege croyait en effet que les phénomènes logiques reposaient sur l'application de stricts opérateurs. Il parlait systématiquement du rapport [*Verhältnis*] entre des contenus d'énoncés [172], ou de mettre en rapport [*verbinden*] ces contenus [173], et non d'une relation [*Beziehung*] qui les subsume [174]. Mais ces opérateurs pouvaient, sans quitter la sphère logique, s'appliquer à des contenus

172. Par exemple (Frege 1881, p. 11/ 19).
173. Par exemple (Frege 1879b, p. 13 / 27).
174. Ce terme est au contraire employé pour faire référence au contenu d'un nom 'Ψ' dans '$\Psi(A, B)$', par exemple (Frege 1879b, p. 18 / 33).

indéterminés, et ainsi produire une substance interne à ce domaine. L'erreur de Linnebo expose parfaitement la manière dont Frege lui-même fut désarçonné par sa propre stratégie. Comment la transformation de contenus indéterminés conduit-elle à des significations déterminées ? Tarski apporta une réponse, en conférant aux variables un contenu relatif à une portée à travers la spécification d'une assignation. Ce procédé s'accorde tout à fait aux intuitions balbutiantes de 1879, lorsque Frege affirmait sans l'expliquer :

> La lettre gothique ne fixe sa signification qu'à l'intérieur de [la portée du quantificateur]. (Frege 1879b, p. 20 / 34)

Mais, d'une part, Frege ne disposait pas techniquement de cette solution, d'autre part il en vint rapidement à bannir toute notion d'indétermination. Lorsqu'il s'aperçut des problèmes rencontrés par sa première conception de la quantification, il rejeta en bloc, et avec ardeur, toute *relativité* du sens, toute *suspension* sémantique. Un contenu déterminé ne peut, pensa-t-il alors, résulter que de la composition de sens eux-mêmes *déterminés*. Voici ce que, beaucoup plus tard, il écrivit à Jourdain :

> La généralité ne peut être regardée comme la *signification* des lettres latines ; car elle ne peut être regardée comme quelque chose d'indépendant, quelque chose qui attendrait l'ajout d'un contenu déjà complet à un autre égard. Je ne parlerai donc pas d'un 'terme à la signification indéterminé' ou d'un 'terme à la signification variable'. Dans ce cas, les signes n'ont pas du tout de signification. (Jourdain 1912, p. 238)

Frege discutait ici une idée de Russell, mais c'est contre lui-même que cette objection s'est d'abord dressée, contre sa première lecture des lettres latines. Nous savons comment il se corrigea, en ôtant tout contenu à la lettre '$\mathfrak{a}$', et en proposant une nouvelle décomposition du terme '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$', à travers les deux noms *simples* : '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\varphi(\mathfrak{a})$' et '$\Phi(\xi)$'.

Ce geste fut fondateur, parce qu'il permit de rendre un autre compte du caractère substantiel des énoncés logiques, et éclaira différemment la métaphore proposée dans la *Begriffsschrift*. Les molécules d'airs invisibles à l'enfant, qui génèrent de la buée sous ses yeux ébahis, ne sont autres que des concepts *généraux*, totalement déterminés. Contrairement à ce qu'affirme Linnebo, il ne convient pas de dater à 1884 le basculement d'une vision formaliste à une vision substantialiste de la logique. Celle-ci était déjà substantielle en 1879, mais la substance première changea d'ici 1884. Dans la *Begriffsschrift*, l'opérateur $\smile$ transformait le contenu *indéterminé* de '$\mathfrak{a}$' en un contenu déterminé, par un coup de baguette magique que Frege ne parvint pas à expliquer. Il y renonça alors, et envisagea en retour d'appliquer les opérateurs à des *concepts* logiques parce que *généraux*. Il abandonna le contenu (logique parce qu'indéterminé) de '$\mathfrak{a}$' au profit de celui (logique parce que général) de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\varphi(\mathfrak{a})$'. Dans les *Grundlagen*, il maintint des opérateurs dans son système, parce que la distinction entre contenus jugeables et objets avait toujours cours. Il n'envisageait que des transformations, et non des subsomptions, de contenus jugeables. Or l'implication et la négation opèrent sur ces derniers, ils se voyaient toujours chargés d'un travail de conversion. Seule la quantification [175], qui s'adresse à des concepts, put recevoir un autre statut.

1.5.4.4 La cause du changement : le développement des mathématiques

Nous savons que la stratégie de réduction de Frege fut permise par l'émergence des concepts de niveaux supérieurs, et ainsi par l'abandon de la notion d'indétermination. Nous allons tenter de décrire plus précisément ce basculement.

175. Et l'identité dans une certaine mesure, nous en parlerons dans la prochaine section.

Durant les premières années, Frege ne voyait pas d'objection à la spécification d'un domaine restreint d'objets pour l'étude des sciences particulières. Dans la *Begriffsschrift*, il amorça l'énoncé du théorème des quatre carrés de Lagrange en écrivant 'pour tout entier naturel'. Néanmoins, cette partie du théorème n'aurait pas survécu à une traduction dans la langue formulaire. Voici comment, en 1881, il exprima que A et B sont congruents modulo M :

$$\text{‘}\begin{array}{l} \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}}(A_\gamma + M = B_\beta)\text{’} \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\vdash}}(B_\gamma + M = A_\beta) \end{array}$$

Ici, nulle prémisse n'indique que A, B et M doivent être des entiers naturels, relatifs ou quoi que ce soit d'autre. On pourrait penser que Frege exigeait que l'opération d'addition soit définie pour *tous* les objets. La précision qui accompagne cette formule pourrait nous en convaincre :

> A et B sont congruents modulo M. Ici, A, B et M n'ont pas besoin d'être des nombres entiers ; il n'est rien présupposé de plus que leur additivité. (Frege 1881, p. 25 / 32)

On serait tenté de lire entre les lignes que le développement de l'arithmétique dans un système idéal requiert que *tous* les objets puissent s'additionner. Nous nous garderons néanmoins de tirer une conclusion trop rapide. Considérons la formulation d'un énoncé de géométrie, tiré d'une conférence de 1890 :

> Si
> $$AB \cong CD$$
> signifie que les deux pairs de points AB et CD sont congruents.
> Alors nous pouvons exprimer que le point D se trouve sur la droite déterminée par les points B et C de cette manière :
> $$\overset{\mathfrak{A}}{\smile}\begin{array}{l} D \equiv \mathfrak{A} \\ BD \cong B\mathfrak{A} \\ CD \cong C\mathfrak{A} \end{array}$$
> (Frege 1879a, p. 89)

Ici, la relation de *congruence* appartient au strict domaine de la géométrie, elle ne concerne pas la totalité des objets. Pourtant, Frege n'ajouta pas la moindre prémisse à son théorème. Nous ne pouvons donc pas tirer, à partir de ces illustrations, le lieu – logique ou non – dans lequel il envisageait alors les mathématiques. Néanmoins, nous pouvons relever un problème auquel était confrontée sa notion d'indétermination et, plus grave encore, son projet entier de développement de l'arithmétique.

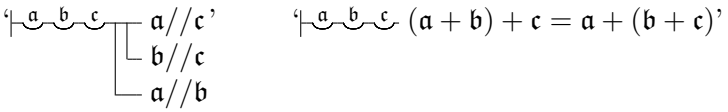
En effet, *dès le départ*, Frege avait un processus de réduction à l'esprit. En 1881, au moment de présenter divers théorèmes impliquant la notion de multiple, il apporta les précisions suivantes :

> Non seulement aucun énoncé relatif à la multiplication, mais pas même le concept de multiplication n'ont à être assumés. (Frege 1881, p. 30 / 37)

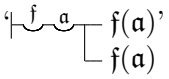
Frege savait que la somme et l'accessibilité étaient suffisantes pour *définir* la multiplication. Par ailleurs, il distinguait clairement le caractère logique de contenus "à première vue fondés sur l'intuition", et la première exploitation qu'il fit de la langue formulaire pour parvenir à la notion d'accessibilité n'est pas compatible avec l'idée qu'il voulait intégrer à (et non pas définir dans) son langage *tous* les noms pour l'addition, la multiplication, la relation d'ordre, etc. Si son objectif avait été celui-là, il aurait été naturel de procéder dès 1879 à la démonstration de

théorèmes en mobilisant ces symboles. Au contraire, Frege se restreint d'abord au strict cadre logique, et proposa une définition façonnée pour permettre certaines réductions, ainsi qu'il le montra en 1881.

Le problème consiste à déterminer *jusqu'à quel point* il envisageait initialement de conduire cette entreprise. Voici, à nos yeux, la réponse la plus probable : Frege lui-même l'ignorait. Mais nous voulons être plus précis, en nous appuyant sur les éléments récoltés jusqu'ici. Le texte de 1881 est très explicite sur un point : la relation d'accessibilité permet, sans aucun doute, de traduire dans la langue formulaire d'importants théorèmes arithmétiques *une fois le symbole '+' intégré au langage et les axiomes correspondants ajoutés au système*. En outre, Frege savait que l'intégration de notions géométriques (par exemple celles de droite et de point) et des axiomes correspondants pouvait à son tour autoriser la réalisation de démonstrations géométriques. Considérons par exemple les deux énoncés suivants (et représentons par '//' la relation de *parallélisme*) :



Le premier énoncé peut être intégré comme axiome au système de la géométrie, et la quantification limitée à la totalité des droites. Le second peut être intégré comme axiome au système de l'arithmétique (respectivement de l'analyse) et la quantification restreinte à l'ensemble des entiers (respectivement des réels). Cependant, il faudrait distinguer des énoncés dans lesquels les lettres gothiques ont un contenu indéterminé *relativement* à un domaine restreint – comme les deux exemples ci-dessus – de ceux dans lesquels elles possèdent un sens *absolument* indéterminé – comme l'exemple ci-dessous :



La faille principale de la *Begriffsschrift* se répercute évidemment ici : comment l'opérateur de quantification détermine-t-il un sens à partir de contenus eux-mêmes indéterminés et, plus encore, un sens qui dépend du domaine auquel l'indétermination est attachée ? Il est possible que Frege ait finalement aperçu cette faiblesse mais, plus probablement, il n'a pu manquer de réaliser que cette option était totalement inadaptée à l'objectif qu'il s'était fixé *dès 1879* :

> Je devais d'abord chercher jusqu'où l'on pourrait aller dans l'arithmétique grâce aux déductions seules, appuyé uniquement sur les lois de la pensée, qui sont au-dessus de toutes les particularités. Mon point de départ fut de chercher d'abord à réduire le concept d'[accessibilité] dans une suite à la conséquence *logique*, puis de progresser à partir de là jusqu'au concept de nombre.
>
> [...]
>
> Je pense d'abord appliquer [ma langue formulaire] à [l'arithmétique] en cherchant à mieux analyser ses concepts et à fonder plus profondément ses énoncés. Dans la troisième partie, j'ai provisoirement communiqué un peu de ce qui tend dans cette direction. La poursuite plus avant dans la voie indiquée, l'éclaircissement des concepts de nombre, de grandeur, etc., constitueront l'objet de mes recherches ultérieures que j'avancerai immédiatement après cet écrit. (Frege 1879b, pp. VII-VIII / 8-9)

On voit bien comment, dans le cadre de l'indétermination et des quantifications restreintes, réduire la multiplication à l'addition. En revanche, on comprend mal comment élucider de cette manière les concepts de *nombre*, de *grandeur*, etc. Frege savait qu'en se donnant 0, 1 et l'addition – ou plus simplement en se donnant 0 et le successeur –, on pouvait récupérer les cardinaux finis.

Attention, nous ne disons pas qu'il avait réalisé dès 1879 les preuves des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique à partir du seul principe de Hume. Nous affirmons seulement qu'il possédait une idée de la méthode, sinon pourquoi aurait-il affirmé qu'il voulait progresser *à partir de la relation d'accessibilité* jusqu'au concept de *nombre* ? Il escomptait bel et bien *définir* les cardinaux finis, même si cela sollicitait des ressources extra-logiques. La manière la plus simple consistait à intégrer des symboles pour 0 et le successeur – dont le contenu serait *mathématique* – et à écrire :

$$\text{`}\Vdash \mathbb{N}(a) \equiv \mathbf{A}_{\beta,\gamma}(S(\beta,\gamma),0,a)\text{'}$$

Voilà qui spécifie que les cardinaux finis sont exactement les nombres S-accessibles à partir de 0, autrement dit :

$$\text{`}\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}} (\mathbb{N}(\mathfrak{a}) \equiv \mathbf{A}_{\beta,\gamma}(S(\beta,\gamma),0,\mathfrak{a}))\text{'}$$

Frege avait en tête une définition de ce type *depuis la* Begriffsschrift. Mais il se trouvait confronté à un choix difficile. Soit il parvenait à définir *logiquement* la relation de succession et le nombre 0 – ce qu'il était incapable de réaliser dans le cadre de l'indétermination –, soit il les *importait* directement des mathématiques – et il lui fallait restreindre sa quantification au domaine des mathématiques, *i.e.* se donner exactement les objets de cette discipline.

Évidemment, il n'aurait vu aucun intérêt à caractériser les cardinaux finis à travers une quantification qui s'y limitait. La circularité ne lui aurait pas échappé : il se serait simplement donné le concept de *cardinal fini* (comme il comptait se donner celui de *droite* impliqué dans la loi exprimée plus haut) avant de le définir. La question était donc : à l'intérieur de quelle sphère circonscrire ces nombres spécifiques : les relatifs, les rationnels, les réels, les complexes ? Aucune de ces réponses ne pouvait convenir, car Frege savait que les mathématiques n'avaient pas de raison de se limiter éternellement à l'un ou l'autre de ces domaines. Toute sa vie, il s'éleva contre les définitions qui, restreintes à un cadre spécifique, accompagnent progressivement l'extension de ce cadre :

> Les définitions fragmentées, si populaires en mathématiques, ne sont pas acceptables. Elles consistent à proposer une définition pour un cas spécial – par exemple les nombres entiers positifs –, à la mettre en action puis, après divers théorèmes, à lui adjoindre une seconde explication pour différents cas – par exemple pour les nombres entiers négatifs et le zéro – auquel stade, bien souvent, l'erreur est commise de déterminer à nouveau les cas déjà traités. Bien qu'il soit en pratique possible d'éviter les contradictions, elles ne sont pas en principe évitées par cette méthode. (Frege 1903a, p. 70)

Bien sûr, il aurait été possible de choisir artificiellement un domaine, et d'étendre les définitions au fur et à mesure où ce domaine grandissait en prenant soin d'éviter toute collision. Mais cette solution semblait fatalement *ad hoc*. Dès 1879, il avait en tête un processus de *construction* des nombres cardinaux, puis des grandeurs, etc., et non un projet de circonscription à l'intérieur d'un domaine mathématique établi. Sa solution ne s'appuyait sur *aucun* autre concept mathématique que celui de *successeur*. Le problème était à la fois précis et complexe : il fallait trouver un cadre de développement pour ce concept.

D'un côté donc, Frege appliquait ses opérateurs à des contenus *indéterminés*, interdisant toute définition logique d'une quelconque relation déterminée, y compris celle de successeur. D'un autre côté, l'intégration des symboles 's' et '0', point de départ du processus de définition des nombres cardinaux, rationnels, réels, etc. n'induisait aucune limitation légitime du domaine. Frege ne pouvait proposer une définition mathématique des nombres cardinaux dans le cadre de la totalité des nombres – comme il comptait effectuer une définition géométrique du parallélisme

dans celui de la totalité des droites – car il ne savait *pas* à quoi cette totalité correspondait. Aucun des champs d'étude mathématiques actuels ne pouvait convenir, risquant à tout moment d'être étendus. C'est donc (très) probablement en cherchant *où* réaliser sa construction qu'il fut amené à enquêter pour la première fois sur les objets mathématiques. Ce faisant, il réalisa que, contrairement à sa notion d'indétermination, celle de généralité offrait un point d'ancrage non restreint, un socle illimité et, de surcroit, *logique* à tout son édifice.

En conséquence, il serait arbitraire d'affirmer que, dès le début, Frege espérait trouver les chaînons manquants à la réduction *logique* de l'arithmétique – la relation de *successeur* et le nombre 0 –, ou au contraire qu'il comptait les introduire de l'extérieur. Il nous paraît illégitime d'assurer qu'il était déjà logiciste, *i.e.* qu'il pensait atteindre le premier objectif. Mais nous nous opposons aussi à l'idée de Linnebo selon laquelle Frege n'avait d'autre ambition initiale que de mêler tels quels tous les symboles arithmétiques à son langage. Cette idée est suggérée par certains passages datant de 1881 :

> On peut maintenant illustrer sur quelques exemples comment la langue formulaire est, en vertu de sa disposition, apte à atteindre ses objectifs plus lointains, en se combinant avec les signes de l'arithmétique. (Frege 1881, p. 23 / 31)

Nous avons déjà expliqué [176] que le contexte de cet article ne se prêtait pas à la présentation d'un objectif plus ambitieux. Frege dissimula incontestablement (et volontairement) une partie de ce qu'il avait *déjà* entamé dans la *Begriffsschrift*. Jamais il n'aborda la question du lien entre la relation d'accessibilité et le concept de *nombre cardinal*, ni n'envisagea l'analyse de celui de *grandeur*. Finalement, il respecta la moitié de l'engagement sur lequel l'introduction de la *Begriffsschrift* s'achevait :

> L'éclaircissement des concepts de nombre, de grandeur, etc., constitueront l'objet de mes recherches ultérieures que j'avancerai immédiatement après cet écrit. (Frege 1879b, pVIII / 9)

C'est bien en enquêtant sur le cadre – logique ou mathématique – dans lequel cet éclaircissement amorcé (à travers la relation d'*accessibilité*) en 1879 pouvait être conduit que l'indétermination fut chassée de la logique. Il mena cette recherche dès la parution de l'ouvrage, ce qui explique ce revirement rapide. Quant à la publication des résultats annoncés, elle devrait attendre quelques années supplémentaires.

1.5.4.5 Synthèse

La lecture de Linnebo est incorrecte : Frege n'a pas renoncé à une vision formaliste de la logique entre 1879 et 1884. Il s'en tint à concevoir différemment son caractère substantiel. En 1879, il chargeait l'opérateur de quantification de transformer des contenus indéterminés en contenus (jugeables) déterminés. Mais cette conception le privait du cadre indispensable pour prolonger un travail *déjà amorcé et annoncé* dans la *Begriffsschrift* : l'édification du grand bâtiment mathématique. Voilà qui révéla les faiblesses de la notion d'indétermination et entraîna son rejet pur et simple, ainsi que celui des notions corrélatives de fonction et d'argument *telles qu'elles avaient été conçues en 1879*. Les opérateurs s'appliquant à des contenus *jugeables* furent maintenus dans leurs fonctions, mais la quantification – seule responsable de l'idée d'indétermination – fut présentée en termes de concepts généraux. Les énoncés logiques voyaient désormais leurs contenus composés à partir de ces derniers. C'est donc bel et bien la nature de leur substance qui changea, *i.e.* les éléments premiers sur lesquels les opérateurs agissent. La mutation n'est pas

176. en section 1.5.2.

celle que décrit Linnebo, et elle fut aussi plus *lente* qu'il ne l'affirme. Dans les *Grundlagen*, Frege offrit extrêmement peu d'explications concernant la *logicité* des concepts $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$ et $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$. Sur quoi repose-t-elle ? Comment faut-il entendre leur *généralité* ? Ces questions resteraient sans réponse jusqu'en 1891, Frege ne spécifia pas proprement la différence entre des concepts soumis à un champ scientifique particulier – comme celui de *parallélisme* – et ceux qui ne le sont pas – comme celui de *subsumer au moins un objet*[177]. Mais le premier pas était réalisé : il consistait à nettoyer la logicité de l'indétermination.

Sans surprise, ce geste n'avait pas réglé toutes les imperfections de la *Begriffsschrift*. Une difficulté persistait, attachée à la distinction fondamentale entre objets et contenus jugeables. Considérons l'énoncé[178] :

Si la lettre latine est conçue comme une abréviation d'une lettre gothique et du creux au début de l'énoncé, alors le contenu de cette expression est composé des concepts $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$ et :

Ce dernier ne peut malheureusement que subsumer des contenus *jugeables*, or Frege n'autorisait pas de tels arguments aux concepts. En réalité, la difficulté serait levée avant 1891, *i.e.* avant l'homogénéisation des expressions complètes par l'identification de l'implication et de la négation à des concepts. Elle ne fut donc pas responsable de ce geste. Durant le premier mouvement, c'est l'entreprise d'édification des mathématiques qui révéla à Frege la faiblesse de sa notion d'indétermination, et entraîna une révision de ses conceptions sémantiques. Nous verrons bientôt que c'est en restaurant dans ses droits la notion de fonction, pour répondre une fois encore à des enjeux *mathématiques*, que Frege prit conscience des problèmes qui provoquèrent le *second* mouvement de ses conceptions.

Notons qu'il est incontestable qu'il conçût d'abord les nombres comme des objets. La relation d'accessibilité fut façonnée à leur intention comme subsumant ces entités. Il est aussi indéniable qu'il aboutit à cette même conclusion dans les *Grundlagen*. Mais nous avons relevé des éléments[179] indiquant qu'il ait pu suivre quelque temps la piste des concepts. On peut désormais comprendre pourquoi. Lorsqu'il quitta l'indétermination au profit de la généralité, il intégra à la logique des *concepts* déterminés, en vertu de leur *généralité*. En revanche, il ne façonna aucune notion d'*objet* général. Sa nouvelle lecture des nombres, maintenue à un niveau conceptuel, aurait fait l'économie de toute définition contextuelle suspecte, ou de tout opérateur au caractère logique tout aussi douteux. Nous avons vu que Frege s'écarta finalement de ce sentier, présentant des arguments insatisfaisants, et peut-être, réalisant que la démonstration d'un théorème fondamental ne pouvait aboutir dans ce cadre. Nous ne serons pas plus précis, le peu d'éléments dont nous disposons nous en empêche. Nous voyons néanmoins, à travers la reconstruction historique

177. En réalité, la question ne trouverait pas non plus de réponse totalement satisfaisante en 1891. Nous décrivons ici le moment où Frege donna corps à sa célèbre idée selon laquelle la logique est la science la plus générale. On pourrait croire qu'il développa alors un critère de logicité selon lequel un contenu est logique s'il n'est composé que de concepts – puis de fonctions, après 1891 – généraux. Il est clair que Frege fit parfois droit à un tel critère, mais il s'en est au contraire éloigné à d'autres occasions. En fin de compte, il ne parvint jamais à traduire la notion de généralité en un critère spécifique, bien qu'il se soit plusieurs fois approché d'un tel résultat, notamment lors du mouvement dont nous traitons actuellement. Nous développerons cette question dans notre troisième chapitre.

178. où ‘a’ est, comme dans notre reconstruction de la section 1.4.13, une lettre pour un contenu jugeable.

179. en section 1.5.3.

des bouleversements de ses conceptions sémantiques, que toutes les traces sérieuses indiquent qu'il a examiné lui-même cette alternative.

Pour finir, tentons de dater plus précisément l'abandon de l'indétermination, en nous demandant si le cap était déjà franchi dans les textes de 1881. Nous avons longuement expliqué son silence volontaire sur son entreprise d'élaboration progressive des définitions fondamentales des nombres (cardinaux, relatifs, rationnels, réels). La métaphore des pierres de construction et du ciment ne permet pas de trancher, car à l'exception de la quantification [180], Frege concevait encore le contenu des caractères spéciaux comme des opérateurs en 1884. Il est vrai que l'émergence des concepts *généraux* pour la quantification avait, bien plus que l'idée d'indétermination, de bonnes raisons de lui indiquer que les "pierres de constructions" pouvaient être taillées directement dans la logique. Néanmoins, dans la perspective de démontrer que son langage était, mieux que celui de Boole, propre à servir *au moins* de ciment, Frege aurait pu passer ce point sous silence.

Un élément nous semble appuyer plus fort dans la direction d'une réponse négative : la présentation de la quantification, extrêmement brève, ne fait pas la moindre mention de *concepts*, et reste proche de la *Begriffsschrift*. C'est donc très probablement entre 1881 [181] et 1882 – date de l'annonce explicite du projet logiciste à Marty – que Frege découvrit la clef de la porte du logicisme.

Nous espérons avoir atteint notre objectif : donner un écho clair et distinct au grand chambardement survenu entre 1879 et 1884. Le repositionnement sémantique de Frege ne fut pas aussi soudain qu'on le pense généralement. En 1879, les contenus logiques se formaient à partir de contenus indéterminés et d'opérateurs. Cela posait le problème que nous avons longuement expliqué en section 1.4. Frege l'identifia alors qu'il cherchait un terrain d'ancrage à l'entreprise de réduction basée sur le concept d'*accessibilité*, *i.e.* à trouver le cadre adéquat à la relation de *succession*. Ce faisant, il passa du régime de l'indétermination à celui de la généralité, en ramenant le sens des signes pour la quantification à des concepts. Ce geste ne fut pas immédiatement reproduit pour les symboles que viennent compléter des *énoncés*, car Frege maintenait une distinction entre objets et contenus jugeables, limitant aux premiers la portée des concepts. Ainsi, en 1884, la négation et l'implication étaient encore conçus comme des opérateurs.

Bien sûr, Frege modifia ce point lors du second mouvement. Exploitant sa nouvelle distinction entre *Sinn* et *Bedeutung*, il identifia la *Bedeutung* de chaque signe logique à une fonction. Cette dernière notion fut donc à nouveau sollicitée, non plus comme relative à un contexte, mais comme l'extension naturelle de celle (absolue) de concept. Par ce geste, le travail réalisé pour la quantification se propagea dans la totalité du langage logique. Voilà l'histoire que nous allons désormais raconter en détail.

1.6 Expressions et contenus : un second mouvement en 1890

Entre les *Grundlagen* de 1884 et les trois textes [182] publiés en 1891-1892 qui révélèrent les changements révolutionnaires subis par ses conceptions, Frege laissa *extrêmement* peu d'écrits [183]. Par conséquent, les travaux de datation et de reconstitution s'avèrent plus difficiles à réaliser pour le second que pour le premier mouvement. Néanmoins, le silence qui le précéda, la manière

180. et de l'égalité, nous y viendrons.
181. ou au moins 1880, la rédaction de ce texte pourrait remonter jusqu'à cette année.
182. (Frege 1891), (Frege 1892b) et (Frege 1892a).
183. À notre connaissance, hormis quelques lettres, seuls quatre textes sont parvenus jusqu'à nous : trois critiques d'ouvrages – dont une inédite – et une discussion de la thèse formaliste.

spectaculaire dont Frege le révéla, ainsi que l'influence considérable qu'il exerça sur la philosophie du langage contemporaine lui ont conféré une visibilité beaucoup plus importante. Si le premier mouvement est purement et simplement ignoré par certains commentateurs, le second est l'objet d'innombrables recherches. Ainsi, nous nous trouvons, le concernant, sur un terrain à la fois moins praticable et plus balisé. Cette situation particulière exige quelques mots introductifs.

En premier lieu, le lecteur a pu constater combien nous avons pris soin de localiser précisément les divers revirements qui constituent le premier mouvement. Nous ne réitérerons pas cette entreprise concernant le second, car la tâche a déjà été accomplie. En effet, G. Sundholm (2001) est parvenu à dater l'émergence de la distinction entre *Sinn* et *Bedeutung* entre décembre 1889 et mai 1890. En s'appuyant sur les rares textes et lettres de cette époque (et alentours), il a accompli un véritable travail d'orfèvre auquel nous n'avons ni à redire ni à ajouter. Il ne serait donc d'aucun intérêt de répéter ici ce qui est formulé là-bas, car nul complément ou correction n'en résulterait. Par ailleurs, les conclusions de Sundholm nous exhortent à parler du mouvement de 1890, comme dans le titre de cette section, plutôt que de 1891, comme nous l'avons fait en attendant d'aborder la question, respectant ainsi l'année de parution du premier des trois articles révolutionnaires. C'est donc ce à quoi nous nous appliquerons désormais.

En deuxième lieu, à cause du peu d'indices dont nous disposons, toute recherche des causes du second mouvement s'avère inéluctablement spéculative. Notre objectif se limite à proposer un sentier que, sur la base des écrits en notre possession, nous avons de bonnes raisons de croire proche de celui que Frege parcourut effectivement pour aboutir aux positions des *Grundgesetze*. Mais nous savons ces écrits trop réduits pour qu'il soit raisonnable d'espérer reconstituer exactement cette trajectoire. Des hypothèses concurrentes pourraient être présentées qui tiendraient un compte aussi rigoureux des rares traces que Frege laissa derrière lui. Nous visons seulement à proposer une lecture qui soit à la fois cohérente et convaincante, sans prétendre qu'aucune autre – même opposée à la nôtre – ne fasse aussi bien à cet égard.

Enfin, il existe une conclusion transversale à toutes les recherches traitant de ce second mouvement, selon laquelle celui-ci, qui signa l'avènement de la distinction entre *Sinn* et *Bedeutung*, fut induit par une réflexion sur la relation d'identité. Nous contestons ce point. Une autre transformation des vues de Frege – disons-le doublement – accompagna *et* engendra l'émergence du couple *Sinn-Bedeutung*. Non seulement elle constitue la cause principale de cet évènement, étant antérieure aux considérations sur l'identité, mais de plus elle possède son importance propre au regard des objectifs que Frege poursuivait. Cette transformation concerne la notion de fonction qui, laissée de côté depuis 1881, fut réintroduite dix ans plus tard comme un indispensable prolongement de celle de *concept*, *i.e.* sous des traits *totalement différents* de ceux qu'elle épousait dans la *Begriffsschrift*. Pour expliquer ceci, il convient donc d'aborder les deux sujets en cause : la relation d'identité et les notions de concept et de fonction. Nous allons les traiter tour à tour et dans cet ordre, qui s'avèrera le plus adapté.

1.6.1 Identité de contenu conceptuel, identité d'objet et égalité arithmétique

Nous savons [184] que la langue formulaire n'intégrait aucun symbole pour la relation d'identité entre objets, se limitant au signe '≡' d'identité de contenu conceptuel, auquel fut reproché son statut hybride, parce qu'il se voyait compléter aussi bien par des noms d'objets que par des énoncés (non assertifs). Il convient néanmoins de préciser légèrement cette critique. En effet, à l'exception des lettres latines et gothiques, '≡' était le seul signe de la langue formulaire que Frege ne conçût pas comme un opérateur en 1879. Il fut introduit pour exprimer une relation métalinguistique, et devait donc être systématiquement entouré de noms d'expressions, que ces

184. depuis la section 1.4.13.

dernières désignent des contenus jugeables ou des objets. À proprement parler, il ne présente donc aucun caractère hybride. Néanmoins, Frege avait besoin que ces mêmes noms puissent aussi désigner ces contenus jugeables et ces objets au sein des mêmes énoncés [185]. L'ambiguïté a donc moins trait au symbole '≡' lui-même qu'au dédoublement de signification qu'il impose à un même signe : un nom qui désigne un nom d'objet – lorsqu'il vient compléter '≡' – doit par ailleurs signifier cet objet au sein du même énoncé – dans n'importe quel autre contexte.

Frege s'amenda partiellement dès les *Grundlagen*, en adoptant un signe pour l'identité objectuelle qu'il n'abandonnerait jamais. Nous intégrons néanmoins ces considérations au sein de la partie traitant du second mouvement, parce que de nombreux commentateurs estiment au contraire que l'identité entre contenus conceptuels fut conservée jusqu'en 1890 dans le rôle général qu'elle tenait au sein de la langue formulaire, concluant que ce changement joua un rôle moteur lors de ce mouvement. Pour leur répondre, il nous appartient donc d'expliquer la manière dont les thèses de Frege évoluèrent au sujet de l'identité. Nous devons résister aux raccourcis qui conduisent (élégamment) à l'interprétation orthodoxe, en récoltant les divers indices des rallongements que Frege emprunta *effectivement*, avant d'expliquer ce qui les provoqua.

1.6.1.1 La lecture orthodoxe

L'article "Sens et référence" s'ouvre sur la problématique suivante :

> $a = a$ et $a = b$ sont des énoncés qui n'ont pas, la chose est évidente, même valeur de connaissance : $a = a$ est *a priori* et, selon Kant, analytique, tandis que les énoncés de la forme $a = b$ ont bien souvent un contenu fort précieux pour le progrès de la connaissance, et ils n'ont pas toujours un fondement *a priori*. (Frege 1892b, p. 143 / 102)

Si '=' exprime la relation d'identité entre objets, tandis que 'a' et 'b' signifient le même objet a, alors (par composition) les contenus de '$a = a$' et '$a = b$' sont identiques. Pourtant, ces contenus ne présentent pas la même valeur cognitive. Le premier est trivial, et sa vérité peut être reconnue immédiatement par quiconque comprend le sens du signe '='. Au contraire, aboutir à la seconde assertion peut nécessiter de longues recherches basées sur des données empiriques. Cette difficulté est connue sous le nom de 'problème de Frege', non que celui-ci fût le premier à la soulever, mais parce que la manière dont il y répondit marqua pour longtemps la philosophie du langage.

Retournons brièvement en 1879. Aucun signe pour l'identité d'objet n'était intégré à la langue formulaire. À la place, celle-ci incorporait le symbole '≡' d'identité de *contenu*. Ce choix semblait déjà répondre au problème de la valeur cognitive, car le contenu de '$a \equiv b$' se démarquait de celui de '$a \equiv a$'. Le premier énoncé exprimait que le signe 'a' avait un contenu identique à celui du signe 'b', tandis que le second signifiait que le signe 'a' avait le même contenu que lui-même. Aux yeux de la connaissance, la valeur du premier contenu apparaît comme plus importante que celle du second. Par ailleurs, Frege en appelait au *mode de détermination* : c'était parce que deux noms propres pouvaient signifier le même objet – partager le même contenu conceptuel – selon différents modes de détermination qu'établir l'identité de contenu entre deux noms ne relevait pas "d'une question indifférente de forme, mais concern[ait] la nature de la chose même" (1879b, p. 15 / 29). En 1892, Frege présenta à nouveau cette solution mais, cette fois, pour la rejeter :

185. Par exemple :

$$\begin{array}{l} \vdash f(\mathtt{d}) \\ \quad f(\mathtt{c}) \\ \quad \mathtt{c} \equiv \mathtt{d} \end{array}$$

> Il semble que par $a = b$, on veuille dire que les signes, ou les noms, 'a' et 'b' dénotent la même chose et, dans ce cas, l'énoncé porterait sur les signes ; on affirmerait l'existence d'une relation entre ces signes. Toutefois, cette relation existerait entre les noms ou signes dans la seule mesure où ils expriment quelque chose. Elle naîtrait de la liaison de chacun de ces deux signes avec la chose désignée. Or, une telle liaison est arbitraire ; on ne peut interdire à personne de prendre n'importe quel évènement ou objet arbitrairement choisi pour désigner n'importe quoi. En conséquence, l'énoncé $a = b$ ne concernerait plus la chose même, mais la manière dont nous la désignons ; nous n'y exprimerions aucune connaissance proprement dite. (Frege 1892b, p. 143 / pp. 102-103)

Considérons un énoncé d'identité de physique. Si aucun constituant de cet énoncé ne désigne un quelconque objet physique – mais seulement des noms de tels objets –, alors l'énoncé lui-même n'exprime rien concernant les objets de la physique – il livre une information concernant le langage de cette science. La vision métalinguistique de l'identité ne permet pas d'expliquer en quoi les énoncés en question nous renseignent quant aux *objets* de la science visée – et portent ainsi sur elle – , et non pas quant à leurs noms – ayant alors trait à l'histoire de la langue.

Frege fut donc tenu d'apporter une solution au problème de la valeur cognitive pour la relation d'identité entre *objets*. Il proposa de scinder le contenu des expressions linguistiques entre ce qu'il nomma le *Sinn* – le sens – et la *Bedeutung* – la référence [186]. De cette manière, le problème put être isolé au seul niveau de la référence : le terme '=' référait à la relation d'identité, tandis que les noms 'a' et 'b' référaient tous deux à l'objet a. Par composition, les deux énoncés admettaient ainsi la même référence. Néanmoins, la différence de valeur cognitive put alors être assumée au niveau du sens : le mode de donation [187] de la référence [188]. 'a' et 'b' ne désignent pas a – ne conduisent pas à a – de la même manière. Leurs sens sont distincts et, ainsi, aucune composition n'exige plus d'identifier ceux de '$a = a$' et '$a = b$'. Cette différence de sens, malgré une identité de référence, justifie l'écart entre les informations qu'ils délivrent, entre leurs valeurs cognitives.

À partir de ce (trop) bref exposé, il semble qu'une interprétation s'impose d'elle-même. En 1879, Frege tentait déjà de résoudre le problème de la valeur cognitive. Il avait remarqué que la démonstration du fait que $a = b$ exigeait souvent des prémisses bien plus conséquentes que

186. Trois noms se font concurrence pour la traduction de ce terme allemand : 'référence', 'dénotation' et 'signification'. Pour les textes pré-1880, nous avons choisi la dernière alternative, adaptée à l'usage informel que Frege en faisait à cette époque. Comme nous l'avons vu (section 1.2.1), celui-ci employait 'ausdrucken' et 'beteuten' de manières quasi-interchangeables. Notre choix nous évita ainsi de regrettables formulations telles que 'cet énoncé réfère à (ou dénote) ce contenu jugeable'.

Certaines raisons pourraient motiver sa conservation dans les écrits post-1880. Elles ne nous suffisent pas, car notre tâche la plus complexe – et peut-être la plus importante – sera d'expliquer les §§29-31 des *Grundgesetze*, pour lesquels l'idée d'un rapport entre une expression et une entité, véhiculée par 'référer' et 'dénoter' – et absente de 'signifier' – s'avèrera totalement appropriée. En revanche, il nous était indifférent d'utiliser l'un ou l'autre de ces termes, mais il fallait décider. Nous avons donc sélectionné le plus présent dans les textes contemporains – y compris anglais, car cette langue incorpore le couple analogue : 'to refer'-'to denote'.

187. Le glissement terminologique de Frege n'est justifié par aucune modification de contenu. Il n'existe aucune distinction entre le mode de détermination [*Bestimmungsweisen*] et le mode de donation [*Gegebenseins*]. Nous emploierons donc indifféremment les deux expressions. Par ailleurs, suivant l'anglais, nous ferons parfois usage des formules 'mode de désignation' et 'mode de présentation', qui nous semblent aussi convenables en français.

188. Au moment d'introduire la notion de sens, Frege précisa que celui-ci *contenait* le mode de donation (p. 143 / 103). Disons-le une fois pour toutes : jamais il n'a donné le moindre gage d'un quelconque écart entre le sens et le mode de donation. Au contraire, c'est en identifiant les deux notions que nous pouvons comprendre doublement la genèse historique et la portée de la première. L'élan de prudence par lequel il se retint de limiter le sens au mode de donation n'est justifié par aucune de ses thèses. Puisque nous nous intéressons à ces dernières, nous n'aurons pas les mêmes scrupules. Nous ne sommes d'ailleurs pas les seuls dans ce cas. Heck et May (2010) avancent une interprétation profonde de la manière dont les sens se composent en procédant à la même identification.

la preuve que $a = a$. Il était parvenu à identifier la cause de ce décalage : 'a' et 'b' étaient parfois associés à différents modes de détermination – ou de donation – d'un même objet. Établir que $a = b$ consistait à montrer que les deux modes de détermination associés aux deux noms conduisaient au même objet, autrement dit que les noms désignaient le même objet. En soulignant la distinction entre les questions ayant trait à la forme et celles ayant trait à la chose elle-même, Frege était passé près de l'objection qu'il s'adresserait à lui-même en 1892. Mais il l'avait manqué. Il avait conclu que certaines questions de forme – celles qui ont trait aux noms d'un langage – n'étaient pas indifférentes, et concernaient finalement la science en question. Il avait vu dans le mode de détermination une intersection entre les problèmes de forme et de contenu.

Une décennie plus tard, il renonça à cette idée. Il constata que les objets a et b étaient totalement absents du contenu de l'énoncé métalinguistique '$a \equiv b$'. Il en conclut que celui-ci appartenait à l'histoire de la langue, et non à la science traitant de a et b. Il ne priva pas pour autant les modes de détermination de leur rôle. Certes, prouver la vérité d'un énoncé d'identité ne revenait plus à démontrer que les *noms* impliqués dans cet énoncé étaient associés à des modes de détermination du même objet. Il s'agissait bien de prouver que *l'objet a était identique à l'objet b*. Mais ce dernier contenu – celui de 'l'objet a est identique à l'objet b' – intégrait *directement* les modes de donation en question, lesquels constituaient les sens de 'a' et 'b'. Finalement, Frege transféra dans les contenus de ces termes la charge de la valeur cognitive qu'il avait autrefois fait peser sur celui du signe d'identité. L'existence des modes de donation n'imposait plus une lecture métalinguistique des énoncés d'identité. Ces derniers en tenaient directement compte en *exprimant* que l'objet a était identique à l'objet b. En somme, l'objection de 1892 avait conduit à une restructuration du contenu afin d'y incorporer le mode de donation qui, à tort, en était resté extérieur jusque-là [189].

La confrontation du §8 de la *Begriffsschrift* et de l'ouverture de "Sens et référence" conduit indéniablement à cette interprétation qui, nous croyons, demeure la plus répandue dans la littérature [190]. Nous allons pourtant y apporter certaines corrections. Soyons clairs : nous ne contestons pas la manière dont la discussion du début de l'article de 1892 est analysée [191]. Frege a en effet procédé à une importante restructuration de la notion de contenu en constatant (notamment) que le choix de 1879 quant à la relation d'identité échouait à répondre au problème de la valeur cognitive. Cependant, nous soutenons que ce constat fut *rétrospectif* car, quelque part entre 1881 et 1884, il adopta un signe pour l'identité d'objet *sans que la distinction sens-référence ne permette encore de répondre au problème de la valeur cognitive*. En réalité, Frege se persuada rapidement que ses considérations concernant les modes de détermination n'exigeaient pas d'adopter une identité métalinguistique pour résoudre ce problème. L'affaire fut ainsi classée jusqu'en 1890, lorsqu'il décida – pour certaines raisons liées au retour des fonctions – de rouvrir le dossier. Il remarqua d'une part que, contrairement à ce qu'il avait cru, ses thèses ne permettaient pas de régler la difficulté ; d'autre part que son ancien choix de la *Begriffsschrift* offrait certaines promesses pour la résoudre ; et enfin que ces promesses étaient finalement mensongères. L'objection formulée dans "Sens et référence" ne visait donc pas les conceptions qui avaient motivé l'adoption

189. Plus précisément, la restructuration eut deux versants. D'une part, le mode de détermination s'agrégea au contenu des *noms propres*, il en devint le sens ; tandis que l'objet s'y maintint comme référence. D'autre part, le concept conçu comme extensionnel s'associa au contenu des *noms insaturés*, il en devint la référence. Cette restructuration permit donc une *homogénéisation*. Frege identifia l'ancien contenu des noms propres à leur référence, enrichi du sens ; et il identifia l'ancien contenu des noms incomplets à leur sens, étoffé de la référence. Nous développerons ce point lorsque nous aborderons la question des concepts.

190. Le lecteur en trouvera un exposé plus complet, mais néanmoins sobre et efficace, dans (Hugly et Saywar 2000, Sections 1-3.2).

191. au contraire de Thau et Caplan (2001), qui affirment que Frege n'a jamais renoncé à sa vision métalinguistique des énoncés. Heck (2003) leur a répondu.

de l'identité métalinguistique en 1879, mais celles qui auraient pu inciter à y revenir des années plus tard.

Bien que Frege n'ait fait aucune allusion directe à la *Begriffsschrift*, nous convenons que cette objection *semble* adressée à ses positions d'alors, suggérant qu'elles furent maintenues jusqu'au basculement dont témoigne l'article. Ceci explique la popularité de cette conclusion, toute erronée soit-elle. L'examen du rapport entretenu avec les relations d'identité entre 1879 et 1890 – que nous nous apprêtons à mener – montrera qu'il s'agit d'un faux-semblant, *i.e.* que Frege a encore dissimulé certains mouvements internes à la première période de sa vie scientifique qui, cette fois, sont essentiels pour comprendre le passage à la seconde.

1.6.1.2 L'égalité arithmétique

Frege introduisit ainsi le symbole d'identité de la langue formulaire :

> La nécessité d'un signe d'identité de contenu repose donc sur ceci : le même contenu peut être complètement déterminé de manières différentes ; mais le fait que, dans un cas particulier, *la même chose* soit effectivement donnée par *deux modes de détermination* est le contenu d'un *jugement*. Avant que cela ne se produise, deux noms différents, correspondant aux deux modes de détermination, doivent être attribués à ce qui est déterminé par ce moyen. Mais le jugement a besoin, pour son expression, d'un signe d'identité de contenu qui relie les deux noms. Il en résulte que les différents noms pour le même contenu ne sont pas toujours qu'une question indifférente de forme, mais qu'ils concernent la nature de la chose même lorsqu'ils sont liés à différents modes de détermination. Dans ce cas, le jugement qui a l'identité de contenu comme objet est, dans le sens kantien, un jugement synthétique. (Frege 1879b, pp. 14-15 / p. 29)

Le contenu du signe '≡' relie deux *noms*, autorisant à exprimer qu'ils possèdent le même contenu. Cette présentation ne laisse aucun doute : l'identité en question est métalinguistique. À notre connaissance, personne n'a jamais contesté ce point, et nous ne faisons pas exception. En revanche, contrairement à beaucoup, nous estimons que cette position fut abandonnée longtemps avant 1890. Pour le comprendre, il convient de mettre de l'ordre parmi les différentes relations auxquelles nous avons affaire. Deux rapports d'identité [*Identität*] ont déjà été distingués : entre objets et entre contenus. Mais une troisième relation est ici en cause : l'égalité [*Gleichheit*] arithmétique. Au moment du bilan des différences entre la langue formulaire et l'idéographie, Frege expliqua :

> À la place des trois lignes parallèles, j'ai choisi le signe d'égalité habituel ['='], car je suis désormais convaincu qu'il possède en arithmétique exactement la référence que je veux désigner. Par conséquent, j'utilise le mot 'égal' avec la même référence que 'coïncidant avec' ou 'identique à', et c'est ainsi que le signe d'égalité est effectivement utilisé en arithmétique. (Frege 1893, p. IX)

"La référence que [Frege] veut désigner" n'est autre que l'identité d'objet. Dans les *Grundgesetze*, il utilisait le symbole contenant cette relation pour exprimer des égalités entre nombres. Ainsi, en 1893, l'égalité arithmétique *était* l'identité objectuelle. Mais Frege fait ici état d'une modification à laquelle il a opéré et, par conséquent, fournit deux renseignements importants. D'une part, il suggère que la coïncidence entre les deux relations n'était pas encore établie dans son esprit en 1879, qu'il n'en fut convaincu que postérieurement à cette date. D'autre part, il laisse entendre qu'il ne considérait pas non plus que l'égalité arithmétique était l'identité métalinguistique au moment de la *Begriffsschrift*. Sinon, plutôt que le signe '≡', il aurait consacré

à cette dernière le symbole habituel '='. Nous avons d'ailleurs relevé un autre indice pointant dans la même direction [192] : à l'occasion d'un exposé sur les applications possibles de sa langue formulaire (1879a), Frege employa le symbole '≡' dans les exemples géométriques, et le signe '=' dans les illustrations arithmétiques. Il prit ainsi la peine de distinguer les deux relations, et notre première tâche consiste à reconstituer le chemin emprunté par la seconde – l'égalité arithmétique – entre 1879 et 1893, en commençant par questionner son point de départ.

Bien que nous ne soyons pas en majorité, d'autres auteurs croient aussi que l'analyse métalinguistique de l'identité fut abandonnée avant 1890. Heck (2017), Landini (2012) et May (2001) se tiennent à nos côtés. May propose une explication de la distance qui séparait l'égalité arithmétique des relations d'identité en 1879. Il développe son hypothèse à partir des deux constats suivants : (1) dans la *Begriffsschrift*, Frege introduisit le signe '≡' à travers un exemple de *géométrie* – tandis que tout son travail était orienté vers l'arithmétique –; (2) dans cet exemple, ce signe se voyait complété par des noms propres *atomiques*. À partir de (2), il développe l'idée que les jugements d'identité de contenu entre deux noms propres ne sont requis que si ces noms propres n'exhibent pas "les informations pertinentes quant à ce qu'ils expriment" (p. 29). Dans le cas des énoncés d'égalité arithmétique – par exemple '$2 + 4 = 6$' –, "l'information mathématique pertinente est exposée bien en vue, l'information mathématique pertinente exprimée par '$2+4 = 6$' est précisément *que* la somme de 2 et 4 est 6" (p. 29). Les jugements d'identité ne sont donc intéressants que si cette information est "dissimulée" (p. 21) dans le caractère atomique du nom propre. Autrement dit, le signe '≡' n'a d'utilité que lorsqu'il figure entre deux noms propres *atomiques* [193], (sauf bien sûr s'il sert à *stipuler* une identité de contenu, *i.e.* s'il est impliqué dans une définition). Les informations relatives aux contenus de ces termes, invisibles à travers leur expression, se voient alors déplacées dans leur *mode de détermination*. C'est pourquoi ces derniers doivent "figurer comme prémisses [d'une] preuve d'identité". (p. 17).

May y voit une explication du point (1). Selon lui, "une science se constitue fréquemment en dédiant plus d'un terme simple à une même chose". Par conséquent, "montrer par une preuve empirique que des termes atomiques déterminent la même chose peut être l'essence d'une découverte scientifique" (p. 18). En revanche, ceci ne survient jamais en arithmétique, car il y a un et un seul symbole atomique pour chaque nombre, son chiffre, et ainsi il n'y a pas d'expressions simples desquelles il serait nécessaire de dire qu'elles possèdent le même contenu" (p. 19). Le signe '≡' est donc absolument inutile dans le cadre de cette science, hormis pour procéder à des définitions. Plus encore, il lui est inadapté, car Frege estimait que les expressions du type '$2 + 4$' et '6' exposaient bien en vue des contenus *différents*, ce qui implique que '$2 + 4 \equiv 6$' est faux, au contraire de '$2 + 4 = 6$'. D'une part, ceci le contraignit à tirer son exemple d'un autre domaine : celui de la géométrie ; et d'autre part ceci explique l'écart entre les contenus des symboles '≡' et '=.

Disons-le d'emblée : nous ne croyons pas à cette interprétation, ni à la manière dont elle rend compte de la distinction entre égalité arithmétique et identité de contenu. Nous allons lui opposer trois contre-arguments. Deux d'entre eux – le premier et le troisième – sont généraux, et se passent tout à fait des détails de l'exposé ci-dessus. Si nous les avons fournis, c'est parce que notre deuxième argument, plus spécifique, en exige l'examen. Or il nous permettra d'expliquer ce que, malgré notre désaccord, nous retenons de l'analyse de May.

En premier lieu, notons que cette thèse suppose un écart entre le contenu conceptuel d'un nom propre et l'objet qu'il désigne. May explique :

192. en section 1.5.2.

193. Nous nous en tenons ici aux noms propres, et laissons de côté le cas des expressions pour des contenus jugeables.

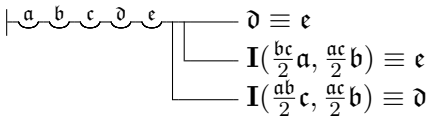
> Contrairement à l'identité de contenu, l'égalité n'est pas une relation métalinguistique ; les symboles qui interviennent dans un jugement d'égalité représentent leurs contenus. Ainsi, en liant l'opération de somme appliquée aux nombres 2 et 4 au nombre 6, l'égalité attache deux contenus conceptuels *distincts*. (May 2001, p. 20)

En note de bas de page, il ajoute qu'en 1879, "Frege n'avait pas de notion générale de dénotation, selon laquelle '$2 + 4$' dénoterait son contenu, *i.e.* le nombre 6" (p. 20). Ce constat s'appuie sur l'idée – développée avec Heck – selon laquelle la distinction entre objet et concept, et la sémantique compositionnelle que celle-ci permet, étaient absentes de la *Begriffsschrift*. En section 1.4.9, nous avons longuement contredit cette idée. Si la distinction en question n'était pas correctement posée, s'appuyant inutilement sur le couple fonction-argument, elle était bel et bien au cœur de l'ouvrage. Incontestablement, Frege identifiait le contenu conceptuel d'un nom propre à l'objet qu'il signifie. Si ce que nous avons dit alors est correct, il n'avait aucune raison, conjointement, d'identifier l'objet $4 + 2$ et l'objet 6, et de nier que $2 + 4 \equiv 6$.

Venons-en au deuxième argument. Selon May, Frege aurait constaté que certaines expressions exposent leur contenu tandis que d'autres le dissimulent. Il aurait alors intégré son symbole '$\equiv$' pour rendre compte de l'identité entre des contenus du second type, *i.e.* entre ceux qui ne sont pas révélés par une expression complexe, mais cachés derrière un nom atomique. Par ailleurs, May considère que le mode de détermination joue dans ce cas le rôle qui n'est pas tenu par l'expression : il nous donne accès au contenu. Voilà pourquoi les modes de détermination doivent figurer en prémisses d'une preuve d'identité de contenu.

Cette interprétation présente un problème majeur. Les remarques de May concernant les énoncés d'arithmétique suggèrent que deux expressions différentes qui exhibent leurs contenus – '$3 + 3$' et '$2 + 4$' – possèdent des contenus différents – $3 + 3 \not\equiv 2 + 6$. Or, si les modes de détermination dévoilent ce que l'expression laisse parfois invisible, alors ce dernier point doit être répercuté à leur niveau. Deux modes de détermination différents doivent révéler ce que des expressions adaptées pourraient aussi exhiber : une différence de contenu. Cette conclusion rentre en contradiction avec les intentions de Frege, qui utilisait les modes de détermination pour rendre compte du fait que deux noms différents possèdent un *même* contenu. En définitive, la thèse de May est écartelée : objet et contenu sont censés être distincts dans les cas où l'expression dévoile ce dernier, et identiques dans le cas où le mode de détermination s'en charge.

Observons le problème à travers un exemple. Appelons 'AB' la droite qui passe par deux points distincts A et B, '$\frac{AB}{2}$' le milieu du segment qui les joint, et '$\mathbf{I}(d, d')$' le point d'intersection de deux droites d et d'. Ainsi que Frege s'y employait en 1879, quantifions sur le domaine restreint des points d'un plan. Nous pouvons affirmer que le point d'intersection de la première et seconde médianes d'un triangle est identique à celui de la seconde et troisième médianes du même triangle :



Reprenons l'idée de May : les sous-constituants de l'implication fixent le mode de détermination des termes simples $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$. Nous constatons que cette tâche exige de faire figurer le signe '$\equiv$' entre des noms simples et des noms *complexes*. En soi, ceci ne s'oppose pas à son propos. Il suffit de regarder ces sous-constituants comme des définitions des lettres gothiques $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ dans la portée de leurs quantificateurs. Ainsi, la donnée des modes de détermination de ces lettres livre les informations que leur caractère atomique dissimule. L'objectif est atteint à travers l'identification de leur contenu à celui d'expressions complexes qui exhibent le leur.

À présent, modifions légèrement la formule ci-dessus :

$$\vdash_{\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}} \mathbf{I}(\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{2}\mathfrak{c}, \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{b}) \equiv \mathbf{I}(\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{a}, \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{b})$$

Le problème est manifeste. Si les modes de détermination nous donnent accès aux contenus de termes simples à travers l'attribution à ces derniers de contenus de termes complexes, alors les contenus en question ne sont identiques que si ceux des termes complexes le sont aussi. Il est incohérent de soutenir que les modes de détermination sont liés à un même contenu – celui de '$\mathfrak{d}$' et '$\mathfrak{e}$' –, tandis que les expressions complexes en exhibent deux différents – ceux de '$\mathbf{I}(\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{2}\mathfrak{c}, \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{b})$' et '$\mathbf{I}(\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{a}, \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{b})$'.

À proprement parler, ce n'est pas exactement ce qu'affirme May. Il se contente d'observer que, selon Frege, deux expressions différentes d'*arithmétique* qui exhibent leurs contenus possèdent des contenus différents. Mais peut-être n'étend-il pas ce constat jusqu'à la géométrie. Peut-être croit-il que, si le contenu de '$2+4$' est distinct de celui de '6', '$\mathbf{I}(\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{2}\mathfrak{c}, \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{b})$' et '$\mathbf{I}(\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{a}, \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{b})$' exhibent au contraire des contenus identiques, ce qui s'accorde avec notre conclusion. Néanmoins, qu'est-ce qui justifierait d'abandonner dans le cas de la géométrie la conclusion tirée pour l'arithmétique ? May ne pose pas le problème sous cette forme, mais il propose une tentative de démarcation de ces deux sciences qui pourrait répondre à notre question.

Il s'appuie sur l'illustration du §8 de la *Begriffsschrift*, qui consiste à établir que deux noms atomiques 'A' et 'B' déterminent le même point "de deux manières : 1/ immédiatement par intuitionn 2/ comme point B appartenant à la ligne droite perpendiculaire au diamètre." (p. 14 / 8). Il explique :

> Ce que Frege a ici illustré est une "preuve" du jugement que 'A' et 'B' ont le même contenu ; le rôle des modes de détermination consiste à figurer en prémisses de cette preuve. Néanmoins, ces modes de détermination sont synthétiques, l'un étant géométrique, l'autre intuitif. Ainsi, en raison de la manière dont cette conclusion est atteinte, "le jugement qui a l'identité de contenu pour objet est, dans le sens kantien, un jugement synthétique". (p. 15 / 29) (May 2001, p. 17)

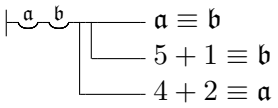
Avant toute chose, précisons que, dans ce cas, la distinction entre 'mode intuitif' et 'mode géométrique' n'a pas lieu d'être. Pour Frege, les concepts géométriques – notamment ceux de *point* et de *rayon* – nous sont livrés par une intuition synthétique. Le contenu de 'B' est donc aussi déterminé *via* l'intuition. Ce qu'il signale à travers (1) et (2), c'est que la détermination du contenu de 'A' est plus immédiate que celle du contenu de 'B' car, dans son exemple, le premier est seulement caractérisé comme étant un point sur un cercle, tandis que le second emprunte un sentier moins direct.

May estime que cet exemple illustre les situations dans lesquelles "montrer par une preuve empirique que des termes atomiques déterminent la même chose [est] l'essence d'une découverte scientifique". À travers sa dimension synthétique, il rapproche donc le jugement en question de ceux du type :

$$\vdash \text{Frege} \equiv \text{l'auteur des } \textit{Grundgesetze der Arithmetik}$$

Il explique qu'en arithmétique, un seul nom atomique est conféré à chaque nombre. Par conséquent, de tels jugements d'identité sont totalement absents de cette science. Ce point est correct, mais son erreur tient dans la place qu'il leur attribue en géométrie. L'exemple de Frege est similaire à celui des médianes. Nous pourrions lui donner la même forme, impliquant des

sous-constituants qui fixent le contenu des noms 'A' et 'B' *dans la portée des quantificateurs*[194]. Ces symboles correspondent aux lettres *gothiques* de la langue formulaire, et non pas, comme 'Frege' et 'l'auteur des *Grundgesetze der Arithmetik*', à des noms spécifiques à une discipline. Eu égard à notre problème, la différence entre les jugements en cause n'a pas trait à leur caractère synthétique ou analytique, mais au fait qu'ils emploient des noms dont le contenu est déterminé ou indéterminé. À l'instar de l'arithmétique, la géométrie n'a pas besoin de deux nom propres spécifiques différents pour un même objet car, contrairement à l'arithmétique, elle ne nécessite *aucun* nom propre spécifique. Vis-à-vis des objets, tout passe par la quantification. Ainsi, nous n'y trouvons rien qui s'apparente au jugement ci-dessus. Jamais l'identité de contenu entre deux noms propres, simples, différents et spécifiques à cette science n'est établie, car le langage de la géométrie n'intègre aucun nom propre pour un contenu déterminé. En revanche, dans les deux sciences, il est possible de fixer les contenus de lettres gothiques *dans la portée d'un quantificateur*, puis d'établir que ces contenus sont identiques. Voilà ce qui se produit dans l'exemple de Frege, celui des médianes, ou encore dans :



L'utilisation de lettres qui épousent le contenu de termes complexes ne sert qu'à éclaircir un raisonnement exprimé dans la langue naturelle. L'objectif véritable consiste à établir que les contenus des noms *complexes* sont identiques (dans la portée des quantificateurs liés aux lettres qu'ils intègrent, s'ils en intègrent). Dans le cas des médianes, il s'agit de ceux de '$\mathbf{I}(\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{2}\mathfrak{c}, \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{b})$' et de '$\mathbf{I}(\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{a}, \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{b})$' ; concernant notre présent exemple, il s'agit de montrer :

$$\vdash 4 + 2 \equiv 5 + 1$$

Les situations relatives à ces deux sciences sont *absolument* identiques. Aucune d'entre elles ne s'est "constitu[ée] [...] en dédiant plus d'un terme simple à une même chose", et aucun de nos exemples ne vise à "montrer par une preuve empirique [ou non] que [c]es termes atomiques détermin[aient] la même chose". Ainsi, tout ce qui fut dit dans le contexte de la géométrie peut être répété dans celui de l'arithmétique : si le contenu des noms atomiques '$\mathfrak{a}$' et '$\mathfrak{b}$' est déterminé dans la portée des quantificateurs à travers une identification à ceux de noms complexes qui exhibent le leur, alors ces contenus ne sont identiques que si ceux des noms complexes le sont à leur tour. En définitive, May ne présente aucun argument convaincant dans le sens de sa conclusion, selon laquelle les contenus de '$4 + 2$' et de '$5 + 1$' seraient distincts[195]

194. Pour reprendre une formulation qui convient aux idées de 1879, mais à laquelle Frege renoncerait aux alentours de 1882, comme nous l'avons vu en section 1.4.

195. À nos yeux, son erreur consista à croire que, durant la première période, Frege tenait déjà compte d'une intuition à laquelle il ne rendrait justice qu'en 1890. May le cite lorsqu'il affirma, en 1881, que le langage de l'arithmétique "peut exprimer seulement la sorte de jugements qui ont trait à l'égalité des nombres qui ont été formés [*entstandenen*] de telle ou telle manière" (Frege 1881, p. 14 / 22). Cette phrase se tient au milieu d'un passage qui suggère une certaine symétrie entre ce que Frege appelait alors 'les concepts' et ce qu'il appellerait bientôt 'les fonctions'. Or un contenu jugeable qui a été formé de telle ou telle manière, c'est-à-dire à travers l'action de tel ou tel concept, tient compte d'un élément intensionnel : le concept en question. C'est parce que les concepts étaient intensionnels qu'en 1879, les contenus de '$P(a)$' et '$Q(a)$' pouvaient différer même lorsqu'ils avaient même valeur de vérité. Par symétrie, un nombre qui a été formé de telle ou telle manière, c'est-à-dire à travers l'action de telle ou telle fonction, devrait aussi intégrer un élément intensionnel. Autrement dit, les contenus de '$1 + 3$' et de '2×2' devraient différer même s'ils désignent le même objet. Voilà précisément ce que Frege remarquerait *plus tard*, et qui le conduirait à restructurer sa notion de contenu.

Deux noms complexes distincts peuvent déterminer le même contenu. Ces noms n'exhibent donc pas une différence de contenus, mais de modes de détermination. Par conséquent, si un nom simple défini par le biais d'un nom complexe dissimule des informations que ce dernier exhibe – et nous convenons de ce point avec May –, alors ces informations n'ont trait qu'au mode de détermination de son contenu – en aucune manière au contenu lui-même, comme le prétend May. Ceci étant dit, il nous reste à rendre compte des deux éléments sur lesquels celui-ci base son analyse : le caractère synthétique des jugements d'identité substantiels et le choix d'un exemple de géométrie.

Pour Frege, le fait que la même chose soit donnée par deux modes de détermination *différents* est le contenu d'un jugement *synthétique*. Ceci est affirmé sans ambages dans le passage cité plus haut, et touche aussi les jugements d'arithmétique tels que $\vdash 2 + 3 = 4 + 1$, dont nous avons vu qu'ils relevaient de la même affaire. Voilà un autre indice du fait que Frege n'envisageait pas encore de réduire l'arithmétique à la logique en 1879. À cette date, il estimait que la manière dont un objet particulier était déterminé n'était pas affaire de logique, mais concernait la science traitant de cet objet. La même intuition le conduisit à limiter les noms propres de son langage aux lettres gothiques et latines [196], et à rejeter tout nom d'opération sur des objets. Par conséquent, il lui était impossible de construire un quelconque nom complexe, et *a fortiori* de tels noms différents partageant un même contenu. Il est compréhensible que Frege ait cédé à cette intuition en première approche. Après tout, quel lien peut-il exister entre la science "de la pensée pure" et le biais spécifique à travers lequel le nom '$2 + 1$' détermine l'objet 3 ? Néanmoins, son adhésion au logicisme le contraignit à déserter cette position. Divers remaniements de ses conceptions concernant la notion d'identité ont forcément eu lieu avant le basculement de 1890, ainsi que nous l'avons annoncé en amorce, et comme nous l'expliquerons en détail dans la prochaine section.

Quant au choix de puiser son illustration dans le giron de la géométrie, notons que Frege s'y cantonna aussi en 1892 [197], tandis qu'il ne subsiste aucun doute sur le fait qu'il distinguait alors les sens et identifiait les références de '$2 + 3$' et de '$4 + 1$'. La conclusion que May tire ici ne peut donc être inférée des mêmes prémisses là-bas, et il faut chercher une autre raison à cette décision. Celle-ci n'est cependant pas difficile à deviner. En effet, la manière dont l'intuition spatiale nous permet de constater que deux points définis différemment "tombent au même endroit" – et sont ainsi identiques – reflète tout à fait la distinction entre mode de détermination et contenu. Aucun parcours psychologique aussi net ne pouvait être suggéré par un exemple arithmétique, car aucune intuition physique ou géométrique n'est à la source des jugements d'identité de nombre. Frege

Nous raconterons prochainement cette histoire. Pour l'heure, notons seulement que certains passages contiennent les prémisses du rapprochement qu'il effectuerait entre les concepts et les – nouvelles, pas celles de 1879 – fonctions. Il est tentant d'y voir le signe que, très tôt, il fit droit à la similarité entre les deux notions, en distinguant par exemple le contenu de '$2 + 4$' du nombre 6, afin que la manière spécifique dont l'opération d'addition compose les nombres 2 et 4 ne s'efface pas totalement derrière le nombre 6 lui-même, à l'instar du fait que la manière spécifique dont un concept P "articule" le contenu conceptuel de '$P(a)$' ne disparaît pas derrière la valeur de vérité de ce dernier. Mais il s'agirait d'une erreur. Ces différents passages dénotent seulement que Frege possédait déjà l'intuition qui le guiderait à réviser ses conceptions, *lorsqu'il réaliserait qu'elle rentre en conflit avec celles-ci.* En 1879, comme en 1881, il identifiait le contenu conceptuel d'un nom propre à l'objet que celui-ci désigne. Lorsqu'il développerait sa nouvelle notion de fonction, il comprendrait que cette identification générait une véritable dissymétrie entre concepts et fonctions, et procèderait à une homogénéisation. Il ajouterait au contenu des noms de concepts ce qui lui manquait d'extensionnel – à travers la référence –, et à celui des noms de fonctions ce qui lui manquait d'intensionnel – à travers le sens. Mais cela n'aurait lieu qu'en 1890. Nous savons déjà combien l'usage de certains termes et explications dans ses *textes* précoces ne convenait pas à ses *thèses* précoces. Loin de refléter ces dernières, ils ne firent qu'annoncer la manière dont Frege réagirait lorsqu'il se rendrait compte du décalage. La similarité entre fonctions et concepts suggérée par l'extrait cité par May en constitue une nouvelle illustration.

196. qu'il ne concevrait bientôt plus comme tels.

197. en proposant l'exemple des médianes dont nous nous sommes servis plus haut (Frege 1892b, p. 144 / 103).

constaterait bientôt que ceux-ci ne s'appuyaient sur aucune intuition d'une quelconque sorte. Pour l'heure, il estimait seulement que l'intuition à leur base, quelle qu'elle soit, n'avait pas la même force de clarté qui rendait si limpide son exemple géométrique, de par les représentations qu'il suscitait. Ce choix était incontestablement judicieux, et Frege y procéda dans un souci exclusivement pédagogique.

Venons-en à notre dernier argument, qui nous apparaît comme le plus décisif. Dans la troisième partie de la *Begriffsschrift*, Frege développa une théorie logique des suites *qu'il comptait déjà appliquer aux nombres*[198]. Une telle théorie aurait donc dû s'appuyer sur la relation d'égalité qui convient à ce cadre, et non pas sur celle d'identité de contenu. Si, comme May le croit, Frege a intégré cette dernière à la langue formulaire pour des applications *extérieures* à l'arithmétique – et des définitions –, il aurait *à tout prix* dû utiliser une autre relation dans les développements de la troisième partie de la *Begriffsschrift*, lesquels étaient justement prévus pour formaliser des raisonnements d'arithmétique.

Considérons par exemple la définition (99) (p. 71 / 94). En français, elle stipule que le contenu de l'expression 'z appartient à la f-suite qui commence avec x' est celui de 'z est identique à x ou accessible à partir de x par f'. Bien sûr 'identique à' doit ici être lu métalinguistiquement car la formule intègre le signe '$\equiv$'. Sans surprise, Frege entendait faire figurer des chiffres à la place des lettres 'x' et 'z'. Il escomptait par exemple, comme il le fit en 1881, exprimer que 12 appartient à la suite $n + 4$ qui commence avec 0[199], autrement dit que 12 est un multiple de 4. Pourtant, si nous suivons May, la présence de l'identité de contenu est problématique. En effet, '$0 + 0$' n'a pas le même contenu conceptuel que '0', donc '$0 + 0 \equiv 0$' est faux, et ainsi $0 + 0$ n'est pas un multiple de 4.

La portée de cet argument excède largement la critique de la position particulière de May. Pour Frege, les théorèmes de la *Begriffsschrift* sont logiques, ils demeurent vrais même lorsque des termes numériques se voient substituer aux lettres latines, quelle que soit la manière dont ces derniers se comportent vis-à-vis de la relation d'identité métalinguistique. Ainsi, la distinction entre les contenus de '$\equiv$' et '$=$' n'invalide pas pour l'arithmétique la théorie générale des suites développée en troisième partie. Néanmoins, elle la rend *inutile* dans ce cadre, car la théorie des suites *arithmétique* emploie la relation d'*égalité*. Plus précisément, elle confère à cette dernière exactement le rôle que Frege attribua à la relation d'identité dans sa propre théorie. Autrement dit, si les deux relations sont distinctes, alors la théorie des suites de Frege *n'est pas* celle qui est exploitée en arithmétique.

La seconde partie de la *Begriffsschrift* intègre les dérivations de théorèmes utiles à *n'importe quelle science*. C'est dans ce contexte qu'il était justifié d'intégrer la relation d'identité, et d'exprimer les principes de substitution qui lui sont attachés. Mais la troisième partie possède un tout autre propos. Elle était censée poser l'environnement adapté aux dérivations des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique, que celles-ci exigent l'ajout d'axiomes spécifiques à cette science ou qu'elles s'en dispensent. Il était donc indispensable qu'y soit développée une théorie des suites *adaptée à ce travail*, autrement dit celle qui convient à l'arithmétique. En somme, il était nécessaire que la relation identité de contenu *soit* la relation d'égalité arithmétique. D'ailleurs, lorsque Frege exploita cette théorie, il remplaça le signe '$\equiv$' par '$=$', et renvoya son lecteur aux démonstrations de la *Begriffsschrift sans même signaler que la substitution avait eu lieu*, suggérant que les symboles partageaient le même contenu[200].

198. sans savoir encore quelle quantité d'arithmétique devrait être ajoutée à cette théorie, comme nous l'avons vu en section 1.5.
199. (Frege 1881, p. 24 / 31)
200. (Frege 1881, p. 24 / 31)

Alors pourquoi les a-t-il distingués ? Pourquoi, dans sa conférence de 1879, a-t-il fait figurer le premier au sein des exemples de géométrie et le second au sein des illustrations d'arithmétique [201] ? Afin que la théorie des suites de la *Begriffsschrift* soit conforme à l'usage arithmétique qui lui était destiné, nous avons dit qu'il fallait que la relation d'identité qu'elle mettait en action *soit* l'égalité arithmétique. Nuançons quelque peu cette conclusion. Il était assurément indispen-

201. Heck propose une hypothèse à partir de la remarque suivante :

> Il me semble que la réponse [à la question de la différence entre égalité et identité] est implicite dans les *Grundlagen*. Le mot qui est désormais uniformément traduit par 'équinumérique' est '*Gleichzahlig*' qui, plus littéralement, signifie quelque chose comme : numériquement égal. Et Frege écrit au §63 : "Plus récemment, les mathématiciens semblent s'être mis d'accord sur l'idée qu'il faut définir l'identité de deux nombres par une correspondance univoque". L'hypothèse est donc que l'égalité numérique *était* l'équinumérocité. (Heck 2017, p. 27)

Heck montre ensuite que cette hypothèse ouvre différents sentiers vers la définition des nombres cardinaux, compatibles avec ce qu'il croit être deux traits des conceptions de 1879 : la confusion entre objet et concept et l'idée que deux expressions arithmétiques différentes possèdent toujours des contenus différents. Nous avons vu que Frege n'avait pas épousé ces idées, nous ne croyons donc pas qu'il ait jamais suivi les chemins décrits par Heck. Nous rejetons aussi l'hypothèse elle-même, qui propose une définition de l'égalité qui transgresse la frontière entre objet et concept. Par ailleurs, même en ignorant ce point, elle tombe sous le coup de l'argument ci-dessus : pourquoi Frege n'aurait-il pas intégré l'égalité, qu'il savait définir comme équinumérocité, dans sa théorie des suites ? Enfin, elle s'avère incompatibles *avec les positions de Heck lui-même*. Plaçons-nous dans ce qu'il pense être le cadre de 1879 : $2 + 4 \not\equiv 6$ et la distinction entre objet et concept n'est pas établie. Il explique :

> Nous pouvons concevoir l'égalité numérique comme une relation entre extensions de concepts, entendus comme ce que les strictes occurrences des prédicats signifient :
>
> $$F \approx G \equiv \exists R[\ldots]$$
>
> tel que le membre de droite consiste bien sûr en n'importe quel formule usuelle définissant la relation de correspondance bi-univoque. (Heck 2017, p. 27-28)

Plus tard, Frege n'aurait pu accepter une telle définition. Il y aurait vu une transgression de la distinction objet-concept. Seuls des noms propres peuvent saturer le signe '$\approx$' d'égalité arithmétique. Les noms des extensions '$\dot{\varepsilon}(F(\varepsilon))$' et '$\dot{\varepsilon}(G(\varepsilon))$' en sont capables, mais sûrement pas les symboles 'F' et 'G' eux-mêmes. Néanmoins, selon Heck, cela ne posait pas problème en 1879, car Frege ignorait encore cette distinction, et par conséquent acceptait qu'un prédicat et un nom propre possèdent le même contenu.

Heck propose une définition *logique* de l'égalité arithmétique. Cependant, si telle était l'idée de Frege, pourquoi n'a-t-il pas procédé à cette définition afin de développer la théorie des suites avec la relation d'égalité ainsi définie, plutôt qu'avec celle d'identité de contenu qui ne lui convenait pas ? Voilà une première difficulté, mais il y a plus grave. Heck suggère ensuite de définir les nombres cardinaux en employant à la fois le signe d'égalité arithmétique '$\approx$' et le signe '$=$', sans préciser la signification de ce dernier. Il n'est pas choquant qu'un symbole d'identité fasse ici son retour car, après tout, un tel symbole était aussi nécessaire à la définition de l'égalité arithmétique en termes de correspondance bi-univoque. Voici un morceau de la formule représentée par les pointillés de Heck :

$$\text{`}\forall\mathfrak{a}(F(\mathfrak{a}) \to \exists\mathfrak{b}(G(\mathfrak{b}) \wedge R(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \wedge \forall\mathfrak{c}((G(\mathfrak{c}) \wedge R(\mathfrak{a},\mathfrak{c})) \to \mathfrak{b} = \mathfrak{c})))\text{'}$$

Encore faut-il déterminer la relation représentée par le symbole '$=$'. S'il s'agit de l'identité d'objet, alors c'est à ne plus rien y comprendre ! Frege aurait développé sa théorie des suites avec l'identité de contenu tandis qu'il escomptait exploiter cette même théorie pour mener à bien une définition des nombres qui n'en faisait pas le moindre usage, et reposait au contraire sur l'identité d'objet et l'égalité arithmétique. S'il avait eu à l'esprit la stratégie décrite par Heck, il aurait employé dans la troisième partie de la *Begriffsschrift* soit un symbole pour l'égalité arithmétique soit, au pire, un symbole pour l'égalité d'objet, mais en aucune façon le signe '$\equiv$'.

Examinons la seule possibilité restante : '$=$' représente l'identité de *contenu*. Supposons un concept F qui ne subsume que le nombre 0, et tentons de prouver que $F \approx F$. Il importe de mettre à jour une relation R qui vérifie au moins notre formule ci-dessus (une fois '$=$' remplacé par '$\equiv$'). '$F(0)$' est vrai, il doit donc exister un $\mathfrak{b}$ tel que $F(\mathfrak{b})$ et $R(0,\mathfrak{b})$. Seul 0 tombe sous F, donc $\mathfrak{b}$ ne peut être que 0. Par conséquent il est indispensable que $R(0,0)$. Par ailleurs, cette formule impose que pour tout $\mathfrak{c}$ tel que $F(\mathfrak{c})$ et $R(0,\mathfrak{c})$, alors $0 \equiv c$. Malheureusement, '$F(1-1)$' et '$R(0,1-1)$' sont vrais, tandis que '$1-1 \equiv 0$' est faux.

Voici le problème : ainsi conçue, notre formule n'impose pas qu'il existe un unique objet tombant sous G et mis en relation par R pour chaque objet tombant sous F, elle exige qu'il existe, pour chaque $\mathfrak{a}$ tombant sous F,

sable que, pour tous termes t et t' *capables d'encadrer le symbole d'arithmétique*, $\ulcorner t = t' \urcorner$ et $\ulcorner t \equiv t' \urcorner$ partagent le même contenu. Néanmoins, nous savons désormais que Frege cantonnait encore l'arithmétique à un domaine particulier. Il était donc justifié que le symbole d'égalité qui lui était spécifique ne soit pas employé entre des noms d'objets extérieurs à son champ. D'autre part, Frege ne pouvait ignorer que ce signe ne figurait jamais entre des *formules* – *i.e.* des expressions pour des contenus jugeables –, même lorsque celles-ci exprimaient des contenus arithmétiques. Pour que sa théorie des suites atteigne son but, il était indispensable que la relation d'identité de contenu *coïncide avec* la relation d'égalité dans le champ traditionnel de cette dernière, mais il était parfaitement acceptable qu'elle l'*étende* à la fois aux noms propres extérieurs à l'arithmétique et aux expressions pour des contenus jugeables.

Finalement, Frege analysait bel et bien les jugements d'égalité arithmétique comme des jugements d'identités entre contenus de termes numériques. Voilà qui permit d'employer le symbole '≡' au sein de la troisième partie des *Grundgesetze*. Par conséquent, il aurait pu totalement le substituer au signe '=', dont le contenu était plus restreint. Néanmoins, cela aurait exigé de recourir à certaines explications qu'il souhaitait parfois éviter. En 1879, aucun symbole formel n'était traditionnellement dédié à l'identité géométrique. Frege pouvait donc employer le sien propre sans susciter d'étonnement. En revanche, s'il avait reproduit ce geste pour l'arithmétique, il se serait immanquablement exposé à certaines remarques. Ses auditeurs auraient constaté qu'il l'utilisait à la fois dans d'autres domaines – la géométrie – et dans des contextes inédits – entre des énoncés. Il lui aurait fallu expliquer que le signe '=' qui, en effet, n'était habituellement employé qu'entre des termes arithmétiques, exprimait en vérité une identité de contenu entre signes ; et que son contenu s'étendait légitimement à la fois à ces autres domaines et ces nouveaux contextes. Voilà précisément le genre de développements périphériques à son propos qu'il entendait s'épargner en employant le symbole traditionnel plutôt que celui, de son propre cru, qui en généralisait le contenu.

Il existe une trace très nette de cette démarche. Nous savons que, dans l'écrit posthume de 1881, Frege intégra le signe '=' à certaines formules, renvoyant sans avertissement son lecteur aux mêmes formules écrites avec '≡' dans la *Begriffsschrift*. Rien de tel n'aurait été permis si les deux symboles avaient différé en contenu dans ces contextes arithmétiques. Par ailleurs, au sein d'une longue note de bas de page [202], il présenta les symboles de la langue formulaire *à l'unique exception de '≡'*. Il masqua donc volontairement l'existence de celui-ci, qui ne figure pas une seule fois dans le texte. Néanmoins, nous ne devons pas en conclure qu'il avait modifié ses conceptions en estimant *finalement* que l'égalité arithmétique rejoignait l'identité de contenu, et en abandonnant *au bout du compte* le signe '≡', car ce dernier fut (furtivement) mentionné dans cet article. Lorsque Frege examina le langage de Boole, dans lequel '=' figurait aussi bien entre lettres d'énoncés qu'entre noms de nombres, il précisa qu'il avait '[lui] aussi un signe d'égalité [*Gleichheitszeichen*], mais qu'[il] n'emplo[yait] entre contenus jugeables presque uniquement que pour fixer le sens de nouvelles désignations" [203]. À ce stade, le signe traditionnel '=' avait été utilisé à de nombreuses reprises, tandis que ses propres symboles avaient été présentés sans qu'il n'y soit intégré. Or, dans ce passage, Frege fit explicitement référence à l'un d'entre eux. Seul '≡' pouvait être ainsi visé, lequel était en effet, dans la *Begriffsschrift*, employé "entre contenus jugeables presque uniquement que pour fixer le sens de nouvelles désignations". Notons qu'il ne

un unique *contenu conceptuel* qui conduise à un objet $\mathfrak{b}$ tombant sous G et mis en relation par R. Or, aux yeux de Heck, deux expressions différentes qui désignent le même nombre ont des contenus conceptuels différents. Quelle que soit la méthode utilisée, la définition de $\approx$ interdit de prouver que $1 \approx 1$. Par conséquent, non seulement la proposition de Heck n'est pas compatible avec nos conclusions, mais elle s'écroule aussi sous le poids des siennes.

202. (Frege 1881, p. 12 / pp. 19-20)

203. (Frege 1881, p. 40 / 46)

parla pas d''identité de contenu', mais d''égalité', ce qui confirme qu'il ne distinguait pas les deux relations. L'égalité – ou l'identité de contenu – *arithmétique* n'était à ses yeux qu'une restriction de l'égalité – ou de l'identité de contenu – générale aux termes d'arithmétique. Hormis à cette occasion, induite par la discussion du langage de Boole, il prit soin de taire cette subtilité, et d'employer le signe traditionnel '=' dans les contextes traditionnels, *i.e.* seulement entre des termes d'arithmétique et jamais entre des expressions pour des contenus jugeables.

Ainsi, jusqu'en 1881, Frege identifia les relations d'égalité et d'identité de contenu qui, selon lui, étaient exploitées dans le cadre restreint de l'arithmétique exclusivement entre des signes de nombres. Mais nous allons voir que cette position fut rapidement abandonnée. Le texte de 1881 lui-même contient les stigmates du mouvement à venir, qui ne s'achèverait pas avant la rédaction des *Grundlagen*.

1.6.1.3 L'identité dans les *Grundlagen*

Cet ouvrage ne contient aucune trace du symbole '≡' ; seul '=' figure entre des termes numériques. Néanmoins, ce qui fut dit pour 1881 pourrait tout à fait valoir pour 1884. Après tout, Frege manifesta clairement sa volonté de rédiger un traité informel, dans lequel les explications concernant son symbolisme atypique n'avaient pas leur place. Il aurait donc pu employer '=' conformément à ce qu'il croyait être son usage traditionnel, c'est-à-dire comme un signe pour l'identité de contenu limitée aux termes numériques, sans qu'il ne soit nécessaire de généraliser cette relation *via* l'introduction de '≡'.

Il existe néanmoins une différence incontestable entre les deux situations. Dans cet ouvrage, Frege parla indifféremment de jugements d'identité liés à des objets extra-arithmétiques – par exemple des directions de droites – et de jugements d'identité liés à des nombres. Les jugements d'égalité arithmétique furent expressément ramenés à ces derniers. Il n'y a donc aucun doute sur le fait que, comme en 1879, il estimait que l'identité était l'égalité arithmétique, au moins dans le cadre particulier de cette science. Néanmoins, en 1884, ce cadre n'avait plus rien de particulier, car l'arithmétique se voyait réduite à la logique. Frege pouvait donc librement identifier les relations d'identité et d'égalité arithmétique partout où la première avait cours, et faire généralement figurer le symbole '=' entre *n'importe quels* noms d'objets, sans plus se limiter aux termes numériques. Il ne s'en priva pas : en proposant de remplacer l'énoncé 'la droite a est parallèle à la droite b' par 'la direction de la droite a est identique à la direction de la droite b', il expliqua qu'il "rempla[çait] le signe // par le signe =, plus général" (pp. 74-75 / p. 189).

Une question subsiste néanmoins : à quelle relation d'identité faisait-il ainsi allusion ? S'agissait-il comme en 1879 de l'identité métalinguistique ou au contraire de l'identité objectuelle ? Rien de ce que nous venons de dire ne permet de trancher. Rien n'assure, à ce niveau, une continuité entre la *Begriffsschrift* et les *Grundlagen*. Dans le premier cas, le signe '≡' pouvait être totalement abandonné au profit de '='. Dans le second, '≡' devait être maintenu entre des expressions pour des contenus jugeables, car ces derniers n'étaient pas des objets, tandis que '=' convenait pour les noms propres. Malheureusement, Frege ne fit figurer aucun de ces deux signes entre des énoncés, si bien qu'il faut découvrir ailleurs notre réponse.

Un premier indice se tient dans le passage ci-dessous :

> Leibniz donne la définition suivante :
>
> "*Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate.*"
>
> Je m'approprie cette définition que je tiens pour celle de l'identité.

(Frege 1884, p. 76 / 191)

Frege proposa de *définir* la relation d'identité. Cette démarche n'avait pas été envisagée dans la *Begriffsschrift*, mais il en était déjà question en 1881. Citons plus longuement un passage que nous avons déjà évoqué :

> J'ai à vrai dire moi aussi un signe d'égalité, mais que je n'emploie entre contenus jugeables presque uniquement que pour fixer le sens de nouvelles désignations, et que je ne conçois plus à présent comme signe primitif, mais que je définis au moyen d'autres signes. (Frege 1881, p. 40 / 46)

Frege avait entrepris de définir cette relation *dès 1881*. Pourtant, à cette date, il expliqua que son signe figurait parfois entre (des expressions pour des) *contenus jugeables*, confirmant ainsi qu'il exprimait la relation d'identité de contenu, et non celle d'identité d'objet. Il est possible que cette situation fût maintenue dans les *Grundlagen*. Faisons droit à cette hypothèse, et tentons de voir comment une telle définition pourrait procéder.

En 1881, Frege estimait que l'identité de contenu coïncidait avec l'égalité arithmétique dans le domaine restreint de celle-ci – c'est certain, nous l'avons vu –, ainsi il a envisagé une définition du symbole *logique* '$\equiv$' d'identité générale, et non pas du symbole *arithmétique* '$=$' de cette même relation limitée à cette science. En revanche, s'il croyait aussi en 1884 qu'identité de contenu et égalité arithmétique coïncidait sur le domaine de cette dernière – c'est notre hypothèse –, alors il considérait que cette coïncidence était *totale*, car le champ de l'arithmétique était désormais étendu à celui de la logique. Dans ce cas, il pouvait se débarrasser une fois pour toutes du signe '$\equiv$' au profit de '$=$', et s'en tenir à une définition de ce dernier symbole. Voilà la seule nuance entre les deux contextes et, puisqu'il faut bien choisir, nous conduirons l'examen de notre hypothèse en utilisant '$\equiv$'.

Frege s'appuya sur l'affirmation de Leibniz selon laquelle sont identiques ceux qui sont partout substituables *salva veritate*, suggérant la définition suivante[204] :

$$\Vdash (a \equiv b) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f}(a) \leftrightarrow \mathfrak{f}(b))$$

La double occurrence du signe '$\equiv$' n'est en aucune manière la marque d'une quelconque circularité. La seconde occurrence permet d'*attribuer* le contenu de '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f}(\xi) \leftrightarrow \mathfrak{f}(\zeta))$' à l'expression '$\xi \equiv \zeta$', lorsque celle-ci est utilisée pour *exprimer* une relation. . Suivant cette démarche, ni la première occurrence – qui se voit attribuer un contenu par cette formule –, ni la seconde – qui permet d'attribuer un contenu – ne contient *déjà* la relation d'identité de contenu dont est ainsi chargé '$\equiv$'.

En logique contemporaine, la différence de rôle entre les deux occurrences est naturellement signalée par l'usage de symboles différents. Par exemple, la deuxième occurrence serait remplacée par '$:\equiv$' ou '$\equiv_{\text{def}}$'. Mais Frege procède autrement : en l'absence du symbole '$\Vdash$', toutes les occurrences de '$\equiv$' servent à exprimer une relation ; tandis qu'en présence de ce symbole, l'occurrence principale (identifiable grâce aux parenthèses) possède un rôle attributif. Cette stratégie ne produit donc aucune ambiguïté, et permet par ailleurs de passer d'une définition à une affirmation en remplaçant uniquement '$\Vdash$' par '$\vdash$'. Une fois que le signe '$\equiv$' s'est vu attribué pour contenu la relation d'identité métalinguistique – par définition ou non –, et qu'un nouveau nom a été chargé du contenu d'un ancien nom – $\ulcorner \Vdash t \equiv t' \urcorner$ –, alors nous pouvons légitimement affirmer que ces deux termes sont liés par la relation d'identité de contenu – $\ulcorner \vdash t \equiv t' \urcorner$.

204. Nous employons le symbole contemporain '$\leftrightarrow$' qui se définit sans problème dans le symbolisme fregéen.

Précisons tout de suite que Frege changerait d'opinion dans les *Grundgesetze*. Il ne proposerait plus aucune définition de l'égalité, et s'en expliquerait à l'occasion d'une critique du travail de Husserl :

> Cependant, je partage avec l'auteur l'idée que l'explication proposée par Leibniz [...] ne mérite pas d'être appelée définition, mais pour d'autres raisons que lui. Puisqu'une définition est une identification, l'identité elle-même ne peut pas être définie[205]. (Frege 1894, p. 184 / 148)

Frege considère que la deuxième occurrence ci-dessus permet de *stipuler* une identité. Il estime que, par conséquent, une telle stipulation s'appuie sur la relation d'identité. L'usage courant du terme 'stipuler' est inoffensif lorsque la relation d'identité est considérée comme primitive, mais il s'avère trompeur dans le cas contraire. Une définition n'exige pas de décréter que deux choses sont identiques, elle se contente d'attribuer à un nouveau terme dénué de contenu celui d'un ancien. *Par la suite*, il devient possible d'affirmer l'identité entre les deux contenus. Mais la première étape – la définition – n'implique aucunement la relation d'identité.

Quoi qu'il en soit, il est clair que Frege ne prêtait pas encore attention à cette objection en 1881, lorsqu'il envisageait de définir le signe utilisé pour les définitions[206]. Cependant, un problème plus grave touche la formule ci-dessus. En effet, l'énoncé '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}(\mathfrak{f}(1+2) \leftrightarrow \mathfrak{f}(3))$' exprime qu'un concept subsume l'*objet* $1+2$ si et seulement s'il subsume l'*objet* 3. L'identité ainsi *définie* n'a donc rien de métalinguistique. Ce statut lui serait rendu à travers :

$$\Vdash (a \equiv b) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile}(\mathfrak{f}(a) \equiv \mathfrak{f}(b))$$

Néanmoins, le signe défini se verrait utilisé dans le *definiens*, et la circularité serait, cette fois, bien réelle. En somme, Frege n'avait aucun moyen de définir un signe complété par des expressions qui "s'exhibaient elles-mêmes" à l'aide de signes complétés par des expressions qui exhibaient leurs contenus. Or, hormis le symbole '$\equiv$', tous les symboles de la langue formulaire étaient du deuxième genre. Il n'avait donc aucune chance de proposer dans sa langue une définition non circulaire de l'identité métalinguistique.

Bien sûr, cette conclusion n'était pas encore tirée en 1881, lorsque le symbole d'identité figurait aussi bien entre des noms propres qu'entre des énoncés. Frege envisageait incontestablement (et fallacieusement) une définition de l'identité *de contenu*, probablement proche de celle que nous avons proposée plus haut. Nous pourrions supposer qu'il commit la même erreur au moment des *Grundlagen*. Cependant, à cette période, l'analyse du concept de *nombre* était réalisée, entraînant avec elle une nouvelle conception de la quantification, qui dévoila un autre problème posé par l'identité métalinguistique.

Considérons l'axiome de 1879 attaché à cette dernière[207], qu'il soit posé comme tel ou dérivé à partir de la définition (incorrecte) ci-dessus :

$$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile} \begin{array}{l} f(\mathfrak{b}) \\ \quad f(\mathfrak{a}) \\ \quad \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \end{array}$$

205. Cette dernière phrase, pourtant essentielle, est purement et simplement tronquée dans la traduction française.
206. Il existe une autre différence entre les deux périodes. Dans les *Grundgesetze*, une définition attribuerait le *sens* d'un ancien nom à un nouveau. Elle s'y emploierait à travers le terme '=' dont le contenu ne permettrait d'exprimer qu'une identité entre les *références*, moins forte qu'une identité de sens. Néanmoins, puisque le sens détermine univoquement la référence, le passage de la définition au jugement resterait possible.
207. exprimé sans dissimuler la quantification dans des lettres latines.

Cet énoncé exprime que tous les *objets* $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont mis en relation par :

$$\begin{array}{l} f(\zeta) \\ f(\xi) \\ \xi \equiv \zeta \end{array}$$

Cette relation admet *deux* – et non pas quatre – arguments, dont les places sont marquées par les lettres 'ξ' et 'ζ'. Il était donc essentiel que les signes figurant autour de '$\equiv$' ne s'exhibent pas davantage eux-mêmes que ceux qui venaient compléter 'f'. La nouvelle analyse de la quantification exigeait franchement une homogénéisation que l'ancienne, confuse, n'avait su réclamer.

Néanmoins, cet argument dénonce comme le précédent une confusion entre métalangage et langage-objet. Si Frege est resté aveugle au premier en 1881, peut-être n'a-t-il pas davantage distingué le second en 1882. Il faut décider : soit il s'agit de signes d'une cécité qui dura jusqu'en 1890, soit il s'agit de pistes qui ont conduit à une révision de l'analyse des jugements d'identité avant les *Grundlagen*. C'est donc à l'intérieur de cet ouvrage qu'il convient de regarder. Et nous y trouverons de solides raisons de trancher en faveur de la seconde possibilité : au moment d'analyser le concept de *nombre* – *i.e.* entre la rédaction du texte de 1881 et l'annonce du projet logiciste à Marty le 29 août 1882 –, Frege avait définitivement opté pour la relation d'identité objectuelle. La faute de 1881, loin d'être reproduite en 1884, le mit sur la voie des corrections qui le conduiraient aux conceptions de cette période.

Rappelons la manière dont il mêlait la question de notre accès au nombre à celle du contenu des énoncés dans lesquels ils sont impliqués :

> Si nous n'avons aucune idée ni intuition d'un nombre, comment peut-il jamais nous être donné ? Les mots n'ont de signification qu'au sein d'un énoncé ; il s'agira donc de définir le sens d'un énoncé où figure un terme numérique. (Frege 1884, p. 73 / 188)

Notre accès aux nombres est subordonné à notre capacité à construire des énoncés qui *les* concernent directement. C'est justement parce que nous parvenons à déterminer les contenus de phrases auxquels contribuent les contenus des termes numériques que nous obtenons l'accès à ces derniers contenus. Il est donc crucial pour cet argument que, dans les énoncés concernés, les contenus des signes numériques *soient* les nombres, et non pas ces signes eux-mêmes. Pour reprendre la formule de 1879, il est indispensable que les signes ne s'exhibent pas eux-mêmes, mais représentent leur contenu.

Or Frege tenta de relever ce défi précisément pour les énoncés d'identité :

$$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(\Phi'(\beta))$$

Ainsi, il était essentiel à son objectif que l'identité en question ne soit pas métalinguistique, que le signe '=' ci-dessus désigne une relation entre *objets*.

Posons le problème d'une manière légèrement différente. Les nombres nous sont donnés à travers le contenu des termes numériques, eux-mêmes conçus comme contribution au contenu jugeable des énoncés qui incorporent ces termes. Notre accès aux nombres provient donc de notre saisie du sens des énoncés dans lesquels les termes numériques exhibent leurs contenus. Frege choisit d'étudier à ce titre les énoncés d'identité. Par conséquent, lors de la mise à jour de son analyse du concept de *nombre*, il comprit que les termes encadrant le symbole d'identité exhibaient aussi leurs contenus. À ce stade, il ne reconnaissait plus aux jugements d'identité leur caractère métalinguistique qui faisait leur spécificité en 1879. Il les abordait de la même manière que tous les autres : comme des jugements qui traitent des objet et non des signes. Cette jonction est (subtilement) signalée au §67 :

> La définition d'un objet, en tant que telle, ne dit rien de cet objet, mais pose le sens d'un symbole. Cela fait, elle devient un jugement qui traite de l'objet, mais on ne peut plus dire qu'elle introduit l'objet, *elle est sur le même plan que tous les autres énoncés concernant cet objet.* (Frege 1884, p. 78 / 193, nous soulignons)

Plusieurs éléments ont pu conduire à cette conclusion : les deux problèmes soulevés plus haut relatifs à la définition de l'identité et à l'analyse de certains théorèmes, ainsi que la subordination de notre accès aux objets abstraits à notre saisie du sens des énoncés incorporant des termes qui contenaient ces objets. Mais Frege a peut-être aussi réalisé que le raisonnement de la *Begriffsschrift* visant à montrer que l'identité était métalinguistique s'adaptait à *n'importe quelle* relation. Ce faisant, il a pu directement comprendre que l'identité n'avait, à ce titre, rien de spécifique, *i.e.* qu'elle était contenu dans des énoncés situés "sur le même plan que tous les autres".

Considérons un exemple élémentaire :

> Soient deux rectangles $ABCD$ et $CDEF$. Soit d la droite passant par le milieu de AD et celui de BC, et d' la droite passant par le milieu de DE et celui de CF. Alors d est parallèle à d'.

Dans l'illustration de 1879, Frege présenta la circonstance que $A \equiv B$ comme le contenu du jugement que la même chose est donnée par deux modes de détermination. C'est parce que A est introduit comme étant tel point sur le cercle et B comme étant tel point d'intersection que nous pouvons attester qu'ils sont les mêmes. Cependant, dans l'exemple ci-dessus, les modes de détermination jouent *exactement* le même rôle. C'est parce que d est introduit comme telle droite et d' comme telle autre que nous pouvons les reconnaître comme parallèles. Suivant le raisonnement de la *Begriffsschrift*, la circonstance que $d//d'$ est le contenu du jugement que deux choses parallèles sont données par deux modes de détermination. "Avant que cela ne se produise, deux noms différents, correspondant aux deux modes de détermination, doivent être attribués à ce qui est déterminé par ce moyen. Mais le jugement a besoin, pour son expression, d'un signe de [contenus parallèles] qui relie les deux noms". Ce que Frege avait expliqué pour l'identité pouvait l'être pour le parallélisme et, en sollicitant des exemples de ce type, pour n'importe quel autre concept. Il ne lui restait donc aucune raison de considérer que l'identité était métalinguistique, sauf à considérer que tous les concepts l'étaient à leur tour, autrement dit que seuls des noms pouvaient tomber sous des concepts, ce à quoi il ne souscrivait évidemment pas.

Ainsi, l'entreprise de définition de l'identité, la nouvelle vision de la quantification, l'explication de l'accès aux nombres et la généralisation du raisonnement de la *Begriffsschrift* conduisaient à la même conclusion : l'identité est une relation qui intervient entre des *objets*. L'émergence des idées des *Grundlagen*, située entre la rédaction du texte posthume de 1881 et celle de la lettre à Marty en 1882, entraîna avec elle l'abandon d'une analyse métalinguistique de l'identité [208].

---

208. Un passage semble néanmoins aller à l'encontre de notre interprétation, et nous voulons le prendre en considération :

> Nous avons donc une identité où l'on affirme que l'expression 'le nombre des lunes de Jupiter' désigne le même objet que le mot 'quatre'. (Frege 1884, p. 69 / 184)

Frege traduit un énoncé d'identité comme s'il exprimait une circonstance métalinguistique : que deux signes désignent le même objet. Mais il serait imprudent de le prendre au mot. En 1903, alors qu'il avait clairement indiqué qu'il adoptait l'identité objectuelle, il expliqua :

> Si notre énoncé 'la somme de la Lune et de la Lune est un' était scientifique, alors il exprimerait que la référence des mots 'la somme de la Lune et de la Lune' ne coïncide pas avec la référence du mot 'un'. (Frege 1903a, p. 76)

Cette fois, il analysa l'énoncé '$A = B$' comme s'il exprimait la pensée que la référence de 'A' était la référence de 'B'. Celle-ci intègre (un sens qui conduit à) la relation de référence, elle est donc métalinguistique, et se distingue

Nous sommes enfin en mesure de retracer exactement le chemin parcouru entre 1879 et 1884 relativement aux trois relations impliquées dans la présente étude. En écrivant la *Begriffsschrift*, Frege concevait l'égalité arithmétique $=$ comme une restriction de l'identité métalinguistique $\equiv$ au domaine de cette science. Il prenait ainsi soin d'utiliser le second symbole lorsqu'il excédait celui-ci, tandis qu'il pouvait indifféremment employer l'un ou l'autre pour exprimer des équations arithmétiques. Lors de la conférence de 1879 [209], il préféra le premier qui, bien connu de ses auditeurs, le dispensait de tout développement périphérique concernant la coïncidence des deux relations.

La situation demeura celle-ci au moins jusqu'à la rédaction du texte de 1881 [210], puis évolua d'ici l'envoi de la lettre de 1892 destinée à Marty [211]. Entre les deux évènements, il mit progressivement à jour l'analyse du concept de *nombre* au cœur des *Grundlagen*. S'il envisagea succinctement l'hypothèse que les nombres soient des concepts, alors il repensa conséquemment la question de l'égalité arithmétique, sans trouver aucune réponse satisfaisante [212]. Pour cette raison ou pour une autre [213], il se convainquit finalement que les nombres étaient des objets. Néanmoins, la réponse sémantique qu'il adressa au problème de l'accès épistémique à ces objets le confronta plus sérieusement au statut des énoncés d'identité. Il réalisa que sa définition de 1881 ainsi que son analyse de certains théorèmes excluaient une interprétation métalinguistique de ces énoncés, fondée en 1879 sur un raisonnement qu'il découvrit fallacieux. Par ailleurs, l'avènement du logicisme avait généralisé le cadre de l'arithmétique à celui de la logique. En conséquence de ces deux points, il en vint à corriger ses vues d'alors, estimant qu'égalité arithmétique et identité *objectuelle* coïncidaient *totalement* – car opéraient sur le même champ. Il n'était donc aucunement nécessaire de doter son langage d'un symbole personnel pour exprimer la seconde

---

de la pensée que l'objet A est identique à l'objet B, *i.e.* de la pensée que $A = B$. Dans le même ouvrage (p. 140), on trouve une citation de Dedekind avec laquelle Frege se dit en parfait accord, et qui se rapproche encore davantage de celle des *Grundlagen* :

> Si on veut exprimer que les signes a et b réfèrent au même nombre rationnel, alors on pose à la fois $a = b$ et $b = a$. (Dedekind 1872, p. 6)

Pris à la lettre, ces formulations indiquent effectivement une conception métalinguistique de l'identité. Néanmoins, nous savons avec certitude que Frege avait abandonné une telle vision en 1893. Or il n'y a pas plus de raison de les traiter littéralement en 1884 qu'à cette date. Il n'est d'ailleurs pas difficile de comprendre pourquoi il y eut recours, bien qu'elles suggèrent une conception à laquelle il avait renoncé.

Dans l'extrait des *Grundlagen*, Frege s'attachait à dévoiler le caractère objectuel des nombres. Son objectif consistait à montrer que le terme 'est' était encadré par des noms d'*objets* dans l'énoncé 'le nombre des lunes de Jupiter est quatre'. Il fallait donc éclaircir le contenu de celui-ci. Sans solliciter la montée sémantique, il ne pouvait dire mieux que : 'nous avons donc une identité où l'on affirme que l'*objet* nombre des lunes de Jupiter est l'*objet* quatre'. Mais cette paraphrase n'indique pas clairement la composition du contenu de l'énoncé. Pour ce faire, il est possible d'utiliser la montée sémantique sans induire une quelconque interprétation métalinguistique de la relation d'identité :

> Le contenu de cet énoncé met en relation d'identité d'objet les désignations des expressions 'le nombre des lunes de Jupiter' et 'quatre'.

En expliquant imparfaitement que l'énoncé affirme – et *a fortiori* exprime – que l'expression 'le nombre des lunes de Jupiter' désigne le même objet que le mot 'quatre', Frege ne voulait pas dire autre chose.

Par ailleurs, il serait incorrect de lire dans la formulation de 1879 une simple maladresse de ce genre. En effet, dans la *Begriffsschrift*, Frege ne se contenta pas de traduire les énoncés d'identité comme il s'y employa ci-dessus, il précisa clairement que le "signe d'identité *de contenu* [...] relie *les deux noms*" (p. 14 / 29, nous soulignons). Il n'y a donc aucun doute sur le statut métalinguistique de '$\equiv$', et c'est bien entre 1881 et 1882 que ses positions furent modifiées.

209. (Frege 1879a)
210. (Frege 1881)
211. (Frege 1976, p. 164)
212. comme nous l'avons montré en section 1.5.3.3.
213. que nous avons décrite en section 1.5.3.

relation là où la première n'avait pas cours. Frege pouvait librement utiliser '=' entre n'importe quels noms *propres*, après l'avoir ainsi défini comme exprimant l'identité objectuelle :

$$\Vdash (a = b) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f}(a) \leftrightarrow \mathfrak{f}(b))$$

C'est donc dès 1882 qu'il rejoignit la position qu'il décrivit dans les *Grundgesetze* en affirmant être "désormais convaincu que [le signe '='] possédait en arithmétique exactement la référence qu'[il voulait *finalement*] désigner", autrement dit qu'il signifiait la relation d'identité objectuelle. Bien entendu, en 1893, cette dernière pourrait subsumer les significations des énoncés, conçues comme des objets. Le symbole '=' se verrait donc aussi complété par des énoncés, ce qui n'était pas encore possible en 1882. La transition attendrait la mise à jour de la distinction entre sens et référence, qui n'eut lieu qu'en 1890. Or il nous faut encore comprendre les origines de cette mise à jour. Selon l'interprétation orthodoxe, elle survint lorsque Frege réalisa que la réponse qu'il apportait au problème de la valeur cognitive *via* l'identité métalinguistique était insuffisante. Mais nous savons désormais qu'il cessa de traduire les énoncés d'identité [214] en termes métalinguistiques longtemps avant ce basculement. Il nous faut donc proposer une autre lecture des origines du second mouvement et, pour cela, examiner plus précisément la manière dont le rôle qu'il attribuait au mode de détermination – central dans ce problème – évolua lors du chamboulement de 1882.

1.6.1.4 Les modes de détermination : des objets aux énoncés

L'idée qu'un même objet puisse être donné *via* différents modes de détermination fut transversale à toutes les époques de la vie scientifique de Frege. Elle était au fondement de l'introduction du signe pour l'identité de contenu de 1879, et se maintint lorsque le sens – le mode de donation – intégra le contenu des expressions en 1890. Le glissement terminologique qui signa le passage du mode de détermination au mode de donation ne fut accompagné d'aucune modification sémantique. Les deux formules sont parfaitement synonymes [215]. Dès la *Begriffsschrift*, Frege tenait déjà les composantes qui constitueraient le contenu des noms propres dans les *Grundgesetze* : l'objet et le mode de détermination. Ce qui fut modifié, c'est la manière dont ces deux composantes s'articulent avec celle (puis celles) attachée(s) aux termes conceptuel, autrement dit leur contribution aux contenus des énoncés.

Il est certain que le mode de détermination joua un rôle dans les conceptions de 1884. Le problème de Jules César intervint précisément parce que le seul principe de Hume ne permettait pas de reconnaître un nombre "s'il devait se présenter sous un autre vêtement" (p. 77 / 192), ou encore "s'il nous [était] donné de manière différente" (p. 79 / 193). Néanmoins, ce rôle n'est pas aisé à déterminer. En 1879, il occupait une place importante au sein du contenu des énoncés d'identité conçus comme métalinguistiques, tandis qu'en 1890, il était proprement introduit à celui de n'importe quel énoncé. Or, dans les *Grundlagen*, la première position était abandonnée sans que la seconde ne soit encore atteinte. Il importe donc de comprendre comment Frege en rendait compte. Nous allons découvrir qu'il était beaucoup plus proche de la distinction sens-référence qu'on ne le croit souvent. La restructuration des contenus était en germe, en attente d'une ultime étape dont nous expliquerons bientôt ce qui la provoqua.

En 1879 comme en 1884, il estimait qu'un mode de détermination était toujours associé à un

214. Plus précisément ceux qui incorporaient des noms propres, *i.e.* ceux qui étaient mis en cause par le problème de la valeur cognitive.

215. lorsqu'elles se rapportent aux noms propres. En ce qui concerne les modes de détermination d'autres éléments syntaxiques, nous verrons que le problème est plus complexe.

nom propre, visible à travers lui ou hérité d'un autre par définition. Dans un premier temps, il crut qu'un énoncé d'identité reliait deux noms en exprimant que ces noms possédaient le même contenu. Cette analyse métalinguistique permettait de rendre compte du rôle des modes de détermination : exprimer que deux noms possèdent le même contenu n'est rien d'autre qu'exprimer que "*la même chose* [est] effectivement donnée par *deux modes de détermination*". C'est ainsi qu'il décrivit le "contenu d'un *jugement*" d'identité (pp. 14-15 / p. 29). Voilà qui justifiait la différence fondamentale entre les énoncés $\ulcorner t \equiv t \urcorner$ et les énoncés $\ulcorner t \equiv t' \urcorner$ dans lesquels t ne se voit pas ramené à t' par définition (ou *vice versa*), *i.e.* dans lesquels des modes de détermination différents sont attachés aux deux noms.

Dans des *Grundlagen*, il expliqua que le mode de détermination ne peut être conçu comme une propriété de l'objet :

> Si on voulait attribuer à une définition le privilège d'introduire l'objet [et donc de lui attribuer comme propriété le mode de détermination qui est en réalité attaché à son nom], on supposerait par là-même qu'il ne peut être donné que d'une seule manière. Sinon, le fait qu'il n'*a pas été* introduit par notre définition n'impliquerait pas qu'il ne *saurait l'être*. Et toutes les identités reviendraient à admettre l'identité de cela seul qui nous est donné de la même manière. Résultat si stérile qu'il ne vaut pas la peine d'être énoncé. On ne pourrait tirer aucune conclusion qui ne se confonde avec l'une ou l'autre de nos hypothèses. Or les applications multiples et importantes de l'identité tiennent bien plutôt à ce qu'elle permet de reconnaître comme identique ce qui nous est donné de manière différente. (Frege 1884, p. 79 / 193)

Dans ce passage, Frege réaffirma l'existence d'un fossé entre les énoncés $\ulcorner t = t \urcorner$ et $\ulcorner t = t' \urcorner$. En 1879, le symbole '$\equiv$' de la *Begriffsschrift* signifiait une relation métalinguistique, et la circonstance que t et t' expriment le même contenu était conçue comme la circonstance que le mode de détermination attaché à t conduit au même objet que celui lié à t'. Les modes de détermination étaient donc partie prenante du *contenu* des énoncés d'identité, ce qui justifiait une différence de *contenu* entre les premiers – lorsqu'un même mode de détermination était attaché aux deux noms – et les seconds – lorsque deux modes de détermination distincts l'étaient. En somme, l'écart d'intérêt entre les deux genres de phrases était reflétée par un écart de contenu.

Mais la situation avait radicalement changé dans les *Grundlagen*, car le signe '$=$' y exprimait la relation d'identité *objectuelle*. t et t' désignant le même objet, les contenus de $\ulcorner t = t \urcorner$ et de $\ulcorner t = t' \urcorner$ étaient désormais *identiques*. Comment expliquer qu'un *même* contenu de jugement possède dans un cas "des applications multiples et importantes" tandis qu'il ne vaut "pas la peine d'être énoncé" dans un autre ? La réponse s'imposait déjà : l'écart d'intérêt ne sépare pas les contenus – au sens pré-1890 –, mais les manières dont ils sont déterminés, distinctes dans notre cas.

Il importe de comprendre l'avancée considérable ainsi réalisée, toute insuffisante soit-elle. En 1879, Frege entendait limiter l'influence des modes de détermination aux énoncés d'identité. Le *contenu* de ces derniers était affecté par les modes de détermination des noms que le signe '$\equiv$' prenait en argument. Mais ils ne se voyaient pas eux-même attacher un quelconque mode de détermination, pas plus que les autres énoncés, pour leur part tenus totalement à l'écart du problème. C'est précisément ce dernier point qui fut révisé lors du mouvement de 1882. Si les modes de détermination attachés à 'A' et 'B' dans l'exemple de 1879 sont impliqués dans la reconnaissance que les points A et B sont les mêmes, alors ceux attachés à 'd' et 'd'' dans l'illustration proposée plus haut le sont tout autant dans la reconnaissance que les droites d et d' sont parallèles. Les situations sont absolument similaires. Par conséquent, si la relation d'identité de contenu $\equiv$ prend directement en charge le rôle des modes de détermination, en permettant

d'exprimer que le même contenu est atteint à travers deux modes de détermination, alors la relation de parallélisme // doit faire de même, en permettant d'exprimer que deux contenus parallèles sont atteints à travers deux modes de détermination. Généralement, le contenu de '$R(A, B)$' doit être la circonstance que deux objets mis en relation par R sont donnés par les deux modes de détermination attachés à 'A' et 'B' ; et celui de '$P(A)$' doit être la circonstance qu'un objet possédant la propriété P est donné par le mode de détermination attaché à 'A'.

Voici le constat réalisé en 1882 : le rôle des modes de détermination est général, et ne peut être restreint aux énoncés d'identité comme il le fut en 1879. Par conséquent, pour le maintenir au niveau du *contenu* de ces énoncés, il faut l'introduire à celui de *tous* les énoncés. N'importe quel contenu jugeable possèderait alors un caractère métalinguistique, et il ne subsisterait que des propriétés de noms propres et des relations entre noms propres. Cette conclusion étant inacceptable, Frege fut contraint de chercher une alternative : il fallait considérer que les modes de détermination des noms propres ne jouaient pas leur rôle vis-à-vis du contenu des énoncés – d'identité ou non –, mais vis-à-vis de leurs modes de détermination. Il était donc indispensable d'en attribuer *aussi* aux énoncés.

Nous voulons être clairs sur un point : Frege n'aurait *en aucune manière* pu reconnaître une différence de valeur (quelle qu'elle soit) entre différents énoncés possédant le même contenu sans qu'autre chose que ce contenu ne vienne garantir cette différence. Le rejet de l'analyse métalinguistique de l'identité le *contraignit* à attribuer des modes de détermination distincts à un même contenu. Et cette manière de justifier qu'un intérêt soit limité à certaines équations se propageait naturellement à la totalité des énoncés. Si les modes de détermination de deux objets influencent la manière dont ces derniers peuvent être déterminés identiques, ils affectent pareillement la manière dont deux droites peuvent être déterminées parallèles. Peut-être Frege a-t-il raisonné ainsi, étendant sa nouvelle analyse des énoncés d'identité exigée par celle du concept de *nombre*. Peut-être a-il au contraire partiellement déduit la seconde de la première, atteinte en comprenant indépendamment ce que son argument de 1879 présentait de problématique. Ce point nous importe peu. Il est d'ailleurs possible – voire probable – que les deux démarches aient été suivies parallèlement lors des réflexion fertiles de 1881-1882. Le fait est qu'elles se rejoignent dans une même conclusion : un énoncé d'identité "est sur le même plan que tous les autres énoncés concernant cet objet". Le fait que A et B sont identiques – le contenu de '$A = B$' – est déterminé relativement à la manière dont A et B le sont, tout comme le fait que A possède la propriété P – le contenu de '$P(a)$' – est déterminé relativement à la manière dont A l'est. Et le lecteur voit enfin poindre à l'horizon ce vers quoi nous faisons cap depuis quelques pages : le mode de détermination des objets est impliqué dans celui des contenus jugeables, de même que le sens des noms propres serait bientôt partie prenante de celui des énoncés. Ce point était absent des conceptions de 1879. Il surgit entièrement lors du premier mouvement.

Jusqu'en 1890, Frege s'est contenté de cette vision imprécise – et en réalité imparfaite – des modes de détermination, fuyant une question essentielle : quel est exactement la contribution des modes de détermination attachés à des noms propres aux modes de détermination attachés aux énoncés dans lesquels ces noms apparaissent ? C'est en s'emparant (tardivement) du problème qu'il tenta de conférer une dimension proprement technique aux modes de détermination, en développant à leur intention un principe de composition similaire à celui des contenus conceptuels [216]. Il s'aperçut alors que les deux notions rentraient en conflit, et procéda à une restructuration d'où émergèrent celles de sens et de référence. Notre objectif consiste désormais à comprendre ce qui

216. Le moment nous semble opportun pour rappeler que, depuis la section 1.4.6, afin d'éviter d'innombrables répétitions d'une formule trop lourde, nous employons le terme 'contenu' dans le sens de 'contenu conceptuel', qui exclut la coloration.

a pu induire chez lui ce questionnement, et par suite les bouleversements qui en émanèrent. S'il décida d'approfondir la notion de mode de détermination, c'est probablement parce que, *avant cet approfondissement*, il découvrit en elle quelque chose de problématique. Ainsi, il nous faut chercher ce qu'elle possédait d'insatisfaisant.

Avant de développer son logicisme, Frege estimait que tout objet appartenait à un domaine particulier. Le fait qu'un même objet soit présenté sous des habits différents était toujours établi à partir des lois synthétiques valant pour ce domaine. L'introduction d'un opérateur *logique* associant un concept à son extension avait changé la donne. Il autorisait à donner différents noms (complexes) à un même objet dans le langage logique. Les lois logiques permettaient alors d'établir qu'un seul objet était tapi derrière ces noms. Par exemple, il était possible de définir les signes pour les opérations d'addition et de multiplication à partir des seuls noms de son langage, puis de démontrer le théorème suivant :

$$1 + 3 = 2 \times 2$$

Le caractère analytique de celui-ci se voyait assuré, car la preuve reposait sur des fondations purement logiques.

Malheureusement, l'analyse des énoncés d'identité en termes objectuels compliquait le problème au niveau des jugements synthétiques. Considérons les trois énoncés suivants :

$H(A)$	:	Boole est un homme
$H(B)$	:	L'auteur des *lois de la pensée* est un homme
$A = B$	:	Boole est l'auteur des *lois de la pensée*

Dans tout système raisonnable, la *dérivation* de notre énoncé '$A = B$' ci-dessus débute toujours à partir d'un ou plusieurs énoncés dont le contenu est propre à un domaine extra-logique. Néanmoins, puisque l'objet A est identique à l'objet B, alors le *contenu* de cet énoncé est aussi celui de '$A = A$', lequel peut être *démontré* à partir de moyens purement logiques. Et la difficulté s'étend au-delà des énoncés d'identité. Les noms propres 'A' et 'B' désignant le même objet, les énoncés '$H(A)$' et '$H(B)$' possèdent le même contenu jugeable. Néanmoins, Frege ne les tenait pas pour analytiquement équivalents. Or, comme nous l'avons vu en section 1.4.3, il lui importait que deux énoncés partageant le même contenu entretiennent cette relation.

Nos précédentes considérations nous livrent une solution à ce problème. Puisque '$H(A)$' et '$H(B)$' d'une part, '$A = A$' et '$A = B$' d'autre part, possèdent des *modes de détermination* différents, il suffirait de déplacer les notions d'analytique et de synthétique des contenus aux modes de détermination, *i.e.* de les attribuer comme propriétés non plus aux premiers mais aux seconds. Nous pourrions croire que Frege avait lui-même envisagé cette option dans les *Grundlagen* lorsqu'il expliqua que "les distinctions [...] de l'analytique et du synthétique ne concernent pas le contenu du jugement" (p. 3 / 127). Cependant l'illusion est de courte durée, car il expliqua immédiatement qu'il n'attribuait cette distinction à "la légitimité de l'acte de juger", et non au mode de détermination :

> Si l'on ne rencontre sur ce chemin que des lois logiques générales et des définitions, on a une vérité analytique. [...] En revanche, s'il n'est pas possible de produire une preuve sans utiliser des énoncés qui ne sont pas de logique générale, mais concernent un domaine particulier, l'énoncé est synthétique. (Frege 1884, p. 4 / 127)

Frege identifiait vérités logique et analytique. Ce dont la vérité peut être démontrée par des voies purement logiques est analytique. Or seuls les *contenus* des énoncés sont susceptibles d'être

prouvés vrais. Ainsi, pour formuler différemment ses explications – l'écart est purement terminologique –, disons que c'est bien le contenu d'un énoncé (ou d'un jugement) qui est analytique ou synthétique, mais qu'il l'est *en vertu de la manière dont il peut être démontré*. Et il n'est pas possible de ramener l'analyticité aux modes de détermination sans considérer que ces derniers, au détriment des contenus, constituent les éléments en jeu dans les démonstrations.

Frege accomplirait bientôt ce geste. Il constaterait que l'*énoncé* '$A = B$' ne devait pas être dérivable dans un système logique tandis que, selon ses conceptions de l'époque, un tel système permettait de *démontrer* son contenu à travers '$A = A$'. Il en conclurait que l'élément démontré à travers la dérivation de '$A = B$' devait posséder quelque chose de différent de celui prouvé *via* celle de '$A = A$', et qu'il ne pouvait donc s'agir de ce qu'il nommait leur 'contenu'. Il identifierait alors cet élément au mode de détermination.

Certaines subtilités terminologiques compliquent la présentation du problème. Pour en rendre compte, il convient de restaurer quelques instants la différence entre le contenu - qui intègre la coloration – et le contenu conceptuel – qui s'en débarrasse. Dans la *Begriffsschrift*, Frege nomma 'contenu conceptuel' cette portion du contenu d'un énoncé apte à être démontrée et jugée vraie ou fausse. Après 1890, ce rôle incomberait aux pensées :

> On extraira ainsi du contenu d'une phrase une partie qui seule peut être reconnue comme vraie ou rejetée comme fausse. C'est cela que j'appelle la pensée exprimée par la phrase. (Frege 1906c, pp. 213-214 / p. 236)

Contenus conceptuels jugeables et pensées sont donc similaires à cet égard. Par ailleurs, contenus conceptuels (jugeables ou non) et sens (pensée ou non) sont tous deux ce qu'une expression *exprime*[217]. Il existe néanmoins d'importantes différences entre les deux notions, et le passage de la première à la seconde eut lieu en deux étapes.

En 1879, Frege constata qu'il était parfois indispensable de conférer des noms différents à un même objet, indépendamment des enjeux syntaxiques auxquels répondent les définitions. Cela était dû au fait qu'un objet pouvait être présenté de diverses façons *sans qu'il soit toujours évident d'établir que le même objet était ainsi déterminé*. Par conséquent, des noms différents devaient être attachés à des modes de détermination différents. Tout le problème était de comprendre où se situaient ces derniers. Étaient-ils exclus, comme la coloration, ou au contraire intégrés aux contenus conceptuels ? Suivant une intuition tout à fait compréhensible, Frege opta d'abord pour la première possibilité. Un énoncé exprime, comme contenu conceptuel, une circonstance qui peut être ou ne pas être un fait du monde. Lorsque l'énoncé porte sur un objet, celui-ci a sa place au sein de la circonstance en question, ce qui n'est pas le cas de la manière dont il est déterminé. Par exemple, la circonstance que le père de Pierre est un homme est à propos du père de Pierre, et n'a rien à voir avec la façon dont celui-ci nous est donné à travers l'expression 'le père de Pierre'. Puisque le contenu conceptuel d'un nom propre devait contribuer à celui de l'énoncé où il figurait, donc à la circonstance en question, Frege choisit d'en bannir le mode de détermination.

À cette époque, ce dernier fut limité aux noms propres. Rien de tel n'était attaché ni aux noms de concepts, ni aux énoncés. Le premier point provenait d'une vision intensionnaliste des concepts.

217. En section 1.4.3, nous avons expliqué que Frege avait d'abord commis une légère maladresse terminologique à cet égard. Dans la *Begriffsschrift*, il disait que l'expression exprimait son *contenu*. Néanmoins, il n'a jamais considéré qu'elle exprimait sa coloration, laquelle fait pourtant partie du contenu. À ses yeux, un énoncé exprime précisément ce qui peut être jugé vrai ou faux, ce qui peut être l'objet d'une démonstration ; tandis qu'un nom d'objet ou de concept exprime ce qui contribue à cette partie du contenu de l'énoncé où il figure. Autrement dit, ils expriment tous deux leurs contenus *conceptuels*. En 1890, il affirmerait sans ambiguïté qu'un nom exprime son sens, excluant la coloration. Il corrigerait ainsi la tournure erronée de la première période, qui n'est en aucun cas la manifestation d'une réelle évolution à ce sujet entre les deux époques, mais seulement d'une maladresse initiale de formulation.

Frege reconnaissait que les expressions ‘Boole’ et ‘l’auteur des *Lois de la pensée*’ partageaient un même contenu conceptuel différemment déterminé. En revanche, il estimait que les expressions ‘vit à Paris’ et ‘vit dans la plus grande ville de France’ présentaient des *contenus conceptuels* distincts, bien qu’ils soient extensionnellement équivalents. Pour reprendre une formule de May qui convient à ce contexte : il pensait que toute l’information pertinente relative à un nom de concept était située dans son contenu conceptuel, *i.e.* dans le concept lui-même, conçu comme intensionnel. À ses yeux, il n’existait donc pas deux manières différentes de déterminer un concept. Par conséquent, il était inutile de conférer deux noms distincts à un même concept (hormis pour permettre l’allègement des formules).

La même idée fut développée concernant les énoncés, comme il l’expliqua clairement dans la *Begriffsschrift*[218] :

> Comme *seul* [*le contenu conceptuel*] a une signification pour la langue formulaire, elle n’a pas besoin de faire de distinction entre des énoncés qui ont le même contenu conceptuel. (Frege 1879b, p. 3 / 17)

Ceci vaut aussi bien pour tout les langages idéaux – *i.e.* les langages concentrés uniquement sur le contenu conceptuel –, notamment pour les extensions de la langue formulaire qui conviendraient aux sciences particulières. Ce n’est donc pas pour rien que Frege choisit des noms propres afin d’illustrer l’intérêt du symbole ‘$\equiv$’ dans le §8. Relativement aux énoncés, la tâche de ce signe était extrêmement limitée. Il était employé "entre contenus jugeables presque uniquement que pour fixer le sens de nouvelles désignations"[219], *i.e.* pour procéder aux définitions puis pour gérer les substitutions liées à ces dernières (d’où l’usage du terme ‘presque’). Ainsi, des expressions pour des contenus jugeables ne figurent de part et d’autre du signe ‘$\equiv$’ que si l’une n’est qu’une version abrégée de l’autre[220] ; et tous les jugements d’identité de contenu conceptuel entre des énoncés sont *analytiques*.

Reprenons les noms ‘A’, ‘B’ et ‘$H(\xi)$’ tels qu’ils ont été définis ci-dessus. Frege savait que la différence entre les modes de détermination attachés à des noms propres devait, d’une manière ou d’une autre, être répercutée au niveau des énoncés *d’identité* dans lesquels ils figurent. La

218. même s’il cultivait une ambiguïté à ce sujet, s’exprimant parfois comme si des énoncés tels que ‘$\neg\neg A$’ et ‘A’ partageaient le même contenu conceptuel, notamment dans le §5. Il existe incontestablement une certaine tension à cet égard, dont héritèrent ses vues tardives. Nous en parlerons dans notre troisième chapitre.

219. (Frege 1881, p. 40 / 46)

220. Frege commençait par attribuer le sens d’un ancien terme conceptuel complexe $\ulcorner\Phi(\xi)\urcorner$ à un nouveau signe simple ‘$F(\xi)$’ : $\ulcorner\Vdash F(a) \equiv \Phi(a)\urcorner$. Il utilisait ensuite l’affirmation relative à cette définition – $\ulcorner\vdash F(a) \equiv \Phi(a)\urcorner$ – comme prémisse de son axiome de substituabilité (52) afin de remplacer ‘$\Phi(\xi)$’ par ‘$F(\xi)$’ dans une quelconque expression.

Il faut néanmoins admettre une exception : lorsque ‘$\equiv$’ figure dans la portée d’un quantificateur. Dans la *Begriffsschrift*, ceci survint à la seule occasion de la formule (68), destinée à gérer la particularisation d’un énoncé universel :

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(c) \\ b \\ (\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})) \equiv b \end{array}$$

Selon les conceptions de 1879, elle signifie que si un signe a même contenu conceptuel que ‘$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})$’ et si le contenu conceptuel de ce signe est vrai, alors tout objet possède la propriété f. Ceci ne contredit en rien notre conclusion car, lorsque Frege instantia cette formule pour procéder à des dérivations, il remplaça toujours ‘$f(\xi)$’ par un terme $\ulcorner\Phi(\xi,\zeta)\urcorner$ et b par un nom simple ‘$F(\xi)$’ tels que ‘$F(\xi)$’ avait été introduit par définition à partir de ‘$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \Phi(\xi,\mathfrak{a})$’ (en augmentant potentiellement le nombre d’arguments attendus par ‘F’) :

$$\ulcorner\Vdash F(c) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \Phi(c,\mathfrak{a})\urcorner$$

Les lettres latines ‘a et ‘f’ étaient donc destinées à des substitutions qui laissaient toujours figurer un ancien *definiens* et son ancien *definiendum* de part et d’autre du symbole ‘$\equiv$’.

distance importante qui sépare '$A \equiv A$' de '$A \equiv B$' l'avait initialement conduit à reconnaître l'existence des modes de détermination. Il en conclut que le signe '$\equiv$' exprimait une relation entre des noms, qui tenait compte des modes de détermination qui leur étaient attachés. Ceci permettait de reconnaître une différence de contenu conceptuel entre '$A \equiv A$' et '$A \equiv B$' :

$$\vdash (A \equiv A) \not\equiv (A \equiv B)$$

Frege revint sur ces idées lors du mouvement de 1881-1882, en réalisant que sa conclusion initiale était insuffisante. La différence entre les modes de détermination attachés à des noms propres devait en réalité être répercutée quelque part au niveau de *tous* les énoncés – d'identité ou non – dans lesquels ces noms figurent. Si '$A = B$' exprime que les modes de détermination attachés à 'A' et 'B' conduisent au même objet, alors '$H(A)$' exprime que le mode de détermination attaché à 'A' conduit à un objet qui a la propriété 'H'. Frege comprit que si '$A = A$' et '$A = B$' différaient en contenu conceptuel, il devait en aller de même de '$H(A)$' et '$H(B)$'. C'était d'ailleurs le seul moyen de respecter le principe selon lequel deux énoncés différents ne partagent jamais le même contenu conceptuel. Néanmoins, à ce stade, n'importe quel concept devenait métalinguistique, *i.e.* ne subsumait plus que des noms. Cette conclusion, naturellement, était inacceptable. Le seul moyen de s'en prémunir, tout en restaurant la symétrie entre $H(\xi)$ et $\xi \equiv \zeta$ que les conceptions de 1879 avaient brisée, consistait à renoncer à la fois à ce principe et à l'analyse métalinguistique de l'identité, donc à rendre un autre compte de l'écart entre '$A = A$' de '$A = B$'. Voilà l'étape qui fut franchie dans les *Grundlagen*. Frege estima que la distance considérable qui séparait ces deux énoncés ne provenait pas d'une différence de contenu conceptuel mais de mode de détermination. Au contraire de l'idée de 1879, celle-ci s'appliquait *aussi* à '$H(A)$' et '$H(B)$'.

Il étendit ainsi les modes de détermination aux énoncés, qui se tenaient encore à l'écart des noms de concepts. Il n'était donc pas encore possible d'envisager un processus de combinaison des modes de détermination parallèle à celui des contenus conceptuels, et d'élucider plus précisément la manière dont le mode de détermination attaché à un nom propre contribuait à celui qui est lié aux énoncés incorporant ce nom. En 1882, Frege estimait finalement que la manière dont 'le père de Pierre' déterminait le père de Pierre jouait un rôle dans la manière dont 'le père de Pierre est un homme' déterminait la circonstance que le père de Pierre est un homme. Mais quel était ce rôle ? Il n'y répondrait pas avant 1890.

Nous venons de décrire la première étape de la transition entre le contenu conceptuel pré-1890 et le sens post-1890. Sans surprise, elle correspond à ce que nous nommons le 'premier mouvement' depuis le début de ce chapitre, *i.e.* le moment situé entre 1881 et 1882 qui vit Frege adhérer au logicisme, modifier sa vision de la quantification, procéder à son analyse du concept de nombre, adopter la relation d'identité objectuelle et, nous venons de le voir, étendre le mode de détermination aux énoncés. Cependant, en déplaçant ce qui distinguait si profondément '$A = A$' et '$A = B$' du contenu conceptuel au mode de détermination, il attribua sans s'en rendre compte la même propriété d'analyticité à ces énoncés. En effet, cette dernière était caractérisée en termes de preuves : est analytique ce qui est démontrable au moyen des seules ressources logiques. Or les constituants des démonstrations sont ce qui peut être reconnu comme vrai ou rejeté comme faux, *i.e.* les contenus conceptuels. Or le contenu conceptuel de '$A = B$' étant celui de '$A = A$', il est analytique. La difficulté était réelle, et la solution consisterait, en 1890, à reconnaître le mode de détermination – qu'il appellerait '*Sinn*' – comme l'élément susceptible d'être jugé et démontré. Mais il lui fallu huit longues années pour aboutir à cette conclusion, et il convient de comprendre pourquoi ce problème ne lui a pas sauté aux yeux plus tôt.

Il est souvent avancé que Frege révisa sa notion de contenu conceptuel lorsqu'en 1890, il comprit que la réponse apportée au fait que '$A \equiv B$' était analytique et '$A \equiv A$' synthétique

ne convenait pas aux énoncés du type '$H(A)$' et '$H(B)$'. Mais cette interprétation ne tient pas compte du fait qu'il avait *déjà* renoncé à l'analyse métalinguistique des énoncés d'identité en 1882, autrement dit que sa réponse ne convenait plus même pour '$A = B$' et '$A = A$'. Frege n'aurait pas épousé des vues qui échouaient manifestement à surmonter une difficulté que ses précédentes conceptions étaient vouées à résoudre. Il n'existe qu'une seule explication : la difficulté avait changé de visage entre les deux périodes, autrement dit la différence essentielle entre '$A = B$' et '$A = A$' n'était plus interprétée en termes d'analytique-synthétique. Attention, nous ne contestons pas qu'il tenait le premier énoncé – 'Boole est l'auteur des *Lois de la pensée*' – pour synthétique, et le second – 'Boole est Boole' – pour analytique, ni que ses conceptions d'alors rentraient en conflit avec cette conclusion. Nous disons seulement qu'il prit tardivement conscience du problème parce que les deux enjeux – la valeur des énoncés d'identité et la distinction analytique-synthétique – étaient désormais distincts, tandis qu'ils restaient confondus en 1879.

À cette date, Frege estimait que si deux noms propres t et t' étaient identiques ou définis l'un à partir de l'autre, autrement dit s'ils étaient associés au même mode de détermination, alors $\ulcorner t \equiv t' \urcorner$ était analytique. Au contraire, s'ils étaient attachés à des modes de détermination différents, alors $\ulcorner t \equiv t' \urcorner$ était synthétique. La différence fondamentale entre '$A = B$' et '$A = A$' était donc exactement celle qui séparait les énoncés synthétiques des énoncés analytiques. À cet égard, le logicisme des *Grundlagen* modifia radicalement la situation. En 1884, Frege considérait finalement que les énoncés '$2 + 2 = 2 \times 2$' et '$2 + 2 = 2 + 2$' étaient *tous deux* analytiques bien qu'ils soient séparés par le même fossé qui se tient entre '$A = B$' et '$A = A$'.

Certes, l'idée essentielle aux positions de 1879 était maintenue : $\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner$ n'a pas – disons-le ainsi – la même *valeur* que $\ulcorner t'_1 = t'_2 \urcorner$ si les modes de détermination attachés aux deux noms sont identiques dans un cas et différents dans l'autre. Cependant, en 1879, cette différence entre valeurs *coïncidait* avec la distinction analytique-synthétique. Au contraire, avec l'avènement du logicisme, elle s'en écarta considérablement. En 1884, l'objectif de Frege n'était donc plus d'expliquer pourquoi $\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner$ pouvait être synthétique tandis que $\ulcorner t'_1 = t'_2 \urcorner$ était analytique, mais seulement de justifier leur différence de valeur. Il pensait y parvenir à travers l'idée que le contenu conceptuel commun aux deux énoncés était déterminé différemment dans chaque cas. Et cette réponse, contrairement à celle de la *Begriffsschrift*, s'adaptait généralement à tout énoncé de la forme $\ulcorner \Phi(t) \urcorner$, $\ulcorner \Phi(t, t') \urcorner$, etc. Par exemple, elle expliquait l'écart de valeur entre 'le père de Pierre a un fils' et 'Yves a un fils' – en supposant que Yves soit le père de Pierre. Bien sûr, elle foulait aux pieds la distinction entre analytique et synthétique, qui ne se verrait restaurer que lorsque Frege identifierait au mode de détermination ce qu'*exprime un énoncé* – ce qui peut être jugé ou démontré –, en modifiant simultanément sa vision de ce qui est ainsi déterminé. Mais si, à tort, il ne réalisa d'abord pas ce défaut, c'est parce que, à raison, ses yeux n'étaient plus braqués dans cette direction. La différence de valeur entre énoncés n'était plus corrélée à la distinction synthétique-analytique.

Notre interprétation est basée sur deux affirmations indépendantes : dans les *Grundlagen*, (1) Frege avait adopté l'identité objectuelle, (2) il reconnaissait une différence de valeur entre des énoncés tels que '$A = A$' et '$A = B$'. Si ces affirmations sont correctes, alors le seul moyen de garantir cette différence était d'en appeler au mode de détermination des *énoncés*. Une telle solution possédait le mérite d'expliquer *aussi* la différence de valeur qui existait entre des énoncés n'impliquant pas la relation d'identité, ce à quoi échouaient les conceptions de 1879.

Nous avons longuement justifié (1) dans la précédente section. Dans celle-ci, nous avons fondé (2) sur deux arguments. D'une part, Frege avait explicitement reconnu cette différence dans la *Begriffsschrift*, intégrant son signe '$\equiv$' précisément pour en rendre compte. Il est (très) peu

probable qu'il ait oublié entre temps un élément qui fut aussi déterminant dans l'élaboration de sa langue formulaire. D'autre part, il réaffirma son existence au sein des *Grundlagen*, en qualifiant de 'stérile' un résultat d'identité "de cela [...] qui nous est donné de la même manière", tandis que l'identité possède des "applications multiples et importantes" lorsqu'elle "permet de reconnaître comme identique ce qui nous est donné de manière différente" [221].

Un autre indice témoigne du fait que ce problème est resté bien en vue durant la période concernée. Il nous est livré à travers la relation que Frege entretenait avec Johannes Thomae, un de ses collègues à Iéna. Les deux hommes eurent de nombreux échanges scientifiques, avant que leurs rapports ne se détériorent grandement [222]. Thomae était membre de l'école formaliste qui défendait la thèse radicale de l'identification des nombres à des symboles formels. C'est notamment par son intermédiaire que Frege eut connaissance de cette école. Il en entreprit alors une critique radicale, à la fois dans l'article "Théories formelles de l'arithmétique" (1885) et à l'occasion des *Grundlagen*. Au §28 de cet ouvrage, il fit référence au *Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* [223] de Thomae, qu'il avait donc probablement lu. Au début de ce livre, celui-ci développa un argument lié à la relation d'identité que Frege cita, à partir de l'édition de 1898, dans dans le deuxième volume des *Grundgesetze* (p. 140). Thomae avait alors effectué quelques modifications depuis l'édition de 1880, à laquelle Frege avait eu accès à l'époque des *Grundlagen*. Voici la première version :

> L'égalité entre deux nombres $n = m$ signifie soit quelque chose de trivial, à savoir $n = n$ qui signifie que le nombre n est le nombre n, soit que n et m sont différents à certains égards, et c'est seulement après abstraction que ces nombres accèdent à l'égalité à partir de cette différence (Thomae 1890^1, 1898^2, p. 2)

Il ne nous importe pas ici de rentrer dans le détail de la thèse formaliste. Remarquons seulement que l'argument en question s'appuie lui-aussi sur une différence de valeur entre les énoncés '$n = m$' et '$n = n$'. Il est vrai que Frege ne le discuta directement ni dans les *Grundlagen* ni dans l'article de 1885. Néanmoins, il se tenait clairement au cœur des vues de Thomae. Il serait donc surprenant qu'il ne le lui soit apparu ni à la lecture de son ouvrage, ni lors des conversations qu'ils ont pu avoir.

Il s'agit donc d'un signe supplémentaire du fait que les conceptions de 1884 n'avaient pas fait fi du problème qui avait conduit à l'adoption du symbole '$\equiv$' en 1879. Mais ce signe nous dit encore davantage. Que ce soit dans sa confrontation au problème de Hume ou à la thèse formaliste, Frege devait rendre compte de la différence de valeur entre différents énoncés d'*arithmétique*, *i.e.* entre des énoncés qu'il considérait comme analytiques. Il est donc compréhensible qu'il n'ait pas abordé cette difficulté à travers la distinction analytique-synthétique – comme il l'avait fait en 1879 – et qu'il n'ait pas réalisé que sa nouvelle solution altérait cette distinction de manière inacceptable.

Car cette solution, nous avons vu à partir des points (1) et (2) qu'il pensait la tenir, et elle convenait aussi bien aux énoncés d'identité qu'aux autres : les différents habits qui conviennent à un même objet permettent de confectionner des vêtements distincts pour un contenu conceptuel jugeable, autrement dit la manière dont des objets sont déterminés influent sur la manière dont un contenu conceptuel jugeable est déterminé. En particulier, la valeur de la détermination que quelque chose est le même à laquelle contribue deux déterminations différentes de cette chose est plus importante que celle de la détermination que quelque chose est le même lorsqu'une seule détermination de cette chose est impliquée. L'écart de valeur entre les énoncés reflète ultimement un écart de valeur entre la manière dont leur contenu conceptuel est déterminé.

221. (Frege 1884, p. 79 / 193)
222. ce dont témoignent notamment les deux articles acrimonieux (1906a, 1908) publiés par Frege à l'encontre de Thomae.
223. (Thomae 1890^1, 1898^2)

Venons-en à notre question principale : qu'est ce qui engendra un retour sur cette position ? Quelles sont les causes du second mouvement ? Notre développement nous livre une réponse possible : peut-être Frege a-t-il réalisé que ses conceptions des *Grundlagen* étaient écartelées entre une volonté de maintenir le mode de détermination à l'extérieur du contenu conceptuel, *i.e.* de ce qui peut être jugé ou démontré, et une caractérisation de l'analytique et du synthétique en terme de preuves, *i.e.* qui affectait seulement les contenus conceptuels, non les modes de détermination. Néanmoins, si nous avons accordé cette place privilégiée au problème des jugements analytiques et synthétiques, c'est exclusivement parce qu'il nous fallait comprendre comment Frege avait pu développer – en 1882 – une thèse qui sombrait dans un piège qu'il avait préalablement – en 1879 – pris soin d'éviter. Il nous incombait d'expliquer que l'enjeu de la *Begriffsschrift* était ultimement l'écart de valeur entre '$A = A$' et '$A = B$', lequel ne coïncidait *plus* avec la distinction analytique-synthétique après l'avènement du logicisme.

Mais les positions de 1884 présentaient bien d'autres faiblesses, qui constituaient autant de portes d'entrée dans la grande mise au point de 1890. Prenons quelques instants pour présenter la difficulté la plus profonde, aujourd'hui bien connue des philosophes du langage. Il est clair qu'un énoncé ne véhicule pas seulement ce qui peut être jugé vrai ou faux. À travers lui, nous pouvons – disons-le ainsi – capter une coloration extérieure à cet élément. Néanmoins, ce qui est jugé vrai ou faux peut être saisi par quiconque maîtrise le langage. Formulons ce point dans le lexique fregéen : le contenu conceptuel jugeable – *i.e.* ce qu'*exprime* un énoncé, susceptible de jugement – peut être *saisi* par quiconque connaît le sens de tous les constituants de cet énoncé. Voilà ce que Frege se proposait d'élucider en expliquant la manière dont le contenu conceptuel d'un énoncé était composé à partir des contenus conceptuels de ses constituants. Cependant, il est parfaitement possible de saisir ce qu'exprime 'le père de Pierre' sans savoir qu'Yves est le père de Pierre, autrement dit sans savoir à quel objet renvoie cette expression. Par conséquent, le contenu conceptuel jugeable ne peut être composé directement à partir de cet objet – Yves – mais seulement à partir de la manière dont il est déterminé, accessible même à qui ignore ce qui est ainsi déterminé. Le contenu conceptuel d'un nom propre n'est donc pas l'objet qu'il désigne, mais le mode de détermination qui lui est attaché.

C'est en cernant ce point précis que Frege fit le grand saut. Il réalisa que la circonstance – qu'il appellerait bientôt la '*pensée*' – que le père de Pierre est plus grand que la mère de Marie, toute évaluable soit-elle *en fonction* du monde – du père de Pierre, de la mère de Marie et du rapport qu'ils entretiennent –, n'est *constituée* ni par ces individus ni par le rapport qui les lie, car ceux-ci ne sont pas immédiatement accessibles à quiconque connaît le sens de ces termes. Il comprit alors que cette circonstance *concerne* les objets et la relation en question non parce qu'elle en est composée, mais parce qu'y contribuent les manières dont ces objets et cette relation sont déterminés. En somme, il cessa de croire que ce qui est exprimé peut-être déterminé de différentes manières, pour adhérer à l'idée que ce qui est exprimé *est* la manière dont quelque chose est déterminé. Dans les cas des noms propres, ce quelque chose ne faisait pas mystère : il s'agissait des objets. Dans le cas des énoncés, il trouverait finalement sa réponse : les valeurs de vérité, dont nous expliquerons bientôt ce qui la motiva.

Dans la *Begriffsschrift*, il avait présenté le fossé entre les énoncés '$A \equiv A$' et '$A \equiv B$' en termes d'analytique et de synthétique. Dans les *Grundlagen*, il évoquait un écart entre les applications respectives de '$A = A$' et '$A = B$'. Durant toute la première période de sa vie scientifique, il resta donc extrêmement vague concernant ce que nous avons nommé 'une différence de valeur', et qui provient du fait qu'un même objet peut être déterminé de manières distinctes. Les choses se précisèrent en 1890 et, dans "Sens et référence", le terme était trouvé. Il parla d'une différence de

valeur de connaissance [*Erkenntniswert*] [224]. Or notre connaissance se voit étoffée lorsque nous parvenons à démontrer une vérité. La différence de valeur avait donc trait à la partie susceptible d'être jugée vraie ou fausse au sein du contenu des énoncés. Pour que cette différence soit garantie par un écart entre les modes de détermination, comme il le pensait depuis 1882, il fallait que le mode de détermination *soit* ce qui dispose d'une valeur de vérité. La restructuration avait été opérée, et la distinction analytique-synthétique s'en trouvait restaurée.

Peut-être Frege a-t-il procédé à cette restructuration en examinant plus consciencieusement cette distinction. Ou peut-être le défaut originel de ses conceptions initiales lui apparut-il soudainement : considérer qu'un élément potentiellement inaccessible à celui qui maîtrise le langage – l'objet désigné par un nom propre – contribue à ce que quiconque maîtrise le langage peut saisir – le contenu conceptuel jugeable. Nous ne pouvons ni ne souhaitons écarter ces possibilités. En amorçant cette section, nous avons averti que notre lecture des *causes* du second mouvement était sujette à la même critique que toute autre : le manque d'appui textuel. La quasi-totalité du *Nachlass* de l'époque s'est perdu, et l'étincelle qui mit le feu aux poudres est désormais invisible. Il nous semble pourtant en distinguer l'ombre, qui ne se rapporte à aucun des deux points ci-dessus. Ce qui fut dit dans cette section préparait déjà le terrain, en permettant d'expliquer par anticipation pourquoi l'interprétation que nous nous apprêtons à présenter nous apparaît comme la plus probable.

Avant de nous lancer, nous voulons soumettre trois arguments au lecteur. D'une part, il importe de comprendre ce qui manquait, en 1884, pour aboutir aux idées de la seconde période. Frege entendait développer un langage idéal qui manifestait les liens entre contenus conceptuels afin d'expliquer comment la vérité d'un contenu conceptuel jugeable pouvait justifier celle d'un autre, autrement dit comment le second pouvait être *déduit* du premier [225]. Pour reconnaître le mode de détermination comme constituant premier des démonstrations – *i.e.* comme ce qui peut être à la fois jugé et déduit ; ce qui possède une valeur de vérité –, il lui fallait donc une conception des *liens* qui unissent différents modes de détermination, ce dont il ne disposait pas en 1884. Or ce qui, selon nous, constitue l'élément déclencheur de la révolution de 1890 révèle *immanquablement* que les modes de détermination des objets – dont Frege avait admis l'existence dès 1879, et qui se tenait au cœur du problème de l'identité – étaient aussi sujets à des opérations compositionnelles. Autrement dit, en se confrontant au problème que nous allons présenter, il n'a *en aucune manière* pu ignorer que les modes de détermination étaient unis par un processus analogue à celui qu'il dédiait aux contenus conceptuels, et c'est précisément ce qui leur faisait défaut pour postuler au titre de substrats de la vérité.

D'autre part, notre lecture éclairera un point particulièrement obscur (et particulièrement discuté) des thèses post-1890 : l'identification de la référence des énoncés aux valeurs de vérité. L'idée que ce qui est exprimé *est* la manière dont quelque chose est déterminé s'avérait convaincante vis-à-vis des noms propres. Ces derniers exprimaient alors un sens à travers lequel un objet – une référence – était déterminé. En revanche, le cas des énoncés posait davantage problème. Frege trancha celui-ci d'une manière pour le moins lapidaire, en identifiant leur référence aux valeurs de vérité. Il ne justifia jamais clairement sa décision. D'après notre interprétation, l'évènement qui entraîna le deuxième mouvement ne lui laissait, à cet égard, aucun autre choix.

Le dernier argument est à nos yeux le plus précieux. Quelle que soit la vision adoptée concernant le mouvement de 1881-1882, une même conclusion s'impose. Selon l'orthodoxie, Frege n'avait pas encore abandonné l'analyse métalinguistique de l'identité dans les *Grundlagen*. Dans ce cas, il commit indéniablement une erreur majeure, car les idées développées à propos des objets

224. (Frege 1892b, p. 143 / 102)
225. Ceci fut raconté en détail en section 1.4.6.

abstraits en appelaient fermement à ce renoncement. À nos yeux, il avait déjà franchi ce cap en 1884. Si nous disons vrai, alors il échoua à voir l'influence désastreuse de ce geste sur la distinction analytique-synthétique. En somme, Frege fut responsable d'une faute philosophique considérable, quelle qu'elle soit. Ceci peut sembler surprenant de la part d'un auteur dont la sensibilité, le talent et la rigueur philosophiques ne sont plus à démontrer. L'explication dépend d'un point, trop souvent ignoré, que nous nous sommes fixé comme principe durant toute cette reconstitution historique : son acuité philosophique n'était mise en action que lorsque ses objectifs mathématiques l'exigeaient. Son but principal demeurait la dérivation des principaux théorèmes de l'arithmétique et de l'analyse, et il ne se confronta à d'autres problèmes que lorsqu'il en était directement affecté. En section 1.4, nous avons vu que l'analyse de la quantification proposée dans la *Begriffsschrift* était terriblement défaillante. En section 1.5, nous avons expliqué qu'il la conserva néanmoins jusqu'à ce qu'un enjeu lié à son projet majeur ne lui en suggère une autre. Notre interprétation des causes du second mouvement se soumettra au même principe, car nous trouverons à leur base une question à laquelle les développements *mathématiques* de Frege l'ont confronté [226].

1.6.2 Concepts et fonctions : entre intensionnalité et extensionnalité

Nous allons défendre l'hypothèse suivante : le mouvement de 1890 fut causé par l'entrée en scène d'une nouvelle notion de fonction – inédite, différente de celle de 1879. Nous convenons que cette idée peut spontanément soulever certaines objections. Les travaux techniques de Frege ne le confrontaient-ils pas en permanence aux fonctions d'addition, de multiplication, etc ? La tâche considérable qu'il s'était fixé ne consistait-elle pas à définir des noms qui *contenaient* ces *entités* ? Étonnamment, ces questions admettent une réponse négative. Frege a pu conduire son projet à un stade très avancé sans solliciter aucune autre fonction que l'opérateur d'extension. Par ailleurs – et surtout –, même sans tenir compte de cette donnée, il est incontestable que son objectif de réduction de l'arithmétique ne nécessitait ni de quantifier sur les fonctions ni de les livrer en arguments à l'opérateur d'extension. Il n'exigeait donc pas d'introduire pour elles des lettres *générales*, qui auraient dévoilé une structure toute aussi générale censée refléter leur rôle vis-à-vis des autres contenus. Si des fonctions particulières se glissaient ci et là, rien n'appelait à une analyse aussi poussée que celle qui avait été réalisée pour les concepts. En somme, la stratégie décrite dans les *Grundlagen*, et suivie dans le manuscrit perdu, avait laissé les fonctions dans l'ombre des concepts. Or il suffisait de questionner leur nature pour réaliser les défauts de la notion de contenu conceptuel, ainsi que le caractère compositionnel des modes de détermination. Si Frege n'a d'abord pas porté ses yeux à cet endroit, certains éléments l'ont (tardivement) poussé dans cette direction. L'affaire était alors classée, et la révolution de 1890 s'imposait.

1.6.2.1 Les concepts : une vision intensionnaliste durant la première période

Nous nous sommes plusieurs fois appuyés sur une affirmation que nous n'avons pas encore justifiée, selon laquelle Frege adhéra à une vision intensionnaliste des concepts jusqu'en 1890. Il est temps de combler cette lacune. Afin de cerner l'évolution entre les positions pré et post-1890, comparons les deux passages suivants :

> Le concept 'planète dont la distance par rapport au soleil se situe entre celle de Vénus et celle de Mars' est encore quelque chose d'autre que l'individu Terre, quand bien même seul celui-ci tombe sous ce concept. Sinon on ne pourrait former des concepts

226. Nous n'aurons désormais plus besoin de tenir compte du problème de la coloration, et pouvons réutiliser le terme 'contenu' dans le sens de 'contenu conceptuel'.

> de contenus [*Inhalter*] différents dont les extensions [Umfang] se limiteraient au seul individu Terre. (Frege 1881, pp. 19-20 / p. 27)

> [Les logiciens de l'extension] ont raison si, par leur préférence pour l'extension du concept [*Begriffsumfang*] par rapport au contenu du concept [*Begriffsinhalt*], ils font savoir qu'ils considèrent la référence des mots comme la chose essentielle pour la logique, et non pas le sens. Les logiciens du contenu n'en restent que trop volontiers au sens ; car ce qu'ils appellent contenu [...] est bien le sens. (Frege 1892-1895, p. 133 / 145)

Une rapide mise au point s'impose, car nous faisons face à une classification inédite sous la plume de Frege. Et pour cause, il s'adressait à des logiciens qui divisaient le concept entre son contenu – ou son intension – et son extension. Il emprunta ainsi leur manière de parler, qui ne correspondait pas à la sienne. Avant (respectivement après) 1890, il appelait 'concept' le contenu conceptuel (resp. la référence) d'un nom insaturé. La question n'était donc pas de savoir si le contenu conceptuel (resp. la référence) d'un tel nom était l'intension ou l'extension d'un concept – il (resp. elle) *était* le concept –, mais de savoir s'il (resp. elle) était intensionnelle ou extensionnelle. En somme, il fallait déterminer si ce que Frege nommait 'concept' était ce que ces logiciens appelaient 'intension' ou 'extension de concept', autrement dit si deux concepts différents pouvaient ou non subsumer exactement les mêmes objets.

Vu sous cet angle, le premier extrait indique clairement une réponse positive. Si la notion *fregéenne* de concept était extensionnelle, alors il n'existerait à ses yeux qu'un seul concept subsumant uniquement l'objet Terre, et la différence entre l'objet et le concept en question ne pourrait être établie de cette manière. Pour que *sa* distinction entre concept et objet soit justifiée par son argument, il importe donc que *son* concept soit intensionnel. Dans le deuxième extrait, Frege se montra plus clair : ce que les logiciens appelaient 'contenu' – 'intension' – de concept était à ses yeux le *sens* des termes insaturés ; tandis que ce qu'ils nommaient 'extension' de concept correspondait pour lui à la *référence* de ces termes, *i.e.* au concept lui-même.

En 1890, Frege avait donc changé son fusil d'épaule, délaissant une vision intensionnaliste au profit d'une conception extensionnaliste des concepts. Mais nous voulons insister sur un point que ces passages pourraient obscurcir. Jamais l'extension et l'intension ne furent conçues comme les différentes parties d'un concept – quelle que soit la manière dont le nom 'partie' est entendu. Dès 1881, Frege regardait l'extension [*Umfang*] comme un objet attaché au concept. Le terme d''extension' était justifié par le fait que des concepts subsumant les mêmes objets – autrement dit des concepts extensionnellemet équivalents – étaient liés au même objet – donc "avaient la même extension". Mais l'extension n'a jamais appartenu au concept, elle demeura dès le début une entité complète – un objet – à laquelle une entité incomplète – un concept – était liée.

Après le second mouvement, Frege n'admettait plus aucune distinction entre concepts coextensifs. Le terme 'représentant' [*Vertreter*] indiquait alors parfaitement le rôle de l'extension, car cet objet n'était plus lié qu'à un *unique* concept, il le *représentait* dans la catégorie des objets [227]. Paradoxalement, le nom 'extension', hérité de la première vision des concepts, ne convenait plus, parce que l'extension avait cessé d'être le contrepoint d'une quelconque intension. En 1881, le saut du concept à l'extension signait *à la fois* le passage de quelque chose d'intensionnel à quelque chose d'extensionnel, et de quelque chose d'insaturé [228] à quelque chose de saturé. Après 1890, la première dimension était perdue, cédant toute la place à la seconde. Frege continua néanmoins

227. Nous en dirons davantage à ce sujet en section 3.2.3.5.

228. Les expressions à travers lesquelles nous entendons référer à une entité insaturé à partir d'un nom propre sont touchées par un célèbre paradoxe dont nous discuterons longuement en section 3.2.3.5.

d'utiliser le nom 'extension', qui s'était ainsi *entièrement* déchargé de son acception traditionnelle.

D'une certaine manière, l'intension conserva un rôle à l'époque des *Grundgesetze*. Pour Frege, ce que les logiciens appellent traditionnellement ainsi est le *sens* d'une expression insaturée, *i.e.* le *mode de détermination* d'un concept. Le sens n'est en effet pas entièrement caractérisé par les objets subsumés par le concept auquel il conduit. Néanmoins, il n'est pas lui-même un concept intensionnel, ni ne détermine un tel concept. Il n'est ni une propriété ni un "contenu" du concept, car il existe différentes manières de donner un même concept. Ainsi, Frege reprochait aux logiciens une confusion entre le "contenu propre" du concept et les habits dans lesquels celui-ci est présenté. Ce reproche, modulo quelques arrangements, s'adressait rétrospectivement à lui-même : à tort, il avait d'abord conçu le mode de détermination du concept comme *étant* le concept.

Voilà le chaînon manquant des conceptions des *Grundlagen*. Désormais, un mode de détermination était attaché aux noms propres *et* aux noms de concepts. Cette rectification permettait donc d'analyser celui de l'énoncé comme composé à partir de ces derniers. La mécanique compositionnelle était dévoilée, et Frege pouvait sereinement rehausser d'un cran ce qu'une langue permet *d'exprimer*, passant de ce qui est désigné à la manière dont ceci est désigné. Le premier élément acquérait le nom de '*Bedeutung*', tandis que le second se voyait attribuer celui de '*Sinn*'.

Nous allons livrer les détails de cette transition. Néanmoins, nous souhaitons préalablement répondre à une potentielle objection : peut-être les *Grundlagen* étaient-ils déjà traversés par une vision extensionnaliste des concepts. C'est notamment ce que soutiennent Heck et May [229]. Nous avons trouvé, dans leurs écrits comme ailleurs, un *unique* argument appuyant cette conclusion : au sein de l'ouvrage, Frege se serait lui-même prononcé dans ce sens. Nous allons voir que le passage concerné est en réalité sujet à plusieurs interprétations, générant un conflit que le contexte de 1884 est seul capable d'arbitrer. C'est donc sur la base de celui-ci que nous allons d'abord nous prononcer, avant d'examiner l'extrait en question [230].

L'idée de Heck et May pose un premier problème. Nous verrons bientôt que, dans la perspective de 1884, l'extensionnalisation du contenu des expressions insaturées conduit à identifier celui des énoncés aux valeurs de vérité, *i.e.* à considérer que tous les énoncés vrais expriment le même contenu. Cette position était intenable pour Frege, et l'aurait immanquablement motivé à restaurer la spécificité du contenu à travers le mode de détermination – le sens –, afin d'identifier

229. (Heck et May 2010, Heck 2017)

230. Nous pourrions entrevoir une première objection à la lecture de Heck et May à travers ce que nous avons dit plus haut. En épousant une conception extensionnaliste, Frege ne reconnaissait plus l'*extension* d'un concept comme le pendant d'une intensionnalité quelconque, galvaudant totalement le sens habituel du terme. Or une note de bas de page des *Grundlagen* nous informe qu'il "suppos[ait] connu ce qu'est une extension de concept" (p. 80, phrase tronquée dans la traduction française). Pourtant, les logiciens de son époque ne concevaient pas l'extension comme le représentant d'une entité *déjà* extensionnelle. Frege aurait donc eu toutes les raisons du monde d'expliquer cette notion, *i.e.* de *ne pas* la supposer connue.

Voyons maintenant la première apparition du terme dans les *Grundgesetze*, située au sein d'un passage évoquant l'axiome qui régissait l'opérateur pour les parcours-de-valeurs, et notamment pour les extensions :

> Un désaccord peut [...] survenir au sujet de ma loi fondamentale pour les parcours-de-valeurs (V), qui n'a peut-être pas encore été explicitement formulée telle quelle par les logiciens, bien qu'ils raisonnent en accord avec elle lorsque, par exemple, ils parlent d'extensions de concepts. (Frege 1893, p. VII)

Cette fois, Frege se fit plus prudent. Certes, il estima que les logiciens raisonnent conformément à sa loi V lorsqu'ils parlent d'extensions. Néanmoins, on voit mal ce qui aurait occasionné les possibles désaccords envisagés, sinon une mauvaise appréciation des extensions et de la manière dont elles se comportent. On pourrait donc lire ce passage comme une mise en garde contre, par exemple, la tentation d'imaginer un rapport entre l'extension et une quelconque extensionnalisation. Cependant, nous verrons plus tard une autre interprétation s'avérer plus convaincante. En outre, tout ceci n'est qu'affaire de nuances, ne justifiant aucune conclusion sérieuse. La nôtre s'appuiera donc sur d'autres éléments.

cette valeur de vérité à autre chose – la référence. Autrement dit, la distinction sens-référence n'aurait pu rester de si longues années en gestation.

Mais il existe une alternative plus modérée, car le lien entre l'extensionnalité des concepts et la réduction des contenus jugeables aux valeurs de vérité n'est pas immédiat. Dans un premier temps, Frege pourrait avoir échoué à l'établir. Considérons les énoncés suivants :

$V_1(Y)$	:	Yves vit en Chine
$V_1(Z)$	:	Le père de Pierre vit en Chine
$V_2(Y)$	:	Yves vit dans un pays de plus de $1,3$ milliard d'habitants
$V_2(Z)$	:	Le père de Pierre vit dans un pays de plus de $1,3$ milliard d'habitants

Si les contenus de '$V_1(\xi)$' et de '$V_2(\xi)$' sont extensionnels, alors la circonstance qu'Yves vit en Chine est aussi la circonstance qu'Yves vit dans un pays de plus de $1,3$ milliard d'habitants. Par conséquent, s'il subsiste un écart entre les deux énoncés, il ne peut être produit que par les différentes manières dont cette même circonstance est déterminée. Frege aurait ainsi pu apporter dans le cas des concepts la même réponse qu'il avait dû avancer dans celui des objets : le mode de détermination des énoncés est influencé par celui des concepts, *i.e.* par ce que les logiciens appellent à tort l'intensionnalité de ces derniers. Il s'en serait tenu à cette conclusion jusqu'à 1890, date à laquelle il aurait entrepris un examen plus minutieux de la nature de la circonstance en question. Ce faisant, il aurait réalisé son erreur en comprenant qu'elle ne pouvait se distinguer de toute autre circonstance vraie, autrement dit qu'elle se réduisait à sa valeur vérité. Il l'aurait alors arrachée à cette dernière en l'identifiant à la *manière* dont celle-ci est déterminée, *i.e.* au mode de détermination attaché à l'énoncé. La circonstance aurait épousé le nom de 'sens', et la valeur de vérité celui de 'référence'.

Pour Frege, il était aussi essentiel de rendre compte de l'écart entre les énoncés '$V_1(Y)$' et '$V_2(Y)$' – qui l'avait conduit à une vision intensionnelle des concepts en 1881 – qu'entre les énoncés '$V_1(Y)$' et '$V_1(Z)$'. Or, s'il considérait déjà les concepts comme extensionnels dans les *Grundlagen*, le seul moyen à disposition résidait dans les modes de détermination. Aucune autre hypothèse ne peut rendre compte de la lecture de Heck et May. Mais celle-ci va s'avérer hautement improbable, précisément parce qu'elle entend supprimer l'unique élément responsable de l'architecture instable de 1884 : la dissymétrie entre noms de concepts et d'objets.

Frege caractérisait ainsi le contenu (conceptuel) jugeable : il est, parmi ce qu'un énoncé est capable de transmettre, la partie susceptible d'être jugée vraie ou fausse. Il reconnaissait clairement une différence entre ce qui est jugé vrai à travers les affirmations 'Yves vit en Chine' et 'le père de Pierre vit dans un pays de plus de $1,3$ milliard d'habitants'. Mais l'identification du contenu d'un nom propre à l'objet qu'il désigne résorbait toute différence entre les contenus de 'Yves vit en Chine' et 'le père de Pierre vit en Chine'. Seule une solution se présentait à lui : il fallait conclure que les noms propres *exprimaient* le mode des détermination qui leur était attaché – *i.e.* identifier le contenu au mode de détermination – afin de maintenir l'écart de contenu entre les deux énoncés. Qu'est-ce qui faisait obstacle à une telle idée ? La réponse est simple : il n'avait pas encore d'équivalent aux modes de détermination des objets pour les concepts. Pour procéder ainsi, il aurait dû renoncer à l'analyse compositionnelle des contenus qui formait la base de sa conception de la justification.

Frege n'a *jamais* varié quant à ce que les termes conceptuels expriment. Le contenu d'un nom '$P(\xi)$' qui contribue à la portion jugeable transmise par un énoncé '$P(X)$' ne subit pas une seule modification. Bien sûr, ce contenu changea de nom lorsque la notion de concept se modifia. Mais, pour reprendre ses propres termes, il demeura toujours ce que les logiciens nommaient l''intension

du concept'. En 1884, il faisait face à un déséquilibre important : l'écart entre les énoncés '$V_1(Y)$' et '$V_2(Z)$' provenait d'un côté d'une différence entre les *contenus* des noms de concepts '$V_1(\xi)$' et '$V_2(\xi)$' ; et d'un autre d'une différence entre les *modes de détermination* attachés aux noms propres 'Y' et 'Z'. Si, à cette période, il avait déjà compris que le contenu de '$V_1(\xi)$' était, au lieu d'un concept, le mode de détermination d'un concept, alors il lui aurait suffit de hisser le contenu des noms propres jusqu'à leurs modes de détermination pour ramener la différence entre '$V_1(Y)$' et '$V_2(Z)$' exclusivement au niveau du contenu. Ce faisant, il aurait distingué ce que les noms propres et conceptuels expriment – leur sens – de ce qu'ils désignent – leur référence – ; et aurait pu poser la question de la référence des énoncés.

Exprimons-nous différemment. *Depuis le début*, Frege suivait l'intuition selon laquelle le fossé entre '$V_1(Y)$' et '$V_2(Z)$' est dû à leurs contenus, *i.e.* à ce qu'ils expriment et qui peut être jugé vrai ou faux. Ce point s'accordait avec sa lecture des noms de concepts, mais heurtait celle des noms propres. En somme, il dut se résoudre, de mauvaise grâce, à retirer au contenu la charge de l'écart entre '$V_1(Y)$' et '$V_1(Z)$' parce que (1) il lui avait correctement confié celle de la différence entre '$V_1(Y)$' et '$V_2(Y)$', et (2) il pensait à tort que ce contenu jouait, relativement à la contribution aux contenus jugeables, le même rôle que les objets. Ce dernier point provenait du fait qu'il n'avait pas compris que ce qu'il appelait 'concept' – et qui contribuait au contenu jugeable – n'était que le mode de détermination d'un concept, en réalité lui-même extensionnel, *i.e.* qu'il n'avait pas épousé une vision extensionnaliste des concepts. Dans le cas contraire – s'il avait reconnu l'ancien concept (de 1879) comme étant un simple mode de détermination –, alors les architectures relatives aux noms de concepts et aux noms d'objets auraient été symétriques. Il aurait donc relié aux modes de détermination les différences *à la fois* entre '$V_1(Y)$' et '$V_1(Z)$' et entre '$V_1(Y)$' et '$V_2(Y)$', et aurait immédiatement vu ce mode de détermination comme l'élément *exprimé* par le nom en question, *i.e.* son contenu. Les objets et les concepts (extensionnels) auraient alors naturellemment été conçus, non comme ce que les noms expriment, mais comme ce qu'ils désignent ; et la distinction *Sinn-Bedeutung* aurait intégré les *Grundlagen*, *quand bien même la référence des énoncés n'eût pas encore été identifiée aux valeurs de vérité.* Raisonnons dans l'autre sens : puisqu'elle n'y a pas cours, c'est qu'il ne défendait toujours pas l'idée que les concepts sont extensionnels.

Venons-en au passage problématique. Il s'agit d'une note de bas de page dans laquelle Frege proposa une reformulation de sa caractérisation du concept de *nombre*. Il envisagea le remplacement des termes 'extension du concept' par 'concept'. Heck et May y voient la manifestation d'une célèbre difficulté que Frege discuterait bientôt [231]. En substance, il expliquerait que l'expression 'le concept $\Phi(\xi)$', puisqu'elle joue le rôle d'un nom propre, ne peut référer qu'à un objet. Par conséquent, le concept $\Phi(\xi)$ n'est pas un concept, mais un objet. Heck et May estiment que Frege identifiait l'objet en question à l'extension dudit concept. La substitution serait donc permise par le fait que l'expression 'le concept ...' signifierait l'extension du concept en question.

Nous acceptons cette conclusion [232], et notre désaccord n'est causé que par la seconde des deux objections que Frege formula contre sa propre proposition : "des concepts peuvent avoir même extension sans coïncider". Il ajouta "qu'on peut lever ces deux objections, mais que ceci nous entraînerait trop loin" (p. 80 / 194). Il nous appartient donc de deviner la manière dont il comptait s'y prendre. Notons qu'une objection peut être levée de deux façons : soit en contestant directement le contenu de ce que l'opposant affirme, soit en établissant que ce contenu ne rentre aucunement en contradiction avec ce qui est défendu. Heck et May optent pour la première

231. (Frege 1892a)

232. bien qu'il existe certaines difficultées, aussi bien superficielles que profondes, posées par le remplacement envisagé. Nous en nous discuterons longuement en section 3.2.3.5.

possibilité : Frege aurait levé l'objection en contestant l'intensionnalité des concepts. Au contraire, parce que nous estimons qu'il n'en était pas encore là en 1884, nous croyons à la seconde.

L'objection peut se formuler de la manière suivante : si deux concepts $P(\xi)$ et $Q(\xi)$ ne coïncident pas, alors les significations des expressions 'le concept $P(\xi)$' et 'le concept $Q(\xi)$' doivent être différentes. Par conséquent, si les concepts ont même extension, ces expressions ne peuvent signifier cette extension. En somme, le remplacement proposé ne convient pas pour des concepts qui ont "même extension sans coïncider".

Notre tâche consiste à comprendre comment Frege aurait pu lever cette objection sans renoncer à l'intensionnalité des concepts. Rouilhan avance l'explication suivante :

> Il suffisait [...] de répondre que, sans doute, des concepts pouvaient avoir même extension sans coïncider, mais cela n'excluait pas que des concepts coextensifs donnassent systématiquement lieu, *via* le paradoxe susdit, au même objet, cela n'excluait pas que l'effacement paradoxal de la conceptualité du concept se doublât de celui de son intensionnalité. (Rouilhan 1988, p. 106)

"Le paradoxe susdit" provient du fait qu'un nom propre ne peut en aucun cas désigner un concept. Ainsi l'expression 'le concept $P(\xi)$', en désignant un objet, efface la nature conceptuelle de ce dont nous cherchons à parler. Rouilhan estime que cet effacement se double de celui de l'intensionnalité, autrement dit que nous sommes aussi impuissants pour parler d'un concept comme d'un objet que pour distinguer deux concepts coextensifs en tentant de les prendre pour objets de discours. Rigoureusement, nous n'avons rien à opposer à cette réponse. Mais nous voulons la formuler autrement car, ainsi tournée, elle nous semble présenter deux défauts : suggérer que l'effacement intensionnel est causé par le paradoxe, et laisser croire à une impuissance plus importante que celle que Frege nous prêtait.

Considérons une situation non paradoxale, dans laquelle chaque constituant linguistique joue le rôle que nous souhaitons pour lui. Les énoncés 'Yves est un homme' et 'Yves est un membre de l'espèce animale la plus intelligente' diffèrent par leurs contenus, car les concepts d'*être un homme* et d'*être un membre de l'espèce animale la plus intelligente* sont distincts, bien qu'ils possèdent même extension. En revanche, les expressions 'l'homme assis sur cette chaise' et 'le membre de l'espèce animale la plus intelligente assis sur cette chaise' partagent le même contenu, car elles désignent le même objet. Néanmoins, le fossé qui les sépare tient au fait que cet objet est déterminé de différentes manières dans chaque cas. Ainsi, l'intensionnalité ne disparaît pas totalement, elle se transmet du contenu – dans le cas des noms de concepts – au mode de détermination – dans le cas des noms propres. Nous ne sommes donc pas condamnés à réduire l'écart entre les deux descriptions définis ci-dessus à une stricte affaire de forme, mais nous ne pouvons la faire peser sur le contenu. Elle appartient au mode de détermination.

Soyons clairs : nous ne croyons pas que Frege avait déjà sollicité des exemples de cet acabit, qui l'auraient conduit à questionner plus sérieusement la notion de mode de détermination. C'est précisément parce qu'il n'était pas allé jusque-là qu'il pouvait se contenter de la réponse suivante : les expressions 'le concept $P(\xi)$' et 'le concept $Q(\xi)$' – au même titre que les expressions 'l'extension du concept $P(\xi)$' et 'l'extension du concept $Q(\xi)$' – ont en effet même contenu, car elles désignent le même objet. Néanmoins, dans chaque cas, l'objet ainsi désigné est déterminé de différentes manières. La distinction entre les concepts dont il est question n'est pas invisible ; elle est répercutée dans les modes de détermination.

Frege disposait donc bien d'une réponse qui n'exigeait pas de renoncer à l'intensionnalité des concepts. C'est cette même réponse qui lui avait permis d'abandonner l'identité métalinguistique sans réduire l'écart entre '$A = B$' et '$A = A$' à une pure histoire de forme. Et c'est contre cette même réponse qu'il s'élèverait finalement, lorsqu'il envisagerait des exemples proches de celui que nous avons proposé. Voilà ce qu'il convient à présent d'expliquer.

1.6.2.2 Entre premier et second mouvements : l'exil des fonctions

Entre 1891 et 1892, trois articles déterminants signèrent le début de la seconde période de la vie scientifique de Frege. "Concept et objet" traitait du problème que nous venons de présenter et parut naturellement en dernier, une fois les nouvelles thèses présentées. En revanche, l'ordre de publication des deux premiers répondit à des enjeux purement éditoriaux. "Fonction et concept" devança "Sens et référence" bien qu'il en exploite le contenu. Pour cette raison, c'est bien le second qui compte comme l'écrit emblématique de la révolution de 1890. Frege y introduisit la distinction entre *Sinn* et *Bedeutung* à travers le problème des énoncés d'identité, sur lequel il clôt aussi son propos. Ce choix alimente la lecture orthodoxe, selon laquelle il procéda aux profondes modifications de ses conceptions lorsqu'il opéra à une nouvelle réflexion sur la relation d'identité. Il est clair que cette réflexion advint à un moment ou à un autre dans le flot des bouleversements, qu'elle fut prise dans le tumulte au moins par voie de conséquence. Il est tout aussi incontestable qu'elle constituait un biais à la fois clair et efficace pour présenter les notions de sens et de référence. Cependant, il n'est pas certain qu'elle fut la cause première de ce revirement. Nous savons désormais que Frege n'a jamais perdu de vue la difficulté attachée aux énoncés d'identité. Dans la *Begriffsschrift*, il proposait une réponse qui, toute insatisfaisante soit-elle, perdura jusqu'à ce que d'autres questions viennent la remettre en cause. La seconde solution n'était pas plus adaptée mais, cette fois encore, il est probable qu'elle se soit maintenue plus longuement sans une intervention extérieure. Or le second mouvement ne signa pas seulement la restructuration des notions de contenu et de mode de détermination, il vit aussi le retour en grâce de quelque chose qui sommeillait depuis le premier mouvement : les fonctions. Pour des raisons que nous allons présenter, Frege les tint longtemps à l'écart de ses questionnements. Le processus qu'il enclencha en comblant cette lacune ne pouvait conduire qu'à l'avènement de ses idées dites 'matures'. Du point de vue des *causes* du second mouvement, c'est donc "Fonction et concept" qui s'impose comme le texte fondateur, et qui contient tous les éléments responsables du basculement.

Dès 1879, Frege importa des mathématiques la notion de fonction à partir de laquelle il escomptait analyser les contenus des expressions. La fonction et l'argument permettaient alors un découpage de l'expression et de son contenu relatif à notre manière d'aborder l'une ou l'autre, seulement tenu de *respecter* des catégories absolues de contenus. Dans le cas d'un contenu jugeable, la fonction et l'argument étaient soit un concept, soit un objet. Voilà la matrice à partir de laquelle Frege analysa les énoncés depuis la *Begriffsschrift* jusqu'au premier mouvement [233]. Par ailleurs, il prit soin de préciser que le couple fonction-argument s'appliquait aussi aux expressions "dont le contenu *n'a pas besoin d'être jugeable*" (p. 16 / 30, nous soulignons), sans que cette possibilité ne soit *jamais* exploitée. Il avait par exemple à l'esprit de regarder '1' comme la fonction (ou l'argument) et '+2' comme l'argument (ou la fonction) dans le nom propre '$1 + 2$'. Une question restait néanmoins en suspens : quelles étaient les catégories de contenus que ce découpage rendait saillantes, *i.e.* celles de '1' et de '+2' ? En 1890, il dirait que le premier est un objet et le second une... fonction ! La fonction ne caractériserait donc plus une manière d'aborder une expression ou un contenu, mais une (ou plutôt plusieurs) catégorie(s) absolue(s) de contenus. Sur ce plan, elle rejoindrait ainsi les concepts. Néanmoins, il ne formulerait pas cette réponse avant cette date. Jusqu'au premier mouvement, il en était bien incapable, parce que les deux notions de fonctions seraient rentrées en conflit. En revanche, après ce mouvement, la nouvelle lecture de la quantification permettait de se débarrasser totalement de la première notion. Il lui aurait alors suffit d'affirmer, le plus naturellement du monde, que le contenu d'un énoncé est

233. Tout ceci a été expliqué dans les moindres détails en section 1.4.9.

composé de concepts et d'objets, tandis que celui d'un nom propre (complexe) est composé de fonctions, de concepts, et d'objets. Au contraire, il resta obstinément muet sur la composition des noms propres – se contentant d'en appeler aux modes de détermination – et le terme 'fonction' disparut totalement de ses écrits jusqu'au second mouvement. Comment expliquer l'exil, entre les deux mouvements, d'une notion traditionnellement considérée comme fondamentale à toutes les périodes de sa vie scientifique ?

C'est précisément la tentation de rapprocher les fonctions de la *Begriffsschrift* et des *Grundgesetze* – *i.e.* les deux notions *différentes* auxquelles il a conféré le même nom – qui dissimule les véritables causes des changements de 1890. Frege était mathématicien, il est donc clair qu'il n'a pas soudainement oublié l'existence des fonctions. De toute date, il a toujours considéré comme telles l'addition, la multiplication, etc. Le problème consistait précisément à comprendre le sens du terme en jeu. Sa première intuition était inadéquate car elle ne permettait pas de rendre compte des *contenus* des symboles '+' et '×'. Après 1882, une idée plus encourageante était à portée. Il ne fait aucun doute qu'il l'avait déjà formulée pour lui-même : les fonctions – les contenus de ces symboles – sont des entités qui associent des objets à des objets. Cependant, il tarda à développer cette idée, parce qu'il pouvait aisément se dispenser de tels développements. Et c'est lorsqu'il se confronta plus profondément à la nature de ces fonctions (deuxièmes du nom), qu'il découvrit tour à tour les différents défauts de ses conceptions.

Nous défendons donc la thèse suivante : la seconde notion de fonction n'était pas totalement absente entre 1882 et 1890, mais elle demeurait dans un état extrêmement rudimentaire, jouant un rôle minime au sein de ses conceptions. Pour justifier une telle affirmation, il nous incombe d'expliquer comment Frege a pu se passer de leur concours, et répondre à ceux qui estiment qu'au contraire, il leur conférait une place importante. En effet, il est parfois soutenu [234] qu'il concevait les concepts comme des *fonctions* associant des objets à des contenus jugeables, et les opérateurs logiques comme des fonctions associant des contenus jugeables à des contenus jugeables [235]. Mais il est un point sur lequel Frege n'a jamais varié : les valeurs des fonctions [236] sont des objets. Pour réunir, par exemple, les deux entités $\xi + 3$ et $\xi \geq 3$ parmi les fonctions, il lui aurait fallu reconnaître qu'à la fois le nombre $4 + 3$ et le contenu de '$4 \geq 3$' étaient des objets. Or, pour plusieurs raisons, cette hypothèse nous semble hautement improbable.

D'une part, l'intégration des pensées aux objets fut *tributaire* de la distinction sens-référence, et par conséquent concomitante à cette distinction. Considérons les trois expressions suivantes :

$F(Y)$	:	Yves est français
$F(Y) \rightarrow E(Y)$	:	si Yves est français, alors Yves est européen
C	:	la circonstance que Yves est français

234. Voir par exemple (Heck et May 2010).

235. Frege caractérisait les contenus d'expressions à travers leurs contributions aux contenus des énoncés dans lesquels ces expressions figurent. Par conséquent, deux fonctions $f(\xi)$ et $g(\xi)$ qui associent tout objet n au même objet $f(n)$ coïncident toujours, car elles contribuent de la même manière aux contenus en question. Voilà qui peut suggérer une première objection à l'idée que nous combattons : Frege n'aurait pas pu (1) défendre une conception extensionnaliste des fonctions, (2) épouser une vision intensionnaliste des concepts, et (3) concevoir les concepts comme des fonctions.

Néanmoins, cette objection n'est pas concluante, car elle s'appuie sur une ambiguïté attachée, dans ce cadre, aux termes 'extensionnel' et 'intensionnel'. Deux concepts qui associent les mêmes contenus jugeables aux mêmes objets coïncident, parce qu'ils contribuent de la même manière aux contenus jugeables dans lesquels ils sont impliqués. Conçues comme des *fonctions* des objets dans les contenus jugeables, ces entités sont donc extensionnelles. Néanmoins, deux concepts qui subsument les mêmes objets peuvent ne pas coïncider lorsqu'ils associent un même objet à deux contenus jugeables différents, tant que ces derniers ont même valeur de vérité. Conçues comme des *concepts*, ces entités sont donc intensionnelles.

236. Désormais, nous désignerons ainsi les *deuxièmes* fonctions, sans plus le spécifier.

Dans la *Begriffsschrift* (p. 2 / 16), Frege identifia les contenus de '$F(Y)$' et de 'C'. Il tentait alors d'exhiber le rôle de la force assertive, en réduisant la distance qui séparait les deux expressions au fait qu'une telle force n'était jamais attachée à la seconde. Néanmoins, elle n'est pas non plus portée par la première à l'intérieur de l'énoncé '$F(Y) \rightarrow E(Y)$', bien qu'il ne soit pas possible de reformuler celui-ci en remplaçant '$F(Y)$' par 'C' : 'Si la circonstance que Yves est français, alors Yves est européen'. Il existe donc une différence de *contenu* entre les deux expressions, à laquelle Frege était encore aveugle à cette époque. Pourtant, le problème apparaît dès lors que les contenus jugeables sont considérés comme des objets, *i.e.* comme des entités capables de tomber sous des concepts, par exemple à travers les énoncés 'la circonstance que Yves est français est une circonstance' ou 'la circonstance que Yves est français est probable'. Ce problème serait résolu grâce à la distinction sens-référence, lorsque Frege comprendrait que '$F(Y)$' *exprime* ce que 'C' *désigne*, *i.e.* que le sens de la première expression constitue la référence de la seconde. S'il ignora cette difficulté jusqu'à l'émergence de cette distinction, c'est donc qu'il ne faisait pas encore droit à l'idée qu'un contenu jugeable puisse jouer le rôle d'un objet, qu'il puisse être pris en argument par une fonction ou tomber sous un concept.

D'autre part, en adoptant une telle position, Frege aurait été confronté à un choix difficile. Il aurait pu maintenir une différence catégoriale entre les contenus jugeables et les objets standards, laquelle aurait été immédiatement répercutée entre les opérateurs – des concepts subsumant des contenus jugeables – et les concepts "standards" – subsumant des objets standards, etc. Un tel geste aurait provoqué un véritable chaos dans la hiérarchie des fonctions. Si, au contraire, il avait choisi d'y maintenir l'ordre, il aurait été tenu d'attribuer un contenu à des expressions telles que '$_{\vdash}\, 3$' ou '$4 \geq 3$ est un nombre'. Quelle qu'eut été sa décision, rien n'aurait justifié le silence tenace des *Grundlagen* à l'égard des fonctions. Une vision si atypique et novatrice des concepts n'aurait pu être dissimulée au sein d'un ouvrage dont le contenu reposait précisément sur leur nature. D'ailleurs, lorsqu'ils furent *finalement* identifiés à des fonctions, Frege s'appliqua immédiatement à le signaler, en expliquant qu'il poursuivait le processus de généralisation des fonctions amorcé en analyse :

> Aux signes déjà reçus pour la construction d'une expression de fonction, j'ajoute des signes tels que $=, <, >$ en sorte qu'on puisse parler de la fonction $x^2 = 1$ où x, comme avant, représente l'argument. (Frege 1891, p. 131 / 88)

Par ailleurs, l'intégration des concepts aux fonctions exigeait de comparer leurs rôles respectifs au sein des contenus jugeables. Or c'est précisément cette comparaison qui, comme nous le verrons bientôt, dévoila les défauts attachés à la notion de contenu conceptuel. Nous apporterons une ultime confirmation à l'hypothèse selon laquelle Frege n'avait pas encore développé une analyse des contenus selon la matrice fonction-objet lorsque nous montrerons que le développement d'une telle matrice conduisait inéluctablement aux bouleversements de 1890. Si l'architecture instable qui unissait les contenus conceptuels et les modes de détermination persista si longuement, c'est parce que l'étude menée dans le cas des concepts n'avait pas encore été conduite pour les fonctions, et donc, *a fortiori*, que les premiers n'avaient pas été réduits aux secondes.

Il nous incombe cependant de répondre de ce délai. Autrement dit, nous devons expliquer pourquoi tant d'années ont pu s'écouler sans que l'attention de Frege ne se porte sur les fonctions, tandis qu'elle s'était si rapidement concentrée sur les concepts. La raison tient, une fois encore, au travail *technique* dans lequel il était engagé. Citons une remarque de Heck, qui nous semble d'une importance capitale :

> Arrêtons-nous quelques instants pour insister sur ce point : je ne connais aucun argument des *Grundgesetze* qui serait négativement affecté si les quantificateurs qui

> sont censés parcourir les parcours-de-valeurs en général étaient au contraire restreints aux extensions. Bien sûr, la quantification objectuelle de Frege parcourt en réalité les parcours-de-valeurs (en fait, les objets) en général, et pas seulement les extensions de concepts. Mais les cas intéressants, les cas pertinents, impliquent toujours les extensions. (Heck 2017, p. 9)

En 1893, les concepts étaient des fonctions particulières. Chaque fonction se voyait associer un parcours-de-valeurs et, en particulier, chaque concept était lié à une extension. Heck explique que l'édifice de Frege tenait aussi bien – ou, étant donnée la contradiction, aussi mal – sans prendre en compte des parcours-de-valeurs qui ne sont pas des extensions. Frege était donc en mesure de procéder à ses développements techniques en restreignant l'opérateur d'abstraction aux seuls concepts. Et, jusqu'au mouvement de 1890, c'est ainsi qu'il procéda.

Effectuons une rapide mise-au-point sur l'état de la langue formulaire à l'époque des *Grundlagen*. Le symbole '=' figurait désormais entre noms propres à la place de '≡', défini comme suit :

$$\Vdash (a = b) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f}(a) \leftrightarrow \mathfrak{f}(b))$$

En 1879, Frege avait opté pour l'identité métalinguistique afin de rendre compte des différents habits dans lesquels un même objet pouvait se présenter. Mais il n'avait pas encore reconnu cette difficulté dans le cas des énoncés. C'est donc une autre raison qui le poussait à leur dédier aussi le symbole '≡' : les contenus jugeables n'étant pas des objets, ils ne pouvaient saturer un quelconque concept. Ainsi, la langue formulaire de la *Begriffsschrift* accédait à une homogénéité certaine eu égard à l'identité : cette relation intervenait toujours entre des *expressions*. En 1884, la symétrie était brisée. Frege avait compris que les énoncés d'identité incorporant des noms propres n'avaient aucun statut spécifique. Il les avait donc ramenés au niveau des objets, attribuant aux modes de détermination ce qu'il avait autrefois dédié aux contenus. Néanmoins, aucune relation (d'identité ou autre) ne pouvait subsumer des contenus jugeables. Il lui fallait donc conserver l'identité métalinguistique dans le cas des énoncés, pour la même raison qui l'avait conduit à l'adopter en 1879.

Soyons clair sur ce point. En 1879, Frege estimait que le contenu des énoncés d'identité incorporant des noms propres étaient métalinguistiques. C'était à ses yeux ce qui assurait leur substantialité. Lors du premier mouvement, il admit que les énoncés d'identité *objectuelle* pouvaient seuls porter cette charge, en déplaçant l'enjeu du contenu au mode de détermination. Il cessa donc de considérer que '2 est identique à $1+1$' n'était qu'une formulation maladroite de "2' possède le même contenu que '$1+1$". Néanmoins, il ne reconnaissait pas encore le statut d'objet aux contenus jugeables. Par conséquent, il estimait toujours que 'la circonstance que $3 > 1+1$ est identique à la circonstance que $3 > 2$' n'était qu'une formulation maladroite de "$3 > 1+1$' et '$3 > 2$' ont même contenu'. Les deux problèmes étaient indépendants. L'un, lié aux noms propres, était (imparfaitement) réglé à travers les modes de détermination. L'autre, attaché aux énoncés, ne trouverait sa solution qu'avec l'intégration des pensées – les contenus jugeables post-1890 – aux objets.

Cette situation entraîna une scission entre les signes '=' figurant entre les noms propres, et '≡' figurant entre les énoncés. Elle manifesta une difficulté qui avait été adroitement dissimulée *via* l'adoption de lettres communes pour les objets et les contenus jugeables. Dans la *Begriffsschrift*, Frege utilisait le trait de contenu pour démarquer les deux usages de ces lettres. Il spécifia qu'un tel trait devait toujours être suivi d'une expression pour un contenu jugeable. Néanmoins, il s'abstint de stipuler que, réciproquement, une telle expression devait toujours être précédée d'un trait de contenu. Cette économie permettait aux lettres en question d'encadrer le symbole '≡' indifféremment de leur statut, *i.e.* qu'elles soient considérées comme des énoncés ou des noms

propres (aux contenus indéterminés). Ce faisant, Frege escomptait gérer les substitutions à travers l'unique axiome ci-dessous :

$$\begin{array}{l} \vdash f(d) \\ \quad f(c) \\ \quad c \equiv d \end{array}$$

Cependant, en toute rigueur, celui-ci ne convenait pas lorsque 'c' et 'd' étaient des lettres pour des contenus jugeables, car ces derniers ne pouvaient tomber sous un quelconque concept f [237]. Peut-être Frege, dont l'attention s'était davantage fixée sur les noms propres, n'a-t-il pas relevé le problème ; ou peut-être y voyait-il un simple procédé syntaxique, *i.e.* une manière commode d'écrire sous forme d'axiome une *règle* pour les substitutions. Quoi qu'il en soit, le premier mouvement avait doublement changé la donne. D'une part, les substitutions des expressions pour des objets et des contenus jugeables ne pouvaient plus être gérée collectivement à travers un même biais, car les signes d'identité figurant entre ces expressions étaient désormais distincts. Frege n'avait donc plus aucune raison de maintenir une certaine ambiguïté concernant le statut des lettres utilisées. Par conséquent, il a probablement utilisé des lettres différentes pour chaque cas ou, au moins, exigé que le trait de contenu figure *toujours* avant une expression pour un contenu jugeable. D'autre part, relativement aux noms propres, l'axiome avait été remplacé par la définition ci-dessus, dont il se déduisait aisément. Encore fallait-il permettre les substitutions pour les énoncés. *A priori*, il disposait de deux solutions. Soit il conservait tel quel son axiome, soit il lui substituait la définition suivante :

$$\Vdash (\mathtt{a} \equiv \mathtt{b}) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f}(\mathtt{a}) \leftrightarrow \mathfrak{f}(\mathtt{b}))$$

Bien sûr, le problème attaché à l'axiome se propageait à cette définition. À proprement parler, il ne pouvait s'agir d'énoncés dotés de sens, car aucun concept f ne subsumait des contenus jugeables. Mais un obstacle supplémentaire barrait désormais la route. Comme nous l'avons vu en section 1.6.1.2, Frege avait prit conscience qu'il ne pouvait incorporer à un même énoncé une lettre dont une occurrence s'exhibe elle-même et dont une autre exhibe son contenu. Face à cette double difficulté, il a donc probablement choisi de prendre en charge la substitution des expressions pour des contenus jugeables à travers des *règles*, et non plus des axiomes. Par exemple, il a pu introduire la règle suivante :

$$\frac{\vdash c \equiv d \qquad \vdash \Phi(c)}{\vdash \Phi(d)}$$

où 'Φ' n'est pas conçu comme une lettre de concept, mais comme un simple schéma linguistique pour les expressions qui attendent d'être saturées par une expression pour un contenu jugeable [238].

Le rôle de chaque signe d'identité est désormais fixé, et nous pouvons aborder la question qui nous importe. Contrairement à la langue formulaire de 1879, celle de 1884 incorporait le nom de la *fonction* qui attachait tout concept à son extension. Puisqu'il n'existe aucune trace de la forme particulière que Frege lui conféra durant cette période, nous allons utiliser l'expression des *Grundgesetze* : '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', où '$\varphi$' symbolise la place de l'argument. Cependant, ne nous y trompons

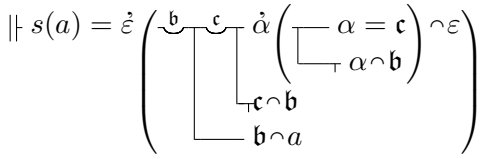
237. Tout ceci a été expliqué en détail en section 1.4.13, lors de la présentation rigoureuse de la langue formulaire.
238. L'avènement des concepts de niveaux supérieurs s'accompagna d'une meilleure compréhension de la manière dont les expressions se complétaient les unes les autres. Il est donc probable que les choix syntaxiquement problématiques de la *Begriffsschrift* aient donné lieu à des corrections de ce genre lors du premier mouvement.

pas : la fonction de 1884 n'était pas encore celle de 1893. L'argument de la seconde serait une fonction (du premier niveau à un argument) auquel serait associé son parcours-de-valeurs, qui ne serait une extension que dans le cas où l'argument serait un concept. Mais en 1884, les concepts n'étaient pas conçus comme des fonctions. Par conséquent, 'φ' symbolisait la place du *concept* pris en argument, auquel $\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$ associait son extension. Ainsi, les parcours-de-valeurs étaient, à cette époque, totalement absents de l'ontologie fregéenne. Et des remarques similaires s'appliquent aux concepts de second et troisième niveaux $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$, $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$ et $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_{\beta,\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$, qui attendaient d'être complétés respectivement par des *concepts* – et non des fonctions – de premier niveau à un argument, de second niveau à un argument lui-même à un argument, de second niveau à un argument lui-même à deux arguments.

Généralement, les symboles '$\mathfrak{f}$', 'f', etc. – déjà présents dans la *Begriffsschrift* – et 'φ', etc. – résultant de l'édification de l'appareil adapté à la hiérarchie de concepts – étaient tous des lettres pour des *concepts*. Assurément, Frege aurait pu ajouter des équivalents pour les fonctions, mais il lui aurait fallu choisir d'autres signes, car concepts et fonctions étaient encore distincts. Surtout, il n'en avait pas *besoin*. Toutes les démonstrations des *Grundgesetze* se réalisaient sans peine dans un cadre limité aux concepts, et par suite aux extensions. À travers ses différents symboles pour la généralité et pour marquer les places vacantes, le langage de la langue formulaire de 1884 exhibait donc seulement la manière dont les contenus jugeables se composaient à partir des objets et des concepts, laissant totalement de côté le rôle des fonctions.

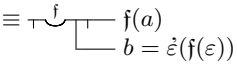
Il pourrait nous être objecté que cette langue incorporait un nom spécifique de *fonction* – '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' – et potentiellement d'autres noms définis pour de telles entités – par exemple '$s(\xi)$' pour la succession. Si la contribution des fonctions aux contenus jugeables n'était pas manifeste à travers des expressions tels que '$f(a)$', elle était peut-être visible à travers des énoncés tels que $\ulcorner\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon))\urcorner$ ou encore $\ulcorner s(t) > t\urcorner$. À une telle remarque, il convient de répondre en deux temps.

Tout d'abord, nous concédons que le système de la langue formulaire de 1884 permettait de définir la *fonction* successeur, par exemple à travers la formule suivante [239] :



Néanmoins, Frege ne choisit pas cette voie. Dans les *Grundlagen*, il proposa de définir "la *relation* qui affecte deux membres voisins de la suite naturelle des nombres" (p. 89 / 202, nous soulignons). Ainsi, il ne comptait pas impliquer la fonction $s(\xi)$ qui associe à tout nombre son successeur, mais la relation $S(\xi,\zeta)$ qui subsume deux objets A et B lorsque B est le successeur de A. Il semble donc que, là où nous sollicitons volontiers des fonctions, il se limitait pour sa part à des concepts. Et cette idée trouve confirmation dans l'appendice du premier volume des *Grundgesetze* (pp. 240-241) qui présente une liste exhaustive des définitions de l'ouvrage. En 1893, Frege exploitait un procédé habile permettant d'utiliser les fonctions à travers leurs parcours-de-valeurs. Or à cinq exceptions près, tous les noms définis de parcours-de-valeurs sont en réalité des noms d'*extensions*, autrement dit de représentants de *concepts*. Parmi ces exceptions, quatre servent exclusivement

239. où '$\xi\frown\zeta$' serait défini par :



Il existe d'autres chemins tout aussi convenables, et nous ne voulons pas insister sur celui-ci. L'essentiel étant qu'une telle définition soit possible dans le cadre de la langue formulaire à la période des *Grundlagen*.

le procédé en question, et la dernière consiste en la définition de la fonction qui associe à tout concept le nombre qui lui appartient. Dans notre deuxième chapitre [240], nous verrons (1) que Frege pouvait tout à fait procéder aux démonstrations qui lui importaient sans avoir recours à ce procédé, (2) qu'il emprunta effectivement ce chemin jusqu'à une date très tardive (proche du second mouvement), (3) que ce procédé ne pouvait être exactement celui de 1893, et exigeait la donnée de trois fonctions : celle qui associe la paire ordonnée (a, b) à deux objets a et b, celle qui associe son extension à une relation, et potentiellement celle qui associe à l'extension d'une relation celle de sa converse. Ainsi, jusqu'à une période tardive, Frege réalisa *toutes* ses démonstrations en impliquant *seulement* les fonctions $\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$ et $\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$ et, même durant cette période, le nombre de fonctions sollicitées resta extrêmement faible (probablement aux alentours de cinq).

Rappelons notre hypothèse : le deuxième mouvement survint lorsque Frege interrogea proprement le rôle des contenus d'un nom de fonction '$\Phi(\xi)$' et d'un nom propre 'A' relativement au contenu de '$\Phi(A)$' et, plus généralement, des énoncés dans lesquels figure cette dernière expression. Nous disons que, jusqu'en 1890, le processus compositionnel qu'il proposait d'exhiber à travers sa langue formulaire concernait exclusivement les concepts et les objets, laissant totalement les fonctions sur la touche. Deux contre-arguments peuvent nous être opposés. D'une part, la matrice d'analyse des contenus exploitait déjà les fonctions en 1879. À cela nous répondons que ces fonctions n'étaient pas celles de 1893, que cette matrice était exclusivement vouée à exhiber la structure concept-objet, et qu'elle fut totalement abandonnée lors du premier mouvement. D'autre part, après ce mouvement, la langue formulaire elle-même impliquait deux fonctions (au deuxième sens du terme), l'une étant primitive – $\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$ – et l'autre définie – $\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$. À cela nous répondons que, précisément, durant une longue période, Frege ne manipula *que* ces deux fonctions. La quasi-totalité (et de loin !) de ce que sa langue formulaire rendait visible – que ce soit à travers les noms primitifs, définis, les lettres pour la généralité et pour marquer les espaces vacants – avait trait exclusivement aux concepts et aux objets. Il est donc compréhensible que, dans un premier temps, il n'ait pas pris la peine d'examiner sérieusement le rôle du contenu des noms de fonctions relativement à celui des noms propres et des énoncés qui les intègrent. Ses idées à cet égard restaient rudimentaires : un nom propre contient l'objet qu'il désigne, lequel peut être déterminé de diverses manières ; une fonction associe des objets à des objets ; et deux noms propres incorporant deux noms de fonctions différentes, lorsqu'ils partagent un même contenu – par exemple '$2 + 2$' et '2×2' –, sont souvent attachés à des modes de détermination distincts. Frege s'en tenait là, sans élucider le rapport entre les fonctions et les modes de détermination. C'est probablement lorsque les premières se multiplièrent au sein de son système, à travers le procédé de désescalade des niveaux, qu'il tenta de combler cette importante lacune. Ce faisant, non seulement le désordre pré-1890 ne pouvait lui échapper, mais surtout l'ordre post-1890 ne pouvait que s'imposer. Ce dernier point, qu'il nous appartient désormais d'établir, montrera donc que le chemin dicté par le travail technique de Frege conduisait naturellement et exactement au second mouvement [241].

240. en section 2.5.3.

241. Notre lecture repose partiellement sur le fait que Frege pouvait aisément atteindre son objectif en limitant considérablement le nombre des fonctions impliquées. Nous rejoignons donc Heck sur ce point, bien que nous en tirions des conclusions différentes. Cependant, quels que soient les illustres commentateurs qui, avant nous, ont défendu cette idée, nous sommes tenus d'en apporter certaines justifications. En effet, Duart (2009) a récemment établi que la stratégie des *Grundgesetze* s'appuyait essentiellement sur la fonction horizontale, elle-même absente des *Grundlagen*. Ce faisant, il a ouvert un important débat concernant la manière dont Frege avait effectivement procédé avant 1890, *i.e.* concernant le contenu précis du "manuscrit presque complet" auquel il renonça lors du second mouvement. Malgré la découverte de Duarte, nous maintenons nos positions : Frege a facilement pu suivre le chemin des *Grundgesetze* sans impliquer d'autres fonctions que celles que nous avons évoquées. Nous ne

1.6.2.3 La cause du second mouvement : une dissymétrie entre fonctions et concepts

Avant 1890, Frege considérait que les modes de détermination des objets affectaient ceux des énoncés. Mais il n'avait encore pas élucidé leur rapport, et n'attribuait rien de tel aux concepts. Il privait ainsi les modes de détermination de toute dimension compositionnelle, ne questionnant pas les divers liens qu'il reconnaissait pourtant entre les uns et les autres. En somme, il laissait cette notion dans une boîte noire. C'est en ouvrant cette boîte qu'il découvrit la distinction sens-référence, et c'est en questionnant le rôle sémantique des fonctions qu'il réalisa ce geste.

Le point de basculement se situe donc au moment où il tenta d'intégrer les fonctions à sa sémantique générale qui, jusqu'alors, se limitait aux concepts et aux objets. Son idée initiale était simple : un contenu jugeable $P(A)$ résulte de la composition du concept $P(\xi)$ avec un objet A, et parallèlement un objet $F(A)$ résulte de l'opération de la fonction $F(\xi)$ sur l'objet A. Ainsi, Frege avait l'intuition d'une certaine symétrie entre les concepts et les fonctions, reflétée à travers la manière dont leurs noms respectifs se composent avec les noms propres. On trouve des traces extrêmement précoces de cette intuition :

> [Le langage de l'arithmétique] compose [*zusammensetzt*] seulement des nombres à partir de nombres, et peut exprimer seulement la sorte de jugements qui ont trait à l'égalité des nombres qui ont été formés [*entstandenen*] de telle ou telle manière. Mais l'arithmétique au sens le plus large forme [*bildet*] aussi des concepts, et en vérité d'une richesse et d'une précision dans l'articulation interne telles que peut-être on ne puisse en trouver combiné avec une égale perfection logique dans aucune autre science. (Frege 1881, p. 14 / 22)

Il est notable que, même si Frege utilise différents mots allemands, il réalise ici un parallèle entre la manière dont l'arithmétique permet la formation de nombres et de concepts. Par ailleurs, le verbe '*zusammensetzen*' intègre une notion d'assemblage, ce qui suggère une symétrie entre la façon dont les concepts mathématiques peuvent articuler les contenus jugeables et dont les opérations mathématiques peuvent composer les nombres. La similarité entre ce qu'il appelait déjà des 'concepts' et ce qu'il appellerait bientôt des 'fonctions' est visible en filigrane dans ce passage. Mais elle se heurte à certaines limites relatives au contexte pré-1890. Dans celui-ci, deux concepts $P(\xi)$ et $Q(\xi)$ pouvaient respectivement subsumer des objets A et B sans que les contenus jugeables $P(A)$ et $Q(B)$ ne soient identiques. Au contraire, si deux fonctions $F(\xi)$ et $G(\xi)$ associaient le même objet C respectivement à A et B, alors le contenu de '$F(A)$' et celui de '$G(B)$' étaient identiques : il s'agissait de l'objet C. La contribution de la fonction $F(\xi)$ au contenu de '$F(A)$' dépendait intégralement de l'objet qu'elle associe à A, tandis que celle du concept $P(\xi)$ au contenu de '$P(A)$' ne se limitait pas au fait de subsumer A ou non. Pour le dire autrement, cette sémantique faisait droit à l'intensionnalité des concepts, mais était sous-tendue par une conception extensionnaliste des fonctions.

Jusqu'en 1890, la situation est restée dans cet état précaire car, si Frege disposait d'une manière de représenter l'opération des fonctions sur les objets, il n'en avait pas fait un média systématique de décomposition des noms propres, dont il n'existe aucun signe antérieur à cette date. Autrement dit, il n'avait pas reproduit pour ces noms le travail réalisé sur les énoncés. Par exemple, en proposant l'illustration de géométrie de la *Begriffsschrift*, il ne questionna aucunement le rôle des noms de fonctions impliqués dans l'expression 'le point du cercle tel que ...'.

---

sommes malheureusement pas en mesure de défendre ces positions avant d'avoir fourni les diverses explications techniques de notre second chapitre. C'est donc à cet endroit – en section 2.5.3 – que nous disposerons le dernier rouage manquant à notre longue reconstitution historique. D'un même geste, nous dévoilerons ce qui, à nos yeux, constitue le contenu du célèbre "manuscrit presque complet", et nous fonderons l'affirmation sur laquelle nous nous appuyons ici.

Celle-ci était conçue comme une totalité à laquelle un contenu – le point en question – et un mode de détermination étaient attachés. Seul le langage qu'il bâtissait pour l'arithmétique, à travers le parallèle entre les expressions '$F(A)$' et '$P(A)$', lui suggéra une grille d'analyse plus fine : concevoir les noms propres comme des expressions composées exclusivement et systématiquement de noms d'objets, de fonctions et de concepts. À ce stade, il pouvait facilement expliquer que le contenu de '$F(A)$' résultait de l'opération de celui de '$F(\xi)$' sur celui de 'A'. Néanmoins, la question du mode de détermination était plus difficile. Il importait d'élucider les rôles des éléments (contenus et modes de détermination) attachés à '$F(\xi)$' et 'A' vis-à-vis du mode de détermination attaché à '$F(A)$'. La question s'étendait aux fonctions à plusieurs arguments, omniprésentes en arithmétique : comment les éléments liés aux noms '$\xi+\zeta$', '$\xi\times\zeta$' et '2' influent-ils sur différentes manières dont les noms propres '$2+2$' et '2×2' présentent le même nombre 4 ? Mais elle concernait aussi les illustrations à travers lesquelles il avait introduit les modes de détermination, qui contenaient ses intuitions les plus franches à leur sujet, et avaient ainsi de bonnes chances de le guider vers la solution. Malheureusement, les exemples en question, formulés en langue naturelle, ne se soumettaient pas facilement à la matrice des fonctions. Il fallait donc dégager la structure profonde des noms propres impliqués, et l'épicentre du séisme se situe précisément dans cette entreprise.

Synthétisons notre propos : lorsque Frege entreprit d'étudier généralement le rôle des fonctions, il envisagea naturellement de décomposer les noms propres symétriquement à la manière dont les énoncés avaient préalablement été analysés. Dans les premiers, les noms de fonctions jouaient en grande partie le rôle tenu par les noms de concepts dans les seconds. Néanmoins, la question du lien entre le mode de détermination d'un nom propre et ses constituants émergea immédiatement. Pour y répondre, Frege était non seulement confronté aux exemples du langage de l'arithmétique dans lesquels la structure logique des noms propres étaient saillantes, mais aussi à ceux qui l'avaient guidé jusqu'à la notion de mode de détermination, et dans lesquels elle était dissimulée. À leur sujet, il ne pouvait manquer de remarquer la présence systématique de l'article défini : '*la* droite telle que', '*le* point tel que', etc. Nous savons [242] que cet article joua un rôle prépondérant dans les deux première périodes de sa vie, et nous allons voir qu'il signa aussi la transition entre les deux.

Dans "Concept et objet", Frege répéta ce qu'il avait déjà affirmé en 1884, et qui l'avait (en partie) conduit à admettre la nature objectuelle des nombres :

> L'article défini au singulier fait savoir qu'il s'agit d'un objet, tandis que l'article indéfini accompagne un terme conceptuel. (Frege 1892a, p. 169 / 130)

Pourtant, son analyse s'était affinée entre les deux périodes. Dans les *Grundlagen*, il expliquait que l'expression 'le 1' "fait de 1 un objet par l'emploi de l'article défini" (p. 68 / 184). Dans les *Grundgesetze*, il dota l'idéographie d'un signe pour jouer le rôle de cet article, absent de la langue formulaire. Nous n'avons pas besoin de décrire ici son fonctionnement, qui s'appuie sur la désescalade des niveaux de fonctions [243]. Mais, lors de sa présentation (pp. 18-19), Frege en dit davantage concernant le contenu de l'article défini. Il expliqua qu'il s'agissait d'une *fonction* qui envoie tout concept subsumant un unique objet sur cet objet. Autrement dit, l'expression résultant de l'association de l'article défini et du nom d'un tel concept *constitue* un nom propre, mais l'article défini ne peut être lui-même *suivi* d'un nom propre. En toute rigueur, la formule 'le 1' ne doit pas être employée. Par conséquent, en 1884, Frege reconnaissait déjà que l'article défini permettait la formation de noms propres, mais il n'avait pas encore dévoilé son rôle – et plus généralement celui des fonctions – au sein de ces noms.

242. depuis la section 1.5.3.
243. Nous nous y appliquerons dans le second chapitre.

Lorsqu'il s'y employa, il remarqua qu'à quelques exceptions près[244], cet article permettait de désigner le *seul* objet tombant sous le concept nommé par la suite de l'expression en jeu. Par exemple, 'le point d'intersection de d et d'' désignait le seul objet tombant sous le concept de *point d'intersection entre d et d'*. Sa structure logique était donc correctement rendue par :

$$\text{le}_\beta \text{ (point d'intersection de } d \text{ et } d' \text{ } (\beta))$$

Ou, pour reprendre le symbole de l'idéographie :

$$\backslash_\beta \text{ (point d'intersection de } d \text{ et } d' \text{ } (\beta))$$

À ce stade, Frege disposait non seulement d'une marque tangible de la symétrie qu'il pressentait entre fonction et concept, mais surtout du fait que ses conceptions heurtaient cette symétrie de manière inacceptable. En effet, considérons les deux phrases suivantes, dans lesquels $P(\xi)$ est le nom d'un concept sous lequel tombe un seul objet :

$C = \backslash_\beta(P(\beta))$: C est le P

$P(C)$: C est un P

Le nom propre '$\backslash_\beta(P(\beta))$' contient l'unique objet qui tombe sous le concept $P(\xi)$. Par conséquent, seule l'*extension* de $P(\xi)$ est impliquée vis-à-vis du contenu de '$\backslash_\beta(P(\beta))$', et *a fortiori* vis-à-vis de celui du premier énoncé. Au contraire, le nom d'un *autre* concept, même coextensif à $P(\xi)$, ne peut être substitué à '$P(\xi)$' au sein du second sans en modifier le contenu. Ce point soulève une difficulté fatale, visible à travers les énoncés suivants :

(1) $X = \backslash_\beta(H(\beta))$: Xavier est l'homme présent dans le salon

(2) $X = \backslash_\beta(A(\beta))$: Xavier est le membre de l'espèce animale la plus intelligente présent dans le salon

(3) $H(X)$: Xavier est un homme présent dans le salon

(4) $A(X)$: Xavier est un membre de l'espèce animale la plus intelligente présent dans le salon

Frege ne pouvait raisonnablement identifier les contenus de (1) et (2) tout en distinguant ceux de (3) et (4). Pourtant, ses conceptions pré-1890 conduisaient à une telle conclusion. En effet, '$\backslash_\beta(H(\beta))$' et '$\backslash_\beta(A(\beta))$' désignant le même individu, (1) et (2) partageaient le même contenu. En revanche, les concepts $H(\xi)$ et $A(\xi)$ étant différents (bien que coextensifs), il n'en allait pas ainsi de (3) et (4). À travers ce type d'exemples, Frege ne pouvait plus ignorer que sa sémantique traitait les concepts comme intensionnels vis-à-vis du contenu des énoncés, et comme extensionnels vis-à-vis de celui des noms propres, pour lesquels l'intensionnalité n'était prise en compte qu'à travers le mode de détermination. Afin de restaurer la différence entre (1) et (2), il pouvait donc identifier le contenu des noms propres à leur mode de détermination, auquel contribue le concept cette fois conçu comme intensionnel. Néanmoins, une telle manœuvre possédait certaines répercutions sur les fonctions. Proposons une autre décomposition de (1) et (2) en impliquant la fonction $F(\xi)$ qui envoie chaque pièce dans laquelle un unique homme est présent sur celui-ci, et la fonction $G(\xi)$ qui envoie chaque pièce dans laquelle un unique membre de l'espèce animale la plus intelligente est présent sur celui-ci :

244. qui relevaient d'un autre usage de cet article, et qu'une langue idéale devrait donc représenter autrement.

(5) $X = F(S)$: Xavier est l'homme présent dans le salon

(6) $X = G(S)$: Xavier est le membre de l'espèce animale la plus intelligente présent dans le salon

La différence entre les contenus de '$\backslash_\beta(H(\beta))$' et '$\backslash_\beta(A(\beta))$' doit être répercutée entre ceux de '$F(S)$' et '$G(S)$', ce qui exige d'épouser une vision intensionnaliste des fonctions. Frege mesura la profondeur du problème au moment d'analyser les noms propres, *via* les rôles qu'y jouaient respectivement les concepts et les fonctions. Sa vision intensionnaliste des premiers s'accordait avec l'idée que '$\backslash_\beta(H(\beta))$' et '$\backslash_\beta(A(\beta))$', et par suite (1) et (2), expriment des contenus différents. Sa vision extensionnaliste des secondes s'accordait avec l'idée que '$F(S)$' et '$G(S)$' désignent le même objet. La dissymétrie entre concepts et fonctions révélait la confusion entre ce qu'exprime un nom propre – qui contribue au contenu jugeable – et ce qu'il désigne :

- Pour garantir la différence entre (1) et (2), il était essentiel que :
  - les modes de détermination des objets d'une part, et les concepts conçus comme intensionnels d'autre part, contribuent au contenu jugeable ;
  - les fonctions et concepts conçus comme intensionnels contribuent au mode de détermination des objets.
- Pour conserver l'objet désigné comme contenu du nom propre, il était essentiel de concevoir extensionnellement le contenu des noms de fonctions et des noms de concepts.

Frege réalisait enfin qu'il n'avait pas assez affiné le contenu des noms d'objets et de fonctions vis-à-vis du premier problème, et trop affiné celui des noms de concepts vis-à-vis du second. Intensionnellement, la fonction et le concept sont au niveau du mode de détermination de l'objet. Extensionnellement, ils se situent sur le plan de l'objet lui-même. La conclusion s'imposait : le concept et la fonction conçus comme intensionnels sont en réalité le *mode de détermination* du concept et de la fonction, *i.e.* de ces entités extensionnelles qui, respectivement, subsument et opèrent sur des objets. Frege en vint donc à distinguer, au sein de chaque nom d'objet, de fonction et de concept, les modes de détermination qui se composent entre eux et composent le contenu jugeable ; et les entités ainsi déterminées qui se composent entre elles. Par conséquent, il scinda le contenu de ces expressions entre le *Sinn* qu'elles expriment et la *Bedeutung* qu'elles désignent (ou encore à laquelle elles réfèrent).

Nous voulons insister sur la cause de cette transformation. En 1884, l'adoption de l'identité objectuelle résorbait déjà l'écart entre les contenus de (1) et (2). Frege transféra alors la différence fondamentale entre ces énoncés au niveau du mode de détermination, en maintenant celui-ci à l'écart du contenu jugeable. Son erreur résultait d'un examen trop superficiel des noms propres. Il avait reconnu leur rôle au sein des énoncés, en admettant l'existence d'un mode de détermination du contenu de '$P(A)$' en raison du fait qu'un tel mode était attaché à 'A'. Cependant, il échoua à tirer la même conclusion relativement aux noms de concepts, autrement dit à admettre aussi l'existence d'un mode de détermination attaché à '$P(A) \rightarrow P(\xi)$'. À cette époque, il tenait encore le sens d'un terme conceptuel comme étant le concept, qu'il composait à tort avec l'objet, *i.e.* la référence des noms propres. Il réalisa son erreur lorsqu'il prit en considération le rôle joué par les concepts au sein du contenu des noms propres. Pour qu'un objet résulte d'une composition de fonctions et de concepts, il fallait que ces *deux* dernières entités soient conçues extensionnellement. Autrement dit, '$P(\xi)$' ne pouvait plus exprimer le même contenu selon s'il était pris au sein d'un nom propre – '$\backslash_\beta(P(\beta))$' – ou d'un énoncé – '$P(A)$' –, ce que manifestait le rapport entre les contenus des énoncés (1) et (3). Frege en prit conscience au moment où il examina la structure des noms propres, *i.e. lorsqu'il envisagea d'étendre proprement sa sémantique aux noms de fonctions.*

Il comprit que sa notion de contenu conceptuel se situait imparfaitement sur le plan du mode de détermination – du sens – relativement aux concepts, et sur celui de la référence relativement aux noms propres, et put enfin restaurer l'équilibre.

Voilà, à nos yeux, un des atouts de notre interprétation. Certains exégètes [245] reprochent à la lecture orthodoxe d'ignorer un élément important : l'adoption de l'identité objectuelle pré-1884. Sur ce point, nous nous rangeons derrière eux. Néanmoins, il importe alors de comprendre comment Frege a pu adhérer à une thèse qui se heurtait au problème de la valeur cognitive soigneusement traité en 1879 *via* une solution qui fut justement critiquée en 1892. Il convient de rendre compte du détour emprunté entre 1882 et 1990, et dissimulé dans l'introduction de "Sens et référence". Voilà l'objectif que nous avons atteint, en expliquant comment il régla (maladroitement) la difficulté des énoncés d'identité lors du premier mouvement, et pourquoi il renia cette solution lors du second. Son premier geste consista en un transfert de la valeur cognitive du contenu au mode de détermination, et le second germa lors de la prise en considération des fonctions.

Par ailleurs, notre interprétation permet de lever le voile sur un autre changement interne au second mouvement qui, en réalité, procéda en trois actes. Nous venons de décrire le premier : la stabilisation de l'architecture constituée du mode de détermination et du contenu conceptuel à travers une nouvelle répartition de ces notions dans celles de sens et de référence. Durant la période des *Grundlagen*, Frege tentait d'élucider la manière dont les contenus conceptuels se composaient. Il ne fut en mesure de décrire un processus analogue pour les modes de détermination qu'en franchissant le premier cap. À ce stade, il reconnut que les noms de concepts, de fonctions et d'objets structuraient à la fois les noms d'objets (complexes) et les énoncés : leurs sens composent ceux des noms propres et ceux des énoncés, qu'il appelait désormais *pensées* et qui constituent la partie jugeable de leurs contenus ; tandis que la composition de leurs références permet d'identifier la référence des noms propres qui les intègrent. Mais qu'en est-il des énoncés, à ce niveau ? Le nom '$\backslash_\beta(P(\beta))$' possède un sens composé à partir de ceux de '$\backslash_\beta(\varphi(\beta))$' et de '$P(\xi)$', et une référence qui résulte de l'opération de '$\backslash_\beta(\varphi(\beta))$' sur '$P(\xi)$'. L'énoncé '$P(A)$' exprime un sens composé à partir de ceux de '$P(\xi)$' et de 'A'. Mais possède-t-il lui-même une référence ? La distinction exprimer-désigner est indispensable à l'analyse des noms propres, mais joue-elle un rôle relatif aux énoncés ? Frege répondit par l'affirmative, en s'appuyant sur un principe de compositionnalité. Si les constituants d'un énoncés possèdent tous un sens, alors celui-ci exprime une pensée. De manière analogue, s'ils disposent tous d'une référence, alors il en va de même de cet énoncé. Le deuxième acte du bouleversement de 1890 consista à identifier la référence des énoncés aux valeurs de vérité :

> [La référence d'un énoncé] ne doit pas être modifiée quand on substitue à une partie d'énoncé une expression de même référence. [...] Que pourrait-on trouver, hormis la valeur de vérité, qui appartienne à tout énoncé pour lequel on tient compte de la référence des parties constituantes, et qui ne soit pas altéré par une substitution du genre indiqué ? (Frege 1892b, p. 150 / 111)

Voilà l'argument, nimbé de mystère, à partir duquel il justifia sa décision. Mais cette décision s'impose-t-elle réellement ? Il est clair que la valeur de vérité est une candidate *possible* à la référence des énoncés. Si q résulte du remplacement dans p d'un constituant par un autre de même référence, alors leurs valeurs de vérité sont identiques. Mais, *a priori*, rien n'assure qu'on ne puisse trouver quelque-chose de plus fin qui soit toujours commun à deux énoncés résultants de ce genre de substitutions. Church [246] aboutit à la même conclusion que Frege en invoquant un

245. Par exemple Heck et May (2010).
246. (Church 1956, pp. 24-25)

argument qui s'appuie sur l'idée suivante : si $P(\xi)$ est un concept qui subsume un unique objet A, alors les énoncés '$P(A)$' et '$\backslash_\beta(P(\beta)) = A$' doivent avoir même référence. Rouilhan [247] estime que cette hypothèse n'est pas "homogène au mouvement de pensée fregéen", du fait de son caractère *ad hoc*. Il propose de la fonder directement sur une hypothèse fregéenne : l'extensionnalité de la référence des termes conceptuels. Les deux concepts $P(\xi)$ et $\backslash_\beta(P(\beta)) = \xi$ sont coextensifs, car ils subsument tous deux le seul objet A. Par conséquent, '$\backslash_\beta(P(\beta)) = \xi$' peut être substitué à '$P(\xi)$' dans l'énoncé '$P(A)$' sans que sa référence n'en soit altérée. Et nous retrouvons l'idée de Church. Rouilhan estime donc que c'est en épousant une vision extensionnaliste des concepts que Frege fut conduit à admettre cette idée et, par suite, à identifier les références des énoncés aux valeurs de vérité.

Ce qui fut dit jusqu'à présent indique la même direction. Sur le fond, nous adhérons aussi à cette hypothèse. Mais nous voulons la préciser à travers deux remarques. D'une part, l'argument de Church est aujourd'hui contesté. Néanmoins, les objections présentées, extrêmement subtiles, sont le fruit d'un siècle de discussion concernant les notions de *Sinn* et de *Bedeutung*. Il est quasiment impossible que Frege les ait lui-même envisagées au moment où il donnait naissance à ces notions. Autrement dit, il a immanquablement tiré la même conclusion que Church, *si d'aventure son argument lui est venu à l'esprit*. Cette réserve nous conduit à notre seconde remarque : l'argument en question n'est pas immédiat, même une fois admis le principe de compositionnalité et l'extensionnalité des concepts. Il ne suffit donc pas de montrer qu'il s'ensuit immédiatement de la distinction *Sinn-Bedeutung* pour comprendre ce qui motiva à identifier les références des énoncés aux valeurs de vérité. Il convient de réaliser comment Frege est parvenu à développer lui-même un argument de cet acabit. Voilà précisément l'objectif que notre interprétation permet d'atteindre. En effet, nous avons expliqué qu'il aboutit à la distinction en question en analysant le rôle de l'article défini au sein du contenu des noms propres, *i.e.* en questionnant la différence entre les contenus d'énoncés tels que (1) et (3). Son enquête impliqua donc directement ces énoncés, et conduisit à en identifier les références. Or c'est justement sur cette identification que Church base son argument. Ainsi, bien que celui-ci ne soit pas immédiat au regard de la seule distinction sens-référence, il est naturel que Frege l'ait aperçu, car il se trouvait en plein milieu de son chemin. Il suffisait de noter que '$P(A)$' et '$\backslash_\beta(P(\beta)) = A$' étaient co-référentiels – ce qui constitua le cœur du premier acte de 1890 – pour constater que des énoncés *a priori* très éloignés, ne partageant visiblement que leur valeur de vérité, l'étaient à leur tour – ce qui constitua le second. Imaginons deux jumeaux dont le premier ait écrit un ouvrage intitulé *Jugement et sémantique*, et dont le second ait remporté le championnat du monde de cyclisme de l'année en cours. Considérons les énoncés suivants [248] :

(7)	$A = t_1$	:	Alain est l'auteur de *Jugement et sémantique*
(8)	$A = \backslash_\beta(J(\beta, B))$	:	Alain est le jumeau de Benjamin
(9)	$J(A, B)$	:	Alain et Benjamin sont jumeaux
(10)	$B = \backslash_\beta(J(A, \beta))$	:	Benjamin est le jumeau d'Alain
(11)	$B = t_2$	:	Benjamin est le champion du monde en titre de cyclisme

Frege avait constaté que les énoncés (8) et (9) d'un côté, et (9) et (10) d'un autre, étaient co-référentiels. Il en allait donc de même de (8) et (10). Par ailleurs, t_1 et $\backslash_\beta(J(\beta, B))$ – respectivement t_2 et $\backslash_\beta(J(A, \beta))$ – désignaient le même objet, ainsi (7) et (8) – respectivement (10) et (11) – partageaient la même référence. Par conséquent, (7) et (11) étaient co-référentiels.

247. (Rouilhan 1988, pp. 44-46)

248. Si nous souhaitons priver cette relation de sa symétrie, nous pouvons parler des jumeaux premier et deuxième-nés.

Une fois établie que '$P(A)$' et '$\backslash_\beta(P(\beta)) = A$' ont même référence, ce genre d'argument est extrêmement aisé à développer. Suffit-il pour autant à identifier la référence d'un énoncé à sa valeur de vérité ? Nous ne nous risquerons pas à l'affirmer, mais il est totalement compréhensible que Frege lui-même n'ait pas envisagé pas de lien plus fin entre (7) et (11). Face à la co-référentialité d'énoncés dont les sens semblaient si distants, il n'est pas surprenant qu'il ait considéré que seule leur valeur de vérité les rapprochait.

Nous connaissons désormais les deux premiers actes de 1890, et nous voulons insister sur leurs causes. Lorsque Frege porta son regard sur les fonctions, il fut contraint de reproduire pour les noms propres le travail d'analyse préalablement réalisé pour les énoncés, et de comprendre le lien entre les structures des noms propres ainsi dévoilées et les modes de détermination qui leur étaient attachés. Ces deux points le conduisirent immédiatement à décomposer les noms propres du langage de la géométrie à travers lesquels il distinguait l'importance des modes de détermination, et dans lesquels figurait systématiquement l'article défini. Nous voulons être très clairs à ce sujet : c'est bien l'affinement de sa sémantique à travers la prise en compte des fonctions qui induisit une reflexion sur l'article défini. Relativement aux causes du second mouvement, ce point est d'une importance capitale, car il permet d'expliquer *à la fois* l'émergence de la distinction sens-référence et l'identification de la référence des énoncés aux valeurs de vérité.

1.6.2.4 Les énoncés comme noms propres et les concepts comme fonctions

Il nous reste encore à expliquer le troisième acte du second mouvement. Frege avait reconnu les valeurs de vérité comme références des énoncés, mais il fallait désormais fournir quelques explications quant à leur nature. Il s'y employa dans "Sens et référence" :

> Il peut sembler arbitraire de désigner la valeur de vérité comme un objet, et on peut voir là un simple jeu verbal dont il n'y aurait pas à tirer de conséquences profondes. De fait, l'examen détaillé de ce que j'appelle un objet ne peut être engagé sans considérer les liens de l'objet avec le concept et la relation. Je réserve ceci pour un autre article. (Frege 1892b, p. 149 / 110)

Frege se fit ici aussi clair qu'imprécis. Clair sur le fait que les valeurs de vérité sont *stricto sensu* des objets et qu'il ne se contentait pas d'en *parler* comme tels pour maintenir une certaine homogénéité terminologique entre les références des noms complets. Imprécis sur les raisons et les implications d'une telle affirmation, car silencieux sur la nature des objets. Si bien que sa décision n'est pas facile à comprendre. Or, si les deux premiers actes sont aujourd'hui reconnus comme une avancée considérable de philosophie du langage, le troisième est souvent présenté comme un excès de zèle de la part de Frege, aussi inutile que désastreux. Dummett le critiqua vertement :

> L'identification des valeurs de vérité aux références des énoncés, associée à la thèse selon laquelle les valeurs de vérité sont des objets, conduisit à une grande simplification de l'ontologie de Frege, au prix d'une analyse hautement improbable du langage. (Dummett 1981, p. 183)

En réalité, Dummett ne condamne pas ici le fait d'identifier les valeurs de vérité aux références des énoncés s'il s'agit seulement de signaler que la valeur de vérité d'un énoncé peut être connue à partir des références des constituants de celui-ci. Il admet tout à fait que Frege ait, dans une volonté d'uniformisation lexicale, nommé 'référence' d'un énoncé ce qui ne dépend que des références de ses parties. Mais il l'accuse d'avoir pris au sérieux cette uniformisation, en mêlant les valeurs de vérité aux références des autres noms complets (les noms propres), *i.e.* aux objets. Ce reproche intègre deux pendants, que nous tenons à distinguer.

Frege a en effet considéré que les pensées conduisaient à deux *objets* : le Vrai et le Faux. Cependant, il n'est pas certain qu'il ait seulement extrapolé à partir de certaines tournures linguistiques. Juste avant le passage cité plus haut, il précisa que "ces deux objets [les valeurs de vérité] seront admis, serait-ce tacitement, par quiconque forme un jugement et tient quelque chose pour vrai, même donc par un sceptique" (p. 149 / 110). Depuis 1879, il tenait le jugement à l'écart de tout contenu d'expression, estimant que juger ne consistait pas à prédiquer la vérité d'un contenu, mais à passer de sa saisie à la reconnaissance de sa vérité à travers l'adjonction de la force judicative [249]. Néanmoins, avant 1890, il n'apporta aucune explication supplémentaire, et s'en tint à cette mystérieuse distinction. Les notions de *Sinn* et de *Bedeutung* lui permirent d'affiner son idée. Il précisa qu'il "entend[ait] par jugement le progrès qui va d'une pensée à sa valeur de vérité" (p. 162 / 126). À partir de cette date, il a donc peut-être traduit la reconnaissance de la vérité d'une pensée – le jugement – comme l'acte de reconnaître un objet – le Vrai – sous un habit particulier, ainsi qu'il est possible de reconnaître tout autre objet sous divers déguisements. C'est peut-être en considérant que les pensées déterminaient les valeurs de vérité à la manière dont les sens des noms propres déterminent les objets qu'il fut conduit à sa conclusion.

Dans un texte tardif, Frege affirma que "ce qui contient la plus claire indication de la nature de la logique, c'est bien la force assertive avec laquelle une phrase est prononcée" [250]. Il est clair que la notion de jugement se précisa en 1890, à travers l'apparition d'un chemin entre sens et référence. À n'en pas douter, le problème de la force assertive constitue un des grands défis soumis aux interprètes. Néanmoins, ce n'est pas celui que nous entendons relever. C'est précisément parce que nous reconnaissons à la fois l'étendue et la profondeur de cette difficulté que nous n'envisageons pas de la résoudre, en passant, dans un lieu qui ne lui est pas dédié. Nous aurons à dire sur la distinction entre objet et fonction, et sur son impact concernant la possibilité d'une *théorie* sémantique fregéenne. Néanmoins, nous croyons que l'objectualisation des valeurs de vérité tient ultimement aux progrès permis par la distinction sens-référence quant à la notion de jugement. Nous n'irons donc pas plus loin que ces quelques mots à ce sujet, renvoyant le lecteur curieux d'en apprendre davantage à l'excellent article de Textor "Frege sur le jugement comme reconnaissance de la vérité" (2010), en attendant que de plus amples recherches s'y consacrent, auxquelles nous espérons ailleurs prendre part.

Une fois admis l'existence des deux objets que sont le Vrai et le Faux, Frege pouvait répondre du contenu de *tous* ses signes logiques. Dans la *Begriffsschrift*, à l'exception de l'identité de contenu, il les présenta comme des opérateurs qui transformaient des contenus jugeables en d'autres contenus jugeables, sans clarifier cette situation dont nous avons vu les divers défauts [251]. Après le premier mouvement, il ne concevait plus les éléments primitifs de son langage comme étant les symboles '$_{\top}$', '$\smile$', etc., et les lettres '$\mathfrak{a}$', '$\mathfrak{f}$', etc. ; mais comme étant les signes '$_{\top}\,\xi$', '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\varphi(\mathfrak{a})$, etc. Ce dernier avait rejoint '$\xi = \zeta$' parmi les noms de concepts, tandis que les contenus des autres signes conservaient tout leur mystère. Après l'objectualisation des valeurs de vérité, ils devenaient eux aussi des concepts, subsumant certaines valeurs de vérité.

Frege aurait pu en rester là, traçant une frontière catégoriale entre les objets standards – la Lune, Boole, etc. – et les valeurs de vérité. Cette frontière aurait été répercutée entre les concepts standards qui subsument les objets standards – par exemple $a = b$ – et ceux qui subsument les valeurs de vérité – par exemple $_{\top}\,\xi$. Il aurait alors admis trois catégories d'entités en attente de complétion d'un objet : les fonctions, les concepts standards, et les concepts qui subsument les valeurs de vérité ; puis six catégories d'entités en attente de complétion d'une entité elle-même

249. En section 1.3, nous avons retracé la manière dont il régla progressivement son vocabulaire à cet égard.
250. (Frege 1915a, p. 272 / 298)
251. en section 1.4.

saturable par un objet, etc. Il en aurait résulté une importante complexification de son ontologie, qu'il rejeta en mêlant directement les valeurs de vérité aux objets standards. Ce faisant, les énoncés devenaient des noms propres particuliers, et tous les concepts devenaient des fonctions particulières, qui associent des objets ou des fonctions aux valeurs de vérité. S'il permettait une économie considérable sur le plan ontologique, ce geste exigeait d'accorder un sens à des expressions telles que 'Boole implique Frege' ou encore '$12 + 8 = 20$ est rouge'. Voilà précisément ce qui engendra les foudres de Dummett :

> Il est désormais requis que dans un langage correctement bâti, par exemple s'il contient à la fois les termes numériques et le prédicat 'ξ est vert', non seulement un sens soit prodigué à '5 est vert', mais aussi qu'un sens soit prodigué à '$5 = 2 + 4$ est vert'. Il est tragique qu'un penseur ayant accompli la première analyse véritablement aiguisée de notre langage se soit lui-même conduit à de tels absurdités. [...] La prise de distance initiale de Frege avec la forme du langage naturel – en particulier, sa notion de généralité – était fondée sur une vision profonde du fonctionnement de la langue ; tandis que cette déviation insensée n'est motivée par aucune nécessité, et n'est qu'une faute gratuite. (Dummett 1981, p. 184)

Nous nommons 'entité'[252] ce qui, aux yeux de Frege, peut constituer la désignation d'expressions linguistiques. Durant la première période, l'ambiguïté entre désigner et exprimer accompagna le maintien de l'architecture instable du couple liant le contenu conceptuel au mode de détermination. Mais, même à cette époque, Frege ne considérait pas que les contenus jugeables puissent être *désignés* par un énoncé. Ce point le força notamment à conserver l'identité métalinguistique entre énoncés après le premier mouvement. Il n'a donc jamais admis parmi ses entités que des concepts, des objets et des fonctions. Lors du second mouvement, il y intégra les contenus jugeables, sous leur nouveau nom de 'pensées', précisément parce qu'il comprit qu'ils étaient la *référence* de certains noms propres[253], les mêlant ainsi aux objets.

Dans le désordre qui régnait avant 1890, Frege suivait déjà une intuition précise : ne doivent être distinguées catégorialement que les entités dont les insaturations sont elles-mêmes distinctes. Avec Heck, nous avons vu[254] que cela l'avait notamment empêché de considérer certaines solutions au problème de Jules César. Il maintenait néanmoins une exception, liée à la notion de fonction qu'il n'avait pas encore sérieusement prise en considération. Lorsqu'il s'y appliqua, il résorba toute différence catégoriale entre concepts et fonctions, et aboutit à une analyse *complète* du langage en termes de fonctions et d'objets qui respectait rigoureusement son intuition. Avec Dummett, nous voyons désormais que cela le conduisit à des résultats extrêmement contre-intuitifs. Pour autant, est-il correct qu'aucune nécessité ne motivait cette décision ? D'une certaine façon, nous le croyons aussi. Cependant, nous ne disons pas, comme Dummett, que son ontologie fut le produit d'un certain principe excessif de simplicité, mais davantage que cette simplicité émergea d'une intuition illégitime concernant le lien entre catégories ontologiques et types d'incomplétude.

Durant notre troisième chapitre, nous questionnerons les raisons et les implications de cette intuition, qui affecte grandement la forme particulière d'une quelconque *théorie* sémantique fregéenne. Mais, à ce stade, il sera utile de connaître la structure spécifique de l'appareil linguistique développé dans le respect de cette ontologie, donc de l'idéographie. Or nous sommes désormais en position de fournir ses informations indispensables, et généralement de reconstruire rigou-

252. Dans le troisième chapitre, nous verrons tout ce que cette appellation présente à la fois d'imparfait et d'inévitable.

253. ou d'énoncés employés au style indirect, et qui expriment ces pensées au style direct. Le problème est bien connu, nous n'y revenons pas.

254. en section 1.5.3.4.

reusement le système des *Grundgesetze*. Ceci est l'objet de notre deuxième chapitre, que nous entamerons après une ultime mise au point [255].

1.6.3 Retour sur le rôle des fonctions au sein de chaque mouvement

L'examen des deux mouvements épousés par les idées fregéennes a révélé combien l'évolution des conceptions antérieures aux *Grundgesetze* s'articulait autour des fonctions, ou plutôt de la transition entre la notion de 1879 et celle de 1893. Le premier mouvement permit de se débarrasser totalement de la première, tandis que son héritière guettait, dans l'ombre. Cependant, pendant de longues années, Frege la sollicita aussi peu qu'il la questionna. Lorsque son regard se porta enfin sur elle, tous les défauts des idées sous-jacentes aux *Grundlagen* lui apparurent. Son enquête ouvrit sur le second mouvement, induisant une analyse des noms propres, parallèle à celle des énoncés, qui révéla l'ambiguïté attachée aux concepts. Frege parvint à lever cette ambiguïté en scindant le contenu des termes conceptuels entre ce qu'il appelait autrefois 'le concept', qu'il concevait comme intensionnel et qui n'est en réalité qu'un mode de détermination, et ce à quoi il donna finalement ce nom, *i.e.* l'entité extensionnelle ainsi déterminée. La même distinction valait pour la fonction, tandis que le mode de détermination de l'objet rejoignait le contenu du nom propre aux côtés de l'objet lui-même. Dans ce contexte, Frege put enfin reconnaître la *pensée* – la portion jugeable du contenu – comme résultant de la composition des modes de détermination attachés aux constituants d'un énoncé, et restituer dans ses droits la distinction analytique-synthétique que le premier mouvement avait détériorée. Parallèlement, le mode de détermination attaché à un nom propre complexe résultait enfin de la composition de ceux qui étaient attachés à ses constituants, et l'objet auquel conduisait le premier mode de détermination résultait de la composition des entités auxquelles conduisaient les seconds. En somme, un processus compositionnel touchait les modes de détermination – qu'il appelait désormais *le sens* et constituait ce qu'une expression *exprime* – et un autre s'appliquait aux entités ainsi déterminées – qu'il appelait désormais *la référence* et constituait ce qu'une expression *désigne*. Néanmoins, si le premier s'étendait légitimement aux énoncés, Frege aurait pu limiter le second aux noms propres. Au contraire, il vit dans les valeurs de vérité la référence des énoncés, qui résultait de la composition des références de leurs constituants. En les mêlant aux objets

255. Dans un ouvrage récent, Landini (2012, Section 2.2) prétend que Frege n'a jamais résorbé la distinction entre noms propres et énoncés, ou plus techniquement entre termes et formules, en expliquant que l'équivalent fregéen de la *formule* '$\neg p$' n'est pas le *terme* '$_{\top}\, a$' mais bien la *formule* '$\vdash_{\top} a$'. En réalité, sa remarque se fonde sur un choix terminologique trompeur, qui consiste à nommer 'formules' les expressions qui manifestent un jugement, et 'termes' celles qui n'accomplissent rien de tel. À ce titre, il existe bien sûr une distinction entre termes et formules chez Frege, mais ce n'est pas celle que Dummett – ou quiconque ayant abordé ce problème – a en vue. Les langages logiques contemporains n'incorporent aucun signe pour la force assertive. Contrairement à l'idéographie, ils ne permettent donc pas de différencier '$\vdash P(A)$' et '$P(A)$'. Au contraire, ils maintiennent l'écart catégorial, qui n'a pas cours dans l'idéographie, entre les expressions susceptible de recevoir une valeur de vérité et celles qui en sont incapables, par exemple entre '$P(A)$' et 'A'. Frege tenait donc compte de la première nuance invisible dans nos langages modernes. Ce point peut être porté à son crédit, mais il est indépendant de la critique de Dummett. Celui-ci lui reproche d'ignorer la seconde nuance, en permettant la formation d'énoncés telles que '$P(A) = A$'. En somme, Landini confond deux distinctions, et ainsi deux problèmes, qui n'ont rien à voir, en donnant aux expressions de l'idéographie situées de chaque côté de la première distinction les noms que les logiciens contemporains octroient aux expressions de leurs langages situées de chaque côté de la seconde : 'terme' et 'formule'. La difficulté soulevée par Dummett et tant d'autre n'est pas celle de la force assertive, et ne s'y réduit aucunement.

Nous ne reprochons pas à Landini d'utiliser ce vocabulaire, qui s'avère extrêmement commode lors d'un travail technique concernant l'idéographie, et auquel nous aurons nous-mêmes recours dans ce cadre. Nous l'accusons seulement de céder à une tentation contre laquelle il s'est pourtant lu-même élevé : prêter à la langue fregéenne, par des analogies défectueuses, certaines propriétés qui appartiennent seulement à nos langages logiques. La distinction entre 'p' et '$\vdash p$' – qu'il peut être commode de nommer 'terme' et 'formule' – n'est pas celle qui sépare les termes et formules des langages contemporains.

standards, il fut en mesure d'identifier les concepts à des fonctions dont les valeurs étaient toujours le Vrai ou le Faux.

La majorité des commentateurs présentent les réflexions liées à l'égalité comme la cause principale du second mouvement. Cette erreur est due au fait que l'article "Sens et référence", emblématique de ce mouvement, s'ouvre et se clôt sur des considérations concernant cette relation, ainsi qu'au manque d'attention porté au premier basculement. En examinant les fluctuations de la notion de mode de détermination, nous avons compris comment une réflexion sur les fonctions avait pu donner l'impulsion à cette transformation. C'est bien à travers ses variations, et non sa stabilité, que nous reconnaissons la notion de fonction comme la notion fondamentale des thèses fregéennes. En somme, il existe deux différences essentielles entre les fonctions de la *Begriffsschrift* et celles des *Grundgesetze*. D'une part, les premières, antérieures au mouvement de 1880-1882, servaient à dévoiler les constituants d'un contenu ; les secondes, à la fois le produit et la cause du mouvement de 1890, constituaient directement ces constituants. D'autre part, les premières n'éclairaient pas encore le contenu des symboles logiques tels que '$_{\top}$ ', tandis que les secondes permettaient enfin d'en rendre compte. Ainsi, après 1890, Frege tenait enfin une analyse *exhaustive* du langage, selon laquelle *toutes* les parties d'un énoncé désignent une fonction ou un objet, à travers le mode de détermination qui leur est attaché. Frege accorda donc le même statut aux éléments traditionnellement regardés comme des fonctions, comme des concepts et comme des opérateurs logiques. Par exemple :

- '$\xi + \zeta$' désigne la fonction qui envoie deux nombres sur leur somme ;
- 'ξ est vert' désigne la fonction qui envoie tout objet vert sur le Vrai, et tout autre objet sur le Faux ;
- '$_{\top}\,\xi$' désigne la fonction qui envoie le Vrai sur le Faux, et inversement.

Encore fallait-il fixer les valeurs de ces fonctions dans les cas non pertinents, notamment la référence de '$_{\top}\,A$' lorsque A n'est pas une valeur de vérité ; et nous verrons bientôt comment il s'y prit. Mais il importe avant tout de remarquer que Frege était *enfin* en mesure de bâtir un langage qui reflétait *toutes* les compositions entre sens et entre références. Il lui suffisait d'utiliser un appareil syntaxique permettant de représenter adroitement les entités insaturées selon leurs types d'insaturation. À cette fin, il impliqua des noms tels que '$\Phi(\xi)$' et '$\Omega_{\beta}(\varphi(\beta))$' pour désigner des fonctions ; et les lettres 'ξ' et 'φ' pour marquer la place de leurs arguments. Le difficile travail technique du second chapitre consistera à faire la lumière sur cet appareil, notamment sur les symboles utilisés et la manière dont ils se combinent. Nous croyons que certaines questions essentielles en dépendent, bien que cette tâche n'ait été réalisée avec précision ni par Frege lui-même, ni par aucun commentateur depuis.

Avant de nous engager dans cette voie, concédons que nous n'avons pas répondu à certaines questions à propos du genre de compositions que cet appareil est censé refléter. Depuis la section 1.4, nous employons le terme 'composition' en un sens extrêmement large. Nous disons que le contenu d'un énoncé est *composé* de ceux de ses constituants seulement en ceci qu'il peut (en principe) en être déduit, *i.e.* que la donnée des seconds permet d'établir univoquement le premier. Là était l'enjeu principal pour Frege, qui voulait représenter des démonstrations correctes en vertu du rapport entretenu par certains contenus à travers des dérivations régies par la forme des éléments syntaxiques qui y figurent. La distinction sens-référence n'a pas altéré la situation. L'essentiel restait, à chaque étape d'une dérivation, que la vérité du sens du conséquent soit justifiée par celles des sens des antécédents, ce qui est garanti par les liens qui unissent à la fois les sens et les références de leurs constituants. Nous avons expliqué ce point pour le contexte

pré-1890 [256], et nos explications s'adaptent sans difficulté au cadre post-1890.

Cependant, il ne repose sur aucune distinction catégoriale ni entre les sens ni entre les références des constituants d'énoncés. *A priori*, une même entité P pourrait parfaitement jouer des rôles différents dans l'établissement de contenus d'énoncés, identifiables à partir de la place qu'occupe son nom à l'intérieur de ces énoncés, selon si celui-ci est un prédicat ou un nom propre. Les notions d'objet, de concept, de sens propre et de sens conceptuel ne caractériseraient donc pas des contenus – sens ou référence –, mais seulement le rôle tenu par ces contenus vis-à-vis de l'établissement d'un autre contenu. Pourtant, Frege n'emprunta pas ce sentier, et employa des termes tels que 'incomplet' et 'insaturé' qui suggèrent davantage que les types – objet, concept ou fonction de premier niveau, etc. – appartiennent directement aux contenus en question et, lorsqu'ils sont compatibles, permettent à ces contenus de se structurer en un contenu plus complexe.

Quelle conclusion tirer à partir du lexique privilégié par Frege ? Comment doit-on entendre la métaphore selon laquelle les constituants d'une pensée s'unissent ainsi que des molécules en sont capables ? Nous sommes restés volontairement à l'écart de ces questions car elles n'ont pas infléchi le cours des mouvements de la première période de la vie scientifique de Frege. Nous ne prétendons pas qu'elles soient restées étrangères à ses idées, et notamment à sa conception des catégories logiques et ontologiques. Nous disons seulement qu'elles ne concernent pas les *changements* qui ont eu lieu lors des deux mouvements que nous avons identifiés. Ceux-ci résultèrent d'une réflexion sémantique sur la manière dont les contenus de certaines expressions peuvent être établis à partir de ceux de leurs constituants, indépendamment des problèmes métaphysiques touchant à la nature de ces contenus. Ces problèmes seront l'apanage de notre troisième chapitre, et nous ne serons pas en mesure de les affronter avant d'avoir surmonter certaines difficultés techniques, auxquelles est dédié le chapitre qui vient.

1.7 Synthèse

S'il est deux évènements qui ont marqué la grande exploration fregéenne des terres vierges de la logique contemporaine, il s'agit sans aucun doute des découvertes du couple *Sinn-Beduntung* et des paradoxes sémantiques. C'est à l'aune de ces découvertes que l'aventure intellectuelle de notre auteur est découpée en trois grands moments. Pour ce que nous en savons, ceci dure depuis que Frege – le professeur-assistant isolé d'une université modeste, rejeté par les éditeurs, critiqué voire méprisé par nombre de ses collègues – est devenu Frege – le logicien-philosophe-mathématicien de renom dont les textes sont lus, étudiés et commentés par des centaines de chercheurs à travers le monde. La séparation entre ses idées précoces, matures et tardives tomba comme un couperet dès l'instant où l'attention du monde universitaire se porta enfin sur ses écrits. Les historiens remontèrent alors leurs manches pour déceler à quels moments précis le sens s'était arraché à la référence, et Frege au logicisme. Le premier évènement est à présent assez nettement localisé entre décembre 1889 et mai 1890. Quant au second, il se cache encore aujourd'hui, insaisissable, quelque part entre 1906 et 1918.

De nombreux commentateurs distinguent ça et là certains changements internes à la première période, plus ou moins importants, plus ou moins camouflés. Ces fluctuations sont parfois liées à la notion de jugement [257], d'égalité arithmétique [258], de vérité logique [259], ou encore à la distinction

256. en section 1.4.6.
257. (Sluga 2002)
258. (May 2001)
259. (Linnebo 2003)

entre objets et concepts [260]. Cependant, elles sont toujours conçues comme des virages inhérents au chemin qui conduisit du point de 1879 à celui de 1890, comme diverses étapes isolées qui aboutirent à une refonte totale des idées fregéenne. Aucune d'entre elles n'est hissée à la hauteur du bouleversement induit par l'entrée en scène du sens et de la référence.

Au contraire, notre enquête a permis d'identifier un autre basculement tout aussi déterminant, et qui précéda celui-ci de plusieurs années. Si, nous croyons, il ne fut jamais signalé comme tel, c'est parce que Frege se fit infiniment discret à son sujet. Il lui arriva d'évoquer ses anciennes conceptions dans la période dite 'mature', mais il les aborda systématiquement comme si elles convenaient aussi bien à la *Begriffsschrift* qu'aux *Grundlagen*, forçant le trait tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. C'est pourtant bien entre les deux époques qu'une première révolution eut lieu. En effet, nous voyons mal comment qualifier autrement un évènement qui ne réunit pas moins de sept changements profonds : l'adhésion au logicisme, l'abandon de la première notion de fonction, l'analyse de la quantification en termes de concepts, la mise à jour de l'appareil linguistique adapté à la hiérarchie qui sous-tendait cette analyse, la substitution de la notion de généralité à celle d'indétermination, l'adoption de l'identité objectuelle, et enfin l'extension des modes de détermination aux énoncés. Ce premier mouvement, qui intervint lors des réflexions sur le concept de *nombre*, toucha donc à la fois sa vision de la logique, de l'arithmétique et de la sémantique. Et si Frege ne lui a pas conféré le même éclat qu'au second, nous avons pu l'apercevoir en creux, à travers chaque thème abordé. Nous en avons reconstitué les diverses facettes, réalisant progressivement son importance.

Sa datation reste néanmoins difficile, malgré les nombreuses modifications qui le caractérisent. Nous savons avec certitude qu'il intervint avant août 1882, *i.e.* avant l'annonce à Marty du projet logiciste. Par ailleurs, certains stigmates de la première vision des contenus logiques sont visibles dans un texte posthume datant de 1882 [261], et certains signes suggèrent que le logicisme était encore étranger à Frege dans une conférence donnée en janvier la même année [262]. Si nous prenons ces passages au mot, alors nous pouvons situer le basculement entre janvier et août 1882. Néanmoins, les motifs d'une dissimulation de certaines facettes d'idées encore naissantes étaient nombreux, et nous ne nous risquerons pas à tirer une conclusion hâtive sur ces seules bases. Comme nous l'avons vu, le dernier écrit *indéniablement* marqué par les conceptions de 1879, sans qu'aucune forme de travestissement ne soit envisageable, n'est autre que le long article "La logique calculatoire de Boole et mon idéographie" [263]. De ce texte, nous avons dit un peu vite qu'il datait de 1881, ce qui nous a conduit à parler du mouvement de 1881-1882. En réalité, sa rédaction peut remonter jusqu'à la publication du compte-rendu de la *Begriffsschrift* réalisé par Schröder en 1880 [264] et cité dans cet écrit. Ainsi, puisqu'il faut ici des certitudes, voici la seule que nous soyons en mesure de proposer : le premier mouvement qui marqua la transition des conceptions de la *Begriffsschrift* à celles des *Grundlagen* eut lieu entre 1880 et le mois d'août 1882.

Notre reconstitution détaillée du mouvement de pensée fregéen entre 1879 et 1890 arrive à son terme. Elle attend néanmoins un ultime complément. Certes, nous connaissons désormais les conceptions qui sous-tendaient la rédaction du "manuscrit presque complet" dans lequel Frege entreprit la réduction de l'arithmétique entre les deux premiers mouvements, ainsi que les différents aspects de la langue formulaire qui s'y déployait. Néanmoins, nous n'avons pas encore discuté le

260. (Heck et May 2010)
261. (Frege 1882a)
262. et de laquelle fut tiré l'article "Sur le but de l'idéographie" (1882b).
263. (Frege 1881)
264. (Schröder 1880)

contenu précis de ce manuscrit, *i.e.* la stratégie particulière attachée à la dérivation du principe de Hume et des théorèmes évoqués dans les *Grundlagen*. À ce titre, certaines mises au points techniques concernant les extensions sont nécessaires, adéquatement placées au sein du chapitre suivant. En effet, l'objectif de celui-ci consiste en une reconstruction complète de l'Idéographie, *i.e.* du second système logique de Frege dans lequel les parcours-de-valeurs, et notamment les extensions, tiennent une place privilégiée. Ce système fut le produit immédiat du mouvement de 1890, et dépend donc en grande partie des différents résultats auxquels nous sommes ici parvenus. Lorsque certaines choses auront été dites, nous pourrons interrompre momentanément notre travail afin, dans un rapide retour à la problématique historique du chapitre qui s'achève, d'ajouter à celui-ci le grain technique qui lui fait encore défaut.

Chapitre 2

Présentation détaillée de l'Idéographie

2.1 Composition de la première partie des *Grundgesetze*

Nous avons présenté en introduction le découpage des *Grundgesetze*. Nous allons maintenant détailler la partie qui nous intéresse : la première. Elle est intitulée "Exposition de l'idéographie". Frege ne se limite pas à y décrire son langage, il y expose aussi son système. Voici un plan général auquel nous référer :

I. **Exposition de la langue formulaire**.
   1. **Les signes primitifs**
      i. **Introduction aux fonctions, aux concepts et aux relations**
      ii. **Les signes pour les fonctions**
      iii. **Déductions et conséquences**
      iv. **Extension de la notation pour la généralité**
   2. **Définitions**
      i. **Remarques générales**
      ii. **Définitions particulières**
   3. **Lois dérivées**

L'alphabet de la langue formulaire contient des signes primitifs et des signes définis. Ces derniers étant réductibles aux premiers, chacune de leurs apparitions peut être évitée et remplacée par les signes primitifs adéquats. Les signes définis sont donc des conventions d'écriture permettant la simplification des formules.

C'est dans la première section que fut décrit le fonctionnement général de l'Idéographie. Celle-ci est à son tour découpée en quatre sous-sections. "Introduction aux fonctions, aux concepts et aux relations" intègre différentes considérations ontologiques et introduit les principes généraux qui gouvernent le système. À partir du §5 débute la deuxième sous-section : "Les signes pour les fonctions". Frege y explique les symboles qui correspondent, en un sens extrêmement large, aux connecteurs et quantificateurs des logiques modernes ainsi que d'autres signes plus spécifiques. Avec le §14 commence la sous-section "Déductions et conséquences" : la description des règles d'inférence et du biais par lequel s'exprime la généralité, lequel permit la donnée des premiers axiomes. Enfin, à partir du §19, "Extension de la notation pour la généralité" prolonge ce travail

via l'introduction de nouveaux symboles utilisés pour l'expression des règles et axiomes manquants. La syntaxe est alors presque intégralement décrite. *Presque*, car certaines règles attendent encore d'être représentées dans leur généralité. Quant à la morphologie, les renseignements livrés sont parcellaires, totalement insuffisants.

La deuxième section ne se cantonne pas à la donnée d'abréviations améliorant l'élégance et l'aisance dans les démonstrations. Elle se divise en deux sous-sections, et s'initie au §26 par des "Remarques générales" qui ont suscité une abondante littérature. C'est le lieu des §§29-31 dans lesquels Frege fournit de précieux renseignements sur la morphologie et – nous verrons dans quelle mesure – la sémantique de l'Idéographie. Il tente de montrer [1] que tous les noms du langage possèdent une référence. Ce développement aurait pu intervenir plus tôt. Il fut pourtant localisé là où sont exposés les principes gouvernant l'usage des définitions. Il y a une raison à cela : si un signe est correctement défini *via* des signes primitifs, chaque nom dans lequel il apparaît est co-référentiel avec un nom composé de signes primitifs. Si tous les noms composés de signes primitifs réfèrent, il en va de même des noms composés de ce signe défini. Il suffit donc de montrer que les noms composés des signes primitifs réfèrent – c'est ce que Frege pensait faire aux §§29-31 – et d'établir les règles de définition correcte d'un signe *via* les signes primitifs – ce qu'il fit au §33 – pour être en mesure de procéder sereinement à des définitions.

Frege s'attela à cette dernière tâche dans la seconde sous-section, à partir du §36. Les symboles définis jouent un rôle crucial dans la réduction des concepts arithmétiques à la logique. Il réalise au sein des *Grundgesetze* le travail présenté informellement dans son *Grundlagen*. Il définit le concept de *nombre cardinal* et, s'appuyant sur les relations d'accessibilité et de successeur, celui de nombre cardinal *fini*. Nous avons décrit en détail cette stratégie en section 1.5.3 [2]. Toute l'astuce de Frege y est localisée. La suite : la démonstration, dans ce cadre, des axiomes de Peano, des théorèmes de l'arithmétique, *via* la définition des opérations arithmétiques, n'est plus qu'un long et minutieux labeur effectué dans la seconde partie des *Grundgesteze*. Les choses étaient moins aisées concernant les nombres réels, sujet du début de la troisième partie, qui aurait été probablement achevée et accompagnée d'une quatrième traitant des nombres complexes si Frege n'avait été frappé par la foudre de la contradiction qui, l'atteignant, n'en manqua pas d'éblouir et d'aveugler les logiciens alentour.

Enfin, dans la troisième section, §§47-52, il fournit un résumé des axiomes et des règles, intégrant à ces dernières celles qui n'avaient pas encore été rigoureusement formulées ; puis il mit son système en action à travers la dérivation de théorèmes élémentaires qui faciliteraient les démonstrations à venir.

2.2 Fragment propositionnel (ou presque)

Plaçons-nous quelques instants dans le système de la déduction naturelle pour la logique classique des langages des prédicats de premier ordre. Considérons un langage qui ne possède aucune variable propositionnelle. Il est possible d'exhiber les règles propositionnelles d'un système adapté, notamment :

1. Nous invitons le lecteur à prendre le terme 'montrer' dans le sens le plus vaste possible. Il nous appartiendra plus tard d'expliquer ce qu'il convient d'entendre par là.

2. Plus précisément, disons que l'essentiel de la stratégie avait été décrit dans les *Grundlagen*, mais la distinction sens-référence a tout de même produit un certain écart entre les méthodes de 1884 et 1893, que nous discuterons en section 2.5.3.

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

À cette fin, nous utilisons des métavariables – en l'occurrence 'φ' et 'ψ' – qui parcourent la totalité des formules du langage. Ainsi, nous isolons une règle d'essence exclusivement propositionnelle bien que tous les termes et toutes les formules de notre langage incorporent des éléments extra-propositionnels : constantes d'individu, variables d'individu, prédicats, symbole d'égalité et/ou symboles de fonctions.

Dans le système de la langue formulaire, la distinction entre contenus jugeables et objets permet un travail similaire. Dans l'Idéographie, l'identification des valeurs de vérité à des objets complique le détachement des règles strictement propositionnelles. À proprement parler, on n'y trouve rien qui joue le rôle exact des fragments propositionnels des logiques modernes. C'est pourquoi Cook (2013) conserve les guillements lorsqu'il évoque un tel fragment :

> Nous nous tournons ensuite vers la "logique propositionnelle" de Frege – c'est-à-dire ces opérateurs qui correspondent, au moins grossièrement, aux opérations de la logique propositionnelle moderne. (Cook 2013, p. A.4)

Dans (Cadet et Panza 2015), nous avons reconstruit ce qui, à nos yeux, s'en approchait le plus, en montrant que deux versions – dont la seconde était une extension conservative de la première – étaient également envisageables. Dans ce chapitre, nous visons à exposer le fonctionnement technique de l'idéographie. Ce travail possède, à cet égard, un intérêt certain ; nous allons donc le reproduire, à quelques différences mineures près [3].

2.2.1 Morphologie

2.2.1.1 Clauses

Nous appelons 'FGGLP' la frange (quasi-)propositionnelle de l'Idéographie. Le langage – nommé '$\mathscr{L}_{\text{FGGLP}}$' – a pour alphabet les trois symboles '$\begin{smallmatrix}\top\\ \lfloor\end{smallmatrix}$', '$\top$', '$\vdash$' ainsi que les lettres 'a', 'b', 'c', potentiellement indexées sur les entiers naturels :

$\mathscr{L}_{\text{FGGLP}} = \mathscr{L}(a, b, c, \ldots, a_i, \ldots, \ldots, b_i, \ldots, \ldots, c_i, \ldots, \top, \begin{smallmatrix}\top\\ \lfloor\end{smallmatrix}, \vdash)$

Les termes et énoncés du langage sont définis par les clauses suivantes [4] :

As$^{\text{T}}_{[\text{FGGLP}]}$. ***i*** toute lettre du langage est un terme ;

As$^{\text{T}}_{[\text{FGGLP}]}$. ***ii*** si t est un terme, alors $\ulcorner \top\, t \urcorner$ est un terme ;

As$^{\text{T}}_{[\text{FGGLP}]}$. ***iii*** si t_1 et t_2 sont des termes, alors $\ulcorner \begin{smallmatrix}\top\\ \lfloor\end{smallmatrix}\, t_2 \urcorner$ est un terme ;
t_1

As$^{\text{T}}_{[\text{FGGLP}]}$. ***iv*** aucune autre combinaison des symboles du langage n'est un terme.

3. La plus importante tient à la conservation du signe pour le conditionnel dans sa version fregéenne.

4. Par 'termes' nous entendons aussi les formules, les deux étant confondus dans l'idéographie. De plus, nous employons 'énoncé' dans le sens d''énoncé assertif', raccourci utilisé par Frege lui-même dans les *Grundgesetze* (1893, p. 9). Le problème des distinctions entre termes, formules et énoncés assertifs après 1891 a été discuté en section 1.6.2.4.

As$^{\mathrm{E}}_{[\mathrm{FGGLP}]}$**.** ***i*** Si t est un terme, alors $\ulcorner\vdash t\urcorner$ est un énoncé ;

As$^{\mathrm{E}}_{[\mathrm{FGGLP}]}$**.** ***ii*** aucune autre combinaison des symboles du langage n'est un énoncé.

Statuons proprement sur quelques conventions d'écriture que nous avons jusqu'ici utilisées implicitement :

Conv$_{[\mathrm{FGGLP}]}$**.** ***i*** si t_1, t_2 et t_3 sont des termes, alors le terme $\ulcorner\begin{array}{l}\top\top t_3\\ \quad\llcorner t_2\\ \llcorner t_1\end{array}\urcorner$ s'écrit aussi $\ulcorner\begin{array}{l}\top\!\!\!\top t_3\\ \quad\llcorner t_2\\ \llcorner t_1\end{array}\urcorner$;

Conv$_{[\mathrm{FGGLP}]}$**.** ***ii*** si t_1 et t_2 sont des termes, alors les termes $\ulcorner\begin{array}{l}\top t_2\\ \llcorner\top t_1\end{array}\urcorner$ et $\ulcorner\begin{array}{l}\top\top t_2\\ \llcorner t_1\end{array}\urcorner$ s'écrivent aussi respectivement $\ulcorner\begin{array}{l}\top\!\!\!\top t_2\\ \llcorner\top t_1\end{array}\urcorner$ et $\ulcorner\begin{array}{l}\top\!\!\!\top t_2\\ \llcorner t_1\end{array}\urcorner$;

Conv$_{[\mathrm{FGGLP}]}$**.** ***iii*** si t_1 et t_2 sont des termes, alors l'énoncé $\ulcorner\vdash\begin{array}{l}\top t_2\\ \llcorner t_1\end{array}\urcorner$ s'écrit aussi $\ulcorner\vdash\begin{array}{l}\top t_2\\ \llcorner t_1\end{array}\urcorner$;

Conv$_{[\mathrm{FGGLP}]}$**.** ***iv*** si t est un terme, alors l'énoncé $\ulcorner\vdash\top t\urcorner$ s'écrit aussi $\ulcorner\vdash\top t\urcorner$.

En guise d'exemple, remarquons que l'énoncé '$\vdash\begin{array}{l}\top\top\top c\\ \quad\llcorner b\\ \llcorner a\end{array}$' s'écrit aussi bien '$\vdash\begin{array}{l}\top\!\!\!\top c\\ \quad\llcorner b\\ \llcorner a\end{array}$'.

2.2.1.2 Remarques

'$\top$' (respectivement '$\begin{array}{l}\top\\ \llcorner\end{array}$') joue ici un rôle parallèle à celui de l'opérateur moderne '$\neg$' (respectivement '$\rightarrow$'). Nous disons 'parallèle' et non 'identique' car deux éléments fondamentaux les distinguent. D'une part, Frege tenait à manifester la force assertive à travers l'écriture du trait vertical. Ainsi la formule '$a \rightarrow (b \rightarrow \neg c)$' ne se traduit pas par la première mais par la seconde des deux expressions suivantes :

'$\begin{array}{l}\top\!\!\!\top c\\ \quad\llcorner b\\ \llcorner a\end{array}$' ; '$\vdash\begin{array}{l}\top\!\!\!\top c\\ \quad\llcorner b\\ \llcorner a\end{array}$'

D'autre part, Frege intégrait les valeurs de vérité à la catégorie des objets. Les lettres latines étaient donc destinées à être remplacées aussi bien par des énoncés non assertifs (des noms du Vrai et du Faux) que par des noms d'autres objets [5].

Voilà qui interdit toute identification de FGGLP à un quelconque système propositionnel moderne. Les autres différences sont affaire de conventions d'écriture, mais n'en réclament pas moins quelques commentaires.

Nous avons signalé en section 1.4.13.5 les difficultés syntaxiques soulevées par l'écriture en deux dimensions, que le rôle superflu joué par le trait horizontal de la langue formulaire permettait d'abolir aisément. Dans l'idéographie, il est aussi possible de s'en dispenser, mais au prix d'un florilège de parenthèses qui compliqueraient la lecture bien au-delà de la singularité dont nous

5. Ceci constitue une première raison de ne pas parler de variables propositionnelles. Il y en aura d'autres.

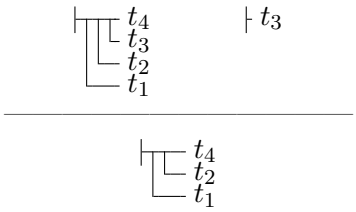
ferions l'économie [6] [7]. D'ailleurs, cette dernière possède certains avantages dont nous voulons profiter. Cook les décrit ainsi :

> La notation à deux dimensions offre un aspect "géométrique" à la découverte et à l'analyse des preuves. (Cook 2013, p.A.1)

Afin d'illustrer son propos, considérons la loi du Modus Ponens. Voici la représentation moderne d'une de ses applications :

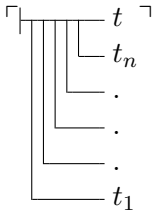
$$\frac{t_1 \to (t_2 \to (t_3 \to t_4))) \qquad t_3}{t_1 \to (t_2 \to t_4))}$$

Voici la version fregéenne :



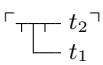
Graphiquement, la dérivation s'effectue par le simple retrait de . Le fait que $\ulcorner t_1 \to (t_2 \to (t_3 \to t_4))\urcorner$ puisse aussi se lire $\ulcorner (t_1 \wedge t_2 \wedge t_3) \to t_4 \urcorner$, *i.e.* que la vérité de t_4 soit une conséquence de celles de t_1, t_2 et t_3, est rendu manifeste par la verticalité de l'expression. t_1, t_2 et t_3 apparaissent clairement comme les hypothèses et t_4 comme la conclusion. Cet atout est d'autant plus précieux que Frege n'introduit pas de signes pour jouer un rôle parallèle à '$\wedge$' et '$\vee$' [8]. La fluidité offerte par une telle écriture surgit une fois l'étonnement et la gêne dissouts dans un peu de pratique. Nous espérons que le lecteur s'en apercevra rapidement en suivant nos démonstrations.

Dans la terminologie de Frege, chacun des t_1, t_2 et t_3 est un *Unterglied* tandis que t_4 est le *Oberglied* de la formule. Nous adoptons une traduction littérale, selon laquelle $t_1, \ldots, t_n$ sont les *sous-constituants* et t est le *sur-constituant* de la formule :



6. Ce point est dû au rôle cette fois non négligeable tenu par le trait horizontal. Bien sûr, cela ne touche pas le versant propositionnel, mais quitte à endurer les deux dimension, autant nous y familiariser dès maintenant.

7. Dans (Cadet et Panza 2015), nous avons maintenu les deux dimensions à travers des traits qui surplombaient une ligne semblable aux formules contemporaines. Cela permettait d'isoler dans cet espace les différents traits horizontaux, et de préserver en-dessous une écriture de laquelle le logicien contemporain était coutumier. Nous faisons ici un autre choix.

8. Il est néanmoins possible de les définir respectivement par 

et

.

2.2.2 Syntaxe

2.2.2.1 Préliminaires

Nous avons déjà évoqué le résumé des dix-huit règles établi au §48. Cette synthèse survint après un long développement non systématique durant lequel la plupart des règles furent présentées ou énoncées, que ce soit sous une forme identique ou légèrement altérée. Sept d'entre elles concernent directement notre système : les 2-4, 6-8 ainsi qu'une partie de la règle 9.

La règle 2 est présentée dans le §12, mais ne reçut sa forme générale qu'au §48. C'est dans les §§14-16 que Frege fournit en italique [9] (et, nous verrons dans quelle mesure, justifia) la plupart des règles propositionnelles. La règle 6 est stipulée dans le §14, elle seule réapparaît sous une forme strictement identique au §48. Les règles 3, 4 et 7 sont introduites dans le §15 [10]. La règle 8 est établie au §16. La règle 9 n'est jamais proprement énoncée avant le §48, bien qu'elle gouverne les substitutions, trait capital de l'Idéographie.

Aux §§13-16, Frege n'a pas livré les informations concernant la construction des expressions en jeu dans les règles. Ce point provient notamment d'un ordre d'exposition peu conventionnel [11]. Une syntaxe peut tout à fait être spécifiée avant la morphologie, tant qu'elle est présentée *via* des métavariables qui parcourent la totalité des formules, quelles que soient ces dernières. Citons par exemple l'introduction du *Modus Ponens* :

> Des énoncés '$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, \Gamma\\ \;\llcorner\, \Delta\end{array}$' et '$\vdash \Delta$', on peut inférer '$\Gamma$'. (Frege 1893, p. 25)

Dans ce passage précis, les lettres grecques majuscules jouent le rôle de métavariables. Frege les destinait à être remplacées, durant les démonstrations, par des termes du langage, bien qu'il n'eût pas encore spécifié ces derniers à ce stade de l'ouvrage. Malheureusement, le rôle global de ces lettres au sein des *Grundgesetze* est équivoque. C'est pourquoi, en attendant de l'expliquer, nous préviendrons toute ambiguïté en conservant nos propres symboles pour les métavariables.

Frege aurait pu, comme il l'avait fait dans la *Begriffsschrift*, s'en tenir au *Modus Ponens* présenté sous cette forme. Il préféra doter son système d'une règle plus générale, afin de faciliter ses preuves :

> Si un sous-constituant d'un énoncé diffère d'un autre énoncé seulement parce qu'il manque la barre de jugement, alors on peut inférer un énoncé qui résulte du premier en supprimant ce sous-constituant. (Frege 1893, p. 26)

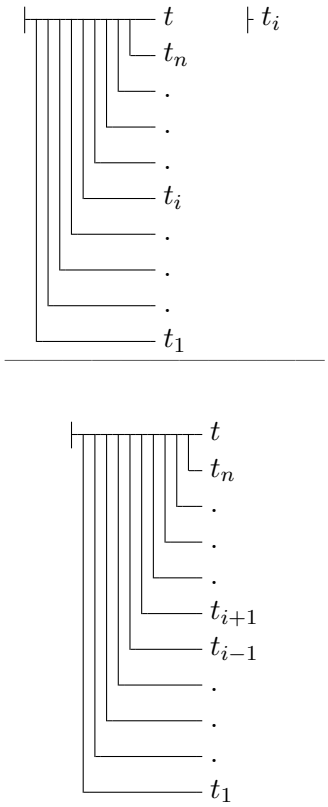
'b' étant un sous-constituant de '$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!\top\, c\\ \;\;\;\llcorner\, b\\ \;\llcorner\, a\end{array}$', on peut en inférer, conjointement avec '$\vdash b$', la formule '$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, c\\ \;\llcorner\, a\end{array}$'. Cette déduction n'était pas permise par la première version de la règle.

9. Frege utilise deux moyens pour mettre un passage en valeur : l'écriture en italique d'une part et un espace accru entre les caractères d'autre part. Chacun d'entre eux possède différents usages et intervient dans différents contextes. À l'instar de la traduction anglaise (2013) qui ne retient que le premier, nous parlerons d'italique dans les deux cas, tout en précisant l'usage si nécessaire.

10. Les deux premières ne figurent pas en italique. S'il faut chercher une raison à cette différence bien mineure, précisons que dans ces paragraphes, Frege travaille principalement sur des exemples avant de généraliser les règles. Il fournit en revanche la règle 4 dans un autre cadre, durant le développement de la 7. Voilà qui pourrait expliquer la dissemblance. Quant à la règle 3, un mot y figure en italique, qui pourrait l'avoir incité à maintenir le reste de la description dans une forme standard. Il est très probable, cependant, que nous tirions par les cheveux de simples accidents typographiques.

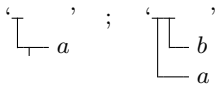
11. Frege a clairement voulu introduire les règles "propositionnelles" avant d'aborder la hiérarchie des niveaux de fonctions, indispensable à la construction des termes.

Frege procéda toujours ainsi, écrivant d'abord dans la langue artificielle un schéma de règles, puis l'étendant à un schéma de schémas de règles dans la langue naturelle. Nous pouvons formaliser ce dernier à travers l'utilisation de métavariables et de pointillés :

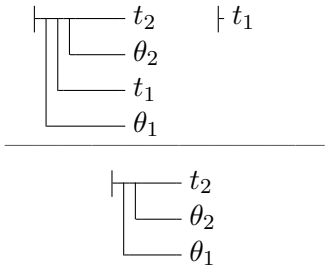


Par notre usage des pointillés, nous ne signifions pas qu'il y a exactement trois branches entre t_1 et t_i, mais qu'il y a un nombre quelconque *éventuellement nul* de branches. Pour simplifier l'écriture, nous utiliserons la lettre 'θ' – indexée par des entiers naturels – au bout d'une branche unique afin de représenter les branches en question. Notons que θ est une métavariable dans le sens où elle parcourt différents constituants syntaxiques. En revanche, elle ne parcourt aucun *terme* du langage, car une succession de branches n'est rien de tel [12]. Il faut donc bien distinguer 't' – qui représente un terme du langage – et 'θ' – qui représente un nombre quelconque *éventuellement nul* de branches au bout desquelles figurent des termes du langage [13]. Suivant cette convention, notre règle s'écrit :

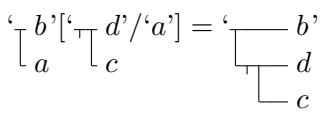
12. comme en témoignent les deux exemples suivants :



13. À proprement parler, ce n'est pas 'θ' seul qui représente un nombre quelconque de branches, mais bien l'expression :



Par ailleurs, nous utiliserons 'δ' – potentiellement indexée par des entiers naturels – comme métavariable qui parcourt la totalité des lettres latines du langage. '$t_1(t/\delta)$' désignera le terme qui résulte du remplacement de toutes les occurrences de δ par t dans t_1, par exemple :



L'usage simultané des guillemets et des métavariables présente une difficulté technique qu'il est plus simple de discuter dans le cadre d'un langage logique contemporain. Les métavariables sont utilisées pour faire mention des termes d'un langage. 't_1' peut notamment désigner la lettre 'x' et 't_2' la lettre 'y'. L'écriture des clauses d'induction de la morphologie ou des règles de dérivations exige de combiner les métavariables et les symboles du langage. Par exemple, on trouve fréquemment l'assertion suivante :

> Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 = t_2$ est un terme.

La plupart des ouvrages de logique ne s'encombrent pas de guillemets [14]. Pourtant, dans le cas où 't_1' désigne 'x' et 't_2' désigne 'y', alors $t_1 = t_2$ se traduit par 'x'='y' ; il ne s'agit pas d'un terme. L'ajout de guillemets autour du signe '=' ne change pas le problème, car 'x''='y' n'est pas un terme non plus. Il existe deux solutions : utiliser un opérateur de concaténation pour le passage d'une succession de mentions de symboles à la mention d'une succession de symboles – par exemple de "x''='y" à "$x = y$" – ou procéder à un codage des suites de symboles dans les entiers naturels. Chacune de ces options est également adaptée à l'Idéographie. Depuis le début de cette section, nous avons eu recours à la première, en entourant l'expression de symboles qui indiquent que la concaténation a eu lieu. Ainsi, la clause ci-dessus devient :

> Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner$ est un terme.

Nous nous écarterons de cette convention dans un seul cas. Lorsque les expressions figureront à l'intérieur de règles, d'un côté ou de l'autre du trait de déduction, nous omettrons ces symboles.

Enfin, Frege simplifiait parfois ses clauses en y intégrant des notions sémantiques, comme dans la loi 3 :

> Un sous-constituant d'un énoncé peut être permuté avec le sur-constituant si leurs valeurs de vérité respectives sont inversées.

Voici comment lui donner un tour exclusivement syntaxique :

> Un sous-constituant d'un énoncé peut être permuté avec le sur-constituant s'ils se voient tous deux précédés du trait de négation à cette occasion.

14. Pour citer un célèbre manuel français, le lecteur peut constater ce point dans (Cori et Lascar 2003, p. 18).

Aucune intrusion sémantique n'est indispensable. Frege y eut recours pour de strictes raisons d'élégance, lorsque le procédé syntaxique ainsi décrit était évident. À aucun moment il ne fut coupable de confusion entre sémantique et syntaxe dans ce sens précis. Les règles sont parfaitement claires et délimitent exactement quels énoncés peuvent être dérivés à partir de quels autres, *si tant est que nous sachions quels sont les termes du langage.*

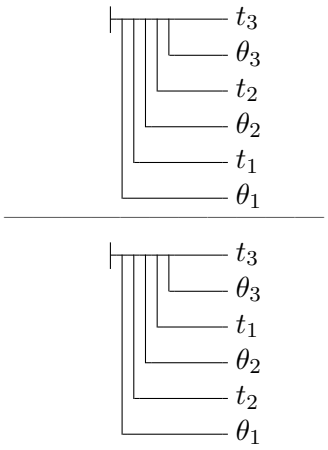
Les préliminaires sont désormais achevés, il est temps de présenter la syntaxe de FGGLP. Chaque schéma de schémas de règles est décrit dans la langue naturelle, avant de se voir formalisé à l'aide de métavariables.

2.2.2.2 Règles et axiomes

R [FGGLP]. *i*

(**N**) Deux sous-constituants quelconques d'un énoncé peuvent être permutés.

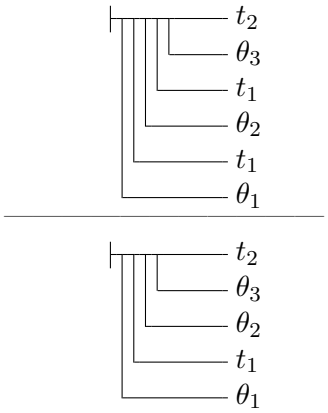
(**F**) Les 'θ_i' et les 't_i' sont tels que nous les avons décrits en amorce :



R [FGGLP]. *ii*

(**N**) Si un quelconque sous-constituant apparaît deux fois dans un énoncé, l'une des deux occurrences peut être supprimée.

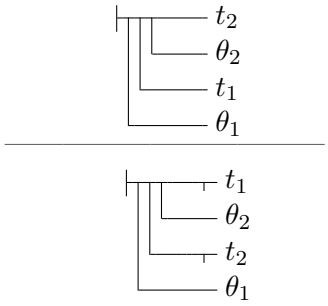
(**F**) Les 'θ_i' et les 't_i' sont tels que nous les avons décrits en amorce :



R [FGGLP]. *iii*

(**N**) Un sous-constituant quelconque d'un énoncé peut être permuté avec le sur-constituant s'ils se voient tous deux précédés du symbole de négation.

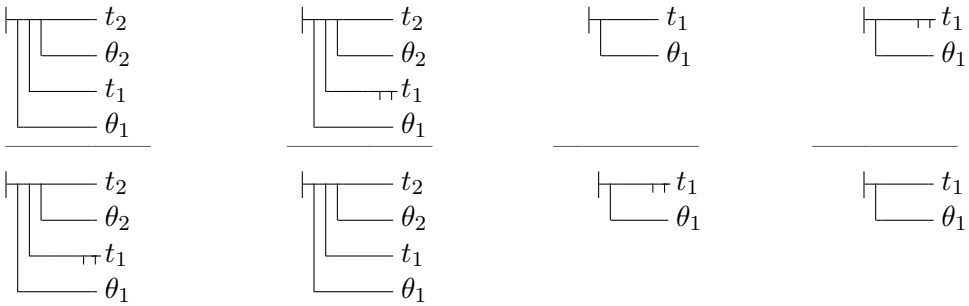
(**F**) Les 'θ_i' et les 't_i' sont tels que nous les avons décrits en amorce :



R [FGGLP]. *iv*

(**N**) Deux symboles de négation successifs peuvent être ajoutés ou omis devant le sur-constituant ou un quelconque sous-constituant.

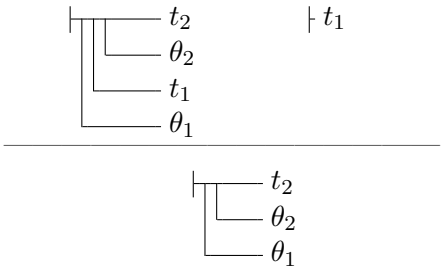
(**F**) Les 'θ_i' et les 't_i' sont tels que nous les avons décrits en amorce :



R [FGGLP]. *v*

(**N**) Soient deux énoncés tels que le second correspond à un sous-constituant du premier auquel a été ajouté le symbole de jugement. On peut en déduire un troisième énoncé identique au premier à ceci près que le sous-constituant en question a été supprimé.

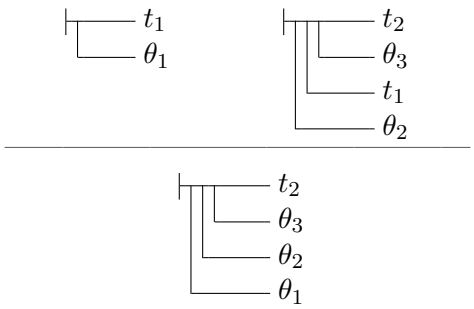
(**F**) Les 'θ_i' et les 't_i' sont tels que nous les avons décrits en amorce :



R [FGGLP]. *vi*

(**N**) Soient deux énoncés tels que le sur-constituant du premier figure comme sous-constituant du second. On peut en déduire un troisième énoncé partageant le sur-constituant du second, et dont les sous-constituants sont les sous-constituants du premier et du second, hormis le terme en question.

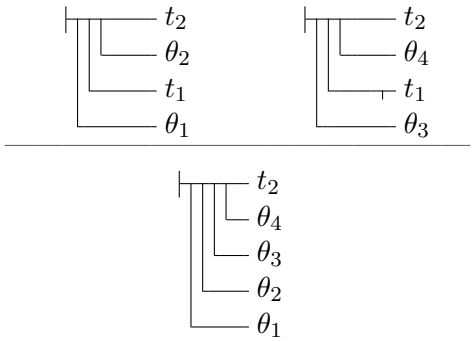
(**F**) Les 'θ_i' et les 't_i' sont tels que nous les avons décrits en amorce :



R [FGGLP]. *vii*

(**N**) Soient deux énoncés qui partagent leur sur-constituant et dont un sous-constituant de l'un figure, une fois précédé du symbole de négation, comme sous-constituant de l'autre. On peut en déduire un troisième énoncé qui possède le même sur-constituant et dont les sous-constituants sont les sous-constituants du premier et du second, hormis le terme en question.

(**F**) Les 'θ_i' et les 't_i' sont tels que nous les avons décrits en amorce :



R [FGGLP]. *viii*

(**N**) Dans un énoncé, on peut remplacer toutes les occurrences d'une lettre latine par un quelconque terme du langage.

(**F**) $\ulcorner t[t'/\delta] \urcorner$ est tel que nous l'avons décrit en amorce :

$$\frac{\vdash t}{\vdash t[t'/\delta]}$$

Les axiomes de FGGLP se limitent à la seule loi I des *Grundgesetze* :

$$\mathrm{I} : \begin{array}{l} \vdash a \\ \quad b \\ \quad a \end{array}$$

Nous pouvons clore notre présentation par la clause suivante :

Th$_{[\mathrm{FGGLP}]}$ Un énoncé de $\mathscr{L}_{\mathrm{FGGLP}}$ est un théorème de FGGLP si et seulement s'il est dérivable à partir de I grâce aux lois **R** $_{[\mathrm{FGGLP}]}$. *i-viii.*

2.2.2.3 Écriture des démonstrations

Afin d'épurer les formulations de toute notion sémantique, nous avons éclaté la troisième règle de Frege dans nos *iii* et *iv*. L'idéographie ne se prête pas à la représentation des preuves sous la forme d'arbres – comme la déduction naturelle – ou de calcul de séquents. C'est pourquoi nous adoptons une méthode proche de celle de Frege lui-même. À chaque application de règle, nous laissons au lecteur le soin de déterminer quels sont les θ et t en jeu dans les énoncés concernés ; ce travail ne soulève aucune difficulté. En revanche, il est plus délicat de comprendre les substitutions effectuées lorsque nous faisons appel à la règle *viii*, bien que l'explicitation de chacune de ces étapes alourdisse considérablement les preuves. Notre méthode permet de spécifier tous les remplacements en jeu sans perdre en concision. En voici le détail :

- À chaque étape d'une démonstration, il se peut que l'énoncé obtenu soit utile pour la suite de la preuve. Si tel est le cas, nous l'indiçons d'un numéro qui servira à y faire référence. Si nous voulons conserver l'énoncé en mémoire pour d'autres démonstrations, nous écrivons ce numéro *en gras*. La première numérotation est donc interne à une preuve, tandis que la seconde – en caractères gras – est transversale à toutes les démonstrations.

(I) Nos règles ne sollicitent jamais plus de deux prémisses. Une dérivation débute donc par la donnée d'au plus deux axiomes ou théorèmes préalablement prouvés. Nous commençons par indiquer ce ou ces axiomes/théorèmes par leurs numéros, ainsi que les substitutions auxquelles il peut être nécessaire de les soumettre.

(II) Si des remplacements ont été indiqués, nous écrivons le ou les énoncés ainsi obtenus sous une ligne de séparation à gauche de laquelle figure le nombre *viii*, qui renvoie à la règle de substitution.

(III) Nous pouvons ensuite appliquer une règle en écrivant un nouvel énoncé sous une ligne de séparation à gauche de laquelle figure le nombre associé à cette règle.

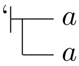
(IV) À ce stade, il existe quatre possibilités :

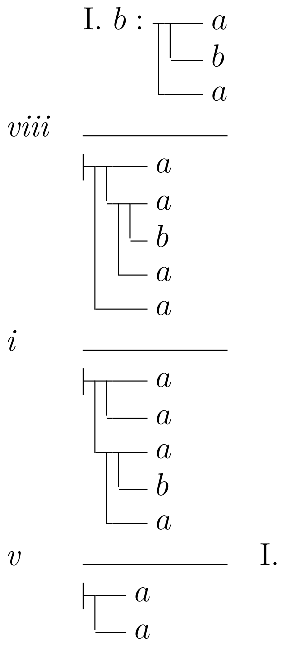
  (i) Nous appliquons à cet énoncé une nouvelle règle qui admet une seule prémisse : nous indiquons le numéro de la règle à gauche d'un trait de séparation, puis le nouvel énoncé en dessous. Ce dernier fait à nouveau face à nos quatre possibilités.

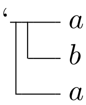
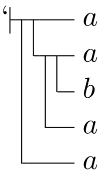
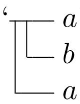
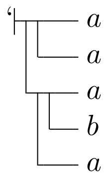
  (ii) Nous appliquons à notre énoncé une nouvelle règle qui admet deux prémisses. Nous indiquons à gauche du trait de séparation le numéro de la règle et à droite le numéro de la seconde prémisse, accompagné des substitutions (si) nécessaires. Le nouvel énoncé, écrit en-dessous de la ligne de séparation, fait à nouveau face à nos quatre possibilités.

  (iii) L'énoncé nous servira plus loin dans la preuve, mais nous ne voulons pas lui appliquer une règle dès maintenant. Nous l'indiçons (en gras ou non) d'un numéro puis nous traçons deux traits horizontaux de séparation. Nous reprenons à l'étape (I).

(iv) La preuve est achevée, nous pouvons indicer l'énoncé en gras si nous comptons l'impliquer dans une future preuve.

Quelques exemples aideront à y voir plus clair. Voici une dérivation de l'énoncé '  ' :



Sur la première ligne, nous indiquons que nous substituons '  ' à '*b*' dans l'axiome I, et obtenons ainsi '  '. Nous inversons ensuite deux sous-constituants grâce à la règle *i* – le lecteur comprend facilement qu'il s'agit du second '*a*' et de '  ' –, d'où résulte '  '. Il ne reste plus qu'à appliquer le *Modus Ponens* – règle *v* – à ce dernier énoncé et à l'axiome I, que nous indiquons à droite de la ligne de séparation.

Il arrive parfois que la seconde prémisse d'une règle – indiquée à droite du trait de séparation – ne soit pas directement un axiome ou un théorème préalablement démontré, mais résulte de certaines substitutions effectuées sur l'un de ces derniers. Dans ce cas, il convient d'indiquer les remplacements en jeu sous le numéro de l'axiome ou du théorème en question. Voici, en guise d'exemple, une preuve quasiment similaire à la précédente :

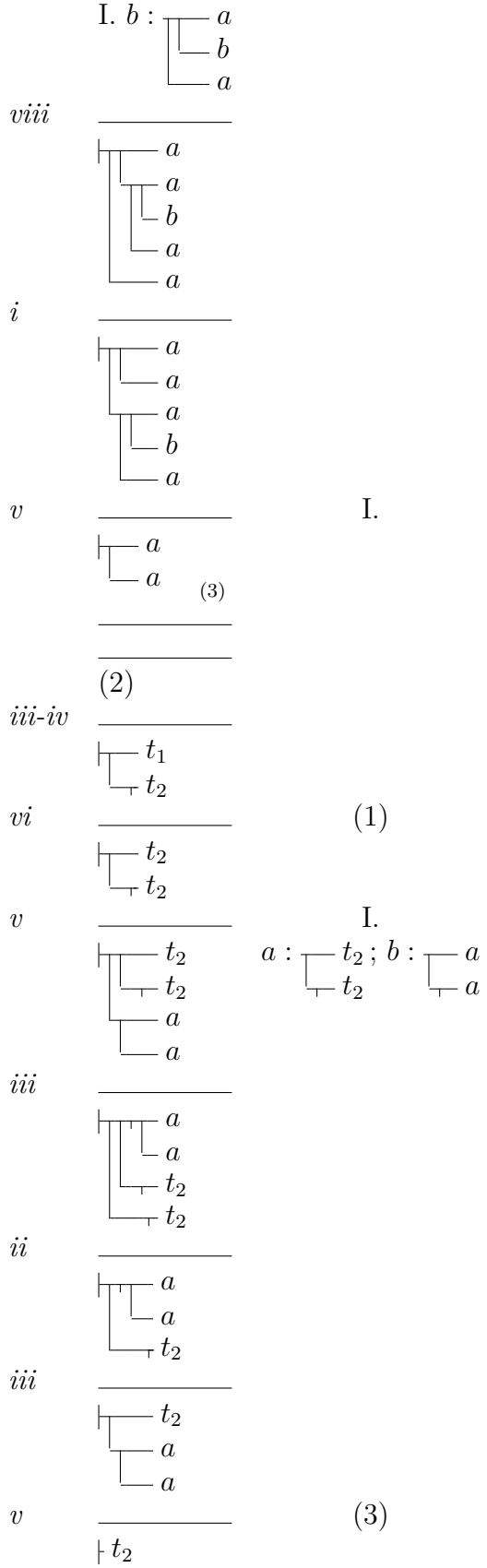
$$
\begin{array}{ll}
 & \text{I. } b : \begin{array}{l} c \\ d \\ c \end{array} \\
viii & \overline{\qquad\qquad\qquad} \\
 & \begin{array}{l} a \\ c \\ d \\ c \\ a \end{array} \\
i & \overline{\qquad\qquad\qquad} \\
 & \begin{array}{l} a \\ a \\ c \\ d \\ c \end{array} \\
v & \overline{\qquad\qquad\qquad} \quad \text{I.} \\
 & \begin{array}{l} a \\ a \end{array} \qquad a : c\,;\ b : d
\end{array}
$$

Remarquons qu'il n'était pas possible d'appliquer v directement à '$\begin{array}{l} a \\ a \\ c \\ d \\ c \end{array}$' et à I. – *i.e.* à '$\begin{array}{l} a \\ b \\ a \end{array}$'. Il importait donc d'effectuer d'abord des substitutions sur ce dernier énoncé – précisément de remplacer 'a' par 'c' et 'b' par 'd' – afin d'obtenir '$\begin{array}{l} c \\ d \\ c \end{array}$'. Le lecteur retiendra que ces substitutions sont indiquées sous le numéro de l'énoncé, dans notre cas au-dessous de I.

Observons à présent, à travers la réalisation d'un schéma de preuves, que les numérotation de théorèmes permettent parfois d'aboutir au résultat. Soient t_1 et t_2 tels que les deux énoncés suivants soient corrects (nous les indiçons pour les utiliser dans la preuve) :

$$
\begin{array}{l} t_2 \\ t_1 \end{array} \quad (1) \qquad ; \qquad \begin{array}{l} t_2 \\ t_1 \end{array} \quad (2)
$$

Il s'agit de dériver $\ulcorner \vdash t_2 \urcorner$ en utilisant l'énoncé '$\begin{array}{l} a \\ a \end{array}$', et sans avoir recours à la loi *vii*. Nous ne pouvons pas employer directement cet énoncé, car nous ne l'avons pas indexé en caractères gras dans nos précédentes démonstrations. Il s'avère donc nécessaire de le prouver à nouveau afin de lui octroyer un numéro puis, après un double trait de séparation, de procéder à la dérivation principale qui en fera usage :


I. b :
a
b
a
viii
a
a
b
a
a
i
a
a
a
b
a
v
I.
a
a
(3)
(2)
iii-iv
t1
t2
vi
(1)
t2
t2
v
I.
t2
t2
a
a
a : t2 ; t2 ; b : a
a
iii
a
a
t2
t2
ii
a
a
t2
iii
t2
a
a
v
(3)
t2

Comme prévu, (3) n'a pas été employé immédiatement après sa dérivation, mais lors du dernier *Modus Ponens*. Les deux barres horizontales indiquent que la démonstration reprend à partir d'un autre énoncé, en l'occurrence (2).

D'autre part, nous avons simultanément appliqué *iii-iv* pour passer de $\ulcorner \vdash t_2 \urcorner$ à $\ulcorner \vdash t_1 \urcorner$. Rigoureusement, il aurait fallu transiter par l'énoncé $\ulcorner \vdash t_1 \urcorner$ entre les étapes *iii* et *iv*. Nous autorisons des synthèses de ce type lorsque les règles en jeu ne présentent aucune difficulté, notamment pour *i*, *ii* et *iv*.

L'application de *vi* est triviale : à partir de $\ulcorner \vdash t_1 \urcorner$ et de $\ulcorner \vdash t_2 \urcorner$ – c'est-à-dire de (1) –, nous obtenons l'énoncé $\ulcorner \vdash t_2 \urcorner$. L'étape suivante incorpore quelques substitutions, elle consiste à déduire $\ulcorner \vdash t_2 \urcorner$ à partir de $\ulcorner \vdash t_2 \urcorner$ et de $\ulcorner \vdash t_2 \urcorner$, *i.e.* de I dans lequel $\ulcorner \vdash t_2 \urcorner$ a été substitué à 'a' et '$\vdash a$' à 'b', comme cela est stipulé à droite de la ligne de séparation.

Enfin, remarquons que nous sommes parvenus à retrouver une instance de *vii*. Frege s'y employa aussi dans les *Grundgesetze* (pp. 29-30). Le cas général ne pose pas davantage de difficultés. FGGLP privé de la règle *vii* ne perd rien en pouvoir démonstratif. De plus, *v* est un simple cas particulier de *vi* (il suffit de choisir θ_1 vide pour *vi*). Un coup d'œil suffit donc à constater que les règles ci-dessus ne sont pas indépendantes. Frege ne l'ignorait pas : après avoir présenté sa version du *Modus Ponens*, il expliqua [15] :

> C'est la seule règle d'inférence utilisée dans ma *Begriffsschrift* et on pourrait s'en tenir là. L'exigence de parcimonie scientifique nous y conduirait ; mais des considérations pragmatiques poussent dans l'autre direction, et lorsque je devrai former de longues chaînes d'inférences, je devrai faire certaines concessions. En effet, si je n'autorisais pas d'autres règles d'inférence, il en résulterait une longueur excessive. (Frege 1893, p. 26)

En 1893, il choisit de répartir entre des règles une portion du travail préalablement réalisé par des axiomes. Il a donc multiplié les premières tandis que certains parmi les seconds ont été abandonnés. Son objectif consistait à augmenter la flexibilité des démonstrations. Nous allons prolonger ce geste en intégrant une règle qui autorise l'ajout d'un sous-constituant à n'importe quel théorème :

15. Remarquons que la règle de *Modus Ponens* de la *Begriffsschrift* n'est en vérité qu'un cas particulier de la règle *v* en question, qui n'est elle-même qu'un cas particulier de la règle *vi*.

R $_{[\text{FGGLP}]}$. *ix*

(**N**) On peut déduire d'un énoncé ce même énoncé auquel a été ajouté un quelconque terme comme sous-constituant.

(**F**) Les t_i sont tels que nous les avons décrits en amorce :

$$\frac{\vdash t_1}{\begin{array}{l}\vdash t_1\\ \quad t_2\end{array}}$$

Naturellement, cette règle ne modifie pas FGGLP, elle est aisément simulable à partir du système initial :

$$v \quad \frac{\vdash t_1}{\begin{array}{l}\vdash t_1\\ \quad t_2\end{array}} \qquad \text{I.} \quad a : t_1 \,;\, b : t_2$$

Nous voilà libérés de ces considérations techniques. Nous tenions à décrire ici la méthode de représentation des preuves que nous avons adoptée. Bien sûr, afin d'éviter de saturer notre texte en longues démonstrations, nous concentrerons ces dernières en annexe A, nous cantonnant à indiquer les pistes et idées essentielles dans le corps du texte. Le lecteur pourra à sa guise se baigner à la source, ou se limiter à nos explications informelles.

2.2.3 Métathéorèmes

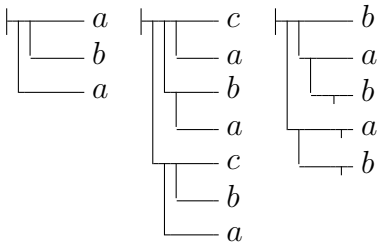
La présentation de FGGLP est achevée ; il s'agit à présent d'en discuter les différents aspects. Dans cette perspective, nous allons ignorer quelques instants le rôle auquel Frege destinait son système, ainsi que la sémantique à laquelle il le soumettait. Notre présent objectif se limite à l'établissement de divers résultats syntaxiques. Il se voit facilité par l'exploitation d'outils contemporains, quelle que soit la compatibilité entre ces derniers et les conceptions fregéennes.

2.2.3.1 Métathéorèmes de complétude et d'adéquation

Le fonctionnement de FGGLP est très proche des systèmes à la Hilbert. Il n'autorise aucune décharge d'hypothèses, ce qui rend les démonstrations plus difficiles à conduire que dans les syntaxes développées par Gentzen, notamment la déduction naturelle. Néanmoins, il suffit de lui attribuer une sémantique traditionnelle pour comprendre que ses théorèmes sont exactement les tautologies de la logique classique. Du point de vue de cette dernière, il s'agit d'un système complet et adéquat. L'adéquation est immédiate : la loi I est une tautologie et les règles conservent trivialement la vérité. Pour la complétude, considérons le système M constitué du *Modus Ponens* et des trois axiomes suivants :

- $A \to (B \to A)$
- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

Écrits dans l'idéographie, ils prennent la forme suivante :



Nous savons que le système M est complet (Mendeloson 1997, Chap. I.4). Or FGGLP incorpore le *Modus Ponens* et admet le premier de ces énoncés comme loi I. Il suffit donc de démontrer les deuxième et troisième formules ci-dessus pour aboutir au résultat. Nous avons réalisé ce travail à partir de la page 720 de notre annexe A.

2.2.3.2 Métathéorème de déduction

Il est souvent possible de simuler, dans les systèmes à la Hilbert, un processus de décharges d'hypothèses à travers la démonstration du théorème de déduction. Landini envisage (et exploite) cette possibilité pour l'Idéographie :

> Le système de Frege n'intègre pas de preuve conditionnelle [avec décharges d'hypothèses] comme règle primitive d'inférence, bien qu'il s'agisse assurément d'une règle dérivée de son système – une règle qui serait aujourd'hui justifiée par une preuve métalinguistique par induction forte sur la longueur des formules du langage-objet. Si nous l'introduisions dans les *Grundgesetze* de Frege, voilà à quoi elle ressemblerait :
>
> $$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\vdash \alpha}\\ \vdots \\ \vdash \beta\end{array}}{\vdash \begin{array}{l}\beta\\ \alpha\end{array}}$$
>
> (Landini 2012, p. 33)

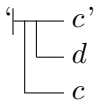
Donnons à cette conjecture la forme générale qui lui revient :

Conjecture. *Si* $\vdash t'$ *est dérivable à partir des énoncés* $\vdash t$, $\vdash t_1$, ..., $\vdash t_n$ *via les règles i-ix, alors on peut, à partir des énoncés* $\vdash t_1$, ..., $\vdash t_n$ *et via les règles i-ix, dériver l'énoncé suivant :*

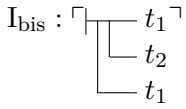
$$\vdash \begin{array}{l} t' \\ t \end{array}$$

Comme l'explique Landini, la preuve procède par induction forte sur la longueur des formules. Il s'agit d'admettre la vérité de cette conjecture pour les dérivations de longueur n et, considérant une quelconque dérivation de longueur $n+1$, de montrer que la dernière étape ne pose aucune difficulté. Cela nécessite de passer en revue la totalité des règles du système. Pour FGGLP, tout se déroule sans encombre concernant *i-vii*. Le problème survient lors de l'examen de *viii*, qui permet la dérivation de '$\vdash b$' à partir de '$\vdash a$' alors que l'énoncé ci-dessous n'est clairement pas un théorème du système :

La conjecture est réfutée : FGGLP n'admet pas de théorème de déduction. Néanmoins, il est aisé de remédier à ce problème. Frege a choisi de fournir directement des axiomes et de permettre des substitutions sur ces derniers. Un autre chemin, très emprunté à l'heure actuelle, passe par l'intégration de schémas d'axiomes, qui gèrent à la source ce que les substitutions assument dans le cours de la preuve. Considérons par exemple l'énoncé :



Plutôt que d'employer la règle *viii* pour le déduire de I, il suffit de remplacer ce dernier par le *schéma* suivant :



L'usage des métavariables – et la donnée d'un schéma d'axiomes – fait l'économie des substitutions. Plus besoin de remplacements, il suffit de choisir à l'origine les termes adéquats pour t_1 et t_2. On pourrait donc, sans toucher au pouvoir expressif de FGGLP, adopter $\mathrm{I}_{\mathrm{bis}}$ en lieu et place de I, rejeter *viii* et, ainsi, doter notre système d'un théorème de déduction. Dans le contexte propositionnel, ce procédé n'entraîne aucune conséquence nuisible.

2.2.4 Quelques réserves

Ce que nous venons d'accomplir est à observer avec la plus grande prudence. FGGLP a été abordé comme un pur appareil syntaxique afin d'y détecter la présence ou l'absence d'un théorème de déduction. Nous avons envisagé des énoncé $\ulcorner\!\vdash t\urcorner$ dont le terme t n'était pas un nom du Vrai [16]. En vérité, ce geste a été initié dès l'établissement de la morphologie, lorsque les énoncés furent caractérisés comme les expressions de la forme $\ulcorner\!\vdash t\urcorner$, *quel que soit le terme* t. Frege lui-même procéda de cette manière en introduisant son trait vertical [17] :

> Je laisse le signe ‘$\vdash$’ précéder le nom d'une valeur de vérité. (Frege 1893, p. 9)

Pourtant, en d'autres lieux, il sembla limiter les énoncés aux expressions $\vdash t$ telles que t soit un nom du Vrai [18]. Il s'agit d'une confusion – dont il fut responsable, nous le verrons, à d'autres

16. ou, en langage moderne, une tautologie ; ou, pour anticiper légèrement sur la suite, un marqueur latin tel que tous les remplacements des lettres latines par des noms donnent un nom du Vrai.

17. *Stricto sensu*, sa caractérisation ne prend pas en compte les marqueurs latins, mais seulement les noms. Il est cependant clair qu'il ne comptait pas exclure les premiers, mais désirait uniquement préserver le lecteur de complications qui viendraient en leurs temps, *i.e.* au §44 :

> Un signe qui consiste en un trait de jugement et un nom d'une valeur de vérité préfixé d'un horizontal, je l'appelle un *énoncé de l'idéographie*, ou un *énoncé*, quand il n'y a pas d'ambiguïté. De même, j'appelle un *énoncé de l'idéographie* (ou un *énoncé*) un signe qui consiste en un trait de jugement et un marqueur latin pour une valeur de vérité préfixé d'un horizontal. (Frege 1893, p. 44)

18. ou un marqueur latin tel que tous les remplacements des lettres latines par des noms donnent un nom du Vrai. Par exemple, il affirme qu'une définition peut être transformée en un énoncé parce que le terme accolé au

égards – entre une classe d'éléments linguistiques syntaxiquement définis, et une classe d'éléments linguistiques caractérisés à travers leurs rôles sémantiques ou pragmatiques [19]. La donnée des énoncés du langage ne peut souffrir d'aucune intrusion de ces dernières sortes. Il est nécessaire de délimiter la classe d'expressions en jeu dans les démonstrations en toute indépendance, afin d'indiquer les règles qui s'y appliquent. Cela ne signifie pas que dans les énoncés ainsi définis, la barre verticale est en mesure de jouer le rôle auquel elle est destinée, *i.e.* de permettre la manifestation d'un jugement. Nous ne pouvons pas affirmer d'emblée – et c'est *peut-être* ce qui gênait Frege – que même si t réfère au Faux, alors $\vdash t$ permet d'effectuer une assertion. Ce point dépend du statut accordé aux "jugements incorrects". Le problème est délicat, et nous en dirons quelques mots dans le troisième chapitre [20] ; mais il n'est en rien syntaxique, et nos préoccupations se bornaient alors à ce cadre.

Une remarque similaire s'applique à la première partie de cette dernière section. Notre objectif consistait à déterminer la totalité des théorèmes de FGGLP, *i.e.* les énoncés qui y sont dérivables. Pour y parvenir, nous avons employé des moyens éminemment contemporains : nous lui avons octroyé une sémantique classique afin d'établir les métathéorèmes de complétude et d'adéquation. Ce faisant, il devint possible de conclure que les théorèmes de FGGLP sont exactement les tautologies selon cette sémantique, *i.e.* les énoncés qui conservent la valeur vraie quelles que soient les valeurs de vérité distribuées aux lettres latines, conçues comme des variables propositionnelles. Le résultat est incontestable ; et des frontières sont clairement tracées autour des énoncés dérivables. Mais nous nous sommes, pour l'obtenir, écarté de la sémantique que Frege destinait à son système. D'après celle-ci, les lettres latines se voient substituées aussi bien des quelconques noms d'objets que des énoncés non assertifs, *i.e.* des noms du Vrai ou du Faux. Frege ne leur conférait donc pas le statut de variables propositionnelles. En 1879, une ligne franche séparait les contenus jugeables et non jugeables, qui lui permit de s'occuper du versant purement propositionnel de son système dans les §§14-19 de la *Begriffsschrift*, avant d'introduire les prédicats. En 1893, le fossé était comblé, et si les axiomes et règles de FGGLP conservaient un intérêt purement propositionnel – qui motiva Frege à les présenter à part dans les §§14-16 et à les mettre en action isolément dans le §49 –, ils avaient définitivement changé de nature. Les lettres latines figurant dans les premiers, et les métavariables dans les seconds, pouvaient non seulement indiquer des valeurs de vérité, mais aussi n'importe quel autre objet. Frege était tenu d'assumer les cas inintéressants, *i.e.* de rendre compte de la valeur des fonctions propositionnelles lorsqu'elles ne prenaient ni le Vrai ni le Faux en arguments. C'est à cette tâche qu'il dédia le trait horizontal. Véritable liant entre les valeurs de vérité et les objets, il accompagna techniquement le geste de synthèse catégoriale effectué par Frege en 1891. Il s'agit d'une spécificité indépassable de l'Idéographie, bien plus cruciale que l'écriture en deux dimensions, et qui rend toute traduction en logique contemporaine totalement inadéquate [21].

Les termes et énoncés de FGGLP sont bien des termes et énoncés de l'idéographie, et ses règles et axiomes sont en effet intégrés à l'Idéographie ; mais les clauses grammaticales que nous avons proposées ne sont en aucun cas celles du langage de Frege. Nous les avons conçues artificiellement pour dégager ce qui, dans son système, s'approchait le plus d'une logique propositionnelle. Le

trait vertical est un tel marqueur latin :

> Le nouveau signe devient ainsi co-référentiel avec le signe défini ; la définition devient donc immédiatement un énoncé. (Frege 1893, p. 45)

19. Nous ne disons pas que Frege confondait réellement les deux aspects. Il insista suffisamment sur la distinction pour lever le moindre doute. Cependant, ses formulations furent parfois malheureuses.

20. Voir section 3.2.3.6.

21. Nous ne disons pas que le trait horizontal lui-même est indispensable, mais que son rôle d'unification entre termes et formules l'est. Tout cela sera expliqué en section 2.5.1.

lecteur a été averti dès son arrivée dans la présente section : il est certes possible d'isoler dans l'Idéographie un système de preuve qui fonctionne syntaxiquement à la manière d'une logique propositionnelle – FGGLP en témoigne –, mais Frege ne prévoyait aucunement pour ce système une sémantique propositionnelle conçue en termes contemporains. Le travail que nous allons maintenant accomplir pose aussi une question de syntaxe – et s'inscrit dans notre projet de reconstruction du système – : quelle est la grammaire de l'idéographie dans son ensemble ? Pour y répondre, nous n'allons plus nous contenter de proposer des clauses qui permettent de circonscrire correctement les termes et énoncés du langage, nous allons nous demander quelles étaient les règles de construction que Frege *lui-même* avait à l'esprit. Et cela concerne au premier chef la sémantique, car ce dernier liait – sans les confondre – les deux domaines, le processus de composition du sens étant reflété par les règles de construction des expressions. Nous allons soutenir que ces règles dépendent de l'étrange appareil linguistique dédié à la hiérarchie des fonctions, seconde propriété insolite du système qui, aux côtés du trait horizontal, se retrouve totalement avalée (et digérée) par la moindre tentative de traduction en logique des prédicats moderne.

2.3 La morphologie de l'idéographie : la grammaire des noms

L'étape de la morphologie n'est souvent qu'une simple formalité au cours de la présentation d'un système logique, formalité que Frege n'a pas pris la peine de remplir. Les clauses grammaticales de l'idéographie ne figurent nulle part, seuls différents indices sont répartis ici et là dans le texte. Pourtant le lien qu'il tissait entre structure du sens et composition des signes confère à cette démarche une importance capitale. La question de l'analyse du sens chez Frege est épineuse et disputée, et le double fait que la grammaire de l'idéographie soit très rarement examinée par les commentateurs et n'ait jamais été éclaircie par Frege n'y est certainement pas étranger. Nous avons déjà introduit la problématique de l'analyse sémantique dans notre premier chapitre. Pour pouvoir poursuivre cette discussion dans les meilleurs dispositions au cours du troisième, il nous faut récolter les différents indices laissés à ce sujet dans les *Grundgesetze*. Il est essentiel de reconstruire la morphologie *ainsi que Frege lui-même l'envisageait*. Gregory Landini, qui prit aussi la peine d'étudier Frege dans sa propre langue, défend cette même idée :

> Les partisans de Dummett reconnaissent que la composition sémantique du sens calque exactement les règles inductives de la composition syntaxique des termes du langage. Mais cela ne règle pas d'emblée le problème. Nous sommes conduits à la question de savoir quels sont les termes du langage et comment ils se composent syntaxiquement.
>
> [...]
>
> La controverse concernant la compositionnalité sémantique survient parce que Frege n'a pas stipulé de règles inductives explicites (comme nous l'avons fait dans le chapitre 2) de formation des termes de son langage formel. (Landini 2012, pp. 135, 137)

Nous allons contester la reconstruction effectuée par Gregory Landini dans son chapitre 2. C'est donc en abordant la question avec les lunettes de cet auteur que nous rentrerons dans un désaccord – considérable, admettons-le – avec lui. Un autre philosophe s'est confronté aux sérieuses difficultés techniques posées par l'idéographie, scrutant minutieusement le symbolisme fregéen. Il s'agit de Richard Heck, dont nous avons longuement discuté les écrits concernant la transition 1879-1891. Il a récemment réuni, structuré et mis à jour ses nombreux articles traitant des *Grundgesetze* dans l'ouvrage *Reading Frege's* Grundgesetze (2012), dont le présent chapitre est largement tributaire. Les livres de Landini et Heck furent deux précieuses lanternes dans la

prime obscurité enveloppant la langue de Frege. Nous prendrons la peine de discuter en détail leurs idées, car elles sont plongées dans les profondeurs de la morphologie de l'idéographie. Ces gigantesques travaux contribuèrent largement à notre apprentissage de la logique de Frege. Si nous nous en sommes finalement émancipés, c'est qu'il a fallu longuement nous y soumettre, l'oreille attentive, pour atteindre et consolider nos positions.

2.3.1 Trois "anomalies" du langage

L'idéographie possède, relativement aux langages logiques contemporains, trois "anomalies" qui opacifient son propos. En premier lieu, les combinaisons des noms de fonctions impliquent des lettres marquant les places vides desquelles la logique actuelle s'est totalement débarrassée. Ensuite, l'intégration des énoncés (non assertifs) aux termes de la langue est gérée par une fonction unique dans l'histoire de la discipline, représentée par le trait horizontal. Enfin, les rôles sémantiques concomitants des lettres latines – à l'intérieur de l'idéographie – et des lettres grecques majuscules – à l'extérieur –, quelques quarante ans avant la mise en place des assignations par Tarski pour gérer les variables libres, ne se laissent pas expliquer facilement.

Notre précédent chapitre a permis de dévoiler de délicates questions sémantiques, sans les résoudre toutes. Elles trouveront ici leur environnement naturel. En construisant la morphologie de l'idéographie selon les prescriptions fregéennes, *i.e.* de telle sorte que les règles grammaticales calquent le processus de composition du sens, nous cernerons le contexte technique de ces difficultés, et serons enfin prêts à les aborder de front lors du chapitre 3. Il nous faut donc, à l'instar de Frege, éviter de *confondre* syntaxe et sémantique, mais examiner, les mains dans le cambouis de son symbolisme, les liens qui les rapprochent.

2.3.2 La mécanique de combinaison des noms

Dans notre premier chapitre, nous avons vu comment l'examen du concept de *nombre* avait dévoilé aux yeux de Frege l'existence des concepts de second niveau, et engendré le basculement d'une lecture des contenus des énoncés en termes de compositions des contenus des symboles qui les constituent à une lecture des contenus des énoncés en termes de compositions des contenus des signes *composites* qui les constituent. En 1884, Frege ne considérait plus que le sens de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$' était constitué de ceux de '$\smile$' 'Φ' et '$\mathfrak{a}$', mais de ceux de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\varphi(\mathfrak{a})$' et de '$\Phi(\xi)$'.

Par ailleurs, nous avons compris que le mouvement de 1890 avait engendré, avec l'éclatement de la notion de contenu conceptuel, l'uniformisation des catégories ontologiques de chaque étage – à travers l'abandon de la distinction entre objet et contenu jugeable – et la généralisation des concepts aux fonctions, qui permit la prise en charge intégrale des références par les notions de fonction et d'objet – tandis que certains contenus n'étaient, dans la langue formulaire, ni concept ni objet.

Toute expression, lorsqu'elle réfère, réfère à un objet ou à une fonction : il s'agit d'un *nom d'objet* ou d'un *nom de fonction*[22]. Sa référence est atteinte à travers son *sens* qui est – ou au moins contient – le mode de donation de l'objet ou de la fonction.

Des fonctions de types adaptés (en termes de niveaux et de nombre d'arguments) peuvent opérer les unes sur les autres et/ou sur les objets. Lorsque nous désignons un objet ou une fonction, nous passons à travers un sens (éventuellement) composite. Ses constituants sont aussi des sens, et conduisent de même à des objets ou des fonctions. Par exemple, le sens *propre* de 'Paris' se compose avec le sens *conceptuel* de 'ξ est la capitale de la France' pour donner le sens

22. Cette terminologie ne fait donc pas la distinction entre descriptions définies et désignateurs rigides. Les deux sont intégrés au domaine des noms.

de 'Paris est la capitale de la France'[23]. Parallèlement, la référence de 'ξ est la capitale de la France' – un concept – envoie la référence de 'Paris' – l'objet Paris – sur la référence de 'Paris est la capitale de la France' – le Vrai. Les contraintes de compatibilité qui s'appliquent aux références pèsent aussi sur les sens. Notamment, un sens qui conduit à une fonction de premier niveau à un argument se compose avec un sens propre. Ainsi, lorsque des sens, en se composant, produisent un autre sens, les références auxquelles ils conduisent, en opérant les unes sur les autres *selon le schéma suivi par les sens*, mènent à la référence de cet autre sens. C'est ce schéma qui, selon Frege, doit être manifeste à travers la structure de l'énoncé.

En logique contemporaine, le processus d'assignation permet une mécanique assez simple à cet égard. Les symboles se composent selon leurs arités et, si la logique admet des ordres supérieurs, selon leurs types. En substance, il suffit de remplacer les places vides accompagnant les symboles dont l'arité n'est pas nulle par des expressions adaptées. Par exemple, une variable de niveau $((0),(0))$[24] est saturée par deux variables de niveau (0)[25]. De même, le symbole '$\wedge$', d'arité 2, doit être complété par deux énoncés. *Syntaxiquement*, tout se déroule comme si nous restions au premier niveau. L'expression finale expose clairement les compositions qui ont eu lieu : un constituant qui complète un symbole d'arité non nul est *physiquement* localisé entre les parenthèses qui suivent ce symbole. Considérons la formule :

$$\text{`}X_1^{((0),(0))}(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) \wedge X_3^{(0)}(X_1^0)\text{'}$$

Le processus syntaxique est le suivant :

(1) '$X_1^{(0)}$' et '$X_2^{(0)}$' figurent à la place de l'argument de '$X_1^{((0),(0))}$'. En termes fregéens, nous dirions qu'ils viennent compléter le nom '$X_1^{((0),(0))}(\xi, \zeta)$'.

(2) 'X_1^0' figure à la place de l'argument de '$X_3^{(0)}$' – vient compléter '$X_3^{(0)}(\xi)$'.

(3) '$X_1^{((0),(0))}(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$' et '$X_3^{(0)}(X_1^0)$' figurent à la place des arguments de '$\wedge$' – viennent compléter le nom '$\xi \wedge \zeta$'.

Le processus sémantique est totalement parallèle. Une fois indiqués le modèle et l'assignation σ, il suffit de savoir si :

(1) $(\sigma(\text{`}X_1^{(0)}\text{'}), \sigma(\text{`}X_2^{(0)}\text{'}))$ appartient à l'ensemble $\sigma(\text{`}X_1^{((0),(0))}\text{'})$.

(2) $\sigma(\text{`}X_1^0\text{'})$ appartient à $\sigma(\text{`}X_3^{(0)}\text{'})$.

(3) (1) et (2) sont vérifiés.

C'est ainsi que la composition des contenus calque celle des symboles. Il n'est pas nécessaire d'impliquer les lettre 'ξ' et 'ζ', les types indiquent en exposant quels symboles doivent venir se placer à quels endroits. Dans la *Begriffsschrift*, Frege avait suivi une piste analogue. Il abordait l'expression '$\smile_{\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{a}, \Delta)$' comme composée de :

(1) '$\smile$' : un symbole d'arité 1 qui attend d'être complété par un énoncé non assertif.

23. i.e. la pensée que Paris est la capitale de la France.

24. de second niveau dont les deux arguments sont de premier niveau à un argument. Nous empruntons les conventions de la théorie des types simple de Russell. Le type d'une formule est indiqué en exposant, à travers les parenthèses

25. de premier niveau à un argument

(2) 'Φ' : un symbole d'arité 2 qui attend d'être complété par deux noms d'objets.

(3) '$\mathfrak{a}$' et 'Δ' : deux noms d'objets.

Les arités et les types pouvaient gérer seuls la construction des termes [26]. Mais il manquait, au niveau sémantique, la mécanique des assignations. La notion de contenu indéterminé, qui la réclamait sans la procurer, échouait à expliquer la composition des sens parallèlement à celle qui intervenait entre expressions. La solution consista à intégrer les noms de concepts (puis de fonctions) de niveaux supérieurs. '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \Phi(\mathfrak{a}, \Delta)$' fut alors regardé comme le résultat de la combinaison de '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' et '$\Phi(\xi, \Delta)$'. Cette méthode interdit de gérer les manipulations syntaxiques à travers de simples symboles munis d'arités, *i.e.* de faire figurer des expressions adaptées entre parenthèses à la suite – ou autour, selon les conventions – des symboles d'arités non nulles. En effet, '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' nomme une fonction de type ((0)) Pourtant l'expression résultant de sa combinaison avec '$\Phi(\xi, \Delta)$' n'est pas '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})(\Phi(\xi, \Delta))$'. L'usage de '$\varphi$' et '$\xi$' pour marquer les places vides ne permet pas non plus d'opération syntaxique immédiate. Il ne s'agit pas seulement de remplacer 'φ' par le nom de la fonction prise en argument, sinon le terme recherché serait '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \Phi(\xi, \Delta)(\mathfrak{a})$'. Le processus adéquat, que nous décrirons bientôt, est extrêmement sophistiqué.

Une fois que Frege conçut les contenus en termes de fonctions et d'objets, il réalisa que la grammaire ne devait pas se contenter d'aligner des symboles pour imiter la structure du sens, mais était tenue de les combiner de manière élaborée. C'est là qu'intervient l'importance des règles grammaticales de formation des noms. Il reste possible, en rusant légèrement, d'obtenir tous les termes de l'idéographie selon la méthode standard contemporaine – à travers des symboles munis d'arités gérées grâce au parenthésage –, *mais cette construction n'explique pas comment la structure d'un nom reflète la composition de son sens et les opérations qui déterminent sa référence.* Chaque étape dans l'élaboration d'un nom complexe ne correspond alors ni à une composition entre des sens ni à une opération entre des fonctions (et éventuellement des objets). La manière dont la structure d'une expression reflète les opérations entre les contenus n'est visible que si nous savons *comment* cette structure a été façonnée, *i.e.* à travers les règles grammaticales *adaptées* ; et celles-ci ne procèdent aucunement selon le modèle contemporain. C'est sur ce point précis que nous nous opposons à Landini. Il soutient que la morphologie peut parfaitement, sans perdre sa pertinence sémantique, faire l'économie de toute fantaisie, *i.e.* être rendue à la manière contemporaine.

Avant de nous lancer, précisons trois problèmes que nous ne traiterons pas ici :

- La présente recherche consiste à exhiber les règles syntaxiques qui permettent de rendre compte de la manière dont un sens peut se composer à partir de (au moins) deux autres sens, et parallèlement dont une opération peut avoir lieu entre fonctions et (éventuellement) objets. Nous ne nous demandons pas, pour l'heure, s'il existe des sens simples, atomiques, fondamentaux, ni si deux compositions différentes peuvent induire le même sens.

- Nous savons que, pour Frege, les sens propres sont eux-mêmes des objets : il est possible d'y faire référence à travers des expressions complètes du type 'le sens de 'Paris''. Nous ne questionnons pas encore la nature des sens fonctionnels.

- La nécessité de référer à des entités insaturées pose, dans certains contextes, le problème du paradoxe du concept de *cheval*. Nous ignorons provisoirement (et naïvement) cette difficulté.

26. au problème du symbole 'f' près, discuté durant le premier chapitre.

2.3.2.1 Le lexique des noms

Le lexique des *Grundgesetze* n'est pas rigoureux. Nous allons rapidement exposer ses faiblesses et effectuer les corrections qui conviennent.

On trouve deux types de termes dans l'idéographie. Les premiers incorporent des lettres latines, nous nous en occuperons plus loin. Les seconds en sont dénués : il s'agit des noms propres – ou noms d'objets. La distinction est introduite au §17 des *Grundgesetze*. Frege y fournit une caractérisation *sémantique* des noms en général (incluant les noms de fonctions) :

> Afin de m'exprimer plus précisément, j'introduis la terminologie suivante. J'appellerai *noms* [*Namen*] seulement ces signes [*Zeichen*] ou combinaisons de signes [*Zeichenverbindungen*] qui réfèrent à quelque chose [27]. (Frege 1893, p. 32)

Nous renvoyons le lecteur à notre préliminaire "le lexique de la syntaxe" (p. vi) pour une explication des fluctuations de l'usage fregéen des termes 'signes' et 'combinaisons de signes'. Quoi qu'il en soit de leurs significations précises dans ce contexte, Frege y entreprit de délimiter parmi une classe d'expressions celles qui possèdent une référence. Peu après, il introduisit spécifiquement les noms d'objets :

> J'appelle un *nom propre* ou *nom* d'un objet tout signe, qu'il soit simple ou complexe, censé référer à un objet [*Gegenstand bedeuten soll*]. (Frege 1893, p. 43)

Frege semble reproduire ce qu'il avait réalisé dans le cadre général des noms : une définition sémantique. Cependant, le terme '*soll*' vient compliquer les choses, car il n'est expliqué nulle part comment un signe est *censé* référer. Par ailleurs, Frege réalisa ensuite une caractérisation *syntaxique* des noms de fonctions à partir des noms propres (§26), sans jamais fournir une version sémantique similaire à celle qui fut proposée pour les noms propres.

Le problème se précise au §28 :

> Je stipule à présent le principe suivant gouvernant l'usage des définitions :
>
> Un nom *correctement* formé doit toujours référer à quelque chose.
>
> (Frege 1893, p. 45)

S'en suit une caractérisation *syntaxique* des noms correctement formés. Frege entreprit aussitôt de montrer que ces derniers possèdent tous une référence [28], *i.e.* qu'ils respectent le principe en question. Il pensait conclure triomphalement cette entreprise :

> Ainsi nous avons montré que nos huit noms primitifs ont une référence et, par conséquent, qu'il en est de même pour tous les noms correctement formés à partir d'eux. (Frege 1893, p. 50)

Néanmoins, alors que les noms sont définis *sémantiquement* comme dotés de référence, il n'est clairement pas judicieux d'appeler 'noms correctement formés' une classe d'expressions caractérisée syntaxiquement et dont il faut *prouver* que les constituants réfèrent. Les noms correctement formés n'étaient *a priori* aucunement assurés de faire partie des noms. Le vocabulaire est inapproprié, et les maladresses vont bon train :

27. Au §29, Frege identifie explicitement les sens de "référer à quelque chose", d'"avoir une référence" et d'"être référant". Nous utiliserons librement les deux premières formulations. Nous éviterons autant que possible la troisième, que le français n'apprécie guère (elle s'avèrera néanmoins commode lors de l'examen des §§29-31).

28. C'est l'objet des §§29-31 dont nous discuterons plus tard le détail.

> Nous répondons à présent à la question : quand un nom réfère-t-il à quelque chose ? (Frege 1893, p. 45)

Frege annonçait son projet d'établir que tous les noms *correctement formés* référaient. Mais puisque les définitions des noms et des noms correctement formés sont substantiellement distinctes, il n'est pas permis (et il est même dangereux) d'utiliser ces termes de façon interchangeable. Il est parfaitement sensé d'enquêter pour déterminer si des éléments définis syntaxiquement – les noms correctement formés – réfèrent. Il est au contraire totalement absurde de poser cette question concernant des expressions qui ont été *définies* comme dotées de références – les noms. Son objectif, ainsi annoncé, perd toute pertinence.

La raison de ce micmac est similaire à celle qui obscurcissait le sens du terme 'énoncé' (discutée en section 2.2.4) : Frege ne fut pas suffisamment vigilant sur la distinction entre syntaxe et sémantique. Il pensait qu'une certaine classe déterminée syntaxiquement contenait exactement les expressions dotées de références. Sûr de son coup, il procéda *directement* à une définition sémantique. Mais ce geste interdisait de discuter le bien-fondé de sa morphologie, car les noms n'étaient pas définis à travers des règles syntaxiques. Le trouble fut visible lorsqu'il évoqua des expressions "censées référer". Il voulait ainsi isoler des constituants linguistiques syntaxiquement définis *dans le but* de conserver une référence, et non des constituants définis *comme* disposant d'une référence. *Cette fois encore, l'erreur fut exclusivement terminologique.* Frege a bel et bien (tenté de) réalisé(er) les différentes étapes nécessaires (dans les §§26 - 31) : caractériser syntaxiquement une classe d'expressions et discuter son statut vis-à-vis de la référence. Il a simplement anticipé le (prétendu) résultat en fournissant d'emblée une définition sémantique du terme 'nom' (au §17). Il aurait dû s'en tenir à la syntaxe puis, dans le §32, conclure *en conséquence* que chaque nom possédait une référence. Nous allons, pour notre part, rendre à la syntaxe ce qui lui appartient, et proposer une caractérisation purement syntaxique des noms, toute orientée qu'elle soit vers des préoccupations sémantiques.

2.3.2.2 La hiérarchie des fonctions

Les règles grammaticales doivent autoriser la combinaison des noms de fonctions et d'objets *compatibles*. Jusqu'à présent, nous nous sommes principalement limités à l'examen de cas particuliers relativement simples : l'opération de fonctions de premier niveau à un argument sur un objet, l'opération de fonctions de second niveau à un argument sur une fonction de premier niveau, etc. Il est temps d'observer le phénomène dans sa généralité.

Procédons à une nouvelle mise au point terminologique. En parlant de sphères linguistique, logique et ontologique, nous respectons le lexique habituel des commentateurs de Frege. La première correspond aux expressions des langages, la seconde aux sens et la troisième aux références. Frege affirme lui-même que les noms de fonctions *réfèrent* à des fonctions (par exemple 1893, p. 46). C'est en ce (faible) sens que nous situons les fonctions dans la sphère ontologique. Nous n'affirmons pas qu'elles constituent des entités subsistantes d'un (ou plusieurs) royaume(s) particulier(s). Le problème du réalisme fregéen n'est pas le nôtre. Nous parlons de *catégories ontologiques* simplement pour réunir au sein d'une même catégorie toutes les références potentielles d'expressions (complètes ou non) qui ne sont pas, aux yeux de Frege, *fondamentalement* différentes.

En effet, celui-ci explique :

> Les fonctions sont fondamentalement différentes des objets et la valeur d'une fonction en un argument doit être distinguée de la fonction elle-même. (Frege 1893, p. 37)

En ce sens donc, il reconnaît au moins deux catégories ontologiques. En vérité, il en compte bien davantage, comme le montre la suite du texte :

> Les fonctions à deux arguments sont aussi fondamentalement distinctes des fonctions à un argument que ces dernières le sont des objets. (Frege 1893, p. 37)

Il existe une distinction entre fonctions similaire à celle qui intervient entre les fonctions à un argument de premier niveau – à cet endroit Frege n'a pas encore introduit les niveaux supérieurs – et les objets. Ainsi, les fonctions de premier niveau à un ou deux arguments appartiennent à des catégories ontologiques différentes.

Après avoir présenté les fonctions de niveaux supérieurs, il généralise cette idée :

> Ces exemples illustrent la grande multiplicité des fonctions. Nous pouvons aussi constater qu'elles sont des fonctions fondamentalement différentes, parce que les places pour les arguments sont fondamentalement différentes. (Frege 1893, p. 40)

Pour commencer, limitons-nous aux fonctions à un argument. Une fonction de deuxième niveau prend en argument une fonction de premier niveau. Une fonction de premier niveau prend en argument un objet. Par notre première citation, nous savons qu'elles reçoivent des arguments fondamentalement différents. Par notre dernière citation, nous pouvons conclure qu'elles sont elles-même fondamentalement différentes. Ce raisonnement, itéré n fois, montre que les fonctions de niveau n sont fondamentalement différentes des fonctions de niveau $n+1$.

Afin de généraliser aux fonctions de niveaux n et m à un argument, avec $n < m$, il suffit de remarquer que, par notre première citation, les objets sont fondamentalement différents des fonctions de niveau $m-n$, et d'appliquer le raisonnement ci-dessus.

Durant nos développements techniques, nous allons utiliser le terme (bien connu dans ce contexte) de 'type' en lieu et place de 'catégorie'. Nous pouvons proposer une première définition des types en utilisant une méthode (post-)russellienne qui s'adapte parfaitement à l'idéographie [29] :

- Un objet est de type 0.
- Une fonction à n arguments de types respectifs $t_1, \ldots, t_n$ est de type $(t_1, \ldots, t_n)$.

Voici deux exemples :

– $\xi = \zeta$ est une fonction de premier niveau à deux arguments : elle est de type $(0, 0)$;

– $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a})$ est une fonction de second niveau à un argument, lui-même de premier niveau à un argument : elle est de type $((0))$.

Une induction immédiate qui exploite les résultats et les citations ci-dessus [30] permet de conclure :

> *Deux fonctions sont fondamentalement différentes si et seulement si leurs types sont différents.*

Frege reconnaît une infinité de types, caractérisés par les insaturations de leurs éléments. Une fonction de type $(t_1, \ldots, t_n)$ envoie n arguments de types respectifs $t_1, \ldots, t_n$ sur un objet. Nous

29. Cette définition sera légèrement modifiée lors du traitement formel du problème. Nous ne voulons pas encombrer nos explications informelles de subtilités et de pointilleries. Pour l'instant, nous la conservons sous cette forme.

30. et qui tient compte du fait, implicite, que deux fonctions ne sont pas fondamentalement différentes si leurs types sont les mêmes.

devons comprendre comment ce processus est manifesté par la langue, c'est-à-dire comment un nom de type $(t_1, \ldots, t_n)$ [31] se combine avec n noms de types respectifs $t_1, \ldots, t_n$ pour produire un nom d'objet.

En outre, Frege explique que "les *objets* s'opposent aux fonctions. Ainsi, [il] tien[t] pour *objet* tout ce qui n'est pas une fonction." (Frege 1893, p. 7). D'après cette phrase – donnons-lui un tour plus intuitif – l'union disjointe des objets et des fonctions constitue la totalité de ce que Frege reconnaît. Nous ne voulons pas développer cette question, car nous y trouverions le problème du statut des sens fonctionnels. Nous disons seulement que toute référence d'une expression est un objet ou une fonction, et que des noms de fonctions et d'objets doivent refléter, dans la manière dont ils se combinent, les opérations qui se produisent au niveau de leurs références.

2.3.2.3 Logique de l'Idéographie et logique de Frege

Frege procéda à divers développements concernant la hiérarchie des fonctions aux §§21-23 des *Grundgesetze*. Il fournit quelques illustrations de fonctions de premier et second niveaux, avant d'aborder un autre cas :

> Pour emprunter un exemple à l'analyse, nous allons considérer le quotient différentiel d'une fonction. Nous regardons cette dernière comme un argument. Considérons une fonction particulière, e.g. ξ^2, comme argument ; nous obtenons alors une autre fonction de premier niveau 2ξ et, seulement lorsque nous lui octroyons un objet en argument, e.g. 3, obtenons-nous un objet en valeur : le nombre 6. Le quotient différentiel doit ainsi être conçu comme une fonction à deux arguments, dont l'un doit être une fonction de premier niveau à un argument, et l'autre un objet. Nous pouvons ainsi l'appeler une fonction *de niveaux inégaux* à deux arguments. (Frege 1893, p. 39)

Le quotient différentiel – ou la dérivée – d'une fonction f est souvent noté 'f'' ou '$\frac{df}{dx}$' en mathématiques. Frege remarque que la fonction qui associe à une fonction la valeur de sa dérivée en un point prend deux arguments : une fonction et un objet. Sans trop s'éloigner des notations standards, nous pouvons l'écrire : '$\varphi'(\xi)$' ou '$\frac{d\varphi}{d\xi}(\xi)$'. Il est aussi possible de lui conférer une structure adaptée à l'idéographie :

$$\text{`}d_\beta(\varphi(\beta), \xi)\text{'}$$

'd' est le symbole associé à la fonction – son étiquette, disons –, 'φ' marque la place vide pour son premier argument, 'β' indique l'argument de ce dernier, et 'ξ' marque la place vide pour son second argument. Il est clair que les deux arguments de cette fonction sont de niveaux distincts, et c'est en ce sens que Frege parla d'une fonction de niveaux *inégaux*[32].

Bien sûr, 'd' n'est pas un symbole primitif de l'idéographie, mais nul doute que Frege, qui escomptait dériver les théorèmes de l'analyse, prévoyait qu'il s'y définît. De plus, on peut facilement trouver d'autres exemples limités aux symboles primitifs :

> Un exemple supplémentaire d'une telle fonction de niveaux inégaux à deux arguments est fourni par — $\varphi(\xi)$, où 'ξ' prend la place de l'objet argument et '$\varphi()$' celle de la fonction argument en les rendant manifestes. Puisque la valeur de cette fonction est toujours une valeur de vérité, nous pouvons l'appeler une relation de niveaux inégaux. (Frege 1893, p. 39)

31. Par extension, nous donnons au nom le type de l'entité à laquelle il réfère.
32. Nous dirons aussi 'une fonction hybride'.

Frege reconnaissait donc aux fonctions de ce type le même statut qu'aux fonctions de niveau 1, *i.e.* la capacité à être la référence d'expressions. Il l'avait d'ailleurs anticipé dans l'avant-propos :

> Ainsi qu'élaboré dans mon exposé "Fonction et concept", les concepts et les relations sont des fonctions selon ma façon d'étendre la référence de ce terme, et donc nous devons aussi distinguer les concepts de premier et de second niveau et les relations de niveau égaux et inégaux. (Frege 1893, p. X)

Pourtant, lorsqu'il précisa les clauses syntaxiques d'élaboration des noms de fonctions au §26, il n'aborda jamais les cas de niveaux inégaux. S'il les exclut de son développement, c'est qu'il n'en avait pas besoin pour ses manipulations syntaxiques. Par exemple, il pouvait paisiblement parvenir à une expression du type '— $\Phi(\Delta)$', quand '$\Phi(\xi)$' et 'Δ' étaient respectivement une fonction et un objet particuliers, sans avoir à passer par un nom de fonction de niveaux inégaux. Il suffisait de compléter d'abord '$\Phi(\xi)$' par 'Δ', puis '— ξ' par le résultat, *i.e.* par '$\Phi(\Delta)$'. Le même principe vaut pour la dérivée, ainsi que dans toute situation analogue. Cette raison le motiva aussi à exclure de son langage les noms de fonctions à plus de deux arguments.

En 1884, Frege avait invoqué les extensions pour prendre en charge le caractère objectuel des nombres. En 1893, le processus s'était généralisé aux parcours-de-valeurs. Ces derniers bloquaient l'escalade des niveaux de fonctions [33]. Elles permettaient, pensait-il, d'aboutir au développement de l'arithmétique à travers un seul nom de fonction de troisième niveau [34], et aucun qui n'excède cette altitude. Frege pouvait donc se passer du processus général d'élaboration des noms de niveaux supérieurs ou égaux à trois, et affirma abruptement qu'il n'était "pas nécessaire de continuer plus loin cette explication des types de noms" (p. 44). Voilà qui autorisait l'économie des axiomes liés aux quantifications d'ordres supérieurs à deux, impliquant des (sens qui conduisent à des) fonctions de niveaux supérieurs à trois. Par exemple, seules les deux premières des trois lois suivantes furent intégrées à l'Idéographie :

$$\begin{array}{l} \vdash f(a) \\ \quad \smile_{\mathfrak{a}}\ f(\mathfrak{a}) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} \vdash M_\beta(f(\beta)) \\ \quad \smile_{\mathfrak{f}}\ M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} \vdash \Sigma_\psi(M_\beta(\psi(\beta))) \\ \quad \smile_{\mathfrak{M}}\ \Sigma_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))) \end{array}$$

Frege considérait bel et bien que le troisième énoncé, au même titre que les deux premiers, permettait la manifestation d'un jugement à la fois correct et assis sur des fondations purement *logiques* [35]. Celui-ci n'est pourtant pas dérivable dans l'Idéographie. Frege en dispensa son système *seulement* car il pensait parvenir à développer les mathématiques (hors géométrie) sans son concours. En ce sens, l'Idéographie n'est pas *exhaustive*, et n'avait pas besoin de l'être. Cependant, la manière dont les règles morphologiques reflètent la composition des sens vaut aussi bien pour les noms incorporés à l'idéographie que pour ceux qui, pour des raisons pragmatiques, en ont été exclus. Il est donc indispensable de proposer des clauses qui s'appliquent à la totalité des types de fonctions ou, au moins, qui s'étendent à cette totalité. Ce sera notre objectif : présenter ce qui constituait, selon Frege, la grammaire logique pure des noms, et non sa portion limitée à l'idéographie.

33. Nous discuterons cette importante spécificité du système en section 2.5.2.

34. Lorsqu'il présenta la lettre latine associée aux fonctions de niveau 3, Frege prévint son lecteur :

> Puisque ce dispositif linguistique est utilisé pour un seul énoncé, il n'est pas nécessaire de l'expliquer dans sa pleine généralité. (Frege 1893, p. 42)

Dans le §31, il proposa *deux* noms de fonctions de troisième niveau. Le second est superflu, nous discuterons en section 2.5.3 les raisons de sa présence.

35. Nous ne pouvons pas dire que le troisième terme – l'expression privée du trait de jugement – exprime une vérité logique car, à cause des lettres latines, le terme n'exprime aucune pensée. Nous verrons ce point plus tard.

2.3.2.4 Les lettres indicatrices

Pour former des noms d'objets et de fonctions, Frege utilise des lettres, dénuées de sens et de référence, qui *indiquent* néanmoins un objet ou une fonction. Une de nos tâches les plus complexes consiste à cerner précisément leur rôle. Amorçons ce travail par une étude des passages concernés :

> Dans [une] expression [pour une fonction], la lettre 'x' apparaît, qui ne réfère [*bedeutet*] pas à un nombre comme le signe '2' mais se contente d'en indiquer [*andeutet*] un de manière indéterminée. (Frege 1893, p. 5)

Frege discutait ici les notations des mathématiciens. Pour sa part, il réserverait un autre usage aux lettres latines, et se vit donc contraint de confier cette tâche à un symbole différent :

> Par la suite, au lieu de 'x', la lettre 'ξ' sera utilisée à cette fin. (Frege 1893, p. 6)

Quelle est exactement sa fonction ? Notons que la notion d'indétermination en jeu ici n'a *rien à voir* avec celle qui polluait la *Begriffsschrift*. En 1879, le problème provenait de l'impossibilité de déterminer un contenu complexe en fonction de contenus eux-mêmes indéterminés. Ici, aucun contenu n'est censé être composé de celui de 'ξ', qui n'est pas indéterminé, mais purement et simplement *inexistant*. 'ξ' ne possède ni sens ni référence. Le signe "indique un objet de manière indéterminée" sans exprimer ou signifier quoi que ce soit. Frege développe :

> La lettre ['ξ'] sert seulement à maintenir la place ouverte pour un signe de nombre [36] qui pourra compléter l'expression, et ainsi marque le type spécial d'insaturation qui constitue la nature particulière de la fonction désignée. (Frege 1893, p. 6)

Considérons la fonction successeur $s(\xi)$. La lettre 'ξ' peut être conçue comme un simple blanc, le nom s'écrit alors '$s(\ \ )$'. Ce blanc doit néanmoins être distingué de celui qui sépare les symboles 's' et '('. Il possède une nature particulière. Il est destiné à être rempli par un nom d'objet, ainsi que $s(\xi)$ est elle-même appelée à être complétée par un objet :

> La nature de la fonction se dévoile à travers le lien qui s'établit entre les nombres dont les signes sont injectés à la place de ['ξ'] et les nombres qui proviennent alors de la référence de notre expression.
> [...]
> La nature de la *fonction* gît ainsi dans la partie de l'expression qui résulte du retranchement du ['ξ']. L'expression d'une *fonction* est *en attente de complétion, insaturée.*
> [...]
> L'argument ne doit pas être considéré comme une partie de la fonction, mais sert seulement à compléter la *fonction* en elle-même *insaturée.* (Frege 1893, pp. 5-6)

La fonction successeur associe chaque nombre à son successeur, elle *opère* sur des objets. Le processus est rendu syntaxiquement à travers la manière dont un nom d'objet vient occuper la place marquée par 'ξ' dans '$s(\xi)$'. Cette lettre indique un objet en ceci qu'elle indique qu'un objet doit venir saturer la fonction désignée par l'expression, et elle occupe la place que prendra le nom de cet objet à cette occasion.

Dans ce paragraphe, Frege traita le cas d'une fonction de premier niveau à un argument – de type (0). Il n'est pas compliqué d'étendre ce procédé aux fonctions de premier niveau à deux arguments – de type (0,0) :

36. Nous sommes au début des *Grundgesetze*. Frege limite provisoirement aux nombres le domaine des références des noms d'objets pour que son exemple soit clair aux yeux des mathématiciens. En vérité, 'ξ' sert à maintenir la place ouverte pour un quelconque signe d'objet, nombre ou non.

> Tout comme la lettre 'ξ' nous servait dans le cas des fonctions à un argument, nous utilisons ici les lettres 'ξ' et 'ζ' pour indiquer la double insaturation des fonctions à deux arguments. (Frege 1893, p. 8)

De cette manière, l'expression '$\xi + \zeta$' réfère à la fonction addition. Nous savons que Frege n'a pas eu besoin de généraliser la méthode aux fonctions à n arguments. Notons qu'il suffirait simplement d'indicer 'ξ' par des entiers naturels. Le second niveau pose davantage de problèmes :

> Si on dit 'la fonction $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash \varphi(\mathfrak{a})$', alors '$\varphi$' occupe la place [*vertritt*] du signe de l'argument, tout comme 'ξ' dans l'expression 'la fonction $\xi^2 = 4$' occupe la place du nom propre qui peut figurer en argument. Dans ce cas, 'φ' n'appartient pas davantage à la fonction que 'ξ' dans le dernier cas. (Frege 1893, p. 37)

Frege s'appuie sur les explications fournies dans le cas du premier niveau. Cependant, celles-ci ne s'appliquent pas telles quelles aux niveaux supérieurs. En effet, il suffit incontestablement d'injecter le nom de l'argument d'une fonction de premier niveau à la place vacante pour obtenir le nom de la valeur prise en cet argument. *Mais ce n'est plus le cas pour les niveaux supérieurs.* Supposons une fonction $\Phi(\xi)$ de type (0). Le nom de l'objet résultant de la saturation de $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash \varphi(\mathfrak{a})$ par cette fonction n'est pas '$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash \Phi(\xi)(\mathfrak{a})$', mais bien '$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash \Phi(\mathfrak{a})$'. En toute rigueur, nous ne pouvons pas dire que 'φ' occupe la place destinée au nom de l'argument. Frege ne fournit pas davantage d'explications concernant le troisième niveau :

> Nous avons ainsi introduit deux fonctions de troisième niveau, dont les noms s'écrivent :
>
> $$\text{`}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))\text{'} \text{ et } \text{`}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))\text{'},$$
>
> tels que nous marquons les places des arguments par 'μ_β' et '$\mu_{\beta\gamma}$', tout comme nous marquons les places des arguments [de type (0) et $(0,0)$] par 'φ' et 'ψ', et ceux [de type 0] par 'ξ' et 'ζ'. (Frege 1893, p. 41)

Frege ne décrit pas les manipulations syntaxiques impliquées par les saturations des noms de fonctions de niveau $n+1$ par des noms de fonctions de niveau n. Nous pouvons seulement remarquer l'apparition de la lettre '$\mathfrak{a}$' au second niveau – transformée en '$\mathfrak{f}$' au troisième – et des lettres 'β' et 'γ' au second. On trouve aussi, dans le nom de second niveau lié aux parcours-de-valeurs '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', une intervention similaire de la lettre 'ε' (parfois remplacée par 'α'). Frege dit quelques mots de ces symboles :

> On distingue comme *lettres de fonctions* les lettres 'f', 'g', 'h', 'F', 'G', 'H' et les lettres gothiques correspondantes, en opposition aux autres que nous appelons les *lettres d'objets*, car elles indiquent seulement des fonctions et non, comme les dernières, des objets. Nous comptons aussi les voyelles grecques minuscules parmi les *lettres d'objets*, parce que leurs seules occurrences sans l'esprit doux[37] sont à des places que les noms propres peuvent aussi occuper. À l'intérieur de sa portée, une lettre de fonction est toujours suivie de *parenthèses*, entre lesquelles figurent une ou deux places séparées par une virgule, selon si la lettre indique une fonction à un ou deux arguments. Une telle place sert à recevoir un nom simple ou complexe qui réfère ou indique un argument ou, comme une voyelle grecque minuscule, occupe la place d'un argument. (Frege 1893, pp. 34-35)

Laissons de côté les lettres latines et procédons à une première remarque. Jamais Frege ne dit des lettres '$\mathfrak{a}$', '$\mathfrak{f}$', 'ε' ou 'β' (ou assimilées) qu'elles maintiennent une place ouverte. Cela est

37. L'esprit doux, '*Spiritus lenis*' en latin, est le signe surplombant 'ε' dans '$\dot{\varepsilon}$'.

réservé aux symboles que nous avons présentés plus haut : 'ξ', 'φ', 'μ' (et assimilés). Il existe cependant des points commun entre les deux espèces. Frege dit que les lettres d'objets – parmi lesquelles il classe '$\mathfrak{a}$' et 'ε' (et assimilées) – *indiquent* des objets ; et que les lettres de fonctions – parmi lesquelles il classe '$\mathfrak{f}$' (et assimilées) – *indiquent* des fonctions. Il semble se rétracter concernant 'ε' lorsqu'il fait la distinction entre les lettres qui indiquent des arguments et 'ε' qui *occupe* la place d'un argument. À ce stade de l'ouvrage, Frege n'a pas encore présenté les fonctions de niveaux supérieurs, et n'a donc pas utilisé la lettre 'β'. Il emploie à son sujet une formule proche de celle qu'il consacre à 'ε' :

> La lettre 'β' entourée de parenthèses occupe ici la place de l'argument de la fonction prise en argument. (Frege 1893, p. 42)

Il n'en dit pas davantage. Dans le §26, il explique :

> Je n'appellerai pas *noms* les lettres gothiques, latines et grecques figurant dans l'idéographie étant donné qu'elles ne sont pas censées référer à quoi que ce soit. (Frege 1893, p. 43)

Frege est donc clair sur au moins un point : aucune des lettres 'ξ', 'φ', 'μ', '$\mathfrak{a}$', '$\mathfrak{f}$', 'ε' ou 'β' ne possède de référence. Les trois premières indiquent des objets ou des fonctions en maintenant des places ouvertes pour le nom de l'argument, les deux suivantes indiquent aussi, mais différemment, des objets ou des fonctions. Le doute plane sur les deux dernières, nous savons seulement qu'elles occupent la place d'un argument sans pour autant maintenir une place ouverte. Le moins qu'on puisse dire, c'est que ces informations ne sont pas éclatantes de clarté. Il reste un espoir. Peut-être Frege a-t-il précisé le rôle de ces symboles à travers la description de sa morphologie, et ainsi réglé le problème évoqué plus haut, concernant la manière dont les noms de fonctions de niveaux supérieurs se complètent les uns les autres.

C'est au §26 qu'il décrit la procédure à suivre pour former des noms de fonctions. Celle-ci est abordée comme si la classe des noms propres était déjà spécifiée, car Frege se contente d'expliquer comment construire des noms de fonctions *à partir de noms d'objets*. Ici non plus, il n'est pas aisé de deviner les manipulations syntaxiques attachées à ces explications :

> Si nous retirons d'un nom propre quelques ou toutes les occurrences d'un autre nom propre qui en fait partie ou coïncide avec, mais de telle sorte que ces places soient marquées comme occupables par le même nom propre arbitraire [...] (Frege 1893, p. 43)

Quand un nom propre fait-il partie d'un autre nom propre ? La réponse la plus naturelle semble être : lorsque la combinaison de signes en laquelle il consiste figure telle quelle dans le second nom. Les difficultés surgissent, une fois encore, lorsque nous gravissons les niveaux :

> Si nous retirons d'un nom propre quelques ou toutes les occurrences d'un nom de fonction de premier niveau qui en fait partie ou coïncide avec, mais de telle sorte que ces places soient marquées comme occupables par le même nom arbitraire de fonction de premier niveau [...] (Frege 1893, p. 43)

Notre précédente interprétation ne convient plus. Le signe 'ξ' incorporé aux noms de fonctions de premier niveau ne figure *jamais* dans un nom propre. On peut toujours extrapoler : un nom de fonction de premier niveau fait partie d'un nom propre si le nom résultant de sa saturation par un nom d'objet figure tel quel dans ce nom propre. Mais comment marquer la place occupée par le nom de fonction ? Il est clair que le signe 'φ' est impliqué, mais de quelle manière ? Et l'affaire se compliquerait encore pour les niveaux supérieurs, que Frege n'aborde même pas.

Ce travail, tout insuffisant soit-il, n'est pas reproduit dans le cas des noms propres. Frege se contente de stipuler :

> Je dis d'un nom qu'il est *correctement* formé s'il consiste en ces seuls signes primitifs ou introduits par définitions, et si ces signes sont utilisés exclusivement en accord avec la manière dont ils ont été introduits, c'est-à-dire des noms propres comme noms propres, des noms de fonctions de premier niveau à un argument comme noms de telles fonctions, etc., et si les places pour les arguments sont toujours occupées par des noms ou marqueurs compatibles. (Frege 1893, p. 45)

En substance, Frege se contente d'exiger que les choses aillent telles qu'elles doivent aller, sans jamais décrire en quoi cela consiste. À cette phrase succèdent quelques réquisits secondaires concernant les lettres grecques et gothiques qui ne fixent *en aucune façon* le processus général de composition des noms. Frege fournit une dernière explication de ce genre [38] au sein du §30. Nulle part n'est décrit précisément le rôle syntaxique des lettres grecques et gothiques ni la manière dont la place pour l'argument doit être "occupée" par un nom de fonction dans un nom de fonction de niveau supérieur ou égal à 2. Or, le lecteur n'en sera pas surpris, les deux questions sont intimement liées.

L'exposition du désordre qui règne, au sein des *Grundgesetze*, parmi les explications concernant la morphologie n'est en aucune façon à charge contre Frege. Les canons actuels de présentation d'un langage logique n'étaient évidemment pas en vigueur à cette époque. Malgré cela, nous soutenons que Frege avait un processus précis de composition des noms à l'esprit. Il n'a probablement pas pris la peine de l'écrire en détail car cette démarche lui semblait aussi rébarbative qu'inutile, et risquait d'ennuyer autant le lecteur que lui-même. Il possédait une idée relativement claire de la mécanique, il était parvenu à former les noms nécessaires à la poursuite de son projet, rien ne le retenait encore dans ces terres. Nous pensons néanmoins qu'il a eu tort de ne pas examiner davantage la morphologie de son propre langage, nous verrons plus tard qu'il aurait pu y découvrir divers problèmes sérieux. Mais ce n'est pas ce qui nous importe ici. Nous voulons seulement signaler que les premières victimes de ces explications confuses furent ses commentateurs, et surtout ceux qui côtoyèrent les *Grundgesetze* après les grands résultats de la première moitié du vingtième siècle. Il est tentant d'interpréter ces obscurs passages d'une manière toute contemporaine, et d'y voir la description d'une morphologie très actuelle. Landini s'est laissé séduire. Nous affirmons qu'il s'agit d'une erreur, et allons argumenter dans ce sens. En premier lieu, il convient d'exposer ce que nous décelons derrière ces extraits, *i.e.* de présenter la mécanique de combinaison des noms telle que nous la concevons. Il sera ensuite temps de défendre notre interprétation, notamment en la confrontant à celle de Gregory Landini.

2.3.2.5 La mécanique de saturation

Résumons les résultats de nos précédentes sections. Un nom de type $(T_1, \ldots, T_n)$ doit pouvoir être complété par n noms de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$. De cette saturation doit résulter un nom d'objet. Frege parvint à limiter les noms impliqués dans ses développements aux types 0, (0), $(0,0)$, $((0))$, $(((0)))$ et $(((0,0)))$. Néanmoins, la mécanique syntaxique de combinaison fut conçue en toute généralité. Les explications à son sujet étant lacunaires, il nous appartient de reconstituer son fonctionnement à partir des divers exemples et manipulations effectuées par Frege. Notre objectif consiste donc à examiner le processus général de combinaison des noms relativement à leurs types, *i.e.* la manière dont s'écrit un nom complexe en fonction de noms plus simples. Ainsi, il convient de s'interroger en premier lieu sur les noms *élémentaires*.

38. que nous examinerons dans un autre contexte.

Il faut distinguer les noms élémentaires (atomiques, ou simples), qui ne sont composés syntaxiquement d'aucun nom plus simple, des noms primitifs (ou de base) qui ne peuvent se définir à travers les autres noms de la langue formulaire, *i.e.* dont le sens n'est constitué d'aucun autre sens exprimable dans l'idéographie. La première notion est syntaxique, la seconde est sémantique. Les noms primitifs sont tous élémentaires. En revanche certains noms élémentaires ne sont pas primitifs. Par exemple, bien que l'idéographie n'intègre aucun nom de base pour des objets, Frege y *définit* deux noms d'objets élémentaires : '$\mathfrak{0}$' et '$\mathfrak{1}$'.

Tous les noms *atomiques* de même type possèdent la même structure. Celle-ci est visible à travers la manière dont sont désignés les objets ou fonctions *arbitraires*. Frege leur donne systématiquement la forme de noms élémentaires, écrits à l'aide des lettres grecques majuscules [39] :

- noms d'objets arbitraires : 'Γ', 'Δ', 'Λ', et 'Θ' ;
- noms de fonctions arbitraires de type (0) : '$\Phi(\xi)$' ;
- noms de fonctions arbitraires de type $(0,0)$: '$\Phi(\xi,\zeta)$' ;
- noms de fonctions arbitraires de type $((0))$: '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' ;
- noms de fonctions arbitraires de type $((0,0))$: '$\Omega_{\beta,\gamma}(\varphi(\beta,\gamma))$'.

Nous discuterons plus tard le statut (bancal) des lettres grecques majuscules et la notion d'objet et de fonction arbitraires. Pour l'heure, ces expressions nous intéressent seulement parce qu'elles révèlent clairement la structure des noms élémentaires, contrairement aux noms primitifs de l'idéographie. Voici comment nous allons procéder. Durant ces explications préliminaires, nous allons employer les lettres grecques majuscules dans nos exemples. Le lecteur pourra ainsi reconnaître des expressions fréquentes dans les *Grundgesetze*. Nous ne nous intéressons pas *encore* à leur rôle sémantique. Nous nous cantonnons à examiner à travers elles la structure des noms. Dans un deuxième temps (section 2.3.3), nous introduirons notre propre symbolisme [40] afin d'*étendre* la morphologie à la *totalité* des types, sans se limiter à ceux de l'idéographie [41]. Nous expliquerons ensuite pourquoi cette grammaire se plie à l'exigence fregéenne de manifestation de la composition des contenus (section 2.3.4). Notre travail s'achèvera lorsque nous prouverons que les noms primitifs de l'idéographie la respectent fondamentalement, malgré des conventions d'écriture vouées à simplifier les formules. Nous en dirons quelques mots ici, mais laisserons en suspens le problème du trait horizontal. Il sera réglé en section 2.5, et accompagné de l'établissement rigoureux de la mécanique qui permet de retrouver le strict symbolisme de Frege à partir de sa grammaire initiale. Autrement dit, après avoir construit la grammaire *générale* des noms, nous la restreindrons à l'idéographie d'abord présentée dans le strict respect de celle-ci, puis déclinée selon les conventions de Frege. Nous verrons ainsi que certaines spécificités *graphiques* de l'idéographie, telles l'écriture en deux dimensions et la forme déconcertante du trait horizontal, sont de pures artifices auxquels Frege eut l'adresse de recourir. La seule véritable singularité syntaxique de ce langage, c'est sa grammaire [42]. Et elle prend sa source dans les conceptions sémantiques de Frege.

39. Il emploie aussi 'Σ', 'Π', '$\Psi(\xi)$' et $\Psi(\xi,\zeta)$', mais nous leur réservons un autre usage.

40. tout en conservant la même grammaire, bien sûr. Notre objectif est précisément de présenter cette grammaire.

41. Les conventions de Frege sont prévues pour un nombre restreint de types. Nous tenterons d'en rester aussi proche que possible, mais devrons néanmoins nous en écarter légèrement.

42. Landini se tient précisément à l'opposé. Il estime que la grammaire de Frege est tout à fait standard, tandis que les deux dimensions et la graphie du trait horizontal sont des caractéristiques essentielles de ce langage. Nous devrons donc inévitablement confronter nos arguments.

Un nom simple d'objet est, sans surprise, constitué d'un seul symbole. Le cas des fonctions est autrement problématique. Examinons par exemple la forme associée au type $(0, 0)$:

$$\text{‘}\Phi(\xi, \zeta)\text{’}$$

Seule la lettre ‘Φ’ renseigne quant à la fonction en question, la suite ne dépend que du type. On peut par exemple noter ‘$+(\xi, \zeta)$’ l'addition et ‘$\times(\xi, \zeta)$’ la multiplication. ‘$+$’ et ‘$\times$’ sont les seuls éléments qui distinguent les deux expressions. Ce qui suit est commun à toutes les fonctions de ce type : ‘ξ’ et ‘ζ’ marquent les places vides destinées aux arguments, figurent entre parenthèses et sont séparées par une virgule [43].

Un nom atomique de fonction est toujours constitué de deux parties :

1. l'*étiquette* [44] : un symbole directement associé à la fonction en question, dans notre cas ‘Φ’ ;
2. la *terminaison* : une suite de symboles relative au seul type de la fonction, dans notre cas ‘(ξ, ζ)’.

Considérons à présent la forme prise par les noms de fonctions de type $((0))$:

$$\text{‘}\Omega_\beta(\varphi(\beta))\text{’}$$

‘Ω’et ‘$(\varphi(\beta))$’ sont respectivement l'étiquette et la terminaison de ce nom. ‘φ’ marque la place vacante de l'expression. Le rôle de ‘β’ est à la source de nombreuses incompréhensions, il importe donc de le décrire précisément. Une fonction de type $((0))$ prend en argument une fonction de type (0). À première vue, rien n'interdit de nous limiter à écrire l'étiquette de la fonction suivie de la place pour l'argument. Dans ce cas, nous obtenons l'expression suivante :

$$\text{‘}\Omega(\varphi)\text{’}$$

‘φ’ attend d'être remplacé par le nom d'une fonction de type (0) – par exemple ‘$\Phi'(\xi)$’. De cette manipulation résulte l'expression ‘$\Omega(\Phi'(\xi))$’. Celle-ci ne convient pas, car seul un objet peut provenir de la saturation d'une fonction de type $((0))$ par une fonction de type (0). Or notre expression incorpore la lettre ‘ξ’ marquant une place vide, il ne peut s'agir d'un nom d'objet. Qu'à cela ne tienne, il suffit d'intégrer *uniquement* l'étiquette de la seconde fonction à la place de ‘φ’ :

$$\text{‘}\Omega(\Phi')\text{’}$$

Ce nom ne laisse aucune place vacante et fournit toutes les informations nécessaires : l'étiquette de la fonction de type $((0))$ – ‘Ω’ –, et l'étiquette de la fonction de type (0) – ‘Φ'’. Nous pouvons, pour plus de clarté, faire figurer les types des fonctions en exposant :

$$\text{‘}\Omega^{((0))}\big(\Phi'^{(0)}\big)\text{’}$$

Ainsi, le nom de notre fonction de second niveau devient :

43. Rigoureusement, on pourrait se passer des parenthèses et de la virgule sans créer d'ambiguïté. D'ailleurs, bien que Frege conserve les premières dans les expressions impliquant les lettres grecques majuscules, il en fait l'économie dans la plupart de ses noms primitifs. Par exemple ‘$\backslash\xi$’ et ‘$_{\vdash}\,\xi$’ ne sont pas écrits ‘$\backslash(\xi)$’ et ‘$_{\vdash}\,(\xi)$’. La raison n'est pas difficile à deviner. Dans le cadre restreint à ces quelques noms primitifs, les formules sont simplifiées par cette omission. Dans le contexte plus global des lettres grecques, elles seraient au contraire drastiquement obscurcies. Dans notre cadre de généralisation complète, elles deviendraient quasi illisibles.

44. Les appellations ‘étiquette’ et ‘terminaison’ ne sont pas utilisées par Frege. Ce sont les nôtres.

$$\text{‘}\Omega^{((0))}(\varphi^{(0)})\text{’}$$

À ce train, nous pouvons aussi évacuer les lettres pour les places vacantes, le type de l'argument de la fonction étant identifié grâce à l'exposant :

$$\text{‘}\Omega^{((0))}\text{’}$$

Vue sous cet angle, l'idéographie peut se simplifier à travers l'écriture des seules étiquettes des noms de fonctions. Il s'agit d'une opinion partagée par certains commentateurs de Frege. Et pour cause : présentée sous cette forme, l'idéographie se rapproche considérablement d'un langage des prédicats pour une logique d'ordres supérieurs, bien connu des logiciens contemporains. Landini explique :

> Frege exigeait des notations structurées pour maintenir des expressions pour des fonctions dans des positions de fonctions. [...] Selon [ses] conceptions, les objets *tombent sous* des fonctions de premier niveau, tandis que des fonctions de niveau n saturent (*tombent dans*) dans fonctions de niveau $n+1$ [45]. L'indice x dans $M_x\varphi(x)$ sert à nous rappeler ce fait. Les cas sont similaires pour les niveaux supérieurs. (Landini 2012, p. 21)

Frege aurait donc choisi ses notations seulement pour éviter de faire figurer une lettre pour une fonction (par exemple ‘Φ'’) en position de nom d'objet. Il aurait exigé qu'une telle lettre soit accompagnée d'un symbole indiquant son argument, ce qui n'est pas le cas dans ‘$\Omega^{((0))}(\Phi'^{(0)})$’. Landini soutient que le choix d'une syntaxe sur le mode d'une théorie des types simples facilite grandement les choses, sans créer aucune confusion entre fonctions et objets :

> Dans la notation russellienne de théorie des types simples, les expressions pour des prédicats occupent des positions de sujet. Mais cela est légitimé par la réglementation du langage à travers les exposants. Les deux notations sont équivalentes. (Landini 2012, p. 22)

Landini se place ici dans le cadre d'une logique des *prédicats*. Bien qu'il conserve les notations fregéennes dans sa reconstruction, il tire la même conclusion concernant une logique des *fonctions*. Il admet que, en adoptant une notation russellienne pour l'idéographie, des expressions pour des fonctions se retrouvent dans des positions de noms d'objets. Ceci survient par exemple dans ‘$\Omega^{((0))}(\Phi'^{(0)})$’. Mais il n'y voit aucune difficulté, car les statuts de ces expressions sont indiqués en exposant. Finalement, la lettre ‘β’ ne remplit qu'une seule tâche – annoncer le type de la fonction –, et cette tâche peut être accomplie, bien plus aisément, à travers des exposants.

Nous adopterions volontiers la position de Landini si un nom de fonction ne pouvait être complété que par un (ou des) nom(s) *élémentaire(s)* de fonction(s). Ce n'est aucunement le cas, et les noms *complexes* viennent octroyer un autre rôle à ‘β’, souvent passé sous silence mais absolument fondamental. Reprenons notre nom de fonction ‘$\Phi(\xi,\zeta)$’ de type $(0,0)$, et procédons à quelques opérations syntaxiques :

(1) Saturation de ‘$\Phi(\xi,\zeta)$’ par un nom d'objet ‘Δ’ (aux deux places) : ‘$\Phi(\Delta,\Delta)$’.

(2) Désaturation de ‘$\Phi(\Delta,\Delta)$’ du nom ‘Δ’ : ‘$\Phi(\xi,\xi)$’.

45. La formulation est approximative. Des objets tombent sous des concepts, et saturent des fonctions de premier niveau. On peut dire qu'un objet sature un concept de premier niveau – un concept étant une fonction –, mais pas qu'il tombe sous une fonction qui n'est pas un concept. De même, des fonctions de niveau n tombent dans des concepts de niveau $n+1$ et saturent des fonctions de niveau $n+1$.

(3) Saturation de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' par '$\Phi(\xi,\xi)$' : '$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta))$'[46].

C'est l'opération de désaturation qui permet d'obtenir des noms *complexes* de fonctions. La version fregéenne de l'expression finale – '$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta))$' – est univoque. En revanche, la version russellienne – '$\Omega^{((0))}(\Phi^{(0,0)})$' – pose problème. Elle semble combiner un nom de type $((0))$ avec un nom de type $(0,0)$. On peut toujours s'obstiner, en affirmant que la seule manière correcte de comprendre ce nom exige d'octroyer le type (0) à la fonction $\Phi^{(0,0)}$, *i.e.* de supposer que le même argument vient occuper les deux places vacantes.

Malheureusement, il suffit de reproduire le geste une seconde fois pour obtenir une expression qui échappe définitivement au symbolisme russellien :

(1) Saturation de '$\Phi(\xi,\zeta)$' par '$\Phi(\Delta,\Delta)$' et 'Δ' : '$\Phi(\Phi(\Delta,\Delta),\Delta)$'.

(2) Désaturation de '$\Phi(\Phi(\Delta,\Delta),\Delta)$' du nom '$\Delta$' : '$\Phi(\Phi(\xi,\xi),\xi)$'.

(3) Saturation de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' par '$\Phi(\Phi(\xi,\xi),\xi)$' : '$\Omega_\beta(\Phi(\Phi(\beta,\beta),\beta))$'.

La seule écriture russellienne envisageable pour ce résultat est totalement ambigüe. Il s'agit de '$\Omega^{((0))}(\Phi^{(0,0)}(\Phi^{(0,0)}))$' qui peut également désigner un des trois objets suivants sans qu'aucun élément ne permette de trancher :

– $\Omega_\beta(\Phi(\Phi(\beta,\beta),\beta))$

– $\Omega_\beta(\Phi(\beta,\Phi(\beta,\beta)))$

– $\Omega_\beta(\Phi(\Phi(\beta,\beta),\Phi(\beta,\beta)))$

Le lecteur aura compris l'origine du problème. En théorie des types simples, seuls des signes simples – des constantes ou des variables – viennent occuper les places laissées vacantes par les prédicats. Dans l'idéographie, une fois connu le type d'un nom *élémentaire* de fonction – qu'il est possible d'indiquer en exposant–, il suffit de connaître son étiquette pour identifier la fonction en question. La lettre 'ξ' n'est pas essentielle dans cette affaire. Le terme '$\Omega^{((0))}(\Phi'^{(0)})$', par exemple, ne présente aucune ambiguïté. En revanche, 'ξ' joue un rôle central dans l'écriture des noms complexes. Il est donc nécessaire de les écrire en intégralité. Considérons par exemple la fonction Ω (et conservons quelques instants son nom sous cette forme). Elle peut prendre $\Phi(\xi,\xi)$ en argument. Cette dernière fonction ne se laisse *aucunement* désigner à travers de simples étiquettes : la lettre 'ξ' est incontournable. Néanmoins, le nom de l'objet résultant de l'opération entre ces fonctions ne peut être '$\Omega(\Phi(\xi,\xi))$', car cette expression désigne une entité insaturée, intégrant des lettres qui marquent des places vides. La stratégie de Frege consista à remplacer 'ξ' par un autre symbole, et c'est à ce titre qu'il intégra 'β'. Cette lettre ne marque pas une place vacante. Elle vient occuper, dans le nom de l'argument, la place destinée au nom de son argument.

Pour cerner la mécanique, il est indispensable de comprendre le singulier problème auquel Frege était confronté : une fonction peut à la fois saturer et être saturée. Lorsqu'un nom de fonction en complète un autre, il importe de combler les places qu'il arbore à l'intention d'un argument potentiel (et qu'il ne reçoit pas dans ce cas). C'est pourquoi, dans les deux noms construits ci-dessus, le nom de la fonction prise en argument par Ω figure tel quel entre parenthèses après cette lettre, à la nuance près que 'ξ' a été remplacé par 'β' :

– '$\Phi(\xi,\xi)$' : '$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta))$'

– '$\Phi(\Phi(\xi,\xi),\xi)$' : '$\Omega_\beta(\Phi(\Phi(\beta,\beta),\beta))$'

46. Les types respectifs des fonctions désignées par ces noms – $((0))$ et (0) – autorisent cette manipulation.

Un nom de fonction de premier niveau intègre des places vacantes qui sont purement et simplement occupées par les noms des objets pris en arguments. Mais ces places empêchent ce nom d'être intégré tel quel à celui d'une fonction de niveau deux. Les expressions de niveau un et deux incorporent des espaces blancs, l'une ne peut pas simplement être transposée dans l'autre, les deux doivent s'*imbriquer* de manière adaptée. Voilà, nous semble-t-il, le terme-clef de toute cette affaire. La grammaire fregéenne suit une mécanique d'*imbrications*. Dans '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$', "la lettre '$\beta$' entre parenthèses occupe [...] la place de l'argument de la fonction prise en argument" [47] (1893, p. 42). La situation s'éclaircit encore si nous laissons tels quels les espaces vacants. Le blanc dans '$\Omega_\beta(\quad(\beta))$' est destiné au nom '$\Phi(\ ,\ )$'. La lettre '$\beta$' de la première expression est prévue pour occuper *tous* les espaces blancs de la dernière. On peut donc décomposer graphiquement l'expression finale telle qu'une partie corresponde au nom de la fonction de second niveau et une autre au nom de la fonction de premier niveau :

$$\text{'}\Omega_\beta(\quad(\beta,\beta))\text{'}$$
$$\text{'}\Phi(\ ,\ )\text{'}$$
$$\text{'}\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta))\text{'}$$

L'assemblage syntaxique est désormais explicite, et nous pouvons décrire la situation relative à chaque niveau :

- Un nom de type 0 vient occuper les espaces laissés vacants dans un nom de type (0) :

$$\text{'}\Phi'(\xi)\text{' et '}\Delta\text{' : '}\Phi'(\Delta)\text{'}$$
$$\text{'}\Phi'(\ )\text{'}$$
$$\text{'}\Delta\text{'}$$
$$\text{'}\Phi'(\Delta)\text{'}$$

- Deux noms de types respectifs ((0)) et (0) s'imbriquent de telle sorte que la lettre 'β' du premier vienne occuper la place vacante du second :

$$\text{'}\Omega_\beta(\varphi(\beta))\text{' et '}\Phi(\xi)\text{' : '}\Omega_\beta(\Phi(\beta))\text{'}$$
$$\text{'}\Omega_\beta(\quad(\beta))\text{'}$$
$$\text{'}\Phi(\ )\text{'}$$
$$\text{'}\Omega_\beta(\Phi(\beta))\text{'}$$

- Deux noms de types respectifs (((0))) et ((0)) s'imbriquent de telle sorte que la lettre 'ψ' du premier vienne occuper la place vacante du second et la lettre 'β' du second la place vacante *que le premier hérite de cette dernière opération* [48] [49] :

$$\text{'}\Sigma_\psi(\mu_\beta(\psi(\beta)))\text{' et '}\Omega_\beta(\varphi(\beta))\text{' : '}\Sigma_\psi(\Omega_\beta(\psi(\beta)))\text{'}$$
$$\text{'}\Sigma_\psi(\quad(\psi(\ )))\text{'}$$
$$\text{'}\Omega_\beta(\quad(\beta))\text{'}$$
$$\text{'}\Sigma_\psi(\Omega_\beta(\psi(\beta)))\text{'}$$

47. Rigoureusement, Frege aurait dû dire qu'elle occupe la place du *nom* de l'argument de la fonction prise en argument.

48. Provisoirement, nous utilisons 'Σ' comme équivalent de 'Ω' pour le niveau trois, 'μ' comme équivalent de 'φ' pour le niveau deux, et 'ψ' comme équivalent de 'β' pour le niveau 1.

49. Nous invitons le lecteur à repérer une petite erreur à travers ce schéma. Elle est de Frege, et nous la corrigerons bientôt.

Les étapes continuent ainsi aux niveaux supérieurs. Une définition inductive est donc possible. Cependant, si les manipulations syntaxiques sont claires dans le cas des noms élémentaires, elles se corsent dès qu'elles impliquent des noms complexes. En effet, la représentation graphique des parties du nom final qui correspondent aux noms initiaux n'est plus identique à celle de ces derniers. Reprenons notre premier exemple :

$$\text{`}\Omega_\beta(\quad(\beta,\beta))\text{'}$$
$$\text{`}\Phi(\quad,\quad)\text{'}$$
$$\text{`}\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta))\text{'}$$

'$\Omega_\beta(\quad(\beta,\beta))$' n'est pas le nom de la fonction de second niveau $\Omega_\beta(\quad(\beta))$. L'expression a été induite par la forme de l'argument $\Phi(\quad,\quad)$. Rigoureusement, la mécanique procède pas à pas. Pour éviter de noyer le lecteur sous une définition générale, nous allons commencer par quelques exemples détaillés. Nous nommons la 'portée' d'une lettre l'expression qui figure entre les parenthèses qui lui font suite. Sans surprise, voici les étapes de saturation d'un nom de type (0) :

	Saturation de '$\Phi(\Phi(\xi,\xi),\xi)$' par 'Γ'	Description des étapes
1.	$\Phi(\Phi(\xi,\xi),\xi)[\Gamma]$	Nous écrivons le nom de la fonction suivi du nom de son argument entre crochets.
2.	$\Phi(\Phi(\xi[\Gamma],\xi[\Gamma]),\xi[\Gamma])$	Nous écrivons le nom de l'argument entre crochets à côté des lettres qu'il est censé remplacer.
3.	$\Phi(\Phi(\Gamma,\Gamma),\Gamma)$	Nous procédons aux remplacements.

Voici comment compléter un nom de type ((0)) :

	Saturation de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' par '$\Phi(\xi,\xi)$'	Description des étapes
1.	$\Omega_\beta(\varphi(\beta))[\Phi(\xi,\xi)]$	Nous écrivons le nom de la fonction suivi du nom de son argument entre crochets.
2.	$\Omega_\beta(\varphi[\Phi(\xi,\xi)]\Big(\beta\Big))$	Nous écrivons le nom de l'argument entre crochets à droite de la lettre qu'il est censé remplacer et à gauche de la portée de cette lettre (placée entre grandes parenthèses, pour mieux la repérer).
3.	$\Omega_\beta(\Phi(\xi[\beta],\xi[\beta]))$	Nous précédons au remplacement, et écrivons entre crochets l'expression qui suivait (entre parenthèses) la lettre qui vient d'être remplacée à côté des lettres qu'elle est censée remplacer.
4.	$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta))$	Nous précédons au remplacement.

Il est crucial de bien comprendre ce qui se produit. Le nom de l'argument '$\Phi(\xi,\xi)$' n'est pas censé remplacer 'φ' tel quel. Il faut placer la portée de 'φ' – *i.e.* 'β' – à la place de l'argument de '$\Phi(\xi,\xi)$' –*i.e.* à la place de 'ξ'. Pour y parvenir, nous procédons comme suit. On incorpore tel quel le nom de l'argument à la place de 'φ' (étape 2). Ce faisant, une nouvelle lettre pour des

espaces vacants – 'ξ' – apparaît. Il faut alors placer entre crochets la portée de ce symbole à la suite de ces lettres (étape 3). Il ne reste qu'à effectuer les dernières substitutions (étape 4).

À ce niveau, nous n'avons eu qu'à répéter deux fois l'opération. Dans le cadre général, il convient de la réitérer jusqu'à rencontrer une lettre d'objet. Dans le premier exemple, nous nous sommes contentés de remplacer 'ξ'. Dans le deuxième exemple, nous avons commencé par remplacer 'φ'. La lettre 'ξ' est alors apparue, qu'il a fallu remplacer par l'expression qui lui était destinée. En montant d'un niveau, nous nous attendons donc à remplacer d'abord 'μ', ce qui générera l'apparition de 'φ' qu'il faudra aussi remplacer, ce qui entraînera l'apparition de 'ξ' qu'il faudra enfin remplacer. Malheureusement, un léger problème nous barre la route. Pour le comprendre, nous pouvons nous limiter au cas des noms atomiques :

	Saturation de '$\Sigma_\psi(\mu_\beta(\psi(\beta)))$' par '$\Omega_{\beta'}(\varphi(\beta'))$'	Description des étapes
1.	$\Sigma_\psi(\mu_\beta(\psi(\beta)))[\Omega_{\beta'}(\varphi(\beta'))]$	Nous écrivons le nom de la fonction suivi du nom de son argument entre crochets.
2.	$\Sigma_\psi(\mu_\beta[\Omega_{\beta'}(\varphi(\beta'))]\Big(\psi(\beta)\Big))$	Nous écrivons le nom de l'argument entre crochets à côté de la lettre qu'il est censé remplacer.
3.	$\Sigma_\psi(\Omega_{\beta'}(\varphi[\psi(\beta)]\Big(\beta'\Big)))$	Nous précédons au remplacement, et écrivons entre crochets la portée de la lettre qui vient d'être remplacée à côté de la lettre qu'elle est censée remplacer.
4.	$\Sigma_\psi(\Omega_{\beta'}(\psi(\beta)[(\beta')]))$	Nous précédons au remplacement, nous sommes bloqués. Plus aucune place vide ne peut accueillir l'ancienne portée de 'φ'

L'expression recherchée est, bien sûr, '$\Sigma_\psi(\Omega_{\beta'}(\psi(\beta')))$. Pour achever le travail, il aurait fallu que 'ξ' figure en lieu et place de 'β' :

$$\Sigma_\psi(\Omega_{\beta'}(\psi(\xi[\beta'])))$$

Le problème se manifeste aussi graphiquement. Reproduisons la décomposition opérée plus haut, *en limitant les espaces vacants aux lettres qui jouent ce rôle* :

'$\Sigma_\psi(\mu_\beta(\psi(\beta)))$' et '$\Omega_{\beta'}(\varphi(\beta'))$' :

'$\Sigma_\psi(\quad(\psi(\beta)))$'
'$\Omega_{\beta'}(\quad(\beta'))$'
'$\Sigma_\psi(\Omega_{\beta'}(\psi(??)))$'

'β' ne marque pas de place vide, il entre donc en collision avec 'β''. Voyons comment les choses s'arrangent simplement en substituant 'ξ' à 'β' :

'$\Sigma_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))$' et '$\Omega_{\beta'}(\varphi(\beta'))$' :

'$\Sigma_\psi(\quad(\psi(\quad)))$'
'$\Omega_{\beta'}(\quad(\beta'))$'
'$\Sigma_\psi(\Omega_{\beta'}(\psi(\beta')))$'

En vérité, *les indices des lettres pour les places vacantes marquent aussi des places vacantes.* Il faut comprendre que l'assemblage syntaxique fonctionne par parité :

– Un nom de premier niveau incorpore des espaces vacants pour des noms d'objets.

– Un nom de second niveau incorpore des espaces vacants pour des noms de premier niveau. Il doit incorporer un dispositif pour les espaces vacants de ces derniers, *i.e.* un dispositif pour le niveau 0. La lettre β remplit ce rôle.

– Un nom de troisième niveau incorpore des espaces vacants pour des noms de deuxième niveau. Il doit incorporer un dispositif pour les espaces vacants de ces derniers, *i.e.* un dispositif pour le niveau 1. La lettre ψ remplit ce rôle. Le niveau 0 n'est pas à sa charge, le nom de second niveau s'en occupe.

– Un nom de quatrième niveau incorpore des espaces vacants pour des noms de troisième niveau. Il doit incorporer un dispositif pour les espaces vacants de ces derniers, *i.e.* un dispositif pour les niveaux 2 et 0. Le niveau 1 n'est pas à sa charge, le nom de troisième niveau s'en occupe.

– Un nom de cinquième niveau incorpore des espaces vacants pour des noms de quatrième niveau. Il doit incorporer un dispositif pour les espaces vacants de ces derniers, *i.e.* un dispositif pour les niveaux 3 et 1. Les niveaux 2 et 0 ne sont pas à sa charge, le nom de quatrième niveau s'en occupe.

Ainsi, un nom de fonction de niveau $2n+1$ prend en charge tous les niveaux impairs, tandis qu'un nom de fonction de niveau $2n$ prend en charge tous les niveaux pairs. Frege commit une maladresse en intégrant 'β' – et non 'ξ'– en indice de la lettre 'μ'. Nous avons longuement hésité à corriger cette erreur, de crainte de déstabiliser un lecteur coutumier des notations fregéennes. Mais nous voulons restituer le plus rigoureusement possible la mécanique de combinaison des noms.

La source de cette maladresse n'est pas difficile à identifier. Elle provient d'une volonté d'exclure la lettre 'ξ' de l'expression '$\Sigma_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))$', pour éviter qu'elle soit interprétée comme une place pour un argument de la fonction, et qu'ainsi cette dernière se voie attribuer le type (((0)),0). Frege procéda comme si les places vacantes ne pouvaient être occupées que par des *noms* : indéniablement, le 'ξ' de la dernière expression n'attend rien de tel. Malheureusement, sa mécanique prévoit au contraire que les places vacantes soient aussi occupées par des lettres qui se contentent de marquer des places d'arguments, à l'instar de 'β'. Aucune confusion n'est possible dans notre expression, parce que la lettre 'ξ' est attachée à – est dans la portée de – 'μ'. L'espace blanc n'est donc pas destiné à recevoir un nom d'objet, mais la lettre (ou l'expression) que la fonction (de second niveau) prise en argument aura prévu pour occuper la place que le nom d'une fonction de premier niveau laisserait libre, *i.e.* la portée de 'φ'. En toute rigueur, il faut donc faire figurer des lettres pour les places vacantes en indice des lettres pour les places vacantes : une lettre qui marque une place vide de niveau n doit être indexée par une lettre qui marque un espace vide de niveau $n-2$, celle-ci doit elle-même porter en indice une lettre qui marque un espace vide de niveau $n-4$, etc. jusqu'au niveau 1 ou 0.

Montons encore d'un cran, en utilisant provisoirement 'Π' pour l'étiquette d'un nom atomique d'une fonction de niveau 4, 'σ' pour maintenir ouverte une place de niveau 3, et 'ρ' pour marquer (sans la maintenir ouverte) la place d'un argument de niveau 2 :

$$\text{'}\Pi_\rho(\sigma_\varphi(\rho_\beta(\varphi(\beta))))\text{' et '}\Sigma_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))\text{' :}$$

$$\begin{array}{c}\text{'}\Pi_\rho(\quad(\rho_\beta(\quad(\beta))))\text{'}\\ \text{'}\Sigma_\psi(\quad(\psi(\quad)))\text{'}\\ \text{'}\Pi_\rho(\Sigma_\psi(\rho_\beta(\psi(\beta))))\text{'}\end{array}$$

Le premier nom prend en charge les niveaux 4, 2 et 0 respectivement à travers les lettres 'Π', 'ρ' et 'β'. Il intègre des espaces vacants pour les autres niveaux. Le deuxième nom prend en charge les niveaux 3 et 1 respectivement à travers les lettres 'Σ' et 'ψ'. Il intègre des espaces vacants pour les autres niveaux.

'β' est à 'ρ' *exactement* ce que 'φ' est à 'σ'. 'β' ne marque pas la place de l'argument de la fonction prise en argument. Rigoureusement, il marque (inspirons un bon coup !) la place de l'argument de la fonction qui pourrait être prise en argument par la fonction qui pourrait être prise en argument par la fonction attendue en argument. Moralement, il marque la place de l'argument de 'ρ'. Cette place n'est *pas* plus libre que celle de 'ρ'. En revanche, 'φ' marque la place de l'argument de la fonction qui pourrait être prise en argument par la fonction attendue en argument. La place de la fonction attendue en argument est libre, celle de l'argument attendu par la fonction que cette dernière prendra en argument l'est tout autant. Moralement, 'φ' marque la place de l'argument de 'σ'. Cette place est aussi libre que celle de 'σ'. Frege avait autant de raisons de faire figurer 'ξ' en indice de 'μ' que d'intégrer 'β' en indice de 'Ω' ou de 'ρ'. Leurs rôles sont absolument symétriques.

Le lecteur considère peut-être que cet appareil complexe vise à expliquer des remplacements si intuitifs qu'il s'en passerait aisément. N'oublions pas que nous tentons de cerner le processus *général* de combinaison des noms. Jusqu'à présent, nous avons volontairement censuré celui-ci afin d'aborder des cas relativement simples. Relâchons un instant notre étreinte, et laissons-le déployer ses ailes. À partir des noms élémentaires introduits ci-dessus, il permet de produire les deux noms complexes que voici :

– Type $(((0)))$ [50] : '$\Sigma_\psi(\Phi'(\mu_\xi(\Phi(\psi(\xi),\xi))))$'

– Type $((0))$: '$\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\varphi(\beta),\varphi(\beta'))))$'

Convenons qu'il est difficile d'obtenir en un coup d'œil une idée du résultat de la saturation du premier par le second. Mais nous avons compris la mécanique, il suffit donc d'appliquer dans l'ordre les différentes étapes :

1. $\Sigma_\psi(\Phi'(\mu_\xi(\Phi(\psi(\xi),\xi))))[\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\varphi(\beta),\varphi(\beta'))))]$

2. $\Sigma_\psi(\Phi'(\mu_\xi[\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\varphi(\beta),\varphi(\beta'))))]\Big(\Phi(\psi(\xi),\xi)\Big)))$

3. $\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\varphi[\Phi(\psi(\xi),\xi)]\Big(\beta\Big),\varphi[\Phi(\psi(\xi),\xi)]\Big(\beta'\Big))))))$

4. $\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\Phi(\psi(\xi[\beta]),\xi[\beta]),\Phi(\psi(\xi[\beta']),\xi[\beta']))))))$

5. $\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\Phi(\psi(\beta),\beta),\Phi(\psi(\beta'),\beta'))))))$

1 n'est qu'une formalité, nous présentons le nom de la fonction qui reçoit l'argument suivi du nom de l'argument entre crochets. En 2, nous déplaçons ce dernier à la suite de la lettre qu'il est censé remplacer. Nous indiquons volontairement la *portée* de cette lettre à travers de grandes parenthèses. C'est ce contenu qui est destiné à occuper les espaces vacants de l'expression qui remplacera la lettre. Dans notre exemple, c'est '$\Phi(\psi(\xi),\xi)$' qui est prévu pour remplacer 'φ'

50. La lettre 'ξ' est dans la portée de 'μ_ξ'. Elle ne marque pas un espace vacant pour un argument de la fonction, mais pour le dispositif de niveau zéro que l'expression qui remplacera 'μ_ξ' aura prévu à cet effet.

dans l'expression qui remplace 'μ', *i.e.* dans '$\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\varphi(\beta),\varphi(\beta'))))$'. C'est pourquoi, une fois le remplacement effectué, nous plaçons ce contenu à droite de 'φ' (en 3). L'opération peut être réitérée. L'expression dans la portée de 'φ' est destinée à remplacer la lettre 'ξ' dans celle qui remplace 'φ', c'est pourquoi nous la localisons juste après cette lettre dans 4. Il suffit de procéder aux substitutions pour achever le travail 5.

Notons que chaque réalisation de l'opération permet de descendre d'un niveau. Le remplacement de 'μ' laisse encore des espaces vacants marqués par 'φ' (et pris en charge par la portée de 'μ'). Le remplacement de 'φ' laisse encore des espaces vacants marqués par 'ξ' (et pris en charge par la portée de 'φ'). Ainsi, quelle que soit la complexité des fonctions de type $(((0)))$ et $((0))$ en jeu, nous aboutirons systématiquement au résultat en effectuant les cinq étapes ci-dessus.

Nous pouvons décomposer graphiquement le nom obtenu :

$$\begin{array}{c}
\text{`}\Sigma_\psi(\Phi'(\qquad\qquad(\Phi(\psi(\ \ ),\ \ ),\Phi(\psi(\ \ ),\ \ ))))\text{'}\\
\text{`}\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\ \ (\ \ (\beta),\beta),\ \ (\ \ (\beta'),\beta'))))\text{'}\\
\text{`}\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\Phi(\psi(\beta),\beta),\Phi(\psi(\beta'),\beta'))))))\text{'}
\end{array}$$

Nous comprenons désormais le rôle des lettres 'ξ', 'β' et de leurs homologues pour les niveaux supérieurs. Nous savons pourquoi chacun de ces symboles de niveau $n \geq 2$ intègre, dans sa portée, une lettre de niveau $n-2$. Nous n'avons pas encore expliqué pourquoi la lettre devait à tout prix figurer en indice du symbole en question. Un exemple simple suffira à nous renseigner. Considérons le nom d'objet '$\Omega_{\beta'}(\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta')))$', qui se forme ainsi :

(1) Saturation de '$\Phi(\xi,\zeta)$' par deux noms d'objets 'Δ' et 'Γ' : '$\Phi(\Delta,\Gamma)$'

(2) Désaturation de '$\Phi(\Delta,\Gamma)$' de 'Δ' : '$\Phi(\xi,\Gamma)$'

(3) Saturation de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' par '$\Phi(\xi,\Gamma)$' : '$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\Gamma))$'

(4) Désaturation de '$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\Gamma))$' de '$\Gamma$' : '$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\xi))$'

(5) Saturation de '$\Omega_{\beta'}(\varphi(\beta'))$' par '$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\xi))$' : '$\Omega_{\beta'}(\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta')))$'

Supposons que la fonction $\Phi(\xi,\zeta)$ ne soit pas symétrique. Alors les objets $\Omega_{\beta'}(\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta')))$ et $\Omega_\beta(\Omega_{\beta'}(\Phi(\beta,\beta')))$ peuvent s'avérer différents. Il est donc essentiel de lier les lettres 'β' et 'β'' aux symboles adéquats. On ne peut se contenter d'écrire : '$\Omega(\Omega(\Phi(\beta,\beta')))$'. Pour se ramener à un cas particulier, remplaçons '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' par '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile\!\!\top}\ \varphi(\mathfrak{a})$'. Les énoncés '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile\!\!\top}\overset{\mathfrak{b}}{\smile\!\!\top}\ \Phi(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$' et '$\overset{\mathfrak{b}}{\smile\!\!\top}\overset{\mathfrak{a}}{\smile\!\!\top}\ \Phi(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$' n'ont pas toujours la même référence. Il ne suffit pas d'écrire '$\smile\!\!\top\smile\!\!\top\ \Phi(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$'.

Notons que nous avons silencieusement remplacé les symboles 'β' et 'β'' par '$\mathfrak{a}$' et '$\mathfrak{b}$'. Ce geste nous offre l'occasion d'une mise au point aussi délicate qu'importante. Le dévoilement du processus de composition a tracé des frontières entre trois différents groupes de lettres [51] :

1. Lettres du premier groupe : les étiquettes des noms atomiques.
2. Lettres du deuxième groupe : les lettres pour marquer les places *non vacantes*.
3. Lettres du troisième groupe : les lettres pour marquer les places *vacantes*.

Bien sûr, chaque groupe comprend des lettres pour chaque niveau. Dans nos exemples [52], 'Δ' et 'Φ' appartiennent au premier groupe. La première lettre correspond au niveau des objets, et la seconde au premier niveau. 'β' et 'ψ' appartiennent au second groupe. La première lettre

51. Nous conserverons cette division en groupes de lettres dans la suite de notre texte.

52. Répétons que les lettres que nous avons choisies pour étiquettes ne sont *pas* des étiquettes de noms de fonctions de l'idéographie. Il ne fallait surtout pas, pour expliquer le processus *général* de composition, nous limiter à ces derniers.

correspond au niveau des objets, et la seconde au premier niveau. 'ξ' et 'φ' appartiennent au troisième groupe. La première lettre correspond au niveau des objets, et la seconde au premier niveau.

Les symboles de chaque groupe, lorsqu'ils sont attachés à un niveau supérieur ou égal à 1, sont suivis de parenthèses qui délimitent leurs portées. Lorsqu'ils sont attachés à un niveau supérieur ou égal à 2, ils sont indexés par une lettre qui leur est liée et figure dans leur portée. Nous avons expliqué en détail le rôle de ces lettres, de leurs portées et de leurs indices. Un processus d'induction s'y dessine en filigrane, que nous allons rendre dans sa pleine généralité.

Frege conçut son symbolisme afin de gérer le double rôle des fonctions : saturer et être saturées. Voilà qui exigea le procédé d'imbrication que nous avons décrit. Un nom de fonction de second niveau tient compte du fait que le nom qui le complète incorpore des places libres associées au niveau 0. Le processus se prolonge (et se complexifie) au cours de l'escalade. Cette seule raison l'a conduit à affirmer que certaines lettres *indiquent* des fonctions de premier niveau à un argument, d'autres des fonctions de second niveau à deux arguments, d'autres des objets, etc. Chaque lettre, *à travers sa fonction syntaxique*, est attachée à un *type* particulier. Mais la lettre 'β' ne désigne en aucune façon la partie du sens de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' qui viendrait s'incruster dans le creux du sens de '$\Phi'(\xi)$' destiné à recevoir un sens propre. Par ailleurs, *les lettres des deuxième et troisième groupes ne sont pas des variables.* Le nom '$\Omega_\beta(\Phi'(\beta))$' réfère à la valeur de $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ en l'argument $\Phi'(\xi)$. 'β' n'est pas appelé à varier entre – à se voir assigner – tel et tel noms d'objets. La variation était justement le problème qui gangrenait la *Begriffsschrift*, lorsqu'un contenu déterminé se voyait constitué d'une partie indéterminée. Frege parvint à s'en débarrasser en chassant des noms de l'idéographie toute notion de contenu indéterminé, variable ou – comme nous le dirions aujourd'hui – en attente d'une assignation. 'β' ne possède ni n'attend aucun contenu, il est l'instrument syntaxique par lequel nous pouvons manifester les opérations entre fonctions (et les compositions entre sens). '$\Omega_\beta(\Phi'(\beta))$' réfère à la valeur obtenue en appliquant $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ à $\Phi'(\xi)$. Chaque nom est tenu de posséder une référence fixe, déterminée. Deux noms qui se combinent doivent référer à des entités dont l'une peut opérer sur l'autre. De cette opération doit résulter un objet, tout aussi déterminé. L'appareil linguistique des noms a été développé *dans le but* d'écarter toute idée d'indétermination des constituants de ces noms. Ainsi les lettres de cet appareil ne sont pas sujettes à variation [53].

Nos trois groupes épuisent, à l'exception de la virgule et des parenthèses, les symboles constitutifs des noms d'objets et de fonctions. Il faut donc expliquer le statut des lettres '$\mathfrak{a}$', '$\mathfrak{f}$', 'ε' (et assimilées) dont Frege fait usage. La réponse est simple : elles appartiennent au deuxième groupe. Le choix des lettres '$\mathfrak{a}$' et '$\mathfrak{b}$' inspire à nos yeux contemporains l'idée de variables liées. Cette interprétation est incorrecte. Selon Frege, la fonction de second niveau $\mathfrak{a}\varphi(\mathfrak{a})$ attend la donnée d'une fonction de premier niveau à un argument, sans qu'aucune variation ne soit attachée à '$\mathfrak{a}$'. Les opérations entre fonctions n'impliquent rien de tel. Citons l'explication de Linnebo, qui nous semble éclairante :

> Les quantificateurs doivent aussi être conçus comme des fonctions : le quantificateur de premier ordre comme une fonction de second niveau qui envoie des fonctions de premier niveau sur les valeurs de vérité, et le quantificateur de second ordre comme la fonction de troisième niveau correspondante. (Au contraire, la plupart des présentations contemporaines conçoivent les quantificateurs comme des opérateurs qui

53. Nous creuserons ce problème dans le troisième chapitre (en section 3.3.8). Nous verrons alors resurgir *autrement* l'idée d'assignations. Ici, nous ne disons pas que la sémantique fregéenne fait entièrement l'économie de tout processus de cet ordre. Nous disons seulement qu'un tel processus ne touche pas directement les constituants d'un nom. Ces derniers ne subissent aucune suspension sémantique, et sont tous parfaitement déterminés.

> autorisent la formation de nouvelles formules bien formées à partir de celles qui ont été préalablement construites, et auxquelles sont associées des règles sémantiques qui stipulent les conditions sous lesquelles ces formules sont vraies). (Linnebo 2004, p. 75)

Les règles sémantiques stipulent à quelles conditions une assignation valide une formule, relativement aux valeurs prises par les *variables*. La valeur de la formule quantifiée dépend de celles que les différentes assignations confèrent à la formule non quantifiée ; la ou les variables en jeu parcourent ainsi tous les objets du domaine. Cette étape n'existe pas sous cette forme [54] dans le cadre fregéen. La donnée des deux fonctions est suffisante pour déterminer l'objet qui résulte de la saturation de l'une par l'autre.

Dans les *Grundgesetze*, la graphie des noms arbitraires – dont nous discuterons bientôt le rôle – respecte à la lettre le modèle que nous avons longuement présenté. Concernant les noms primitifs, Frege choisit de modifier légèrement ses conventions. Il ne s'agit que de transformations inessentielles destinées à améliorer la lisibilité des formules, et qui n'altèrent en rien le processus de composition que nous avons décrit. Pour le comprendre, il suffit de constater que ces noms s'adaptent sans difficulté au schéma général. Le tableau ci-dessous contient, pour chaque nom, son type, son écriture dans les *Grundgesetze*, et une traduction qui uniformise les symboles utilisés [55] :

Type	Nom initial	Nom modifié
(0)	‘$\text{—}\,\xi$’	‘$\text{—}\,(\xi)$’
(0)	‘$\vdash\xi$’	‘$\neg(\xi)$’
(0,0)	‘$\begin{array}{l}\text{—}\,\zeta\\ \text{└}\,\xi\end{array}$’	‘$\rightarrow(\xi,\zeta)$’
(0,0)	‘$\xi=\zeta$’	‘$=(\xi,\zeta)$’
((0))	‘$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$’	‘$\forall_{\beta}^{((0))}(\varphi(\beta))$’
((0))	‘$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$’	‘$\jmath_{\beta}(\varphi(\beta))$’
(((0)))	‘$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$’	‘$\forall_{\psi}^{(((0)))}(\mu_{\xi}(\psi(\xi)))$’
(((0,0)))	‘$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_{\beta,\gamma}(\mathfrak{f}(\beta\gamma))$’	‘$\forall_{\psi}^{(((0,0)))}(\mu_{\xi,\zeta}(\psi(\xi,\zeta)))$’

Les versions modifiées aident à identifier le rôle de chaque nom au sein de l'appareil linguistique de combinaison (et à chasser toute tentation d'anachronisme). En revanche, elles nuisent considérablement à la lisibilité des énoncés. Par exemple, une équation se lit plus facilement si les noms des arguments sont situés *autour* du signe ‘=’. Pour illustrer ce point, proposons les deux versions suivantes du même terme [56] :

$$\text{‘}\forall_{\beta}^{((0))}(\neg(=(\beta,\jmath_{\beta'}(\beta=\beta'))))\text{’}\qquad\text{et}\qquad\text{‘}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}_{\vdash}\,\mathfrak{a}=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{a}=\varepsilon)\text{’}$$

D'autre part, il est parfois judicieux d'utiliser des lettres différentes du deuxième groupe pour des fonctions différentes, bien que ces lettres possèdent exactement le même statut, à l'instar de

54. Nous verrons plus tard (section 3.3.8) le visage qu'elle prend chez Frege.

55. Dans l'élan, nous corrigeons l'erreur dénoncée plus haut concernant les indices des lettres qui marquent des places vides. Par ailleurs, un problème (sans gravité) provient de la présence du trait horizontal au sein des signes pour le conditionnel, la négation et la quantification. Nous le règlerons en section 2.5.1.

56. Pour l'anecdote : cet énoncé exprime qu'aucun objet n'est égal à son singleton. Nous verrons que, à travers sa définition du Vrai et du Faux, Frege le tient pour faux.

'$\mathfrak{a}$' et 'ε'. Grâce à ce procédé, le lecteur comprend immédiatement, lorsqu'il rencontre une lettre gothique ou une voyelle grecque, que (respectivement) une quantification ou un parcours-de-valeurs est en jeu.

Frege avait donc d'excellentes raisons de recourir à ces conventions, qui ne dressent aucun obstacle sur notre route. Maintenant que nous savons sous quel angle ces noms doivent être lus, nous pouvons simplement leur adapter le processus général de combinaison. Voici, par exemple, les étapes de saturation de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' par '$\xi = \xi$' :

(1) $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})[\xi = \xi]$

(2) $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi[\xi = \xi]\Big(\mathfrak{a}\Big)$

(3) $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\xi[\mathfrak{a}] = \xi[\mathfrak{a}]$

(4) $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

Gravissons quelques étages, et envisageons un nom similaire pour la quantification de *troisième ordre* : '$\overset{\mathfrak{M}}{\smile}\sigma_\varphi(\mathfrak{M}_\beta(\varphi(\beta)))$'. Voici comment le saturer par l'expression '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' :

(1) $\overset{\mathfrak{M}}{\smile}\sigma_\varphi(\mathfrak{M}_\beta(\varphi(\beta)))[\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_\xi(\mathfrak{f}(\xi))]$

(2) $\overset{\mathfrak{M}}{\smile}\sigma_\varphi[\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_\xi(\mathfrak{f}(\xi))]\Big(\mathfrak{M}_\beta(\varphi(\beta))\Big)$

(3) $\overset{\mathfrak{M}}{\smile}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_\xi[\mathfrak{M}_\beta(\varphi(\beta))]\Big(\mathfrak{f}(\xi)\Big)$

(4) $\overset{\mathfrak{M}}{\smile}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mathfrak{M}_\beta(\varphi[\mathfrak{f}(\xi)]\Big(\beta\Big))$

(5) $\overset{\mathfrak{M}}{\smile}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mathfrak{M}_\beta(\mathfrak{f}(\xi[\beta]))$

(6) $\overset{\mathfrak{M}}{\smile}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mathfrak{M}_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$

Le processus que nous avons développé est exactement celui de la saturation des noms de l'idéographie.

Dans cette section, nous avons mis à jour le rôle joué par les trois groupes de lettres dans la mécanique d'imbrication des noms. Nos exemples sont restés suffisamment simples pour être éclairants : nous nous sommes cantonnés aux noms de type $((\ldots((0))\ldots))$ [57]. Les étapes de saturation dévoilées plus haut se généralisent sans (trop de) difficultés aux autres types. En revanche, nous n'avons pas encore scruté l'opération de *désaturation*. C'est pourtant là que se tient le nœud de toute l'affaire. La désaturation est à l'origine de la production des noms *complexes* de fonctions. Or ces derniers constituent la justification de tout l'appareil linguistique. Nous avons convenu, avec Landini, qu'un dispositif limité aux noms simples supportait parfaitement une méthode (post)-russellienne. Nos routes se sont séparées à cet embranchement. Landini ne rejette pas notre appareil de production des noms, il conteste l'idée que celui-ci soit nécessaire à la formation des termes de l'idéographie. Selon lui, les noms *complexes* de fonctions ne sont pas impliqués dans la morphologie du langage. Nous défendons la thèse adverse, selon laquelle ils constituent un véritable mur porteur pour tout l'édifice. Les processus généraux de saturation et désaturation sont aussi complexes l'un que l'autre, *mais ils sont tous deux nécessaires à la*

57. à l'exception de $\Phi(\xi, \zeta)$, de type (0,0).

production des termes de l'idéographie. Avant de présenter nos arguments, et d'invoquer la sémantique[58], il convient de reproduire pour la désaturation ce qui a été établi pour la saturation, dernière pièce manquante pour établir une définition formelle et générale de la mécanique de composition des noms.

2.3.2.6 La mécanique de désaturation

La mécanique de saturation décrite ci-dessus est incapable de produire à elle seule la totalité des noms recherchés. '$\Omega_\beta(\Phi(\beta,\beta))$', par exemple, échappe à son emprise, car il provient de la complétion de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' par '$\Phi(\xi,\xi)$', lequel ne fait pas partie des noms atomiques. Pour l'obtenir, il est nécessaire de *désaturer* '$\Phi(\Delta,\Delta)$' – construit par saturation de noms primitifs – de 'Δ'. La désaturation est donc essentielle à la formation des noms d'objets[59]. Il est nécessaire de procéder à un va-et-vient *infini* entre saturations et désaturations. Observons à présent la construction du nom '$\Omega_{\beta_2}(\Omega_{\beta_1}(\Phi(\beta_1,\beta_2)))$' :

(1) Saturation de '$\Phi(\xi,\zeta)$' par deux noms d'objets 'Δ' et 'Γ' : '$\Phi(\Delta,\Gamma)$'
(2) Désaturation de '$\Phi(\Delta,\Gamma)$' de 'Δ' : '$\Phi(\xi,\Gamma)$'
(3) Saturation de '$\Omega_{\beta_1}(\varphi(\beta_1))$' par '$\Phi(\xi,\Gamma)$' : '$\Omega_{\beta_1}(\Phi(\beta_1,\Gamma))$'
(4) Désaturation de '$\Omega_{\beta_1}(\Phi(\beta_1,\Gamma))$' de '$\Gamma$' : '$\Omega_{\beta_1}(\Phi(\beta_1,\xi))$'
(5) Saturation de '$\Omega_{\beta_2}(\varphi(\beta_2))$' par '$\Omega_{\beta_1}(\Phi(\beta_1,\xi))$' : '$\Omega_{\beta_2}(\Omega_{\beta_1}(\Phi(\beta_1,\beta_2)))$'

Deux étapes *non successives* de désaturation sont impliquées. Elles sont séparées par une étape de saturation qui exploite un nom obtenu grâce à une précédente désaturation. On peut prolonger l'examen du processus à travers l'élaboration de : '$\Omega_{\beta_3}(\Omega_{\beta_2}(\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\beta_2),\beta_3))))$'.

(1) Saturation de '$\Phi(\xi,\zeta)$' par deux noms d'objets 'Δ' et 'Γ' : '$\Phi(\Delta,\Gamma)$'
(2) Saturation de '$\Phi(\xi,\zeta)$' par deux noms d'objets '$\Phi(\Delta,\Gamma)$' et 'Λ' : '$\Phi(\Phi(\Delta,\Gamma),\Lambda)$'
(3) Désaturation de '$\Phi(\Phi(\Delta,\Gamma),\Lambda)$' de '$\Delta$' : '$\Phi(\Phi(\xi,\Gamma),\Lambda)$'
(4) Saturation de '$\Omega_{\beta_1}(\varphi(\beta_1))$' par '$\Phi(\Phi(\xi,\Gamma),\Lambda)$' : '$\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\Gamma),\Lambda))$'
(5) Désaturation de '$\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\Gamma),\Lambda))$' de '$\Gamma$' : '$\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\xi),\Lambda))$'
(6) Saturation de '$\Omega_{\beta_2}(\varphi(\beta_2))$' par '$\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\xi),\Lambda))$' : '$\Omega_{\beta_2}(\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\beta_2),\Lambda)))$'
(7) Désaturation de '$\Omega_{\beta_2}(\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\beta_2),\Lambda)))$' de '$\Lambda$' : '$\Omega_{\beta_2}(\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\beta_2),\xi)))$'
(8) Saturation de '$\Omega_{\beta_3}(\varphi(\beta_3))$' par '$\Omega_{\beta_2}(\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\beta_2),\xi)))$' : '$\Omega_{\beta_3}(\Omega_{\beta_2}(\Omega_{\beta_1}(\Phi(\Phi(\beta_1,\beta_2),\beta_3))))$'

Ici encore, les étapes de désaturation ne sont pas consécutives. Chaque saturation qui les sépare utilise un nom qui a été lui-même formé par désaturation. On pourrait reproduire le processus à l'infini, en multipliant le nombre de 'Ω' dans l'expression finale. Ainsi, il n'est pas suffisant de procéder à toutes les saturations possibles entre noms atomiques, puis à toutes les désaturations possibles sur les noms ainsi obtenus, puis à toutes les saturations possibles sur ces nouveaux noms, et de s'en tenir là. Pour former la *totalité* des noms d'objets, ces étapes doivent être répétées $\aleph_0$ fois :

58. Pour l'instant, nous n'avons pas discuté cet aspect. Nous apprenons comment construire un nom complexe à partir de noms simples, mais nous ne savons pas comment déterminer la référence du premier en fonction de celles des seconds. L'objectif est pourtant localisé à ce point précis, car Frege voulait manifester par la syntaxe des évènements *sémantiques*. Cela, il le discuta dans les célèbres §§29-31, auxquels nous nous intéresserons bientôt.

59. Attention ! Nous proposons ici une mécanique de formation des noms d'objets qui n'implique pas les lettres latines. C'est dans ce cadre que la désaturation est nécessaire. Peut-être existe-t-il un moyen de les construire, sans faire ce détour, en sollicitant les lettres latines. Pour l'instant, nous élaborons un processus général qui fait l'économie de ces dernières. Dans un second temps, nous expliquerons *pourquoi* ce processus doit servir de point de départ à l'étude des positions sémantiques de Frege, contrairement à tout autre qui impliquerait des lettres latines, et contrairement à ce que soutient Landini.

1. On multiplie les noms d'objets à travers les saturations possibles entre noms primitifs. On réunit avec ces derniers tous les noms ainsi obtenus dans un ensemble.

1'. On multiplie les noms de fonctions à travers les désaturations possibles des noms de notre dernier ensemble. On réunit avec ces derniers tous les noms ainsi obtenus dans un ensemble.

2. On multiplie les noms d'objets à travers les saturations possibles entre noms de notre dernier ensemble. On réunit avec ces derniers tous les noms ainsi obtenus dans un ensemble.

2'. On multiplie les noms de fonctions à travers les désaturations possibles des noms de notre dernier ensemble. On réunit avec ces derniers tous les noms ainsi obtenus dans un ensemble.

3. On multiplie les noms d'objets à travers les saturations possibles entre noms de notre dernier ensemble. On réunit avec ces derniers tous les noms ainsi obtenus dans un ensemble.

3'. On multiplie les noms de fonctions à travers les désaturations possibles des noms de notre dernier ensemble. On réunit avec ces derniers tous les noms ainsi obtenus dans un ensemble.

4. Etc.

Voilà la récurrence par laquelle nous pourrons récupérer la totalité des noms du langage. Notons que les phases de saturations exigent elles-aussi une définition par ω-induction. Une fois que des noms d'objets ont été construits par saturation, ils peuvent à leur tour venir compléter des noms de fonctions. L'édifice total repose donc sur une $\omega \times \omega$-induction.

En outre, l'intérêt de la désaturation ne se limite pas au premier niveau. Considérons l'élaboration du nom '$\Sigma_\psi(\psi(\Phi'(\Delta)))$' :

1. Saturation de '$\Phi'(\xi)$' par 'Δ' : '$\Phi'(\Delta)$'
2. Saturation de '$\Phi'(\xi)$' par '$\Phi'(\Delta)$' : '$\Phi'(\Phi'(\Delta))$'
3. Désaturation de '$\Phi'(\Phi'(\Delta))$' de la première occurrence de '$\Phi'(\xi)$' : '$\varphi(\Phi'(\Delta))$'
4. Saturation de '$\Sigma_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))$' par '$\varphi(\Phi'(\Delta))$' : '$\Sigma_\psi(\psi(\Phi'(\Delta)))$'.

Aucun nom simple de fonction de type ((0)) ne peut venir saturer '$\Sigma_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))$' pour former '$\Sigma_\psi(\psi(\Phi'(\Delta)))$'. Il est indispensable de solliciter un nom complexe, produit par désaturation d'un nom de type (0) à l'intérieur d'un nom d'objet.

La mécanique de désaturation est donc logée au cœur de la construction morphologique. Sa définition rigoureuse constitue néanmoins un obstacle de taille. Le retranchement d'un nom d'objet à un autre n'induit aucune complication syntaxique, il suffit de remplacer le nom en question par la lettre 'ξ'. En revanche, nous ne savons pas en quoi consiste exactement le retranchement d'un nom de *fonction*. Ci-dessus, nous nous sommes permis de remplacer l'étiquette d'une fonction par une lettre marquant une place vacante du même type. Nous n'avons ni expliqué ni justifié ce geste. Frege lui-même ne fournit que peu de détails :

> Si nous retranchons d'un nom propre quelques ou toutes les occurrences d'un autre nom propre qui en est partie ou coïncide avec, mais de telle manière que ces places soient marquées comme saturables par un quelconque nom propre [...], alors j'appelle ce que nous obtenons de cette manière un *nom* de premier niveau à un argument.
> [...]
> Si nous retranchons d'un nom propres quelques ou toutes les occurrences d'un nom de fonction de premier niveau qui en est partie, mais de telle manière que ces places soient marquées comme saturables par un quelconque nom de fonction de premier niveau [...], alors j'appelle ce que nous obtenons de cette manière un *nom* de second niveau à un argument. (Frege 1893, pp. 43-44)

Voilà précisément les imprécisions qui engendrèrent tant de confusions concernant la morphologie de l'idéographie. D'une part, nous l'avons dit, Frege suggère ici que les noms de fonctions sont construits *après* les noms d'objets, *i.e.* que les derniers sont définissables sans le concours des premiers. Il ne fournit pourtant jamais leurs clauses de formation, et ses exemples vont à contre-courant de cette idée [60]. D'autre part, il n'explique pas dans quel contexte un nom de fonction de premier niveau est *partie* d'un nom d'objet. Et pour cause : toute définition exploite la mécanique de saturation qu'il n'a jamais mise à jour rigoureusement. Une expression résulte du retranchement d'un nom de premier niveau à partir d'un nom d'objet si la saturation de cette expression par le premier nom forme le second [61]. Pour éviter toute circularité, cette stratégie exige donc une définition *générale* de la saturation, qui ne s'applique pas exclusivement aux noms de fonctions, mais à toutes les expressions quelconques du langage [62]. En effet, une expression est un nom complexe de fonction de second niveau si un nom propre résulte de sa saturation par un nom de fonction de premier niveau. Il est donc indispensable de caractériser le processus de saturation à travers des clauses qui peuvent être appliquées à – ou tester pour – toutes les expressions. Dans un second temps, il faudra montrer que tout nom de fonction de second niveau (ainsi défini) est propre à saturer un nom de fonction de troisième niveau, ce que rien n'assure a priori. Voici donc la mécanique, imparfaitement décrite dans les *Grundgesetze*, qu'il nous appartient d'exposer dans sa pleine généralité. Nous nous y attèlerons dans un instant, après une dernière remarque capitale.

Un des défauts du processus de saturation tient à ce qu'il dissimule, sous sa complexité, les noms qu'il permet de générer. Un simple coup d'œil aux règles grammaticales d'un langage contemporain octroie généralement une vue assez claire des termes en jeu. Au contraire, nous sommes ici bien loin de deviner à l'avance ce à quoi notre opération va nous mener. Il existe néanmoins une manière de dissiper le brouillard qui règne. Considérons l'expression suivante :

$$\text{‘}\Phi'(\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\psi(\beta))))))\text{’}$$

Il s'agit d'un nom propre, et il suffit de quelques mouvements pour s'en rendre compte. Nous allons *décrocher* une à une les étiquettes qui y figurent :

1. Cette expression est le résultat de la saturation de ‘$\Phi'(\xi)$’ par ‘$\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\psi(\beta)))))$’. Il suffit donc de prouver que cette dernière expression est un nom propre pour aboutir au résultat.
2. Celle-ci résulte de la saturation de ‘$\Sigma_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))$’ par ‘$\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\varphi(\beta))))$’ [63]. Il suffit donc de prouver que cette dernière expression est un nom de fonction de second niveau pour aboutir au résultat.

60. notamment dans le §30, nous le verrons.

61. Notons que l'étape 3. ci-dessus respecte ce réquisit. ‘$\Phi'(\Phi'(\Delta))$’ résulte de la saturation de ‘$\varphi(\Phi'(\Delta))$’ par ‘$\Phi'(\xi)$’ :

(1) $\varphi(\Phi'(\Delta))[\Phi'(\xi)]$

(2) $\varphi[\Phi'(\xi)]\Big(\Phi'(\Delta)\Big)$

(3) $\Phi'(\xi[\Phi'(\Delta)])$

(4) $\Phi'(\Phi'(\Delta))$

62. ou, au moins, une procédure qui peut être testée sur toutes les expressions du langage.

63. Le lecteur peut, s'il le souhaite, vérifier le résultat de cette saturation (et des suivantes) à travers la mécanique développée dans la dernière section.

3. Si la saturation d'une expression par un nom de fonction de premier niveau forme un nom d'objet, alors cette expression est un nom de fonction de second niveau. Or la saturation de '$\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\varphi(\beta))))$' par le nom *atomique* '$\Phi'(\xi)$' forme l'expression '$\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\Phi'(\beta))))$'. Il suffit donc de prouver que cette dernière expression est un nom propre pour aboutir au résultat.
4. Celle-ci résulte de la saturation de '$\Phi'(\xi)$' par '$\Omega_\beta(\Phi'(\Phi'(\beta)))$'. Il suffit donc de prouver que cette dernière expression est un nom propre pour aboutir au résultat.
5. Celle-ci résulte de la saturation de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' par '$\Phi'(\Phi'(\xi))$'. Il suffit donc de prouver que cette dernière expression est un nom de fonction de premier niveau pour aboutir au résultat.
6. La saturation de '$\Phi'(\Phi'(\xi))$' par le nom *atomique* 'Δ' forme l'expression '$\Phi'(\Phi'(\Delta))$'. Il suffit donc de prouver que cette dernière expression est un nom propre pour aboutir au résultat.
7. Celle-ci résulte de la saturation de '$\Phi'(\xi)$' par '$\Phi'(\Delta)$'. Il suffit donc de prouver que cette dernière expression est un nom propre pour aboutir au résultat.
8. Celle-ci résulte de la saturation de '$\Phi'(\xi)$' par 'Δ'. Nous tenons notre résultat.

Notons que les deux étapes qui se rapportent aux désaturations – les 3. et 6. – se limitent à des désaturations de noms *atomiques* de fonctions à l'intérieur de noms propres. À présent, synthétisons les opérations syntaxiques effectuées sans plus nous arrêter sur les noms de fonctions :

1. '$\Phi'(\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\psi(\beta))))))$' est un nom propre si '$\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\psi(\beta)))))$' est un nom propre.
2. '$\Sigma_\psi(\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\psi(\beta)))))$' est un nom propre si '$\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\Phi'(\beta))))$' est un nom propre.
3. '$\Phi'(\Omega_\beta(\Phi'(\Phi'(\beta))))$' est un nom propre si '$\Omega_\beta(\Phi'(\Phi'(\beta)))$' est un nom propre.
4. '$\Omega_\beta(\Phi'(\Phi'(\beta)))$' est un nom propre si '$\Phi'(\Phi'(\Delta))$' est un nom propre.
5. '$\Phi'(\Phi'(\Delta))$' est un nom propre si '$\Phi'(\Delta)$' est un nom propre.
6. '$\Phi'(\Delta)$' est un nom propre si 'Δ' est un nom propre.

Nous avons bien décroché une à une les étiquettes figurant dans le nom initial, en partant de la première. Lorsqu'une étiquette de niveau supérieur ou égal à deux fut impliquée, nous avons remplacé la lettre qu'elle portait en indice par une étiquette de même type, en l'occurrence 'ψ' par 'Φ'' (en 2.) et 'β' par 'Δ' (en 4.). Ces observations nous suggèrent des règles de formation des noms propres relativement simples. Nous nous limitons pour l'instant aux types $(\ldots(0)\ldots)$, afin de simplifier nos explications :

- Un nom d'objet atomique est un nom propre [64].
- Si t est un nom propre et X l'étiquette d'un nom atomique de fonction de niveau 1, alors $\ulcorner X(t) \urcorner$ est un nom propre.
- Si t est un nom propre qui intègre un nom d'objet atomique X, et X' l'étiquette d'un nom atomique de fonction de niveau 2, alors $\ulcorner X'_\beta(t[\beta/X]) \urcorner$ est un nom propre.
- Si t est un nom propre qui intègre l'étiquette X d'un nom de fonction de niveau n, et l'étiquette X' d'un nom atomique de fonction de niveau $n+2$, alors $\ulcorner X'_{\psi^n}(t[\psi^n/X]) \urcorner$ [65] est un nom propre.

64. Nous écrivons cette clause pour mettre en relief l'étape d'initialisation de la récurrence. Notons néanmoins qu'elle est inutile, les noms d'objets atomiques étant *par définition* des noms propres.

65. Nous avons précédemment employé 'ρ' pour marquer la place non vacante d'un argument de niveau 2. Nous n'avons dédié aucune lettre pour les niveaux supérieurs. Il nous faut ici prendre en considération la totalité des niveaux. La solution la plus simple consiste à utiliser la même lettre – en l'occurrence 'ψ'–, et à indiquer son niveau en exposant.

Ces clauses se généralisent facilement aux autres types. De plus, *si nous supposons que le langage dispose d'un nom atomique de chaque type*, elles permettent bel et bien d'en circonscrire l'ensemble des noms propres. Nous pouvons nous dispenser de cette condition, et éviter d'impliquer des remplacements, en sollicitant la notion de marqueur :

- Les étiquettes et les lettres du second groupe de niveau 0 sont des marqueurs.
- Si t est un marqueur et X une étiquette de premier niveau, alors $\ulcorner X(t) \urcorner$ et $\ulcorner \psi^1(t) \urcorner$ sont des marqueurs.
- Si t est un marqueur dans lequel figure une occurrence libre et aucune occurrence liée du signe 'β', et X une étiquette de second niveau, alors $\ulcorner X_\beta(t) \urcorner$ et $\ulcorner \psi^2_\beta(t) \urcorner$ sont des marqueurs.
- Si t est un marqueur dans lequel figure une occurrence libre et aucune occurrence liée du signe 'ψ^n_i', et X une lettre de niveau $n+2$, alors $\ulcorner X_{\psi^n_i}(t) \urcorner$ et $\ulcorner \psi^{n+2}_{\psi^n_i}(t) \urcorner$ sont des marqueurs.

Cette méthode permet de construire les noms à travers de simples concaténations d'expressions, à l'image de nos langages des prédicats modernes. Voici par exemple les étapes qui aboutissent à la formation de '$\Sigma_{\psi^1}(\psi^1(\Delta))$' :

(1) 'Δ' est un marqueur ;

(2) donc '$\psi^1(\Delta)$' est un marqueur ;

(3) il y figure une occurrence libre et aucune occurrence liée de la lettre 'ψ^1', donc '$\Sigma_{\psi^1}(\psi^1(\Delta))$' est un marqueur.

Au cours de cette construction, nous avons utilisé un marqueur – '$\psi^1(\Delta)$' – extérieur à l'ensemble des noms propres. Nous constatons ainsi que tous les marqueurs ne sont pas des noms propres, et qu'il faut isoler les derniers parmi les premiers. La clause suivante aboutit à ce résultat :

- Tout marqueur dans lequel ne figure aucune occurrence libre d'une lettre du second groupe est un nom propre.

Le lien qui unit les marqueurs aux noms propres n'est pas sans rappeler celui qui intervient entre les formules et les énoncés des langages des prédicats. La stratégie ci-dessus permet de définir les noms propres sans solliciter les noms de fonctions, ni les lettres pour les espaces vacants qu'ils incorporent. Autrement dit, les clauses de Frege – qui procèdent *via* la mécanique de saturation – sont *équivalentes* à celles-ci – qui s'en dispensent, et gagnent considérablement en simplicité. Pourtant Frege a choisi de fournir – ou plutôt de suggérer – les premières, car il voulait dévoiler la *sémantique* destinée à sa langue. Les règles ci-dessus se contentent de manipuler des expressions sans nous guider dans la manière de les comprendre. Au contraire, la méthode de Frege manipule des noms de fonctions et des noms propres, censés *référer* à des fonctions et des objets. Dans les langages de prédicats, la valeur de vérité d'une formule dépend de la valeur que l'assignation octroie aux variables libres. C'est ainsi que les étapes de construction des formules closes – des énoncés – qui passent par des formules ouvertes trouvent leurs pendants sémantiques. Mais les lettres du second groupe ne sont pas des variables, et Frege ne sollicite rien de tel qu'un processus d'assignation dans la détermination de la référence des noms complexes. Les étapes de formation d'un tel nom, pour refléter les étapes de détermination de sa référence, ne peuvent donc pas impliquer d'expressions extérieures à l'ensemble des noms. Le rejet des contenus indéterminés, aux alentours de 1881, exigea l'édification de l'appareil pour les espaces vacants afin que la structure d'un nom, *c'est-à-dire les étapes de sa construction*, révèlent celles de la détermination de sa référence.

Nous donnerons les détails de ce problème en section 2.3.4, lorsque nous contesterons la décision de Landini d'adopter la méthode par marqueurs pour analyser et discuter la sémantique fregéenne. Pour l'heure, nous allons nous limiter à la syntaxe, et proposer les deux alternatives. La première – la méthode par marqueurs – nous livrera une intuition claire de ce que sont les noms du langage [66]. La seconde – la méthode par saturation – sera centrale lors de l'élaboration de la sémantique. Bien sûr, il nous faudra *démontrer* que les deux chemins conduisent au même point.

Par ailleurs, nous allons très légèrement nous écarter de la stratégie esquissée par Frege. Celui-ci autorisait la désaturation de *n'importe quel* nom de fonction ou d'objet à l'intérieur d'un nom propre. Nous allons pour notre part limiter le processus aux noms *atomiques*. Cette nuance n'a heureusement qu'une incidence superficielle. Les deux tactiques sont équivalentes, si tant est qu'il existe au moins un nom de chaque type dans le langage. Ce n'est certes pas le cas de l'idéographie, qui ne dispose d'aucun nom de fonction de niveau strictement supérieur à trois. Cependant, Frege n'avait pas même besoin de hisser le processus de saturations et de désaturations au-delà du niveau deux pour construire la totalité de ses termes. Seuls des noms complexes de niveau un et deux lui étaient nécessaires. Notre objectif consiste à exposer la mécanique dans toute sa généralité. Une fois cette tâche accomplie, nous pourrons trivialement restreindre nos clauses pour limiter l'élaboration des noms complexes au niveau deux. Ainsi, nous ne sommes pas gênés par l'absence de noms atomiques de niveaux supérieurs à trois dans l'idéographie, car la mécanique n'y excède pas le niveau deux. Néanmoins, si nous ne voulons pas perdre en généralité, nous sommes tenus de prendre en compte des langages dénués de noms d'un certain niveau, et pour lesquels le processus s'applique à *tout* niveau. D'ailleurs, si l'idéographie dispose de noms propres atomiques – par exemple '0' –, Frege ne les a pas pris en compte dans la description de sa morphologie. Il avait une bonne raison de s'abstenir : les règles syntaxiques manifestent des phénomènes ayant cours dans la sphère ontologique. Autrement dit, un nom propre provenant d'une saturation et un nom de fonction d'une désaturation doivent posséder une référence fixe et unique. Les références des noms complexes doivent être *déterminées* en fonction de celles des noms simples. Or les noms simples de l'idéographie sont eux-même *définis* à partir des noms *primitifs* de fonctions. Ils ne peuvent donc contribuer au calcul de la référence des noms complexes, dont ils font partie *du point de vue sémantique*. Notre problème se pose donc aussi dans le cas de l'idéographie. Tentons de le formuler indépendamment de celle-ci. Pour utiliser notre méthode par saturation, il importe que le langage dispose d'un nom de chaque niveau. Le versant syntaxique se règle facilement. Rien n'interdit d'étendre artificiellement le langage pour le soumettre à notre exigence – y ajouter des noms simples aux niveaux manquants – puis, à l'issue de la définition inductive, de remplacer tout nom extérieur au langage d'origine par un nom complexe du même type dans tous les noms dans lesquels il figure [67]. Nous aurons certes emprunté un détour, mais parviendrons exactement au même endroit. La difficulté est en fin de compte sémantique. Ces noms extérieurs auront contribué à la construction de certains noms complexes intérieurs au langage. Leurs références seront donc impliquées dans la détermination de celles de noms complexes. Il est donc *essentiel* de leur attribuer une référence, *quelle qu'elle soit*. De plus, il est crucial que cette référence puisse être déterminée à travers celles des seuls noms

66. Elle s'adapte aussi à la construction des noms de fonctions, et nous l'utiliserons pour aiguiser notre intuition concernant ces derniers. Cela ne change rien à ce que nous venons d'expliquer. Cette stratégie permet de construire les noms de chaque type à travers de simples concaténations d'expressions, *sans impliquer la saturation*. C'est ce qui la rend inadaptée à l'examen du problème de la sémantique. Qu'elle permette la formation des noms de fonctions ne corrige aucunement le tir, car ces noms sont aussi construits à travers des expressions dénuées de références.

67. Nous expliquerons rigoureusement en quoi consiste le remplacement d'un nom simple par un nom complexe de fonction.

atomiques du langage initial. Voilà donc ce qu'il nous faudra montrer lors de notre investigation sur la sémantique : *quel que soit le langage pris en compte*[68], il est possible de déterminer une fonction de chaque type à partir des références des noms simples du langage. Muni de ce résultat, nous saurons que, concernant à la fois l'édifice syntaxique et l'élaboration de sa sémantique, il n'est pas gênant de supposer que le langage possède un nom pour chaque type.

Nous allons anticiper ce résultat, en ne considérant que des langages de cette sorte. Ayant trait aux questions de sémantiques, il ne sera établi qu'au chapitre trois. En revanche, dans la prochaine section, il nous incombera de régler la dimension syntaxique du problème, *i.e.* de prouver que, si le langage possède un nom atomique de chaque type, les *trois* stratégies sont équivalentes : les méthodes par saturation, avec la nuance fregéenne et la nôtre, et la méthode par marqueurs. La (légère) liberté que nous prenons vis-à-vis des *Grundgesetze* est motivée par le travail qui nous attend concernant la sémantique du langage. Il nous faudra procéder à une démonstration que cette nuance – totalement bénigne – simplifiera grandement. Et nous souhaitons, sur les montagnes arides des niveaux de fonctions, ménager autant que possible notre lecteur. Les bagages sont clos désormais, le fruit de nos préparations, aussi lourd soit-il, se révèlera un allié précieux dans ce massif peu pratiqué que Frege a autrefois exploré, et que nous allons tenter de domestiquer.

2.3.3 Définition générale des noms

2.3.3.1 Gestion des types

Nos précédentes illustrations n'ont exploité qu'une petite part des types disponibles. Afin de procéder à des définitions générales, il importe de choisir des conventions d'écriture adaptées à la totalité des types. L'appareil par lequel nous les désignons présente, dans une perspective fregéenne, un défaut que nous souhaitons corriger.

Selon Frege, aucun objet – pas même un n-uplet ou une paire ordonnée – n'est en mesure de compléter à lui seul une fonction à plusieurs arguments. Plusieurs insaturations attendent la donnée de *plusieurs* entités. Une notion d'ordre est néanmoins indispensable à la représentation des fonctions afin d'indiquer, parmi les différentes places de même type disponibles, laquelle sera occupée par tel ou tel argument. Considérons le cas de la soustraction, que nous notons '$-(\xi, \zeta)$'. Il est clair que le résultat dépend de la localisation des arguments. Il ne suffit pas de choisir les objets 2 et 3 pour déterminer sa valeur, il faut spécifier l'endroit où nous les injectons. Conçues en termes de paires, les fonctions '$-(\xi, \zeta)$' et '$-(\zeta, \xi)$' sont distinctes, parce que 'ξ' marque la place du premier terme de la paire, 'ζ' du second, et donc que les valeurs de ces fonctions en $(2, 3)$ ne sont pas identiques. Pour Frege en revanche, les places des arguments ne sont que des espaces vacants. Choisir telle ou telle lettre pour les indiquer n'influe en aucun cas sur la nature de la fonction. '$-(\xi, \zeta)$' et '$-(\zeta, \xi)$' nomment une seule et même fonction, bien que celle-ci puisse prendre des valeurs différentes pour deux mêmes objets lorsqu'ils sont inversés. Il faut donc intégrer à l'appareil linguistique un outil pour spécifier les lieux des arguments. Frege se cantonne aux fonctions à deux arguments, il lui suffit d'écrire (par exemple) que 2 occupe la place marquée par 'ξ' et 3 par 'ζ'. Au contraire, nous ne limiterons pas ce nombre, la méthode n'est donc pas adaptée. Le moyen le plus simple consiste à numéroter les places pour les arguments et à exposer les noms de ces derniers dans l'ordre qui respecte cette numérotation. C'est ainsi que nous allons procéder, mais il ne faut en aucun cas conclure que nous complétons une fonction

68. Nous fixerons néanmoins une limite raisonnable. Il est clair que si le langage est vide (dénué de symboles simples), cela n'est pas possible. Nous verrons qu'il suffit qu'il possède au moins un nom propre atomique ou deux noms atomiques de types compatibles. Bien sûr, un langage qui ne remplit pas ces conditions n'est d'aucun intérêt à nos yeux, car il ne permet pas de construire le moindre nom.

par un n-uplet. Nous nous contentons de lier les noms d'arguments différents aux endroits qui marquent des places distinctes. Frege a d'ailleurs trouvé, à travers les parcours-de-valeurs, une solution pour traiter des extensions dans le cas des relations à deux arguments sans impliquer la moindre notion de couple [69]. Afin de nous maintenir au plus près de ses idées, il convient de résorber toute distinction entre les types de fonctions qui prennent exactement le même nombre d'arguments de chaque type. Autrement dit :

$(T_1, \ldots, T_n) = (T'_1, \ldots, T'_n)$ si la seconde suite n'est qu'une permutation de la première.

Par exemple, les fonctions $(0, (0))$ sont exactement les fonctions $((0), 0)$. Notre objectif consiste à dédier un *unique* nom à chaque type. Nous allons devoir modifier la construction effectuée plus haut, dans un geste qui s'avèrera utile aux développement à venir.

Définition 1. *Définissons récursivement et simultanément les types et l'ordre total qui les classe :*

Initialisation : $\mathscr{T}_0 = \{0\}$.

Pas de récurrence : *Supposons connus l'ensemble* $\mathscr{T}_k$ *et son ordre total* $\leq_{\mathscr{T}_k}$.

$\mathscr{T}_{k+1}$ *est exactement* $\mathscr{T}_k$ *enrichi des suites* $(T_1, \ldots, T_n)$ *telles que* n *soit un entier naturel non nul, que* $T_1, \ldots, T_n$ *appartiennent à* $\mathscr{T}_k$ *et qu'ils figurent dans un ordre croissant pour* $\leq_{\mathscr{T}_k}$. *Autrement dit :*

$$\mathscr{T}_{k+1} = \mathscr{T}_k \cup \{(T_1, \ldots, T_n)/n \in \mathbb{N}^* \wedge T_1 \in \mathscr{T}_k \wedge \cdots \wedge T_n \in \mathscr{T}_k \wedge T_1 \leq_{\mathscr{T}_k} \cdots \leq_{\mathscr{T}_k} T_n\}$$

La relation d'ordre s'étend à $\mathscr{T}_{k+1}$ *en plaçant tous les nouveaux éléments au-dessus des autres, et en les classant entre eux par ordre lexicographique. Rigoureusement, soient* T_1 *et* T_2 *deux éléments de* $\mathscr{T}_{k+1}$ *:*

- *Si* T_1 *et* T_2 *appartiennent à* $\mathscr{T}_k$*, alors* $T_1 <_{\mathscr{T}_{k+1}} T_2 \leftrightarrow T_1 <_{\mathscr{T}_k} T_2$.
- *Si seul* T_1 *appartient à* $\mathscr{T}_k$*, alors* $T_1 <_{\mathscr{T}_{k+1}} T_2$.
- *Si seul* T_2 *appartient à* $\mathscr{T}_k$*, alors* $T_2 <_{\mathscr{T}_{k+1}} T_1$.
- *Si* T_1 *et* T_2 *n'appartiennent pas à* $\mathscr{T}_k$*, alors par définition il existe deux entiers* n *et* n' *non nuls et des éléments* $T'_1, \ldots, T'_n, T''_1, \ldots, T''_{n'}$ *de* $\mathscr{T}_k$ *tels que* $T_1 = (T'_1, \ldots, T'_n)$ *et* $T_2 = (T''_1, \ldots, T''_{n'})$.
  S'il existe un premier entier $i \leq min(n, n')$ *tel que* $T'_i \neq T''_i$*, alors* $T_1 <_{\mathscr{T}_{k+1}} T_2 \leftrightarrow T'_i <_{\mathscr{T}_k} T''_i$.
  Sinon, alors $T_1 <_{\mathscr{T}_{k+1}} T_2 \leftrightarrow n < n'$.

Clôture : *Il ne nous reste qu'à récupérer nos types dans l'ensemble :*

$$\mathscr{T} = \bigcup_{k<\omega} \mathscr{T}_k$$

Sans surprise, la relation d'ordre se définit par :

$$\forall T_1 \in \mathscr{T}, \forall T_2 \in \mathscr{T} (T_1 <_{\mathscr{T}} T_2 \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}(T_1 <_{\mathscr{T}_k} T_2))$$

69. Nous l'expliquerons en section 2.5.2.

Nous pouvons aussi dire que les types sont classés par ordre croissant de profondeur, et que les types de même profondeur sont rangés dans l'ordre lexicographique. À cette fin, il nous faut définir la profondeur d'un type comme étant le plus petit k tel qu'il appartienne à $\mathscr{T}_k$. La notion de niveau, très efficace quand nous nous limitons aux types $((\ldots((0))\ldots))$ devient vite inopérante dans le cadre général. Celle de profondeur – ou de hauteur, au gré du lecteur – l'étend idéalement.

2.3.3.2 L'alphabet

Pour maintenir une certaine proximité avec les expressions de l'idéographie, nous avons jusqu'à présent utilisé les lettres grecques majuscules. Frege les emploie au sein des expressions qui manifestent la morphologie de son langage. Néanmoins, nous l'avons dit, il ne les tient pas pour des étiquettes de noms atomiques, mais de noms qui désignent arbitrairement une fonction ou un objet [70]. Nous allons donc, nous aussi, dédier d'autres lettres aux étiquettes de nos noms élémentaires. Plus précisément, nous allons solliciter un seul symbole – la lettre 'X' –, en exposant duquel figurera le type du nom dont il est l'étiquette, et en indice duquel figurera un entier naturel non nul. Ainsi, X_i^T sera l'étiquette du i-ème nom primitif de type T. Afin d'homogénéiser totalement les lettres du même groupe, nous allons écrire X_i^0 le i-ème nom d'objet – de type 0 – du langage. Remarquons qu'en indiquant le type en exposant, nous ne commettons pas la faute dont nous avons plus haut accusé Landini. Nous maintenons les lettres pour les places vides dans leur rôle essentiel, notre propos se limite à éviter de multiplier les symboles utilisés. D'autre part, il n'y a aucune raison de vouloir maintenir à tout prix un symbole différent pour les noms objets. Une fonction de type (0) est, selon Frege, aussi distincte d'une fonction de type ((0)) que d'un objet. Si nous utilisons la même lettre pour la première et la second, rien ne s'oppose à ce que nous la sollicitions aussi pour le troisième. L'essentiel étant que cette lettre figure toujours à l'endroit adéquat, relativement au type écrit en exposant. Dans cette même volonté d'uniformisation des notations et du lexique, nous dirons que l'étiquette d'un nom d'objet est le nom d'objet lui-même, et que sa terminaison est vide.

Concernant les lettres pour marquer les places vides, nous écrirons le type de la place en question en exposant de la lettre 'φ'. Un entier naturel figurera potentiellement en indice afin de différencier les places ainsi marquées. En conséquence, 'φ^0' marquera la place d'un nom d'objet, et jouera le rôle précédemment tenu par 'ξ'.

Concernant les lettres pour marquer les places non vides pour des arguments, nous écrirons le type de la place en question en exposant de la lettre 'ψ'. Un entier naturel figurera potentiellement en indice afin de différencier les places ainsi marquées. En conséquence, 'ψ^0' marquera la place d'un nom d'objet, et jouera le rôle précédemment tenu par 'β'.

'T' sera notre métavariable pour les types, éventuellement indexée par des entiers naturels (non nuls) ; et nous avons par ailleurs déjà introduit l'ensemble de tous les types $\mathscr{T}$.

Enfin, '$\mathscr{L}_n$' [71] sera le nom de notre langage et '$A(\mathscr{L}_n)$' celui de son alphabet.

Par ces quelques changements, nous souhaitons donner à nos conventions une cohésion d'ensemble qui manifeste clairement le rôle de chaque lettre au sein de la mécanique. L'alphabet du langage est constitué des trois groupes de signes suivants [72] :

70. nous discuterons ce problème dans le troisième chapitre.
71. pour 'langage des noms'.
72. Nous ne répèterons plus que la virgule et les parenthèses en font partie. Nous considérons désormais ce point comme implicite.

- 'X_i^T' : l'étiquette du i-ème nom de type T.
  Par convention, nous dirons que cette étiquette est de type T.
  L'expression qui figure entre les parenthèses qui succèdent à ce signe sera appelée la 'portée' de ce signe [73].

- 'ψ_i^T' : un signe [74] qui marque une place non vide de type T.
  Nous dirons que ce signe est de type T.
  L'expression qui figure entre les parenthèses qui succèdent à ce signe est appelée la 'portée' de ce signe.
  Nous dirons qu'une occurrence de ce signe est *liée* à une occurrence d'un signe qui le porte en indice si la première occurrence se situe dans la portée de la seconde.

- 'φ_i^T' : un signe qui marque une place vide de type T.
  Nous dirons que ce signe est de type T.
  L'expression qui figure entre les parenthèses qui succèdent à ce signe est appelée la 'portée' de ce signe.
  Nous dirons qu'une occurrence de ce signe est *liée* à une occurrence d'un signe qui le porte en indice si la première occurrence se situe dans la portée de la seconde.

Le langage contient au moins un nom atomique de fonction de chaque type. Ainsi, quel que soit T, il existe un k_T tel que $1 \leq k_T \leq \omega$ [75] et tel que :

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k_T} \{`X_i^T`\} \subseteq A(\mathscr{L}_n)$$

Quel que soit T, une fonction peut prendre un nombre quelconque d'arguments de type T. Il est donc essentiel de disposer d'une infinité de 'φ_i^T' :

$$\bigcup_{1 \leq i < \omega} \{`\varphi_i^T`\} \subseteq A(\mathscr{L}_n)$$

Quel que soit T, une fonction peut prendre en argument une fonction qui attend un nombre quelconque d'arguments de type T. Il est donc essentiel de disposer d'une infinité de 'ψ_i^T' :

$$\bigcup_{1 \leq i < \omega} \{`\psi_i^T`\} \subseteq A(\mathscr{L}_n)$$

Nous connaissons à présent l'alphabet du langage [76] :

73. Nous avons introduit le terme dans la dernière section. Notons qu'il peut se définir en toute rigueur : l'expression en question figure entre la parenthèse ouvrante qui suit immédiatement ce signe et la première parenthèse fermante telle qu'il y ait un nombre identique de parenthèses ouvrantes et fermantes entre elle (incluse) et ce signe.

74. Dans les *Grundgesetze*, les symboles pour marquer les places des arguments n'ont besoin ni d'exposant ni d'indice, car les types sollicités sont peu nombreux. C'est pourquoi nous avons jusqu'ici parlé de *lettres* du second groupe. La généralisation exige les indices et les exposants, nous parlerons désormais de *signes* du second groupe.

75. Nous ne traitons que le cas d'un langage dénombrable.

76. Dans les *Grundgesetze*, Frege expliqua :

> 'ξ' elle-même n'apparaîtra jamais dans les développements de l'Idéographie. Je l'utiliserai seulement dans l'exposition de l'Idéographie et dans les élucidations. (Frege 1893, nbp. 1, p. 6)

Il excluait donc les lettres pour marquer les espaces vacants de son langage, tandis que nous les intégrons au nôtre. Il n'y a pas là matière à s'indigner. Frege faisait un usage très fluctuant du terme 'langage', par lequel il désignait parfois son seul alphabet, ou encore parfois la totalité du système, incluant les règles et axiomes. Dans ce passage, il souhaitait signaler que les démonstrations écrites dans l'idéographie n'incorporeraient pas ces symboles. Ce point est incontestable, car ces derniers figurent exclusivement dans les noms (ou les marqueurs) de fonctions,

$$A(\mathscr{L}_n) := \bigcup_{T\in\mathscr{T}} \left(\bigcup_{i=1}^{k_T} \{`X_i^T`\} \cup \bigcup_{i\in\omega} \{`\varphi_i^T`\} \cup \bigcup_{i\in\omega} \{`\psi_i^T`\} \right)$$

2.3.3.3 Gestion des indices

Nous avons vu que les étiquettes portaient, le cas échéant [77], des indices servant à indiquer la place (non vacante) d'un argument. C'est le propos de la lettre 'β' dans '$\Omega_\beta(\Phi'(\beta))$'. Adapté à nos conventions actuelles, ce nom devient '$(X_1^{((0))})_{\psi^0}(X_1^{(0)}(\psi^0))$'. L'expression gagne en clarté si, plutôt que d'entourer l'étiquette de parenthèses, nous faisons figurer son indice directement à droite de l'entier 'i : '$X_{1,\psi^0}^{((0))}(X_1^{(0)}(\psi^0))$'.

Le cas échéant, les signes pour marquer des places vacantes (respectivement non vacantes) doivent aussi intégrer en indice un signe pour marquer une place vacante (respectivement non vacante). Nous appliquerons la même méthode, laissant celui-ci succéder l'entier qui numérote la lettre 'φ' (respectivement 'ψ'). Pour fixer les idées, nous proposons un tableau des traductions de nos anciens signes :

Type	Étiquette		Place vacante		Place non vacante	
	Ancien	Nouveau	Ancien	Nouveau	Ancien	Nouveau
0	'Δ'	'X_1^0'	'ξ'	'φ_1^0'	'β'	'ψ_1^0'
0	'Γ'	'X_2^0'	'ζ'	'φ_2^0'	'γ'	'ψ_2^0'
(0)	'Φ''	'$X_1^{(0)}$'	'φ'	'$\varphi_1^{(0)}$'	'ψ'	'$\psi_1^{(0)}$'
(0,0)	'Φ'	'$X_1^{(0,0)}$'		'$\varphi_1^{(0,0)}$'		'$\psi_1^{(0,0)}$'
((0))	'Ω'	'$X_1^{((0))}$'	'μ'	'$\varphi_1^{((0))}$'	'ρ'	'$\psi_1^{((0))}$'
(((0)))	'Σ'	'$X_1^{(((0)))}$'	'σ'	'$\varphi_1^{(((0)))}$'		'$\psi_1^{(((0)))}$'
((((0))))	'Π'	'$X_1^{((((0))))}$'		'$\varphi_1^{((((0))))}$'		'$\psi_1^{((((0))))}$'

Une case est laissée blanche lorsque le type et le groupe qui lui correspondent n'ont encore jamais été sollicités simultanément, et qu'aucun signe n'a donc été proposé pour tenir ce rôle. Remarquons que les nouvelles notations sont à la fois plus lourdes et plus uniformes que les anciennes. Nous avons pu nous en préserver lors des explications introductives, mais elles sont essentielles à la prise en charge de *tous* les types possibles, *i.e.* au traitement *général* du problème.

---

tandis qu'une démonstration n'intègre que des noms propres (ou des marqueurs d'objets). Plus loin, il compléta sa pensée :

> Nous ne devons jamais oublier que 'ξ' fait partie du nom de fonction seulement en ceci qu'il permet d'identifier l'insaturation. (Frege 1893, p. 37)

Il s'agit d'une précision *sémantique*. Les lettres pour les espaces vacants ne contiennent pas un sens qui contribue à celui de l'expression totale. Il est vrai que les lettres indicatrices du deuxième groupe – par exemple 'β' et '$\mathfrak{a}$' selon les conventions de Frege, 'ψ^0' selon les nôtres – sont aussi dépourvues de sens. Mais elles figurent au sein d'expressions qui en sont dotées – par exemple '$\frown^{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a})$' selon ses conventions, '$X_{\psi^0}^{((0))}(\ \ (\psi^0))$' selon les nôtres. Les espaces que nous avons ici laissés blancs dans l'expression correspondent aux "espaces vacants" du sens de cette expression. La lettre 'ξ' – ou 'φ^0' – doit donc être conçue comme le pendant syntaxique de l'insaturation du sens du nom de fonction. Elle doit cependant être introduite à la *syntaxe* pour développer l'appareil de formation de la totalité des noms propres qui calque les opérations sémantiques et ontologiques. Il faut donc bel et bien la laisser figurer au sein des noms de fonctions pour fournir une définition adéquate des noms propres. Elle est partie intégrante du langage sur lequel s'opère la récurrence, laquelle est précisément notre point de mire.

77. C'est-à-dire quand la profondeur de leur type est supérieure ou égal à 2.

Voici la traduction de deux noms de fonctions introduits lors de la précédente section, et du nom propre qui résulte de leur combinaison :

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Type } ((((0)))) & : & \text{‘}\Pi_\rho(\sigma_\varphi(\rho_\beta(\varphi(\beta))))\text{’} & \text{‘}X^{((((0))))}_{1,\psi_1^{((0))}}(\varphi^{(((0)))}_{1,\varphi_1^{(0)}}(\psi^{((0))}_{1,\psi_1^0}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0))))\text{’} \\
\text{Type } (((0))) & : & \text{‘}\Sigma_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))\text{’} & \text{‘}X^{(((0)))}_{1,\psi_1^{(0)}}(\varphi^{((0))}_{1,\varphi_1^0}(\psi_1^{(0)}(\varphi_1^0)))\text{’} \\
\text{Type } 0 & : & \text{‘}\Pi_\rho(\Sigma_\psi(\rho_\beta(\psi(\beta))))\text{’} & \text{‘}X^{((((0))))}_{1,\psi_1^{((0))}}(X^{(((0)))}_{1,\psi_1^{(0)}}(\psi^{((0))}_{1,\psi_1^0}(\psi_1^{(0)}(\psi_1^0))))\text{’}
\end{array}$$

Il s'agit de deux noms *atomiques* de fonctions, grâce auxquels on peut constater une fois encore l'harmonie semée par nos nouvelles conventions. On visualise clairement l'induction qui permettra de définir les noms simples.

Nos étiquettes n'ont, pour l'instant, jamais été indexées par plus d'un signe, car nous nous sommes limités aux types $((\ldots((0))\ldots))$ [78]. L'indice de l'étiquette marque la place de l'argument de la fonction qui sera prise en argument (par la fonction à laquelle le nom simple constitué de l'étiquette réfère). C'est pourquoi il existe un écart de deux niveaux entre l'étiquette et son indice. Si la première est de type $((0))$ – anciennement ‘Σ’ –, le second est de type 0 – anciennement ‘β’. Considérons à présent une fonction de type $((0,0))$, *i.e.* qui prend en argument une fonction à *deux* arguments. Il est alors nécessaire d'utiliser un signe pour la place de *chaque* argument de cette fonction. Voici un nom atomique de ce type [79] :

$$\text{‘}X^{((0,0))}_{\psi_1^0,\psi_2^0}(\varphi^{(0,0)}(\psi_1^0,\psi_2^0))\text{’}$$

Le nom qui viendra compléter ce dernier – par exemple ‘$X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)$’ – aura deux places *différentes* d'arguments – par exemple φ_1^0 et φ_2^0. Nous verrons le processus de saturation décrit dans la dernière section se multiplier (sans réellement se complexifier) à chaque étape. Considérons à présent un nom primitif d'une fonction de type $((0),(0))$, c'est-à-dire qui prend en argument *deux* fonctions de type (0) :

$$\text{‘}X^{((0),(0))}_{\psi^0}(\varphi_1^{(0)}(\psi^0),\varphi_2^{(0)}(\psi^0))\text{’}$$

Un nom (complexe) peut incorporer plusieurs places vides pour le *même* argument. Il convient donc d'utiliser deux signes différents – en l'occurrence ‘$\varphi_1^{(0)}$’ et ‘$\varphi_2^{(0)}$’ – pour deux arguments *différents*. En revanche, la mécanique de saturation n'est pas obstruée par l'utilisation d'un même signe pour marquer la place à la fois de la première et de la seconde fonction prises en argument. Les remplacements s'effectuent successivement sur des portions de l'expression de plus en plus réduites. Celle qui est sollicitée lors de la manipulation de la première occurrence de ‘ψ^0’ ne contient pas la seconde. Il faut donc des signes différents pour marquer les différentes places des arguments d'une fonction prise en argument, mais on peut utiliser le même signe pour marquer la place de l'argument de différentes fonctions prises en arguments.

Considérons l'étiquette ‘$X^{(0,(0,0),(0,(0,0)),((0,0)))}$’. La fonction qui lui est attachée attend quatre arguments :

– un objet ;

78. hormis ‘$\Phi(\xi,\zeta)$’, mais celui-ci n'a jamais complété quoi que ce soit.

79. Lorsqu'un seul symbole d'un certain groupe et d'un certain type est nécessaire, nous omettons l'entier naturel en indice. Dans ce cas, nous avons donc écrit ‘$\varphi^{(0,0)}$’ au lieu de (par exemple) ‘$\varphi_1^{(0,0)}$’ et ‘$X^{((0,0))}$’ au lieu de ‘$X_1^{((0,0))}$’.

– une fonction de type $(0,0)$, les lettres 'ψ_1^0' et 'ψ_2^0' marqueront la place de ses arguments ;

– une fonction de type $(0,(0,0))$, les lettres 'ψ_1^0' et '$\psi_1^{(0,0)}$' marqueront la place de ses arguments ;

– une fonction de type $((0,0))$, la lettre '$\psi_1^{(0,0)}$' marquera la place de son argument.

Nous avons respecté les contraintes décrites ci-dessus. Les lettres associées à la seconde fonction reçoivent des indices différents, car elles marquent la place de deux arguments du même type d'une fonction. En revanche, nous réutilisons les lettres employées pour la seconde et la troisième fonctions dans le cas de la quatrième. Voici donc une version licite de notre étiquette munie de ses indices :

$$`X^{(0,(0,0),(0,(0,0)),((0,0)))}_{\psi_1^0,\psi_2^0,\psi_1^{(0,0)}},$$

Rien n'interdit cependant de modifier les indices, tant que le nombre de lettres de chaque type est respecté :

$$`X^{(0,(0,0),(0,(0,0)),((0,0)))}_{\psi_4^0,\psi_7^0,\psi_3^{(0,0)}},$$

Ces changements s'avèreront parfois essentiels pour éviter une collision entre indices. Par exemple, à l'aide les deux noms de fonctions '$X^{((0))}_{\psi^0}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$' et '$X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)$', nous pourrions construire le nom propre :

$$`X^{((0))}_{\psi^0}(X^{((0))}_{\psi^0}(X^{(0,0)}(\psi^0,\psi^0)))'$$

Cette expression doit néanmoins être exclue, car elle ne permet pas de déterminer à quelle occurrence de '$X^{((0))}_{\psi^0}$' chaque occurrence de 'ψ^0' est attachée. L'utilisation de deux indices différents pour des occurrences d'une même étiquette règle la difficulté :

$$`X^{((0))}_{\psi_2^0}(X^{((0))}_{\psi_1^0}(X^{(0,0)}(\psi_1^0,\psi_2^0)))'$$

La règle est simple : une occurrence d'une lettre ne doit pas tomber dans la portée de plus d'une lettre qu'elle indice. Frege lui-même prit des précautions dans un nombre (insuffisant) [80] de cas :

> Si une lettre gothique figure déjà dans le nom d'une fonction, dans la portée de laquelle se trouve une place d'argument de cette fonction, alors une lettre gothique différente de celle-ci doit être choisie afin de former l'expression correspondante pour la généralité. (Frege 1893, p. 14)

Nous prendrons, au cours de nos définitions, les mesures qui s'imposent pour respecter ce réquisit.

Nous pouvons désormais fournir les règles générales liées aux indices.

Clause 1. *Considérons une étiquette de type T. Si $T = 0$, elle ne porte pas d'indice. Sinon, il existe un entier naturel n non nul et n types $T_1,\ldots,T_n$ tels que $T = (T_1,\ldots,T_n)$. Pour tout i entre 1 et n, notons r_i l'entier tel qu'il existe r_i types tels que $T_i = (T_{i1},\ldots,T_{ir_i})$. Par convention, nous disons que le cas $T_i = 0$ correspond à $r_i = 0$. L'étiquette en question doit être munie de l'indice suivant :*

80. S'il répète cette contrainte dans le cas de la fonction des parcours-de-valeurs (p. 15), il n'en dit rien dans celui de la quantification de second ordre.

$$\text{`}\psi_{q_{11}}^{T_{11}}, \ldots, \psi_{q_{1r_1}}^{T_{1r_1}}, \ldots, \psi_{q_{n1}}^{T_{n1}}, \ldots, \psi_{q_{nr_n}}^{T_{nr_n}}\text{'}$$

D'une part, les entiers q_{ij} peuvent être choisis librement tant qu'ils respectent la condition suivante :

$\forall i \forall j \forall j'(((1 \leq i \leq n) \wedge (1 \leq j < j' \leq r_i) \wedge (T_{ij} = T_{ij'})) \rightarrow q_{ij} \neq q_{ij'})$

D'autre part, deux occurrences de 'ψ' portant les mêmes indices et exposants peuvent être écrits une seule fois.

Enfin, l'étiquette 'X_i^T' sera représentée, munie de son indice, sous l'une des deux formes suivantes :

$$\text{`}X^T_{i,\psi_{,q_{11}}^{T_{11}},\ldots,\psi_{q_{1r_1}}^{T_{1r_1}},\ldots,\psi_{q_{n1}}^{T_{n1}},\ldots,\psi_{q_{nr_n}}^{T_{nr_n}}}\text{'}$$

$$\text{`}X^T_{i,\left(\psi_{q_{11}}^{T_{11}},\ldots,\psi_{q_{1r_1}}^{T_{1r_1}},\ldots,\psi_{q_{n1}}^{T_{n1}},\ldots,\psi_{q_{nr_n}}^{T_{nr_n}}\right)}\text{'}$$

Le même procédé et les mêmes contraintes valent pour les lettres du deuxième et troisième groupes, i.e. pour 'ψ' et 'φ'. En clair, la clause ci-dessus doit être répétée en :

- *remplaçant toutes les occurrences de 'X' par des occurrences de 'ψ';*
- *remplaçant toutes les occurrences de 'X' et de 'ψ' par des occurrences de 'φ'.*

La contrainte sur les q_{ij} nous maintient à l'intérieur des frontières tracées plus haut. Elle impose que deux lettres marquant des places différentes, mais de même type, d'arguments d'une fonction prise en argument portent des indices différents, *i.e.* que les places soient clairement démarquées l'une de l'autre.

Par ailleurs, la permission de ne pas multiplier les occurrences d'un même signe dans l'indice autorise par exemple le remplacement de la première par la seconde des deux expressions suivantes :

$$\text{`}X^{((0),(0))}_{\psi_1^0,\psi_1^0}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0), \varphi_2^{(0)}(\psi_1^0))\text{'}$$
$$\text{`}X^{((0),(0))}_{\psi_1^0}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0), \varphi_2^{(0)}(\psi_1^0))\text{'}$$

Enfin, comme nous l'avons longuement expliqué, les signes pour les places vides (respectivement non vides) doivent être indexées par des signes pour les places vides (respectivement non vides), il fallait donc aussi les soumettre à (une version adaptée de) cette clause.

2.3.3.4 Les expressions du langage

Nous savons désormais que l'alphabet de notre langage est constitué des étiquettes ainsi que des signes pour marquer les places vacantes et non vacantes, et nous connaissons les règles d'indexation de ces éléments. Nous pouvons donc procéder à la définition suivante :

Définition 2. *Une expression de $\mathscr{L}_n$ est une suite finie de signes de $A(\mathscr{L}_n)$ indexés dans le respect de la clause 1.*

Parmi les deux expressions suivantes, seule la seconde fait partie des expressions du langage, car la première transgresse la clause 1 :

$$\text{`}X^{((0,0))}_{1,\psi^0_1}(\varphi^{(0,0)}(\psi^0_1,\psi^0_1))\text{'}$$
$$\text{`}X^{((0,0))}_{1,\psi^0_1,\psi^0_2}(\varphi^{(0,0)}(\psi^0_1,\psi^0_2))\text{'}$$

Naturellement, la majorité des expressions ne sont ni des noms propres ni des noms de fonctions, comme l'atteste l'exemple suivant :

$$\text{`})(X^0_1\psi^{((0))}_{1,\psi^0_1},\text{'}$$

Notre objectif consiste à étendre et formaliser le travail réalisé dans la précédente section pour les seuls types $((\ldots((0))\ldots))$. La généralisation du processus de saturation, introduit dans ce cadre, exigera la réalisation de plusieurs manipulations par ligne, là où nous en effectuions une seule jusqu'à présent. Leur nombre va croître de manière polynomiale jusqu'à l'aboutissement du processus. Ceci provient de l'incorporation des fonctions à plusieurs arguments, et ainsi des étiquettes disposant de plusieurs places dans leurs portées. Cette notion de place doit être définie rigoureusement, une fois encore par induction :

Définition 3. *Soit une expression quelconque de $\mathscr{L}_n$ dans laquelle figure un signe s quelconque de $A(\mathscr{L}_n)$.*

Si s possède une portée, qu'il existe une virgule dans cette portée telle que les nombres de parenthèses ouvrantes et fermantes entre la parenthèse ouvrante qui suit immédiatement s et cette virgule sont égaux, et que cette virgule est la première possédant cette propriété, alors l'expression située entre la parenthèse ouvrante qui suit immédiatement s et la virgule est dite 'à la première place dans la portée de s'. Sinon, on dit que l'expression dans la portée de s est toute entière à la première place dans cette portée, et que s ne dispose que d'une place dans sa portée.

S'il existe une expression à la n^e place dans la portée de s, que celle-ci est immédiatement suivie d'une première virgule, qu'il existe une autre virgule dans cette portée telle que les nombres de parenthèses ouvrantes et fermantes entre la première virgule et cette autre virgule sont égaux, et que cette autre virgule est la première possédant cette propriété, alors l'expression située entre la première virgule et la seconde virgule est dite 'à la $n+1^e$ place dans la portée de s'. Sinon, on dit que l'expression située entre la virgule qui succède immédiatement à l'expression à la n^e place et la parenthèse fermante qui succède immédiatement à l'expression dans la portée est à la $n+1^e$ place sous cette portée, et que s dispose de $n+1$ places dans sa portée.

Pour comprendre cette définition, supposons une étiquette de type $(T_1,\ldots,T_n)$, donc associée à une fonction à n arguments, qui figure dans un nom propre t du langage indexée par I dans le respect de la clause 1. Il doit toujours exister des expressions $t_1,\ldots,t_n$ de $\mathscr{L}_n$ telles que t incorpore l'expression $X^{(T_1,\ldots,T_n)}_I(t_1,\ldots,t_n)$. t_i contient le dispositif pour marquer la place de la i-ème fonction prise en argument (de type T_i). Nous l'identifions syntaxiquement en disant qu'il s'agit de l'expression à la i-ème place dans la portée de l'étiquette. Notre définition fonctionne car les expressions en question contiennent toujours autant de parenthèses ouvrantes que fermantes [81].

Au cours de notre développement, nous aurons recours à une notion de *liberté* relative aux signes des second et troisième groupes :

81. Bien sûr, nous intégrons de nombreux cas dégénérés, par exemple '$()X^0_1$' est à la seconde place dans la portée de 'X^0_2' dans '$X^0_2(()\,(),()X^0_1)$'. Mais ils seront exclus lors de la caractérisation des noms propres. L'essentiel est que la définition fonctionne pour tout ce que nous envisageons de définir comme noms propres, et c'est bien le cas.

Définition 4. *Soient t une $\mathscr{L}_n$-expression et χ_i^T un signe du second (respectivement du troisième) groupe de $A(\mathscr{L}_n)$. Nous dirons qu'une occurrence de χ_i^T est libre dans t si elle n'est liée à aucune occurrence d'aucun signe du premier ou du second (respectivement du troisième) groupe, autrement dit si χ_i^T ne figure en indice d'aucun signe du premier ou du second (respectivement du troisième) groupe dans la portée duquel cette occurrence se situe.*

Ainsi, la première occurrence de 'φ_1^0' n'est libre dans aucune des deux expressions ci-dessous, tandis que la seconde n'est libre que dans la première :

$$\text{`}\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}(X_1^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_1^0))\text{'} \qquad\qquad \text{`}X_1^{(0,0)}(\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}(\varphi_1^0),\varphi_1^0)\text{'}$$

Anticipons légèrement, et affirmons déjà qu'il s'agit de noms de fonctions. Le premier peut être saturé par un nom de type $((0))$, comme l'indique l'exposant dans '$\varphi_1^{((0))}$'. Les deux occurrences du signe 'φ_1^0' ne servent qu'à marquer la place du dispositif que ce nom aura prévu pour la place de l'argument du nom de fonction qui viendra le saturer. C'est aussi le rôle de la *première* occurrence de 'φ_1^0' dans le second nom. En revanche, la seconde n'est pas dans la portée de '$\varphi_1^{((0))}$', elle est donc libre dans ce nom, et attend d'être remplacée par un nom d'objet. Par conséquent, le deuxième nom doit être saturé par *deux* noms – l'un de type $((0))$ et l'autre de type 0 –, il est de type $(0,((0))$. Les deux occurrences n'ont donc pas le même rôle, et pour prévenir tout confusion, nous pouvons modifier l'indice dans la seconde :

$$\text{`}X_1^{(0,0)}(\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}(\varphi_1^0),\varphi_2^0)\text{'}.$$

Mais cela n'est pas nécessaire, les statuts de ces occurrences sont entièrement déterminés par leur localisation (intérieure ou extérieure) relativement à telle ou telle portée.

Naturellement, nous ne pouvons pas caractériser la notion de type pour les noms de $\mathscr{L}_n$ tant que ces derniers ne sont pas proprement circonscrits. Néanmoins, notre précédente remarque nous livre un moyen de définir les types, à travers la notion de liberté, dans le contexte général des *expressions* de $\mathscr{L}_n$:

Définition 5. *Soit t une expression quelconque de $\mathscr{L}_n$. Si t n'intègre aucune lettre du troisième groupe, alors elle est de type 0. Sinon, soient '$\varphi_{i_1}^{T_1}$', ..., '$\varphi_{i_n}^{T_n}$' la totalité des signes différents*[82] *du troisième groupe figurant dans t, classés dans l'ordre croissant selon leurs types (pour '$\leq_{\mathscr{T}}$'), et dont une occurrence au moins est libre dans t. Alors t est de type $(T_1,\ldots,T_n)$.*

Les types étant rangés dans l'ordre croissant, $(T_1,\ldots,T_n)$ est bien un élément de $\mathscr{T}$ d'après la définition 1. Notre future caractérisation des noms du langage, en impliquant le processus de saturation, permettra (et ordonnera) simultanément la caractérisation de leurs types. Il sera donc essentiel de prouver que les deux définitions sont compatibles, *i.e.* que tout *nom* de type T est aussi une *expression* de type T. Néanmoins, l'illustration ci-dessus nous rassure déjà à cet égard. Nous avons vu que chaque place vacante de type T_i est prévue pour accueillir le nom d'un argument de type T_i, sauf lorsqu'elle est liée à un autre signe pour les places vacantes, auquel cas elle fait seulement partie du dispositif prévu pour accueillir l'argument relatif à cet autre signe. Considérons un exemple légèrement différent, à travers les deux expressions suivantes :

$$\text{`}\varphi_{\varphi^0}^{((0))}(X^{(0,0)}(\varphi^0,X^0))\text{'} \;\text{ et }\; \text{`}X^{(0,0)}(\varphi^{(0)}(X^0),\varphi^0)\text{'}$$

82. Certains peuvent partager le même type, mais les entiers naturels figurant en indice de 'φ' doivent alors être distincts.

La fonction désignée par le premier nom n'attend qu'un argument de type ((0)), elle est donc de type (((0))). 'φ^0' est lié au signe '$\varphi^{((0))}$', il sera (prenons notre souffle !) occupé par le dispositif que le nom de la fonction de type ((0)) prise en argument aura prévu à l'attention de la place libre de la fonction de type (0) que cette fonction pourrait prendre en argument. Répétons-le une fois encore, toute la complexité de cette affaire tient dans le double rôle des fonctions : saturer et être saturées. C'est la raison pour laquelle le dispositif se complique à chaque niveau franchi, et bascule d'une méthode par remplissage à une méthode par imbrication.

Dans le second nom, 'φ^0' n'est lié à aucun signe, il marque la place d'un argument de la fonction désignée par ce nom. Celle-ci attend donc deux arguments de types respectifs (0) et 0, elle est de type $(0,(0))$.

Cette définition du type d'une expression est donc prévue spécialement pour s'adapter aux noms de fonctions. Il ne nous restera qu'à vérifier techniquement ce point, lorsque ces derniers seront spécifiés.

Par ailleurs, notre procédure de saturation exigera une notion de type *relative* à un ensemble de lettres du troisième groupe.

Définition 6. *Soit t une expression quelconque de $\mathscr{L}_n$ et s un ensemble de signes du troisième groupe. Si t n'intègre aucune lettre du troisième groupe appartenant à s, alors elle est de type* 0 *relativement à s. Sinon, soient '$\varphi_{i_1}^{T_1}$', ..., '$\varphi_{i_n}^{T_n}$' la totalité des signes différents du troisième groupe figurant dans t et appartenant à s, classés dans l'ordre croissant selon leurs types (pour '$\leq_{\mathscr{T}}$'), et dont une occurrence au moins est libre dans t. Alors t est de type $(T_1,\ldots,T_n)$ relativement à s.*

Considérons un exemple. L'expression '$X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)$' est de type $(0,0)$. En revanche, relativement à {'φ_1^0', '$\varphi_1^{(0)}$'}, elle possède le type (0), car la présence de 'φ_2^0' n'est pas prise en compte.

Cette définition aidera à effectuer les arrangements techniques requis pour conserver la généralité de la procédure de saturation. Elle permettra de prendre en considération certains cas particuliers – précisément les expressions dans lesquelles une occurrence libre d'une lettre du troisième groupe figure dans la portée d'une autre occurrence libre d'une lettre du troisième groupe.

2.3.3.5 La méthode par marqueurs

Dans un premier temps, nous allons circonscrire les noms du langage en suivant une stratégie extrêmement commode : la méthode par marqueurs. Celle-ci offre une vue précise sur la totalité de ces expressions, car elle échappe au difficile processus de saturation. Néanmoins, nous verrons que les règles grammaticales utilisées ne calquent ni les phénomènes de compositions sémantiques ni les opérations entre fonctions. Or c'est précisément, selon Frege, le rôle d'une langue idéale. Cette méthode est donc éclairante d'un point de vue syntaxique, mais aveuglante d'un point de vue sémantique. L'alternative, par saturation, possède le défaut et la qualité symétriques. C'est pourquoi nous choisissons de les présenter toutes deux, avant de démontrer leur équivalence.

Définition 7. *Nous définissons les marqueurs par induction :*

Initialisation : *Tout signe 'χ_i^0' de $A(\mathscr{L}_n)$ est un marqueur.*

Pas de récurrence : *Soient des types $T_1,\ldots,T_n$ rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$. Pour tout i entre 1 et n, notons r_i l'entier tel qu'il existe r_i types tels que $T_i=(T_{i1},\ldots,T_{ir_i})$.*

Soit '$\chi_i^{(T_1,\ldots,T_n)}$' un signe de $A(\mathscr{L}_n)$ et soit un indice possible de ce signe selon la clause 1 :

$$I = (\chi_{q_{11}}^{T_{11}}, \ldots, \chi_{q_{1r_1}}^{T_{1r_1}}, \ldots, \chi_{q_{n1}}^{T_{n1}}, \ldots, \chi_{q_{nr_n}}^{T_{nr_n}})$$

Enfin, pour tout i entre 1 et n, soit t_i un marqueur qui intègre :

- *au moins une occurrence libre et aucune occurrence liée du signe '$\chi_{q_{ik}}^{T_{ik}}$', pour tout k entre 1 et r_i ;*
- *aucune occurrence du signe '$\chi_{q_{jk}}^{T_{jk}}$' pour k entre 1 et r_j tel que $j \neq i$, si pour tout k' entre 1 et r_i, '$\chi_{q_{jk}}^{T_{jk}}$' et '$\chi_{q_{ik'}}^{T_{ik'}}$' sont différents.*

Alors $\ulcorner \chi_{i,I}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1,\ldots,t_n) \urcorner$ est un marqueur.

Clôture : *Aucune autre expression n'est un marqueur.*

On dit qu'une expression est un marqueur de type T s'il s'agit d'un marqueur et si elle de type T. L'ensemble des marqueurs de type T est noté '$\boldsymbol{Mr}^T$'.

On dit qu'une expression est un nom de type T selon la méthode par marqueurs s'il s'agit d'un marqueur de type T et si elle n'intègre aucune occurrence libre d'une lettre du second groupe. L'ensemble des noms de type T selon la méthode par marqueurs est noté '$\boldsymbol{Nm}^T$'.

La clause liée à l'indice garantit que tout marqueur est une expression du langage, et exclut de l'ensemble des marqueurs :

- les expressions dans lesquelles l'indice d'un signe ne renvoie à aucun signe dans sa portée :

$$\text{`}\psi_{\psi^0}^{((0))}(X^0)\text{'}$$

- les expressions dans lesquelles une occurrence d'un signe se situe dans la portée de deux signes dont il figure en indice, sans savoir auquel il se rapporte :

$$\text{`}X_{1,\psi^0}^{((0))}(X_{2,\psi^0}^{((0))}(\psi^0))\text{'}$$

Nous n'avons pas choisi le terme 'marqueur' au hasard. Frege l'utilise au §26 des *Grundgesetze* pour caractériser précisément ces expressions [83], *i.e.* celles qui respectent la structure typée de l'idéographie, mais dans lesquelles une lettre du second groupe peut tenir la place d'une étiquette de fonction. Considérons les étapes de formation du nom '$X_{\psi^{(0)}}^{(0,((0)))}(X_1^0, \psi^{(0)}(X_2^0))$' :

(1) 'X_2^0' est un marqueur ;

(2) donc '$\psi^{(0)}(X_2^0)$' est un marqueur ;

(3) 'X_1^0' est un marqueur ;

(4) '$\psi^{(0)}$' possède une occurrence libre et aucune occurrence liée dans '$\psi^{(0)}(X_2)$' donc, par (2) et (3) : '$X_{\psi^{(0)}}^{(0,((0)))}(X_1^0, \psi^{(0)}(X_2^0))$' est un marqueur ;

(5) puisqu'il ne présente aucune occurrence libre d'un signe du second groupe, il s'agit d'un nom selon la méthode par marqueurs.

Le marqueur impliqué dans la seconde étape n'est pas un nom. Le signe '$\psi^{(0)}$' y tient la place d'une étiquette de type (0). C'est seulement en procédant à un remplacement de la sorte que nous aboutissons à un nom – par exemple '$X^{(0)}(X_2)$'. Cependant, en impliquant ces marqueurs, nous

83. et celles qui impliquent les lettres latines. N'ayant pas encore introduit ces dernières, nous nous limitons aux marqueurs qui ne les intègrent pas. Nous ne nous intéressons donc pas ici aux marqueurs *latins* qui jouent, au sein du langage, un rôle bien plus considérable que ces simples marqueurs. Ils seront l'objet de la section 2.4.

pouvons définir la totalité des noms (propres et de fonctions) du langage *via* un processus linéaire de concaténations d'expressions. Prenons un deuxième exemple : '$X^{(0,0)}(\varphi^{((0))}_{\varphi^0}(X^0_1(\varphi^0)), X^0_2)$' :

(1) 'φ^0' est un marqueur ;

(2) donc '$X^0_1(\varphi^0)$' est un marqueur ;

(3) 'φ^0' possède une occurrence libre et n'admet aucune occurrence liée dans '$X^0_1(\varphi^0)$' donc : '$\varphi^{((0))}_{\varphi^0}(X^0_1(\varphi^0))$' est un marqueur ;

(4) 'X^0_2' est un marqueur ;

(5) donc, par (3) et (4), '$X^{(0,0)}(\varphi^{((0))}_{\varphi^0}(X^0_1(\varphi^0)), X^0_2)$' est un marqueur ;

(6) puisqu'il ne présente aucune occurrence libre d'un signe du second groupe, il s'agit d'un nom selon la méthode par marqueurs.

De plus, la définition nous assure que les types des noms et les types des expressions coïncident. Aucune preuve n'est requise pour montrer qu'un nom de type T est aussi une expression de type T. Ainsi, selon la méthode par marqueurs, '$X^{(0,((0)))}_{\psi^{(0)}}(X^0_1, \psi^{(0)}(X^0_2))$' est un nom propre et '$X^{(0,0)}(\varphi^{((0))}_{\varphi^0}(X^0_1(\varphi^0)), X^0_2)$' un nom de type $(((0)))$.

La présente stratégie nous livre donc une manière simple de vérifier si une expression est un nom du langage, et une vision précise sur la totalité de ceux-ci. Outre la difficulté induite par le système d'indexation, elle est similaire à la définition des formules et des énoncés dans les langages des prédicats. Nous pouvons donc répéter ici ce qui se fait là-bas, et caractériser les notions de complexité, de longueur et de sous-marqueur d'un marqueur.

Définition 8. *On définit par induction ces trois notions.*

Initialisation : *Tout signe 'χ^0_i' de $A(\mathscr{L}_n)$ est un marqueur de complexité 1 et de longueur 1, ce que l'on note respectivement 'Comp('χ^0_i') = 1' et 'Long('χ^0_i') = 1', et n'admet que lui-même comme sous-marqueur.*

Pas de récurrence : *Soient '$\chi^{(T_1,\ldots,T_n)}_i$' un signe de $A(\mathscr{L}_n)$, I une suite de signes de $A(\mathscr{L}_n)$ et, pour tout i entre 1 et n, t_i un marqueur tels que $\ulcorner\chi^{(T_1,\ldots,T_n)}_{i,I}(t_1,\ldots,t_n)\urcorner$ soit un marqueur. Alors :*

- $Comp(\ulcorner\chi^{(T_1,\ldots,T_n)}_{i,I}(t_1,\ldots,t_n)\urcorner) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\big(Comp(t_i)\big) + 1$;
- $Long(\ulcorner\chi^{(T_1,\ldots,T_n)}_{i,I}(t_1,\ldots,t_n)\urcorner) = \big(\sum\limits_{1\leq i\leq n} Long(t_i)\big) + 1$;
- *les sous-marqueurs de $\ulcorner\chi^{(T_1,\ldots,T_n)}_{i,I}(t_1,\ldots,t_n)\urcorner$ sont lui-même ainsi que tous les sous-marqueurs de chaque t_i, pour i entre 1 et n.*

La méthode par marqueurs permet de définir rigoureusement les noms de l'idéographie sans s'encombrer du procédé d'imbrication lié aux espaces vacants. Mais cette morphologie ne nous livre pas le lien profond que Frege entrevoyait entre les noms de sa langue et leurs contenus. Elle ne permet pas de déterminer, étape par étape, la référence d'un nom complexe sur la base de celles des noms simples à partir duquel il est construit, car elle exploite des marqueurs dénués de références. La définition que Frege murmura invariablement tout au long de ses *Grundgesetze*, sans prendre le temps de hausser le ton, nous allons désormais tenter de la formuler d'une voix haute et distincte.

2.3.3.6 La méthode par saturation

La première étape consiste à définir proprement la mécanique de saturation d'une expression par une autre. En préambule, il convient néanmoins de procéder à quelques remarques concernant les difficultés posées à cet égard par la prise en compte de la totalité des types.

Le nom d'une fonction à plusieurs arguments incorpore différentes lettres du troisième groupe. Les étapes de saturation impliquent donc plusieurs remplacements. Examinons le cas du nom atomique de type $(0,0,0)$: '$X^{(0,0,0)}(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0)$'. Il doit être complété par trois noms d'objets. Le problème consiste à déterminer quel nom d'objet occupera quelle place, et se règle à travers l'utilisation des indices. Nous allons écrire les arguments dans un certain ordre, entre crochets à la suite du nom de fonction. Le premier argument viendra remplacer le signe du troisième groupe associé à l'entier naturel le plus petit, le second argument viendra remplacer le signe du troisième groupe associé au deuxième entier naturel le plus petit, etc. Voici un exemple :

(1) $X^{(0,0,0)}(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0)[X_2^0][X_1^0][X_4^0]$
(2) $X^{(0,0,0)}(\varphi_1^0[X_2^0], \varphi_2^0[X_1^0], \varphi_3^0[X_4^0])$
(3) $X^{(0,0,0)}(X_2^0, X_1^0, X_4^0)$

Observons à présent la saturation du nom (complexe) de fonction '$X^{(0,0,0)}(\varphi_4^0, \varphi_2^0, \varphi_6^0)$' par les trois mêmes arguments, écrits dans l'ordre identique :

(1) $X^{(0,0,0)}(\varphi_4^0, \varphi_2^0, \varphi_6^0)[X_2^0][X_1^0][X_4^0]$
(2) $X^{(0,0,0)}(\varphi_4^0[X_1^0], \varphi_2^0[X_2^0], \varphi_6^0[X_4^0])$
(3) $X^{(0,0,0)}(X_1^0, X_2^0, X_4^0)$

Le premier argument prend la place de 'φ_2^0', dont l'entier naturel est le plus petit, le second celle de 'φ_4^0' et le troisième celle de 'φ_6^0'. Voyons maintenant le déroulement des opérations pour une fonction dont les arguments ne sont pas du même type. Considérons la saturation du nom (atomique) '$X_{\psi^0}^{(0,(0))}(\varphi^0, \varphi^{(0)}(\psi^0))$' de type $(0,(0))$ par deux noms (atomiques) de types respectifs 0 et (0) :

(1) $X_{\psi^0}^{(0,(0))}(\varphi^0, \varphi^{(0)}(\psi^0))[X^0][X^{(0)}(\varphi^0)]$
(2) $X_{\psi^0}^{(0,(0))}(\varphi^0[X^0], \varphi^{(0)}[X^{(0)}(\varphi^0)]\Big(\psi^0\Big))$
(3) $X_{\psi^0}^{(0,(0))}(X^0, X^{(0)}(\varphi^0[\psi^0]))$
(4) $X_{\psi^0}^{(0,(0))}(X^0, X^{(0)}(\psi^0))$

Remarquons que l'argument de type 0 est indiqué en premier. En effet, nous demanderons toujours que les arguments soient rangés dans l'ordre croissant des types. Ainsi, nous saurons que le i-ème nom prévu pour compléter un nom de type $(T_1, \ldots, T_n)$ est de type T_i. Outre la multiplication du nombre d'arguments, le processus de saturation est tel que nous l'avons décrit dans la dernière section. Néanmoins, le nombre de remplacements à opérer à chaque étape peut rapidement (et considérablement) augmenter. Nous sommes parvenus à le restreindre en choisissant des fonctions dont les arguments n'attendaient qu'un seul argument. Sortons de ces limites, et envisageons la saturation du nom (atomique)

$$\text{`}X_{\psi_1^0,\psi^{(0)}}^{(0,(0,(0)))}(\varphi^0\ ,\ \varphi_{\varphi^0}^{(0,(0))}(\psi_1^0, \psi^{(0)}(\varphi^0)))\text{'}$$

Avant toute chose, notons que la première occurrence de 'φ^0' n'est pas lié au signe '$\varphi^{(0,(0))}$' car elle ne figure pas dans sa portée. Il s'agit donc bien d'une place vacante pour un argument

de notre fonction. La seconde occurrence, en revanche, est bien liée à ce signe. Elle ne marque donc pas une place vacante pour un argument de la fonction, mais pour un argument de la fonction que la fonction prise en argument pourrait prendre en argument. Moralement, les deux signes sont différents. Nos définitions de la portée et de la liaison nous permettent néanmoins d'utiliser le même signe sans entraver le processus. Mais rien n'empêche de les distinguer si nous le souhaitons :

$$\text{‘}X^{(0,(0,(0)))}_{\psi^0_1,\psi^{(0)}}(\varphi^0_1\ ,\ \varphi^{(0,(0))}_{\varphi^0_2}(\psi^0_1,\psi^{(0)}(\varphi^0_2)))\text{’}$$

Le remplacement de ‘φ^0_1’ ne soulève pas de difficulté. Il suffit de lui substituer un nom d'objet – par exemple X^0. Celui de ‘$\varphi^{(0,(0))}$’ est plus compliqué. Il se voit substituer un nom de type $(0,(0))$, *i.e.* qui présente lui aussi deux types d'incomplétude. La première – 0 – sera marquée par un signe ‘φ^0’, la seconde – (0) – par un signe ‘$\varphi^{(0)}$’. Chacun d'entre eux devra à son tour être remplacé, cette fois par ce qui aura été prévu dans la portée de ‘$\varphi^{(0,(0))}$’. Néanmoins, ce signe dispose de *deux* places dans sa portée. L'expression située à la première place est ‘ψ^0_1’ et celle située à la seconde place est ‘$\psi^{(0)}(\varphi^0_2)$’. Il est nécessaire de savoir laquelle doit occuper la place de ‘φ^0’ et laquelle celle de ‘$\varphi^{(0)}$’. Nous ferons en sorte, en définissant le processus de saturation, que les expressions localisées dans les places de la portée d'un signe du troisième groupe soient classées par ordre croissant de type. Ainsi, nous saurons quel signe du troisième groupe (de différents types) est dédié à chaque place. Si ces signes ont le même type, nous adopterons à nouveau la méthode exposée ci-dessus : la première place est dédiée au signe attaché au plus petit entier naturel, la seconde au second plus petit, etc. Voyons le déroulement des étapes pour notre exemple :

(1) $X^{(0,(0,(0)))}_{\psi^0_1,\psi^{(0)}}(\varphi^0\ ,\ \varphi^{(0,(0))}_{\varphi^0}(\psi^0_1,\psi^{(0)}(\varphi^0)))[X^0][X^{(0,(0))}_{\psi^0_2}(\varphi^0,\varphi^{(0)}(\psi^0_2)])$

(2) $X^{(0,(0,(0)))}_{\psi^0_1,\psi^{(0)}}(\varphi^0[X^0]\ ,\ \varphi^{(0,(0))}_{\varphi^0}[X^{(0,(0))}_{\psi^0_2}(\varphi^0,\varphi^{(0)}(\psi^0_2)]\Big(\psi^0_1,\psi^{(0)}(\varphi^0)\Big)))$

(3) $X^{(0,(0,(0)))}_{\psi^0_1,\psi^{(0)}}(X^0\ ,\ X^{(0,(0))}_{\psi^0_2}(\varphi^0[\psi^0_1],\varphi^{(0)}[\psi^{(0)}(\varphi^0)]\Big(\psi^0_2\Big)))$

(4) $X^{(0,(0,(0)))}_{\psi^0_1,\psi^{(0)}}(X^0\ ,\ X^{(0,(0))}_{\psi^0_2}(\psi^0_1,\psi^{(0)}(\varphi^0[\psi^0_2])))$

(5) $X^{(0,(0,(0)))}_{\psi^0_1,\psi^{(0)}}(X^0\ ,\ X^{(0,(0))}_{\psi^0_2}(\psi^0_1,\psi^{(0)}(\psi^0_2)))$

C'est entre la seconde et la troisième étapes qu'il a fallu choisir laquelle des deux expressions situées entre les grandes parenthèses serait envoyée sur le premier signe du troisième groupe, et laquelle sur le second. Nous avons suivi les prescriptions établies ci-dessus, en remplaçant la lettre de plus petit type par la première expression.

Notons que la lettre ‘ψ^0_2’ figure dans le nom du deuxième argument. Il ne fallait surtout pas utiliser ‘ψ^0_1’ sinon celui-ci aurait été lié à deux lettres différentes dans le nom propre final : $X^{(0,(0,(0)))}$ et $X^{(0,(0))}$. Un problème similaire peut survenir dans le cas des lettres du troisième groupe. Nous allons donc définir le processus de sorte que les noms qui saturent et le nom qui est saturé ne partagent aucune lettre des deuxième et troisième groupes.

Il reste deux problèmes à régler avant d'avoir épuisé tous les cas de figures possibles. Rien n'interdit à un signe du troisième groupe de figurer dans la portée d'un autre *sans y être attaché*. Frege fournit, suivant ses conventions, l'exemple ‘— $\varphi(\xi)$’ (p. 39). Considérons le cas encore plus simple de ‘$\varphi^{(0)}(\varphi^0)$’. Deux noms de types 0 et (0) peuvent compléter ce dernier nom. Malheureusement, la mécanique de remplacement de ‘$\varphi^{(0)}$’ implique ‘φ^0’ qui, lui aussi, doit subir un remplacement. Voyons les étapes :

(1) $\varphi^{(0)}(\varphi_1^0)[X^0][X^{(0)}(\varphi_2^0)]$

(2) $\varphi^{(0)}[X^{(0)}(\varphi_2^0)]\Big(\varphi_1^0[X^0]\Big)$

Le dispositif prévu pour remplacer 'φ_2^0', présent dans la portée de '$\varphi^{(0)}$' dans (1), et entre nos grandes parenthèses dans (2), fait lui aussi l'objet d'un remplacement. Le phénomène se reproduit à travers les saturations des noms '$\varphi^{((0))}(\varphi^{(0)}(\varphi^0))$', '$\varphi^{(((0)))}(\varphi^{((0))}(\varphi^{(0)}(\varphi^0)))$', etc. Dans ce contexte, il importe d'effectuer d'abord les substitutions des signes du troisième groupe dont la portée ne subira pas de remplacement, *i.e.* de commencer par le signe situé le plus à droite :

(3) $\varphi^{(0)}[X^{(0)}(\varphi_2^0)]\Big(X^0\Big)$

(4) $X^{(0)}(\varphi_2^0[X^0])$

(5) $X^{(0)}(X^0)$

Cette difficulté en soulève une autre. L'enchevêtrement des signes du troisième groupe provoque parfois un accrochage entre leurs indices :

(1) $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}(\varphi_{2,\varphi_2^0}^{((0))}(X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)))[\varphi^{(0)}(X^0)][\varphi^{(0)}(X^0)]$

(2) $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(\varphi_{2,\varphi_2^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)\Big)\Big)$

(3) $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(\varphi^{(0)}[X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)]\Big(X^0\Big)\Big)$

(4) $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(X^{(0,0)}(\varphi_1^0[X^0?],\varphi_2^0)\Big)$

(4') $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0[X^0?])\Big)$

Comme convenu, nous avons d'abord amorcé le remplacement intérieur. Néanmoins, deux signes sont candidats à être remplacés par 'X^0' lors de l'étape 4. 'φ_2^0' est le bon choix, car il figure en indice du signe '$\varphi_2^{((0))}$' dont nous manipulons actuellement la portée. Celui-ci a cependant disparu lors de l'étape 3. Il faut donc mettre au point une manière de retenir les signes figurant en indice des signes remplacés à l'étape (n), qui seront eux-mêmes remplacés à l'étape $(n+2)$. Nous pouvons, par exemple, les souligner lors de l'étape $(n+1)$:

(1) $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}(\varphi_{2,\varphi_2^0}^{((0))}(X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)))[\varphi^{(0)}(X^0)][\varphi^{(0)}(X^0)]$

(2) $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(\varphi_{2,\varphi_2^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)\Big)\Big)$

(3) $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(\varphi^{(0)}[X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\underline{\varphi_2^0})]\Big(X^0\Big)\Big)$

(4) $\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}[\varphi^{(0)}(X^0)]\Big(X^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0[X^0])\Big)$

Dans nos exemples, nous n'aurons recours à cette technique que lorsqu'elle s'avèrera nécessaire. Le phénomène est heureusement assez rare. Il nous contraindra néanmoins à compliquer substantiellement notre définition de la saturation, afin de lui conférer la généralité qui lui convient.

Nous disposons désormais de tous les éléments nécessaires à l'établissement rigoureux de cette dernière. Notons cependant que nos illustrations ont impliqué (presque) exclusivement des noms élémentaires de fonctions. Nous voulons fournir un exemple plus complexe, qui servira de point de repère, et dans lequel les étapes seront proprement décrites les unes après les autres :

$$\text{‘}X^{(0,0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{(0)}_1(X^0_1),\varphi^{(0,0)}_1(X^0_2,X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(X^{(0)}_2(\psi^0_2))),\varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}(X^{(0)}_3(\varphi^0_1),\varphi^{(0)}_1(\psi^0_1)))\text{’}$$

Anticipons légèrement sur la suite, et affirmons qu'il s'agit bien d'un nom de fonction. Cependant, cette expression n'est pas le nom atomique associé à l'étiquette ‘$X^{(0,0,(0))}_1$’. Elle n'est *pas* de type $(0,0,(0))$. Elle intègre des occurrences libres des signes suivants :

$$\text{‘}\varphi^{(0,0)}_1\text{’}\ ;\ \text{‘}\varphi^{(0,(0))}_1\text{’}\ ;\ \text{‘}\varphi^{(0)}_1\text{’}$$

Notre fonction attend donc la donnée de trois arguments de types $(0,0)$, $(0,(0))$ et (0). En classant ces derniers dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, nous savons qu'elle est elle-même de type $((0),(0,0),(0,(0)))$. Pour la saturer, choisissons trois noms qui ne partagent aucune lettre des deuxième et troisième groupes ni entre eux ni avec elle :

– ‘$X^{(0)}_1(\varphi^0_2)$’
  Cette expression intègre une occurrence libre d'un signe du troisième groupe de type 0, elle est bien de type (0).

– ‘$X^{(0,0)}_1(\varphi^0_4,\varphi^0_3)$’
  Cette expression intègre une occurrence libre de deux signes du troisième groupe de type 0, elle est bien de type $(0,0)$.

– ‘$X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_3}(X^0_4,X^{(0,0)}_2(\varphi^{(0)}_2(\psi^0_3),\varphi^0_5))$’
  Cette expression intègre une occurrence libre de deux signes du troisième groupe respectivement de types 0 et (0), elle est bien de type $(0,(0))$.

Notre définition confirmera qu'il s'agit bien de noms de fonctions. Voici les différentes étapes de la saturation :

(1) $X^{(0,0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{(0)}_1(X^0_1),\varphi^{(0,0)}_1(X^0_2,X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(X^{(0)}_2(\psi^0_2))),\varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}(X^{(0)}_3(\varphi^0_1),\varphi^{(0)}_1(\psi^0_1)))[X^{(0)}_1(\varphi^0_2)]$
$[X^{(0,0)}_1(\varphi^0_4,\varphi^0_3)][X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_3}(X^0_4,X^{(0,0)}_2(\varphi^{(0)}_2(\psi^0_3),\varphi^0_5)])$

(1') Nous indiquons, à la suite du nom à compléter, les noms des arguments entre crochets dans l'ordre croissant selon leurs types.

(2) $X^{(0,0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{(0)}_1(X^0_1),\varphi^{(0,0)}_1[X^{(0,0)}_1(\varphi^0_4,\varphi^0_3)]\Big(X^0_2,X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(X^{(0)}_2(\psi^0_2))\Big),\varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}[X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_3}(X^0_4,X^{(0,0)}_2$
$(\varphi^{(0)}_2(\psi^0_3),\varphi^0_5)]\Big(X^{(0)}_3(\varphi^0_1),\varphi^{(0)}_1[X^{(0)}_1(\varphi^0_2)]\Big(\psi^0_1\Big)\Big)))$

(2') Nous localisons les noms des arguments immédiatement à droite des signes du troisième groupe qu'ils sont destinés à remplacer en respectant les types, puis nous plaçons entre grandes parenthèses la portée de ces derniers signes, dont les expressions aux différentes places sont prévues pour remplacer les signes du troisième groupe des noms des arguments. Remarquons que la portée de ‘$\varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}$’ est aussi soumise à un remplacement (celui de ‘φ^0_2’). Il convient donc d'achever le processus dans cette portée avant de modifier ‘$\varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}$’.

(3) $X^{(0,0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{(0)}_1(X^0_1),X^{(0,0)}_1(\varphi^0_4[X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(X^{(0)}_2(\psi^0_2))],\varphi^0_3[X^0_2]),\varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}$

$[X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_3}(X^0_4, X^{(0,0)}_2(\varphi^{(0)}_2(\psi^0_3), \varphi^0_5)]\Big(X^{(0)}_3(\varphi^0_1), X^{(0)}_1(\varphi^0_2[\psi^0_1])\Big)))$

(3') '$\varphi^{(0,0)}_1$' est remplacé et les expressions figurant aux deux places dans sa portée sont mises entre crochets à côté des signes de l'expression qui s'est substituée à '$\varphi^{(0,0)}_1$' qu'elles sont censées remplacer. Notons qu'elles partagent le même type. Nous avons donc suivi notre règle pour décider laquelle remplacerait quelle signe : celle qui figure à la première place est destinée au signe contenant le plus petit entier 'φ_3', et celle qui figure à la seconde au signe contenant le plus grand entier 'φ_4'.
Comme convenu, '$\varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}$' n'a pas été touché. '$\varphi^{(0)}_1$' a été remplacé et l'expression contenue dans sa portée a été située entre crochets à droite du signe 'φ^0_2' qu'elle doit remplacer.

(4) $X^{(0,0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{(0)}_1(X^0_1), X^{(0,0)}_1(X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(X^{(0)}_2(\psi^0_2)), X^0_2), \varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}[X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_3}(X^0_4, X^{(0,0)}_2(\varphi^{(0)}_2(\psi^0_3), \varphi^0_5)]$
$\Big(X^{(0)}_3(\varphi^0_1), X^{(0)}_1(\psi^0_1)\Big)))$

(4') Seules les substitutions de type 0 (de 'φ^0_3', 'φ^0_4' et 'φ^0_2') ont été effectuées. Le travail est donc achevé concernant ces parties. Plus aucun remplacement n'est attendu dans la portée de '$\varphi^{(0,0)}_1$', nous pouvons lui appliquer la mécanique.

(5) $X^{(0,0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{(0)}_1(X^0_1), X^{(0,0)}_1(X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(X^{(0)}_2(\psi^0_2)), X^0_2), X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_3}(X^0_4, X^{(0,0)}_2(\varphi^{(0)}_2[X^{(0)}_3(\varphi^0_1)]\Big(\psi^0_3\Big),$
$\varphi^0_5[X^{(0)}_1(\psi^0_1)])))$

(5') '$\varphi^{(0,(0))}_{1,\varphi^0_1}$' est remplacé, et les expressions dans sa portée placées entre crochets à droite des signes auxquels elles doivent se substituer. Ici, les types ont pu nous guider. '$X^{(0)}_3(\varphi^0_1)$' est de type (0), il s'est joint à '$\varphi^{(0)}_2$'. '$X^{(0)}_1(\psi^0_1)$' est de type 0, il s'est associé à 'φ^0_5'.

(6) $X^{(0,0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{(0)}_1(X^0_1), X^{(0,0)}_1(X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(X^{(0)}_2(\psi^0_2)), X^0_2), X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_3}(X^0_4, X^{(0,0)}_2(X^{(0)}_3(\varphi^0_1[\psi^0_3]), X^{(0)}_1(\psi^0_1))))$

(6') 'φ^0_5' est remplacé, le travail est accompli de ce côté. '$\varphi^{(0)}_2$' est remplacé par '$X^{(0)}_3(\varphi^0_1)$', et le signe du troisième groupe qui y figure est à présent suivi de l'expression dans la portée de '$\varphi^{(0)}_2$', destinée à le remplacer.

(7) $X^{(0,0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{(0)}_1(X^0_1), X^{(0,0)}_1(X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(X^{(0)}_2(\psi^0_2)), X^0_2), X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_3}(X^0_4, X^{(0,0)}_2(X^{(0)}_3(\psi^0_3), X^{(0)}_1(\psi^0_1)))$

(7') 'φ^0_1' est remplacé, le processus est terminé.

Remarquons que nous n'avons présenté que des saturations de (ce qui sera bientôt reconnu comme des) noms de fonctions, sans expliquer comment circonscrire l'ensemble de ces éléments syntaxiques. Pourtant, notre objectif n'est autre que la définition rigoureuse des noms d'objets et de fonctions de $\mathscr{L}_n$. Bien sûr, la mécanique de saturation est indispensable à la réalisation de cette tâche, car elle permet de construire de nouveaux noms propres sur la base d'anciens noms de fonctions. Mais il semble qu'elle ne soit pas suffisante, la formation d'un nouveau nom de fonction exigeant la *désaturation* d'un nom dans un nom d'objet.

En vérité, le processus de désaturation est subordonné à celui de saturation. Par exemple, une expression est un nom de fonction de type ((0)) si et seulement si le résultat de sa saturation par un nom de fonction de type (0) est un nom d'objet. L'induction visée procède comme suit : saturer entre eux les noms de fonctions connus pour former de nouveaux noms propres, puis sélectionner comme nouveaux noms de fonctions, parmi *toutes* les expressions, celles dont la saturation par des noms de fonctions connus aboutit à des noms d'objets connus, etc. Ainsi, elle

exige de pouvoir effectuer des saturations d'*expressions non encore reconnues comme des noms de fonctions*. Heureusement, le procédé que nous avons mis à jour est totalement général, car il peut être *testé* sur n'importe quelle expression du langage. Nos illustrations ont été sélectionnées de sorte qu'à chaque étape, nous trouvions toujours entre nos parenthèses le contenu idéal à la poursuite des opérations. Ce n'est plus le cas si nous choisissons arbitrairement nos expressions. Par exemple, envisageons de saturer '$X^{((0))}_{\psi^0}(\varphi^{(0)}_1(\psi^0))$' par '$\varphi^{(0)}_2(X^0)$'. La mécanique s'arrête dès la première étape, car aucun signe du troisième groupe de la première expression n'est du même type que la seconde. L'interruption peut survenir plus loin, par exemple :

(1) $\varphi^{((0))}_{\varphi^0}(X^0)[X^{(0)}(\varphi^{(0)}(X^0_2))]$

(2) $\varphi^{((0))}_{\varphi^0}[X^{(0)}(\varphi^{(0)}(X^0_2))](X^0)$

(3) $X^{(0)}(\varphi^{(0)}[X^0\,?\,?\,?](X^0_2))$

Le signe '$\varphi^{((0))}_{\varphi^0}$' se voit d'abord remplacé par une expression du bon type. Mais ce qui doit se substituer à '$\varphi^{(0)}$' n'est pas du type adéquat, la procédure s'interrompt donc entre (2) et (3). C'est une bonne chose, car nous ne voulons pas intégrer '$\varphi^{((0))}_{\varphi^0}(X^0)$' à l'ensemble de nos noms, l'indice du premier signe ne figurant pas dans sa portée.

Il serait néanmoins incorrect d'affirmer que la procédure aboutit seulement lorsqu'elle s'applique à des *noms* (de types compatibles). '$X^0(\varphi^{(0)}(()\psi^0))$' n'est évidemment rien de tel. Non seulement il intègre une série de parenthèses hors de propos, mais il place une étiquette de type 0 devant une parenthèse ouvrante et incorpore un 'ψ' qui ne figure en indice d'aucun signe. Notre mécanique, suivie à la lettre, permet pourtant de le saturer :

(1) $X^0(\varphi^{(0)}(()\psi^0))[X^{(0)}(\varphi^0)]$
L'expression prise en argument étant de type (0), elle peut remplacer $\varphi^{(0)}$. Nous l'entourons de crochets à la suite de ce signe, et avant la portée de ce dernier. La portée est définie comme l'expression qui débute après la parenthèse ouvrante et s'achève à la première parenthèse fermante telle que figure entre les deux parenthèses un nombre égal de parenthèses ouvrantes et fermantes. Rigoureusement, il s'agit donc de '$()\psi^0$' :

(2) $X^0(\varphi^{(0)}[X^{(0)}(\varphi^0)]\Big(()\psi^0\Big))$
D'après nos définitions, '$()\psi^0$' est une expression de type 0 de $\mathscr{L}_n$ [84]. Elle peut donc venir occuper la place d'un signe du troisième groupe du même type :

(3) $X^0(X^{(0)}(\varphi^0[()\psi^0]))$

(4) $X^0(X^{(0)}(()\psi^0))$

Nous voyons ici la mécanique de saturation s'appliquer à une expression que nous désirons exclure des noms de fonctions. Rien de grave ! L'essentiel étant qu'elle aboutisse à une expression – '$X^0(X^{(0)}(()\psi^0))$' – que nous souhaitons aussi exclure des noms d'objets. Une expression est intégrée aux noms de fonctions si et seulement un nom d'*objet* résulte de sa saturation par des noms de fonctions. Il suffit donc que les choses se déroulent convenablement dans les contextes qui nous importent. Il nous est indifférent que, le reste du temps, la procédure s'interrompe ou qu'elle aboutisse de manière incorrecte.

Or cette mécanique, qui peut être testée sur toutes les expressions et qui aboutit comme nous le souhaitons là où nous y tenons, est entre nos mains. Nous venons d'en livrer le détail. Nous connaissons son fonctionnement et pouvons l'appliquer à notre gré. Écrire sa définition n'est donc qu'une formalité, pénible car méticuleuse, à laquelle nous devons à présent procéder.

84. puisqu'elle n'incorpore aucun signe du troisième groupe.

Définition 9. *À travers une procédure récursive, nous allons définir l'opération partielle $S(t, a, r, s)$ dont :*

- *le premier argument t est une expression de $\mathscr{L}_n$;*
- *le second argument a est une suite finie éventuellement vide d'expressions de $\mathscr{L}_n$;*
- *les troisième et quatrième arguments r et s sont des ensembles finis éventuellement vides de signes du troisième groupe de $A(\mathscr{L}_n)$.*

Soient t, a, r et s de cette sorte. La procédure est interrompue ($S(t, a, r, s)$ n'est pas défini) si[85] *au moins une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

- *les membres de a ne sont pas classés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$ relativement à s ;*
- *un signe du second ou troisième groupe figure dans plus d'un membre de a, ou à la fois dans t et dans un membre de a ;*
- *il existe un type T et un entier i tels qu'au moins i membres de a soient de type T relativement à s et tels qu'il existe strictement moins de i éléments de type T dans r dont au moins une occurrence est libre dans t.*

Sinon, alors si a est la suite vide, $S(t, a, r, s) = t$.
Sinon, alors $S(t, a, r, s)$ est définie à travers l'opération suivante.
Soit une occurrence de $\ulcorner\varphi_N^T(a_1)\urcorner$ libre dans t telle qu'aucun membre de r n'y figure libre dans t, telle que a_1 soit la portée de 'φ_N^T', et que 'φ_N^T' soit membre de r. Alors cette occurrence de $\ulcorner\varphi_N^T(a_1)\urcorner$ est remplacée dans t par $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ où :

- *t_1 est le i-ème membre de type T de a relativement à s tel que i soit le nombre d'entiers naturels $N' \leq N$ tels que '$\varphi_{N'}^T$' appartienne à r et figure libre dans t ;*
- *a_1 est tel que nous l'avons défini ;*
- *r_1 est l'ensemble des membres de s dont une occurrence libre au moins est présente dans t_1 ;*
- *s_1 est l'ensemble des signes figurant en indice de cette occurrence de 'φ_N^T'.*

On note t' le résultat de cette opération. Nous posons alors : $S(t, a, r, s) = S(t', a', r', s')$ où :

- *t' est tel que nous l'avons défini ;*
- *a' est le résultat du retranchement dans a de tous les membres qui ont été sollicités pour les remplacements de toutes les occurrences libres dans t d'un signe de r ;*
- *r' est le résultat du retranchement dans r de tous les éléments dont toutes les occurrences libres dans t ont été remplacées ;*
- *s' est le résultat du retranchement dans s de tous les éléments dont aucune occurrence libre ne figure dans aucun membre de a'.*

Définition 10. *Soit t une expression de $\mathscr{L}_n$ et a une suite d'expressions de $\mathscr{L}_n$, et r (respectivement s) l'ensemble des signes du troisième groupe dont une occurrence au moins figure libre*

85. Nous ne disons pas 'si et seulement si'. Il s'agit donc de conditions suffisantes pour que la procédure n'aboutisse pas, mais non nécessaires.

dans t (respectivement dans un membre de a). Alors $S(t, a, r, s)$ est le résultat de la saturation de t par les membres de a – aussi noté $Sat(t, a)$ –, dans l'ordre dans lequel ils y figurent.

Notre procédure est récursive. Elle peut s'interrompre, mais elle ne peut continuer indéfiniment. Il s'agit en vérité d'une combinaison de deux mécaniques. D'un côté, nous faisons strictement décroître le nombre de termes de a, d'un autre nous diminuons progressivement la longueur de cette suite, conçue comme une expression de $\mathscr{L}_n$. Ainsi, si l'opération ne s'interrompt pas, a se vide inéluctablement, ce qui nous conduit au résultat.

Nous n'allons pas nous étendre sur ces définitions. Disons seulement que la succession des t' est exigée par l'enchevêtrement éventuel des signes du troisième groupe, et la spécification des arguments s et s' par leurs accrochages possibles. Il nous importait surtout d'exposer aux yeux du lecteur la mécanique de saturation. Réunir ses différentes composantes dans une définition rigoureuse n'était, finalement, qu'un long travail de manutention. Il était pourtant nécessaire de s'y appliquer, afin d'ouvrir sur une définition tout aussi rigoureuse des règles grammaticales qui, selon Frege, reflètent la *totalité* des phénomènes sémantiques et ontologiques. Ce que nous dessinons ici, ce sont donc les traits précis de sa langue idéale, celle dont il n'a requis qu'un morceau, mais qu'il concevait, sans la voir clairement, dans toute sa généralité.

Nous allons utiliser cette mécanique pour circonscrire la totalité des noms du langage. Il nous faudra alors démontrer que les expressions sélectionnées se comportent comme nous l'attendons, *i.e.* qu'elles sont saturables les unes par les autres lorsque leurs types sont compatibles. Cette preuve impliquera certaines définitions et théorèmes qu'il nous faut spécifier dès maintenant.

Tout d'abord, notons que la seconde clause d'interruption de la procédure interdit de saturer entre eux certains noms de fonctions et d'objets qui, pourtant, opèrent parfaitement les uns sur les autres. Considérons par exemple les deux noms suivants :

$$\text{`}X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_1}(\varphi^0, \psi^0_1)\text{'} \quad \text{`}X^{((0))}_{1,\psi^0_1}(\psi^0_1)\text{'}$$

Leurs types respectifs sont (0) et 0, ainsi la fonction à laquelle réfère le premier nom peut parfaitement prendre en argument l'objet auquel réfère le second. Néanmoins, la mécanique de saturation n'aboutit pas dans ce cadre, car les deux expressions partagent une même lettre du deuxième groupe. Nous avons déjà expliqué l'intérêt de cette précaution. Si nous avions permis cette saturation, il en aurait résulté le nom :

$$\text{`}X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{((0))}_{1,\psi^0_1}(\psi^0_1), \psi^0_1)\text{'}$$

Or ce dernier est ambigu, car il ne permet pas de déterminer si la première occurrence de 'ψ^0_1' se rapporte à '$X^{(0,(0))}_1$ ou à '$X^{((0))}_1$. La solution consiste à ré-indexer un des deux noms – '$X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(\psi^0_2)$' – *avant* de procéder à la saturation – '$X^{(0,(0))}_{1,\psi^0_1}(X^{((0))}_{1,\psi^0_2}(\psi^0_2), \psi^0_1)$' –, afin de lever toute équivoque. Elle repose sur le fait que la ré-indexation ne change pas la référence du nom en question. Il s'agit donc d'un simple procédé syntaxique sans aucune incidence sémantique, qu'il convient de définir rigoureusement :

Définition 11. *Soient t et t' deux $\mathscr{L}_n$-expressions. Nous dirons que t' est une ré-indexation de t si et seulement s'il existe, pour chaque type T, deux fonctions injectives $f_T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g_T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que t' soit le résultat du remplacement dans t, pour tout signe du deuxième (respectivement du troisième) groupe 'ψ^T_i' (respectivement 'φ^T_i') y figurant, de toutes les occurrences de 'ψ^T_i' (respectivement 'φ^T_i'), comme signes ou comme indices, par '$\psi^T_{f^T(i)}$' (respectivement '$\varphi^T_{g^T(i)}$').*

Nous dirons qu'une propriété est vraie pour une expression à ré-indexation près si et seulement si elle est vraie pour une ré-indexation de cette expression.

Nous dirons qu'une relation intervient à ré-indexations près entre certaines expressions si et seulement si elle intervient entre des ré-indexations de ces expressions.

Nous ne demanderons donc pas que le processus de saturation aboutisse toujours entre des noms de types adaptés, mais qu'il termine systématiquement *à ré-indexations près*, *i.e.* qu'il existe des ré-indexations de ces noms pour lesquelles il s'achève [86].

Par ailleurs, notre définition procède de telle sorte que, des deux côtés de la procédure, nous fassions strictement décroître le nombre de membres de r dont une occurrence au moins est libre dans le premier argument, si bien que les troisièmes arguments r_i et r'''' [87], se vident progressivement. Néanmoins, rien n'assure que cet ensemble soit vide au moment où la suite du second argument le devient, autrement dit lorsque la mécanique s'achève. Ainsi, il est possible qu'un signe du troisième groupe figure dans l'expression finale, *i.e.* que la saturation n'aboutisse pas à un nom propre. Bien sûr, dans les cas qui nous importent – lorsque les expressions en jeu sont des noms de types compatibles –, ceci ne doit pas se produire. Au contraire, il faut que le résultat de la saturation n'incorpore aucun signe du troisième groupe. Dans ce contexte, nous dirons qu'il s'agit d'une *forte saturation.* Cette notion nous servira à de nombreuses reprises dans nos preuves :

Définition 12. *Soient t une $\mathscr{L}_n$-expression et a une suite de $\mathscr{L}$-expressions. Nous dirons que t est fortement saturable par a si et seulement si $Sat(t, a)$ termine et prend la valeur d'une expression de type* 0.

Ces définitions étant fixées, nous allons démontrer certains résultats dont nous aurons ensuite à faire usage pour établir que nos noms interagissent correctement.

Fait 1. *Soient $t, t_1, \ldots, t_n$ des $\mathscr{L}_n$-expressions de types respectifs $T, T_1, \ldots, T_n$ telles que t soit fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$ à ré-indexations près, et telles que $T_1 \leq_{\mathscr{T}} \cdots \leq_{\mathscr{T}} T_n$. Alors $T = (T_1, \ldots, T_n)$.*

Démonstration. D'après la définition 5, une expression et sa ré-indexation sont trivialement de même type. Ainsi, nous pouvons considérer que t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$, quitte à remplacer t et chaque t_i par des ré-indexations appropriées.

Par cette même définition, nous savons que $T = (T_1, \ldots, T_n)$ si et seulement si, pour tout i entre 1 et n, il existe autant de lettres du troisième groupe de type T_i qui possèdent une occurrence libre dans t que de j tels que $T_i = T_j$.

Ainsi, considérons i entre 1 et n, et m le nombre de j tels que $T_i = T_j$. Il faut prouver que t incorpore des occurrences libres de m lettres du troisième groupe de type T_i.

La procédure $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ ne termine que si la suite prise en second argument est progressivement vidée de tous ses termes. Un terme de la suite est retiré lorsqu'une lettre du

86. Nous pouvons poser le problème d'une manière légèrement différente, en utilisant le fait que le concept de *ré-indexation* est une relation d'équivalence. Posons que le nom d'une entité n'est pas une expression, mais la classe d'équivalence des ré-indexations d'une expression. Il suffit alors de définir la saturation d'un nom par n autres noms comme la classe d'équivalence de l'expression à laquelle aboutit la procédure appliquée à un élément du premier nom et n éléments des suivants. Cette méthode a cela d'intuitif qu'elle permet de saturer entre eux *tous* les noms de types compatibles, mais de contre-intuitif que les noms deviennent des *ensembles* d'expressions. Les deux tactiques sont équivalentes. Nous laissons donc au lecteur le loisir de se figurer celle qui lui semble la plus naturelle.

87. Plus précisément, le troisième argument r_i''''.

troisième groupe de même type (qui présente une occurrence libre dans t) est remplacée dans t. Autrement dit, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ ne termine que s'il existe au moins autant de lettres du troisième groupe de type T_i (qui présentent une occurrence libre dans t) que de j tels que $T_i = T_j$. Ainsi t incorpore des occurrences libres d'*au moins* m lettres du troisième groupe.

De plus, la procédure prévoit le remplacement d'une lettre (qui présente une occurrence libre dans t) de type T_i pour chaque terme de type T_i de la suite prise en second argument. Autrement dit, s'il existe *strictement* plus de m lettres du troisième groupe de type T_i (qui présentent une occurrence libre dans t), alors au moins une de ces lettres, n'étant pas remplacée, présente aussi une occurrence libre dans $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$. Or cette dernière expression étant de type 0, elle n'intègre rien de tel. Donc t incorpore des occurrences libres d'*au plus* m lettres du troisième groupe de type T_i.

□

Pour comprendre l'intérêt de ce fait, il faut rappeler la stratégie fregéenne de formation des noms. Celle-ci procède par induction. Dans un premier temps, à travers la saturation de noms élémentaires, des noms propres *complexes* sont formés. Ensuite, une expression est reconnue comme nouveau nom *complexe* de fonction si sa saturation par d'anciens noms de fonctions et d'objets de types adaptés aboutit à un nom propre, éventuellement l'un de ceux qui ont été construits à l'étape précédente. Puis ces nouveaux noms de fonctions sont utilisés à leurs tours dans diverses saturations pour former de nouveaux noms propres. Et la mécanique continue ainsi à l'infini. Il ne reste alors qu'à réunir les noms construits à chaque étape.

Néanmoins les phases de construction de nouveaux noms de fonctions – de désaturation – soulèvent une difficulté. Lorsque la saturation d'une expression par une suite de noms de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$ (classés dans l'ordre croissant) aboutit à un nom propre, nous intégrons naturellement cette expression aux noms de type $(T_1, \ldots, T_n)$. Mais rien ne nous assure que sa saturation par d'autres expressions qui ont été reconnues comme des noms de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$ aboutisse toujours (à ré-indexations près), ni que la saturation d'une expression reconnue comme un nom de type $((T_1, \ldots, T_n))$ par cette expression aboutisse toujours (à ré-indexations près) [88]. Autrement dit, il faut prouver qu'un nouveau nom peut saturer et être saturé par *tous* les anciens noms de types adaptés reconnus jusque-là.

À cette fin, nous allons démontrer un fait. Celui-ci dit en substance que si deux noms sont fortement saturables par une même suite d'expressions, alors ils sont fortement saturables par exactement les mêmes suites d'expressions et saturent fortement exactement les mêmes expressions. Voyons comment régler notre problème sur cette base. Nous savons que le nouveau nom de type $(T_1, \ldots, T_n)$ est fortement saturable par n noms de types $T_1, \ldots, T_n$, car c'est ce qui nous permet de l'intégrer à cet ensemble de noms. Par hypothèse de récurrence, nous sommes assurés que n'importe quel *ancien* nom de type $(T_1, \ldots, T_n)$ est, lui aussi, fortement saturable par ces noms. Ainsi, notre fait nous assure que ces deux noms saturent et sont saturables (fortement) par exactement les mêmes expressions. Puisque l'ancien se comporte correctement avec les autres noms (par hypothèse de récurrence), il en va de même du nouveau [89].

Nous allons démontrer ce fait dans un instant, mais précisons que nous n'en serons pas quitte pour autant. En effet, selon Frege, les types de fonctions sont exclusifs. Or, jusqu'à présent, rien n'interdit d'envisager qu'une expression soit reconnue comme un nom de type T puis, construite

88. Si nous voulons formuler ce versant du problème en toute généralité, appelons t notre expression. Soit t' une expression reconnue comme un nom de type $(T'_1, \ldots, T'_m)$, telle que $T'_k = (T_1, \ldots, T_n)$ avec k entre 1 et m, et soient $m - 1$ expressions $t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_m$ reconnues comme des noms de types respectifs $T_1, \ldots, T_{k-1}, T_{k+1}, \ldots, T_m$. Alors rien ne garantit que la saturation de t' par $(t_1, \ldots, t_{k-1}, t, t_{k+1}, \ldots, t_m)$ n'aboutisse, à ré-indexations près.

89. Nous taisons certaines subtilités que nous traiterons le moment venu, mais l'idée est là.

différemment à une autre étape, comme un nom de type T' avec $T \neq T'$. En revanche, nous savons que les types des *expressions* – définis à travers les signes du troisième groupe incorporés – sont exclusifs. Il conviendra donc de montrer que tout *nom* de type T est une *expression* de type T. Le fait ci-dessus fut établi dans ce but. Une expression t est reconnue comme nom de type $(T_1, \ldots, T_n)$ lorsque sa saturation par d'anciens noms de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$ aboutit à un ancien nom propre. Par hypothèse de récurrence, ces anciens noms sont aussi des *expressions* de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$, donc d'après notre fait, t est bien un nom de type $(T_1, \ldots, T_n)$.

Résumons la situation : lorsque les noms du langage seront définis, il faudra procéder à deux vérifications. D'une part, nous montrerons que les ensembles de noms de chaque type sont disjoints, le fait ci-dessus nous y aidera. D'autre part, nous établirons que les noms de types adaptés peuvent toujours se saturer (à ré-indexations près), en utilisant le fait ci-dessous, qui exige la démonstration d'un (rapide) lemme préparatoire.

Lemme 1. *Soient t une $\mathscr{L}_n$-expression, a une suite de $\mathscr{L}_n$-expressions, r l'ensemble des signes du troisième groupe dont une occurrence au moins est libre dans t, et s un ensemble de signes du troisième groupe.*

Si $S(t, a, r, s)$ termine et n'incorpore aucun signe du troisième groupe alors :

- *$S(t, a, r, s) = Sat(t, a)$;*
- *pour toute $\mathscr{L}$-expression t' fortement saturable par a, $S(t', a, r', s)$ termine (où r' est l'ensemble des signes du troisième groupe libres dans t') et $S(t', a, r', s) = Sat(t', a)$.*

Démonstration. Soit s' l'ensemble des signes du troisième groupe dont une occurrence au moins est libre dans un membre de a. Nous voulons montrer que $S(t, a, r, s) = S(t, a, r, s')$.

Dans un premier temps, prouvons que $s' \subseteq s$. Soit un signe 'φ_N^T' appartenant à s', alors ce signe présente une occurrence libre dans un membre t_1 de a de type T_i. Puisque $S(t, a, r, s)$ termine, une étape de la procédure permet de retrancher t_1 à a, à travers le remplacement d'au moins une expression $\ulcorner\varphi_M^{T_i}(a_1)\urcorner$ par $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$, où r_1 est l'ensemble des membres de s dont une occurrence au moins est libre dans t_1, et s_1 l'ensemble des signes du troisième groupe figurant en indice de cette occurrence de '$\varphi_M^{T_i}$'. Or $S(t, a, r, s)$ – donc *a fortiori* $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ – n'incorpore aucun signe du troisième groupe. Donc 'φ_N^T', dont une occurrence est libre dans t_1, se voit remplacé durant la procédure $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$. Donc, par la définition 10, il appartient à r_1, donc à s. Ainsi $s' \subseteq s$.

Par ailleurs, à chaque retranchement d'un membre de a à travers le remplacement d'une expression $\ulcorner\varphi_M^{T_i}(a_1)\urcorner$ par $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ (défini comme ci-dessus), r_1 ne contient que les lettres de s dont une occurrence au moins est libre dans t_1. Ainsi, dans l'application de la procédure, ne jouent un rôle *que* les éléments de s dont une occurrence au moins est libre dans un membre de a, *i.e.* qui appartiennent aussi à s'. Donc, si $s' \subseteq s$ – et nous avons vu que c'était le cas –, alors $S(t, a, r, s) = S(t, a, r, s')$.

Enfin, considérons une expression t' fortement saturable par a. Nous savons que $s' \subseteq s$ et $\mathrm{Sat}(t', a) = S(t', a, r', s')$. Puisque seuls les éléments de s' jouent un rôle dans l'application de $S(t', a, r', s)$, les deux procédures sont identiques : $S(t', a, r', s')$ termine et $S(t', a, r', s') = S(t', a, r', s)$. □

Fait 2. *Soient t et t' deux $\mathscr{L}$-expressions fortement saturables par une même suite a de $\mathscr{L}_n$-expressions, à ré-indexations près. Alors :*

- *t et t' sont fortement saturables par exactement les mêmes suites de $\mathscr{L}_n$-expressions, à ré-indexations près. Autrement dit, pour toute suite a' de $\mathscr{L}_n$-expressions, t est fortement*

saturable par a' à ré-indexations près si et seulement si t' est fortement saturable par a' à ré-indexations près.

– *t et t' saturent fortement les mêmes $\mathscr{L}_n$-expressions, à ré-indexations près. Autrement dit, pour toute suite $t'', t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_m$ de $\mathscr{L}$-expressions, t'' est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_m)$ à ré-indexations près si et seulement si t'' est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_m)$ à ré-indexations près.*

Démonstration. D'après le fait 1, t et t' sont de même type T. Débutons par la preuve du premier point, en procédant par récurrence sur la profondeur de T.

Initialisation : Si $T = 0$, t et t' (ou des quelconques ré-indexations de ces termes) n'incorporent aucun signe du troisième groupe, donc la procédure de saturation ne permet de traiter aucun membre de a, elle termine (fortement) si et seulement si a est vide. Donc t et t' ne sont fortement saturables que par la suite vide.

Pas de récurrence : Si $T = (T_1, \ldots, T_n)$, alors par le fait 1, nous savons qu'il existe n termes $t_1, \ldots, t_n$ de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$ tels que $a = (t_1, \ldots, t_n)$. Nous voulons montrer que, pour toutes expressions $t'_1, \ldots, t'_n$ de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$, si t est fortement saturable par $(t'_1, \ldots, t'_n)$ à ré-indexations près, alors t' l'est aussi.

Plus simplement, il suffit de montrer que, pour tout k entre 1 et n, si t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ à ré-indexations près, alors t' l'est aussi ; puis de reproduire le raisonnement en remplaçant un à un les t_i par les t'_i.

En premier lieu, quitte à remplacer t, t', t'_k et chaque t_i par des ré-indexations appropriées, nous pouvons considérer qu'aucun signe du second ou troisième groupe n'apparaît dans deux différentes de ces expressions. Cet ajustement, destiné à respecter la deuxième clause de la définition 9, nous laisse directement supposer que t et t' sont fortement saturables par $(t_1, \ldots, t_n)$, et que t l'est aussi par $(t_1, \ldots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \ldots, t_n)$.

Les procédures de saturation de t par $(t_1, \ldots, t_n)$ et $(t_1, \ldots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ sont identiques, hormis à l'étape où le k^{e} membre de la suite est sollicité. Dans le premier cas, cette étape voit le remplacement d'un $\ulcorner \varphi_N^{T_k}(a_k) \urcorner$ par $S(t_k, a_k, r', s')$, où r' est l'ensemble des signes du troisième groupe dont une occurrence au moins est libre dans t_k, et s' l'ensemble des signes du troisième groupe figurant en indice de cette occurrence de '$\varphi_N^{T_k}$'. Puisque t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$, alors $S(t_k, a_k, r', s')$ termine et n'intègre aucun signe du troisième groupe [90] . Par le lemme 1, nous savons donc que $S(t_k, a_k, r', s') = \mathrm{Sat}(t_k, a_k)$.

Nous pouvons reproduire le même raisonnement pour $(t_1, \ldots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \ldots, t_n)$, et aboutir à $S(t'_k, a_k, r', s') = \mathrm{Sat}(t'_k, a_k)$. Ainsi t_k et t'_k sont fortement saturables par une même suite a_k, donc par hypothèse de récurrence, ils sont fortement saturables par exactement les mêmes expressions, à ré-indexations près.

Or, les procédures de saturation de t' par $(t_1, \ldots, t_n)$ et $(t_1, \ldots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ sont identiques, hormis à l'étape où le k^{e} membre de la suite est sollicité. Dans le premier cas, cette étape nous conduit à remplacer un $\ulcorner \varphi_N^{T_k}(a'_k) \urcorner$ par $\mathrm{Sat}(t_k, a'_k)$ (d'après le lemme 1), et dans le second par $S(t'_k, a'_k, r', s')$. Nous savons que la première procédure termine fortement, donc a'_k est fortement saturable par t_k donc, d'après ce que nous venons de voir, par t'_k [91]. Mais d'après le

90. Il est possible que $S(t_k, a_k, r', s')$ ne figure pas tel quel dans $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$, et soit l'objet de certains remplacements avant d'y être intégré. Ceci advient lorsque '$\varphi_N^{T_k}$' se trouve dans la portée d'une occurrence d'une lettre du troisième groupe libre dans t. Néanmoins, en retranchant de r les lettres du troisième groupe impliquées dans le remplacement, la définition 9 nous assure (induction immédiate) qu'aucune lettre du troisième groupe figurant dans $S(t_k, a_k, r', s')$ ne disparaîtra lors des remplacements qui suivront. Ainsi, puisque $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ n'intègre aucune lettre du troisième groupe, il en va de même pour $S(t_k, a_k, r', s')$.

91. Nul besoin de considérer une ré-indexation, car nous avons fait en sorte qu'aucun signe du troisième groupe de t'_k ne se retrouve dans t', donc dans a'_k.

lemme 1, $S(t'_k, a'_k, r', s')$ termine, et est égal à $\mathrm{Sat}(t'_k, a'_k)$. Par conséquent, la seconde procédure termine fortement à son tour : t' est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_{k-1}, t'_k, t_{k+1}, \ldots, t_n)$, et la première propriété est prouvée.

Passons à la seconde, en considérant une expression t'' et, pour i entre 1 et n, pour k entre 1 et n différent de i, des expressions t_k telles que t'' soit fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_m)$, à ré-indexations près. Nous voulons prouver l'énoncé suivant, à ré-indexations près :

$$t'' \text{ est fortement saturable par } (t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_m)$$

Quitte à remplacer ces expressions par des ré-indexations appropriées, nous pouvons supposer qu'elles n'ont, deux à deux, aucun signe du deuxième ou troisième groupe en commun. Ainsi la procédure de t'' par $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_m)$ termine fortement.

Elle est identique à la mécanique de saturation de t'' par $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_m)$, hormis lors du remplacement d'un $\ulcorner \varphi_N^{T_j}(a_j) \urcorner$ par $S(t, a_j, r_j, s_j)$ dans le premier cas et par $S(t', a_j, r'_j, s_j)$ dans le second, où r_j est l'ensemble des signes du troisième groupe dont une occurrence au moins est libre dans t, $r'j$ l'ensemble de ceux dont une occurrence au moins est libre dans t', et s_j l'ensemble de ceux qui figurent en indice de '$\varphi_N^{T_j}$'. Il suffit de montrer que $S(t', a_j, r'_j, s_j)$ termine fortement, en sachant qu'il en va ainsi pour $S(t, a_j, r_j, s_j)$.

Par le lemme 1, nous savons que $S(t, a_j, r_j, s_j) = \mathrm{Sat}(t, a_j)$, donc que t est fortement saturable par a_j. Or t et t' sont fortement saturables par une même suite a donc, en vertu de la propriété que nous venons de démontrer, par exactement les mêmes suites d'expressions, à ré-indexations près. Ainsi t' est fortement saturable par a_j [92]. Donc, d'après le lemme 1, $S(t', a_j, r'_j, s_j)$ termine fortement, car elle est égale à $\mathrm{Sat}(t, a_j)$. Donc t'' est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_m)$, et la seconde propriété est prouvée. □

Désormais, tout est en ordre pour bâtir l'architecture du langage. Notre induction exige, comme point de départ, une caractérisation rigoureuse des noms *atomiques* de $\mathscr{L}_n$.

Définition 13. *Nous allons définir, par une récurrence sur la profondeur de $\mathscr{T}$, les notions de terminaison et quasi-terminaison sur la base desquelles nous définirons ensuite les noms élémentaires du langage.*

Initialisation : *Pour tout entier naturel i non nul, nous avons 'ψ_i' une quasi-terminaison de type 0, de tête 'ψ_i' et sans quasi-tête.*
Pour tout entier naturel i non nul, nous avons 'φ_i' une terminaison de type 0, de tête 'φ_i' et sans quasi-tête.

Pas de récurrence : *Quel que soit l'entier naturel i non nul, si $t_1, \ldots, t_n$ sont des terminaisons respectivement de têtes $a_1, \ldots, a_n$ distinctes deux à deux et de types $T_1, \ldots, T_n$, tels que ces derniers soient rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, alors en notant I la suite de toutes les quasi-têtes de $t_1, \ldots, t_n$, nous avons $\ulcorner \psi_{i,I}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1, \ldots, t_n) \urcorner$ une quasi-terminaison de type $(T_1, \ldots, T_n)$, de tête '$\psi_i^{(T_1,\ldots,T_n)}$' et de quasi-têtes $a_1, \ldots, a_n$. Les membres identiques de I peuvent être écrits une seule fois.*
Quel que soit l'entier naturel i non nul, si $t_1, \ldots, t_n$ sont des quasi-terminaisons respectivement de têtes $a_1, \ldots, a_n$ distinctes deux à deux et de types $T_1, \ldots, T_n$, tels que ces derniers soient rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, alors en notant I la suite de toutes les quasi-têtes de $t_1, \ldots, t_n$,

92. Là non plus, nous n'avons pas à considérer une ré-indexation, nous avons pris les précautions nécessaires.

nous avons $\ulcorner \varphi_{i,I}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1,\ldots,t_n)\urcorner$ *une terminaison de type* $(T_1,\ldots,T_n)$*, de tête* '$\varphi_i^{(T_1,\ldots,T_n)}$' *et de quasi-têtes* $a_1,\ldots,a_n$*. Les membres identiques de* I *peuvent être écrits une seule fois.*

Clôture : *Aucune autre expression de* $\mathscr{L}_n$ *n'est une terminaison ou une quasi-terminaison.*

Nous pouvons à présent définir les noms élémentaires de $\mathscr{L}_n$ *à travers les deux clauses suivantes :*

- *Toutes et seules les étiquettes de type* 0 *de* $\mathscr{L}_n$ *sont des noms élémentaires de type* 0*.*
- *Soient* i *un entier naturel et* $T_1,\ldots,T_n$ *des types tels que* '$X_i^{(T_1,\ldots,T_n)}$' *soit une étiquette de* $\mathscr{L}_n$*. Soient* $t_1,\ldots,t_n$ *des terminaisons de types respectifs* $T_1,\ldots,T_n$ *dont les têtes soient distinctes deux à deux. Soit* I *la suite de toutes les quasi-têtes de* $t_1,\ldots,t_n$*. Alors* $\ulcorner X_{i,I}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1,\ldots,t_n)\urcorner$ *est un nom élémentaire de type* $(T_1,\ldots,T_n)$*. Les membres identiques de* I *peuvent être écrits une seule fois. Tous les noms élémentaires de type* $(T_1,\ldots,T_n)$ *sont construits de cette manière.*

On vérifierait par une récurrence triviale que tous les signes des noms élémentaires sont indexés dans le respect de la clause 1 (grâce au choix de terminaisons et de quasi-terminaisons dont les têtes sont distinctes deux à deux). Les noms élémentaires sont donc des suites de signes de $\mathscr{L}_n$ convenablement indexés : ce sont des expressions de $\mathscr{L}_n$.

D'autre part, nous savons que les noms élémentaires de type 0 n'incorporent aucun signe du troisième groupe. De plus, nous avons fait en sorte que les seules occurrences libres qui figurent dans un nom élémentaire de type $(T_1,\ldots,T_n)$ soient celles des têtes des terminaisons par lesquelles ce nom est formé, et que celles-ci soient toutes distinctes deux à deux. Ainsi, quel que soit i entre 1 et n, ce nom incorpore autant de signes libres du troisième groupe de type T_i qu'il n'y a d'entiers j entre 1 et n tels que $T_i = T_j$. Il s'agit donc bien d'une *expression* de $\mathscr{L}_n$ de type $(T_1,\ldots,T_n)$. Autrement dit, nos définitions des types d'une expression et d'un nom élémentaire sont compatibles.

Voici quelques exemples de noms élémentaires de $\mathscr{L}_n$ [93] :

'$X_1^{(0)}(\varphi_1^0)$'	'$X_1^{(0,0)}(\varphi_2^0,\varphi_1^0)$'	'$X_{1,\psi_1^0}^{((0),(0))}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0),\varphi_2^{(0)}(\psi_1^0))$'
'$X_1^{(0)}(\varphi_{18}^0)$'	'$X_{1,\psi_4^0}^{(0,(0))}(\varphi_3^0,\varphi_1^{(0)}(\psi_4^0))$'	'$X_{1,\psi_2^0,\psi_2^{(0)}}^{(0,(0),((0)))}(\varphi_3^0,\varphi_1^{(0)}(\psi_2^0),\varphi_{1,\varphi_2^0}^{((0))}(\psi_2^{(0)}(\varphi_2^0)))$'
'$X_1^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)$'	'$X_{1,\psi_1^0,\psi_2^0}^{((0),(0))}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0),\varphi_2^{(0)}(\psi_2^0))$'	'$X_{1,\psi_1^{((0))}}^{(0,('((((0))))))}(\varphi_{1,\varphi_1^{((0))}}^{((((0))))}(\psi_{1,\psi_1^{(0)}}^{(((0)))}(\varphi_{1,\varphi_1^0}^{((0))}(\psi_1^{(0)}(\varphi_1^0)))))$'

Il existe plusieurs noms élémentaires associés à une même étiquette, comme l'illustrent '$X_1^{(0)}(\varphi_1^0)$' et '$X_1^{(0)}(\varphi_{18}^0)$', ou encore '$X_1^{(0,0)}(\varphi_1^0,\varphi_2^0)$' et '$X_1^{(0,0)}(\varphi_2^0,\varphi_1^0)$'. Comme nous l'avons expliqué, il s'agit de simples ré-indexations qui ne modifient pas la référence de ces noms.

À présent, il convient de vérifier que nos noms élémentaires interagissent correctement au niveau de la saturation. Autrement dit, soit t un nom élémentaire de type $(T_1,\ldots,T_n)$, et soient $t_1,\ldots,t_n$ des noms élémentaires de types respectifs $T_1,\ldots,T_n$. Alors t doit être fortement saturable par $(t_1,\ldots,t_n)$. Ce point est une conséquence immédiate du fait suivant.

93. Nous utilisons toujours l'entier 1 dans les étiquettes 'X_1^T' car nous ne savons pas si le langage dispose de plus d'une étiquette de chaque type. Nous sommes seulement assurés que pour tout T, 'X_1^T' fait partie de son alphabet. Si ce dernier contient aussi 'X_i^T' pour un autre entier i, alors il suffit de remplacer 1 par i dans un nom élémentaire associé à 'X_1^T' afin d'obtenir un nom élémentaire associé à 'X_i^T'.

Fait 3. *Soient t un nom ou une quasi-terminaison de type $(T_1, \ldots, T_n)$ et $t_1, \ldots, t_n$ des noms ou quasi-terminaisons de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$. Alors t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$.*

Démonstration. Nous allons effectuer une récurrence forte sur la profondeur de $(T_1, \ldots, T_n)$. Nous utiliserons le signe 'χ' pour représenter librement 'ψ' ou 'X'.

Initialisation : Si la profondeur est 1, alors $T_i = 0$ pour tout i entre 1 et n, donc il existe $2n+1$ entiers $j, k_1, k'_1, \ldots, k_n, k'_n$ tels que t soit l'expression '$\chi_j^{(0,\ldots,0)}(\varphi_{k_1}^0, \ldots, \varphi_{k_n}^0)$' et que chaque t_i soit le nom ou la quasi-terminaison '$\chi_{k'_i}^0$'. Or nous avons trivialement :

$$\mathrm{Sat}(\text{`}\chi_j^{(0,\ldots,0)}(\varphi_{k_1}^0, \ldots, \varphi_{k_n}^0)\text{'}, (\text{`}\chi_{k'_1}^0\text{'}, \ldots, \text{`}\chi_{k'_n}^0\text{'})) = \text{`}\chi_j^{(0,\ldots,0)}(\chi_{k'_1}^0, \ldots, \chi_{k'_n}^0)\text{'}$$

Il s'agit bien d'une forte saturation, car le résultat n'intègre aucune lettre du troisième groupe.

Pas de récurrence : Si la profondeur est strictement supérieure à 1, alors il existe n expressions $a_1, \ldots, a_n$ et $n+1$ entiers $j, k_1, \ldots, k_n$ tels que t soit égal à :

$$\ulcorner \chi_j^{(T_1,\ldots,T_n)}(\varphi_{k_1}^{T_1}(a_1), \ldots, \varphi_{k_n}^{T_n}(a_n)) \urcorner$$

où aucun a_i ne contient d'occurrence libre de lettre du troisième groupe. Il est possible qu'un ou plusieurs a_i soient vides, mais tous ne peuvent l'être.

Il y a autant de 'φ_{k_i}' que de t_i de chaque type. Ainsi, d'après la définition 9, chaque $\ulcorner \varphi_{k_i}^{T_i}(a_i) \urcorner$ se voit assigner un t_{q_i} [94] tel que $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ résulte du remplacement des $\ulcorner \varphi_{k_i}^{T_i}(a_i) \urcorner$ par les $S(t_{q_i}, a_i, r_i, s_i)$ où r_i est l'ensemble des lettres du troisième groupe dont au moins une occurrence est libre dans t_{q_i}, et s_i l'ensemble des lettres du troisième groupe figurant en indice de '$\varphi_{k_i}^{T_i}$' donc, d'après la définition 13, l'ensemble des lettres du troisième groupe dont une occurrence au moins est libre dans a_i. Ainsi, d'après la définition 10, $S(t_{q_i}, a_i, r_i, s_i) = \mathrm{Sat}(t_{q_i}, a_i)$.

D'après la définition 13, nous savons que, si a_i n'est pas vide [95], il s'agit d'une suite $(t'_1, \ldots, t'_c)$ de noms ou quasi-terminaisons de types respectifs $T'_1, \ldots, T'_c$ tels que $(T'_1, \ldots, T'_c) = T_{q_i}$. Or le type de t_{q_i} est strictement moins profond que celui de t, donc par hypothèse de récurrence, $S(t_{q_i}, a_i, r_i, s_i)$ termine et n'intègre aucune lettre du troisième groupe, donc $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ termine et n'intègre aucune lettre du troisième groupe. □

Tout est en place désormais. Nous connaissons le processus de saturation des expressions de $\mathscr{L}_n$ ainsi que les noms élémentaires du langage. Nous pouvons donc terminer le travail.

Définition 14. *Nous allons définir les noms du langage à travers une $\omega \times \omega$-induction.*

Initialisation : *Pour tout T appartenant à $\mathscr{T}$, $\boldsymbol{N}_0^T$ est l'ensemble des noms élémentaires de type T.*

Pas de récurrence : *Par hypothèse, nous connaissons l'ensemble $\boldsymbol{N}_n^T$ pour tout T appartenant à $\mathscr{T}$. Nous allons d'abord définir par récurrence l'ensemble $\boldsymbol{N}_{n+1}^0$, puis les ensembles $\boldsymbol{N}_{n+1}^T$ avec $T \neq 0$ sur la base de ce dernier.*

Initialisation : *On pose $\boldsymbol{N}_{n,0}^0 = \boldsymbol{N}_n^0$.*

94. le p-ème du même type que t_i dans la suite, tel que k_i soit le p-ème entier en indice d'un 'φ^{T_i}'.

95. S'il est vide, alors le cas est trivial : $T_{q_i} = 0$ donc t_{q_i} n'intègre aucune lettre du troisième groupe, donc $S(t_{q_i}, a_i, r_i, s_i)$ – qui est égal à t_{q_i} (a_i étant vide) – n'en incorpore pas non plus.

Pas de récurrence : *Par hypothèse, nous connaissons l'ensemble* $\boldsymbol{N}^0_{n,p}$. *Une expression* t *de* $\mathscr{L}_n$ *est un élément de* $\boldsymbol{N}^0_{n,p+1}$ *si et seulement si elle vérifie une des deux conditions suivantes :*
- $t \in \boldsymbol{N}^0_{n,p}$;
- *il existe un entier naturel* m *non nul et des types* $T_1, \ldots, T_m$ *tels que* t *résulte de la saturation d'un élément* t' *de* $\boldsymbol{N}^{(T_1,\ldots,T_m)}_n$ *par* m *éléments* $t_1, \ldots, t_m$ *tels que, pour tout* i *entre* 1 *et* m, *si* $T_i = 0$ *alors* $t_i \in \boldsymbol{N}^0_{n,p}$, *sinon* $t_i \in \boldsymbol{N}^{T_i}_n$.

Clôture : $\boldsymbol{N}^0_{n+1} = \bigcup_{p\in\omega} \boldsymbol{N}^0_{n,p}$

Nous connaissons désormais l'ensemble $\boldsymbol{N}^0_{n+1}$, *il reste à déterminer* $\boldsymbol{N}^T_{n+1}$ *pour* $T \neq 0$. *Par hypothèse, nous connaissons l'ensemble* $\boldsymbol{N}^T_n$. *Puisque* T *est différent de* 0, *il existe* m *types* $T_1, \ldots, T_m$ *tels que* $T = (T_1, \ldots, T_m)$. *Une expression* t *de* $\mathscr{L}_n$ *est un élément de* $\boldsymbol{N}^T_{n+1}$ *si et seulement si elle vérifie une des deux conditions suivantes :*
- $t \in \boldsymbol{N}^T_n$;
- *il existe* m *noms élémentaires*[96] $t_1, \ldots, t_m$ *appartenant respectivement à* $\boldsymbol{N}^{T_1}_n, \ldots, \boldsymbol{N}^{T_m}_n$ [97] *et un élément* t' *de* $\boldsymbol{N}^0_{n+1}$ *tels que* t' *résulte de la saturation de* t *par* $t_1, \ldots, t_m$.

Nous connaissons désormais l'ensemble $\boldsymbol{N}^T_{n+1}$ *correspondant à un quelconque type* T.

Clôture : *Quel que soit* T *appartenant à* $\mathscr{T}$:

$$\boldsymbol{N}^T = \bigcup_{n\in\omega} \boldsymbol{N}^T_n$$

Définition : *Une expression* t *de* $\mathscr{L}_n$ *est un nom de type* T *si elle appartient à* $\boldsymbol{N}^T$.

Désormais, les noms de $\mathscr{L}_n$ sont correctement définis. Cependant, il reste encore à exploiter le travail réalisé plus tôt pour vérifier que :

96. Nous ne reproduisons pas, pour les noms de fonctions, la récurrence interne (sur j) réalisée pour les noms propres. Elle serait totalement inutile, car notre définition autorise exclusivement la désaturation de noms *élémentaires* dans un nom quelconque. Ainsi, les nouveaux noms obtenus à l'étape $\mathbf{N}^T_{n,p}$, étant complexes, ne seraient pas exploités lors des désaturations menant à $\mathbf{N}^T_{n,p+1}$. Nous aboutirions à $\mathbf{N}^T_{n,1} = \mathbf{N}^T_{n,p}$, quels que soient T et p. Au contraire, dans le §26 des *Grundgesetze*, Frege désature tout ce qui est à portée de main, y compris les noms complexes. Comme nous l'avons vu en section 2.3.2.6, il était tenu de procéder ainsi car son langage n'intègre pas de noms élémentaires de chaque type. Dans ce contexte, la récurrence interne est pertinente, parce que des noms complexes de fonctions construits à l'étape p peuvent être désaturés à l'étape $p+1$. Nous disons 'pertinente' et pas 'nécessaire' : il n'en résulterait en fin de compte aucune différence. Certains noms construits à l'étape $N^T_{0,p}$ grâce à la récurrence interne appartiendraient à N^T_p sans cette dernière, et non plus à N^T_0. Généralement, les noms seraient introduits plus tard dans la hiérarchie des N^T_i. Mais celle-ci étant infinie, le point est sans conséquence. De manière analogue, il serait parfaitement possible de simplifier notre présente définition en retranchant l'induction interne pour les noms propres, et de réduire toute l'affaire à une ω-récurrence (rien de surprenant à cela, '$\aleph_0$' et '$\aleph_0 \times \aleph_0$' n'étant pas bien éloignés). Nous nous sommes contentés de choisir la formulation la plus naturelle relativement à la stratégie que nous adoptons. Mais les inductions intérieures ne modifient pas les ensembles $\mathbf{N}^T$ finaux. Dispenser la définition sous cette forme ou sous une autre nous garde donc à proximité de celle qui utilise les noms complexes, *i.e.* celle de Frege. Par conséquent, il suffira, pour démontrer l'équivalence entre la stratégie de Frege – qui autorise les désaturations de noms complexes – et la nôtre – qui l'interdit –, de constater que la présente définition caractérise exactement les mêmes ensembles, qu'elle prenne ou non en considération les noms complexes lors des étapes de désaturation. Cette vérification sera seulement tributaire de l'hypothèse selon laquelle le langage possède un nom atomique de chaque type ; supposition qui s'avèrera, lorsque nous discuterons de sémantique, bien peu coûteuse.

97. Autrement dit à $\mathbf{N}^{T_1}_0, \ldots, \mathbf{N}^{T_m}_n$. Les deux formulations sont équivalentes, car les noms élémentaires d'un type T' sont exactement les éléments de $\mathbf{N}^{T'}_0$, et appartiennent à l'ensemble $\mathbf{N}^{T'}_q$, pour tout entier naturel q.

– les ensembles de noms de deux types différents sont disjoints ;

– les noms de types adéquats se saturent fortement, à ré-indexations près.

Comme convenu, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants, dont les points ci-dessus constituent des conséquences immédiates :

Théorème 1. *Tout nom de type T est une expression de type T.*

Théorème 2. *Soient t un nom de type $(T_1, \ldots, T_n)$ et $t_1, \ldots, t_n$ des noms de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$. Alors t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$, à ré-indexations près.*

Si la substance de leurs démonstrations, contenue dans les faits 1, 2 et 3, ne nécessite plus aucun travail, la mise en ordre de la preuve du théorème 2 requiert un soupçon de vigilance. En effet, il est non seulement nécessaire de mêler plusieurs inductions pour respecter la construction des noms, mais il faut aussi développer ces inductions de manière à établir une *relation* entre (et non pas seulement une propriété de) ces noms. Il faut donc veiller à prendre en compte *tous* les noms de chaque côté de la relation. La solution la plus simple consiste à prouver simultanément ces deux théorèmes, dans une imbrication de récurrences collectives.

Démonstration. L'induction extérieure, menée sur l'indice i des $\mathbf{N}_i^T$, établira que, pour tout type T et pour tout élément t de $\mathbf{N}_i^T$:

(1) t est une expression de type T ;

(2) s'il existe n types tels que $T = (T_1, \ldots, T_n)$, et si pour tout k entre 1 et n, $t_k \in \mathbf{N}_i^{T_k}$, alors t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$, à ré-indexations près.

En premier lieu, précisons que les ré-indexations éventuelles seront une condition permanente dans toute la suite du raisonnement. Pour alléger la démonstration, et parce qu'aucune ambiguïté ne risque d'en résulter, nous l'abandonnerons désormais à l'implicite.

Nos deux théorèmes sont des conséquences quasi-immédiates de ces deux énoncés. La clause (1) conduit trivialement au théorème 1, et un rapide développement permet de déduire le théorème 2 à partir de (2).

Supposons un nom t de type $(T_1, \ldots T_n)$ et, pour tout k entre 1 et n, un nom t_k de type T_k. La définition 14 nous assure que, pour tout entier i et pour tout type T, $\mathbf{N}_i^T \subseteq \mathbf{N}_{i+1}^T$. Ainsi il existe un plus petit entier i tel que t appartient à $\mathbf{N}_i^{(T_1,\ldots,T_n)}$ et chaque t_k à $\mathbf{N}_i^{T_k}$. La clause (2) nous permet de déduire que t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$.

Par conséquent, la restriction affectant (2) – le fait que les t_k doivent appartenir à $\mathbf{N}_i^{T_k}$ – garantira la bonne tenue de l'induction *sans rien sacrifier en généralité.*

Initialisation$_1$: Ce travail a déjà été réalisé en amont. Nous avons vérifié que tout nom élémentaire de type T était une *expression* de type T, et le fait 3 a établi que des noms élémentaires de types compatibles conduisaient à une forte saturation.

Pas de récurrence$_1$ **:** Supposons que les deux clauses soient vérifiées pour tous les éléments de $\mathbf{N}_i$ – avec $i \in \mathbb{N}$ –, nous voulons montrer qu'elles restent vraies pour tous les éléments de $\mathbf{N}_{i+1}$. À cette fin, nous allons procéder à une seconde récurrence, cette fois sur la profondeur des types. Nous allons démontrer que, pour tout entier naturel a :

(a) tout élément de $\mathbf{N}_{i+1}^T$, où T est de profondeur a, est une expression de type T ;

(b) si a est non nul, autrement dit s'il existe un entier naturel n et des types T_k avec k entre 1 et n tels que $T = (T_1, \ldots, T_n)$, alors si t est un élément de $\mathbf{N}_{i+1}^{(T_1,\ldots,T_n)}$, quels que soient les éléments t_k de $\mathbf{N}_{i+1}^{T_k}$, t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$;

(c) si t est un élément de $\mathbf{N}_{i+1}^{T}$ avec T de profondeur a, pour tout élément t' de $N_i^{(T'_1,\ldots,T'_m)}$ tel qu'il existe p tel que $T'_p = T$, posons q le plus petit entier entre 1 et m tel que la profondeur de T'_q soit strictement supérieure à a (s'il n'existe pas, alors $t_{q-1} = t_m$), et quels que soient les éléments t_k dans $\mathbf{N}_{i+1}^{T'_k}$ pour k différent de p entre 1 et $q-1$, et dans $\mathbf{N}_i^{T'_k}$ pour k entre q et m, alors t' est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_{p-1}, t, t_{p+1}, \ldots, t_{q-1}, t_q, \ldots, t_m)$ [98].

Il semble que (c) soit ici totalement superflu, car il est clair que (a) suffit à établir (1) et que (b) suffit à établir (2). Néanmoins, (c) est nécessaire à l'établissement de (b) au gré de l'induction. Pour montrer qu'un nouveau nom de type T est fortement saturable par tous les noms de types adéquats (donc de profondeurs moindres) – *i.e.* pour prouver (b) –, nous allons nous servir du fait que ces noms saturent fortement d'*anciens* noms de types dont la profondeur est supérieure aux leurs, donc potentiellement de même profondeur que T – autrement dit nous allons utiliser (c).

Initialisation$_2$: Puisque $T = 0$, la clause (b) est immédiatement vérifiée.

Par ailleurs, rappelons que l'ensemble $\mathbf{N}_{i+1}^{0}$ se construit indépendamment et antérieurement aux ensembles $\mathbf{N}_i^{T}$, pour T non nul, à travers une autre récurrence. Nous allons donc effectuer une (ultime) induction sur le j de $\mathbf{N}_{i,j}^{0}$, afin d'établir que, quel que soit l'entier j :

(a') tout élément de $\mathbf{N}_{i,j}^{0}$ est une expression de type T ;

(c') soit t' un élément de $N_i^{(T'_1,\ldots,T'_m)}$ tel que $T'_1 = 0$ et soit p le plus grand entier tel que $T'_p = 0$; si $t'_1, \ldots, t'_m$ sont tels que pour tout entier k entre 1 et p, $t'_k \in \mathbf{N}_{i,j}^{0}$, et pour tout entier k entre $p+1$ et m, $t'_k \in \mathbf{N}_i^{T'_k}$, alors t' est fortement saturable par $(t'_1, \ldots, t'_m)$.

Puisque $\mathbf{N}_{i+1}^{0} = \bigcup_{j\in\omega} \mathbf{N}_{i,j}^{0}$, la démonstration de (a') pour tout entier j aboutit immédiatement à celle de (a). Il en va de même pour (c) et (c'), car si une expression t est de type T de profondeur 0, et que T est un des membres de la suite $T'_1, \ldots, T'_n$, alors il existe un p entre 1 et n tel que T_k soit de profondeur 0 si $k \leq p$, et strictement supérieure à 0 sinon (en posant $p = n$ s'ils sont tous de profondeur 0). Cela tient, une fois de plus, à ce que les types sont rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$. (c') est donc la version relativisée (à j et) à $T = 0$ de (c).

Initialisation$_3$: D'après notre hypothèse de récurrence$_1$ (sur i), les propriétés (1) et (2) sont vraies pour tous les éléments de $\mathbf{N}_i^{0}$, donc de $\mathbf{N}_{i,0}^{0}$. Nous en déduisons immédiatement (a') et (c').

Pas de récurrence$_3$: Soit t un élément de $\mathbf{N}_{i,j+1}^{0}$. S'il appartient à $\mathbf{N}_{i,j}^{0}$, par hypothèse de récurrence$_3$ (sur j), il s'agit d'une expression de type 0. Sinon, il résulte de la saturation d'un élément t' de $\mathbf{N}_i^{(T_1,\ldots,T_n)}$ par n noms $t_1, \ldots, t_n$ appartenant respectivement à $\mathbf{N}_{i,j}^{T_k}$ pour les k tels que $T_k = 0$, et à $\mathbf{N}_i^{T_k}$ pour les autres. Par hypothèse de récurrence (sur j), il s'agit d'une forte saturation. Donc t n'incorpore aucune occurrence libre de lettre du troisième groupe, donc t est une expression de type 0.

Soit t' un élément de $N_i^{(T'_1,\ldots,T'_m)}$ tel que $T'_1 = 0$ et soit p le plus grand entier tel que $T'_p = 0$. Soient $t'_1, \ldots, t'_m$ tels que pour tout entier k entre 1 et p, $t'_k \in \mathbf{N}_{i,j+1}^{0}$, et pour tout entier k entre $p+1$ et m, $t'_k \in \mathbf{N}_i^{T'_k}$. Soient $t''_1, \ldots, t''_p$ des éléments de $\mathbf{N}_{i,j}^{0}$.

98. N'oublions pas que la profondeur est une fonction croissante sur les types, donc que les t'_k sont classés par ordre croissant sur la profondeur de leurs types.

Par hypothèse de récurrence$_3$ (sur j), t' est fortement saturable par $(t''_1, \ldots, t''_p, t'_{p+1}, \ldots, t'_n)$. De plus, $\mathrm{Sat}(t', (t'_1, \ldots, t'_m))$ résulte trivialement du remplacement dans

$$\mathrm{Sat}(t', (t''_1, \ldots, t''_p, t'_{p+1}, \ldots, t'_m))$$

de toutes les occurrences de t''_k par t'_k, pour k entre 1 et p. Ceci nous assure, d'une part, que $\mathrm{Sat}(t', (t'_1, \ldots, t'_m))$ termine. D'autre part, nous avons montré que chaque t'_k était, pour k entre 1 et p, une expression de type 0, donc qu'il n'incorporait aucune lettre du troisième groupe. Ainsi, il en va de même pour $\mathrm{Sat}(t', (t'_1, \ldots, t'_m))$. Par conséquent, t' est fortement saturable par $(t'_1, \ldots, t'_m)$ et (c') vérifiée.

La récurrence$_3$ est achevée, et ainsi l'initialisation$_2$. Il ne reste plus qu'à effectuer le pas de récurrence$_2$.

Pas de récurrence$_2$: Soit un type $T = (T_1, \ldots, T_n)$. Supposons que les propriétés (a), (b) et (c) soient vraies pour tout type de profondeur strictement inférieure à T, et considérons un élément t de $\mathbf{N}^T_{i+1}$.

Que t soit ou non dans $\mathbf{N}^T_i$ – par l'hypothèse de récurrence$_1$ (sur i) dans le premier cas, d'après la définition 14 dans le second –, il existe n expressions $t_1, \ldots, t_n$, appartenant respectivement à $\mathbf{N}^{T_1}_i, \ldots, \mathbf{N}^{T_n}_i$ et telles que $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ soit un élément de $\mathbf{N}^0_i$. Par hypothèse de récurrence$_1$ (sur i), $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ est une expression de type 0, donc t est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$.

De plus, toujours en vertu de l'hypothèse de récurrence$_1$ (sur i), $t_1, \ldots, t_n$ sont des expressions de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$. D'après le fait 1, t est donc une expression de type $(T_1, \ldots, T_n)$, donc de type T, et (a) est démontré.

Soit t' un élément de $\mathbf{N}^T_i$. D'après l'hypothèse de récurrence$_1$ (sur i), t' est fortement saturable par $(t_1, \ldots, t_n)$ donc, d'après le fait 2, t et t' saturent fortement et sont fortement saturables par exactement les mêmes expressions. Soient $t'_1, \ldots, t'_n$ appartenant respectivement à $\mathbf{N}^{T_1}_{i+1}, \ldots, \mathbf{N}^{T_n}_{i+1}$. Chaque T_k est de profondeur strictement inférieure à T. Ainsi, en appliquant l'hypothèse (c) de récurrence (sur la profondeur de T) sur p tel que $\forall k, (1 \leq k \leq n \rightarrow T_p \geq_{\mathscr{T}} T_k)$ – ceci est possible car la profondeur de tous les T_k, donc aussi de T_p, est strictement inférieure à celle de T –, alors nous savons que t' est fortement saturable par $t'_1, \ldots, t'_n$ [99]. Par conséquent, t est fortement saturable par $t'_1, \ldots, t'_n$, et (b) est établi.

Soit t un élément de $\mathbf{N}^T_{i+1}$ et t'' de $\mathbf{N}^{(T'_1, \ldots, T'_m)}_i$ avec p entre 1 et n tel que $T'_p = T$. Nous devons considérer la possibilité que d'autres T_k soient de profondeur égale à T. Sans perdre en généralité, on peut supposer que, parmi les T'_k, T'_p soit le premier type possédant cette caractéristique. Nos types sont donc rangés ainsi :

– si $k < p$, alors T'_k est de profondeur strictement inférieure à T ;
– si $p \leq k < q$, alors T'_k est de profondeur égale à T ;
– si $q < k$, alors T'_k est de profondeur strictement supérieure à T.

Pour k entre 1 et n, et différent de p, donnons-nous des expressions t'_k telles que :

– si $k < p$, alors $t'_k \in \mathbf{N}^{T'_k}_i$;
– si $p < k$, alors $t'_k \in \mathbf{N}^{T'_k}_{i+1}$.

On veut montrer que t'' est fortement saturable par

$$(t'_1, \ldots, t'_{p-1}, t, t'_{p+1}, \ldots, t'_q, \ldots, t'_m)$$

Pour chaque t_k tel que $p < k < q$, on considère un élément t''_k de $\mathbf{N}^{T'_k}_i$. En réitérant le rai-

99. Voilà pourquoi nous ne pouvions pas nous passer de (c).

sonnement réalisé ci-dessus, on voit que, pour les k en question, t'_k et t''_k sont fortement saturables par une même suite d'expressions. En appliquant $(q-p)+1$ fois le fait 2, on sait que t'' est fortement saturable par $(t'_1, \ldots, t'_{p-1}, t, t'_{p+1}, \ldots, t'_{q-1}, t'_q, \ldots, t'_m)$ si et seulement s'il l'est par $(t'_1, \ldots, t'_{p-1}, t', t''_{p+1}, \ldots, t''_{q-1}, t'_q, \ldots, t'_m)$, ce qui nous est confirmé par notre hypothèse (b) de récurrence$_3$ (sur la profondeur de T), car T'_{q-1} est de profondeur strictement inférieure à T.

Voilà qui, en achevant notre récurrence$_2$, termine notre pas de récurrence$_1$, et par conséquent notre récurrence$_1$. Nos deux théorèmes sont prouvés.

□

Au cours de cette démonstration, nous n'avons jamais impliqué le fait que seuls des noms *élémentaires* de fonctions sont exploités lors des désaturations. Autrement dit, si nous élargissions la définition 14 afin d'autoriser les noms complexes à jouer ce rôle, alors le constat suivant serait maintenu : l'appareil hiérarchique de combinaison des noms fonctionne convenablement. Car c'est bien (enfin !) ce que nous pouvons conclure : un nom possède un type unique, et des noms de types compatibles peuvent se combiner (à ré-indexations près). Nous avons longuement insisté sur l'usage approximatif et précipité, dans les *Grundgesetze*, des termes 'saturer', 'compléter' et 'remplacer'. Rigoureusement, il est incorrect d'affirmer que '$\smile^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} = \Delta)$' résulte de la "complétion" de '$\smile^{\mathfrak{a}}(\varphi(\mathfrak{a}))$' par '$\xi = \Delta$', ou du "remplacement" de 'φ' par '$\xi = \Delta$' dans le deuxième nom. Un processus syntaxique nettement plus complexe est engagé dans l'opération dite de "saturation". Au début de cette section, nous avions promis de le mettre à jour dans sa pleine généralité. Nous parvenons au bout de notre route, car cet objectif est désormais atteint : la grammaire fregéenne est *proprement et rigoureusement* définie, et nous savons à présent qu'elle se comporte telle que Frege l'espérait. Cependant, rigueur et clarté font ici bien mauvais ménage. La méthode par saturation fut dictée par la notion de types qui, s'appliquant aux fonctions, doit être répercutée au niveau linguistique. Néanmoins, sa complexité nous laisse mal entrevoir ce à quoi ressemblent véritablement les expressions impliquées dans les énoncés de l'idéographie : les noms propres. L'alternative – la méthode par marqueurs – est bien plus intuitive à cet égard. Mais, en excluant toute notion de type, elle n'a *a priori* aucun rapport avec la langue idéale de Frege. Pour réunir leurs qualités respectives, *i.e.* afin d'avoir sous les yeux la morphologie qui reflète les phénomènes sémantiques – *via* la méthode par saturation – et une vue précise sur les noms propres de ce langage – à travers la méthode par marqueurs –, il convient de montrer que les deux stratégies isolent exactement les mêmes *noms propres*.

2.3.3.7 Preuve de l'équivalence des deux méthodes

Dans les *Grundgesetze*, Frege en appela à la méthode qui s'appuie sur le difficile processus de saturation. En section 2.3.2.6, nous avons néanmoins admis une légère différence entre sa stratégie et celle que nous avons mise au point, justifiée à travers deux arguments.

- La méthode de Frege, contrairement à la nôtre, autorise la désaturation de noms complexes de fonctions.

1. Cependant, les deux stratégies sont équivalentes modulo l'hypothèse qu'il existe un nom de chaque type dans le langage.
2. Or cette hypothèse est peu couteuse, d'un point de vue sémantique.

Ces remarques anticipaient le travail qui nous attend au chapitre 3, et qui sera grandement facilité par l'exclusion de toute désaturation exploitant des noms complexes. Le deuxième argument, investi de sémantique, sera discuté à ce moment-là. Il nous faut en revanche montrer

la validité du premier, entièrement syntaxique. Nous savons que la stratégie fregéenne permet de former au moins autant de noms propres que la nôtre, puisqu'elle allège les contraintes qui pèsent sur le processus de désaturation. Il suffit donc de prouver qu'elle n'en génère pas *plus*. Nous allons nous y employer en deux temps, en montrant que :

- si t est un nom propre selon la méthode par marqueurs, alors c'est un nom propre selon notre version de la méthode par saturation ;
- si t est un nom propre selon la version fregéenne de la méthode par saturation, alors c'est un nom propre selon la méthode par marqueurs.

Cela établira une fois pour toutes que les trois stratégies – la méthode par marqueurs et les deux méthodes par saturation, avec la nuance fregéenne ou la nôtre – déterminent exactement les mêmes noms.

Formulons le problème en nous munissant des notations suivantes, qui seront utiles au cours des démonstrations :

– $\mathbf{Nf}^T$ est l'ensemble des noms de type T construit selon la définition 14 en autorisant la désaturation de noms *complexes* de fonctions [100] ;
– $\mathbf{N} = \bigcup_{T \in \mathscr{T}} \mathbf{N}^T$;
– $\mathbf{Nm} = \bigcup_{T \in \mathscr{T}} \mathbf{Nm}^T$;
– $\mathbf{Nf} = \bigcup_{T \in \mathscr{T}} \mathbf{Nf}^T$.

Nous souhaitons aboutir à la *double* égalité suivante :

$$\text{Pour tout type } T : \mathbf{N}^T = \mathbf{Nf}^T = \mathbf{Nm}^T$$

Nous savons que $\mathbf{N}^T \subseteq \mathbf{Nf}^T$. Ainsi, il suffit de prouver :

$$\bullet\ \mathbf{Nm}^T \subseteq \mathbf{N}^T \qquad\qquad \bullet\ \mathbf{Nf}^T \subseteq \mathbf{Nm}^T$$

Commençons par la démonstration du premier point, et apportons une précision préalable. Afin de ne pas compliquer davantage notre procédure de saturation, nous avons en vérité donné des critères d'interruption très larges, qui excluent de $\mathbf{N}$ certains éléments de $\mathbf{Nm}$. Il ne s'agit néanmoins que d'un problème d'indices sans conséquence, car – et c'est l'essentiel – tout élément de $\mathbf{Nm}$ appartient aussi à $\mathbf{N}$, *à ré-indexation près*. En toute rigueur, l'égalité ci-dessus est donc inexacte, et exige cette légère correction. Cependant, il ne s'agit là que d'un ajustement sans aucune incidence, comme nous l'avons vu en introduisant les ré-indexations. Nous formulons donc cet avertissement (négligeable) une fois pour toutes. Il ne sera pas utile d'y revenir.

La preuve procède par induction sur la complexité des marqueurs. Présentons ses différentes étapes à travers un exemple simple, limité aux types $(\ldots(0)\ldots)$ – c'est-à-dire aux niveaux :

(1) Nous voulons montrer que '$X^4_{\psi^2}(X^1(\psi^2_{\psi^0}(X^1(\psi^0)))$' appartient à $\mathbf{N}$.

(2) Par définition des marqueurs, nous savons que l'expression figurant dans la portée de '$X^4_{\psi^2}$' – '$X^1(\psi^2_{\psi^0}(X^1(\psi^0))$' – est aussi un marqueur.

(3) D'après cette même définition, le remplacement de l'indice de '$X^4_{\psi^2}$', de l'indice de cet indice, etc, par des lettres du troisième groupe appropriées – '$X^1(\varphi^2_{\varphi^0}(X^1(\varphi^0))$' – est aussi un marqueur. D'après la définition des ensembles $\mathbf{Nm}^T$, il s'agit d'un élément de $\mathbf{Nm}^2$.

100. Il suffit donc de répéter la définition 14 en retranchant seulement le terme 'élémentaires' du pas d'induction pour les fonctions.

(4) Par hypothèse de récurrence, cette expression appartient à $\mathbf{N}^2$.

(5) Lorsqu'elle vient saturer le nom élémentaire '$X^1(\varphi^2_{\varphi^0}(X^1(\varphi^0)))$', il en résulte l'expression initiale '$X^4_{\psi^2}(X^1(\psi^2_{\psi^0}(X^1(\psi^0)))$'. Celle-ci est donc un élément de $\mathbf{N}$.

Comme d'habitude, les complications techniques proviendront de la généralisation de cette démarche à la totalité des types. Néanmoins, le point central restera le suivant (formulé sans précaution, nous l'exprimerons bientôt en toute rigueur) : pour saturer un nom simple par une expression quelconque, il suffit de placer cette dernière *telle quelle* dans la portée de l'étiquette du nom atomique, en ayant seulement remplacé la chaîne d'indices relative à cette étiquette par des signes du troisième groupe appropriés. Nous savons qu'un tel remplacement nous maintient dans le royaume des marqueurs. Or l'expression qui figure dans la portée de l'étiquette principale d'un marqueur de type 0 est aussi un marqueur *de complexité moindre*, qui n'admet des occurrences libres que des indices de cette étiquette. En remplaçant cette chaîne d'indices par des signes du troisième groupe, nous obtenons donc un nom de fonction selon la méthode par marqueurs, donc selon la méthode par saturation, d'après l'hypothèse de récurrence. Il ne nous reste qu'à en saturer notre nom élémentaire pour obtenir le marqueur recherché. Celui-ci appartient à $\mathbf{N}$, en tant que résultat de la saturation d'éléments de cet ensemble. Bien entendu, un travail similaire doit être réalisé pour les marqueurs de types différents de 0.

Notre preuve procède donc en trois temps. D'une part, il faut correctement définir le remplacement dans un terme d'une chaîne d'indice par une autre. Ensuite, il convient de démontrer que la saturation des noms simples procède comme nous l'avons affirmé vis-à-vis de ces chaînes d'indices. Enfin, il importe de généraliser le raisonnement effectué ci-dessus à l'ensemble des marqueurs de n'importe quel type.

La substitution d'une chaîne d'indices à une autre se définit facilement à travers les notions de terminaison et de quasi-terminaison. En effet, dans ces dernières, chaque signe n'apparaît qu'une seule fois dans la portée du signe dont il figure en indice. Ainsi, une terminaison (respectivement une quasi-terminaison) de type $(T_1, \ldots, T_n)$ caractérise exactement une chaîne relative à une suite de signes du second (respectivement du troisième) groupe de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$. Considérons par exemple la terminaison de type ((0),(0,(0))) suivante :

$$\text{`}\varphi^{((0),((0),(0)))}_{1,\varphi^0_1,\varphi^{(0)}_1,\varphi^{(0)}_2}(\psi^{(0)}_1(\varphi^0_1), \psi^{((0),(0))}_{1,\psi^0_1,\psi^0_2}(\varphi^{(0)}_1(\psi^0_1), \varphi^{(0)}_2(\psi^0_2)))\text{'}$$

Supposons qu'un marqueur t intègre des occurrences libres de deux signes du troisième groupe s_1 et s_2 de types respectifs (0) et ((0),(0)). Alors, pour substituer à la chaîne de ces deux signes une chaîne de deux signes du second groupe, il suffit de remplacer s_1 par '$\psi^{(0)}_1$', s_2 par '$\psi^{((0),(0))}_1$', et les indices de s_1 et de s_2 respectivement par ceux de '$\psi^{(0)}_1$' et '$\psi^{((0),(0))}_1$', puis chaque occurrence dans t d'un membre des indices de s_1 et s_2 par une occurrence du membre correspondant de la terminaison respectivement de '$\psi^{(0)}_1$' et '$\psi^{((0),(0))}_1$', etc. Puisque les membres de départ de chaque suite sont de même type, toutes les suites des chaînes qu'ils induisent ont aussi des membres de mêmes types. Par exemple, si le signe '$\varphi^{((0),(0))}_{1,\varphi^0_3,\varphi^0_4}$' correspond à '$\psi^{((0),(0))}_{1,\psi^0_1,\psi^0_2}$', alors φ^0_3 et φ^0_4 correspondent à – et doivent être remplacés par – ψ^0_1 et ψ^0_2, respectivement. Tentons de capturer formellement cette notion de correspondance.

Définition 15. *Soit $T = (T_1, \ldots, T_n)$ un type (par convention, on pose $n = 0$ si $T = 0$). Pour chaque i entre 1 et n, notons $T_i = (T_{1r_1}, \ldots, T_{1r_i})$ (avec la même convention pour r_i). Soit I et I' des indices respectifs, conformes à la clause 1, de deux signes $\ulcorner\chi^T_{1,p}\urcorner$ et $\ulcorner\chi^T_{2,q}\urcorner$, où χ_1 et χ_2 sont donc l'une des trois lettres 'X', 'ψ' et 'φ', pas nécessairement la même.*

D'après cette clause, nous savons qu'il existe, pour i entre 1 et n et pour k entre 1 et i, des entiers $q_{i,k}$ et $q'_{i,k}$ tels que :

- $I = (\chi_{3,q_{11}}^{T_{11}}, \ldots, \chi_{3,q_{1r_1}}^{T_{1r_1}}, \ldots, \chi_{3,q_{n1}}^{T_{n1}}, \ldots, \chi_{q_{3,nr_n}}^{T_{nr_n}})$;
- $I' = (\chi_{4,q'_{11}}^{T_{11}}, \ldots, \chi_{4,q'_{1r_1}}^{T_{1r_1}}, \ldots, \chi_{4,q'_{n1}}^{T_{n1}}, \ldots, \chi_{q'_{4,nr_n}}^{T_{nr_n}})$;

où χ_3 (respectivement χ_4) est la lettre 'ψ' si χ_1 (respectivement χ_2) est 'ψ' ou 'X', et la lettre 'φ' si χ_1 (respectivement χ_2) est 'φ'.

Pour i entre 1 et n et pour k entre 1 et r_i, nous dirons que $\ulcorner \chi_{3,q_{ik}}^{T_{ik}} \urcorner$ correspond dans I à $\ulcorner \chi_{4,q_{ik}}^{T_{ik}} \urcorner$ dans I'.

Nous pouvons désormais définir rigoureusement les substitutions de chaînes d'indices.

Définition 16. *Soit t un marqueur incorporant des occurrences libres de tous les membres d'une suite $(\varphi_{p_1}^{T_1}, \ldots, \varphi_{p_n}^{T_n})$ (respectivement $(\psi_{q_1}^{T_1}, \ldots, \psi_{q_n}^{T_n})$) rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, et telle que si $T_i = T_j$ et $i < j$ alors $q_i < q_j$; et soit $(t_1, \ldots, t_n)$ une suite de quasi-terminaisons ou de noms atomiques de $\boldsymbol{N}$ (respectivement une suite de terminaisons) tel que, pour $1 \leq i \leq n$, le signe figurant en tête de t_i soit de type T_i.*

Nous dirons que le résultat de la substitution dans t de la chaîne associée à $(\varphi_{p_1}^{T_1}, \ldots, \varphi_{p_n}^{T_n})$ (respectivement à $(\psi_{q_1}^{T_1}, \ldots, \psi_{q_n}^{T_n})$) relativement à $(t_1, \ldots, t_n)$ est l'expression issue du remplacement dans t :

- *pour i entre 1 et n, de chaque occurrence de '$\varphi_{p_i}^{T_i}$' (respectivement de '$\psi_{q_i}^{T_i}$') par une occurrence de la tête de t_i ;*
- *pour chaque occurrence d'un signe s ayant été substituée à celle d'un autre signe s', de chaque membre m de son indice par le membre m' qui lui correspond dans l'indice de s', et de chaque occurrence de m dans la portée de s par une occurrence de m', indexée comme l'est l'unique occurrence de m' dans la portée de s'.*

Soit t' une terminaison (respectivement une quasi-terminaison) de type $(T_1, \ldots, T_n)$. Par définition, pour tout i entre 1 et n, l'expression e_i à la i^e place dans la portée de t' est une quasi-terminaison (respectivement une terminaison) de type T_i. Si t'' est le résultat de la substitution dans t de la chaîne associée à $(\varphi_{p_1}^{T_1}, \ldots, \varphi_{p_n}^{T_n})$ (respectivement à $(\psi_{q_1}^{T_1}, \ldots, \psi_{q_n}^{T_n})$) relativement à $(e_1, \ldots, e_n)$, alors nous dirons, pour simplifier, que t'' est le résultat de la substitution dans t de la chaîne associée à $(\varphi_{p_1}^{T_1}, \ldots, \varphi_{p_n}^{T_n})$ (respectivement à $(\psi_{q_1}^{T_1}, \ldots, \psi_{q_n}^{T_n})$) relativement à t'.

Cette définition est récursive. Elle fonctionne, d'une part, parce que les i-èmes membres des deux suites de départ sont de même type, et d'autre part parce qu'il ne figure qu'une seule occurrence de chaque signe des second et troisième groupes dans une terminaison ou une quasi-terminaison.

Par ailleurs, d'après la définition des marqueurs, il est clair que si t et $(t_1, \ldots, t_n)$ ne partagent aucun signe du second ou troisième groupe, alors l'expression résultant de l'opération est elle-même un marqueur de même complexité que t. En effet, si en indice d'une occurrence de 'φ_i^T', un signe '$\varphi_{i'}^{T'}$' est remplacé par un autre signe, alors toutes ses occurrences dans la portée de 'φ_i^T' sont aussi remplacées par des occurrences de cet autre signe. Les contraintes de liberté relatives aux marqueurs sont ainsi respectées.

Nous faisons l'impasse sur les petites preuves de ce genre, réalisables sans difficulté par récurrence sur la complexité des marqueurs, mais qui s'étendraient sur plusieurs paragraphes sans présenter d'intérêt réel.

À présent, nous pouvons en venir à la deuxième étape. En premier lieu, remarquons qu'une récurrence triviale sur la complexité établit que dans un marqueur, toute occurrence d'un signe

accompagnée de sa portée est un marqueur, que les membres de cette portée sont aussi des marqueurs, et que le remplacement d'un marqueur par un second dans un troisième, *dans le respect des indices*, est un marqueur. Exprimons rigoureusement ces différents faits :

Lemme 2. *Soient t un marqueur, $\ulcorner \chi_i^T \urcorner$ un signe de $A(\mathscr{L}_n)$, et I une suite de signes de $A(\mathscr{L}_n)$ tels que $\ulcorner \chi_{i,I}^T(a_1) \urcorner$ figure dans t, où a_1 est la portée de $\ulcorner \chi_i^T \urcorner$. Alors $\ulcorner \chi_{i,I}^T(a_1) \urcorner$ et tous les membres de a_1 sont des marqueurs.*

Lemme 3. *Soient t, t' et t'' des marqueurs tels que t' figure dans t et tels que les signes du second ou troisième groupe figurant dans t qui présentent une occurrence libre dans t'' sont exactement ceux qui présentent une occurrence libre dans t', et tels que les signes du second ou troisième groupe liés dans t'' et non dans t' ne figurent pas dans t. Alors le remplacement de t' par t'' dans t est un marqueur.*

Nous allons utiliser ces résultats pour démontrer deux autres lemmes qui établiront, comme prévu, que les noms simples se comportent comme nous le souhaitons vis-à-vis de la saturation.

Lemme 4. *Soit $\ulcorner X_{p,I}^{(T_1,\ldots,T_n)}(e_1,\ldots,e_n) \urcorner$ un nom atomique de $\boldsymbol{N}$ de type $(T_1,\ldots,T_n)$, où chaque e_i est donc une terminaison de type T_i. Pour i entre 1 et n, soient t_i un élément de $\boldsymbol{Nm}^{T_i}$, et r_i l'entier (potentiellement nul) tel qu'il existe une suite d'entiers $(q_{i1},\ldots,q_{ir_i})$ et des types $T_{i1},\ldots,T_{ir_i}$ tels que $(\varphi_{q_{i1}}^{T_{i1}},\ldots,\varphi_{q_{ir_i}}^{T_{ir_i}})$ soit la suite des signes du troisième groupe dont une occurrence au moins figure libre dans t_i, rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$ et de telle sorte que si $T_{ik} = T_{ik'}$ et $k < k'$ alors $q_{ir_k} < q_{ir_{k'}}$.*

Alors, à ré-indexations près, la saturation de t par $(t_1,\ldots,t_n)$ termine, et n'est autre que l'expression $\ulcorner X_{p,I}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t'_1,\ldots,t'_n) \urcorner$ où, pour $1 \leq i \leq n$, t'_i résulte de la substitution dans t_i de la chaîne associée à $(\varphi_{q_{i1}}^{T_{i1}},\ldots,\varphi_{q_{ir_i}}^{T_{ir_i}})$ relativement à e_i.

Lemme 5. *Soit t un élément de $\boldsymbol{Nm}^{(T_1,\ldots,T_n)}$. Soit $(p_1,\ldots,p_n)$ la suite d'entiers telle que $(\varphi_{p_1}^{T_1},\ldots,\varphi_{p_n}^{T_n})$ soit la suite des signes du troisième groupe dont une occurrence au moins figure libre dans t, rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, et de telle sorte que si $T_i = T_j$ et $i < j$ alors $p_i < p_j$. Enfin, pour i entre 1 et n, soit t_i un nom atomique de $\boldsymbol{N}$ de type T_i.*

Alors, à ré-indexations près, la saturation de t par $(t_1,\ldots,t_n)$ aboutit, et n'est autre que le résultat de la substitution dans t de la chaîne associée à $(\varphi_{p_1}^{T_1},\ldots,\varphi_{p_n}^{T_n})$ relativement à $(t_1,\ldots,t_n)$.

Démonstration. Nous allons démontrer simultanément ces deux lemmes. Considérons une expression t, un entier n, des expressions t_i pour i entre 1 et n, et deux ensembles de signes du troisième groupe r et s. Nous allons procéder par récurrence sur la somme de la complexité de t et du maximum des complexités des t_i, autrement dit sur :

$$q = \mathrm{Comp}(t) + \max_{1 \leq i \leq n} \big(\mathrm{Comp}(t_i)\big)$$

Nous allons prouver les deux propriétés suivantes, quel que soit cet entier q :

– Supposons que t soit un nom atomique de $\mathbf{N}$ ou une quasi-terminaison de type $(T_1,\ldots,T_n)$ relativement à r. Il existe donc un entier p, un type T et une suite I de signes du deuxième groupe tels que le premier signe de t muni de son indice soit $\ulcorner \chi_{p,I}^T \urcorner$, où χ est la lettre 'X' si t est un nom élémentaire, et la lettre 'ψ' si t est une quasi-terminaison. Par ailleurs, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(u_1,\ldots,u_n)$ et une suite de terminaisons

$(e_1, \ldots, e_n)$ telles que, pour $1 \leq i \leq n$, e_i soit l'expression à la u_i-ème place dans la portée de $\ulcorner \chi^T_{p,I} \urcorner$.
Supposons à présent que, pour i entre 1 et n, t_i soit un marqueur de type T_i relativement à s. Soit r_i l'entier (potentiellement nul) tel qu'il existe une suite d'entiers $(q_{i1}, \ldots, q_{ir_i})$ et des types $T_{i1}, \ldots, T_{ir_i}$ tels que $(\varphi^{T_{i1}}_{q_{i1}}, \ldots, \varphi^{T_{ir_i}}_{q_{ir_i}})$ soit la suite des signes du troisième groupe appartenant à s dont une occurrence au moins figure libre dans t_i, rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$ et de telle sorte que si $T_{ik} = T_{ik'}$ et $k < k'$ alors $q_{ir_k} < q_{ir_{k'}}$.
Alors, à ré-indexations près, $S(t, (t_1, \ldots, t_n), r, s)$ termine, et n'est autre que le résultat du remplacement dans t, pour i entre 1 et n, de e_i par le résultat de la substitution dans t_i de la chaîne associée à $(\varphi^{T_{i1}}_{q_{i1}}, \ldots, \varphi^{T_{ir_i}}_{q_{ir_i}})$ relativement à e_i.

– Supposons que t soit un marqueur de type $(T_1, \ldots, T_n)$ relativement à r. Soit $(p_1, \ldots, p_n)$ la suite d'entiers telle que $(\varphi^{T_1}_{p_1}, \ldots, \varphi^{T_n}_{p_n})$ soit la suite des signes du troisième groupe appartenant à r dont une occurrence au moins figure libre dans t, rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, et de telle sorte que si $T_i = T_j$ et $i < j$ alors $p_i < p_j$. Enfin, pour i entre 1 et n, soit t_i un nom atomique de $\mathbf{N}$ de type T_i tel que tout signe du troisième groupe qui présente une occurrence libre dans t_i soit un élément de s.
Alors, à ré-indexations près, $S(t, (t_1, \ldots, t_n), r, s)$ aboutit, et n'est autre que le résultat de la substitution dans t de la chaîne associée à $(\varphi^{T_1}_{p_1}, \ldots, \varphi^{T_n}_{p_n})$ relativement à $(t_1, \ldots, t_n)$.

On retrouve immédiatement le lemme 4 à partir de la première propriété, en choisissant pour r l'ensemble des signes du troisième groupe qui présentent une occurrence libre dans t, et pour s l'ensemble des signes du troisième groupe qui présentent une occurrence libre dans un des t_i. De même, on déduit trivialement le lemme 5 de la seconde propriété, en faisant peser les mêmes contraintes sur r et s.

Initialisation : Dans le cas de base $q = 1$, t est un marqueur de complexité 1 et $n = 0$. Ainsi, $S(t, \emptyset, r, s) = t$, et nous vérifions trivialement nos propriétés.

Pas de récurrence lié à la première propriété : Soient t un nom atomique ou une quasi-terminaison de type $(T_1, \ldots, T_n)$ relativement à un ensemble r de signes du troisième groupe et, pour i entre 1 et n, t_i un marqueur de type T_i relativement à un ensemble s de signes du troisième groupe, tels que les t_i ne partagent aucun signe du second ou troisième groupe entre eux ou avec t.

Puisque t est de type $(T_1, \ldots, T_n)$ relativement à r, il existe une suite $(\varphi^{T_1}_{p_1}, \ldots, \varphi^{T_n}_{p_n})$ rangée dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, telle que si $T_i = T_j$ et $i < j$ alors $p_i < p_j$, et dont tous les membres sont à la fois des éléments de r et des signes présentant une occurrence libre dans t.

Effectuons le raisonnement pour un nom atomique. Dans le cas d'une quasi-terminaison, il suffit de remplacer dans ce qui suit 'X' par 'ψ'. Par définition, il existe un entier p, un type T, une suite I de signes du second groupe, des suites I_i de signes du second groupe, et des suites b_i de quasi-terminaisons tels que :

$$t = \ulcorner X^T_{i,I}(\ldots, \varphi^{T_1}_{p_1,I_1}(b_1), \ldots, \varphi^{T_2}_{p_2,I_2}(b_2), \ldots, \varphi^{T_{n-1}}_{p_{n-1},I_{n-1}}(b_{n-1}), \ldots, \varphi^{T_n}_{p_n,I_n}(b_n), \ldots) \urcorner$$

Les pointillés entre $\ulcorner \varphi^{T_i}_{p_i,I_i}(b_i) \urcorner$ et $\ulcorner \varphi^{T_{i+1}}_{p_{i+1},I_{i+1}}(b_{i+1}) \urcorner$ correspondent à d'éventuelles lettres du troisième groupe libres dans t mais n'appartenant pas à r. En tant que telles, ces expressions ne seront pas impliquées dans les remplacements de la procédure de saturation. Il n'est donc pas nécessaire de les représenter, et nous avons :

$$t = \ulcorner X^T_{i,I}(\varphi^{T_1}_{p_1,I_1}(b_1), \ldots, \varphi^{T_n}_{p_n,I_n}(b_n)) \urcorner$$

D'après la définition 14, voici l'expression résultant de la procédure $S(t, a, r, s)$, si celle-ci aboutit :

$$t = \ulcorner X^T_{i,I}(S(t_1, b_1, r_1, s_1), \ldots, S(t_n, b_n, r_n, s_n))\urcorner$$

où, pour chaque i entre 1 et n :

– r_i est l'ensemble des membres de s dont une occurrence libre est présente dans t_i ;

– s_i est l'ensemble des membres de I_i.

Par définition, dans les noms atomiques et dans les quasi-terminaisons, toute expression figurant à une place quelconque dans la portée d'une occurrence d'une lettre du troisième groupe est une quasi-terminaison. Ainsi, pour i entre 1 et n, il existe un entier m_i et, pour j entre 1 et m_i, des types T_{ij} et des quasi-terminaisons t'_{ij} tels que $T_i = (T_{i1}, \ldots, T_{im_i})$ et $b_i = (t'_{i1}, \ldots, t'_{im_i})$.

De plus, toujours par définition des noms atomiques et des quasi-terminaisons, les lettres du troisième groupe qui présentent une occurrence libre dans un des t_i sont exactement les membres de I_i, autrement dit les éléments de s_i.

Par ailleurs, b_i est de type T_i relativement à r, donc relativement à s_i. Ainsi il existe une suite d'entiers $(q_{i1}, \ldots, q_{im_i})$ telle que $(\varphi^{T_1}_{q_{i1}}, \ldots, \varphi^{T_{m_i}}_{q_{im_i}})$ soit la suite des signes du troisième groupe appartenant à r_i dont une occurrence au moins figure libre dans t_i, rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, et de telle sorte que si $T_{ij} = T_{ij'}$ et $j < j'$ alors $q_{ij} < q_{ij'}$.

Enfin, d'après la définition de la complexité, nous savons que :

– $\underset{1 \leq j \leq m_i}{max}(\mathrm{Comp}(t'_{ij})) < \mathrm{Comp}(\ulcorner \varphi^{T_i}_{i,I}(b_i)\urcorner) \leq \mathrm{Comp}(t)$;

– $\mathrm{Comp}(t_i) \leq \underset{1 \leq i \leq n}{max}(\mathrm{Comp}(t_i))$.

Nous en déduisons :

$$\left(\mathrm{Comp}(t_i) + \underset{1 \leq j \leq m_i}{max}(\mathrm{Comp}(t'_{ij}))\right) < \left(\mathrm{Comp}(t) + \underset{1 \leq i \leq n}{max}(\mathrm{Comp}(t_i))\right)$$

Toutes les conditions sont vérifiées, nous pouvons appliquer la deuxième partie de l'hypothèse de récurrence.

$S(t_i, b_i, r_i, I_i)$ termine, et il s'agit du résultat de la substitution dans t_i de $(\varphi^{T_{i1}}_{q_{i1}}, \ldots, \varphi^{T_{im_i}}_{q_{im_i}})$ relativement à $(t'_{i1}, \ldots, t'_{im_i})$, autrement dit relativement à $\ulcorner \varphi^{T_i}_{p_i,I_i}(b_i)\urcorner$.

Nous en déduisons que $S(t, (t_1, \ldots, t_n), r, s)$ termine aussi, et qu'il s'agit de l'expression qui résulte du remplacement, pour i entre 1 et n, de $\ulcorner \varphi^{T_i}_{p_i,I_i}(b_i)\urcorner$ par le résultat de la substitution dans t_i de $(\varphi^{T_{i1}}_{q_{i1}}, \ldots, \varphi^{T_{im_i}}_{q_{im_i}})$ relativement à $\ulcorner \varphi^{T_i}_{p_i,I_i}(b_i)\urcorner$. Nous retrouvons notre première propriété.

Pas de récurrence lié à la seconde propriété : Soient r et s des ensembles de signes du troisième groupe. Soit t un marqueur de type $(T_1, \ldots, T_n)$ relativement à r. Soit $(p_1, \ldots, p_n)$ la suite d'entiers telle que $(\varphi^{T_1}_{p_1}, \ldots, \varphi^{T_n}_{p_n})$ soit la suite des signes du troisième groupe appartenant à r dont une occurrence au moins figure libre dans t, rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, et de telle sorte que si $T_i = T_j$ et $i < j$ alors $p_i < p_j$. Enfin, pour i entre 1 et n, soit t_i un nom atomique de $\mathbf{N}$ de type T_i tel que tout signe du troisième groupe qui présente une occurrence libre dans t_i soit un élément de s.

Ici encore, nous supposons donc que les t_i sont des noms atomiques. Le raisonnement est totalement similaire pour les quasi-terminaison.

Pour i entre 1 et n, soit l'entier m_i tel qu'il existe, pour j entre 1 et m_i, un type T_{ij}, une terminaison e_{ij} et un entier v_i tels que :

– $T_i = (T_{i1}, \ldots, T_{in})$;

– $t_i = \ulcorner X^{T_i}_{v_i,I'_i}(e_{i1}, \ldots e_{im_i})\urcorner$.

D'après la définition 14, si $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots t_n), r, s)$ termine, il résulte du remplacement dans

t, pour i entre 1 et n et quelle que soit l'occurrence de '$\varphi_{p_i}^{T_i}$' de portée a_i, de $\ulcorner\varphi_{p_i,I_i}^{T_i}(a_i)\urcorner$ par $S(t_i, a_i, r_i, s_i)$, où :

- s_i est l'ensemble des signes du troisième groupe appartenant à s et dont une occurrence figure libre dans t_i donc, par hypothèse, l'ensemble des signes du troisième groupe dont une occurrence figure libre dans t_i ;
- r_i est l'ensemble des membres de I_i.

D'après le lemme 2, nous savons que $\ulcorner\varphi_{p_i,I_i}^{T_i}(a_i)\urcorner$ et tous les membres de a_i sont des marqueurs. Par conséquent, il existe un marqueur t_{ij}, pour j entre 1 et m_i, tel que $a_i = (t_{i1}, \ldots, t_{im_i})$. De plus, chacun des membres de a_i est de complexité strictement inférieure à $\ulcorner\varphi_{p_i,I_i}^{T_i}(a_i)\urcorner$, donc strictement inférieure à t. Donc, en réitérant le raisonnement effectué lors du pas de récurrence lié à la première propriété, nous déduisons :

$$\Big(\mathrm{Comp}(t_i) + \max_{1\leq j\leq m_i}(\mathrm{Comp}(t_{ij}))\Big) < \Big(\mathrm{Comp}(t) + \max_{1\leq i\leq n}(\mathrm{Comp}(t_i))\Big)$$

Par ailleurs, puisque $\ulcorner\varphi_{p_i,I_i}^{T_i}(a_i)\urcorner$ est un marqueur, alors, pour j entre 1 et m_i, t_{ij} est un marqueur de type T_{ij} relativement à l'ensemble des membres de I_i, *i.e.* relativement à s_i.

Toutes les conditions sont vérifiées, nous pouvons appliquer la première partie de l'hypothèse de récurrence. Pour j entre 1 et m_i, soit r_{ij} l'entier tel qu'il existe une suite d'entiers $(q_{ij1}, \ldots, q_{ijr_{ji}})$ et des types $T_{ij1}, \ldots, T_{ijr_{ij}}$ tels que $(\varphi_{q_{ij1}}^{T_{ij1}}, \ldots, \varphi_{q_{ijr_{ij}}}^{T_{ijr_{ij}}})$ soit la suite des signes du troisième groupe appartenant à s_i – *i.e.* membres de I_i – dont une occurrence au moins figure libre dans t_{ij}, rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$ et de telle sorte que si $T_{ijk} = T_{ijk'}$ et $k < k'$ alors $q_{ijr_k} < q_{ijr_{k'}}$. Alors $S(t_i, a_i, r_i, s_i)$ termine, et résulte du remplacement dans t, pour j entre 1 et m_i, de e_{ij} par le résultat de la substitution dans t_{ij} de la chaîne associée à $(\varphi_{q_{ij1}}^{T_{ij1}}, \ldots, \varphi_{q_{ijr_{ij}}}^{T_{ijr_{ij}}})$ relativement à e_{ij}.

Par conséquent, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots t_n), r, s)$ aboutit à son tour, et résulte du remplacement dans t, pour i entre 1 et n, de :

$$\ulcorner\varphi_{p_i,I_i}^{T_i}(t_{i1}, \ldots, t_{im_i})\urcorner \text{ par } \ulcorner X_{v_i,I'_i}^{T_i}(t'_{i1}, \ldots, t'_{im_i})\urcorner$$

où t'_{ij} résulte de la substitution dans t_{ij} de la chaîne associée à $(\varphi_{q_{iji}}^{T_{ij1}}, \ldots, \varphi_{T_{ijr_{ij}}}^{q_{ijr_{ij}}})$ relativement à e_i.

Rappelons que les t_i ne partagent aucun signe du second groupe. Ainsi, si $k \neq k'$, les remplacements impliqués pour t_k ne sollicitent aucun signe engagé dans les remplacements impliqués pour t'_k. Par conséquent, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots t_n), r, s)$ résulte des deux opérations suivantes :

- le remplacement dans t, pour i entre 1 et n, de '$\varphi_{p_i,I_i}^{T_i}$' par '$X_{v_i,I'_i}^{T_i}$'. Nous obtenons l'expression t'.
- le remplacement dans t' :
  - pour i entre 1 et n, j entre 1 et m_i, et k entre 1 et r_{ij}, de toute occurrence de '$\varphi_{q_{ijk}}^{T_{ijk}}$' par la tête de la quasi-terminaison qui figure à la k-ème place dans la portée de e_{ij} ;
  - pour chaque occurrence d'un signe b ayant été substituée à celle d'un autre signe b', de chaque membre m de son indice par le membre m' qui lui correspond dans l'indice de b', et de chaque occurrence de m dans la portée de b par une occurrence de m', indexée comme l'est l'unique occurrence de m' dans la portée de b'.

t étant un marqueur, chaque '$\varphi_{q_{ijk}}^{T_{ijk}}$' figure dans I_i, et le signe qui lui correspond dans I'_i n'est autre que la tête de la quasi-terminaison qui figure à la k-ème place dans la portée de e_{ij}. Autrement dit, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots t_n), r, s)$ résulte du remplacement dans t :

- pour i entre 1 et n, de '$\varphi_{p_i,I_i}^{T_i}$' par '$X_{v_i,I'_i}^{T_i}$', *i.e.* par la tête de t_i ;

– pour chaque occurrence d'un signe b ayant été substituée à celle d'un autre signe b', de chaque membre m de son indice par le membre m' qui lui correspond dans l'indice de b', et de chaque occurrence de m dans la portée de b par une occurrence de m', indexée comme l'est l'unique occurrence de m' dans la portée de b'.

D'après la définition 16, il s'agit du résultat de la substitution dans t de la chaîne associée à $(\varphi_{p_1}^{T_1}, \ldots, \varphi_{p_n}^{T_n})$ relativement à $(t_1, \ldots, t_n)$. Nous retrouvons notre seconde propriété.

□

La seconde étape est achevée, nous pouvons nous lancer dans la troisième.

Fait 4. *Pour tout type T : $\boldsymbol{Nm}^T \subseteq \boldsymbol{N}^T$.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur la complexité des marqueurs. L'initialisation est évidente, car les étiquettes de type 0 sont des noms simples de $\mathbf{N}^0$. Considérons à présent un entier q strictement supérieur à 1. Supposons que, pour tout type T, les éléments de $\mathbf{Nm}^T$ de complexité strictement inférieure à q appartiennent à $\mathbf{N}^T$. Il nous faut prouver que, pour tout type T, les éléments de $\mathbf{Nm}^T$ de complexité q appartiennent aussi à $\mathbf{N}^T$. Nous allons opérer en deux étapes, en vérifiant d'abord cette propriété pour $T = 0$, et ensuite pour $T \neq 0$.

Considérons un élément t de $\mathbf{Nm}^0$ de complexité q. Par définition des marqueurs, nous savons que son premier signe ne peut être de la forme '$\varphi_p^{T'}$', sinon il incorporerait une occurrence libre d'un signe du troisième groupe, et ne serait pas de type 0. De même, il ne peut s'agir d'un signe '$\psi_p^{T'}$', sinon il incorporerait une occurrence libre d'un signe du second groupe, et n'appartiendrait pas à $\mathbf{Nm}$. Il s'agit donc d'une *étiquette* '$X_p^{(T_1,\ldots,T_n)}$'. Ainsi, puisque la complexité de ce marqueur est strictement supérieure à 1, il existe des types $T_1, \ldots, T_n$, des marqueurs $t_1, \ldots, t_n$ et un entier p tels que :

$$t = \ulcorner X_{p,I}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1, \ldots, t_n) \urcorner$$

avec $I = (\psi_{q_{11}}^{T_{11}}, \ldots, \psi_{q_{1r_1}}^{T_{1r_1}}, \ldots, \psi_{q_{n1}}^{T_{n1}}, \ldots, \psi_{q_{nr_n}}^{T_{nr_n}})$, et où chaque t_i n'incorpore aucune occurrence libre de lettre du troisième groupe, et au moins une occurrence libre des membres de la suite $(\psi_{q_{i1}}^{T_{i1}}, \ldots, \psi_{q_{ir_i}}^{T_{ir_i}})$.

Pour chaque i entre 1 et n, considérons une quasi-terminaison e_i de type $(T_{i1}, \ldots, T_{in})$ – autrement dit de type T_i – qui ne partage aucun signe du second ou troisième groupe avec t_i. Notons t'_i le résultat de la substitution dans t_i de la chaîne associée à $(\psi_{q_{i1}}^{T_{i1}}, \ldots, \psi_{q_{ir_i}}^{T_{ir_i}})$ relativement à e_i. Nous savons qu'il s'agit d'un marqueur. De plus, tous les signes du second groupe présentant au moins une occurrence libre ayant été remplacés, en respectant leurs types, par des signes du troisième groupe différents, alors il existe une suite $(\varphi'^{T_{i1}}_{qi1}, \ldots, \varphi'^{Tir_i}_{q_{ir_i}})$ rangée dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$, telle que si $T_{ik} = T_{ik'}$ et $k < k'$ alors $q'_{ir_k} < q'_{ir_{k'}}$, et dont les membres sont exactement les signes du troisième groupe qui présentent une occurrence libre dans t_i.

Considérons à présent un nom élémentaire d'étiquette '$X_p^{(T_1,\ldots,T_n)}$'. Par définition, il prend la forme $\ulcorner X_{p,I'}^{(T_1,\ldots,T_n)}(e'_1, \ldots, e'_n) \urcorner$, où chaque e'_i est une terminaison de type T_i. Quitte à ré-indexer, nous pouvons supposer que les expressions t'_i ne partagent aucune lettre du second groupe ni entre elles, ni avec notre nom élémentaire. Ainsi, d'après le lemme 4, la saturation de ce nom élémentaire par $(t'_1, \ldots, t'_n)$ termine, et il en résulte l'expression :

$$\ulcorner X_{p,I'}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t''_1, \ldots, t''_n) \urcorner$$

où t''_i provient de la substitution dans t'_i de la chaîne $(\varphi_{q'_{i1}}^{T_{i1}}, \ldots, \varphi_{q'_{ir_i}}^{Tir_i})$ relativement à e'_i.

D'une part, par hypothèse de récurrence, pour tout i entre 1 et n, t'_i étant un marqueur de complexité égale à celle des t_i, donc strictement inférieure à celle de t, alors il s'agit d'un élément de $\mathbf{N}^{T_i}$. Donc $\ulcorner X_{p,I'}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t''_1,\ldots,t''_n)\urcorner$ résulte de la saturation d'un élément de $\mathbf{N}^{(T_1,\ldots,T_n)}$ par des éléments de $\mathbf{N}^{T_i}$, pour i entre 1 et n. Par conséquent, d'après la définition 14, il s'agit d'un élément de $\mathbf{N}^0$.

D'autre part, le passage de t'_i à t''_i résulte exactement des remplacements inverses de celui de t_i à t'_i, à l'exception des entiers figurant en indices des lettres du second groupe des e'_i, qui ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux figurant en indices des lettres du second groupe qui ont été remplacés dans les t_i. Ainsi, une induction immédiate établit que, à l'issue des deux opérations ci-dessus, les signes $\ulcorner X_{p,I}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1,\ldots,t_n)\urcorner$ – c'est-à-dire t – et $\ulcorner X_{p,I'}^{(T_1,\ldots,T_n)}(t''_1,\ldots,t''_n)\urcorner$ sont identiques, à ré-indexations près. Donc t appartient bien à $\mathbf{N}^0$, à ré-indexation près.

Venons-en à la seconde étape. Considérons un élément t de $\mathbf{Nm}^T$ de complexité q, avec $T \neq 0$. Soient l'entier n et, pour $1 \leq i \leq n$, le type T_i tels que $T = (T_1,\ldots,T_n)$. Par ailleurs, soit $(\varphi_{r_1}^{T_1},\ldots,\varphi_{r_n}^{T_n})$ la suite des signes du troisième groupe dont il figure au moins une occurrence libre dans t, rangés dans l'ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$ et tel que si $T_i = T_j$ et $i < j$ alors $r_i < r_j$.

Nous savons que l'alphabet du langage intègre une étiquette de chaque type [101], nous pouvons donc nous munir, pour i entre 1 et n, d'un nom élémentaire t'_i de type T_i qui ne partage aucun signe du second ou troisième groupe avec t. D'après le lemme 5, la saturation de t par $(t_1,\ldots,t_n)$ termine, et résulte du remplacement de la substitution dans t de la chaîne associée à $(\varphi_{r_1}^{T_1},\ldots,\varphi_{r_n}^{T_n})$ relativement à $(t'_1,\ldots,t'_n)$. Il s'agit donc d'un marqueur de même complexité que t –*i.e.* de complexité q – dans lequel toutes les occurrences libres de signes du troisième groupe ont été remplacées par des étiquettes. Par conséquent, ce marqueur est de type nul, et appartient à $\mathbf{Nm}^0$. Ci-dessus, nous avons prouvé que tout élément de $\mathbf{Nm}^0$ de complexité q appartenait à $\mathbf{N}^0$, c'est donc bien le cas de notre marqueur.

Il ne reste qu'à conclure : la saturation de t par les noms simples $t_1,\ldots,t_n$ est un élément de $\mathbf{N}^0$ donc, d'après la définition 14, t est un élément de $\mathbf{Nm}^T$.

□

Nous avons parcouru la moitié du chemin. Il nous reste encore à montrer que tout élément de $\mathbf{Nf}^T$ appartient à $\mathbf{Nm}^T$. Les deux lemmes ci-dessous nous conduiront à cet objectif.

Lemme 6. *Soient t un marqueur, a une suite de marqueurs, r et s des ensembles de signes du troisième groupe. Si $S(t,a,r,s)$ aboutit, alors il s'agit d'un marqueur qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *$S(t,a,r,s)$ incorpore des occurrences libres exactement des signes des second et troisième groupes dont il figure au moins une occurrence libre dans t ou un des t_i, hormis les deux exceptions ci-dessous ;*
- *il ne figure aucune occurrence libre dans $S(t,a,r,s)$ des signes du troisième groupe appartenant à s dont au moins une occurrence est libre dans un des t_i ;*
- *il ne figure aucune occurrence libre dans $S(t,a,r,s)$ des signes du troisième groupe 'φ_k^T' dont au moins une occurrence est libre dans t, qui appartiennent à r, et tels qu'il existe un entier i tel qu'il existe i membres de a de type T relativement à s et tel que i soit le nombre d'entiers naturels $N' \leq N$ tels que '$\varphi_{N'}^T$' appartienne à r et figure libre dans t.*

101. Nous avons discuté cette hypothèse en amorce à la présente section. Il s'agit ici de son unique intervention, mais elle n'en demeure pas moins indispensable.

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur la somme de la complexité de t et du maximum des complexités des membres de a, autrement dit sur :

$$n = \mathrm{Comp}(t) + \underset{t' \text{ membre de } a}{max}(\mathrm{Comp}(t'))$$

Initialisation : Supposons que chacun de ces marqueurs soit de complexité 1, *i.e.* que $n = 2$ (c'est le cas minimum). Alors ils sont composés d'un unique signe de type 0. Selon la définition 9, la saturation ne peut aboutir que dans les deux situations suivantes. Soit a est la suite vide, alors $S(t, a, r, s) = t$, il s'agit bien d'un marqueur qui vérifie trivialement les conditions souhaitées. Soit t est un signe du troisième groupe 'φ_k^0' qui appartient à r et a est une suite incorporant un unique membre t_1 de type T relativement à s, alors $S(t, a, r, s) = t_1$, qui est aussi un marqueur. Puisque la procédure termine, t_1 est de type 0 relativement à s, donc il n'intègre aucune occurrence libre d'un élément de s, donc la seconde proposition est vérifiée. De plus, 'φ_k^0' n'est pas libre dans t_1 (car il ne figure pas dans t_1, sinon la procédure serait bloquée), donc la troisième proposition est vérifiée. Hormis cela, tout signe qui présente une occurrence libre dans 'φ_k^0' (il n'y en a pas d'autre) ou dans t_1 présente une occurrence libre dans $S(t, a, r, s)$ (qui est égal à t_1). Donc la première proposition est vérifiée.

Pas de récurrence : Si un signe 'φ_N^T' appartenant à r possède une occurrence libre dans t, et si t_k est le i-ème membre de a de type T relativement à s, où i est le nombre d'entiers naturels $N' \leq N$ tels que '$\varphi_{N'}^T$' appartienne à r et figure libre dans t, alors nous dirons que t_k *correspond* à 'φ_N^T'.

Notons que ce verbe illustre bien le fonctionnement de la procédure. Celle-ci traite un à un les signes qui correspondent à chacun des t_k, en effectuant le remplacement dans t – ou dans le résultat de remplacements préalables dans t – de leurs occurrences en impliquant le t_k correspondant.

Il nous faut donc regarder, à chaque remplacement, si l'expression ainsi construite est toujours un marqueur, et quels sont les signes libres et liés qu'elle incorpore.

Considérons l'un des remplacements effectués durant la première étape (le passage de t à t', dans la définition 9). Une occurrence de $\ulcorner\varphi_{i,I}^T(a_1)\urcorner$ est remplacée par $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ où :

- t_1 est le membre de a correspondant à '$\varphi_{i,I}^T$' ;
- a_1 est la portée de cette occurrence de '$\varphi_{i,I}^T$' ;
- r_1 est l'ensemble des membres de s dont une occurrence libre au moins est présente dans t_1 ;
- s_1 est l'ensemble des membres de I.

Puisque $S(t, a, r, s)$ termine, alors il en va de même de $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$. De plus, d'après le lemme 2, $\ulcorner\varphi_{i,I}^T(a_1)\urcorner$ et tous les membres de a_1 sont des marqueurs. Enfin, d'après la définition de la complexité, nous savons que :

- $\underset{t' \text{ membre de } a_1}{max}(\mathrm{Comp}(t')) < \mathrm{Comp}(\ulcorner\varphi_{i,I}^T(a_1)\urcorner) \leq \mathrm{Comp}(t)$;
- $\mathrm{Comp}(t_1) \leq \underset{t' \text{ membre de } a}{max}(\mathrm{Comp}(t'))$.

Nous en déduisons :

$$\left(\mathrm{Comp}(t_1) + \underset{t' \text{ membre de } a_1}{max}(\mathrm{Comp}(t'))\right) < \left(\mathrm{Comp}(t) + \underset{t' \text{ membre de } a}{max}(\mathrm{Comp}(t'))\right)$$

Et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence. $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$:

(1) est un marqueur.

(2) intègre des occurrences libres exactement des signes des second et troisième groupes dont il figure au moins une occurrence libre dans t_1 ou un des membres de a_1, hormis les deux exceptions ci-dessous.

(3) n'intègre aucune occurrence libre des signes du troisième groupe appartenant à s_1 dont au moins une occurrence est libre dans un des membres de a_1.

(4) n'intègre aucune occurrence libre des signes du troisième groupe dont au moins une occurrence est libre dans t_1 et qui correspond à un membre de a_1.

Notons que, puisque $S(t, a, r, s)$ termine, alors t_1 n'intègre aucun signe du deuxième ou troisième groupe qui figure dans t (deuxième condition de la définition 9), donc aucun signe du deuxième ou troisième groupe qui figure dans $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$.

Si un signe présente une occurrence libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$, alors par la proposition (2), nous savons qu'il présente une occurrence libre dans t_1 ou un des membres de a_1.

Occupons-nous d'abord de ce dernier cas, et considérons un signe qui présente une occurrence libre dans un membre de a_1. D'après (3), nous savons que ce signe présente une occurrence libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ si et seulement s'il n'appartient pas à s_1. Or ce dernier ensemble est, par définition, constitué de tous les membres de I. D'après le lemme 2, nous savons que $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$ et que tous les membres de a_1 sont des marqueurs. Or, d'après la définition des marqueurs, les signes n'appartenant pas à I – *i.e.* à s_1 – qui présentent une occurrence libre dans un des membres de a_1 sont exactement les signes différents de '$\varphi^T_{i,I}$' qui présentent une occurrence libre dans $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$. Autrement dit, notre signe présente une occurrence libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ si et seulement s'il présente une occurrence libre dans $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$, et qu'il est différent de '$\varphi^T_{i,I}$'.

Considérons à présent un signe qui présente une occurrence libre dans t_1. Supposons qu'il n'appartienne pas à s. D'après la définition 9, il n'appartient pas à r_1. Donc il ne peut correspondre à aucun membre de a_1, donc il n'est pas impliqué dans (4). Ainsi, d'après (2), il présente une occurrence libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$.

Supposons au contraire qu'il appartienne à s. Puisque t_1 correspond à 'φ^T_i', il est de type T relativement à s. Par supposition, il incorpore une occurrence libre d'un élément de s – celui que nous considérons –, donc $T \neq 0$. Il existe donc un entier n et, pour j entre 1 et n, des types T_j tels que $T = (T'_1, \ldots, T'_n)$ et des signes '$\varphi^{T'_i}_{k_i}$' différents deux à deux tels que $\{\varphi^{T'_1}_{k_1}, \ldots, \varphi^{T'_n}_{k_n}\}$ soit l'ensemble des éléments de s libres dans t_1 (définition 6 des types relatifs). Ainsi notre signe appartient à cet ensemble. De plus, étant donné que $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ termine, alors un (unique) élément de cet ensemble correspond à chaque membre de a_1. Enfin, $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_i)\urcorner$ étant un marqueur, il existe exactement n membres de a_1 (définition 7 des marqueurs). Donc chaque élément de notre ensemble admet un membre de a qui lui correspond. Par conséquent un membre de a_1 correspond à notre signe. Ainsi, d'après (4), ce signe ne présente aucune occurrence libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$.

Les deux raisonnements ci-dessous établissent qu'un signe qui présente une occurrence libre dans t_1 présente une occurrence libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ si et seulement s'il n'appartient pas à s.

Le bilan est le suivant. Un signe présente une occurrence libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ si et seulement si :

(a) il ne s'agit pas de '$\varphi^T_{i,I}$', et il présente une occurrence libre dans $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$;

(b) ou il n'appartient pas à s et présente une occurrence libre dans t_1.

Nous savons que t et t_1 ne partagent aucun signe du second ou troisième groupe. Ainsi, tous les signes figurant dans t (donc pas dans t_1) qui présentent une occurrence libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ présentent une occurrence libre dans $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$. D'autre part, il est clair que tous les signes du

second ou troisième groupe (liés ou non) de $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ figurent dans t_1 ou un des membres de a_1, car la procédure de saturation ne sollicite que les signes de ces expressions. Ainsi, tout signe lié dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ figure dans $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$ ou dans t_1. Supposons qu'il ne soit pas lié dans $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$. Il ne peut s'agir de '$\varphi^T_{i,I}$' qui ne figure pas dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$, ni d'un autre signe libre dans $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$ qui serait aussi libre dans $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$. Il s'agit donc d'un signe de t_1 qui, en tant que tel, ne peut figurer dans t. Les deux conditions du lemme 3 sont vérifiées, et le résultat du remplacement dans t de $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$ par $S(t_1, a_1, r_1, s_1)$ est un marqueur.

Les propositions (a) et (b) ont été démontrées relativement à un remplacement de $\ulcorner\varphi^T_{i,I}(a_1)\urcorner$, où t_1 correspond à '$\varphi^T_{i,I}$'. Mais la procédure n'aboutit que lorsque de tels remplacements ont été effectués pour chaque signe correspondant aux membres de a (et seulement si un signe correspond à chacun de ses membres). Nous venons de voir que les résultats de ces remplacements étaient des marqueurs. Ainsi $S(t, a, r, s)$ est lui-même un marqueur. De plus, à l'issue de tous ces remplacements, il ne reste d'occurrences libres que des signes qui possèdent une occurrence libre dans un membre de a sans être un élément de s – comme le confirme (a) – , ou qui possèdent une occurrence libre dans t sans qu'aucun membre de a ne lui corresponde – comme le confirme (b). Nous obtenons donc les trois propositions recherchées.

□

Lemme 7. *Soient t une expression de $\mathscr{L}_n$, $a = (t_1, \ldots, t_n)$ une suite de marqueurs, r et s des ensembles de signes du troisième groupe tels que $S(t, a, r, s)$ aboutisse et soit un marqueur. Pour tout t_i avec i entre 1 et n, notons T_i le type de t_i relativement à S. Alors t est un marqueur tel que :*

- *tout signe qui présente une occurrence libre dans $S(t, a, r, s)$ et pas dans un membre de a présente une occurrence libre dans t ;*
- *pour i entre 1 et n, il existe des entiers k_i tels que pour tous j et j' différents, si $T_j = T_{j'}$, alors $k_j \neq k_{j'}$, et tels que tous les membres de $(\varphi^{T_1}_{k_1}, \ldots, \varphi^{T_n}_{k_n})$ présentent une occurrence libre dans t et ne présentent aucune occurrence libre dans $S(t, a, r, s)$;*
- *aucun autre signe du troisième groupe ne présente d'occurrence libre dans t.*

Démonstration. La preuve est totalement similaire à celle du lemme 6. Nous n'allons donc pas la répéter de bout en bout. D'une part, nous savons que les signes qui présentent une occurrence libre dans $S(t, a, r, s)$ présentent une occurrence libre dans t ou dans un t_i. D'autre part, nous avons montré que chaque remplacement impliqué dans la procédure de saturation conserve les signes libres dans t à l'exception de celui qui correspond au t_i en jeu. En premier lieu, cela nous assure que les signes qui présentent une occurrence libre dans $S(t, a, r, s)$ et dans aucun t_i présentent aussi une occurrence libre dans t. Ensuite, cela garantit l'existence d'une suite de signes du troisième groupe correspondant aux t_i qui présentent tous une occurrence libre dans t et non dans $S(t, a, r, s)$. Or un signe correspondant à t_i est de type T si et seulement si t_i est de type T relativement à s. Cette suite est donc telle que nous l'avons spécifiée ci-dessus. Enfin, cela épuise la totalité des signes qui présentent une occurrence libre dans t.

Ainsi, toutes les données essentielles ont été récoltées dans la preuve du lemme 6. Là où nous inspections le résultat d'un remplacement en fonction de l'expression remplacée, il faut ici examiner l'expression remplacée en fonction du résultat du remplacement. Afin d'écrire la totalité des étapes de cette preuve, il suffit donc de répéter à l'envers celles de notre preuve précédente. □

À travers ces deux lemmes, nous avons récolté ce qui devait l'être afin d'achever notre raisonnement, en démontrant le fait ci-dessous.

Fait 5. *Pour tout type T :* $\boldsymbol{Nf}^T \subseteq \boldsymbol{Nm}^T$.

Démonstration. Procédons par induction. La définition 13 nous assure que chaque nom simple de type T est un élément de $\mathbf{Nm}^T$. Pour passer aux noms complexes, il suffit de montrer que l'ensemble **Nm** est clos pour les étapes de saturation et de désaturation, *i.e.* d'établir les deux points suivants :

- si t est un élément de $\mathbf{Nm}^{(T_1,\ldots,T_n)}$ et, pour $1 \leq i \leq n$, t_i un élément de $\mathbf{Nm}^{T_i}$, alors la saturation de t par $t_1, \ldots, t_n$, si elle aboutit, est un élément de $\mathbf{Nm}^0$;
- si t est un élément de $\mathbf{Nf}^{(T_1,\ldots,T_n)}$ et, pour $1 \leq i \leq n$, t_i un élément de $\mathbf{Nm}^{T_i}$, et si la saturation de t par $t_1, \ldots, t_n$ aboutit à un élément de $\mathbf{Nm}^0$, alors t est un élément de $\mathbf{Nm}^{(T_1,\ldots,T_n)}$ [102].

Le premier point traduit proprement le fait que la saturation ne nous fait jamais sortir de **Nm**, et le second que la désaturation nous y maintient.

Considérons un élément t de $\mathbf{Nm}^{(T_1,\ldots,T_n)}$ et, pour $1 \leq i \leq n$, un élément t_i de $\mathbf{Nm}^{T_i}$. Supposons que la saturation de t par $t_1, \ldots, t_n$ aboutisse. D'après le lemme 6, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ est un marqueur qui incorpore des occurrences libres exactement des signes du second groupe qui présentent des occurrences libres dans t ou un des t_i. Ces dernières expressions appartiennent à **Nm**, donc n'intègrent d'occurrence libre d'aucun signe du second groupe. Ainsi, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ n'incorpore d'occurrence libre d'aucun signe du second groupe, et appartient aussi à **Nm**. Il reste à montrer qu'il s'agit d'une expression de type 0.

D'après la définition 10, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n)) = S(t, (t_1, \ldots, t_n), r, s)$ où r (respectivement s) est l'ensemble des signes du troisième groupe qui présentent une occurrence libre dans t (respectivement dans un t_i). Ainsi, tout signe du troisième groupe qui présente une occurrence libre dans un t_i appartient à s, donc la troisième proposition du lemme 6 nous assure qu'il ne présente aucune occurrence libre dans $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$.

Par ailleurs, puisque s contient tous les signes du troisième groupe libres dans un des t_i, alors chaque t_i est de type T_i relativement à s. Or t est de type $(T_1, \ldots, T_n)$, donc il existe autant de N tels que '$\varphi_N^{T_i}$' possède une occurrence libre dans t que de t_j de type T_i relativement à s. Autrement dit, chaque signe du troisième groupe libre dans t se voit attribuer un t_i qui lui correspond. Ainsi, la quatrième proposition du lemme 6 nous assure qu'aucun de ces signes ne présente une occurrence libre dans $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$.

Nous avons établi qu'un signe du troisième groupe qui présente une occurrence libre dans t ou dans l'un des t_i ne présente pas d'occurrence libre dans $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$. Donc par la seconde proposition du lemme 6, nous pouvons conclure qu'aucun signe du troisième groupe ne présente d'occurrence libre dans $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$.

Par conséquent, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ est un marqueur de type 0. Il appartient à $\mathbf{Nm}^0$.

Considérons un élément t de $\mathbf{Nf}^{(T_1,\ldots,T_n)}$ et, pour $1 \leq i \leq n$, un élément t_i de $\mathbf{Nm}^{T_i}$. Supposons que la saturation de t par $t_1, \ldots, t_n$ aboutisse à un élément de $\mathbf{Nm}^0$. D'après le lemme 7, t est un marqueur.

D'après la définition 10, $\mathrm{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n)) = S(t, (t_1, \ldots, t_n), r, s)$ où r (respectivement s) est l'ensemble des signes du troisième groupe qui présentent une occurrence libre dans t (respectivement dans un t_i). Ainsi, tout signe du troisième groupe qui présente une occurrence libre dans un t_i appartient à s donc, d'après la définition 6, tout t_i est de type T_i relativement à s.

102. Pour prouver seulement que $\mathbf{N}^T \subseteq \mathbf{Nm}^T$, il aurait été suffisant de choisir les t_i parmi les noms élémentaires.

Par conséquent, le lemme 7 garantit l'existence d'une suite $(\varphi_{k_1}^{T_1}, \ldots, \varphi_{k_n}^{T_n})$ telle que pour tous j et j' différents, si $T_j = T_{j'}$, alors $k_j \neq k_{j'}$, et dont les membres sont exactement les signes qui présentent une occurrence libre dans t. Ainsi, t n'incorporant aucune occurrence libre d'un signe du deuxième groupe, il appartient à **Nm**. De plus, d'après la définition 5, il s'agit d'une expression de type $(T_1, \ldots, T_n)$. Donc t est un élément de $\mathbf{Nm}^{(T_1,\ldots,T_n)}$. □

Nous avons finalement atteint notre objectif, en établissant que les trois méthodes de construction des noms sont équivalentes, *i.e.* en démontrant le théorème ci-dessous.

Théorème 3. *Pour tout type T, les noms de type T selon notre méthode par saturation, les noms de type T selon la méthode par saturation avec la nuance fregéenne, et les noms de type T selon la méthode par marqueurs sont exactement les mêmes :*

$$\forall T \in \mathscr{T}, \boldsymbol{N}^T = \boldsymbol{Nf}^T = \boldsymbol{Nm}^T$$

2.3.3.8 Les expressions bien formées de l'idéographie

En section 2.3.3.5, nous avons dit que, modulo l'introduction des lettres latines, il n'existait aucune différence entre les marqueurs des *Grundgesetze* et ceux que nous avons ici définis, bien que les manières de les construire divergent. En effet, dans le §26, Frege suggéra l'utilisation de la mécanique de désaturation dans leur élaboration, sans spécifier rigoureusement cette dernière. Le travail que nous avons réalisé nous permet d'expliquer précisément ce qu'il avait en tête. Nous pouvons répéter à l'identique la méthode par saturation dans le cas des marqueurs. Il suffit d'intégrer aux marqueurs atomiques, en plus de nos noms atomiques, les quasi-terminaisons, *i.e.* ces mêmes expressions qui, au lieu d'intégrer à leurs têtes une étiquette 'X_i^T', la remplace par un signe du *second* groupe 'ψ_i^T'. La définition inductive peut alors être reproduite à l'identique sur la base de cet ensemble. Il devient ainsi prouvable, exactement comme nous l'avons fait dans le cas des noms, que les marqueurs se construisent indifféremment selon les deux méthodes.

Nous avons fait l'impasse à la fois sur cette construction et sur cette preuve, car la définition des noms par saturation n'utilise en aucune manière les marqueurs. Ceci soulève néanmoins une question. Si, comme nous le prétendons, il s'agit bien de la stratégie employée par Frege, pourquoi a-t-il évoqué l'existence de ces marqueurs ? Quel intérêt trouva-t-il à tracer des frontières autour d'expressions qui ne lui étaient d'aucun usage dans l'édification de son langage ? Nous voulons apporter une explication qui, nous croyons, éclaircira simultanément le rôle des lettres *indicatrices*. En section 2.3.2.4, nous avons relevé et confronté les différents passages des *Grundgesetze* dans lesquels il en est question, sans parvenir à en extraire une interprétation satisfaisante. Entre-temps, nous avons compris le fonctionnement de la saturation, et celui-ci va nous guider vers notre réponse.

Pour épuiser la totalité des symboles du langage fregéen, il faut ajouter, outre le trait vertical de jugement, des lettres du *quatrième* groupe : les lettres latines. Celles-ci ne figurent pas dans les noms du langage, mais au sein d'expressions qui possèdent un rôle important : les marqueurs latins. Leur formation procède de manière totalement analogue à celle des noms. En toute généralité, il suffit d'ajouter à l'alphabet les signes du quatrième groupe 'f_i^T', pour tout type T et tout entier i non nul, puis de définir les marqueurs latins élémentaires en faisant jouer à ces signes le rôle des étiquettes dans les noms élémentaires. Il ne reste alors qu'à répéter la construction inductive sur la base de cet ensemble. Si nous souhaitons éviter de suivre deux fois le même processus compliqué, nous pouvons simplement – mais comprenons bien que l'esprit est exactement

le même – effectuer le remplacement, dans les noms, de certaines ou toutes les étiquettes par des signes du quatrième groupe de même type. De même, les marqueurs se définissent aussi bien *via* le remplacement, dans les noms, de certaines ou toutes les étiquettes par des signes du second groupe de même type. C'est précisément ce sentier que Frege emprunta à l'occasion du §26 :

> Si, dans un nom propre, nous remplaçons des noms propres qui en font partie ou coïncident avec par des lettres d'objets, des noms de fonctions par des lettres de fonctions, alors j'appelle ce que nous obtenons de cette manière un *marqueur d'objet*. Si ce remplacement n'implique que des lettres latines, alors j'appelle le marqueur obtenu un *marqueur latin d'objet*. (Frege 1893, p. 44)

Et Frege d'expliquer immédiatement qu'il en allait de même pour les autres types.

Remarquons néanmoins qu'il ne proposa pas, comme nous l'avons fait, de remplacer les *étiquettes* par des lettres latines, mais directement les *noms* d'objets ou de fonctions. Il s'agit simplement d'une imprécision supplémentaire. Considérons les deux expressions suivantes :

$$\text{‘}X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(X^0))\text{’} \qquad\qquad \text{‘}X_1^{(0)}(f^{(0)}(X^0))\text{’}$$

Le passage de la première à la seconde peut-être regardé comme :

– le remplacement de l'étiquette de fonction ‘$X_2^{(0)}$’ par le signe du quatrième groupe ‘$f^{(0)}$’ ; ou
– le remplacement du nom élémentaire ‘$X_2^{(0)}(\varphi^0)$’ par le marqueur élémentaire ‘$f^{(0)}(\varphi^0)$’.

En s'engageant à remplacer le nom par la lettre, Frege en vint donc à mêler les deux optiques. Voyons comment, à l'intérieur de ses démonstrations, il décrivit les remplacements auxquels il avait recours.

– À la page 67 du premier volume, il expliqua que "‘g’ est remplacé par ‘F’" lors de la transition entre les deux énoncés suivants :

$$\text{‘}\vdash\!\!\begin{array}{l}\text{—}\, g\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{f}(a)\\ \llcorner\, \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ \llcorner\!\!\text{—}\, g(a=b)\end{array}\text{’} \qquad\qquad \text{‘}\vdash\!\!\begin{array}{l}\text{—}\, F\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{f}(a)\\ \llcorner\, \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ \llcorner\!\!\text{—}\, F(a=b)\end{array}\text{’}$$

Selon la deuxième formulation, il s'agit de remplacer le marqueur élémentaire ‘$g(\varphi^0)$’ – ou, selon la graphie fregéenne, ‘$g(\xi)$’ – par le marqueur élémentaire ‘$F(\varphi^0)$’ – ‘$F(\xi)$’.

– À la page 68, il expliqua que "‘g’ est remplacé par ‘$\top\, \xi$’" lors de la transition entre les deux énoncés suivants :

$$\text{‘}\vdash\!\!\begin{array}{l}\text{—}\, g\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{f}(a)\\ \llcorner\, \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ \llcorner\!\!\text{—}\, g(a=b)\end{array}\text{’} \qquad\qquad \text{‘}\vdash\!\!\begin{array}{l}\text{—}\, \top\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{f}(a)\\ \llcorner\, \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ \llcorner\!\!\text{—}\, \top\,(a=b)\end{array}\text{’}$$

Selon la deuxième formulation, il s'agit de remplacer le marqueur élémentaire ‘$g(\varphi^0)$’ – ‘$g(\xi)$’ – par le nom élémentaire ‘$\top\,(\varphi^0)$’ – ‘$\top\,(\xi)$’ – d'étiquette ‘$\top$’.

– À la page 67, il expliqua que "‘g’ est remplacé par ‘$\top\, F(\top\, \xi)$’" lors de la transition entre les deux énoncés suivants :

$$\text{‘}\vdash\!\!\begin{array}{l}\text{—}\, g\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{f}(a)\\ \llcorner\, \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ \llcorner\!\!\text{—}\, g(a=b)\end{array}\text{’} \qquad\qquad \text{‘}\vdash\!\!\begin{array}{l}\text{—}\, \top\, F\top\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{f}(a)\\ \llcorner\, \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ \llcorner\!\!\text{—}\, \top\, F(\top\,(a=b))\end{array}\text{’}$$

Selon la deuxième formulation, il s'agit de remplacer le marqueur élémentaire ‘$g(\varphi^0)$’ – ‘$g(\xi)$’ – par le marqueur *complexe* ‘$\top\, F(\top\, \varphi^0)$’ – ‘$\top\, F(\top\, \xi)$’.

Frege fut donc extrêmement fluctuant dans ses formulations, et s'autorisa aussi bien l'utilisation que l'omission des lettres pour les espaces vacants. En revanche, lorsqu'un marqueur latin ou un nom complexe est engagé, celles-ci sont indispensables, car une telle expression n'est pas déterminée par le signe qui y figure en tête. De plus, s'il s'agit d'un nom ou marqueur de niveau strictement supérieur à 1, la manipulation syntaxique ne se limite plus à un simple remplacement. Une fois encore, Frege ne l'a pas décrite, et il faudra nous y appliquer dans un instant. Mais il aurait pu suggérer plus clairement ce qu'il avait en tête en employant deux notions dont nous avons fait usage : celles d'étiquette et de marqueur latin élémentaire. Frege parla de 'lettres d'objets' et de 'lettres de fonctions' seulement pour désigner les signes des deuxième, troisième et quatrième groupes. Il lui manquait donc un terme pour référer aux signes figurant en tête des noms élémentaires : les étiquettes. Par ailleurs, il spécifia bien ce qu'étaient les noms simples, mais ne reproduisit pas l'opération dans le cas des marqueurs latins. Ceci le contraignit à la formulation incorrecte relevée plus haut, selon laquelle un nom – il ne disposait pas de la notion d'étiquette – devait être remplacé par une lettre latine – il ne disposait pas de la notion de marqueur latin élémentaire. Rigoureusement, il faut choisir entre les deux possibilités que nous avons proposées, mais chacune d'entre elles utilise, d'un côté ou de l'autre, un terme dont Frege fit l'économie.

S'il avait fait la distinction entre l'élémentaire et le complexe dans le cas des marqueurs, et entre l'étiquette et la terminaison dans le cas des noms, Frege aurait aussi été en mesure d'expliquer plus clairement la notion d'indication. À proprement parler, ce ne sont pas les lettres d'objets et de fonctions – les signes des second, troisième et quatrième groupes – qui indiquent, sans référer, des objets ou des fonctions. Ce sont les expressions bien formées dans lesquelles elles figurent. L'idéographie admet trois genres d'expressions bien formées, relatives à trois types d'expressions bien formées *élémentaires*. Parmi ces dernières, nous comptons :

Les noms élémentaires : 'X_1^0', '$X_1^{(0)}(\varphi_1^0)$', '$X_{1,\psi_1^0}^{((0))}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0))$', etc.

Les marqueurs latins : 'f_1^0', '$f_1^{(0)}(\varphi_1^0)$', '$f_{1,\psi_1^0}^{((0))}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0))$', etc.

Les quasi-terminaisons : 'ψ_1^0', '$\psi_1^{(0)}(\varphi_1^0)$', '$\psi_{1,\psi_1^0}^{((0))}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0))$', etc.

Parmi les expressions bien formées, nous trouvons :

Les noms : Ils se construisent sur la base des noms élémentaires *via* le processus récursif de saturation-désaturation. En voici trois exemples :

'$X_1^{(0)}(X_1^0)$' '$X_{2,\psi_1^0}^{((0))}(X_1^{(0)}(\psi_1^0))$' '$X_{4,\psi_1^0}^{((0))}(\varphi^{(0,0)}(X_1^0,\psi_1^0)))$'

Les marqueurs latins : Ils se construisent sur la base des noms et des marqueurs latins élémentaires *via* le processus récursif de saturation-désaturation. En voici trois exemples :

'$f_1^{(0)}(X_1^0)$' '$f_{2,\psi_1^0}^{((0))}(f_1^{(0)}(\psi_1^0))$' '$X_{4,\psi_1^0}^{((0))}(\varphi^{(0,0)}(f_1^0,\psi_1^0)))$'

Les marqueurs : Ils se construisent sur la base des noms, des marqueurs latins élémentaires et des quasi-terminaisons *via* le processus récursif de saturation-désaturation. En voici trois exemples :

'$\psi_1^{(0)}(f_1^0)$' '$f_{2,\psi_1^0}^{((0))}(\psi_2^{(0)}(\psi_1^0))$' '$\psi_{4,\psi_1^0}^{((0))}(\varphi^{(0,0)}(f_1^0,\psi_1^0)))$'

Si nous effectuons ainsi ces trois opérations, alors les noms appartiennent aussi à l'ensemble des marqueurs latins, et ces derniers sont à leur tour des éléments de l'ensemble des marqueurs. Pour plus de clarté, définissons des ensembles disjoints. À l'issue de l'induction, excluons les noms de l'ensemble des marqueurs latins, et les marqueurs latins de celui des marqueurs.

Les noms réfèrent à des entités de leurs types. Les marqueurs latins ne réfèrent pas, car leurs formations exploitent des marqueurs latins élémentaires, eux-mêmes privés de référence. Les marqueurs ne réfèrent pas davantage, car leurs formations exploitent des quasi-terminaisons, elles-mêmes privées de référence. Pourtant, Frege affirma que les marqueurs latins et non latins parvenaient néanmoins à *indiquer* une entité. Ce faisant, il sembla conférer des rôles semblables à ces deux espèces d'expressions. Nous allons contester cette idée, en revenant sur la notion d'indication.

Considérons d'abord le cas des marqueurs (non latins). À plusieurs reprises, nous avons expliqué que le subtil appareil de l'idéographie était dû au double rôle des fonctions : saturer et être saturée. À l'intérieur du nom d'une fonction, nous voulons laisser des espaces vacants pour les noms des entités qui peuvent venir saturer cette fonction. Mais ces entités, s'il s'agit de fonctions, peuvent aussi être complétées par d'autres entités. Ainsi leurs noms doivent à leur tour prévoir un dispositif pour accueillir les noms de ces dernières. Dans le respect de cette structure, un nom simple de type ((((0)))) prend donc la forme suivante :

$$\text{`}X^{((((0))))}_{\psi^{((0))}}(\varphi^{(((0)))}_{\varphi^{(0)}}(\psi^{((0))}_{\psi^0}(\varphi^{(0)}(\psi^0))))\text{'}$$

Le marqueur élémentaire '$\psi^{((0))}_{\psi^0}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$' constitue le dispositif relatif au nom de type ((0)) que la fonction prise en argument pourrait prendre en argument. Une telle fonction peut elle-même être complétée par une fonction de type (0). Il fallait donc, à l'intérieur de cet appareil, un autre dispositif relatif à l'objet que cette dernière fonction peut prendre en argument : le signe 'ψ^0'. Ce dernier tient donc le rôle *syntaxique* du nom de l'argument d'une fonction de type (0), autrement dit d'un nom d'objet. C'est en ce sens, *et en ce sens seulement*, qu'il indique un objet. En revanche, le signe '$\psi^{((0))}$' ne joue pas à lui-seul le rôle syntaxique du nom de l'argument d'une fonction de type (((0))), qui doit prendre en considération la manière dont une fonction de type (0) peut elle-même être saturée. C'est donc l'expression '$\psi^{((0))}_{\psi^0}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$' *prise dans son ensemble* qui remplit cette tâche. Frege ne s'est pas encombré de la notion de marqueur élémentaire, s'autorisant à affirmer que le signe lui-même jouait le rôle d'indicateur. Mais de même que le nom qui réfère à la fonction pour la quantification de type ((0)) n'est pas réduit à l'étiquette '$\smile$', mais incorpore tout le dispositif pour les arguments successifs : '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\varphi(\mathfrak{a}))$', de même le marqueur qui indique une fonction de type ((0)) n'est pas réduit au signe '$\psi^{((0))}$', et incorpore aussi ce dispositif : '$\psi^{((0))}_{\psi^0}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$'.

Ainsi Frege commit une légère maladresse en affirmant que certaines lettres indiquaient des fonctions. Il aurait eu meilleur compte de solliciter à ce titre les marqueurs élémentaires. Le choix du terme 'indiquer' ne fut pas non plus des plus judicieux. Il fut probablement motivé par la racine commune, en allemand, avec le verbe 'référer' : *andeuten - bedeuten*. Ces termes possèdent cependant une connotation sémantique qui se voit, dans le cas des marqueurs, totalement inappropriée. Les marqueurs (non latins) n'ont aucune valeur sémantique, qu'elle soit fixe ou variable, établie une fois pour toutes ou relative à une assignation. Ils ne sont ni des noms ni quoi que ce soit qui s'apparente aux variables contemporaines. Ils furent au contraire mis à jour dans le but de se débarrasser de ces dernières. Considérons le nom suivant :

$$\text{`}X^{((0))}_{\psi^0}(X^{(0)}_2(X^{(0)}_1(\psi^0)))\text{'}$$

Sa référence n'est pas fixée en fonction des valeurs de '$X^{((0))}_{\psi^0}$', '$X^{(0)}_2$', '$X^{(0)}_1$' et 'ψ^0'. Il n'est pas question d'imiter la procédure suivie pour les quantificateurs contemporains, autrement dit d'envisager la valeur de 'ψ^0', et ainsi celles de '$X^{(0)}_1(\psi^0)$' et de '$X^{(0)}_2(X^{(0)}_1(\psi^0))$', relativement à une assignation, puis de spécifier celle de '$X^{((0))}_{\psi^0}(X^{(0)}_2(X^{(0)}_1(\psi^0)))$' indépendamment de cette dernière. Au contraire, la référence de notre expression est déterminée à partir des références (fixes) des noms de fonctions '$X_2(X_1(\xi))$' et '$X^{((0))}_{\psi^0}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$'. Le processus de saturation-désaturation est indispensable pour éviter une construction linéaire des noms qui transiterait par des expressions dénuées de références. Dans le troisième chapitre, nous verrons en détail le versant sémantique de la mécanique. Pour l'heure, constatons seulement que l'appareillage des marqueurs est garant de la bonne tenue de ce processus. Il permet à n'importe quel nom de saturer et d'être saturé par des noms de types adaptés. C'est précisément pour cette raison que les marqueurs firent une intrusion dans les *Grundgesetze*, sous le statut d'expressions qui indiquent sans référer. Pour être plus précis, Frege aurait dû identifier les constituants fondamentaux de ces expressions aux marqueurs élémentaires, et non aux lettres d'objets et de fonctions. Il aurait surtout dû éclairer sur leur statut. Les marqueurs n'indiquent une entité qu'en cela qu'ils jouent le rôle *syntaxique* d'un nom du type de cette entité, afin de permettre à chaque nom d'accomplir les deux tâches auxquelles il est destiné : saturer et être saturé.

L'affaire est très différente dans le cas des marqueurs latins, chargés de régir les substitutions au sein des démonstrations. Si ces expressions sont précédées d'un trait de jugement, alors un énoncé assertif est formé. Lorsqu'un tel énoncé est prouvé, alors il est licite d'y remplacer n'importe quel marqueur élémentaire par un autre nom ou marqueur. Les marqueurs élémentaires sont donc censés *porter la généralité*. Formulons le problème d'une manière volontairement polémique, que nous questionnerons plus tard : un tel énoncé est correct si et seulement si, en attribuant des valeurs quelconques aux marqueurs élémentaires qui y figurent, le marqueur complet réfère au Vrai. Il devient alors légitime de remplacer ces marqueurs élémentaires par d'autres noms, quels que soient les références de ces derniers. Nous voyons ici resurgir une notion de variable, au moins en apparence. Un marqueur ne disposerait pas de référence déterminée. Néanmoins, il serait possible de lui en attribuer, il suffirait d'en octroyer aux constituants élémentaires qui en sont dénués.

Dans la suite de notre travail, nous analyserons en détail le rôle de ces marqueurs latins, sur lequel repose beaucoup. Pour l'heure, nous pouvons déjà tirer certaines conclusions de notre reconstruction.

La généralisation de la grammaire de l'idéographie à la totalité des types fut l'occasion d'homogénéiser le symbolisme que Frege, pour répondre à des enjeux pragmatiques, fut contraint d'éparpiller. En effet, d'importantes confusions furent provoquées par l'usage de lettres différentes aux statuts pourtant identiques – par exemple '$\mathfrak{a}$' et 'β'. Notre travail nous a permis de distinguer quatre groupes de lettres, et d'expliquer précisément le rôle des trois premiers. Au contraire, certains malentendus proviennent d'un usage maladroit du terme 'indiquer', étendu à deux genres d'expressions jouant des rôles divergents. Nous avons relevé trois espèces d'expressions bien formées dans l'idéographie. Les noms se tiennent au cœur de tout le dispositif. Ils sont censés posséder une référence fixe, déterminée une fois pour toutes. Pour leur part, les marqueurs non latins ne remplissent aucune prérogative sémantique. En épousant la forme des noms de fonctions, ils se positionnent syntaxiquement à la place d'un nom qui devrait saturer un autre nom, dans les noms qui attendent d'être complétés par ce dernier. Ils soutiennent ainsi tout l'édifice essentiel à la mécanique de saturation. Enfin, les marqueurs latins accomplissent une toute autre tâche, liée à la notion de généralité. Ils permettent notamment la gestion des

substitutions, à travers le remplacement, dans un marqueur, d'un marqueur élémentaire par un autre nom ou marqueur. Néanmoins, une fois encore, Frege n'a pas décrit proprement les manipulations syntaxiques exigées par ces "remplacements". Nous allons nous y employer dès maintenant, et nous aurons ainsi achevé la totalité du travail technique auquel nous nous étions destinés. Nous aurons, en toute rigueur, bâti l'édifice de la grammaire fregéenne, et nous nous tiendrons prêts à en questionner la sémantique.

2.3.3.9 Remplacements

Frege introduisit pour son système la règle suivante :

> Nous pouvons remplacer, dans un énoncé, la lettre latine de fonction [de premier niveau, respectivement à un ou deux arguments] par le même nom ou marqueur latin de fonction [de premier niveau respectivement à un ou deux arguments]. (Frege 1893, p. 63)

Elle était destinée à permettre les substitutions [103]. Elle fut employée à ce titre dans la totalité des démonstrations. Cependant, une fois encore, en sollicitant le "remplacement" d'un nom par un autre dans un troisième, Frege ne spécifia pas la manipulation syntaxique impliquée dans l'opération, qui exige bien davantage qu'un simple remplacement.

Nous pourrions patienter jusqu'à la section traitant des lettres latines pour éclaircir cette notion. Néanmoins, elle se comprend aussi bien dans le contexte restreint des *noms* de l'idéographie. En outre, nous tenons à rassembler dans cette partie la totalité de nos considérations techniques. Nous nous sommes engagés à décoder le lexique fregéen de la syntaxe. Il s'agit ici de la dernière étape du travail. Une fois que nous l'aurons franchie, nous connaîtrons précisément toutes les manipulations syntaxiques dissimulées derrières les raccourcis de Frege. Il ne nous restera plus qu'à étendre en quelques lignes notre construction au cadre des termes – impliquant les lettres latines – puis à celui du système. Autrement dit, à l'issue de ce développement, et modulo quelques rapides ajustements, nous en aurons définitivement terminé avec notre exposé technique.

L'objectif de Frege consistait à faire jouer à un nom le même rôle syntaxique [104] qu'un autre dans un troisième. Il s'agit, par exemple, d'octroyer à '$\Phi_1(\Phi_2(\xi))$' la place que tient '$\Phi(\xi)$' dans '$\Omega_\beta(\Phi(\beta))$'. La seconde expression ne figure absolument pas dans la troisième, il n'est donc pas question de la *remplacer* par la première. En vérité, il s'agit de *désaturer* le troisième nom du second – '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' – puis de *saturer* le résultat par le premier – '$\Omega_\beta(\Phi_1(\Phi_2(\beta)))$'.

À ce niveau limité, la procédure reste intuitive. Dès que nous atteignons des cimes plus élevées, elle se complique considérablement. Elle peut cependant être décrite en toute généralité. Nous allons nous y appliquer en définissant la fonction $\mathrm{Remp}(t, t_1, t_2)$ qui effectue le "remplacement", dans un nom t, d'un nom simple t_1 par un nom complexe t_2 de même type.

Définition 17. *Soient t un nom, t_1 un nom élémentaire d'étiquette X_I^T de type T, et t_2 un autre nom de type T.*

Si $T = 0$, alors Remp(t, t_1, t_2) est le résultat du remplacement de toutes les occurrences de t_1 par t_2 dans t.

Sinon, considérons une occurrence de X_I^T dans t dans la portée de laquelle ne figure aucune occurrence de cette même étiquette. Notons 'a' cette portée.

103. Ce point est à la source de l'interprétation de Landini, qui limita le rôle de la mécanique de saturation à la donnée de cette règle, *i.e.* à la gestion des substitutions. En section 2.3.4, nous expliquerons pourquoi cette lecture est incorrecte.

104. et sémantique, nous verrons dans quelle mesure.

Soit a' le résultat du remplacement dans a de chaque signe du second groupe qui figure dans I par un signe du troisième groupe du même type et qui ne figure ni dans a, ni dans t_2.

Soit $t'_2 = S(t_2, a', r, s)$ où r est la suite des signes du troisième groupe dont une occurrence au moins figure libre dans t_2, et s est la suite des signes du troisième groupe qui ont été ajoutés lors du dernier remplacement.

Soit t' le résultat du remplacement dans t de toutes les occurrences de $X_I^T(a)$ par t'_2.

S'il ne reste plus aucune occurrence de $X_I^T(a)$ dans t', alors $Remp(t, t_1, t_2) = t'$, sinon $Remp(t, t_1, t_2) = Remp(t', t_1, t_2)$.

Notre procédure est récursive : nous gérons une à une les occurrences de X_I^T dans t. Nous pourrions sans difficulté prouver qu'elle aboutit toujours (à ré-indexations près), mais cette démonstration étant similaire à celle du théorème 2, nous n'en donnerons pas le détail.

À travers cette définition, nous ne nous sommes pas cantonnés aux noms propres. Nous avons permis des remplacements *à l'intérieur de noms de fonctions*. Nous pouvons ainsi comprendre en quoi le nom substitué joue le même rôle que le nom remplacé, grâce au fait suivant.

Fait 6. *Soient t_1 un nom simple, t_2 un nom quelconque de même type, et t un nom de type $(T_1, \ldots, T_n)$. Soient $t'_1, \ldots, t'_n$ des noms de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$.*

Alors $Sat(Remp(t, t_1, t_2), (Remp(t'_1, t_1, t_2), Remp(t'_n, t_1, t_2))) = Remp(Sat(t, (t'_1, \ldots, t'_n)), t_1, t_2)$.

Nous faisons l'impasse sur la démonstration. Elle procède sans encombres, mais exige l'enchaînement de longues et minutieuses étapes, et nous pensons avoir déjà suffisamment montré comment exploiter nos définitions. Il nous importe en revanche de formuler une question, apparue en filigrane dans toute cette section, et que ce fait achève de poser.

Considérons un exemple trivial :

- – La saturation de '$X_{\psi^0}^{(0,(0))}(X^{(0)}(X^0), \varphi^{(0)}(\psi^0))$' par '$X^{(0)}(\varphi^0)$' donne :

$$\text{`}X_{\psi^0}^{(0,(0))}(X^{(0)}(X^0), X^{(0)}(\psi^0))\text{'}$$

  – Le remplacement, dans ce dernier nom, de '$X^{(0)}(\varphi^0)$' par '$X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(\varphi^0))$' donne :

$$\text{`}X_{\psi^0}^{(0,(0))}(X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(X^0)), X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(\psi^0)))\text{'}$$

- – Le même remplacement dans '$X_{\psi^0}^{(0,(0))}(X^{(0)}(X^0), \varphi^{(0)}(\psi^0))$' et $X^{(0)}(\varphi^0)$' donne respectivement :

$$\text{`}X_{\psi^0}^{(0,(0))}(X_2^{(0)}(X_1^{(0)}((X^0)), \varphi^{(0)}(\psi^0))\text{' et `}X_2^{(0)}(X_1^{(0)}((\varphi^0))\text{'}$$

  – La saturation du premier par le second donne :

$$\text{`}X_{\psi^0}^{(0,(0))}(X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(X^0)), X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(\psi^0)))\text{'}$$

Les deux noms finaux sont identiques. En substance, le théorème établit que la saturation peut s'effectuer avant ou après le remplacement sans altérer le nom obtenu. Bien que Frege ne l'ait ni formulé ni évoqué, sa validité est essentielle au bon fonctionnement de l'Idéographie. Et nous allons expliquer pourquoi.

Afin de gérer les substitutions, Frege intégra à son alphabet des lettres latines de chaque type (requis par son projet de fondement des mathématiques). Ces symboles étaient destinés à *porter la généralité*. En tant que tels, ils ne disposent pas d'un sens où d'une référence particulière,

ils sont *dénués de contenu*. Pour cette raison, les expressions dans lesquelles ils figurent furent exclues des noms de l'idéographie. Frege les appela des 'marqueurs latins'.

Comme nous l'avons vu, la construction des marqueurs latins est totalement parallèle à celle des noms. Afin de former les marqueurs latins élémentaires, il suffit de remplacer les étiquettes par les lettres latines dans les noms simples. Ces expressions peuvent alors initialiser la construction récursive de la définition 14 pour circonscrire la totalité des marqueurs latins. Autrement dit, les morphologies des noms et des marqueurs latins sont parfaitement identiques. La différence est sémantique : les noms sont construits à partir d'expressions – les noms de base – dotées de sens, tandis que les marqueurs latins sont formés à partir d'expressions – les marqueurs latins élémentaires – qui en sont privées.

Frege autorisa le "remplacement", dans les théorèmes de l'Idéographie, de tout marqueur latin de base par n'importe quel nom ou marqueur latin complexe. Néanmoins, il n'a pas exposé lui-même cette mécanique de "remplacement", contenue dans la définition 17 ci-dessus. Celle-ci nous permettra, une fois étendue au langage des marqueurs latins, de formuler proprement les règles de substitution du système. Il suffira de stipuler que si m_1 est un marqueur latin élémentaire, m_2 un autre marqueur latin de même type et m un troisième marqueur latin quelconque, alors $\ulcorner\!\vdash \mathrm{Remp}(m, m_1, m_2)\urcorner$ peut être déduit à partir de $\ulcorner\!\vdash m\urcorner$.

Cependant, il importe de comprendre ce qui justifie de tels "remplacements". Les lettres latines – ou plus précisément les marqueurs latins élémentaires – sont censées porter la généralité. Le raisonnement est le suivant : quelles que soient les références attribuées aux marqueurs latins élémentaires figurant dans un théorème de l'Idéographie, celui-ci reste vrai. On peut donc leur "substituer" n'importe quels noms disposant de n'importe quelles références. Néanmoins, cela suppose d'identifier clairement la manière dont la référence d'un nom élémentaire *détermine* celle d'un nom complexe. Ce point doit être établi à travers les règles morphologiques. À chaque étape de construction d'un nom, la référence d'un nouveau nom doit être déterminée sur la base de celles des anciens noms à partir desquels il est construit. C'est ainsi, et seulement ainsi, que la référence d'un nom complexe t peut être déduite – ou, pour le dire différemment, calculée à partir – de celles des noms simples dont il est constitué. Lorsque nous "remplaçons" un tel nom simple t_1 par un nom t_2 dans t, nous n'avons qu'à reproduire ce même calcul en remplaçant la référence de t_1 par celle de t_2. En fin de compte, nous considérons que t_2 a été substitué à t_1 à l'origine de la construction du nom, et ré-effectuons cette construction avec t_2 en lieu et place de t_1. Ainsi, pour que la procédure syntaxique de "remplacement" soit bien définie – pour qu'elle reflète effectivement des remplacements sémantiques –, il est crucial qu'à chaque étape de construction de t, le "remplacement" puisse s'effectuer indifféremment *avant ou après* cette étape. Dans le cas contraire, il se pourrait que le nom t' formé à travers les étapes de construction de t dans lesquels t_2 a été substitué à t_1 soit différent du nom $\mathrm{Remp}(t, t_1, t_2)$. Dans les langages des prédicats modernes, dont les termes sont construits linéairement à travers un alignement de symboles, cela ne pose pas question. Considérons la clause suivante :

Si f est un symbole de fonction et t un terme, alors $\ulcorner f(t)\urcorner$ est un terme.

Voyons comment remplacer 'g' par '$g_2 \circ g_1$' dans '$h(g(c))$' :

Étape	1		2		3
Avant remplacement :	c	$\longrightarrow$	$g(c)$	$\longrightarrow$	$h(g(c))$
Après remplacement :	c	$\longrightarrow$	$g_2(g_1(c))$	$\longrightarrow$	$h(g_2(g_1(c)))$

C'est à la deuxième étape que le terme simple – en logique des prédicats, le symbole – 'g' rentre en scène. Une fois que le "remplacement" y est effectué, l'expression obtenue est réutilisée telle quelle dans les autres étapes. *Mais la langue idéale de Frege ne fonctionne pas sur ce*

mode. Les noms et marqueurs latins ne sont pas formés en concaténant des symboles, ils sont construits à travers un processus d'*imbrication* qui exploite une difficile mécanique de saturation. La définition 17 de "remplacement" syntaxique vise à associer à t, t_1 et t_2 le terme obtenu lorsque la construction de t est reproduite avec t_2 au lieu de t_1. Elle n'est correcte que si, à chaque étape de saturation impliquée dans cette construction, le "remplacement" peut indifféremment être appliqué à l'origine ou à l'issue de cette étape. En effet, supposons qu'à une certaine étape, un nom t' ait résulté de la saturation de t'_1 par t'_2, et convenons que notre définition ait correctement fonctionné jusque-là. Ainsi, $\mathrm{Remp}(t'_1, t_1, t_2)$ (respectivement $\mathrm{Remp}(t'_2, t_1, t_2)$) est bien le nom qui résulte de l'application de toutes les étapes menant à t'_1 (respectivement t'_2), en ayant substitué à la base t_2 à t_1. Ainsi, la saturation de $\mathrm{Remp}(t'_1, t_1, t_2)$ par $\mathrm{Remp}(t'_2, t_1, t_2)$ est le nom qui résulte de l'application de toutes les étapes menant à t' en ayant substitué à la base t_2 à t_1. Si notre définition est correcte, alors ce nom n'est autre que $\mathrm{Remp}(t', t_1, t_2)$, et nous avons :

$$\mathrm{Sat}(\mathrm{Remp}(t'_1, t_1, t_2), \mathrm{Remp}(t'_2, t_1, t_2)) = \mathrm{Remp}(\mathrm{Sat}(t'_1, t'_2), t_1, t_2)$$

Voilà précisément la condition que notre fait 6 généralise. Toute nécessaire soit-elle, rien n'assure en revanche qu'elle soit *suffisante* car, *a priori*, nous n'avons pris en considération que les étapes de saturation, abandonnant celles qui impliquent la désaturation. Ces dernières requièrent un autre fait, que nous voulons énoncer dès maintenant :

Fait 7. *Soient t un nom propre, t', t'', t'_1, ..., t'_m des noms, et $t_1, \ldots, t_n$ des noms élémentaires tels que :*

- $t = Sat(t', (t_1, \ldots, t_n))$;
- $t = Sat(t'', (t'_1, \ldots, t'_m))$.

Alors il existe (à ré-indexations près) un unique nom t''', un unique entier p, une unique suite strictement croissante $(u_1, \ldots, u_p)$ et, pour tout i entre 1 et m, un unique nom t''_i, un unique entier p_i et une unique suite $(u_{i,1}, \ldots, u_{i,p_i})$ tels que :

- $t'' = Sat(t''', (t_{u_1}, \ldots, t_{u_{p_1}}))$;
- *pour i entre 1 et m, $t'_i = Sat(t''_i, (t_{u_{i,1}}, \ldots, t_{u_{i,p_i}}))$;*
- $t' = Sat(t''', (t''_1, \ldots, t''_m))$.

L'idée tapie derrière ce fais est la suivante : t étant le résultat de la saturation de t' par des noms *élémentaires* $t_1, \ldots, t_n$, il y figure des occurrences de ces derniers. Puisque t résulte aussi de la saturation de t'' par $t'_1, \ldots, t'_m$, chacune de ces occurrences se retrouve dans un de ces derniers noms, et peut y être désaturée. Ce faisant, nous obtenons un nom t''' et m noms $t''_1, \ldots, t''_m$ tels que, puisque les occurrences liées aux t_i sont retranchées, t'' soit le résultat de la saturation du premier par les seconds.

Une fois de plus, la démonstration procède par induction. Nous n'en fournirons néanmoins pas le détail, car elle ne soulève aucune difficulté sérieuse.

Nous n'en dirons pas davantage, pour le moment. Ces questions de sémantique seront celles de notre troisième chapitre. Nous souhaitions seulement saisir l'opportunité de les introduire, et de mettre en lumière un élément de l'idéographie trop souvent ignoré : les complications induites, vis-à-vis de la sémantique, par sa morphologie atypique.

En 1986, Resnik [105] affirma abruptement que les désaturations impliquées dans la formation des noms foulaient aux pieds toute tentative d'établissement d'une sémantique compositionnelle pour l'idéographie. Heck contesta cette conclusion dans une rapide note de bas de page [106], en sollicitant un argument repris dans l'ébauche de formalisation d'une telle sémantique, proposée

105. Resnik 1986, pp. 182-189.
106. Heck 2012, nbp. 24, p. 67.

en appendice à son ouvrage [107]. Les deux auteurs discutaient alors le contenu des §§29-31 des *Grundgesetze*, dans lesquels Frege sembla s'engager (sans succès) dans une véritable démonstration métalogique, destinée à établir que chaque nom idéographique dispose d'une référence. Pour examiner cette tentative (malheureuse), il convient de distinguer ses deux versants : la démonstration que chaque nom de base possède une référence (§31) – l'initialisation –, et la preuve que la référence des noms complexes est établie à partir de celles des noms simples (§30) – le pas d'induction. De nombreux commentateurs se disputent quant à l'origine de l'erreur de Frege. Dummett voit sa source dans le pas d'induction, tandis que Heck suit sa trace jusqu'à l'initialisation. Notre reconstruction de la morphologie du langage fut conduite dans l'intention de discuter ces §§29-31 le plus *rigoureusement* possible. Le rapide raisonnement ci-dessus révèle les difficultés posées par le processus d'imbrications des noms vis-à-vis de la sémantique. Celui-ci exige de voir ce que nous n'avons plus l'habitude de regarder, évoluant dans des langages contemporains qui réalisent silencieusement ce que l'idéographie pourrait bien échouer à accomplir. Dans le cadre limité de ses objectifs, Frege était en mesure (pensait-il) de restreindre considérablement les types des noms de l'idéographie. Pour cette raison, la manipulation de ces derniers ne pose pas de réelle difficulté à un lecteur attentif. Il s'agit d'un avantage illusoire, qui nous tend un piège bien réel : renoncer à examiner le détail de la morphologie générale de la langue idéale. Il est tout à fait possible d'utiliser l'Idéographie sans avoir procédé à ce préalable. Mais si nous envisageons d'en discuter la sémantique, alors nous risquons d'importantes confusions, générées par des analogies illégitimes avec nos langages modernes. À notre connaissance, aucun commentateur ne s'est armé d'une construction telle que nous l'avons réalisée pour discuter, sans rien céder à l'implicite, le pas d'induction du §30. Or c'est précisément dans l'implicite que le danger est tapi. Les règles de construction des termes d'un langage forment le squelette de toute sémantique pour ce langage. Il fallait donc, avant toute chose, pointer ce que la morphologie idéographique présentait de spécifique, pour ne pas ramener d'emblée le problème de la sémantique au contexte des logiques contemporaines d'ordres supérieurs. La question du statut et de la possibilité d'une sémantique fregéenne constitue notre point de mire, et synthétise à elle seule un grand nombre de points épineux, vivement débattus depuis une quarantaine d'années. La morphologie du langage fait malheureusement exception, souvent passée sous silence. Dans notre troisième chapitre, nous nous appliquerons à discuter *toutes* les facettes du problème. Nous ne nous limiterons pas à celle-ci, mais nous voulons à tout prix la restaurer dans ses droits. Tous les développements techniques de la présente section étaient un pas, fatigant mais nécessaire, effectué dans cette direction.

2.3.3.10 Synthèse

Sous des atours philosophiques, nous avons entraîné puis piégé le lecteur dans la geôle glacée – pourrait-on presque dire – de l'informatique. Toute notre section s'apparente davantage à la dernière qu'à la première de ces disciplines. Nous l'admettons sans discuter, mais nous plaidons non coupable. La responsable a été identifiée depuis bien longtemps. À l'époque, elle en était à son premier forfait ; elle s'est depuis imposée comme l'un des grands problèmes de la logique contemporaine. Il s'agit évidemment de la quantification, qui a repoussé Frege hors des grammaires naturelles des logiques des prédicats. Ces dernières n'avaient pas encore le visage que nous leur connaissons aujourd'hui, mais elles étaient incontestablement à portée de main. Elles pouvaient sans problème supporter une sémantique compositionnelle pour les noms primitifs de fonctions pour l'implication et la négation. Mais comment, sous leur autorité, analyser un nom de la forme '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$' ? Une syntaxe basée sur l'agrégation de symboles aurait admis '$\Phi(\mathfrak{a})$' comme un composant de ce terme. Or Frege entendait assigner aux noms complexes un sens et une

107. Heck 2012, pp. 275-279.

référence résultant de la composition de ceux de leurs *constituants*. Une telle grammaire tendait donc le piège dans lequel il avait sombré en 1879 : celui des sens indéterminés. Là où Tarski a sollicité les assignations, Frege a finalement purement et simplement refusé d'attribuer une valeur sémantique aux expressions contenant des lettres gothiques non quantifiées. Il lui fallait alors adopter un autre découpage du langage, qui renonçait à définir un terme complexe comme la *concaténation* de termes plus simples. De là est né tout l'appareil d'imbrication des noms, essentiellement tributaire des lettres pour les espaces vacants.

L'intérêt de cette difficile section tient dans le constat suivant : Frege n'a fait qu'esquisser sa grammaire, sans jamais nous garantir sa bonne tenue. Certes, il est aisé de cerner son fonctionnement dans le strict cadre de l'idéographie, dont les noms n'excèdent pas le troisième niveau. Mais l'ontologie fregéenne intègre des fonctions de n'importe quel type. Et Frege ne s'en tint pas à affirmer que les énoncés *de l'idéographie* reflétaient les compositions sémantiques et les opérations ontologiques, il affirma que la grammaire générale de ce langage était l'outil incontournable d'expression *adéquate* de *toute* pensée, *i.e.* permettait de refléter la composition de *n'importe quelle* pensée. Ainsi, sa syntaxe devait *aussi* assumer cette tâche pour un nom référant à une fonction d'un type T absent de l'idéographie, et se comporter correctement à haute comme à basse altitude.

Voilà donc ce que nous avons rigoureusement montré. La grammaire fregéenne est aussi complexe qu'ingénieuse. Chaque nom atomique impliqué dans un nom complexe possède un rôle propre, une place spécifique, dissimulés dans l'imbrication des signes du second et du troisième groupes, mais récupérables à travers les procédures adaptées. Dans un langage des prédicats moderne, l'utilisation des symboles de fonctions et des prédicats ne fait pas mystère. Pour composer 'g' avec '$f(c)$', il suffit d'écrire '$g(f(c))$'. Si nous remplaçons 'f' par 'h' dans ce terme, alors nous obtenons trivialement '$g(h(c))$'. Nous savons immédiatement comment composer ou substituer les termes entre eux. Dans les *Grundgesetze*, Frege laissait entendre que sa syntaxe possédait le même caractère d'évidence, en parlant de 'saturation' et de 'remplacement' des noms. Pourtant, sa hiérarchie fonctionnelle impose un appareil linguistique autrement plus ardu, qui ne possède certainement pas la transparence des langages des prédicats. Malgré cette complexité, que le lecteur essoufflé ne contestera probablement pas, le dispositif possède une architecture aussi propre que méticuleuse. Les différents signes de chaque groupe se meuvent les uns par rapport aux autres de manière impeccable, et si Frege n'avait pas dit suffisamment pour l'assurer, c'est désormais chose faite.

D'autre part, nous n'avons pas entrepris ce long pèlerinage technique exclusivement pour mettre en ordre le fonctionnement *syntaxique* du langage. Nous avons certes atteint notre premier cap : dégager les règles grammaticales qui, selon Frege, imitent celles de compositions entre sens et d'opérations entre fonctions (et objets). Mais cette destination ne constitue qu'une étape sur notre route, et nous guide vers un objectif plus complexe : établir proprement le statut et le rôle de la sémantique fregéenne. Il est temps de dire quelques mots à ce sujet.

À l'issue de cette section, nous savons comment construire les noms complexes à partir des noms élémentaires du langage. Pour autant, sommes-nous en mesure de déterminer les références des noms complexes à partir de celles des noms simples ? Après tout, les sémantiques compositionnelles modernes répondent à ce réquisit. Les clauses inductives de définitions des termes possèdent un pendant sémantique : la spécification de la valeur d'un nom complexe à partir de celles de ses constituants. Frege, qui a déjà omis de spécifier sa syntaxe, n'a évidemment pas exposé formellement sa sémantique. Mais Frege s'est engagé comme éclaireur dans l'univers de la logique moderne. La dette que nous avons contractée à son endroit nous incite à le remercier d'avoir chuchoté ce qu'il a su tirer du silence, et non à lui reprocher de ne l'avoir formulé plus

distinctement. Il serait terriblement maladroit de conclure qu'il n'a pas amorcé un travail sous prétexte qu'il ne l'a pas conduit proprement jusqu'à son terme. Cette réserve trouve toute sa légitimité dans le cas de la sémantique. Après tout, Frege est parvenu à esquisser une syntaxe parfaitement convenable sans la bâtir proprement. Peut-être a-t-il aussi induit une sémantique satisfaisante sans jamais la formaliser.

Cette question divise les historiens depuis quarante ans. Certains y répondent positivement, se basant notamment sur des passages clefs des *Grundgesetze*, dans lesquels Frege semble établir des résultats purement sémantiques, *i.e.* effectuer des démonstrations, dans un métalangage, qui font un usage essentiel du prédicat de vérité. D'autres, au contraire, concluent négativement en expliquant que l'utilisation d'un métalangage et les positions fregéennes sont totalement antithétiques, ou encore qu'il n'existe rien de tel qu'une propriété de vérité dans son ontologie.

Notre troisième chapitre réunira, confrontera et discutera leurs différents arguments. Nous y développerons pas-à-pas notre propre réponse. Mais nous pouvons anticiper légèrement afin de justifier autrement notre laborieuse reconstruction. Le traitement de cette question ne peut faire l'économie de l'examen des §§10, 29-31 des *Grundgesetze*, dans lesquels Frege semble *démontrer* que tous les noms de son langage possèdent une référence *par récurrence sur leur complexité*. Pour comprendre comment une telle preuve fut envisagée, il importe *à tout prix* de cerner la manière dont les noms complexes sont construits à partir des noms simples. C'est précisément ce à quoi la présente section était destinée. Disons-le sans détour, une (très) grande part de la littérature traitant de la sémantique chez Frege souffre du même défaut : une méconnaissance du fonctionnement véritable de la syntaxe idéographique. Attention, nous ne disons pas que le problème s'y réduit, mais seulement qu'il ne peut en faire l'économie. Selon Frege, les combinaisons de noms imitent les opérations entre références. Il s'agit de comprendre si ce parallèle entre noms et références peut faire l'objet d'une *théorie* sémantique, et si Frege a lui-même élaboré certaines facettes de cette théorie. Il fallait donc, *avant toute chose*, saisir *précisément* la manière atypique dont les noms se combinent. Nous avons acquis cette connaissance, au prix d'un peu de sueur, et nul doute qu'elle nous sera utile par la suite.

2.3.4 La lecture de Gregory Landini

Pour pouvoir exploiter notre reconstruction dans nos futurs questionnements, il importe avant tout qu'elle soit juste. Or c'est précisément ce que Gregory Landini conteste. Il défend une interprétation radicalement opposée à la nôtre. À ses yeux, les lettres du troisième groupe ne jouent aucun rôle dans l'élaboration des formules, laquelle serait régie par une mécanique tout à fait classique. En d'autres termes, notre longue construction serait totalement superflue. Plus important encore, il estime qu'un tel appareil linguistique dissimule, plutôt qu'il ne révèle, la véritable sémantique du langage. Une part importante de son ouvrage *Frege's Notations* (2012) se dresse contre notre lecture. Nous allons tenter d'y répondre.

2.3.4.1 Une pénurie d'indices

Nous voulons le répéter une dernière fois : dans les *Grundgesetze*, on ne trouve aucune confirmation immédiate de notre reconstruction, ou de celle de Landini, ou d'une quelconque autre. Il y figure extrêmement peu d'éléments qui renseignent directement sur la grammaire du langage. Nous avons décrit en section 2.3.2.4 la confusion qui règne parmi les explications relatives aux lettres indicatrices. Nous savons que, dans le §26, Frege esquissa la mécanique de désaturation que nous avons rendue en détail, sans l'impliquer dans un va-et-vient avec le processus de saturation. Voilà qui pourrait venir à la rescousse de Landini :

> Les termes du système formel ne sont pas définis en utilisant des noms de fonctions formés à l'aide des lettres [du troisième groupe] [108]. Au contraire, ce sont les noms complexes de fonctions contenant des lettres [du troisième groupe] qui sont formés en retranchant des parties bien formées des termes (préalablement et implicitement donnés) du système et en remplaçant une ou plusieurs d'entre elles par des lettres [du troisième groupe]. Ceci nous autorise à présenter le système de Frege sous une forme moderne, telle que les termes bien formés et les formules bien formées puissent être donnés à travers une induction moderne traditionnelle. (Landini 2012, p. 171)

Frege aurait donc (grossièrement) spécifié des clauses de construction des noms de fonctions (§26) *relatives* à l'ensemble des noms propres. Les premiers se définiraient *après* les seconds – et non pas simultanément, comme nous l'avons fait. Les seconds, quant à eux, ne requerraient aucun usage des lettres du troisième groupe. Ils seraient formés à travers des clauses récursives proches de nos langages contemporains, que Frege aurait maintenues sous le sceau de l'implicite.

Les seuls indices textuels ne permettent ni de confirmer ni de contredire cette conclusion de manière déterminante. D'une part, – Landini le reconnaît – Frege n'a pas proprement défini sa grammaire. Nous avons vu en section 2.3.2.1 que ses formulations concernant la forme dans noms propres confinaient au pléonasme. Il expliqua qu'un nom était correctement formé si et seulement si ses constituants étaient correctement placés, sans donner la moindre précision sur cette condition (§28). D'autre part, s'il n'a pas évoqué le va-et-vient entre saturation et désaturation au §26, il ne l'a pas expressément exclu non plus. Au contraire, il y eut recours à un endroit particulier, et proposa un exemple précis de la mécanique que nous avons généralisée :

> Nous pouvons former le nom de fonction '$\Delta = \zeta$' selon la première méthode à partir du nom propre 'Δ' et du nom de fonction '$\xi = \zeta$' ; puis le nom propre '$\Delta = \Delta$' à partir de celui-ci et de 'Δ'. Ensuite, nous pouvons former selon la seconde méthode le nom de fonction '$\xi = \xi$', et à partir de ce dernier et du nom de fonction '$\backsim\mathfrak{a}\ \varphi(\mathfrak{a})$' : le nom propre '$\backsim\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' à travers la première méthode. (Frege 1893, p. 48)

Ce passage soulève plusieurs difficultés. La première méthode correspond globalement à ce que nous avons nommé la 'saturation' d'un nom, et la seconde à la 'désaturation'. Il existe néanmoins quelques différences notables entre nos versions et celles de Frege. D'une part, ce dernier autorise, comme application de la première méthode, la saturation d'un nom de fonction de premier niveau à deux arguments avec *un seul* nom d'objet, afin de former un nom de fonction de premier niveau à un argument. On ne trouve aucun écho de ce procédé ailleurs dans les *Grundgesetze*, et l'exemple de Frege ne nécessite rien de tel. Il suffit de saturer '$\xi = \zeta$' par le nom d'objet 'Δ' aux deux places différentes. Bien sûr, le nom '$\Delta = \zeta$' s'avère nécessaire dans d'autres contextes, notamment pour construire '$\backsim\mathfrak{a}\ \Delta = \mathfrak{a}$'. Néanmoins, il est surprenant que Frege invoque précisément une illustration dans laquelle il est inutile. D'autre part, au §26, Frege avait proposé un chemin différent pour construire ce type de noms : la désaturation d'un nom d'objet à partir d'un nom d'objet. C'est justement sa "seconde méthode", et celle-ci est amplement suffisante. En saturant '$\xi = \zeta$' par les deux noms 'Δ' et 'Γ', nous obtenons '$\Delta = \Gamma$' ; en désaturant ce dernier de 'Γ', nous obtenons '$\Delta = \zeta$', à partir duquel se construit '$\backsim\mathfrak{a}\ \Delta = \mathfrak{a}$'. La raison de l'intégration d'un type superflu de saturation pourrait n'être qu'un gain de temps – autoriser en une étape ce que la mécanique initiale réalise en plusieurs – et/ou un examen trop superficiel du dispositif.

D'autres passages renforcent la seconde alternative. Après avoir décrit les deux méthodes, Frege conclut que "tous les noms correctement formés sont ainsi formés" (p. 48). Nous avons expliqué que les parcours-de-valeurs lui permettaient (pensait-il) de construire tous les noms

108. Landini les appelle des 'lettres paramétriques'. Nous modifions la formulation par souci d'homogénéité.

dont il avait besoin en limitant la mécanique au niveau 2. Dans le §26, il conduisit sa brève description jusqu'à cette hauteur. Il fut bien inspiré, car si aucun nom complexe de fonction de troisième niveau n'est requis, son objectif est incontestablement tributaire des noms complexes de fonctions de second niveau, qui viennent saturer ses noms primitifs de fonctions de troisième niveau, et qui sont employés lors des substitutions de la loi II.b. [109] Pourtant, dans le §31 duquel est tiré le passage ci-dessus, Frege ne hissa pas sa seconde méthode, *i.e.* la désaturation, au-delà du premier niveau.

Voilà qui renforce ce que nous avons affirmé à plusieurs reprises : la mécanique de saturation et de désaturation n'a pas été suffisamment examinée par Frege. Il comprit son fonctionnement pour les premiers niveaux, il pensait en posséder l'idée générale, et ne perdit pas de temps à entreprendre ce que nous avons réalisé : sa généralisation complète. Quoi qu'il en soit, dans cet extrait, Frege forma un nom *propre* à travers des noms de *fonctions*, impliquant le complexe procédé de saturation-désaturation. Ceci va à l'encontre de la position de Landini, qui estime que les noms propres sont construits à la manière moderne, *i.e.* en n'utilisant que les noms *primitifs* de fonctions, conçus comme des symboles munis d'arités, et concaténés dans le respect de ces arités. À ses yeux, les §§29-31, parmi lesquels se situe notre passage, sont destinés à prouver que tout nom de *fonction* possède une référence [110]. Le §31 établirait (prétendument) ce point pour les noms primitifs, et le §30 – à travers les deux méthodes décrites ci-dessus – l'étendrait (prétendument) aux noms complexes. Il serait donc légitime de solliciter la désaturation, parce que le cadre est celui des noms de fonctions, et non des noms propres.

Nous voulons proposer deux contre-arguments. D'une part, si les noms propres se construisent à la façon contemporaine à partir des noms primitifs de fonctions, et les noms complexes de fonctions par la désaturation à partir des premiers, alors Frege n'a aucune raison de présenter l'exemple de la formation d'un nom propre à partir d'un nom complexe de fonction. Il doit bien sûr utiliser la désaturation (sa seconde méthode), mais seulement dans le cadre de la formation de noms de fonctions, ce dont son illustration s'écarte. D'autre part, les §§29-31 sont situés dans la section "Définitions" des *Grundgesetze*. L'objectif consiste à justifier les définitions de nouveaux noms. Le raisonnement procède ainsi : une définition vise à octroyer à un nouveau nom élémentaire – mais non primitif – le contenu d'un nom complexe. Il est donc essentiel de démontrer que tout nom complexe dispose d'un contenu. Cela s'applique aussi bien aux noms *propres* – Frege en définit plusieurs – qu'aux noms de fonctions.

Par ailleurs, la saturation d'un nom complexe de fonction est aussi évoquée à l'occasion des prises de précautions liées à la notion de portée :

> Si une lettre gothique figure déjà dans le nom d'une fonction, dans la portée de laquelle se trouve une place d'argument de cette fonction, alors une lettre gothique différente de celle-ci doit être choisie afin de former l'expression correspondante pour la généralité. (Frege 1893, p. 14)

Ici, Frege envisage la saturation du nom de fonction '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' par un autre nom de fonction dans lequel figure une lettre gothique pour des objets. Or le seul nom primitif qui possède cette propriété est '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$', incapable de se saturer lui-même. Sa clause régit donc la saturation de ce nom par *n'importe quel* nom de premier niveau à un argument, y compris les noms *complexes* tels que '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\xi = \mathfrak{a}$', d'où résulte, en suivant ses prescriptions, le nom propre '$\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$'.

109. Le lecteur trouvera un exemple à la page 74 des *Grundgesetze*, lors d'une application de l'axiome II.b. Heck (2012) remarque aussi ce cas que Frege "ne mentionne pas" : la formation d'un nom complexe de second niveau par le retranchement d'une expression fonctionnelle [de premier niveau] à l'intérieur d'un nom propre.

110. (Landini 2012, p. 168)

Ainsi, nous croyons que le va-et-vient entre saturation et désaturation est sous-jacent aux rares passages traitant de la morphologie de l'idéographie. Néanmoins, l'importante confusion qui les obscurcit permet probablement, nous en sommes conscients, de les tordre dans l'autre sens. Nous souhaitons donc fonder ailleurs notre thèse, et montrer, indépendamment de ces passages, que la reconstruction de Landini ne tient plus syntaxiquement au-delà du troisième niveau (inclus) et, même après correction, ne tient pas sémantiquement.

2.3.4.2 Résumé des arguments

Voici deux idées défendues par Landini :

1. Seuls les noms primitifs de fonctions sont nécessaires à la construction des termes de l'idéographie, les noms complexes ne servent qu'à gérer les substitutions.
2. Les noms primitifs de fonctions permettent une définition des termes sur le modèle contemporain, basé sur des symboles munis d'arités, sans impliquer aucun processus de traduction.

En section 2.1, Landini explique le lien qui unit les noms de fonctions aux règles de substitutions. En section 2.6, il propose des règles grammaticales modernes pour l'idéographie. En chapitre 5.2, il exploite ses idées pour défendre une conception particulière de la sémantique fregéenne : toute pensée exprimée dans l'idéographie possède une unique décomposition. Enfin, en section 6.3, à l'occasion de l'examen des §§29-31 des *Grundgesetze*, il résume ainsi sa position fondamentale :

> Notre présente interprétation maintient que les noms de fonctions incorporant des lettres [du troisième groupe] ne sont pas eux-mêmes des termes du langage-objet. Ils servent seulement à gérer les règles de substitutions uniformes. Selon la présente interprétation, les termes du système formel ne sont pas définis en utilisant des noms de fonctions formés grâce aux lettres [du troisième groupe]. Au contraire, les noms complexes de fonctions formés avec les lettres [du troisième groupe] sont formés en retirant des parties bien formées à des termes (préalablement et implicitement donnés) du système et en remplaçant une ou plusieurs d'entre elles par des lettres [du troisième groupe]. Ceci nous autorise à présenter le système de Frege sous une forme moderne, telle que les termes bien formés et les formules bien formées puissent être donnés à travers une induction moderne traditionnelle. Aucun terme ne contient de lettres [du troisième groupe]. (Landini 2012, p. 171)

Nous avons deux points d'accord avec Landini. D'une part, les lettres pour les places vacantes sont essentielles pour gérer les substitutions. D'autre part, elles ne figurent *pas* dans les termes de l'idéographie. Frege l'affirme clairement au moment de les introduire :

> 'ξ' elle-même n'apparaîtra jamais dans les développements de l'Idéographie. Je l'utiliserai seulement dans l'exposition de l'Idéographie et dans les élucidations. (Frege 1893, nbp. 1, p. 6)

Nous avons déjà discuté ce point à la page 287. Un énoncé est constitué, outre du trait de jugement, d'un nom propre (ou d'un marqueur latin d'objet) qui ne présente aucune place vacante. Nous disons néanmoins que les expressions qui incorporent ces lettres – les noms de fonctions – sont nécessaires à la construction des noms propres (et marqueurs latins d'objets) bien qu'elles ne figurent jamais telles quelles dans une démonstration. Nous affirmons donc que la gestion des substitutions est loin d'épuiser le rôle des lettres pour les espaces vacants, lesquelles sont essentielles à la formation des noms propres, et ainsi partie prenante de la morphologie, comme l'expose notre reconstruction.

2.3.4.3 Substitutions

Dans la section 2.1 de son ouvrage, Landini soutient que l'apport majeur du système de Frege par rapport à son rival immédiat – celui de Boole – n'était pas la quantification :

> Les méthodes de Peirce/Schröder intègrent des sommes et produits booléens infinis. Les techniques algébriques de sommes et produits infinis sont incontestablement adéquates à la théorie de la quantification (au calcul des prédicats moderne avec des relations). (Landini 2012, p. 17)

Nous ne souhaitons pas nous prononcer quant à ce que les concurrents de Frege ont su faire ou non. Nous voulons discuter ce que Frege a, selon Landini, su apporter de déterminant :

> Malheureusement, on reconnaît rarement que l'avancée capitale de Frege en logique, et sa thèse selon laquelle la logique est informative, reposent sur sa découverte que la compréhension fait partie de la logique pure. [...] Frege comprit que les définitions étaient des notations commodes, non informatives et totalement dispensables. Parallèlement, la compréhension de nouvelles fonctions pénétrait son système à travers l'adoption de principes de "définition" (ou plutôt de formation) de termes complexes bien formés pour des fonctions, et ainsi utilisant des lettres spéciales [pour les places vacantes] (extérieures à son langage-objet) qui facilitent les règles de substitutions de termes complexes pour des fonctions à des termes primitifs pour des fonctions tels que $f(x)$ dans les axiomes du système formel. En résumé, l'approche moderne de l'axiomatique d'un système formel incorporant la compréhension intègre des schémas qui, dans les systèmes d'ordres supérieurs transcendant la théorie de la quantification, incluent la compréhension de nouveaux attributs. L'ancienne approche (introduite par Frege), consiste à bâtir un système avec des axiomes, des règles de formation des expressions complexes pour des prédicats, et une règle de substitution uniforme. Tout cela est bien connu aujourd'hui, et dans la plupart des systèmes formels les deux approches sont équivalentes. Mais lorsque Frege travaillait, la compréhension était totalement nouvelle et non orthodoxe. (Landini 2012, p. 24)

Nous avons déjà côtoyé les deux approches en construisant FGGLP (section 2.2.3.2). La méthode par substitution était celle de Frege. En autorisant la dérivation de '$\vdash b$' à partir de '$\vdash a$', elle nous privait du théorème de déduction. Nous avons montré que la méthode par schémas d'axiomes permettait de récupérer ce dernier.

Landini souligne ici un point important. Nous aurons beau intégrer les règles et axiomes de la quantification à un système, si nous ne permettons pas aux théorèmes d'être réemployés en remplaçant un prédicat simple par une formule complexe – *i.e.* par substitution –, ou en intégrant des métavariables à nos axiomes qui peuvent être remplacées à loisir – *i.e.* en procédant par des *schémas* d'axiomes – alors le calcul est totalement paralysé. Frege fut en effet l'un des premiers à prendre techniquement en charge cet aspect de la logique.

Cependant, Landini tire de cette idée une conséquence sur laquelle repose entièrement notre désaccord, et qu'il exploite lors de sa reconstruction. Selon lui, tout l'appareil des lettres du troisième groupe est destiné à permettre la compréhension dans le cadre des substitutions. Il explique qu'un dispositif de cet acabit est inévitable si nous ne souhaitons pas recourir aux schémas d'axiomes mais que, la méthode étant aujourd'hui cernée et domestiquée, nous ne prenons plus la peine d'en décrire le détail. Autrement dit, si la présentation de Frege nous semble atypique, c'est parce qu'elle s'attarde à mettre en relief ce que nous abandonnons désormais à l'implicite. Le développement impliquant les lettres pour les espaces vacants ne dénote pas une morphologie originale ou (rétrospectivement) dissidente, il se contente d'exposer ce que nous accomplissons

aujourd'hui le plus naturellement du monde. Frege aurait tu ce qui est désormais systématiquement spécifié – les règles de construction des termes –, et aurait formulé ce qui est désormais passé sous silence – la gestion de la compréhension dans le cadre des substitutions. En d'autres termes, il s'agirait d'une simple différence de présentation. En tant que pionner de la méthode par substitutions, il se serait attaché à en décrire les moindres mouvements. Il l'aurait conçue exactement telle que nous la voyons aujourd'hui, mais racontée en détail. La différence entre l'idéographie et un langage contemporain ne repose donc aucunement, aux yeux de Landini, sur sa morphologie.

Le cœur du développement de Landini se situe pp. 18-19. Il y décrit les deux versions, par substitutions et par schémas, d'une logique des prédicats à la Hilbert. Sa reconstruction présente certaines imprécisions qu'il importe de lever afin de bien cerner le problème en jeu. D'une part, son système par substitutions n'incorpore de métavariables ni dans les axiomes ni dans les règles. Or, s'il est clair que les substitutions autorisent à s'en passer dans les premiers, elles n'en dispensent aucunement les secondes [111]. D'autre part, il confère des statuts différents à des lettres identiques. L'axiome ($2a$) du système avec substitutions se présente ainsi :

$$(\forall x)\phi(x) \rightarrow \phi(y)$$

Il s'agit donc de la version sans métavariable. De plus, ce système est limité au premier ordre, 'ϕ' ne peut pas être une variable de prédicat. C'est donc nécessairement un prédicat du langage-objet. Au contraire, le système par schémas est hissé jusqu'au second ordre, et 'ϕ' y est incorporé comme une variable de prédicat.

Nous allons uniformiser ses conventions :

- 'P^T' et 'Q^T' seront des prédicats de type T appartenant au langage objet. Nous n'écrirons pas toujours l'exposant lorsque $T = (0)$.
- 'c' sera une constante d'objet (un prédicat de type 0).
- 'x^T', 'y^T' et 'z^T' seront des variables de type T. Nous n'écrirons pas l'exposant lorsque $T = 0$ (*i.e.* pour les variables d'objets).
- 'A' et 'B' seront des métavariables parcourant la totalité des formules du langage.
- 'α' et 'β' seront des métavariables parcourant la totalité des termes du langage.

Landini développe son propos à travers son axiome (3b), dont voici la version intégrée au système avec substitutions :

$$(x = y) \rightarrow (P(x) = P(y))$$

Il réalise un remplacement de la lettre 'P' afin de dévoiler le rôle des lettres pour les espaces vacants dans ce système :

> $x = y \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)$ (3.b) $\left(\frac{\xi = x}{P(\xi)}\right)$
> La lettre spéciale [du troisième groupe] ξ est requise pour indiquer la position à laquelle la variable 'x' figurant dans l'axiome (3.b) doit être placée. (Landini 2012,

111. Supposons que 'p' et 'q' soient des symboles propositionnels du langage objet. Si le *Modus Ponens* se limite à autoriser l'inférence de 'q' à partir de 'p' et '$p \rightarrow q$', il ne peut être appliqué à des formules plus complexes. Les substitutions permettent de débuter la dérivation avec des axiomes simples qui se voient complexifiés par le remplacement de certaines de leurs lettres, mais l'application des règles à des formules complexes exige de disposer de *schémas* de règles, pour pouvoir notamment dériver t_2 à partir de t_1 et $\ulcorner t_1 \rightarrow t_2 \urcorner$, *quelles que soient les formules* t_1 *et* t_2.

p. 19)

Son point est le suivant : si 'x' est intégré à la place de 'ξ', on ne peut plus décider si la substitution $\frac{x=x}{P(x)}$ dans '$P(y)$' permet de former '$y = y$', '$y = x$' ou '$x = y$'. Le problème survient chaque fois qu'au moins deux occurrences de la variable interviennent dans le résultat de la substitution. La stratégie habituelle consiste à utiliser une variable qui ne figure pas dans la formule initiale, par exemple :

$$x = y \to (x = x \to y = x) \text{ (3.b) } \left(\frac{z = x}{P(z)}\right)$$

D'un point de vue syntaxique, cette technique permet de nous en sortir. Mais le propos de Landini est correct : les rôles de 'x' et 'z' ci-dessus ne sont pas les mêmes. 'x' est une variable du langage-objet qui se verra attribuer une valeur par une assignation, 'z' ne sert qu'à indiquer la place à laquelle ce qui figure entre les parenthèses après 'P' doit désormais être écrit. *C'est exactement la fonction des lettres du troisième groupe chez Frege.*

Landini estime que l'incorporation de schémas d'axiomes permet de contourner la difficulté. Voici la traduction de (3.b) dans ce contexte :

> $\alpha = \beta \to (A \to A^*)$
> lorsque A^* résulte du remplacement dans A d'une ou plusieurs occurrences libres de α dans A par des occurrences libres de β dans A. (Landini 2012, p. 18)

Il existe en réalité différentes manières d'écrire les axiomes pour l'égalité. Nous pouvons, de façon équivalente, les spécifier sous forme compacte ou développée. Landini ne les fournit pas tous (il manque par exemple la symétrie). Cela n'aide pas à comprendre dans quel contexte il se situe, notamment ce qu'il met derrière la notion de liberté pour un *terme* (et non une variable). Nous pouvons néanmoins deviner son idée : la métavariable 'A' nous sort de l'embarras car il n'est plus nécessaire de définir le passage du symbole 'P' à une formule complexe, il suffit d'effectuer le remplacement directement à l'intérieur de la formule complexe. Les lettres pour les espaces vacants ne sont donc plus mises à contribution lorsque (3.b) est donné sous forme schématique. Jusque-là, rien à signaler. Le problème intervient lorsque nous considérons les axiomes pour la quantification, toujours dans leurs versions schématiques :

> (2.a) $\forall x A \to A[\alpha/x]$
> où α est un terme libre d'occurrence libre [112] de x dans A.
> (2.b) $\forall x^{(0)} A \to A[\psi/x^{(0)}]$
> où ψ est une variable de prédicat libre d'occurrence libre de $x^{(0)}$ dans A. (Landini 2012, pp. 17-18)

En premier ordre, les métavariables permettent en effet de nous limiter à de simples remplacements. En revanche, le second ordre vient largement compliquer la situation. Landini n'est pas clair sur le statut de la lettre 'ψ'. Il la qualifie de variable de prédicat, mais évoque la possibilité d'une occurrence d'une autre variable de prédicat libre dans ψ. En vérité, au même titre que l'axiome du premier ordre requiert un *terme* α, celui de second ordre doit impliquer ce qui est généralement appelé une 'formule considérée comme un prédicat dépendant d'une variable' $F(z)$.

Pour comprendre à quoi nous avons affaire, supposons que la formule suivante soit prouvée, pour un prédicat 'P_1' et une constante 'c' :

$$\text{`}\forall x^{(0)}(x^{(0)}(c) \leftrightarrow P_1(x))\text{'}$$

112. Landini n'éclaire pas cette formulation. Ce qui doit être exigé, c'est en fait que α soit librement substituable à x dans A, c'est-à-dire qu'aucune occurrence d'une variable libre dans α ne se retrouve liée dans $A[\alpha/x]$.

Celle-ci est valable pour toute propriété $x^{(0)}$, elle est donc *a fortiori* valable pour la propriété P_2. En utilisant (2.b), un simple remplacement suffit à aboutir à :

$$\text{‘}P_2(c) \leftrightarrow P_1(x)\text{’}$$

Mais la formule est aussi valable pour des propriétés qui reçoivent un nom *complexe* dans le langage, par exemple $P_2(z) \wedge P_3(z)$:

$$\text{‘}P_2(c) \wedge P_3(c) \leftrightarrow P_1(x)\text{’}$$

Pour parvenir au résultat, il ne suffit plus de remplacer ‘$x^{(0)}$’ par une simple lettre. Le procédé habituel consiste à utiliser des variables qui sont absentes de la formule initiale, ainsi que l'était ‘z’ dans notre exemple. Mais là encore, ces variables ne jouent aucun rôle sémantique. Elles se contentent de marquer les places vides, elles ont exactement le statut des lettres du troisième groupe chez Frege. La formule considérée ci-dessus comme un prédicat à une place s'écrit donc ‘$P_2(\xi) \wedge P_3(\xi)$’, et l'axiome (2.b) trouve sa forme convenable à travers l'expression suivante :

(2.b) $\forall x^{(0)} A \rightarrow A[F(\xi)/x^{(0)}(\xi)]$

où ‘$F(\xi)$’ est une formule considérée comme un prédicat de premier ordre à une place librement substituable à ‘$x^{(0)}(\xi)$’ dans A.

Les formules considérées comme des prédicats de premier ordre à une place correspondent aux noms *complexes* de concepts de type (0) chez Frege. Ainsi, contrairement à ce qu'affirme Landini, les lettres pour les espaces vacants sont impliquées dans la gestion de la substitution, *que nous procédions par schémas d'axiomes ou non*[113].

Les théories de la quantification de second ordre sont suffisamment riches pour que la majorité des logiciens s'y cantonnent, quand ils ne font pas le choix de tout aplatir en premier ordre, à travers la théorie des ensembles. Il existe néanmoins des logiques d'ordres supérieurs, notamment formalisées à travers la syntaxe du λ-calcul, qui utilisent un processus de conversion aussi complexe que celui exigé par la syntaxe idéographique. Nous ne voulons pas entrer dans les diverses subtilités et difficultés de ces systèmes. Contentons-nous d'observer ce qui se passerait dans une logique traditionnelle des prédicats du troisième ordre. L'axiome (2) pour le troisième ordre devrait *a priori* faire monter la prise en charge des substitutions jusqu'au niveau deux :

(2.b) $\forall x^{((0))} A \rightarrow A[F_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))/x^{((0))}(\varphi(\beta))]$

où ‘$F_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$’ est une formule considérée comme un prédicat de second ordre à une place librement substituable à ‘$x^{((0))}(\varphi(\beta))$’ dans A.

En vérité, il convient de se limiter au premier niveau, *et c'est là la différence cruciale entre l'idéographie et ce type de langages.* En effet, considérons que la formule suivante soit démontrée pour une propriété de – disons-le en termes contemporains – second ordre $P_1^{((0))}$ et une propriété de premier ordre $P^{(0)}$:

$$\forall x^{((0))}(x^{((0))}(P^{(0)}) \leftrightarrow P_1^{((0))}(P^{(0)}))$$

La formule considérée comme un prédicat de second ordre à une place ‘$P_2^{((0))}(\xi) \wedge P_3^{((0))}(\xi)$’ est candidate au remplacement de ‘$x^{((0))}(\xi)$’ :

$$(P_2^{((0))}(P^{(0)}) \wedge P_3^{((0))}(P^{(0)})) \leftrightarrow P_1^{((0))}(P^{(0)}))$$

113. En fait, les schémas d'axiomes permettent seulement l'économie d'un niveau.

Notre axiome s'écrit donc très simplement ainsi :

(2.b) $\forall x^{((0))} A \rightarrow A[F^{((0))}(\xi)/F^{((0))}(\xi)]$
où '$F^{((0))}(\xi)$' est une formule considérée comme un prédicat de second ordre à une place librement substituable à '$F^{((0))}(\xi)$' dans A.

Et le même processus suffit pour les niveaux suivants. Nous pouvons nous limiter à la lettre 'ξ', et opérer les seules substitutions correspondant au premier niveau. Cela provient, bien entendu, du fait que les arguments des prédicats d'ordre $n+1$ sont toujours des prédicats *simples* d'ordre n. Voilà qui autorise, aussi bien dans les substitutions que dans la morphologie, à restreindre toute mécanique de saturation au niveau un.

Il faut bien comprendre le sens de cette affirmation. Lues en termes fregéens, les arités des prédicats correspondent aux places vacantes qui suivent l'étiquette du nom de concept. Par exemple, la formation de '$P(c,x)$' résulte de la saturation de '$P(\xi,\zeta)$' par 'c' et 'x'. *Les ordres supérieurs ne compliquent en aucune façon ce processus, qui est pour de bon maintenu au niveau* 1. Par exemple, le nom '$P^{(((0)))}(\xi)$' – en termes contemporains le prédicat '$P^{(((0)))}$' d'arité 1 – est saturé par '$P^{((0)))}$' à travers le simple remplacement de 'ξ' par ce dernier signe : '$P^{(((0)))}(P^{((0)))})$'. Les termes des logiques des prédicats, quel que soit l'ordre envisagé, se construisent entièrement dans ce cadre. La morphologie de l'idéographie exige au contraire d'élever le procédé aux niveaux supérieurs. Elle est *strictement plus fine* que celle des langages contemporains des logiques des prédicats. Par exemple, la formule conçue comme prédicat de premier ordre – autrement dit le nom *complexe* de propriété de premier niveau – '$P_1^{(0)}(\xi) \wedge P_2^{(0)}(\xi)$' peut être utilisée, selon la grammaire fregéenne, comme argument du prédicat de deuxième ordre – du nom *simple* de propriété de second niveau – '$P_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$' pour former l'énoncé – le nom propre – '$P_\beta^{((0))}(P_1^{(0)}(\beta) \wedge P_2^{(0)}(\beta))$'. Dans les langages contemporains pour les théories d'ordres supérieurs, une telle manipulation n'est *pas* permise.

Naturellement, les arguments attendus par les noms '$P^{((0))}(\xi)$' et '$P^{(0)}(\xi)$' sont différents : il s'agit de prédicats d'ordres distincts. Le point est précisément que, dans les logiques modernes, le niveau auquel le processus de saturation est conduit ne dépend pas de l'ordre de l'entité à saturer. Pour le dire différemment, la limitation de la saturation aux noms *simples* permet de gérer la totalité du processus à travers les seules étiquettes des noms de concepts. C'est précisément ce qui motive le développement de Landini. Celui-ci remarque que pour procéder à une substitution dans les langages sans schémas d'axiomes, il faut savoir remplacer un nom simple par un nom complexe, et ainsi solliciter les lettres du troisième groupe. Au contraire, la construction de la seule morphologie s'opère à travers la saturation de noms qui fonctionne à la manière du premier niveau, *i.e.* de lettres munies d'arités, et peut donc s'effectuer sans impliquer les signes pour les espaces vacants à travers des clauses telles que :

[–] si t est un terme de type (0), alors $x^{((0))}(t)$ est un terme.

Nous prolongeons son propos : ceci est *aussi* vrai pour les langages avec schémas d'axiomes. Il suffit d'examiner la loi de particularisation pour s'en apercevoir. De plus, et voilà le fond de notre désaccord, les langages contemporains des logiques des prédicats limitent aussi, dans le cadre des substitutions, la mécanique fregéenne au premier niveau. L'établissement de la morphologie s'y restreint dans le seul contexte de la saturation, elle se passe donc des lettres du troisième groupe. La prise en charge des substitutions s'y cantonne, mais va jusqu'à la désaturation, elle exige donc la lettre 'ξ'. Cependant, jamais aucun signe plus complexe, portant en indice un autre signe du même groupe (par exemple '$\varphi_{\varphi^0}^{((0))}$'), n'est mis à contribution. L'idéographie, au contraire, ne peut en faire l'économie. Cela provient du fait que les noms peuvent être saturés par des noms *complexes*. Ainsi '$P_\beta^{((0))}(P_1^{(0)}(\beta) \wedge P_2^{(0)}(\beta))$' appartient à un langage conçu sur le mode fregéen, ainsi il est absent d'une langue construite à la manière contemporaine. La morphologie *et* la gestion

des substitutions exigent, chez Frege, d'élever la mécanique de saturation jusqu'aux imbrications des noms complexes ; ce qui n'est pas le cas dans nos langages standards. La conclusion de Landini est incorrecte. Ce qui importe, ce n'est pas la présence ou l'absence des lettres du troisième groupe dans la formation des termes et dans la gestion des substitutions, c'est le niveau auquel ces lettres sont hissées. En ce sens, la morphologie fregéenne est indubitablement plus riche que nos grammaires habituelles. La question qui se pose est, naturellement, pourquoi les langues contemporaines font-elles l'économie des noms complexes dans la saturation des prédicats ? La réponse n'a trait ni au fait que nous traitons ici de prédicats et de concepts, tandis que Frege se place dans le cadre des noms de fonctions et des fonctions, ni à la distinction restaurée entre termes et formules. Elle provient, purement et simplement, du rôle sémantique des variables dans le paradigme tarskien que les logiciens contemporains ont adopté. Ce point sera l'objet de notre troisième chapitre, et n'a pas besoin d'être traité ici.

Résumons rapidement ce qui vient d'être établi. Landini entend montrer que l'intérêt des lettres pour les espaces vacants se limite, chez Frege comme dans les langages contemporains sans schémas d'axiomes, à la gestion des substitutions. Il compte ainsi combler le fossé qui, comme nous le pensons, sépare leurs morphologies respectives. Nous convenons que, d'une certaine façon, les langages traditionnels usent de lettres dont le rôle est identique à celui des signes du troisième groupe de Frege. La manipulation de symboles munis d'arités correspond *exactement* au processus de saturation limité au premier niveau. Mais ce point s'applique aussi bien aux langages qui intègrent des schémas d'axiomes qu'à ceux qui en sont dénués. De plus (et surtout), cette mécanique a cours à la fois dans la gestion des substitutions et dans l'établissement de la morphologie. Ce n'est donc pas rigoureusement la présence ou l'absence des lettres du troisième groupe qui sépare la morphologie des langages des prédicats modernes de celle de l'idéographie, c'est bien le niveau jusqu'auquel la mécanique est licite. Et nous allons voir que c'est précisément à partir du troisième niveau que toute reconstruction suivant le modèle de celle de Landini s'effondre.

2.3.4.4 Examen de la reconstruction

La reconstruction de Landini procède selon le modèle contemporain, elle est donc extrêmement courte. En voici le contenu [114] :

> Les symboles primitifs sont le trait horizontal, le creux de quantification, le symbole pour le jugement $\vdash$, ainsi que les accolades $\{$, $\}$, les parenthèses (,), les variables individuelles $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ (informellement x, y, z) et les lettres de premier niveau pour les fonctions $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ (informellement f, g, h), les variables de second niveau $M_1, \ldots, M_n$ (informellement M, Ω) en italique ou autre, ainsi que des variables semblables pour les niveaux supérieurs. Comme précédemment, nous pourrons toujours identifier le niveau de tels signes de fonctions parce qu'ils seront toujours indexés (hormis leurs occurrences au-dessus du creux de quantification) d'une variable appropriée indiquant ce niveau (ce type simple). Nous utiliserons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (informellement $\alpha, \beta, \delta, \sigma$) comme schémas de termes. Les termes sont définis récursivement de la manière suivante :
>
> (1) Si f est une lettre *primitive* de fonction et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des variables d'individus, alors $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un terme.

114. Nous restituons seulement sa reconstruction de la morphologie, pas du système.

(2) Si α et β sont des termes, alors $\text{—}\,\alpha$ et $\top\,\alpha$ et $\begin{array}{l}\top\!\!\text{—}\,\beta\\ \llcorner\!\!\text{—}\,\alpha\end{array}$ et $\alpha = \beta$ sont des termes.

(3)[1] Si $\alpha[x]$ est un terme, alors $\overset{x}{\smile}\,\alpha[x]$ est un terme.

(3)[2] Si $\alpha[f]$ est un terme, alors $\overset{f}{\smile}\,\alpha[f]$ est un terme.

(3)[3] Si $\alpha[M]$ est un terme, alors $\overset{M}{\smile}\,\alpha[M]$ est un terme.
Et ainsi de suite pour les niveaux supérieurs.

(4) Il n'y a pas d'autres termes.
Les formules bien formées sont définies par :
Si α est un terme, alors $\vdash \alpha$ est une formule bien formée.

(Landini 2012, pp. 52-53)

Disons sans ambages que, présentée ainsi, la construction de Landini n'a aucune chance de fonctionner. Elle est coupable de plusieurs erreurs qu'il nous faut corriger. Commençons par une remarque incidente : les accolades sont intégrées à l'alphabet sans qu'elles ne soient jamais sollicitées dans la construction des termes. Rien de bien alarmant jusqu'ici.

La clause (1) pose des problèmes plus sérieux. D'une part, Landini utilise des symboles qu'il a lui-même définis comme métavariables de termes (les 'α'), mais parle de 'variables d'individus'. Il doit s'agir d'une simple coquille, qui n'est pourtant pas évidente à corriger. Si nous conservons les symboles et remplaçons l'expression 'variables d'individus' par 'lettres schématiques pour des termes', alors le processus est purement et simplement bloqué. La définition inductive n'est pas initialisée – toutes les clauses définissent de nouveaux termes sur la base d'anciens –, donc aucune expression n'est un terme. Si au contraire nous conservons la formulation mais incorporons les bons symboles pour les variables d'individus, *i.e.* 'x_1', 'x_2', ..., alors les expressions du type '$g(f(x))$', que Landini désirait sans aucun doute incorporer, ne sont plus capturées par la définition. Nous allons donc supposer qu'il a mêlé, de manière incorrecte, *deux* différentes clauses, chacune étant essentielle à la bonne tenue de sa définition.

D'autre part, les lois propositionnelles sont exclues des formules du langage. Voici l'axiome I_b :

$$\text{`}\begin{array}{l}\vdash\!\!\text{—}\,x\text{'}\\ \llcorner\!\!\text{—}\,x\end{array}$$

'x' n'étant pas un terme (d'après la définition), ceci n'est clairement pas une formule. Là encore, on peut redresser le tir sans dommage. Il suffit d'intégrer la totalité des variables d'individus aux termes. Cette modification permet de restreindre la clause (1) aux termes, car ces derniers incluent désormais les variables d'individus.

Enfin, l'expression 'lettre *primitive* de fonction' est malheureuse. Toutes les lettres de fonctions impliquées sont primitives. Landini voulait seulement signaler qu'il n'avait pas besoin, pour définir la morphologie, de *noms* complexes de fonctions. Il souhaitait mettre en relief le point déterminant de cette reconstruction.

Nous en avons terminé avec les problèmes superficiels. Voici le résultat de ces quelques corrections, essentielles pour que la définition possède une chance d'atteindre son objectif :

(1) Les variables d'individus sont des termes.

(2) Si f est une lettre de fonction et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des termes, alors $\ulcorner f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\urcorner$ est un terme.

(3) Si α et β sont des termes, alors $\ulcorner\text{—}\,\alpha\urcorner$ et $\ulcorner\top\,\alpha\urcorner$ et $\ulcorner\begin{array}{l}\top\!\!\text{—}\,\beta\\ \llcorner\!\!\text{—}\,\alpha\end{array}\urcorner$ et $\ulcorner\alpha = \beta\urcorner$ sont des termes.

(4)[1] Si $\alpha[x]$ est un terme, alors $\ulcorner \overset{x}{\smile} \alpha[x] \urcorner$ est un terme.

(4)[2] Si $\alpha[f]$ est un terme, alors $\ulcorner \overset{f}{\smile} \alpha[f] \urcorner$ est un terme.

(4)[3] Si $\alpha[M]$ est un terme, alors $\ulcorner \overset{M}{\smile} \alpha[M] \urcorner$ est un terme.
Et ainsi de suite pour les niveaux supérieurs.

(5) Il n'y a pas d'autres termes.

Venons-en aux points plus délicats. Landini utilise, dans la seconde stipulation (la première avant correction), la lettre 'f' qu'il limite aux seules fonctions de *premier* niveau. Dans ce cas, les clauses (4)[3] (et supérieures) sont inutiles, car aucun terme ne contient la lettre 'M' (ni aucune variable fonctionnelle de niveau supérieur). Si au contraire, nous supposons qu'une quelconque variable fonctionnelle peut être introduite à la place de 'f', alors des termes tels que '$M_\beta(x_1, \ldots, x_n)$' peuvent être formés. Or ceux-ci ne sont pas acceptables, car la lettre en indice ne figure aucunement dans la portée de 'M'.

Le processus de saturation est étroitement lié à la gestion de ces indices, et Landini n'a pas réalisé leur rôle fondamental au sein de la mécanique. Ses différentes explications, là encore, sont incompatibles. Dans ses axiomes, il utilise par exemple l'expression '$F_\phi(M_\beta(\phi(\beta)))$', tandis que '$\beta$' est introduit comme une métavariable pour un terme. 'ϕ' n'est pas cité parmi les symboles du langage. Il fut néanmoins, quelques pages plus tôt, l'objet de quelques précisions :

> L'indice x dans $M_x\phi(x)$ sert à nous rappeler [qu'un objet tombe sous ϕ]. Le cas est similaire lorsque nous gravissons les niveaux. Par exemple, la structure quantificationnelle $(\forall\varphi)(\ldots(\forall x)(\ldots\varphi x\ldots)\ldots)$ [115] est exposée à travers l'indice ϕ dans $\Sigma_\phi(M_x\phi(x))$. (Landini 2012, p. 21)

Le passage est clair : les indices sont des variables de niveau adéquat. Cette idée réapparaît durant l'introduction de la morphologie :

> Comme précédemment, nous pourrons toujours identifier le niveau de tels signes pour les fonctions parce qu'ils seront toujours indexés (hormis leur occurrence au-dessus du creux de quantification) d'une variable appropriée indiquant ce niveau (ce type simple). (Landini 2012, p. 52)

Malgré quelques fluctuations dans les explications, il semble donc que Landini intègre les lettres en indices à ses variables. Mais c'est aussi à l'intérieur de ces passages que se tient son erreur. Il suggère que les indices servent uniquement à repérer le niveau (ou le type, dans le cadre général). Voilà ce que toute sa section 2.1 est censée établir. Landini y mène une comparaison entre les notations de l'idéographie et celles d'une logique des prédicats classique. Il intègre un tableau dans lequel les deux versions des mêmes expressions sont mises face à face, notamment '$\Sigma_\phi(M_x(\phi(x)))$' et '$M^{((0))}(\phi^{(0)})$' :

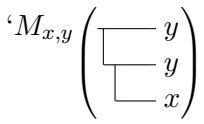
> Dans la notation russellienne de théorie des types simples, les expressions pour des prédicats occupent des positions de sujet. Mais cela est légitimé par la réglementation du langage à travers les exposants. Les deux notations sont équivalentes. (Landini 2012, p. 22)

Si les notations sont équivalentes, alors les indices dans l'idéographie ne servent en effet qu'à indiquer le niveau de la fonction, à l'instar des exposants dans le symbolisme russellien. La répétition de ces indices à droite de l'expression ne serait qu'une fantaisie – et une complication – inutile, visant à maintenir des lettres pour des fonctions dans des positions de fonctions, alors

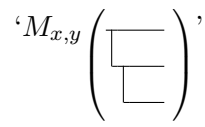
115. Remarquons que les pointillés sont mal placés. Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.3.9, la traduction d'un nom simple en un nom complexe ne peut être représentée de cette manière.

que l'indice nous renseigne déjà quant à la nature de l'entité en jeu. C'est ce point, incorrect, que Landini tente d'établir. D'un côté, nous l'avons vu, il explique que les lettres du troisième groupe sont essentielles à la gestion de la substitution dans les langages traditionnels des logiques d'ordres supérieurs, ainsi qu'elles le sont dans l'idéographie. D'un autre côté, il insiste sur le fait que le rôle des indices est similaire à celui des exposants dans les premiers langages, dont la morphologie se bâtit sans difficulté à travers des symboles munis d'arités. Son objectif est clair : ramener les deux types de langages côte à côte. S'il échoue, c'est parce qu'il ne distingue pas clairement la différence entre les noms simples et complexes de fonctions.

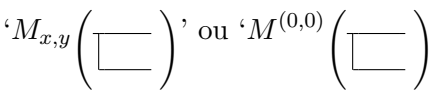
Nous avons expliqué en détail (section 2.3.2.5) pourquoi il n'était pas suffisant d'écrire ces lettres en indice (ou le type en exposant). Nous n'allons pas nous répéter ici. Néanmoins, nous pouvons voir que la conclusion de Landini rentre en contradiction avec ses propres exemples. Il n'utilise jamais de noms complexes impliquant (ce qu'il appelle) des variables, par exemple '$M_x(g(f(x,x)))$'. En revanche, il a recours à des noms complexes impliquant les noms primitifs de l'idéographie. Il sollicite notamment (p. 91) le terme '$\Sigma_\phi(\dot{z}\phi z\hat{\ }y)$', tandis que '$\dot{z}\varphi z\hat{\ }y$' est un nom (ou plutôt un marqueur latin) *complexe*. Sans rentrer dans le détail des parcours-de-valeurs, nous pouvons en construire un autre, qui résulte exactement du même type de mécanique :



Ce terme ne tolère aucune traduction en écriture russellienne. En effet, si nous ne réemployons pas les indices à l'intérieur des parenthèses, nous obtenons l'expression suivante :



C'est toujours la même histoire. Landini ne tient pas compte du lien entre les indices et l'incorporation des noms complexes dans le processus de saturation. En se limitant aux noms atomiques, nous pourrions en effet, suivant le modèle des langages contemporains, utiliser une des deux expressions suivantes :



Mais dès qu'un nom complexe est pris en argument, *ce qui n'advient jamais dans les langages modernes pour les logiques des prédicats*, alors les ressources sont insuffisantes. En définitive, c'est ce problème qui rend la construction de Landini si bancale. Croyant que les indices servent uniquement à indiquer le type, il ne les implique pas dans la construction des termes, et permet donc, à travers la clause (2), la formation d'expressions telles que '$\Sigma_\phi(x_1, x_2)$'. *Sa méthode s'avère incorrecte dès l'entrée en scène des fonctions de troisième niveau.*

2.3.4.5 Amélioration de la reconstruction

Cependant, il demeure possible (et intéressant) de rectifier ce travers. Ce faisant, nous allons voir émerger la discussion qui nous importe :

(1) Les variables d'individus sont des termes.

[1](2) Si f est une lettre de fonction de premier niveau et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des termes, alors $\ulcorner f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \urcorner$ est un terme.

[2](2) Si Ω est une lettre de fonction de second niveau, $x_1, \ldots, x_n$ des variables d'individus et $\alpha[x_1, \ldots, x_n]$ un terme dans lequel ne figurent que des occurrences libres de ces variables, alors $\ulcorner \Omega_{x_1,\ldots,x_n}(\alpha[x_1, \ldots, x_n]) \urcorner$ est un terme.

[3](2) Si Σ est une lettre de fonction de troisième niveau, f une lettre de fonction de premier niveau et $\alpha[f]$ un terme dans lequel ne figurent que des occurrences libres de f, alors $\ulcorner \Sigma_f(f(\alpha[f])) \urcorner$ est un terme.

Et ainsi de suite pour les niveaux supérieurs.

(3) Si α et β sont des termes, alors $\ulcorner — \alpha \urcorner$ et $\ulcorner {}_{\top} \alpha \urcorner$ et $\ulcorner \begin{array}{l} — \beta \\ \llcorner — \alpha \end{array} \urcorner$ et $\ulcorner \alpha = \beta \urcorner$ sont des termes.

[1](4) Si $\alpha[x]$ est un terme dans lequel ne figurent que des occurrences libres de x, alors $\ulcorner \overset{x}{\smile} \alpha[x] \urcorner$ est un terme.

[2](4) Si $\alpha[f]$ est un terme dans lequel ne figurent que des occurrences libres de f, alors $\ulcorner \overset{f}{\smile} \alpha[f] \urcorner$ est un terme.

[3](4) Si $\alpha[M]$ est un terme dans lequel ne figurent que des occurrences libres de M, alors $\ulcorner \overset{M}{\smile} \alpha[M] \urcorner$ est un terme.

Et ainsi de suite pour les niveaux supérieurs.

(5) Il n'y a pas d'autres termes.

Notons que, comme nous, Landini fait la distinction entre la logique fondamentale de Frege, conçue dans toute sa généralité, et la portion limitée développée dans les *Grundgesetze* :

> Le système original de Frege n'incorporait pas d'axiomes d'extensionnalité pour les fonctions, ni des fonctions de niveaux supérieurs [à 3]. [...] [Ceux-ci] font clairement partie de sa logique *fondamentale*. (Landini 2012, p. 56)

Il tente de restituer l'intégralité de la logique de Frege, et non le seul système de l'Idéographie. Pourtant, bien qu'il précise que les indices dépendent du *type* de la fonction en jeu, les variables envisagées sont cantonnées aux niveaux (plus précisément aux types $(\ldots(0, \ldots, 0)\ldots)$). Ce point est sans importance, le procédé se généralise à la totalité des types, par exemple en utilisant pour variable la seule lettre x, en exposant de laquelle figurerait son type. Ce qui compte, c'est que cette dernière construction permet, contrairement à celle de Landini, de définir la totalité des termes qu'il utilise dans son ouvrage. Elle ne procède pas exactement comme il le croyait, car les indices jouent un rôle important à l'intérieur de la portée des variables de fonctions. Cependant, il est vrai qu'elle n'exploite pas la mécanique de saturations et de désaturations, et nous ne pouvons nier qu'elle est considérablement plus simple que la nôtre. En vérité, elle procède *exactement* sur le mode de notre méthode par marqueurs, que nous avons rejetée en invoquant des raisons sémantiques.

Afin d'éclaircir cette situation, nous allons procéder à quelques modifications. D'une part, nous nous limiterons désormais aux types $(\ldots(0)\ldots)$. Cela n'aura aucune incidence sur le raisonnement, mais permettra de le conduire dans un cadre plus explicite. D'autre part, nous allons rendre aux noms primitifs de fonctions leur structure fondamentale, présentée à la page 276. Ainsi, nous aurons à disposition les *étiquettes* suivantes : '$\forall$', '$\rightarrow$', '$—$ ', '${}_{\top}$ ', '$=$'. Enfin, nous allons utiliser, comme variables de fonctions, les signes 'ψ_i^n' où n est le niveau de la fonction indiquée. Les lettres pour les objets et fonctions sont donc à la fois les étiquettes des noms primitifs *et* les variables de fonctions. De cette manière, la précédente construction épouse une forme familière :

(1) Les lettres pour des objets sont des termes.

(2) Si L est une lettre de fonction de niveau 1 et α un terme, alors $\ulcorner L(\alpha) \urcorner$ est un terme.

(3) Si ψ^n est une variable de fonction (de niveau n), L une lettre de fonction de niveau $n+2$ et α un terme dans lequel figure au moins une occurrence libre et aucune occurrence liée de ψ^n, alors $\ulcorner L_{\psi^n}(\alpha) \urcorner$ est un terme.

(4) Il n'y a pas d'autres termes.

Pour reconnaître immédiatement notre méthode par marqueurs limitée aux types $(\ldots(0)\ldots)$ (page 281), il suffit d'ajouter la clause suivante :

(5) Un nom propre est un terme qui n'intègre aucune occurrence libre de variable.

Ce procédé caractérise exactement le même ensemble de noms propres que notre méthode. Le théorème 3 nous assure donc sa validité, *du pur point de vue syntaxique*. Cependant, nous savons que cette stratégie implique, dans la construction des noms, des expressions qui n'en sont pas. Landini reconnaît que les noms ne sont pas construits linéairement sur la seule base des noms atomiques, mais il soutient que les *termes* du langage le sont bel et bien. Relativement à ceux-ci, sa construction serait donc totalement linéaire : un terme serait formé exclusivement à travers des concaténations successives de termes plus simples. Malheureusement, ce tour de force va se révéler beaucoup trop coûteux.

Pour le comprendre, il faut cerner la distinction entre termes et noms. Si nous appelons 'terme' n'importe quelle expression qui peut, dans un énoncé de l'idéographie, être apposée à droite du signe '$\vdash$', alors les noms propres ne couvrent pas l'ensemble des *termes* du langage. Frege intégra à son alphabet des lettres latines qui peuvent à loisir venir remplacer une étiquette du même type. Le résultat est appelé un 'marqueur latin'. Le geste de Landini est très simple : *il résorbe totalement la distinction entre lettres latines et lettres du deuxième groupe*. Selon notre lecture, '$X^1(\psi^0)$' n'est pas un terme, car 'ψ^0' n'est attaché à aucune étiquette. En revanche, '$X^1(a)$' est un terme, bien qu'il ne s'agisse pas d'un *nom*. Selon la construction de Landini, la distinction entre '$X^1(\psi^0)$' et '$X^1(a)$' n'a pas cours : '$X^2_{\psi^0}(X^1(\psi^0))$' (ou '$X^2_a(X^1(a))$') et '$X^1(\psi^0)$' (ou '$X^1(a)$') sont tous deux des termes. Le premier est formé par l'intermédiaire du second. Au contraire, puisque nous maintenons une différence entre 'a' et 'ψ^0', '$X^2_{\psi^0}(X^1(\psi^0))$' ne peut être construit sur la base de '$X^1(a)$'. Ainsi, la définition de Landini n'est linéaire que parce qu'elle identifie lettres latines – que, contrairement à nous, il nomme des 'variables' – et lettres du deuxième groupe. Et nous allons voir que, pour des raisons sémantiques, Frege aurait contesté cette décision.

Notons néanmoins que, nulle part dans son ouvrage, Landini n'assume expressément cette dernière. Nous n'affirmons d'ailleurs pas qu'il le fasse implicitement. Il se contente de revendiquer l'identification entre lettres gothiques et latines :

> Nous avons exclu les lettres gothiques de notre reconstruction parce que la nuance est inutile et a produit des malentendus. (Landini 2012, p. 56)

Mais, comme nous l'avons expliqué en section 2.3.2.5, il n'existe *aucune* différence entre, par exemple, '$\mathfrak{a}$' et 'β' ('ψ^0' chez nous). Cette conclusion est visible directement à travers sa construction. Pour former linéairement le terme '$M_\beta({}_\top\beta)$', il est indispensable que '${}_\top\beta$' soit aussi un terme, et que β joue exactement le rôle de '$\mathfrak{a}$' dans '${}_{\smile\mathfrak{a}}{}_\top\mathfrak{a}$'. Néanmoins, il est possible que les multiples erreurs internes à sa définition ne lui aient pas permis d'aboutir à ce constat. La question est difficile à trancher, car son comportement vis-à-vis de 'β' n'aide pas à comprendre sa position. D'un côté, il utilise (par exemple) l'expression '$M_\beta(\beta \frown u)$' (p. 91) qui, selon sa propre

définition, n'est un terme que si '$\beta \frown u$' en est un aussi. En suivant sa construction, 'β' et 'u' doivent donc jouer exactement le même rôle que 'x_1' et 'x_2' dans '$x_1 = x_2$', et être ainsi regroupées parmi les variables. D'un autre côté, il n'intègre *que* des lettres grecques en indices – par exemple 'β' – et *jamais* de lettres latines. Il semble ainsi maintenir une distinction *que sa reconstruction est tenue de résorber*. Quoi qu'il en soit, seul ce dernier fait nous importe : une définition linéaire des termes exige de rassembler les lettres du deuxième groupe et les lettres latines.

Landini ne l'a peut-être pas réalisé, échouant à mesurer les conséquences d'un geste qu'il n'a pas effectué correctement. Sa reconstruction, ses explications et l'écriture d'expressions idéographiques sont toutes ambigües à cet égard. C'est parce qu'il n'a pas suffisamment soigné ses développements techniques qu'il fut conduit à croire que les imbrications fregéennes étaient équivalentes aux exposants post-russelliens. Dans le cours de ses analyses, il conserva les termes idéographiques dans une forme proche de celle des *Grundgesetze*, maintenant une distinction interdite par sa propre construction. Eût-il été davantage attentif à cette dernière qu'il aurait compris qu'elle résorbait toute différence entre les 'β' et les 'x'. Peut-être qu'en uniformisant son texte, il se serait aperçu du problème que nous allons raconter, et aurait renoncé entièrement à son interprétation. Au contraire, peut-être aurait-il pleinement assumé cette identification, aveugle à la difficulté qu'elle pose. Quoi qu'il en soit, il est absolument certain que son objectif *exige* cette identification. Il n'existe aucune autre façon d'accéder à l'induction linéaire qu'il poursuit. Finalement, il nous est indifférent de déceler la cause de son erreur : des maladresses techniques qui ont dissimulé les besoins d'une définition inductive linéaire – identification entre lettres latines et du second groupe –, ou une cécité aux effets désastreux d'une telle identification – une transgression profonde des conceptions sémantiques de Frege. Il nous importe seulement de démontrer les deux points suivants : cette identification est à la fois nécessaire à son projet et inadaptée aux idées fregéennes. Nous ne prétendons pas déterminer lequel d'entre eux lui a échappé, et cela n'a aucune importance. Nous avons établi le premier : l'identification entre les deux types de lettres est nécessaire à toute définition linéaire des termes. Nous allons à présent expliquer qu'elle interdit de refléter les compositions des sens et les opérations entre fonctions, ce qui nous conduira au second.

2.3.4.6 Le problème du sens

Dans notre troisième chapitre, nous nous demanderons si la mécanique de saturations permet de déterminer les références des noms complexes en fonction de celles des noms primitifs. Le point délicat sera le suivant : il faudra établir qu'un nom complexe d'objet, reconstruit à partir de nouveaux noms de fonctions, ne se voit jamais octroyer une référence différente de celle qui lui était jusque-là dévolue.

Considérons un exemple simple, que nous garderons tout au long de cette section. Soient trois noms primitifs de fonctions '$X_{\psi^0}^{((0))}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$', '$X_1^{(0)}(\varphi^0)$' et '$X_2^{(0)}(\varphi^0)$'[116]. La difficulté consistera à montrer que le nom suivant possède la même référence quel que soit le chemin à partir duquel il est formé :

$$\text{'}X_{\psi^0}^{((0))}(X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(\psi^0)))\text{'}$$

Voici trois différentes manières de le construire :

– saturation de '$X_{\psi^0}^{((0))}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$' par '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(\varphi^0))$' ;

– saturation de '$X_{\psi^0}^{((0))}(X_1^{(0)}(\varphi^{(0)}(\psi^0)))$' par '$X_2^{(0)}(\varphi^0)$'

116. Le lecteur peut, pour fixer les idées, choisir '$\frown^{\mathfrak{a}} \varphi(\mathfrak{a})$' pour le premier et '$_{\top}\, \xi$' pour les deux derniers.

– saturation de '$X_{\psi^0}^{((0))}(\varphi^{(0)}(X_2^{(0)}(\psi^0)))$' par '$X_1^{(0)}(\varphi^0)$'

Les étapes de formation d'un nom doivent correspondre aux étapes de détermination de sa référence. Trois méthodes différentes peuvent donc *a priori* conduire à trois objets différents, et il convient de vérifier que rien de tel n'advient.

Disons-le en toute généralité : nous verrons que chaque étape de la mécanique de saturation-désaturation permet la formation d'un nom dont la référence peut être calculée à partir de ceux par lesquels il a été formé. Néanmoins, un même nom peut parfois être construit à travers deux chemins distincts. Il sera donc crucial de vérifier que ces deux chemins déterminent toujours la même référence.

La question du sens sale considérablement l'addition. Dans notre premier chapitre, nous avons pris les précautions qui s'imposaient. Nous avons octroyé à l'expression 'composition du sens' une acception très large, qui convient aussi bien au modèle tout-parties qu'au modèle fonction-argument, sans nous prononcer définitivement à cet égard. L'idée qu'un sens soit véritablement structuré, constitué de différentes parties, pose une difficulté immédiate dans le cadre fregéen. Ramenée à notre exemple, elle consiste à se demander si les constituants du sens de '$X_{\psi^0}^{((0))}(X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(\psi^0)))$' sont :

1. les sens de '$X_{\psi^0}^{((0))}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$' et de '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(\varphi^0))$', ou
2. les sens de '$X_{\psi^0}^{((0))}(X_1^{(0)}(\varphi^{(0)}(\psi^0)))$' et de '$X_2^{(0)}(\varphi^0)$', ou encore
3. les sens de '$X_{\psi^0}^{((0))}(\varphi^{(0)}(X_2^{(0)}(\psi^0)))$' et de '$X_1^{(0)}(\varphi^0)$'.

Voici donc l'interrogation : est-ce qu'un sens admet bel et bien différentes décompositions, ou s'agit-il seulement d'états transitoires, qui conduisent, en répétant l'opération, à une décomposition unique ? Landini choisit la seconde alternative, en s'appuyant sur sa propre reconstruction de l'idéographie.

Nous n'allons pas encore trancher la question. Nous voulons seulement montrer qu'en exploitant sa reconstruction (même corrigée), Landini n'apporte aucune réponse convaincante. L'ontologie fregéenne, précisément la hiérarchie fonctionnelle, exige d'emprunter le sentier que nous avons battu pour résoudre le problème, ou de fournir certaines raisons convaincantes de s'en écarter. Landini ne fait ni l'un ni l'autre.

L'identification des signes du deuxième groupe aux lettres latines, en conduisant à une définition linéaire des termes, permet d'éviter qu'un même terme résulte de différentes combinaisons. Ainsi notre exemple se construit linéairement à travers les manipulations suivantes :

(1) a

(2) $X_2^{(0)}(a)$

(3) $X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(a))$

(4) $X_a^{((0))}(X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(a)))$

Cependant, Frege considère que les lettres latines, et ainsi les termes des trois premières étapes, sont *dénués de sens*. C'est précisément ce qui l'a conduit à renoncer aux idées de la *Begriffsschrift*, et à développer l'appareil de la hiérarchie des niveaux. Landini a conscience de cette difficulté, il n'affirme donc pas que le sens du terme construit est composé de ceux des trois termes à travers lesquels il est formé. Il prétend qu'il est constitué des seuls sens des noms primitifs de fonctions, et a recours à un procédé graphique pour illustrer son idée. Il fait figurer

un symbole au-dessus d'une expression pour la laisser désigner, non plus sa référence, mais son sens :

– '$\overset{\diamond}{X}{}^0$' réfère au sens de '$X^0$' ;

– '$\overset{\triangle}{X}{}_1^{(0)}(\varphi^0)$' à celui de '$X_1^{(0)}(\varphi^0)$' ;

– '$\overset{\square}{X}{}_2^{(0)}(\varphi^0)$' à celui de '$X_2^{(0)}(\varphi^0)$' ;

– '$\overset{\bullet}{X}{}_a^{((0))}(\varphi^{(0)}(\overset{\bullet}{a}))$' à celui de '$X_a^{((0))}(\varphi^{(0)}(a))$'.

Voilà la représentation du sens de notre terme :

$$\text{`}\overset{\bullet}{X}{}_a^{((0))}(\overset{\triangle}{X}{}_1^{(0)}(\overset{\square}{X}{}_2^{(0)}(\overset{\bullet}{a})))\text{'}$$

Ce procédé s'adapte à tous les noms du langage. Très simplement, il consiste à faire figurer au-dessus de chaque signe d'une expression le même symbole qui apparaîtra au-dessus du signe qui y figure en indice. Voici un nom à peine plus complexe [117] :

$$\text{`}\overset{\bullet}{X}{}_{f^{((0))}}^{((((0))))}(\overset{\square}{X}{}_{f^{(0)}}^{((((0)))}(\overset{\bullet}{f}{}_a^{((0))}(\overset{\square}{f}{}^{(0)}(\overset{\bullet}{a}))))\text{'}$$

Malheureusement, ces seuls dessins ne permettent pas de "voir" la manière dont les contenus sont combinés, ils ne révèlent aucune règle grammaticale *adaptée au sens*. Sans explication préalable, ils ne pallient pas le défaut de la morphologie qui, en impliquant des noms dénués de contenus, propose une définition inductive inadaptée aux phénomènes de composition des sens. Or Landini ne fournit aucun éclaircissement les concernant. Examinons ses arguments de plus près.

Selon lui, les lettres pour les espaces vacants permettent la construction de nouveaux noms de fonctions qui jouent un rôle syntaxique dans la gestion des substitutions, mais aucun rôle sémantique, car le sens des noms complexes de fonctions n'est jamais partie du sens des énoncés de l'idéographie :

> Dans chaque cas, le système formel de Frege est adéquat à la compréhension de la fonction [désignée par un nom complexe] en question. Mais aucun de ces *Gedanken* n'est le sens d'une des formules du langage objet de Frege, parce que les signes complexes pour les fonctions, formés grâce aux lettres [du troisième groupe], ne sont pas des signes du langage objet. (Landini 2012, p. 142)

Pour illustrer son point, il a recours à un procédé de parenthésage. Il explique que Frege s'autorise à exploiter le nom provenant de la désaturation de 'X^0' à partir de '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(X^0))$' dans le cadre d'une substitution, mais que le sens de ce nom n'est pas impliqué dans celui de '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(X^0))$'. En conséquence, il choisit de l'écrire '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}((\xi)))$'. Ainsi, une fois complété par le nom dont il fut désaturé, il permet la formation d'un *nouveau* nom – '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}((X^0)))$' – qui exprime une *nouvelle* pensée [118]. Celle-ci est bel et bien composée du sens de '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}((\xi)))$', mais n'est pas exprimable dans l'idéographie. D'un point de vue sémantique, ce langage est

117. Nous sommes dans le paradigme de Landini. Nous employons donc les lettres latines comme lettres du deuxième groupe. 'a' indique un objet et 'f^T' une fonction de type T.

118. en supposant que les fonctions en jeu sont des concepts.

ainsi préservé de l'action des noms complexes de fonctions, limitée à la gestion syntaxique des substitutions.

Landini entend donc écarter le sens des noms complexes de fonctions de celui des énoncés de l'idéographie. Simultanément, il espère restreindre le rôle des lettres pour les espaces vacants à la prise en charge des substitutions. Mais cela n'est possible que si la construction des noms propres, qui n'exploite *que* des noms primitifs de fonctions, exhibe pas à pas la formation du sens de ces noms propres. Or, c'est précisément ce à quoi elle échoue, en impliquant des noms transitoires dénués de contenus.

La morphologie de Landini trace effectivement un chemin unique entre les noms simples de fonctions et un quelconque nom complexe d'objet, *sans jamais transiter par aucun nom complexe de fonction.* Néanmoins, pour s'assurer que les sens de ces derniers ne contribuent pas à celui du nouveau nom, il est indispensable que chaque étape de la construction corresponde à un stade de formation de son sens, *i.e. que le sens du nom transitoire construit à chaque étape soit composé du sens des noms à partir desquels il est construit.* C'est seulement à cette condition que la structure d'un nom, qui dépend ultimement de la morphologie du langage, peut exposer la composition de son sens. *Or c'est précisément ce que la grammaire de Landini ne fait pas, car les termes mis à contribution dans la formation d'un nom propre sont dépourvus de sens.*

Il est clair – et personne n'en doute – que les sens des noms primitifs impliqués dans la construction d'un nom complexe doivent jouer un rôle dans le sens de ce dernier. Le problème est précisément de déterminer *lequel.* Surplomber d'une figure géométrique chacune de leurs occurrences dans le nom complexe n'aide en aucune manière à y parvenir. Ce sont les règles grâce auxquelles ce nom est formé qui sont censées nous livrer cette information, *en imitant les phénomènes de composition du sens.* Reprenons notre exemple :

Type	$((0))$	(0)	(0)	0
Nom	‘$X_a^{((0))}(\varphi^{(0)}(a))$’	‘$X_1^{(0)}(\varphi^0)$’	‘$X_2^{(0)}(\varphi^0)$’	‘$X_a^{((0))}(X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(a)))$’
Sens	$\overset{\bullet}{X}{}_a^{((0))}(\varphi^{(0)}(\overset{\bullet}{a}))$	$\overset{\triangle}{X}{}_1^{(0)}(\varphi^0)$	$\overset{\square}{X}{}_2^{(0)}(\varphi^0)$	$\overset{\bullet}{X}{}_a^{((0))}(\overset{\triangle}{X}{}_1^{(0)}(\overset{\square}{X}{}_2^{(0)}(\overset{\bullet}{a})))$
Référence	$X_a^{((0))}(\varphi^{(0)}(a))$	$X_1^{(0)}(\varphi^0)$	$X_2^{(0)}(\varphi^0)$	$X_a^{((0))}(X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(a)))$

Landini prétend que les trois premiers sens se structurent pour former le quatrième. Mais les sens qui peuvent se composer conduisent à des références qui peuvent se combiner. Or une fonction de type $((0))$ ne peut en aucun cas prendre *deux* arguments. Les dessins ne répondent pas à la question posée : comment les sens des noms simples peuvent-ils se structurer *dans le respect des compatibilités entre types* pour former ceux des noms complexes du langage ? C'est justement l'incompatibilité entre les types des trois premières fonctions qui exige que des fonctions désignées par des noms complexes contribuent à la détermination de la dernière. Pour étudier ce problème, il est essentiel de disposer d'un échafaudage linguistique soumis au diktat des types, qui ne permet la formation d'un nouveau nom à partir d'anciens que si sa référence et son sens peuvent être déterminés à partir des leurs. Cet appareil doit donc être conforme aux *saturations* entre fonctions et, en tant que tel, se trouve essentiellement tributaire des lettres pour les espaces vacants. En voulant faire l'économie de celles-ci, Landini a proposé des étapes de construction d'un nom qui ne renseignent aucunement sur la composition de son sens, *i.e.* auxquelles ne correspondent pas d'étapes de formation (ou de détermination) de ce sens. Sur au moins un point, Frege fut très clair concernant les étapes envisageables :

> Il est impossible que toutes les parties d'une pensée soient closes sur elles-mêmes. L'une d'entre elles au moins doit être d'une façon quelconque prédicative et insaturée, sinon elles ne pourraient pas s'enchaîner. (Frege 1892a, p. 140)

Les insaturations de ces différentes parties doivent être *compatibles*. Landini manqua une difficulté fondamentale posée par la sémantique compositionnelle de Frege : les distinctions entre types. Ni ses dessins, ni sa construction n'expliquent *comment* les sens des noms primitifs de fonctions se composent, *conformément aux compatibilités entre types*, pour former les sens des noms propres. La question est purement et simplement ignorée.

Pour y répondre, il convient de proposer une définition inductive des noms qui n'exploite aucune expression dénuée de sens. Il faut exhiber totalement le parallèle entre syntaxe et sémantique, soit en adaptant les étapes de formation au réquisit de compatibilité entre types d'entités (et de sens), soit en présentant certaines raisons convaincantes de s'en écarter. C'est seulement à ce stade qu'il devient possible de comprendre quels phénomènes sémantiques et quelles opérations entre références correspondent à chaque étape de formation d'un nom, et ainsi de déterminer proprement la manière dont les sens se *composent*. Or Landini viole les contraintes catégoriales *sans justifier son geste*, autrement dit sans expliquer comment cette transgression est censée refléter la structure du sens tel qu'il était (prétendument) conçu par Frege, ni pourquoi celui-ci aurait proposé des règles qui ne convenaient finalement pas à cette notion de sens.

Soyons clair sur un point : nous n'affirmons pas que le sens de '$X_a^{((0))}(\varphi^{(0)}(a))$' n'est pas, d'une manière ou d'autre, structuré à partir de ceux de '$X_a^{((0))}(\varphi^{(0)}(a))$', '$X_1^{(0)}(\varphi^0)$' et '$X_2^{(0)}(\varphi^0)$'. Nous disons seulement qu'il faut comprendre cette idée à l'intérieur du paradigme fregéen, en abandonnant nos poncifs contemporains. À cet égard, Landini ne fournit pas convenablement les règles adaptées au sens. Ses dessins ne sont que trompe-l'œil, ils cachent (sans y répondre) la question centrale. Aucun commentateur ne conteste que les sens des noms complexes de fonctions sont impliqués dans les pensées exprimées par l'idéographie. Ce point provient du rôle joué par les catégories sémantiques fregéennes, auquel Landini est resté aveugle. Le problème est le suivant : puisque ce rôle révèle qu'un même énoncé possède différentes compositions dont les constituants sont différents noms complexes de fonctions, doit-on conclure que ces diverses décompositions déterminent la même pensée à la manière dont diverses fonctions peuvent prendre la même valeur – décomposition en termes de fonction-argument –, ou que ces noms complexes possèdent eux-aussi des sens composites qui, en s'organisant les uns par rapport aux autres, structurent la même pensée – décomposition en termes de tout-parties ? Cette dernière hypothèse s'illustre de la manière suivante : une table peut être regardée comme composée d'une planche d'un côté, de quatre pieds d'un autre, ou d'une planche et deux pieds d'un côté, et de deux pieds d'un autre. Dans chaque cas, les deux parties *forment* la structure totale, mais elles n'en sont pas les constituants *fondamentaux*. Elles sont composites, et nous pouvons les décomposer à leur tour jusqu'à trouver les *mêmes* éléments fondamentaux. Ainsi, les différentes décompositions d'un sens propre pourraient n'être que différents chemins vers sa structure fondamentale, et chaque constituant ne résulter que d'une décomposition *partielle*. Mais contrairement à ce que dit Landini, ils seraient bel et bien impliqués dans cette structure, bien qu'ils n'en soient pas les constituants *élémentaires*. De plus (et surtout), nous ne pouvons proposer des chemins qui transgressent les contraintes catégoriales sans justifier ce geste. Or, contrairement à celle de Landini, notre construction permet d'élaborer l'édification générale des noms de la langue idéale conformément aux compatibilités entre types, elle s'impose donc comme le cadre initial d'examen des opérations entre références et des compositions entre sens, qui permettra de déterminer si et jusqu'où ces compatibilités permettent de rendre compte de la notion fregéenne de sens, et éventuellement de mettre à jour certaines raisons de s'en écarter.

Landini reproche aux commentateurs de Frege de ne pas enquêter suffisamment sur le fonctionnement réel de son langage. À ce sujet, nous sommes en accord complet avec lui. S'il avait présenté une définition inductive exposant une manière *unique* de construire chaque nom propre *dont nous puissions tirer une manière unique de déterminer le sens et la référence de ces noms* – et présenté des arguments convaincants pour exclure du débat toute autre façon de les former –, alors Landini aurait accompli le tour de force de s'imposer face à l'orthodoxie. Mais sa construction échoue à remplir cet objectif, car elle bâtit les noms propres à travers des termes vides de contenus, ne permettant pas de déterminer le sens de ces noms. Le problème est donc bien réel : la morphologie fregéenne ne favorise aucun chemin pour construire un nom propre. Nous sommes donc face à une alternative. Nous pouvons tenter d'élucider le rôle des sens des noms complexes qui forment (ou déterminent), à travers ces différents chemins, le *même* sens propre. Pour ce faire, il est indispensable d'exploiter une morphologie qui incorpore *tous* les chemins possibles de formation des noms *conformément au réquisit de compatibilités entre types*, et dont chaque étape inductive implique des expressions *chargées de sens*. L'autre solution consiste à conclure qu'il existe une certaine tension entre l'idée – effectivement formulée par Frege – que chaque sens est structuré à partir de constituants élémentaires et la morphologie à laquelle il fit droit, ou plus profondément la manière dont il autorisait les unions entre sens de différents types. Nous nous déciderons pour cette dernière alternative, et c'est donc davantage au niveau de la justification qu'il apporte à sa thèse qu'à celui de cette thèse elle-même que nous nous opposons fermement à Landini. Car, pour aboutir à la seconde conclusion, il convient (1) de proposer une morphologie alternative à celle que Frege suggéra, et qui reflète la structure fondamentale du sens, et (2) de fournir certaines raisons d'adopter cette morphologie. Or Landini ne fait rien de tel. Non seulement il prétend reconstruire l'idéographie telle que Frege la conçut lui-même, tandis qu'il transgresse les compatibilités entre types qui régissent la manière dont celui-ci entendait former les noms. Mais, de plus, il affirme que cette morphologie exhibe la structure du sens, tandis qu'elle ne permet absolument pas de comprendre comment différents constituants peuvent s'articuler. Pour notre part, nous réaliserons bientôt [119] (1) à travers certaines modifications assez simples de notre construction, et (2) en révélant l'existence d'un décalage entre les saturations que Frege permettait et sa notion de sens. Mais la première étape, essentielle, consistait à mettre au point la grammaire fregéenne conforme aux compatibilités entre types, avant de fournir certaines raisons de s'en écarter. Landini a échoué à atteindre ce premier objectif, ruinant d'emblée tous les autres.

2.3.4.7 Synthèse

L'objectif de cette longue section 2.3 consistait à mettre rigoureusement en place la grammaire des noms de l'idéographie. Nous tenions à rédiger une présentation qui soit contemporaine dans la succession de ses étapes. Nous avons donc, après un examen informel de la situation, livré une à une les règles inductives associées à ce langage. Pour en dessiner la carte, nous avons pleinement plongé dans les eaux du symbolisme fregéen. Durant cette exploration, nous ne nous sommes pas occupés d'un autre océan, lointain et mieux connu, dans lequel le logicien contemporain évolue paisiblement, conscient de sa faune et sa flore, parfaitement averti de sa topographie et sa géologie. Il était donc opportun, une fois le travail achevé, de procéder à ce dialogue avec Landini, qui s'évertue à démontrer l'identité entre les deux mers. En lui répondant, nous avons appris ce qui, au contraire, les distingue incontestablement.

Dans cette optique, nous avons dû repérer et corriger un certain nombre d'imperfections dans sa présentation technique, jusqu'à aboutir au problème fondamental de son interprétation. Il faut

119. En sections 3.2.3.4, 3.2.3.5 et 3.3.8.2.

comprendre que ses différentes erreurs ne sont pas indépendantes de sa conclusion erronée. Elles l'ont préparée pas à pas, et c'est à travers elles que nous pouvons l'expliquer. Si Landini était parvenu à une version convenable de sa construction, telle que nous l'avons nous-mêmes améliorée, il n'aurait probablement pas manqué d'apercevoir le problème que nous avons soulevé. Mais il est resté prisonnier d'importantes confusions qui n'ont eu de cesse de dissimuler la difficulté.

Son objectif invariable consista à résorber la différence entre la morphologie fregéenne et celles des langages de prédicats d'ordres supérieurs. Il estime que deux éléments ont détourné les commentateurs de cet important constat. Le premier tient dans les surprenantes lettres pour les espaces vacants. Selon lui, leur rôle n'est cependant pas un trait particulier de l'idéographie. Il s'impose dans tous les langages modernes exploitant des règles de substitutions, bien qu'il soit aujourd'hui systématiquement passé sous silence. En section 2.1, Landini s'est appuyé sur les deux arguments suivants : d'une part, les logiciens contemporains écrivent majoritairement des *schémas* de règles qui permettent l'économie des règles de substitutions et ainsi des lettres du troisième groupe, d'autre part, même lorsqu'ils empruntent le premier sentier, ils taisent ce processus qu'ils estiment suffisamment maîtrisé. Nous sommes rentrés dans le détail de son développement pour en exposer les failles. Mais c'est bien sur cette base qu'il escomptait ouvrir la voie vers sa conclusion. Selon lui, Frege a exploité les lettres pour les espaces vacants *uniquement* afin d'implémenter la prise en charge des substitutions qui demeure *implicite* dans nos langues modernes. Par conséquent, ces symboles seraient aussi étrangers à la construction des noms de l'idéographie qu'à la formation des termes des langages des prédicats.

Il ne lui manquait qu'un deuxième élément pour résorber totalement la différence entre les morphologies des deux langues. En effet, les lettres pour les espaces vacants ne sont pas les seuls symboles absents des langages contemporains, les signes du second groupe n'y figurent pas davantage. Landini expliqua que cette différence était superficielle. Selon lui, Frege intégra ces signes exclusivement pour indiquer le type des noms de fonctions qui les incorporent en indices. Le procédé moderne, en exploitant le système d'exposants mis à jour par Church, parviendrait au même résultat à moindre coût.

Voilà précisément la cellule-souche du virus qui s'est propagé dans toute son interprétation. Contrairement à ce qu'il affirme, il est rigoureusement *impossible* de traduire des expressions telles que '$X_{\beta}^{((0))}(X^{(0,0)}(\beta,\beta))$'. Dans la terminologie fregéenne, l'objection se formule ainsi : les langages des prédicats modernes ne permettent qu'aux noms *simples* de venir saturer d'autres noms. Si Landini avait été plus vigilant lors de l'élaboration *et* l'exploitation de sa propre version de l'idéographie, il aurait remarqué que son objectif – aboutir à une définition linéaire des termes – impliquait de résorber totalement la distinction entre "variables" et lettres du second groupe, selon la correction que nous avons apportée. Il se serait alors aperçu que, dans le courant de ses développements, il avait pourtant maintenu cette différence essentielle. Et la question-clef aurait surgi d'elle-même. Au contraire, dans sa reconstruction, il n'a prêté attention qu'aux quantificateurs, et s'est contenté de stipuler l'identité entre lettres gothiques et latines. Il ne tint pas compte de l'élaboration de termes tels que '$M_{\beta}(\beta = \beta)$'. Eût-il jeté un œil de ce côté qu'il aurait été contraint une fois pour toutes d'identifier les 'β' et consorts aux lettres latines, et se serait retrouvé définitivement piégé dans le problème que nous avons décrit ci-dessus. Le rôle des lettres du second groupe lui serait ainsi apparu : permettre aux étapes inductives de formation des noms d'impliquer seulement des expressions chargées de sens à travers l'exploitation des noms *complexes* de fonctions. La méthode par exposants post-russellienne s'avère totalement incapable de réaliser ce que le système d'indices de Frege accomplit par imbrications. Les deux tactiques ne sont pas équivalentes, et les deux morphologies qu'elles dessinent s'avèrent fondamentalement distinctes.

Ajoutons à cette conclusion qu'un autre aspect les sépare. Nous l'avons déjà introduit à la fin du premier chapitre : la distinction contemporaine entre termes et formules se voit résorbée par l'intégration fregéenne des valeurs de vérité aux objets. Cette spécificité de l'idéographie fut, au contraire de celle qui nous intéresse ici, largement relevée et commentée. Nous ne nous sommes donc pas attardés sur ses effets purement *syntaxiques*. Il nous a suffi d'expliquer que la manière dont Landini escomptait restaurer la distinction dans une perspective fregéenne était inopérante [120]. Néanmoins, il est intéressant de noter que, si nous contredisons sa lecture relativement aux deux problèmes, nous convenons avec lui qu'ils sont *différents*. Il existe *deux* composantes au fossé qui sépare la langue idéale de Frege et les langages des prédicats d'ordres supérieurs dans lesquels elle se voit si souvent "traduite". D'une part, termes et formules – entendus au sens contemporains – sont une seule et même espèce d'entité linguistique. D'autre part, Frege autorise l'écriture de termes qui n'existent pas dans les langages des prédicats, en permettant la saturation par des noms *complexes* de fonctions. *Les deux spécificités sont indépendantes*. La seconde persiste même lorsque l'idéographie est adaptée à une ontologie selon laquelle les concepts ne sont pas des fonctions. Par exemple, il suffit de considérer que les expressions atomiques impliquées dans '$X_{\beta}^{((0))}(X^{(0,0)}(\beta,\beta))$' sont des prédicats – des noms de concepts – qui prennent l'une ou l'autre valeur de vérité lorsqu'ils sont complétés par d'autres prédicats ou constantes d'individus de bons types, et non plus des noms de fonctions qui réfèrent à un objet lorsqu'ils sont saturés par d'autres noms de bons types. L'expression ci-dessus ne tolère aucune traduction en langue des prédicats, car elle exige la saturation de '$X_{\beta}^{((0))}(\varphi^{(0)}(\beta))$' par le prédicat *complexe* '$X^{(0,0)}(\xi,\xi)$'.

C'est dans la section 2.1 que Landini ferma résolument les yeux sur ce point crucial. L'erreur se répercuta, par effet boule de neige, dans la suite de ses réflexions. Le point névralgique se situe précisément dans l'affirmation de l'équivalence entre le procédé fregéen d'imbrications des noms et la méthode d'exposants des logiques d'ordres supérieurs :

> Nous avons remarqué que, dans les notations fregéennes, les expressions pour des fonctions étaient maintenues dans des positions de fonctions, et ainsi pour les attributs. L'utilisation de variables structurées aboutit à cela. Mais le procédé est fastidieux [*tedium*].
>
> [...]
>
> Dans la notation russellienne de théorie des types simples, les expressions pour des prédicats occupent des positions de sujet. Mais cela est légitimé par la réglementation du langage à travers les exposants. Les deux notations sont équivalentes. (Landini 2012, p. 22)

À ce stade, il pouvait tranquillement affirmer que le rôle syntaxique des noms complexes de fonctions se limitait aux substitutions, et que ces expressions ne remplissaient *aucune* prérogative sémantique. À plusieurs reprises, il qualifia de 'fastidieuse' la stratégie d'imbrications. Au moment de présenter formellement l'idéographie, il annonça :

> Nous reconstruisons le système avec ses axiomes et une règle d'uniforme substitution, mais nous ne nous arrêterons pas pour spécifier cette règle fastidieuse. (Landini 2012, p. 52)

Notre section 2.3.3.9 nous livre sur un plateau les éléments nécessaires à l'écriture de cette règle, que nous énoncerons en temps voulu. Mais elle exploite le travail réalisé dans les dizaines de pages formelles qui l'ont précédée. Il est clair que, pour spécifier cette règle, Landini aurait dû s'engager dans des développements techniques autrement plus complexes que les trois pages dans lesquelles tient sa propre reconstruction. Pourtant, en s'y appliquant, il n'aurait pu manqué

120. Voir la note de bas de page 255 (p. 226).

d'apercevoir que les stratégies d'imbrications et d'exposants n'étaient *pas* équivalentes. S'il avait renoncé à cette "économie", il aurait assurément évité le piège dans lequel il a sombré. Les nombreux accidents techniques de son développement sont précisément les traces de son erreur, et l'ont conduit un à un à sa conclusion. Puisse le fait que nous n'y ayons pas succombé aider le lecteur à nous pardonner de l'avoir mené à travers ces "fastidieuses" considérations.

Un dernier point mérite d'être établi avant de clore cette section. Si Landini tient pour similaires les étapes d'inductions des constructions des termes des deux types de langues, il affirme au contraire, en se basant sur l'écriture en deux dimensions et sur le trait horizontal, que les noms *primitifs* de l'idéographie ont, dans leur syntaxe, quelque chose d'irréductible aux expressions élémentaires des langages modernes. Nous nous opposerons aussi à cette analyse en section 2.5.1. Notre conclusion sera donc *diamétralement* opposée à celle de Landini : c'est bel et bien dans l'étape d'induction, *et seulement dans celle-ci*, que la syntaxe de l'idéographie trouve toute son originalité. Nous voulons néanmoins lever un malentendu possible. Pour l'instant, nous ne rejetons pas comme *sémantiquement inadaptée* toute construction de l'idéographie similaire à celle de Landini. Nous disons seulement que celui-ci procède *à revers*. Il ne suffit pas de remarquer que le sens d'un nom complexe se compose *via* ceux des noms simples à partir desquels ce nom est formé. Il importe de déterminer *comment* cette composition s'effectue. À cet égard, l'étape d'induction est fondamentale,car c'est elle qui indique à quelles catégories des sens fonctionnels doivent appartenir pour déterminer conjointement un nouveau sens propre – par saturation – et à quelles catégories des sens fonctionnels doivent appartenir pour, conjointement avec un sens propre, déterminer un nouveau sens fonctionnel – par désaturation. L'information nous est livrée par les types des expressions en jeu dans le processus d'induction. Il est donc indispensable, pour répondre à la difficulté, que ces expressions soient chargées de sens. L'objectif de Landini consiste à débarrasser le processus des opérations de désaturations qui interdisent toute définition linéaire des noms. Il exige d'identifier lettres latines et lettres du deuxième groupe, et d'impliquer dans la construction d'un nom des termes qui incorporent des occurrences libres de ces lettres. Or, aux dires mêmes de Frege, de tels termes sont dénués de sens. Pour expliquer de quelle manière sa construction dévoile la composition des sens, Landini est donc tenu de présenter une interprétation particulière des lettres latines comme dotées de sens, qui contredise les nombreuses affirmations de Frege. Une telle stratégie est envisageable. Après tout, certains interprètes contestent les lectures trop littérales de ses textes. *Mais ce n'est pas la tactique de Landini*, qui admet sans discuter que les termes intégrant des occurrences libres de ces lettres sont vides de sens. Il élude donc *totalement* la question. Il considère que sa construction est une élucidation du problème du sens alors que, au contraire, elle *suppose* une telle élucidation. Elle doit être justifiée *en amont*, et Landini ne fait rien de tel. Pour autant, nous ne contestons pas le bien-fondé d'une telle stratégie, *à condition qu'elle soit menée de bout en bout*. Nous voyons seulement que la morphologie organique de l'idéographie est telle que nous l'avons présentée, *si elle doit respecter les compatibilités entre catégories*. C'est donc à travers notre construction que les questions du sens et de la référence doivent être posées, et c'est seulement en les réglant qu'une autre stratégie pourrait être envisagée. Cette construction est donc le point de départ de toute enquête, même de celles qui viseraient à s'en écarter. Au bout du compte, nous allons aussi être conduits à nous en détourner. Mais cela, nous ne sommes pas encore en mesure de l'expliquer. Il convient d'abord de présenter le rôle syntaxique des lettres latines, et les problèmes qu'elles soulèvent d'un point de vue sémantique, qui seront discutés dans le troisième chapitre.

2.4 La morphologie de l'idéographie : la grammaire des termes

Nous allons désigner par le mot 'terme' toutes les expressions t telles que $\ulcorner\vdash t\urcorner$ soit un énoncé. Les noms propres en font donc partie, tandis que les noms de fonctions en sont exclus. Mais Frege utilise aussi, pour former des énoncés, certaines expressions qui n'ont aucune référence et qui sont, en tant que telles, exclues du domaine des noms. Il s'agit des marqueurs latins d'objets dont la construction exige, en plus des symboles déjà introduits, des lettres d'un quatrième groupe : les lettres latines. Dans cette section, nous allons incorporer ces dernières à notre précédente reconstruction, et ainsi achever la description complète de la grammaire fregéenne. Mais il s'agit surtout de discuter leur rôle exact au sein des *Grundgesetze*, ou plutôt d'introduire les nombreuses questions soulevées par leur présence. Celles-ci joueront un rôle substantiel danrs notre prochain chapitre sur la sémantique, et vont nous permettre de formuler un problème que nous avons, jusqu'à présent, passé sous silence.

2.4.1 Le problème des lettres latines

2.4.1.1 Leur rôle intra-énoncé

Frege intégra à son langage des lettres latines pour les objets – 'a', 'b', 'c', 'x', 'y' –, pour les fonctions de premier niveau (à un ou deux arguments) – 'f', 'g' –, et pour les fonctions de second niveau (à un argument, lui-même à un ou deux arguments) – 'M'. Il informa rapidement le lecteur d'un aspect important de ces symboles :

> Nous ne disons pas que les lettres latines *réfèrent* mais qu'elles *indiquent* des objets. (Frege 1893, p. 31)

Cette mise au point succéda à une première présentation :

> Voyons comment l'inférence appelée 'Barbara' s'adapte [à notre contexte]. À partir des deux énoncés :
>
> 'Toutes les racines carrées de 1 sont des racines quatrièmes de 1.'
>
> et
>
> 'Toutes les racines quatrièmes de 1 sont des racines huitièmes de 1.'
>
> nous pouvons inférer :
>
> 'Toutes les racines carrées de 1 sont des racines huitièmes de 1.'
>
> Si nous écrivons à présent les prémisses ainsi :
>
> $$\text{`}\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\begin{array}{l}\text{—}\ \mathfrak{a}^4 = 1\text{'}\\ \llcorner\ \mathfrak{a}^2 = 1\end{array} \qquad \text{et} \qquad \text{`}\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\begin{array}{l}\text{—}\ \mathfrak{a}^8 = 1\text{'}\\ \llcorner\ \mathfrak{a}^4 = 1\end{array}$$
>
> alors nous ne pouvons appliquer nos règles d'inférence. Cela devient néanmoins possible si nous écrivons les prémisses comme suit :
>
> $$\text{`}\vdash\!\begin{array}{l}\text{—}\ x^4 = 1\text{'}\\ \llcorner\ x^2 = 1\end{array} \qquad \text{et} \qquad \text{`}\vdash\!\begin{array}{l}\text{—}\ x^8 = 1\text{'}\\ \llcorner\ x^4 = 1\end{array}$$

> Ici nous sommes dans le cas du §15. Plus haut nous avons tenté d'exprimer la généralité de cette manière en utilisant des *lettres latines*, mais avons renoncé car nous avons observé que la portée de la généralité ne serait pas adéquatement démarquée. Nous réglons maintenant cette difficulté en stipulant que la *portée* d'une *lettre latine* inclut tout ce qui apparaît dans un énoncé à l'exception du trait de jugement. (FREGE 1893, p. 31)

Ce passage se situe après l'introduction des règles "propositionnelles". Frege remarqua que certaines d'entre elles ne peuvent être appliquées directement à cause du creux de quantification. Pour permettre leur exploitation sans tenir compte de celui-ci, il suffisait d'autoriser à écrire indifféremment, dans les mêmes contextes, un énoncé quantifié ou le même énoncé privé du creux de quantification et incorporant une lettre latine en lieu et place de la lettre gothique. Frege s'y appliqua à travers les axiomes et le schéma de règles suivants :

IIa : $\vdash f(a)$; $\mathfrak{a}\smile f(\mathfrak{a})$ IIb : $\vdash M_\beta(f(\beta))$; $\mathfrak{f}\smile M_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$

Soient l une lettre latine et $\mathfrak{l}$ une lettre gothique de même type ne figurant pas dans l'énoncé initial :

$$\frac{\vdash t \quad \theta}{\vdash \mathfrak{l}\smile t[\mathfrak{l}/l] \quad \theta}$$

Le rôle syntaxique des lettres latines tient donc en partie dans la simplification des règles "propositionnelles", mais il ne s'y limite pas. Il concerne aussi la manière dont les substitutions ont été prises en charge dans l'Idéographie, qu'il est temps de décrire.

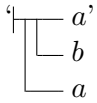
Les expressions bien formées incorporant des lettres latines sont appelées des 'marqueurs latins'. Le processus syntaxique de construction des marqueurs latins est totalement similaire à celui des noms ; les lettres latines y jouent un rôle identique à celui des étiquettes. À partir de marqueurs latins élémentaires tels que 'a', '$f(\xi)$' ou encore '$M_\beta(\varphi(\beta))$', et des noms élémentaires du langage, la mécanique de saturation permet la formation de la totalité des marqueurs latins. On trouve donc aussi bien des marqueurs latins d'objets – '$f(a) = b$' – que des marqueurs latins de fonctions – '$f(a) = \xi$' ou '$\varphi(a) = b$'.

Un marqueur latin est un signe complexe dont certains des signes simples à partir desquels il est constitué sont dépourvus de référence. À ce titre, il en est lui-même dénué. Néanmoins, si la référence d'un nom complexe est déterminée par celles de ses constituants, *et seulement dans ce cas*, alors il suffit d'octroyer une valeur aux marqueurs latins élémentaires pour que tous les marqueurs latins en disposent à leur tour.

Supposons par exemple que nous associions une fonction $\Phi(\xi)$ au marqueur latin '$f(\xi)$' et un objet Δ au marqueur latin 'a', alors la référence de '$f(a) = f(a)$' devient $\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta)$, *i.e.* le Vrai. C'est à ce titre que les lettres latines servent à porter la *généralité*. L'assertion '$\vdash f(a) = f(a)$' est correcte parce que, *quel que soit* la fonction $\Phi(\xi)$ et l'objet Δ, $\Phi(\Delta)$ est le même objet que $\Phi(\Delta)$. Frege laisse donc des marqueurs latins d'objets m succéder au trait de jugement – $\ulcorner\vdash m\urcorner$ –, et tient ce dernier énoncé pour valide si et seulement si sa référence est le Vrai quelles que soient les valeurs prises par les marqueurs latins simples qui le constituent. La manière dont il justifie l'introduction des différents axiomes est totalement similaire au raisonnement que nous venons de mener :

En accord avec le §12

ne serait le faux que si Δ et Γ sont le Vrai tandis que Γ n'est pas le Vrai. Ceci est impossible, ainsi :



(Frege 1893, p. 34)

Il ne reste qu'un pas jusqu'à la gestion des substitutions. Supposons que nous ayons prouvé l'énoncé $\ulcorner\vdash m\urcorner$. Puisque celui-ci est correct quelles que soient les valeurs attribuées aux marqueurs latins simples qu'il contient, alors on peut remplacer ces derniers par les noms *ou les marqueurs latins* (du bon type) de notre choix. Reprenons l'exemple de '$\vdash f(a) = f(a)$', nous pouvons remplacer 'a' par n'importe quel marqueur latin d'objet m' :

$$\ulcorner\vdash f(m') = f(m')\urcorner$$

En effet, nous savons que l'énoncé est valide quelle que soit la valeur prise par 'a' donc, *a fortiori*, quelle que soit la valeur prise par m' (qui dépend des valeurs prises par les marqueurs latins simples qu'il contient). Voilà pourquoi Frege put tranquillement affirmer :

> Nous pouvons effectuer une simple inférence en remplaçant uniformément, dans un énoncé, la même lettre latine par le même nom propre ou le même marqueur latin d'objet. (Frege 1893, p. 62)

Il n'hésita pas à étendre cette opération aux fonctions :

> De même, nous pouvons remplacer, dans un énoncé, la lettre latine de fonction [de premier niveau, respectivement à un ou deux arguments] par le même nom ou marqueur latin de fonction [de premier niveau respectivement à un ou deux arguments]. Quand nous citons la loi (IIb), nous pouvons remplacer les deux occurrences de 'M_β' par le même nom ou marqueur latin d'une fonction de second niveau à un argument [lui-même à un argument].[121] (Frege 1893, p. 63)

Mais le terme 'remplacer' est ici employé parce que Frege avait en vue des phénomènes *sémantiques* dans un cadre de manipulations *syntaxiques*. Supposons qu'un énoncé incorporant le marqueur latin de fonction '$f(\xi)$' ait été prouvé. Puisque ce dernier porte la généralité, il peut prendre la valeur de n'importe quelle fonction $\Phi(\xi)$. Il est donc possible, sans nuire à la correction de l'énoncé, d'intégrer le nom (ou marqueur latin, cf. ci-dessus) de fonction de type (0) de notre choix à la place que tient '$f(\xi)$' dans la structure de la phrase. Si ce nom (ou marqueur latin) est élémentaire, alors il suffit de substituer purement et simplement son étiquette à 'f'. C'est pourquoi, lorsqu'il eut recours à cette opération, Frege n'impliqua pas les lettres pour les espaces vacants dans ses explications. Il se contenta par exemple d'affirmer que "'g' est remplacé par 'F'" (p. 67). En revanche, quand il s'agit d'un nom complexe, alors

121. Cette lettre ne figure que dans la loi IIb. De plus, toutes les preuves requises pouvaient être conduites sans avoir à la transporter dans un autre énoncé, *i.e.* en procédant directement à la substitution à partir de cet axiome. Voilà pourquoi Frege put limiter ainsi sa clause. En outre, il n'avait pas besoin de lettres latines pour des niveaux supérieurs, et s'abstint donc d'en utiliser.

la manipulation syntaxique implique le difficile processus de saturation-désaturation. Dans ce contexte, au contraire, Frege sollicita souvent les lettres pour les espaces vacants [122]. Il savait donc très bien qu'une telle manipulation ne se limitait pas au remplacement de la lettre latine par le nom complexe. Néanmoins, il n'a jamais exposé cette mécanique, supposant que le lecteur la comprendrait seul à travers ses explications, et sachant qu'il en limitait la complexité, en n'excédant pas le troisième niveau. Nous avons vu, en la développant dans toute sa généralité, qu'il ne s'était probablement pas lui-même donné cette peine. Les quelques erreurs commises en témoignent.

Frege croyait fermement, sans l'avoir généralement établi, que son appareil linguistique était capable de prendre en charge de tels "remplacements". D'une part, il estimait qu'il était possible de localiser un nom (ou marqueur latin) complexe à la place d'un nom (ou marqueur latin) simple du même type dans la structure d'un énoncé. Nous avons aussi abouti à cette conclusion, en définissant proprement le processus [123]. Ce travail nous permet, à travers la définition 17, de définir *rigoureusement* les opérations de substitutions.

D'autre part, et surtout, Frege pensait que ce processus exposait parfaitement le phénomène de composition sémantique, *i.e.* que la référence du nom substitué jouait, dans la détermination de la référence du nouveau nom complet, exactement le rôle que la référence du nom simple remplacé jouait dans celle de l'ancien nom. Ceci est correct, nous le montrerons dans le troisième chapitre, *mais ça ne va pas de soi.* Il faut à tout prix s'assurer que deux manières différentes de construire un même nom constituent deux manières différentes de déterminer la *même* référence. Nous verrons, en examinant les §§29-31, que Frege a voulu établir ce résultat dans le cadre de sa hiérarchie limitée. Son développement, loin d'être irréprochable, révèle qu'il n'avait pas totalement cerné les difficultés auxquelles il faisait face, bien que son langage fonctionnât parfaitement à ce titre.

À travers son explication des substitutions, nous pouvons donc vérifier une fois de plus l'interprétation que nous avons donnée de la *structure* des énoncés de l'idéographie, qui imite les opérations entre références. C'est parce que Frege croyait, à juste titre, qu'un processus syntaxique déterminé permettait de faire jouer à un nom de fonction complexe le rôle *sémantique*, *i.e.* relativement à la détermination de la référence, d'un nom de fonction simple dans un énoncé, qu'il employa sans ambages le terme 'remplacer'.

2.4.1.2 Leur rôle inter-énoncés

Nous connaissons désormais le rôle tenu par les lettres latines au sein d'un énoncé. Il reste néanmoins une question à éclaircir. Dans l'extrait ci-dessus, Frege expliqua que la portée d'une lettre latine couvre, au sein d'un énoncé assertif, la totalité de cet énoncé, comme si le creux de quantification était placé juste après le trait de jugement. Autrement dit, il semble que la fonction impliquée reste $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$, mais qu'elle est écrite différemment. Une lettre latine figurant *dans un énoncé assertif* synthétiserait doublement la présence de la lettre gothique et du creux. Il s'agirait donc seulement d'une convention syntaxique. Frege avait déjà pris ce parti en 1879, rappelons-nous :

> Puisque [le cas dans lequel le contenu de tout le jugement constitue le domaine de la lettre gothique] est remarquable, je veux introduire pour lui l'abréviation suivante : *une lettre latine a toujours comme domaine le contenu de tout le jugement*, sans

122. bien qu'il lui soit aussi arrivé de les utiliser dans le premier cas, et de les omettre dans le second, comme nous l'avons vu en section 2.3.3.8.

123. Il suffit de remplacer chacune des occurrences de l'étiquette du nom simple par une lettre vacante du même type, et de saturer l'expression ainsi obtenue par le nom complexe de fonction. Le lecteur a pu lire le détail en section 2.3.3.9.

> que cela ne soit désigné par un creux dans le trait de contenu. Si une lettre latine apparaît dans une expression qui n'est pas précédée d'un trait de jugement, alors cette expression n'a pas de sens. (Frege 1879b, p. 21 / 35)

La position du creux ne peut être connue, à travers la présence d'une lettre latine, qu'à l'intérieur d'un *énoncé assertif*. C'est pourquoi les simples *termes* dans lesquels figurent ces lettres sont dénués de sens. En 1893, Frege eut l'air de répéter cette idée en note de bas de page :

> L'usage d'une lettre latine n'est expliqué que dans le cas où un trait de jugement est impliqué. C'est cependant toujours le cas dans un pur développement de l'Idéographie, puisque nous y progressons toujours d'énoncés en énoncés [124]. (Frege 1893, p. 31)

Dans la *Begriffsschrift*, cette explication exigeait d'intégrer ce qu'il excluait pourtant : la quantification sur des contenus jugeables. Mais en 1893, les valeurs de vérité étaient devenues des objets standards, il pouvait donc adopter librement cette solution, *i.e.* réduire les énoncés dans lesquels ces lettres figurent à de simples abréviations pour des énoncés quantifiés. Malgré cela, d'autres passages suggèrent au contraire un usage bien plus conséquent des lettres latines. Voici le plus explicite :

> Notre stipulation à propos de la *portée* d'une *lettre latine* sert seulement à démarquer sa limite *inférieure*, pas *supérieure*. Il reste donc possible d'étendre la portée à plusieurs énoncés, de telle sorte que les lettres latines puissent servir à réaliser des inférences que les lettres gothiques, avec leurs strictes démarcations de portées, ne pourraient conduire. (Frege 1893, p. 31)

Rédigeons quelques instants dans notre propre symbolisme. Quelle que soit l'étiquette '$X^{(0)}$' de type (0), la portée de '$X^{(0)}$' dans '$\forall_{\psi^0}(X^{(0)}(\psi^0))$' n'excède pas l'énoncé tout entier. D'ailleurs, la portée d'une étiquette quelconque est par définition limitée à l'énoncé dans lequel elle figure. Bien que Frege propose, dans le cas de la quantification, une caractérisation maladroite de la notion de portée [125], ce point est incontestable. D'après cet extrait, la lettre latine ne peut donc servir exclusivement de raccourci syntaxique pour '$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a})$'. Dans un autre texte, Frege précisa (succinctement) cette idée :

> Quand la portée de la généralité doit s'étendre au-delà de l'énoncé global clos par le trait de jugement, j'utilise en règle générale les lettres latines [...]. Mais si la généralité n'excède pas une partie de l'énoncé, alors j'emploie les lettres gothiques, par lesquelles je délimite aussi la portée de la généralité, ainsi que je l'ai expliqué récemment dans le §8 de mes *Grundgesetze der Arithmetik*. [...] Au lieu des lettres gothiques, j'aurais pu choisir les lettres latines ici aussi [...]. Mais du point de vue de l'inférence, la généralité qui s'étend au-delà du contenu d'un énoncé a une signification essentiellement différente de celle dont la portée constitue seulement une partie de l'énoncé. Ainsi, le fait que l'œil puisse discerner ces différents rôles dans différentes sortes de lettres, gothiques et latines, contribue à la clarté de manière essentielle. (Frege 1897b, pp. 232-233)

C'est *relativement à l'inférence* qu'il est important de considérer que la portée des lettres latines englobe plusieurs énoncés. Et d'après l'exemple choisi dans les *Grundgesetze*, il n'est pas difficile de deviner ce qui motiva cette remarque. Pour pouvoir procéder à l'inférence suivante :

124. N'oublions pas que, dans les *Grundgesetze*, Frege dédiait le terme 'énoncé' aux seuls énoncés *assertifs*.
125. Nous l'expliquerons au moment d'introduire proprement les noms primitifs de l'idéographie.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{`}\vdash x^4 = 1\text{'}\\ \quad\ \ x^2 = 1\end{array} \qquad \begin{array}{l}\text{`}\vdash x^8 = 1\text{'}\\ \quad\ \ x^4 = 1\end{array}}{\begin{array}{l}\text{`}\vdash x^8 = 1\text{'}\\ \quad\ \ x^2 = 1\end{array}},$$

il faut considérer que 'x' indique le *même* objet dans les trois énoncés ; et ceci est valable pour toutes les règles de l'idéographie [126]. Voilà qui semble conférer un visage tarskien à la notion fregéenne d'indication. En termes contemporains, nous justifierions ainsi la validité de l'inférence : si une assignation σ rend vrais les deux premiers énoncés, alors elle valide le troisième. Là où l'assignation doit demeurer *fixe* chez Tarski, la lettre doit indiquer le *même* objet chez Frege. À la lecture de ces textes, Heck et Landini aboutirent à une conclusion de cet acabit :

> Frege formula une idée qui ne serait pas totalement comprise avant une quarantaine d'années, *i.e.* avant les travaux de Tarski. (Heck 2012, p. 61)

> Il y a de bonnes raisons de croire que les commentaires de Frege concernant les lettres latines dans les thèses des *Grundgesetze* coïncident avec les idées sémantiques de Tarski. (Landini 2012, p. 127)

Malheureusement, Frege s'en tint à ces brèves remarques, demeurant totalement silencieux sur le fonctionnement du processus sémantique relatif aux lettres latines, en supposant, bien sûr, qu'il ait réellement eu à l'esprit un tel processus. En 1879, la notion d'indétermination réclamait plus qu'elle n'apportait la solution mise à jour par Tarski. En analysant la quantification en termes de fonctions de niveaux supérieurs, Frege était parvenu à en nettoyer la totalité des *noms* de son langage. Le problème semble néanmoins avoir resurgi dans le cas des *marqueurs latins*, à travers la notion d'indication. Après avoir rappelé la méthode tarskienne d'assignation, Landini explique :

> C'est précisément ce que Frege avait à l'esprit. Il ne procure aucun appareil technique pour prendre en charge son objectif, mais celui-ci semble profondément semblable à celui de Tarski. (Landini 2012, p. 129)

Il estime donc que Frege s'est tourné vers un chemin qu'il n'a pas su emprunter. Par ailleurs, il remarque que, s'il s'y était engagé, il aurait été confronté à un sérieux problème :

> Il ne semble pas possible de comprendre comment sa distinction entre sens et référence pourrait expliquer son usage syntaxique des [lettres latines]. (Landini 2012, p. 129)

Landini relève donc une tension entre les explications sémantiques (imprécises) concernant l'usage syntaxique des lettres latines, et les conceptions sémantiques portées par la distinction entre sens et référence. Bien qu'il propose la même lecture de ces explications, Heck n'est pas de cet avis. Il affirme que Frege a dispersé, dans ses *Grundgesetze*, les indices nécessaires à la construction rigoureuse de l'appareil technique adapté au traitement des lettres latines, *dans le respect de ses positions sémantiques fondamentales*. À ses yeux, ce dispositif se rapproche effectivement de la méthode tarskienne, sans lui être rigoureusement identique :

> À certains égards, les arguments de Frege ont anticipé la théorie de la vérité de Tarski, à d'autres, ils en constituent une alternative. (Heck 2012, p. 52)

126. à l'exception de la substitution. Lorsque nous dérivons '$\vdash (a = a) = (a = a)$' à partir de '$\vdash a = a$', nous considérons que le a du second énoncé indique l'objet indiqué par '$a = a$' dans le premier. Le but de la substitution consiste précisément à transformer une lettre en une expression pour un objet.

Dans son ouvrage, il construit formellement (ce qu'il pense être) une théorie sémantique fregéenne. À cette fin, il donne une interprétation particulière des lettres grecques majuscules qui figurent *dans la langue d'exposition* des *Grundgesetze*. Selon lui, Frege aurait utilisé ces symboles à la fois pour fixer la référence des termes primitifs, pour démontrer que chaque nom complexe possède une référence, et pour justifier sémantiquement les règles et axiomes du système. La question est complexe, car Frege employa ces lettres de manière *extrêmement* ambigüe. Mais nous ne la traiterons pas ici. À travers cette rapide discussion concernant le statut *sémantique* des lettres latines, nous entendions seulement *introduire* l'objet de notre troisième chapitre. En effet, les difficultés que nous avons soulevées sont prises dans un problème bien plus vaste, dont nous voulons dire quelques mots. Ceux-ci expliqueront pourquoi nous choisissons (provisoirement) de nous interrompre.

Il est incontestable que divers passages des *Grundgesetze*, notamment ceux que nous avons cités, ou d'autres qui impliquent les lettres grecques majuscules, suggèrent une proximité très nette avec les travaux postérieurs de Tarski. Néanmoins, ces derniers furent si fertiles qu'ils ont progressivement étendu leur champ d'application jusqu'à devenir les véritables racines de la logique contemporaine. Si bien que nos yeux, rompus à leurs manières, pourraient en distinguer la trace là où, pourtant, ils n'ont jamais posé le pied. Car la lecture de Heck se heurte en effet à une importante difficulté. Selon un (grand) nombre d'interprètes de Frege, les thèses philosophiques de celui-ci interdiraient fermement la possibilité d'une *théorie* sémantique, *i.e.* de ce que Tarski a triomphalement entrepris quarante ans plus tard. Cette objection se dresse sur plusieurs piliers : le statut du métalangage, la possibilité de *définir* les noms primitifs, l'ineffable dimension fonctionnelle des fonctions, et d'autres choses encore. Aucune explication satisfaisante du rôle sémantique des lettres latines ne peut se dispenser du traitement de ces questions, que nous aborderons dans notre troisième chapitre. Il faudra donc patienter jusque-là, mais nous pouvons déjà soulever un problème que nos développements ont consciencieusement préparé pour nous. Nous avons dit comment Frege avait, à travers son difficile appareil linguistique, réussi à éviter l'obstacle qui conduisit Tarski à l'idée d'assignation. En concevant la quantification en termes de fonctions, il était parvenu à développer une conception figée du sens et de la référence, selon laquelle tout constituant d'énoncé possède un sens *déterminé*, qui n'attend la donnée d'aucun élément tel que la valeur d'une variable selon une assignation. Il est surprenant de voir une forme de suspension sémantique réapparaître au niveau des lettres latines. Surtout, il faudrait déterminer la structure des énoncés du métalangage qui traitent des lettres latines, en prenant en considération la place des lettres grecques majuscules. Il ne suffit pas de dire, en termes tarskiens, qu'il s'agit de métavariables parcourant la totalité des termes du langage-objet, ou de variables parcourant la totalité des objets du domaine. Il importe de comprendre leur action *à l'intérieur* du paradigme fregéen, *i.e.* d'*analyser* ces potentiels énoncés du métalangage, d'en distinguer la structure et les différentes composantes. Nous ne disons pas qu'un tel travail est impossible, seulement qu'il doit être effectué avant d'aboutir à une conclusion. Il n'est pas convenable, pour établir théoriquement et formellement la sémantique fregéenne, de procéder dans un métalangage qui transgresserait totalement cette sémantique. Nous allons donc laisser pour l'instant ces questions ouvertes, afin de nous y glisser quand le moment sera venu. Pour l'heure, nous avons clairement expliqué le fonctionnement *syntaxique* des lettres latines, et soulevé les questions qui devaient l'être concernant leur rôle sémantique. Notre contrat est rempli.

2.4.2 Définition générale des marqueurs latins

Il reste néanmoins à tirer de ces explications une rigoureuse définition des marqueurs latins et de la substitution. Commençons par construire en toute généralité le langage $\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$ des *marqueurs*

latins, et non plus seulement celui des noms. L'alphabet du second doit ainsi être enrichi de signes du *quatrième* groupe. Il s'agit des lettres latines munies de leurs indices et exposants. Frege emploie 'a' et 'b' pour 0, 'f' pour (0) et (0,0), et M pour ((0)) et ((0,0)). L'usage de symboles identiques pour différents types ne pose aucun problème. La portée permet de distinguer convenablement les cas. Frege procède d'ailleurs d'une manière analogue pour ses lettres du troisième groupe, ainsi que pour les lettres grecques majuscules. 'φ' et 'Φ' sont dédiées à la fois aux types (0) et (0,0), tandis que 'μ' et 'Ω' servent doublement pour les types ((0)) et ((0,0)). Pour notre part, nous souhaitons nous maintenir dans le cadre *général*, il est donc essentiel de se doter d'une infinité de signes du quatrième groupe pour chaque type. La lettre 'f' conviendra à cette tâche, munie d'un entier naturel en indice et d'un type en exposant. Ajoutons donc à $A(\mathscr{L}_n)$ les signes suivants :

$$\bigcup_{T\in\mathscr{T}}\bigcup_{i<\aleph_0}\{`f_i^T`\}$$

Syntaxiquement, les signes du quatrième groupe jouent un rôle identique aux *étiquettes* des noms de fonctions. Autrement dit, il suffit d'adapter légèrement notre précédente construction afin d'obtenir tous les marqueurs latins (d'objets et de fonctions) [127].

Pour commencer, répétons pour $\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$ la clause 1 relative aux indices, et les définitions 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, relatives respectivement aux expressions, à la portée, aux types des expressions, à l'opérateur S, et à la saturation.

Il faut ensuite définir les marqueurs latins élémentaires en remplaçant, dans la définition 13, les mots 'étiquette' et 'nom' respectivement par 'signe du quatrième groupe' et 'marqueur latin'. Nous disposons donc par exemple des marqueurs latins simples suivants 'f_1^0', '$f_1^{(0)}(\varphi_1^0)$', '$f_{\psi_1^0}^{((0))}(\varphi_1^{(0)}(\psi_1^0))$'.

Nous allons construire la totalité des marqueurs latins à travers la définition 14, en spécifiant que $\mathbf{N}_0^T$ est cette fois l'ensemble des *noms et marqueurs* élémentaires de type T, et en remplaçant toutes les autres occurrences du mot 'nom' par 'marqueur latin'.

L'édifice ne peut être érigé sur les seuls marqueurs latins élémentaires, auquel cas il incorporerait uniquement les expressions qui mettent en jeu des lettres du quatrième groupe – par exemple '$f_{1,\psi_1^0}^{((0))}(f_1^{(0)}(\psi_1^0))$' – oubliant d'y mêler les étiquettes – comme dans '$f_{1,\psi_1^0}^{((0))}(X_1^{(0)}(\psi_1^0))$'.

Voilà qui achève la reconstruction pleine et entière de la morphologie fregéenne. Toute pensée, logique ou non, s'exprime idéalement dans $\mathscr{L}_n$. La généralité d'une pensée est, dans un sens que nous avons questionné plus haut, et que nous discuterons plus loin, idéalement représentable dans le langage $\mathscr{L}_m$.

Il manque néanmoins une arme indispensable à ce langage, sans laquelle aucune démonstration n'est possible ni aucune théorie développable : un signe pour marquer la reconnaissance de la vérité.

On construit le langage $\mathscr{L}_e$ tel que $A(\mathscr{L}_e) = A(\mathscr{L}_m) \cup \{`\vdash`\}$, et tel que ses noms et marqueurs latins sont exactement ceux de $\mathscr{L}_m$. Procédons aux deux définitions suivantes :

127. Dans un langage qui intègre au moins une étiquette de chaque type, il est possible de faire encore plus simple, et de définir les marqueurs latins à travers la clause suivante :

Soit t une expression de $\mathscr{L}_m$ et $T \in \mathscr{T}$, t est un marqueur latin de type T si et seulement si le remplacement de chaque signe du quatrième groupe par une étiquette du même type, quelle qu'elle soit, forme un nom de type T.

Il est possible, lorsque le langage ne dispose pas d'une étiquette de chaque type (à l'instar de l'idéographie), d'introduire artificiellement les signes manquants, de procéder à la construction, puis d'exclure artificiellement les noms qui les incorporent. Les deux méthodes sont équivalentes, mais celle que nous adoptons fonctionne sans détour quel que soit le langage considéré.

Définition 18. *Soit t une expression de $\mathscr{L}_e$, alors t est un terme si et seulement si t est un nom propre ou un marqueur latin d'objet.*

Définition 19. *Si t est un terme de $\mathscr{L}_e$, alors $\ulcorner\vdash t\urcorner$ est un énoncé (assertif) de $\mathscr{L}_e$.*
Aucune autre expression de $\mathscr{L}_e$ n'est un énoncé (assertif).

Le travail est achevé. Nous savons désormais que la langue idéale fregéenne est constituée de quatre groupes de signes et d'un symbole "unique en son genre" [*Zeichen eigner Art*] [128] :

- les étiquettes ;
- les signes pour les espaces non vacants ;
- les signes pour les espaces vacants ;
- les signes pour la généralité ;
- le trait de jugement.

Nous connaissons le rôle syntaxique de chacun, notamment la similarité entre les premiers et les quatrièmes. Nous comprenons le rôle pragmatique du dernier : manifester la reconnaissance de la vérité. Nous confessons qu'il y aurait beaucoup plus à dire le concernant. Notre route nous ramènera brièvement à lui [129], sans nous plonger néanmoins au cœur du problème. En revanche, elle nous conduira à la question principale du troisième chapitre, celle du rôle sémantique des quatre premiers genres de signes.

2.4.3 Les substitutions

La règle *viii* de FGGLP ne s'occupe que des lettres latines de type 0. Elle doit donc être adaptée à l'Idéographie dans son ensemble. Dans sa reconstruction, Landini omet d'en donner le "fastidieux" détail. Mais la morphologie qu'il propose ne convient pas. Grâce à notre interprétation, tout le travail – fastidieux, il faut bien l'admettre – a été réalisé en amont. Au point où nous en sommes, la prise en charge des substitutions n'est plus qu'une formalité. Nous avons expliqué plus haut son fonctionnement, en voici le traitement rigoureux :

Définition 20. *Nous étendons la définition 17 de $Remp(t, t_1, t_2)$, qui s'appliquait seulement aux noms, à la totalité des marqueurs latins.*

Par commodité, si t_1 est un terme, t_2 un nom de fonction de type T et l une lettre latine de type T qui figure dans t_1, nous posons que $Remp(t, l, t_2) = Remp(t, t_1, t_2)$, où t_1 est le marqueur latin atomique d'étiquette l.

La règle *viii* nous autorisera donc à déduire $\ulcorner\vdash \mathrm{Remp}(t_1, l, t_2)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\vdash t_1\urcorner$.

2.5 La morphologie de l'idéographie : les noms primitifs

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur la *structure* du langage, sans questionner le contenu des noms primitifs. Nous nous demanderons bientôt si les règles grammaticales peuvent s'accompagner d'une définition sémantique tout à fait correcte, *i.e.* si la référence de chaque nouveau nom (d'objet ou de fonction) est déterminée à travers les références des noms à partir desquels il est formé. Encore faut-il que tous les noms primitifs disposent d'une référence. Or

128. Frege utilise la formule en p. 44 des *Grundgesetze*.
129. en section 3.2.3.6

Frege comprit, peu après la découverte de Russell, que l'un d'entre eux en était dénué : celui pour les parcours-de-valeurs. Nous rappellerons, en traitant ce sujet, les causes de la contradiction. Cette étape sera simple et rapide, car l'affaire est bien connue. Il est plus complexe en revanche de comprendre pourquoi Frege ne les pas décelées, ainsi que sa (possible) tentative de preuve de la cohérence de l'Idéographie dans les §§29-31. Il est tout aussi délicat de cerner la manière par laquelle il entendait initialement assurer une référence à ses noms primitifs. Ces problèmes soulèvent les questions corrélatives de l'universalisme logique, des élucidations et de la possibilité d'une *théorie* sémantique. Elles seront abordées de front au chapitre suivant.

Dans la présente section, nous souhaitons poursuivre trois objectifs de clarification technique. D'une part, nous examinerons le solvant des énoncés dans les termes : le trait horizontal. Nous verrons que les deux dimensions, auxquelles celui-ci semble subordonné, ne sont qu'un simple tour de manche, adroit et judicieux, mais facultatif. Dans un second temps, nous décrirons le rôle des parcours-de-valeurs, notamment la désescalade des niveaux de fonctions. Cette étape comblera la dernière lacune de la reconstitution historique réalisée dans le premier chapitre. Enfin, nous donnerons aux noms de l'idéographie la forme exacte qu'ils reçurent dans les *Grundgesetze*. Nous verrons que, comme prévu, les différences avec les noms issus de notre reconstruction sont totalement superficielles. Autrement dit, la grammaire est bien, modulo de simples conventions d'écriture, telle que nous l'avons décrite.

2.5.1 Le problème du trait horizontal

En 1893, Frege exige de chaque nom primitif du langage qu'il réfère à une fonction envoyant des entités de types adaptés sur des objets. En cela, les *Grundgesetze* s'écartent considérablement de la *Begriffsschrift*. De plus, la transition des contenus conceptuels vers le sens et la référence fut accompagnée d'une uniformisation structurelle. Un type est à présent déterminé à travers l'insaturation qui caractérise ses entités. Toutes les entités saturées sont de même type, il s'agit d'objets. Enfin, les fonctions primitives sont *totales* : elles acceptent en argument toutes les entités de bon type[130]. Puisque les valeurs de vérité sont des entités saturées, il ne peut plus exister de fonction strictement propositionnelle. La négation, par exemple, ne doit pas se contenter d'associer le Vrai au Faux et le Faux au Vrai. Elle est tenue d'attribuer une valeur à chaque autre objet. L'implication rencontre le même problème.

Frege apporta une solution simple et efficace. Il traita tous les objets différents des valeurs de vérité comme s'il s'agissait du Faux. Autrement dit, la valeur prise par une fonction "propositionnelle" pour un argument qui n'est ni le Vrai ni le Faux est identique à sa valeur prise pour le Faux. Il s'agit d'un procédé artificiel qui prend en charge *d'un seul geste* tous les cas inintéressants. C'est en ce sens que Frege présenta ces deux fonctions "propositionnelles" :

> Nous avons donc
>
> $$\vdash \xi$$
>
> une fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité. Il s'agit d'un concept sous lequel tombent tous les objets à l'unique exception du Vrai. (Frege 1893, p. 10)

Voilà pour la négation, et voici pour le conditionnel :

130. ou, au moins, toutes celles du domaine. Nous discuterons plus tard cette question. Puisque notre problème est ici lié aux valeurs de vérité, que Frege les admettait incontestablement dans le domaine (si domaine il y a), et y reconnaissait d'autres objets, la nuance n'importe pas.

> J'introduis la fonction à deux arguments :
>
> $$\begin{array}{l}\xi\\ \zeta\end{array}$$
>
> en disant que sa valeur sera le Faux si le Vrai est pris en ζ-argument, tandis qu'un autre objet que le Vrai est pris en ξ-argument ; et que dans tous les autres cas la valeur de la fonction sera le Vrai. (Frege 1893, p. 20)

Frege eut l'idée ingénieuse d'en introduire une troisième :

> $$-\xi$$
>
> est une fonction dont les valeurs sont toujours des valeurs de vérité, ou un concept selon notre stipulation [131]. Sous ce concept tombe le Vrai et seulement le Vrai. (Frege 1893, pp. 9-10)

Il s'agit de la fonction horizontale, dont nous avons dit qu'elle servait de ciment entre termes et énoncés. Précisons notre pensée : le ciment tient dans l'identification au Faux des objets qui ne sont pas des valeurs de vérité, et la fonction horizontale permet de manifester ce procédé. Elle synthétise à elle-seule la manière dont les fonctions propositionnelles "réagissent". *Cependant, elle n'est pas indispensable.* Contrairement au trait de contenu de la *Begriffsschrift*, le trait horizontal des *Grundgesetze* possède des vertus syntaxiques et un rôle sémantique incontestables. Mais comme lui, *il n'est pas indispensable.* Nous allons prendre quelques instants pour expliquer ce point, et débuter par une nouvelle citation de Landini :

> On peut [...] se demander si les notations en deux dimensions de Frege (verticales au lieu d'horizontales) sont importantes vis-à-vis de sa conception des fonctions. La réponse est oui. C'est à l'aide de ses signes en deux dimensions que sa règle de fusion des horizontaux [132] est correctement représentée. La fusion est essentielle à la compréhension des *Grundgesetze*. Elle joue un rôle dans un théorème d'une importance capitale pour son système formel. (Landini 2012, p. 12)

Nous allons contester les deux points suivants :

(I) que la fusion des horizontaux soit *correctement* représentée seulement à travers la notation en deux dimensions ;

(II) que la fusion des horizontaux joue un rôle dans ce fameux théorème.

Le premier point est important pour nous. La grammaire fondamentale des noms, que nous avons révélée en section 2.3, procède en une dimension. Il est donc essentiel à notre propos que les représentations choisies par Frege pour ses noms primitifs, et notamment celle qui instaure les deux dimensions, ne s'en écartent qu'à travers des conventions d'écritures qui peuvent être facilement éliminées. C'est ce que nous allons établir.

Le second point préparera le terrain d'une future discussion. Le trait horizontal figure dans la loi IV de l'Idéographie. Landini estime que cette dernière est impliquée, de manière centrale, dans un théorème primordial pour la réduction fregéenne des mathématiques. Nous allons déplacer l'enjeu : ce n'est pas cette loi qui est cruciale dans la démonstration de ce théorème, mais

131. Ce passage est situé au début de l'ouvrage. Frege vient seulement d'expliquer que les concepts sont des fonctions dont toutes les valeurs sont des valeurs de vérité.

132. Nous mettons l'adjectif au masculin. Rigoureusement, il ne s'agit pas d'une fusion des fonctions horizontales, mais des traits horizontaux.

l'identification de l'égalité et de l'équivalence pour les noms de valeurs de vérité. Et celle-ci se passe très bien du trait horizontal. Quant à l'importance du théorème en question, nous la discuterons à la fin de cette section.

2.5.1.1 L'écriture en deux dimensions est facultative

Frege dévoila la structure fondamentale des noms atomiques de différents types à travers son usage des lettres grecques majuscules. Nous avons expliqué que ses noms primitifs y dérogeaient légèrement, ayant adopté des conventions qui facilitent la lecture des formules. Le cas de l'égalité est éclairant. Il s'agit d'une fonction de type $(0,0)$. En suivant à la lettre la grammaire des noms, elle s'écrirait ainsi : '$=^{(0,0)}$ (ξ,ζ)'. Dans les *Grundgesetze*, elle reçoit le nom suivant : '$\xi = \zeta$'. Cette variante améliore nettement la fluidité, comme l'illustrent les expressions ci-dessous :

$$\text{`} = (= (d, = (a,b), c))\text{'}$$

$$\text{`}(d = (a = b)) = c\text{'}$$

Tant que l'étiquette, ses indices, et les places des arguments sont clairement identifiés, nous pouvons sans dommage les présenter dans l'ordre que nous souhaitons, modulo quelques ajustements de parenthésages [133]. Pour la quantification, Frege choisit d'écrire les signes du second groupe liés à l'étiquette au-dessus de cette dernière, et non en indice. Ces modifications n'ont aucune importance, tant qu'elles traduisent de simples conventions, *i.e.* tant que la structure fondamentale du nom se retrouve sans ambiguïté à partir de la version d'usage. Par exemple, nous savons que la forme originelle d'un nom de type '$(0,0)$' est '$\Phi(\xi,\zeta)$'. Nous avons pu sans difficulté y ramener celui de l'égalité. La même manipulation est possible pour tous les noms

133. Remarquons que la plupart des noms primitifs de fonctions à un argument respectent la forme que nous avons décrite en dernière section, à l'exception près qu'elles font l'économie des parenthèses qui, chez nous, délimitent la portée de l'étiquette. Nous écrivons donc '$\text{—}\ (\xi)$' là où Frege se limite à '$\text{—}\ \xi$'. En toute rigueur, Frege a raison. On pourrait définir la portée d'une étiquette, quel que soit son nombre d'arguments, sans utiliser les parenthèses. Néanmoins, notre construction générale en aurait été encore plus complexe à déchiffrer. Nous avons donc choisi de les conserver.

Le nom pour le conditionnel indique clairement les places des arguments grâce aux deux dimensions : l'une est au-dessous et l'autre au-dessus. En revanche, les places des arguments de l'égalité figurent, non plus à droite, mais autour de l'étiquette. Des parenthèses s'imposent alors pour distinguer '$(t_1 = t_2) = t_3$' de '$t_1 = (t_2 = t_3)$'. Frege le savait, mais proposa malheureusement des clauses incohérentes. Voici le passage en question :

> Afin de faire l'économie des parenthèses, je déclare que tout ce qui se tient à gauche d'un signe d'égalité jusqu'au premier horizontal réfère, comme un tout, au ξ-argument de la fonction $\xi = \zeta$, tant que des parenthèses ne s'y opposent pas ; et que tout ce qui se tient à droite d'un signe d'égalité jusqu'au premier signe d'égalité réfère, comme un tout, au ζ-argument de la fonction $\xi = \zeta$, tant que des parenthèses ne s'y opposent pas. (Frege 1893, p. 11)

Frege cherchait les formulations les plus adroites pour minimiser doublement le nombre de parenthèses et le nombre de clauses qui en définissent l'usage. La première explication nous indique que '$\text{—}\ a = b$' doit être lu '$\text{—}\ (a = b)$'. D'après la seconde, '$(a = b = c)$' doit être lu '$(a = b) = c$'.

Considérons à présent l'expression '$a = \text{—}\ b = c$'. Le nom du ζ-argument du premier signe d'égalité s'étend, selon la seconde clause, jusqu'au second signe d'égalité. Autrement dit, cette expression doit être lue '$(a = \text{—}\ b) = c$'. Le nom du ξ-argument du second signe d'égalité s'étend, selon la première clause, jusqu'au trait horizontal. Ainsi, cette expression doit être lue '$a = \text{—}\ (b = c)$'. Les deux stipulations sont incompatibles.

Nous allons choisir la solution la plus simple, en introduisant systématiquement une parenthèse ouvrante à gauche du ξ-argument et une parenthèse fermante à droite du ζ-argument. Nous aurons ainsi, pour chaque signe d'égalité, des parenthèses qui en délimitent la portée. Nous écrirons par exemple $\ulcorner((t_3 = (t_1 = t_2)) = t_4)\urcorner$, en omettant parfois les parenthèses extérieures.

Il s'agit d'une simple convention, que nous pourrions changer à loisir. Mais puisque celle de Frege est incorrecte, nous devons nous en écarter.

primitifs de l'idéographie, mais elle exige quelques explications.

L'expression '$_{\top}\,\xi$' nomme une fonction à un argument. *A priori*, il suffit donc de l'écrire '$_{\top}\,(\xi)$' pour lui rendre sa forme initiale. Pourtant, Frege l'introduit de façon à nous l'interdire :

> Nous regardons [...] '$_{\top}$ ' comme composé du petit trait vertical, le *trait de négation*, et chacune des deux parties du trait horizontal peut être regardée comme un *horizontal* dans notre sens. (Frege 1893, p. 10)

Le signe '$_{\top}$ ' est donc constitué de *trois* symboles. Pour manifester sa nature composite, nous l'écrirons '— |— ' durant cette explication. Nous connaissons les premier et troisième symboles. Il s'agit de l'étiquette du nom de la fonction horizontale. Le second symbole semble être l'étiquette d'une autre fonction : la fonction négation.

Ce passage pose trois problèmes immédiats. D'une part, Frege ne nous livre aucune définition de cette dernière fonction. D'autre part, dans les formules, le trait de négation doit toujours être suivi d'un trait horizontal. Autrement dit, on ne peut saturer ce nom que par des noms qui débutent par un trait horizontal. Enfin, Frege se rend lui-même responsable de la faute qu'il dénonçait : saturer une fonction avec une autre fonction du même type. En effet, il caractérise — |— (ξ) à travers $|(\xi)$ et — (ξ).

Il faut comprendre que Frege emprunte ici des *raccourcis*. Il n'accepte pas qu'une fonction prenne uniquement les valeurs de vérité en argument. Néanmoins, les autres valeurs de la négation n'ont absolument aucune importance, nous pouvons les choisir arbitrairement. Il n'est donc pas nécessaire de les spécifier. La manière la plus simple de compléter sa présentation serait la suivante :

> La fonction $|(\xi)$ est un concept sous lequel tombent tous les objets exceptés le Vrai.

C'est exactement ainsi qu'il introduisit le nom '— |— ' *d'un seul bloc*. Il lui aurait donc suffit de maintenir les traits horizontaux à l'écart de cette affaire. Et en effet, il aurait pu s'en tenir là. Nous verrons bientôt pourquoi il ne l'a pas fait. Ce qui nous importe ici, c'est qu'il n'intègre aucunement une fonction limitée aux valeurs de vérité, il se contente de ne pas spécifier ce qui est accessoire.

Venons-en au second problème : Frege proscrit l'écriture de $\ulcorner|(t)\urcorner$ lorsque le premier symbole de t n'est pas un trait horizontal. Néanmoins, d'après notre définition de '$|(\xi)$', les valeurs de $\ulcorner|(t)\urcorner$ et $\ulcorner|(— t)\urcorner$ sont toujours les mêmes. Il est donc possible, sans perdre de pouvoir expressif, de nous limiter à la seconde version.

Frege n'a pas choisi au hasard le trait horizontal pour représenter la fonction qui n'envoie que le Vrai sur le Vrai. On peut appliquer celle-ci autant de fois que nous le souhaitons sans modifier le résultat : $\ulcorner— t\urcorner$ et $\ulcorner— — t\urcorner$ ont la même valeur. L'usage du trait horizontal est judicieux, car on peut "rapprocher" les deux barres pour n'en obtenir qu'une : $\ulcorner——t\urcorner$. Le procédé graphique est bien conçu, il convient idéalement à une fonction de cette sorte. Moralement, nous pouvons dire qu'un trait horizontal en "contient" autant que nous le souhaitons, et que la fonction négation "contient" la fonction horizontale, car elle traite tous les objets qui ne sont pas des valeurs de vérité comme le Faux. Frege s'est contenté de la "sortir".

Pour y parvenir – et ceci réglera le dernier problème –, il n'a pas eu à composer '$|(\xi)$' avec '— ξ'. Il s'est servi d'un nom d'objet 'Δ' pour effectuer les étapes suivantes :

(1) — Δ

(2) |— Δ

(3) — |— Δ

(4) — |— ξ

Finalement, pour que sa présentation de la négation convienne, il importait seulement que les seuls arguments de '$|\xi$' qui nous intéressent soient les valeurs de vérité. Et cela ne fait aucun doute.

Si nous souhaitons revenir à une présentation *rigoureuse*, il suffit de définir généralement '$|(\xi)$' puis exclure du langage tous les noms qui contiennent une expression $\ulcorner|(t_1, t_2)\urcorner$ telle que le premier symbole de t_1 ou t_2 ne soit pas un trait horizontal. Le procédé ingénieux de Frege ne transgresse ni sa lecture de la grammaire profonde (forme logique) d'une expression, ni son réquisit de complétude des fonctions. Il s'agit d'un simple raccourci qui est, dans le contexte de la fonction négation, totalement praticable.

La même explication vaut pour le nom '$\begin{array}{l}\text{—}\ \zeta\\ \llcorner\!\text{—}\ \xi\end{array}$' :

> Nous pouvons regarder le trait horizontal avant 'ζ', ainsi que les deux autres parties du trait horizontal du dessus, séparées par le trait vertical, comme des *horizontaux* dans notre sens particulier. (Frege 1893, p. 20)

Notons que Frege dit seulement qu'il est *possible* de les regarder ainsi. Il a parfaitement conscience des deux alternatives : considérer que son signe a été introduit comme un tout, ou supposer que seul le trait vertical a été ainsi introduit, et que les traits horizontaux correspondent à la fonction horizontale. Le second procédé génère des formules plus élégantes, mais les deux sont équivalents.

C'est donc par commodité que l'écriture en deux dimensions fut adoptée. Pour manifester la nature composite de cette fonction, et lui rendre sa structure initiale, nous pouvons l'écrire '$\text{—}\ (\rightarrow (\text{—}\ (\xi), \text{—}\ (\zeta)))$'. Le signe '$\rightarrow$' correspond ainsi au trait vertical du signe de Frege. Nous l'avons vu dans le cas de l'égalité, il est préférable d'indiquer chacun des arguments d'une fonction de type (0,0) de chaque côté de l'étiquette du nom de cette fonction : $\ulcorner\text{—}\ ((\text{—}\ (t_1)) \rightarrow (\text{—}\ (t_2)))\urcorner$. Nous pourrions alors utiliser un symbole qui unifie '$\rightarrow$' et l'occurrence de droite de '— ', mais cela ne serait pas possible pour ses deux premières occurrences. Les deux dimensions permettent de positionner *deux* expressions ($\ulcorner\text{—}\ (t_1)\urcorner$ et $\ulcorner\text{—}\ (t_2)\urcorner$) directement à la suite de la flèche, et libèrent ainsi la place qui précède immédiatement celle-ci pour la première occurrence du trait horizontal. Les trois traits horizontaux peuvent ainsi être attachés au symbole du conditionnel, ce qui n'est pas le cas si nous restons à l'horizontal.

L'écriture en deux dimensions possède donc deux avantages : identifier en un coup d'œil (*via* la verticalité) les hypothèses et la conclusion, et unifier les traits verticaux et le symbole du conditionnel. Cependant, elle demeure totalement *facultative*, les conceptions de Frege ne l'exigent en aucune façon.

Les mêmes explications s'adaptent à la quantification :

> Je considère les traits horizontaux à gauche et à droite du creux dans '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' comme des *horizontaux* dans notre sens particulier du terme. (Frege 1893, p. 14)

Ici, la fonction est de type ((0)), elle ne prend pas d'objets en arguments, et n'associe donc pas aux objets différents des valeurs de vérité la même valeur qu'au Faux. L'important est qu'elle associe à toute fonction $\Phi(\xi)$ la valeur qu'elle associe à $\text{—}\ \Phi(\xi)$. Moralement, elle ne dissocie pas deux fonctions qui envoient exactement les mêmes arguments sur le Vrai. Il en va de même, un étage plus haut, pour les quantifications de niveau supérieur.

Aucun autre nom introduit par Frege ne présente la particularité d'"intégrer" le trait horizontal, ou d'être scindé en plusieurs symboles. Ainsi, la totalité des noms primitifs de l'idéographie

se ramènent sans difficulté à leurs formes originelles. Il suffit de se donner les étiquettes suivantes : '$—^{(0)}$', '$|^{(0)}$', '$\backslash^{(0)}$', '$\rightarrow^{(0,0)}$', '$=^{(0,0)}$', '$\supset^{((0))}$', '$\forall^{((0))}$', '$\forall^{(((0)))}$', '$\forall^{(((0,0)))}$' et d'appliquer le processus décrit dans la précédente section. Afin de retrouver le symbolisme fregéen, il suffit de nous limiter aux noms qui nous préoccupent (qui intègrent des traits verticaux aux bonnes places), et de procéder trivialement à la traduction. Pour ôter les derniers doutes, s'il en subsiste, nous indiquerons une à une les différentes étapes en section 2.5.6. La forme logique de chacun des noms primitifs est donc bel et bien identifiable. Le milieu naturel de la grammaire fregéenne, qui fut arpenté lors de la précédente section, n'exige absolument pas de se déployer en deux dimensions. Ceci permet exclusivement de simplifier à la fois l'écriture et la lecture des formules, sans transgresser aucune des règles que nous avons mises à jour.

À l'issue de ces explications, le lecteur aura compris qu'en développant l'idéographie sous sa forme fondamentale, la règle de fusion des horizontaux s'exprime en toute simplicité, et ne doit rien aux deux dimensions :

> Si t est un énoncé et t' une expression de l'idéographie tels que $\ulcorner — (— (t'))\urcorner$ figure dans t, alors toutes ou certaines de ces occurrences de cette dernière expression peuvent être remplacées par $\ulcorner — (t')\urcorner$.

Nous aurions gagné beaucoup de temps (et d'énergie) à définir les noms de l'idéographie directement tels qu'ils se présentent dans les *Grundgesetze*. Nous avons d'ailleurs suivi cette route dans (Cadet et Panza 2015, section 4). La méthode employée plus haut a bien sûr permis de généraliser la construction. En outre, elle nous a protégé d'un danger important : considérer les étiquettes des fonctions comme des connecteurs et des quantificateurs. Les signes primitifs de l'idéographie sont des noms de *fonctions*. En tant que tels, ils épousent la forme adaptée à leurs types, intégrant une étiquette et une terminaison. S'ils se contorsionnent en deux dimensions, ou s'ils usent d'indices différents les uns des autres, c'est *uniquement* pour ménager les yeux (et la concentration) du lecteur.

2.5.1.2 Le trait horizontal est facultatif

Nous avons établi que le trait horizontal supportait parfaitement un symbolisme en une dimension. Nous allons désormais tenter de comprendre son intérêt. Formulons notre question : Frege aurait-il pu se contenter de définir en un bloc les signes pour la quantification, le conditionnel et la négation, sans y mêler le trait horizontal ? Aurait-il pu le chasser purement et simplement de son langage ?

Contrairement à Landini, nous allons répondre par l'affirmative. L'intégration du trait horizontal permet une simplification considérable du système, et Frege avait toutes les raisons du monde d'y recourir. Il n'est cependant pas indispensable.

Cette fois, notre désaccord avec Landini n'est pas fondamental. Comme lui, nous croyons que Frege avait besoin de ramener un certain type d'*équivalence* à l'égalité. Il s'agit d'une facette essentielle et atypique de son système, liée à l'intégration des valeurs de vérité aux objets. Que le trait horizontal soit nécessaire pour y parvenir, comme l'estime Landini, ou qu'il soit facultatif, comme nous le pensons, est finalement un point assez mineur. Celui-ci nous permettra néanmoins de faire la lumière – ou au moins de préparer le projecteur – sur les avantages que Frege tira de l'assimilation des formules aux termes du langage.

Frege n'a pas de signe pour l'équivalence dans son langage. Il n'est pourtant pas compliqué

d'en définir un :

$$\Vdash (a \leftrightarrow b) = \begin{array}{l} \top\!\top\!\top\!\top\, a \\ \quad\ \ \llcorner\, b \\ \quad \mid \\ \quad \mid\!\!-\, b \\ \quad \llcorner\, a \end{array}$$

L'équivalence est plus faible que l'égalité. Deux objets quelconques sont équivalents si et seulement s'ils sont tous deux le Vrai ou si aucun n'est le Vrai. Deux objets différents l'un de l'autre et distincts du Vrai sont donc équivalents sans être égaux. Il s'agit d'une autre conséquence du traitement fregéen des fonctions propositionnelles dans le cas d'objets quelconques. Tout objet différent des valeurs de vérité se comporte "propositionnellement" comme le Faux. Il est donc clair que nous ne voulons pas adopter l'axiome suivant [134] :

$$\vdash (a = b) \leftrightarrow (a \leftrightarrow b)$$

En revanche, nous pouvons accepter cette équivalence en nous limitant aux cas où a et b sont des valeurs de vérité. *Voilà la seule et unique raison de l'intégration du trait horizontal au système.* Il permet d'écrire :

$$\vdash (\text{—}\, a = \text{—}\, b) \leftrightarrow (a \leftrightarrow b) \quad \text{IV}'$$

Nous nommons IV′ cet énoncé. Chacun des membres de cette équivalence est une valeur de vérité, quelle que soit la valeur assignée à a et b. Ainsi, IV′ est lui-même équivalent à l'énoncé IV″ suivant :

$$\vdash (\text{—}\, a = \text{—}\, b) = (a \leftrightarrow b) \quad \text{IV}''$$

Frege ne prit pour axiome ni IV′ ni IV″, si bien que leur rôle fut rarement remarqué dans la littérature. Il leur préféra sa loi IV, qui n'implique pas le symbole '$\leftrightarrow$' :

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!-\, (\text{—}\, a = \text{—}\, b) \\ \quad \llcorner\!\!\!-\, (\text{—}\, a = \top\, b) \quad \text{IV} \end{array}$$

Écrivons un théorème similaire pour de simples équivalences :

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!-\, (a \leftrightarrow b) \\ \quad \llcorner\!\!\!-\, (a \leftrightarrow \top\, b) \quad \text{IV}_{\text{PL}} \end{array}$$

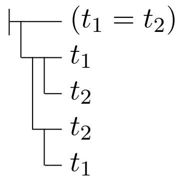
IV_{PL} est prouvable dans FGGLP, nous en avons rédigé la démonstration à partir de la page 722 de l'annexe A. Nous pouvons donc sans crainte l'intégrer à ce système sans altérer son pouvoir déductif. Mais Frege se moquait bien d'un tel énoncé. Il ne voulait pas exhiber des théorèmes implicitement liés à l'équivalence, *il voulait autoriser l'exploitation d'axiomes liés à l'égalité dans le cas de certaines équivalences.* Voici le premier théorème qu'il démontra à l'aide de son axiome IV :

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!-\, (\text{—}\, a = \text{—}\, b) \\ \quad \mid\!\!\!-\, a \\ \quad \mid \quad \llcorner\, b \\ \quad \mid\!\!-\, b \\ \quad \llcorner\, a \quad \text{IV}_a \end{array}$$

Ainsi, si deux termes t_1 et t_2 s'impliquent l'un l'autre – autrement dit s'ils sont équivalents –, alors ils peuvent venir encadrer le symbole d'égalité, modulo l'ajout du trait horizontal. Le

134. si tant est que le domaine excède le Vrai et le Faux, ce qui était bien l'intention de Frege.

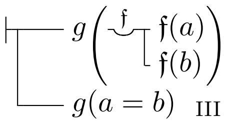
point essentiel est le suivant : s'ils intègrent déjà un trait horizontal pour premier symbole, alors nous pouvons procéder à une fusion des horizontaux et parvenir à :



Des termes équivalents qui débutent par un trait horizontal sont égaux [135] ; et toutes les lois de l'égalité peuvent librement leur être appliquées. Voilà précisément ce que Frege visait à travers sa loi IV.

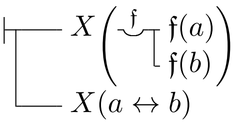
Ce point est nettement plus explicite dans les énoncés IV′ et IV″. Mais cela n'a aucune importance, car IV, IV′ et IV″ *sont équivalents modulo le reste du système* (sans impliquer la loi V responsable de la contradiction, bien entendu). Nous en apportons la preuve à partir de la page 726 de l'annexe A [136].

Quelles sont les lois impliquant l'égalité ? Tant que nous restons à l'écart des parcours-de-valeurs, il n'en existe qu'une :



III

Elle permet de gérer les substitutions entre termes égaux. Elle ne présente aucun intérêt dans notre contexte, car les règles et axiomes de FGGLP permettent tout à fait de gérer les substitutions entre termes *équivalents*. Quel que soit le nom de fonction $X(\xi)$ qui "remplace" 'g', nous pouvons démontrer que :



Ce n'est donc pas pour cette raison que la loi IV fut introduite. Mais l'égalité figure aussi dans la règle intégrant le nom de fonction pour les parcours-de-valeurs :

$$\vdash (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}f(\alpha)) = \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) \quad \text{V}$$

C'est ici que tout se joue. Nous n'avons pas encore introduit les parcours-de-valeurs, nous n'allons donc pas formuler tout de suite nos explications. Mais le terrain est prêt : nous savons que la loi IV permet de démontrer que deux termes équivalents qui débutent par un trait horizontal sont *égaux* et que cette manipulation n'a aucun intérêt dans le cadre de l'axiome III. L'examen de V nous permettra bientôt de révéler son importance.

135. À proprement parler, les termes ne sont pas égaux. Nous ne pouvons pas dire non plus que leurs références sont égales, car ils peuvent incorporer des lettres latines. *Stricto sensu*, les noms issus du remplacement des mêmes lettres latines par les mêmes noms du type adapté sont égaux quels que soient les références de ces noms. La lourdeur de cette formule justifie à elle-seule que nous empruntions le raccourci 'termes égaux' dans cette section, maintenant que nous savons où il mène.

136. Plus précisément, le lecteur trouvera les démonstrations suivantes :
- IV⇒ IV′ à partir de la page 726 ;
- IV′ ⇒ IV″ à partir de la page 728 ;
- IV″ ⇒ IV à partir de la page 730.

Jusqu'ici, bien que nos explications diffèrent de celles de Landini (2012, pp. 86 - 89), nous tenons globalement la même position. Nous voulons néanmoins nous en distancier légèrement, pour bien cerner ce qui est en jeu. Landini affirme que le trait horizontal et la règle de fusion des horizontaux ont un rôle irréductible dans cette histoire. En vérité, ils sont tout à fait dispensables, mais au prix d'une complication gratuite et considérable du système. Lorsque Frege identifia les valeurs de vérité aux objets, il avait probablement déjà réalisé la vanité du trait horizontal tel qu'il était employé comme dans la langue formulaire. Il connaissait néanmoins ses qualités graphiques, *i.e.* la manière dont il convenait idéalement à une fonction qui pouvait être indifféremment appliquée une ou plusieurs fois. Il découvrit alors qu'en lui confiant la tâche de réaliser ce que ses fonctions "propositionnelles" devaient aussi accomplir – ramener tout objet différent du Vrai au Faux –, il pouvait alors réunir un nombre important d'axiomes en seulement une loi et une règle : la loi IV et la fusion des horizontaux.

Supposons que nous n'ayons pas de trait horizontal, donc pas de loi IV ni de règle de fusion des horizontaux. Quand peut-on être sûr que si les références de deux noms sont équivalentes, alors elles sont égales ? La réponse ne fait aucun doute : lorsque chacun de ces noms résulte d'une combinaison d'un nom de *concept* avec des noms adaptés, *i.e.* si la première étiquette de fonction qui figure dans ces noms est liée à un *concept*. Autrement dit, nous pouvons effectuer le même travail que la loi IV à travers les règles suivantes [137] :

${}_{\top}\xi$	$\vdash ({}_{\top} a \leftrightarrow {}_{\top} b) \leftrightarrow ({}_{\top} a = {}_{\top} b)$
	$\vdash ({}_{\top} a \leftrightarrow (b = c)) \leftrightarrow ({}_{\top} a = (b = c))$
	$\vdash ({}_{\top} a \leftrightarrow \sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{c}_{b}) \leftrightarrow ({}_{\top} a = \sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{c}_{b})$
	$\vdash ({}_{\top} a \leftrightarrow \mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a})) \leftrightarrow ({}_{\top} a = \mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a}))$
	$\vdash ({}_{\top} a \leftrightarrow \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))) \leftrightarrow ({}_{\top} a = \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta)))$
$\xi = \zeta$	$\vdash ((a = b) \leftrightarrow (c = d)) \leftrightarrow ((a = b) = (c = d))$
	$\vdash ((a = b) \leftrightarrow \sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{d}_{c}) \leftrightarrow ((a = b) = \sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{d}_{c})$
	$\vdash ((a = b) \leftrightarrow \mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a})) \leftrightarrow ((a = b) = \mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a}))$
	$\vdash ((a = b) \leftrightarrow \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))) \leftrightarrow (a = b = \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta)))$
$\sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{\zeta}_{\xi}$	$\vdash (\sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{b}_{a} \leftrightarrow \sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{d}_{c}) \leftrightarrow (\sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{b}_{a} = \sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{d}_{c})$
	$\vdash (\sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{b}_{a} \leftrightarrow \mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a})) \leftrightarrow (\sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{b}_{a} = \mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a}))$
	$\vdash (\sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{b}_{a} \leftrightarrow \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))) \leftrightarrow (\sqcup\!\!\!\sqcup\, {}^{b}_{a} = \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta)))$
$\mathfrak{a}\!\!\!\smile \varphi(\mathfrak{a})$	$\vdash (\mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \mathfrak{a}\!\!\!\smile g(\mathfrak{a})) \leftrightarrow (\mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\!\!\!\smile g(\mathfrak{a}))$
	$\vdash (\mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))) \leftrightarrow (\mathfrak{a}\!\!\!\smile f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta)))$
$\mathfrak{f}\!\!\!\smile \mu_{\xi}(\mathfrak{f}(\xi))$	$\vdash (\mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{1,\beta}(\mathfrak{f}(\beta)) \leftrightarrow \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{2,\beta}(\mathfrak{f}(\beta))) \leftrightarrow (\mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{1,\beta}(\mathfrak{f}(\beta)) = \mathfrak{f}\!\!\!\smile M_{2,\beta}(\mathfrak{f}(\beta)))$

137. Nous regardons cette fois les signes qui contiennent des traits horizontaux comme *atomiques*. La fonction horizontale est exclue du système.

Par ailleurs, le signe '$\leftrightarrow$' est tel que nous l'avons défini en début de section.

Enfin, Frege ne fait aucun usage du nom '$\mathfrak{f}\!\!\!\smile \mu_{\xi,\zeta}(f(\xi,\zeta))$', nous ne le prenons pas en compte (bien qu'il se traite de façon similaire).

À travers ces énoncés, nous permettons le remplacement du symbole d'équivalence par celui d'égalité dans chacun des cas concernés [138]. Il devient donc possible d'exploiter les lois qui incorporent l'égalité – notamment l'axiome V – tel que Frege le désirait. Mais le prix est élevé, car quinze axiomes sont impliqués [139]. Frege comprit comme réaliser des économies. Considérons le cas de '$_{\top}\,\xi$', et supposons à présent que ce nom soit *composé* du trait vertical – défini comme l'était jusque-là le signe entier – et de deux traits horizontaux. Donnons-nous la règle de fusion des horizontaux, et l'axiome IV′ (équivalent à IV). À travers ce dernier, nous dérivons :

$$\vdash ({}_{\top}\,a \leftrightarrow {}_{\top}\,b) \leftrightarrow (\text{—}\,{}_{\top}\,a = \text{—}\,{}_{\top}\,b)$$

En fusionnant les horizontaux, nous retrouvons notre première axiome :

$$\vdash ({}_{\top}\,a \leftrightarrow {}_{\top}\,b) \leftrightarrow ({}_{\top}\,a = {}_{\top}\,b)$$

La solution était simple, il suffisait de la répéter pour chaque nom de concept. Frege intégra donc le trait horizontal parmi ses étiquettes, et le fit figurer devant *presque* chaque étiquette de concept. En effet, l'égalité fait exception, et il n'est pas difficile de deviner pourquoi. Lorsque le concept en jeu n'attend qu'un argument, le trait vient se placer immédiatement avant l'étiquette. Le signe pour le conditionnel se traite de la même manière car les noms des arguments sont localisés *à droite* de l'étiquette (en haut et en bas). En revanche, Frege utilise la convention usuelle pour le symbole '=' : les noms des arguments sont écrits autour du symbole. Pour imiter la stratégie adaptée aux autres noms primitifs, il aurait dû avoir recours à l'expression '$\text{—}\,(\xi = \zeta)$', et nuire grandement à la lisibilité des formules. Il put s'en dispenser car, dans le cas précis de l'égalité, la loi III permet la démonstration du théorème suivant :

$$\vdash \text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b) = (\text{—}\,a = \text{—}\,b)$$

Par son intermédiaire, il devient possible de récupérer tous les énoncés du tableau liés à l'égalité. Frege connaissait parfaitement l'intérêt de sa loi IV, et savait qu'elle excluait ce cas. Il prit donc soin de démontrer le théorème ci-dessus, qu'il nomma 'IIIi' (p. 67) [140].

Nous avons ouvert cette section avec l'intention de comprendre le rôle de l'horizontal. C'est désormais chose faite. Il possède deux avantages que Frege avait totalement cernés. Le premier est pédagogique : il explicite ce que chaque fonction "propositionnelle" réalise implicitement. La fonction horizontale est introduite avant toutes les autres. Une fois le lecteur informé sur son fonctionnement, il ne peut plus ignorer la manière dont les fonctions "propositionnelles" vont traiter les objets différents des valeurs de vérité : exactement comme le Faux. Le deuxième

138. Les règles de FGGLP et la loi III de Frege nous dispensent de répéter ces énoncés dans l'autre sens. Par exemple, à partir du deuxième énoncé du tableau, nous pouvons dériver :

$$\vdash ((b = c) \leftrightarrow {}_{\top}\,a) \leftrightarrow ((b = c) = {}_{\top}\,a)$$

139. un peu moins en vérité, car quelques-uns peuvent être démontrés sans la loi IV.

140. Landini ne relève pas ce point. Il explique l'intérêt de la loi IV à travers une transformation d'une équivalence en une égalité. Précisément, il écrit que cette loi permet de démontrer l'énoncé $\ulcorner {}_{\top}\,t_1 = (t_2 = t_3)\urcorner$, où les t_i sont des marqueurs latins d'objets, à partir des deux énoncés suivants

$$\begin{array}{l}\ulcorner\text{——}\,(t_2 = t_3)\urcorner \\ \llcorner\text{——}\,({}_{\top}\,t_1)\end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l}\ulcorner\text{——}\,({}_{\top}\,t_1)\quad\urcorner \\ \llcorner\text{——}\,(t_2 = t_3)\end{array}$$

Mais le cas de l'égalité est justement celui pour lequel la loi IV est insuffisante. Elle autorise seulement la dérivation de '$_{\top}\,t_1 = \text{——}\,(t_2 = t_3)$'. La loi III est ensuite requise pour aboutir au résultat.

intérêt est pragmatique. Il était nécessaire de transformer les conditionnels en égalités lorsqu'ils impliquaient des *concepts*. Initialement, une quinzaine d'axiomes étaient requis dans cette tâche. L'horizontal permettait de les remplacer par un axiome et une règle (au fonctionnement à la fois naturel et élégant). Le choix s'imposait de lui-même.

L'aspect insolite de l'Idéographie relatif à l'identification entre termes et formules – à l'intégration des valeurs de vérité parmi les objets – n'est lié de manière fondamentale ni à l'écriture en deux dimensions, ni au trait horizontal. Il est tout entier contenu dans la possibilité de faire jouer à certaines équivalences le rôle d'égalités. C'est par ce biais que Frege parvint à traiter les parcours-de-valeurs comme il le désirait. Le trait horizontal, totalement dispensable, ne fut qu'un moyen d'atteindre ce but avec autant d'élégance que d'efficacité. En contrepartie, la loi IV, dans laquelle sont synthétisés tous les cas concernés (à l'exception de l'égalité), ne formule pas distinctement l'objectif qu'elle sert. Une fois de plus, c'est l'extrême adresse avec laquelle Frege bâtit son système qui en dissimule le fonctionnement. Nous espérons que ces quelques pages ont permis de le démasquer.

2.5.2 Les parcours-de-valeurs dans les *Grundgesetze*

Il reste encore à comprendre *pourquoi* certaines équivalences demandent à être transformées en égalités, *i.e.* à aborder la question des parcours-de-valeurs. Voici le nom de l'opérateur des parcours-de-valeurs, *i.e.* de la fonction qui associe toute fonction de type (0) à son parcours-de-valeurs[141] :

$$\text{‘}\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\text{’}$$

Et voilà l'ouverture des hostilités :

> J'utilise toujours les mots
>
> ‘La fonction $\Phi(\xi)$ a le même *parcours-de-valeurs* que la fonction $\Psi(\xi)$’
>
> comme co-référentiels avec les mots
>
> ‘Les fonctions $\Phi(\xi)$ et $\Psi(\xi)$ prennent toujours les mêmes valeurs pour les mêmes arguments’
>
> (Frege 1893, p. 7)

Ce passage annonce le célèbre axiome V de l'idéographie :

$$\vdash \big(\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(g(\alpha))\big) = \smile_{\mathfrak{a}} \big(f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})\big)$$

Pour Frege, les parcours-de-valeurs étendent les extensions à la manière dont les fonctions étendent les concepts : toute fonction de premier niveau $\Phi(\xi)$ possède un parcours-de-valeurs ; lorsque la fonction est un concept, son parcours-de-valeurs est une extension. Dans le passage ci-dessus, il explique que deux fonctions sont identiques si et seulement si elles ont le même parcours-de-valeurs. Ce dernier détermine univoquement la fonction en jeu, et permet d'éviter l'escalade des niveaux. Au lieu de solliciter le nom de la fonction, Frege en appela à celui de son parcours-de-valeurs.

Nous allons voir techniquement comment il s'y prit. Il est utile néanmoins de débuter par une explication informelle. Seule une fonction de type (0) possède un parcours-de-valeurs. Ce dernier

141. Ici non plus, Frege ne transgresse aucunement sa grammaire idéale. L'esprit doux est l'étiquette du nom, et ‘ε’ le signe du deuxième groupe. Frege se contente de modifier légèrement les conventions, en écrivant ce signe au-dessous de l'étiquette.

"contient" les valeurs de la fonction pour tous les arguments. Un parcours-de-valeurs peut donc être "regardé comme" une fonction de premier niveau. De plus, une fonction de type (0) possède une valeur pour tous les parcours-de-valeurs, qui peuvent eux-mêmes être "regardés comme" des fonctions de type (0). Cette fonction peut donc elle-même être "regardée comme" une fonction de type ((0)), à travers les valeurs prises pour les parcours-de-valeurs.

Répétons ce raisonnement dans le cas général, en effectuant une récurrence. Supposons que tout parcours-de-valeurs puisse être "regardé comme" une fonction de niveau n. Soit Δ un parcours-de-valeurs. Il peut être regardé comme une fonction $\Phi(\xi)$ de niveau 1. Chaque parcours-de-valeurs pris en argument par $\Phi(\xi)$ peut lui-même être "regardé comme" une fonction de niveau n. $\Phi(\xi)$ – et *a fortiori* Δ – peut donc être "regardé comme" une fonction de niveau $n+1$. En définitive, ce procédé permet de "regarder" tout parcours-de-valeurs comme une fonction de *n'importe quel* niveau. Notons que, pour l'instant, notre raisonnement se limite aux types $(\ldots(0)\ldots)$; et c'est dans ce cadre que nous voulons fournir quelques précisions.

2.5.2.1 La désescalade verticale

Disons qu'une entité en *représente* une autre si et seulement si elle la détermine univoquement parmi les entités de son type. Par exemple, le parcours-de-valeurs de $\Phi(\xi)$ représente la fonction $\Phi(\xi)$, car deux fonctions différentes ne peuvent avoir le même parcours-de-valeurs, bien qu'un même parcours-de-valeurs puisse représenter à la fois une fonction de type (0) et une fonction de type ((0)).

Nous allons voir que toute fonction de niveau n possède au moins un représentant parmi les fonctions de chaque niveau inférieur à n. C'est ainsi que les parcours-de-valeurs assurent la *désescalade* des niveaux [142]. Frege put remplacer toute fonction de niveau $n > 1$ par son représentant au niveau 1, et les arguments de cette fonction par leurs représentants dans les objets. Un appareil linguistique est nécessaire pour traduire le nom d'une fonction par le nom de son représentant, et ce dispositif peut être entièrement développé dans l'idéographie. Frege s'y appliqua *via* la donnée d'une définition astucieuse. Examinons la mécanique de cette affaire.

Si nous parvenons à déterminer un *représentant* de niveau $n-1$ pour chaque fonction de niveau n, alors nous aurons, par récurrence immédiate, atteint notre objectif. Le représentant d'une fonction de type (0) dans les objets n'est autre que son parcours-de-valeurs. Fixons à présent les conditions vérifiées par un représentant $\Phi(\xi)$ de niveau 1 d'une fonction $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ de niveau 2. Il faut que sa valeur pour tout représentant dans les objets d'une fonction $\Psi(\xi)$ soit la valeur de $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ en $\Psi(\xi)$. Autrement dit, $\Phi(\xi)$ est un représentant de $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ si et seulement si :

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}(\Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) = \Phi(\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}(\varepsilon))))$$

Deux fonctions sont distinctes si leurs parcours-de-valeurs diffèrent. Une fonction de niveau 1 possède donc un *unique* représentant dans les objets. Au contraire, la clause ci-dessus ne détermine pas la valeur de $\Phi(\xi)$ lorsque l'objet pris en argument n'est *pas* un parcours-de-valeurs. Autrement dit, il peut exister plusieurs représentants *différents* de niveau 1 pour une fonction de second niveau [143]. Il faut donc parvenir à *choisir* parmi eux.

Frege mit au point un procédé ingénieux pour y parvenir. Il définit une fonction de premier niveau à deux arguments $\xi \frown \zeta$ qui prend en deux objets Δ et Γ la valeur que la fonction dont

142. Bien sûr, nos arguments se basent sur l'idée *erronée* que toute fonction possède un parcours-de-valeurs. Nous examinons ce que Frege souhaitait accomplir, pas ce qu'il est parvenu à accomplir.

143. si le domaine n'intègre pas seulement des parcours-de-valeurs. Voilà une question que nous discuterons plus tard.

Γ est le parcours-de-valeurs prend en Δ. Autrement dit, notre fonction doit vérifier la condition suivante pour tout objet Δ et toute fonction $\Phi(\xi)$:

$$\Phi(\Delta) = \Delta \frown \dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$$

Lorsque l'objet Γ n'est pas un parcours-de-valeurs, la valeur de la fonction n'importe pas [144]. Dès lors qu'elle vérifie la condition ci-dessus, nous savons que :

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}(\Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) = (\Omega_\beta(\beta \frown \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}(\varepsilon))))$$

Ceci correspond à notre clause initiale lorsque $\Omega_\beta(\beta \frown \xi)$ est choisi pour $\Phi(\xi)$. Ainsi nous tenons notre représentant, il s'agit de la fonction de *premier* niveau :

$$\Omega_\beta(\beta \frown \xi)$$

Frege définit le nom '$\xi \frown \zeta$' de la manière suivante (p. 53) :

$$\Vdash a \frown b = \backslash\dot{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ b = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}\right)$$

L'expression entre parenthèses dit qu'il existe un $\mathfrak{g}$ dont b soit le parcours-de-valeurs et qui envoie a sur α. Il suffit alors de récupérer l'α en question pour parvenir au résultat. C'est à cette fin qu'il introduisit la fonction $\backslash\xi$ [145]. Celle-ci envoie tout parcours-de-valeurs d'une fonction qui n'associe le Vrai qu'à un objet sur cet objet [146]. Or, lorsque b est un parcours-de-valeurs, c'est précisément le cas de :

$$\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = \xi \\ b = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}$$

Cette fonction associe au Vrai uniquement l'image de $\mathfrak{g}$ en a, *i.e.* l'objet recherché, auquel '$a \frown b$' réfère donc. $\xi \frown \zeta$ remplit son cahier des charges.

Une fois cette fonction entre nos mains, il est aisé de traduire n'importe quel nom simple de second niveau en un nom d'un représentant de premier niveau. Sans surprise '$X^2_\beta(\varphi(\beta))$' devient '$X^2_\beta(\beta \frown \xi)$'. Pour un nom complexe, il suffit d'appliquer aux traductions de premier niveau le processus qui a permis sa formation à partir des noms simples de second niveau. Pour le dire plus simplement, il suffit de remplacer chaque $\varphi(t)$ qui figure dans ce nom par $t \frown \xi$. Ainsi, '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{a})$' devient '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a} \frown \xi = \mathfrak{a} \frown \xi$'.

Hissons-nous au niveau trois. Un représentant de second niveau d'une fonction $\Sigma_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))$ est une fonction $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ qui, pour chaque fonction $\Omega'_\beta(\varphi(\beta))$ de second niveau, associe à un représentant de cette fonction la valeur $\Sigma_\psi(\Omega'_\beta(\psi(\beta)))$.

On pourrait reproduire au deuxième niveau ce qui a été réalisé au premier, *i.e.* définir une fonction $\varphi_1(\beta) \overset{2_\beta}{\frown} \varphi_2(\beta)$ qui associe à deux fonctions $\Phi(\xi)$ et $\Psi(\xi)$ la valeur de la fonction de second

144. Bien sûr, elle doit être déterminée par la définition. Mais nous nous moquons du résultat.
145. C'est *littéralement* à cette seule fin qu'il l'intégra. $\backslash\xi$ est utilisée à cette unique occasion. Elle ne fut sollicitée ni plus tôt, ni plus tard dans l'ouvrage.
146. Les autres objets sont laissés sur eux-mêmes.

niveau que $\Psi(\xi)$ représente en $\Phi(\xi)$, quoi qu'il en soit du résultat lorsque $\Psi(\xi)$ ne représente rien :

$$\Vdash f(\beta)\overset{2_\beta}{\frown}g(\beta) = \backslash\dot{\alpha}\left(\begin{array}{l} \mathfrak{M} \quad \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \mathfrak{h} \quad g(\dot{\varepsilon}(\mathfrak{h}(\varepsilon))) = \mathfrak{M}_\beta(\mathfrak{h}(\beta)) \end{array}\right)$$

Cependant, cela entraînerait justement ce que nous nous efforçons d'abolir : l'escalade des niveaux. La définition du représentant de n^{e} niveau solliciterait une quantification de n-ème ordre, et ainsi une fonction de niveau $n+1$. Heureusement, nous pouvons exploiter $\xi\frown\zeta$ pour gérer les niveaux supérieurs. Considérons la fonction de *second* niveau $\Sigma_\psi(\varphi(\dot{\varepsilon}(\psi(\varepsilon))))$. Elle associe au représentant d'une fonction de second niveau $\Omega'_\beta(\varphi(\beta))$ tel qu'il a été défini plus haut – *i.e.* à $\Omega'_\beta(\beta\frown\xi)$ – l'objet $\Sigma_\psi(\Omega_\beta(\beta\frown\dot{\varepsilon}(\psi(\varepsilon))))$. Ce dernier n'est autre que $\Sigma_\psi(\Omega'_\beta(\psi(\beta)))$, et nous tenons notre représentant.

Nous savons ainsi traduire un nom simple de fonction de troisième niveau – '$X^3_\psi(\mu_\xi(\psi(\xi)))$' – en un nom d'un de ses représentants de second niveau – '$X^3_\psi(\varphi(\dot{\varepsilon}(\psi(\varepsilon))))$' – et, par saturation et désaturation, il en va de même des noms complexes de troisième niveau.

Nous n'écrirons pas ici le processus général de traduction des noms de fonctions de niveau quelconque. Constatons simplement que, à partir de la fonction $\xi\frown\zeta$, Frege tenait un moyen de réaliser cette opération : le processus ci-dessus se répète indéfiniment. Tant que nous nous cantonnons aux type $(\ldots(0)\ldots)$, l'escalade est évitée.

Nous avons dit que plusieurs objets différents pouvaient représenter la même fonction de niveau 2. Plus généralement, plusieurs objets différents peuvent représenter la même fonction de niveau n lorsque $n > 1$, et plusieurs fonctions de niveau n peuvent représenter la même fonction de niveau $n+p$. Cela n'a aucune importance [147] ; l'essentiel, pour assurer la désescalade, était qu'une fonction de niveau n puisse être représentée *univoquement* par une entité de niveau inférieur (spécifiquement par une fonction de niveau 1 et par un objet). Frege avait besoin qu'un représentant ne représente qu'une fonction d'un type précis [148], il lui était techniquement indifférent qu'une fonction ne possède qu'un représentant [149].

2.5.2.2 La désescalade : une illustration du rôle du trait horizontal

Frege parvint à "abaisser" la majorité des fonctions qui lui étaient nécessaires en sollicitant leurs représentants de premier niveau. Néanmoins, il s'y employa *sans prouver formellement qu'il s'agissait bien des représentants visés.* Certes, il serait beaucoup trop long de rédiger cette démonstration pour chaque représentant. En revanche, il est possible de fournir un schéma général de la preuve qui couvre tous les cas possibles [150]. Il suffit d'écrire le processus général de traduction des noms puis d'en démontrer le bien-fondé. La preuve se base évidemment sur le théorème suivant :

$$\vdash a\frown\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = f(a)$$

Frege s'approcha de cette stratégie (pp. 52-56) sans l'adopter totalement. En effet, il se

147. Disons plutôt que cela n'a *techniquement* aucune importance. En revanche, cela aura certaines incidences sur le statut de l'opération de représentation. Nous en discuterons en section 3.2.3.5.

148. Bien sûr, un objet peut représenter une fonction de niveau 1 *et* une fonction de niveau 2. Mais dès lors que nous choisissons de "regarder" un parcours-de-valeurs comme une fonction d'un niveau spécifique, cette fonction est unique.

149. C'est pourquoi la désescalade entraîne la contradiction quand bien même nous associons plusieurs parcours-de-valeurs à une fonction. Le problème est évidemment d'associer une seule fonction à tout parcours-de-valeurs.

150. Plus précisément, un schéma de preuves par type est exigé. Mais, même sans prendre en compte la désescalade, Frege ne sollicite pas énormément de types.

contenta de *suggérer* la mécanique de traduction des noms de fonctions de types $((0))$ et $((0,0))$, et d'expliquer pourquoi le théorème ci-dessus était vrai. Il n'en fournit pas la démonstration rigoureuse. Au contraire, nous tenons à présenter cette dernière, et nous allons rapidement comprendre pourquoi.

D'après la définition de '$\xi \frown \zeta$', nous cherchons à démontrer :

$$\vdash \backslash\dot{\varepsilon}(f(a) = \varepsilon) = \backslash\dot{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}\right)$$

Le résultat ci-dessous s'obtient sans grande difficulté :

$$(1) : \vdash (f(a) = b) \leftrightarrow \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}$$

C'est ici que le problème survient : la loi V ne permet pas de transformer une équivalence – mais une égalité – en égalité de parcours-de-valeurs. Autrement dit, elle ne prend pas la forme suivante :

$$\vdash \big(\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(f(\alpha))\big) = \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\big(f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a})\big)$$

Frege devait employer une égalité entre $f(a)$ et $g(a)$ pour intégrer les cas où $f(\xi)$ et $g(\xi)$ ne se voient pas substituer des *concepts*, *i.e.* dans lesquels équivalence et égalité ne sont pas interchangeables. Ainsi, si $\Phi(\xi)$ et $\Psi(\xi)$ sont des concepts d'une part, et que nous pouvons prouver $\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\big(\Phi(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \Psi(\mathfrak{a})\big)$ d'autre part, alors il faut, pour exploiter l'axiome V, parvenir à démontrer :

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\big(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})\big)$$

Voilà donc l'intérêt des 15 axiomes présentés en section 2.5.1.2, que Frege synthétisa dans la règle de fusion des horizontaux et dans la loi IV. S'il faut prévoir, dans les cas où équivalence et égalité sont similaires, le passage de la première à la seconde, c'est pour donner sa pleine mesure à l'axiome V. Grâce à IV, (1) permet la dérivation de :

$$\vdash (\text{—}\,(f(a) = b)) = \text{—}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}\right)$$

Par la fusion des horizontaux, nous obtenons :

$$\vdash (\text{—}\,(f(a) = b)) = \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}$$

Et enfin, à travers l'axiome IIIi [151] :

$$\vdash (f(a) = b) = \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}$$

Une simple généralisation nous conduit à :

$$\vdash\overset{\mathfrak{b}}{\smile}(f(a) = \mathfrak{b}) = \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = \mathfrak{b} \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}$$

151. Rappelons ce qui a été vu plus haut : Frege n'a pas intégré la stratégie des horizontaux à l'égalité pour éviter de compliquer les formules et, surtout, car l'axiome III permet à lui seul de régler le problème pour ce concept.

Ce qui nous permet finalement d'appliquer V, et nous tenons notre résultat :

$$\vdash \dot{\varepsilon}(f(a) = \varepsilon) = \dot{\alpha}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile} \quad \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \qquad\quad \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}\right)$$

Une fois que l'intégralité de la syntaxe aura été introduite, le lecteur pourra, s'il le souhaite, consulter dans notre annexe le détail de cette démonstration [152]. Pour l'heure, nous avons enfin compris l'intérêt du trait horizontal et de la loi IV ou, plus précisément, des axiomes qu'ils synthétisent. L'axiome V était tenu d'intégrer une *équation* comme terme de droite, pour tenir compte des cas où les parcours-de-valeurs en jeu dans le terme de gauche n'étaient pas des extensions. Néanmoins, il devenait alors insuffisant de démontrer *sous forme d'équivalence* que deux concepts subsumaient les mêmes objets – $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \Phi'(\mathfrak{a})$ – pour prouver qu'ils partageaient la même extension. Il fallait présenter ce point à travers une *égalité* : $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a}) = \Phi'(\mathfrak{a})$. La loi IV et la règle de fusion des horizontaux permettent de passer de la première à la seconde forme, afin d'exploiter pleinement l'axiome V.

2.5.2.3 La compression horizontale

Lorsqu'un parcours-de-valeurs représente une fonction de type (0) dont toutes les valeurs sont elles-mêmes des parcours-de-valeurs, il représente *aussi* une fonction de type $(0, 0)$. Empruntons provisoirement quelques notions au lexique ensembliste pour améliorer nos explications. Un parcours-de-valeurs Δ est un objet du domaine D. En tant que parcours-de-valeur, il peut être "regardé comme" une fonction $\Phi(\xi)$ de $D \to D$. Si chacune de ses valeurs est un parcours-de-valeurs, elles peuvent toutes être "regardées" comme des fonctions de $D \to D$. Ainsi $\Phi(\xi)$ – et *a fortiori* Δ – peut être "regardée comme" une fonction de $D \to (D \to D)$. Bien sûr, Frege n'admettait pas qu'une fonction associe des *fonctions* à ses arguments. Plutôt que de "regarder" Δ comme une fonction qui associe à un objet Γ une fonction qui associe à un objet Γ' un objet Γ'', il le "regardait comme" une fonction qui associe à deux objets Γ et Γ' un objet Γ'', *i.e.* comme une fonction de type $(0, 0)$.

Ce procédé permet d'éviter de solliciter un opérateur de parcours-de-valeurs pour les fonctions à *deux* arguments. Il suffit de considérer le *double* parcours-de-valeurs suivant :

$$\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon, \alpha)))$$

Celui-ci correspond à notre objet Δ ci-dessus. La fonction $\dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon, \xi))$ envoie tout objet sur un parcours-de-valeurs, elle correspond à notre fonction $\Phi(\xi)$ ci-dessus. Naturellement, deux doubles parcours-de-valeurs ne sont identiques que si les fonctions en jeu sont identiques :

$$\begin{array}{lll} \dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon, \alpha))) = \dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}(\Psi'(\varepsilon, \alpha))) & \text{si et seulement si} & \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon, \mathfrak{a})) = \dot{\varepsilon}(\Psi'(\varepsilon, \mathfrak{a}))) \\ & \text{si et seulement si} & \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\Psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \Psi'(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})) \end{array}$$

Un objet ne peut donc représenter qu'une seule fonction de type $(0, 0)$. Par ailleurs, nous savons que Frege n'avait besoin ni de fonctions à plus de deux arguments ni de fonctions hybrides. Notons néanmoins que ce procédé s'étend à des fonctions de type $(0, \ldots, 0)$ – par exemple $\dot{\varepsilon}_3(\dot{\varepsilon}_2(\dot{\varepsilon}_1(\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2))))$. De plus, il se combine avec celui de désescalade verticale. Le représentant d'une fonction $\Omega_\beta(\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$ de type $((0), (0))$ sera $\Omega_\beta(\beta \frown \xi_1, \beta \frown \xi_2)$ dans les fonctions de

152. Il la trouvera dans l'annexe A (p. 734). Comme nous l'avons vu en section 2.5.1.2, les occurrences de l'horizontal à *droite* des étiquettes sont inutiles. C'est pourquoi les démonstrations exigent un usage abondant et majoritairement superficiel de la fusion. Par économie de place, nous ne signalons pas toutes ces applications. En revanche, nous avons évidemment explicité l'usage essentiel qui en est fait dans la présente preuve.

type $(0,0)$, et $\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}(\Omega_\beta(\beta\frown\varepsilon,\beta\frown\alpha)))$ dans les objets. Le représentant d'une fonction $\Omega_\beta(\xi,\varphi(\beta))$ de type $(0,(0))$ sera $\dot{\varepsilon}(\Omega_\beta(\varepsilon,\beta\frown\xi))$ dans les fonctions de type (0), et $\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}(\Omega_\beta(\varepsilon,\beta\frown\alpha)))$ dans les objets.

Ainsi, toute fonction possède un représentant parmi les fonctions de niveaux inférieurs, et ultimement parmi les objets. Chacun d'entre eux la détermine univoquement parmi les fonctions de son type [153]. Frege y trouva un intérêt évident. D'une part, les nombres pouvaient être conçus comme des représentants parmi les objets des concepts de second niveau introduits en section 1.5.3.3. D'autre part, les relations qui s'appliquaient initialement à des concepts pouvaient finalement être représentées par des fonctions de *premier* niveau. C'est par exemple le cas de l'équinumérocité, essentielle à la définition des nombres cardinaux.

2.5.3 Les extensions avant 1890

Nous venons de présenter deux artifices techniques que Frege n'a pu mettre en place avant l'unification des termes et des formules : d'une part l'usage de l'axiome IV et du trait horizontal pour transformer une équivalence en égalité de valeurs de vérité, d'autre part l'exploitation des doubles parcours-de-valeurs pour représenter les entités à plusieurs arguments. Sur la base du premier point – que Duarte (2009) fut le premier à constater – Landini (2012, Chapitre 4) estime que Frege n'a pu démontrer le principe de Hume à partir (d'un équivalent) de la loi V en 1884, et qu'il fut contraint d'emprunter un tout autre chemin. Pour sa part, Heck (2017) examine les différentes manières dont il a pu réagir au second point. Leur objectif commun consiste à lever le voile sur le manuscrit dans lequel la dérivation des théorèmes de l'arithmétique a été entreprise avant l'avènement de la distinction *Sinn-Bedeutung*, et qui fut abandonné à cette occasion [154]. Frege évoqua cette tentative avortée dans l'introduction des *Grundgesetze* :

> J'accomplis ici un projet que j'avais déjà en tête à l'époque de ma *Begriffsschrift* de l'année 1879, et que j'ai annoncé dans mes *Grundlagen der Arithmetik* de l'année 1884. [...] La raison pour laquelle la réalisation intervient si tard après l'annonce tient en partie à des changements internes à mon langage qui m'ont forcé à jeter un manuscrit presque complet. (Frege 1893, pp. VIII-IX)

Notre premier chapitre fut dédié à la reconstitution du chemin emprunté par Frege lors de la première période de sa vie scientifique. À l'issue de ce travail, nous avons confessé qu'une ultime étape faisait encore défaut, liée au deuxième mouvement épousé par ses idées. Nous avons proprement décrit le contexte de 1884, ainsi que la transformation qu'il subit en 1890. Mais nous n'avons pas questionné le contenu du manuscrit en question, *i.e.* la tentative initiale de développement technique des idées informelles des *Grundlagen*. Pour ce faire, il nous fallait au préalable livrer certaines informations générales concernant les parcours-de-valeurs, dont la juste place se situait au sein du second chapitre. Nous avons donc différé cette entreprise, en promettant de la mener à bien lorsque les conditions le permettraient. Ce stade est atteint, et nous nous apprêtons à honorer notre engagement, mettant ainsi un point final au travail historique du premier chapitre.

2.5.3.1 Le cadre de 1884

Procédons à quelques rappels. La langue formulaire de la *Begriffsschrift* faisait usage des symboles 'f', '$\mathfrak{f}$', etc., exclusivement comme lettres de *concepts*. En revanche, elle employait les symboles 'a', '$\mathfrak{a}$', etc., à la fois comme lettres d'objets et de contenus conceptuels, alors que la

153. Répétons qu'une entité peut représenter différentes fonctions *de types différents*, jamais du même type.
154. Voir la section 1.4.12.

distinction catégoriale entre les deux genres d'expressions était conservée. Une règle syntaxique était consacrée à ce problème. Elle stipulait que seul un terme de contenu *jugeable* devait figurer après un trait de contenu. Ce faisant, elle indiquait les cas dans lesquels il s'agissait *toujours* de lettres de contenus jugeables. En principe, l'ambiguïté était maintenue lorsqu'aucun trait ne précédait ces symboles. En pratique, Frege utilisait presque toujours ces derniers comme des lettres d'*objets* dans les cas en question. Une exception subsistait néanmoins, attachée à l'axiome (52) :

$$\begin{array}{l} \vdash f(d) \\ \quad f(c) \\ \quad c \equiv d \end{array}$$

Frege en avait besoin pour gérer les substitutions liées à l'identité entre contenus, que ceux-ci soient ou non jugeables. Le problème était présent dès 1879, mais il était masqué par le fait que l'identité en question était une relation entre des *signes*, et pouvait donc subsumer aussi bien des noms d'objets que des expressions pour des contenus jugeables. Il fut dévoilé au grand jour lorsque l'analyse du concept de *nombre* exigea de mettre des objets – et non plus leurs noms – en relation d'identité. La relation métalinguistique fut alors consacrée à la donnée et à la gestion des définitions, limitée aux expressions pour des contenus jugeables. Et Frege devait scinder ainsi son axiome :

$$(1)\begin{array}{l} \vdash f(d) \\ \quad f(c) \\ \quad c \equiv d \end{array} \qquad\qquad (2)\begin{array}{l} \vdash f(d) \\ \quad f(c) \\ \quad c = d \end{array}$$

D'une part, il choisit de remplacer (2) par la définition suivante, dont il se déduisait aisément [155] :

$$\Vdash (a = b) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f}(a) \leftrightarrow \mathfrak{f}(b))$$

D'autre part, dans (2), 'c' et 'd' sont des lettres d'objets et 'f' une lettre de concept. Mais Frege n'envisageait pas que les concepts subsument des contenus jugeables. Par conséquent, il ne pouvait plus ignorer que si, dans (1), 'c' et 'd' étaient des lettres pour des contenus jugeables, alors 'f' ne pouvait être une lettre de concept. Autrement dit, il ne pouvait plus identifier le sens de (1) à celui de :

$$\vdash \overset{\mathfrak{f}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{f}(d) \\ \mathfrak{f}(c) \\ c \equiv d \end{array}$$

À ce stade, deux options se présentaient : soit il distinguait les lettres d'objets et les lettres pour les contenus jugeables, soit il complétait la règle présentée ci-dessus en stipulant que les expressions pour des contenus jugeables ne pouvaient figurer qu'*après* un trait de contenu [156].

155. Au cours de nos explications, nous utiliserons le raccourci suivant :

$$\Vdash \mathtt{a} \leftrightarrow \mathtt{b} \equiv \begin{array}{l} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \\ \mathtt{b} \\ \mathtt{a} \end{array}$$

Ainsi exprimée, l'équivalence ne permet plus la fusion des horizontaux. Cela n'a néanmoins aucune importance, car cette règle ne jouait aucun rôle déterminant en 1884. Par ailleurs, nous voulons répondre à une possible objection : sans le symbole '↔', nombre des formules que nous attribuons au système pré-1890 présentent un visage extrêmement complexe. C'est le cas de la définition ci-dessous, ou encore de l'axiome V de l'époque :

$$\vdash \left(\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))\right) \leftrightarrow \left(\overset{\mathfrak{a}}{\smile} (P(\mathfrak{a}) \leftrightarrow Q(\mathfrak{a}))\right)$$

Nous pourrions répondre que Frege avait lui-même introduit une abréviation pour l'équivalence, mais nous n'en croyons rien. Le *seul* intérêt de la loi IV des *Grundgesetze* consistait à transformer certaines équivalences en égalité. Elle fut donc introduite pour cette unique raison, et aurait naturellement dû épouser la forme suivante :

$$\vdash (\text{—}\, a = \text{—}\, b) = \left(\begin{array}{l} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \\ \mathtt{b} \\ \mathtt{a} \end{array}\right)$$

Frege disposait de deux solutions pour simplifier cette expression. Soit il adoptait une abréviation pour l'équivalence, soit il choisissait une formule plus élégante qu'il savait équivalente à celle-ci modulo le reste du système :

$$\vdash (\text{—}\, a = \text{—}\, b) = (a \leftrightarrow b) \qquad \text{ou} \qquad \vdash \begin{array}{l} (\text{—}\, a = \text{—}\, b) \\ (\text{—}\, a = {}_{\top}\, b) \end{array}$$

Il se décida pour la seconde alternative, et c'est probablement ainsi qu'il procéda, avant 1884, lorsque l'équivalence était manifestement impliquée. Il était extrêmement habile pour simplifier certaines formules, ce qui eut parfois la malheureuse conséquence d'en dissimuler l'intérêt. Nous n'affirmons donc pas que la loi V du manuscrit pré-1890 prit exactement la forme ci-dessus. Frege préféra peut-être la scinder en deux, comme il s'y employa dans la postface du second volume des *Grundgesetze* ; ou peut-être réussit-il à se débarrasser des *deux* équivalences *via* un autre procédé. Cela nous importe peu. Nous voulons seulement discuter les formules qu'il avait à l'esprit, et non les moyens efficaces à travers lesquels il parvint à les simplifier.

156. Cette formulation – inspirée de celle de (Frege 1881, p. 44 / 50) – ne convenait plus en 1884. En effet, à cette date, les lettres d'objets, de concepts et de contenus jugeables s'étaient vues privées de contenu. Elles étaient devenues de strictes parties d'expressions qui, elles, en disposaient. Par conséquent, il serait plus correct de réunir ainsi les deux règles :

'a', '$\mathfrak{a}$', etc. sont des lettres de contenus jugeables lorsqu'elles font immédiatement suite à un trait de

Par ailleurs, il fut contraint de renoncer à (1), qu'il remplaça probablement par une règle du type :

$$\frac{\vdash c \equiv d \qquad \vdash \Phi(c)}{\vdash \Phi(d)}$$

où Φ n'est pas conçu comme une lettre de concept, mais comme un simple schéma linguistique pour les expressions qui attendent d'être saturées par une expression pour un contenu jugeable.

Comme dans le premier chapitre, nous opterons pour la première des deux options que nous venons d'évoquer. Nous emploierons donc 'a', '$\mathfrak{a}$', etc. seulement comme lettres d'*objets*, et '$\mathtt{a}$', etc. comme lettres pour des contenus jugeables.

Par ailleurs, nous savons qu'en 1884, concepts et fonctions étaient des entités catégorialement distinctes. La complétion des premiers par des objets permettait de construire des contenus jugeables, tandis que les secondes associaient des objets à des objets. Frege se dispensait à la fois de la quantification sur les fonctions – se limitant à celle sur les concepts – et des parcours-de-valeurs – s'en tenant aux extensions. Il n'en appela ni aux lettres pour les fonctions, ni à un opérateur d'abstraction qui prenne ces dernières en argument.

Il employait donc encore les symboles 'f', '$\mathfrak{f}$', etc. comme lettres de *concepts*, n'ayant pas besoin d'équivalents pour les fonctions. Néanmoins, afin d'éviter toute confusion, nous utiliserons à la place 'P' et 'Q' comme lettres latines, '$\mathfrak{P}$' comme lettre pour marquer une place non vacante – y compris et surtout dans le cas de la quantification –, mais conserverons néanmoins 'φ' comme lettre pour marquer une place vacante.

Enfin, rappelons que Frege défendait encore une vision intensionnaliste des concepts. Autrement dit, il croyait que deux concepts pouvaient être différents – et ainsi former des contenus jugeables différents *via* la complétion d'un même objet – tout en subsumant exactement les mêmes objets[157] :

$$\begin{array}{l} \mathfrak{P}\,\mathfrak{P}'\,\mathfrak{a}\ \ \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{P}'(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad\ \ \mathfrak{a}\ \ \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \mathfrak{P}'(\mathfrak{a}) \end{array}$$

Voilà le contexte spécifique, dans lequel les fonctions jouaient un rôle mineur, qui s'acheva lorsque Frege porta enfin son regard sur ces entités. Notre objectif consiste à comprendre comment celui-ci tenta initialement d'y conduire son projet de réduction de l'arithmétique, *i.e.* à restituer les grandes lignes d'un manuscrit dont le contenu exact nous restera malheureusement à jamais mystérieux.

2.5.3.2 Les nombres : des extensions de concepts de *premier* niveau

L'enquête des *Grundlagen* fut tout entière tournée vers cette question : que sont les nombres ? Frege y répondit au §68 :

---

contenu, des lettres d'objets sinon.

157. ou plus lisiblement :

$$\exists\mathfrak{P}\exists\mathfrak{P}'\Big(\forall\mathfrak{a}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \mathfrak{P}'(\mathfrak{a})) \wedge \neg\forall\mathfrak{a}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{P}'(\mathfrak{a}))\Big)$$

1884 : Le nombre qui appartient au concept F est l'extension du concept *équinumérique au concept* F [158].

Il semble néanmoins que cette réponse ne fut pas définitive. Voici celle des *Grundgesetze*, à laquelle nous conférons la même tournure informelle :

1893 : Le nombre qui appartient au concept F est l'extension du concept *équinumérique à l'extension du concept* F.

La différence n'est pas anodine. Le concept *équinumérique au concept* F doit être complété par un *concept*. Il s'agit donc d'un concept de second niveau. Il semble que, avant 1893, Frege l'ait remplacé, *via* l'opération de représentation, par celui d'*équinumérique à* l'extension *du concept* F, autrement dit par un concept de premier niveau. Ainsi, à première vue, les nombres de 1884 étaient des extensions de concepts de *second* niveau, tandis que ceux de 1893 étaient devenus des extensions de concepts de *premier* niveau. Frege aurait remplacé la première par la seconde des définitions ci-dessous :

$$\mathbf{Nb}_1 : \ \Vdash \mathbf{N}_\beta(P(\beta)) \equiv \dot{\pi}(\pi(\beta) \approx_\beta P(\beta)) \qquad \mathbf{Nb}_2 : \ \Vdash \mathbf{N}_\beta(P(\beta)) \equiv \dot{\varepsilon}(\varepsilon \approx \dot{\alpha}(P(\alpha)))$$

Nous disons 'à première vue', car il ne s'agit en réalité que d'un faux semblant. En effet, Frege concevait la seconde définition comme une simple *reformulation* de la première, et nous mit sur la voie à travers une note de bas de page qui fut déjà l'objet de notre attention :

> Je pense qu'on pourrait tout simplement dire 'concept' à la place de 'extension de concept'. (Frege 1884, p. 80/194)

Nous savons déjà ce qu'il entendait par là [159]. L'expression 'le concept F' est un nom propre, elle réfère à un objet : l'extension en question. Frege signalait ainsi qu'il aurait pu se contenter de la définition suivante :

$1884_{\mathbf{Ab}}$: Le nombre qui appartient au concept F est le concept *équinumérique au concept* F.

Mais cette note de bas de page nous livre une information supplémentaire, car la définition de 1893 résulte précisément d'un tel remplacement, cette fois effectué sur la *seconde* occurrence de l'expression 'l'extension du concept' dans la définition de 1884. L'hypothèse s'impose d'elle-même : à travers la première définition, Frege visait la seconde, qu'il atteignait grâce au remplacement en question.

Néanmoins, ceci soulève une question : pourquoi aurait-il effectué cette substitution *sans le signaler* ? S'il était superflu d'indiquer en note de bas de page un remplacement auquel il n'avait pas procédé, il paraît en revanche indispensable d'indiquer celui qui avait eu lieu.

Pourtant, Frege aboutit à la conclusion opposée, et nous pouvons aisément deviner ses raisons. La formulation de 1893 révèle immanquablement que la relation d'équinumérocité ne lie pas des concepts, mais des objets. Voilà qui n'aurait pas manqué de troubler le lecteur des *Grundlagen*, et qui aurait exigé de longues explications sur le chemin qu'il escomptait emprunter, *i.e.* sur l'abaissement des fonctions de niveaux supérieurs. C'est précisément ce genre de développements

158. Dans la version originale, Frege n'utilise pas l'italique. Il entoure à la place l'expression de guillemets. Nous préférons respecter ses conventions post-1891, qui s'accordent avec l'usage contemporain des guillemets.
159. depuis la section 1.6.2.1.

techniques qu'il souhaitait à tout prix éviter dans cet ouvrage informel. En procédant silencieusement à ce remplacement, il parvenait à transmettre l'essentiel de sa démarche en faisant l'économie de toute considération indésirable [160].

En outre, il est peu probable que Frege en soit venu à constater la possibilité de tels remplacements simplement en spéculant sur l'élégance des formules à disposition. Au contraire, c'est sans doute en comprenant que sa stratégie prévoyait de faire jouer à son représentant le rôle qui incombait naturellement à un concept qu'il réalisa le lien profond qui unissait les deux entités, rôle qui se manifestait aussi à travers le remplacement en question. Vraisemblablement, il prit acte de la possibilité de celui-ci *parce qu'*il s'était déjà engagé sur la route de la désescalade verticale.

Enfin, nous voulons reprendre un argument proposé par Rouilhan. Celui-ci remarque que la dernière phrase de la note de bas de page évoquée plus haut a été supprimée dans la traduction française. Frege y précisait qu'il "suppos[ait] connu ce qu'est une extension de concept" (p. 80). Rouilhan poursuit :

> Or, qu'un concept d'objets ait une extension, on peut l'admettre provisoirement, mais non un concept de concepts d'objets, non en tous cas en un sens qu'on puisse supposer connu. (ROUILHAN 1988, p. 101)

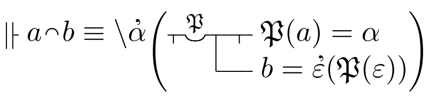
À l'époque de Frege, les extensions de concepts d'*objets* étaient souvent sollicitées à telle ou telle fin par ses contemporains – et l'avaient déjà été par ses prédécesseurs. Frege allait certainement vite en besogne en supposant qu'une notion aussi problématique que celle d'extension était notoirement bien comprise – il l'apprendrait à ses dépens, de la plus cruelle des manières. Néanmoins, s'il faisait ainsi référence aux extensions de concepts d'*objets*, sa remarque était, sinon justifiée, au moins compréhensible. En revanche, rien n'expliquerait une telle affirmation concernant les extensions de concepts de second niveau, qu'il aurait été le premier à invoquer.

En somme, selon toute vraisemblance, Frege a toujours limité les extensions à des concepts de *premier* niveau. Il n'eut jamais recours à un opérateur de troisième niveau $\dot{\pi}(\mu_\beta(\pi(\beta)))$, en s'appuyant dès le départ sur celui de second niveau $\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$.

2.5.3.3 La relation d'appartenance

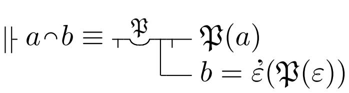
Ainsi, dès 1884, il n'eut d'autre choix que d'en appeler à la relation $\xi \frown \zeta$ – que nous nommerons 'relation d'appartenance' tout au long de cette section – pour récupérer l'équinumérocité entre des extensions, *i.e.* des objets. Il nous faut néanmoins comprendre comment il la définit. Tentons d'imiter la stratégie de 1893 :

$\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$:



L'expression '$\mathfrak{P}(a) = \alpha$' est mal formée, car le signe '=' y figure entre une lettre d'objet et une expression pour un contenu jugeable. En 1884, les concepts n'étaient pas encore des fonctions qui associaient des objets aux valeurs de vérité. Il n'était donc pas possible de définir '$a \frown b$' comme la *valeur* en a du concept dont b est l'extension. Néanmoins, une méthode plus simple nous conduit à notre objectif :

$\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gl}}$:



160. En anticipant légèrement sur le contenu de la section 3.2.3.5, disons qu'il y parvint en proposant une formule littéralement correcte (ou presque !) mais métaphoriquement trompeuse.

La fonction $\backslash\xi$ n'est plus nécessaire. Plus haut, nous cherchions la valeur en a de la fonction que b représentait. Puisque cette fonction n'était pas toujours un concept, cette valeur était éventuellement différente d'une valeur de vérité. Ce cas (fréquent) nous forçait à récupérer la valeur à l'aide de $\backslash\xi$. Ici au contraire, b ne peut représenter qu'un concept, dont la formule de droite dit qu'il subsume a. C'est précisément ce que nous cherchons à exprimer.

Ainsi $\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$ est le représentant de la propriété $P(\xi)$; $R^2_\beta(\beta\frown\xi)$ celui de la propriété de second niveau $R^2_\beta(\varphi(\beta))$, etc. Nous pouvons gravir les échelons de la sorte, tel qu'ils furent montés dans le cas des fonctions. Autrement dit, la définition $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gl}}$ permet, dans le contexte de 1884, la même désescalade verticale que nous avons décrite dans celui de 1893.

Il semble que l'affaire soit réglée. Mais afin de nous en assurer, il convient de répondre à deux arguments que Heck, d'une part, et Landini, d'autre part, opposent à cette lecture.

Rappelons en quelques mots la position générale de Heck. Selon lui, Frege aurait déjà épousé une vision extensionnelle des concepts en 1884. Il aurait conçu ces derniers comme des fonctions associant des objets à des valeurs de vérité. Il aurait néanmoins maintenu une différence catégoriale entre ces objets particuliers que sont les valeurs de vérité et les objets standards. Cette distinction, répercutée au niveau supérieur, aurait produit le même écart entre ces fonctions particulières que sont les concepts et les fonctions standards – par exemple l'addition ou la multiplication – qui envoient les objets standards sur des objets *standards*, et non sur des valeurs de vérité. Le grand saut de 1890 aurait consisté à briser cette différence catégoriale, et à intégrer les valeurs de vérité aux objets standards.

Heck réduit donc les contenus jugeables aux valeurs de vérité, et permet ainsi l'expression d'une identité objectuelle entre eux. Rigoureusement, il faudrait néanmoins distinguer l'égalité qui attache deux objets standards et celle qui lie deux valeurs de vérité. Par exemple, $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ pourrait s'écrire ainsi :

$$\Vdash a\frown b \equiv \backslash\dot{\alpha}\left(\begin{array}{l} \mathfrak{P}(a) =_{\mathrm{vv}} \alpha \\ b =_{\mathrm{os}} \dot{\varepsilon}(\mathfrak{P}(\varepsilon)) \end{array}\right)$$

L'expression '$\mathfrak{P}(a) =_{\mathrm{vv}} \alpha$' serait bien formée car 'α' – respectivement '$\mathfrak{P}(a)$' – serait une lettre – respectivement une expression – de valeur de vérité, et pourrait légitimement figurer autour du symbole '$=_{\mathrm{vv}}$' d'égalité de valeur de vérité. Par conséquent, l'utilisation de $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ est compatible avec l'interprétation de Heck.

Ceci nous met face à une difficulté incontestable, car celui-ci fournit par ailleurs une raison (convaincante) de croire que Frege avait envisagé la définition $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ *avant* la révolution de 1890. Voilà qui semble s'accorder avec sa lecture – que nous avons longuement contestée dans le premier chapitre – et contredire la nôtre – que nous avons défendue par la même occasion. Il nous faut donc en tenir compte.

L'argument procède comme suit [161]. Scholz résuma quelques notes rédigées par Frege en novembre 1889, que celui-ci intitula 'une rapide présentation de l'état actuel de l'Idéographie'. Les notes ont disparu du *Nachlass*, mais le résumé nous est parvenu. Il consiste en une liste de mots parmi lesquels se trouve le terme '*Kennzeichnung*'. Ce dernier n'apparaît pas dans les textes en notre possession, il résulte donc d'un choix personnel de Scholz qui cherchait ainsi à désigner une quelconque portion des recherches de Frege. Ce terme étant traditionnellement attaché à la théorie de la description de Russell, il est probable que cette portion ne soit autre que la formalisation de l'article défini à travers le nom '$\backslash\xi$'. Cependant, nous avons vu que, dans les *Grundgesetze*, celui-ci servait *exclusivement* à la définition de l'appartenance. Autrement dit, Frege a vraisemblablement envisagé une stratégie proche de $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ avant novembre 1889, c'est-à-

161. Le lecteur peut le consulter directement dans (Heck 2017, pp. 10-11).

dire avant la date minimale à laquelle a pu survenir la distinction sens-référence, que Sundholm localise à raison en décembre 1889.

Nous acceptons cette conclusion. Cependant, notons que si, *en principe*, $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ est tout aussi compatible que $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gl}}$ avec la lecture de Heck, nous ne voyons pas ce qui aurait *pratiquement* pu motiver ce choix. Dans le cadre général des fonctions, l'introduction de l'opérateur de description pour définir la relation en question fait sens. Elle permet de stipuler que $a \frown b$ est **le** ε égal à la valeur en a de la fonction dont b est le parcours-de-valeurs. Mais le strict cadre des concepts n'exige rien de tel. Il s'accommode tout à fait d'une simple relation d'appartenance : ξ tombe sous le concept dont ζ est l'extension. *Même dans l'environnement décrit par Heck*, la seconde définition est donc à la fois plus naturelle et plus simple que la première, et permet l'économie complète de l'opérateur d'abstraction.

Ainsi, Heck est comme nous confronté à la question suivante : qu'est-ce qui motiva Frege à envisager l'introduction d'un opérateur totalement superflu ? Notre interprétation permet d'y répondre car, comme nous l'avons vu [162], toute réflexion concernant la dissymétrie entre concepts et fonctions en appelait rapidement à une étude de l'article défini. Ce n'est donc pas dans le contexte de 1884 que Frege intégra cet opérateur, mais lorsqu'il se confronta enfin au problème qui le conduirait à en sortir.

À cause de l'absence quasi-complète de textes qui précèdent cette période, le bouleversement de 1890 nous apparaît comme extrêmement soudain. Mais il ne fait aucun doute que certaines recherches ont progressivement infléchi le cours de ses pensées, et il est probable que plusieurs signes de ces recherches – et de ce qu'elles annonçaient – soient visibles dans les écrits disparus. Il n'est pas surprenant – et totalement cohérent avec nos explications – que l'un d'entre eux consiste en l'apparition d'un opérateur de description. Frege n'avait de raison de se pencher sur l'article défini que s'il cherchait à comparer les éléments centraux des *Grundlagen* – les concepts – à ceux qu'il avait alors laissés dans l'ombre – les fonctions. C'est de cette manière qu'il constata la dissymétrie que ces idées d'alors généraient entre les deux genres d'entités. Voilà précisément le cheminement reconstitué dans le premier chapitre, dont nous ignorons malheureusement les détails. A-t-il apporté une première réponse superficielle et inadéquate à cette dissymétrie ? L'opérateur de description jouait-il un rôle particulier dans cette réponse ? Seule la consultation du *Nachlass* désormais disparu aurait une chance d'éclairer précisément la manière dont il passa de la conception stable de 1884 – dans laquelle les concepts étaient intensionnels et les fonctions (silencieusement) extensionnelles – à celle de 1890. Nous savons que la transition s'acheva à travers la distinction entre le *Sinn* et la *Bedeutung*. Mais il est probable que des stigmates de sa naissance figurent dans les textes qui précédèrent de peu cette période, notamment dans les notes que Scholz résuma. Le fait que des considérations concernant l'article défini et l'opérateur de description soient partie de ces stigmates renforce notre interprétation, car celle-ci leur confère un rôle déterminant dans le basculement.

Landini (2012, Chapitre 4) défend une idée encore plus radicale. Il estime que $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gl}}$ et $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ permettent seulement la démonstration de la première des deux formules ci-dessous, tandis que Frege aurait visé la seconde :

$$\mathbf{Red}_{\leftrightarrow} : \ \vdash a \frown \dot{\varepsilon}(\mathrm{P}(\varepsilon)) \leftrightarrow \mathrm{P}(a) \qquad \mathbf{Red}_{\equiv} : \ \vdash a \frown \dot{\varepsilon}(\mathrm{P}(\varepsilon)) \equiv \mathrm{P}(a)$$

Landini n'est pas explicite sur la manière dont Frege concevait les concepts en 1884. Néanmoins, en section 2.3, il explique que ces derniers étaient regardés comme des fonctions qui associaient des objets à des contenus jugeables, ce qui suggère une vision intensionnaliste. Ce

162. en section 1.6.2.3.

constat est renforcé par le fait que, dans le cas contraire, les formules ci-dessus seraient trivialement équivalentes, et sa conclusion immédiatement falsifiée. Voyons comment il y aboutit dans ce cadre.

Il reconnaît que la démonstration de $\mathbf{Red}_{\leftrightarrow}$ est possible, mais prétend que l'objectif de Frege consistait à atteindre $\mathbf{Red}_{\equiv}$. En 1893, celui-ci transformait une équivalence en une égalité impliquant des concepts *via* l'utilisation de la loi IV. Mais en 1884, il ne pouvait tolérer une telle transition. Les concepts étant intensionnels, deux contenus jugeables pouvaient être équivalents *sans être égaux*. Il n'était donc pas question d'introduire une quelconque version de la loi IV, ce qui disqualifie une fois pour toutes $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gl}}$. Néanmoins, en questionnant la forme que l'axiome V pouvait épouser à cette époque, Landini constate que $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$, *a priori* plus prometteur, échoue à son tour. La distinction entre '$\leftrightarrow$' et '$\equiv$' nous place face au choix suivant :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Loi V}_{G\equiv\equiv} & : & \vdash \left(\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))\right) \equiv \left(\smile_{\mathfrak{a}} (P(\mathfrak{a}) \equiv Q(\mathfrak{a}))\right) \\
\text{Loi V}_{G\leftrightarrow\equiv} & : & \vdash \left(\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))\right) \leftrightarrow \left(\smile_{\mathfrak{a}} (P(\mathfrak{a}) \equiv Q(\mathfrak{a}))\right) \\
\text{Loi V}_{G\leftrightarrow\leftrightarrow} & : & \vdash \left(\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))\right) \leftrightarrow \left(\smile_{\mathfrak{a}} (P(\mathfrak{a}) \leftrightarrow Q(\mathfrak{a}))\right)
\end{array}$$

Pour tenir compte de l'intensionnalité des concepts, $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ doit épouser la forme [163] :

$$\Vdash a \frown b \equiv \backslash\dot{\alpha}\left(\smile_{\mathfrak{P}} \begin{array}{l} \mathfrak{P}(a) \equiv \alpha \\ b = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{P}(\varepsilon)) \end{array}\right)$$

Par ailleurs, l'usage de '$\backslash\xi$' doit être régi par l'axiome :

$$\text{VI}_{\mathrm{G}} : \ \vdash a \equiv \backslash\dot{\varepsilon}(a \equiv \varepsilon)$$

Nous cherchons à prouver $\mathbf{Red}_{\equiv}$ à partir de $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$. Il n'est pas difficile de démontrer le théorème suivant :

$$\vdash \left(\smile_{\mathfrak{P}} \begin{array}{l} \mathfrak{P}(a) \equiv \mathsf{c} \\ \smile_{\mathfrak{a}} P(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \end{array}\right) \leftrightarrow P(a) \equiv \mathsf{c}$$

La première étape délicate – l'étape (1) – consiste à aboutir à la formule :

$$\vdash \left(\smile_{\mathfrak{P}} \begin{array}{l} \mathfrak{P}(a) \equiv \mathsf{c} \\ \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{P}(\varepsilon)) \end{array}\right) \leftrightarrow P(a) \equiv \mathsf{c}$$

La seconde difficulté – l'étape (2) – réside dans la dérivation de :

$$\vdash \backslash\dot{\alpha}\left(\smile_{\mathfrak{P}} \begin{array}{l} \mathfrak{P}(a) \equiv \alpha \\ \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{P}(\varepsilon)) \end{array}\right) \equiv \backslash\dot{\alpha}(P(a) \equiv \alpha)$$

À ce stade, le plus dur est accompli. Une simple utilisation de la loi IV_{G} conduirait au résultat :

$$\vdash a \frown \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) \equiv P(a)$$

Notre problème est circonscrit dans les étapes (1) et (2). Landini se focalise sur la première. Il constate qu'elle exige au moins une équivalence – potentiellement une identité – entre les

163. Notons bien que, dans les formules ci-dessous, 'α' et 'c' ne sont pas des lettres d'objets, mais de contenus jugeables.

contenus de '$\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{P}(\varepsilon))$' et de '$P(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{P}(\mathfrak{a})$' – et non de '$P(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{a})$'. Autrement dit, seules les lois $\mathrm{V}_{G\equiv\equiv}$ et $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\equiv}$ nous mènent à destination ; l'axiome $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\leftrightarrow}$ est insuffisant. Au contraire, il explique que la démonstration du principe de Hume exige ce dernier axiome, et ne peut se satisfaire des deux autres. Nous ne contredisons pas ce point, mais il n'était pas utile d'aller chercher si loin. En effet, l'étape (2) présente la même difficulté, *i.e.* celle qui fut décrite en section 2.5.2.2. Il y est question de transformer la généralité d'une équivalence en une identité d'extension. En 1884, il n'était pas possible d'utiliser la loi IV. Cette transition n'était réalisable que si elle était directement permise par l'axiome V. Or seul $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\leftrightarrow}$ dispose d'une telle ressource. Les deux autres versions autorisent seulement la dérivation de l'égalité d'extension à partir de la généralité d'une *identité de contenu*, *i.e.* d'une relation plus fine que l'équivalence.

Par conséquent, quelle que soit la version choisie pour la loi V, ni $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ ni $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gl}}$ ne permet la démonstration de $\mathbf{Red}_{\equiv}$. Landini en conclut qu'en 1884, Frege ne prévoyait pas d'utiliser cette loi pour prouver à la fois à la fois ce théorème et le principe de Hume – comme c'était possible dans les *Grundgesetze* –, mais de poser '$\xi\frown\zeta$' comme un nom primitif régi par l'*axiome* $\mathbf{Red}_{\equiv}$ [164], duquel découlait le principe de Hume. Frege aurait donc fait totalement l'impasse sur la loi V.

Ce raisonnement est fondé sur l'idée que Frege avait à tout prix besoin de $\mathbf{Red}_{\equiv}$. Selon Landini, "la solution [au problème de Jules César] s'appuie essentiellement sur le fait que $\mathbf{Red}_{\equiv}$ est une identité. En le reformulant de manière à obtenir une équivalence [en adoptant $\mathbf{Red}_{\leftrightarrow}$], nous manquons totalement la philosophie de l'arithmétique de Frege" (p. 113). Ceci découle du fait que "nous pouvons connaître les objets logiques que sont les nombres seulement à travers la manière dont ils représentent des concepts numériques de second niveau" (p. 96).

Nous discuterons plus tard [165] le rôle que tenait l'opération de représentation dans la philosophie fregéenne de l'arithmétique. Nous ne contestons pas à Landini qu'il fût important. Mais exigeait-t-il de pousser jusqu'à l'identité de contenu entre '$P(a)$' et '$a\frown\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$' ? Nous ne pouvons rien conclure de la présence du signe '=' en 1893. Frege en avait besoin pour gérer le cas des fonctions absentes en 1884. En se restreignant aux concepts, il aurait écrit indifféremment $\mathbf{Red}_{=}$ et $\mathbf{Red}_{\leftrightarrow}$, car sa conception extensionnaliste rendait les deux formules parfaitement équivalentes. Dans notre contexte, l'identité de contenu de 1884 ne doit pas être rapprochée de l'égalité de 1893, mais d'une identité de *sens*. Or Frege n'a jamais clairement affirmé après 1890 que '$f(a)$' et '$a\frown\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))$' partageaient le même sens. Certains commentaires le suggèrent [166], mais ils sont extrêmement rares et s'opposent à d'autres remarques qu'il formula par ailleurs. De plus, et c'est ce qui nous importe ici, il n'était pas en mesure de défendre une telle position – ou plutôt sa version de 1884, l'identité de contenu – durant la période des *Grundlagen*. Nous concédons qu'il revenait aux extensions la tâche essentielle de représenter des concepts. Cependant, elles n'en restent pas moins des *extensions*. Or, par définition, deux concepts qui subsument les mêmes objets ont la même extension, *même s'ils sont différents*. Ce point, pourtant trivial, ne s'accorde pas avec $\mathbf{Red}_{\equiv}$. En effet, soient $P(\xi)$ et $Q(\xi)$ deux concepts différents qui subsument les mêmes objets. Alors d'une part $\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$ est égal à $\dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))$, et d'autre part il existe un objet a tel que $P(a)$ et $Q(a)$ soient différents. Ainsi les deux énoncés ci-dessous sont vrais, et contredisent $\mathbf{Red}_{\equiv}$:

$$a\frown\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) \equiv a\frown\dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon)) \qquad P(a) \not\equiv Q(a)$$

Les développements de Landini sont sous-tendus par une idée que nous examinerons plus tard, selon laquelle les extensions représentent les concepts en un sens si fort qu'elles permettent

164. En vérité, il faudrait se donner un axiome de cet acabit pour chaque arité car, comme nous l'expliquerons dans un instant, le cadre des *Grundlagen* ne permettait pas l'exploitation des doubles parcours-de-valeurs.
165. au sein du troisième chapitre.
166. Nous en dirons davantage en section 3.2.3.5.

de traduire au niveau des objets exactement ce qui s'exprime à celui des concepts. Mais rien de tel n'avait cours en 1884. '$a \frown \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$' et '$P(a)$' ne pouvaient exprimer le même contenu, car cela aurait exigé que chaque concept possède son représentant exclusif, autrement dit son extension exclusive. En définitive, il aurait fallu que deux concepts différents n'aient jamais la même extension, ce que Frege n'admettait pas à cette époque. Au contraire, le fait que la représentation efface les différences intensionnelles constitue une des raisons pour lesquelles Frege a adopté sa stratégie. Nous avons établi ce point en examinant l'hypothèse que les nombres soient des concepts[167]. Cette hypothèse nous plaçait dans l'impossibilité de choisir le nombre 1 parmi tous les successeurs (extensionnellement équivalents) de 0. En imposant au représentant de conserver la charge intensionnelle du concept, donc de n'être pas une extension, Landini répercute cette difficulté au niveau des objets. En octroyant différents successeurs à chaque entier naturel, il dynamite à sa base l'édifice de Frege.

Son erreur fondamentale fut de ne pas prêter suffisamment attention à la notion de contenu pré-1890. C'est pour cette raison non seulement qu'il milite en faveur de $\mathbf{Red}_{\equiv}$, mais aussi qu'il examine les différentes versions de la loi V sous l'angle purement technique de ce qu'elles autorisent à dériver. En réalité, notre précédente remarque s'applique aussi bien à ce cadre. Si $P(\xi)$ et $Q(\xi)$ subsument les mêmes éléments sans être les mêmes concepts, alors '$\smile_{\mathfrak{a}} (P(\mathfrak{a}) \equiv Q(\mathfrak{a}))$' est faux tandis que '$\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))$' est vrai. Les lois $\mathrm{V}_{G\equiv\equiv}$ et $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\equiv}$ ne peuvent supporter une vision intensionnaliste des concepts. Au contraire, l'axiome $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\leftrightarrow}$ exprime exactement ce que nous souhaitons : que deux concepts subsument les mêmes objets si et seulement s'ils ont même extension. Cette version reste seule en lice, *quoi qu'elle soit en mesure de démontrer*[168].

Ainsi, dans le manuscrit abandonné en 1890, le nom '$\xi \frown \zeta$' était défini selon $\mathbf{Ap}_{\mathrm{Gg}}$ et l'énoncé $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\leftrightarrow}$ était intégré comme axiome. Sur cette base, Frege parvint à démontrer le théorème $\mathbf{Red}_{\leftrightarrow}$, essentiel (et suffisant) pour assurer la désescalade des concepts. La preuve se déroule tout à fait paisiblement. En utilisant les substitutions pour l'égalité et les manipulations propositionnelles, nous pouvons facilement établir :

$$\vdash \left(\begin{array}{l} \smile_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}(a) \\ \quad \smile_{\mathfrak{a}} P(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \end{array} \right) \leftrightarrow P(a)$$

Il suffit alors d'utiliser la loi $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\leftrightarrow}$ pour aboutir au résultat :

$$\vdash \left(\begin{array}{l} \smile_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}(a) \\ \quad \smile_{\mathfrak{a}} \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{P}(\varepsilon)) \end{array} \right) \leftrightarrow P(a)$$

2.5.3.4 Paires ordonnées et double parcours-de-valeurs

Un autre problème attend encore d'être résolu, car si la relation d'appartenance permet d'abaisser les niveaux des concepts d'arité 1, elle est en revanche impuissante face aux *relations*. En effet, l'astuce des doubles parcours-de-valeurs qui assura la compression horizontale de 1893 était totalement subordonnée à l'identification entre termes et formules. En 1884, il n'était pas possible de définir le représentant d'une relation $R(\xi, \zeta)$ par $\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon, \alpha)))$, parce que $\dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon, \xi))$ n'était *pas* un concept.

167. Voir la section 1.5.3.3.

168. Un autre point vient disqualifier $\mathrm{V}_{G\equiv\equiv}$ et $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\equiv}$. Comme nous l'avons vu en section 1.6.1.2, il est probable que, dès 1884, Frege avait compris qu'une occurrence d'une expression ne pouvait s'exhiber elle-même tandis qu'une autre exhibait son contenu au sein d'une même formule. C'est d'ailleurs une des raisons qui nous motiva à conclure qu'il ne gérait plus la substitution des contenus jugeables *via* l'axiome de 1879, mais à travers une règle.

Avant toute chose, notons que Frege n'avait pas essentiellement besoin de représenter les relations ; il pouvait sereinement s'en tenir aux propriétés. Pour illustrer ce point, considérons l'équinumérocité de premier niveau $\xi \approx \zeta$ impliquée dans la définition du concept de nombre. Elle attache deux objets a et b si et seulement s'il existe une bijection qui envoie l'ensemble des objets qui appartiennent à a sur celui des objets qui appartiennent à b. La relation $\xi \frown \zeta$ est incontestablement impliquée, parce que a et b sont ici considérés comme des représentants. En revanche, il n'est pas nécessaire de représenter la bijection en question. Elle peut sans problème se maintenir au premier niveau [169] :

$$\begin{aligned} \Vdash a_1 \approx_1 a_2 \equiv \exists \mathfrak{P} \forall \mathfrak{a} \quad & \Big(\big(\mathfrak{a} \frown a_1 \to \exists \mathfrak{b} (\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{b} \frown a_2) \wedge \forall \mathfrak{c} ((\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \wedge \mathfrak{c} \frown a_2) \to \mathfrak{b} = \mathfrak{c}) \big) \\ \bigwedge \quad & \big(\mathfrak{a} \frown a_2 \to \exists \mathfrak{b} (\mathfrak{P}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{b} \frown a_1) \wedge \forall \mathfrak{c} ((\mathfrak{P}(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{c} \frown a_1) \to \mathfrak{b} = \mathfrak{c}) \big) \Big) \end{aligned}$$

Dans les *Grundgesetze*, Frege remplacerait '$\mathfrak{P}(\xi, \zeta)$' par '$\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}(\mathfrak{P}(\varepsilon, \alpha)))$', ce qui permettrait d'écrire '$\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{c})$' au lieu de '$\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$'. Il utiliserait les doubles parcours-de-valeurs, l'opération de représentation et les quantifications de niveaux 2 et 3 afin de ramener *toutes* les autres fonctions au premier niveau. Cependant, rien n'imposait fondamentalement l'adoption d'une telle stratégie. Seul le gain en élégance et en fluidité constituait une motivation certaine, mais il était techniquement possible de s'en sortir sans représenter les relations.

Heck (2017, p. 21) nous livre une raison de penser qu'effectivement, Frege n'y eut pas recours tout de suite. À deux reprises dans les *Grundgesetze* (§§24, 31), celui-ci mentionna le nom '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile} \mu_{\xi_1, \xi_2}(\mathfrak{f}(\xi_1, \xi_2))$' nécessaire aux quantifications sur les fonctions à deux arguments, notamment sur les relations. Pourtant, il n'employa ce nom nulle part dans ses démonstrations, et précisa lui-même au sein du §31 qu'il n'en ferait pas usage. La réduction systématique opérée sur les fonctions de niveaux supérieurs l'en débarrassait totalement. Si le terme figure néanmoins dans l'ouvrage, c'est probablement parce que, jusque tardivement, il ne s'était pas engagé dans cette réduction complète, procédant *via* le genre de définitions que nous venons de donner et qui, pour leur part, exploitent cette quantification.

Notons néanmoins que Frege était en mesure d'aboutir à cette réduction *avant* 1890 malgré l'absence des doubles parcours-de-valeurs. Par exemple [170], il pouvait introduire une *seconde* fonction *primitive* qui associe une relation à deux arguments à son extension :

$$\widehat{\varepsilon\alpha}(R(\varepsilon, \alpha))$$

Dans ce cadre, il est indispensable de définir une *seconde* relation d'*appartenance* à trois arguments [171] :

$$\Vdash (a, b) \overset{\mathrm{R}}{\frown} c = \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{R}(a, b) \\ c = \widehat{\varepsilon\alpha}(R(\varepsilon, \alpha)) \end{array}$$

Le procédé consiste à *séparer* les extensions de relations des extensions de propriétés. La fonction de type (0) envoie chaque propriété sur son extension, et la fonction de type $(0, 0)$

169. La complexité de la formule nous exhorte à revenir aux conventions contemporaines. Au stade où nous en sommes, le lecteur ne rencontrera aucune difficulté à la traduire dans le symbolisme fregéen.

170. Les deux stratégies que nous allons présenter ont été mises à jour par Heck (2017, pp. 6-7).

171. Notons qu'il ne s'agit pas d'une relation primitive. Elle se définit intégralement à travers des concepts à deux arguments. Nous demeurons donc dans un cadre où tous les noms primitifs ne présentent que deux places vacantes. Ce nom n'est qu'une abréviation qui permet des formules à la fois plus courtes et plus claires, il est facultatif.

chaque relation sur la sienne. À ce titre, l'axiome V ne peut pas être formulé uniquement pour des propriétés, il doit être éclaté en deux différentes lois :

$$\mathrm{V_P} : \vdash \big(\dot{\alpha}(P(\alpha)) = \dot{\alpha}(P'(\alpha))\big) \leftrightarrow \smile_{\mathfrak{a}} \big(P(\mathfrak{a}) \leftrightarrow P'(\mathfrak{a})\big)$$

$$\mathrm{V_R} : \vdash \Big(\widehat{\varepsilon\alpha}(R(\varepsilon,\alpha)) = \widehat{\varepsilon\alpha}(R'(\varepsilon,\alpha))\Big) \leftrightarrow \smile_{\mathfrak{a}}\smile_{\mathfrak{b}} \big(R(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \leftrightarrow R'(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\big)$$

Voici donc une première stratégie. Elle exige autant de noms de fonctions primitifs pour les extensions et d'axiomes V que notre langage compte de nombres différents d'arguments pour les concepts [172].

Cependant, s'il est probable que Frege procéda effectivement à une réduction des relations avant la distinction sens-référence, il semble qu'il ait emprunté pour cela un autre sentier. En effet, l'article "Fonction et Concept" s'achève sur la précision suivante :

> On peut traiter une fonction à deux arguments comme une fonction à un argument unique complexe, toutefois la distinction entre fonctions à un argument et fonctions à deux arguments demeure dans toute sa rigueur. (Frege 1891, p. 142 / 101)

En parlant d'"argument unique complexe", Frege faisait bien sûr référence à ce que nous nommons désormais une 'paire ordonnée' (ou un 'couple'). En 1893, il n'avait plus aucune raison de "traiter une fonction à deux arguments comme une fonction à un argument". En revanche, avant 1890, cela lui permettait de représenter une relation à travers l'extension d'un concept à un argument. Il est donc vraisemblable qu'il évoqua ici une ancienne stratégie adoptée entre 1884 et 1890 – et qui, peut-être, survécut jusqu'à la découverte de l'astuce des doubles parcours-de-valeurs, qui n'allait pas de soi. L'expression 'la paire' [*das Paar*] figure d'ailleurs dans la liste de Scholz évoquée plus haut [173].

Cette méthode évite la multiplication des opérateurs de parcours-de-valeurs et des axiomes V. Pour Frege, un concept sous lequel tombe un objet, qu'il s'agisse ou non d'un couple, reçoit un seul argument. Il est donc possible de ramener les relations à des propriétés à travers l'usage de couples en associant un unique concept $\mathscr{P}_{\beta,\gamma}(R(\beta,\gamma),\xi)$ à toute relation $R(\xi,\zeta)$:

$$\Vdash \mathscr{P}_{\beta,\gamma}(R(\beta,\gamma),c) = \urcorner\smile_{\mathfrak{a}}\smile_{\mathfrak{b}}\urcorner \big(R(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \wedge c = <\mathfrak{a},\mathfrak{b}>\big)$$

$\mathscr{P}_{\beta,\gamma}(R(\beta,\gamma),\xi)$ peut ainsi venir saturer la fonction des parcours-de-valeurs pour les *propriétés*, et le représentant d'une relation sera défini par :

$$\Vdash \widehat{\varepsilon\alpha}(R(\varepsilon,\alpha)) = \dot{\varepsilon}\big(\mathscr{P}_{\beta,\gamma}(R(\beta,\gamma),\varepsilon)\big)$$

Il suffit de définir le nom '$<\xi,\zeta>$' afin que deux couples soient égaux si et seulement si chacun de leurs termes le sont pour parvenir, cette fois, à la *dérivation* de $\mathrm{V_R}$. Cette stratégie évite ainsi la prolifération des opérateurs d'extensions et de leurs axiomes.

Aucun indice ne nous permet en revanche de deviner quelle définition du couple fut choisie. Disons seulement qu'il est peu probable qu'elle ait ressemblé à celle, désormais classique, de

172. Comme Frege, nous nous sommes limités aux relations à deux arguments. Si nous intégrons des concepts à trois arguments, de nouveaux noms de fonctions primitif '$\varepsilon_1\widehat{\varepsilon_2}\varepsilon_3(R(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3))$', défini '$(a,b,c)\overset{\mathrm{R}_3}{\frown}d$' et un nouvel axiome $\mathrm{V}_{\mathrm{R}_3}$ sont nécessaires.

173. Notons néanmoins que Frege définit aussi une relation de paire ordonnée dans le premier volume des *Grundgesetze* (p. 179). Cependant, celle-ci exploitait les doubles parcours-de-valeurs, donc en particulier les extensions de relations. De plus, il s'agissait d'un simple procédé commode sur lequel rien d'essentiel ne reposait. Dans ce passage, Frege pensait donc bien plus probablement à son ancienne notion fondamentale de paire, qui permettait de *définir* les extensions de relations, plutôt qu'à la nouvelle, superficielle, qui s'appuyait dessus.

Kuratowski, très ingénieuse mais extrêmement contre-intuitive.

Les signes à notre disposition ne nous permettent pas d'être plus précis. Ils indiquent néanmoins que le remplacement des concepts de niveaux supérieurs a été progressif. D'abord limité aux propriétés, il s'est ensuite propagé aux relations en exploitant la notion de paire ordonnée, jusqu'à rendre superflue la quantification sur celles-ci. En particulier, Frege a certainement débuté ses travaux avec la relation d'équinumérocité '$\approx_1$' – qui fait usage d'une telle quantification –, avant de la remplacer par cette autre – qui s'en dispense – :

$$\begin{aligned} \Vdash a_1 \approx_2 a_2 \equiv \exists\mathfrak{d}\forall\mathfrak{a} \quad & \Big(\big(\mathfrak{a}\frown a_1 \to \exists\mathfrak{b}(<\mathfrak{a},\mathfrak{b}>\frown\mathfrak{d} \wedge \mathfrak{b}\frown a_2) \wedge \forall\mathfrak{c}((<\mathfrak{a},\mathfrak{c}>\frown\mathfrak{d} \wedge \mathfrak{c}\frown a_2) \to \mathfrak{b}=\mathfrak{c})\big) \\ \bigwedge \quad & \big(\mathfrak{a}\frown a_2 \to \exists\mathfrak{b}(<\mathfrak{b},\mathfrak{a}>\frown\mathfrak{d} \wedge \mathfrak{b}\frown a_1) \wedge \forall\mathfrak{c}((<\mathfrak{c},\mathfrak{a}>\frown\mathfrak{d} \wedge \mathfrak{c}\frown a_1) \to \mathfrak{b}=\mathfrak{c})\big)\Big) \end{aligned}$$

2.5.3.5 La démonstration du principe de Hume

Nous sommes désormais en position de restituer proprement la preuve initiale du principe de Hume. La découverte de Duarte selon laquelle la loi IV, absente du cadre de 1884, était indispensable à la démonstration de 1893 a ouvert un débat à ce sujet. Mais elle ne pose problème que si nous supposons que Frege adopta l'énoncé $\mathrm{V}_{G\equiv\equiv}$ ou $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\equiv}$ en guise d'axiome. Or nous avons vu qu'au contraire, ses positions des *Grundlagen* conduisaient inéluctablement à opter pour la version $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\leftrightarrow}$. Dans ce cadre, la démonstration ne présente absolument aucune difficulté.

Choisissons n'importe quelle définition traditionnelle de l'équinumericité entre concepts pour le nom '$\varphi(\beta) \approx_\beta \varphi'(\beta)$'. Concernant celle qui intervient entre des objets, nous avons vu que Frege avait probablement débuté ses travaux avec $\xi \approx_1 \zeta$ avant de la remplacer par $\xi \approx_2 \zeta$. Nous utiliserons la première, mais nous pourrions lui préférer la seconde sans que la démonstration n'en soit affectée. Nous voulons prouver le théorème ci-dessous.

Principe de Hume : Le nombre qui appartient au concept $P(\xi)$ est le nombre qui appartient au concept $Q(\xi)$ si et seulement si $P(\xi)$ et $Q(\xi)$ sont équinumériques.

En exploitant $\mathbf{Red}_{\leftrightarrow}$, nous pouvons facilement dériver :

$$\vdash \dot{\alpha}(P(\alpha)) \approx_1 \dot{\alpha}(Q(\alpha)) \leftrightarrow P(\beta) \approx_\beta Q(\beta)$$

Il n'est pas plus complexe de démontrer que la relation $\xi \approx_1 \zeta$ est transitive, pour aboutir à :

$$\vdash^{\mathfrak{a}} \big(\mathfrak{a} \approx_1 \dot{\alpha}(P(\alpha)) \leftrightarrow \mathfrak{a} \approx_1 \dot{\alpha}(Q(\alpha))\big) \leftrightarrow P(\beta) \approx_\beta Q(\beta)$$

Voilà l'étape problématique. Il faut pouvoir transformer une *équivalence* entre contenus conceptuels – ici $\mathfrak{a} \approx_1 \dot{\alpha}(P(\alpha))$ et $\mathfrak{a} \approx_1 \dot{\alpha}(Q(\alpha))$ – en une égalité de parcours-de-valeurs. En 1893, la fusion des concepts dans les fonctions exigerait que seule une égalité soit ainsi transformée. La loi IV serait alors nécessaire pour passer d'une équivalence à une égalité dans les cas où des concepts sont impliqués. Or une telle loi n'est pas admissible dans le cadre de 1884. Néanmoins, dans celui-ci, non seulement Frege n'avait pas besoin de restreindre son axiome V aux seules égalités de contenus – car les fonctions étaient tenues à l'écart –, mais il lui était même essentiel de ne pas effectuer une telle restriction – sinon deux concepts différents auraient toujours des extensions différentes, *même lorsqu'ils subsument les mêmes objets*. La loi $\mathrm{V}_{G\leftrightarrow\leftrightarrow}$ s'imposait donc

d'elle-même et, contrairement aux deux autres versions, autorisait la dérivation de :

$$\vdash \dot{\varepsilon}(\varepsilon \approx_1 \dot{\alpha}(P(\alpha))) = \dot{\varepsilon}(\varepsilon \approx_1 \dot{\alpha}(Q(\alpha))) \leftrightarrow P(\beta) \approx_\beta Q(\beta)$$

Enfin, la définition $\mathbf{Nb}_2$ nous conduit au résultat :

$$\vdash \mathbf{N}_\beta(P(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(Q(\beta)) \leftrightarrow P(\beta) \approx_\beta Q(\beta)$$

2.5.3.6 Synthèse

Il est probable que le "manuscrit presque complet" évoqué dans l'introduction des *Grundgesetze* ait en réalité été constitué de plusieurs ébauches, suivant les modifications que Frege apporta à son travail jusqu'au grand chamboulement de 1890. Par exemple, le remplacement des fonctions de niveaux supérieurs intervint certainement quelque part entre 1884 et 1890. Il existe cependant des constantes, et cette section fut destinée à leur dévoilement. En guise de conclusion, voici une synthèse de ce qui fut établi :

- Frege adopta dès l'origine une définition des nombres en termes d'extension de concept de *premier* niveau :
$$\Vdash \mathbf{N}_\beta(P(\beta)) \equiv \dot{\varepsilon}(\varepsilon \approx_i \dot{\alpha}(P(\alpha)))$$
- Sa vision intensionnaliste des concepts le conduisit à adopter un axiome V incorporant des *équivalences* :
$$\vdash \Big(\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))\Big) \leftrightarrow \Big(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(P(\mathfrak{a}) \leftrightarrow Q(\mathfrak{a}))\Big)$$
- Cet axiome permit la réduction des *propriétés* de niveaux supérieurs à travers la définition du nom et la démonstration du théorème ci-dessous :
$$\Vdash a \frown b \equiv \overset{\mathfrak{P}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{P}(a) \\ b = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{P}(\varepsilon)) \end{array} \qquad\qquad \vdash a \frown \dot{\varepsilon}(\mathrm{P}(\varepsilon)) \leftrightarrow \mathrm{P}(a)$$
- L'abaissement des *relations* de niveaux supérieurs prit probablement plus de temps, et fut accompli à l'aide d'une notion de paire ordonnée. En particulier, pour définir le concept de *nombre*, Frege passa vraisemblablement de la première à la seconde des relations suivantes d'équinumérocité entre objets :
$$\begin{aligned} \Vdash a_1 \approx_1 a_2 \equiv \exists\mathfrak{P}\forall\mathfrak{a} \quad & \Big(\big(\mathfrak{a} \frown a_1 \to \exists\mathfrak{b}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{b} \frown a_2) \wedge \forall\mathfrak{c}((\mathfrak{P}(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) \wedge \mathfrak{c} \frown a_2) \to \mathfrak{b} = \mathfrak{c})\big) \\ \bigwedge \quad & \big(\mathfrak{a} \frown a_2 \to \exists\mathfrak{b}(\mathfrak{P}(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{b} \frown a_1) \wedge \forall\mathfrak{c}((\mathfrak{P}(\mathfrak{c},\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{c} \frown a_1) \to \mathfrak{b} = \mathfrak{c})\big)\Big) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \Vdash a_1 \approx_2 a_2 \equiv \exists\mathfrak{d}\forall\mathfrak{a} \quad & \Big(\big(\mathfrak{a} \frown a_1 \to \exists\mathfrak{b}(<\mathfrak{a},\mathfrak{b}> \frown \mathfrak{d} \wedge \mathfrak{b} \frown a_2) \wedge \forall\mathfrak{c}((<\mathfrak{a},\mathfrak{c}> \frown \mathfrak{d} \wedge \mathfrak{c} \frown a_2) \to \mathfrak{b} = \mathfrak{c})\big) \\ \bigwedge \quad & \big(\mathfrak{a} \frown a_2 \to \exists\mathfrak{b}(<\mathfrak{b},\mathfrak{a}> \frown \mathfrak{d} \wedge \mathfrak{b} \frown a_1) \wedge \forall\mathfrak{c}((<\mathfrak{c},\mathfrak{a}> \frown \mathfrak{d} \wedge \mathfrak{c} \frown a_1) \to \mathfrak{b} = \mathfrak{c})\big)\Big) \end{aligned}$$
- Enfin, l'une ou l'autre de ces définitions permit, conjointement avec l'axiome V, de dériver le principe de Hume :
$$\vdash \mathbf{N}_\beta(P(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(Q(\beta)) \leftrightarrow P(\beta) \approx_\beta Q(\beta)$$

À ce stade, Frege était en mesure de démontrer les théorèmes présentés dans les *Grundlagen*. Plus encore, il était capable de prouver *tous* les énoncés d'arithmétique dont la vérité fut établie – à une contradiction près – dans les *Grundgesetze*. En effet, la restriction de l'opérateur d'abstraction aux concepts, c'est-à-dire l'exclusion des parcours-de-valeurs au seul profit des extensions, n'altérait en rien ces résultats. Si bien qu'il ne porta que (trop) tardivement son regard sur les fonctions, remarquant enfin la dissymétrie que sa notion de contenu générait avec les concepts. Nous avons déjà raconté cette histoire dans le premier chapitre, *i.e.* la manière dont cette dissymétrie, conjointement avec le problème de la valeur cognitive, causa le basculement de 1890. Nous voyons à présent que ces préoccupations philosophiques furent les *seules* responsables de ce basculement [174] car, *techniquement*, tout se déroulait sans encombre dans le cadre de 1884, selon les lignes que nous venons de dessiner. Voilà qui clos enfin notre reconstitution historique.

2.5.4 Parcours-de-valeurs et incohérence

Dans l'un des paragraphes les plus complexes des *Grundgesetze*, Frege dissèque au scalpel l'axiome V. Les commentateurs ne s'accordent pas sur le contenu du §10. Certains y voient une résurgence des définitions par abstractions, introduites puis abandonnées dans les *Grundlagen*, ainsi qu'une tentative de désarmer Jules César ; d'autres y lisent tout autre chose. Nous n'allons pas encore prendre part au débat. Deux choses sont incontestables : l'Idéographie privée des axiomes V et VI est consistante (si tant est que ZFC le soit), et l'Idéographie dans son ensemble est incohérente. L'énoncé du paradoxe de Russell s'y formule aisément, et permet la dérivation d'un énoncé et de sa négation. Nous avons reproduit la démonstration à partir de la page 731 de l'annexe A, au cas où le lecteur soit curieux d'en examiner la version fregéenne. En ajustant nos lunettes sémantiques, nous pouvons dire, comme beaucoup, que l'Idéographie n'admet aucun modèle de plus d'un élément, car l'axiome V impose qu'il y ait exactement autant d'objets dans le domaine D que de fonctions de D dans D. Nous ne savons pas, en revanche, quelle valeur Frege aurait attribué à un tel raisonnement. Pour le réaliser – pour pouvoir parler du domaine –, nous nous plaçons à l'*extérieur* du langage. Or, selon certains logiciens, Frege serait *universaliste*, interdisant à la fois toute restriction du domaine et toute échappée du langage. Ces auteurs y lisent aussi l'impossibilité principale de toute *définition* [175] des noms primitifs, qui devrait procéder à l'intérieur d'un métalangage. Or c'est précisément ce dont il est question ici : la manière dont Frege a *peut-être* tenté de définir ce nom de fonction, *i.e.* d'en fixer le sens et la référence.

Ici, nous constatons qu'il ne peut recevoir de référence adéquate à la loi V. Plus tard, nous questionnerons la *compatibilité* entre la grammaire fregéenne des noms et la donnée d'une sémantique dans un métalangage : est-il possible de fixer la référence de tous les termes complexes – y compris des énoncés non assertifs – à travers celle des termes simples ? Dans cette tâche, nous devrons suivre à la lettre le parallèle établi par Frege entre opérations entre fonctions et combinaisons entre signes, et ainsi exploiter la reconstruction de la section 2.3.3. Mais nous ignorons encore le *statut* qu'il conférait à ce parallèle. Estimait-il qu'en parlant de sens et de référence, il manipulait des notions trop fondamentales pour qu'il soit permis d'en faire un usage *théorique* ou envisageait-il totalement ce geste ? Dans le premier cas, quelle valeur aurait-il accordé à la spécification des références des noms dans un métalangage, ainsi que nous allons essayer de nous y appliquer ? Ces questions en posent trois autres : le rôle des lettres latines et grecques majuscules, la possibilité d'une définition des noms *primitifs*, et la légitimité d'une restriction du

174. bien qu'elles émergèrent, comme toujours avec Frege, à partir de questionnements mathématiques. Cela aussi fut expliqué dans le premier chapitre.

175. dans un sens non fregéen, qu'il faudra discuter.

domaine. Voilà autant de problèmes que nous soulevons sans nous y confronter. Certaines choses doivent être dites avant le grand plongeon, elles le seront durant le troisième chapitre.

Exprimons-nous différemment. Jusqu'à présent, nous avons suivi Frege le plus fidèlement possible, à travers la conception d'opérations entre références qui a été longuement présentée dans le premier chapitre. Lorsque nous expliquons le rôle de l'horizontal en faisant usage des termes 'Vrai', 'Faux' ou 'réfère à', nous employons des formulations dont Frege lui-même ne se privait pas. Mais nous nous sommes gardés de questionner la valeur de nos énoncés : possèdent-ils un sens et une référence, ou sont-ils de pures *élucidations* destinées à transmettre des messages *ineffables* ? Le statut des définitions des noms primitifs, et notamment de '$\grave{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', est englué jusqu'au cou dans ce problème, et ne sera discuté qu'au troisième chapitre. Ce qui en est indépendant, c'est l'usage que Frege fit des parcours-de-valeurs dans les *Grundgesetze*, *i.e.* la manière dont il s'en servit pour aboutir, pensait-il, à la démonstration des lois fondamentales de l'arithmétique. Voilà l'étrier sur lequel notre pied s'est posé.

2.5.5 Introduction des noms primitifs

La troisième partie des *Grundgesetze* débute par une mise au point concernant l'introduction des noms de fonctions. Frege explique qu'elle doit permettre, en principe, de déterminer la valeur de ces fonctions pour n'importe quel argument. Lorsque nous traiterons de sémantique, nous discuterons en détail ce critère. Pour l'heure, nous allons nous contenter de réunir au sein d'un tableau les différentes clauses par lesquelles Frege a présenté les noms primitifs de l'idéographie, sans chercher à en comprendre le statut exact. Nous allons notamment imiter abruptement son usage des lettres grecques majuscules, qui sera questionné lors du troisième chapitre.

Type	Nom	Référence	
(0)	'$\text{—}\ \xi$'	$\text{—}\ \Delta$ est	le Vrai si Δ est le Vrai ; le Faux sinon
(0)	'$\top\ \xi$'	$\top\ \Delta$ est	le Faux si Δ est le Vrai ; le Vrai sinon
$(0,0)$	'$\xi = \zeta$'	$\Delta = \Gamma$ est	le Vrai si Δ est identique à Γ ; le Faux sinon
$(0,0)$	'$\begin{smallmatrix}\top\ \zeta\\ \llcorner\ \xi\end{smallmatrix}$'	$\begin{smallmatrix}\top\ \Gamma\\ \llcorner\ \Delta\end{smallmatrix}$ est	le Faux si Δ est le Vrai et Γ n'est pas le Vrai ; le Vrai sinon
$((0))$	'$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \varphi(\mathfrak{a})$'	$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \Phi(\mathfrak{a})$ est	le Vrai si, pour tout objet Δ, $\Phi(\Delta)$ est le Vrai ; le Faux sinon
$(((0)))$	'$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$'	$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$ est	le Vrai si, pour toute fonction $\Phi(\xi)$, $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ est le Vrai ; le Faux sinon
$(((0,0)))$	'$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \mu_{\beta,\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$'	$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \Omega_{\beta,\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$ est	le Vrai si, pour toute fonction $\Phi(\xi,\zeta)$, $\Omega_{\beta,\gamma}(\Phi(\beta,\gamma))$ est le Vrai ; le Faux sinon
$((0))$	'$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'	$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$ est	le parcours-de-valeurs de $\Phi(\xi)$
(0)	'$\backslash\xi$'	$\backslash\Delta$ est	Γ s'il existe un Γ tel que $\Delta = \dot{\varepsilon}(\varepsilon = \Gamma)$; Δ sinon

Trois remarques s'imposent immédiatement. D'une part, nous donnons ces définitions en adoptant les conventions syntaxiques de Frege. Il suffit de s'en débarrasser pour récupérer la forme des noms élémentaires de la section 2.3.3.

D'autre part, Frege croyait que les références des noms complexes se déduisaient entièrement de celles des noms simples. Nous n'avons pas encore confirmé ce point. Mais supposons quelques instants qu'il soit correct, et remarquons que le Vrai et le Faux sont ici traités comme des objets quelconques. Leur statut particulier nous permet néanmoins de (ou nous force à) accomplir en un geste ce qui d'ordinaire en exige deux. Dans nos langages contemporains, après avoir spécifié la référence des termes et prédicats, il faut encore fournir les règles qui déterminent la valeur de vérité des *formules*. Par exemple, il ne suffit pas de connaître les références d'une constante 'c' et d'un prédicat 'P' d'arité 1 pour savoir quelle est la valeur de vérité de '$P(c)$'. Il nous faut, en amont ou en aval, une clause statuant que $P(c)$ est vrai si et seulement si c appartient à P [176].

176. pour le formuler en termes ensemblistes, et en supposant que la référence des termes et prédicats soit fixée une fois pour toutes, comme pour les noms de l'idéographie.

Chez Frege, termes et formules sont confondus. Les clauses qui fixent la référence des termes fixent donc simultanément la valeur de vérité des formules. Pour le dire différemment, attribuer une référence aux noms octroie du même coup une valeur de vérité aux énoncés (non assertifs), parce que ces derniers sont aussi des noms.

Enfin, l'avant-dernière "définition" pose évidemment problème. Dans son ouvrage, Frege l'accompagna de la clause suivante :

> J'utilise toujours les mots
>
> 'La fonction $\Phi(\xi)$ a le même *parcours-de-valeurs* que la fonction $\Psi(\xi)$'
>
> comme co-référentiels avec les mots
>
> 'Les fonctions $\Phi(\xi)$ et $\Psi(\xi)$ prennent toujours les mêmes valeurs pour les mêmes arguments'
>
> (Frege 1893, p. 7)

Il précisa néanmoins qu'elle ne permettait "en aucune manière de fixer totalement la référence d'un nom tel que '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'" (p. 16). Ce problème est lié aux §§10, 29-31, et sera bientôt le nôtre.

2.5.6 Définition des noms, marqueurs latins et énoncés de l'idéographie

2.5.6.1 Définition des noms de l'idéographie

Dans notre reconstruction, l'alphabet du langage $\mathscr{L}_e$ intégrait une étiquette de chaque type. Non seulement l'idéographie n'est dotée d'aucune étiquette de type 0, mais de plus, grâce aux parcours-de-valeurs, Frege ne sollicita que des noms de fonctions de types 0, (0), (0, 0), ((0)), ((0, 0)), (((0))) et (((0, 0))) [177]. Il faut donc adapter très légèrement notre méthode générale à ce contexte particulier. D'une part, nous allons artificiellement doter notre alphabet d'une étiquette X^0 de type 0 dont nous débarrasserons ensuite le langage [178]. D'autre part, il convient de limiter le travail réalisé en section 2.3.3.6 aux types 0, (0), (0, 0), ((0)), ((0, 0)) [179].

Pour commencer, donnons-nous l'alphabet défini en section 2.3.3.2 relativement aux étiquettes suivantes : 'X^0', '$\_\_^{(0)}$', '$\neg^{(0)}$', '$\backslash^{(0)}$', '$\rightarrow^{(0,0)}$', '$=^{(0,0)}$', '$\supset^{((0))}$', '$\forall^{((0))}$', '$\forall^{(((0)))}$', '$\forall^{(((0,0)))}$'.

Le langage $A(\mathscr{L}_{i,n})$ est donc la réunion de l'ensemble de ces étiquettes et de [180] :

$$\bigcup_{T\in\mathscr{T}}\left(\bigcup_{i\in\omega}\{\text{`}\varphi_i^T\text{'}\}\cup\bigcup_{i\in\omega}\{\text{`}\psi_i^T\text{'}\}\right)$$

Ensuite, répétons pour '$\mathscr{L}_{i,n}$', sans y apporter la moindre modification, la clause 1 et les définitions 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 13, relatives aux indices, aux expressions, à la portée, aux types des expressions, à l'opérateur S, à la saturation et aux noms élémentaires.

Les noms simples de '$\mathscr{L}_{i,n}$' sont donc :

177. Nous avons vu que les antépénultième et dernier types étaient aussi dispensables. Mais puisque Frege inclut '$\smile^{\mathfrak{f}}\ \mu_{\xi,\zeta}(\mathfrak{f}(\xi,\zeta))$' à ses noms de base, nous ferons de même.

178. Comme nous l'avons vu en section 2.3.3.7, nous pourrions nous contenter d'autoriser la désaturation de noms complexes dans des noms propres, le résultat serait le même. Mais puisque nous allons adopter ce cadre lors de notre discussion concernant la sémantique, autant nous y maintenir.

179. Rappelons qu'il n'y a pas besoin de noms complexes de troisième niveau, car il n'y a aucun nom de quatrième niveau à saturer.

180. Il n'est pas nécessaire de limiter les types des signes des deuxième et troisième groupes. Il suffira de limiter leur exploitation lors de la définition des noms.

Type 0 :	X^0		
Type (0) :	‘$—^{(0)}(\xi)$’	‘$\neg^{(0)}(\xi)$’	‘$\backslash^{(0)}(\xi)$’
Type (0, 0) :	‘$\rightarrow^{(0,0)}(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$’	‘$=^{(0,0)}(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$’	
Type ((0)) :	‘$\supset_{\psi^0}^{((0))}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$’	‘$\forall_{\psi^0}^{((0))}(\varphi^{(0)}(\psi^0))$’	
Type (((0))) :	‘$\forall_{\psi^{(0)}}^{(((0)))}(\varphi_{\varphi^0}^{((0))}(\psi^{(0)}(\varphi^0)))$’		
Type (((0, 0))) :	‘$\forall_{\psi^{(0)}}^{(((0,0)))}(\varphi_{\varphi_1^0,\varphi_2^0}^{((0))}(\psi^{(0)}(\varphi_1^0, \varphi_1^0)))$’		

Enfin, pour accéder à la totalité des noms, il suffit de limiter la définition 14 aux ensembles ‘$\mathbf{N}^T$’ où T ne peut être que 0, (0), (0, 0), ((0)) ou ((0, 0)), et d'exclure ensuite de la sphère des noms toute expression qui intègre au moins une occurrence du signe ‘X^0’. Ainsi, notre langage incorpore, *seulement pour ces différents types*, les noms formés à partir du processus de saturation [181].

2.5.6.2 Définition des marqueurs latins de l'idéographie

Afin de construire les marqueurs latins, adaptons de façon analogue le travail de la section 2.4.2. Nous n'avons besoin de signes du quatrième groupe que pour les types $0, (0), (0, 0), ((0))$ et $((0, 0))$:

$\mathscr{L}_{m,i} = \mathscr{L}_{n,i} \cup \left(\bigcup_{i<\omega} \{‘f_i^0’, ‘f_i^{(0)}’, ‘f_i^{(0,0)}’, ‘f_i^{((0))}’, ‘f_i^{((0,0))}’,\} \right)$

Les noms élémentaires et complexes de $\mathscr{L}_{m,i}$ sont exactement ceux de $\mathscr{L}_{n,i}$.

Répétons pour $\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$ la clause 1 relative aux indices, et les définitions 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, relatives respectivement aux expressions, à la portée, aux types des expressions, à l'opérateur S, et à la saturation.

Il faut ensuite définir les marqueurs latins élémentaires en remplaçant, dans la définition 13, les mots ‘étiquette’ et ‘nom’ respectivement par ‘signe du quatrième groupe’ et ‘marqueur latin’.

Enfin, nous obtenons la totalité des marqueurs latins à travers la définition 14, en spécifiant que $\mathbf{N}_0^T$ est cette fois l'ensemble des *noms et marqueurs latins* élémentaires de type T, en remplaçant toutes les autres occurrences du terme ‘nom’ par ‘marqueur latin’, en limitant la définition 14 aux ensembles ‘$\mathbf{N}^T$’ où T ne peut être que 0, (0), (0, 0), ((0)) ou ((0, 0)), et en excluant finalement de la sphère des marqueurs latins toute expression qui incorpore au moins une occurrence du signe ‘X^0’.

Nous disposons désormais de tous les noms et marqueurs latins de l'idéographie.

2.5.6.3 Définition des énoncés de l'idéographie

Posons $\mathscr{L}_{e,i} = \mathscr{L}_{m,i} \cup \{‘\vdash’\}$, dont les noms et marqueurs latins sont exactement ceux de $\mathscr{L}_{m,i}$, et répétons les définitions 18 et 19 pour $\mathscr{L}_{e,i}$.

2.5.6.4 Récupération des conventions de Frege

Voilà le langage de l'idéographie dans sa forme originale. Lorsque les noms, marqueurs latins et énoncés se présentent ainsi, les règles de la grammaire sont limpides, mais l'accès au contenu est obstrué par l'abondance de parenthèses, d'indices et d'exposants. Frege usa donc de certaines conventions que nous allons récupérer.

181. Voir la note de bas de page 179.

En premier lieu, il faut retrouver les versions fregéennes des signes pour les espaces vacants, que nous avions modifiés pour en étendre la généralité.

Étape 1. *Soit t un terme de $\mathscr{L}_{e,i}$:*

- *s'il n'existe qu'un entier i tel que le signe 'φ_i^0' figure dans t, alors toutes les occurrences de ce signe doivent être remplacées par une occurrence de 'ξ', même celles qui figurent en indice d'un autre signe ;*
- *s'il existe deux entiers $i < j$ tels que 'φ_i^0' et 'φ_j^0' figurent dans t, alors toutes les occurrences du premier signe, respectivement du second, doivent être remplacées par une occurrence de 'ξ', respectivement de 'ζ', même celles qui figurent en indice d'un autre signe ;*
- *s'il existe un entier i tel que '$\varphi_i^{(0)}$' figure dans t, alors toutes les occurrences de ce signe doivent être remplacées par une occurrence de 'φ' ;*
- *s'il existe un entier i tel que '$\varphi_i^{((0))}$' figure dans t, alors toutes les occurrences de ce signe doivent être remplacées par une occurrence de 'μ' ;*
- *s'il existe un entier i tel que '$\varphi_i^{((0,0))}$' figure dans t, alors toutes les occurrences de ce signe doivent être remplacées par une occurrence de 'μ'.*

Nous obtenons ainsi le langage $\mathscr{L}_{e,i'}$. Dans un deuxième temps, il faut récupérer les versions fregéennes des signes du quatrième groupe et, dans la foulée, de ceux du deuxième groupe qui leur servent d'indices.

Étape 2. *Soit t un terme de $\mathscr{L}_{e,i'}$:*

- *chaque signe du quatrième groupe de type 0 doit être remplacé par 'a', 'b', 'a_i' ou 'b_i' ($i > 0$) : toutes les occurrences d'un même signe par des occurrences d'un même signe, et deux occurrences de signes différents par deux occurrences de signes différents ;*
- *chaque signe du quatrième groupe de type (0) ou $(0,0)$ doit être remplacé par 'f', 'g', 'f_i' ou 'g_i' ($i > 0$) : toutes les occurrences d'un même signe par des occurrences d'un même signe, et deux occurrences de signes différents par deux occurrences de signes différents ;*
- *chaque signe du quatrième groupe de type $((0))$ ou $((0,0))$ doit être remplacé par 'M' ou 'M_i' ($i > 0$) : toutes les occurrences d'un même signe par des occurrences d'un même signe, et deux occurrences de signes différents par deux occurrences de signes différents ;*
- *s'il n'existe qu'un entier i tel que le signe 'ψ_i^0' figure dans t en indice d'un signe du quatrième groupe, alors toutes les occurrences de ce signe doivent être remplacées par une occurrence de 'β', même celles qui figurent en indice d'un autre signe ;*
- *s'il existe deux entiers $i < j$ tels que 'ψ_i^0' et 'ψ_j^0' figurent dans t en indices d'un ou de plusieurs signes du quatrième groupe, alors toutes les occurrences du premier signe, respectivement du second, doivent être remplacées par une occurrence de 'β', respectivement de 'γ', même celles qui figurent en indice d'un autre signe.*

Nous obtenons ainsi le langage $\mathscr{L}_{e,i''}$. Il faut désormais introduire les conventions relatives aux noms primitifs et, dans la foulée, aux signes du deuxième groupe qui leur servent d'indices.

Étape 3. *Soit t un terme de $\mathscr{L}_{e,i''}$:*

– *s'il existe une expression t' de $\mathscr{L}_{e,i''}$ telle que $\ulcorner — ^{(0)}(t')\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner — t'\urcorner$;*

– *s'il existe une expression t' de $\mathscr{L}_{e,i''}$ telle que $\ulcorner \top^{(0)}(t')\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner \top t'\urcorner$;*

– *s'il existe une expression t' de $\mathscr{L}_{e,i''}$ telle que $\ulcorner \backslash^{(0)}(t')\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner \backslash t'\urcorner$;*

– *s'il existe deux expressions t_1 et t_2 de $\mathscr{L}_{e,i''}$ telles que $\ulcorner =^{(0,0)}(t_1, t_2)\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner (t_1 = t_2)\urcorner$;*

– *s'il existe deux expressions t_1 et t_2 de $\mathscr{L}_{e,i''}$ telles que $\ulcorner \rightarrow^{(0,0)}(t_1, t_2)\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner \begin{array}{l} — t_2 \\ \llcorner — t_1 \end{array}\urcorner$;*

– *s'il existe un entier i et une expression t' de $\mathscr{L}_{e,i''}$ tels que $\ulcorner \supset^{((0))}_{\psi_i^0}(t')\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner \dot{\varepsilon}(t'[\varepsilon/\psi_i^0])\urcorner$. Si une autre expression $\ulcorner \supset^{((0))}_{\psi_j^0}(t'')\urcorner$ figure dans t', indicer les 'ε' relatifs à chaque remplacement par des entiers naturels différents. La lettre 'α' peut être utilisée à la place de 'ε' ;*

– *s'il existe un entier i et une expression t' de $\mathscr{L}_{e,i''}$ tels que $\ulcorner \forall^{((0))}_{\psi_i^0}(t')\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner \underset{\smile}{\mathfrak{a}}\, t'[\mathfrak{a}/\psi_i^0])\urcorner$. Si une autre expression $\ulcorner \forall^{((0))}_{\psi_j^0}(t'')\urcorner$ figure dans t', indicer les '$\mathfrak{a}$' relatifs à chaque remplacement par des entiers naturels différents. La lettre '$\mathfrak{b}$' peut être utilisée à la place de '$\mathfrak{a}$' ;*

– *s'il existe un entier i et une expression t' de $\mathscr{L}_{e,i''}$ tels que $\ulcorner \forall^{(((0)))}_{\psi_i^{(0)}}(t')\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner \underset{\smile}{\mathfrak{f}}\, t'[\mathfrak{f}/\psi_i^{(0)}]\urcorner$. Si une autre expression $\ulcorner \forall^{(((0)))}_{\psi_j^{(0)}}(t'')\urcorner$ figure dans t', indicer les '$\mathfrak{f}$' relatifs à chaque remplacement par des entiers naturels différents. La lettre '$\mathfrak{g}$' peut être utilisée à la place de '$\mathfrak{f}$' ;*

– *s'il existe un entier i et une expression t' de $\mathscr{L}_{e,i''}$ tels que $\ulcorner \forall^{(((0,0)))}_{\psi_i^{(0)}}(t')\urcorner$ figure dans t, alors toutes les occurrences de cette dernière expression doivent être remplacées par $\ulcorner \underset{\smile}{\mathfrak{f}}\, t'[\mathfrak{f}/\psi_i^{(0)}]\urcorner$. Si une autre expression $\ulcorner \forall^{(((0,0)))}_{\psi_j^{(0)}}(t'')\urcorner$ figure dans t', indicer les '$\mathfrak{f}$' relatifs à chaque remplacement par des entiers naturels différents. La lettre '$\mathfrak{g}$' peut être utilisée à la place de '$\mathfrak{f}$'.*

Il ne reste plus qu'à réinstaurer les conventions introduites pour FGGLP permettant d'écrire indifféremment l'une ou l'autre des expressions suivantes :

$$\ulcorner \begin{array}{l} \top t_3 \\ \llcorner t_2 \\ \top t_1 \end{array}\urcorner \;;\; \ulcorner \begin{array}{l} \top t_3 \\ — t_2 \\ \llcorner \top t_1 \end{array}\urcorner$$

Et nous tenons entre nos mains le langage '$\mathscr{L}_{id}$' de l'idéographie doté des conventions de Frege.

Nous aurions facilement pu construire *directement* ce langage. Mais notre objectif était plus vaste. Nous souhaitions bâtir la langue idéale *générale* de Frege – sans limite de types – à travers l'établissement de $\mathscr{L}_e$, puis la spécifier en $\mathscr{L}_{e,i}$ afin de nettoyer l'idéographie de toutes les conventions qui ont, si souvent, dissimulé son fonctionnement.

2.6 La syntaxe de l'Idéographie

2.6.1 Les règles de l'Idéographie

La règle de fusion des horizontaux se définit sans souci lorsque l'idéographie est développée sous sa forme fondamentale. Cependant, prise dans les conventions des *Grundgesetze*, elle présente l'avantage d'élégantes manipulations syntaxiques [182]. Le terme $\ulcorner_{\top} — t_1 \urcorner$ peut par exemple être ramené à $\ulcorner_{\top} t_1 \urcorner$. En considérant, comme Frege, que les signes pour la négation, la quantification et le conditionnel sont composites, la règle de fusions des horizontaux se présente donc ainsi :

> Soit t un énoncé de l'idéographie tel que '— — ' figure dans t, alors on peut remplacer toutes ou certaines occurrences de cette dernière expression par '— '.

Pour définir la syntaxe de l'Idéographie, nous allons reprendre les conventions décrites p. 237 quant à la métavariable 'θ'. Nous allons conserver l'usage des crochets adopté tout au long de ce chapitre. Soient t_1, t_2 et t_3 des expressions de l'idéographie telles que t_3 figure dans t_1, alors :

- $\ulcorner t_1[t_2/t_3] \urcorner$ est le résultat du remplacement de toutes les occurrences de t_3 par t_2 dans t_1 ; [183]
- $\ulcorner t_1[t_2/.t_3] \urcorner$ est un des résultats obtenus en remplaçant toutes ou certaines des occurrences de t_3 par t_2 dans t_1.

Les règles *i-vii* sont conservées telles quelles (cette fois pour les termes de l'idéographie, et non plus de $\mathscr{L}_{\text{FGGLP}}$). Il ne reste qu'à adapter la règle *viii* et ajouter celles qui manquent.

182. Ceci a été expliqué en section 2.5.1.1.
183. Si deux occurrences de t_3 se chevauchent, alors on peut choisir librement laquelle remplacer.

2.6.1.1 Détail des règles

R $_{[\mathrm{Id}]}$. *viii*

(**N**) Dans un énoncé, toutes ou certaines occurrences d'une lettre latine peuvent être "remplacées" par un marqueur latin de fonction du même type, ainsi que nous l'avons défini en section 2.4.3.

(**F**) Soient t_1 un terme, t_2 un nom de fonction de type T et l une lettre latine de type T qui figure dans t_1 :

$$\frac{\vdash t_1}{\vdash \mathrm{Remp}(t_1, l, t_2)}$$

R $_{[\mathrm{Id}]}$. *ix*

(**N**) Dans le sur-constituant d'un énoncé, une lettre latine peut être remplacée par une lettre gothique qui n'y figure pas, et cette même lettre gothique placée au-dessus du creux de quantification devant le surconstituant, pourvu que la lettre latine ne figure dans aucun sous-constituant de l'énoncé.

(**F**) Soient θ suivant nos conventions, t un terme, l une lettre latine de type T et $\mathfrak{l}$ une lettre gothique de type t tels que l figure dans t et non dans θ, et $\mathfrak{l}$ ne figure pas dans t :

$$\frac{\vdash \begin{array}{l} t \\ \theta \end{array}}{\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{l}}{\smile}\, t[\mathfrak{l}/l] \\ \theta \end{array}}$$

R $_{[\mathrm{Id}]}$. *x*

(**N**) Dans un énoncé, toutes les occurrences d'une lettre gothique peuvent être remplacées par des occurrences d'une autre lettre gothique du même type, pourvu que la seconde ne figure pas dans la portée du creux au-dessus duquel figure la première.

(**F**) Soit t un terme de l'idéographie, $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ deux lettres gothiques du même type tels que $\mathfrak{l}$ figure dans t et qu'aucune occurrence de $\mathfrak{l}'$ ne figure dans t dans la portée de $\overset{\mathfrak{l}}{\smile}$:

$$\frac{\vdash t}{\vdash t[\mathfrak{l}'/\mathfrak{l}]}$$

R [Id]. *xi*

(**N**) Dans un énoncé, toutes les occurrences d'une lettre grecque minuscule peuvent être remplacées par des occurrences d'une autre lettre grecque minuscule, pourvu que la seconde ne figure pas dans la portée de l'esprit doux dans laquelle figure la première.

(**F**) Soit t un terme de l'idéographie, l et l' deux lettres grecques minuscules tels que l figure dans t et qu'aucune occurrence de l' ne figure dans t dans la portée de $\grave{l}$:

$$\frac{\vdash t}{\vdash t[l'/l]}$$

R [Id]. *xii*

(**N**) Dans un énoncé, deux occurrences successives d'un trait horizontal peuvent être fusionnées, *i.e.* remplacées par une seule.

(**F**) Soit t un énoncé tel que '— — ' figure dans t :

$$\frac{\vdash t}{\vdash t[\text{'— — '}/\text{'— '}]}$$

2.6.1.2 Remarques

Nous savons transformer le langage $\mathscr{L}_{i,e}$ – l'idéographie sans conventions – en $\mathscr{L}_{Id}$ – avec conventions. Pour écrire ces règles dans $\mathscr{L}_{i,e}$, il suffirait de présenter le procédé inverse. Notons que, rigoureusement, cela est aussi requis par l'usage de la règle *viii*. En effet, nous avons défini l'opération $\mathrm{Remp}(t_1, l, t_2)$ pour le premier langage, et nous l'appliquons ici au second. Rigoureusement, il faudrait retrouver les expressions t_1, l et t_2 dans $\mathscr{L}_{i,e}$, appliquer Remp, puis récupérer le résultat dans $\mathscr{L}_{Id}$. Nous n'allons cependant pas consacrer deux nouvelles pages à l'inversion de manipulations déjà décrites en détail, et que le lecteur cerne, à ce stade, sans la moindre difficulté [184].

Par ailleurs, les règles *viii-xi* ne tiennent aucun compte des indices. Telles quelles, elles autorisent notamment les remplacements de '$\mathfrak{f}$' par '$\mathfrak{g}$' dans les énoncés appropriés, mais jamais ceux de '$\mathfrak{f}_i$' par '$\mathfrak{f}_j$'. Frege n'a pas procédé à notre distinction entre *lettres* et *signes* de i-ème groupe, qui prend correctement en charge la gestion des indices. Il ne s'agit cependant que d'une subtilité syntaxique qui se règle facilement.

En outre, ces règles utilisent la notion de portée dont Frege donna une définition insatisfaisante (p. 13). Une fois de plus, il tenta de caractériser des constituants syntaxiques à travers des notions sémantiques inaptes à les déterminer. De plus, il parla de 'la portée de la lettre gothique', *i.e.* de la lettre du troisième groupe liée à l'étiquette. En suivant ce lexique, '$f(\beta)$' est dans la portée de 'β' – et non de 'M' – dans '$M_\beta(f(\beta))$'. Il est pourtant plus naturel de lier l'expression entre parenthèses à l'étiquette qui la précède, comme nous l'avons fait [185]. Notre notion de portée,

184. Il y aurait quelques subtilités supplémentaires à prendre en compte. Par exemple, l'usage de lettres identiques pour des signes du quatrième groupe de types (0) et (0, 0) exigerait d'identifier leurs types à travers leurs portées. Rien d'insurmontable !

185. Ce point contribua probablement à dissimuler, aux yeux des lecteurs, le lien entre les expressions '$\smile^{\mathfrak{a}} \varphi(\mathfrak{a})$'

héritée de la reconstruction générale de la morphologie, fut transportée sans dommage dans le symbolisme fregéen lorsque nous avons récupéré ce dernier. Elle convient donc à ces règles.

Enfin, à travers sa version de *viii* (p. 63), Frege ne permit pas le "remplacement" de 'M_β' dans *tous* les termes, mais seulement dans la loi pour la quantification de second ordre (IIb). En effet, aucune de ses dérivations ne sollicite une substitution d'un marqueur latin de type ((0)) hors du cadre de cet axiome, *i.e.* de la quantification de second ordre. Une fois encore, Frege s'est muni du strict nécessaire.

Malgré ces quelques commentaires, nous pouvons vérifier ce que nous affirmons depuis le commencement de cette aventure : les règles de l'Idéographie ne sont pas le problème. Elles furent introduites de manière compréhensible par Frege, et s'offrent sans souci à nos yeux contemporains. Toute la difficulté provenait de la morphologie.

2.6.2 Les axiomes de l'Idéographie

2.6.2.1 Détail des axiomes

Ajoutons à l'axiome I de FGGLP les six axiomes suivants :

IIa : $\vdash f(a)$
$\quad\quad \smile_{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a})$

IIb : $\vdash M_\beta(f(\beta))$
$\quad\quad \smile_{\mathfrak{f}} M_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$

III : $\vdash g\left(\smile_{\mathfrak{f}} \begin{array}{l} \mathfrak{f}(a) \\ \mathfrak{f}(b) \end{array}\right)$
$\quad\quad g(a = b)$

IV : $\vdash (— a = — b)$
$\quad\quad \vdash (— a = \top b)$

V : $\vdash (\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha} f(\alpha)) = \smile_{\mathfrak{a}} (f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$

VIa : $\vdash a = \backslash\dot{\varepsilon}(a = \varepsilon)$

2.6.2.2 Quelques axiomes manquants

Notons que l'axiome IIb n'est pas répété dans le cadre d'une lettre 'M' de type $((0,0))$. Cela confirme ce que nous avons dit plus tôt : Frege n'a pas besoin de quantifier sur des fonctions à deux arguments.

Nous voyons donc qu'il a agi vis-à-vis de ses axiomes tel qu'il se comporta envers sa morphologie : il s'est limité aux lois nécessaires à la poursuite de son objectif. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous pouvons d'ores et déjà citer certains énoncés qui auraient pu, avec certitude, être admis au sein de son système *logique*. En premier lieu, nous pouvons intégrer l'équivalent

et '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$', et ainsi la similarité entre '$\mathfrak{a}$' et 'β'.

des IIa et IIb pour les autres types. Voici par exemple IIc, un niveau au-dessus [186] :

$$\text{IIc} : \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\!\!-\!\!\!-\ \Sigma_\psi(M_\beta(f(\beta))) \\ \quad\ \llcorner\!\!\smile^{\!\mathfrak{M}}\!-\ \Sigma_\psi(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))) \end{array}$$

Par ailleurs, Frege caractérisa la fonction $\backslash\xi$ de manière à prendre en compte les objets différents de tout parcours-de-valeurs de fonction qui n'envoie qu'un objet sur le faux. Néanmoins, il ne leur appliqua jamais cette fonction, et n'eut pas besoin de l'axiome qui en régit l'usage :

$$\text{VIIb} : \begin{array}{l} \top\!\!\!-\!\!\!-\ (\backslash a = a) \\ \llcorner\!\!\smile^{\!\mathfrak{a}}\!\!\top\ (a = \dot{\varepsilon}(\varepsilon = \mathfrak{a})) \end{array}$$

2.6.3 Métathéorème de déduction

Notons que la règle *ix* ne peut être transformée en axiomes. Ce problème est commun à tous les systèmes qui fonctionnent avec substitutions. Supposons que Frege ait doté sa syntaxe des deux axiomes suivants :

$$\text{VIIa} : \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\smile^{\!\mathfrak{a}}\!-\ f(\mathfrak{a}) \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!\!-\ f(a) \end{array}$$

$$\text{VIIb} : \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\smile^{\!\mathfrak{f}}\!-\ M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!\!-\ M_\beta(f(\beta)) \end{array}$$

A priori, ils réalisent dans le cadre de la généralisation ce que IIa et IIb exécutent dans celui de la particularisation. Malheureusement, l'application de notre règle *viii* pour les substitutions aboutit à la dérivation d'un énoncé qui doit, sans aucun doute, être exclu des théorèmes du système.

Dans VIIa, remplaçons 'f' par 'ξ' et 'a' et '$\smile^{\mathfrak{a}}\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$'. Nous obtenons l'énoncé suivant :

$$`\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\smile^{\!\mathfrak{a}}\!-\ \mathfrak{a} \\ \quad\llcorner\!\!\smile^{\!\mathfrak{a}}\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \end{array}\ '$$

Il devient alors possible de dériver '$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!-\ \mathfrak{a}$', qui permet à son tour de déduire n'importe quel énoncé du langage.

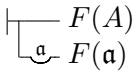
Le problème a trait aux substitutions. 'a' porte la généralité dans le sous-constituant, mais il peut être remplacé par n'importe quel nom particulier. L'énoncé issu de cette manœuvre exprime que si cet objet *particulier* tombe sous f, alors tous les autres font de même. En choisissant adroitement a et f, nous obtenons donc un énoncé faux.

Nous pouvons cependant renoncer à la règle *viii* en procédant à travers des *schémas* d'axiomes. Ce faisant, les schémas correspondant à VIIa et VIIb seront adoptés en lieu et place de *ix*, tandis que nous récupérerons un métathéorème de déduction.

186. Pour formuler *tous* ces axiomes, il est nécessaire de récupérer notre vocabulaire général, l'idéographie n'intégrant pas de signes du quatrième groupe pour chaque type. Soit T un type différent de 0, t_1 le marqueur latin qui résulte de la saturation du marqueur latin atomique associé à $f^{(T)}$ par une quasi-terminaison de type T, et t_1 sa saturation par le marqueur latin atomique associé à f^T :

$$\text{II}_\text{T} : \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\!-\!\!\!-\ t_2 \\ \quad\llcorner\!\!\smile^{\!\psi^T}\!-\ t_1 \end{array}$$

Nous avons déjà présenté la solution dans le cadre de FGGLP. Il est possible de l'adapter à l'Idéographie dans son ensemble. Cependant, il ne suffit plus de se donner des métavariables pour les termes, il faut s'en munir pour les marqueurs latins de chaque type. En choisissant A pour 0 et F pour (0), nous obtenons par exemple le schéma correspondant à II.a. :



Dans le même temps, il est *indispensable* de définir syntaxiquement le "remplacement" d'une métavariable par un marqueur latin du même type. Lorsque les lettres schématiques parcourent les termes du langage, il suffit de leur substituer les termes désirés dans les axiomes. Au contraire, 'ξ' ne peut être injecté tel quel à la place de 'F'. Il est donc nécessaire de reproduire pour les métavariables et les schémas d'axiomes ce que nous avons réalisé pour les lettres latines et la loi *viii*. Autrement dit, l'Idéographie s'adapte tout à fait à une présentation schématique des axiomes, et intègre bien dans ce cadre un théorème de déduction. Néanmoins, que nous choisissions l'un ou l'autre chemin, le processus de saturation et les lettres pour les places vacantes sont impliqués exactement de la même manière. Ceci confirme ce que nous opposions à Landini [187] en section 2.3.4.3.

2.6.4 Métathéorème d'adéquation

Le système est inconsistant, il ne vérifie donc pas de théorème d'adéquation. Observons néanmoins comment procéderait la preuve d'un tel théorème pour un langage disposant de la même morphologie, et interprété sur un domaine qui contient les valeurs de vérité (cela s'applique par exemple à l'Idéographie privée des axiomes V et VI et des fonctions liées aux parcours-de-valeurs). Une fois fixées les références des noms simples et, simultanément, celles des noms complexes, il s'agirait de prouver que, quelle que soit la valeur attribuée aux lettres latines dans nos axiomes, ceux-ci [188] réfèrent au Vrai. Dans un deuxième temps, il faudrait établir que les règles préservent la vérité dans ce sens précis, *i.e.* que si les prémisses réfèrent au Vrai indépendamment de la valeur octroyée aux lettres latines, alors il en va de même de la conclusion.

Certains commentateurs jugent que Frege a tenté de réaliser – ou plutôt d'achever – une preuve de ce type dans les §§29-31. Mais nous voyons qu'une telle démonstration implique des notions et des procédés sémantiques que, au contraire, d'autres chercheurs jugent fondamentalement incompatibles avec les conceptions fregéennes. Ce problème nous occupera pleinement durant le chapitre qui vient.

2.7 Synthèse

C'est dans le charme discret d'une chapelle silencieuse que Frege baptisa la logique contemporaine. De longues et douloureuses années de prêche solitaire s'écoulèrent avant que le clergé ne reconnaisse pleinement ce geste fondateur. Husserl réalisa le premier, à ses dépens, la profondeur et la pertinence des idées fregéennes. Peano revint rapidement d'une première évaluation précipitée, à l'occasion d'une joute mémorable. Mais les grands noms de l'époque restaient globalement sourds à son homélie. Cantor détourna négligemment les yeux, et Hilbert répondit du bout des lèvres à des avertissements répétés. Il fallut attendre la lecture consciencieuse de Russell pour que la qualité du travail accompli éclate au grand jour : pour la première fois, la logique prenait

187. Plus précisément à la section 2.1 de (Landini 2012).
188. ou plutôt les termes qui y sont attachés.

proprement en charge la quantification ; pour la première fois, les distinctions superficielles de la langue cédaient la place aux catégories fondamentales du sens ; et pour la première fois, le régime de la rigueur syntaxique était instauré. Ce dernier point, en particulier, constitue aujourd'hui un véritable truisme. D'aucuns reconnaissent en l'Idéographie le premier système formel de l'histoire de la discipline, déployé au sein d'une langue artificielle moulée dans des règles rigides. Tous savent que son symbolisme complexe n'a jamais été utilisé depuis. En conséquence, la majorité des chercheurs choisissent de discuter ce qui pose problème, notamment l'échec du projet logiciste, sans tenir compte de ce qui n'en soulève aucun : la forme spécifique de sa langue. Car, chuchotent-ils en creux, Frege était l'adversaire de l'implicite et du non-dit. Il a su énoncer les règles de construction de ses termes ; et le chemin qui sépare la grammaire idéographique des morphologies modernes, par exemple des langages des prédicats du second ordre, est celui d'une stricte traduction, de la simple adoption de nouvelles conventions.

Ce poncif, aussi ancré soit-il dans la littérature, est totalement incorrect. Frege n'a *jamais* décrit la grammaire de sa langue idéale. Les rôles des deux dimensions, du trait horizontal, et des lettres pour les espaces vacants ne sont clairement élucidés nulle part dans les *Grundgesetze*. Il s'exprima comme s'il avait effectué ce travail, mais il indiqua à cet égard des directions contraires. Nous ne pouvons décemment pas déplorer cette lacune, simple stigmate de la mutation d'une discipline, mais nous ne devons pas l'*ignorer* pour autant. C'est pourquoi nous n'avons pas présumé du comportement de l'idéographie. Nous ne nous sommes pas confortablement installés dans un langage contemporain, piégés par le dogme de l'équivalence entre leurs deux fonctionnements. Au contraire, il nous a fallu faucher la brousse de ses explications et, surtout, de ses objectifs, pour accéder à une compréhension rigoureuse de la structure fondamentale de sa langue.

Ce faisant, nous avons tiré deux conclusions majeures. D'une part, l'écriture en deux dimensions et le trait horizontal sont des éléments *contingents*, de pures conventions d'écriture, de l'idéographie. Ils jouent néanmoins deux rôles importants liés à l'identification entre termes et formules, autrement dit à l'incorporation des valeurs de vérité aux objets standards. Le premier est pédagogique : ils manifestent la manière dont les fonctions "propositionnelles" traitent les objets différents des valeurs de vérité, et rendent ainsi patente la méthode adoptée par Frege. Le second est pragmatique : ils permettent de synthétiser un grand nombre d'axiomes à travers seulement une loi et une règle. Frege devait se décider pour l'une ou l'autre de ces alternatives afin de ramener certaines *équivalences* à des *égalités*, dans le cadre de la loi V. Il choisit habilement le chemin le plus court. Notre développement a incidemment éclairé le lien entre les parcours-de-valeurs et la preuve du principe de Hume, antérieurement et postérieurement à 1891.

D'autre part, les lettres pour les espaces vacants jouent un rôle *essentiel* dans la construction des noms et marqueurs latins de l'idéographie. La grammaire fondamentale de cette dernière fut décrite en sections 2.3.3 et 2.4.2 dans toute la rigueur exigée par une présentation contemporaine. Nous avons ainsi observé combien elle s'éloignait des langages des prédicats modernes. Nous avons surtout établi que le fonctionnement de la langue générale que Frege avait en vue, sans l'avoir proprement élaborée, était parfaitement convenable ; et que les termes *a priori* trompeurs qu'il s'autorisait – le "remplacement" ou la "saturation" d'un nom par un autre, la "désaturation" d'un nom dans un autre – correspondaient finalement à des manipulations syntaxiques bien déterminées. En section 2.5.6, nous avons dégagé la structure fondamentale des formules de l'idéographie en écartant les conventions (habiles et commodes) de Frege, notamment par l'uniformisation des lettres du second groupe et par l'abolition des deux dimensions. Il ne restait plus qu'à récupérer ces conventions, à travers des manipulations aussi simples que mécaniques, pour confirmer, une fois pour toutes, qu'elles n'étaient pas indispensables à l'élaboration du langage.

Nous sommes donc parvenus à séparer les éléments essentiels à la construction du langage et les procédés adroits mais accidentels employés par Frege. Ce travail était indispensable pour

cerner la grammaire fondamentale de la langue idéale. Il nous a mis en position d'affirmer que l'idéographie possède un fonctionnement *syntaxique* proprement déterminé, que Frege n'a pas clairement présenté, et de questionner son statut *sémantique*, sur lequel il est resté tout aussi imprécis. Car l'étude de la sémantique à laquelle il entendait *peut-être* soumettre son langage, *i.e.* la manière dont il escomptait déterminer le sens et la référence des noms atomiques puis ceux des noms complexes sur leur base, ne pouvait faire l'économie d'une juste appréhension des règles morphologiques de ce langage. Il fallait dégager la structure profonde des éléments linguistiques censés refléter la composition du sens et les opérations entre références pour questionner la valeur, le rôle et le statut de ce parallèle entre langue, sens et référence, autrement dit pour aborder de front la question de la *sémantique*. Ce problème, considérable, est celui de notre troisième chapitre.

Chapitre 3

De la possibilité et du statut d'une sémantique fregéenne

3.1 Possibilité et statut : deux questions distinctes

3.1.1 Genèse d'une polémique

En 1967, le logicien Jean van Heijenoort publia un article – "Logic as Calculus and logic as Language" – dont l'objectif, largement historique, était de retracer la genèse de la logique moderne à travers l'opposition de deux courants. Au premier, incarné par les figures de Frege, Russell et Wittgenstein, van Heijenoort octroie le nom d'universalisme ; le second, porté à des époques différentes par Boole, Ernst Schröder et Löwenheim, n'est pas nommé [1]. L'auteur situe la naissance de la logique contemporaine dans le dépassement, par la synthèse, de ces deux différentes conceptions :

> Durant les années vingt, le travail de Skolem, Herbrand et Gödel réalisa une fusion et aussi un *dépassement* de ces deux courants. [...] Je dirais seulement, en conclusion, que la *Begriffsschrift* (1879), l'article de Löwenheim (1915) et le chapitre 5 de la thèse de Herbrandt (1929) sont les trois pierres angulaires de la logique moderne. (Heijenoort 1967, pp. 328-329)

L'écho de ce court papier s'entend encore aujourd'hui. Il ne fallut pas plus de cinq pages à van Heijenoort pour instaurer le paradigme à travers lequel de nombreux spécialistes avanceraient une lecture révisionniste de Frege qui, paradoxalement, contredit une interprétation postérieure à la publication de cet article. Il s'agit bien sûr de celle que proposa Dummett dans son *Frege : philosophy of Language* (1973[1], 1981[2]), qui fit autorité pendant plusieurs années, et souleva des questions fondamentales encore largement discutées. À cette lecture profonde et complète de l'œuvre de Frege, le philosophe n'ajouta pas moins de deux ouvrages : *The Interpretation of Frege's Philosophy* (1981) et *Frege : Philosophy of Mathematics* (1991b), et un recueil de ses propres articles traitant principalement de ces sujets : *Frege and other Philosophers* (1991a). Si la croissance de l'intérêt suscité par l'œuvre de Frege fut progressive, elle subit indéniablement une importante accélération à l'occasion de ces publications.

Dans un premier temps, la lecture de Dummett s'imposa comme l'orthodoxie. Mais elle creusa rapidement un fossé entre deux lignes interprétatives. En effet, tandis qu'un grand nombre de commentateurs s'inspirèrent et enrichirent son analyse, un courant révisionniste prit naissance

1. Plus tard, van Heijenoort (1979) distinguera entre l'absolutisme et le relativisme, traçant une nouvelle ligne légèrement différente de la première. Hintikka (1988) parle de "tradition universaliste" et de "tradition des modèles".

dans la contestation de cette dernière, amorçant un retour aux vues introduites par van Heijenoort. Le débat débuta dans les années 80 et poursuit encore sa route à cette heure. Les séminaires proposés à Harvard par Burton Dreben à partir des années 70 participèrent à l'émergence de la lecture alternative qui renoua avec les fondamentaux posés par van Heijenoort.

D'un côté se tient donc Dummett, avec lui des compagnons aussi valeureux que Aldo Antonelli (Antonelli et May 2000), Patricia Blanchette (2012, Chapitre 7), Gregory Landini (2012), Brice Halimi (2017), Richard G. Heck (2010, 2012, 2017), Robert May (Heck et May 2017), Jason Stanley (1996), Peter M Sullivan (2005) et Jamie Tappenden (1997, 2000) ; d'un autre un groupe de redoutables adversaires tels bien sûr, van Heijenoort, mais aussi Gordon Park Baker, Peter Hacker (Backer et Hacker 1984), James Conant (Conant 1991), Cora Diamond (1991, 2010), Burton Dreben (Dreben et Heijenoort 1986), Warren Goldfarb (1979, 1982, 1997, 2010), Jaakko Hintikka (1979, 1986, Chap. I, 1988, 1989), Gary Kemp (1995), Michael Kremer (2000, 2010), Thomas Ricketts (1985, 1986b, 1986a, 1996, 1997, 1998), Hans Sluga (1980, 1987, 2002) et Joan Weiner (1990, 2002, 2005b, 2005a, 2008, 2010).

La discorde gagna rapidement en intensité. D'innombrables articles furent publiés dans les premières années. Les membres d'un même camp ne présentaient pas toujours – voire rarement – des positions identiques, mais ils se retrouvaient dans une certaine lecture de la conception de la logique de Frege. Les deux interprétations adverses semblaient irréconciliables. Néanmoins, les différentes réponses que les protagonistes s'adressèrent permirent de localiser précisément l'origine du désaccord. L'analyse s'affina, les arguments des uns furent entendus, parfois intégrés, par les autres, les tranchées s'élargirent, resserrant l'écart entre les deux camps. Si, aujourd'hui encore, des papiers, voisins dans une même collection, s'affrontent et se répondent point par point (Heck 2010, Goldfarb 2010), d'autres chercheurs soutiennent que le différend serait, finalement, davantage terminologique que logique. Textor écrit :

> Je voudrais conclure ce papier par un regard sur une ancienne discorde entre des exégètes de Frege. [...] Les deux opposants ont raison. (Textor 2010, p. 649)

La lumière projetée par chaque camp sur une part bien précise de l'œuvre de Frege dévoila, par contraste, des points d'ombre dans la compréhension d'autres versants de ses recherches. Chacun releva ses manches pour tenter d'apporter un nouvel éclairage ; un grand pas fut accompli dans la compréhension de sa conception de la logique et, plus systématiquement, des questionnements liés à l'universalisme logique. C'est dans la perspective de cette discussion que nous nous situons. Armés à la fois de notre étude de l'idéographie et du travail abattu par ces chercheurs, nous escomptons présenter clairement les problèmes soulevés, encore aujourd'hui, par la conception fregéenne de la logique, et proposer certaines solutions. Il nous faut donc débuter par l'histoire, plus récente, de cette discorde.

3.1.2 Un débat historique

Les philosophes abordent le débat en traitant du *problème de la sémantique chez Frege*, et tracent une frontière entre les partisans de la lecture sémantique et ceux de l'interprétation antisémantique. En effet, les deux partis proposent des analyses différentes de la place de la sémantique dans les thèses fregéennes.

La discussion prend sa source dans une étude concernant l'avènement de la logique contemporaine, plus précisément de la théorie des modèles telle qu'elle fut construite par Tarski et ses étudiants. Cette discipline fait un usage fondamental du concept de vérité dans le cadre d'une métathéorie qui, selon van Heijenoort (1967), entre en conflit profond avec la tradition universaliste de Frege et Russell. D'après lui, toute métaperspective exige la relativisation du langage amorcée par Boole et Schröder, mais fermement critiquée par Frege. Il n'existerait donc pas, chez

ce dernier, de sémantique au sens moderne. Van Heijenoort reconnaît néanmoins au courant logiciste le mérite de l'institution d'une importante rigueur syntaxique dans les langues artificielles et les systèmes qui les emploient. Mais l'émergence de la logique moderne aurait du attendre la *rencontre* des deux traditions incarnées respectivement par Boole et Frege, afin que la rigueur du second s'appliquât dans le cadre relativiste du premier.

Dummett, au contraire, décore Frege de la double médaille. Selon lui, ce dernier fut loin de dénoncer les outils avec lesquels la sémantique fut bâtie. Au contraire, il en fit un usage essentiel, sous une forme ancestrale et informelle qui, bien sûr, attendit les travaux de Tarski (1933) pour présenter son visage définitif.

L'écart entre ces lectures se mesure à travers les deux différentes histoires de la logique qu'elles proposent. Pour van Heijenoort, c'est l'ignorance, voire la condamnation, de ces outils par Frege et Russell qui freina considérablement le processus de construction de la théorie des modèles. Pour Dummett, au contraire, certaines caractéristiques du système fregéen portaient en germe les résultats fondamentaux à venir, et les ont donc, sinon engendrés, au moins indiqués.

Ainsi, l'objet de la dispute réside dans la compatibilité des thèses fregéennes et de la sémantique tarskienne. Contrairement à Dummett, les membres du camp anti-sémantique soutiennent que :

> Frege et Russell ne peuvent avoir aucune notion d'"interprétation" ou de "sémantique". (Goldfarb 1982, p. 694)

> Toute sémantique formelle, comprise à la lumière des travaux de Tarski, est totalement étrangère à Frege. (Ricketts 1986b, p. 67)

> [Frege] n'a donc aucune conception de la conséquence logique, dans le sens post-tarkien du terme 'sémantique'. (Ricketts 1996, p. 124)

> Le débat ici consiste [...] à savoir si oui ou non Frege s'est engagé à offrir une sémantique dans le style de Tarski pour son langage logique. J'ai essayé de montrer que les indices textuels indiquent que non. (Weiner 2008, p. 434)

Les affirmations des deux groupes sont indéniablement contradictoires, et cette opposition est assumée car les membres s'opposent nommément à leurs adversaires. Ainsi Heck expliqua, dans un article :

> Ricketts a autrefois soutenu que "toute sémantique formelle, comprise à la lumière des travaux de Tarski, est totalement étrangère à Frege". Je pense avoir montré que cette affirmation était intenable. (Heck 2010, p. 377)

Les protagonistes reconnaissent donc l'existence d'un désaccord, ce qui ne l'éclaire pas pour autant. Afin de le cerner, il est essentiel d'examiner la notion de sémantique post-tarskienne, celle-là même de laquelle les uns rapprochent, et les autres éloignent, les travaux de Frege. Ce faisant, nous tracerons les contours du débat avant de nous en emparer pleinement. Pour commencer, nous allons dessiner certaines limites extérieures, en expliquant ce que chaque camp ne dit *pas*, malgré le nom que nous lui avons attribué. Ceci nous conduira naturellement à deux principales questions.

3.1.3 Formulation des questions

3.1.3.1 L'idéographie : un langage formel interprété

Le premier point est le plus simple. Les défenseurs de la vision anti-sémantique ne prétendent en rien que les notions sémantiques sont absentes des thèses fregéennes, ni qu'elles n'y jouent

aucun rôle. À partir de 1891, les termes 'sens' et 'référence' abondent dans les écrits de Frege qui déclare :

> Découvrir les vérités est la tâche de toutes les sciences, mais c'est à la logique qu'il appartient de connaître les lois de l'être vrai. (Frege 1918, 1923, p. 172)

Aucun doute n'est permis : la vérité et la logique sont intimement liées, et nul ne songe à nier la position centrale occupée par les notions de vérité, de sens et de référence, ou encore le parallèle fregéen entre les sphères linguistique, logique et ontologique. Chacun reconnaît qu'il existe, en un certain sens très large, une sémantique compositionnelle sous-jacente à l'idéographie. C'est sur la question du statut et du rôle de cette dernière que la scission se crée. Les membres du camp anti-sémantique soutiennent que la place des notions sémantiques est intrinsèquement différente, et même en conflit profond, avec celle qu'elles tinrent plus tard en théorie des modèles. Ils estiment que les conceptions fregéennes interdisent l'usage que Tarski et d'autres en firent.

Le second point est plus délicat. Les partisans de la lecture sémantique décrivent un parallèle important entre la théorie des modèles et les thèses de Frege. Néanmoins, ils reconnaissent une divergence notable : les langages de cette discipline sont *formels* en cela qu'ils incorporent des lettres dénuées de contenu. Au contraire, tous les symboles de l'idéographie sont censés posséder *un sens et une référence.*

Une part importante du plaidoyer anti-sémantique est logée dans cette divergence. Afin de la présenter proprement, il est crucial de distinguer deux différentes acceptions du terme 'formel'. Un langage peut être dit 'formel' ou 'formalisé' lorsque sa morphologie est spécifiée par récurrence sur une collection déterminée de symboles (souvent dénombrable) [2]. Ceci permet une circonscription précise, en un certain sens mathématique, des termes et formules du langage, et autorise l'usage de métavariables destinées à être remplacées dans les règles et, parfois, les axiomes [3]. La classe des éléments syntaxiques candidats à de tels remplacements et les cadres de ces derniers sont rigoureusement spécifiés. Dans notre deuxième chapitre, nous avons établi que l'idéographie, à l'instar des langages logiques contemporains, était bel et bien formelle en ce sens. Bien que Frege n'ait pas été très vigilant à cet égard, il était décisif pour lui qu'elle le soit, car cette rigidité syntaxique était seule capable d'assurer un nombre limité de règles qui, à l'instar de la substitution, s'étendent à tous les énoncés d'une certaine forme. Le nettoyage des démonstrations de toute composante implicite et de tout saut de raisonnement, dépendant d'une circonscription précise des règles et axiomes, ne pouvait faire l'économie d'une telle rigueur.

Mais un langage peut aussi être dit formel s'il est "dénué de contenu", plus précisément si certains des symboles – et donc certains, voire la totalité, des énoncés – sont en attente d'une interprétation, privés de contenu fixe. Selon cette seconde acception du terme, l'idéographie *n'est pas formelle.* Il était même crucial qu'elle ne le soit pas, car Frege concevait la logique comme une science à part entière, toute singulière soit-elle. Or les énoncés d'une science expriment des pensées et possèdent une valeur de vérité, respectivement composés des sens et des références *fixes* des noms qui forment ces énoncés.

Selon les défenseurs de la lecture antisémantique, Frege s'opposa ainsi à toute vision formaliste de la logique. Il faut néanmoins préciser leur idée, car cette étiquette fut collée sur des courants très différents. Le nom fut d'abord attribué à une école de la fin du XIXe siècle contre laquelle

2. On parle aussi de langages artificiels en ce sens, non qu'il soit impossible de construire artificiellement une langue qui ne respecte pas ces prérequis, mais plutôt parce que l'intérêt de construire artificiellement une langue consiste en ceci que les langues naturelles ne les respectent jamais.

3. Si les lois n'intègrent pas de métavariables, le système incorpore des règles de substitution qui permettent de déduire, par exemple, '$(b \to c) \to (b \to c)$' à partir de '$a \to a$', *via* le remplacement de 'a' par '$(b \to c)$'. Nous avons vu que Frege procédait de cette manière.

Frege mena une croisade permanente. Par la suite, on qualifia aussi de 'formels' les langages utilisés par Hilbert dans sa tentative de fondation de la géométrie et ceux, dont le fonctionnement est assez proche, de la théorie des modèles. Accordons quelques instants au récit de cette histoire.

À l'époque de Frege, le processus d'algébrisation des mathématiques battait son plein. Afin de s'émanciper et d'abandonner toute subordination à l'intuition, un courant dit 'formaliste' envisagea de résorber l'écart entre le nombre et le symbole qui le désigne. Selon cette thèse, les langages mathématiques utilisent des symboles vides de contenu. Certains d'entre eux *sont* les nombres eux-mêmes. L'identification du signifiant au signifié entraîne l'identité de la démonstration (d'un contenu) et de la dérivation (l'arbre, l'élément syntaxique). Les démonstrations mathématiques sont donc regardées comme de pures dérivations – ou arbres – dont chaque pas est l'instance d'une règle et chaque élément de départ l'instance d'un axiome ; les règles et axiomes étant proprement stipulés en amont.

Cette conception se rapproche de celle de Frege par la rigueur qu'elle impose aux dérivations, *i.e.* par l'écriture exhaustive des étapes et des prémisses invoquées. En revanche, elle s'en éloigne considérablement en ceci que les termes du langage n'ont pas de contenu, qu'ils n'expriment aucun sens. Selon Frege, l'apprentissage du fonctionnement de l'Idéographie réunit deux éléments. En premier lieu, il s'agit de connaître les règles morphologiques, déductives et les axiomes, qui fixent le cadre précis des dérivations. Néanmoins, ainsi limité, le système s'apparente à un simple jeu. *Gagner* vis-à-vis d'un énoncé revient à dériver cet énoncé, c'est-à-dire l'écrire à la fin d'une dérivation qui ne comporte que des coups licites, *i.e.* qui part d'axiomes et n'utilise que des règles. Dans un tel contexte, "le signe ne désigne rien, il est au contraire le signe lui-même" [4]. C'est pourquoi Frege estime qu'un autre travail est nécessaire, qui prend en compte le *contenu* des symboles utilisés. Il ne s'agit plus seulement de connaître les coups licites, *i.e.* les axiomes et les règles, mais le sens des termes en jeu et ainsi celui des énoncés qui sont prouvés dans les démonstrations. Un arbre ne reflète une preuve qu'à cette condition : le *contenu* de l'énoncé figurant en conclusion est justifié par les *contenus* des énoncés figurant en prémisses, car chaque règle utilisée manifeste un rapport directement entre ces *contenus*.

L'argument déterminant opposé à la thèse formaliste, selon laquelle les mathématiques sont un pur calcul entre des symboles, s'appuie sur le rôle de cette discipline. Si les mathématiques consistent en un simple jeu, dont les règles ne correspondent à aucune loi mais seulement à des conventions, alors le lien entre les mathématiques et le monde est rompu. Rien n'explique pourquoi il est possible de compter des cartes, ou de mesurer un champ. En définitive, cette thèse ne rend pas compte de l'*applicabilité* des mathématiques. En tentant de nettoyer ces dernières de tout ancrage extérieur, les formalistes ont brisé le lien profond qui les lie à l'extérieur. C'est pourquoi, dans l'article "Théories formelles de l'arithmétique" [5], Frege expliqua :

> Je veux donc montrer que personne n'a jamais mis ces théories en pratique, ni n'a jamais pu les mettre en pratique, car si tel était le cas, il serait apparu qu'elles étaient inutilisables. (Frege 1885, p. 105)

Il exposa à différentes reprises son argumentaire, notamment dans l'examen des thèses particulières de Eduard Heine et de Johannes Thomae, au sein du deuxième volume des *Grundgesetze* (Frege 1893, Volume 2, §§86-137), et dans une double réponse à Thomae : "Réponse à la causerie de Mr. Thomae" (Frege 1906a) et "Renouvellement de la preuve d'impossibilité de l'arithmétique formelle de Thomae" (Frege 1908).

4. (Frege 1893, Avant-propos, p.XIII)

5. Frege y fit aussi une distinction entre deux acceptions du terme 'formel'. Précisons, afin d'éviter tout quiproquo, qu'elle ne correspond pas à la nôtre.

Le formalisme en ce sens radical n'est plus défendu aujourd'hui. En revanche, les méthodes introduites par Hilbert répondent aussi à ce qualificatif, mais selon une acception plus sophistiquée et modérée. Or elles ont trouvé leur pleine mesure dans la théorie des modèles, et l'écart entre l'idéographie et les langages de cette dernière nous concerne au premier chef, car une part du désaccord entre les deux camps est localisée dans l'analyse de la nature de cette différence.

Longtemps avant les travaux de Tarski sur la vérité, Hilbert (1900) introduisit un procédé d'interprétation de langages afin de répondre à des questions métalogiques, notamment celle de l'indépendance d'un axiome vis-à-vis d'une théorie. À ce stade du développement de la logique moderne, cette méthode ne présentait pas encore la forme complexe de la théorie des modèles. Seuls les travaux de Tarski établirent, *via* les notions de métalangage et de métathéorie, le cadre rigoureux de spécification des interprétations. Aujourd'hui, le métalangage peut être défini artificiellement selon des règles syntaxiques procédant par induction – il est donc formel dans le premier sens – et implique généralement un symbole d'appartenance. Au contraire, la métathéorie utilisée par Hilbert n'était pas ensembliste – elle se limitait à l'analyse réelle – et ne fut jamais rigoureusement spécifiée, elle demeurait à un niveau intuitif et exigeait une compréhension tacite des conditions dans lesquelles un énoncé est *vrai dans une interprétation*. Malgré ces différences, cette notion d'interprétation était déjà mise en jeu à la manière de la théorie des modèles, et Frege en fit la critique à plusieurs reprises : lors de sa correspondance avec Hilbert (1976, pp. 60-64) ainsi qu'à l'occasion de deux articles (1903b, 1906d).

Certains lisent dans ces textes le prolongement du reproche adressé à Thomae. Frege aurait désapprouvé l'utilisation de symboles vides, inaptes à l'expression d'un *contenu*, et ainsi incapables de rendre compte du statut scientifique de la logique et des mathématiques. Il est vrai qu'il a invariablement insisté sur le fait que chaque terme de l'idéographie devait posséder un sens et une référence fixes. Au sein des *Grundgesetze*, il affirma que "non seulement une référence mais aussi un sens correspond à chaque nom correctement formé" (1893, p. 50). Ailleurs, il expliqua qu'une démonstration est la preuve du *contenu* d'un énoncé :

> Ce que nous démontrons [beweisen], ce n'est pas un énoncé [Satz], mais une pensée. Et peu importe la langue que nous utilisons pour cela. (Frege 1969b, p. 222)

Les éléments syntaxiques en jeu dans l'écriture des démonstrations possèdent donc un contenu, et ceux qui figurent en conclusions de telles démonstrations ne sont *pas* vides de sens. Pour cette raison, l'idéographie est irréconciliable avec les langages étudiés par Hilbert : elle n'est pas formelle dans le second sens. Personne, *pas même, malgré le nom que nous leur donnons, les partisans de la lecture sémantique*, ne conteste ce point. Citons par exemple Heck, un des défenseurs les plus radicaux de cette lecture :

> L'objection fondamentale de Frege au formalisme était qu'il n'expliquait pas l'applicabilité de l'arithmétique, et ceci doit être expliqué, car c'est seulement cette applicabilité qui élève l'arithmétique du rang de jeu à celui de science. Un examen du développement de cette objection par Frege révèlera donc ce qui, selon lui, aurait manqué à l'Idéographie si elle était restée non interprétée. (Heck 2010, pp. 361-362)

Ce que Heck affirme, en revanche, c'est que rien dans ce constat n'interdit d'envisager le développement d'une théorie sémantique conforme aux vues de Frege. Pour cerner ce problème, il est utile de procéder à un bref exposé de la genèse et du fonctionnement de la théorie des modèles, *i.e.* de la forme la plus épanouie de la sémantique moderne. Avant d'y procéder, notons seulement que nous sommes désormais en mesure de fixer notre lexique. Afin de prévenir toute ambiguïté, nous parlerons de 'langage formel' uniquement selon la première acception du terme. Pour exprimer la seconde, nous utiliserons 'langage non interprété' ou 'schématique'. Ainsi, l'idéographie est un *langage formel interprété*.

3.1.3.2 La théorie des modèles

L'article de Tarski (1933) mit à jour la possibilité de définir un prédicat de vérité sur toutes les formules d'un langage, dit 'langage-objet', dans un langage plus riche, dit 'métalangage'. Celui-ci contient un terme (resp. une formule) *pour* chaque terme (resp. formule) du langage-objet, typiquement le (resp. la) même, et un nom *de* chaque terme ou formule du langage-objet, typiquement lui-même placé entre guillemets. Ceci autorise non seulement l'usage des énoncés du langage dans le métalangage, mais aussi leur mention, *via* l'ajout de guillemets. C'est dans cette perspective que Tarski introduisit le célèbre exemple de sa T-équivalence :

'la neige est blanche' est vrai si et seulement si la neige est blanche

La partie entre guillemets correspond au *nom* dans le métalangage d'un énoncé du langage-objet, c'est de lui qu'est prédiquée la vérité dans le métalangage. Bien sûr, dans ce cas précis, le langage-objet et le métalangage sont identiques, il s'agit de la langue française. Néanmoins, effectuer le travail directement à l'intérieur du langage, *i.e.* donner des noms *dans* la langue à tous les énoncés *de* la langue, produit inévitablement des paradoxes s'il est syntaxiquement permis de prédiquer la vérité de n'importe quel énoncé, *i.e.* si, quel que soit l'énoncé 'p' du langage, 'V('p')' – "p' est vrai' – est aussi un énoncé du langage [6]. L'évasion du langage-objet permet d'éviter ces paradoxes [7]. Tarski effectua donc ce travail, non dans la langue naturelle, mais dans des langages formalisés au premier sens. À ce stade, il ne restait qu'un pas, et il fut rapidement effectué, avant d'envisager, dans le métalangage, non pas la définition du *concept* de vérité, mais celle de la *relation* de vérité – aussi appelée 'satisfaction'. Si la vérité peut se définir dans un langage extérieur, il devient possible de considérer certains symboles du langage-objet comme des coquilles vides et de définir la vérité des énoncés *relativement* à l'*interprétation* donnée à ces symboles. Voilà pourquoi van Heijenoort (1979) parlera de tradition *relativiste* de la logique, selon laquelle la relation intervient entre un énoncé et une *interprétation*.

Le succès mathématique de la théorie des modèles s'explique par l'ultime droit qu'elle s'est octroyée de spécifier, *via* l'interprétation, le domaine sur lequel les variables quantifient (et, en outre, le domaine sur lequel les constantes non logiques sont définies). Ce dont il est possible de parler *via* le langage-objet est ramené à un univers limité qui n'est pas constitué de la totalité des objets : *le domaine de quantification*.

Ce faisant, l'algébrisation des mathématiques rencontrait sa pleine généralité, car ce cadre permit l'étude, non plus seulement de structures particulières (par exemple le corps des réels muni de sa valeur absolue), mais aussi de *classes* de structures à travers les axiomes qui les caractérisent (par exemple la classe des corps valués). Lorsqu'un théorème est prouvé à partir de ces axiomes, il est tenu pour vrai dans toutes les structures qui respectent ces derniers. La relativisation de la vérité aux interprétations permit de définir formellement le fait qu'une structure valide, *i.e. rende vrais*, des énoncés. Non seulement elle étendit ce procédé, systématisant l'étude d'un quelconque ensemble d'énoncés, et à travers lui, celle des structures d'interprétations qui les rendent vrais ; mais elle apporta sa dose de rigueur quant à la forme que devaient prendre les énoncés – la morphologie – et les démonstrations – la syntaxe. Ainsi, la morphologie et la syntaxe furent doublement conçues comme un moyen d'exprimer et dériver des énoncés mathématiques,

6. Plus généralement, ces paradoxes *sémantiques* surviennent dans n'importe quel langage suffisamment riche pour être mathématiquement intéressant, *a fortiori* dans la langue naturelle. Dans de tels cas, il est aisé de construire un énoncé qui se comporte comme l'énoncé du menteur 'Je mens', *i.e.* qui est équivalent à sa propre fausseté : $\neg V(\text{'}p\text{'}) = p$. La contradiction en découle en quelques lignes.

7. Une autre méthode, développée par Saul Kripke (1975), consiste à se maintenir dans la langue tout en limitant les énoncés desquels il est autorisé de prédiquer la vérité. Ainsi, il devient possible de prédiquer la vérité de *certains* énoncés qui incorporent eux-mêmes le prédicat de vérité.

et comme un objet d'étude mathématique à part entière. Ce fut l'avènement des questions *méta-systémiques*, l'émergence des théorèmes *métalogiques*, qui établissent des liens entre des *langages* et les *structures d'interprétations* de ces langages. Cette rencontre entre la rigueur syntaxique (le formalisme dans le premier sens) respectée par le courant logiciste, et une conception relativise de la vérité (le formalisme dans le second) présente chez Boole, Schröder (selon van Heijenoort) et Löwenheim puis théorisée par Tarski, est précisément celle que raconte van Heijenoort dans son article de 1967. Il fut rapidement clair, notamment grâce au théorème de complétude prouvé par Gödel en 1930, qu'une classe de langages particulière – ceux du premier ordre – vérifiait des propriétés utiles à la résolution de problèmes mathématiques extérieurs à l'étude de ces langages. En effet, lorsqu'un énoncé mathématique est exprimable en premier ordre, il devient possible d'exploiter les caractéristiques du premier ordre pour parvenir à certaines conclusions concernant cet énoncé [8].

Par l'étude, dans un métalangage, du lien entre différents langages-objet et leurs structures d'interprétation, la théorie des modèles acquit à bon droit son statut de discipline mathématique à part entière. Néanmoins, il est clair que la valeur des propriétés établies concernant certains langages dépend non seulement du métalangage dans lequel elles sont exprimées, mais aussi de la métathéorie dans laquelle elles sont démontrées. Les logiciens choisissent majoritairement ZFC pour métathéorie, cadre dans lequel ils prouvent qu'un langage possède telle caractéristique, puis utilisent cette caractéristique pour établir différentes conclusions concernant les énoncés mathématiques s'exprimant dans ce langage. Cette méthode se base donc sur le double statut des langages comme moyens d'expression et comme objets d'étude. La plupart des mathématiciens possèdent une confiance assez solide en cette métathéorie [9], qui semble incorporer précisément les règles et axiomes essentiels au développement de leur science. Les résultats de la théorie des modèles ont le même statut que ceux fournis par n'importe quelle autre branche de la discipline, ils sont établis au même endroit. Néanmoins, le problème se corse lorsqu'il est observé sous l'angle des fondations. L'objectif initial de nombreux protagonistes de la crise des fondements, parmi lesquels Frege, n'était pas le développement de nouveaux outils soumis au cadre général des mathématiques, mais au contraire de soumettre le cadre des mathématiques à de nouveaux outils, afin de solidifier leurs fondations. L'issue paraît bien différente des intentions originelles de Frege, qui désirait enraciner solidement l'arbre des mathématiques, et non l'alourdir d'une branche supplémentaire [10]. En effet, la confiance accordée aux résultats de théorie des modèles semble subordonnée à la foi placée dans cette métathéorie. Le problème paraît déplacé plus qu'il n'est résolu, car la définition de la vérité des éléments du langage-objet suppose d'emblée que nous acceptions une métathéorie, utilisée abruptement, sans question ni analyse. Les mathématiques sont devenues le carcan du carcan qu'on leur destinait. Bien sûr, une analyse tarskienne de cette métathéorie est possible : il suffit de définir pour le métalangage une notion relative de vérité. Mais ceci n'est permis qu'au prix d'un méta-métalangage et d'une méta-métathéorie, qui

8. À cet égard, le théorème d'Ax constitue un exemple emblématique. Un point central à sa démonstration fut l'établissement qu'une propriété, vraie d'au moins un corps de caractéristique p (pour chaque p non nul), est vraie d'au moins un corps de caractéristique nulle. Cette propriété étant exprimable en premier ordre, et la classe des corps de caractéristique nulle étant définissable en premier ordre seulement *via* une infinité d'énoncés, le théorème de compacité permit d'aboutir au résultat. Afin de le généraliser, il restait à montrer que deux corps de caractéristique nulle sont élémentairement équivalents, *i.e.* qu'ils vérifient les mêmes énoncés ; ce qui fut fait.

9. À l'exception de l'axiome du choix, qui provoque de nombreuses discussions.

10. Rappelons l'inquiétude de Frege :

> Si je compare l'arithmétique à un arbre qui se déploie dans une multiplicité de méthodes et de théorèmes, tandis que ses racines s'enfoncent dans le sol, alors il me semble que le développement des racines, au moins en Allemagne, est maigre. (Frege 1893, p. XIII)

rencontreront à leur tour la même difficulté, et ainsi de suite *ad infinitum*.

Une métathéorie appropriée permet de soulever, voire de répondre à, de nombreuses questions concernant les systèmes étudiés. Les plus fréquentes, et les plus complexes philosophiquement, sont les suivantes :

- La complétude sémantique : si un énoncé est vrai dans tous les modèles, alors il est prouvable dans le système. [11]
- L'adéquation (aussi appelée 'correction') : si un énoncé est prouvable dans le système, alors il est vrai dans tous les modèles. [12]
- La cohérence (syntaxique) : il est impossible de dériver l'absurde [13] dans le système.
- La complétude syntaxique : s'il n'est pas possible de dériver un énoncé dans le système, alors il est possible de dériver sa négation.

Parmi ces questions, seules les deux premières sont liées aux structures d'interprétation, mais toutes se heurtent à la même difficulté : quelle valeur accorder à une preuve qui, elle-même, suppose le bien-fondé d'un *autre* système, la métathéorie ?

Une perspective intéressante consiste à choisir une métathéorie plus faible que la théorie. Un théorème de cohérence peut, dans ce cas, renforcer notre confiance dans le système étudié, puisque le cadre d'étude transporte lui-même des présupposés moins lourds [14]. Néanmoins, les résultats négatifs du début du vingtième siècle – théorèmes d'incomplétude, paradoxes sémantiques – révèlent que, dans les cas intéressants, la métathéorie doit être au moins aussi forte que la théorie. De plus, même dans ce cas, la justification n'est pas absolue, mais relative à la métathéorie, aussi fiable nous semble-t-elle.

3.1.3.3 Deux différentes questions

Revenons à Frege. L'idéographie ne ressemble ni aux langages étudiés par la théorie des modèles, car elle n'intègre pas de symboles vides, ni aux langages dans lesquels la théorie des modèles est développée, car elle n'intègre rien qui s'apparente à un prédicat de vérité, ou qui permette de faire *mention* de certains éléments linguistiques. Nous pouvons tirer une première conclusion de ce dernier point : Frege refusait toute identification de la logique à la sémantique. Les énoncés logiques ne racontent pas le lien entre noms et références, ce n'est pas leur rôle. Néanmoins, Frege ne rejeta pas fermement la possibilité d'une *autre* science dont le champ d'étude soit précisément celui de la connexion entre langages (ou pensées [15]) et références. *A priori*, nous pouvons envisager d'exprimer, dans un langage enrichi d'un prédicat de vérité et de signes pour la mention, les règles sémantiques générales de la langue idéale fregéenne, notamment la manière dont la référence d'un nom complexe est déterminée à partir de celles de noms simples.

11. Pour plus de clarté, nous donnons ici une version affaiblie de l'énoncé. En toute généralité : si, quelle que soit la structure d'interprétation du langage, toute assignation qui satisfait tous les énoncés d'un ensemble M satisfait un autre énoncé p, alors p est déductible à partir de M dans le système.

12. La remarque précédente se prolonge ici, le théorème général étant la réciproque du précédent.

13. Il existe deux manières traditionnelles de définir l'absurde, en l'identifiant soit à un signe particulier du langage – souvent '$\perp$' –, soit à n'importe quel énoncé de la forme $\varphi \wedge \neg\varphi$.

14. Historiquement, la plus célèbre manifestation de cette perspective se tient dans le programme de Hilbert. L'objectif consistait à montrer la cohérence des mathématiques dans une sous-branche de celles-ci : *les mathématiques finitaires*. Le projet rencontra son issue fatale dans le théorème d'incomplétude de Gödel car, si un système est impuissant à prouver sa propre cohérence, il est *a fortiori* incapable d'établir celle d'un système plus puissant.

15. N'oublions pas qu'un énoncé n'est vrai ou faux qu'en vertu de la pensée qu'il exprime.

Contre cette idée, les compagnons de van Heijenoort soulèvent deux types d'objections. Les premières ont trait à la possibilité d'une telle discipline. Dans le cadre fregéen, le prédicat de vérité traditionnel se verrait subdivisé en une multiplicité de noms de fonctions de référence – un pour chaque catégorie. Mais il n'est pas certain que la manière dont Frege entendait les distinctions entre catégories s'accorde avec l'existence de telles fonctions de référence, ni qu'elle autorise d'écrire les axiomes sémantiques adéquats.

Les secondes concernent le rôle d'une théorie sémantique. Pour les adversaires de Dummett, nos sémantiques contemporaines permettent de *légitimer* les lois logiques. Or Frege soutenait que *n'importe quelle* démonstration correcte, étant tributaire de la logique, ne pouvait prétendre en assurer les fondations. Il rejetait donc l'idée d'une justification scientifique des lois de cette discipline. Cependant, à travers les preuves des (méta)théorèmes de cohérences syntaxique et sémantique, nous avons vu que se posait d'emblée le problème de la confiance accordée au métalangage : une telle justification n'est *pas* absolue, et ne prétend pas l'être. Ainsi posée, elle pourrait échapper à cette objection. En tous cas, il convient d'éclaircir proprement son statut, et plus généralement le rôle véritable de la sémantique moderne, avant d'y opposer les conceptions fregéennes. Heck s'est chargé de formuler la question :

> Le problème n'est pas de déterminer si Frege aurait accepté la théorie de la vérité de Tarski, ou la preuve de Gödel que la logique du premier ordre est sémantiquement complète, comme une *branche des mathématiques*, mais de savoir s'il aurait attribué à ces résultats la valeur que nous (ou au moins certains d'entre nous) lui attribuons. (Heck 2012, p. 28)

Notre problème se divise donc en deux interrogations. D'une part, il est essentiel de déterminer si une telle théorie peut effectivement être développée dans le cadre fregéen. D'autre part, il faut répondre du statut et du rôle de cette science. Frege l'aurait-il (l'a-t-il) reconnu légitime à effectuer le travail auquel nous assignons la sémantique moderne ? Autrement dit, ses conceptions s'accordent-t-elles avec une sémantique *au sens précis où nous l'entendons aujourd'hui* ?

3.1.3.4 Synthèse

Nous savons désormais que les membres des deux camps s'accordent sur les points suivants :

- Les notions sémantiques de sens, de référence et de vérité jouent un rôle important au sein de la philosophie de Frege.
- Selon ce dernier, les termes d'un langage scientifique, et notamment du langage logique, doivent posséder un sens et une référence fixes.

Par ailleurs, nous avons clarifié notre problème à travers deux grandes questions :

I. Une théorie qui décrit les lois régissant le lien sémantique entre un nom et sa référence est-elle compatible avec les conceptions fregéennes ?

II. Les thèses de Frege permettent-elles d'envisager que cette théorie joue le rôle que nous assignons à la sémantique moderne ?

À la lumière de cette division, les frontières entre les deux groupes deviennent poreuses, tandis que les objectifs des membres d'un même camp se distinguent nettement. Heck (2012) et Stanley (1996) répondent doublement par l'affirmative [16]. Ils soutiennent que Frege reconnaissait

16. Plus précisément, ils affirment que la sémantique, en termes fregéens, joue au moins un des rôles confiés aux théories modernes.

à la sémantique le droit de justifier les axiomes et les règles d'un système *au sens où sa version moderne le permet.* Tout le travail de Patricia Blanchette (2012), qui répond aussi positivement à la première question, consiste à montrer qu'une telle sémantique, regardée à travers le prisme fregéen, aboutit à une notion de conséquence en conflit profond avec celle que Tarski théorisa. Dans l'autre camp, certains admettent la possibilité envisagée par notre première question mais rétorquent un *non* retentissant à l'évocation de la seconde – par exemple Burt Dreben –, tandis que d'autres – dont Thomas Ricketts (1986b, 1997) – nient radicalement l'existence d'un équivalent fregéen du prédicat de vérité, rejetant la première alternative. Cette prolifération de lignes de défense a conduit plusieurs philosophes (par exemple Textor 2010, p. 649) à conclure que la dispute provient d'un quiproquo lié à différents usages du terme 'sémantique'. Nous pensons au contraire que le désaccord est substantiel, voire qu'il s'étend parfois entre des membres d'un même bord [17]. Nous considérons ultimement que le problème de la sémantique chez Frege est contenu dans ces deux questions, auxquelles il nous incombe donc d'apporter des réponses.

3.1.4 Stigmates d'une théorie sémantique dans les *Grundgesetze*

3.1.4.1 Un calcul sémantique

Le cœur de la lecture sémantique est localisé à l'intérieur même des *Grundgesetze.* Car ses défenseurs ne se contentent pas d'affirmer la compatibilité entre le développement d'une théorie sémantique et les idées de Frege, ils soutiennent que ce dernier a *effectivement* bâti et exploité une telle théorie dans son ouvrage. Plus précisément, il aurait développé *informellement* les outils nécessaires à la réalisation de ce travail, lors de l'exposition de son système [18].

C'est dans la première partie des *Grundgesetze* qu'il aurait non seulement présenté la morphologie et la syntaxe, mais aussi discuté les références de ses signes primitifs et, en vertu de celles-ci, le *bien-fondé* de ses règles et axiomes. Dummett parvient à la conclusion suivante :

> [Frege] fut le premier à nous offrir une sémantique, c'est-à-dire une analyse permettant de déterminer si une phrase est, ou non, vraie en fonction de la composition des mots qui la constituent. (Dummett 1978, p. 118).

Au sens strict, cette tâche avait déjà été accomplie, au moins en partie, par les logiciens classiques. L'énoncé 'Si un homme est français, alors un homme est français' est vrai en vertu de la composition des deux expressions : 'Si ... alors ...' et 'un homme est français'. La forme des expressions était prise en compte à la fois dans les règles – par exemple les syllogismes – et dans les énoncés. Mais Dummett n'évoque pas ici un calcul *syntaxique.* Il est indéniable que Frege fournit un tel calcul, car il distingua différentes catégories syntaxiques et stipula des règles relatives à des formes d'énoncés. Il fut cependant loin d'être le premier, bien qu'il bâtit le plus rigoureux système jamais façonné jusqu'alors [19]. Selon Dummett, son apport véritable résiderait dans la construction d'un calcul *sémantique* qui sous-tend le système. Frege assurerait

17. Nos précédents exemples semblent rapprocher Blanchette, classée parmi les avocats de la lecture sémantique, de Dreben, localisé de l'autre côté de la tranchée. Néanmoins, ils se distinguent nettement par leur réponse à la seconde question. Précisons que nous n'avons pris aucune liberté en dessinant une frontière entre les auteurs. Chacun d'entre eux a été placé dans le camp auquel il prétend lui-même appartenir. Notre travail futur permettra de tracer des lignes plus fines.

18. Voici les passages cités à comparaître :
- l'introduction des signes primitifs du langage : pp. 9 - 12, 15, 19, 20, 41 ;
- l'introduction des règles d'inférence du système : pp. 25-30, 32 ;
- l'introduction des axiomes du système : pp. 34-36, 42 ;
- quatre autres paragraphes : §§10, 29-31.

19. Notre second chapitre nous a permis de confirmer ce point.

un fondement sémantique au fait que, quel que soit l'énoncé t, le signe composé $\ulcorner \underset{\llcorner t}{\top} t \urcorner$ est vrai. Dans son jargon, il reposerait sur l'établissement de la référence de $\ulcorner \underset{\llcorner t}{\top} t \urcorner$, *i.e.* de sa valeur de vérité, *via* les références de t et de '$\underset{\llcorner \xi}{\top} \xi$'. La forme d'un énoncé ne serait plus exploitée directement à travers les constituants syntaxiques eux-mêmes, mais à travers leurs références. Frege aurait ainsi franchi le pas de la sémantique moderne. Il aurait déterminé la valeur de vérité – la référence – d'un énoncé en fonction de la référence de ses constituants comme la théorie des modèles permet d'établir la valeur de vérité d'un énoncé en fonction de la valeur de ses constituants dans une structure d'interprétation. Ainsi, le traditionnel remplacement d'éléments syntaxiques de même catégorie dans un énoncé serait suppléé par un véritable *calcul sémantique* :

> Nous pouvons désormais, disposant d'une telle sémantique, substituer à la notion d'interprétation par remplacement la notion d'interprétation sémantique, qui nous permet d'assigner directement aux lettres du schéma la valeur sémantique d'expressions des catégories appropriées sans avoir à utiliser les expressions elles-mêmes. (Dummett 1978, p. 121)

3.1.4.2 La référence des noms

Examinons ce parallèle sur un exemple précis. Comparons l'introduction du symbole d'égalité dans les *Grundgesetze* (Volume 1, §7), et sa définition dans le métalangage en théorie des modèles :

– **Chez Frege** :
"Nous avons déjà incidemment fait usage du signe d'égalité pour former des exemples mais il est nécessaire de stipuler quelque chose de plus précis le concernant.

$$\text{‘}\Gamma = \Delta\text{’}$$

réfère au Vrai si Γ est identique à Δ ; dans tous les autres cas, il réfère au Faux."

– **En théorie des modèles, dans un métalangage formel :** [20]

$$(\mathscr{I} \models \ulcorner t = t' \urcorner) \leftrightarrow (t^{\mathscr{I}} \underline{=} t'^{\mathscr{I}})$$ [21]

Si nous renonçons à formaliser le métalangage, et utilisons le français, la clause ci-dessus se traduit par :

– **En théorie des modèles, en français :**

> $\ulcorner t = t' \urcorner$ est vrai dans $\mathscr{I}$ si les interprétations de t et t' par $\mathscr{I}$ sont identiques, faux sinon.

Ainsi, à deux exceptions près : la variation de l'interprétation – qui n'avait pas cours pour l'idéographie – et le caractère formel du métalangage – qui attendrait Tarski –, les méthodes utilisées semblent similaires. Frege détermine la valeur de vérité de l'énoncé en fonction de la valeur sémantique, de la référence, de ses constituants. Si Γ et Δ sont identiques, alors l'énoncé est vrai, et seulement dans ce cas. En théorie des modèles, bien sûr, ce sont les *interprétations* des

20. Nous utilisons, pour le métalangage, les symboles du langage-objet en les soulignant.
21. Nous faisons ici l'économie des assignations, dont l'exemple se passe sans dommage, et considérons t et t' comme des termes clos.

termes, et non leurs références, qui doivent être identiques, *i.e.* les objets sur lesquels t et t' sont envoyés par la structure d'interprétation, et non pas les objets auxquels référent 'Δ' et 'Γ'. Mais dans les deux cas, la composition implique les valeurs sémantiques des constituants, c'est-à-dire, chez Frege, leurs références *fixes*, et en théorie des modèles, leurs interprétations *variables*. En outre, une autre particularité fregéenne est répercutée ici : l'identification entre les valeurs de vérité et la référence des énoncés, mais elle laisse le parallèle indemne, selon lequel Frege et les théoriciens des modèles accomplissent des travaux similaires de spécification des valeurs de vérité des énoncés, qui ne se distinguent que parce que le premier le réalise *en allemand et une fois pour toutes* tandis que les seconds l'exécutent *dans un métalangage formalisé et relativement à l'interprétation*.

Ceci explique pourquoi Dummett reconnut dans l'exposition du système réalisée en première partie des *Grundgesetze* l'ancêtre du processus de relativisation de la vérité initié par Tarski. Selon lui, l'idée d'une détermination de la valeur sémantique d'un élément syntaxique complexe *via* celles des éléments simples qui le constituent était déjà présente chez Frege. Il ne restait qu'à développer l'appareil formel nécessaire à sa théorisation, comme le fit Tarski, et qu'à le traduire dans le cadre relativiste en ne parlant plus de références fixes mais d'interprétations variables. La première transition repose sur un développement complexe, mais la seconde ne s'appuie que sur l'acceptation du cadre relativiste. Dummett expliqua :

> [Frege] n'acceptait pas l'idée qu'un langage formel pût être sujet à une variété d'interprétations. Mais, le fait est que, s'il avait accepté cette idée, il ne lui aurait probablement pas fallu beaucoup d'efforts pour en arriver à la notion sémantique de validité [22] car la théorie qui constitue l'arrière-plan de la première partie des *Grundgesetze* lui aurait immédiatement permis de formuler ce qui constitue, de façon générale, une telle interprétation. Et c'est précisément à cause de cette théorie d'arrière-plan et des nombreuses similitudes existant entre cette dernière et l'idée que se font aujourd'hui les logiciens de l'interprétation d'un langage formel dans le cadre d'une sémantique classique à deux valeurs, et bien que les deux ne soient pas identiques, qu'il peut être riche d'enseignements de comparer les travaux de Frege avec ceux des logiciens qui lui sont postérieurs. (Dummett 1984, p. 201)

L'outillage nécessaire au développement des sémantiques modernes serait donc tapi dans ces passages. Heck tire une conclusion similaire. Selon lui, en introduisant ses noms primitifs, Frege aurait offert une interprétation (définitive) de son langage. S'il refusait de faire varier cette dernière, il utilisait, pour la poser, des méthodes proches de la théorie des modèles :

> Quand Frege nous dit ce à quoi ses expressions primitives sont censées référer, il utilise souvent explicitement des notions sémantiques, les mêmes qui imprègnent ses travaux tardifs de philosophie de la logique. [...] Il développait une conception de la logique dans laquelle les notions sémantiques jouaient un rôle fondamental. (Heck 2012, p. 38)

3.1.4.3 La justification des règles et axiomes

Les deux auteurs franchissent une étape supplémentaire dans l'établissement du parallèle entre la présentation de l'idéographie et la sémantique moderne. Ils affirment que Frege *justifia* ses règles et axiomes comme les logiciens démontrent aujourd'hui des théorèmes d'adéquation. Considérons par exemple la règle suivante en déduction naturelle classique :

22. basée sur la relation de vérité entre un énoncé et une structure d'interprétation.

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ [\wedge\text{-élim}]$$

En théorie des modèles, il est possible d'établir sa validité en s'assurant que tous les modèles qui rendent vraie la première formule valident la seconde. Ceci se réalise aisément, dans une métathéorie formalisée, *via* la clause liée à la conjonction : $(\mathscr{I} \vDash \varphi \wedge \psi)\underline{\leftrightarrow}((\mathscr{I} \vDash \varphi)\underline{\wedge}(\mathscr{I} \vDash \psi))$.

$$\dfrac{\dfrac{\mathscr{I} \vDash \varphi \wedge \psi \qquad (\mathscr{I} \vDash \varphi \wedge \psi)\underline{\leftrightarrow}((\mathscr{I} \vDash \varphi)\underline{\wedge}(\mathscr{I} \vDash \psi)}{(\mathscr{I} \vDash \varphi)\underline{\wedge}(\mathscr{I} \vDash \psi)}\ [\underline{\leftrightarrow}\text{-élim}]}{\mathscr{I} \vDash \varphi}\ [\underline{\wedge}\text{-élim}]$$

La trivialité des étapes devient patente une fois cette preuve exprimée en français.

> Supposons qu'une structure d'interprétation $\mathscr{I}$ valide $\varphi \wedge \psi$. Selon la clause associée à la conjonction, $\mathscr{I}$ valide $\varphi \wedge \psi$ si et seulement si elle valide φ et [23] ψ. Donc $\mathscr{I}$ valide φ et ψ donc elle valide φ.

Le métalangage formel présente l'intérêt de manifester un point important, moins visible en français : la preuve d'une règle exige l'adoption d'autres règles valables pour le métalangage, celles de la *métathéorie*. Il semble surprenant, voire circulaire, de justifier notre règle $\wedge$-élim sur la base d'une règle similaire adoptée pour le métalangage : $\underline{\wedge}$-élim. Mais ne nous y trompons pas, c'est bien ainsi que fonctionne la méthode tarskienne. Elle permet de définir la notion de vérité liée à des énoncés d'un langage-objet *dans un métalangage* et de démontrer certains théorèmes concernant cette notion *via* des règles et des axiomes régissant ce métalangage, qui forment la métathéorie. Les théorèmes d'adéquation et de complétude procèdent de cette manière. Pour répondre à des exigences de clarté, ou parce que les mathématiciens se soucient assez peu de la formalisation du métalangage, la démonstration de ces théorèmes est souvent écrite en langue naturelle, néanmoins elle se traduit parfaitement dans un langage formel, grâce auquel les (méta)règles et (méta)axiomes utilisés sont parfaitement visibles. Ceux-ci ne sont pas justifiés, ils constituent au contraire le socle sur lequel les règles et axiomes d'une théorie régissant le langage-objet peuvent l'être. Ainsi, il est certain que de telles justifications ne sont pas réalisées *ex nihilo*, et leur valeur peut être questionnée pour cette raison [24]. Néanmoins, en toute rigueur, il n'est pas ici question de circularité, car les règles que nous justifions ne sont pas celles dont nous nous servons – $\wedge$-élim n'est pas $\underline{\wedge}$-élim – elles n'interviennent pas au même niveau. Quel que soit le bien-fondé et l'intérêt de ce procédé, les défenseurs de la vision sémantique estiment qu'il s'agit de celui qu'utilisa Frege lors de l'introduction de ses règles, par exemple dans le passage suivant :

> À partir des assertions '$\vdash \begin{smallmatrix}\Gamma\\ \Delta\end{smallmatrix}$' et '$\vdash \Delta$', nous pouvons inférer '$\vdash \Gamma$' car si Γ n'était pas le Vrai, alors, puisque Δ est le Vrai, $\begin{smallmatrix}\Gamma\\ \Delta\end{smallmatrix}$ serait le Faux. (Frege 1893, Volume 1, §17)

En effet, ce travail semble extrêmement proche de celui que nous avons effectué plus haut, dans sa version française, concernant la justification de la règle $\wedge$-élim. Voilà ce qui motiva Dummett et Heck à écrire respectivement :

23. Ce 'et' correspond exactement au $\underline{\wedge}$ du métalangage formel.
24. Nous nous y emploierons en section 3.2.4.

> Nous disposions pour la première fois du moyen de déterminer, pour une grande partie du langage, si une phrase était vraie ou fausse et donc, pour la première fois également, pas seulement d'un moyen de stipuler la validité de certaines règles de déduction mais aussi de démontrer leur validité, c'est-à-dire leur capacité à produire des conclusions vraies à partir de prémisses vraies. (Dummett 1973[1], 1981[2], p. 82)

> Frege lui-même parle de la nécessité de 'justifier' les règles en les 'fondant sur la référence des signes', en particulier de montrer que les règles préservent la vérité. (Heck 2012, p. 45)

3.1.4.4 Mise au point et marche à suivre

Ainsi, Heck et Dummett ne se contentent pas d'affirmer que Frege aurait pu, en accord avec ses conceptions, développer une sémantique, mais soutiennent qu'il a *effectivement* accompli ce travail. De plus, ils affirment que l'un des rôles de la sémantique moderne – la justification des règles et des axiomes d'un système – est bien rempli dans la version fregéenne. Bien sûr, Frege n'a pas formalisé son langage d'exposition ; il développe sa théorie dans la langue naturelle. Les adversaires de Heck, au premier rang desquels Weiner [25], y voient une solide indication qu'il ne s'agit pas d'une véritable sémantique. Pour Heck, ce n'est rien de plus qu'une trace supplémentaire du travail qu'il a fallu abattre pour élaborer les sémantiques formelles. Si Frege a amorcé un processus long et complexe, il n'est pas surprenant qu'il n'ait pu atteindre seul le point d'arrivée, bien qu'il se soit franchement engagé dans cette direction.

Pourtant, l'ébauche de parallèle que nous avons réalisée ci-dessus est très insuffisante. Soulevons à brûle-pourpoint une des nombreuses difficultés à venir. En théorie des modèles, l'interprétation des symboles de fonctions ne sollicite aucune clause inductive. Il suffit d'indiquer les fonctions visées en employant les noms qu'elles possèdent dans le métalangage. Ainsi, il semble davantage que Frege introduise ses noms primitifs de fonctions comme nous définissons nos *constantes logiques*. Voilà qui brise déjà la symétrie, et qui mérite d'être éclairci. En vérité, nous verrons que même ces deux méthodes ne sont pas identiques. Le lecteur peut déjà goûter à une certaine perplexité en tentant de cerner le statut des lettres grecques majuscules dans les passages que nous avons cités – et nous l'invitons à le faire, en préparation au travail qui nous attend. Elles ne ressemblent à *rien* de ce que nous connaissons [26]. Pour dessiner le visage possible d'une sémantique fregéenne, il ne suffit pas de relever tel ou tel parallèle, il est *indispensable* de se plonger au cœur du symbolisme fregéen (et de sa raison d'être) : l'absence de constantes logiques, l'identification entre termes et formules, l'étrange critère de référentialité des noms de fonctions. C'est ici, précisément, que le long travail technique réalisé dans le second chapitre rencontrera son destin. Nous allons, en enquêtant sur les passages-clefs des *Grundgesetze*, tenter de déterminer s'il est possible de développer formellement la théorie que Frege semble exploiter dans sa langue d'exposition. C'est sous cet angle que nous souhaitons discuter les objections philosophiques du clan antisémantique, ou au moins celles qui demeureront, une fois que nous

25. (Weiner 1990, Chap. 6)

26. Rappelons que ces lettres n'appartiennent pas à l'idéographie. D'un côté, Frege utilise des formulations telles que 'si Δ est le Vrai', suggérant qu'il s'agit simplement de variables d'objets. Ailleurs, il parle de la *référence* de 'Δ', comme s'il s'agissait de métavariables qui parcourent les noms d'objets de l'idéographie (à un mauvais usage des guillemets près). De prime abord, le lecteur considère probablement qu'il est confronté à une rédaction approximative, et qu'il suffit d'examiner le contexte de ces phrases pour apporter les corrections adéquates. Nous nous sommes nous aussi laissés prendre au piège. Mais qu'il accorde seulement une minute d'attention à tenter de lever le trouble, et immanquablement il le verra s'étendre. Le statut des lettres grecques majuscules est absolument fondamental dans toute cette histoire et, puisqu'il tient aux spécificités de l'idéographie, trop souvent ignoré dans la littérature.

en aurons écarté quelques-unes. En effet, ce chapitre va procéder en plusieurs étapes. Et notre introduction arrivant à son terme, il est temps d'en annoncer le plan.

Dans un premier temps, nous allons présenter, structurer et organiser les divers et nombreux arguments du clan antisémantique. Ce sera l'occasion d'écarter (ceux qui nous semblent) les plus faibles en les contestant et, au contraire, de mettre en exergue les plus difficiles. Il s'agira donc de tracer les contours du problème et de constater ce qui, une fois l'examen passé, reste dans le tamis. Dans un second temps, nous plongerons au cœur de la vision sémantique, et verrons si les signes dispersés dans les *Grundgesetze*, une fois confrontés aux objections sérieuses que nous aurons prélevées dans la lecture antisémantique, autorisent bien l'élaboration d'une sémantique formelle adaptée à la structure idéographique. Il faudra tenter de la développer rigoureusement – aidés par notre second chapitre – et de déchiffrer son propos. Nous aurons alors fini notre route, et pourrons apporter notre propre conclusion au difficile problème de la sémantique chez Frege.

3.2 Les arguments du clan antisémantique

Si le livre fondateur de l'interprétation sémantique – *Frege : Philosophy of Language* de Dummett – réunit plusieurs centaines de pages d'analyse détaillée de la pensée de Frege, le texte pionner de la lecture antisémantique – "Logic as Calculus and Logic as Language" de van Heijenoort – est un bref article dont le thème excède largement les idées de Frege. Pourtant, c'est à ces quelques pages que les membres de ce courant se réfèrent collectivement, et explicitement, lorsqu'ils soutiennent qu'il fut nécessaire de s'émanciper d'une certaine portion des conceptions fregéennes pour parvenir à élaborer nos théories sémantiques. La portion en question répond au nom d'*universalisme logique*, sans que l'expression ne soit *jamais* apparue sous la plume de Frege. Voilà qui motive une rapide, mais néanmoins cruciale, mise en garde.

Il est fréquent que des interprètes choisissent de circonscrire une frange particulière des idées d'un auteur à travers une formule spécifique. Ce geste peut s'avérer commode et, parfois, extrêmement fertile. Il met en relief ce qui était, à l'époque où cet auteur écrivait, ferré au reste de ses idées. Mais il requiert une détermination *précise* du fragment en jeu. À cet égard, la notion d'universalisme logique présente d'importantes lacunes.

Le piège est subtile, car l'expression semble avoir reçu une caractérisation rigoureuse en philosophie : dans un cadre universalisme, les variables du langage logique parcourent la totalité des objets, et non un domaine restreint. Van Heijenoort, qui inventa la formule, ne semble pas dire autre chose :

> Pour Frege il ne peut être question de changement d'univers. On ne peut même pas dire qu'on se restreint à un univers. Notre univers est *l'*univers. Pas nécessairement l'univers physique, bien sûr, car Frege admettait des objets non physiques. L'univers de Frege consiste en tout ce qui est, et est fixe. (Heijenoort 1967, p. 325)

Philippe de Rouilhan (2012) a récemment montré que, entendu en ce sens, universalisme logique et théorie des modèles ne s'opposaient pas. Pour ce faire, il a proprement isolé la place de cette dernière au sein de *l'*univers. Nous pourrions donc décréter que le problème est réglé : il n'y a aucune incompatibilité entre l'universalisme logique de Frege et la possibilité d'une théorie sémantique. Lisons la suite du texte de van Heijenoort :

> Une autre conséquence importante de l'universalité de la logique est que rien ne peut, ou ne doit, être dit à l'extérieur du système. Et, en effet, Frege ne souleva jamais de question métasystémique (cohérence, indépendance des axiomes, complétude). (Heijenoort 1967, p. 326)

Il s'agirait donc d'une erreur. Pour soulever les questions de cohérence, d'indépendance des axiomes et de complétude dans le cadre universaliste, il suffit de développer la théorie des modèles *à l'intérieur* du système universel. Et van Heijenoort ne serait pas le seul à avoir commis cette faute, car un grand nombre de ses successeurs associent l'universalisme au rejet des méta-questions, ou de tel ou tel vertu de la sémantique moderne. Malheureusement, nous ne pouvons nous en tenir à ce constat, car en incriminant l'universalisme, ils fondent souvent leurs conclusions sur des idées de Frege indépendantes de ce paradigme *tel que nous l'avons défini*. Autrement dit, ils placent derrière ce terme des éléments supplémentaires, et oublient quasi-systématiquement de le signaler. Or notre but n'est pas de savoir si l'universalisme logique comme nous l'avons caractérisé est compatible avec la sémantique contemporaine, mais bien si les positions de Frege le sont. En amorçant un article très critique de la lecture antisémantique, Jamis Tappenden mit un coup de pied dans la fourmilière :

> Les positions [antisémantiques] examinées ici ont émergé de ce qui fut, jusqu'à récemment, une tradition orale et "souterraine" de séminaires, conversations et correspondances, avec peu de publications élaborées et détaillées. La source de cette interprétation fut un célèbre papier de van Heijenoort ainsi qu'une série de séminaires, groupes de lectures et discussions générales dirigés par Burton Dreben à Harvard à partir des années 70. Dreben lui-même ayant peu écrit sur le sujet, ses vues furent élaborées et développées par des étudiants et de jeunes collègues qui fréquentèrent Harvard à ce moment. En conséquence, nous pouvons voir dans la littérature traitant de ces sujets les signes d'une telle tradition naissante : des occurrences répétées de phrases spécifiques et des stratégies dialectiques surgissant sans explication aux points clefs d'articles de différents auteurs. (Tappenden 1997, p. 220)

Tappenden met le doigt sur le problème : une grande part d'implicite règne dans le camp antisémantique, d'autant plus explicable que ses membres ont longuement dialogué, et parfois développé leurs idées côte à côte. La majorité des contributions consistent en des articles n'excédant jamais les cinquante pages. Le besoin de concision les motiva probablement à taire ce qu'ils avaient si souvent entendu et formulé. Mais le résultat est malheureux, car de l'extérieur, il n'est pas aisé de déterminer ce qu'ils rassemblent dans l'"universalisme" de Frege. Il n'est pas même certain que les choses soient si claires de l'intérieur, car pour parvenir au même constat – les positions de Frege sont incompatibles avec le développement et l'exploitation d'une sémantique contemporaine –, ils empruntent des chemins très différents. Weiner et Ricketts, par exemple, ont écrit de nombreux textes sur le sujet, offrant une description plus fouillée de leurs interprétations. Nous verrons que les arguments de l'un et de l'autre se basent sur des pans très différents des conceptions fregéennes. Il serait donc inapproprié de discuter *globalement* de la lecture antisémantique. On ne peut se baser sur la définition traditionnelle de l'universalisme logique, car ces auteurs s'en écartent considérablement. On ne peut s'appuyer sur le texte fondateur auquel ils se réfèrent, car celui-ci est trop court et, par conséquent, trop imprécis sur le sujet. En se réclamant de van Heijenoort, ils ne se sont pas appropriés une lecture claire et détaillée, ils ont extrapolé et prolongé une idée (trop) générale dans des directions souvent bien différentes. Partant de là, il existe deux stratégies possibles. Tappenden a adopté la première :

> Pour ne pas prendre le risque que des conceptions aux traits composites n'appartiennent en réalité à personne, je me concentrerai sur une incarnation particulière de ce courant – le travail de Tom Ricketts. (J'attribue donc seulement à Ricketts ce que je critique. Les idées des autres membres mentionnés pourraient bien s'en écarter de telle ou telle manière.) (Tappenden 1997, p. 220)

Tappenden choisit de discuter les positions particulières d'un éminent représentant de ce courant. Mais il rédigeait un article, et devait aussi se soumettre à de rigoureuses contraintes spatiales. Nous sommes dans le cadre d'une thèse de doctorat, plus souple à cet égard et, nous croyons, adaptée à la réalisation d'un état *complet* de la question [27]. Nous allons donc prendre l'autre route : confronter, organiser, structurer les différents arguments des membres du camp antisémantique. Notre première objectif sera d'écarter (ceux que nous tenterons de montrer) les plus superficiels, et de dégager par contraste les plus fondamentaux.

3.2.1 Trois types d'"occurrences répétées de phrases spécifiques et de stratégies dialectiques"

Les écrits du courant antisémantique intègrent des "occurrences répétées de phrases spécifiques" qui impliquent trois idées principales. Certaines sont présentées comme causalement liées, d'autres comme indépendantes.

D'une part, toute métaperspective serait interdite, toute question métasystémique illégitime. D'autre part, Frege avancerait une conception *absolutiste* de la logique, selon laquelle cette dernière vaut pour toute science, quel que soit son champ d'expertise, car si ses lois sont exprimées – au même titre que celles des autres sciences – par des énoncés *substantiels*, elles sont – contrairement à celles d'autres sciences – absolument *générales*. En ce sens, la logique serait une science *normative* pour le raisonnement. Enfin, les thèses fregéennes seraient incompatibles avec l'existence même d'une propriété de vérité.

1. La conception de la logique de Frege s'oppose en principe à toute métaperspective. Frege n'a jamais formulé de questions concernant les propriétés d'un système logique, telles que la cohérence ou la complétude (syntaxique ou sémantique), ou encore l'indépendance des axiomes, car il considérait que ces interrogations étaient *illégitimes*.
2. Selon Frege, les vérités logiques possèdent un contenu. Au même titre que les vérités de la physique, de la géométrie, ou de tout autre science, elles sont des vérités *du monde*. Leur spécificité provient de leur généralité. Les principes logiques valent dans tous les domaines. L'Idéographie constitue l'écriture rigoureuse de ces principes. Ses énoncés axiomatiques expriment les lois logiques, ses règles de déductions correspondent aux règles logiques, et ses catégories syntaxiques imitent les catégories sémantiques et ontologiques. La logique fournit doublement les lois descriptives de l'*être vrai*, mais aussi les lois normatives du *penser vrai*. Un raisonnement n'est correct que s'il se plie à ses lois.
3. Frege répète fréquemment, et développe à deux reprises, l'idée selon laquelle la vérité n'est pas définissable. Son argument, bien compris, dément *l'existence même* d'une propriété de vérité.

Précisons que, si la plupart des auteurs du camp antisémantique souscrivent aux deux premières idées, la troisième, plus radicale, ne fait pas l'unanimité. Mais nous voulons tenir compte de tous les arguments avancés, nous la prendrons donc aussi en considération.

Tappenden explique que des "stratégies dialectiques surgissent sans explication aux points clefs d'articles de différents auteurs". En effet, dans leurs textes, on trouve systématiquement des phrases (similaires) qui expriment abruptement ces différentes idées, souvent sans explication,

27. Fixons néanmoins une limite. Notre objectif consiste à comprendre le contenu des passages des *Grundgesetze* teintés de sémantique. Nous aborderons donc seulement les arguments qui touchent à ces passages, plus ou moins directement. Incontestablement, la plupart des discussions concernant la sémantique chez Frege leur sont liées. Il existe cependant des exceptions, que nous évoquerons en passant, mais que nous ne traiterons pas.

développement ou autre justification, comme si leurs contenus étaient clairs, bien compris et unanimement reconnus. Voici quelques exemples de leurs apparitions :

L'interdiction de toute métaperspective :

> Pour Frege il ne peut être question de changement d'univers. On ne peut même pas dire qu'on se restreint à un univers. Notre univers est *l'*univers. Pas nécessairement l'univers physique, bien sûr, car Frege admettait des objets non physiques. L'univers de Frege consiste en tout ce qui est, et est fixe. [...] Une autre conséquence importante de l'universalité de la logique est que rien ne peut, ou ne doit, être dit à l'extérieur du système. Et, en effet, Frege ne souleva jamais de question métasystémique (cohérence, indépendance des axiomes, complétude). (Heijenoort 1967, pp. 325-326)

> Selon les dogmes de cette tradition, nous sommes (pour ainsi dire) prisonniers de notre langage. Nous ne pouvons ni en sortir, ni le réinterpréter globalement, ni même, à l'intérieur des limites qui sont les siennes, en exprimer la sémantique. (J. Hintikka 1988, p. 209)

> Cette conception du jugement interdit toute perspective métalogique sérieuse et quoi que ce soit répondant au nom de "théorie sémantique". (Ricketts 1986b, p. 76)

> Il n'existe pas non plus de fondation métalinguistique, extra-scientifique ou transcendantale à la logique. (Ricketts 1996, p. 126)

> Si le système constitue le langage logique universel, alors il ne peut exister de point de vue externe à partir duquel on pourrait voir ou discuter le système. Les considérations métasystémiques ne sont pas seulement indésirables, mais illégitimes. C'est ce que Harry Sheffer appelait "la trappe logocentrique" (Sheffer 1926), et qui forme une grande partie, je pense, des motivations derrière le Tractatus de Wittgenstein. (Goldfarb 1979, p. 353)

> En conséquence, les systèmes de Frege et Russell visent à fournir le langage universel : le cadre dans lequel procède tout langage rationnel. Ainsi il ne peut exister de position externe au système dans laquelle l'évaluer. (Goldfarb 1982, p. 694)

> Il n'y a pas de "métalangage" chez Frege, dans lequel nous pourrions dire que les lois de la logique sont "logiquement vraies" ; on peut seulement les affirmer dans un langage, le langage. (Conant 1991, p. 127)

> Pour Frege, il n'y a pas de point de vue métalogique à partir duquel le système peut être interprété ou évalué. (Conant 1991, p. 171)

> L'univers du discours d'une telle logique est *l'*univers. Par conséquent rien ne peut être, ou ne doit être, dit à l'extérieur du système et la possibilité de questions métasystémiques est écartée. (Sluga 1987, p. 93)

La logique est substantielle et générale :

> Pour Frege, comme pour le premier Russell, la généralité de la logique est substantielle, pas schématique. [...] Cette vision de la logique contraste radicalement avec la conception contemporaine. Cette dernière dépend de la notion de schéma logique sujet à une variation d'interprétations [...] Mais la notion de schéma logique qui admet différentes interprétations est étrangère à la pensée de Frege. (Ricketts 1986b, p. 67)

> Ces principes [de la logique], bien sûr, n'ont pas un usage limité aux mathématiques ; ils s'étendent à tous les domaines de connaissance. (Goldfarb 1982, p. 693)

> Les lois dérivées sont des lois générales avec un sens fixe, il ne peut être question de désinterprétation ou réinterprétation. (Goldfarb 1982, p. 694)

> Selon cette conception schématique de la logique, le langage formel fondamentalement intéressant est celui des schémas logiques. Une telle conception schématique est étrangère à Frege (tout comme à Russell). (Goldfarb 2010, pp. 66-67)

> La conception universaliste ne laisse aucune place à la notion d'une logique sans contenu ; les lois de la logique, aussi générales soient-elles, doivent être substantielles. (Goldfarb 2010, p. 69)

> Frege [...] envisage les affirmations fondamentales de la logique comme des vérités logiques à part entière, identifiées comme les principes universels qui doivent être présupposés ou employés partout où il y a raisonnement – y compris raisonnement à propos des énoncés d'un langage particulier ou d'un système formel (ou à propos des pensées exprimant ces énoncés). (Kemp 1995, p. 34)

> La différence entre les lois de la logique et celles de la géométrie et de la physique consiste en cela que les dernières s'appliquent à un domaine plus limité. Ainsi que Frege l'écrit dans un texte : "les axiomes de la géométrie expriment les spécificités de ce qui est spatial". (Weiner 2005b, p. 345)

La vérité n'est pas une propriété :[28]

> La vision contemporaine fait un usage essentiel du prédicat de vérité. Un tel usage est antithétique aux conceptions du jugement de Frege. (Ricketts 1986b, p. 76)

> La juste conclusion de cet argument n'est pas que la vérité est une propriété primitive, mais que la vérité n'est pas une propriété du tout. (Ricketts 1986b, p. 79)

> Les indices suggèrent que Frege estimait au mieux problématique l'idée selon laquelle la vérité était une propriété des pensées.

> [La] conviction [de Frege] était [...] que, dans un langage parfait, nous n'aurions pas besoin du mot 'vrai'. (Sluga 1987, p. 94)

> Frege en vint ultimement à nier littéralement que la notion de vérité entrait dans le vocabulaire ou le domaine de la science. (Kemp 1995, p. 31)

Nous voyons sans difficulté pourquoi la première et la troisième idées s'opposent à l'établissement d'une sémantique moderne. D'une part, une telle théorie prend en charge la résolution de méta-questions, elle permet de démontrer des métathéorèmes tels que la consistance ou la complétude. D'autre part, elle fait un usage *essentiel* du prédicat de vérité, et présuppose donc l'existence d'une propriété (ou d'une relation) de vérité.

En revanche, le second point est plus difficile à établir. Il est vrai que les langages logiques étudiés en théorie des modèles, contrairement à l'idéographie, ne sont pas interprétés. Mais en quoi cela s'oppose-t-il à l'établissement d'une théorie sémantique ? La question est d'autant plus importante que cette idée est souvent présentée comme la *cause* de la première. Frege avancerait une conception *substantielle* de la logique, selon laquelle sa spécificité provient de sa généralité

28. Nous intégrons ici certaines versions *affaiblies* de cette thèse. Nous discuterons tout ceci en temps voulu.

et non de son caractère schématique (idée (2)), *donc* les questions métasystémiques seraient proscrites (idée (1)), *donc* le développement d'une sémantique moderne serait impossible.

Ainsi, nous allons avant tout tenter de comprendre cette deuxième idée, et la manière dont elle pourrait impliquer la première. Nous reviendrons plus tard à la troisième.

3.2.2 L'argument du rejet des langages schématiques

3.2.2.1 Point historique

Rappelons ce que nous avons dit plus haut. Les auteurs du courant antisémantique réunissent plusieurs idées dans ce qu'ils nomment 'l'universalisme logique de Frege'. Ce dernier, en revanche, n'a jamais employé cette expression. Le qualificatif lui fut attribué à titre posthume, pourrait-on dire, mais plus souvent comme un désaveu qu'en hommage. En effet, cette vision fut, au moins dans un premier temps, surtout nommée pour être combattue. L'expression apparut sous la plume de van Heijenoort et Hintikka et désigna ce qu'il s'est agi de dépasser pour ouvrir les grands champs de la logique moderne. Frege, pour sa part, s'en est tenu à parler d'une *lingua characterica*. Néanmoins, c'est bien là que tout commence, car c'est tapi au cœur de cette notion que van Heijenoort et Hintikka distinguent l'universalisme fregéen.

Peu de temps après la parution de la *Begriffsschrift*, Frege expliqua :

> Je n'ai pas voulu créer seulement un *calculus ratiocinator* mais une *lingua characterica* au sens de Leibnitz. (Frege 1882b, p. 98 / 71)

Afin de répondre aux accusations dont la langue formulaire était l'objet, il défendit son idée d'un système *logique* (1881, 1882a, 1882b). À ses yeux, un simple *calculus ratiocinator* offre beaucoup plus de liberté qu'une *lingua characterica* mais, par excès de souplesse, est incapable d'atteindre l'objectif que la seconde poursuit. Il s'agit d'un système de déduction qui permet de déduire des énoncés à partir d'autres énoncés. Cependant, à la différence d'une caractéristique, la forme logique des énoncés n'est pas nécessairement respectée par leur structure. Frege avait en vue le calcul de Boole (1854), auquel Schröder avait comparé sa langue formulaire (1880). Ce calcul admet une interprétation mathématique *via* l'algèbre de Boole, une interprétation en termes d'extensions de concepts – au sens ensembliste – et une dernière en termes propositionnels. Par exemple, le symbole '+' peut être interprété comme la loi additive de cette algèbre, comme la réunion de deux ensembles, aussi écrite '$\cup$', et comme la disjonction de deux énoncés, aussi exprimée par '$\vee$'. En somme, Boole trouva en l'algèbre un cadre efficace de calcul logique.

Frege critiqua cette méthode :

> Si l'on prend une vue d'ensemble du langage formulaire de Boole, on voit qu'il consiste à habiller la logique abstraite du vêtement des signes algébriques ; il n'est pas propre à l'expression d'un contenu et tel n'est pas non plus son but. (Frege 1882b, p. 100 / 73)

Selon lui, Boole fit le pont entre les mathématiques et la logique en fournissant des règles et des axiomes – un calcul – qui conviennent aussi bien au premier domaine qu'au second. Mais les notions de chaque domaine ne sont liées que parce que ce calcul leur est également adéquat. Une fois interprétés dans l'algèbre de Boole, dans un cadre ensembliste ou propositionnel, les axiomes sont vrais et les règles préservent la vérité.

Au contraire, Frege entreprenait d'établir une relation beaucoup plus intime entre les concepts logiques et mathématiques, qui ne se limite pas à un calcul commun, mais *réduit* les seconds aux premiers. À cette fin, il était nécessaire d'*exprimer* les (sens qui conduisent aux) concepts mathématiques *via* ceux de la logique. Cela interdisait d'emblée l'usage du symbole '+' en lieu et place de '$\vee$' car, au moment d'analyser logiquement l'addition, un sens différent aurait été attribué

à '+'. La difficulté attachée à la réduction des mathématiques à la logique réside précisément dans l'analyse logique des fonctions mathématiques. La tâche consistait à retrouver l'addition dans le langage logique. Tenir cette dernière pour acquise allait donc frontalement à l'encontre de la démarche fregéenne, ainsi qu'il l'expliqua :

> Boole présuppose comme tout prêts des concepts logiquement parfaits, et donc comme accomplie la partie la plus difficile du travail. (p. 39 / 45)

Selon van Heijenoort, le désaccord ne s'arrête pas là. En effet, même lorsque les signes booléens se voient attribuer leurs contenus propositionnels, les énoncés qui les incorporent – par exemple '$a \vee b \leftrightarrow b$' – demeurent dénués de contenu – parce que 'a' et 'b' n'en possèdent pas. Certains symboles tiennent un rôle exclusivement *schématique*. Le système se contente d'établir que, si tels contenus leurs sont attribués qui rendent les prémisses vraies, alors la conclusion aussi sera vraie. C'est cette idée de conservation de la vérité indépendamment des contenus attribués aux lettres schématiques, *i.e.* de l'interprétation, que Van Heijenoort reconnaît en théorie des modèles contemporaines. Cette dernière aura donc dû attendre que "Löwenheim reprenne contact avec Boole et Schröder" [29], car les logicistes s'opposèrent à cette vision schématique. Frege notamment la critiqua sous toutes les formes, booléenne ou hilbertienne, sous lesquelles il la rencontra. Chaque énoncé de son langage possède un sens fixe duquel peuvent être déduits d'autres sens d'autres énoncés. La langue formulaire – puis l'idéographie – parvient à embrasser le cadre mathématique (hors géométrie) parce que certains de ses énoncés expriment précisément un contenu mathématique, *sont* des énoncés mathématiques. Il n'est pas question de parallèle entre une algèbre et un système logique, mais d'expression des mathématiques *dans* une langue logique [30].

Ainsi, l'Idéographie n'est pas un calcul, adéquat à différents contextes, sur des *formes* d'énoncés, mais un système de déduction entre des contenus d'énoncés, qui permet de circonscrire rigoureusement le strict cadre de la logique et d'évaluer sa portée. Exprimer et prouver un énoncé mathématique *via* les ressources de l'Idéographie établit sa nature logique.

3.2.2.2 Langage-objet et métalangage

Nous retrouvons une partie de la thèse (2) : Frege tenait les énoncés logiques, comme tous les énoncés scientifiques, pour *substantiels*, dotés d'un contenu. Aucun exégète ne conteste cette conclusion. Notre problème consiste à comprendre où cette affaire entre en collision avec l'adoption d'une perspective métasystémique, *i.e.* en quoi (2) implique (1).

Dans un certain sens, il est vrai que la logique moderne s'attache à établir des relations entre des formes d'énoncés. Les résultats majeurs de cette discipline – par exemple les théorèmes de complétude et d'incomplétude – sont en réalité des métathéorèmes. Son champ d'investigation consiste en différents langages et systèmes dont elle établit les propriétés. Le développement de sémantiques est parfaitement adapté à cette tâche. Il permet de prodiguer divers rôles aux

29. (Heijenoort 1967, p. 328)

30. Précisons que Sluga (1987) présente une autre interprétation de la réponse fregéenne, limitant la critique au premier point : celui d'une ambiguïté entre les expressions du calcul mathématique et les connecteurs logiques. Nous nous contentons ici de retracer la genèse de l'interprétation antisémantique. Il est incontestable que van Heijenoort et Hintikka, puis d'autres après eux, y ont vu la source de sa confrontation à la logique booléenne. Le fait que, selon Frege, les énoncés logiques ont un sens déterminé a bien été discuté à travers la controverse entre Frege et Schröder. Mais nous l'avons vu, Frege a affirmé ce point à d'autres endroits, et c'est directement sur lui que se base une partie de la lecture antisémantique, non sur son rapport à la logique de Boole. Finalement, la validité de l'interprétation historique de van Heijenoort concernant cette polémique est indifférente à notre recherche. Seule sa conclusion nous importe : les énoncés de la logique fregéenne sont substantiels. Et cette conclusion ne fait aucun doute.

langages, et d'en tirer certaines conclusions. Le logicien moderne n'a que faire de démontrer le tiers exclu, une de ses tâches consistera en revanche à établir que le tiers exclu est valide *selon la sémantique classique, i.e. relativement à elle.* Ce point est souvent relevé par les tenants de la lecture antisémantique. En voici une formulation récente :

> La conception schématique est métalinguistique. Les affirmations de la logique sont des affirmations à propos de schémas ou d'énoncés, et ainsi la logique s'intéresse aux caractéristiques du discours. En revanche, selon la conception universaliste, la logique s'en tient strictement au niveau des objets, établissant des lois qui déclarent simplement quelque chose à propos du monde. Ce que les lois logiques décrivent ne sont pas des phénomènes du langage ou de la représentation. (Goldfarb 2010, p. 69)

Goldfarb soutient que la logique contemporaine s'intéresse aux caractéristiques du discours, tandis que les lois logiques fregéennes se cantonnent à parler du monde. En premier lieu, il est important de lever un malentendu possible de cette formulation, qui peut suggérer une confusion entre les niveaux du langage-objet et du métalangage. Il faut préciser de quelle manière la logique contemporaine s'intéresse aux caractéristiques du discours.

Les langages *logiques*, tels qu'ils sont définis en théorie de modèles, sont schématiques. Leurs expressions bien formées sont des schémas d'énoncés. Ceux-ci ne possèdent aucun contenu, car les lettres schématiques incorporées sont en attente d'interprétation. Ainsi, ils ne parlent de *rien*, ni du monde, ni des propriétés du discours. Les expressions des langages logiques modernes ne parlent pas davantage des règles d'une langue, de la cohérence ou de la complétude d'un système, que les énoncés de l'idéographie. *Stricto sensu*, ils s'y intéressent encore moins. Car si les seconds parlent de tous les objets, y compris des expressions syntaxiques, les premières – par exemple '$P(c) \to P(c)$' – incorporent des lettres qui ne désignent rien – par exemple 'P' et 'c' –, ni un objet, ni un ensemble d'objets, ni aucune expression d'un langage.

La sémantique, pour sa part, accorde bel et bien une place privilégiée aux caractéristiques du discours. La démonstration que le schéma '$P(c) \to P(c)$' est vrai dans toutes les structures d'interprétation établit la propriété d'une *expression*. Néanmoins, il est peu probable que l'énoncé qui exprime que ce schéma est logiquement valide – '$\models$ '$P(c) \to P(c)$'' – et sa démonstration relèvent eux-même de la logique. Il ne s'agit pas là d'un théorème exprimé dans le langage-objet, mais d'un métathéorème exprimé dans le métalangage et démontré dans la métathéorie. Ces derniers incorporent des notions ensemblistes, explicites ou déguisées en second ordre, qui excèdent le strict cadre reconnu comme logique par la majorité des chercheurs contemporains. Plus important encore, ce méta-énoncé est *substantiel*. L'expression "$P(c) \to P(c)$" réfère à un objet : la formule '$P(c) \to P(c)$' du langage-objet. Que cette dernière soit dénuée de contenu n'a aucune incidence, car elle n'appartient pas au métalangage. Celui-ci ne fait pas usage de lettres schématiques vides de contenus, mais d'expressions qui, parfois, réfèrent à ces lettres schématiques (ou à des formules qui les incorporent). Le contenu de ses termes n'est donc pas sujet à interprétations. Les théorèmes du langage-objet – les expressions logiquement vraies – sont des schémas d'énoncés qui ne parlent de rien. Mais les théorèmes du métalangage sont des énoncés qui, pour exprimer des caractéristiques du discours, s'attachent à *parler* du langage-objet. Ils sont donc substantiels.

Une possible confusion provient d'un usage académique du terme 'logique', sous lequel sont aujourd'hui réunies une multiplicité de disciplines : la théorie des modèles, la théorie de la démonstration, parfois la théorie des ensembles et des catégories, ainsi que certaines branches de l'informatique. Cependant, peu de philosophes reconnaissent comme logiques les énoncés de ces

disciplines. Ces dernières *traitent* de logique dans le sens précis où elles s'intéressent aux langages et aux systèmes logiques, mais elles n'expriment pas des pensées logiques. Elles expriment bien davantage. Goldfarb aurait eu meilleur compte de désigner la théorie des modèles comme s'intéressant aux caractéristiques du discours, plutôt que la logique elle-même. Car c'est bien la première discipline qu'il a en vue, et dont il décrit les mécaniques plus tôt dans l'article.

Bien sûr, les raisons pour lesquelles les philosophes contemporains d'une part, et Frege d'autre part, distinguent, ou auraient distingué, logique et sémantique sont différentes. Pour nombre des premiers, la sémantique s'écarte de la logique dans son utilisation d'une notion d'appartenance, explicite ou déguisée. Mais la logique fregéenne incorpore une telle notion. Pour autant, une science sémantique exige l'usage d(e l'équivalent d)'un prédicat de vérité, totalement absent de l'idéographie. Quoi qu'il en soit, le problème ne se pose pas à cet endroit, il ne concerne pas la subordination de la sémantique à la logique, mais la possibilité d'une science sémantique et son rôle. Or la théorie des modèles, en parlant des langages, est une théorie scientifique qui démontre des énoncés *substantiels*. Ses expressions ne sont pas elles-mêmes vides de contenu. À ce titre, l'exigence fregéenne de substantialité ne rentre aucunement en contradiction avec la possibilité d'une théorie sémantique. Que cette dernière ne soit pas *de la logique* – que ses théorème ne soient pas des (énoncés qui expriment des) vérités *logiques* – ne soulève de difficulté ni pour la plupart des logiciens contemporains, ni du point de vue fregéen. Weiner conclut ainsi un plaidoyer contre la lecture sémantique :

> Le point n'est pas qu'il est impossible, d'après les vues de Frege, qu'il existe une science de la sémantique – bien qu'il y ait des obstacles – mais qu'une telle science serait une science particulière qui ne mérite pas le nom de 'logique'. (Weiner 2002, p. 40)

Mais les thèses de Heck, Stanley ou Dummett ne sont pas ébranlées par une telle conclusion. Elles seraient seulement mises en danger s'il était établi que la vocation de cette science particulière, dans une perspective fregéenne, se distingue nettement de la mission de la sémantique moderne.

L'argument est souvent présenté sous une forme légèrement différente, inspirée par la polémique qui opposa Frege à Hilbert. Celle-ci se tient à l'épicentre de la discorde entre camps sémantique et antisémantique car Frege réalisa, au sein d'un même article, un geste qui semble appuyer successivement l'une et l'autre de ces lectures. Dans les deux premières sections de "Sur les fondements de la géométrie" (1906d), il critiqua sévèrement l'usage hilbertien des lettres vides de contenu dans le cadre d'une démonstration d'indépendance d'axiomes, méthode pourtant devenue standard en théorie des modèles. En ce sens, il parut contredire la lecture sémantique. En revanche, dans la troisième partie de son papier, il présenta une ébauche de sa propre version d'une telle preuve. D'une certaine manière, il envisagea donc explicitement la résolution de méta-questions, ce qui s'oppose à la lecture antisémantique. Les tenants de cette dernière lèvent l'objection en s'appuyant sur une célèbre remarque à laquelle Frege procéda en amont, avant d'initier son développement :

> Avant toute chose, notons qu'à travers ces questions, nous pénétrons dans un domaine étranger aux mathématiques. Car si comme toute discipline, le développement des mathématiques procède aussi à travers des pensées, les pensées ne sont pas elles-mêmes l'objet de ses investigations. Même l'indépendance d'une pensée vis-à-vis d'autres pensées est tout à fait distincte des relations étudiées en mathématiques. Nous devons donc supposer que ce nouveau domaine a ses propres lois fondamentales essentielles aux preuves qui y sont conduites, comme les lois fondamentales de la géo-

métrie le sont aux preuves conduites en géométrie, et que ces vérités fondamentales spécifiques sont nécessaires pour prouver l'indépendance d'une pensée vis-à-vis d'un groupe de pensées. (Frege 1906d, pp. 425-426)

D'une même voix, le clan antisémantique rétorque que, quelle que soit la science spéciale envisagée ici par Frege, celle-ci s'écarterait irrémédiablement de ce que *nous* nommons 'sémantique', *i.e.* de cette *branche des mathématiques* qui a vu le jour avec les travaux de Tarski.

Dans ce passage, Frege exprime exactement ce que nous avons souligné plus haut. En parlant des mathématiques, il cible la discipline qu'il pensait réduite à la logique. Il est donc équivalent de distinguer logique et sémantique, ou mathématiques et sémantique. Là encore, le nœud du problème n'est pas situé dans l'acception du terme 'sémantique' mais dans celle du nom 'mathématique'. Si les chercheurs contemporains résistent à intégrer à la logique *stricto sensu* les (méta)théorèmes de la théorie des modèles, il s'agit incontestablement à leurs yeux de résultats *mathématiques*. Cela provient du fossé qui, selon eux, séparent les deux disciplines. Frege niait l'existence de ce fossé, non seulement en étendant les limites de la logique au-delà de celles que nous lui reconnaissons aujourd'hui – par exemple en y intégrant l'arithmétique –, mais aussi en abaissant les frontières des mathématiques en-deçà de celles que nous leur octroyons désormais – notamment en excluant toute science qui traiterait des caractéristiques du discours. Nous ne pouvons conclure que la nouvelle science envisagée par Frege soit irréductiblement distincte de la sémantique moderne sous prétexte qu'il l'ait exclue des mathématiques. Ce geste pourrait provenir *uniquement* de la différence entre ce que lui et nous nommons 'mathématiques', sans impliquer aucune distinction entre sa nouvelle science et notre sémantique. Autrement dit, sa conception des mathématiques justifie à elle seule le contenu du passage ci-dessus. Celui-ci n'établit ni que la science traitant de ce "nouveau domaine" n'atteindrait pas le niveau de technicité et de rigueur de notre sémantique moderne, ni-même que son statut ou son rôle en serait distinct.

Répétons que, de fait, Frege n'a jamais construit une théorie sémantique *formelle*, *i.e.* développée dans un langage artificiel. La logique contemporaine sortait tout juste de son cocon, et la formalisation de la sémantique exigea bien des avancées. Une de nos tâches consiste à déterminer s'il a ou non effectué *informellement* ce travail dans les passages clefs des *Grundgesetze*, malgré quelques maladresses d'écriture. Si tel est le cas, les outils tarskiens pourraient être mis au service de son système particulier en toute compatibilité avec sa conception de la logique, et une sémantique formelle construite pour l'idéographie ou, plus précisément, pour une portion cohérente de ce système. Pour l'heure, nous ne prétendons ni que l'établissement d'une sémantique s'accorde, ni qu'elle s'oppose, à toutes les thèses de Frege. Nous nous contentons d'observer que, vue sous cette angle, l'objection basée sur le caractère interprété de l'idéographie n'est pas concluante.

3.2.2.3 Variation d'interprétation

En vérité, il n'existe aucune manière convaincante de lire cette objection. Le fait que l'idéographie soit substantielle ne peut en lui-même proscrire l'élaboration d'une sémantique pour ce langage, car nous sommes aujourd'hui parfaitement en mesure de développer des sémantiques pour des langues interprétées. Pour nous en assurer, il suffit de remarquer que la *première* théorie sémantique formelle fut justement conçue pour une telle langue, comme l'expliqua Tarski dans son article fondateur :

Il reste peut-être à ajouter que nous ne nous intéressons point aux langages et aux sciences "formels" dans un sens particulier de ce terme, notamment aux sciences dont les signes et expressions ne se voient attribuer aucun sens intuitif. Par rapport à ces sciences, le problème posé ici perd toute sa raison d'être et cesse tout simplement

> d'être intelligible. Aux signes des langages concernés par les présentes considérations, nous attribuons toujours une signification tout à fait concrète et intelligible, les expressions appelées énoncés restent énoncés même traduites en langage quotidien. (Tarski 1933, p. 173)

Bien sûr, il reviendrait sur cette déclaration [31]. Avec ses étudiants, il adapterait son travail à une notion relative de vérité et donnerait naissance à la théorie des modèles. Cependant, le développement d'une sémantique formelle n'est en rien assujetti à la prise en compte de langages schématiques. Et pour preuve : en 1933, Tarski fournit la définition d'un prédicat de vérité pour un langage *interprété*, dont chaque terme possédait un contenu, conservé dans le métalangage. Une sémantique peut donc être établie pour un tel langage, et elle autorise parfaitement le traitement de méta-questions, notamment la démonstration de théorèmes d'adéquation [32]. Bien sûr, dans ce cas, il n'est pas question de prouver la validité de schémas – $\forall \mathscr{M}, \mathscr{M} \vDash \varphi$ – mais la vérité d'énoncés – $V(\varphi)$ –, ni de démontrer que les règles préservent la vérité entre des schémas dans toutes les interprétations, mais que les règles préservent la vérité entre des énoncés.

Tel quel, l'argument est donc inconséquent. L'avènement des langues schématiques à travers la théorie des modèles n'est pas concomitant de la naissance des méta-questions. Il n'existe aucun lien de causalité, historique ou philosophique, entre ces deux affaires. Cependant, il est incontestable que certains problèmes aujourd'hui pris en charge par la sémantique sont tributaires de ces langues. Pour être plus précis, disons qu'ils reposent sur la manière dont le langage-objet est traité en théorie des modèles. En effet, conçu comme un pur objet syntaxique, une langue artificielle consiste en la stricte donnée de signes primitifs et de règles de construction. Ainsi, lorsque nous parlons d'un langage *interprété*, nous ne qualifions pas en vérité une propriété inhérente au langage, nous signalons seulement que notre travail lié à celui-ci ne fera usage que d'*une seule* interprétation.

Or le procédé d'interprétation utilisé dans la position du premier Tarski est extrêmement proche de celui qu'il adopta pour créer la théorie des modèles. Comme l'indique l'extrait ci-dessus, il choisit en 1933 de conférer à ses signes primitifs une signification "concrète et intelligible" – simultanément dans le langage-objet et le métalangage – qui fut communiquée en utilisant la langue naturelle. Ensuite, il fournit dans la métathéorie les règles sémantiques qui spécifiaient la valeur des termes et formules en fonction de celle de ces signes. C'est ainsi que le langage-objet reçut une interprétation. En théorie des modèles, la méthode n'est pas fondamentalement différente. Les règles sémantiques inductives demeurent inchangées. Si nous laissons de côté la relativisation du domaine, la seule nuance provient des symboles primitifs. Puisqu'il s'agit d'utiliser différentes interprétations du langage-objet, les signes primitifs de celui-ci, dont la signification sera amenée à varier, ne peuvent être repris tels quels dans le métalangage, qui conservera toujours le même contenu. Ce sont donc les symboles primitifs du métalangage auxquels nous conférons une signification "concrète et intelligible" à l'aide de la langue naturelle, nous disposant ainsi à les utiliser pour spécifier la valeur de ceux du langage-objet.

Le virage négocié par Tarski entre ces deux périodes fut, d'un point de vue technique, extrêmement aisé à réaliser. Toutes les bases permettant d'assigner une interprétation et d'exprimer les règles sémantiques d'un langage avaient été posées dès 1933, il ne restait qu'à les exploiter à d'autres fins. La même remarque s'applique à Frege : s'il disposait aussi d'une méthode de ce genre, il était techniquement en mesure de développer et d'exploiter les outils de théorie des modèles. En d'autres termes, s'il était capable de fournir un contenu à un langage formel à travers

31. Voir par exemple le *post-scriptum* joint à cet article quelques années plus tard, et disponible dans l'ouvrage auquel nous faisons référence.

32. Tarski (1933, Section 3, théorème 4) en réalisa la preuve pour son système de 1933.

une théorie sémantique, rien ne l'empêchait de considérer plusieurs interprétations pour celui-ci, afin de traiter diverses questions. Il est vrai, comme le répètent inlassablement les tenants de la lecture antisémantique, qu'il exigeait du contenu d'un langage scientifique qu'il soit fixé une fois pour toutes ; et que le langage sur lequel une telle étude serait menée – le langage-objet – recevrait plusieurs interprétations différentes. Mais cela n'aurait soulevé aucune difficulté à ses yeux, car cette langue aurait été l'objet et non pas le vecteur d'une recherche scientifique. Ce dernier – le métalangage – aurait conservé un contenu fixe, et ainsi respecté le réquisit de scientificité.

La distinction entre langues schématiques et interprétées relève moins de la nature de ces langues que de ce que nous voulons faire *de* et *avec* elles. Si les conceptions fregéennes abritent une raison de rejeter les méthodes de la théorie des modèles, cela ne peut révéler qu'une contestation de ce que cette discipline prétend établir *via* ces méthodes, et non du droit qu'elle s'arroge de conférer différentes interprétations à un même langage, auquel Frege n'avait rien à objecter.

À quoi, donc, est utile la théorie des modèles ? L'un de ses plus grands résultats concerne la notion de logicité. Pour Frege, il ne suffisait pas que les théorèmes de l'Idéographie soient vrais, il fallait qu'ils soient *logiques*. Il convient donc de répondre de la *logicité* des axiomes et des règles de ce système. Le processus de ré-interprétation du second Tarski fut introduit pour cette même raison. Il permit de définir, non plus seulement la vérité, mais la vérité *logique*, aussi appelée 'validité'. Un énoncé est *logiquement* vrai si et seulement s'il est vrai indépendamment du contenu de ses symboles non logiques. Une règle est logiquement adéquate si et seulement si elle préserve la vérité indépendamment du contenu des symboles non logiques des prémisses et des conclusions. La théorie des modèles nous offre un critère *général* de logicité [33].

Elle permet aussi les démonstrations d'indépendance, suivant un procédé que Hilbert avait introduit, et que Frege critiqua :

> Si quelque chose est censé exprimer parfois telle pensée, parfois telle autre, alors il n'exprime en réalité aucune pensée. Les pseudo-axiomes de M. Hilbert sont de cette nature. Il s'agit de groupements de sons ou de signes écrits qui sont en apparence supposés exprimer des pensées sans, pourtant, y parvenir réellement. Il est clair à présent que de tels groupements ne peuvent être les prémisses d'aucune inférence, car inférer n'est pas une activité du domaine du sensible. À proprement parler, pas même des énoncés réels ne peuvent être les prémisses d'une inférence, mais aux mieux les pensées qu'ils expriment. Déduire quelque chose grâce à des inférences logiques à partir des pseudo-axiomes de M. Hilbert est à peu près aussi envisageable que de cultiver une parcelle de jardin aux moyens de l'arithmétique mentale. (Frege 1906d, p. 424)

La source de la critique fregéenne est facile à identifier. Le système de Hilbert pour la géométrie était sujet à variation d'interprétations. Or, selon Frege, une démonstration procède de pensées vraies en pensées vraies. Les lois fondamentales d'une science ne sont pas des énoncés du langage de cette science, mais le *sens* de certains de ces énoncés. Les pseudo-énoncés sur lesquels Hilbert entend construire le système de la géométrie incorporent des signes dénués de contenus. En conséquence ils possèdent eux-aussi ce défaut. Ils ne peuvent donc pas exprimer d'*axiomes*, ces derniers étant des pensées. Ainsi, selon Frege, Hilbert ne peut qu'envisager, comme source de la connaissance géométrique, les éléments *linguistiques* que sont ces pseudo-énoncés, étant donné qu'ils ne disposent d'aucun contenu. Il commet la même erreur que l'école formaliste de Thomae : une confusion entre les domaines du langage et du sens.

33. Notons que tous les logiciens contemporains ne reconnaissent pas ce critère sémantique. Certains défendent une conception purement syntaxique de la logicité. Cela ne leur interdit aucunement de soulever des méta-questions. Il est parfaitement possible de développer une sémantique sans lui confier la tâche de caractériser la logicité.

Il est donc vrai que Frege dénonça l'usage hilbertien des langages non interprétés, et il est tout aussi incontestable que cette utilisation est devenue commune en théorie des modèles, qu'elle a permis, dans une large mesure, la résolution de questions métasystémiques telles que l'indépendance d'axiomes. Mais il faut néanmoins procéder à une remarque, avant de tirer une quelconque conclusion. Frege n'interdit pas ici que les expressions de langues schématiques soient objets d'une investigation scientifique, il nie seulement qu'une telle recherche soit pertinente dans le cadre du problème de Hilbert ou, au moins, adéquate à la manière dont celui-ci *pose* le problème. Il ne lui reproche pas d'entreprendre l'étude d'un langage en munissant celui-ci d'interprétations différentes, il conteste que des vérités scientifiques – en l'occurrence géométriques – puissent y être exprimées sans que la totalité de ses signes soient interprétés. Il ne remet donc pas en cause la position de surplomb qu'Hilbert adopte vis-à-vis de ce langage, mais la manière dont il envisage de l'employer. Ce point se voit confirmé lorsque, dans la troisième section de son papier, il ébaucha sa propre version d'une preuve d'indépendance d'une pensée vis-à-vis d'un groupe d'autres pensées (ou, indirectement, d'un énoncé vis-à-vis d'autres énoncés). Sa méthode exploite *aussi* un processus d'interprétations et, à quelques reformulations près, ressemble à s'y méprendre aux techniques contemporaines de la théorie des modèles. Ce qu'il importe de mesurer, c'est le *prix* de ces reformulations, et ainsi l'écart véritable entre les perspectives hilbertienne et fregéenne. Le second reprocha au premier un manque considérable de clarté, à travers un usage fluctuant et (donc) imprécis des termes 'axiome' et 'définition'. Une grande part de leur correspondance et des articles qui en sont issus prend la forme d'hypothèses à cet égard. Frege envisagea les différentes acceptions compatibles avec l'usage que Hilbert (1900) fit de ces termes. Nous disposons aujourd'hui d'un siècle de recul, et savons précisément quels objectifs celui-ci poursuivait. Nous pouvons donc mener l'enquête appropriée pour déceler la source des reproches de Frege. Mais nous ne devons *en aucune manière* affirmer que la contrainte de substantialité que ce dernier faisait peser sur tout langage scientifique, y compris l'idéographie, interdit d'emblée l'élaboration d'une théorie qui étudie les propriétés sémantiques d'un langage, ou exige de limiter ce langage à une seule interprétation.

Nous avons pourtant cité de nombreux passages dans lesquels cette affirmation était avancée sans autre forme de procès. Voilà donc le genre de "stratégies dialectiques qui surgissent sans explication aux points clefs d'articles" du clan antisémantique que Tappenden évoquait. En déplorant ce manque de clarté, celui-ci s'est fait le porte-parole de l'ensemble du courant sémantique. De nombreux auteurs dénoncent une vision qui, ayant surgi dans le court article de van Heijenoort, s'est installée de répétitions en répétitions *sans être jamais justifiée ou éclaircie*. Sans aller jusque-là, nous avons constaté que les présupposés communs du clan antisémantiques ne sont pas départis d'une certaine confusion. La généralité de la logique, son caractère substantiel, le rejet des méta-questions, l'interdiction d'une sémantique, l'impossibilité de justifier les lois logiques sont réunis en un bloc indissociable sous le nom générique d''universalisme logique'. Des arguments, souvent très brefs, sont avancés en faveur de la totalité de cet "universalisme", alors qu'ils ne permettent absolument pas d'asseoir certaines de ses facettes. Il est possible qu'à travers sa critique des travaux de Hilbert, Frege ait contesté la légitimité des processus d'interprétations contemporains à démontrer l'indépendance d'axiomes. Cependant, ce rejet n'interdit pas en lui-même de développer une sémantique, ni de multiplier les interprétations d'un même langage, dans une métathéorie qui s'engage bel et bien dans le traitement de certaines méta-questions.

Pourtant, une grande majorité des articles du clan antisémantique s'ouvre sur ce genre de mélanges. Désarçonnants de naturel, ils réunissent pêle-même un lot de prémisses et une somme de conclusions sans articuler proprement les uns aux autres, comme si l'organisation en découlait spontanément. Leurs adversaires ont alors beau jeu de leur renvoyer la charge de la preuve, et

d'exiger qu'ils s'emploient eux-même à faire tenir debout ce complexe édifice. Pour notre part, nous voulons déceler ce qui se dissimule derrière ces affirmations sommaires et répétées, *i.e.* isoler les différents pans de l'argumentaire antisémantique [34]. Une partie de ce travail consiste à scinder l'idée (2) énoncée en section 3.2.1 :

- **Thèse** : Selon Frege, les vérités logiques possèdent un contenu. Au même titre que les vérités de la physique, de la géométrie, ou de tout autre science, elles sont des vérités *du monde*. Leur spécificité provient de leur généralité. Les principes logiques valent dans tous les domaines. L'Idéographie constitue l'écriture rigoureuse de ces principes. Ses énoncés axiomatiques expriment les lois logiques, ses règles de déductions correspondent aux règles logiques, et ses catégories syntaxiques imitent les catégories sémantiques et ontologiques. La logique fournit doublement les lois descriptives de l'*être vrai* et les lois normatives du *penser vrai*. Un raisonnement n'est correct que s'il se plie à ses lois.

C'est à partir de cette thèse que les membres du clan antisémantique tirent l'idée selon laquelle toute métaperspective est proscrite. Malheureusement, leur raisonnement est souvent difficile à reconstituer. En particulier, ils n'indiquent pas exactement sur quelle hypothèse, contenue dans (2), ils s'appuient :

- **Thèse**$_1$: Selon Frege, tout langage scientifique est substantiel, y compris celui de la logique. Au contraire, les langages logiques modernes ont cela de particulier qu'ils sont formels. Ainsi, la logique fregéenne fournit des lois du monde, tandis que les *métathéories* [35] modernes prodiguent les lois particulières des caractéristiques du discours à travers l'étude du comportement des langages formels.
- **Thèse**$_2$: Selon Frege, la spécificité de la logique provient de sa généralité, elle fournit doublement les lois descriptives de l'*être vrai* et les lois normatives du *penser vrai*. Un raisonnement n'est correct que s'il se plie à ses lois.

L'interdiction de toute métaperspective est tantôt ramenée au caractère substantiel de l'idéographie et des langues scientifiques en général, tantôt à la généralité de la logique, tantôt aux deux à la fois. Dans cette section, nous avons constaté que le premier versant de (2) – la thèse$_1$ – était totalement compatible avec l'étude des propriétés sémantiques d'un langage, même lorsque cette étude exige de conférer diverses interprétations au langage en cause. Attention, nous ne soutenons pas que toutes les conceptions de Frege s'accordent avec ce type de procédés. Il est vrai qu'il y eut rapidement recours à l'occasion de la polémique qui l'opposa à Hilbert, mais il examinait alors des idées qui lui étaient étrangères, et sur lesquelles il ne revint jamais par la suite. À l'instar de Ricketts (1997, p. 185), certains membres du clan antisémantique lisent cet évènement comme une incursion exceptionnelle dans un domaine qu'il aurait aussitôt déserté. À ce stade, nous affirmons seulement que l'opposition, que ce clan fait systématiquement va-

34. Parce que ce travail n'est pas fait, les acteurs du débat oublient souvent de répondre aux points cruciaux soulevés par leurs adversaires, mais non localisés clairement dans l'argumentaire. Heck est probablement le défenseur le plus radical de la lecteur sémantique. En section 2.3 de son ouvrage (2012), il discute en détail l'élément fondamental de la lecture de Ricketts : le lien entre l'existence d'une propriété de vérité et la conception fregéenne du jugement. En revanche, jamais (à notre connaissance) il ne releva le défi lancé par Weiner : concilier la lecture sémantique et le contenu du texte posthume "La logique dans les mathématiques" (1914), dans lequel Frege jugea nulle et non avenue toute tentative de définition des noms primitifs. Nul doute que la profusion d'arguments trop répétés, et trop peu étayés, n'est pas sans rapport avec les difficultés de communication entre les deux camps. Après quarante années de luttes, et malgré des progrès substantiels réalisés de chaque côté, ces groupes semblent encore séparés par une tranchée infranchissable et, scandant toujours les mêmes slogans, donnent parfois l'impression de ne prêcher que les convaincus. Cela justifie encore davantage le travail que nous espérons réaliser ici, celui d'une méticuleuse mise en ordre du débat.

35. et non la logique, comme cela est trop souvent supposé.

loir, entre langages schématiques de la logique contemporaine et langages fregéens substantiels pour les sciences constitue, eu égard au problème de la sémantique, une impasse totale. Les membres de ce groupe doivent fonder ailleurs leur conclusion. Il est possible que la thèse$_2$ donne de meilleurs résultats, *i.e.* que le caractère général de la logique justifie la dimension cloisonnante de l'Idéographie, imposant un certain internalisme qui interdise d'accéder à une quelconque métaperspective. C'est en tous cas la question à laquelle nous allons désormais nous confronter, et qui nous conduira simultanément au point (3) de la section 3.2.1.

3.2.3 L'idéographie : une grammaire idéale

3.2.3.1 Le carcan universel des pensées

Au crépuscule de sa vie, Frege écrivait :

> En tant que moyen d'expression des pensées, la langue doit se modeler sur ce qui relève de la pensée. (Frege 1923, p. 279 / 306)

Notre premier chapitre a permis d'exposer le combat qu'il mena sans relâche afin de distinguer, par leurs éléments, et rapprocher, par leurs structures, les domaines du langage et du sens. Il mit la même ferveur à dénoncer l'identification du contenu à l'expression, s'opposant au formalisme, et à prescrire une grammaire conforme à la composition logique du sens. Évoluant irréductiblement à un autre niveau, la langue doit, pour nous donner accès – pour exprimer – un sens, en imiter les traits les plus fondamentaux et, avant tout, la composition.

Frege reprochait aux langues naturelles d'échouer dans cette tâche. La construction d'un langage artificiel avait pour objectif de remédier à ce défaut. La morphologie de l'idéographie était donc, à ses yeux, adaptée à l'expression rigoureuse de n'importe quelle science. Il ne l'envisageait pas comme un outil approprié exclusivement aux développements de la logique et, donc, de la part importante des mathématiques qu'elle comprend, mais comme le cadre linguistique idéal pour le développement des sciences en général. Dès 1879, il expliquait :

> J'attends une application pleine de succès de ma langue formulaire partout où l'on doit particulièrement tenir à la force concluante de la démonstration, comme dans le fondement du calcul différentiel et intégral.
>
> Il me paraît même plus facile d'étendre le domaine de ce langage formulaire à la géométrie. Il faudrait seulement ajouter encore quelques signes pour les rapports intuitifs qui y apparaissent. De cette manière, on obtiendrait une sorte d'*analysis situs*. (Frege 1879b, p. VI / 8)

Lorsqu'il est crucial de s'assurer minutieusement de l'exactitude d'une démonstration, le langage se doit de refléter la structure logique, et l'idéographie est de circonstance. Frege ne limitait pas son usage aux strictes sciences pour lesquelles cette rigueur est la plus importante, il privilégiait seulement ces disciplines vis-à-vis de l'ordre dans lequel l'idéographie devait être étendue. Plus une science dépend de sa bonne tenue logique, plus urgent est son développement dans ce langage. À cet égard, nous connaissons la place qu'acquirent les mathématiques (hors géométrie) à ses yeux. Étant purement et simplement de la logique, leur mise en ordre ne pouvait souffrir de délai. La géométrie et certaines branches de la physique devaient suivre immédiatement. Dans l'idéal, aucune science n'en réchapperait. Néanmoins, la rigueur logique présente une sérieuse contrepartie : elle rallonge considérablement les démonstrations. Certaines disciplines, plus distantes de ces enjeux, pourraient s'épanouir à bon droit hors de cette langue. L'Histoire serait peut-être parmi elles. Frege ne dit rien des limites pratiques de l'extension de son outil. Il se contenta de reconnaître que, face à l'ampleur de la tâche, il entreprenait la part, essentielle

mais limitée, de la construction de ce système, puis de l'analyse logique et de la dérivation des théorèmes mathématiques fondamentaux. Il fournit quelques précisions supplémentaires :

> C'est pourquoi l'on peut dès lors viser à réaliser avec les plus grandes chances de succès un comblement des lacunes des langages formulaires déjà existants, une connexion de leurs domaines jusqu'ici séparés à l'étendue d'un seul et une extension à des domaines qui jusqu'à présent manquaient à un tel langage. (Frege 1879b, p. VI / pp. 7-8)

L'idée d'une unification de nombreuses sciences dans un langage parfait est ici manifeste. Mais davantage encore que ce programme pratique, nous importe l'idée que toute science, toute *théorie*, peut, *en principe*, profiter de ce langage. Bien entendu, la langue formulaire manque de ressource pour exprimer tous les énoncés logiques, et l'idéographie se cantonne à ceux-ci. L'intégration de sciences non logiques – intuitives ou empiriques – n'irait donc pas sans *enrichissement* du langage, c'est-à-dire sans y ajouter de nouveaux symboles référant aux fonctions et objets fondamentaux de ces disciplines. Mais un énoncé scientifique se doit d'exprimer une pensée, et les pensées sont toutes composées conformément à la grammaire de l'idéographie, même lorsque celle-ci n'est pas en mesure de les exprimer, par manque de symbole. C'est donc avant tout par sa morphologie que ce langage est parfaitement adapté.

S'il convient au développement de toutes les sciences, celui d'une théorie sémantique ne fait pas exception. Autrement dit, les énoncés (allemands) dispersés au sein des *Grundgesetze* ne peuvent former la base d'une telle théorie que s'ils sont *traduisibles* dans la langue idéale. C'est précisément à cet endroit que les membres du clan antisémantique fondent une grande part de leur critique. Pour certaines raisons que nous allons discuter, cette traduction leur semble impossible. Selon eux, les passages en question servent un unique objectif : fournir diverses indications aux lecteurs, essentielles à la compréhension du fonctionnement de l'idéographie, mais qui échappent au royaume du sens. Il ne s'agirait donc pas d'énoncés scientifiques, mais exclusivement propédeutiques.

Bien entendu, Frege n'a jamais soutenu que seuls les énoncés du langage idéal étaient chargés de sens. Une grande part de son travail consista à exprimer les sens de – *i.e.* à traduire des – phrases allemandes dans l'idéographie afin de rendre ceux-ci plus manifestes, et de dégager les rapports logiques qu'ils entretiennent. Néanmoins, selon ces auteurs, toutes les phrases des langues naturelles ne possèdent pas cette propriété. Or il ne s'agirait pas toujours d'un défaut. À certaines occasions, l'usage d'énoncés dénués de sens serait exigé par la nature de l'information qu'ils font circuler. C'est à ce titre que Frege aurait sollicité ce qu'il nomma des 'élucidations'.

La distinction entre théorie et élucidation est au cœur de notre débat. Afin de cerner ses enjeux, il importe d'examiner la scission au sein des énoncés de la langue naturelle entre ceux, chargés de sens, qui admettent une traduction idéographique, et ceux, dénués de contenu, qui n'en tolèrent aucune [36].

36. La manière dont nous présentons ici le rôle de l'analyse logique exige quelques avertissements. Pour l'heure, nous sommes restés au plus près des textes de Frege, dans lesquels celui-ci affirma fréquemment que le nouvel énoncé, résultant de l'analyse, exprimait le même sens que l'énoncé analysé. Néanmoins, cette idée présente certaines difficultés, une fois confrontée à d'autres franges de sa philosophie. Deux alternatives sont envisageables. Il est possible d'alléger les contraintes qui pèsent sur la proximité entre les sens des deux phrases. Blanchette (2012, Partie 4), parmi d'autres, emprunta ce chemin. Nous pouvons aussi estimer que le rôle de l'analyse logique consiste à remplacer les énoncés des langues naturelles qui, *stricto sensu*, n'expriment *aucune* pensée, par des énoncés dotés de sens. Il convient alors de mettre en lumière la relation entretenue par l'énoncé privé de contenu et son correspondant idéographique. Cette lecture soulève un certain nombre de problèmes, auxquels Weiner (1997) tenta d'apporter des réponses.

Nous aborderons cette question dans la section 3.3.10.2 du présent chapitre. Pour l'heure, notons simplement qu'elle est indépendante de nos considérations actuelles. En effet, celles-ci se basent sur un constat que les différentes alternatives n'altèrent aucunement : pour Frege, *toute* pensée est composée selon les catégories sémantiques reflétées

3.2.3.2 Théorie et élucidations

En 1976, Peter Geach apporta une lumière neuve sur l'influence que Frege exerça auprès de Wittgenstein :

> Je soutiens que certains aspects fondamentaux du contraste wittgensteinien entre dire et montrer étaient déjà visibles chez Frege. (P. Geach 1976, p. 55)

Selon lui, l'idée d'une prison catégoriale, dont les murs devraient – mais ne peuvent – être brisés pour être décrits, trouve sa source au sein même des textes de Frege :

> Frege estimait déjà – ou sa philosophie de la logique l'aurait forcé à admettre – qu'il existe des distinctions entre catégories logiques qui s'exhibent elles-mêmes dans un langage formalisé correctement construit, mais qui ne peuvent être assertées dans aucun langage : les énoncés par lesquels nous tentons de les communiquer dans les langues vernaculaires sont logiquement inadéquats, et ne tolèrent aucune traduction par des formules bien formées de la logique symbolique. (P. Geach 1976, p. 55)

Certains aspects du fonctionnement du sens ne peuvent être racontés, car cela exigerait de transgresser ce fonctionnement, et nous placerait derechef du côté du non-sens. Voilà exactement l'idée par laquelle Wittgenstein avertissait son lecteur, en prélude au *Tractatus* :

> Le livre tracera donc une frontière à l'acte de penser –, ou plutôt non, pas à l'acte des pensées, mais à l'expression des pensées. [...]
>
> La frontière ne pourra donc être tracée que dans la langue, et ce qui est au-delà de cette frontière sera simplement dépourvu de sens. (Wittgenstein 1993, p. 31)

Le livre s'achève sur un énoncé qui, victime de la même impuissance, fit à nouveau droit à cette frontière :

> Mes énoncés sont des élucidations en ceci que celui qui me comprend les reconnaît à la fin comme dépourvues de sens lorsque, par leur moyen, en passant sur elles, il les a surmontées. (Il doit pour ainsi dire jeter l'échelle après y être monté). (Wittgenstein 1993, p. 112)

Geach estime que Frege a su anticiper ou, plutôt, influencer ces différentes remarques de Wittgenstein. Comment justifie-t-il une telle conclusion ? En premier lieu : à travers le terme 'élucidation' [*Erläuterung*] choisi par Wittgenstein. Celui-ci fut souvent employé par Frege lorsque, dans la langue naturelle, il se confrontait au besoin d'utiliser des noms d'une certaine catégorie pour référer à des entités d'une autre, dérogeant par là même aux règles qu'il tentait de décrire. La proximité entre les deux situations inextricables dans lesquelles ces philosophes se trouvaient, et l'utilisation du même mot pour qualifier leurs explications dans ce contexte, vont dans le sens de l'interprétation de Geach. Celle-ci fut reprise par un grand nombre d'auteurs. Philippe de Rouilhan (1988) proposa une fine analyse du paradoxe auquel Frege faisait face ; tandis que Joan Weiner exploita les remarques de ce dernier concernant les élucidations pour éclaircir la notion wittgensteinienne :

> Ma stratégie consistera à utiliser les discussions de Frege au sujet des élucidations comme commentaires des remarques de Wittgenstein.
>
> Cette stratégie d'interprétation peut sembler singulière, et mérite quelques remarques. Je ne prétends pas que la présence du terme 'élucidation' dans les écrits de Frege et

par la grammaire de la langue idéale, elle est donc idéalement exprimable dans celle-ci. Autrement dit, si une *théorie* sémantique – *i.e.* une discipline *scientifique* – est possible, alors elle peut être développée dans un tel langage.

> Wittgenstein soit suffisante pour établir qu'il possède la même signification pour les deux auteurs. Bien que Frege ait incontestablement eu une influence dans les écrits de Wittgenstein, les remarques de Frege sur les éludicidations et le non-sens ne sont pas traditionnellement vues comme des exemples de cette influence. Pourtant, il est notable que toutes les remarques du *Tractatus* concernant les élucidations apparaissent quasiment mot pour mot dans les écrits de Frege. Wittgenstein écrivit qu'il pourrait établir l'influence que Frege avait exercé sur lui "là où à première vue personne ne pourrait la déceler". Ma stratégie d'interprétation est motivée par le pressentiment que le discours de Wittgenstein concernant les énoncés dénués de sens est localisé précisément à cet endroit. (Weiner 2001, p. 44)

Notre objectif n'est pas d'évaluer la pertinence de ce parallèle, ni d'examiner les positions de Wittgenstein. Nous nous intéressons exclusivement à celles de Frege. Mais c'est aussi dans son analyse de ces dernières que Weiner, parmi d'autres, accorde une place privilégiée à la notion d'élucidation. Selon elles, les passages des *Grundgesetze* qui, aux yeux de certains, posent les bases d'une théorie sémantique, se situent sur le strict terrain élucidatoire, et sont *stricto sensu* dénués de contenu. Ils seraient ainsi tenus à l'écart du royaume des sciences :

> Ce qui peut être dit à propos des objets ne peut l'être à propos des fonctions et des concepts. En particulier, comme Frege l'écrivit à Russell : "Nous ne pouvons pas rigoureusement dire d'un concept qu'il réfère à quelque chose". Et il poursuit : "À proprement parler, l'expression 'la référence d'un nom de fonction' ne doit pas être employée". Mais les noms simples de Frege sont tous des noms de fonctions. Et le quelque chose auquel un nom réfère est sa référence. Il s'ensuit que, à proprement parler, nous ne pouvons pas dire que ces noms réfèrent à quelque chose. Ainsi, le titre du §31 "Nos noms primitifs réfèrent à quelque chose", ne peut être l'affirmation d'une vérité prouvée dans cette section. (Weiner 2002, p. 18)

Weiner cible ici le §31 des *Grundgesetze*, dans lequel Frege semble s'engager dans un raisonnement méta-systémique. En d'autres lieux [37], elle étend sa critique à la totalité des passages à consonance sémantique. Par conséquent, Frege n'aurait pas développé une sémantique informelle, mais se serait contenté d'instruire le lecteur sur le fonctionnement de son langage à travers des énoncés insensés, bien qu'éclairants [38].

Voici donc la manière dont les membres du courant antisémantique exploitent le couple théorie-élucidation pour contester la présence de traces d'une sémantique dans les *Grundgesetze*. Néanmoins, la comparaison effectuée avec Wittgenstein peut être dangereuse, et exige beaucoup de vigilance. En effet, comme Geach le souligne, si la distinction entre dire et montrer existait chez Frege, elle fut incontestablement "affirmée avec plus d'insistance" (1976, p. 56) par Wittgenstein. Nous pouvons même aller plus loin, car Frege employait le terme 'élucidation' de manière équivoque, sans jamais évoquer ni, nous croyons, remarquer l'ambiguïté. Parmi les

37. par exemple dans (Weiner 1997).

38. Weiner affirme clairement que Frege ne développe pas de sémantique dans les *Grundgesetze*. Ses conclusions les plus fortes – si elles sont correctes – permettent incontestablement d'établir davantage : aucune théorie sémantique n'est *compatible* avec les idées fregéennes. Le lecteur peut trouver un exemple très clair de ce point dans (1997, pp. 271-272). Pourtant, il lui arrive de ne pas tenir une position si radicale :

> Ce n'est pas qu'il soit impossible, étant donné les vues de Frege, qu'il existe une science sémantique – bien qu'il y ait des obstacles. (Weiner 2002, p. 40)

Les raisons pour lesquelles Weiner retient parfois sa main ne nous apparaissent pas clairement mais, finalement, elles nous sont indifférentes. Il nous importe seulement de tenir compte de ses arguments dans notre analyse, en éclairant proprement la notion d'élucidation.

exemples d'élucidations qu'il proposa, seules certaines sont dépourvues de sens. De plus, il n'a pas su voir les conséquences de ses développements concernant cette distinction, en ne localisant jamais expressément les énoncés en question sous le règne du non-sens. Mais même en tirant pour lui cette conclusion, il n'en reste pas moins que le rôle auquel il dédiait les élucidations ne limitait pas ces dernières à ce domaine. Autrement dit, en tenant compte de ce qu'il n'a pas su affirmer clairement, une frontière se trace entre deux types d'élucidations : celles qui, conformément à l'usage qu'en fit Wittgenstein, apportent des indications mais n'expriment aucune pensée – ou, au moins, manquent ce qui est visé –; et celles qui possèdent de plein droit leur place dans le royaume du sens. Le titre que, en suivant une formule courante dans la littérature, nous avons conféré à cette section peut être trompeur, car il laisse croire que les domaines de la théorie et celui des élucidations sont disjoints. Or, chez Frege, ils présentent incontestablement une intersection non vide. Ainsi, il ne suffit pas aux défenseurs de la lecture antisémantique d'avancer l'argument selon lequel Frege tenait pour élucidatoire le contenu des passages qui s'apparentent à des énoncés ou des démonstrations sémantiques. À cela, nous n'avons rien à opposer. Nous le verrons : de nombreux indices textuels appuient cette conclusion. L'enjeu réside dans le type d'éludication qui est là-bas impliqué : celles qui sont *de jure* reléguées au niveau de l'insensé, ou celles qui peuvent prétendre à intégrer le cercle privilégié des sciences [39]. En d'autres termes, il s'agit de comprendre si ces énoncés expriment des *pensées*, et si ces raisonnement procèdent bien à travers une succession de *pensées* dont les unes sont justifiées (extra-logiquement) par les autres. À cette fin, il importe de faire la lumière sur ce qui, conformément aux thèses fregéennes, est cloisonné au niveau du non-sens, et ainsi d'éclairer proprement les différents versants de cette notion d'élucidation.

3.2.3.3 Élucidations et définitions

Bien qu'on trouve le terme '*Erläuterung*' dans un grand nombre de textes fregéens, il ne fut l'objet d'explications détaillées qu'à deux occasions : lors de la controverse avec Hilbert (1906d), et au sein du long texte posthume "La logique dans les mathématiques" (1914). Dans ce dernier, Frege affirma :

> Venons-en aux *définitions* [*Definitionen*]. On doit distinguer les définitions proprement dites des *élucidations* [*Erläuterungen*]. Quand on débute en sciences, l'emploi de mots ordinaires est inévitable. Mais ces mots, pour la plupart, ne sont pas vraiment appropriés à des fins scientifiques, parce qu'ils ne sont pas assez déterminés et fluctuent dans leur usage. La science a besoin de termes techniques aux références déterminées et fixées; et, pour parvenir à comprendre ces références et à exclure d'éventuels contresens, nous donnons des exemples illustrant leur usage. Bien entendu, en procédant ainsi, il nous faut encore utiliser des mots ordinaires, lesquels

39. Weiner elle-même reconnaît l'existence de cette frontière :

> Les élucidations de Frege ne sont en aucun cas limitées aux expressions qui manquent sa pensée. Le fait que chaque concept subsume ou ne subsume pas chaque objet constitue un aspect de la vision fregéenne des concepts. Et cette affirmation, loin de manquer sa pensée, d'être fausse ou insensée, est une expression dans la langue naturelle d'une loi logique [bien qu'il s'agisse d'une élucidation].
> [...]
> Nous ne pouvons donc pas tenir un énoncé pour élucidatoire en vertu de son contenu, ni nier qu'une discussion soit élucidatoire parce qu'elle semble intégrer une preuve. (Weiner 2001, p. 20).

Weiner tente ici de montrer que le contenu du §31 des *Grundgesetze* est élucidatoire, bien que Frege semble y proposer une démonstration. Mais, précisément, si le fait qu'un passage consiste en diverses élucidations ne suffit pas à le maintenir à l'écart des sciences, alors cette conclusion ne permet en aucun cas d'établir que le §31 ne contient pas un authentique raisonnement métalinguistique. La décision doit être prise autrement.

> peuvent manifester des défauts semblables à ceux que les élucidations sont censées lever. Il semble donc que nous soyons de nouveau contraints de faire et refaire sans cesse la même chose, en fournissant de nouvelles élucidations. D'un point de vue théorique, on ne parvient jamais vraiment à son but en procédant ainsi. Pourtant, en pratique, on réussit à parvenir à une compréhension de la référence des mots. Bien sûr, il faut pouvoir compter sur une rencontre de l'intelligence, sur le fait que les autres devinent ce que nous avons à l'esprit. Mais tout ceci précède la construction d'un système et ne lui appartient pas en propre. En construisant un système il faut partir du principe que les mots ont une référence déterminée et que nous savons en quoi elle consiste. On peut donc, à ce stade, laisser les élucidations de côté et se concentrer sur la construction du système. (Frege 1914, p. 224 / 246)

En premier lieu, notons que Frege implique ici les références et non les sens des symboles primitifs bien que, en général, la référence d'une expression ne détermine pas son sens. Deux expressions qui partagent une référence expriment parfois des sens différents. Ceci vaut dans le cadre spécifique de la logique dont de nombreuses pensées vraies sont distinctes. De plus, il n'est aucunement nécessaire de connaître la référence de toutes les expressions d'un langage pour en comprendre le sens. Autrement, personne ne maîtriserait le langage des mathématiques à moins d'en déterminer la totalité des théorèmes. Ainsi, à l'instar de la trajectoire empruntée dans les *Grundgesetze*, où le problème du sens n'est quasiment pas traité au profit de celui de la référence, Frege soulève dans ce dernier cadre une difficulté qui se pose aussi – et dont il savait qu'elle se posait – dans le premier. On peut néanmoins comprendre les raisons qui l'ont motivé à favoriser l'axe de la référence dans la majorité des textes postérieurs à 1891. À ses yeux, un mot ne peut désigner une référence sans l'intermédiaire d'un sens. Celui-ci consiste en la manière dont la référence en question est déterminée. Pour fixer la référence d'un mot, il faut donc indiquer un moyen de déterminer celle-ci, et ainsi dévoiler le sens du terme en jeu.

La difficulté soulevée dans l'extrait ci-dessus, bien connue, est celle de la régression à l'infini qui guette toute démarche de définition des mots d'un langage à l'intérieur de ce langage. En effet, selon Frege, pour répondre aux exigences de rigueur que l'idéographie était destinée à atteindre, les définitions devaient elles-mêmes être effectuées dans ce langage. Il leur octroyait un rôle extrêmement restreint : identifier le sens d'un nouveau signe à celui, connu car préalablement spécifié, d'une autre expression. Il introduisit le procédé au §27 :

> Une définition est toujours présentée sous la forme d'une équation préfixée du signe '$\Vdash$'. Nous écrirons toujours le signe explicatif à gauche du signe d'égalité, et le signe expliqué à sa droite. Le premier sera composé de signes connus. (Frege 1893, p. 45)

En guise d'exemple, considérons le symbole '$\frown$' introduit dans le second chapitre. Il se définit à travers la formule suivante :

$$\text{`}\Vdash \backslash \dot{\alpha} \left(\begin{array}{l} \top \overset{\mathfrak{g}}{\smile} \top \; \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \quad\;\; \llcorner \; u = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) = a \frown u\text{'}$$

Remarquons que les symboles figurant à gauche du signe d'égalité sont, à l'exception de 'a' et 'u', des étiquettes de noms primitifs de l'idéographie. 'a' et 'u', quant à eux, jouent le même rôle qu'au sein des autres énoncés du langage.

L'expression complète *stipule* que le nouveau nom de fonction '$\xi \frown \zeta$' possède non seulement la même référence, mais aussi le même sens, que le nom de fonction :

$$\text{‘}\backslash\dot{\alpha}\left(\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\ \mathfrak{g}(\xi)=\alpha\\ \quad\llcorner\ \zeta=\dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)\text{’}$$

Ceci étant fait, le nom ‘$\xi\frown\zeta$’ est intégré à bon droit à l'idéographie, et peut figurer dans différents énoncés. Comparons l'expression par laquelle Frege effectue la définition à l'énoncé suivant :

$$\text{‘}\vdash\backslash\dot{\alpha}\left(\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\ \mathfrak{g}(a)=\alpha\\ \quad\llcorner\ u=\dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)=a\frown u\text{’}$$

Syntaxiquement, ils ne diffèrent que par leurs préfixes. Sémantiquement, ce dernier énoncé manifeste le jugement que, quels que soient les objets Δ et Γ, l'objet :

$$\backslash\dot{\alpha}\left(\begin{array}{l}\top\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\top\ \mathfrak{g}(\delta)=\alpha\\ \quad\llcorner\ \Gamma=\dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)$$

est identique à l'objet $\Delta\frown\Gamma$. Dans ce contexte, le signe d'égalité *exprime* l'identité des *références*. Au contraire, dans le cas de la définition, ce symbole *spécifie* – plutôt qu'il n'exprime – l'identité des *sens* – et seulement *a fortiori* celles des références.

L'intérêt de ces définitions est limité. Elles ne servent qu'à raccourcir l'écriture des expressions en permettant à des signes simples de figurer en lieu et place de noms complexes. Les symboles définis peuvent être à loisir remplacés par les expressions initiales, ils sont réductibles aux signes primitifs, et ne jouent donc aucun rôle théorique. Ils améliorent seulement la lisibilité des formules.

Il est bien sûr essentiel que chaque définition respecte des règles strictes. Par exemple, il importe que tous les symboles du *definiens* soient déjà connus, et que le *definiendum* soit un nom simple dont l'étiquette est, pour sa part, totalement inédite. Frege énonça au §33 ces différents principes ; ils nous assurent que chaque nom défini possède un sens et une référence si tant est que les noms constitués des seuls noms primitifs de l'idéographie en sont aussi dotés. Pour Frege, cela ne faisait aucun doute dès lors que les noms primitifs eux-mêmes en disposaient. L'idéographie exposant par sa structure la composition du sens et les opération entre références, le sens et la référence d'un nom sont déterminés à partir de ceux de ses constituants :

> Une *définition est une stipulation arbitraire* par laquelle on introduit un nouveau signe pour remplacer une expression composée dont nous connaissons le sens à partir de sa composition. Un signe qui n'avait jusque-là aucun sens acquiert, à travers la définition, le sens d'une expression composée. (Frege 1914, pp. 228-229 / p. 251)

Il s'attacha à (tenter d')établir proprement ce point dans le §30. Néanmoins, encore fallait-il spécifier un sens et une référence à tous les noms *primitifs*. Une telle démarche était essentielle pour enclencher le processus de définition – pour éviter la régression à l'infini – et ne pouvait donc en aucun cas exploiter ce processus.

Voilà donc le problème auquel Frege se confronta dans le long extrait ci-dessus. La détermination du sens d'une expression complexe exige la donnée des sens des signes simples qu'elle incorpore. Mais le sens de ces signes n'ont eux-même pu être fixés par définition qu'à travers ceux, déjà connus, d'autres signes. Pour échapper à la régression, il est nécessaire de considérer des signes simples dont le sens n'est déterminé ni par composition, ni par définition : les noms

primitifs. Tant que leur contenu n'est pas spécifié, aucune expression du langage n'est chargée de sens. Pour parvenir à ce point, il n'est donc pas question de procéder à l'intérieur du langage. Nous sommes contraints de recourir à des élucidations dans les langues vernaculaires, afin de réaliser en amont un travail qui "précède la construction [du] système et ne lui appartient pas en propre". Lorsque celui-ci est terminé, alors seulement nous pouvons "laisser les élucidations de côté et nous concentrer sur la construction du système".

Bien sûr, la démarche est extrêmement problématique. L'intérêt d'une langue idéale consiste à exprimer de pensées qui ne sont qu'imparfaitement contenues dans les énoncés des langages naturels. Or nous fixons le sens des éléments primitif de cette langue, dont dépend celui de toutes ses expressions, en utilisant ces langages défaillants. Il n'existe donc, aux yeux de Frege, aucune garantie de succès. Il faut "compter sur une rencontre de l'intelligence, sur le fait que les autres devinent ce que nous avons à l'esprit". Jamais Frege ne fut plus clair sur la manière dont les élucidations atteignaient leur but. Il nous faudra donc, pour le comprendre plus précisément, examiner directement sa propre introduction des noms primitifs de l'idéographie, au sein des *Grundgesetze*. Pour l'heure, nous souhaitons lever deux objections qui, à ce stade, pourraient nous être adressées.

D'une part, pour spécifier le sens des signes primitifs d'un langage parfait, rien n'interdit d'utiliser les termes d'une *autre* langue idéale préalablement construite. Ce faisant, nous échappons aux problèmes de l'imprécision des énoncés élucidatoires. Néanmoins, cette solution ne présente aucun intérêt dans une perspective fregéenne. Une fois qu'un langage idéal a été bâti relativement à une science donnée (logique ou non), il n'existe pas de raison de réitérer l'entreprise. Un tel langage permet d'exprimer adéquatement, précisément, clairement les sens. Il est en mesure d'accomplir intégralement sa tâche, et rien ne sollicite le développement d'un *alter ego*, qui jouerait strictement le même rôle. Le problème intervient donc seulement lorsqu'une discipline n'est encore pratiquée qu'au sein des langues vernaculaires.

D'autre part, nous pourrions envisager de recourir à des définitions d'un genre différent, réalisables à l'intérieur du langage en jeu : les définitions axiomatiques. Ce procédé est couramment utilisé en théorie des modèles. Considérons par exemple les deux axiomes liés à la relation d'ordre strict :

- $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
- $x < y \rightarrow \neg y < x$

Contrairement à ce qui se produit lors des définitions fregéennes, le sens du signe '$\xi < \zeta$' n'est pas ici identifié à celui d'une expression complexe. La circularité semble donc évitable. Néanmoins, ces énoncés intègrent aussi les noms '$\xi \wedge \zeta$', '$\neg\xi$' et $\xi \rightarrow \zeta$', dont les sens devraient être spécifiés au préalable *via* d'autres définitions axiomatiques. Ultimement, il faudrait fixer le sens de certains signes simples en n'impliquant, outre les lettres pour porter la généralité, *seulement* ces signes simples.

Mais, sans même soulever ce problème, Frege rejeta radicalement ce type de définitions. En examinant le travail de Hilbert, dans lequel celles-ci étaient mises à contribution, il conclut qu'une telle démarche, en autorisant diverses interprétations – différentes *références* – pour le signe '$\xi < \zeta$', ne parvenait pas à fixer son sens. Cette critique doit bien sûr être mise en perspective avec sa conception des sciences. Selui lui, ces dernières contiennent un certain nombre de pensées vraies, intégrées à des domaines précis. Or il est possible d'assigner plusieurs références distinctes – et ainsi plusieurs sens – au nom '$\xi < \zeta$' afin de rendre vrais les énoncés ci-dessus. Ces derniers ne suffisent donc pas à spécifier le sens du nom en question, et n'expriment aucune pensée vraie, *i.e.* aucune vérité, d'aucun domaine scientifique.

Selon Frege, Hilbert parvenait seulement à définir un concept de *second* niveau par ce biais :

$$\Vdash\ <_{\beta,\gamma}(f(\beta,\gamma)) = \forall\mathfrak{a}\forall\mathfrak{b}\forall\mathfrak{c}\Big((f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \wedge (f(\mathfrak{b},\mathfrak{c})) \rightarrow f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})) \wedge (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \rightarrow \neg f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}))\Big)$$

Cette définition ne permet d'assigner une *unique* référence au nom de *premier* niveau '$\xi < \zeta$' que si un *unique* concept tombe dans $<_{\beta,\gamma}(\varphi(\beta,\gamma))$. Or cela n'est pas le cas [40].

Attention ! La critique que Frege adressa à Hilbert ne l'engage absolument pas dans un rejet d'une science sémantique qui, en faisant varier le contenu de certains termes, décrirait le lien entre des expressions et leurs références. Frege se contenta d'affirmer que les énoncés scientifiques devaient tous posséder un sens et une référence déterminés. Mais cela ne s'oppose pas à l'idée d'un langage-objet formel dont l'interprétation serait stipulée dans un métalangage. Dans un tel cas, les expressions du langage-objet seraient certes relatives à cette interprétation, mais celles du métalangage pourraient éviter d'en faire usage – et se limiter à les mentionner –, conservant ainsi un contenu fixe. Frege aborda lui-même une telle possibilité à la fin de son article :

> Imaginons un vocabulaire, non pas, cependant, dans lequel les mots d'un langage sont mis en correspondance avec ceux d'un autre langage, mais où des deux côtés se tiennent les mots d'un même langage mais ayant des sens différents. (Frege 1906d, p. 426)

La science en question n'est alors pas développée dans ce vocabulaire, dont les noms se voient attribuer différents contenus, mais dans un langage qui *traite* de ce vocabulaire, et dont les expressions possèdent un sens déterminé. Hilbert, au contraire, identifiait le socle de la *science* géométrique à un ensemble d'énoncés au contenu indéterminé – que Frege nommait des 'pseudo-axiomes'. Or, selon celui-ci, si une science peut parler *d*'un langage formel, elle ne doit en aucun cas s'exprimer *dans* un langage formel, faute de perdre toute substance, *i.e.* d'échouer à exprimer des pensées. La définition d'un terme scientifique doit donc lui octroyer un sens et une référence *uniques*. Lorsqu'aucun langage idéal ne permet encore d'exprimer les pensées d'un domaine quelconque, il n'existe d'autre solution que de s'appuyer sur les langues vernaculaires afin d'octroyer des sens (appartenant à ce domaine) à certains noms simples de ce nouveau langage, lesquels détermineront ceux des noms complexes et, bien sûr, des noms définis à travers ces derniers. Voilà un cadre précis dans lequel Frege en appelait aux élucidations.

Néanmoins, rien ne dit que ces élucidations sont touchées par le problème, soulevé par Geach, de l'ineffable fonctionnement du sens. Dans l'extrait ci-dessus, Frege ne prétend pas qu'il n'existe aucun sens capables collectivement de fixer celui des signes primitifs de la langue idéale. Il n'accable pas le contenu des énoncés des langues naturelles destinées à cette tâche, mais seulement le fait que ces énoncés sont incapables d'exprimer adéquatement ce contenu. Son propos est le suivant : on ne peut identifier le sens des signes du nouveau langage à celui d'un mot allemand, car les mots allemands n'ont pas de sens parfaitement déterminés, ils varient dans leur usage.

40. En 1906, Frege formula sa critique dans le cadre géométrique qui était celui de Hilbert. Il incrimina sa définition du concept de *point* :

> [Hilbert] a à l'esprit un concept de second niveau dans lequel tombent d'autres concepts, différents du concept-point euclidien. Bien sûr, ce concept de second niveau doit aussi être complètement déterminé, mais il se comporte vis-à-vis des concepts de premier niveau qu'il subsume comme un concept de premier niveau se comporte vis-à-vis des objets qu'il subsume. Quand nous considérons la multiplicité de ces concepts de premier niveau (concepts-point), nous comprenons que la notion à laquelle nous sommes confrontés est indéterminée et ambigüe. (Frege 1906d, p. 309)

Le concept de second niveau défini par Hilbert subsume une multiplicité de concepts-point, et ne détermine en aucune manière le concept euclidien visé.

La méthode la plus adaptée consiste donc à employer différents mots allemands dans différents contextes pour, en multipliant les usages et les exemples, réduire considérablement le risque de quiproquos ou de contresens. Si la langue naturelle exprimait adéquatement son contenu, alors il suffirait d'attribuer aux symboles de l'idéographie les contenus de termes de cette langue. Mais, si la langue naturelle exprimait adéquatement son contenu, Frege n'aurait pas besoin d'idéographie. Le présent problème ne réside pas dans le fait que, par nature, certaines informations ne se prêtent pas à l'expression, mais tient à la difficulté d'exprimer précisément un sens à travers des termes confus.

Sur cette base, certains auteurs contestent à tort le caractère élucidatoire des passages qui sont identifiés par Heck comme le noyau dur du développement informel de la sémantique dans les *Grundgesetze*, et notamment ceux dans lesquels les signes primitifs sont introduits. Patricia Blanchette est de ceux-là :

> Premièrement, il ne semble pas nécessaire, dans ces lieux de la *Begriffsschrift* et des *Grundgesetze*, d'aider le lecteur à saisir le sens des signes en question : tout ce qui est requis pour saisir ces sens a été déjà explicitement formulé lors de l'introduction de ces signes. Deuxièmement, les "élucidations" sont, pour Frege, ce dont on se sert lorsque les définitions sont impossibles, *i.e.* lorsque les concepts qu'on tente de communiquer sont trop simples pour admettre une analyse supplémentaire en d'autres concepts préalablement saisis. Ainsi, par exemple, la distinction entre fonctions et objets ne peut, pour Frege, qu'être 'pointée' ou éclairée à travers des élucidations. [...] Mais les élucidations ne sont pas nécessaires dans les sections de la *Begriffsschrift* et des *Grundgesetze* concernées, parce qu'on peut dire en allemand "le cas dans lequel a est affirmé et b est nié est nié". On fournit ainsi explicitement, et sans impliquer d'élucidation, la référence de '$a \to b$', et on peut procéder de manière similaire pour les autres signes primitifs. (Blanchette 2012, p. 173)

Blanchette donne deux arguments. D'une part, les élucidations sont destinées exclusivement à aider le lecteur à maîtriser le langage. Or cette tâche est accomplie dès que le sens des signes primitifs est communiqué. Donc les passages qui ne concernent pas ces derniers, par exemple ceux dans lesquels Frege discute ses règles et ses axiomes, ne peuvent être des élucidations. De plus, les élucidations ne sont pas toujours requises pour atteindre cet objectif. Elles sont superflues lorsque le sens de certains noms peut être transmis à travers celui d'énoncés allemands adéquats. Or cette méthode est favorisée par Frege dans le cas des noms primitifs de l'idéographie, dont l'introduction ne constitue donc pas non plus des élucidations.

Ces deux arguments contiennent autant d'erreurs. En premier lieu, il est vrai que dans l'extrait cité dans la dernière section, et généralement à chaque fois que les élucidations furent discutées, Frege expliqua qu'elles servaient à fixer (et transmettre) le sens ou la référence de certains termes. Néanmoins, nous verrons que nombre d'indices textuels suggèrent (très) fortement qu'elles peuvent servir d'autres propos, et que divers paragraphes des *Grundgesetze*, indépendants du problème des noms primitifs, possèdent ce statut. Finalement, ce dernier problème ne dévoile qu'un *exemple* de leur utilité, qui tenait spécialement à cœur à Frege en raison de son désaccord avec Hilbert, mais qui ne couvre pas la totalité de leur champ d'action. Celui-ci fut circonscrit par Frege lorsqu'il précisa que les élucidations "précèdent la construction [du] système et ne lui appartiennent pas en propre". *Toutes* les explications préparatoires ou conjointes à l'élaboration d'un système, et ainsi extérieures à celui-ci, s'y réunissent. Nous verrons qu'informer le lecteur du sens des termes primitifs n'est pas le seul prérequis à une telle tâche [41].

41. Cette idée est très vivement défendue par Weiner (2005a) et, sur ce point précis, nous sommes en accord avec elle.

En second lieu, contrairement à ce que prétend Blanchette, non seulement Frege affirma expressément que la spécification du sens des signes primitifs exigeait des élucidations, mais il qualifia ainsi les passages précis dans lesquels ces noms furent introduits en allemand au sein des *Grundgesetze*[42]. L'erreur de Blanchette est néanmoins compréhensible. Elle provient d'une confusion dont Frege fut lui-même responsable – au moins dans la manière dont il formula à de nombreuses reprises la question – entre les énoncés élucidatoires liés aux contraintes du sens, et ceux qui touchent aux failles des langues vernaculaires. Blanchette ne reconnaît que les premiers, et constate qu'il est possible de fixer la référence des noms primitifs en faisant appel à certains contenus[43], donc que le problème de l'ineffable ne touchait aucunement la question des termes primitifs. Mais Frege admettait tout à fait des élucidations extérieures à ce problème, notamment celles qui, formulées dans les langues vernaculaires, servaient de point de départ à la spécification du sens de tous les noms du langage idéal.

Cette confusion est visible à travers l'exemple de la distinction entre fonctions et objets exploitée par Blanchette. À l'inverse de ce qu'elle soutient, nous verrons que, à proprement parler, ces deux notions ne sont pas des concepts indéfinissables, car ce ne sont pas des concepts *du tout*. Dans ce cas, les élucidations servent à montrer ce qui *ne peut* s'exprimer. Dans le cas du contenu des nom primitifs, elles permettent de dire ailleurs ce qui ne s'exprime pas *encore* dans la langue idéale. Les deux propos sont différents, mais chacun est essentiel à la préparation de l'édification du système des sciences. Blanchette les amalgame à tort, en identifiant trois problèmes : celui du point de départ pour les définitions, de la simplicité logique et de l'ineffable. Elle les cite tour à tour avant de proposer un exemple du troisième – à travers les notions d'objets et de fonctions –, et de considérer implicitement que les élucidations s'y limitent. Elle sombre ainsi dans le piège que Frege avait lui-même tendu en échouant à dessiner clairement cette limite, et auquel il nous importe d'échapper.

Cette erreur est symptomatique de la place disproportionnée qu'occupe une question au sein du débat sur la sémantique. Une grande partie des membres du courant sémantique conteste que les passages-clefs des *Grundgesetze* consistent en des élucidations, tandis que la majorité de leurs adversaires s'appuient sur cette idée pour rejeter la possibilité d'une sémantique fregéenne. Nous tenons une position intermédiaire, en accord avec le fait qu'il s'agit bel et bien d'élucidations, mais contestant qu'une telle conclusion annule la légitimité d'une théorie sémantique. C'est parce que les élucidations sont trop souvent rapprochées de la différence entre dire et montrer que les auteurs s'évertuent à discuter le caractère élucidatoire des passages en jeu pour évaluer la compatibilité entre les thèses fregéennes et la donnée d'une sémantique. Mais l'enjeu est ailleurs. Il importe de saisir *la nature* des élucidations de la première partie des *Grundgesetze* pour être en mesure d'apporter une réponse à notre problème. Cela exige en retour de tracer des frontières nettes entre les diverses élucidations, *i.e.* les différentes explications préparatoires à la construction d'un système scientifique.

3.2.3.4 Structure des pensées

La question d'une *théorie* sémantique fregéenne est corrélative de celle des catégories logiques et ontologiques. Pour Frege, ces dernières constituent le découpage interne aux sphères du sens et de la référence. Ce découpage n'a pas trait au fonctionnement accidentel de langues imparfaites, mais au fonctionnement essentiel de *tout* langage, *i.e.* à la manière dont une machinerie syntaxique peut en principe véhiculer un contenu. Une théorie sémantique a vocation à exprimer certaines

42. Pour un exemple qui lève toute ambiguïté, voir (1903a, nbp. 1, p. 148).

43. Elle cite la caractérisation de l'implication de la *Begriffsschrift*, qui présente le défaut que nous avons discuté au cours du premier chapitre. Mais le raisonnement peut être adapté à celle des *Grundgesetze*.

données concernant ce fonctionnement, impliquant notamment le lien qui unit un terme à sa référence. Notre problème consiste à déterminer si, dans une perspective fregéenne, ces données sont effectivement exprimables. Les règles de composition du sens et des références ne peuvent faire exception : elles ne sont descriptibles de façon sensée qu'en se soumettant aux catégories du sens et de la référence. Si toutes les tentatives d'explications les concernant doivent par nature transgresser ces catégories, alors ces tentatives se situent en dehors du domaine du sens. C'est à ce titre que les élucidations de Frege sont rapprochées de celles de Wittgenstein. Geach et Weiner estiment qu'elles visent parfois à *exhiber* quelque chose qui ne peut se dire : les découpages catégoriaux logique et ontologique qui justifient la grammaire idéographique, ainsi que la manière dont les entités de ces catégories parviennent à se composer. Dans ce cadre, elles s'opposeraient effectivement à la constitution d'une science sémantique. Mais nous n'avons rien vu qui hisse le premier problème soulevé par Frege – celui d'un point de départ pour les définitions – au niveau de l'ineffable. Seules les défaillances des langages naturels furent appelées à comparaître. Pour l'instant, rien n'interdit donc d'envisager la constitution d'un langage, à travers les élucidations adaptées, pour une science sémantique capable d'exprimer les lois attachées à la relation de référentialité. Si une objection doit être soulevée, elle a trait à d'autres versants de la notion d'élucidation, cette fois relatifs aux découpages catégoriaux. Or les deux dernières difficultés évoquées par Blanchette se rapportent à ces découpages. La deuxième – celle de la simplicité logique – nous permettra d'apporter quelques lumières à ce sujet. Mais c'est bien la troisième – celle du non-sens – qui s'avérera déterminante.

Frege introduisit le problème de la simplicité logique d'une manière extrêmement ambiguë, comme s'il se réduisait à celui du point de départ pour les définitions. Dans le second texte dans lequel les élucidations furent l'objet d'une discussion, il parut opposer à Hilbert l'objection selon laquelle l'édification d'un système idéal exigeait de spécifier à l'extérieur de ce système le sens des termes primitifs. Ce faisant, il fit néanmoins droit à une idée importante, et qui nous intéresse ici :

> Nous devons reconnaître des éléments logiquement primitifs non définissables. Même là il semble nécessaire de nous assurer que nous désignons la même chose par le même signe (mot). Une fois que les chercheurs sont parvenus à une compréhension des éléments primitifs et de leurs désignations, un accord à propos de ce qui est logiquement composé est facilement atteint aux moyens de définitions. Puisqu'aucune définition des éléments primitifs n'est possible, quelque chose d'autre doit intervenir. J'appelle cela des élucidations. C'est donc ce qui permet une compréhension mutuelle parmi les chercheurs, ainsi que la communication d'une science à d'autres. Il faut reléguer cela à la propédeutique. Ça n'a pas sa place au sein du système de la science ; dans ce dernier, aucune conclusion n'est basée dessus. L'objectif des élucidations est pragmatique, et lorsqu'il est atteint, nous devons nous estimer satisfaits. (Frege 1906d, p. 288)

La menace de régression à l'infini nous impose de reconnaître des éléments – des signes – primitifs non définis, dont le sens *doit* être fixé une fois pour toutes, et ne *peut* l'être qu'à travers des élucidations. Voilà qui, aux yeux de Frege, suffisait à fonder son rejet de la méthode hilbertienne. Néanmoins, en évoquant des "éléments *logiquement* primitifs", il introduisit une nuance vis-à-vis du premier extrait cité plus haut. Dans celui-ci, les élucidations étaient présentées comme une solution à un problème intrinsèquement *linguistique* : afin d'éviter la régression à l'infini, le processus de définition doit se baser sur un socle de *noms* primitifs, c'est-à-dire non définis. Le discours se déplace ici de la sphère du langage à la sphère logique. L'expression "des éléments logiquement simples" suggère l'existence, non plus de signes, mais de *contenus* primitifs.

Nous retrouvons cette idée à l'intérieur des *Grundgesetze* :

> Il ne sera pas toujours possible de fournir une définition standard, simplement parce que notre objectif doit être de réduire les choses à ce qui est logiquement simple, et ceci en tant que tel n'admet aucune définition au sens strict. (Frege 1893, pp. 3-4)

Les occurrences de ce type sont légion au sein des écrits postérieurs à 1891. En voici un autre exemple :

> On ne saurait demander que tout soit défini, pas plus qu'on ne pourrait demander à un chimiste qu'il analyse toute matière. Ce qui est simple ne peut pas être analysé, et ce qui est logiquement simple ne peut pas être véritablement défini. [...] Il n'est pas possible d'avoir recours à une définition pour introduire le nom de ce qui est logiquement simple. (Frege 1892a, pp. 167-168 / p. 128)

Dans la reconstruction du système, Frege appelait "signe simple" [*einfaches Zeichen*] une expression qui contient un seul symbole – dans le cas des noms d'objets – potentiellement accompagné de sa terminaison – dans le cas des noms de fonctions. Au contraire, un "signe complexe" [*zusammengesetztes Zeichen*] est une combinaison (rigoureusement, un tableau ou une matrice) de symboles construite à partir des signes simples selon les règles morphologiques décrites dans le second chapitre. Frege distingua huit signes simples particuliers qu'il appelle les "signes primitifs" [*Urzeichen*]. Tous les autres signes simples furent définis à partir de ces huit noms. Ci-dessus, Frege expliqua que "ce qui est simple ne peut pas être analysé, et ce qui est logiquement simple ne peut pas être véritablement défini". Or certains signes simples peuvent être, et sont effectivement, définis. De plus, nous pouvons choisir librement le signe de notre choix pour exprimer tel ou tel sens. Il n'est donc pas inhérent à un signe d'être primitif. Aucun signe simple n'est par nature indéfinissable, mais relativement au rôle que nous lui attribuons dans le système. La simplicité "logique" que Frege a ici en vue ne se situe donc pas sur le terrain linguistique [44].

Malheureusement, ses formulations approximatives n'aident pas à déterminer ce qu'il avait réellement à l'esprit. Ci-dessus, il discuta la possibilité de définir "ce qui est logiquement simple". Or une définition permet d'attacher un sens à un signe (un mot, une expression), on dit alors que ce *signe* est défini. Seul un élément linguistique est objet de définition. Mais les éléments logiquement simples, nous venons de le voir, ne sont pas linguistiques. Frege était coutumier de ce genre de raccourcis terminologiques :

> Il n'est pas possible de donner une définition de ce qu'est une fonction, parce que nous avons affaire ici à quelque chose de simple et d'inanalysable. On ne peut que s'en faire une idée et la clarifier en la rapprochant de ce que l'on connaît. À la place d'une définition, il nous faut produire des élucidations ; ici, naturellement, il nous faut compter sur une rencontre des esprits. (Frege 1914, p. 254 / 279)

À tort, il n'évoqua pas ici la définition d'un signe, mais d'un contenu : *ce qu'est une fonction.* Son manque cruel de rigueur à l'égard du terme 'définition' se retrouve dans l'emploi du mot 'analyse'. Même après le second mouvement, Frege parlait encore d'analyse de concepts, au lieu d'évoquer l'analyse du sens des expressions qui réfèrent à ces concepts. Pourtant, de nombreux

44. Weiner reconnaît aussi ce point :

> Ce serait une erreur de considérer que la primitivité est une propriété inhérente des symboles liguistiques. [...] Du point de vue de quelqu'un qui construit un langage logiquement parfait pour une science systématique, il n'y a aucune exigence que tels symboles particuliers soient utilisés comme primitifs. La primitivité d'un terme doit être liée à son sens ou sa référence. Il semble probable que la primitivité soit liée au sujet de la science systématique en construction. (Weiner 1990, pp. 290-291)

indices confirment qu'il était au clair sur ces questions. Dans (1914), il expliqua qu'une définition procure un contenu à un *signe*, qu'elle n'agit pas sur le sens ou la référence. Simultanément, il indiqua que la difficulté, lors d'une analyse, résidait dans la reconnaissance de l'identité entre le *sens* analysé et le *sens* résultant de l'analyse.

Les nombreuses approximations qu'il s'autorisait sont aisément explicables par la fluidité de rédaction qu'elles permettent. Attachées au terme 'définition', elles sont inoffensives. Néanmoins, relativement au qualificatif 'logiquement simple', elles s'avèrent plus dangereuses. Celui-ci nous encourage, malgré l'usage fallacieux du terme 'définition', à situer les éléments en cause dans la sphère logique, c'est-à-dire celle des sens. Il y aurait donc des sens simples : des sens qui ne peuvent être exprimés en composant d'autres sens. Or c'est précisément par ce biais que les définitions permettent d'attacher un sens à un signe. Dans ce cas, Frege ne devrait pas dire qu'un élément logiquement simple ne peut être défini, mais qu'il ne peut être attaché à un signe par définition. Cependant, dans le second passage ci-dessus, Frege glissa de la sphère logique des sens à la sphère ontologique des références. Il expliqua qu'il était impossible d'utiliser une définition pour "introduire le nom de ce qui est logiquement simple". Or selon sa conception du langage, un nom nomme sa *référence*. Les éléments logiquement simples devraient donc être des objets et/ou des fonctions simples. Pour une raison qui reste à déterminer, aucun sens ne pourrait être attaché par définition à un signe référant à ces objets et/ou fonctions.

Les illustrations proposées ne tranchent pas davantage la question. Elles sont au nombre de deux. La première a trait aux notions d'objet et de fonction. Malheureusement, comme nous le verrons plus loin, elle est en définitive totalement étrangère au présent problème. La seconde fut intégrée à un long texte rédigé à la suite de la *Begriffsschfrit*. Frege justifiait alors son choix d'un signe primitif pour l'implication, à ses yeux plus pertinent que celui de Boole pour l'équivalence ou la conjonction :

> Des quatre possibilités :
>
> I. A et B
>
> II. A et non B
>
> III. non A et B
>
> IV. non A et non B
>
> mon $\left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right.$ nie la troisième, le signe d'égalité de Boole les deux du milieu, le signe d'addition la première et la dernière [...] ; enfin le signe de multiplication affirme la première possibilité et nie donc les trois autres. (Frege 1881, pp. 39-40 / p. 46)

Frege estimait que le contenu le plus simple était celui qui couvrait le plus de cas : "plus un contenu est simple, moins il dit". Il expliqua :

> Maintenant, pour obtenir le plus petit nombre possible de signes primitifs, je dois choisir pour leurs significations les plus simples possibles, de même qu'en chimie on ne peut espérer réduire le nombre des éléments qu'en poussant plus loin la décomposition. Mais plus un contenu est simple, moins il dit [...] En général, c'est toujours le signe qui a le contenu le plus simple qui permet l'utilisation la plus variée, et procure l'expression la plus claire [...] On pourrait considérer que le choix de signes primitifs ayant un contenu simple s'impose du seul fait que nous ne pourrions pas exprimer à l'aide de signes plus riches des contenus plus simples. Mais en réalité ce n'est pas impossible ; simplement ce qui est fréquent serait représenté à l'aide d'une formule plus compliquée que ce qui est rare. (Frege 1881, pp. 40-41 / 46-48)

Frege propose ici une métaphore de chimie. Il explique que, pour représenter une molécule d'hydroxyde, il est plus naturel d'utiliser une lettre pour l'atome d'oxygène et une lettre pour l'atome d'hydrogène afin d'obtenir le nom complexe 'OH' [45], plutôt que d'employer une lettre pour la molécule complète et, à travers une autre lettre pour la désoxydation, de retrouver l'hydrogène – un constituant simple – comme signification de deux lettres – un nom complexe. Le propos est clair : il est préférable d'octroyer un nom simple à ce qui désigne un élément simple. Frege poursuit :

> Pour obtenir à présent une signification la plus simple possible pour un signe qui joigne deux contenus jugeables, je pouvais choisir entre quatre possibilités également justifiées de ce point de vue : je pouvais prendre comme telle signification chaque négation de l'un des quatre cas exposés plus haut. Mais une seule suffisait puisque, par la négation de A et de B, chacun des quatre cas peut être converti en chacun des autres. Ce sont, pour employer une métaphore chimique, seulement des états allotropiques d'un même élément. J'ai choisi la négation du troisième cas, en raison de la facilité de transition pour l'inférence, et de la proche parenté de son contenu avec l'importante relation de principe à conséquence. (Frege 1881, p. 42 / p. 48)

Tout d'abord, notons que ce texte fut rédigé avant la distinction entre sens et référence, alors que les contenus qu'il nommait 'déterminés' des signes de la langue formulaire (pour l'implication et consorts) n'étaient pas encore considérés comme des concepts. Il n'est donc pas certain que la notion de simplicité dont il est question soit celle des textes contemporains et postérieurs aux *Grundgesetze*. Seule la présence d'une métaphore de chimie, utilisée aussi dans un texte de 1892 [46], semble appuyer cette hypothèse.

D'autre part, les explications proposées dans ce texte contredisent celles qui sont fournies dans "Les fondements de la géométrie". En effet, elles suggèrent que les signes pour la négation, l'implication et la disjonction possèdent des contenus simples, qui combinent un ou plusieurs contenus conceptuels de la manière la moins discriminante possible, sans exclure plus d'un cas. Au contraire, ceux pour la conjonction et la disjonction exclusives ont une signification complexe. Pourtant, les premiers admettent sans problème une définition à partir des derniers et de la négation. Plus généralement, tout contenu simple selon ce critère peut être défini à partir de contenus complexes. Par conséquent, il ne s'agit pas d'"éléments logiquement primitifs *non définissables*".

Enfin, ce critère fonctionne en termes de tables de vérité. Adapté aux conceptions d'après 1891, il vaudrait donc au niveau des références. Néanmoins, il ne s'applique pas aux nouveaux signes de l'idéographie (absent de la langue formulaire) : l'horizontal, les parcours-de-valeurs et l'égalité. Surtout, il s'écroule sous l'objection que nous venons de dire : les références "simples" seraient parfaitement définissables en termes des "complexes".

Il existe une autre interprétation, qui justifie cette fois l'impossibilité d'une définition. Elle a trait à un problème que nous avons écarté de notre premier chapitre, expliquant qu'il n'avait pas influencé la manière dont les positions de Frege ont évolué. Il s'agit de celui de la *nature* des compositions reflétées par la grammaire idéographique. L'enjeu principal était, pour Frege, d'adopter une grammaire à travers laquelle le contenu d'une expression ne dépendait que de ceux de ses constituants. Comme nous l'avons vu [47], c'est ainsi qu'il expliquait que les règles générales de dérivations entre des énoncés correspondaient bien à des règles logiques valables pour tous les contenus composés d'une certaine manière, c'est-à-dire à un rapport de justification entre

45. Cette molécule a depuis reçu le nom 'HO^-'. Mais à l'époque, la charge négative portée par l'oxygène n'avait pas encore engendrée l'inversion des lettres.

46. Voir l'extrait cité plus haut.

47. en section 1.4.6.

des jugements. Son projet de constitution d'un système idéal capable de manifester toutes les prémisses et les étapes impliquées dans une démonstration était entièrement assujetti à l'idée que le contenu d'une expression était déterminé à partir de ceux de ses constituants. Néanmoins, une telle idée n'imposait pas à elle seule que le découpage grammatical de la langue se rapporte à de véritables catégories de contenus. Frege aurait pu considérer que les contenus d'un prédicat et d'un nom propre pouvaient être identiques, mais jouaient dans ce cas des rôles différents quant à la détermination du contenu des énoncés auxquels ils étaient intégrés. Les termes 'fonction', 'objet', 'sens fonctionnel' et 'sens propre' n'auraient alors pas qualifié des contenus – sens et référence –, mais les rôles qu'ils jouaient dans certains contextes. Ce n'est pas le sentier qu'il choisit d'emprunter, affirmant inlassablement qu'un nom propre et un nom incomplet ne peuvent respectivement, dans une langue idéale, que désigner un objet et une fonction, et qu'aucun objet n'est jamais une fonction, voire pire, qu'"un objet est tout ce qui n'est pas une fonction" [48]. Pour lui, le type d'incomplétude d'une entité n'était donc pas relatif à la tâche de cet entité dans la détermination du contenu d'une expression intégrant son nom, mais était intrinsèque à l'entité elle-même. Rouilhan explique :

> Pour pouvoir dire, de façon sensée, qu'un objet Δ tombe sous un concept $\Phi(\dots)$, pour pouvoir dire, de façon sensée, précisément, que $\Phi(\Delta)$, il faut que l'objet et le concept puissent *logiquement* s'unir – "logiquement", c'est-à-dire indépendamment de la question de savoir si, effectivement, l'objet tombe ou ne tombe pas sous le concept –, ce qu'ils ne peuvent (sauf *regressus ad infinitum*, comme dans le célèbre argument du troisième homme) que si l'un et l'autre portent en eux-mêmes, de façon *interne*, la possibilité de cette unité. Et cette possibilité interne d'unité est hypostasiée par Frege comme possibilité *réelle* de complétion mutuelle d'entités dont la complétude et l'incomplétude s'accordent mutuellement – "réelles", c'est-à-dire fondée sur des déterminations réelles, des déterminations appartenant à la réalité (au sens non de l'effectivité, mais de la quiddité) de l'objet et du concept : complétude de l'un et incomplétude de l'autre. Le premier peut saturer le second, lui servir de complément, comme en chimie, à laquelle est empruntée la métaphore de l'insaturation, des atomes peuvent ou ne peuvent pas se saturer mutuellement selon le jeu des valences, et c'est pourquoi, pense Frege, on peut bien dire, de façon sensée, que l'un tombe sous l'autre, quoi qu'il en soit de la question de savoir si, effectivement, l'un tombe ou ne tombe pas sous l'autre. (Rouilhan 1988, p. 140)

Rouilhan évoque un autre enjeu qui, il est vrai, n'était pas étranger aux réflexions de Frege, bien qu'il outrepasse le seul problème de la justification des jugements, et ainsi du rapport contraignant qu'entretiennent les contenus des constituants d'une expression avec celui de cette expression. Il s'agit de comprendre comment le sens peut faire sens, de rendre compte de la manière dont ces contenus peuvent en principe se composer pour déterminer un contenu jugeable (ou une valeur de vérité). Et, en effet, Frege reconnaissait une possibilité logique de complétion entre objet et concept fondée, donc, sur la nature des constituants *logiques* qui déterminent ces entités – autrement dit sur les sens – qu'il répercutait abruptement comme possibilité réelle de complétion fondée, donc, sur la nature de ces entités elles-mêmes :

> On pensera peut-être que la difficulté est artificielle, qu'il n'y a nul besoin de prendre en compte cette réalité si peu maniable que j'ai appelée concept, et qu'on pourrait [...] traiter la subsomption d'un objet sous un concept comme une relation où ce qui se trouve *une fois* avoir le statut d'un objet pourrait une autre fois avoir le statut d'un concept. [...] On peut le faire, mais on se trompe grandement si l'on pense réduire

48. (Frege 1891, p. 134 / 92)

> ainsi la difficulté. On n'a fait que la déplacer. Il est impossible que toutes les parties d'une pensée soient closes sur elles-mêmes, l'une d'entre elles doit être d'une façon quelconque prédicative et insaturée, sinon elles ne pourraient pas s'enchaîner. (Frege 1892a, pp. 177-178 / p. 140)

Frege estime qu'un même sens ne peut pas tenir tel rôle vis-à-vis de la détermination d'une pensée, et tel autre rôle vis-à-vis de la détermination d'une autre pensée, parce que la manière dont il prend part à cette détermination dépend de la manière dont il prend part à la *constitution* de la pensée en question, en s'unissant avec les autres parties qui la constituent. Cette idée exige une distinction catégoriale entre les sens, selon leur capacité propre à s'unir avec tel ou tel sens, et elle fait droit à une conception des contenus comme des complexes structurés. Or, ci-dessus, Frege suggère la même possibilité d'union, cette fois réelle, c'est-à-dire au niveau du monde, valant pour les entités qui le peuplent – les concepts et les objets –, exigeant la même distinction catégoriale, mais sans accepter les conséquences d'une telle possibilité, car les notions de fonction et d'objet structurés – ou complexes – sont parfaitement étrangères à ses vues. Au début des *Grundgesetze*, pour marquer la différence entre une fonction et son nom, il expliqua :

> La nature de la fonction se révèle elle-même dans le lien qui s'établit entre les nombres dont les signes sont mis à la place de 'ξ' et les nombres qui en résultent alors comme référence de notre expression. (Frege 1893, p. 5)

Le "lien" ici décrit est simple. Il se contente d'associer un objet à chaque objet. Les fonctions peuvent opérer sur les objets, ou les unes sur les autres, mais elles ne se *structurent* pas ainsi. Nulle part n'est suggéré un écart de complexité entre deux fonctions. De telles entités sont déterminées par la valeur prise en chaque argument. Elles peuvent bien sûr être retrouvées *via* différents chemins – différentes successions de saturations et désaturations –, mais cela n'influe en aucune manière sur le résultat. Supposons que $\ulcorner\Phi(\xi)\urcorner$ et $\ulcorner\Psi(\xi)\urcorner$ soient deux noms de fonctions. Si $\ulcorner\frown\mathfrak{a}\,(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))\urcorner$ est vrai, alors les références de nos deux noms – les deux fonctions en question – sont identiques. Et Frege fut encore plus clair concernant des objets :

> La phrase peut être considérée comme une image de la pensée dans la mesure où à la relation de partie à tout dans les pensées et dans les parties des pensées correspond en gros la même relation dans les phrases et dans les parties des phrases. Il en va autrement dans le domaine de la référence. On ne peut pas dire que la Suède soit une partie de la capitale de la Suède. (Frege 1919, p. 275 / 301)

Dans ce cas, pourquoi s'est-il obstiné à maintenir un écart catégorial entre les références des noms propres et celles des noms insaturés ? Rouilhan conclut qu'il n'avait aucune raison légitime de procéder ainsi :

> Finalement, dans l'horizon logique qui était celui de Frege, ce n'était pas comme possibilité inscrite en eux de la façon d'une possibilité *réelle* (fondée sur des déterminations *réelles*) qu'il fallait assigner la possibilité *logique* d'unité de l'objet et du concept, mais comme simple possibilité d'unité *logique*, justement, c'est-à-dire d'unité selon le *logos* (expression ou sens, énoncé ou pensée) – donc comme possibilité "réelle", si l'on veut, mais alors de complétion mutuelle des *expressions* dans l'unité de l'*énoncé*, et de leurs *sens* dans l'unité de la *pensée*, mais non de leurs significations dans l'unité de la valeur de vérité. Ce n'était pas dans la sphère ontologique de la signification, mais dans la sphère logique du sens ou de l'expression, la sphère du *logos*, qu'il fallait reconnaître les différences *logico*-catégoriales, les lois de la grammaire logique pure (sphère de l'expression) et leur fondement (sphère du sens). (Rouilhan 1988, p. 144)

Rouilhan explique le glissement du sens à la référence, concernant les distinctions catégoriales, à partir de l'époque où un tel glissement n'était pas possible, précisément car sens et référence étaient confondus. Il était légitime de supposer que le concept pré-1890 portait en lui la possibilité d'une union, car ce concept n'était autre que le sens conceptuel post-1890 [49]. À la charnière des deux époques, Frege eut donc raison de lui attribuer le sens propre comme complément, mais il aurait dû résister à offrir la même possibilité d'union au *nouveau* concept : la référence des termes conceptuels. Ainsi, selon Rouilhan, c'est parce qu'il a mal mesuré les conséquences d'une modification terminologique qu'il reconnut au nouveau contenu d'un terme – les concepts post-1890 – une capacité qui appartenait seulement à l'ancien – les concepts pré-1890.

Nous ne savons si cette hypothèse est suffisante, bien qu'elle livre probablement au moins une partie de l'explication, mais nous croyons aussi que Frege projeta injustement dans le royaume des références une conclusion tirée systématiquement dans celui du sens – comme l'illustre l'extrait ci-dessus –, si bien qu'il se trouvait toujours démuni au moment de rendre compte de cette projection, et tentait vainement d'en limiter les effets tout en acceptant l'essentiel :

> Les mots 'insaturé' et 'prédicatif' semblent aller mieux pour le sens que pour la référence ; mais il doit tout de même bien correspondre aussi à cela quelque chose au niveau de la signification ; et je ne connais pas de mots qui soient meilleurs. (Frege 1892-1895, nbp. b, p. 129 / 141)

Mais l'essentiel ne va pas sans les effets. Si la distinction entre catégories ontologiques provient d'une capacité d'union des références du même genre de celle que les sens possèdent, alors il faut concevoir aussi ces références comme des complexes structurés ultimement à partir de constituants élémentaires, de telle sorte que deux complexes – par exemple deux objets – ne soient jamais identiques s'ils sont constitués de la même manière par les mêmes éléments de base, conclusion que Frege refusait [50].

Il l'acceptait en revanche au niveau du sens, et c'est à cet endroit qu'intervient la question de la définition des éléments logiquement primitifs. Le sens d'une expression possède une structure fondamentale que la langue idéale est vouée à dévoiler. Cette structure admet des constituants *atomiques* qui, en tant que tels, ne peuvent être décomposés, et ne tolèrent donc aucune définition à travers la donnée d'un nom complexe. Il est donc possible de résoudre d'un même geste – et cela explique que Frege ne les distinguât pas – le problème linguistique de l'origine du processus de définition et la difficulté logique des sens élémentaires indéfinissables en associant, grâce aux élucidations, les éléments logiquement simples aux signes primitifs. Puisque la menace de régression à l'infini impose des noms primitifs, autant les utiliser pour "atteindre" des éléments – *i.e.* exprimer des sens – simples qui ne peuvent, par nature, être "atteints" par définition.

Certains commentateurs [51] contestent cette idée, invoquant divers motifs que nous allons examiner. Nous pensons au contraire – et nous voulons montrer – qu'il existe trop de signes clairs pointant dans cette direction pour qu'il soit raisonnable d'y résister, sans nier pour autant le fait que Frege ait, à cet égard, manqué certains problèmes et maintenu certaines tensions.

Nous venons de présenter le premier indice : Frege a explicitement admis, à plusieurs reprises, l'existence d'éléments *logiquement* simples non analysables, ainsi que sa volonté de parvenir à analyser les plus complexes en dévoilant la manière dont ils étaient constitués de ces éléments

49. Ceci fut clairement expliqué en section 1.6.2.

50. Pour l'admettre, il aurait dû reconnaître qu'une langue idéale dévoilant la structure des références n'attribue qu'un seul nom au Vrai et au Faux (modulo les indices des lettres des deuxième et troisième groupes), autrement dit qu'un tel langage n'intègre qu'un énoncé vrai et qu'un énoncé faux.

51. dont Sluga (1980), au premier rang, qui situe la source de l'informativité de la logique, chez Frege, dans la possibilité de décomposer différemment une même pensée.

atomiques. Voilà qui suggère clairement que les pensées sont structurées à partir de ces derniers, et que le rôle d'une langue idéale consiste à dévoiler cette structure à travers celle, parallèle, de ses expressions. Par ailleurs, nous savons que s'il nuançait son usage des termes 'insaturé' et 'prédicatif' – qui suggèrent une telle image structurelle – dans le cas de la référence, il l'admettait tout à fait dans celui du sens. Enfin, il expliqua, là encore à de nombreuses occasions, que le remplacement d'un constituant d'une pensée par un autre altérait toujours la pensée en question :

> Quand, dans une phrase ou dans une partie de phrase, on substitue à un constituant un autre constituant ayant une autre signification, la phrase ou la partie de phrase ainsi modifiée n'a pas forcément une autre référence que l'original, en revanche, elle a toujours un autre sens. (Frege 1919, p. 276 / 302)

Là encore, il demeura fidèle à son analogie, car la modification d'une partie d'un tout structuré par une autre modifie la structure elle-même. En outre, certaines traces de ces conceptions remontent jusqu'à la première période de sa vie scientifique, par exemple lorsqu'il expliqua :

> Au lieu d'obtenir le jugement en assemblant un individu comme sujet avec un concept déjà tout formé comme prédicat, nous décomposons à l'inverse le contenu jugeable pour obtenir le concept. Sans doute faut-il que l'expression d'un contenu jugeable, pour pouvoir être ainsi décomposée, soit en elle-même articulée. On peut alors en inférer qu'au moins les propriétés et relations dont on ne peut poursuivre plus loin la décomposition doivent avoir une désignation élémentaire propre. (Frege 1881, p. 18 / 26)

L'expression 'désignation élémentaire propre' renvoie à son tour aux noms des atomes des structures que constituent les contenus jugeables, attribuées aux "propriétés et relations dont on ne peut poursuivre plus loin la décomposition". La même intuition l'avait poussé à dire que, "comme *seul* [*le contenu conceptuel*] [avait] une signification pour la langue formulaire, elle n'[avait] pas besoin de faire de distinction entre des énoncés qui ont le même contenu conceptuel" [52] – aux indices près des lettres pour les contenus indéterminés, aurait-il dû ajouter. Puisque le contenu jugeable d'un énoncé est un tout constitué à partir des contenus simples des signes simples de cet énoncé, alors deux énoncés différents possèdent deux contenus distincts.

À cette époque, l'idée présentait des faiblesses. En premier lieu, les symboles logiques tels que '$_{\vdash}$' avant le premier mouvement, ou les signes simples tels que '$_{\vdash}\,\xi$' après cet évènement, n'étaient pas encore conçus comme des concepts, ni plus généralement comme des *constituants* des structures qu'étaient les contenus jugeables. Pour maintenir sa position, Frege était donc tenu d'expliquer, par exemple, la manière donc cet opérateur *transformait* le contenu jugeable de – la structure complexe contenue dans – une expression '$P(A)$' en celui de '$_{\vdash}\,P(A)$', tout en garantissant l'unicité de l'énoncé (modulo les indices) exprimant chaque contenu jugeable ; or il ne réalisa jamais cette tâche. En second lieu, il tenait encore le mode de détermination des objets à l'écart des contenus jugeables. Le fait que les noms 'A' et 'B' puissent déterminer différemment le même objet imposait donc une identité de contenu entre '$P(A)$' et '$P(B)$'. Il est probable qu'il n'ait d'abord pas réalisé le problème, d'une part car la langue formulaire n'intégrait qu'un seul symbole de concept – '$\equiv$' –, et d'autre part parce qu'avant le premier mouvement, il avait réussi à maintenir cette difficulté à l'écart des énoncés '$A \equiv A$' et '$A \equiv B$', en faisant peser le mode de détermination des objets sur le contenu du symbole '$\equiv$'. Celui-ci étant conçu métalinguistiquement, les contenus de ces énoncés étaient identifiés. Voilà qui explique qu'il put affirmer sans ambages, et à tort, que deux énoncés étaient toujours dédiés à deux contenus jugeables différents. Cependant, lors du premier mouvement, il réalisa la dissymétrie qu'il avait ainsi introduit entre

52. (Frege 1879b, p. 3 / 17)

la relation $\xi \equiv \zeta$ et n'importe quel autre concept $P(\xi)$, $R(\xi, \zeta)$, etc. Pour étendre les qualités de la première aux seconds, il fallait leur attribuer le même statut métalinguistique, ce qui était inacceptable. Frege choisit d'emprunter le chemin opposé, en adoptant une analyse objectuelle des énoncés d'identité. Cette décision ne réglait pas notre difficulté ; au contraire, elle la propageait jusqu'à la relation $\xi = \zeta$. Cette fois encore, il est probable qu'il n'y prit pas garde car, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre [53], son attention était concentrée sur la question de la différence de valeurs entre certains énoncés d'identités ainsi que sur celle de notre accès aux nombres. Voilà qui confirme ce que nous avons dit là-bas : Frege fut extrêmement peu vigilant sur la manière dont certaines de ses idées heurtaient, par leurs conséquences, sa conception des contenus jugeables comme complexes structurés ; et les différentes modifications qu'il opéra furent indépendantes de cet enjeu propre.

Néanmoins, qu'il ait ou non aperçu le problème avant 1890, celui-ci était réglé après cette date, lorsque le mode de détermination des objets rejoignit la partie jugeable du contenu d'un énoncé – son sens –, justifiant ainsi un écart entre les pensées exprimées par '$P(A)$' et par '$P(B)$'. C'est alors que Frege put (1) réaffirmer avec force qu'il existait des "éléments logiquement primitifs" que les signes simples d'une langue idéale devaient recevoir comme sens ; (2) défendre les formulations qui présentaient les sens comme des complexes structurés, au détriment des mêmes tournures adaptées aux références ; et enfin (3) expliquer que la substitution d'un autre sens à une partie d'une pensée modifiait toujours celle-ci.

Pourtant, malgré tous ces signes pointant dans la même direction, divers auteurs contestent que Frege ait jamais adopté une conception des pensées comme des complexes structurés, s'appuyant sur des remarques qu'il répéta dans un certain nombre de lieux, pour contester le découpage logique traditionnel :

> Une pensée obtenue ainsi sera sans doute appelée par la logique traditionnelle un jugement *singulier*. Il convient cependant de remarquer qu'une seule et même pensée est souvent décomposable de différentes façons et apparaît par suite aussi comme étant assemblée de parties de différentes façons. Le mot 'singulier' ne vaut pas de manière absolue pour la pensée, mais seulement relativement à une manière particulière de la décomposer. (Frege 1906c, p. 218 / 240)

À ce stade, deux réponses peuvent leur être adressées. D'une part, Frege ne visait peut-être pas réellement la pensée, mais l'énoncé de la langue naturelle qui l'exprime et, surtout, la manière dont les logiciens l'ont jusqu'alors analysée. Au contraire, une fois moulée dans une grammaire convenable, les ambiguïtés seraient levées et *la* structure véritable de la pensée dévoilée. Notons néanmoins que Frege se serait alors exprimé de manière particulièrement malavisée car il met directement en cause la pensée, et non le constituant linguistique qui la contient. Une alternative est envisageable : Frege n'évoquait peut-être pas la structure fondamentale des pensées, mais de simples décompositions partielles. Après tout, même si les noms '$R(\xi, \zeta)$', 'A' et 'B' se voient attribuer des sens simples, il demeure possible de décomposer l'énoncé '$R(A, B)$' (et son sens) à travers les expressions '$R(\xi, B)$' et 'A' (et leurs sens), ou encore '$R(A, \zeta)$' et 'B' (et leurs sens). Frege aurait pu ainsi accuser le découpage traditionnel de s'appuyer sur une analyse partielle – et non complète – des pensées.

Néanmoins, ces deux réponses sont mises à rude épreuve par un passage de l'article "Concept et objet", dans lequel se tient le cœur de toute l'affaire :

> Dans l'énoncé 'il y a au moins une racine carrée de 4', il n'est rien dit du nombre 2 précisément, ni de -2, il est dit d'un concept, à savoir *racine carrée de* 4, qu'il

53. en section 1.6.

> n'est pas vide. Mais si j'exprime cette même pensée sous la forme 'le concept *racine carrée de* 4 est satisfait', les cinq premiers mots constituent le nom propre d'un objet et l'énoncé énonce quelque chose de cet objet. On prendra garde toutefois que cet énoncé n'est pas le même que le précédent, lequel portait sur le concept. Il n'y a là rien d'étonnant sinon pour qui ignore qu'une pensée peut être analysée diversement et que, selon l'analyse, tel ou tel élément est sujet ou prédicat. La pensée ne détermine pas d'elle-même ce qu'il faut prendre pour sujet. Quand on dit : 'le sujet de ce jugement', on désigne un élément précis dans le seul cas où l'on indique en même temps un mode précis d'analyse. Dans la plupart des cas, on parle du sujet en se référant à une certaine formulation de la pensée. Mais il ne faut pas oublier que des énoncés différents peuvent exprimer la même pensée. Ainsi, la pensée précédente pourrait donner matière à un énoncé portant sur le nombre 4 :
>
> 'Le nombre 4 a pour propriété qu'il existe quelque chose dont il est le carré.'
>
> Le langage a moyen de donner la fonction de sujet à telle ou telle partie de la pensée. Un des procédés les plus connus est la distinction entre les formes du passif et de l'actif. Par suite, il pourra se faire que la même pensée soit singulière selon une certaine analyse, particulière selon une autre, universelle enfin selon une troisième. (Frege 1892a, p. 173 / pp. 134-135)

Rappelons[54] – ce que nous étayerons bientôt – que l'expression 'le concept $\Phi(\xi)$' réfère pour Frege à l'extension dudit concept, *i.e.* à l'objet $\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$. Ainsi, Frege explique que la même pensée peut être décomposée de différentes manières :

$\vdash\!\mathfrak{a}\!\vdash \mathfrak{a}^2 = 4$	:	il y a au moins une racine carré de 4
$\mathrm{Satis}(\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 4))$	:	le concept de *racine carré de* 4 est satisfait

Si cette pensée est structurée à partir d'éléments logiquement simples, il doit être possible, en analysant plus finement les constituants de ces décompositions, de les réduire l'une à l'autre, ou au moins de les ramener toutes deux à la décomposition complète – la structure fondamentale – de la pensée en question. Ceci exige d'établir un rapprochement précis entre, d'une part, le concept d'existence de second niveau $\mathfrak{a}$ $(\varphi(\mathfrak{a}))$ et la relation de satisfaction de premier niveau $\mathrm{Satis}(\xi)$, et d'autre part le concept de premier niveau $\xi^2 = 4$ et son extension $\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 4)$, autrement dit entre un concept et son représentant[55]. Voilà exactement le problème que Frege ignora superbement lorsqu'il affirma, dans un texte de la même époque :

> Ainsi $\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$ est le parcours-de-valeurs de la fonction $x^2 - 4x$ et $\dot{\alpha}(\alpha(\alpha - 4))$ est le parcours-de-valeurs de la fonction $x(x - 4x)$, en sorte que '$\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \dot{\alpha}(\alpha(\alpha - 4))$' exprime que le premier parcours-de-valeurs est identique au second. [...]
> L'expression '$x^2 - 4x = x(x - 4x)$' a bien le même sens que la dernière équation si nous l'interprétons comme ci-dessus ; mais il est exprimé d'une autre manière. (Frege 1891, pp. 10-11 / 86-87)

Généralisons son propos. Supposons que $t^{(0)}(\xi)$ et $t'^{0}(\xi)$ soient des noms de fonctions totalement décomposés – qui exposent la structure fondamentale de leur sens – de l'idéographie, alors les deux expressions suivantes ont le même *sens* :

54. Voir section 1.6.2.1.

55. ou, plus précisément, *un* de ses représentants. L'extension $\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 4)$ est l'unique représentant du concept $\xi^2 = 4$ dans la classe des objets. Par ailleurs, le concept $\mathrm{Sat}(\xi)$, puisqu'il subsume toutes les extensions des concepts sous lesquels tombent au moins un objet, représente pour sa part le concept d'existence dans la catégorie des fonctions de premier niveau à un argument. Mais, comme nous l'avons vu en section 2.5.2, il existe *plusieurs* représentants de ce type.

$$\ulcorner \dot{\varepsilon}(t^{(0)}(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(t'^{(0)}(\alpha))\urcorner \qquad \text{et} \qquad \ulcorner \smile_{\mathfrak{a}} (t^{(0)}(\mathfrak{a}) = t'^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner$$

Une même pensée est donc exprimée par deux énoncés différents *de l'idéographie* qui n'intègrent aucun nom défini. D'une part, Frege a été clair, à partir de 1890, sur le caractère atomique du sens de '='. D'autre part, même en supposant qu'il ait mystérieusement choisi d'attribuer des sens complexes aux noms '$\smile_{\mathfrak{a}} \varphi(\mathfrak{a})$' et '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', aucune décomposition de ces noms ne permet d'attribuer une forme identique aux deux énoncés ci-dessus. En somme, il est possible de proposer deux analyses d'une même pensée sans que ces analyses ne constituent des décompositions partielles permettant, en les prolongeant, d'aboutir à la même décomposition complète. Ceci contredit l'idée que les pensées sont des structures constituées ultimement d'éléments atomiques.

Face à ce constat, Sluga[56] fait fi des nombreux indices que nous avons récoltés pour appuyer cette idée, et conclut purement et simplement qu'elle n'est pas fregéenne. Mais les arguments invoqués dans le long extrait cité plus haut ont quelque chose de déconcertant, qui explique le clivage entre les deux interprétations. Dès la *Begriffsschrift*, Frege avait déjà discuté du couple sujet-prédicat. Cependant, la conclusion qu'il tirait à cette époque était totalement opposée à celle qu'il adopta ici. Certes, il expliquait aussi que les modes de l'actif et du passif présentaient différemment un *même* contenu jugeable[57]. Et à ce stade, l'ambiguïté n'est pas levée : soit le couple sujet-prédicat permet ainsi deux analyses différentes du même contenu jugeable, *i.e.* deux manières distinctes de déterminer ce contenu sur la base d'autres contenus ; soit il est le résultat du fonctionnement imparfait des langues naturelles qui offrent différents visages à une *même* analyse de pensée. Mais dès 1881, Frege en dit davantage. Il reprocha à ce couple, non pas seulement de présenter une même analyse sous plusieurs formes, mais radicalement d'induire une *mauvaise* analyse d'un contenu, par exemple lorsqu'il donnait à une subordination entre concepts – 'le cheval est un quadrupède' – la forme d'une subsomption – '$P(A)$'. Frege fut donc très clair sur le fait qu'il ne fallait pas se fier au découpage sujet-prédicat pour accéder aux constituants d'un énoncé dont les contenus permettent de déterminer celui de l'énoncé. Ceci, ajouté à la remarque sur les 'désignations élémentaires propres', suggère qu'il adressait trois reproches à ce découpage : induire parfois une analyse incorrecte d'un contenu, induire parfois une analyse incomplète d'un contenu, et donner parfois des formes différentes à une même analyse d'un contenu. Un point est en tous cas incontestable : il ne voyait pas dans le couple sujet-prédicat un guide adéquat de décomposition des contenus. Il est donc surprenant de constater qu'il lui prêta ce rôle, sans aucune forme d'avertissement, dans l'extrait ci-dessus. Face à cette situation, certains commentateurs[58] estiment que les deux analyses envisagées sur cette base n'étaient pas, à ses yeux, des décompositions à la fois irréductibles et différentes d'une même pensée : soit il s'agissait de deux présentations syntaxiquement différentes d'une même décomposition, soit il s'agissait de deux analyses partielles qu'il était possible de réduire à une même analyse fondamentale. Malheureusement, leurs adversaires n'ont qu'à formaliser les énoncés en jeu selon la grammaire idéographique – que ce soit '$\urcorner \smile_{\mathfrak{a}} \urcorner\, \mathfrak{a}^2 = 4$' et 'Satis$(\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 4))$' ; ou $\ulcorner \dot{\varepsilon}(t^{(0)}(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(t'^{(0)}(\alpha))\urcorner$ et $\ulcorner \smile_{\mathfrak{a}} (t^{(0)}(\mathfrak{a}) = t'^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner$ – pour constater non seulement qu'ils obtiennent des résultats différents, mais aussi que ces décompositions ne se prolongent aucunement en une décomposition fondamentale commune.

La profondeur du désaccord s'explique donc par la mauvaise foi dont Frege fit preuve à cet endroit : il fonda aveuglément son propos sur une distinction (sujet-prédicat) dont il avait pourtant toujours dénoncé les pièges. Et ce n'est pas la seule fois où il fit jouer à la langue naturelle un rôle dont il la privait expressément ailleurs. En réalité, cela se produisait toujours

56. (Sluga 1980, p. 157)
57. (Frege 1879b, §3)
58. Par exemple Landini (2012).

lorsqu'il était aux prises avec une tension interne à ses conceptions, que nous voulons décrire précisément. D'un côté, il concevait bel et bien les pensées comme des structures complexes constituées ultimement d'éléments atomiques. Cette vision était à la source de sa compréhension de la manière dont concept et prédicat peuvent logiquement s'unir, et le motiva à envisager une langue idéale qui n'intègre qu'un énoncé par contenu jugeable – les constituants simples du premier étant les "éléments *logiquement* atomiques" du second –, à assumer dans la sphère du sens toutes les formulations faisant droit à l'idée d'une analyse en termes de tout-parties, à accabler le couple sujet-prédicat, et à admettre qu'une modification d'un constituant d'une pensée altérait systématiquement cette pensée. D'un autre côté, il développait une approche des parcours-de-valeurs qui le contraignait à identifier les sens des expressions ci-dessus, bien que cette approche ne s'accordât pas avec sa vision des pensées. Voilà pourquoi il emprunta des sentiers opposés selon qu'il répondait à l'un ou l'autre de ses enjeux, ces derniers étant absolument incompatibles. Or, pour expliquer le second, il nous faut revenir à certaines considérations des précédents chapitres.

Depuis la section 2.5.3, nous savons que Frege n'a jamais défini les nombres comme les extensions de concepts de second niveau auxquelles son raisonnement conduisait pourtant, mais utilisa immédiatement une procédure de désescalade verticale afin de les identifier à des extensions de concepts de premier niveau. De plus, nous avons vu que cette procédure avait été généralisée peu avant le second mouvement, grâce à l'introduction des paires qui permettaient de traiter même les relations – et non plus seulement les concepts à un argument – à travers leurs extensions. Enfin, il put reprendre à peu de frais cette méthode après 1890 en impliquant les doubles parcours-de-valeurs, et parvenir à la stratégie des *Grundgesetze* dans lesquels la quasi-totalité des concepts sont mis en jeu à travers leurs extensions [59]. Ainsi, plus les années passaient, plus les concepts étaient laissés sur la touche au profit de leurs extensions. Cependant, Frege cherchait à analyser les pensées de *mathématiques*, et non à développer une science alternative qui en partagerait les principaux aspects. Or il transformait systématiquement les énoncés mathématiques authentiques impliquant des noms incomplets en des énoncés qui incorporaient des noms d'extensions. Considérons par exemple la pensée que tout nombre cardinal possède un successeur :

Version mathématique : '$\forall \mathfrak{a}(\mathbf{C}(\mathfrak{a}) \rightarrow (\exists \mathfrak{b}(\mathbf{C}(\mathfrak{b}) \wedge \mathbf{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})))$'

Version fregéenne : '$\forall \mathfrak{a}(\mathbf{C}(\mathfrak{a}) \rightarrow (\exists \mathfrak{b}(\mathbf{C}(\mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} \frown \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}\mathbf{S}(\varepsilon, \alpha)))$'

Il était essentiel à son projet que les deux énoncés expriment la même pensée. Généralement, il fallait que, pour tous noms '$P(\xi)$' et 'A', les noms propres '$P(A)$' et '$A \frown \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$' partagent le même sens, et cette exigence devait bien sûr être étendue aux niveaux et aux nombres d'arguments supérieurs. Elle était malheureusement incompatible avec une vision intensionnelle des concepts [60], et n'a pu prendre forme qu'après le mouvement de 1890. Nous voyons ainsi apparaître une autre cause de ce mouvement, que nous n'avons pas évoquée durant le premier chapitre – car elle exigeait les développements techniques du second – mais qui s'accorde parfaitement l'interprétation que nous y avons développée. Au fur et à mesure où Frege avançait dans son travail technique, il sollicitait davantage de fonctions – qui, à l'époque, n'étaient pas conçues comme des concepts – afin de propager la méthode d'abaissement des niveaux. Cette avancée

59. Nous restons ici à un niveau informel. L'intégralité du détail technique a été fourni en section 2.5.3.

60. Nous avons vu ce point, en section 2.5.3.3, lorsque nous avons critiqué la position de Landini concernant l'usage des extensions pré-1890. Supposons deux concepts distincts et coextensifs $P(\xi)$ et $Q(\xi)$. Puisqu'ils sont distincts, alors il existe un objet A tel que '$P(A)$' et '$Q(A)$' n'ont pas le même contenu ; puisqu'ils sont coextensifs, alors '$\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$' et '$\dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))$', et par suite '$A \frown \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$' et '$A \frown \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$', ont même contenu. Désormais, nous comprenons mieux ce que Landini avait en tête en plaçant le rapport entre '$P(A)$' et '$A \frown \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$' au cœur de la philosophie fregéenne de l'arithmétique. Son erreur fut simplement d'ignorer le temps que Frege avait lui-même mis à mettre "correctement" en place cette idée.

le confrontait à deux questions : (1) le rôle général des fonctions, et (2) la légitimité de cette méthode, donc le rôle particulier de la fonction $\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$. En section 1.6.2, nous avons vu que (1) l'avait immédiatement conduit aux modifications de 1890. Mais ces modifications, à travers l'extensionnalisation des concepts, permettaient aussi de répondre à (2), qui s'était manifesté au même moment et pour les mêmes raisons.

Frege s'appuya sur une idée qu'il avait déjà évoquée en 1884, sans être en mesure de la pousser plus avant : l'expression 'le concept $P(\xi)$' signifie – ou, plus tard, réfère à – l'extension de ce concept. À partir de 1890, chaque extension n'était plus liée qu'à un unique concept, il pouvait donc dire qu'elle le *représentait* sur le terrain des objets. Il lui suffisait alors de prendre très au sérieux l'opération de représentation pour régler son problème, en considérant que le représentant permet de parler d'un concept comme d'un objet, *i.e.* d'exprimer exactement les pensées qui concernent un concept – qui intègrent un sens conceptuel – en mobilisant son extension – en impliquant un sens propre[61]. Cette conclusion s'accordait admirablement avec l'idée que l'expression 'le concept $P(\xi)$' réfère à $\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$. Cette expression a beau faire référence à un objet – contraintes catégoriales obligent –, elle permet néanmoins de parler du concept en question. En effet, si l'analyse correcte de l'énoncé 'A tombe sous le concept $P(\xi)$' est '$A \cap \dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$'[62], la pensée qu'il exprime est aussi contenu dans '$P(A)$' ; c'est donc celle que nous visons.

Il faut comprendre que Frege était à la fois gêné par et tributaire de cette idée. En suivant son mouvement naturel – celui qu'il épousait partout ailleurs –, il aurait dû rejeter à nouveau le couple sujet-prédicat, et conclure que le nom 'le concept $P(\xi)$' ne référait à rien, car l'énoncé 'A tombe sous le concept $P(\xi)$' dissimule – plutôt qu'il dévoile – la structure de la pensée exprimée, ainsi que le nom 'le cheval' ne réfère à rien dans l'énoncé 'le cheval est un quadrupède'. Il aurait dû reconnaître que, dans un cas comme dans l'autre, nous apprenons par l'usage à déceler sous les énoncés d'une certaine forme des pensées d'une autre forme : '$P(A)$' pour le premier et '$\forall \mathfrak{a}(C(\mathfrak{a}) \to M(\mathfrak{a}))$' pour le second. Il aurait dû continuer de se détourner de la langue naturelle dans un contexte où elle transgressait ostensiblement les règles du sens, plutôt que de lui accorder soudainement sa confiance. Malheureusement, s'il avait procédé ainsi, sa méthode de réduction des niveaux n'aurait pas été la seule victime. Son projet de réduction de l'arithmétique tout entier en aurait été affecté.

En effet, nous savons vu qu'il "n'attach[ait] pas une importance décisive à l'introduction des extensions de concepts"[63] dans les *Grundlagen*. Il avait construit son ouvrage autour du principe de Hume, indifférent à la manière dont celui-ci serait démontré, tant qu'il l'était sur des bases logiques. Néanmoins, cette position semble incompatible avec sa volonté d'analyser proprement *le* concept de *nombre*. Le principe de Hume, terrassé par Jules César, ne pouvait compter comme définition. À première vue, il pouvait donc difficilement servir de base exclusive pour capturer exactement ce concept. Par conséquent, la seule qualité de permettre la démonstration logique de ce principe paraissait aussi insuffisante à cette tâche. Tout ceci a été expliqué en détail en section 1.5.3.4 (à partir de la page 159). Nous allons désormais proposer une hypothèse concernant les changements qui ont peut-être touché le lien que Frege tissait entre nombres et extensions entre 1884 et 1893.

Voici notre hypothèse. Pour les raisons que nous venons de donner, Frege comprit qu'il ne pouvait choisir de réduire les nombres à des extensions uniquement parce que cette méthode permettait la démonstration du principe de Hume, mais parce qu'il estimait positivement que les

61. hormis dans les énoncés qui, traitant directement des catégories, occasionnent des paradoxes (par exemple 'le concept $P(\xi)$ est un objet'). Ce problème sera étudié dans la prochaine section.

62. ou quelque chose de proche, nous passons ici sur certaines subtilités qui seront examinées dans la prochaine section.

63. (Frege 1884, p. 117 / 227)

nombres *étaient* des extensions ou, ce qui revenait au même à ses yeux, parce qu'ils nous étaient donnés comme tels. Il finit par s'en apercevoir, comme en témoigne l'explication qu'il livra à Russell après la découverte de la contradiction :

> Mais la question est : comment appréhende-t-on les objets logiques ? Et je n'ai trouvé d'autres réponses que celle-ci : nous les appréhendons comme extensions de concepts, ou plus généralement comme parcours-de-valeurs de fonctions. (Frege 1976, p. 223)

La définition par extension n'était donc plus une méthode parmi d'autres autorisant la réduction logique du principe de Hume, mais *la* méthode qui tenait compte de notre accès aux nombres donc, selon lui, de leur nature. Frege prit acte de ce point avant la rédaction des *Grundgesetze*, car le principe de Hume n'y fut plus présenté comme l'élément clef de l'analyse du concept de *nombre* et, bien que les parcours-de-valeurs furent *essentiellement* mobilisées pour sa seule démonstration, elles furent sollicitées de manière superficielles à de nombreuses autres occasions, sans aucun avertissement. C'était donc bien, déjà à cette époque, sur la notion d'extension – ou généralement de parcours-de-valeurs – qu'il faisait reposer son analyse, et non plus sur le seul principe de Hume. En somme, quelque part entre 1884 et 1893, il en vint finalement à attacher une importance décisive à l'introduction des extensions de concepts, et redoubla son attention à leur sujet. Il crut alors que l'opération de représentation permettait d'exprimer une même pensée à travers différents énoncés dont certains portent sur des concepts et d'autres sur leurs représentants. C'est précisément ce point qui assurait la *logicité* de la loi V qui soutenait tout l'édifice, et qui lui paraissait comme le plus suspect à cet égard. En effet, il permettait de reconnaître l'identité de sens entre les deux constituants de l'énoncé. En exprimant une coïncidence entre des concepts $P(\xi)$ et $Q(\xi)$ – que Frege analysait par '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} P(\mathfrak{a}) = Q(\mathfrak{a})$' –, nous disons *exactement* que le concept $P(\xi)$ est égal au concept $Q(\xi)$ – que $\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(Q(\varepsilon))$. En somme, Frege consentit à ce qu'une pensée impliquant des sens qui déterminaient des concepts puisse être *reconstituée* en sollicitant des sens qui déterminaient leurs représentants.

Nous approfondirons cette hypothèse dans la prochaine section. Mais nous voulons dès maintenant exposer le rapport que Frege entretenait réellement avec cette idée. D'une part, nous avons cité les deux *uniques* moments – séparés par moins de trois années – durant lesquels il y fit droit. Elle n'apparaît pas au sein des *Grundgesetze*, pas même lors de l'introduction de la loi V. D'autre part, il n'a jamais *directement* affirmé que l'expression 'le concept $P(\xi)$' référait à l'extension $\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$, bien qu'il fournit tous les éléments pour tirer cette conclusion. Dans l'article "Concept et objet", il expliqua qu'il s'agissait "d'une remarque incidente, sur laquelle ne reposait aucun raisonnement" [64]. Pourtant d'après notre hypothèse, cette remarque n'avait rien d'anecdotique. La mécanique de désescalade verticale et, plus cruciale encore, la logicité de la loi V en dépendaient. Frege ne pouvait l'ignorer, mais il voyait tout autant qu'une tension inacceptable en émergeait, à laquelle il ne parvenait pas à consentir. Cette approche des parcours-de-valeurs possédait indéniablement quelque chose de séduisant : en donnant un sens si radical à l'opération de représentation, elle permettait de contourner les interdits catégoriaux. Malheureusement, elle exigeait qu'une pensée puisse être diversement reconstituée, *i.e.* analysée à travers des décompositions irréconciliables, ce qui s'opposait aux fondements logiques de l'union entre concept et objet.

Par ailleurs, il est clair que Frege est entré de mauvaise grâce dans ces considérations. Seule une polémique avec Kerry l'a poussé à l'intérieur d'un labyrinthe dans lequel, nous le verrons, il s'est incontestablement perdu. Ce sera l'objet de notre prochaine section, lorsque nous tenterons de faire toute la lumière sur cette approche. En section 3.3, nous présenterons une deuxième

64. (Frege 1892a, p. 172 / 134)

approche des parcours-de-valeurs à laquelle Frege fit droit dans les paragraphes-clefs des *Grundgesetze*. Nous expliquerons qu'il n'est jamais réellement parvenu à trancher entre les deux approches, et éclairerons ainsi certaines des réactions induites par la découverte de la contradiction. Mais avant cela, nous voulons présenter deux autres difficultés posées par l'idée que les pensées sont structurées.

L'idéographie n'incorpore aucun signe pour la conjonction, que Frege simule à l'aide de l'implication et de la négation :

$$\text{‘}\begin{array}{l}\top\!\top\!\top\ \bullet\\ \quad\ \llcorner\ \bullet\end{array}\text{’}$$

Il est donc possible de la définir ainsi :

$$\Vdash \left(\begin{array}{l}\top\!\top\!\top\ b\\ \quad\ \llcorner\ a\end{array}\right) = a \wedge b$$

Supposons désormais un autre langage, similaire en tous points à l'idéographie, à l'exception du fait qu'il intègre un nom *primitif* pour la conjonction et aucun pour l'implication. Puisque le sens du signe pour l'implication (de l'idéographie) est atomique, il ne peut être retrouvé à travers la définition suivante :

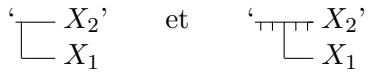
$$\Vdash_{\top} (a \wedge_{\top} b) = \left(\begin{array}{l}\top\!\top\ b\\ \quad\ \llcorner\ a\end{array}\right)$$

Un nom ainsi défini aurait bien sûr la même référence que celui de l'idéographie, mais son sens serait complexe dans le premier cas et élémentaire dans le second. Pourtant, un passage des *Grundgesetze* s'oppose à cette conclusion :

> Dans notre symbolisme, le ‘et’ qui lie les énoncés apparaît moins simple que le nom de fonction ‘$\begin{array}{l}\top\ \zeta\\ \llcorner\ \xi\end{array}$’, pour lequel il manque une simple expression de la langue naturelle. Cependant, il n'est pas aisé de décider ce qui est simple du point du vue logique. On peut expliquer notre ‘$\begin{array}{l}\top\ \zeta\\ \llcorner\ \xi\end{array}$’ en utilisant ‘et’ et la négation, mais aussi réciproquement on peut expliquer le ‘et’ en utilisant le nom de fonction ‘$\begin{array}{l}\top\ \zeta\\ \llcorner\ \xi\end{array}$’ et la barre de négation. Par exemple, ‘$\begin{array}{l}\vdash\!\top\ 2+3=5\\ \quad\ \llcorner\ 2+2=4\end{array}$’ dit moins que ‘$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\top\ 2+3=5\\ \quad\ \llcorner\ 2+2=4\end{array}$’ et peut donc être considéré comme étant plus simple. La raison fondamentale de l'introduction de ‘$\begin{array}{l}\top\ \zeta\\ \llcorner\ \xi\end{array}$’ provient de la facilité et de la clarté avec laquelle on peut ainsi représenter l'inférence. (Frege 1893, p. 25)

Non seulement Frege considérait que le choix de tel "connecteur" au détriment de tel autre répondait à des enjeux purement pragmatiques, et en aucun cas théoriques ; que d'autres alternatives – par exemple l'abandon de l'implication au profit de la conjonction – lui semblaient à même de refléter ce qu'il nommait ‘la structure des pensées’, bien qu'elles soient moins commodes à employer dans le courant des démonstrations. Mais, de plus, tout suggère qu'il aurait attribué des sens identiques au nom pour l'implication dans les deux langages évoqués ci-dessus ou, pour rester au sein de l'idéographie, aux deux expressions suivantes[65] :

65. La seconde étant l'implication "retrouvée" à partir de la conjonction, elle-même définie grâce à l'implication.



En effet, selon lui, l'implication (contenu simple) peut tout à fait être expliquée à partir d'autres contenus : ceux de la conjonction et la négation. Or, 'expliquer' est ici synonyme de 'défini'[66]. Voilà le premier problème que Frege n'a pas pris la peine d'examiner, celui d'un critère adéquat permettant de déterminer le caractère atomique de certains sens "propositionnels".

La seconde difficulté est à la fois plus générale et plus fondamentale. Considérons l'énoncé '$\frown_{\mathfrak{a}}\frown_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$'. À première vue, son sens est ultimement constitué de ceux de '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' – doublement présent – et de '$\xi = \zeta$'. Néanmoins, voici la seule manière d'envisager que sa structure soit composée à partir de ces éléments :

(1) le sens de '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \xi = \mathfrak{b}$' est structuré à partir de ceux de '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \varphi(\mathfrak{b})$' et de '$\xi = \zeta$' ;

(2) le sens de '$\frown_{\mathfrak{a}}\frown_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$' est structuré à partir de ceux de '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' et de '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \xi = \mathfrak{b}$'.

La difficulté émerge à partir de (1), car '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \varphi(\mathfrak{b})$' est de type $((0))$ et '$\xi = \zeta$' de type $(0, 0)$. À ce titre, ils ne peuvent se composer. Voici comment Frege envisageait la construction du nom en question[67] :

(a) '$\Delta = \Gamma$' provient de la saturation de '$\xi = \zeta$' par 'Δ' et 'Γ' ;

(b) '$\Delta = \xi$' provient de la désaturation de 'Γ' dans '$\Delta = \Gamma$' ;

(c) '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \Delta = \mathfrak{b}$' provient de la saturation de '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \varphi(\mathfrak{b})$' par '$\Delta = \xi$' ;

(d) '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \xi = \mathfrak{b}$' provient de la désaturation de 'Δ' dans '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \Delta = \mathfrak{b}$' ;

(e) '$\frown_{\mathfrak{a}}\frown_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$' provient de la saturation de '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' par '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \xi = \mathfrak{b}$'.

Cette stratégie lui permettait de fixer la référence du nom complexe en fonction de celles des noms simples impliqués. Selon lui, spécifier la référence d'un nom de fonction consistait à spécifier sa valeur en tout argument. Il se donnait deux noms supplémentaires 'Γ' et 'Δ', et supposait que les références de '$\xi = \zeta$' et de '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' étaient déterminées. Puisque celle de '$\xi = \zeta$' est déterminée , alors *quelles que soient celles de* 'Δ' *et* 'Γ', celle de '$\Delta = \Gamma$' l'est aussi. Par conséquent, la référence de '$\Delta = \xi$' est déterminée quelle que soit celle de 'Δ'. Donc, celle de '$\frown_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' étant déterminée, alors celle '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \Delta = \mathfrak{b}$' est déterminée quelle que soit celle de 'Δ'. Ainsi, la référence de '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \xi = \mathfrak{b}$' est déterminée, et par suite celle de '$\frown_{\mathfrak{a}}\frown_{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$'.

Nous donnerons tout le détail requis en section 3.3. La méthode s'appuie sur le fait que les 'Γ' et 'Δ' jouent des rôles intermédiaires, indépendants de leurs références particulières, donc finalement dispensables. Mais elle n'est valable que parce que nous cherchons seulement à déterminer la référence du nom complexe en fonction de celles des noms atomiques. Dans la sphère du sens, le défi est plus sérieux. Il s'agit d'expliquer les places que tiennent les sens des noms simples au sein de la structure que constitue celle du nom complexe. Un tel objectif exige d'admettre que le sens de '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \xi = \mathfrak{b}$' est structuré à partir de ceux de '$\frown_{\mathfrak{b}}\ \varphi(\mathfrak{b})$' et de '$\xi = \zeta$' – donc, corrélativement, que le premier nom est directement composé à partir du second et du troisième – et, en définitive, de faire l'impasse sur la mécanique de saturation-désaturation[68]. Au lieu de quoi

66. Pour une mise au point sur l'usage fregéen du terme 'explication', voir section 3.2.3.7.

67. à une nuance près, qui provient d'un écart entre les stratégies suggérées aux §§26 et 30 des *Grundgesetze*, comme nous l'expliquerons en section 3.3.4.

68. Il faut comprendre que le problème est *exactement* celui-ci. Il suffit de faire les deux suppositions suivantes pour pouvoir construire la totalité des noms sans mobiliser aucune désaturation : (1) qu'un nom qui attend la

Frege s'est obstiné à exploiter cette mécanique partout où morphologie et sémantique étaient impliquées (surtout dans les §§26, 29-31 des *Grundgesetze*), répétant inlassablement que toute composition de sens incomplets formait un sens propre. Voilà précisément la difficulté à laquelle Landini s'est confrontée sans parvenir à la surmonter [69], parce qu'elle ne peut être résolue sans renoncer à une part importante des affirmations de Frege.

Nous prions le lecteur de garder quelque temps ces questions de côté. Nous proposerons une solution en section 3.3.8, lorsque nous présenterons proprement notre thèse concernant la notion de sens chez Frege [70]. Pour l'heure, notre objectif se limite à discuter les divers aspects de la notion d'élucidation afin de comprendre en quoi elle pourrait s'opposer à la constitution d'une théorie sémantique. Et il est temps, à ce sujet, de faire le point sur ce qui vient d'être dit.

Frege utilisait les élucidations pour conférer des sens logiquement simples – irréductibles, non analysables – aux noms atomiques d'une langue idéale. Il estimait ainsi que les expressions complexes de cette langue exhibaient la structure fondamentale des pensées qu'elles exprimaient. Cependant, il ne parvint pas à chasser diverses tensions, parfois internes à cette idée, issues notamment d'une mauvaise appréciation de son appareil morphologique pour les niveaux supérieurs ; parfois externes, issues d'un conflit avec la manière dont il présentait l'opération de représentation, qui permettait d'assurer la logicité de l'axiome V. Par ailleurs, bien qu'il projetait les catégories logiques dans la sphère ontologique – sans présenter aucun argument convaincant dans ce sens –, il ne prêta pas aux objets et aux fonctions la même dimension structurelle qui convenait à leurs modes de détermination, *i.e.* aux sens de leurs noms. Jusqu'ici, rien ne semble barrer la route à l'élaboration d'une sémantique. Mais il nous reste encore à analyser un autre usage des élucidations, celui par lequel Frege entendait renseigner son lecteur sur la nature des fonctions et des objets. Nous allons ainsi pénétrer au cœur des difficultés posées par ces distinctions catégoriales, et comprendre enfin le rapprochement que certains commentateurs réalisent entre les élucidations et les énoncés *dénués de sens*.

3.2.3.5 Catégories et non-sens

L'idée d'expressions qui, pour reprendre le terme de Ph. de Rouilhan (1988), *suggèrent* plutôt qu'elles n'expriment – ou suggèrent *autre chose* que ce qu'elles expriment – fut tirée de l'article "Concept et Objet" (1892a) dans lequel Frege, en réponse à une critique adressée par Kerry, s'engagea dans une difficile discussion impliquant le paradoxe suivant. L'expression 'le concept *cheval*' est grammaticalement un nom propre. En tant que telle, elle nomme – désigne, réfère à – un objet. Ainsi, l'énoncé 'le concept *cheval* est un objet' est vrai, tandis qu'en écrivant le sujet de cette phrase, nous visons quelque chose qui n'est pas un objet ou – pour reprendre une formule que nous avons jusqu'ici employée sans avertissement, mais qui va s'avérer inadéquate, bien que commode –, nous visons une *entité d'un autre type*, précisément un concept. Ce faisant, nous manquons notre objectif, et Frege l'admit de bonne grâce :

> Sous l'effet d'une nécessité linguistique, l'expression, prise à la lettre, trahit la pensée : on nomme un objet et l'on vise un concept. Je suis conscient d'être ici tributaire de

donnée de plusieurs d'arguments peut être partiellement saturé par la donnée d'un seul argument – par exemple '$\xi = \zeta$' par 'Δ' à la place de 'ξ' –, et (2) qu'un nom peut voir une de ses places d'arguments de type T occupée par un nom à plusieurs arguments dont le type d'un seul d'entre eux est compatible avec T – par exemple '$\smile^{\mathfrak{b}} \varphi(\mathfrak{b})$' par '$\xi = \zeta$'. Frege concéda (1) à un seul endroit, et nous expliquerons bientôt pourquoi. En revanche, il rejeta invariablement et radicalement (2).

69. comme nous l'avons vu en section 2.3.4.

70. S'il le souhaite, le lecteur pourra trouver certaines recherches à ce sujet dans (Bealer 1993), (D. Bell 1996), (Heck et May 2010), (Textor 2009), (Wiggins 1992).

> la bonne volonté du lecteur, et il y faut bien un grain de sel. (Frege 1892a, p. 177 / 140)

Cette bonne volonté peut être rapprochée de la "rencontre de l'intelligence", présentée par Frege comme une condition *sine qua non* du succès des élucidations. Le lecteur – les interlocuteurs, ou qui que ce soit qui s'y trouve confronté –, doit lire ce type de tournures avec "un grain de sel" – ou, pour utiliser une formule plus courante en français, les prendre avec des pincettes – afin d'accéder à ce qu'elles cherchent à transmettre, échouant à proprement l'exprimer. Il doit donc se hisser au-delà du sens, et se soumettre au régime de la suggestion.

Quelle est la nature des messages ainsi transmis à ceux qui parviennent à les entendre ? Pourquoi le langage – et quel langage ? – échoue-t-il à les exprimer ? Frege se concentra sur un paradoxe qui ne se retrouve pas dans l'idéographie, laquelle n'intègre aucun équivalent pour le terme 'concept'. Il expliqua que "l'article défini au singulier fai[sai]t savoir que [la référence de l'expression 'le concept *cheval*' est] un objet" (p. 169 / 130). Comme nous l'avons vu (section 1.5.3), le même argument fut avancé dans les *Grundlagen* pour défendre une vision objectuelle des nombres. Pourtant, Frege reconnaissait des exceptions à cette règle. Par exemple, en examinant l'énoncé 'le cheval est un quadrupède' :

> La meilleure explication est d'y voir l'expression d'un jugement universel : 'tous les chevaux sont quadrupèdes'. (Frege 1892a, p. 170 / 131)

Dans l'énoncé initial, 'le cheval' n'est pas un nom. *A fortiori*, il ne peut s'agir d'un nom propre. Pourquoi, alors, accepter le diktat de la langue naturelle dans un cas, et s'y soustraire dans un autre ? Frege soutint que les exceptions sont aisément reconnaissables, qu'elles ne sauraient donc affecter sa règle. Mais le rôle de la langue idéale consistait, à ses yeux, à déjouer les ruses des grammaires imparfaites, *surtout* les plus fines, les moins aisément identifiables. Autrement dit, s'il semblait assuré qu'aucune d'entre elles ne s'est glissée dans l'usage de l'article défini, il ne proposa pas le moindre argument dans ce sens.

Ainsi, éloignons-nous quelques instants de sa conviction, et faisons droit à la possibilité que la structure logique de cette expression ne corresponde pas à la forme grammaticale qu'elle épouse en français. Elle pourrait par exemple référer *imparfaitement* au concept visé. Imparfaitement, car son incorporation dans une langue idéale – plus riche que l'idéographie – exigerait d'y faire figurer une place vide [71]. Notons respectivement '$\mathrm{E_O}$' et '$\mathrm{E_C}$' les énonces 'le concept cheval est un objet' et 'le concept cheval est un concept'. $\mathrm{E_C}$ devrait donc être analysé ainsi :

71. Notons néanmoins qu'il n'est pas possible d'utiliser dans ce sens une analogie avec la structure logique d'expressions telles que 'l'objet *Daniel*', cette fois-ci (davantage) conforme à leurs formulations grammaticales.

En effet, adoptons l'écriture idéographique de l'article défini en maintenant la référence de celui-ci dans sa version originale, *i.e.* sans exploiter les parcours-de-valeurs tel que Frege s'y employa dans les *Grundgesetze*. Ainsi, notons '$\backslash_\beta(\varphi(\beta))$' le nom de la fonction qui envoie tout concept qui subsume un seul objet sur cet objet (et, pour compléter cette stipulation, qui associe le Faux à tout autre concept).

Le nom 'l'objet Daniel' est alors rendue par l'écriture '$\backslash_\beta(\text{objet Daniel}(\beta))$', dans laquelle n'importe quel nom propre peut jouer le rôle de 'Daniel'. Cette expression résulte donc de la saturation partielle de '$\text{Objet}(\zeta, \xi)$' – coréférentiel avec '$\zeta = \xi$' – par 'Daniel' en 'ζ'. Et la structure logique de l'énoncé initial est dévoilée :

$$\text{'}\backslash_\beta(\text{Objet}(\text{Président de la France}, \beta))\text{'}$$

Frege aurait probablement accepté une analyse de cet ordre. Or, en élevant celle-ci d'un niveau, nous retrouvons l'idée selon laquelle 'le concept *cheval*' est un nom propre, épousant la forme *complète* suivante :

$$\text{'}\backslash_\psi(\text{Concept}_{\beta,\gamma}(\text{Cheval}(\beta), \psi(\gamma)))\text{'}$$

Dans ses textes, Frege n'a jamais entrepris l'analyse logique de ces expressions. Il est néanmoins certain que l'analogie ci-dessus appuie sa conclusion. Cela ne signifie pas pour autant qu'elle soit correcte, car elle repose encore énormément – *i.e.* peut-être trop – sur la langue naturelle.

Est un concept$_\beta$(le concept cheval(β))

Voilà l'hypothèse à examiner : la langue française utilise à tort un nom complet – 'le concept cheval' – pour référer à un concept – le concept en question. Notons que Frege a lui-même mis en lumière des situations similaires, notamment à propos du concept d'*existence*. L'énoncé 'un cheval existe' n'est pas vide de sens, il est seulement syntaxiquement inadéquat. Son sens est identique à celui de l'énoncé '$\vdash\!\mathfrak{a}\!\vdash$ Cheval($\mathfrak{a}$)', mais sa structure est malheureuse, car le caractère prédicatif du terme 'existe' ne s'accorde pas avec le concept de *second* niveau d'*existence*. La grammaire présente l'expression 'un cheval' comme un nom propre – car il n'intègre aucune place vide –, et le verbe 'exister' comme un nom de fonction du premier niveau – car il intègre une place vide pour un nom dénué de place vacante. Une analyse clairvoyante fut donc nécessaire pour dévoiler la composition réelle des pensées ainsi exprimées. Frege aurait mauvais jeu de le contester, lui qui échoua dans cette tâche lors de sa première tentative [72]. Certes, il affirma que, dans les énoncés existentiels, "le concept ne reni[ait] pas sa nature prédicative" (1892a, p. 174 / 135), grâce à la présence de l'article indéfini. Mais, ce faisant, il admit que l'article indéfini *camouflait* systématiquement une place vacante, celle-là même qui est signalée par la présence de la copule dans l'expression 'Baron est un cheval'. A priori, il n'existe aucune raison d'affirmer que l'article défini ne soit pas capable, *dans certains contextes*, d'une dissimulation de ce genre. Puisque les langues naturelles n'incorporent qu'*extrêmement* rarement de mots – par exemple 'quelque chose' – pour marquer les places d'arguments, les noms de concepts de second niveau ont souvent une structure inadéquate, dont il est nécessaire de s'affranchir par l'analyse.

Cependant, une idée importante – que Frege suggéra fréquemment sans jamais l'approfondir – vient contredire notre hypothèse, cette fois de façon déterminante : dès lors que nous sommes capables de saisir le sens d'une expression à travers le rôle qu'il joue au sein d'une pensée, nous sommes à même de répondre de son type d'incomplétude. Attention, il demeure possible de saisir une pensée sans parvenir à l'analyser correctement, et ainsi sans cerner ses constituants. C'est ce que Frege nomma 'une saisie imprécise" dans "La logique dans les mathématiques" (1914), et dont il accusa divers mathématiciens de son époque. Le travail du logicien consiste justement à apporter un éclairage sur les structures des pensées, afin de mettre en lumière les rapports logiques qu'elles entretiennent. Mais dès lors que nous accédons à une décomposition quelconque – partielle ou non –, nous ne pouvons manquer le rôle joué par les – le type des – différentes parties mises à jour.

Or, selon notre hypothèse, il est possible d'analyser la pensée exprimée par l'énoncé E_C à travers la forme '$\Omega_\beta(\Phi(\beta))$' – où '$\Phi(\xi)$' constitue la forme logiquement adéquate de l'expression 'le concept *cheval*', et où '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' constitue la forme logiquement adéquate de l'expression 'est un concept (de premier niveau à un argument)'. Dans ce cadre, le type d'incomplétude du sens, ainsi saisi, du nom 'le concept *cheval*' ne pourrait nous échapper, et nous serions en mesure de l'exploiter pour former des pensées au sein desquelles il est saturé par un sens propre. Mais c'est précisément ce que nous sommes incapables de réaliser. Nous pouvons facilement constater que toute tentative d'analyse du sens de 'Baron est le concept *cheval*' prend immanquablement la forme de '$\Delta = \Gamma$' (et non de '$\Phi(\Delta)$'). Il peut exister deux raisons à cela :

- Soit 'le concept *cheval*' est doté d'un sens propre. Ainsi nous analysons en réalité la pensée exprimée par E_C à travers la structure '$\Phi(\Gamma)$', où 'Γ' correspond au nom 'le concept *cheval*'. Si nous estimons que 'Baron est le concept *cheval*' est faux, c'est parce que nous comprenons le sens de ce nom, et que nous constatons qu'il détermine un objet qui n'est *pas* Baron.
- Soit 'le concept *cheval*' est purement et simplement dénué de sens. Si nous sommes enclins

72. comme nous l'avons vu dans le premier chapitre (section 1.4.9).

à dénier que l'énoncé 'Baron est le concept *cheval*' soit vrai, c'est parce que nous cherchons (vainement) à le comprendre en attribuant un sens à l'expression 'le concept *cheval*'. Guidés par le rôle habituel de l'article défini, nous n'envisageons que des sens propres ; et guidés par une certaine intuition relative à la notion de concept, nous n'envisageons pas que ce sens puisse déterminer l'objet Baron.

Frege se décida pour la première possibilité, mais nous verrons que ses conceptions auraient dû le conduire à la seconde. Pour l'heure, nous pouvons seulement conclure que si l'expression 'le concept *cheval*' est dotée de sens dans les énoncés tels que E_C et E_0, alors il ne peut s'agir que d'un sens propre, car le caractère objectuel de ce sens se dévoile à travers la place qu'il est inapte à tenir ou, plutôt, celle qu'il est incapable de proposer à un sens propre [73], étant lui-même complet. Notre raisonnement s'appuie donc sur l'idée que, si nous saisissons le sens fonctionnel d'un nom *via* une décomposition particulière d'une pensée, alors nous sommes en mesure d'attester des *deux* tâches que ce sens peut réaliser – compléter et être complété – quelle que soit celle à laquelle il est dédié dans la pensée en cause. Notons que nous ne prétendons pas qu'en saisissant un sens, nous soyons capables d'inscrire son type logique au sein d'une théorie bien ficelée, ni de cerner immédiatement la hiérarchie à laquelle il prend part et la place qu'il y occupe. Nous disons seulement que, lorsque nous saisissons un autre sens qu'il est capable de saturer ou par laquelle il peut être saturé, alors ces possibilités ne nous échappent pas. Voilà l'hypothèse qu'il nous faut désormais justifier, dans le cadre fregéen.

À plusieurs reprises, nous avons dit que la notion de sens devait être conçue comme – ne pouvait être comprise qu'en étant identifiée à – celle de mode de détermination. Dans le premier chapitre, nous avons trouvé confirmation de ce point à travers la manière dont l'architecture instable constituée des contenus jugeables, des modes de détermination, des objets et des concepts avait été restructurée dans le couple sens-référence lors de la prise en considération des fonctions (deuxièmes du nom) [74]. Il nous faut désormais en dire davantage. Lorsque le sens d'un nom de fonction n'était pas donné par définition – par identification au sens d'un autre nom complexe déjà connu –, Frege employait toujours la même méthode, conforme à ce qu'il nommait 'le principe de complétude'. Selon celui-ci, la référence d'un nom de fonction n'est correctement fixée [75] que lorsque la valeur de cette référence en chaque argument est déterminée. Par exemple, il expliquait que la référence de '$_{\vdash}\,\xi$' associait le Vrai à tout argument, hormis le Vrai lui-même qui était envoyé sur le Faux [76]. Cette stratégie présente un important problème car, selon les explications de Frege, elle permet seulement d'établir la *référence* d'un nom de fonction. Or il est essentiel d'attribuer à celui-ci un sens qui conduise à cette référence.

Frege a notoirement éludé la question du sens dans la quasi-totalité des *Grundgesetze* au sein desquels le principe de complétude fut à la fois présenté et mis en œuvre. Il nous appartient donc de deviner nous-même son rôle, et de formuler ici ce qui fut tu là-bas. En réalité, Frege fournit un indice capital lorsqu'il expliqua que la valeur de la fonction devait être *déterminée* pour n'importe quel objet, "même s'il peut ne pas être toujours possible, pour nous humains, avec notre savoir lacunaire, de répondre à la question" (1903, p. 69). Considérons deux noms

73. ou à n'importe quel sens de n'importe quel niveau. Notre raisonnement s'adapte bien sûr aux niveaux supérieurs.

74. Voir section 1.6.

75. Au moment de présenter le principe de complétude (1903a, III.1.a.), Frege écrivit souvent 'définie' en lieu et place de 'fixée'. Pourtant, cette méthode n'était employée que pour ses noms primitifs qui, selon ses propres dires, ne toléraient aucune définition. Nous expliquerons le choix de ce terme dans la prochaine section.

76. Sa formulation est très légèrement différente de la nôtre, impliquant des lettres grecques majuscules dont nous nous passons ici volontairement, afin de nous tenir à l'écart des considérations techniques qui nous occuperont en section 3.3.8.

de fonctions '$F(\xi)$' et '$G(\xi)$' et, suivant le principe de complétude, attribuons-leur les références ci-dessous :

$F(\xi)$ envoie tous les arguments sur Marie sauf Marie qui est envoyée sur Yves.

$G(\xi)$ envoie tous les arguments sur Marie sauf Marie qui est envoyée sur le père de Pierre.

Supposons à présent que Yves soit le père de Pierre. Alors nos deux références sont identiques puisqu'elles prennent la même valeur en chaque argument. Néanmoins, la manière dont celle de '$G(\xi)$' est présentée – nous pourrions dire 'déterminée' – ne nous permet pas de déterminer sa valeur lorsque Marie est prise en argument si nous ne savons pas que Yves est le père de Pierre. Nous voyons donc ici que le mode de détermination associé au nom 'le père de Pierre' – autrement dit le sens de ce nom – joue un rôle dans la manière dont la référence du nom de fonction est déterminée – autrement dit dans le mode de détermination de cette référence, ou encore le sens qui y conduit. En définitive, le sens d'un nom de fonction – la manière dont la référence de ce nom est déterminée – n'est rien d'autre que la manière dont sa valeur en chaque argument est déterminée. Livrer un moyen de déterminer la référence d'un nom de fonction '$F(\xi)$' – donner un sens à '$F(\xi)$' – revient à livrer un moyen de déterminer sa valeur relativement à chaque argument. En somme, il suffit de déterminer cet argument – de donner un sens à 'A' – pour que cette valeur le soit. C'est pourquoi le mode de détermination de $F(A)$ est constitué du mode de détermination de $F(\xi)$ et de celui de A : le sens de '$F(\xi)$' n'est autre que le mode de détermination de valeurs relativement à des arguments, et celui de 'A' détermine un tel argument. Attention, le sens de '$F(\xi)$' – la manière dont est déterminée *chaque* valeur relativement à *chaque* argument – est *intégralement* partie prenante de celui de '$F(A)$'. Tous les modes de détermination relatifs à ce qui est pris en argument constituent collectivement le sens de '$F(\xi)$', dont on peut donc dire qu'il est une manière de déterminer une valeur relativement à chaque argument. Ainsi, puisque $F(A)$ est déterminé en passant à travers une manière de déterminer une valeur relativement à *chaque* argument, alors cette manière – le sens de '$F(\xi)$' – est partie prenante de cette détermination – du sens de '$F(A)$'. C'est pourquoi '$F(A)$' et '$G(A)$' expriment des sens différents même lorsque 'A' ne réfère pas à Marie, et c'est pourquoi 'G(Marie)' et 'le père de Pierre' ne sont pas synonymes. Et nous comprenons désormais en quoi le sens de '$F(\xi)$' est "insaturé" et "ne subsiste pas par lui-même" : il appelle la détermination d'un argument pour que soit déterminée une valeur. En d'autres termes, il appelle la donnée du sens de 'A' pour s'unir avec lui dans celui de '$F(A)$'. Le sens de '$F(\xi)$' porte en lui cette possibilité, qui ne peut nous échapper lorsque nous le saisissons.

Il reste encore à rendre compte de sa faculté à venir lui-même saturer celui d'un nom '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$'. Bien sûr, celui-ci détermine aussi des valeurs relativement à des arguments, mais ces arguments doivent eux-mêmes être déterminés par la manière dont des valeurs sont prises relativement à des arguments. En somme, le sens de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' détermine des valeurs relativement à des valeurs relatives à des arguments. Ce point est vérifiable à travers la manière dont Frege introduisit *systématiquement* les noms de second niveau. Il ne dit jamais que la référence d'un nom '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' prend telle ou telle valeur si son argument *est* tel ou tel, mais si celui-ci prend lui-même telle ou telle valeur en tel ou tel argument. Par exemple, la valeur de $\mathfrak{a}$ $(\varphi(\mathfrak{a}))$ en un argument est le Vrai si cet argument prend la valeur Vrai en tout argument, le Faux sinon. Le sens de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' appelle donc la détermination de valeurs relativement à des arguments pour que soit déterminée une valeur. En d'autres termes, il appelle la donnée du sens de '$F(\xi)$' pour pouvoir s'unir avec lui dans celui de '$\Omega_\beta(F(\beta))$'. Et nous pourrions encore continuer l'escalade.

Pour fixer le *sens* d'un nom '$F(\xi)$', il suffit donc de livrer un moyen de déterminer une valeur relativement à un argument, même si nous ne sommes pas en mesure d'employer ce moyen. Pour fixer le *sens* d'un nom '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$', il suffit de livrer un moyen de déterminer une valeur relativement à des valeurs relatives à des arguments, même si nous ne sommes pas en mesure

d'employer ce moyen. Voilà *exactement* la tâche que Frege réalisa en introduisant ses noms de fonctions. Il fixa simultanément leur référence *et* leur sens ou, pour le dire différemment, il dévoila leur sens en fixant leur référence. En effet, pour accomplir le second travail, il convient de fournir un moyen de déterminer des valeurs en chaque argument, autrement dit d'exhiber un sens. Par ailleurs, nous comprenons que le type (ou la catégorie) d'insaturation d'un nom est dictée par celle de son sens. Le sens de '$F(\xi)$' détermine des valeurs relativement à des arguments, et peut donc s'unir avec celui de 'A' qui, en déterminant un tel argument, permet de déterminer une valeur – voilà le sens de '$F(A)$'. C'est à travers la manière dont des références sont déterminées – à travers le mode de détermination ou le sens – que les différentes catégories s'imposent. En d'autres termes, ce sont les catégories logiques qui justifient la grammaire idéographique. Mais Frege fit un pas de plus qui, nous croyons, ne s'imposait pas : il projeta ces catégories dans la sphère ontologique, à travers des distinctions absolues entre objets et fonctions, et entre fonctions de différents types.

La référence de '$F(A)$' est déterminée à travers la valeur que le sens de '$F(\xi)$' détermine en la valeur que celui de 'A' détermine. Pour que, comme l'estimait Frege, cette référence soit identifiable à partir de celles de '$F(\xi)$' et de 'A', il suffisait (et il fallait) que la référence de '$F(\xi)$' prenne, en chaque argument, la valeur que son sens détermine. Voilà ce qui fut appelée une '*fonction*', et qui dépend entièrement de sa valeur en chaque argument. L'introduction des fonctions fut donc motivée par des enjeux de compositionnalité au niveau des références. Cependant, Frege expliqua que "la nature de la fonction se révèle à travers le lien qu'elle établit entre" des arguments et des objets (1893, p. 5) ou, pour le dire de manière tautologique – et, nous verrons, tout aussi problématique –, la nature de la fonction réside dans le fait qu'elle fonctionne. Il tentait ainsi d'opposer la fonction – qui agit – à l'objet – qui n'agit pas. Mais, ce faisant, il fut responsable d'une confusion entre sphères logique et ontologique. Une fonction n'agit que lorsque – que parce que – elle est exploitée par un sens insaturé pour déterminer une valeur en chaque argument. C'est seulement le sens d'un nom insaturé qui la fait fonctionner, car c'est le rôle logique que ce sens lui attribue qui exige la donnée d'un argument. Si le réquisit de compositionnalité imposait de stipuler l'existence des fonctions – d'intégrer de telles entités au monde –, *rien* n'interdisait de faire référence à ces entités à travers des sens propres, qui les déterminent sans attendre la détermination d'une quelconque valeur. Rien n'empêchait, en somme, de parler proprement de la fonction $F(\xi)$, *i.e.* de cette entité qu'un sens incomplet pouvait aussi déterminer, exigeant dans ce cas la détermination d'un argument [77].

La manière dont une référence est déterminée – le sens – dépend du rôle que ses constituants attribuent aux références qu'ils déterminent vis-à-vis de cette référence – envoyer sur/être envoyé sur. Ce rôle est donc inhérent au sens, *i.e.* à la manière dont une référence est déterminée. Un sens est incomplet parce qu'en déterminant une référence, il lui attribue le rôle d'"envoyer sur", et attend donc en retour la donnée d'un sens qui attribue un rôle complémentaire à la référence qu'il détermine. Ce sont les rôles que les modes de détermination fixent pour les références qu'ils déterminent – leurs catégories logiques – qui justifient la grammaire idéographique. Mais Frege transporta le rôle joué par une référence – inhérent à la manière dont cette référence est déterminée (au sens), car constitutif de la manière dont la référence à laquelle conduit le sens auquel ce mode de détermination prend part est elle-même déterminée – au sein de la référence elle-même. En somme, il projeta les catégories logiques sur le plan ontologique. Il conclut qu'un sens fonctionnel d'un certain type conduit *toujours* à une fonction du même type, et un sens propre à un objet. Et ainsi naquirent les catégories ontologiques : le type d'une entité n'est pas relatif au sens qui la détermine, car une telle entité ne peut être atteinte qu'à travers des sens d'un

77. Rouilhan approfondit cette idée dans (1988, Chapitre 5).

seul type. Frege n'a donné aucune justification à cette idée [78], mais nous devons tenir compte du fait qu'il lui attribua une position fondamentale. Notre question concernant la possibilité d'une sémantique *fregéenne* doit donc être posée à l'aune de ce constat [79].

Ces considérations confirment la première moitié de la conclusion de Frege. Si nous ne parvenons pas à analyser le sens de l'énoncé 'Baron est le concept cheval' comme le résultat de la saturation du contenu de l'expression 'le concept cheval' par celui du nom 'Baron', alors la première expression ne peut être associée à un mode de détermination d'une entité qui jouerait, ainsi déterminée, un rôle conceptuel (celui d'associer des objets aux valeurs de vérité) vis-à-vis de la valeur de vérité de la pensée à laquelle ce mode de détermination contribue. Mais puisque, pour Frege, jouer un tel rôle est constitutif de la référence elle-même, nous pouvons – et devons, pour lui rester fidèle – dire simplement qu'elle ne peut référer à un concept. Néanmoins, contrairement à lui, nous n'avons pas tiré cette conclusion sur la seule base de la grammaire de la langue naturelle, mais à partir du fait que des sens compatibles peuvent toujours être articulés pour former un sens propre, et de la projection des catégories logiques dans la sphère ontologique.

Nous sommes donc face à l'alternative suivante : soit le nom 'le concept cheval' réfère à un objet, soit il est dépourvu de référence. Dans son article, Frege a opté pour la première possibilité sans apporter de justification. Il nous importe à présent d'éclairer son choix. Car, comme l'explique Rouilhan, il aurait pu confiner ces élucidations dans leurs vertus suggestives, limitant leur intérêt à ce qui est *visé* à travers elles, les privant d'une quelconque référence :

> Mais au lieu de contenir "la difficulté linguistique inévitable" qu'il y a, par exemple, à parler de la fonction $\Phi(\xi)$ [...], dans les limites du langage d'exposition, au lieu d'assigner la suite de mots 'la fonction $\Phi(\xi)$' [...] comme quasi-expression, non expressive et donc non significative, mais suggestive, incorrecte, mais, disons, *heureuse* (heureuse, puisque suggérant la fonction $\Phi(\xi)$ [..], quoi que ne la signifiant pas, et ne signifiant d'ailleurs rien du tout), au lieu, donc, d'assigner le langage d'exposition comme quasi-langage, Frege [...] se laisse entraîner dans la polémique avec Kerry, vers la position paradoxale que l'on sait. (Rouilhan 1988, p. 131)

Rouilhan décrit ici ce qu'il nomme 'le double jeu du langage'. Le premier, théorique, a trait à ce que le langage est proprement capable d'exprimer. Le second, suggestif, est celui auquel nous jouons depuis le début de cette section. En affirmant que le nom 'le concept *cheval*' ne pouvait pas référer au concept visé, *i.e.* au concept *cheval*, nous avons simulé le fait qu'il y réfère néanmoins dans sa deuxième occurrence, celle dont nous faisons usage (et non mention). Rigoureusement, notre phrase est purement et simplement fausse, ou dénuée de sens. Soit 'le concept cheval' réfère à un objet, auquel cas 'le concept *cheval*' *peut* référer au concept cheval, c'est-à-dire à cet objet. Soit 'le concept *cheval*' ne réfère pas, et il en va ainsi de tout énoncé, comme le nôtre, qui fait usage de cette expression. Pour que celui-ci ne soit pas totalement neutralisé dans son objectif, il convient alors d'ignorer ce qu'il exprime, et de nous focaliser sur ce qu'il suggère, *i.e.* ce que

78. Au contraire, il glissait systématiquement de la référence au sens lorsqu'il tentait d'expliquer la distinction concept-objet. Pour montrer que celle-ci avait cours parmi "les choses mêmes", il affirma qu'"il est impossible que toutes les parties d'une pensée soient closes sur elles-mêmes. L'une d'entre elles au moins doit être d'une façon quelconque prédicative et insaturée. Sinon elles ne pourraient pas s'enchaîner" (1892a, p. 172 / 140). Mais cet argument ne concerne pas les choses mêmes, seulement la manière dont elles sont déterminées. Il traite des parties d'une pensée – des sens –, et non des références.

79. Heck et May (2010, 2013) développent une interprétation des notions d'insaturation et de sens qui s'approche de la nôtre par son contenu, mais s'en distingue nettement par ses conclusions. Pour citer quelques points communs, ils estiment aussi que l'insaturation a trait au rôle logique assumé par les fonctions, et expliquent comme nous la notion de sens à travers celle de mode de détermination. C'est en grande partie sur la pertinence de la distinction fonction-objet ainsi que sur le statut de l'introduction des noms primitifs que nos positions divergent.

nous visons mais que le sens n'accepte pas. Cela suppose que 'le concept *cheval*' soit capable de suggérer le concept attendu. Et bien sûr, en lisant ces mots, il convient encore de passer les lunettes de la suggestion, pour éviter d'y lire qu'un nom d'objet suggère un objet : celui auquel réfère 'le concept *cheval*'.

Nous avons donc étudié le rôle théorique du langage en mettant à profit sa vertu suggestive. Rouilhan remarque que Frege aurait pu "assigner le langage d'exposition comme quasi-langage", limité au jeu de la suggestion. Il aurait ainsi privé les expressions problématiques de toute référence, et tranché le nœud gordien des paradoxes dont ils étaient responsables. Nous croyons que Frege a fait un pas de trop, inutile et dangereux, en soutenant que ces expressions étaient référentielles. Néanmoins, nous pensons qu'il était guidé dans ce sens par des raisons légitimes, échouant seulement à suivre jusqu'au bout la direction qu'elles indiquaient. Il donna incontestablement de nombreux gages d'une distinction entre *exprimer* et *suggérer*. Le plus important, cité plus haut, fut l'affirmation d'un écart entre ce qui est nommé et ce qui est visé, ainsi que l'exhortation à lire les énoncés problématiques avec "un grain de sel" (1892a, p. 177 / 140). Nous pensons néanmoins qu'il y a dans cette idée, posée aussi abruptement, quelque chose qui fut susceptible de le gêner, et le contraria effectivement. Nous croyons qu'il s'engagea sur le chemin des paradoxes – disons – catégoriaux, en essayant de lui conférer un visage plus acceptable. Prisonnier de certaines illusions, il échoua dans sa tentative. Pourtant, la direction était bonne, et les clefs du problème sous ses yeux, forgées dans ses propres conceptions. Ce sont elles que nous voulons ici retrouver car, en grande partie, la question de la sémantique en dépend.

L'idée que la suggestion puisse se substituer à l'expression, dans les contextes où celle-ci se trouve impuissante, avait de bonnes raisons de déplaire à Frege. En effet, ainsi posée, elle s'apparente à un biais de transmission de "quelque chose" qui échappe par nature à l'emprise du sens, incapable d'épouser la forme de pensées, autrement dit totalement ineffable. Cela, *a priori*, est envisageable. Mais encore faut-il éclairer cette notion d'ineffable. Car si, nous nous contentons de creuser un fossé entre ce qui est visé et ce qui est exprimé, nous n'expliquons pas le moins du monde comment ce qui est visé peut être visé. Nous nous en tenons à affirmer l'existence d'une voie d'accès à ce que le sens proscrit, la possibilité de nous tirer miraculeusement de ses griffes. Et, dans ce contexte, le miracle conserve tout son mystère. Il peut sembler illégitime d'exiger que celui-ci soit dissipé, de requérir que soient *exprimées* les raisons qui rendent suggérable ce qui n'est pas exprimable, tandis que nous ne parvenons même pas à exprimer ce qui n'est pas exprimable. Mais, puisque la suggestion est toute puissante : *suggérons-le* ! S'il existe un moyen de "viser" l'ineffable, employons-le aussi à cette fin.

Voici le cœur du problème : ainsi présentée, la suggestion ne s'apparente pas à un geste soudain qui ferait prendre la mesure de l'ineffable, dévoilant sans les franchir les limites que le sens impose – ou auxquelles il est soumis –, elle semble signer l'avènement d'un autre mode de communication – un sens_2 – affranchi des contraintes qui pèsent sur le premier – le sens_1. Elle prétend transmettre autrement des messages qui, n'étant pas exprimables, ne sont *pas* des messages :

> Il est possible de référer au concept *cheval*. La preuve : nous venons juste de le faire. Mais nous visons à référer à autre chose ; enfin, pas tout à fait autre chose, car cette autre chose nous venons d'y faire référence, mais encore autre chose ; etc. À proprement parler, nous ne voulons rien dire, car il n'y a rien à dire. Mais cela ne nous convient pas. Alors disons qu'il y a à suggérer, et suggérons-le.

La suggestion semble signer l'avènement d'un règne dual dans lequel tout ce qui était impossible ailleurs devient possible, dans lequel tout ce qui ne s'exprimait pas se suggère. Et le problème, faute d'être réglé, est décrété bénin. Elle semble aboutir au même genre de résultat

que l'*expression* sans être soumise aux mêmes règles – sans jouer le même jeu – et étendre ainsi son champ d'action, comme un coup de baguette magique téléporterait qui le souhaite de l'autre côté d'un infranchissable fossé. Ainsi présentée, elle n'aurait pas gagné les faveurs de Frege. Il y aurait vu le caprice d'un enfant qui, découvrant les lois de la physique, prétend qu'il vole en courant les bras tendus de chaque côté. Pourtant, c'est bien à une idée de ce genre qu'il fit droit en distinguant ce qui est visé et ce qui est nommé par l'expression 'le concept *cheval*'. Mais Frege n'était pas constant, ses positions à ce sujet restaient instables. Et nous allons voir qu'il commit des erreurs en tentant de jeter une autre lumière sur le rôle de la suggestion.

Dans toutes cette affaire, Frege s'est trahi à deux reprises. La première eut lieu lorsqu'il s'obstina à vouloir attribuer un sens aux prédicats 'est un objet', 'est une fonction', etc. Ce faisant, il manqua la solution au problème de la suggestion, et par là nous entendons, bien sûr, celle que ses propres conceptions imposaient. La seconde advint lorsqu'il persista à vouloir doter de contenu le nom 'le concept *cheval*' ; elle résulta précisément d'une tentative maladroite pour régler ce problème. Nous allons d'abord nous intéresser à sa première erreur, en constatant qu'il ne parvint pas à comprendre le rôle des prédicats en question, lequel éclaire immédiatement celui de la suggestion.

Les énoncés qu'il qualifiait d''élucidations' étaient, à ses yeux, fatalement défectueux. Mais il ne parvint pas à distinguer les deux causes, fondamentalement différentes, d'une telle fatalité. Celle-ci provient parfois des défaillances des langues vernaculaires : pour – et donc avant de – constituer un langage idéal, il importe de fournir certaines explications dans la langue du quotidien, laquelle exprime imparfaitement les pensées en déguisant leur structure véritable. Par ailleurs, cette fatalité a parfois trait à la nature des explications dispensées qui, lorsqu'elles concernent le fonctionnement profond du sens, ne peuvent se soumettre à son diktat. Or Frege fut souvent responsable d'une confusion entre les deux difficultés, autrement dit entre les effets néfastes d'une grammaire linguistique défectueuse – inadaptée à la grammaire logique –, et les questions directement liées à cette grammaire logique. Il confina les expressions 'est un objet', 'est un concept', etc., au premier problème, alors qu'elles sont en réalité des exemples symptomatiques du second. Voici un extrait d'une lettre adressée à Russell au cours de l'année 1902 :

> Ici nous nous trouvons dans une situation dans laquelle la nature du langage nous force à utiliser des expressions imprécises. L'énoncé 'A est une fonction' est une telle expression ; elle est toujours imprécise, car A tient place d'un nom propre. Le concept de fonction doit être un concept de second niveau, alors qu'il apparaît toujours comme un concept de premier niveau dans le langage. Quand j'écris ceci, je suis bien conscient de m'exprimer de manière imprécise. C'est parfois inévitable. Il importe seulement que nous sachions ce que nous faisons, et comment cela survient. En notation conceptuelle, nous pouvons introduire une notation précise pour ce que nous signifions quand nous appelons quelque chose une fonction (de premier niveau à un argument), par exemple : '$\tilde{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'[80]. De même, '$\tilde{\varepsilon}(\varepsilon.3 + 4)$' exprimerait précisément ce qui est exprimé de manière imprécise par l'énoncé '$\xi.3 + 4$ est une fonction'. Quel que soit ce que nous insérons à la place de '$\varphi()$', nous obtenons toujours un énoncé vrai parce que nous pouvons seulement y mettre des noms de fonctions de premier niveau à un argument. (Frege 1976, p. 218)

Remarquons que nous ne retrouvons pas la distinction entre ce qui est visé et ce qui est nommé, sollicitée dans le cas de l'expression 'le concept *cheval*'. Il est vrai que certaines explications rappellent ce qui fut dit dans "Concept et Objet", notamment le fait qu'il "importe

80. Notons qu'il ne s'agit pas là du nom des parcours-de-valeurs. Frege prit soin de ne pas utiliser le même accent sur le symbole 'ε'.

seulement que nous sachions ce que nous faisons". Mais elles ne doivent pas nous induire en erreur. Il n'est nulle part affirmé que l'expression 'est une fonction' suggère (ou vise) en français autre chose que ce qu'elle exprime (ou nomme) – par exemple ce qu'exprime (ou nomme) sa version idéographique. Il est expliqué que les deux expressions *ont le même sens*, mais ne l'expriment pas avec la même précision.

Ainsi, Frege déserra l'étau que la langue naturelle exerçait sur le sens. En décomposant le contenu de l'énoncé '$\xi.3 + 4$ est une fonction', nous réalisons qu'il résulte de la saturation d'un sens fonctionnel de second niveau – rendu de manière maladroite (respectivement adéquate) par l'expression 'est une fonction' (respectivement '$\tilde{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$') – par un sens fonctionnel de premier niveau. Ce faisant, nous comprenons que le signe 'ξ' ne marque aucune place vide, et doit être remplacé par un signe qui marque une place *non vacante*. Nous sommes ainsi motivés à corriger cette imperfection en choisissant la formulation suivante :

$$\beta.3 + 4 \text{ est une fonction}_\beta \text{ de premier niveau à un argument}$$

Ou encore l'écriture plus naturelle ci-dessous :

$$\beta.3 + 4 \text{ est une fonction de } \beta \text{ de premier niveau à un argument}$$

En résumé, une analyse correcte de ce qui est maladroitement exprimé dans les langues vernaculaires réprouve l'usage qui en est fait des termes 'concept (de premier niveau à un argument)' et 'fonction (de premier niveau à un argument)' et milite pour l'exclusion de ces derniers au profit d'expressions plus adéquates. Finalement, Frege ne conclut pas que les sens attribués à ces expressions sont inappropriés, mais que les expressions elles-mêmes sont inappropriées à l'expression de ces sens. Il n'affirma nullement qu'en les employant, nous visons autre chose que ce qui est exprimé, mais que nous exprimons de manière imprécise ce qui peut l'être de manière précise dans une langue idéale. Pourtant, il aurait dû aboutir à la conclusion opposée, car il développa lui-même les arguments y conduisant. Il expliqua à Russell que si le nom 'est un objet' était, pour sa part, grammaticalement adéquat, il n'autorisait pas à marquer la distinction entre fonctions et objets :

> Dans l'énoncé 'quelque chose est un objet', les mots 'quelque chose' occupent une place d'argument pour un nom propre. Ainsi, quoi que nous insérions à la place de 'quelque chose', nous obtiendrons toujours un énoncé vrai, car un nom de fonction ne peut pas prendre la place de 'quelque chose'. (Frege 1976, p. 218)

Aucun sens fonctionnel de premier niveau ne peut venir saturer le sens (fonctionnel de premier niveau) du prédicat 'est un objet'. Tout énoncé résultant de la complétion de ce prédicat par un autre est donc dénué de sens. Un argument similaire permet d'aboutir à la même conclusion concernant la saturation du nom de second niveau '$\varphi(\beta)$ est une fonction de β de premier niveau à un argument' par un nom propre. Par conséquent :

> Tout comme dans un langage nous ne pouvons, à proprement parler, dire d'une fonction qu'elle n'est pas un objet, nous ne pouvons pas utiliser de langage pour dire d'un objet qu'il n'est pas une fonction. (Frege 1976, p. 218)

Frege souligna ici un point essentiel, qui n'a plus trait aux grammaires accidentelles des langues naturelles, mais à des aspects logiques et ontologiques fondamentaux. Si le concept d'*objet* appartient à la catégorie des fonctions de premier niveau à un argument – ce qui est exigé pour qu'un objet puisse le saturer –, alors il ne peut agir sur aucune fonction. Rien de ce qui peut être exprimé d'un objet ne peut l'être d'une fonction, quel que soit le biais linguistique choisi, adéquat ou non :

> Je ne dirai pas qu'il est faux d'énoncer d'un objet ce que l'on a énoncé d'un concept. Je dirai que c'est impossible, que c'est dépourvu de sens. (Frege 1892a, p. 174 / 135)

Or Frege s'autorisa ailleurs le type d'énoncés qu'il proscrivait ici, par exemple :

> Dès lors que l'on admet tout objet sans restriction comme argument ou valeur d'une fonction, la question est de savoir ce que l'on entend par objet. Une définition dans les règles de l'école est impossible à mon sens, car nous touchons à quelque chose dont la simplicité ne permet aucune analyse logique. On peut seulement dire brièvement ceci : un objet est tout ce qui n'est pas une fonction, c'est ce dont l'expression ne comporte aucune place vide. (Frege 1891, p. 134 / 92)

Frege tenta de caractériser les fonctions à travers deux phrases problématiques. La première est fausse. En effet, l'expression désignant un objet *peut* comporter une place vide si nous en décidons ainsi. De la même manière, certains termes de fonctions peuvent être – et sont – syntaxiquement complets. Rigoureusement, il convient d'affirmer que l'expression *adéquate* pour un objet ne comporte aucune place vide. En retour, ceci exige d'expliquer la notion d'adéquation, *i.e.* d'éclairer le parallèle entre le caractère opérant de la fonction et l'espace vacant de son nom, et ainsi d'employer la notion que nous cherchons à caractériser. La seconde phrase – 'un objet est tout ce qui n'est pas une fonction' – est, comme il l'expliqua au-dessus, proprement dépourvu de contenu, puisqu'elle tente d'énoncer la même chose d'un objet et d'un concept (de nier du second ce qui est affirmé du premier).

Frege avait donc, sous sa propre plume, des exemples d'élucidations dont l'imperfection ne pouvait être imputée aux langues naturelles. Comme nous le verrons dans un instant, il aurait dû en tirer la conclusion qu'*aucun* sens pour les termes 'objet', 'fonction', etc., ne convenait pour accomplir ce qu'à travers eux nous visons ; et que l'expression 'est une fonction' n'exprimait pas imparfaitement un sens approprié, car un tel sens n'existait pas. Au lieu de ça, il s'obstina sur le sentier qu'il avait emprunté dans son échange avec Russell :

> Bien sûr, tout ne peut pas être défini ; seul ce qui a conceptuellement été analysé peut être reconstitué à partir des parties tirées de l'analyse. Mais ce qui est simple ne peut pas être analysé, donc défini. Si on en fait pourtant la tentative, on aboutit à un non-sens [*kommt Unsinn heraus*]. Ainsi, toutes les définitions de fonction sont aussi de cette espèce. (Frege 1924-1925a, p. 290 / 319)

Nous retrouvons la notion simplicité logique. Certains sens étant élémentaires, ils ne sont pas décomposables. Or le rôle d'une définition se limite à spécifier le sens d'un nom à travers celui d'une expression complexe dont le contenu des constituants est connu, donc à attribuer à ce nom un sens *composite*. Cela ne peut s'appliquer aux constituants logiquement élémentaires. Dans la dernière section, nous avons vu que cette notion soulevait d'importantes difficultés dans le cadre général. Dans ce contexte, elle est proprement catastrophique, car les termes 'fonction' et 'objet' ne *peuvent* en aucune manière exprimer un sens adéquat à ce que nous souhaitons réaliser à travers eux . Voilà le point essentiel que Frege a manqué en prétendant que le terme 'fonction' disposait d'un sens adéquat, aussi simple et maladroitement exprimé soit-il. Et il ne s'agit pas d'un accident de parcours. Cette position fut défendue à plusieurs reprises :

> Kerry conteste ce qu'il appelle ma définition du concept. Je remarquerai d'abord que les explications que j'ai données n'ont pas été proposées à mon sens comme une véritable définition. On ne saurait demander que tout soit défini, pas plus qu'on ne pourrait demander à un chimiste qu'il analyse toute matière. Ce qui est simple ne peut pas être analysé, et ce qui est logiquement simple ne peut pas être véritablement défini.

> Et cela qui est logiquement simple n'est pas donné d'avance, pas plus d'ailleurs que la plupart des éléments chimiques ; c'est le fruit d'une recherche scientifique. Si l'on découvre un élément simple [...] il n'est pas possible d'avoir recours à une définition pour introduire le nom de ce qui est logiquement simple. Il ne reste qu'à inviter par quelque signe le lecteur, ou l'auditeur, à mettre sous le mot ce que l'on veut lui faire entendre. (Frege 1892a, pp. 167-168 / p. 128)

> Les mathématiciens ont été contraints par la nature de leur science à concevoir un concept, qu'ils ont appelé fonction. (Frege 1924-1925a, p. 289 / 319)

> Sans entente mutuelle, il n'est pas non plus possible de rendre compréhensibles les désignations d'un contenu non décomposable. Le mot « fonction » est lui-même une telle désignation. (Frege 1924-1925a, p. 290 / 319)

Selon Frege, le terme 'fonction' exprime bel et bien un sens, tout indéfinissable qu'il soit. Le lecteur peut être guidé jusqu'à lui par "quelque signe". Voilà l'erreur qu'il convient désormais de rectifier.

Revenons quelques instants aux origines des distinctions catégoriales. Une langue idéale manifeste le rôle joué par la référence du constituant d'un nom (par exemple '$F(\xi)$') vis-à-vis de la référence du nom complexe qui l'intègre (par exemple '$F(A)$'). Mais, pour Frege, ce rôle n'est pas relatif à la manière dont la référence est déterminée (au sens), il est constitutif de la référence elle-même. Il appartient donc à la nature de certaines références d'avoir pour rôle d'agir sur, ou d'agir relativement à telle action sur, etc. Le monde est ainsi peuplé d'objets, de fonctions de premier niveau à un argument, etc., qui ne peuvent être atteints qu'à travers des sens de même type, et ne peuvent donc agir que sur ou relativement à – ne peuvent prendre en arguments que – des références atteintes à travers des sens de types compatibles, *i.e.* des références qui *sont* de types compatibles. Une fonction de premier niveau à un argument attend un objet en argument, une fonction de second niveau à un argument attend une fonction de premier niveau à un argument en argument, etc.

Par conséquent, il n'existe pas de concept *général* de fonction, qui associe au Vrai aussi bien les fonctions de premier que de second niveau, etc. Cela, Frege le savait, c'est pourquoi il précisa à Russell qu'il traitait en réalité du concept de fonction *de premier niveau à un argument*. Par ailleurs, il était au clair sur l'impossibilité d'exprimer qu'une fonction de premier niveau à un argument n'était pas un objet. Pour ce faire, il conviendrait de compléter un nom de premier niveau à un argument par un nom du même type :

$$\mathfrak{f}(\xi) \text{ n'est pas un objet.}$$

L'expression obtenue incorpore une place vacante. Au mieux, elle peut être regardée comme un nom de fonction de premier niveau qui, une fois saturé par un nom propre, exprime que la *valeur* d'une fonction de premier niveau à un argument en la référence de ce nom propre n'est pas un objet. Cela n'est ni vrai, ni ce que nous tentons de dire.

En outre, il est tout à fait possible – et même extrêmement simple – de référer à un concept qui subsume toutes les entités d'une certaine catégorie. L'idéographie elle-même possède les ressources suffisantes. Dans le cas des objets, il suffit d'utiliser le nom '$\xi = \xi$'. Pour les fonctions de type (0), nous pouvons employer '$\mathfrak{a}\ \varphi(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{a})$'. De plus, il est clair que si l'expression 'est un objet' possède un sens, celui-ci conduit au concept qui subsume tous les objets, *i.e.* au concept $\xi = \xi$. Néanmoins, les incompatibilités entre catégories interdisent de comparer entre eux les éléments de catégories distinctes, ne serait-ce que pour affirmer qu'ils ne sont pas identiques. Elles interdisent tout propos discriminatoire, toute pensée clivante, qui décrirait les frontières

entre ces catégories. Or c'est précisément ce à quoi est destiné le nom 'objet', et ce que son sens devrait permettre. Bien sûr, un tel sens déterminerait le concept $\xi = \xi$, et bien sûr il existe des sens qui déterminent ce concept, mais aucun parmi eux ne peut discriminer entre les différentes catégories, car aucun sens conduisant au concept qui subsume tous les objets ne peut être saturé par un sens fonctionnel. C'est pourquoi il n'est pas possible d'exprimer qu'une fonction n'est pas un objet, ou plus généralement qu'une certaine entité n'appartient pas à une certaine catégorie.

Frege s'est engagé dans la bonne direction en soulevant ce point, mais il n'a pas su l'amener à sa juste destination. S'il est impossible d'exprimer qu'une certaine entité n'appartient pas à une certaine catégorie, il n'est pas davantage envisageable de dire qu'elle y appartient. C'est précisément parce que l'énoncé 'aucune fonction n'est un objet' ne veut rien dire que le terme 'objet' lui-même est dénué de sens. En affirmant que Δ est un objet, nous souhaitons indiquer à quelle catégorie il appartient, et du même coup auxquelles il n'appartient pas. Mais cela, proprement, est dénué de sens. Ainsi, il serait inapproprié d'attribuer à 'ξ est un objet' le sens de '$\xi = \xi$'. En disant que Δ est identique à lui-même, nous ne dessinons aucune frontière entre les objets, car nous impliquons une propriété qui subsume *tous* les objets. Au contraire, en utilisant l'expression 'Δ est un homme', nous localisons Δ d'un côté de la frontière tracée par la propriété d'*être un homme*. Cette frontière parcourt le strict domaine des objets, elle ne s'étend pas au-delà. Il n'est pas question de demander si notre propriété subsume un concept ou une fonction. Malheureusement, en prétendant que Δ est un objet, nous visons à atteindre ce genre de position. Nous tentons d'indiquer le *type* de Δ. Nous souhaitons donc, comme dans le cas de 'ξ est un homme', donner la localisation de Δ vis-à-vis d'une certaine limite. Mais, cette fois, la limite devrait se situer *entre* les objets et les fonctions, elle viendrait donc découper le champ de la totalité des entités. Ce geste exigerait d'aplatir la hiérarchie catégoriale afin de ramener les entités au même niveau de discours, et ainsi les confronter les unes aux autres. C'est lui que les positions de Frege récusent. Car la référence de 'ξ est un objet' devrait envoyer tous les objets sur le Vrai et toutes les autres entités sur le faux. Or aucun concept n'admet n'importe quelle entité en argument.

Frege soutient que l'énoncé 'Jules César existe' est dénué de sens, à cause de l'inadéquation catégoriale entre l'objet Jules César et le concept d'existence de second niveau. Mais tentons une autre utilisation du verbe 'exister', pour dire à travers lui qu'un objet *existe* au même titre qu'une fonction *opère*[81]. Par ce biais, nous visons encore une propriété – l'existence – qui sépare les objets des autres entités. Et l'objection ci-dessus s'applique à nouveau. Il est aussi dénué de sens de dire 'il existe Jules César' – ou 'Jules César existe' –, que de dire 'Jules César est un objet'. Il est aussi absurde d'expliquer que $\beta + \beta$ est une fonction$_\beta$, que d'expliquer que $\beta + \beta$ opère$_\beta$. À travers les noms qui sont saturés, nous visons non pas à décrire une propriété partagée par tous les objets ou toutes les fonctions (de premier niveau à un arguent), mais à décrire une propriété qui *distingue* les objets des fonctions. Aucune pensée n'est à même de discriminer entre différentes catégories, or c'est précisément à cette fin que nous mobilisons les termes 'objet', 'fonction de premier niveau à un argument', etc. Ces termes, à proprement parler, sont dénués de sens.

Une entité d'un certain type n'est accessible qu'à travers un sens de même type, ainsi elle ne peut être l'argument d'une fonction qui opèrerait sur des entités d'autres types. Il n'est donc pas possible de réunir toutes les entités à un même niveau de discours pour décrire proprement la hiérarchie qui les affecte, de les soumettre aux mêmes concepts – par exemple celui d'*objet* – sous lesquels certaines tomberaient et d'autres non. Le terme même d''entité' relève d'une vaine tentative de cet ordre, et la distance à laquelle nous voulons maintenir son contenu de

81. ou qu'une fonction de premier niveau à un argument opère sur un objet.

celui du mot 'objet' est, dans une perspective fregéenne, parfaitement hypocrite. À travers lui, nous aspirons à constituer un domaine qui transcende les catégories, dont tous les éléments – dont toutes les entités (...) – soient objets de discours. Mais, pour Frege, ne peut être objet d'un discours que ce qui peut l'être d'un (et de tout) autre. On ne peut s'affranchir des catégories en changeant de langage. Ce qui est fonction quelque part – par exemple dans un langage-objet – ne peut devenir entité, c'est-à-dire objet, ailleurs – par exemple là où nous nous exprimons actuellement. Et nous voyons enfin se spécifier l'idée attribuée abruptement à Frege par Hintikka, selon laquelle nous serions *prisonniers* du langage. Rouilhan lui conféra une forme plus aboutie :

> Comme si la distinction *Hilfssprache* [langage auxiliaire]/*Darlegunssprache* [langage d'exposition] pouvait jouer chez Frege le rôle méthodologique que, dans un horizon relativiste qui n'était pas originellement le sien chez Tarski, on a fini par faire jouer à la distinction langage-objet/métalangage. Non, Frege est aussi loin que possible d'une telle réponse, la différence objet/fonction n'est pas une différence relative à différents niveaux de langage, mais une différence ontologique absolue. Il n'y a pas, chez Frege, différents niveaux de langage, mais un seul, qui est *le* niveau *du* langage, le reste est non-langage. Jamais ne sont en jeu deux langages, fût-ce dans le double jeu du langage. (Rouilhan 1988, p. 133)

Aucune *théorie* des catégories n'est légitime. Il n'est pas question, à travers une montée sémantique, de s'évader d'un langage pour décrire la hiérarchie structurelle qui affecte les références de ses termes. Cette hiérarchie est absolue, et ses lois ne sont pas formulables. Elles sont visibles en filigrane de chaque pensée que nous parvenons à décomposer. Mais les mots 'entité', 'objet', 'fonction', 'exister' – comme nom de premier niveau –, 'opérer', etc., qui visent à ramener dans l'écume ce qui se joue dans les profondeurs, sont rigoureusement vides de contenus. Tant que nous conservons une certaine complaisance théorique pour eux, nous n'avons pas cerné ce que sont fonctions et objets. Une fonction opère, aussi inévitablement qu'un objet est, suffisamment inévitablement pour que cela aille sans dire, sans qu'il soit possible de le dire.

Nous voyons désormais de quelle manière Frege aurait dû, en suivant jusqu'au bout le sentier qu'il avait tracé, rejeter les paradoxes auxquels Kerry le confronta. Il suffisait de chasser les termes problématiques du langage théorique. Et cet exil n'est pas justifié, comme il le crut un temps, par une inadéquation grammaticale, mais par le fait qu'aucun sens ne puisse leur être attribué qui permette d'accomplir ce que nous visons à travers eux. Son erreur épousa diverses formes au fur et à mesure où il se heurtait au problème sans parvenir à le résoudre, mais l'origine demeura invariable : imputer à des langues imparfaites une inaptitude fondamentale qui affecte le sens lui-même.

Il reste néanmoins une question car, depuis le début de nos explications, nous faisons usage de ces termes. Si nos énoncés sont proprement dénués de sens, s'il ne s'agit que d'éléments linguistiques sans contenu, comment peuvent-ils prétendre tenir un quelconque rôle, fut-il propédeutique ? Il ne suffit pas de nous en remettre au miracle de la suggestion dans un acte de foi désespéré. Il serait malhabile d'envisager de suggérer le fait que Δ est un objet, faute d'être en mesure de l'exprimer. En effet, tout fait – toute pensée vraie – est exprimable. Il n'existe donc pas de tel fait, et il n'y rigoureusement *rien* à suggérer. Alors que parvenons-nous à réaliser à travers ces phrases, et surtout comment cela peut-il se produire ? Il est clair qu'une simple suite de mots vides n'est d'aucun secours. Le sens, aussi prisonnier soit-il de lui-même, doit jouer un rôle dans cette histoire, et il nous faut désormais déterminer lequel.

Nous savons qu'aucun sens ne peut être attribué aux noms 'objet', 'fonction', etc., – fut-ce dans une langue idéale – qui permette de distinguer les entités de types différents. Pourtant, certaines des phrases dans lesquelles nous employons ces termes sont bel et bien destinées à leur

conférer du sens. Cela ne contredit pas ce que nous venons d'établir. La théorie des catégories est et demeure illégitime. Néanmoins, certains sens peuvent nous servir de guides en exprimant quelque chose qui a lieu ailleurs. Ils peuvent nous éclairer par *analogie*. Voilà la manière dont il convient de lire les *signes* [*Winke*] par lesquels Frege espérait que le lecteur devine le "contenu" de noms tels que 'objet' et 'fonction'. Et, généralement, voici comment les élucidations mettent en lumière certaines nuances "dans un lieu [...] où, *de jure*, de telles différences, disons *musicales, ne s'entendent pas*" (Rouilhan 1988, p. 133). Considérons les énoncés élucidatoires suivants [82] :

E_1 : Tout objet est identique à lui-même.

E_2 : Aucune fonction n'est un objet.

E_3 : Une fonction associe un unique objet à chaque objet.

E_4 : Deux fonctions qui associent les mêmes objets aux mêmes objets sont identiques.

E_5 : Le Vrai et le Faux sont des objets.

E_6 : ${}_{\top}\xi$ est la fonction qui associe le Faux au Vrai et le Vrai à tout autre objet.

Ces phrases contiennent des termes problématiques : les mots 'fonction' et 'objet' ainsi que le nom primitif de l'idéographie '${}_{\top}\xi$'. Considérons qu'ils ne disposent pas encore de contenus, et que ces énoncés sont justement là pour indiquer au lecteur lesquels doivent leur être assignés. Frege a souvent préconisé de procéder ainsi :

> Nous ne pouvons reconnaître les phrases contenant un signe vide, et dont les autres constituants sont connus, comme des définitions. En revanche, de telles phrases peuvent avoir un rôle d'élucidation, en ce qu'elles laissent deviner ce qu'il faut entendre par le signe ou le terme en question. (Frege 1914, p. 232 / 255)

Pour arriver à nos fins, il importe évidemment de choisir des contenus qui rendent vrais nos énoncés, en conservant aux autres constituants leurs sens – et donc leurs types – habituels. Dans E_1, le mot 'identique' nous motive [83] à lire le terme 'objet' comme un nom $\mathbf{O}(\xi)$ de premier niveau à un argument, et procéder à l'analyse logique suivante [84] :

$$\mathbf{E_1} : \forall \mathfrak{a}(\mathbf{O}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$$

C'est bien sûr à travers E_2 que les paradoxes s'immiscent. Pour conférer un sens à cette phrase, il est nécessaire d'analyser le terme 'fonction' comme un nom '$\mathbf{F}(\xi)$' de premier niveau à un argument, afin que, contrairement à ce qu'affirme Frege, ce qui se dit d'un objet puisse *aussi* se dire d'une fonction :

$$\mathbf{E_2} : \forall \mathfrak{a}(\mathbf{F}(\mathfrak{a}) \to \neg\mathbf{O}(\mathfrak{a}))$$

E_3 présente une nouvelle difficulté, car le sens du terme 'associer' est extrêmement fluctuant dans la langue naturelle. Au point où nous en sommes, il est néanmoins garanti qu'il s'agit d'un nom '$\mathbf{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$' de relation de premier niveau à trois arguments :

$$\mathbf{E_3} : \forall \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b}\Big((\mathbf{F}(\mathfrak{a}) \wedge \mathbf{O}(\mathfrak{b})) \to \exists! \mathfrak{c}, \mathbf{A}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})\Big)$$

82. Nous allégeons la rédaction en remplaçant ici l'expression 'fonction de premier niveau à un argument' par 'fonction'.

83. Attention, nous ne commettons pas ici l'erreur de Frege en accordant trop de pouvoir à la langue naturelle. Nous ne cherchons pas à analyser un sens à travers la manière dont cette dernière l'exprime, nous voyons quel sens pourrait naturellement être attribué à un nouveau terme relativement aux sens des autres constituants des phrases dans lesquels nous les faisons figurer. Il est donc légitime de conserver pour ces constituants les sens qu'ils recouvrent usuellement.

84. Nous utilisons ici les notations traditionnelles.

E_4 donne quelques renseignements supplémentaires sur cette relation :

$$\mathbf{E_4} : \forall\mathfrak{a}\forall\mathfrak{b}\Big((\mathbf{F}(\mathfrak{a}) \wedge \mathbf{F}(\mathfrak{b})) \rightarrow \forall\mathfrak{c}\forall\mathfrak{d}((\mathbf{A}(\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{d}) \leftrightarrow \mathbf{A}(\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d})) \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b})\Big)$$

E_5 ne pose aucun problème :

$$\mathbf{E_5} : \mathbf{O}(\mathbf{V}) \wedge \mathbf{O}(\mathbf{F})$$

Enfin, E_6 prend la forme suivante :

$$\mathbf{E_6} : {}_{\top}\xi = \backslash_{\beta}(\mathbf{F}(\beta) \wedge \mathbf{A}(\beta,\mathbf{V},\mathbf{F}) \wedge \forall\mathfrak{a}(\mathfrak{a} \neq \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{A}(\beta,\mathfrak{a},\mathbf{V}))$$

E_4 nous assure que si la référence des autres termes est fixée, alors celle du nom *d'objet* '${}_{\top}\xi$' l'est aussi. En effet, il exprime qu'une fonction est entièrement déterminée par ses valeurs, or celles de ${}_{\top}\xi$ sont décrites par E_6.

Pour l'instant, aucun paradoxe ne s'est mis sur notre route. Il est possible de conférer des sens à nos termes afin de valider les six énoncés. En vérité, il existe même *plusieurs* familles de sens qui remplissent ce cahier des charges. Néanmoins, dans chacune d'entre elles, la référence de '$\mathbf{O}(\xi)$' ne subsume pas tous les objets. Pour le dire différemment, les objets ne couvrent pas la totalité des... objets (*aïe*!). Évidemment, dans cette dernière phrase, nous avons respecté pour la première occurrence du terme 'objet' ce que nos six énoncés lui imposaient, tandis qu'à travers la seconde, nous avons voulu lui rendre son rôle catégorial. Or voilà la problème : ce rôle ne peut être tenu que silencieusement ou, plus précisément, que par un terme dénué de sens, que par un *constituant* insensé d'expressions dotées de sens.

Considérons l'énoncé 'tout homme est un animal' :

$$\forall\mathfrak{a}(\mathbf{H}(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathfrak{a}))$$

Frege proposa de l'exprimer ainsi : 'si quelque chose est un homme, alors quelque chose est un animal', au motif que cette formulation intègre un équivalent – 'quelque chose' – au symbole '$\mathfrak{a}$'. Au même titre, nous pouvons adopter la version ci-dessous :

Si un objet est un homme, alors un objet est un animal.

Dans ce cadre, le mot 'objet' – comme le symbole '$\mathfrak{a}$' – ne présente aucun contenu. Il occupe la place de l'argument du nom 'est un homme' – '$\mathbf{H}(\xi)$'. Or notre objectif consiste à conférer un sens au mot 'objet' afin de pouvoir l'employer dans d'*autres* contextes, notamment au sein d'énoncés comme E_5 dans lesquels il ne marque manifestement aucune place d'argument. Mais nous voulons néanmoins – c'est même tout l'enjeu – que ce sens soit *compatible* avec le rôle tenu par '$\mathfrak{a}$', *i.e.* qu'il conduise à un concept qui subsume tous les arguments possibles pour $\mathbf{H}(\xi)$. Pour le dire différemment, nous voulons que tout objet – le terme étant entendu comme place d'argument – soit un objet – le terme étant entendu comme nom de concept :

$$\mathbf{E_7} : \forall\mathfrak{a}\mathbf{O}(\mathfrak{a})$$

À partir de E_2 et E_7, nous pouvons déduire qu'il n'existe aucune fonction :

$$\mathbf{E_8} : \forall\mathfrak{a}\neg\mathbf{F}(\mathfrak{a})$$

Voyons à présent un nouvel énoncé :

$\mathbf{E_9}$: Il existe une fonction qui envoie quelque-chose sur le Vrai.

Naturellement, nous sommes conduits à l'analyser ainsi :

$$\exists \mathfrak{a}(\mathbf{F}(\mathfrak{a}) \wedge \exists \mathfrak{b}\mathbf{A}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathbf{V}))$$

Il ne peut nous échapper que E_8 et E_9 sont contradictoires. Et c'est à ce moment précis que, fatalement, nous trébuchons au bon endroit. L'incohérence n'est advenue que parce que nous avons ramené objets et fonctions sur le même plan. Ce constat nous conduit à une autre manière d'interpréter le terme 'fonction' dans ce dernier énoncé, à l'instar des contextes dans lesquels le mot 'objet' ne fait qu'occuper une place d'argument. E_9 s'écrit alors '$\exists \mathfrak{f}, \exists \mathfrak{a}, \mathfrak{f}(\mathfrak{a})$' ou, pour mieux marquer le rôle des lettres gothiques au sein des noms de fonctions :

$$\exists_{\mathfrak{f}}(\exists_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{f}(\mathfrak{a})))$$

Voilà qui, répercuté au niveau du prédicat 'est une fonction', éclaire soudainement l'impasse dans laquelle nous nous sommes engagés. L'écart entre les expressions '$\exists \mathfrak{f}(\mu_\xi(\mathfrak{f}(\xi)))$' et '$\mathbf{F}(\xi)$' nous apparaît immédiatement, et révèle que la référence du prédicat 'est une fonction' devrait finalement accueillir des fonctions de premier niveau à un argument. Mais ceci empêche malheureusement d'exprimer qu'un objet n'est pas une fonction, de proposer une même entité comme argument des deux références. Autrement dit, cela interdit de conférer des sens aux termes 'objet' et 'fonction' qui permettent de théoriser le rôle qu'ils jouent lorsqu'ils ne sont que constituants de noms – à l'instar des lettres gothiques –, et plus généralement de *caractériser* les catégories. L'objectif que nous visions initialement se dévoile comme inaccessible, et la dimension intrinsèquement métaphorique des énoncés E_1 - E_6 nous apparaît brutalement.

Pour comprendre comment procède cette métaphore, il convient d'être un peu plus précis sur la démarche que nous venons de décrire. Le but consiste à guider quelqu'un dans sa tentative de décrire ce qui se joue au niveau de ce qu'il est capable de saisir – au niveau du sens – pour qu'en réalisant la vanité de cette tentative, il parvienne néanmoins à cerner ce qui se joue à travers une analogie adéquate, à réaliser que ce qui se joue ne peut pas être décrit, et enfin à comprendre la valeur de l'analogie en question.

La totalité du processus présuppose une certaine capacité de saisie du sens. Le point de départ consiste à se munir d'un énoncé très simple – par exemple 'Baron est un cheval' –, et à proposer une "reformulation" – par exemple 'l'objet Baron tombe sous le concept *cheval*'. Ce faisant, nous détachons deux parties de la phrase – 'Baron' et 'est un cheval' –, et motivons le lecteur à déstructurer lui-même cet énoncé, à procéder à des remplacements de l'une ou l'autre de ces parties afin qu'il saisisse ce qui en résulte, qu'il observe la manière dont le sens se structure sur cet exemple particulier. De plus, à travers les termes 'saturé' et 'insaturé', nous pouvons indiquer une différence structurelle entre les parties. De même, l'usage des mots 'objet' et 'concept' suggère une distinction que nous qualifions de 'catégoriale' entre différentes choses, que nous nommons des 'entités', et qui sont liés à ces parties. Nous pouvons ensuite encourager le lecteur à différencier les pensées et les sens qu'il aura su saisir (grâce aux remplacements effectués) des valeurs de vérité auxquelles conduisent ces pensées et des entités auxquels conduisent ces sens. Nous pouvons le faire en disant exactement ce que nous venons de dire, ainsi qu'en impliquant des exemples au sein desquels cette différence est cruciale – notamment 'l'étoile du soir est l'étoile du matin'. Nous pouvons encore approfondir, et développer tout ceci en écrivant les énoncés E_1 - E_6.

C'est ici que l'énigme *doit* être résolue : comment les termes 'fonction', 'objet', 'entité' dont nous connaissons les failles peuvent-ils néanmoins servir de guide dans ce labyrinthe ? Proposons la métaphore suivante : nous tentons de suggérer une hiérarchie catégoriale – disons – verticale tandis que nous nous situons sur un plan horizontal. En parlant des entités des diverses catégories,

en les confrontant, en les distinguant, nous sommes contraints de les réunir à ce même niveau de discours – celui des objets – auquel tant n'appartiennent pas. Par ce geste, nous les manquons inéluctablement. Là est la fatalité du sens. Nous sommes dans la situation du dessinateur qui s'évertue à dévoiler les trois dimensions de l'espace sur une feuille de papier. Comme lui, nous sommes contraints de recourir à un procédé : la perspective. Et, comme lui, nous pouvons espérer que ce procédé fonctionne *seulement* auprès de ceux qui sont déjà capables de *voir* les trois dimensions là où elles sont. Dans notre cas, nous pouvons espérer être efficaces seulement auprès de ceux qui sont aptes à *saisir* le sens. Enfin, comme lui, il nous faut attendre que la perspective surgisse soudainement de la feuille de papier aux yeux du spectateur. Nous ne sommes pas en mesure de provoquer ce moment, nous pouvons seulement mettre tout en place afin de renforcer sa probabilité de survenir. Nous devons inévitablement nous appuyer sur ce que Frege nommait, sans voir réellement où elle se situe, une "rencontre des intelligences".

La métaphore tient dans ce que quelque chose – voire plusieurs choses – est bel et bien exprimé, mais doit être lu au sens figuré. Comme nous l'avons vu, en proposant les énoncés E_1 - E_6, nous invitons le lecteur à conférer aux mots 'objet' et 'fonction' des contenus qui rendent vrais ces phrases. Celui-ci doit aussi composer avec le sens fluctuant des termes du langage naturel qui y figurent. Il se trouve finalement face à plusieurs possibilités qui sont collectivement en mesure de le guider, à travers une *analogie* adéquate. Un point est inévitable : en formulant nos énoncés, nous présentons les fonctions comme des objets. Mais c'est précisément ici que l'analogie intervient. Il existe certaines choses qui associent des choses à d'autres, en respectant les réquisits d'unicité imposés par E_4 et E_5. En somme, il est possible d'attribuer aux termes 'objets' et 'fonctions' des sens qui valident nos énoncés. Il y a même plusieurs alternatives possibles. Cependant chacune de ces alternatives décrit au niveau des objets – horizontalement – une mécanique d'association (ou d'opération) qui a aussi lieu au niveau des fonctions – verticalement. Il est impossible de raconter cette mécanique verticale, car nous ne pouvons essentiellement présenter comme objets *que* des objets. L'écart structurel entre fonctions et objets interdit de les réunir à un même niveau de discours, ce que l'expression de leur différence exigerait inévitablement. Néanmoins, au fur et à mesure où nous décrivons quelque chose qui se produit au niveau des objets – tous les sens possibles pour nos énoncés font cela –, nous confrontons le lecteur au régime vertical dans lequel ce qui nous intéresse se réalise, en choisissant des illustrations judicieuses.

Supposons par exemple que nous expliquions que le sens de l'expression 'est un cheval' est insaturé – qu'il ne peut s'agir d'un objet – et qu'il attend d'être complété par un sens propre, par exemple celui de 'Baron'. Bien sûr, en tentant de comprendre notre phrase, le lecteur va inévitablement envisager des sens propres pour l'expression 'le sens de l'expression 'est un cheval'', car il ne sera pas en mesure d'articuler autrement le contenu de cette partie avec celui du reste de la phrase. À ce stade, il ne saura pourtant pas quel contenu choisir. Les termes 'insaturé' et 'complété' lui évoquent certaines images, par exemple celle d'une figure géométrique dont un morceau a été détaché. À travers ces illustrations se constitue un spectre de sens possibles pour notre expression. Bien entendu, aucun de ces sens propres ne convient. Aucun ne *peut* convenir, car il faudrait pour cela qu'un sens propre conduise à une fonction. Cependant, notre exemple le motivera à combiner lui-même les contenus de 'est un cheval' et de divers noms propres. C'est précisément ici que la rencontre des intelligences intervient. Le lecteur se trouve projeté *là* où ce que nous tentons vainement de décrire se produit, et peut ainsi parvenir à saisir l'analogie dans laquelle nous nous sommes engagés. Les différentes images qui ont pu se constituer à partir du contenu des termes 'insaturé' et 'incomplet', ainsi que les sens qui ont été envisagés pour l'expression problématique, ont guidé sa manière d'appréhender notre exemple. Il est à même de reconnaître sur le plan vertical des fonctions un processus similaire à ceux qu'il a pu lire horizontalement pour des objets dans notre description. La suggestion ne passe pas par la saisie

de sens déterminés, mais par la manière dont une famille de sens – proprement inadaptés, mais métaphoriquement efficaces – oriente son expérimentation.

Pourquoi cette analogie fonctionne-t-elle ? En quel sens la manière dont certains objets peuvent en associer à d'autres correspond-elle à la façon dont les fonctions opèrent ? Nous ne pouvons pas dire mieux que cela : nous décrivons horizontalement – au niveau des objets – une structure similaire à celle – verticale – des catégories ontologiques. Pour distinguer les entités, pour les trier, les organiser, pour pouvoir leur attribuer ou leur renier une même propriété, il est nécessaire de les rassembler au même niveau de discours, *i.e.* là où, précisément, elles ne sont pas. Mais tous les sens qui peuvent être associés aux termes 'objet' et 'fonction' dans nos énoncés permettent de décrire à ce niveau une organisation analogue à celle qui, échelonnée sur plusieurs niveaux – constituant cette échelonnement – échappe par nature à tout récit. En proposant au lecteur de recomposer certains énoncés élémentaires et d'en examiner le sens, nous l'invitons à *reconnaître* là où elle nous échappe la structure décrite. Dans cette démarche, nous espérons qu'il parvienne à repérer dans le lieu dans lequel nos exemples le plongent ce que nous avons raconté pour d'autres endroits. Nous devons compter sur le moment où, plutôt que de saisir strictement les sens possibles pour nos phrases, il parvienne à renverser la structure qui y est décrite et à la reconnaître sur le plan vertical, autrement dit à "capter la perspective".

La situation a quelque chose de frustrant dont héritent nos explications. Le régime métaphorique étant inéluctable, nous ne pouvons éclairer l'analogie en la confrontant au régime littéral. C'est cette tentative qui conduit aux paradoxes. En affirmant qu'aucune fonction n'est véritablement – proprement, rigoureusement – une fonction, nous n'invitons pas le lecteur à attribuer un sens au terme 'fonction' qui valide cet énoncé – cela est impossible –, nous le convions à réaliser que les contenus possibles pour ce mot relativement à nos énoncés métaphoriques – par exemple 'aucune fonction n'est un objet' – ne peuvent conduire qu'à un concept qui ne subsume pas ce que nous l'invitons à reconnaître comme fonction à travers notre métaphore – et non pas ce que ce mot peut désigner. L'adverbe 'véritablement' vise à marquer le décalage entre ce que nous pouvons désigner par un terme – dans les contextes dans lesquels nous l'avons employé –, et ce que le lecteur est parvenu à "rencontrer" grâce à la métaphore. Les paradoxes ont vocation à faire prendre conscience de cette dernière, à aider à réaliser l'impossibilité de décrire ce vers quoi il a été conduit.

La suggestion n'est donc pas un règne dual qui permet d'accomplir ce à quoi l'expression est impuissante. Il n'y a pas de second sens, situé au-delà du premier, et accessible *via* un autre genre de transmission. La suggestion procède en deux temps. Avant tout, il s'agit de décrire – *via le sens* – une hiérarchie entre des objets, et de proposer des exemples qui mèneront le lecteur à la rencontre d'une hiérarchie similaire là où elle n'est pas descriptible : entre objets et fonctions de différents types. C'était le rôle des énoncés E_1 - E_6. Une fois cette étape franchie, il s'agit que le lecteur mesure le bond qu'il a effectué à travers cette reconnaissance, qu'il réalise le caractère métaphorique des énoncés qui l'ont guidé. Pour cela, il suffit de confronter les sens possibles pour ces derniers à ce que l'endroit où ils l'ont conduit en exigeraient. Voilà la tâche à laquelle étaient consacrés les énoncés E_7 - E_9.

Afin de comprendre le lien organique qui attache le sens à la structure des catégories, il ne suffit pas de rencontrer et de reconnaître celle-ci à travers des expériences de saisie du sens, il importe aussi de constater que le sens ne peut se déformer (doit s'y conformer), pas même pour la décrire. Disons que si l'analogie dévoile ce qu'exige le sens, les paradoxes montrent *à quel point* il l'exige. La première expose les catégories logiques et ontologiques, les seconds illustrent, en nous y confrontant, leur inviolabilité. Autrement dit, pour récupérer l'image qui nous a lancés, une fois que la perspective a été captée, nous rappelons *où* elle se situe en traçant une ligne droite qui traverse le schéma.

Voilà ce que Frege aurait dû dire, s'il avait tiré les leçons de sa projection des catégories logiques dans la sphère ontologique. Au lieu de cela, il s'obstina à vouloir conférer un sens aux prédicats 'est un objet' et consorts compatibles avec leur rôle catégorial. Or nous avons montré que cela était impossible. Nous pouvons seulement décrire au niveau des objets une hiérarchie similaire à celle qui ne se dit pas. Mais alors le terme 'concept' réfère à un concept de *premier* niveau et, proprement, le concept *cheval* est un concept. De même, dans ce contexte, le concept d'*objet* ne couvre pas la totalité des objets et, tout aussi rigoureusement, le concept *cheval* n'est pas un objet. Finalement, Frege n'est jamais parvenu à tirer cette affaire au clair. Il s'est laissé piéger à accabler de bout en bout la langue naturelle, tandis que certains problèmes qu'il soulevait lui étaient totalement étrangers. Même lorsque ses exemples révélaient une difficulté autrement fondamentale, il s'en tenait à déplorer l'impossibilité d'analyser des sens logiquement simples, qui ne pouvaient être attribués à des signes qu'en exploitant les moyens défaillants de l'allemand. Finalement, Frege manqua le problème relatif à la hiérarchie de catégories. À ses yeux, les élucidations n'étaient pas destinées à contourner cet obstacle à travers des analogies adaptées, mais seulement à nous tirer des griffes des langues vernaculaires. Il ne concevait pas les élucidations comme une manière de "montrer ce qui ne pouvait se dire", mais comme une façon d'indiquer précisément des sens qui ne pouvaient qu'être exprimés de manière imprécise dans les langues dont il disposait avant la constitution de l'idéographie. À tort, il noya une impuissance philosophique – celle qui empêche d'édifier une théorie des catégories – dans une impuissance pragmatique – celle qui interdit d'attribuer *clairement* un sens, dans une langue vernaculaire défectueuse, aux termes primitifs d'une langue idéale [85].

Cependant, s'il ne parvint pas à tenir compte dans ses conclusions du véritable problème qui se dressait sur sa route, il est incontestable qu'il l'entrevit furtivement. En affirmant qu'on ne pouvait proprement exprimer qu'une fonction n'était pas un objet, Frege avait tout dit. Il échoua seulement à tirer les leçons de cette remarque capitale. À travers sa décision d'attribuer aux expressions telles que 'le concept *cheval*' une dénotation spécifique, il s'engagea même dans une piste proche de celle que nous avons suivie. La direction qu'il prit à cet égard était la bonne mais, coupable des confusions que nous avons dites, il fit malheureusement un pas de trop. Il est néanmoins intéressant de l'imiter pour constater que sa boussole se figea quelques instants vers le nord, bien qu'il fut incapable de maintenir le cap, et finit par se perdre dans des commentaires divers et souvent incompatibles.

Il existe une surprenante dissymétrie entre la manière dont il traita les expressions 'est un concept' et 'le concept *cheval*'. Il concevait la première comme si elle était dotée d'un sens approprié à ce qui est visé à travers elle, mais qu'elle ne pouvait exprimer adroitement. En revanche, il abordait la seconde comme si elle exprimait adroitement un sens incompatible avec ce qui est visé par son intermédiaire. Dans le premier cas, il confondit un piège inextricable du sens avec une simple maladresse, parfaitement rectifiable, de la grammaire des langues vernaculaires. Pourquoi cette erreur ne s'est-elle pas propagée au second ? Frege aurait pu affirmer que, ainsi que le sens de l'énoncé '$\xi.3+4$ est une fonction [86]' se trouve adéquatement rendu par '$\beta.3+4$ est une fonction$_\beta$', celui de l'énoncé 'le concept *cheval* est un concept' est correctement exprimé par 'le concept *cheval* (β) est un concept$_\beta$'. Il aurait pu conclure que, si la langue naturelle référait imparfaitement au concept (de second niveau) visé par l'expression 'est un concept', elle désignait

85. Le terme 'élucidation' ne joue donc pas chez Frege le même rôle que chez Wittgenstein. Néanmoins, il *aurait dû* jouer ce rôle, car toute son ontologie conduit inéluctablement à une telle impuissance philosophique. Il est donc possible que Wittgenstein décelât le piège dans lequel il avait sombré et, en l'évitant, puisât sa notion d'élucidation dans celle que lui, Frege, aurait dû bâtir. Nous ne contestons pas la conclusion de Geach ou Weiner à cet égard, car les thèses des deux auteurs conduisent indifféremment à la fatalité du non-sens. Nous disons seulement que, contrairement à Wittgenstein, Frege fut incapable d'identifier clairement cette fatalité.

86. 'de premier niveau à un argument', nous ne le répétons plus.

tout aussi maladroitement le concept (de premier niveau) visé par l'expression 'le concept *cheval*'. Pourquoi s'en est-il remis (à tort) au couple exprimer inadéquatement - exprimer adéquatement dans le premier cas, tandis qu'il fit droit (à raison) à la dualité viser - nommer (ou suggérer - exprimer) dans le second ? Les arguments que nous avons développés en faveur du deuxième couple ne peuvent être à l'origine de sa décision, car ils s'adaptent indifféremment aux deux situations. Si Frege a maintenu entre elles une distance illégitime, c'est parce qu'il répondait à d'autres motivations, lesquelles ne valaient que pour l'une d'entre elles.

Notons que seule la première expression intègre l'article défini auquel Frege se fia mystérieusement (et dramatiquement) tout au long de sa vie. Étonnamment, la totalité des indices dispersés dans ses différents textes ne permettent pas de résister à ce constat : s'il n'a jamais envisagé que le nom 'le concept *cheval*' exprime maladroitement un sens conceptuel, c'est seulement parce qu'il intégrait cet article. Néanmoins, comme nous, il aurait pu conclure que ce nom n'admettait pas de sens déterminé, et qu'il s'agissait de lui faire jouer un rôle métaphorique en invitant le lecteur à placer en lui certains sens littéralement inappropriés, mais métaphoriquement efficaces. Mais Frege n'a jamais développé une telle explication disons 'métaphorique' de l'activité suggestive, dont il devait pourtant rendre compte. Il ne pouvait accepter qu'elle parvienne inexplicablement aux buts que le sens manquait. Or, paradoxalement, la seule explication qu'il concevait exigeait d'attribuer un sens déterminé aux expressions suggestives. Il entreprit d'expliquer que celles-ci parvenaient à viser ce qu'elles n'exprimaient pas en vertu de ce qu'elles exprimaient *une fois pour toutes*. Voilà, désormais, ce qu'il nous faut expliquer en détail.

À deux reprises [87], nous avons dit que, pour Frege, le nom 'le concept *cheval*' référait en réalité à l'extension du concept en question, en différant le moment de justifier cette affirmation. Il est temps de nous y employer [88]. Si on ne trouve aucune confirmation explicite dans son œuvre, nous croyons qu'il demeure possible d'y glaner les indices nécessaires. Le premier a trait au verbe 'représenter' [*vertreten*]. Dans "Concept et objet", Frege expliqua que l'objet auquel réfère l'expression 'le concept *cheval*' représente le concept en question (p. 171 / 132). Or c'est ce même terme qu'il utilisa dans les *Grundgesetze* pour parler du parcours-de-valeurs d'une fonction de premier niveau à un argument ou, généralement, d'une entité qui peut jouer le rôle d'une entité de niveau supérieur à travers l'usage des parcours-de-valeurs, selon le processus que nous avons décrit en section 2.5.2 du second chapitre [89] :

> Les fonctions de second niveau sont représentables par des fonctions de premier niveau lorsque ces fonctions apparaissent représentées par leurs parcours-de-valeurs comme arguments des premières. (Frege 1893, p. 42)

La coïncidence des termes pourrait être justifiée ainsi : la référence de l'expression 'la fonction $\Phi(\xi)$' représente $\Phi(\xi)$ au même titre que le parcours-de-valeurs de $\Phi(\xi)$ représente $\Phi(\xi)$ car la référence de l'expression 'la fonction $\Phi(\xi)$' *n'est autre que* le parcours-de-valeurs de $\Phi(\xi)$ – en particulier la référence de l'expression 'le concept *cheval*' n'est autre que l'extension de ce concept. Cette hypothèse est rendue encore plus naturelle par le manque manifeste de concurrent. Aucun objet n'est davantage lié à la fonction en question que son parcours-de-valeurs. Il existe de surcroit une autre raison d'adopter cette conclusion. Dans les *Grundlagen*, après avoir proposé de définir le nombre qui appartient au concept Φ par l'extension du concept 'équinémurique au concept

87. en sections 1.6.2.1 et 3.2.3.4.

88. Cette question est présente dans la littérature. Certains apportent la même réponse que nous – par exemple Rouilhan (1988, Chapitre IV) et Ruffino (2000) –, tandis que d'autres proposent des alternatives – par exemple Panza (2015) et Schirn (Schirn 1990). Il serait pourtant incorrect de tracer une frontière entre deux interprétations, car les raisons avancées dans le sens d'une même réponse sont souvent distinctes. Nous n'allons pas ici discuter les arguments des uns et des autres. Nous nous contentons de présenter les nôtres.

89. dans lequel nous avons repris ce terme.

Φ'[90], Frege indiqua dans une note de bas de page "qu'on pourrait dire tout simplement 'concept' à la place de 'extension de concept'", avant de faire droit à l'objection selon laquelle "ce serait en contradiction avec ce qu['il avait] précédemment affirmé, à savoir que chaque nombre est un objet", pour enfin préciser qu'il serait possible de lever cette objection, mais que "ceci nous entraînerait trop loin" (p. 80 / 194). Trop loin, c'est-à-dire peut-être là où Kerry le contraignit à se rendre dans "Concept et objet", *i.e.* à affirmer que la référence du terme 'le concept *équinémurique au concept* Φ' était un objet ; voire encore plus loin, à expliquer que cet objet n'était autre que l'extension du concept en question, et qu'on pouvait employer indifféremment l'une ou l'autre de ces formulations[91]. Aucune surprise, donc, à ce qu'on retrouve cette note de bas de page évoquée dans "Concept et objet" :

> Lorsque [Kerry] pense [...] que j'ai identifié concept et extension de concept, il se trompe. J'ai seulement émis l'opinion que dans l'expression 'le nombre cardinal qui appartient au concept *F* est l'extension du concept '*équinumérique au concept F*'", on peut remplacer les mots 'extension de concept' par 'concept'. On remarquera d'ailleurs que le mot est ici accompagné de l'article défini. (Frege 1892a, p. 172 / 134)

Comment expliquer qu'un tel remplacement soit permis, sinon parce que les deux expressions sont co-référentielles ? Frege ne le dit pas franchement, précisant qu'il a "seulement émis [une] opinion", et que "c'est d'ailleurs une remarque sur laquelle ne repose aucun raisonnement" (p. 172 / 134), mais il ne laisse pas le loisir de tirer une autre conclusion. Ses réserves ne sont pas la marque d'une alternative qu'il garderait silencieuse dans ce texte, mais du fait qu'il savait qu'il n'avait pas creusé suffisamment la question pour se permettre de la trancher de façon si catégorique. Cette question, pensait-il, était éloignée de ses considérations premières, et nul doute qu'en s'y arrêtant trop longuement, il provoquerait encore davantage la malédiction qui le touchait : recevoir de rudes critiques concernant les points secondaires de ces travaux, tandis que les éléments principaux n'étaient jamais abordés. Il fut sage de s'abstenir car, comme nous l'avons vu, le regard qu'il portait sur le problème n'était pas satisfaisant, pas plus que son choix de référence pour l'expression 'le concept *cheval*', bien que cette décision dénote une volonté de lever le voile sur l'activité suggestive.

En effet, Frege adhérait à l'idée qui guida notre développement ci-dessus : aucune fonction ne peut être objet de discours, il n'est donc pas possible de comparer des fonctions à des objets – ne serait-ce que pour les distinguer –, de soumettre des entités de différents types aux mêmes concepts[92]. Mais, contrairement à nous, il sollicita – il stipula l'existence de – quelque chose qui était capable d'incarner une fonction sur le plan des objets, qui conservait toutes les spécificités de la fonction hormis son caractère fonctionnel. Il s'agit de son représentant :

> Dans le cours d'une recherche logique, il n'est pas rare qu'on ait besoin d'énoncer quelque chose d'un concept et donc de revêtir le concept de la forme linguistique usuelle pour de telles énoncés. D'où il résulte que l'énoncé est le contenu d'un prédicat grammatical. On s'attendrait alors à ce que le concept soit la dénotation du sujet grammatical. Mais le concept, de par sa nature prédicative, ne peut pas jouer d'emblée ce rôle, il doit d'abord être changé en un objet ou, pour parler plus précisément, il doit

90. Nous ne rappelons pas ici ce que nous avons dit aux premier et second chapitres concernant les extensions avant 1891, et qui explique cette formulation.

91. Rigoureusement, Frege aurait dû proposer les deux formulations 'le concept *équinémurique au concept* Φ' et 'l'extension d'*équinémurique au concept* Φ'. En effet, on ne peut parler de l'extension d'un objet, pas même du concept *équinémurique au concept* Φ, qui est un objet.

92. et à la même place. Bien sûr, une relation peut admettre un objet comme premier argument et une fonction comme second. Mais cela ne résout rien. Notre problème est ici de pouvoir dire ou contester *la même chose* d'objets et de fonctions, pas de les mettre en relation (à travers un concept de niveaux inégaux).

> être représenté par un objet que nous désignons en préposant les mots 'le concept'. (Frege 1892a, p. 171/132)

Voilà la manière par laquelle il tenta de lever le mystère de la suggestion. La représentation permet de "revêtir le concept de la forme linguistique usuelle pour de telles énoncés" parce que, en disant 'le concept cheval', nous exprimons un sens qui peut former des pensées *identiques* à celles qui sont constituées du sens de 'ξ est un cheval'. Rouilhan explique :

> La différence entre une fonction et son parcours-de-valeurs est purement catégoriale, et ça n'est qu'à cette différence près, ni plus ni moins, que je réussis à parler de la fonction $\Phi(\xi)$ elle-même en disant 'la fonction $\Phi(\xi)$'. Échouant à m'élever, en parlant ainsi, au niveau de la fonction elle-même, c'est à celui d'un objet que je retombe, mais d'un objet qui, à cette différence catégoriale près, est bien la fonction elle-même : son parcours-de-valeurs. (Rouilhan 1988, p. 119)

L'opération de représentation permet d'exprimer certaines pensées au sujet de concepts en impliquant leurs représentants. Le sens de l'expression 'le concept *cheval*' suggère immédiatement celui de 'ξ est un cheval' parce que les pensées constituées du premier sens se décomposent en faisant jouer le même rôle au second, à une nuance catégoriale près. Pour une fois – c'est la seule –, Frege attribua donc à différentes expressions françaises (ou allemandes) d'une même pensée le mérite de dévoiler *différentes* structures de cette pensée, et non le tort de déguiser une même structure sous divers habits. D'une part, cela lui permettait de rendre compte du fait qu'un nom incapable d'exprimer un sens conceptuel pouvait néanmoins suggérer celui-ci, à travers la manière dont son sens propre prenait part aux pensées auxquelles, selon une autre décomposition, ce sens conceptuel contribuait parallèlement. D'autre part, comme nous l'avons vu dans la dernière section, cela lui permettait de justifier sa loi V et sa méthode de désescalade des niveaux, en assurant une synonymie entre '$P(\Delta)$' et '$\Delta \cap \dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$'.

Comme Rouilhan, nous convenons donc que, d'une certaine manière, cette idée a traversé Frege. Nous constatons qu'il lui a donné corps à l'occasion de diverses discussions, et qu'elle se tient derrière quelques-unes de ses remarques. Mais nous ne pensons ni qu'il ait su la développer correctement, ni qu'il soit parvenu à la distinguer clairement, ni qu'il en fût véritablement convaincu. Voilà ce qu'il expliquait en 1895 :

> L'extension d'un concept ne consiste pas en les objets qui tombent sous le concept à la manière, par exemple, dont une forêt consiste à des arbres. Il s'attache au concept et uniquement à lui. Le concept prend ainsi la préséance logique sur son extension. (Frege 1895, p. 210)

Ce passage appuie fortement l'idée que la fonction possède une certaine antériorité sur son représentant, qu'il est possible de passer de l'une à l'autre à travers une fonction purement logique, à laquelle nous avons un accès immédiat. Néanmoins, dans un tel cadre, il est aisé d'assigner une référence au nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Il suffit d'expliquer qu'il s'agit de la fonction qui associe toute fonction de premier niveau à un argument à son représentant. Or, au contraire, Frege mit un zèle considérable à fixer la référence de ce nom, comme si l'existence des extensions devait être garantie par quelque autre biais [93]. De plus, lorsque Russell l'informa du paradoxe qui minait son système, son premier mouvement consista à limiter les parcours-de-valeurs à un champ restreint de fonctions, espérant écarter ainsi les cas problématiques. Or l'opération de représentation, si elle relève d'un tel lien entre deux entités, s'applique indifféremment à toutes les fonctions de type (0). Il est possible qu'une objection de cet acabit l'ait conduit à renoncer au logicisme sans même réaliser que ses premières tentatives de résolution du paradoxe étaient inefficaces. Nous

93. Ce problème sera l'objet de la section 3.3.9.

admettons – plus encore, nous affirmons – qu'il envisagea l'existence d'un lien de cet acabit entre fonctions et parcours-de-valeurs. Mais cette idée revêtait à ses yeux un caractère aussi prometteur – comme en attestent certains passages – que problématique – comme d'autres le démontrent. À cette époque, bien qu'il ne fût pas parfaitement au clair concernant la *source* de notre accès aux parcours-de-valeurs, il tenait pour acquis leur rôle dans l'édifice mathématique. Si bien qu'en découvrant la contradiction, il put envisager quelque temps des pistes de solutions qui ne s'accordaient pas avec l'existence d'une telle opération de représentation, avant de se rétracter lors du renoncement définitif.

Par ailleurs, cette approche des parcours-de-valeurs repose sur l'idée que la représentation des fonctions permet d'exprimer exactement ce qui se dit d'une fonction au niveau inférieur *via* cette opération de représentation. Certes, une position aussi radicale permet de justifier la méthode de désescalade des niveaux et la logicité de la loi V [94]. Néanmoins, si Frege l'avait adoptée sans réserve, il se serait contenté de remarquer que cette loi était logiquement vraie en vertu de la synonymie entre les deux termes de l'égalité. Au contraire, il s'engagea dans de difficiles considérations pour attester de la vérité de cet axiome, et exprima certaines réserves à son sujet. En outre, il n'évoqua qu'à deux reprises les synonymies résultant de cette conception, et dont il ne fut jamais question dans les *Grundgesetze* [95].

Enfin, une telle idée s'opposait fondamentalement à ses conceptions sémantiques, notamment au fait qu'une pensée soit structurée. Cette difficulté ne lui a probablement pas échappé ; elle explique que cette idée soit si peu présente dans ses différents textes, et qu'elle se maintint à un stade extrêmement rudimentaire. Si Frege l'avait approfondie, il aurait constaté deux autres problèmes. D'une part, elle exigeait de transposer l'opération de représentation dans la sphère du sens. Il importait que les *sens* des noms '$\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$' et '$P(\xi)$' prennent part à différentes décompositions d'une même pensée. Or, pour pouvoir formuler cette conclusion relativement à l'expression 'le concept $P(\xi)$', il ne suffisait pas que celle-ci réfère à l'extension du concept $P(\xi)$, il fallait qu'elle exprime le même sens que '$\dot{\varepsilon}(P(\varepsilon))$'. Mais nous voyons mal, au sein de ce dernier nom, ce qui pourrait jouer le rôle de l'article défini. D'autre part, l'idée qu'une fonction – ou plutôt que le sens d'un nom de fonction – et son représentant entretiennent un tel rapport se manifeste par les deux effets suivants : non seulement il est possible d'exprimer une pensée qui concerne une fonction – et n'a pas trait au type de cette fonction – au niveau des objets sans qu'aucune nuance ne soit par là introduite, mais il est aussi possible d'exprimer certaines pensées concernant le type d'une fonction à travers son représentant. Frege ne fit pas droit à la seconde possibilité, se cantonnant à la première. Pourtant, si le représentant d'une fonction permet d'affirmer à un niveau exactement ce qui s'en dit à un autre, comme l'illustre l'identité de sens entre les deux membres de l'axiome V, il doit permettre davantage : exprimer d'une fonction ce qui ne peut se dire au niveau fonctionnel, par exemple qu'elle n'est pas un objet. Cela, Frege ne l'a pas vu. Il persista à vouloir attribuer des sens aux expressions 'est une fonction (de type (0))' et 'est un objet' – ou à leurs versions idéographiques – qui conduisent à des concepts qui subsument toutes les entités du type en question. Mais de tels sens ne peuvent être utilisés pour atteindre l'objectif que nous visons en utilisant ces expressions : marquer les différences entre catégories. Nous avons proposé, en guise de solution, d'inviter le lecteur à leur attribuer des sens de son choix – et de même niveau – tant qu'ils valident les énoncés qui élucident ces notions. Ce faisant, une hiérarchie est décrite au niveau des objets que ce même lecteur peut reconnaître dans les catégories ontologiques, à travers les exemples que nous lui proposons. Dans le cadre d'une opération de représentation, ce régime métaphorique ne s'impose plus. Il est possible de dire qu'une fonction n'est pas un objet en l'affirmant de son *représentant*. En somme, *être une fonction* peut

94. ainsi que nous l'avons expliqué en section 3.2.3.4.
95. ainsi que nous l'avons expliqué en section 3.2.3.4 (p. 474).

se dire, mais ce ne peut se dire qu'au niveau des objets. Car *être un parcours-de-valeurs*, c'est proprement *être une fonction*, et (seulement) métaphoriquement *représenter objectalement une fonction*. Soyons imagés : la différence catégoriale – la seule – entre une fonction et son représentant est sans conséquence quant aux pensées dans lesquelles ceux-ci interviennent. Il est donc possible de décrire les (pseudo)-propriétés catégoriales d'une entité à travers un représentant qui, lui, ne possède pas ces (pseudo)-propriétés. Pour le formuler autrement, la différence catégoriale s'exprime *proprement* grâce à l'effacement catégorial que la représentation permet. Ainsi, aucune fonction n'est proprement un objet – pas même le concept *cheval*, et Frege aurait dû le voir – car *ne pas être un parcours-de-valeurs*, c'est rigoureusement *être un objet*. Il devient donc envisageable de décrire la hiérarchie des catégories ontologiques en se maintenant (inéluctablement) au niveau des objets. La référence de 'est un objet' subsume tous les objets qui ne sont pas des parcours-de-valeurs – proprement tous les objets, ou encore tout ce qui n'est pas une fonction –, la référence de 'est une fonction de type (0)' subsume tous les objets qui représentent une fonction de ce type, etc.

L'opération de représentation logique est donc pleine de promesses à cet égard, mais est-elle capable de les tenir ? Dans le deuxième chapitre [96], nous avons vu qu'un parcours-de-valeurs ne représentait qu'une entité d'un type déterminé, mais plusieurs entités de types différents – notamment (0) et ((0)). Proprement, une fonction de premier niveau est donc *aussi* une fonction de second niveau. Or, bien sûr, ceci ne se produit pas dans la véritable – entendue de manière métaphorique – hiérarchie catégoriale. L'objet représentant une fonction $\Phi(\xi)$ de type (0) représente aussi une fonction $\Omega_\beta(\varphi(\xi))$ de type ((0)) : celle qui envoie toute fonction $\Psi(\xi)$ sur $\Phi(\dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon)))$. Cela dépend, bien entendu, de si nous "regardons" le parcours-de-valeurs pris en argument comme un objet ou comme la fonction qu'il représente.

Et voici le pêché originel : ceux qui représentent des fonctions – donc qui sont *proprement* des fonctions –, sont des objets et, en tant que tels, peuvent aussi être pris en argument par des fonctions. *Proprement*, les fonctions de type (0) prennent aussi en argument les fonctions de type (0), tandis qu'elles ne sont censées opérer que sur des objets. Pour éviter cela – revenons au régime de la métaphore –, il faudrait que les fonctions de ce type n'opèrent pas sur les parcours-de-valeurs. Cependant, le concept d'*objet* ne pourrait plus prendre d'extension en argument et, à nouveau, nous serions incapables d'exprimer que le concept *cheval* n'est pas un objet. Pour décrire au niveau des objets la hiérarchie visée *via* la représentation, il est indispensable de typer les objets selon les entités qu'ils représentent. Malheureusement, dans ce cas, nous retrouvons en eux la hiérarchie ontologique que nous cherchons à décrire, avec ses frontières infranchissables qui la rendent indescriptible.

Si Frege avait conduit l'idée d'une telle opération logique de représentation jusqu'à l'analyse des expressions 'est un objet' et 'est une fonction' qu'elle prescrivait, il aurait aperçu les problèmes fondamentaux posés par l'effacement catégorial, il aurait compris qu'aucun objet ne pouvait être l'ambassadeur des fonctions, que ce double rôle conduisait exactement aux mêmes difficultés qu'il était censé régler. Sans y découvrir directement la cause de la contradiction – qu'il est pourtant aussi, générant au moins autant d'objets que de fonctions –, il aurait vu ce que toute intrusion des fonctions dans les objets, même à travers un processus de représentation, contenait d'inacceptable.

Mais Frege ne fit rien de tel. Relativement à l'activité suggestive, son intuition initiale était très proche de la nôtre. Une seule différence les sépare, celle du régime métaphorique ou littéral. Nous avons dit qu'en employant des énoncés intégrant des expressions telles que 'le concept *cheval*' ou 'est un concept', nous invitions le lecteur à doter ces dernières de contenus par lesquelles

96. en section 2.5.2.

une hiérarchie "horizontale" était décrite, laquelle pouvait être reconnue sur le plan vertical à travers la décomposition de certaines pensées. Or Frege prêtait à l'expression 'le concept *cheval*' un contenu qui constitue le candidat *idéal* pour une telle description. Dans ce cadre, plutôt que de décrire au niveau des objets une hiérarchie similaire à celle que constituent les catégories ontologiques, et d'encourager le lecteur à reconnaître cette dernière à travers des exemples judicieusement choisis, il doit être possible de la décrire *directement* sur le plan des objets. Car il est désormais permis de parler d'une fonction comme d'un objet, à travers son parcours-de-valeurs. Nous devrions ainsi être en mesure de trier, de comparer, de hiérarchiser les entités de tous les types *via* leurs représentants, autrement dit d'élaborer une théorie des catégories. Celle-ci ne doit plus exiger de transgresser les types ou, plus précisément, une telle transgression doit avoir été déjà opérée en amont, de manière licite, lors du passage au représentant. Voilà les perspectives ouvertes par l'idée de Frege, dont nous avons vu qu'elles n'aboutissaient pas.

Nous avons éclairé l'activité suggestive en présentant certaines expressions comme des boîtes vides auxquelles doivent être associées des familles de sens qui permettent métaphoriquement (1) d'indiquer à un niveau ce qui ne se dit qu'à un autre – par exemple, que le concept *cheval* est satisfait ; et (2) de décrire sur le plan horizontal ce qui ne peut se dire verticalement – par exemple que le concept *cheval* n'est pas un objet. Pour sa part, Frege s'en est tenu à (1), en stipulant l'existence de sens qui permettent de dire proprement à un niveau ce qui se dit *aussi* à un autre. S'il avait étendu sa conclusion à (2), en traitant les expressions 'est un objet', 'est un concept', etc. comme suggestives – comme visant autre chose que ce à quoi elles réfèrent –, il aurait constaté que de tels sens ne pouvaient exister, car ils répercuteraient sur le plan des objets les mêmes interdits qui pèsent sur la hiérarchie initiale. Mais il n'a pas conduit son investigation jusqu'à ce point. Le périple qu'il réalisa dans l'univers des paradoxes pointés par Kerry est marqué d'allers-retours, d'hésitations, d'amalgames, et souvent de commentaires extrêmement pertinents aux conséquences non ou mal comprises. Finalement, Frege échoua à tirer les leçons de sa propre ontologie, ainsi qu'à poser le problème de l'indicible hiérarchie ontologique. Certaines remarques dénotent qu'il le pressentit, mais il persista à voir sa source dans l'imperfection des langues naturelles, à accabler la *forme* du prédicat 'est une fonction'. Il comprit qu'il était intrinsèquement impossible d'exprimer qu'un objet n'était pas une fonction, indépendamment du langage mobilisé à cette fin. Cependant, jamais il ne prit la mesure de cette impossibilité, touchant directement aux notions d'objets, de fonctions, etc. qui ne sont *pas* des concepts. S'il avait compris que l'expression 'est une fonction' – ou tout équivalent dans une langue idéale – ne pouvait en aucun cas se voir attribuer un sens adapté à ce que nous visons à travers elles, il leur aurait aussi destiné l'explication qu'il fournit relativement au nom 'le concept *cheval*', avant de comprendre que cette explication n'était valable dans aucun des deux cas. Il aurait alors rejeté l'idée que la représentation permet différentes décompositions des pensées, et constaté le poids des interdits catégoriaux. Au contraire, il est toujours resté hésitant vis-à-vis de cette idée, et n'a jamais su mesurer ces interdits. Il garda le silence sur ces questions autant qu'il le put. Lorsque Kerry l'y confronta directement, il tenta de les éluder, comme si son projet n'en était pas affecté. Pourtant, l'origine des parcours-de-valeurs était en jeu, et par suite la logicité de la loi V. L'explication tient en partie dans le fait que, dans les passages essentiels des *Grundgesetze*, Frege favorisa une autre approche des parcours-de-valeurs, laquelle s'écartait considérablement de celle que nous venons de présenter. En section 3.3.10, nous expliquerons comment ces deux approches incompatibles ont pu cohabiter dans ses écrits, et verrons que cette cohabitation éclaire certaines de ses réactions. Pour l'heure, contentons-nous de constater que, si les interdits catégoriaux hérités de l'ontologie de Frege n'ont pas été correctement cernés par celui-ci, il convient d'en tenir compte relativement à la question de la compatibilité entre une thérie sémantique et ses positions fondamentales.

Nous savons désormais que, les catégories logiques et ontologiques étant absolues, il n'est pas question de développer une théorie pour ces catégories *relativement* à un langage donné *dans* un second langage. Aucune montée sémantique n'est en mesure de nous sauver. En ce sens précis, le langage possède quelque-chose de cloisonnant. Or les citations proposées au début de ce chapitre ont montré que c'était bien sur la base d'une telle emprise tyrannique de la langue que les successeurs de van Heijenoort fondaient l'impossibilité d'une théorie sémantique fregéenne. Mais existe-t-il un lien réel entre les deux affaires ? Ce qui interdit *de jure* toute entreprise de description de la hiérarchie des catégories ontologiques fait-il aussi obstacle à la constitution d'une science qui permettrait de déterminer la valeur de vérité des énoncés d'un langage en fonction de la référence de leurs constituants, *i.e.* à l'élaboration d'une théorie sémantique ? Les membres du clan antisémantique le croient, et Weiner nous en livre la raison :

> Si une théorie scientifique doit exposer des vérités, les exigences de scientificité s'imposent. Une telle théorie peut-elle répondre à ces exigences ? Non. [...] Une des raisons a trait à l'important statut des fonctions et des concepts. Tout énoncé a toujours au moins un constituant incomplet. Si une théorie sémantique doit expliquer comment la valeur de vérité d'un énoncé est déterminée en fonction des références de ses constituants, elle doit intégrer une explication de la référence des expressions conceptuelles. Mais Frege répétait constamment que ce qui pouvait être dit à propos des objets ne le pouvait à propos des fonctions et des concepts. Supposons que nous ayons proposé la description d'une relation de référence. Si cette expression peut intervenir entre une expression linguistique et l'objet nommé par cette expression, alors notre description nous interdit de dire que cette expression peut intervenir entre une expression linguistique et un concept nommé par cette expression. Il ne peut pas non plus exister une série de relations distinctes qui interviennent entre des expressions linguistiques et respectivement des objets, des concepts de premier niveau, des concepts de second niveau, etc. Il ne peut exister qu'une seule relation de référence, une relation qui intervient entre des noms propres et les objets nommés. Ainsi, selon les conceptions de Frege, il ne peut y avoir une théorie de la référence qui joue un rôle dans l'explication de la manière dont la valeur de vérité d'un énoncé est déterminée par les références de ses constituants. (Weiner 1997, p. 272)

Weiner soulève ici un problème posé par les distinctions entre catégories ontologiques dans l'entreprise de constitution d'une théorie sémantique. Cette dernière est censée indiquer la référence – la valeur de vérité – d'un énoncé relativement à celle de ses constituants. Elle doit donc pouvoir exprimer qu'un nom réfère à une entité, aussi bien lorsqu'il s'agit d'énoncés que de leurs constituants : des noms propres ou incomplets. Pour ce faire, le langage doit intégrer les noms d'une ou plusieurs relations de référence. Ceux-ci joueraient dans le contexte fregéen le rôle du prédicat de vérité tarskien. Néanmoins, une relation qui lie un nom propre à sa référence intervient entre deux objets, tandis qu'une relation qui lie un nom de fonction de premier niveau à un argument à sa référence attache un objet à une entité de type (0). Les deux concepts ayant des types distincts, ils sont distincts. Généralement, une relation de référence n'est adaptée qu'à un type particulier. Il ne peut donc exister une relation qui joue ce rôle pour *tous* les types.

Weiner a raison de soulever ce point qui, jusqu'à récemment, fut largement ignoré dans la littérature [97]. Mais elle fait un pas supplémentaire : elle affirme que, si de telles relations multiples sont indispensables à l'élaboration d'une sémantique, les positions fregéennes s'opposent en vérité à l'existence de celles qui s'adaptent à des noms incomplets. À ses yeux, il ne peut exister au mieux qu'*une* relation de ce genre, intervenant *seulement* entre les noms propres et les objets. Et

97. Wright s'en désola à l'occasion d'un article sur le sujet (1998, pp. 254 - 255).

cela est fondamentalement insuffisant à l'établissement d'une sémantique compositionnelle, qui exige de lier aussi bien les noms incomplets à leurs références. Weiner explique que Frege aboutit lui-même à cette conclusion, et Sluga fait le même constat :

> [Selon Frege], la différence entre objets et fonctions ne peut être légitimement décrite dans un langage, les termes tels que 'concept', 'relation', 'fonction', 'objet', et même parfois l'expression 'la référence', sont à proprement parler illégitimes. (Sluga 1987, p. 94)

À travers le terme 'parfois', Sluga vise comme Weiner les contextes dans lesquels la mention d'un nom incomplet succède à l'expression 'la référence de'. Ils citent l'un et l'autre divers textes de Frege, sur lesquels il est utile de jeter un œil. Le premier n'est autre que la lettre adressée à Russell en 1902 :

> Nous ne pouvons pas proprement dire d'un nom de concept qu'il réfère à quelque chose, mais nous pouvons dire qu'il n'est pas sans référence. Mais, si nous admettons ceci, nous devons admettre que certains ne sont pas sans référence bien que l'expression 'la référence d'un nom de fonction' ne doive pas être utilisée. (Frege 1976, p. 219)

Le second, beaucoup plus tardif, est un texte inédit rédigé en 1919 :

> Quand nous employons les mots 'concept', 'relation', 'fonction' (au sens de l'Analyse), nous n'atteignons pas ce que nous visons. Dans ce cas-ci, l'expression 'la référence' avec l'article défini devrait en fait elle aussi être évitée. (Frege 1919, p. 275 / 302)

Les deux remarques procèdent de la même critique. Il n'est pas correct de dire qu'un nom de fonction réfère à *quelque chose* ou d'employer l'expression 'la référence d'un nom de fonction' car les deux formulations présentent une fonction comme un objet. Cette fois encore, Frege base à tort son objection sur la seule grammaire des langues vernaculaires. Pour la suggérer différemment, précisons qu'il n'existe aucun concept qui associe un nom de fonction d'un certain type à sa référence. Ce point est juste, mais il est limité. Frege concède qu'il soit convenable de dire qu'un nom n'est pas sans référence. Il admet donc l'existence d'un concept – celui de *référentialité* – qui subsume tous les noms référentiels. De même, aucune incompatibilité de catégorie ne permet de rejeter, par exemple, un concept binaire *de niveaux inégaux* qui subsume simultanément (et exclusivement) les noms de fonctions de type (0) et leurs références. Rien, ni dans les passages ci-dessus, ni ailleurs dans l'œuvre de Frege, n'atteste qu'il ait tenu une position si radicale. On peut tout à fait exprimer que '$X(\xi)$' réfère$_\beta$ à $\Phi(\beta)$ ou, plus naturellement, que '$X(\xi)$' réfère à $\Phi(\beta)$ en β. Une telle expression prendrait la forme suivante dans un langage idéal :

$$\mathbf{R}_\beta(\text{`}X(\xi)\text{'}, \Phi(\beta))$$

Weiner a tort d'opposer le statut des fonctions et des objets à l'existence de multiples relations de référence dont chacune lie les noms d'une catégorie particulière à leurs références. De telles relations, en épousant le type adapté, respectent parfaitement les contraintes de catégorie imposées par l'ontologie fregéenne. Il est vrai que certaines stratégies utilisées dans nos sémantiques modernes ne seraient pas permises ici. Par exemple, on ne pourrait pas dire que la référence de '$X^{(0)}(X^0)$' est l'image de la référence de '$X^{(0)}(\xi)$' en la référence de 'X^0' ou, plus précisément, le sens d'une telle phrase ne pourrait être exprimé adéquatement par l'énoncé suivant :

$$\mathbf{R}(\text{`}X^{(0)}(X^0)\text{'}) = \mathbf{R}(\text{`}X^{(0)}(\xi)\text{'})(\mathbf{R}(\text{`}X^0\text{'}))$$

En effet, la référence du nom *complet*[98] '$\mathbf{R}$('$X^{(0)}(\xi)$')' ne peut être la fonction attendue. Néanmoins, la difficulté se contourne en exprimant que '$X^{(0)}(X^0)$' réfère à $\mathfrak{a}$ si et seulement si '$X^{(0)}(\xi)$' réfère à $\mathfrak{f}(\beta)$ en β, si 'X^0' réfère à $\mathfrak{b}$ et si $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$:

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\Big(\mathbf{R}(\text{`}X^{(0)}(X^0)\text{'}) = \mathfrak{a} \leftrightarrow \Big(\mathbf{R}_\beta(\text{`}X^{(0)}(\xi)\text{'}), \mathfrak{f}(\beta)) \wedge R(\text{`}X^0\text{'}) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{f}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\Big)\Big)$$

Comment exploiter la multiplicité des relations de référence pour forger une sémantique compositionnelle, et quels traits présenteraient exactement celle-ci ? C'est une question à laquelle nous répondrons en examinant le travail de la première partie des *Grundgesetze*. Pour l'heure, admettons que les catégories logiques et ontologiques sont absolues. Ceci interdit d'*exprimer* une quelconque distinction entre fonctions et objets, et impose de procéder, comme nous venons de le faire, par analogie. Aucun sens propre ne peut, relativement à un langage, conduire à une entité qui soit insaturée relativement à un autre. Pour le suggérer différemment, une fonction ne peut prendre, vis-à-vis d'un langage, la valeur d'une entité incomplète vis-à-vis d'un autre. L'image d'un argument par une fonction est *en soi* un objet, quel que soit le langage utilisé pour y référer. Aucune fonction n'est donc en mesure d'envoyer un nom incomplet sur sa référence, et aucune relation ne peut associer *tout* nom à sa référence. Néanmoins, rien ne s'oppose à ce qu'une multiplicité de relations – une pour chaque type – attachent les noms de chaque catégorie à leurs références. À ce sujet, Weiner et Sluga ne présentent pas de contre-argument convaincant. Ni le problème des catégories ni la manière dont Frege le présenta ne permet d'aboutir à la conclusion opposée. La prison linguistique à laquelle celui-ci nous confine en imposant des catégories absolues fait barrage à la constitution d'une théorie des catégories, et elle soumet la sémantique à certaines contraintes inconfortables. Mais elle n'empêche pas de mobiliser les nombreuses relations de référence afin, en les nommant, de formuler les lois qui les lient les unes aux autres.

À quel résultat peut-on espérer aboutir dans ce contexte ? Nous répondrons à cette question dans la section 3.3, au moment d'examiner, pour nous aider, le travail que Frege a lui-même réalisé dans les passages-clefs des *Grundgesetze*. Avant cela, certaines choses attendent encore d'être dites. La première concerne l'idée, examinée plus haut, d'une opération radicale de représentation des fonctions. Suivant celle-ci, il existerait une autre manière de développer une sémantique. À travers les représentants, *i.e.* les parcours-de-valeurs, il serait possible d'exprimer des fonctions ce qui ne peut l'être à leurs niveaux. Ainsi, la référence de '$X(\xi)$' serait un objet, celui qu'est *proprement* la fonction $\Phi(\xi)$, autrement dit son représentant. Ainsi, l'énoncé 'la référence de '$X(\xi)$' est la fonction $\Phi(\xi)$' s'exprimerait adéquatement de la manière suivante :

$$\mathbf{R}(X(\xi)) = \backslash_\psi(\text{Fonction}_{\beta,\gamma}(\Phi(\beta), \Psi(\gamma))$$

La fonction $\mathbf{R}(\xi)$ enverrait tout nom sur ce à quoi il réfère proprement, notamment tout nom de fonction sur, proprement, la fonction à laquelle il réfère, *i.e.* (métaphoriquement) sur l'objet qui la représente. Et, ainsi, les règles sémantiques compositionnelles pourraient être exprimées malgré l'interdit catégorial, à travers l'effacement que permet la représentation. Par exemple, l'énoncé 'la référence de '$X^{(0)}(X^0)$' est l'image de la référence de '$X^{(0)}(\xi)$' en la référence de 'X^0" serait adéquatement rendu par :

$$\mathbf{R}(\text{`}X^{(0)}(X^0)\text{'}) = \mathbf{R}(\text{`}X^0\text{'}) \frown \mathbf{R}(\text{`}X^{(0)}(\xi)\text{'})$$

Est-il pertinent, dans notre discussion, de faire droit à une telle idée ? Cette question n'admet pas de réponse immédiate, et révèle toute la complexité du débat sur la sémantique chez Frege.

98. Un nom, aussi insaturé soit-il, n'en demeure pas moins un objet.

S'il s'agit de savoir ce que celui-ci aurait dit du développement d'une sémantique pour son langage (ou un autre), alors il ne faut pas tenir compte du problème, pourtant crucial à cet égard, des interdits catégoriaux, qu'il lia à tort aux défaillances de l'allemand. Cette conclusion peut sembler précipitée. Après tout, Frege ne s'est jamais prononcé directement à ce sujet. Certes, il a échoué à cerner correctement les difficultés que nous avons soulevées, mais il a su formuler lui-même les remarques qui nous ont guidés. Si cette interrogation lui avait été soumise, peut-être l'aurait-elle conduit, en enquêtant davantage, là où nous nous sommes rendus. Il serait extrêmement présomptueux, et assurément incorrect, de nous croire en mesure de deviner ce qu'il *aurait dit* d'un problème qui aurait exigé qu'il approfondisse considérablement certaines recherches. Nous ne pouvons connaître le contenu que des réflexions qu'il n'a pas eues auraient embrassé. Le fait est qu'il n'a pas su ancrer la question de la sémantique dans la distinction absolue entre objet et fonction. Nous pensons qu'il s'agit d'un défaut, car ses conceptions ne laissent aucun doute concernant l'influence de cette distinction sur cette question [99]. Si nous voulons y répondre, il convient donc de réaliser pour lui ce travail et de demander, non pas ce qu'*il* aurait dit, mais ce que *toute son ontologie* incite à conclure au sujet d'une sémantique.

Malheureusement, cette précision ne nous dicte pas encore la démarche à adopter. En 1893, il est incontestable que les parcours-de-valeurs, autant que la différence catégoriale entre objets et fonctions, constituaient un pan important de cette ontologie. Si leur origine était à ses yeux située dans une opération logique de représentation permettant d'exprimer en référant aux représentants les mêmes pensées qui peuvent être exprimées en référant aux fonctions, alors nous devons inclure ce point à notre analyse. Néanmoins, Frege n'en est jamais venu à épouser franchement cette idée, ni en l'affirmant expressément, ni en prenant le temps de la développer. Or elle s'oppose à ses conceptions concernant la structure du sens ainsi qu'au caractère absolu des catégories ontologiques, qui furent cette fois revendiqués aussi clairement que fréquemment. Voilà pourquoi il nous semble pertinent de privilégier le second point au détriment du premier, et d'ignorer la possibilité d'une sémantique développée à travers les représentants.

Une autre motivation se tient derrière cette décision, qui répond cette fois à des enjeux plus philosophiques qu'historiques. En abordant ainsi la question, nous l'épurons des parcours-de-valeurs, et ne l'exposons pas au drame de la contradiction. Nous nous autorisons à la formuler dans le cadre extrêmement riche des notions fregéennes de sens et de référence et des frontières qu'elles dessinent entre les différentes catégories, qui n'est pas directement touché par ce drame.

Nous connaissons désormais l'environnement dans lequel nous allons tenter une analyse des passages-clefs des *Grundgesetze* : celui de l'existence de multiples relations de références dont chacune lie les entités d'un type déterminé à leur référence. Il convient néanmoins de répondre à une seconde objection qui, cette fois, ne peut être attribuée à la majorité du courant antisémantique. Elle correspond au troisième type d'occurrences relevées en section 3.2.1 et, formulée par Thomas Ricketts, sollicite un pan différent de la philosophie de Frege. Elle conteste l'existence de relations de référence, non pas sur la base d'une distinction absolue entre catégories ontologiques – cela, nous l'avons vu, n'aboutit pas –, mais en s'appuyant sur la manière dont Frege concevait le *jugement*.

99. En définitive, Frege ne conçut jamais les élucidations comme une manière de ruser avec les limites du sens, mais comme une façon de déjouer les pièges des langues vernaculaires. Ce point est transversal à tous ses écrits, même ceux qui contiennent des observations qui, correctement conçues, tendent à s'y opposer. Sur la manière dont il présenta le rôle général des élucidations, nous en dirons davantage en sections 3.2.3.7 et 3.2.3.8, et prolongerons là-bas les conclusions que nous avons tirées ici.

3.2.3.6 Jugement et vérité

À partir de la relation qui lie tout objet – ou tout sens propre – à sa référence, donc en particulier tout énoncé à sa valeur de vérité, il est aisé de définir la propriété de vérité, qui subsume exclusivement les énoncés – ou les pensées – vrais. Pourtant, Ricketts (1986b, 1996) et Kemp (1995) nièrent qu'une telle propriété soit admissible au regard des positions que Frege défendait concernant le jugement. Leur raisonnement s'appuie sur un célèbre argument de celui-ci, contenu dans le passage suivant [100] :

> Il serait maintenant vain de rendre plus clair, par une définition, ce qui doit être compris par le mot 'vrai'. Voudrait-on, par exemple, dire qu'une 'idée est vraie quand elle s'accorde avec la réalité', que l'on n'aurait rien gagné, car, pour appliquer ceci, on devrait décider, pour un cas donné, si une idée s'accorde avec la réalité, c'est-à-dire, en d'autres termes, s'il est vrai que l'idée s'accorde avec la réalité. Ceci devrait donc présupposer la chose même que l'on cherche à définir. La même chose vaudrait pour chaque explication de la forme : '*A* est vrai quand il a telle ou telle propriété ou bien quand il a telle ou telle relation à telle ou telle chose'. [...] La vérité est manifestement quelque chose de si originaire et de si simple qu'une réduction à quelque chose d'encore plus simple n'est pas possible. (Frege 1897a, pp. 139-140 / p. 152)

Frege menait ici une offensive contre les thèses psychologistes selon lesquelles les idées internes constituaient le substrat de la vérité, expliquée en termes d'accord entre ces idées et la réalité. Mais l'argument, présenté dans sa forme générale, ne s'oppose pas seulement à toute conception correspondantiste de la vérité, il dénie la possibilité de *caractériser* cette dernière en spécifiant des conditions vérifiées par toute pensée vraie.

Frege explique qu'une traduction de 'la pensée que *A* est vrai' par 'la pensée que *A* vérifie telles conditions' interdit d'emblée de déterminer la valeur de vérité de la pensée en question, car établir que la pensée que *A* vérifie telles conditions requiert d'établir que la pensée que la pensée que *A* vérifie telles conditions est vraie, et ainsi que la pensée que la pensée que *A* vérifie telles conditions vérifie elle-aussi ces conditions, donc de vérifier les conditions pour cette nouvelle pensée. Mais ceci requiert à son tour de vérifier que la pensée que cette nouvelle pensée vérifie ces conditions est vraie, etc. *ad infinitum*. Et l'objectif n'est jamais atteint.

Ainsi posé, cet argument n'est absolument pas convaincant [101]. Son défaut est contenu dans l'usage du terme 'requiert'. En effet, même si nous convenons que la pensée que *A* est vraie – autrement dit qu'elle vérifie nos conditions – si et seulement si la pensée qu'elle vérifie nos conditions est aussi vraie, il est tout à fait envisageable qu'il soit suffisant de vérifier qu'elle vérifie nos conditions pour établir *simultanément* la vérité de cette pensée *et* la vérité de la pensée qu'elle vérifie nos conditions – *i.e.* le fait qu'elle vérifie nos conditions. Dans ce cas, établir la vérité d'une pensée ne requiert pas, mais *permet*, d'établir la vérité de la pensée que cette pensée vérifie nos conditions. Il s'ensuit de la seule vérification de ces dernières non seulement la vérité de la pensée, mais aussi de la pensée qu'elle est vraie, de la pensée que la pensée qu'elle est vraie est vraie, etc. ; c'est-à-dire de la totalité (infinie) des pensées que Frege implique. En ce sens, la régression qu'il soulève pourrait être totalement bénigne, au moins ne fournit-il aucune raison de croire le contraire.

Heureusement, il n'est pas nécessaire de lui imputer une erreur aussi grossière. Ce passage peut – et, nous croyons, doit – être lu comme une formulation malheureuse d'un *autre* argument.

100. Le lecteur peut en trouver des formulations légèrement altérées aux endroits suivants : (Frege 1897a, pp. 142, 145-146 / pp. 154-155, 158 ; Frege 1918, 1923, pp. 343-344 / 172-173).

101. À notre connaissance, Dummett (1981, Chapitre 13) fut le premier à s'y opposer.

Dans le premier chapitre [102], nous avons vu que Frege distinguait la pensée du jugement qui pouvait l'accompagner. Pour reprendre ses propres formulations, juger que A, c'est reconnaître que la pensée que A est vraie. Une interprétation adéquate de l'extrait ci-dessus établit que, dans cette phrase, le terme 'vrai' ne réfère pas à une propriété ou, pour récupérer l'explication qui convenait dans les cas des mots 'fonction' et 'objet', aucun sens ne peut lui être attribué qui permette d'exprimer ce qu'à travers lui nous visons.

Supposons que nous adoptions l'interprétation contraire selon laquelle le mot 'vrai' joue le *seul* rôle d'exprimer un sens qui conduit à une propriété partagée par toutes les pensées vraies. Alors juger que A devient : reconnaître que la pensée que A possède cette propriété. L'argument de Frege se traduit dans ce cadre : pour juger que A, il faut reconnaître que la pensée que A possède la propriété d'*être vrai*, donc il faut juger que la pensée que A est vraie, et ainsi reconnaître que la pensée que la pensée que A est vraie possède la propriété d'*être vrai*, etc. Bien sûr, nous pourrions proposer la même réponse que précédemment : en jugeant que A, nous jugeons simultanément que la pensée que A possède la propriété d'*être vrai*, et que la pensée que la pensée que A est vraie possède la propriété d'*être vrai*, etc. Mais cette fois, les choses ne sont pas si simples.

En effet, selon Frege, prédiquer une propriété d'un objet consiste *toujours* à effectuer un jugement. Or, ici, le jugement est présenté comme la prédication d'une propriété spécifique – la vérité – à une certaine sorte d'objets – les pensées. Il est alors conçu comme une sous-espèce du genre qu'il constitue réellement [103] ; et l'acte général de prédication se trouve réduit à certaines prédications particulières : celles de la propriété de *vérité* aux pensées. Ceci ne peut convenir ; dans ce contexte, il ne faut donc pas interpréter l'énoncé 'la pensée que A est vraie' comme nous lisons 'la Tour Eiffel est un monument', *i.e.* comme l'assertion que la Tour Eiffel possède la propriété d'*être un monument*. À travers le terme 'vrai', nous ne pouvons ici viser seulement la propriété partagée par un certain nombre de pensées. Mais alors, que visons-nous d'autre ? Frege apporta un début de réponse à travers les explications suivantes :

> Si nous disons 'la pensée est vraie', nous semblons assigner la vérité en tant que propriété à la pensée. Si c'était le cas, nous serions en présence d'un cas de subsomption. La pensée serait comme un objet, subsumée sous le concept du vrai. Mais ici nous sommes trompés par le langage. Nous n'avons pas la relation d'un objet à une propriété, mais celle du sens d'un signe à sa référence. Fondamentalement, la phrase 'Il est vrai que 2 est premier' ne dit pas plus que la phrase '2 est premier'. Dans le premier cas, nous manifestons un jugement, non pas à cause du mot 'vrai' mais à cause de la force assertive que nous donnons au mot 'est'. Mais c'est aussi ce que nous pouvons faire ici dans la deuxième phrase, et un acteur sur les planches, par exemple, serait à même de dire tout haut la première phrase sans force assertive aussi facilement que la seconde. (Frege 1906b, p. 211 / pp. 231-232)

Pour comprendre l'intuition qui le guide, il importe de mettre à jour une nuance qu'il passa sous silence. À une seule occasion, il parla de la force *judicative* [*urteilende Kraft*] [104], sans la distinguer proprement de la force assertive [*behauptende Kraft*]. Pourtant, cette distinction est aussi importante que – et symétrique à – celle qui sépare un élément linguistique de son contenu. La force judicative constitue ce qui accompagne la saisie d'une pensée pour assurer un jugement, ce qui permet le passage de sa saisie à la reconnaissance de sa vérité. La force assertive, pour sa part, accompagne l'*expression* d'une pensée. Elle marque la présence de la force judicative avec

102. en section 1.3.
103. Voir (Ricketts 1986b, p. 77).
104. (Frege 1906b, p. 201 / 221)

laquelle le locuteur l'a saisie. Elle *manifeste* le jugement qu'il a effectué.

Supposons que, lors d'une conversation, l'un des interlocuteurs procède à une affirmation qui laisse son vis-à-vis dubitatif. Pour tenter de le convaincre, plutôt que de répéter la phrase qu'il vient de prononcer, il s'exclame : 'Si ! Vraiment ! Ce que je viens de dire est vrai !'. Quel est le rôle des termes 'si', 'vraiment' et 'est vrai' ? Selon Frege, ils ne possèdent aucun contenu, ils ne contribuent pas à la pensée qui est exprimée. Du point de vue du sens, l'énoncé est identique à celui qui l'a précédé. À travers ces mots, le locuteur tente simplement d'insister sur le fait qu'il est parvenu à reconnaître la vérité de cette pensée, de manifester plus franchement le jugement qu'il a su effectuer. Ni la pensée exprimée, ni la force judicative qui était déjà marquée par la simple diction – avec le ton et dans le contexte qui conviennent – de la précédente phrase, ne sont ainsi altérées. Seule la force assertive est augmentée. Dans le cas idéal où un signe est dédié à cette force, par exemple le trait vertical de l'idéographie, un procédé similaire consisterait à souligner ou écrire en gras celui-ci. À la manière dont nous pouvons redoubler nos plaintes pour afficher plus franchement la douleur que nous ressentons, le locuteur use ici de stratagèmes pour témoigner plus vivement du jugement qu'il parvient à réaliser. Tout ceci a trait à la façon dont il tente à la fois de manifester un élément psychologique auquel son vis-à-vis n'a pas accès et de convaincre celui-ci de l'existence de cet élément, mais en aucun cas ni à l'élément psychologique lui-même – le jugement – ni à la pensée qui lui est liée.

Les termes en question ne peuvent servir à *exprimer* un jugement plus ferme ou plus radical – auquel cas ils possèderaient un sens adapté à cette expression –, mais seulement à manifester plus fermement ou radicalement un jugement – ce qu'aucun sens n'est en mesure de réaliser. Toute cette affaire repose donc sur le fait qu'un jugement, en tant qu'acte psychologique, ne s'exprime pas [105]. Et les conclusions tirées par Frege sont liées au fait que, dans ce passage, il associait le mot 'vrai' au jugement effectué, autrement dit qu'il l'employait exactement comme dans ses explications relatives au jugement. Ce point est patent dans un autre texte lorsque, à l'issue du même raisonnement, il reprit la formulation utilisée lors de ces explications, en concluant que "pour *avancer quelque chose comme vrai*, nous n'avons pas besoin d'un prédicat spécifique : nous avons seulement besoin de la force assertive avec laquelle la phrase est prononcée" [106].

Ces considérations nous conduisent donc naturellement à la question suivante : en quoi consiste l'acte psychologique du jugement ? Il est notoire que Frege n'y apporta jamais de réponse limpide. Mais il tenta parfois de livrer certaines indications, notamment à travers la métaphore suivante :

> Il faut [...] admettre que le rapport de la pensée au Vrai ne peut être comparé à celui du sujet au prédicat. Sujet et prédicat (pris au sens logique) sont bien les parties d'une pensée ; mais pour la connaissance, ils sont situés au même niveau. En réunissant un sujet et un prédicat, on produit une pensée, mais on ne passe nullement d'un sens à sa référence, ni d'une pensée à sa valeur de vérité. On évolue au même niveau, sans passer d'un niveau au suivant. (Frege 1892b, p. 150/ pp. 110-111)

Le jugement assure le passage du niveau des sens à celui des références. Frege ne prit jamais la peine d'éclairer cette image. Néanmoins, les diverses attaques qu'il lança contre l'école psychologiste, notamment dans l'introduction des *Grundgesetze* et au sein des "Recherches logiques", contiennent différents indices. Il tenta de montrer que les thèses de ses adversaires ne pouvaient garantir l'*objectivité* de la connaissance, car elles envisageaient les lois logiques comme les règles

105. Attention, il est possible d'exprimer qu'un jugement a été effectué. Le jugement est un acte psychologique, il peut tout à fait être objet de langage. Mais il ne s'agit pas d'un sens, il n'est donc pas possible de l'exprimer, seulement de le manifester.

106. (Frege 1914, pp. 250-251 / p. 277)

descriptives du raisonnement. À ce titre, deux individus, ou deux espèces d'individus, qui présenteraient différentes mécaniques psychologiques de raisonnement aboutiraient à des conclusions tout aussi différentes concernant ce qui est vrai ou faux [107], et rien ne permettrait de les départager. La vérité – et ainsi la connaissance – se trouveraient relativisées à celui qui la poursuit. Au contraire, si la logique constitue les *normes* du raisonnement, si elle décrit la manière dont il *faut* raisonner pour atteindre la vérité, alors cette vérité demeure indépendante de la manière dont les uns ou les autres raisonnent *effectivement* :

> Nous pouvons dire de la logique qu'elle est, comme l'éthique, une science normative. Comment dois-je penser pour atteindre le but, la vérité ? La réponse à cette question, nous l'attendons de la logique, mais nous n'exigeons pas d'elle qu'elle entre dans le détail de chaque domaine de connaissance ni des objets qui leur correspondent ; au contraire, nous n'assignons comme tâche à la logique que le plus général, ce qui vaut pour tous les domaines de notre activité de penser. Les règles de notre activité de penser et de tenir-pour-vrai doivent être considérées comme les lois de l'être vrai. Celles-là sont données avec celles-ci. Nous pouvons dire aussi, par conséquent, que la logique est la science des lois les plus générales de l'être vrai. (Frege 1897a, p. 139 / pp. 151-152)

Le logique est à la fois la science normative (ou prescriptive) de l'activité de penser – c'est-à-dire du raisonnement – et du tenir-pour-vrai – *i.e.* du *jugement*–, et la science descriptive de l'être vrai. Néanmoins si, dans ce passage, Frege explique bien la généralité des lois logiques en tant que normes absolues du raisonnement et du jugement, il ne dit rien de cet *être vrai* qu'elle décrit. Le caractère mystérieux de son rapport à la vérité est aussi visible dans l'amorce des "Recherches logiques", lorsque Frege affirma que "le terme 'vrai' renvoie à la logique", et que si "toutes les sciences ont la vérité pour but, [...] la logique s'en occupe d'une tout autre manière encore" [108]. Nous pouvons cependant proposer un début d'interprétation sur la base de ce que nous venons de voir.

Pour Frege, toute définition du terme 'vrai' lui conférerait une propriété (de premier niveau à un argument) en guise de référence. Ce faisant, les explications du jugement présenteraient celui-ci comme la prédication de cette propriété à certaines pensées. Elles réduiraient la force judicative à ce qui permet de passer d'une pensée à une autre : celle que la première est vraie ; tandis que cette force conduit en réalité d'une pensée à sa référence : le Vrai. C'est en ce sens que "le mot vrai semble (vouloir) rendre possible l'impossible, notamment en faisant apparaître ce qui correspond à la force assertive [Frege aurait dû dire 'judicative'] comme étant une contribution à la pensée" [109]. L'acte psychologique de jugement repose donc sur la capacité logique fondamentale de passer d'un sens à une référence, de reconnaître un objet sous l'habit du sens. En particulier, cette capacité permet d'attester que certaines pensées conduisent au Vrai et d'autres au Faux, de reconnaître comme vrai ou de rejeter comme faux :

> Ces deux objets seront admis, serait-ce tacitement, par quiconque forme un jugement et tient quelque chose pour vrai, même donc par un sceptique. (Frege 1892b, p. 149 / 110)

Le Vrai et le Faux sont récupérés comme les pendants de notre capacité à juger, exigés (et donc garantis) par l'objectivité de la connaissance. Les notions de vérité, d'objectivité et de jugement

107. En guise d'exemple, Frege ne prit pas le risque d'affirmer que deux êtres humains pouvaient diverger dans leur manière de raisonner, il se contenta d'imaginer d'autres êtres dont le processus de penser serait éloigné du nôtre (1893, p. XVI).
108. (Frege 1918, 1923, p. 342 / 170)
109. (Frege 1915a, p. 272 / 298)

s'expliquent conjointement. Le fait qu'une pensée soit vraie dépend du fait qu'elle puisse être reconnue comme telle. La capacité fondamentale à reconnaître une pensée comme vraie – à juger – est précisément à la source même de la notion de vérité.

La logique, pour sa part, *décrit* les lois qui régissent cette capacité de jugement, cette faculté à effectuer un bond à partir d'une pensée jusqu'à l'objet Vrai [110]. Voilà pourquoi "ce qui contient la plus claire indication de la nature de la logique, c'est bien la force assertive avec laquelle une phrase est prononcée" [111] ou, plutôt, la force judicative qui peut être adjointe à une pensée.

Il y aurait beaucoup à dire sur ce thème. La manière dont il faut entendre la généralité de la logique ou l'objectivité des pensées en dépend. En introduction, nous avons expliqué que les deux grandes distinctions qui marquaient sa pensée intervenaient pour la première entre un élément linguistique et son contenu, et pour la seconde entre une pensée et le jugement qui peut l'accompagner. Nous avons succinctement décrit les idées à la base de la deuxième, sans nous frayer un chemin jusqu'au cœur du problème. Celui-ci possède pourtant quelque chose de fascinant, car il dénote une autre dimension atypique de la pensée fregéenne, et parce qu'il est relativement peu étudié dans la littérature, bien que certaines avancées importantes aient été réalisées [112]. Néanmoins, si nous convenons volontiers de l'intérêt considérable que revêt la notion de jugement, ainsi que de la place essentielle qu'elle tient dans la philosophie de Frege, nous devons admettre – et pouvons déplorer – que notre enquête ne nous en rapproche pas davantage. Car, contrairement à ce qu'affirme Ricketts et Kemp, les difficultés qui lui sont attachées sont indépendantes de celles qui touchent le problème de la sémantique. Il n'y a donc malheureusement

110. Nous pourrions dire que, ce faisant, elle *prescrit* aussi les lois à respecter pour réaliser des jugements corrects. Néanmoins, cette affirmation est problématique, car la notion même de jugement incorrect est inadaptée. Frege prenait très au sérieux la cloison de subjectivité dans laquelle l'esprit est enclos. Les élucidations liées au jugement et à la vérité, notamment dans ses "Recherches logiques", résultaient d'une tentative de retracer la genèse de l'évasion de cette cloison. À ses yeux, le jugement constitue l'acte fondamental par lequel nous accédons à des données objectives, *i.e.* à la connaissance. Mais en parlant d'un jugement correct ou incorrect, nous le ramenons à une *croyance* qui peut – correct– ou non – incorrect – être conforme à la réalité. Posé comme tel, le fossé entre le subjectif et l'objectif reste entier. Or l'acte de jugement est précisément, selon Frege, ce qui permet de franchir ce fossé. Il est censé signer notre évasion de la prison subjective, et non la reporter à autre chose de plus premier, telle une adéquation entre le monde et une croyance. C'est à travers cet acte que le psychologique se tend vers l'objectif et le reconnaît comme tel (le rejoint). Il ne peut donc s'agir que d'un acte qui, tout psychologique soit-il, repose sur une capacité logique fondamentale, et *postérieurement* auquel on peut définir une *tentative* de cet acte, qui présuppose celui-ci pour pouvoir exister en tant que tentative. Notre capacité logique permet de *reconnaître* le lien qui attache une pensée au Vrai. Or il n'est pas possible de reconnaître un lien qui n'existe pas, donc de réaliser un jugement incorrect. Ainsi, il convient davantage de parler d'*échecs* de jugement, *i.e.* d'échecs à attester quelque chose, plutôt que d'*erreurs* de jugement.

Cependant, il n'est pas aisé d'expliquer ces échecs. Par ailleurs, si la logique décrit cette capacité de juger, elle ne peut être considérée comme normative pour les jugements corrects, car tout jugement est par nature correct. Mais alors que prescrit-elle ? Ce point non plus n'est pas facile à déterminer. Le lecteur peut trouver des réflexions à ce sujet dans (Ricketts 1996), (Kremer 2000) et (Textor 2010). Pour notre part, nous n'en dirons pas plus, car notre enquête n'est pas directement affectée par ce problème.

111. (Frege 1915a, p. 272 / 298)

112. Textor (2010) explique qu'il faut privilégier la formulation 'juger consiste à reconnaître *la vérité* d'une pensée' au détriment de celle que, suivant Frege, nous avons étudiée 'juger consiste à reconnaître qu'une pensée est vraie', car celle-ci laisse croire qu'une propriété – celle de *vérité* – est prédiquée d'une pensée. En recourant à l'étymologie du terme '*Anerkennung*', ainsi qu'aux différentes places qu'il occupe dans les textes de Frege, Textor explique que juger consiste à reconnaître un objet – le Vrai – au sens ontique, en suivant le chemin qui conduit de la pensée jusqu'à cet objet. May voit dans le Vrai et le Faux deux objets logiques auxquels nous confions une tâche spécifique au regard de la connaissance, mais qui peuvent être choisis indifféremment. Son hypothèse permet notamment d'expliquer pourquoi Frege se crut libre de stipuler une identité entre ces objets et certains parcours-de-valeurs dans le §10 des *Grundgesetze*. Il s'agit à nos yeux des deux textes les plus importants sur le sujet, et que nous conseillons en priorité au lecteur s'il s'y intéresse. Les papiers de Kemp (1995), Kremer (2000), Ricketts (1996), et Taschek (2008) lui sont aussi consacrés.

pas lieu ici d'en proposer une étude approfondie. Il nous incombe seulement d'établir ce dernier point, ce à quoi nous allons nous employer immédiatement [113].

Rappelons la question posée plus haut : que visons-nous à travers les mots 'est vrai' lorsque nous expliquons que juger que A, c'est reconnaître que A est vrai ? Puisque le jugement constitue l'acte fondamental par lequel nous passons d'une pensée à sa valeur de vérité, il est tentant de répondre que nous ciblons précisément le lien qui unit un sens à une référence. Juger consiste donc à attester qu'une pensée *conduit au Vrai*. Cette formulation semble remédier aux défauts de la précédente, en cela qu'elle ne présente plus la vérité comme une propriété assignée à un pensée, et qu'elle se concentre sur le rapport entre la pensée et sa référence. Mais, cette fois encore, il s'agit d'un trompe-l'œil. Juger que A revient alors à juger que A conduit au Vrai. Ainsi le jugement lié à A est ramené au jugement lié à une nouvelle pensée : celle que A conduit au Vrai. Et la régression qui accablait l'autre formulation atteint aussi celle-ci ; le jugement est à nouveau présenté comme une sous-espèce de lui-même.

Le problème n'est pas directement lié aux mots 'est vrai', 'le Vrai' ou 'conduit'. Il survient quel que soit ce que nous choisissons d'insérer dans l'expression :

Juger que A, c'est reconnaître que ...

Un jugement est un acte impliquant une pensée. En disant qu'il consiste à reconnaître que la pensée que A possède une certaine propriété, ou entretient une certaine relation avec un objet, ou vérifie de quelconques conditions, l'erreur à ne pas commettre est d'identifier l'acte de jugement à celui de la reconnaissance, et la pensée associée à celle que la pensée que A vérifie nos conditions. C'est en adoptant cette position que nous caractérisons l'acte général de jugement à travers des jugements particuliers, et que nous sombrons dans la régression dénoncée par Frege. Voilà pourquoi, après avoir à nouveau présenté celle-ci, il expliqua que "la référence du mot 'vrai' sembl[ait] unique en son genre" et demanda si "nous avons à faire à quelque chose qui ne peut nullement être appelé propriété dans le sens usuel" [114]. Précisons qu'il ne trancha jamais positivement cette question, et surtout qu'il s'abstint à raison.

Le problème réside dans le fait que le jugement ne consiste pas en un acte – celui de la reconnaissance – associé à une pensée – celle que la pensée que A vérifie des conditions ; il consiste en un acte – celui de la reconnaissance que des conditions sont vérifiées – associé à une pensée – celle que A. Voilà l'ambiguïté qu'il convenait de lever, faute de quoi une régression fatale nous guettait. Mais, en réalité, nous pouvons décrire cet acte de diverses manières, dont certaines n'utilisent pas de termes problématiques tels que 'reconnaître' ou 'attester'. Nous pouvons certes expliquer qu'il consiste à reconnaître qu'une pensée est vraie ou à attester qu'elle conduit au Vrai. Dans ces cas, l'acte de juger peut être confondu avec celui de reconnaître ou d'attester. Ce en quoi le jugement consiste se voit expliqué à travers ce qu'il s'agit de juger, et le jugement se trouve ainsi inévitablement réduit à une sous-espèce de lui-même. Mais nous pouvons aussi dire qu'il consiste à appliquer la force judicative à cette pensée, ou encore à franchir le fossé qui la sépare du Vrai. Ces formulations ne possèdent pas le caractère équivoque des premières, et nous protègent de la confusions que celles-ci pouvaient générer. Bien entendu, elles sont insuffisantes. Il faudrait – Frege aurait dû – apporter un meilleur éclairage. Mais ce qui nous importe, c'est que *rien*, dans tout ceci, ne permet de dénier l'existence d'une propriété de vérité ou d'une relation de référence entre noms propres et objets. *Au contraire*, les explications de Frege ne laissent aucun doute sur le fait que le jugement se trouve en rapport étroit avec cette relation, qu'il

113. Des arguments proches de celui que nous allons avancer ont déjà été proposés par Bar-On et Simmons (2007), Heck (2012, Chapitre 2.3) et Sullivan (2005).
114. (Frege 1918, 1923, p. 345/174)

consiste d'une manière ou d'une autre à la constater entre une pensée et le Vrai. C'est justement pour cette raison que, lorsque nous souhaitons *manifester* un jugement, nous en venons parfois à *exprimer* l'existence de cette relation, en disant par exemple : 'la pensée que A conduit au Vrai' ou 'la pensée que A est vrai'. Comme l'explique Frege, "le mot vrai semble (vouloir) rendre possible l'impossible, notamment en faisant apparaître ce qui correspond à la force assertive [ou plutôt judicative] comme étant une contribution à la pensée" [115], mais c'est précisément parce que, faute d'un mot ou d'un son dédié à cette tâche, nous en sommes réduits à solliciter le sens pour manifester quelque chose qui ne s'exprime pas. Ce quelque chose – l'acte de jugement – entretient un rapport intime avec la relation qui attache une pensée au Vrai. S'il n'est pas possible d'exprimer la force judicative que nous associons à une pensée, il est permis de signaler sa présence en *exprimant* ce que cette force permet de *constater*. Avec la notion de vérité – respectivement de référence – nous avons donc bien affaire à quelque chose qui peut être appelé 'propriété' – respectivement 'relation' –, dans le sens usuel. Cependant, dans certains contextes, nous n'employons pas les termes 'vrai' et 'réfère' en poursuivant seulement l'objectif usuel qui consiste à exprimer leur sens. Nous souhaitons certes aboutir à ce résultat, mais *seulement afin* d'indiquer *implicitement* que nous avons pu constater ce qui est exprimé. En somme, il s'agit d'une manière (naturelle et compréhensible) de manifester plus franchement le jugement qu'avec la simple diction d'une phrase assertive qui exprime la pensée jugée.

Ainsi, Frege n'avait aucune raison de dénier l'existence d'une propriété de vérité ou de relations de référence. Il fut même maladroit en stipulant sans justification une synonymie entre les énoncés A et 'la pensée que A est vraie'. Son point se limitait à révéler l'écart infranchissable entre une pensée et un jugement, entre un sens et la capacité logique qui conduit de ce sens jusqu'à une référence. La relation qui attache ces deux derniers éléments existe bel et bien, c'est d'ailleurs elle que notre capacité logique nous permet de rencontrer. Nous pouvons donc parfaitement exprimer que deux entités l'entretiennent, par exemple en disant que le sens de 'la mère de Marie' conduit à Julie. Mais la rencontre avec ce lien est un acte, elle ne s'exprime pas, et ne peut être identifiée à aucun sens, à aucune pensée, pas même à celle que le sens de 'la mère de Marie' conduit à Julie, que ces deux entités sont attachées par ce lien.

La reconnaissance (le constat ou encore la rencontre) du lien qui attache un sens à une référence doit être distinguée du fait qu'un sens et une référence entretiennent ce lien. Le premier est un acte, le second est un sens. Voilà ce que Frege tentait d'établir dans les passages que nous avons cités. Dans ce cadre, il *fit usage* de noms pour les relations de référence [116], il ne s'opposait donc pas à leur exploitation. C'est précisément en exprimant l'existence de ce lien – à travers des énoncés tels que 'la pensée que A est vraie'– que, échouant à exprimer un sens qui *soit* le constat de cette existence, nous parvenons néanmoins à manifester plus vivement ce dernier. Rien n'interdit donc d'utiliser ces noms à d'autres fins, accessibles cette fois à travers la seule expression de leurs sens. En somme, la théorie fregéenne du jugement ne proscrit aucunement le recours à la montée sémantique.

Voilà tout ce qu'il nous importait d'établir. Nous ne demanderons pas en quoi consiste exactement ce constat [117], ni si le rapport entre la force judicative et la logique permet de caractériser la logicité – qui relève donc du constat possible du lien vertical qui attache une pensée au Vrai

115. (Frege 1915a, p. 272 / 298)

116. ou, disons, pour les relations premières qui attachent des sens aux entités auxquelles ils conduisent, et dont peuvent être dérivées les relations qui attachent des noms à leurs références.

117. Nous invitons à nouveau le lecteur à lire l'article de Textor (2010) à ce sujet. Il y décrit une rencontre – une reconnaissance au sens ontique – avec l'objet Vrai. Nous préférons parler d'une rencontre avec le lien lui-même et, seulement *postérieurement*, avec l'objet qui se trouve à l'autre bout de ce lien. Ou, plutôt : ce qu'il y a de commun entre tous les liens qui partent des pensées vraies exige (implique) qu'un même objet se trouve à l'arrivée.

– en termes sémantiques – à travers son redressement horizontal *via* l'utilisation de la relation de référence (ou de la propriété de vérité) [118]. Chez Frege, la question de la logicité est intrinsèquement liée à la notion de jugement, et à la corrélation que celle-ci entretient avec celle de vérité. Mais ce problème – captivant, admettons-le – n'est pas le nôtre, car Frege n'a jamais réellement mené d'enquête pour établir un critère général de logicité, et n'a manifestement pas fait un tel usage de la sémantique dans la première partie des *Grundgesetze*. Or notre but se limite à comprendre ce qui y est réalisé.

3.2.3.7 Les élucidations dans les *Grundgesetze*

Frege présenta les élucidations comme le seul moyen disponible pour doter un nom d'un sens logiquement simple. Il répéta invariablement ce point dans les trois contextes dans lesquels il les sollicita explicitement : celui des termes primitifs d'une langue idéale, celui des notions d'objet et de fonction, et enfin celui de la notion de vérité. Pourtant, nous savons désormais qu'il échoua à développer correctement l'idée de constituants logiquement simples, et surtout que cette idée ne peut convenir en aucune manière dans certains de ces cas [119] – par exemple vis-à-vis des termes 'objet' et 'fonction'. L'activité élucidatoire en jeu dans ces situations très différentes ne peut donc être décrite de cette manière. Or, si Frege commit cette erreur, il demeure possible d'aboutir à une caractérisation plus fidèle, non à ce qu'il en dit, mais à ce qu'il en fit. La question que nous allons maintenant poser concerne le rôle *général* des élucidations.

Disons-le sans détour : si nous tentions de préciser leur champ total en confrontant abruptement les quelques textes qui en font mention, il n'en résulterait que désordre et confusion. Il n'est pas possible de reconstituer une conception cohérente et complète à partir des exemples et descriptions proposés par Frege car celui-ci cernait mal les nuances entre diverses élucidations, et réunissait des objectifs très différents sous le label inadapté d'accaparement linguistique de la simplicité logique. Une chose est donc certaine : jamais il ne parvint à présenter correctement leur rôle général. À cet égard, les différents indices laissés sont souvent contradictoires. Néanmoins, il est possible – et même, pour une fois, intéressant – d'extrapoler légèrement. En tenant compte de ce que Frege n'a pas (ou mal) vu, nous pouvons décrire plus clairement leur statut et leur fonction.

Cette entreprise permettra en outre de décidé quelle portion des *Grundgesetze* doit être considérée comme élucidatoire. Rappelons que les membres du courant antisémantique tentent d'étendre celle-ci afin de contester le caractère théorique des passages traitant de sémantique dans les *Grundgesetze*. Au contraire, leurs adversaires avancent l'interprétation opposée, et limitent son spectre. Ci-dessus, nous avons vu que l'enjeu était mal placé : aucune conclusion immédiate concernant la sémantique fregéenne ne peut être tirée à partir du constat que tel ou tel passage est constitué d'élucidations, sans savoir de quel type il s'agit. Cependant, il n'est pas inutile de comprendre l'ambiguïté à l'origine du désaccord, et ainsi d'étayer par l'exégèse ce que nous dirons du rôle général des élucidations.

118. Heck (2010) et Ricketts (1986b) se sont intéressés au problème. Le premier donne des pistes dans le sens d'une réponse positive tandis que, sans surprise, le second se prononce dans l'autre direction.

119. C'est probablement en s'intéressant au cas que nous venons d'étudier – celui de la notion de vérité – qu'il fut le plus proche de réaliser que le problème ne devait pas être posé en ces termes. Il y entrevit quelque chose de spécifique, d'"unique en son genre" (Frege 1918, 1923, p. 345 / 174), profondément distinct des difficultés auxquelles il se confrontait dans les autres cas. Mais il continua malheureusement de recourir à des formulations qui suggéraient le contraire, en expliquant par exemple que "la vérité est manifestement quelque chose de si originaire et de si simple qu'une réduction à quelque chose d'encore plus simple n'est pas possible" (Frege 1897a, p. 140 / 152).

Aux côtés des termes 'définition' [*Definition*] et 'élucidation' [*Erläuterung*] se tient le nom '*Erklärung*'. Durant longtemps, il reçut la même traduction (anglaise et française) que '*Definition*'. Ebert et Rossberg ont finalement dérogé à cette habitude, en lui dédiant le mot anglais '*explanation*', et ainsi inspiré notre propre traduction par 'explication'. Voyons la manière dont ils justifièrent leur décision :

> Frege emploie parfois le verbe '*erklären*' et le nom '*Erklärung*' pour décrire ses définitions. Néanmoins, d'autres occurrences de ces termes apparaissent là où Frege n'escompte pas donner de définition. Il n'y a pas d'explication satisfaisante de ce qui distingue précisément les *Erklärung* des *Definition* fregéennes, ni des rapports qu'elles entretiennent – néanmoins Frege utilise différents mots dans le texte original, et nous avons décider de respecter cette distinction dans notre traduction. (Frege 2013, p.xix)

Il est indéniable que Frege employa le terme 'expliquer' pour qualifier l'action de certaines définitions. Dans le §33, au moment d'énoncer les règles régissant ces dernières, il parla du 'nom expliqué' et du 'nom expliquant', en lieu et place du '*definiendum*' et du '*definiens*'. Au §34, il signala qu'il "devait encore *expliquer* $\xi \frown \zeta$ pour tous les objets possibles pris en arguments", ce qu'il réalisa immédiatement en *définissant* ce nom. Il est tout aussi incontestable que, dans d'autres contextes, les explications en cause se distinguaient des définitions, notamment lorsqu'il s'agissait de spécifier la référence des noms primitifs, par nature indéfinissables (par exemple pp. 12, 15).

Comme Ebert et Rossberg, il nous semble donc pertinent de maintenir la distinction entre les deux mots. Nous ne croyons pas non plus qu'il soit possible d'éclairer de manière définitive ni la différence ni le rapport entre leurs deux contenus. Cela est dû à l'usage très général, extrêmement imprécis, que Frege fit du mot '*Erklärung*'. À diverses endroits, de telles explications ne concernent ni les noms primitifs, ni les noms définis, mais d'autres aspects du langage comme le rôle des lettres de fonctions (p. 41) ou sa structure typée (p. 44). Néanmoins, il nous semble que, la plupart du temps, Frege utilisait ce terme dans un sens technique, plus spécifique : pour désigner les énoncés visant à fixer le sens des noms simples – et par conséquent, complexes – du langage, qu'ils soient primitifs ou définis. Les deux cas sont collectivement impliqués dans l'extrait suivant :

> Les fonctions à deux arguments $\xi = \zeta$ et $\xi > \zeta$ prennent toujours une valeur de vérité pour valeur (au moins si les signes '=' et '>' sont expliqués de manière appropriée). (Frege 1893, p. 8)

Frege parle indifféremment des *explications* permettant de spécifier pour ces noms les références attendues, qui envoient tout objet sur une valeur de vérité. Pourtant, dans l'idéographie, seul le premier signe est primitif ; le second est défini. L'explication relative à '$\xi > \zeta$' est donc une définition rédigée dans la langue idéographique selon les principes présentés au §33. En revanche, la référence du signe pour l'égalité exige la donnée d'élucidations. Il en va ainsi pour tous les noms primitifs, notamment celui de la quantification de premier niveau :

> Nous donnons à présent l'explication suivante :
>
> $$\text{`}\smile_{\mathfrak{a}}\, \Phi(\mathfrak{a})\text{'}$$
>
> réfère au Vrai si la valeur de la fonction $\Phi(\xi)$ est le Vrai pour tout argument, au Faux sinon. (Frege 1893, p. 12)

Notons que les élucidations liées aux noms primitifs possèdent certains points communs [120]. Elles consistent en la donnée du nom de la fonction en question – écrit au centre de la page –,

120. à l'exception de celui pour les parcours-de-valeurs. Frege estimait que la manière dont il l'avait introduit ne

suivie de l'indication de la valeur prise par cette fonction en tout argument. Il s'agit donc d'une méthode systématique qui, à première vue, ne semble pas posséder le caractère flou et imprécis attribué aux élucidations, bien que Frege tînt absolument à la respecter, comme en témoigne le passage suivant :

> Nous avons déjà incidemment fait usage du signe d'égalité pour former des exemples mais il est nécessaire de stipuler quelque chose de plus précis le concernant.
>
> $$\text{`}\Gamma = \Delta\text{'}$$
>
> réfère au Vrai si Γ est identique à Δ ; dans tous les autres cas, il réfère au Faux. (Frege 1893, p. 11)

De prime abord, cette situation est surprenante. En effet, la description des élucidations, entreprise en d'autres lieux et examinée plus haut, s'accordait tout à fait avec la donnée d'exemples et de considérations imprécises . Or Frege affirma ici qu'il était essentiel de recourir à une stipulation plus rigoureuse, et s'engagea dans un processus dont le résultat s'apparente aux clauses relatives aux constantes logiques en théorie des modèles [121], si bien que divers auteurs y voient de véritables *définitions sémantiques* [122]. Nous discuterons cette question une fois que nous nous serons accordés sur le statut de ces dernières. Mais nous voulons insister sur le point suivant : selon l'usage qu'il faisait du terme, Frege n'identifiait aucunement ces explications à des *définitions*. Il les tenait bel et bien pour des élucidations, bien qu'il les soumît à certaines règles strictes. Les défauts attachés aux élucidations proviennent de la langue naturelle dans laquelle elles sont formulées, mais rien n'interdit, si certains enjeux pré-scientifiques le réclament, d'exiger qu'elles respectent tel ou tel principe.

Frege fit peser une contrainte sur la spécification de la référence des termes primitifs. Dans le cas d'un nom de fonction, il exigea que soit stipulée la valeur de sa référence en *tout* argument. Le principe de complétude [123], ainsi qu'il l'appelait, fut présenté au début de la troisième partie des *Grundgesetze*. Il pourrait nous être objecté que, dans ce chapitre, Frege s'intéressait aux définitions, et non aux élucidations [124]. Mais l'explication tient, encore une fois, dans l'ambiguïté avec laquelle il s'exprima. À cet égard, la précision préliminaire qu'il fournit procure un indice déterminant :

> Dans le premier volume, nous avons déjà établi de tels principes [liés aux définitions] pour l'idéographie ; ici il sera principalement question des définitions en langue naturelle. (Frege 1903a, p. 69)

Ainsi, la section en question ne concernait pas ce qu'il avait nommé des 'définitions' dans le premier volume, et dont les règles furent établies au §33. La raison, que Frege ne prit pas la peine de formuler dans ce lieu, est la suivante : si la référence des noms primitifs est spécifiée dans le respect du principe de complétude, alors par composition celle des noms complexes l'est aussi [125]. Il importe donc seulement que les *élucidations* qui indiquent la référence des noms primitifs y soient soumises, et c'est ce à quoi Frege s'appliqua à chaque fois qu'il introduisit l'un de ces noms.

---

suffisait pas à fixer sa référence, et exigeait les compléments fournis aux §§10, 31. Pour l'instant, nous tenons ce cas précis à l'écart de nos considérations. Nous le discuterons en détail en section 3.3.

121. Nous avons introduit cette idée en section 3.1.4.2, et la creuserons en section 3.3.6.

122. Heck est de ceux-là (2012, Chapitre 2).

123. Nous en présenterons les tenants et les aboutissants en section 3.3.2.

124. La section est en effet intitulée "Principe pour les définitions".

125. Frege insista sur ce point au sein du §30 du premier volume. Que le lecteur accepte de s'armer de patience jusqu'à la section 3.3.6, dans laquelle tout ceci sera minutieusement examiné.

Pourquoi, alors, parla-t-il de *définitions* effectuées dans la langue naturelle ? Précisons que, dans cette partie, il entreprit une critique virulente des méthodes employées par ses adversaires de l'époque. Il choisit donc simplement d'emprunter à cette occasion le lexique de ses concurrents. N'oublions pas que, contrairement à lui, ces derniers n'impliquaient pas de langue idéale. Ce qu'il avait nommé 'des définitions' dans le cadre de l'idéographie, et qui respectaient certains canons de rigueur atteints grâce à l'utilisation de cette langue, ne pouvaient donc exister. Néanmoins, la notion d'élucidation, qui précède et accompagne le développement d'une science dans une telle langue, n'était pas davantage adaptée. Il choisit donc d'employer le terme 'définition' ainsi qu'il l'était usuellement : pour qualifier n'importe quelle tentative de détermination de référence, aussi imprécise et problématique soit-elle hors de l'utilisation d'un langage idéal. D'ailleurs, chaque exemple qu'il emprunta à ses adversaires, loin de conférer à un nouveau mot le sens d'une expression complexe – comme le font les définitions de l'idéographie –, avait vocation à spécifier la valeur d'une fonction en divers arguments – ce à quoi sont aussi destinées les explications relatives aux noms primitifs dans les *Grundgesetze*. Ramené au contexte de la langue idéale, c'est donc vis-à-vis de ces explications que le principe de complétude est essentiel. Et celles-ci sont bel et bien des élucidations.

Une note de bas de page apporte une confirmation de ce dernier point. Elle se rapporte à une comparaison effectuée entre certaines définitions de Thomae et la manière dont Frege lui-même avait fixé la référence du nom pour les parcours-de-valeurs :

> En règle générale, il ne faut pas regarder les stipulations du premier volume à propos des signes primitifs comme des définitions. Seul ce qui est logiquement composé peut être défini ; ce qui est simple peut uniquement être indiqué [*hinweisen*]. (Frege 1903a, nbp 1, p. 148)

Cet extrait confirme ce qui vient d'être dit. Parmi les "définitions" de ses adversaires, Frege n'était pas intéressé par celles qui tentaient de conférer à un nouveau mot le sens d'une ancienne expression, mais par celles qui spécifiaient les différentes valeurs prises par une fonction. Il les comparait donc aux élucidations relatives à l'introduction des noms primitifs, et non aux définitions réalisées dans sa langue artificielle. La situation inconfortable dans laquelle il se trouvait manifeste les maladresses d'expression que nous venons de signaler, et auxquelles il eut le tort de recourir sans avertissement. Tandis qu'il discutait et comparait diverses définitions – selon l'acception traditionnelle du mot –, il sollicita à ce titre quelque-chose qui sortait de ce champ – selon son propre usage du terme –, et se vit contraint de le signaler en note de bas de page. La gêne n'est suscitée que parce qu'il omit d'apporter les précisions que nous venons de fournir. Dans le contexte du travail de ses adversaires, dont la langue idéale est absente, il nommait 'définition' toute tentative de détermination de référence. Dans son propre cadre, il les limitait au processus permettant d'identifier le sens d'un nouveau nom simple à un ancien nom complexe dans l'idéographie. Cela excluait donc les *explications* par lesquelles les noms primitifs furent introduits, bien qu'elles fussent aussi des tentatives de spécification de référence.

Concernant les noms primitifs, le contenu des *Grundgesetze* s'accorde donc parfaitement avec les éclaircissements fournis à d'autres occasions : seules des élucidations sont en mesure de fixer leur référence. À présent, pour circonscrire plus avant le rôle *général* des élucidations, il convient de déterminer quels autres passages des *Grundgesetze* en sont constitués. Rappelons que, parmi les exemples proposés ailleurs, Frege impliqua aussi des énoncés – contenant les termes 'objet' et 'fonction' – qui, contrairement à ce qu'il affirma, n'avaient pas vocation à attribuer à un terme un sens logiquement simple, mais à dévoiler au lecteur le fonctionnement du sens à travers de

judicieuses analogies. Au sein des *Grundgesetze*, on trouve des passages de cet acabit [126]. Notre question est donc : les élucidations se limitent-elles aux énoncés consacrés à ces deux différentes tâches ?

Nous pensons que Frege aurait répondu par l'affirmative. Plus précisément, il n'aurait vu aucune objection à écrire non seulement, comme il l'expliqua en introduction, que les élucidations sont nécessaires pour "réduire les choses à ce qui est logiquement simple", mais encore qu'elles ne sont utiles *que* pour cela. Néanmoins, nous savons qu'il ne présentait aucune vision convaincante de "ce qui est logiquement simple", et confondait les lieux où le sens doit être injecté dans un nom primitif et les endroits où il fait purement et simplement défaut. Une fois cette distinction mise à jour, l'objectif des élucidations apparaît comme éclaté entre deux enjeux totalement indépendants. Or il existe une manière homogène d'en rendre compte, plus générale et, par moments, suggérée par Frege lui-même.

Avant toute chose, constatons les répercutions que son échec à établir cette distinction possède dans notre entreprise de circonscription des passages élucidatoires des *Grundgesetze*. Voici ce qui fut indiqué lors de la première apparition de la lettre 'ξ' :

> 'ξ' lui-même n'apparaîtra jamais dans les développements idéographiques ; je l'utiliserai seulement dans l'exposition de l'Idéographie et dans les élucidations. (Frege 1893, nbp 1, p. 6)

Il faudrait donc séparer les parties visant à exposer le système et celles qui contiennent des élucidations. Si, outre l'introduction des noms primitifs, nous limitons ces dernières aux éclaircissements concernant les "contenus" des termes 'objet', 'fonction', etc. – par exemple 'tout ce qui n'est pas un objet est une fonction', alors cette frontière est légitime. En effet, la lettre 'ξ' figure aussi bien au sein d'expressions telles que '— ξ envoie le Vrai sur le Faux' – qui aide à fixer la référence de 'ξ' – que d'énoncés du type de '— ξ est une fonction' – qui est exclu des deux contextes évoqués. Selon cette lecture, seules les premières seraient élucidatoires. Pourtant, Frege dit souvent, dans le cadre des seconds, que 'l'expression manquait sa pensée', formule qu'il dédiait aux élucidations. Si, suivant cette observation, nous étendons ces dernières aux énoncés de ce genre, alors il devient difficile – voire impossible – de dégager des extraits non élucidatoires contenant le symbole 'ξ', car ceux-ci les impliquent systématiquement d'une manière ou d'une autre. Ce symbole n'est donc plus du tout utilisé dans "l'exposition du système".

Le contenu de cette note de bas de page se voit donc obscurci par les confusions relevées lors de la section 3.2.3.5. Et il en va ainsi à chaque apparition du terme 'élucidation'. Dans le §34, après avoir tenté d'établir que toute expression composée de noms primitifs était dotée d'une référence, Frege pensait pouvoir étendre sa conclusion aux noms définis sur la base de ces expressions, et procéder sereinement aux définitions facilitant l'écriture de ses preuves. Il proposa immédiatement la plus importante – celle de '$\xi \frown \zeta$' – avant d'affirmer :

> Bien que l'expression expliquée ne contienne que des signes connus, une élucidation semble à-propos. (Frege 1893, p. 53)

Il estimait que l'argument préliminaire des §§29-31 assurait d'emblée que tout nom défini à partir des noms primitifs, y compris celui-ci, possédait une référence. Il souhaitait néanmoins accompagner le lecteur dans la particularisation du raisonnement à ce cas précis, afin de mieux cerner cette référence. Après s'y être appliqué, il conclut :

> Ici, nous voyons la confirmation de ce que nous aurions pu tirer de nos considérations préalables, *i.e.* que le nom '$\xi \frown \zeta$' possède une référence. Seul ceci est fondamental

126. notamment dans le §1.

> pour la conduite des preuves à venir. À d'autres égards, notre élucidation pourrait être fausse sans remettre en cause le fait que ces preuves sont correctes, car seule la définition elle-même se situe au fondement de cette construction. (Frege 1893, p. 54)

Pourquoi Frege est-il prêt à tolérer certaines erreurs dans son élucidation ? Weiner apporte la réponse suivante :

> La conclusion manifeste de l'argument du §34 – qu'un nom de fonction particulier possède une référence – n'est pas , selon les remarques de Frege concernant la nature des fonctions, à proprement parler quelque chose qui peut être dit. Mais [Frege] ne veut pas faire passer son élucidation pour une preuve dont la conclusion serait que le nom de fonction en question possède une référence.
>
> [...]
>
> L'argument du §34, bien qu'il ne puisse pas être correct (à cause du type d'affirmation qu'il contient au sujet des fonctions), *n'a pas besoin* d'être correct. Il est élucidatoire. Il est censé permettre au lecteur de Frege de comprendre l'application de son signe de fonction. (Weiner 2002, p. 21)

Pour Weiner, l'objectif du §34 consiste à convaincre le lecteur de quelque chose – que '$\xi \frown \zeta$' possède une référence – qui ne peut être dit, et par conséquent inapte à faire l'objet d'une démonstration. À travers cette élucidation, Frege se serait cantonné à octroyer des indications en un lieu où expression et preuve font défaut, là où vérité et justesse sont donc inaccessibles. À ses yeux, il s'agit d'une résurgence supplémentaire du problème du non-sens.

Mais Weiner déforme ici le propos de Frege, jusqu'à le renverser totalement. Ce qu'elle bannit du royaume théorique – le fait qu'un nom de fonction possède une référence – Frege affirma au contraire l'avoir *confirmé* dans le §34. Il précisa seulement que son élucidation peut être fausse – et non pas dénuée de sens – *à d'autres égards*, autrement dit sur des sujets qui sont extérieurs à celui visé par Weiner. Par exemple, il pourrait avoir commis une erreur en éclaircissant à quelle référence précise renvoie le nom '$\xi \frown \zeta$'. Bien sûr, cela possède son importance relativement à la capacité du lecteur à *comprendre* les preuves qui l'attendent. Néanmoins, ça n'aurait aucune incidence sur la *justesse* de ces dernières. Frege se contente ici de mesurer à nouveau la distance qui sépare le logique du psychologique. Dès lors que nous sommes assurés de la vérité des axiomes, de l'adéquation des règles, et du fait que tout nom réfère, alors nous pouvons exploiter le système afin de procéder mécaniquement aux démonstrations. Les énoncés démontrés expriment toujours une vérité, quand bien même nous échouons à *saisir* cette vérité. Or, pour Frege, les §§29-31 – puis le §34 – établissaient que la définition du nom '$\xi \frown \zeta$' lui octroyait une référence, indépendamment du fait que nos idées soient claires ou confuses concernant cette dernière. Ce nom pouvait donc être impliqué dans les démonstrations sans générer d'erreur. En revanche, Frege n'était pas certain de parvenir à établir *ce qu'il avait l'intention* de prouver s'il échouait à comprendre quelle référence la définition en question attribuait à ce nom. Et il aurait pu manquer son but de cette manière, si les théorèmes de l'arithmétique n'avaient pas été exprimés correctement, donc s'il figurait autre chose en conclusion des démonstrations. Mais cela se produirait "sans remettre en cause le fait que ces preuves sont correctes", quoi qu'elles prouvent.

Si l'interprétation de Weiner est erronée, la nôtre ne nous aide pas davantage, car Frege ne précisa pas pourquoi le contenu de son développement était élucidatoire. Rien ne suggère qu'il ait tenu ce genre d'information – qu'un nom de fonction possède une référence – à l'écart du royaume théorique, mais rien ne le conteste non plus. S'il pensait avoir *confirmé* qu'un nom de fonction possédait une référence, la nature de cette confirmation ne fut pas discutée. S'agit-il d'une preuve capable d'être traduite dans une langue idéale, ou procède-t-elle par indications, exposant ce qui

ne peut être dit, ainsi que la nature des fonctions se voit manifestée à travers les remarques concernant son insaturation ? Dans les *Grundgesetze*, rien ne permet de trancher la question. Et nous voulons insister sur ce point, car plusieurs commentateurs utilisent le fait que Frege aurait ou n'aurait pas conçu ces explications comme d'authentiques preuves afin d'asseoir leurs analyses de son rapport à la sémantique [127]. Weiner poursuit ainsi le propos débuté ci-dessus :

> Tout comme les arguments du §31 *ressemblent* à des preuves de notre point de vue, ceux du §34 *ressemblent* à des preuves de notre point de vue. Ceci explique certaines remarques de la préface des *Grundgesetze*, très surprenantes si nous supposons que le §31 est censé intégrer des preuves. Dans cette préface, Frege suggère au lecteur de passer certaines sections lors d'une première lecture. Il explique qu'"afin de lever toutes les objections, certains problèmes doivent être traités, qui ne sont pas impliqués dans la compréhension des énoncés de l'idéographie." (p. xii). Le §31 fait partie des sections qui doivent être passées pour cette raison. Mais il conseille aussi au lecteur de revenir à ces sections après avoir parcouru le livre une première fois. Il ajoute qu'ainsi "de cette manière, la suspicion que pourrait initialement engendrer [ses] innovations disparaîtra progressivement" (p. xii). Voilà une étrange caractérisation de ce qui doit être accompli par une preuve – c'est beaucoup trop faible. Mais c'est exactement la caractérisation attendue pour des sections qui contiennent des élucidations qui, selon Frege, n'offrent aucune garantie. (Weiner 2002, pp. 21-22)

Dans les §§29-31, Frege tenta de convaincre son lecteur que tout nom de l'idéographie possédait une référence. Dans la préface, il conseilla à ce même lecteur de ne pas s'attarder sur ces paragraphes lors d'une première lecture. Weiner invoque la raison suivante : ce qui y est réalisé est dénué de tout caractère théorique, et ne doit donc pas être étudié en priorité. Mais cette analyse est incorrecte, car au même moment, Frege recommandait de se concentrer sur le §34 qui, intégrant aussi des énoncés métaphoriques, possède exactement les mêmes "défauts" que les parties en cause. Ici, il n'était pas question de hiérarchiser les sections en fonction de leur caractère élucidatoire ou de la manière dont leurs énoncés font ou ne font pas sens, mais relativement au propos qui y est développé. Frege savait combien ses contemporains étaient réfractaires à l'adoption et l'exploitation d'une idéographie. La première étape consistait donc à leur enseigner son fonctionnement afin qu'ils en comprennent les avantages. À cette fin, le §34 est essentiel, car il aide à cerner la référence d'un nom qui, en permettant de traiter au premier niveau des fonctions situées au second (à travers leurs représentants), soutient entièrement l'analyse des nombres comme parcours-de-valeurs, et ainsi l'entreprise de réduction de l'arithmétique. Au contraire, les §§29-31 sont totalement inutiles à cet égard. Le lecteur est parfaitement en mesure de suivre cette démarche de réduction, et les preuves qu'elle intègre, sans les avoir consultés. En revanche, ils permettent de lever une objection qui ne peut venir à l'esprit que dans un second temps, une fois la stratégie fregéenne comprise : le système est-il vraiment bâti correctement, n'incorporant que des noms référentiels ? Frege ne donne pas ici la primeur aux passages proprement théoriques au détriment de ceux qui fonctionnent par analogie – car, où qu'ils soient situés, les §§31 et 34 sont du même côté de la barrière –, il fournit un ordre de lecture permettant de comprendre progressivement la substance, l'intérêt et la pertinence de sa démarche. Sa remarque est exclusivement pédagogique [128]. La suite, que Weiner ne cite pas, va aussi dans ce sens :

127. au lieu, au contraire, d'étudier ce rapport afin de se demander s'il pouvait – ou devait, en toute cohérence – les tenir pour de véritables démonstrations.

128. En ce cas, néanmoins, on peut se demander pourquoi il n'a pas isolé ces paragraphes en fin de première partie. Il aurait en effet pu réunir toutes les sections concernées par son avertissement, censées établir collectivement que chaque nom possédait sens et référence uniques. Néanmoins, cela lui aurait interdit de procéder à certaines

> Lorsque la fin aura été atteinte, il faudra relire entièrement l'exposition de l'Idéographie [...] en gardant à l'esprit que ces stipulations qui ne seront plus utilisées par la suite, et semblent ainsi superflues, servent au respect du principe [*zur Durchführung des Grundsatzes dienen*] selon lequel tous les signes correctement formés doivent référer à quelque chose, un principe essentiel pour une rigueur complète. (Frege 1893, p. xii)

Si le contenu de ces paragraphes peut d'abord être ignoré, c'est parce qu'il n'est pas utilisé dans la réalisation du projet logiciste. Le lecteur doit comprendre avant tout *ce que* Frege veut faire et *comment* il compte s'y prendre, avant de vérifier point par point que le sentier emprunté ne présente aucun défaut, et ainsi se pencher sur les sections en cause.

Enfin, une seconde objection se dresse, non plus contre l'analyse de Weiner, mais contre la conséquence qu'elle désire en tirer, selon laquelle le contenu des §§29-31 se situe en dehors du cadre de la théorie. En effet, les élucidations qui ne visent aucune analogie – étant seulement vouées à exprimer leur sens – ne sont pas davantage en mesure d'offrir de garantie absolue, parce qu'elles sont toutes formulées dans la langue naturelle, héritant de ses nombreuses imperfections. Ainsi, même s'il était possible, comme Weiner le prétend à tort, de tirer de la préface l'idée que les §§29-31 sont élucidatoires, nous ne pourrions en déduire qu'aucun raisonnement authentique n'y est (imparfaitement) conduit.

Pour autant, nous ne souhaitons pas souscrire au raisonnement inverse, parfois avancé par les membres du courant sémantique. Régulièrement, Frege fit usage de certains termes qui suggèrent que ses paragraphes contiennent d'authentiques raisonnements. Voici la première réaction de Frege face à la contradiction :

> Il semble donc que la transformation de la généralité d'une identité en une identité de parcours-de-valeurs [...] n'est pas toujours permise, que ma loi V [...] est fausse et que mes explications de la section 31 ne suffisent pas à garantir [*sichern*] une référence à mes combinaisons de signes dans tous les cas. (Frege 1976, p. 213)

À proprement parler, seule une preuve est capable de *garantir* que chaque nom possède une référence. Si Frege avait dénié toute légitimité à la sémantique – conçue comme science –, comment aurait-il pu qualifier ainsi le travail du §31 ? Heck (2012, p. 128) avance un argument de cet acabit. Celui-ci n'est cependant pas convaincant. En effet, même si le "fait" que tout nom possède une référence n'était *stricto sensu* ni exprimable ni prouvable, il ne serait peut-être pas impossible de s'en *convaincre* à travers des élucidations minutieusement choisies. Peut-être une analogie adaptée est-elle en mesure de dévoiler dans ce cadre ce que d'autres parviennent à manifester dans celui des catégories ontologiques. Quoi qu'il en soit, il est imprudent d'extrapoler sur la base des termes utilisés ici par Frege, car il est resté silencieux sur ces questions. Et pour cause : il échoua à faire correctement émerger le problème du non-sens issu des différentes catégories logiques et ontologiques. Nous ne pouvons donc pas nous fier à la manière dont il

remarques incidentes liées à ce problème dans le cours d'autres développements. Par exemple, il n'aurait pas pu, au moment d'indiquer la référence de '$\xi \frown \zeta$', expliquer que celle-ci était indifférente à la justesse des preuves à venir, car son existence avait déjà été établie à travers un raisonnement général. Frege mêlait fréquemment, au moment d'introduire un signe, une loi ou une règle, les indications concernant son rôle dans les démonstrations, son contenu, ou encore sa légitimité. Voilà une autre particularité qui complique la lecture de son ouvrage. Aujourd'hui, l'exposé d'un système logique sépare la donnée de la syntaxe, de la sémantique et des métathéorèmes. Mais, à son époque, une telle présentation systématique aurait à coup sûr entravé davantage la réception de son ouvrage. Frege ne pouvait exiger du lecteur qu'il comprenne entièrement son difficile appareil linguistique avant d'en déceler l'intérêt. Il entreprit donc de mener de front ces divers objectifs. Si, tout au long de la première partie, il mit aussi en exergue la rigueur de sa démarche, il conseilla de se concentrer d'abord sur l'apprentissage du système et la compréhension du projet.

qualifiait la nature de ces sections. Au contraire, nous devons déduire cette nature à partir de ses propres thèses, et notamment des conséquences qu'il fut incapable de tirer.

Cette idée dicte l'angle sous lequel examiner la question de la sémantique. En effet, les considérations ci-dessus ont révélé les confusions dont Frege fut responsable en évoquant et discutant les élucidations. S'il parvint – maladroitement et différemment d'un texte à l'autre – à soulever certaines difficultés liées au nom 'est une fonction', il y répondit de la même manière qu'à la question des noms primitifs. Il manqua ainsi totalement les subtilités dont sa propre ontologie enrichissait la notion d'élucidation. Néanmoins, à travers les problèmes que les élucidations, faute de résoudre à coup sûr, permettent de surmonter, nous pouvons entrevoir une tâche systématique plus générale à laquelle, s'il avait perçu ces subtilités, il les aurait volontiers soumises. Celle-ci fut d'ailleurs suggérée à quelques occasions, notamment lorsqu'il expliqua :

> Mais tout ceci précède la construction d'un système et ne lui appartient pas en propre. En construisant un système il faut partir du principe que les mots ont une référence déterminée et que nous savons en quoi elle consiste. On peut donc, à ce stade, laisser les élucidations de côté et se concentrer sur la construction du système. (Frege 1914, p. 224 / 246)

Ou encore :

> Il faut reléguer cela à la propédeutique. Ça n'a pas sa place au sein du système de la science ; dans ce dernier, aucune conclusion n'est basée dessus. L'objectif des élucidations est pragmatique, et lorsqu'il est atteint, nous devons nous estimer satisfaits. (Frege 1906d, p. 288)

Bien sûr, Frege s'intéressait ici à un usage précis des élucidations – prodiguer un contenu aux noms primitifs d'un langage afin de s'assurer que tous les noms en disposent –, mais son propos est général : *les élucidations constituent tout ce qui doit être formulé antérieurement et parallèlement à la construction et à l'exploitation d'un système idéal pour une quelconque science*, autrement dit tout ce qui est essentiel pour s'entendre sur le fonctionnement, se convaincre du bien-fondé, et progresser dans l'utilisation d'un tel système. Or, dans les *Grundgesetze*, Frege escomptait démontrer les lois fondamentales de l'arithmétique et de l'analyse au sein d'un système logique idéal [129]. Il lui était ainsi nécessaire de construire et d'exploiter ce système, et toutes les remarques périphériques étaient précisément destinées à guider le lecteur à travers cette entreprise. Elles remplissent donc exactement le rôle des élucidations.

Suivant cette idée, ces dernières constituent, dans les *Grundgesetze*, *tout* ce qui n'est pas rédigé dans la langue idéographique [130]. Certes, Frege leur opposa ce qu'il nomma 'l'exposition du système'. Mais il faut comprendre qu'initialement, le problème des élucidations n'était pas le sien. Il se concentra sur certains bénéfices de l'activité élucidatoire parce que des désaccords – par exemple avec Hilbert ou Kerry – l'y ont poussé. Cependant, il n'entendait aucunement épuiser la totalité des objectifs qu'elles permettent d'atteindre à travers ces exemples, et ne se confronta pas sérieusement à la question. Entraîné dans ces polémiques, il vit la cause des erreurs de ses adversaires dans leur incapacité à tenir compte de ce qu'il nommait 'la simplicité logique'. Néanmoins, il réunit sous ce qualificatif des choses qui se tenaient pourtant à une distance

129. Lorsque nous parlons d'*un* système logique, nous ne suggérons évidemment pas que Frege reconnaissait *plusieurs* logiques. Nous tenons seulement compte du fait que plusieurs systèmes distincts sont en mesure de permettre le développement de *la* science logique. Frege le reconnut lui-même, en indiquant que son choix spécifique des règles de l'Idéographie avait été guidé par certaines considérations pragmatiques, et que d'autres conviendraient tout autant.

130. La quasi-totalité du premier chapitre, à l'exception des courtes démonstrations proposées en dernière section, est donc entièrement constituée d'élucidations.

considérable les unes des autres. S'il avait approfondi son enquête, il aurait réalisé que les notions de fonction et d'objet échappaient par nature à toute tentative de conceptualisation, et que le lien entre vérité et jugement n'était pas limité au sens du prédicat 'est vrai'. Il aurait alors renoncé à rapprocher le problème posé par ces expressions de celui, ayant trait aux noms primitifs de son langage, de la simplicité logique. Suivant l'intuition qui le conduisit à parler d'objectif pragmatique et de propédeutique, il aurait pu circonscrire plus précisément le rôle général des élucidations : mettre en ordre ce qui doit l'être afin d'inscrire le développement scientifique dans un cadre idéal. Sur ce point précis, nous rejoignons donc Weiner. Bien que Frege fut souvent confus lorsqu'il proposa des exemples d'élucidations, il visait généralement l'activité pré- ou para-scientifique exigée par la mise-en-œuvre de l'environnement adéquat aux sciences. Néanmoins, cela va s'en dire à ce stade de notre recherche, c'est de ce point d'accord que nous tirons nos objections à ses conclusions, et plus généralement à celles du clan antisémantique. Il est temps de faire le point sur cette question, en articulant correctement les réponses que nous avons apportées lors de cette section.

3.2.3.8 Synthèse

Au début de ce chapitre, nous avons promis de reconstituer les arguments fondamentaux du clan antisémantique souvent noyés dans des formules répétitives, voire autoritaires, ou ramenés abruptement à l'universalisme de Frege. Nous les avons divisés selon deux genres différents : ceux qui jouent contre la légitimité d'une sémantique prise dans le cadre fregéen, et ceux qui, admettant la possibilité d'une telle science, creusent le fossé entre le rôle qu'elle tiendrait et celui que nous conférons à nos sémantiques contemporaines. La section qui s'achève fut dédiée à l'examen de la première famille d'arguments.

Tout langage pour une théorie sémantique devrait, chez Frege, intégrer des noms pour des relations qui attachent les expressions de chaque type à leurs référence. Ces noms constitueraient collectivement l'équivalent du prédicat de vérité tarskien, permettant de décrire les circonstances dans lesquelles un énoncé est vrai relativement à la référence de ses constituants. Une partie du clan antisémantique conteste l'existence même de ces relations. C'est ainsi qu'ils entendent s'opposer à la constitution d'une science qui, à n'en pas douter, reposerait entièrement sur elles. Cette conclusion est parfois tirée à partir de la hiérarchie absolue qui structure les catégories ontologiques – notamment chez Weiner – parfois à partir de la conception fregéenne du jugement – comme chez Ricketts. Dans tous les cas, elle s'appuie sur l'idée que Frege sollicitait des élucidations dénuées de sens pour exposer ce qui ne peut s'exprimer. En sections 3.2.3.5 et 3.2.3.6, nous avons affiné cette idée afin (et avant) de nous opposer à la manière dont Weiner et Ricketts prétendent l'exploiter. Nous avons vu qu'aucun des deux chemins dans lesquels ils s'engagent n'aboutit finalement à exclure les relations de *référence* du monde de Frege. Nous sommes ainsi désormais en mesure d'affirmer que rien, chez celui-ci, ne s'oppose à la constitution d'une sémantique qui s'appuie sur ces relations, et en position d'étudier la forme qu'une telle science pourrait épouser.

Mais les développements de la section 3.2.3.7 permettent de répondre à une autre affirmation des compagnons d'Hintikka. Celle-ci possède une dimension plus historique, moins philosophique, mais tout aussi essentielle à notre recherche. Nous avons dit que le débat, qu'il concerne la possibilité ou le statut d'une sémantique fregéenne, s'articulait souvent autour de l'étude d'extraits fondamentaux des *Grundgesetze* qui semblent contenir des raisonnements sémantiques. Les deux camps en proposent des interprétations opposées. Celui de Heck y voit bel et bien la mise en œuvre informelle de notions proprement sémantiques. Tandis que celui de Ricketts y lit des images, des analogies, des indications qui visent à guider le lecteur vers ce qui échappe *de jure*

au domaine de la théorie. Sa ligne de défense consiste en partie à soutenir que de tels raisonnements s'appuieraient sur des concepts – les relations de référence – qui sont absents de l'univers fregéen. Nous avons examiné et rejeté cette hypothèse. Cependant Weiner et ses compagnons ne se contentent pas de contester la légitimité d'une sémantique, ils affirment que Frege aboutit lui-même à cette conclusion, *i.e.* qu'il a sciemment écarté du royaume de la théorie ses remarques d'ordre sémantique, et ne pouvait donc pas avoir les intentions que Heck et d'autres lui prêtent. Nous pensons avoir réuni ce qui devait l'être pour abattre aussi ce versant de leur plaidoyer. Soyons clairs : nous convenons parfaitement que la question du régime auquel ces remarques étaient soumises – celui de la théorie ou des images-analogies – faisait face à Frege, et qu'il aurait dû s'y confronter. Mais nous croyons qu'il n'a pas cerné la teneur de l'interrogation qui se présentait à lui, *i.e.* qu'il a purement et simplement manqué le problème. C'est ce que révèlent les nombreuses confusions dont il fut responsable lorsqu'il aborda les paradoxes, ou encore lorsqu'il s'intéressa aux notions d'élucidation et de non-sens. Nous ne disons pas encore que Frege s'est vraiment employé à construire et exploiter (en allemand) l'ébauche d'une théorie sémantique. Nous mènerons en section 3.3 la comparaison entre ce qu'il s'est effectivement attaché à accomplir et ce à quoi une sémantique conforme à ses conceptions pourrait ressembler. À cet égard, nous nous demanderons bien sûr si le contenu de ces passages doit être lu comme théorique ou comme imagé. Mais, et c'est là notre point, *cette question doit se passer de ses appréciations.* Car malgré toutes ses remarques sur les élucidations, Frege en a manqué la substance véritable.

Voyons comment nos diverses considérations permettent d'aboutir à ce constat. Considérons deux exemples paradigmatiques. Dans les §§29-31, Frege espérait établir "que [ses] huit noms primitifs possèdent une référence, et ainsi qu'il en va de même pour tous les noms correctement formés à partir d'eux" (p. 50). Ceci semble être la conclusion d'une démonstration sémantique. Pourtant, au cours de son développement, il employa des formules telles que "'$\mathfrak{a}$ $\Phi(\mathfrak{a})$' réfère à quelque chose" (p. 49). De même, en introduisant ses noms primitifs, il s'autorisa des expressions comme "la fonction $\Phi(\xi)$" (p. 12). Voilà justement le genre de noms dont il s'échina à déconseiller l'usage, prétendant qu'ils référaient à autre chose que ce qu'ils visaient. Il est tentant d'en déduire, aux côtés du courant antisémantique, que ces passages n'avaient aucune vocation théorique à ses yeux : non seulement il est impossible de *jamais* spécifier proprement le sens des noms primitifs d'un langage, mais encore aucun *raisonnement* sémantique n'est envisageable. Tout cela passe par des images, des indications, et échappe à l'expression *stricto sensu.*

En vérité, une telle réponse relève d'une mauvaise appréciation des commentaires auxquels Frege procéda concernant ce type de formulation. Au cours de cette section, nous avons relevé deux importantes confusions dont il fut responsable. La première concerne la notion de simplicité logique. À travers cette dernière, il identifia trois problèmes totalement indépendants : celui du point de départ pour les définitions, celui de la hiérarchie des catégories et celui du lien entre vérité et jugement. Il expliqua qu'il fallait inviter le lecteur à mettre sous le terme de 'fonction' ce qu'on voulait lui faire entendre car, son sens étant logiquement simple, il ne pouvait être décomposé ni donc défini. Cette explication manque totalement la difficulté à laquelle le mot 'fonction' nous confronte. Il n'est pas question de lui attribuer un sens simple, il est question de lui en octroyer un qui, de toute manière, ne pourra nous conduire à exprimer les différences entre catégories ontologiques. Frege nota le problème *à un seul endroit*, en remarquant qu'on ne pouvait proprement dire qu'une fonction n'était pas un objet. Néanmoins, il n'en tira pas la conclusion qui s'imposait, espérant malgré tout conférer dans une langue idéale le sens adéquat à ce terme. Or il n'existe aucun sens permettant de tracer des limites entre les catégories ontologiques, bien que ce soit ce à quoi un tel terme est destiné. Frege ne cerna donc jamais la manière dont les élucidations devaient dévoiler l'existence des différentes catégories logiques et ontologiques, et ainsi le fonctionnement du sens : à travers une analogie réalisée en conférant des sens contenant

le même type d'insaturation aux termes 'objet' et 'fonction', *i.e.* en aplatissant les catégories afin de proposer une image qui, sur le plan des objets, reflète ce qui se passe au niveau catégorial. C'est cette même analogie que nous venons d'exploiter dans notre dernière phrase. Il est vrai que Frege fit quelques pas dans cette direction [131], et il est probable qu'une certaine intuition l'y ait poussé. Mais elle ne le mena jamais à destination, car il s'obstina à prétendre que ces élucidations étaient vouées à conférer un sens logiquement simple aux mots en question, un sens qui leur convenait totalement et qui serait adéquatement exprimé dans une langue idéale.

La seconde confusion consista à attribuer aux défauts de la langue naturelle des problèmes qui, cette fois encore, étaient dûs à la hiérarchie de catégories. Il est vrai qu'il décréta que l'expression 'le concept *cheval*' manquait sa pensée. Cependant, il n'estimait pas qu'elle permettait de suggérer ce qui ne pouvait s'exprimer, mais qu'elle suggérait un sens qui, dans les pensées auxquelles elle prenait part, jouait un rôle parallèle à celui qu'elle exprimait effectivement. Par ailleurs, Frege n'a pas suffisamment développé une telle idée, qui n'implique dans ce cadre aucune notion d'ineffable. Il aurait vu surgir ce problème s'il avait étendu cette idée jusqu'aux expressions 'est un objet', 'est un concept', etc. Or, à leur sujet,son argument d'arrière-fond était fondamentalement différent. Il ne croyait pas qu'elles visaient autre chose que ce qu'elles nommaient, mais qu'elles exprimaient imparfaitement leur sens. À ses yeux, seule la grammaire des langues vernaculaires était inadaptée. Celle-ci fut identifiée à tort comme responsable de tous les maux. Pourtant, la véritable difficulté qui touche les expressions incorporant les termes 'objet' et 'fonction' n'est pas due à la grammaire des langues naturelles mais à la grammaire logique elle-même. Nous la retrouverions intacte si, d'aventure, nous tentions d'intégrer ces noms à une langue idéale, quels que soient les types choisis [132].

Que conclure de ces deux confusions ? Jamais Frege ne perçut distinctement les limites du sens. Jamais il ne considéra que ce qui était manqué par telle expression était par nature manqué par *toute* expression, que ce qui était était visé, suggéré, indiqué était en soi inapte à l'expression. Jusqu'au bout, il se crut victime des langues naturelles, pas d'une insaisissable structure catégoriale. À aucun moment il ne manifesta la conviction qu'un raisonnement quelconque, qu'il soit ou non employé à des fins élucidatoires, échappait *de jure* au cadre de la théorie. Car il ne concevait pas l'activité élucidatoire comme échappant au domaine du sens, mais comme un tremplin, situé là où le sens est imparfaitement exprimé, vers là où il l'est idéalement, *i.e.* comme un travail pré-théorique destiné à l'établissement d'une langue idéal.

Attention, nous ne tenons pas coûte que coûte à affirmer que Frege maintint une position à la fois constante et cohérente, ni qu'il n'existe aucune trace dans ces textes du développement que nous avons mené au sujet des interdits catégoriaux. Ce travail nous fut dicté par ses propres thèses, et s'inspire de certaines de ses remarques. Il est plausible – voire probable – que son intuition sur ces sujets ait varié, et se soit parfois approchée de la réponse que nous avons apportée. Nous disons seulement qu'il échoua systématiquement à tirer les conclusions qui s'imposaient. Même lorsqu'il proposait un exemple qui semblait l'en prévenir, il sombrait dans l'un des deux pièges que nous venons de décrire. Finalement, la véritable difficulté qui menaçait la constitution d'une théorie sémantique – celle du non-sens – lui échappa jusqu'au bout. Même dans les textes tardifs, lorsqu'il questionna la spécificité du problème de la vérité, il n'en vint jamais à avancer des positions aussi radicales que celles que lui prêtent Ricketts – à affirmer que la vérité n'était pas une propriété – ou Weiner – à soutenir qu'aucune propriété ne liait les noms de fonctions à leurs références.

Il est vrai que l'expression 'non sens' apparut sous sa plume, mais seulement dans des

131. notamment en affirmant que l'expression 'la fonction $\Phi(\xi)$' référait au représentant de cette fonction sur le plan des objets, comme nous l'avons vu en détail dans la section 3.2.3.5.

132. Tout ceci fut expliqué en détail en section 3.2.3.5.

contextes inappropriés. Soit il attribuait ce défaut aux termes mal formés de la langue naturelle en incriminant leur seule structure grammaticale défectueuse. Il manquait ainsi le mal plus profond qui était tapi derrière. Soit il y voyait un moyen imparfait mais essentiel de conférer à un terme un sens logiquement simple. Lorsqu'il expliqua que toute tentative de définition du mot 'fonction' "aboutiss[ait] à un non-sens", il ne signalait pas que cette notion échappait par nature à la conceptualisation, il informait seulement que "seul ce qui a conceptuellement été analysé peut être reconstitué à partir des parties tirées de l'analyse. Mais ce qui est simple ne peut pas être analysé, donc défini". Alors comment attribuer un sens logiquement simple à une expression ? De la manière suivante :

> Nous ne pouvons reconnaître les phrases contenant un signe vide, et dont les autres constituants sont connus, comme des définitions. En revanche, de telles phrases peuvent avoir un rôle d'élucidation, en ce qu'elles laissent deviner ce qu'il faut entendre par le signe ou le terme en question. (Frege 1914, p. 232 / 255)

Les phrases qui visent à attribuer un sens au nouveau signe *contiennent* ce dernier. Rigoureusement, elles sont donc dénuées de sens, bien qu'elles permettent au locuteur de guider vers ce qu'il souhaite mettre derrière le terme.

En définitive, Frege ne parvint pas à cerner le problème fondamental attaché aux termes 'objet' et 'fonction'. Celui-ci ne lui apparut ni lorsqu'il évoqua le non-sens, ni lorsqu'il s'attaqua aux paradoxes, ni lorsqu'il discuta la simplicité logique. Ses conclusions restèrent invariablement braquées sur les défauts de la langue naturelle, bien que certaines remarques auraient pu le guider ailleurs. À ses yeux, le vice des langues naturelles n'était pas d'exprimer des pensées différentes d'un langage idéal, plus imparfaites ou défectueuses. Il n'a jamais évoqué un écart qualitatif entre pensées. Son vice consistait à exprimer *imparfaitement* ces dernières. En ne respectant pas les catégories logiques dans leur structure, les langues vernaculaires entravent la qualité de notre *saisie* des pensées, *i.e.* notre capacité à en détecter la composition et, par conséquent, à envisager les rapports logiques qui les lient. Par ailleurs, les références des termes élémentaires – notamment des noms de fonctions – qui y figurent ne sont pas suffisamment claires, si bien que certaines expressions complexes s'en trouvent dépourvues. L'élaboration d'un langage idéal était destinée à remédier à ces défauts, se laissant dicter sa structure par la manière dont les sens se constituent, et respectant le principe de complétude pour les noms primitifs de fonctions. Néanmoins, la construction de cette langue, incluant la spécification de son contenu, ne pouvait être réalisée qu'avec les moyens à disposition, autrement dit à l'aide des langages naturels. Frege n'a jamais laissé entendre qu'il était impossible de nommer les catégories logiques [133] ou d'exprimer qu'un nom possédait telle référence. Mais ces renseignements devaient être fournis dans un lieu où, précisément, les distinctions catégoriales se distinguaient mal. Ses conclusions furent très différentes de celles de Wittgenstein. Il ne craignait pas que certaines informations échappent à l'emprise du sens, il redoutait que des pensées concernant le sens soient véhiculées à travers un vecteur inapte à exposer clairement ce dernier. En particulier, il lui fallait rendre compte des différentes catégories logiques en parlant une langue qui tendait à les dissimuler. C'est pourquoi il en appelait à "une rencontre des esprits". Il était nécessaire que son lecteur, confronté à des explications concernant la distinction entre objets et fonctions, soit capable de percevoir ces catégories sous l'habit inapproprié de l'allemand. Si, au contraire, il faisait montre d'une saisie confuse des pensées et de leurs compositions, alors Frege pouvait l'aider à travers des signes, des

133. Dans *un* texte, il nota qu'il était impossible de décrire les distinctions entre catégories, parce qu'on ne pouvait proprement dire qu'un objet n'était pas une fonction. Mais il ne renonça pas pour autant à conférer à ces termes les sens qui leur revenait. Il ne comprit pas ce qu'ils présentaient, au-delà de leur version allemande, d'intrinsèquement défaillant.

ruses linguistiques propres à le guider. Jamais, néanmoins, il ne pouvait être totalement assuré que la clarté avait jailli du chaos structurel des langues naturelles. Mais cette fatalité n'est pas celle à laquelle Wittgenstein accula son lecteur tout au long de son ouvrage. Frege ne prêtait pas au sens des (pseudo)-propriétés qui ne se racontaient pas, il constatait qu'il ne pouvait que raconter ces propriétés là où elles se voyaient mal. Frege, donc, manqua l'obstacle qui se dressait véritablement devant lui.

Osons lui prêter les mots suivants, qu'il aurait pu formuler pour justifier l'emploi, dans son introduction des termes primitifs, d'expressions dont il déconseillait pourtant l'usage [134] :

> Si je disposais *en amont* d'une *autre* langue idéale, je pourrais en toute rigueur *définir* mes signes atomiques grâce aux noms de ce second langage. Malheureusement, je ne peux m'appuyer que sur les langues vernaculaires. Il n'est pas question d'identifier le sens d'un signe primitif de l'idéographie à celui d'une expression allemande, toujours fluctuant – selon les contextes – et imprécis – ne respectant pas le principe de complétude. Par exemple, je ne peux définir mon signe pour l'implication *via* les termes 'impliquer' ou 'si ... alors ...', qui possèdent ces défauts.
>
> Je suis donc contraint d'utiliser directement mes signes au sein de phrases allemandes pour que le lecteur devine par lui-même le sens que je désire y attacher. Ces phrases contiennent, outre le terme en jeu, des mots de la langue naturelle qui héritent des problèmes de celle-ci. La difficulté n'est donc pas de faire deviner le sens d'un terme en le plaçant au sein de phrases dont tous les autres constituants sont dotés de sens, mais que, dans cette situation, les constituants en question ont un sens tout à fait imprécis et, parfois, une structure inadéquate. Je dois construire ma langue idéale là où ce à quoi elle se conforme – ce pourquoi elle est nécessaire – est difficile à cerner. Notamment, il est essentiel de distinguer la hiérarchie de catégories ontologiques pour comprendre correctement le rôle du principe de complétude, *i.e.* l'exigence de spécifier la valeur d'une fonction d'un certain *type* en tout *type* compatible. Bien sûr, si je m'exprimais dans une langue idéale suffisamment riche, alors je disposerais d'un équivalent grammaticalement correct aux termes 'fonction' et 'objet'. Leurs contenus seraient ainsi adaptés et je pourrais remplacer les tournures imprécises telles que 'la fonction $\Phi(\xi)$' par des expressions adéquates. Cependant, si je disposais d'une telle langue, il ne me serait pas même nécessaire de recourir à cette stratégie. Je pourrais proprement définir mes signes primitifs en leur conférant le sens de certains noms de cette langue. Mon problème est justement que je ne dispose à l'heure actuelle de rien de tel.

De même, il aurait expliqué ainsi l'usage d'expressions problématiques dans le courant de ses démonstrations sémantiques :

> Mes §§29-31 ont bien vocation à conduire un raisonnement à son terme. Mais cet objectif n'est, en toute rigueur, ni atteint ni accessible à ce stade. En effet, je suis malheureusement contraint, en attente du langage parfait que je cherche à constituer,

134. L'introduction des termes primitifs de l'Idéographie réalisée dans les *Grundgesetze* est symptomatique de toute cette affaire. À l'unisson, le clan antisémantique reprend les slogans de Frege : il ne peut s'agir de définitions, tout cela n'est qu'indications, élucidations, vagues gestes impuissants dans une direction précise. Leurs adversaires s'emparent du texte, et brandissent des passages dont la rigueur et le systématique feraient rougir les logiciens contemporains. Après tout, qu'y a-t-il de vague dans la stipulation que la référence de '$\frown^{\mathfrak{a}} \varphi(\mathfrak{a})$' associe le Vrai aux fonctions qui subsument tous les objets, le Faux aux autres ? Nous apporterons une réponse précise dans la section 3.3.8, lorsqu'il s'agira pour nous d'étudier en détail ces passages. Nous y trouverons la confirmation de nos présentes considérations

> d'utiliser un véhicule inapproprié aux pensées. Je me trouve ainsi réduit à recourir à des formulations qui trahissent mes intentions, qui sont imprécises ou dénuées de sens. Le lecteur doit prendre sur lui de *deviner* le raisonnement qui se tapit derrière ces énoncés.

Bien sûr, cette réponse n'aurait pas manqué de soulever des objections qui auraient pointé la véritable difficulté dissimulée derrière les termes 'fonction' et 'objet', dont aucune langue idéale ne peut nous délivrer. *Mais Frege n'avait pas vu ces objections.* Rien dans ses textes ne confirme l'idée qu'il ait dénié toute légitimité théorique au contenu des §§29-31. En revanche, il ne voyait pas l'*intérêt* de développer ce contenu dans un système idéal, car il visait exclusivement à assurer le bien-fondé d'un tel système. Finalement, Frege manqua la distinction entre ce qui relevait des insaisissables catégories ontologiques et ce qui découlait de la nécessité d'un point de départ. Il crut à tort que le premier problème était pris dans le second qui, pour sa part, provenait exclusivement des défauts des langues vernaculaires. C'est donc à cette seule difficulté qu'il se crut confronté pour enclencher le processus de rigorisation des sciences. Pour le dire différemment, il ne s'est jamais pensé condamné à viser "quelque chose" qui échappait par nature au sens. À ses yeux, ce n'était pas le monde qui échappait fatalement à nos tirs, mais l'imprécision du viseur qui nous faisaient le manquer. Le problème étant que, pour corriger ce viseur, il fallait tirer juste.

Sa discussion avec Hilbert contient un signe très clair de ce que nous avançons. Frege décrivit la forme que devait prendre une démonstration d'indépendance logique d'une pensée vis-à-vis d'un groupe d'autres pensées. Il commença par en poser le cadre :

> Imaginons un vocabulaire, non pas, cependant, dans lequel les mots d'un langage sont mis en correspondance avec ceux d'un autre langage, mais où des deux côtés se tiennent les mots d'un même langage mais ayant des sens différents. [...] Nous pouvons dire en toute généralité que chaque mot de gauche a un sens déterminé – au moins nous le supposons – et qu'il en vaut de même pour chaque mot de droite. À présent, au moyen de cette opposition, les sens des mots de gauche sont aussi corrélés aux sens des mots de droite. Choisissons une corrélation bijective, de telle sorte que la même chose ne soit jamais exprimée deux fois à gauche ou à droite. Nous pouvons maintenant traduire, non pas, cependant, d'un langage dans un autre, en conservant le sens, mais au sein d'un même langage, en modifiant le sens. (Frege 1906d, p. 426)

Dans nos points de suspension, Frege exigea que les deux sens attribués à un même mot appartinssent à la même catégorie logique. Ici, il n'envisagea *rien de moins qu'un processus d'interprétations.* Son *langage-objet* se verrait attribuer deux différentes *interprétations.* Dans la suite du texte, il posa une question que nous pouvons formuler dans les termes contemporains suivants : supposons deux interprétations quelconques d'un langage, si une suite d'énoncés est une représentation d'une déduction logique selon la première interprétation, l'est-elle aussi selon la seconde ? Frege répondit par l'affirmative à condition qu'en faisant varier l'interprétation, nous ne modifiions aucun contenu *logique.* Il en vint ensuite aux preuves d'indépendance :

> Demandons-nous à présent si une pensée G est dépendante d'un groupe de pensée Ω. Nous pouvons apporter une réponse négative à cette question si, en accord avec notre vocabulaire, aux pensées d'un groupe Ω correspond un groupe de pensées vraies Ω', tandis qu'à la pensée G correspond une pensée fausse G'. Car si G était dépendante de Ω alors, puisque les pensées de Ω' sont vraies, G' serait aussi dépendante de Ω', et par conséquent G' serait vraie. (Frege 1906d, p. 428)

Frege développa ici un raisonnement proprement sémantique. Néanmoins, celui-ci n'était plus voué à justifier l'utilisation d'un langage (ou d'un système) idéal, il visait à démontrer

l'indépendance de pensées. Son propos n'était donc pas élucidatoire. Quelques paragraphes plus tôt, Frege recourait à l'avertissement suivant :

> Avant toute chose, notons qu'à travers ces questions, nous pénétrons dans un domaine étranger aux mathématiques. Car si comme toute discipline, le développement des mathématiques procède aussi à travers des pensées, les pensées ne sont pas elles-mêmes l'objet de ses investigations. Même l'indépendance d'une pensée vis-à-vis d'autres pensées est tout à fait distincte des relations étudiées en mathématiques. Nous devons donc supposer que ce nouveau domaine a ses propres lois fondamentales essentielles aux preuves qui y sont conduites, comme les lois fondamentales de la géométrie le sont aux preuves conduites en géométrie, et que ces vérités fondamentales spécifiques sont nécessaires pour prouver l'indépendance d'une pensée vis-à-vis d'un groupe de pensées. (Frege 1906d, p. 425 - 426)

Ce "nouveau domaine" n'est autre que la sémantique, et ses "propres lois fondamentales essentielles aux preuves qui y sont conduites" contiennent les axiomes qui expriment la référence – la valeur de vérité – d'un énoncé en fonction de celles de ses constituants. En effet, non seulement le raisonnement de Frege exige de faire varier le sens des noms du langage, mais il impose aussi de pouvoir *exprimer* qu'une pensée est vraie ou fausse, et de déterminer cette valeur de vérité relativement aux références déterminées par ses constituants. Il requiert donc purement et simplement la donnée de l'équivalent fregéen du prédicat de vérité, *i.e.* de noms qui réfèrent aux relations qui attachent les noms de chaque type à leurs références.

Si Frege avait considéré que les développements sémantiques des *Grundgesetze* échappaient par nature au royaume de la théorie car il n'existait aucune relation qui lie les noms d'un certain type à leurs références, il n'aurait pas manqué de critiquer *directement* la constitution d'une théorie sémantique qui s'appuyait dessus. Au contraire, il se contenta d'attaquer la manière dont Hilbert exploitait une telle théorie, et d'en *proposer* une autre utilisation. Ricketts reconnaît que cet extrait contredit sa lecture, mais il apporte la réponse suivante :

> La troisième partie des "Fondations de la géométrie" se démarque des autres textes de Frege. Ici nous trouvons des raisonnements métalogiques explicites qui utilisent un prédicat de vérité dans une montée sémantique. Ces raisonnements sont présentés comme le développement d'une nouvelle science : ils ne peuvent être relégués à la propédeutique, aux élucidations pré-scientifiques. J'ai soutenu que Frege n'avait pas adopté cette nouvelle science, qu'il demeurait sceptique à son endroit. [...] À mes yeux, Frege explorait des idées qui lui étaient inconnues. La clarté qu'il atteignit dans cette exploration métalogique est impressionnante. Cette même clarté nous pousse à remarquer qu'il n'est jamais retourné à la sémantique de l'article de 1906 dans ses textes postérieurs traitant de logique et de pensées. Je crois que ces idées lui apparurent comme étant une impasse. (Ricketts 1997, pp. 184-185)

Cette conclusion intervient après une analyse pointue de la théorie sémantique esquissée par Frege. Mais contrairement à ce qu'il prétend, Ricketts ne fournit aucune raison tangible de croire aux réserves de celui-ci vis-à-vis de cette théorie. Le seul argument invoqué est contenu dans le passage ci-dessus : l'important chantier de la troisième partie des "Fondations de la géométrie" fut totalement laissé à l'abandon par la suite [135]. Il existe cependant une autre explication, qui n'atteste aucunement d'un scepticisme cultivé à son égard. En effet, Frege critiquait dans ce texte la

135. En vérité, Ricketts se base aussi sur un indice textuel. Lorsque, plus tard, Frege commenta l'article que Jourdain rédigeait sur son travail, il précisa que "la non-démontrabilité de l'axiome des parallèles [*i.e.* son indépendance vis-à-vis des autres axiomes] ne peut être prouvée" (Frege 1976, p. 119). Ricketts y lit une infirmation de ce qu'il avait soutenu dans la troisième partie du texte de 1906. Dans ce contexte, néanmoins, il est bien plus probable que

manière dont Hilbert, en galvaudant les termes 'axiomes' et 'définition', entendait tirer certaines conclusion à partir de démonstrations sémantiques de cohérence. Il s'attacha donc à rectifier la vision que son contemporain entretenait de la sémantique. Il procéda d'abord négativement, en l'attaquant sur certains points précis, puis positivement, en proposant une alternative tenant compte de ces critiques, afin d'établir ce qu'une telle science était à même d'accomplir – prouver l'indépendance de pensées –, et ce qu'elle était incapable de réaliser, n'en déplaise à Hilbert. La troisième partie de ce texte constitue le simple prolongement ou, pourrait-on dire, l'aboutissement de sa critique. Jamais il n'eut l'intention d'exploiter ainsi cette science dans ses propres travaux. Au contraire, tous ses commentaires annexes confirment qu'elle en était extrêmement éloignée. Et pour cause : la sémantique proposée dans cette partie permettait d'établir l'indépendance de pensées *extra-logiques*, or son objectif consistait à mesurer la portée des contenus purement logiques [136].

Il est vrai que Frege n'a jamais employé la sémantique à des fins non élucidatoire. Mais ce n'est absolument pas car il lui déniait le statut de science. Il envisagea cette alternative à l'occasion du conflit qui l'opposait à Hilbert, sans formuler la moindre objection. À ses yeux, la différence fondamentale entre les développements proposés ci-dessus et ceux des *Grundgesetze* ne se situe donc pas dans leur nature – il n'y a aucune raison que les uns contiennent d'authentiques raisonnements tandis que les autres en soient privés –, mais dans leur fonction. Il s'agit d'une conséquence du rôle joué par les premières remarques au sein du projet d'édification d'un système scientifique ou, pour le dire autrement, de l'étape à laquelle elles se situent. Frege escomptait délivrer les sciences du cadre laxiste des langues vernaculaires pour les soumettre à l'étreinte implacable d'un système idéal. Pour ce faire, certaines choses avaient besoin d'être dites, spécifiées et, parfois, démontrées en amont, *préalablement* à l'utilisation de ce système. À ses yeux, ces preuves et stipulations pourraient tout à fait être transportées dans ce dernier. Mais cette intégration ne serait envisageable qu'*après* leur tâche accomplie, une fois le système constitué. Leur objectif ne pouvait donc être rempli dans ce cadre, et celui-ci n'était d'aucune utilité. Ainsi, les développements des *Grundgesetze* constituent indéniablement des élucidations, non pas parce qu'ils visent à indiquer ce qui ne peut s'exprimer, mais parce qu'ils sont voués à accompagner l'élaboration du premier langage idéal. Cette tâche ne peut être réalisée qu'au moyen des outils défectueux que sont les langues vernaculaires.

Notre présente enquête nous conduit inéluctablement au constat suivant : il n'existe, dans les textes de Frege, aucune trace sérieuse de la conviction que certains développements, qu'ils soient ou non employés à des fins pré-théoriques, échappent *par nature* au cadre de la théorie. Ceci s'applique parfaitement aux considérations sémantiques qui peuplent les *Grundgesetze*. En

---

Frege critiquait *la manière* dont Hilbert et d'autres entendaient prouver cette indépendance, notamment à travers l'usage qu'ils faisaient du terme 'axiome', et non sa propre alternative, qui en était considérablement éloignée. D'ailleurs, il renvoya immédiatement Jourdain à l'article de 1906 – dans lequel il proposait une méthode pour démontrer l'indépendance de pensées – comme confirmation de sa remarque, sans le moindre avertissement. C'est donc la stratégie hilbertienne qui est ici visée, et non la sienne.

136. Il pourrait nous être rétorqué qu'à la fin de sa carrière, Frege avait abandonné le logicisme. Il situait la géométrie au fondement de l'arithmétique, et aurait pu exploiter cette théorie pour démontrer l'indépendance de certains axiomes géométriques afin de bâtir le système le plus efficient possible pour l'arithmétique. Ceci est correct, mais il est facile d'expliquer pourquoi il n'existe aucun signe dans ce sens. D'une part, ses recherches demeurèrent principalement concentrées sur la logique, même après son revirement. D'autre part, Frege n'a pas trouvé le temps de débuter la construction d'un autre système qui épousait ses nouvelles idées. Rien ne dit qu'il n'aurait pas envisagé cette possibilité s'il s'était pleinement consacré à cette tâche. À ses yeux, ces questions de sémantique étaient impropres à l'aider à résoudre des problèmes de logique. En revanche, il est possible qu'elles eussent été sollicitées au sortir de ce contexte. Les écrits dans lesquels ses nouvelles conceptions sont abordées contiennent trop peu d'informations pour qu'il soit possible de tirer une quelconque conclusion à ce sujet.

revanche, cela ne signifie pas qu'il n'existe aucune raison, nichée au fondement même de ses thèses, d'exclure ces considérations du royaume du sens. Mais si tel est le cas, Frege ne s'en est pas rendu compte. Même lorsque le problème était ailleurs, il persistait à accabler les langues naturelles. Les défenseurs de la lecture antisémantique citent inlassablement les mêmes passages, dans lesquels il indiqua furtivement une autre direction, qu'il n'a pourtant *jamais* suivie jusqu'au bout.

Si son avis sur la question corrobore donc l'interprétation du courant sémantique, Frege commit néanmoins diverses erreurs à ce sujet. Il fut incapable de cerner les murailles imprenables que sa propre ontologie dressaient devant l'élaboration d'une théorie des catégories. Si cette ontologie ne s'oppose pas à la constitution d'une sémantique, elle la soumet à un cadre extrêmement serré. Aucune fonction associant un nom incomplet à sa référence ne peuple le monde de Frege. Seules des relations binaires qui lient entre elles ces entités sont à notre disposition. Il n'est pas certain que le champ des raisonnements possibles dans ce contexte couvre le travail réalisé dans les §§29-31, *contrairement à ce que Frege croyait*. Autrement dit, la discussion entre les deux camps ne peut – et ne doit – prendre la forme d'un débat exégétique. Notre enquête doit être plongée à la source de ses idées, mais émancipée de ses propres commentaires. Au regard de la littérature secondaire, ce point nous semble d'une importance considérable. Des arguments sont souvent développés sur la seule base de la présence d'un terme particulier dans tel ou tel passage. Mais Frege n'a pas su distinguer la place que devait tenir le couple théorie-non-sens dans ses thèses. Notre objectif consiste donc à cerner ses effets sur la sémantique, sans nous préoccuper de son avis sur la question [137].

C'est dans cette perspective que nous allons, armés de nos conclusions, examiner le contenu des passages-clefs des *Grundgesetze*. Il nous faut néanmoins triompher d'une dernière épreuve avant de nous lancer, et nous confronter au deuxième argument du clan de Ricketts. Cette fois, il a trait au *statut* de la sémantique. À travers cette discipline, certains commentateurs estiment que nous démontrons divers théorèmes grâce auxquels nous entendons *justifier* telle ou telle loi logique. Mais le rôle normatif privilégié que Frege attribuait à la logique foule aux pieds une telle entreprise. Selon lui, il s'agit d'une science générale dont les principes sont à la fois exploités et respectés par n'importe quel raisonnement correct. Aucune preuve (d'ordre sémantique ou non) ne peut donc prétendre asseoir le bien-fondé de ces principes sans sombrer dans la circularité. Cette seconde objection se dresse à présent sur notre route ; et nous voulons l'affronter afin de comprendre le *rôle* que la sémantique pourrait remplir dans une perspective fregéenne.

3.2.4 L'Idéographie : un système idéal

3.2.4.1 Le problème de la justification

L'ambition de Frege ne se limitait pas à produire une grammaire idéale pour l'expression des énoncés scientifiques, elle allait jusqu'à bâtir un *système* adéquat au développement des sciences. Il fallait donc que n'importe quelle discipline soit en principe capable de se déployer dans l'Idéographie, après ajout de sa matière propre. La persistance du vocabulaire initial de ce langage lors de son utilisation dans le cadre d'une autre science ne pose pas de problème particulier. Si le lexique logique n'est d'aucun usage pour cette science, il suffit de ne pas l'employer. Néanmoins, il en va différemment des règles du système qui pourraient conduire à des conclusions fausses si

137. Répétons que nous ne contestons ni n'appuyons la thèse de Geach, Weiner et d'autres, selon laquelle Frege aurait exercé une influence déterminante sur Wittgenstein vis-à-vis du couple théorie-non-sens. Cette question historique n'est pas la nôtre. Quoi que Wittgenstein ait vu au sein des conceptions de Frege, il est certain que ce couple y est présent, mais que Frege lui-même ne l'a pas aperçu correctement.

elles étaient appliquées à des énoncés d'une théorie particulière sans y être conformes.

Frege levait cette objection en adoptant une position radicale. À ses yeux, les lois et les règles de l'Idéographie sont transversales à toutes les théories scientifiques, elles *valent* pour n'importe laquelle de ces dernières. Plus encore, le vocabulaire de la logique, *i.e.* de l'idéographie, est utile à l'expression des énoncés de toute science. L'intégration d'une nouvelle discipline à l'Idéographie exige naturellement un enrichissement du langage et du système, *via* l'ajout de nouveaux symboles et de nouveaux axiomes, intégrant les premiers, décrivant les lois de cette discipline. Néanmoins, le vocabulaire, les règles et les lois initiales de l'Idéographie, loin de constituer un obstacle au développement de cette science, lui seront absolument essentiels. Selon Frege, ceci est lié à la *généralité* de la logique : cette dernière est valable dans tous les domaines, et toutes les sciences l'utilisent. Ainsi, l'Idéographie est adaptée au développement de *n'importe quelle* théorie scientifique, *modulo* un enrichissement du langage – *via* l'ajout de nouveaux noms –, et du système – *via* l'ajout de nouveaux axiomes. Ceci ne signifie pas qu'aucune science ne peut être développée à l'extérieur d'un langage logiquement parfait. Frege ne remettait pas en cause la validité de toutes les avancées scientifiques qui l'avaient précédé. Cela veut simplement dire qu'un discours ou une déduction proprement scientifique *peut* être implémenté dans un tel système, et notamment dans l'Idéographie potentiellement enrichie. Ce fait s'applique donc aussi à la sémantique, et c'est à ce titre que se pose la question de la justification : une science qui exposerait et fonderait le choix d'un système logique utiliserait les ressources d'un tel système, et serait elle-même susceptible de s'y déployer. Voilà la circularité que les membres du courant antisémantique ont à l'esprit. En formulant le problème, Ricketts ne dit pas autre chose :

> Parce que l'idéographie est le langage de la science la plus générale, c'est aussi un cadre adéquat à l'expression de toute vérité (scientifique) et de toute preuve dans n'importe quelle science. Frege envisage l'expansion de l'idéographie à travers l'introduction du vocabulaire requis pour exprimer les résultats et les hypothèses des sciences particulières.
>
> [...]
>
> Van Heijenoort et Dreben ont observé que Frege ne disposait d'aucun point de vue surplombant la logique permettant de l'étudier. Nous pouvons désormais voir l'origine de cette affirmation. D'authentiques explications consistent en des preuves (sans trous) au sein d'une science unifiée. Toute explication implique les principes de la logique. Ainsi la logique, science la plus générale, fournit le cadre qui embrasse toutes les sciences, à l'instar de la manière dont la chimie générale fournit un contexte pour la chimie organique, ou la géométrie pour la mécanique. Ainsi, la logique étant la plus générale, tel que Frege conçoit la justification et l'explication, aucune autre science ne peut jouer un rôle justificatif ou explicatif relativement à la logique. (Ricketts 1997, pp. 171-174)

Ricketts en appelle à la manière dont Frege "conçoit la justification et l'explication", et il est aisé de comprendre pourquoi. En effet, celui-ci a fréquemment soutenu qu'il n'existait aucun autre moyen, pour démontrer une vérité logique, que de la réduire à – la déduire de – une autre vérité logique. Observons le détail de son raisonnement :

> Les *axiomes* sont des vérités comme le sont les théorèmes, mais ce sont des vérités qui ne sont pas démontrées dans notre système, et qui n'ont pas besoin, du reste, de démonstration. Partant, il n'y a pas de faux axiomes, et nous ne pouvons reconnaître comme axiome une pensée, si nous avons des doutes sur sa vérité ; car de deux choses l'une : ou bien elle est fausse, et ce n'est donc pas un axiome, ou bien elle est certes vraie, mais a besoin d'une démonstration et n'est donc pas un axiome. Les vérités

> qui n'ont pas besoin de démonstration ne sont pas toutes des axiomes, car il peut se faire, malgré tout, que de telles vérités soient démontrées dans notre système. Qu'une vérité soit ou non un axiome dépend donc aussi du système, et il se peut qu'une vérité soit un axiome dans un système et pas dans un autre. [...] Ainsi n'est ce que relativement à un système particulier qu'on peut dire de quelque chose que c'est un axiome. (Frege 1914, pp. 221-222 / p. 244)

Nous retrouvons la dualité contenue dans la notion de simplicité logique, bien que Frege fut cette fois – dans le cas des axiomes – attentif à prévenir toute ambiguïté. Rappelons-nous [138] que, dans le premier contexte, il avait mêlé le problème du point de départ pour les définitions à celui de l'existence de constituants atomiques au sein des sens structurés. Ici, il prit soin de séparer les deux versants. D'un côté, l'écriture de dérivations exige de réunir des énoncés à partir desquels débuter ces dernières. L'enjeu est alors purement syntaxique. Mais il est essentiel que les pensées exprimées par ces énoncés soient vraies. Or Frege ne reconnaissait qu'un moyen de *démontrer* la vérité d'une pensée : la déduire d'autres pensées vraies dans le respect des règles logiques, autrement dit dériver un énoncé qui l'exprime *via* d'autres énoncés préalablement reconnus comme des théorèmes. Puisqu'il est nécessaire de disposer d'énoncés initiaux à partir desquels débuter les preuves, autrement dit d'énoncés dont la vérité (des sens) est reconnue *avant* d'entamer une quelconque démonstration dans le système, il s'ensuit qu'une autre voie doit être empruntée pour nous assurer de cette vérité.

Une première option consisterait à prouver ailleurs que ces pensées sont vraies. À l'instar de la manière dont il est possible de *définir* l'implication à partir de la conjonction et la négation dans un langage alternatif à l'idéographie, les axiomes d'un système peuvent être *démontrés* dans un second système. Frege a d'ailleurs insisté sur ce point dans les *Grundgesetze* : le choix d'axiomes admet une certaine latitude, à l'intérieur de laquelle il est permis de céder à des préférences d'ordre pragmatique. En définitive, un axiome n'est donc axiome que relativement à un système donné. Cependant, cette démarche ne règle pas le problème du point de départ, car la vérité des axiomes du second système resterait encore à établir. Soit nous réitérerions le processus, et sombrerions dans une régression à l'infini, soit nous démontrerions les vérités de base du second système dans le premier, et succomberions à la circularité.

En conclusion, pour reconnaître la vérité d'une loi, la logique n'a d'autre alternative que de la réduire à une autre loi, et se trouve impuissante lorsqu'une telle démarche est impossible. Au sein des *Grundgesetze*, Frege formula le problème de cette manière :

> La question de savoir comment et de quel droit reconnaître une loi de la logique comme vraie, la logique ne peut répondre qu'en la réduisant à une autre loi de la logique. (Frege 1893, p. xvii)

Face à cette situation, une autre alternative pourrait être envisagée. Elle consisterait à prouver les vérités logiques à la base d'un système *via* des moyens *extra-logiques*, par exemple en usant de ressources sémantiques. Mais cette option est invalidée par le caractère général de la logique. Celle-ci constitue le socle commun de toutes les sciences, elle ne peut donc être justifiée dans une science – la sémantique – qui lui est extérieure. Weiner épouse cette idée :

> C'est non seulement le seul genre de réponse [réduire une loi logique à une autre] que la logique peut fournir, mais c'est aussi le seul genre de réponse envisageable. [...] Donc, dans la mesure où Frege estime avoir présenté une logique correcte dans la *Begriffsschrift* ou les *Grundgesetze*, si cette logique contredit une théorie de la référence [une théorie sémantique], tant pis pour la théorie de la référence. (Weiner 1997, pp. 253-254)

138. Voir la section 3.2.3.4.

Puisque la logique se situe aussi aux fondements de la sémantique, on ne peut s'appuyer sur la seconde pour remettre en cause – ou enraciner – la première. Seule la procédure inverse est envisageable. C'est ici qu'intervient le deuxième versant du raisonnement de Frege. Ainsi qu'il avait tenté de résoudre le problème du point de départ des définitions à travers l'idée de constituants logiquement simples [139], il entreprit de répondre à celui du socle d'énoncés enclenchant les démonstrations à travers l'idée de vérités *triviales*. À ses yeux, certaines pensées peuvent être reconnues comme vraies sans qu'aucune démonstration d'aucun ordre ne soit nécessaire. Il suffit alors d'y puiser nos axiomes, et nous pouvons librement entamer nos démonstrations.

Frege employait deux termes différents pour qualifier ces vérités : '*selbstverstandlich*' et '*einleuchten*'. Cette ou ces notions de trivialité posent un certain nombre de problèmes qui ne sont pas les nôtres. Nous n'aurons donc pas à nous y confronter [140]. Il nous suffit d'expliquer le rôle joué par ces notions au sein de son projet, pour cerner correctement l'argument du clan de Ricketts.

Celui-ci procède donc comme suit : non seulement aucune sémantique n'est *nécessaire* pour garantir la vérité d'un axiome – cette vérité est triviale –, mais de plus aucune sémantique n'est *capable*, sans circularité, d'établir cette vérité – car elle exploiterait elle-même cet axiome.

En abordant le problème de la justification, Frege concentra son attention sur la notion d'axiome, si bien que les commentateurs accordent souvent à cette dernière l'exclusivité de la difficulté. Pourtant, celle-ci se retrouve dans un autre lieu. En effet, pour effectuer des dérivations, il n'est pas suffisant de disposer d'un socle d'énoncés de base, il importe aussi de sélectionner les règles assurant la transition entre les énoncés. Or celles-ci doivent évidemment conserver la vérité, afin qu'aucun énoncé n'exprimant de pensée fausse ne puisse figurer en conclusion d'une dérivation. Là encore, il est vain de démontrer un tel fait – l'adéquation des règles logiques –, car cette démonstration exploiterait elle-même les règles en question. Ces dernières doivent donc aussi posséder quelque chose de trivial, et ne peuvent s'appuyer sur aucun raisonnement, qu'il soit ou non sémantique. Nous retrouvons l'argument de Ricketts et Weiner.

Posé comme tel, celui-ci est correct. Frege excluait *de jure* toute justification des lois ou règles logiques à travers les démonstrations respectivement de leur vérité et adéquation. Avec les membres du courant antisémantique, nous convenons volontiers de la justesse de ce constat. En revanche, nous nous opposons le plus fermement du monde à la manière dont ils l'utilisent pour aboutir à la conclusion suivante : Frege n'aurait jamais accepté l'usage que nous faisons de nos théories sémantiques, car nous légitimons nos systèmes logiques sur leurs bases. Cette rhétorique est omniprésente dans leurs écrits. Elle intervient aussi fréquemment, et de manière aussi abrupte, que celle qui consiste à éjecter l'idéographie du domaine des langages contemporains à cause de son caractère substantiel. Nous avons corrigé la seconde en section 3.2.2, et nous voulons à présent rejeter la première. À nos yeux, elles constituent les deux grands quiproquos dont le clan antisémantique est responsable. Cela ne signifie pas que leur conclusion en elle-même est incorrecte : qu'il est possible de construire une sémantique fregéenne, ou que cette dernière aurait le rôle que nous attribuons aujourd'hui à cette discipline. Comme nous l'avons vu, d'autres enquêtes doivent être menées avant de trancher la question. Mais nous avons promis de mettre de l'ordre dans les nombreux arguments que comporte cette ligne interprétative. Or, une fois notre explication achevée, nous constaterons que les plus mis en valeur – basés sur le caractère non-schématique de l'idéographie ou le problème de la justification – sont aussi les moins recevables.

À la question de la justification, une réponse fut formulée par Heck, Stanley, Sullivan ou

139. sans articuler clairement les différents aspects du problème, et contredisant ce qu'il affirmait ailleurs, comme nous l'avons vu en section 3.2.3.4.

140. Si le lecteur souhaite consulter un article traitant directement de ce sujet, nous lui conseillons la lecture de (Jeshion 2001).

encore Blanchette, qui défendent tout trois la lecture adverse. Bien que nous souhaitions nous démarquer à d'autres égards de leurs conclusions, leur analyse à ce sujet nous semble correcte. Nous allons donc la reprendre à notre compte, et l'inscrire dans une perspective légèrement différente. Selon eux, une sémantique fregéenne ne justifierait pas les lois et règles logiques dans le sens où Ricketts et ses compagnons envisagent une telle justification, car *aucune sémantique*, pas même les théories contemporaines, ne remplit une telle mission. Heck explique :

> Une autre manière, plus partisane, de comprendre le problème consiste à se demander si Frege pensait que les lois de la logique pouvaient être justifiées *ex nihilo*, si un argument en leur faveur pouvait être produit qui pourrait (ou devrait) convaincre quelqu'un d'initialement sceptique vis-à-vis de leur vérité – ou pire, quelqu'un de sceptique vis-à-vis de la vérité de *n'importe quelle* loi logique.
>
> Si le problème est censé être celui-ci, alors permettez-moi de dire le plus clairement possible que ni moi ni personne, pour autant que je sache, n'avons jamais soutenu que Frege pensait que les lois logiques pouvaient être justifiées en ce sens. De plus, pour autant que je sache, personne ne croit que les lois de la logique peuvent être justifiées auprès d'un sceptique, et je doute que qui que ce soit l'ait jamais cru. (Heck 2012, p. 28)

Selon lui, la circularité détectée ci-dessus ne dépend pas des positions de Frege, elle se trouve en travers de la route de *quiconque* désirerait démontrer *ex nihilo* les lois logiques. Frege et les théoriciens des modèles contemporains se heurtent exactement au même obstacle insurmontable. La logique n'est pas davantage une prison pour l'un que pour les autres, car la sémantique ne permet *pas* de sauter cet obstacle. Il n'y a donc aucune incompatibilité entre la lucidité de Frege vis-à-vis de ce dernier, et sa pratique de la sémantique. En définitive, Heck ne prétend pas que Frege est plus libre que les tenants de la lecture antisémantique ne le pensent, il affirme que les logiciens modernes le sont moins qu'ils le croient (ou que Ricketts prétend qu'ils le croient), et résorbe ainsi l'écart entre les deux. Stanley tire la même conclusion :

> [Les membres du clan antisémantique] croient que le propos d'une théorie sémantique est de fournir une sorte de justification non circulaire des lois logiques, une sorte d' "inférence" des lois logiques à partir d'autres principes, peut-être sémantiques. Puisque Frege ne croyait pas qu'une telle justification était possible, alors Frege n'a pas pu avancer de théorie sémantique.
>
> [...]
>
> Mais *personne* ne croit possible de donner une justification totalement non circulaire des lois logiques, et *surtout pas* ceux qui s'engagent dans la sémantique classique. Une théorie sémantique classique n'aide pas à "déduire" les lois logiques fondamentales à partir de vérités d'une autre sorte, car il est nécessaire de supposer les lois à démontrer dans le métalangage. [...] C'est pourquoi les preuves classiques d'adéquation sont si triviales. Il est parfaitement possible d'entreprendre un raisonnement sémantique sans souscrire à l'idée que des justifications non-circulaires des lois logiques sont possibles. De plus, un tel projet ne fut jamais une des motivations derrière le développement de la théorie sémantique classique. (Stanley 1996, p. 58)

Ces auteurs ont raison : les théorèmes d'adéquation n'ont pas vocation à garantir la vérité des théorèmes démontrés dans le système. Leur propos est différent, et nous allons l'éclaircir dans un instant. Dans un premier temps, nous voulons insister sur la dernière phrase du passage ci-dessus, qui possède son importance. En effet, en opposant Frege et Tarski relativement à la question de la justification, les membres du courant antisémantique galvaudent totalement le

projet du second. Il est utile de procéder à une rapide mise au point à ce sujet, afin de retirer à leur argument toute substance historique. Nous achèverons ensuite le travail, en le privant de son suc philosophique.

Examinons les explications du géniteur de la sémantique, au moment de l'accouchement :

> L'un des traits caractéristiques du langage quotidien (trait qui le différencie des langages scientifiques) est son universalisme. Il est contraire à l'esprit de ce langage qu'il y ait dans quelque autre langage des expressions intraduisibles en langage quotidien. S'il est possible en général de parler d'une chose quelconque de manière sensée, alors il est possible également d'en parler en langage quotidien. En suivant, sur le terrain de la sémantique, la tendance à l'universalisme propre au langage quotidien, nous devons par conséquent joindre à ce langage, à côté de tous ses énoncés et autres expressions, les noms de ces énoncés et expressions, les énoncés contenant ces noms, ainsi que les expressions sémantiques telles que "énoncé vraie", "nom", "désigne", etc. Mais en même temps, cet universalisme du langage quotidien en matière de sémantique est vraisemblablement la source essentielle de toutes les antinomies dites sémantiques, telles que l'antinomie du menteur ou l'antinomie des mots hétérologiques. Ces antinomies semblent montrer que l'utilisation de tout langage universel, au sens indiqué plus haut, qui serait en même temps soumis aux lois normales de la logique, aboutit nécessairement à la contradiction. (Tarski 1933, p. 170)

Plusieurs remarques s'imposent ici. D'une part, Tarski donne une signification différente au terme 'universalisme', caractérisant les langages qui permettent d'exprimer absolument tout ce qui est exprimable. L'idéographie n'est bien sûr pas universelle en ce sens, car elle est impuissante à exprimer les pensées de la physique, de la biologie, de la géométrie. Elle est confinée à l'expression des pensées de la logique. D'autre part, ce passage clôture la première section de l'article, dans laquelle Tarski justifia doublement le développement d'un langage artificiel et l'utilisation d'un métalangage. Il décela deux principaux problèmes dans les langues naturelles. En premier lieu, disposant de règles structurelles approximatives, il est impossible d'y définir récursivement le concept de vérité sur les formules. D'autre part, intégrant leur propre prédicat de vérité, il est possible d'y écrire des énoncés qui affirment leur propre vérité ou fausseté, et ainsi d'aboutir à une contradiction. Le passage ci-dessus est lié au second point. Or un langage formel présente des règles syntaxiques déterminées. Il ne reste donc qu'une seule et unique raison de refuser de définir directement la vérité dans un tel langage : les paradoxes sémantiques. Aucune trace de l'enjeu d'une justification *ex nihilo* des lois et règles logiques, ni même d'une justification au sens large, n'est présente. L'objectif de Tarski se limitait à déterminer le cadre possible d'une définition convenable – matériellement adéquate et formellement correcte – d'un prédicat de vérité en toute sécurité, *i.e.* à l'*abri des paradoxes sémantiques*. Au sujet des règles et axiomes de son système, il s'en tint à la remarque suivante :

> Les énoncés pris pour axiomes nous semblent intuitivement vrais ; notre choix des règles d'inférence est guidé par le désir d'assurer le passage des énoncés vrais admis au départ à de nouveaux énoncés vrais. (Tarski 1933, p. 173)

Son propos est proche de – ou au moins totalement compatible avec – celui de Frege. Tarski n'expliqua pas comment l'intuition guida son choix d'axiomes et de règles. Mais aucun raisonnement sémantique ou métalogique ne vint au secours de cette affirmation. Au moment de démontrer le (méta)théorème d'adéquation pour son système, selon lequel tout énoncé prouvé est vrai [141], il n'exploita pas ce résultat pour appuyer ou confirmer sa précédente remarque. Il

141. Il s'agit du théorème 5 du §3.

savait pertinemment qu'une telle surenchère était illégitime, parce que sa démonstration utilisait dans la métathéorie les lois et axiomes de la théorie qu'elle aurait dû asseoir. Les théoriciens des modèles contemporains ne nourrissent pas davantage d'illusions quant à leur propre démarche. C'est pourtant à cet égard que les tenants de l'interprétation antisémantique creusent un fossé entre les perspectives tarskienne et fregéenne :

> Non seulement Frege aurait refusé de considérer qu'une discussion métathéorique ou une exposition des tables de vérité constitue une justification des lois logiques primitives, mais il aurait aussi refusé de considérer qu'un raisonnement métathéorique concernant les logiques primitives exprime une déduction objective. La seule justification que Frege reconnaît pour une loi logique est une preuve à partir d'une autre loi logique. (Weiner 1990, p. 227)

Il est important de comprendre l'origine de l'erreur. L'écart que Weiner, Ricketts ou encore Goldfarb perçoivent entre les stratégies tarskienne et fregéenne provient en définitive du caractère *cloisonnant* de l'Idéographie. À leurs yeux, la démarche (prétendument) tarskienne de justification peut aboutir parce qu'elle a lieu *à l'extérieur* du système logique évalué, et n'exploite donc pas les ressources de ce dernier. Au contraire, selon Frege, l'Idéographie est en mesure d'accueillir en son sein, sous réserve d'ajouts de symboles et d'axiomes, toutes les sciences *y compris une théorie sémantique*. Cette discipline utiliserait donc le vocabulaire, les axiomes et les règles de ce système, en complément de ses propres axiomes. Elle devrait ainsi exploiter directement les lois dont elle tenterait d'établir la vérité. Techniquement, le problème de la circularité se pose ainsi : dans une sémantique *pour l'Idéographie*, les axiomes attachés à ce nom ne ferait pas seulement *mention*, mais aussi *usage* des symboles de l'idéographie.

En développant la sémantique dans une métathéorie, on ne se cantonne pas à ajouter les termes et les axiomes *non logiques* de cette science à un système logique, on utilise au contraire d'autres symboles *logiques* auxquels on associe leurs propres règles et axiomes logiques. Or, pour Frege, il n'existe qu'une seule logique. Celle qu'on utilise dans la métathéorie est la même que celle de l'Idéographie et doit pouvoir s'y traduire. Cela ne signifie pas que ce qui est opéré dans la métathéorie est incorrect. Simplement, le sens de chaque énoncé peut être exprimé dans une Idéographie enrichie. Or, en première instance, les composantes des démonstrations sont des pensées, et non des énoncés. Elles ont notamment pour constituants certains sens fonctionnels exprimables dans l'Idéographie initiale, et auxquels sont attachés certaines règles de cette dernière. Ainsi la traduction peut s'opérer, et ce qui relève de la logique, à l'intérieur des pensées et dans les déductions, est pris en charge par le vocabulaire et les règles de l'Idéographie originale. Là où, pour Weiner, la sémantique moderne se soustrait à l'emprise du système logique étudié en évoluant dans sa propre théorie – la métathéorie –, une sémantique fregéenne reste soumise au régime de l'idéographie.

Voilà pourquoi les défenseurs de la lecture antisémantique estiment que Tarski s'est affranchi de la circularité liée au problème de la justification, qui s'avère inextricable dans le cadre fregéen. Mais ce raisonnement résulte d'une mauvaise appréciation de ce qui a provoqué l'avènement des métaperspectives et de ce qu'elles autorisent. En effet, si la métathéorie se dispense des règles et axiomes de la théorie, elle intègre en revanche des répliques exactes de ces derniers. C'est d'ailleurs pour cette raison, comme l'explique Stanley, que "les preuves classiques d'adéquation sont si triviales". Observons par exemple la démonstration de l'adéquation de la règle d'élimination du '$\wedge$' en déduction naturelle classique :

$$\frac{\mathbf{V}(\varphi \wedge \psi) \qquad (\mathbf{V}(\varphi \wedge \psi)) \underline{\leftrightarrow} (\mathbf{V}(\varphi) \underline{\wedge} \mathbf{V}(\psi))}{} \; [\underline{\leftrightarrow}\text{-élim}]$$

$$\frac{\mathbf{V}(\varphi)\underline{\wedge}\mathbf{V}(\psi)}{\mathbf{V}(\varphi)}\ [\underline{\wedge}\text{-élim}]$$

À proprement parler, il est vrai qu'aucune circularité ne gangrène cette démonstration, parce que nous ne justifions pas la règle sur sa propre base. Néanmoins, nous n'en sommes pas quitte pour autant, car nous utilisons son sosie métathéorique $\underline{\wedge}$-élim. Or rien ne nous assure la fiabilité de cette seconde règle. Nous pouvons reproduire la mécanique à loisir, et élever l'édifice plus haut encore, il demeurera à sa base une règle d'une méta^n-théorie, menaçant d'emporter dans sa chute toute la construction. Certes, nous n'accordons pas une confiance aveugle à ce que nous escomptons justifier mais, fatalement, à ce qui n'est aucunement justifié. Nous pouvons bien souligner nos symboles encore et encore, notre système ne se verra pas conférer des fondations plus solides que ce que la circularité initiale lui octroyait.

Il est donc illégitime de priver une (potentielle) sémantique fregéenne du rôle que nous lui attribuons aujourd'hui en invoquant le problème de la justification, car l'évasion autorisée par la métaperspective post-tarskienne n'apporte strictement *aucune* solution à ce problème. Comme nous l'avons vu, les logiciens n'ont pas atterri à l'extérieur du langage-objet dans la poursuite de cette chimère, mais par la *seule* menace des paradoxes sémantiques. Ceci conduit néanmoins à une seconde objection : si ces paradoxes guettent toute théorie qui fixe la sémantique d'un système – suffisamment riche, et l'Idéographie l'est incontestablement – dans ce système, alors toute sémantique fregéenne n'est-elle pas d'emblée condamnée à la contradiction ? Cette fois encore, mieux vaut nous abstenir de toute réponse précipitée, et examiner consciencieusement la situation.

3.2.4.2 Le problème des paradoxes

À première vue, il y a peu de raisons de rejeter l'idée que les positions fregéennes s'accordent avec une hypothèse quelconque sous prétexte que celle-ci conduise à la contradiction. N'oublions pas que nous réalisons une étude de l'Idéographie, et que ce système lui-même est incohérent. Heck adopte cette ligne de défense contre l'objection des paradoxes sémantiques :

> Bien sûr, il s'ensuit du théorème de Tarski que, puisque l'Idéographie formalise une théorie classique suffisante pour l'arithmétique, si son propre prédicat de vérité est défini en elle, alors elle est incohérente. Mais *Frege* n'avait aucune raison de penser cela et ainsi aucune raison de croire que les arguments sémantiques donnés dans les *Grundgesetze* ne pouvaient être formalisés dans l'Idéographie. En fait, la vision naturelle était probablement que de tels raisonnements pouvaient être reproduits dans l'Idéographie – ce qu'ils peuvent en effet. Donc l'Idéographie est incohérente. Une fois de plus. (Heck 2010, p. 376 - 377)

Heck estime, à raison, que Frege ne pouvait rejeter une science sous prétexte qu'elle posait des problèmes dont il n'avait pas conscience. En effet, à cette période, il ne soupçonnait pas encore les paradoxes ensemblistes qui menaçaient son entreprise, rien ne laissait deviner que la sémantique courrait le même risque quelques années plus tard. Heck assoit ainsi davantage sa conclusion selon laquelle Frege ne voyait pas d'objection à la constitution d'une telle discipline. Néanmoins, comme nous l'avons déjà expliqué, cette question n'est pas la nôtre. Frege se préoccupait peu de ce problème, et les différents indices récoltés, au lieu d'apporter une réponse positive ou négative, ont surtout dévoilé qu'il n'avait pas poussé l'investigation bien loin. Notre objectif consiste à réaliser à sa place cette dernière, *i.e.* à interroger ce qu'il n'a pas questionné, et ce à quoi il n'a donc

pas lui-même apporté de réponse précise. Nous devons ainsi nous soustraire à son autorité pour examiner, non pas à quelle dénouement cette affaire est effectivement parvenue, mais à quelle conclusion sa vision de la logique, du sens, de la référence, et toute son ontologie conduisent en elles-mêmes. Car, si la découverte des paradoxes ensemblistes a fondamentalement chamboulé sa conception des mathématiques, elle a peu altéré ces dernières, le forçant seulement à se rétracter sur l'existence de parcours-de-valeurs. Une fois cette étape franchie, nulle contradiction ne menaçait plus la construction d'un nouveau système logique, ni l'établissement d'une sémantique pour celui-ci. Il est donc légitime de demander si la présence des paradoxes sémantiques empêche d'emblée le développement d'une théorie de la référence acceptable – cohérente – qui s'accorde avec le caractère général qu'il attribuait à la logique. Cette question n'a rien d'anachronique, elle se contente de mettre les positions fondamentales de Frege à l'épreuve d'un état de fait, sans questionner directement Frege qui, en effet, ignorait cet état de fait.

Il nous faut donc y répondre. Si l'Idéographie était nettoyée de la contradiction, à travers le retranchement de la loi V, voire l'ablation complète du nom pour les parcours-de-valeurs, son statut de système idéal pour le développement de n'importe quelle science autoriserait-il l'édification d'une théorie sémantique cohérente ?

Son caractère cloisonnant exige en effet qu'une théorie sémantique soit développable dans une de ses *extensions*. Mais ceci s'avère *a priori* parfaitement compatible avec les prérequis de Tarski qui, en 1933, envisageait sereinement la possibilité d'intégrer au métalangage un fragment du langage [142]. Frege n'a jamais requis qu'une science particulière, non générale, soit *entièrement* implémentée dans l'Idéographie. Au contraire, toute démarche de ce type impose l'ajout du vocabulaire et des axiomes spécifiques à cette science. En ce sens, une sémantique pour l'idéographie, ou pour un quelconque autre langage, si elle exploite les ressources du système logique, pourrait de plein droit puiser dans des réserves supplémentaires qui lui sont propres. Blanchette aboutit à la même conclusion :

> Frege soutient-il (a) que tout raisonnement scientifiquement recevable peut toujours être présenté *via* des dérivations dans un système U pour les sciences unifiées, un système qui contient le vocabulaire primitif de toutes les sciences (cohérentes), ou (b) l'affirmation plus faible selon laquelle tout raisonnement scientifiquement recevable peut toujours être présenté *via* des dérivations dans un système formel rigoureux qui incorpore essentiellement les ressources logiques de [l'Idéographie] ? Notons que les problèmes généraux issus des paradoxes sémantiques ne se posent que dans le cadre de la plus forte thèse (a), étant donné que l'exigence que la métathéorie pour [l'Idéographie] soit ancrée dans un système formel rigoureux adapté est facilement respectée en développant cette métathéorie dans un système obtenu en ajoutant un prédicat de vérité pour [l'Idéographie]. (Blanchette 2012, p. 160)

Si Frege avait entrepris la construction d'un système unifié pour toutes les sciences, alors aucune sémantique cohérente n'aurait pu être produite, non pas pour l'idéographie, mais pour le langage de ce système. En effet, une telle sémantique devrait elle-même être développée directement en son sein. Mais Frege n'a *jamais* manifesté une telle volonté. Comme le souligne Blanchette à la suite de ce passage, il s'est contenté d'envisager des extensions du système logique relatives à chaque science particulière, *i.e.* dans lesquelles elles puissent se fondre. Ainsi, la donnée d'une sémantique pour un quelconque langage scientifique idéal – quelle que soit la science en question, générale ou particulière – admet son propre système, potentiellement plus riche que la science en question.

142. (Tarski 1933, p. 173)

Blanchette ne fait cependant pas droit à une autre objection, que nous tenons à lever. Les paradoxes sémantiques sont principalement dûs à l'intégration d'un prédicat de vérité qui s'applique aux formules mêmes de ce langage contenant déjà ce prédicat. L'évasion du langage induite par Tarski était indépendante de toute volonté *finale* de travailler à l'extérieur du celui-ci, et provenait précisément d'une des *conséquences* de cette extériorité : les formules du langage-objet, pour lesquelles le prédicat de vérité est défini, n'incorporent pas elles-mêmes ce prédicat, car celui-ci n'appartient qu'au métalangage. À présent, supposons qu'un langage $\mathscr{L}$ et un système $\mathscr{I}$ idéaux conviennent pour une science quelconque, logique ou non. De plus, admettons qu'un autre langage $\mathscr{L}_S$ et un autre système $\mathscr{I}_S$ idéaux soient adaptés au développement de la sémantique pour $\mathscr{L}$. Comme nous l'avons vu, rien ne s'oppose à ce que $\mathscr{I}_S$ dispose de ressources plus conséquentes que celles de $\mathscr{I}$. D'un point de vue fregéen, il est également acceptable que le prédicat de vérité – ou les fonctions de référence – ne soient pas intégrées dans $\mathscr{L}$, mais seulement dans $\mathscr{L}_S$. Néanmoins, cela ne nous renseigne pas encore sur le fonctionnement du dispositif pour la mention. Rien n'assure qu'il soit possible de limiter celui-ci aux noms de $\mathscr{L}$, excluant ceux de $\mathscr{L}_S$, car Frege maintenait *pour tout langage scientifique* un réquisit de complétude linguistique relatif à une grammaire extrêmement rigide. Dans l'idéographie, chaque expression disposant d'une référence, chaque nom d'un certain type, peut venir compléter ou être complétée par *n'importe quel* nom de type adapté. Aucune restriction n'est envisagée à ce sujet.

Nous ne souhaitons pas encore pénétrer le détail de la sémantique fregéenne. Ce travail sera réalisé lorsque nous examinerons les sections-clefs des *Grundgesetze*. Néanmoins, ces résultats ne sont pas indispensables pour régler cette difficulté. Rappelons que Frege exigeait que la référence d'un nom de fonction soit déterminée en tout argument. Dans le cadre logique, ce principe ne semble pas poser problème. La généralité de cette discipline impose en effet que son contenu soit applicable n'importe où. Il ne doit donc pas exister d'objet qui échappe à la portée d'une fonction logique. En revanche, lorsque le domaine d'une science se resserre, rien n'assure le respect d'un tel principe. Par exemple, la relation de parallélisme peut intervenir entre des droites, des plans et d'autres objets de la géométrie, mais elle est étrangère à ceux de sciences telles que la psychologie ou la métaphysique. Comment s'accorde le principe de complétude avec la restriction du domaine des sciences particulières ? Un système pour la géométrie intégrerait l'Idéographie, il serait donc indispensable, d'après ce principe, d'y définir la relation de parallélisme de telle sorte qu'il soit toujours déterminé si deux nombres quelconques l'entretiennent. Pourtant, est-il pertinent – vrai ou faux – d'affirmer que 1 est parallèle à 2, ou un tel énoncé est-il dénué de sens ? Frege n'a jamais apporté de réponse à cette interrogation. Généralement, il a très peu éclairé la manière dont son système serait conduit à se corrompre hors de la logique à travers les extensions adéquates. Bientôt, nous questionnerons sérieusement le rôle du principe de complétude. Pour l'heure, nous pouvons déjà déduire de certaines méthodes utilisées dans l'idéographie la manière dont il aurait pu se prémunir des paradoxes sémantiques.

Il existe dans l'idéographie au moins [143] un nom primitif qui n'est pas *naturellement* destiné à référer à une fonction totale. Par cela, nous entendons que l'usage habituel de ce nom ne le destine pas à prendre en argument n'importe quel nom de type adapté. Il s'agit de l'article défini, que Frege rend par '$\backslash\xi$' dans son langage. Il expliqua que, dans la langue naturelle, un énoncé n'était bien construit que si cet article était suivi d'un nom de concept sous lequel ne tombait qu'*un* objet. Ainsi, l'expression complète référait précisément à cet objet. En s'aidant des parcours-de-valeurs, il descendit d'un niveau la catégorie de ce nom, et l'utilisa pour envoyer les extensions de concepts qui ne subsument qu'un objet sur cet objet. Néanmoins, le respect du principe de complétude exigeait de prendre en considération les autres cas possibles. Frege en

143. La question se pose aussi pour les fonctions "propositionnelles", lorsqu'elles prennent en argument d'autres objets que les valeurs de vérité.

vint donc à la stipulation suivante :

1) si, pour un argument, il existe un objet Δ tel que $\dot{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ est cet argument, alors la valeur de la fonction $\backslash\xi$ doit être Δ lui-même ;
2) si, pour un argument, il n'existe pas d'objet Δ tel que $\dot{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ soit son argument, alors l'argument lui-même doit être la valeur de la fonction $\backslash\xi$. (Frege 1893, p. 19)

La première clause s'occupe des cas pertinents, lorsque le parcours-de-valeurs d'un concept qui ne subsume qu'un objet est pris en argument. D'un même geste, la seconde prend en charge tous les autres cas. Frege expliqua que "nous avons ainsi un substitut pour l'article défini des langages". Cet article présentait un risque logique, en transgressant le principe de complétude. Il était seulement destiné à précéder les noms de certains concepts, privant de référence des expressions telles que '*le* diviseur entier de 6'. Selon Frege, ce risque "est à présent évité, puisque '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' possède toujours une référence, que la fonction $\Phi(\xi)$ ne soit pas un concept, ou un concept sous lequel plus d'un ou aucun objet ne tombe, ou qu'il s'agisse d'un concept sous lequel un seul objet tombe" (pp. 19-20).

Il faut comprendre que Frege ne procède pas ainsi car il souhaite que '$\backslash\xi$' réfère à une fonction qui, étant *logique*, opère sur les objets de n'importe quel domaine. Il se contente de respecter un principe qu'il prescrit pour n'importe quel langage scientifique. D'ailleurs, les cas qui l'intéressent, et dans lesquels il exploite ce nom, impliquent *toujours* l'extension d'un concept sous lequel tombe un unique objet. Frege s'en tient à procéder à une stipulation artificielle pour les autres cas. Et, naturellement, il choisit à ce titre la plus simple, en envoyant l'argument sur lui-même. De manière tout aussi légitime, ce procédé aurait donc pu être mis-en-œuvre pour les noms primitifs des sciences particulières, que ce soit la géométrie, la physique ou encore la sémantique.

Au point où nous en sommes, nous ne savons pas quel dispositif Frege aurait pu adopter pour faire mention des termes d'un langage. Mais même s'il avait refusé de limiter ce dispositif aux noms du langage-objet, comme le fit Tarski, une solution proche de celle que proposa Kripke (1975) aurait été envisageable. Bien sûr, à proprement parler, et contrairement à ce dernier, Frege n'aurait pu adopter un prédicat *partiel* sous peine de déroger au réquisit de complétude des fonctions. Mais il lui aurait suffi de spécifier la référence adaptée dans les cas intéressants, et de procéder à une stipulation factice, tout à fait inoffensive, dans les autres cas. Il utilisa cet artifice dans les *Grundgesetze* pour régler un problème étendu à tous les langages scientifiques. Il aurait donc tout à fait pu y avoir recours dans le cas des autres sciences, notamment la sémantique, et tracer ainsi un sentier à l'abri des paradoxes.

3.2.4.3 Le rôle des théorèmes d'adéquation

Les membres du courant sémantiques, tels Heck ou Tappenden, dénoncent les "stratégies dialectiques" de leurs adversaires, par lesquelles universalisme et métaperspective sont systématiquement ramenés dos-à-dos :

> Des termes tels que 'perspective métalogique', 'métaperspective sémantique' et 'point de vue métasystémique' – qui sont symptomatiques d'une tradition désormais familière parmi les spécialistes de Frege – sont profondément trompeurs. Ils contiennent presque la suggestion subliminale que les raisonnements sémantiques requièrent une perspective qui excède l'Idéographie, que de tels raisonnements ne peuvent être menés sans elle. Mais le simple fait que la conclusion d'un argument concerne des propriétés sémantiques d'une théorie particulière ne montre pas qu'elle ne peut être formalisée à l'intérieur de celle-ci. (Heck 2010, p. 377).

Les commentateurs qui leur font face cultivent l'idée selon laquelle tout examen, étude ou observation du système logique exige une évasion de celui-ci, dont au contraire Frege nous croyait captifs. Aux yeux de ce dernier, de telles démarches seraient donc totalement illégitimes :

> Si le système constitue le langage logique universel, alors il ne peut y avoir aucun point de vue externe duquel on puisse regarder ou discuter le système. Les considérations métasystémiques sont illégitimes et non simplement indésirables. (Goldfarb 1979, p. 353)

L'évasion du système logique, voilà ce qu'ils nomment 'métaperspective' ; et l'idée selon laquelle il n'est pas possible de s'en émanciper, voici ce qu'ils appellent 'universalisme logique'. Mais, ce faisant, ils attribuent à ces termes des sens bien vagues, extrêmement généraux. Ce reproche leur est adressé par Heck et ses compagnons, qui soutiennent que le raisonnement ne résiste pas à une analyse plus précise de ces notions. C'est précisément cette analyse que nous tentons ici de mener. Concernant l'universalisme présumé de Frege, nous sommes parvenus aux conclusions suivantes :

1. Frege ne dit jamais que tout raisonnement mené à l'extérieur de l'Idéographie est incorrect ;
2. Frege ne dit jamais que tout raisonnement doit être implémentable dans un système unifié pour toutes les sciences ;
3. Frege ne dit jamais que tout raisonnement doit être implémentable dans l'Idéographie ;
4. Frege dit seulement que tout raisonnement doit être implémentable dans une extension de l'Idéographie.

Le caractère cloisonnant et asservissant de l'Idéographie se ramène donc exclusivement au dernier point, et c'est sur cette seule base que les défenseurs de l'interprétation antisémantique sont tenus d'expliquer l'impossibilité d'une métaperspective. Mais cette base est en vérité très faible et, pour l'instant, ne nous a pas conduits là où ils prétendaient nous mener. Nous sommes notamment parvenus à échapper au problème des paradoxes sémantiques. En privant l'idéographie du nom pour les parcours-de-valeurs, il n'y a aucune raison de supposer que, parce que toute sémantique pour l'Idéographie (ou un autre système idéal) devrait être transportable dans une *extension* de l'Idéographie, elle succomberait inévitablement à la contradiction.

Mais l'un des arguments principaux de la critique antisémantique est localisé ailleurs, nourri par la question de la justification de la logique. À la lumière des conclusions ci-dessus, il se formule ainsi : tout raisonnement visant à fonder les lois et règles logiques doit pouvoir être mené dans une extension du système logique. Ainsi, il en exploite essentiellement les ressources. Autrement dit, il s'appuie lui-même sur la logique. Toute tentative de cet ordre est fatalement circulaire, et ainsi impropre à atteindre son objectif. Selon les membres du clan antisémantique, il n'est donc pas question, dans le cadre universaliste de Frege, d'utiliser la sémantique comme nous le faisons désormais, *i.e.* pour justifier les lois logiques.

Nous avons montré que cet argument contenait une double erreur, à la fois historique et philosophique. Historique parce qu'aucun des fondateurs de la sémantique moderne, Tarski inclus, n'espérait accéder à un point de vue permettant de justifier les lois logiques en se hissant jusqu'à la métathéorie. Philosophique parce qu'en effet, cette dernière n'octroie rien de tel. Dans le cadre de la sémantique classique[144], elle intègre des règles et axiomes logiques qui sont les répliques

144. Les théorèmes d'adéquation pour (ou dans) d'autres logiques n'utilisent pas toujours les copies métalinguistiques conformes des énoncés dont ils démontrent la vérité. Mais il est inutile de sortir du cadre classique car, relativement à notre problème, la situation n'en serait pas altérée. Nous ne pouvons prétendre avoir légitimé les règles de la théorie si celles qui sont utilisées à cette fin – celles de la métathéorie, quelles qu'elles soient – attendent à leur tour une justification.

exactes de celles du système étudié. Il faudrait donc, pour justifier les secondes, s'assurer du bien-fondé des premières. Tout au plus le problème de la circularité est-il remplacé par celui d'une régression à l'infini. Dans les deux cas, les fondations de la logique ne sont aucunement assurées.

Par ailleurs, cet argument n'est pas seulement erroné ; il est inadapté pour rendre compte du rapport conflictuel qu'entretiennent métaperspective et universalisme. Ci-dessus, Goldfarb expliquait que Frege n'autorisait aucune évasion du système logique parce qu'il n'existait "aucun point de vue externe duquel on puisse regarder ou discuter le système". Le fait qu'il soit impossible de fonder la logique hors de toute logique n'interdit aucunement d'envisager des théorèmes d'adéquation, car ces derniers n'ont jamais poursuivi cet objectif, que ce soit dans ou hors du cadre fregéen. En revanche, ils ont bel et bien vocation à justifier le *système* logique, dont Frege nous pense captif à la manière décrite plus haut. C'est à cet endroit précis que l'universalisme pourrait poser certaines difficultés. La nuance entre justification de la logique – à la fois de la vérité de certaines pensées et du lien qu'elles entretiennent –, et justification du système logique – de la manière dont ces pensées sont syntaxiquement représentées et mises en relation – pourrait servir bien davantage le propos du clan antisémantique. Or, paradoxalement, elle n'est jamais soulignée par ses membres. Seuls leurs adversaires ont soin de la discuter. Mais c'est bien à travers elle qu'il nous faut ajuster et corriger l'argument (fallacieux) que nous venons d'examiner. Voici comment Goldfarb pourrait poursuivre son propos :

> Selon Frege, il n'existe aucun point de vue externe au système duquel regarder ou discuter le système, tout ce qui sera prouvé concernant le système sera donc tributaire de la légitimité du système.

Cette fois, la circularité affecte incontestablement l'action de la sémantique, par laquelle diverses propriétés du système sont mises à jour. Cependant, elle n'est dangereuse que lorsque les propriétés étudiées concernent elles-même cette légitimité. En effet, dès lors que nous croyons au bien-fondé d'un système, rien n'interdit de l'utiliser pour établir certaines de ses propres propriétés. Ainsi l'argument ne touche que les tentatives de *justification* du système, *i.e.* les démarches qui visent à renforcer la confiance que nous lui accordons. C'est pourquoi il convient de tracer une ligne séparant deux types de résultats sémantiques. Parmi ceux qui permettent de fonder l'utilisation d'un système logique, on trouve les théorèmes d'adéquation ou de cohérence syntaxique. Parmi ceux qui ne présentent aucune ambition de cet ordre, on trouve les théorèmes de catégoricité, de complétudes syntaxique et d'adéquation [145]. La circularité n'affecte que les premiers. L'argument du clan antisémantique, même corrigé de cette manière, ne disqualifie donc aucunement tous les résultats contemporains de sémantique. Mais il touche indéniablement un certain nombre d'entre eux, et non des moindres. En effet, aux yeux de la majorité des défenseurs de l'interprétation sémantique, les passages-clefs des *Grundgesetze* consistent collectivement en une tentative de prouver que l'idéographie est adéquate. Heck explique :

> Frege soutient dans la première partie des *Grundgesetze* que les stipulations [qui assignent une référence aux noms primitifs] assignent aussi la valeur Vrai à tous les axiomes de la théorie et valide les règles d'inférence. Donc les mêmes stipulations qui assignent une référence aux noms primitifs garantissent que les lois fondamentales sont vraies et que les règles d'inférence préservent la vérité. (Heck 2012, p. 128)

145. Bien entendu, les résultats du second type constituent parfois des arguments pour l'adoption d'un système. Néanmoins ils ne renforcent pas la confiance que nous accordons à celui-ci, *i.e.* notre conviction que seuls des énoncés vrais seront démontrés par son biais. Dès lors que celle-ci n'est pas en jeu, nous pouvons démontrer de tels résultats directement dans le système étudié (ou une de ses extensions) sans que les conclusions ne soient implicitement contenues dans les prémisses.

Heck s'exprime ici de manière imparfaite. Il ne tient pas compte de la nuance apportée plus tôt entre justifications de la logique et d'un système logique. Rigoureusement, il aurait dû s'en tenir à la première phrase. Les stipulations peuvent garantir la vérité des *énoncés* axiomatiques – le fait que ces derniers réfèrent au Vrai –, mais pas la vérité des *axiomes* – celle du contenu de ces énoncés. Néanmoins, il ne s'agit là que d'une maladresse d'écriture, car il prit lui-même soin d'insister sur cette distinction, en discutant la fonction des théorèmes d'adéquation [146] :

> Les théories sémantiques ont souvent exactement ce genre de propos. Un système non interprété est défini, certains axiomes sont stipulés, les règles gouvernant la construction des preuves sont fixées. Puis le langage se voit octroyer une interprétation : les références des expressions primitives du langage sont spécifiées, et les règles sont établies qui déterminent la référence des expressions composées à partir de certaines de leurs parties. Il est ensuite avancé – sans circularité aucune – que tous les énoncés choisis en axiomes sont vrais et que toutes les règles préservent la vérité. Bien sûr, l'argument n'est convaincant que parce que nous sommes disposés à accepter certaines affirmations formulées dans le métalangage, le langage dans lequel l'interprétation est fournie. Mais ceci ne révèle aucune circularité : le point de l'argument consistait à démontrer la vérité des énoncés pris en axiomes, et le fait que les règles conservent la vérité. Son point n'était pas de montrer que *les pensées exprimées par* certains énoncés formels sont vraies, mais seulement de montrer que ces énoncés sont vrais.
>
> La sémantique développée par Frege en première partie des *Grundgesetze* a le même genre de rôle. (Heck 2012, pp. 38-39)

Heck distingue les étapes syntaxique et sémantique attachées à la construction d'un système. Le premier travail requiert de spécifier inductivement les termes et formules du langage ainsi que les règles pour les démonstrations. Dans un second temps, en octroyant un contenu aux signes primitifs, il convient d'expliquer la manière dont les termes et formules en acquièrent à leur tour, *i.e.* dont la valeur des termes et la valeur de vérité des formules peut être déterminée à

146. On trouve exactement la même idée chez trois autres auteurs du même bord. Blanchette lui prodigua la forme suivante :

> On ne peut entreprendre une justification non circulaire des principes fondamentaux de la logique ou, dans les termes de Dreben et van Heijenoort, de la "logique comme un tout". Une telle justification présupposerait toujours les principes qu'elle tente de justifier.
>
> Mais cette restriction n'a aucun rapport avec la métathéorie. La métathéorie n'est jamais liée à une tentative de justifier la logique comme un tout ; mais toujours à une tentative d'évaluer des systèmes formels particuliers, *i.e.* des codifications particulières de ces principes logiques universels. Ce sont les vertus de la codification qui sont en jeu dans les investigations métathéoriques, et non les principes sous-jacents qui sont codifiés. (Blanchette 2012, p. 158)

Stanley formula ainsi la nuance en question :

> En quoi procurer une interprétation à un langage formel justifie-t-il les règles d'inférence et les axiomes d'une théorie développée dans ce langage ? La conception fregéenne d'une théorie formelle était étonnamment moderne. Comme nous l'avons vu, Frege parle du projet de *conférer une référence aux signes*. Il ne s'exprime donc pas comme si ses expressions idéographiques arrivaient d'emblée avec une référence. Au contraire, il évoque des *stipulations* [*Festsetzungen*] sémantiques qui assignent une référence aux expressions idéographiques. Ceci montre que Frege ne concevait pas l'idéographie comme un langage déjà interprété, car on ne stipule aucune interprétation pour un tel langage. Au contraire, Frege traitait sa théorie comme un ensemble d'opérations syntaxiques sur des symboles. Le projet qui consiste à octroyer une référence aux signes justifie les manipulations syntaxiques effectuées avec ces symboles en assurant qu'ils expriment bien des règles d'inférence fondamentales, comme le *Modus-Ponens*, que Frege suppose d'emblée que nous acceptons. (Stanley 1996, p. 62)

Enfin, Sullivan (2005, Section 3.2) présenta le même argument, fournissant trop de détails pour que nous le citions ici dans toute sa longueur.

partir de celle des signes simples. C'est précisément ce à quoi Tarski s'appliqua en 1933, à travers l'introduction du procédé d'assignation. Nous avons souvent répété qu'à cette date, à l'instar de Frege, il travaillait encore dans un langage interprété. Mais cela ne veut évidemment pas dire que son langage arrivait d'emblée avec une interprétation donnée. Étant artificiellement construit, il exigeait la spécification de la valeur de ses termes et formules. Cela signifie simplement qu'une fois cette tâche réalisée, tout le travail métathéorique concernait cette unique interprétation, tandis que les avancées postérieures à 1936 en utilisaient une multitude, jetant ainsi les bases de la théorie des modèles.

À l'issue de ces deux étapes, chaque formule a donc acquis une valeur de vérité. Il devient alors possible de démontrer que celles qui furent choisies en axiomes sont vraies, et que les règles de dérivation préservent la vérité, *i.e.* que si deux formules vraies sont prises en prémisses de ces règles, la conclusion est aussi une formule vraie. Voilà le propos des théorèmes d'adéquation, que Tarski démontra pour son système de 1933. Pourtant, comme nous l'avons vu, il ne vit pas dans ce résultat une confirmation de ce que son intuition lui avait dicté, *i.e.* du fait que les axiomes étaient vrais et que les règles d'inférence préservaient la vérité (1933, p. 173). Il avait en effet de bonnes raisons de s'abstenir de formuler une telle conclusion. *Ce qu'expriment* les énoncés axiomatiques du système – que Frege nommait des 'axiomes' – est aussi exprimé par des énoncés axiomatiques de la métathéorie. Il n'est donc pas question de démontrer *ces contenus* en utilisant cette méthode, qui supposerait ce qu'elle tenterait d'établir. De plus, la preuve du théorème d'adéquation ne s'appuie pas seulement sur les axiomes logiques de la métathéorie, mais aussi sur ses axiomes *sémantiques*. Elle établit que, les signes primitifs ayant telle valeur et déterminant de telle manière celle des termes et formules, alors les formules qui servent d'énoncés axiomatiques pour le système prennent la valeur Vrai. Rien n'assure que le contenu de ces énoncés soit vrai – ce contenu est lui-même *supposé* dans la métathéorie –, mais seulement que si le langage-objet suit les règles sémantiques dictées par les axiomes sémantiques de la métathéorie, *et si les axiomes logiques de celle-ci sont vrais*, les énoncés axiomatiques du système étudié possèdent la valeur – en termes fregéens, réfèrent au – Vrai. Ainsi, ce ne sont pas les lois logiques qui se trouvent justifiées, mais l'adoption de tel ou tel énoncé comme base pour les démonstrations, relativement à la manière dont les signes se sont vues assigner une référence [147]. Voilà pourquoi Blanchette explique que "ce sont les vertus de la codification qui sont en jeu dans les investigations métathéoriques, et non les principes sous-jacents qui sont codifiés." (2012, p. 158). L'objet d'évaluation n'est pas la logique sous-jacente au système étudié, mais la manière dont ce dernier arrive à mettre en œuvre cette logique, sur laquelle la métathéorie s'appuie déjà.

Frege avait d'excellentes raisons de recourir à une telle démonstration. Au début de la troisième partie des *Grundgesetze*, il expliqua :

> La recherche de la connaissance exige des règles constituées de telle sorte que si un nouvel énoncé est dérivé d'énoncés vrais, lui aussi est vrai. Bien entendu, le fait que les règles sont de cette sorte ne peut être décidé qu'une fois que leur référence a été attribuée aux signes, parce qu'avant cela nous ne pouvons les utiliser pour former des énoncés qui expriment des pensées vraies. (Frege 1903a, p. 112)

147. La même nuance doit être introduite au niveau des règles. Un théorème d'adéquation n'assure aucune fondation aux règles de démonstration – qui lient entre eux des contenus d'énoncés –, car celles-ci sont aussi exploitées par la métathéorie. En revanche, les règles syntaxiques de dérivation – qui lient entre eux des énoncés, *i.e.* des éléments linguistiques – se voient ainsi justifiées. En vertu des règles sémantiques qui régissent le langage-objet, et en s'appuyant sur les règles et lois logiques de la métathéorie, le point suivant est prouvé : si des énoncés figurant en prémisses de telles règles prennent la valeur Vrai, alors il en va de même de l'énoncé-conclusion. Ainsi, ce n'est pas le lien entre les pensées exprimées qui est ainsi légitimé, mais le fait que les énoncés du langage-objet situés de chaque côté de la règle expriment bien des pensées qui sont ainsi liées.

Frege esquisse exactement la procédure décrite ci-dessus, qui consiste à spécifier la sémantique d'un langage avant de vérifier si, en accord avec celle-ci, les règles conduisent d'énoncés vrais en énoncés vrais. Dans la première partie des *Grundgesetze*, il prit soin d'assigner une référence à chaque nom primitif, d'en déduire que chaque nom complexe en possédait aussi, et de discuter les règles et axiomes du système. L'extrait ci-dessus motive à lire ces passages comme une tentative (dispersée) de démonstration de l'adéquation de l'Idéographie. Certains commentateurs cèdent à cette impulsion, tandis que d'autres y résistent. Heck (2012, Section 5.3) et Weiner (2005b) ont tous deux examiné à la loupe les paragraphes en question, aboutissant à des conclusions opposées. À notre tour, il nous faudra en pénétrer le détail. Mais avant cela, nous souhaitions répondre à un double argument. Celui-ci pourrait être utilisé pour contester *en amont* la présence d'une telle tentative au sein des *Grundgesetze*, sans tenir compte de la substance des passages concernés. Le premier versant résulte de la correction que nous avons apportée au problème de la justification, tandis que le second exploite le caractère élucidatoire de ces divers passages. Dans les écrits du courant antisémantique, il est (très) fréquemment avancé que, Frege n'admettant aucune justification de la logique, les passages qui rappellent une telle tentative sont de nature élucidatoire et, par conséquent, échappent au domaine de la science. Pour notre part, nous avons mené une étude approfondie des différentes notions en jeu dans cet argument. Nous avons ainsi traqué celui-ci, afin de rendre apparente sa substance véritable. Il est désormais acculé, et s'apprête à se retourner vertement contre ses concepteurs.

3.2.4.4 Un théorème d'adéquation *en guise* d'élucidations

Un théorème d'adéquation a vocation à légitimer l'utilisation d'un langage, en s'appuyant doublement sur les règles et axiomes logiques et sur la manière dont ce langage se voit attribué une interprétation. Pour Frege, si un tel théorème est démontrable, alors sa preuve peut s'écrire dans une extension de l'Idéographie. Mais dans ce cadre, la preuve qu'un vecteur – l'Idéographie – est adapté au déploiement des démonstrations logiques seraient elle-même déployée dans ce vecteur (enrichi), et exigerait ainsi qu'il possède un fonctionnement adéquat, *i.e.* ce qu'elle cherche à établir. Voilà la manière dont l'argument de Goldfarb doit être formulé, à la lumière de l'analyse que nous avons menée.

Il ne fait aucun doute qu'aux yeux de Frege, une telle démarche n'aurait aucune valeur. En revanche, il est crucial de comprendre que la preuve en question, si elle est possible, ne présente *aucune* circularité. Elle établit que si les noms primitifs réfèrent à telles et telles entités, que si la référence des noms complexes est ainsi déterminée relativement à celle des noms primitifs, alors les énoncés axiomatiques sont vrais et les règles de dérivation conduisent d'énoncés vrais en énoncés vrais. Cette démonstration consiste en une succession de *pensées* qui n'incorpore en aucune manière sa conclusion dans ses prémisses.

Le problème, dans la démarche évoquée ci-dessus, n'a pas trait à la preuve – à la suite de pensées dont les unes sont conséquences logiques des autres – du théorème d'adéquation, mais à l'*endroit* où cette preuve est déployée. La démonstration est indépendante de cet endroit. Elle est, en elle-même, correcte ou incorrecte. Néanmoins, son propos est précisément d'assurer qu'un certain lieu est adéquat au déploiement de preuves, *i.e.* à l'expression de pensées et à la manière dont il les fait se succéder. Ainsi, il est vain de l'implémenter dans le lieu dont elle veut justifier le bien-fondé. Si nous nous y employons malgré tout, le risque n'est pas d'altérer directement la preuve, ou d'y injecter une circularité quelconque, mais de sombrer dans diverses confusions quant à ce que nous croyons exprimer, de n'être aucunement garanti d'écrire la preuve que nous visons.

Ainsi l'argument du clan antisémantique s'effondre totalement : les positions de Frege ne

conduisent absolument pas au rejet des théorèmes d'adéquation. L'évaluation d'un système de déduction est parfaitement envisageable, bien que celle de l'Idéographie, *i.e.* du *premier* système idéal, doive malheureusement être menée dans une langue imparfaite. Et c'est précisément *en cela* qu'il s'agit d'élucidations : car ce travail constitue une condition à l'élaboration du système, et figure donc parmi les étapes pré-théoriques à réaliser en allemand. Comme nous l'avons vu en section 3.2.3.8, Frege n'a jamais cru que ces étapes ne procédaient pas par d'authentiques raisonnements. Il s'est contenté d'accabler la langue naturelle dont les défauts ne permettaient pas une conduite idéale de ces derniers. La difficulté à laquelle il se croyait confronté était celle d'un *ordre d'exécution*. L'appréciation d'un nouveau véhicule pour les pensées ne pouvaient avoir lieu que dans un langage qui lui était de beaucoup inférieur. Il était donc nécessaire d'être prudent, et d'aider le lecteur à déjouer les ruses de l'allemand. Mais cela n'altère en *aucune* manière la viabilité – ou le caractère *théorique* – du raisonnement réalisé.

Voici la conclusion que nous attendions : Frege n'aurait eu aucune raison de voir une quelconque circularité dans la démonstration d'un théorème d'adéquation pour l'Idéographie. Avec elle, notre examen des arguments du clan antisémantique arrive enfin à son terme. Nous savons désormais que rien ne s'oppose à la possibilité d'une sémantique fregéenne, tant qu'elle se limite aux ressources dont nous avons fait état en section 3.2.3, et que le propos des théorèmes d'adéquation contemporains n'est en rien étranger aux perspectives fregéennes. Il existe néanmoins d'autres questions, car le rôle des sémantiques modernes ne se limite pas à la démonstration de ces théorèmes. Néanmoins, ces interrogations s'éloignent considérablement de l'objet de notre thèse [148]. Rappelons que nous avons mené cette enquête dans le but de comprendre précisé-

148. Au point nous en sommes, nous désirons néanmoins procéder à quelques commentaires à leur sujet. Avant toute chose, disons qu'elles sont ardemment débattues dans la littérature. Celles qui concernent les résultats sémantiques indépendants d'une quelconque variation d'interprétation suscitent moins de discussion. Tous conviennent que Frege n'a jamais entrepris quoi que ce soit qui s'apparente à la démonstration de théorèmes de cohérence ou de complétude syntaxiques. À ce dernier sujet, il était coutumier de remarques telles que :

> Le principe de la plus grande limitation possible du nombre des lois primitives ne serait pas complètement satisfait sans la preuve que le peu qui reste est encore suffisant. [...] Fournir un échantillon d'exécution brève et commode de ces inférences, ce n'était pas là mon intention, mais plutôt donner la preuve que j'ai assez de mes lois pour tout faire. (Frege 1881, p. 42 / 48)

Voilà qui peut laisser croire que Frege en appelait à la démonstration d'un théorème de complétude. Au contraire, en s'exprimant ainsi, il n'envisageait jamais une preuve métasystématique, il entendait davantage accéder au constat heuristique que ces lois étaient suffisantes, basé sur la croyance que si les principaux théorèmes d'un domaine mathématique étaient démontrées sur leur base, alors le reste en découlait nécessairement. Frege n'envisageait évidemment pas les grands résultats négatifs du 20e siècle et, à cette époque, il n'était pas le seul.

Le désaccord entre les deux camps survient avec la question de savoir s'il aurait *pu* envisager de tels théorèmes, et quelle valeur il leur aurait attribué. Pour un aperçu des différentes réponses qui sont apportées, voir (Blanchette 2012, chapitre 7) et (Goldfarb 1979).

La dispute prend une autre tournure lorsqu'elle s'intéresse aux travaux qui exploitent un procédé de réinterprétation des langages. Comme nous l'avons vu, Frege envisagea de recourir à une stratégie de ce genre pour démontrer l'indépendance de pensées. À travers celle-ci, il proposa de faire varier le contenu de tous les termes *non logiques* d'un langage. Ceci rappelle immédiatement la manière dont les notions de conséquence et vérité logiques sont caractérisées en théorie des modèles. Les commentateurs se questionnent donc à ce sujet, et la séparation entre les deux groupes se fait moins nette.

Il est clair que Frege n'a jamais clairement spécifié de critère de logicité. Une partie du clan antisémantique estime qu'il tenait pour logique tout énoncé constitué d'un vocabulaire totalement neutre – voir par exemple (Goldfarb 1982) –, *i.e.* qui n'est spécifique à aucune discipline particulière. Cette idée soulève des difficultés. D'une part, il n'est pas aisé de définir proprement la neutralité. La méthode la plus naturelle consiste à dire qu'un nom est neutre s'il réfère à une fonction qui prend *toute* entité du bon type en argument, autrement dit qui n'opère pas sur un domaine restreint. Cependant, le principe de complétude touche la totalité des noms d'un système idéal, même lorsque celui-ci s'étend au-delà de la logique. Par exemple, le développement de la géométrie exigerait d'intégrer un concept de *parallélisme* qui s'adapte *aussi* aux nombres. Nous pourrions rétorquer qu'il s'agit là d'une simple

ment la nature du travail réalisé dans la première partie des *Grundgesetze*, et notamment des mystérieuses passages à consonance sémantique. Ces derniers *pourraient* contenir l'élaboration rudimentaire d'une sémantique et son exploitation à travers une tentative de démonstration de l'adéquation de l'Idéographie. C'est au moins ainsi qu'elles sont lues par nombre d'auteurs du courant sémantique. Il nous fallait donc examiner *en amont* les arguments fondamentaux que leurs adversaires opposent à cette interprétation sans même considérer les passages en question. C'est désormais chose faite, et nous tenons entre nos mains le prisme à travers lequel nous devrons examiner ces extraits. Il ne nous reste plus qu'à nous y employer.

3.2.5 Synthèse : la double captivité logique

Tandis que certains examinent avec enthousiasme le travail sémantique novateur réalisé au sein des *Grundgesetze*, d'autres rétorquent qu'aucun adhérent de l'école universaliste n'aurait pu accomplir une telle tâche. À l'instar d'Hintikka, ceux-là estiment que "selon les membres de cette tradition, nous sommes pour ainsi dire prisonniers de notre langage" (1988, p. 209). Dans cette section, nous avons tenté de comprendre en quoi les positions de Frege nous maintenaient captifs du langage ou, ainsi qu'ils le formulent plus souvent, de la logique. Nous avons découvert

---

mesure artificielle vouée au respect du principe, mais que le concept *authentique* de *parallélisme* ne s'applique qu'à des objets géométriques. Néanmoins, nous doutons de la valeur qu'une telle distinction entre concepts exploité et authentique aurait reçue aux yeux de Frege, d'autant que celui-ci eut aussi recours à des procédés artificiels pour étendre le champ d'action de fonctions censées être logiques, car impliquées dans l'idéographie – par exemple $\backslash\xi$. D'autre part, selon ce critère, toute pensée vraie exprimable dans l'idéographie est une vérité logique. Or, comme le souligne Heck (2012, p. 37), la pensée vraie qu'il existe un objet différent de tout parcours-de-valeurs peut être rendue dans ce langage par l'énoncé '$\overset{\mathfrak{a}}{\top\!\smile\!\top}\overset{\mathfrak{f}}{\smile\!\top}\ \mathfrak{a} = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}(\varepsilon))$'. Pourtant, l'existence d'un tel objet n'est pas une affaire sur laquelle la logique peut se prononcer.

D'autres membres du courant antisémantique adoptent une position encore plus radicale. Ricketts explique :

> Frege ne dispose pas d'une conception générale de la conséquence logique, d'une conception globale de la logique. (Ricketts 1996, p. 124)

À ses yeux, pour Frege, un critère de logicité était *par nature* inenvisageable. Heck s'oppose à cette interprétation :

> Je ne vois pas comment assumer cette affirmation sans prétendre que, pour Frege, la vérité ou la fausseté du logicisme n'était pas une question substantielle. (Heck 2012, p. 34)

Selon Heck, l'entreprise de réduction des mathématiques (hors géométrie) exige de pouvoir discuter du caractère logique d'un axiome. Si Frege n'a pas effectivement fourni de critère général, cela traduit davantage un échec qu'un principe. Les autres défenseurs de la lecture sémantique le rejoignent dans cette conclusion. En revanche, ils se divisent sur la question de savoir s'il aurait pu accepter la version modèle-théorique d'un tel critère. Blanchette (1996, 2012, Chapitre 6) propose une réponse négative et détaillée. Heck (2010) estime au contraire qu'il existe, dans les textes de Frege, des traces du fait qu'il aurait pu se diriger vers une telle caractérisation. Il ne fournit néanmoins aucun avis définitif. Stanley se situe dans la même ligne :

> Étant donné que Frege était intéressé par les questions sémantiques, il n'aurait pas manqué d'être impressionné par la profondeur avec laquelle la théorie des modèles les traite. Ainsi, je présume que, comme nous, Frege aurait été enclin, pour des raisons pragmatiques, à tenir les caractérisations de théorie des modèles comme des représentations légitimes de nos notions sémantiques informelles. Mais une présomption n'est pas un argument, et d'autres recherches attendent encore d'être menées pour trancher cette question. (Stanley 1996, p. 69)

Enfin, la question des théorèmes de catégoricité s'avère tout aussi riche. Lorsque Heck (2011, Chapitre 2) affirma que la preuve du théorème 263 des *Grundgesetze* contenait une caractérisation catégorique des nombres naturels, il ouvrit un débat auquel Tappenden (1997) et Blanchette (2012, Chapitre 7), entre autres, s'empressèrent de prendre part.

Nous en avons terminé avec ce rapide tour d'horizon. Le lecteur se doute que nos réflexions concernant le lien que Frege entretenait et aurait pu – voire dû – entretenir avec la sémantique nous ont naturellement conduit à façonner notre propre opinion concernant ces questions. Celles-ci n'ont malheureusement pas la place dans cette thèse, mais nous ne désespérons pas de pouvoir les traiter ailleurs, et d'exploiter à cette fin le travail que nous avons abattu ici.

deux différents versants à cette idée, qui proviennent de ambiguïté que Frege attacha au terme 'logique'.

Il nommait ainsi cette science qui, en tant que telle, admet ses propres lois, ses propres pensées, son propre vocabulaire, etc., mais qui – osons le dire – possède ceci de spécifique qu'elle est générale. Ses axiomes et règles sont valables dans tous les domaines, et chaque raisonnement est contraint de s'y soumettre pour ne pas sombrer dans l'erreur. Ainsi, il n'est pas question de la *justifier*, car toute entreprise de la sorte exploiterait fatalement les ressources de la discipline dont elle tenterait d'asseoir la légitimité. Nous ne pouvons sortir de la logique – conçue comme la science la plus générale – en ceci que nous ne pouvons raisonner hors de son emprise, pas même pour discuter son bien-fondé.

Mais Frege sollicitait le terme 'logique' dans un autre contexte. Il parlait de décomposition, d'analyse et de structure *logique* d'une pensée – ou, plus généralement, d'un sens – même lorsque celle-ci débordait du domaine de la logique entendue comme science. Par exemple, une pensée de géométrie ou de physique peut tout à fait être décomposée logiquement. Des sens parviennent à s'articuler pour constituer des pensées lorsque leurs insaturations sont compatibles, et ils conduisent à des entités qui opèrent les unes sur les autres selon ce même principe. Derrière ces règles de compatibilité se dresse donc une hiérarchie de catégories de sens et de références – logiques et ontologiques. Et cette hiérarchie est absolue en cela que la catégorie à laquelle appartient une entité ne dépend pas du langage par lequel elle est exprimée ou nommée. Est objet ce qui peut être objet de langage, *i.e.* de *tout* langage, ou encore *du* langage. Il n'est donc pas possible de ramener la totalité des entités au même niveau de langage pour agir collectivement sur elles, pour les distinguer, les classer ou les organiser. Il n'est pas possible de *théoriser* proprement cette hiérarchie dans le lieu où elle se situe. Nous ne pouvons procéder, comme nous venons de le faire, que par une judicieuse analogie [149]. Nous sommes ainsi prisonniers du fonctionnement (de la constitution) logique du sens en cela que nous ne pouvons nous en extraire – ce qui serait requis – pour l'expliquer.

Il nous a ensuite fallu replacer ces considérations dans l'horizon d'une sémantique fregéenne pour comprendre si cette double captivité faisait obstacle à l'élaboration d'une telle science. Nous sommes parvenus à trois conclusions essentielles.

En premier lieu, les théorèmes d'adéquation n'ont jamais eu vocation à garantir la vérité des lois logiques, mais seulement à assurer que les énoncés axiomatiques d'un système exprimaient en effet ces lois. L'objet d'évaluation n'est pas la logique sous-jacente au système étudié, mais la manière dont ce dernier arrive à mettre en œuvre cette logique. La preuve d'un tel théorème pour un système logique peut donc être menée dans le respect de cette logique – celle du système – sans présenter aucune circularité. Par conséquent, il est tout à fait possible que, comme certains le croient, les passages-clefs des *Grundgesetze* constituent collectivement une tentative de démonstration d'un théorème d'adéquation pour l'Idéographie. Nous pouvons au moins affirmer, contre le clan antisémantique, que la première captivité logique relevée ci-dessus ne s'oppose pas à cette idée.

Ensuite, si l'ontologie fregéenne interdit d'associer, à travers une ou plusieurs fonctions, des noms incomplets à leurs références, elle autorise tout à fait la prise en compte de relations qui les lient [150], contrairement à ce qu'affirment Weiner et ses compagnons. C'est dans ce cadre rigoureux qu'une sémantique fregéenne peut être constituée, et c'est aussi dans ce contexte qu'il faudra tenter de reconstruire le travail des passages-clefs pour déterminer sa nature théorique ou

149. Nous avons éclairci cette analogie en section 3.2.3.5.

150. En effet, aucune fonction ne peut prendre une valeur insaturée en un quelconque argument. En revanche, il est possible qu'un concept $R_\beta(\xi, \varphi(\beta))$ prenne la valeur Vrai lorsque un nom et sa référence sont pris en argument.

imagée.

Enfin, malgré certaines remarques qui auraient pu le guider jusque-là, Frege n'a pas lui-même établi les contraintes auxquelles sa propre ontologie le soumettait. À ses yeux, le travail élucidatoire ne consistait pas à dévoiler ce qui échappait par nature au règne du sens, il comportait les étapes préparatoires requises dans l'élaboration d'un système idéal, et par conséquent exposées aux imperfections des langues vernaculaires. Frege n'a donc jamais estimé que les passages à caractère sémantique ne contenaient pas d'authentiques raisonnements, mais seulement que ceux-ci n'étaient pas idéalement conduits. Il est possible que ses propres thèses ne s'accordent pas avec cette conclusion. Néanmoins, nous ne devons pas tenir compte de ses commentaires sur ce sujet – qu'il cernait mal – pour établir ou contester ce point. À cet égard, le débat entre les deux camps doit impérativement être nettoyé de sa dimension exégétique.

C'est donc en examinant les arguments nombreux et, parfois, désordonnés du clan antisémantique que nous sommes parvenus à poser le cadre dans lequel les deux questions suivantes doivent être abordées : quel était le propos des passages en question et, au regard de l'ontologie fregéenne, ce propos peut-il faire l'objet d'un raisonnement proprement scientifique ? Nous sommes désormais en mesure d'y répondre et, ce faisant, nous atteindrons enfin l'objectif que nous nous étions fixé dès le commencement de cette thèse : éclaircir intégralement la première partie des *Grundgesetze*.

3.3 §§10, 29-31 et assimilés

3.3.1 Préambule

Nos langues vernaculaires incorporent des noms dénués de référence. C'est ainsi que la fiction s'y laisse conter, et que les romans, nouvelles ou pièces de théâtre y sont rédigés. Frege constate que les phrases dans lesquelles ces termes figurent se voient privées de valeur de vérité. En appliquant le principe de compositionnalité pour les références, il conclut que l'énoncé 'Ulysse est un homme' n'est ni vrai ni faux, car le terme 'Ulysse' – l'un de ses composants – ne réfère pas [151]. Si les mythes et les fables justifient la présence de tels noms dans les langues quotidiennes [152], leur intrusion dans les langages scientifiques constitue, selon Frege, une importante source d'erreurs et de confusions. Il tenait donc à les écarter totalement de son idéographie :

> Veiller à ce qu'aucune expression ne puisse être dépourvue de référence, à ce qu'on ne puisse jamais calculer sans y prendre garde sur des signes vides tout en croyant opérer sur des objets, c'est là ce qu'exige la rigueur scientifique. (Frege 1891, p. 135 / 93)

L'alphabet mathématique traditionnel intègre notamment le nom d'un opérateur qui envoie une suite sur la limite de la série associée : '$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_n$'. Pourtant, seule une suite *convergente* peut déterminer une telle limite. Si u_n diverge, alors le nom précédent se trouve dénué de référence – par exemple '$\sum_{i\in\mathbb{N}} n$'. Au sein d'une formule, un tel terme suggère que nous "opér[ons] sur [un] objet", tandis que nous manipulons en vérité un signe totalement vide. Frege entendait protéger le langage logique de ces "effroyables expériences" [153].

151. (Frege 1892-1895, p 133 / 145)
152. ainsi que la nécessité de procéder à travers certaines analogies pour dévoiler les différentes catégories ontologiques. Mais cela, Frege n'a pu le dire car, comme nous le savons désormais, il ne l'a pas vu clairement.
153. (Frege 1891, p. 135 / 93)

Les §§29-31 des *Grundgesetze* furent destinés à établir que l'objectif était atteint, *i.e.* que chaque nom de l'idéographie possédait une référence. Au début du §29, Frege formula distinctement la question : "Quand un nom réfère-il à quelque chose ?". Quelques pages plus loin, en guise d'amorce au §32, il tirait la leçon du travail effectué :

> Il est ainsi établi que nos huit noms de base possèdent une référence et par conséquent qu'il en va de même pour les noms correctement formés à partir d'eux. (Frege 1893, p. 50)

Les développements des §§29-31 s'appuient sur un autre résultat, obtenu préalablement au cours du §10. Ces quatre paragraphes s'examinent donc conjointement, et forment une des difficultés les plus épineuses des *Grundgesetze*. Malgré une littérature secondaire conséquente [154], les points d'accord concernant leur signification précise sont rares. D'aucuns affirment qu'ils viennent compléter le travail réalisé lors de l'introduction des noms primitifs, règles et axiomes de l'Idéographie, dernière pièce manquante pour conclure que chaque énoncé dérivable dans ce système réfère au Vrai, *i.e.* pour achever la preuve d'un théorème d'adéquation. Les extraits en jeu – que nous avons nommés 'passages-clefs de la première partie des *Grundgesetze*' – sont donc les suivants :

- les quatre paragraphes centraux : §§10, 29-31.
- l'introduction des signes primitifs du langage : pp. 9-12, 15, 19, 20, 41 ;
- l'introduction des règles d'inférence du système : pp. 25-30, 32 ;
- l'introduction des axiomes du système : pp. 34-36, 42 ;

Notre ultime objectif consiste à en éclaircir le contenu, en prenant part à l'important débat qu'ils suscitent. Si les membres du courant sémantique ne s'accordent pas sur la *manière* dont Frege escomptait parvenir à ce résultat, un grand nombre d'entre eux estiment néanmoins qu'ils étaient destinés à accomplir les tâches suivantes : spécifier la référence des noms primitifs de l'idéographie ; montrer que chaque nom complexe possède en retour une référence unique déterminée selon des règles compositionnelles précises à partir de celles des noms primitifs ; et enfin prouver, en exploitant ces règles, que les énoncés axiomatiques de l'Idéographie réfèrent au Vrai et que, s'il en va ainsi d'énoncés pris en prémisses des règles de ce système, il en va de même des énoncés obtenus en conclusion. Leurs adversaires affirment au contraire, nous le savons, que Frege n'aurait jamais pu envisager la réalisation d'un tel travail. Nous avons pris soin de discuter les arguments généraux qui sous-tendent les thèses des uns et des autres afin d'aborder cette étude dans une position optimale, que nous espérons avoir atteinte.

3.3.2 Le principe de complétude pour les fonctions

3.3.2.1 Présentation

La troisième partie (inachevée) des *Grundgesetze* débute sur une importante mise au point à travers l'établissement d'un principe essentiel :

> La définition d'un concept [...] doit être complète. Pour chaque objet, il doit être déterminé sans ambiguïté s'il tombe ou non sous le concept [...]. Ainsi, il ne doit pas exister d'objets pour lesquels, après la définition, il demeure incertain qu'ils tombent

154. (Bartlett 1961, pp. 72-75, Dummett 1991b, Chapitre 17, Moore et Rein 1986, Moore et Rein 1987, Heck 2012, Partie 1, Linnebo 2004, Parsons 1965, p. 190, Resnik 1986, Ricketts 1997, Schroeder-Heister 1987, K. F. Wehmeier et Schroeder-Heister 2005, Weiner 2002)

> ou non sous le concept, même s'il n'est pas toujours possible, pour nous autres humains, avec notre savoir lacunaire, de trancher la question. Métaphoriquement, nous pouvons nous exprimer ainsi : un concept doit avoir des limites nettes. (Frege 1903a, p. 69)

Ainsi posé, le principe de complétude semble se limiter aux noms de concepts *définis*, excluant les noms primitifs. Néanmoins, il est clair que si les seconds ne respectent pas ce principe, alors les premiers le transgressent aussi [155]. Par ailleurs, en d'autres lieux, Frege ne s'est pas restreint à un tel cadre. Citons pour l'exemple un passage d'un texte posthume :

> Chaque concept doit être délimité strictement, de façon que soit déterminé pour tout objet si, oui ou non, il tombe sous le concept. (Frege 1897-1898, p. 168 / 183)

Dans la section en question des *Grundgesetze*, Frege menait une croisade contre une méthode de définition couramment employée par les mathématiciens de son époque, c'est pourquoi il concentra sa critique dans ce contexte. En réalité, il étendait son principe de complétude à *toute* introduction de concept et, plus encore, de fonction :

> Une fonction de premier niveau doit toujours être constituée de telle sorte qu'elle prend un objet pour valeur, quel que soit l'objet pris en argument. (Frege 1903a, p. 75)

On trouve des clauses similaires concernant les fonctions à plusieurs arguments et de niveaux supérieurs.

Il faut comprendre correctement l'exigence de complétude. Frege ne réclamait pas que chacun soit immédiatement en mesure de déterminer la valeur d'une fonction pour tel ou tel argument, il demandait que cette possibilité soit maintenue en principe par la manière dont les noms de fonctions sont introduits – *qu'il s'agisse ou non de définitions*. Frege réalisa l'intérêt de formuler clairement ce principe lorsqu'il fut confronté aux travaux d'autres chercheurs traitant des fondements des mathématiques, notamment à ceux de Peano. Il remarqua que certains opérateurs – par exemple l'addition – étaient dans un premier temps limités à un domaine particulier – par exemple celui des entiers –, avant de se voir progressivement étendus – par exemple aux rationnels, aux réels, etc. Le problème était le suivant : la nouvelle définition, visant à étendre l'action de l'opérateur, couvrait aussi les cas pris en compte par l'ancienne. La fonction risquait alors d'associer deux objets différents, relativement aux deux définitions différentes, à une même entité. Pour éviter que les clauses ne rentrent en collision, il était donc nécessaire de s'assurer que l'ancienne coïncidait avec la nouvelle dans son champ d'action. Or cette étape était souvent omise par les mathématiciens. Frege proposa un remède drastique : son principe de complétude. Selon celui-ci, l'introduction d'un nom de fonction devait prendre en considération *tous* les arguments possibles.

3.3.2.2 Domaines de quantification

On peut déceler un lien immédiat entre le principe de complétude et l'objectif des §§29-31. Considérons un domaine d'objets auquel nous allons restreindre nos différentes fonctions. Ainsi, une fonction de premier niveau – de type (0) –, associe un objet du domaine à tout objet du domaine ; une fonction de second niveau – de type ((0)) – associe un objet du domaine à n'importe quelle fonction parmi ces dernières, etc. Disons que nous disposons d'une stratégie pour

155. En section 3.2.3.7, nous avons expliqué pourquoi Frege usa ici du terme 'définition' pour qualifier un principe qui s'appliquait aussi, et surtout, à l'introduction des noms primitifs.

déterminer la référence d'un nom de fonction si et seulement si nous disposons d'une stratégie pour déterminer la valeur de cette référence en tous ses arguments (relativement au domaine, donc). Alors, comme nous allons le voir, la manière dont les noms sont construits nous octroie une stratégie pour déterminer les références de tous les noms complexes sur la base de celles des noms simples. Afin de disposer d'une telle stratégie pour n'importe quel nom du langage, il suffit donc d'introduire les noms primitifs de fonctions de manière à permettre la détermination de leur référence, *i.e.* la détermination de la valeur de cette référence en n'importe quel argument (relativement au domaine). Voilà précisément ce qu'exige le principe de complétude. Ainsi, sous l'autorité de ce dernier, il suffit de montrer que les noms primitifs possèdent une référence pour s'assurer qu'il en va de même de tous les noms du langage.

Certains commentateurs [156] estiment qu'il s'agit précisément de la méthode adoptée par Frege. Le §30 contiendrait le pas d'induction, tandis que le §31 établirait qu'il est possible de déterminer la valeur de la référence de chaque nom primitif en n'importe quel argument. Cependant, ce raisonnement est conduit au sein d'un métalangage, relativement à un domaine d'objets restreint. Or, selon toute une tradition d'exégètes de Frege, cette méthode contredirait frontalement l'*universalisme logique* de celui-ci. Nous avons vu qu'il n'était pas aisé de fournir une caractérisation précise de cette dernière expression, car les historiens de ce courant s'opposent parfois dans leurs lectures. Ils s'entendent néanmoins sur un point précis : pour Frege, la quantification s'opèrerait sur la *totalité* des objets, et en aucun cas sur un domaine *restreint*. Arrêtons-nous quelques instants sur cette affirmation.

En énonçant son principe de complétude, Frege n'a jamais spécifié que l'introduction des noms de fonctions devait permettre de déterminer la valeur prise par leurs références pour tout objet *du domaine de quantification*. Comme nous l'avons vu, il s'est contenté d'évoquer la *totalité* des objets. Il a par ailleurs discuté la limitation de domaine, mais toujours pour la critiquer. Nous comprenons donc aisément pourquoi les exégètes ont majoritairement interprété la conception frégéenne de la quantification en termes universalistes. Il nous faut pourtant résister à tirer cette conclusion sans comprendre le type de restriction que Frege dénonçait et les raisons de son rejet. Voyons donc les objections qu'il avança, lorsqu'il envisagea de cantonner l'opération de l'addition aux seuls nombres :

> Mais ne peut-on pas spécifier que l'expression 'la somme du premier et du second objet' doit avoir une référence seulement lorsque les deux objets sont des nombres ? Ainsi on pourrait certainement supposer que *quelque chose qui ajouté à lui-même donne Un* est un concept avec des frontières nettes, car on sait qu'aucun objet ne tombe dessous s'il n'est pas un nombre. Par exemple, la Lune ne tombe pas dessous, puisque la somme de la Lune et de la Lune ne fait pas Un. Mais cela est faux, parce que l'énoncé 'la somme de la Lune et de la Lune est Un' n'est à présent ni vrai ni faux, car dans les deux cas les mots 'la somme de la Lune et de la Lune' devrait référer à quelque chose, ce qui est exactement ce que la clause suggérée rejette. (Frege 1893, p. 76)

Frege soulève ici un problème méthodologique totalement indépendant de la question du domaine de quantification. Supposons qu'il soit possible de déterminer la valeur de la fonction $f(\xi)$ seulement pour les objets qui tombent sous un concept $P(\xi)$. Supposons à présent qu'un nom propre t réfère à un objet Δ qui ne tombe pas sous ce concept. Alors $\ulcorner f(t) \urcorner$ se voit privé de référence. Dans ce cas néanmoins, t est un terme du langage-objet et Δ un objet du domaine. Cette remarque s'oppose donc uniquement à la variation de l'*univers du discours* telle que Peano

156. par exemple Heck (2012).

et d'autres en firent usage, aucunement à celle du domaine de quantification. Frege expliqua que pour parvenir à une définition limitée, il ne suffisait pas d'écrire une formule telle que :

$$\text{‘}\forall x(f(x) := \Phi(x))\text{’}$$

En effet, dans ce contexte, le quantificateur parcourt aussi les objets qui ne tombent pas sous $P(\xi)$, pour lesquels l'égalité ne vaut pas. Malheureusement, toute tentative de correction révèle, plutôt qu'elle ne corrige, le problème :

$$\text{‘}\forall x(P(x) \rightarrow (f(x) := \Phi(x)))\text{’}$$

L'ajout d'un conditionnel est inopérant, car le terme t peut toujours venir saturer le nom '$f(\xi)$', privant les énoncés dans lesquels il figure de valeur de vérité.

Finalement, rien n'est objecté à une restriction du domaine de quantification *via* un métalangage. Au contraire, un tel geste résoudrait la difficulté que nous venons d'exposer. Dans la première des deux formules ci-dessus, le quantificateur ne parcourrait que les objets tombant sous le prédicat $P(\xi)$, et la définition octroierait à '$f(\xi)$' la référence souhaitée. Pour l'instant, donc, nous n'apercevons aucun argument avancé par Frege contre les définitions limitées à certains objets, *tant que la quantification se limite elle aussi à ces objets*. Son raisonnement s'oppose exclusivement aux définitions qui ne s'appliquent pas à tous les objets *du domaine de quantification*, parce qu'elles privent certains termes de référence. Mais tant que le champ de la définition coïncide avec le domaine de quantification, tout terme conserve une référence, et le piège est évité [157].

Patricia Blanchette (2012, Chapitre 3) entend circonscrire ainsi les enjeux liés au principe de complétude. Selon elle, Frege n'y aurait eu recours que pour répondre à un réquisit de complétude linguistique : s'assurer que tout terme possède une référence. Or, dans un tel contexte, la restriction du domaine de quantification ne pose absolument aucun problème. Il est vrai que la conclusion du long développement des *Grundgesetze* semble appuyer ce constat :

> Dans le premier volume, nous avons exprimé ce point ainsi : tout nom de fonction doit avoir une référence. Ainsi, toute définition conditionnelle ou partielle doit être rejetée. Chaque signe doit être complètement expliqué d'un seul geste, tel que, en ce sens, il reçoive une référence.
>
> Tous ces points sont intimement connectés, et peuvent être conçus comme découlant du principe de complétude pour les définitions. (Frege 1903a, p. 78)

Un autre texte – posthume, cette fois-ci – indique la même direction :

> La partie insaturée d'une partie d'une phrase, dont la signification a été appelée un concept, doit avoir la propriété de fournir une phrase authentique quand elle est saturée par un nom propre ; ce qui veut dire qu'elle doit fournir le nom propre d'une valeur de vérité. C'est en cela que consiste l'exigence que le concept ait une délimitation précise. (Frege 1906b, p. 212 / pp. 232-233)

Toute cette logistique serait mise en place dans un seul but : attribuer une référence à chaque terme du langage. Et ce but serait indépendant de la question du domaine de quantification. Heck tire une conclusion similaire :

157. On pourrait même suggérer que l'exigence est trop forte. Après tout, si l'intention se limite à octroyer une référence aux termes incluant le nouveau nom '$f(\xi)$', pourquoi ne pas se contenter d'une définition qui permette de déterminer la valeur de $f(\Delta)$ pour tout Δ *qui possède un nom dans le langage* ? Il y a néanmoins une raison importante de ne pas procéder ainsi : notre définition doit aussi fournir la référence de l'énoncé '$\forall x, f(x)$', qui dépend de la valeur de $f(\Delta)$ même pour les objets Δ qui ne sont pas nommés dans le langage.

> En synthétisant, donc, avec seulement une petite dose d'anachronisme, nous pourrions interpréter ainsi l'objection que Frege adresse à ceux qui traitent les quantifications restreintes en termes de domaines de quantification : procéder de la sorte revient à confondre 'univers de discours' et 'domaine de quantification', et à tenter de conférer au dernier le rôle du premier, ce qui est impossible. La raison en est simple, et doit être contraignante : la notion d'univers de discours appartient au langage-*objet*, tandis que celle de domaine de quantification au *méta*langage. (Heck 2012, p. 95)

Selon Heck, si les formulations imprécises de Frege peuvent faire germer le doute, c'est parce que les notions de métalangage et de langage-objet étaient encore confuses à cette époque. Dans sa langue d'exposition, Frege n'a en effet jamais pris la peine de préciser qu'une définition devait déterminer la valeur d'une fonction pour tout objet *du domaine*. Mais il suffit de regarder l'argument tapi derrière le principe de complétude pour dissiper le trouble. L'objectif réside entièrement dans l'exclusion des noms sans référence. Ceci exige que chaque nom de fonction soit introduit de telle sorte que la valeur de la fonction concernée en tout objet *du domaine* puisse être déterminée. En d'autres termes, sans disposer de ce vocabulaire, Frege aurait reproché à ses adversaires de confier au langage-objet ce qui ne peut être exécuté que dans le métalangage, faute de priver certains énoncés de valeur de vérité. Interpréter le principe de complétude comme un rejet de la limitation du domaine de quantification serait un contresens absolu. Selon l'argument de Frege, c'est en restreignant ce domaine qu'on peut introduire le nom d'une fonction dont l'action est limitée, et non pas en faisant varier l'univers du discours à l'*intérieur* de ce domaine.

Deux passages viennent consolider l'interprétation de Blanchette et Heck. Le premier prend place lors de la critique des définitions progressives :

> Il est très simple d'éviter de multiplier les explications d'un même signe. Plutôt que de l'expliquer d'abord pour un domaine restreint et ensuite pour un domaine plus vaste, autrement dit plutôt que d'employer le même signe deux fois, il suffit de choisir deux signes différents et de confiner une fois pour toutes la référence du premier au domaine restreint, ainsi la première définition est à présent complète elle aussi et confère des limites nettes. (Frege 1903a, p. 73)

Ici, Frege reconnaît la légitimité d'une définition partielle, en accord avec le principe de complétude. Il impose néanmoins une condition : celle-ci ne doit pas être étendue. Il est vrai que la formulation suggère que les deux signes – disons '$f(\xi)$' et '$g(\xi)$' – appartiennent à un même langage et sont relatifs au même domaine de quantification. Néanmoins, si tel était le cas, l'objection examinée plus haut vaudrait encore ici : '$\forall x f(x)$' se verrait privé de référence. Une manière adéquate d'interpréter ce passage semble plutôt être la suivante : on peut limiter une définition à un domaine d'objets *une fois pour toutes*, *i.e.* en cantonnant la quantification à ce domaine. Il n'est aucunement permis d'étendre la définition. Au contraire, il convient de procéder à une *nouvelle* définition relative à un *nouveau* domaine de quantification. Ainsi, dans chaque cas, tout terme possède une référence. Un extrait de 1891 indique cette même direction :

> Tant que l'arithmétique a pour objet les seuls nombres entiers, les lettre 'a', 'b' figurant dans 'a+b' ne peuvent indiquer que des nombres entiers, et il suffit de définir l'emploi du signe *plus* placé entre des nombres entiers. (Frege 1891, p. 135 / pp. 92-93)

Les lettres latines sont justement destinées à indiquer n'importe quel objet *du domaine de quantification*[158]. Frege ne voit donc pas d'objection à ce que le signe '+' soit défini sur un

158. Par exemple, nous sommes légitimes à écrire '$\vdash a + b = b + a$' si et seulement si '$\frown^{\mathfrak{a}}\frown^{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$' est vrai.

domaine restreint tant qu'il en va de même de la quantification. Et pour cause, dans ce cas, le réquisit de complétude linguistique est parfaitement maintenu.

Blanchette et Heck ont raison sur ce point : le principe de complétude ne vient aucunement contester la possibilité de limiter le domaine de quantification d'un langage donné. Mais la question qui nous importe réellement est plus spécifique : quel est, aux yeux de Frege, le domaine de quantification du langage *logique* ? Dans la littérature, l'hypothèse de Heck et Blanchette se voit souvent contredite sur la base des nombreux extraits dans lesquels Frege affirma que la logique était la science *la plus générale*. Puisque l'Idéographie est censée prouver les théorèmes *logiques*, ces quantificateurs ne peuvent qu'être conçus en termes universalistes. Cette conséquence, souvent tirée sans autre forme de procès, nous paraît quelque peu rapide. Voyons comment Patricia Blanchette retourne à son avantage l'assertion de Frege :

> Frege tenait les principes fondamentaux de la logique pour totalement généraux, valant pour tout objet et toute fonction du type approprié. La portée limitée des quantificateurs des *Grundgesetze* révèle le lien entre les lois fondamentales de la logique et les pensées exprimées par les axiomes des *Grundgesetze*. Les dernières sont des restrictions des premières, restrictions au domaine du système. Ceci ne signifie pas qu'il existe un obstacle, dans une perspective fregeenne, à l'expression des lois totalement générales de la logique, ou à l'usage de quantificateurs non restreints. Mais le réquisit de rigueur des *Grundgesetze*, *i.e.* le réquisit de complétude linguistique, implique que les quantificateurs de l'idéographie ne peuvent agir que sur le domaine sur lequel les noms de fonctions sont définis. (Blanchette 2012, pp. 74-75)

Et ce domaine, selon Blanchette, n'est constitué que des valeurs de vérité et des parcours-de-valeurs.

Bien que Blanchette n'explique nulle part comment une pensée peut être la "restriction" d'une autre, ni la manière dont la limitation du domaine influe sur la pensée exprimée par un énoncé quantifié, il est en effet imprudent de supposer, sur la base de la seule prétendue généralité de la logique, l'universalité des quantificateurs de l'idéographie. Nous reviendrons plus tard à ce problème. Pour l'heure, nous pouvons déjà relever quelques indices textuels qui militent contre l'interprétation de Blanchette et Heck.

Nous avons déjà rencontré le premier, lorsque Frege expliquait que ses lettres latines n'indiquaient pas les objets d'un domaine particulier, mais des objets *en général*[159]. Le second survint au §64. Frege y affirma que, si l'addition est définie uniquement pour les nombres, alors l'énoncé 'la somme de la Lune et de la Lune est 1' se trouve privé de référence. À première vue, son exemple ne vaut que si le langage incorpore un nom de la Lune, ce à quoi l'idéographie échoue. Néanmoins, il suffit de considérer l'énoncé 'quel que soit a, la somme de a et de a vaut 1' pour s'apercevoir que la difficulté ne se réduit pas aux objets nommés dans le langage. Il serait surprenant que Frege emploie, *sans le signaler*, un exemple qui ne convient pas à l'idéographie, parce que la lune échappe à son domaine de quantification. Notons cependant que nous ne pouvons pas tirer de conclusion définitive. Après tout, Frege était peut-être en train de présenter généralement son principe, sans tenir compte des spécificités de l'idéographie. Le premier indice n'est pas plus décisif. Il pourrait s'agir d'une nouvelle maladresse de formulation, tandis que Frege entendait seulement préciser que la portée de ses lettres latines excédait tous les domaines envisagés par les mathématiciens, et non pas qu'elle était *absolument* générale. Nous avons appris à nos dépens, et à plusieurs reprises, combien il était dangereux, avec Frege, de baser une interprétation sur une seule phrase.

159. (Frege 1903a, pp. 77-78)

En somme, nous savons que le principe de complétude n'exige ni ne s'oppose à aucune limitation du domaine de quantification. Peut-être la conception fregéenne de la logique constitue-t-elle un obstacle déterminant, ou peut-être le propos des §§29-31 milite-t-il dans le sens d'une telle restriction. Blanchette et Heck aboutirent à leur conclusion en remarquant que Frege n'avait pris en considération, pour convaincre le lecteur que tout terme possède une référence, *que* les parcours-de-valeurs et les valeurs de vérité. Il nous faut donc à notre tour examiner ces paragraphes.

3.3.3 Quelques questions concernant la référentialité

3.3.3.1 Une notion substantielle pour un usage théorique ?

Les §§10, 29-31 tiennent une place de choix au sein du débat entre camps sémantique et antisémantique. Le conflit qui les oppose provient d'un désaccord quant à la question suivante : les conceptions de Frege sont-elles compatibles avec un usage substantiel et théorique de la notion de référence suffisant pour élaborer une science sémantique compositionnelle ? D'une part, au début du §29, Frege identifie expressément les formules 'être référentiel', 'référer à quelque chose' et 'avoir une référence'. La seconde d'entre elles suggère que, en évoquant la référence d'un nom, Frege reconnaît bel et bien un lien entre une expression et "quelque chose", une entité – une fonction ou un objet – dont l'existence est indépendante de la connaissance que nous en avons. Or un tel platonisme est souvent contesté par les membres du camp antisémantique, qui voient dans le terme 'référer' une simple façon de parler, visant à élucider, à enseigner le fonctionnement du langage logique. D'autre part, Frege annonce explicitement l'objectif poursuivi dans ces paragraphes : montrer que chaque nom possède une référence. Il semble donc engagé dans une *démonstration* proprement *métathéorique*. Là encore, il s'agit d'un point qui contredit frontalement la lecture antisémantique.

Ces passages placent donc les tenants de cette dernière face à un défi considérable : développer une interprétation convaincante, bien que non littérale, d'éléments textuels qui, pris à lettre, ne sont incontestablement pas à leur avantage. Ceci explique partiellement pourquoi, alors que les défenseurs de la lecture sémantique abordent copieusement le contenu de ces paragraphes – Heck (2012) a écrit la moitié d'un ouvrage à leur sujet –, leurs adversaires se réfugient volontiers dans un silence tenace. À notre connaissance, seule Weiner (2002) s'est risquée à une exégèse détaillée des §§29-31 [160]. Sans surprise, son objectif consista à établir le point suivant :

> Quel que soit ce que Frege signifie par les expressions interchangeables 'avoir une dénotation' (*hat eine Bedeutung*), 'référer à quelque chose' (*bedeutet etwas*) et '*bedeutungsvoll*', ce n'est pas 'associé par une interprétation à une sorte appropriée d'entités'. (Weiner 2002, p. 156)

Il faut néanmoins nuancer légèrement ce qui vient d'être dit. Si la majorité des explications de Frege semble défier la vision antisémantique, plaçant la charge de la preuve sur le dos des tenants de cette dernière, un point précis du §10 pose un sérieux problème au courant sémantique, dont la majorité des membres conviennent du réalisme de Frege. Celui-ci, constatant que son introduction du nom de la fonction pour les parcours-de-valeurs ne suffisait pas à attribuer une référence à ce nom, s'autorisa (semble-t-il) arbitrairement à identifier les valeurs de vérité à certains parcours-de-valeurs particuliers. Voilà qui exige des éclaircissements, car si les parcours-de-valeurs et les valeurs de vérité sont des entités indépendantes, il est illégitime de *stipuler* l'identité entre certaines d'entre elles. Moore et Rein conclurent ainsi une discussion concernant le §10 :

160. Ricketts (1997) s'est occupé du §10, qui leur est lié, sans se confronter directement à eux.

> Frege stipule que chaque valeur de vérité doit être identifiée avec son singleton, mais quel droit a-t-il de procéder ainsi ? Pour Frege, les valeurs de vérité et les parcours-de-valeurs occupent un royaume platoniste. Ainsi leur existence et leurs structures sont indépendantes de notre capacité à les appréhender. Assurément, le fait que chacune des valeurs de vérité soit un parcours-de-valeurs est objectif et, par conséquent, ne peut être décidé à travers une stipulation. En somme, la stipulation identifiant les valeurs de vérité et leurs singletons semble en conflit direct avec le platonisme déclaré de Frege. (Moore et Rein 1986, p. 383)

Par conséquent, les choses ne sont pas aussi simples qu'elles peuvent le laisser croire de prime abord. D'autant que nous avons ici mêlé deux problèmes – ceux du réalisme et de la sémantique – qui, s'ils entretiennent indéniablement un certain rapport, ne doivent pas être confondus. Ainsi, il nous faudra être vigilant lorsque nous reviendrons directement à ces questions. Car, dans un premier temps, nous n'aborderons pas les positions des uns et des autres. Nous y ferons allusion uniquement lorsque le développement de notre propre interprétation l'exigera. Pour l'instant, notre objectif se limite à expliquer la stratégie poursuivie par Frege dans ces passages. Il sera ensuite temps de nous confronter aux alternatives proposées par les auteurs qui ont aussi plongé dans ces étonnantes sections, et d'utiliser nos conclusions pour discuter le désaccord entre les deux camps.

3.3.3.2 Localisation des §§29-31

Les §§29-31 se situent au début de la seconde section du chapitre d'exposition du système, intitulée "Définitions". Avant de réaliser les définitions particulières qui seraient utilisées dans ses dérivations, Frege procéda à quelques remarques générales concernant le processus de définition dans son ensemble. C'est à cet endroit qu'il rédigea nos trois paragraphes, et il n'est pas difficile de comprendre pourquoi.

Comme nous l'avons vu en section 3.2.3.3, ses définitions étaient exclusivement vouées à attribuer à un nouveau signe le sens, connu, d'une ancienne expression. Elles devaient suivre des règles strictes – énoncées au §33 – assurant que chaque nom défini dispose d'un sens et une référence si tant est que l'expression par laquelle elle est définie en possède aussi, autrement dit *si tant est que les noms constitués des seuls noms primitifs de l'idéographie en sont aussi dotés*. C'est précisément ce dernier point, crucial, que les §§29-31 visaient à établir. L'objectif des remarques générales de la section "Définition" était donc clair :

- montrer que les noms composés exclusivement des noms primitifs de l'idéographie possèdent un sens et une référence : §§29-31 ;
- spécifier les règles qui permettent d'utiliser un nom simple en lieu et place d'un nom complexe déjà connu : §33.

Une fois ce travail abattu, Frege pouvait sereinement affirmer que *tous* les noms de l'idéographie possédaient un sens et une référence, qu'ils fussent simples ou complexes, composés de noms primitifs et/ou définis. Bien sûr, le deuxième point ne présentait pas d'obstacle sérieux ; le premier, en revanche, occasionna sa chute. Voilà qui justifie que nous accordions toute notre attention aux §§29-31.

3.3.3.3 Présentation du critère de référentialité

Dans le §29, Frege fournit les conditions de référentialité pour les noms de l'idéographie :

> Un nom de premier niveau à un argument a une *référence* (*réfère à quelque chose*, est *référentiel*) si le nom propre qui résulte de ce nom de fonction quand les places de l'argument sont occupées par un nom propre a toujours une référence dès lors que le nom inséré réfère à quelque chose.
>
> Un nom propre a une *référence* si, lorsqu'il occupe les places de l'argument d'un nom propre référentiel de premier niveau à un argument, le nom propre obtenu a une référence, et si le nom d'une fonction de premier niveau à un argument, obtenu lorsque le nom propre en question vient occuper les places du ξ-argument d'un nom référentiel de premier niveau à deux arguments, a toujours une référence, et qu'il en va de même pour les places du ζ-argument.
>
> Un nom de fonction de premier niveau à deux arguments a une *référence* si le nom propre qui résulte de ce nom de fonction quand les places du ξ-argument sont occupées par un nom propre référentiel et celles du ζ-argument sont occupées par un nom propre référentiel a toujours une référence.
>
> Un nom de fonction de second niveau à un argument [de type (0)] a une *référence* si, lorsqu'un nom de premier niveau à un argument réfère à quelque chose, il s'ensuit que le nom propre qui résulte de son intégration aux places de l'argument de notre nom de fonction de second niveau a une référence.
>
> Ainsi, tout nom de fonction de premier niveau à un argument qui forme un nom propre référentiel lorsqu'il est complété par un nom propre référentiel forme aussi un nom propre référentiel lorsqu'il complète un nom référentiel de fonction de second niveau à un argument [de type (0)].
>
> Le nom '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(f(\beta))$' d'une fonction de troisième niveau est référentiel si, lorsqu'un nom de second niveau à un argument [de type(0)] réfère à quelque chose, il s'ensuit que le nom propre qui résulte de son intégration à la place de l'argument de '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(f(\beta))$' a aussi une référence. (Frege 1893, pp. 45-46)

Frege s'est volontairement limité aux noms dont il aurait à faire usage. Il n'a pas excédé le troisième niveau et, concernant ce dernier, s'en tint au seul nom présent dans ses démonstrations : '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(f(\beta))$'. Nul doute, néanmoins, qu'il n'aurait vu aucune objection à la répétition de ces conditions pour tous les types (et tous les noms de chaque type).

À travers ce passage, une nouvelle approche contextuelle de la référence semble émerger. Rappelons que, dans les *Grundlagen*, Frege préconisait de ne jamais questionner le sens d'un nom isolément, mais toujours à l'intérieur d'un énoncé [161]. Il caractérisait un tel sens par sa contribution aux sens des énoncés dans lesquels le nom apparaît, donnant ainsi naissance au célèbre principe de contexte. Entre 1884 et 1893, la distinction fut établie entre sens et référence, et les valeurs de vérité furent localisées parmi les objets. Ce dernier point résorba toute différence catégoriale entre les énoncés et les noms propres et pourrait avoir entraîné une transformation du principe de contexte, celui-ci s'appuyant sur cette différence. En tenant compte des diverses catégories reconnues à partir de 1891, Frege aurait pu déplacer son critère, et fait dépendre la référence d'un nom de type T de celles des noms propres construits par saturation à partir de ce nom. La référence d'un nom propre résulterait donc de celles des noms qui sont formés à partir de la saturation de noms référentiels de fonctions de premier niveau, et un tel nom n'aurait de référence que si tous les noms ainsi construits en disposent à leur tour. Dans la littérature, ce critère est connu sous le nom de 'principe du contexte généralisé' [162].

161. (Frege 1884, p. x / 122)
162. Voir par exemple (Dummett 1991b, Chapitre 17).

Cependant, cette lecture pose un certain nombre de problèmes. Le plus important concerne la dimension de circularité évidente qu'elle incorpore. Pour établir la référentialité d'un nom de type (0), il faut prouver que, si ce nom est saturé par n'importe quel nom propre référentiel, il en résulte toujours un nom référentiel. Cela exige de savoir quels sont les noms propres référentiels. Mais pour établir la référentialité d'un nom propre, il faut en retour prouver que si ce nom sature n'importe quel nom de type (0), il en résulte toujours un nom référentiel. Et ceci requiert de connaître les noms de type (0) référentiels.

En examinant le critère pour les noms propres, nous pouvons en fait observer une double circularité. Notons provisoirement '$R(\xi)$' la propriété d'être référentiel. Nous allons développer le critère suivant [163] :

$$\forall t \in \mathbf{N}^0_{\mathrm{Id}}\Big(R(t) \leftrightarrow \forall t' \in \mathbf{N}^{(0)}_{\mathrm{Id}}\big(R(t') \rightarrow R(\mathrm{Sat}(t', t))\big)\Big)$$

Nous avons traduit le fait qu'un nom propre réfère si et seulement si, lorsqu'il vient saturer des noms de fonctions qui réfèrent, il en résulte des noms propres qui réfèrent à leur tour. Nous connaissons aussi le critère de référentialité pour ces noms de fonctions :

$$\forall t \in \mathbf{N}^{(0)}_{\mathrm{Id}}\Big(R(t) \leftrightarrow \forall t' \in \mathbf{N}^0_{\mathrm{Id}}\big(R(t') \rightarrow R(\mathrm{Sat}(t, t'))\big)\Big)$$

Le critère relatif aux noms propres s'écrit donc aussi :

$$\forall t \in \mathbf{N}^0_{\mathrm{Id}}\Big(R(t) \leftrightarrow \forall t' \in \mathbf{N}^{(0)}_{\mathrm{Id}}\big((\forall t'' \in \mathbf{N}^0_{\mathrm{Id}}(R(t'') \rightarrow R(\mathrm{Sat}(t', t''))) \rightarrow R(\mathrm{Sat}(t', t))\big)\Big)$$

Autrement dit, un nom propre réfère si et seulement si, lorsqu'il vient saturer n'importe quel nom de fonction dont le résultat de la saturation par un quelconque nom propre référentiel réfère, il permet la construction d'un nom propre qui réfère. Pour établir la référentialité d'un nom propre, il faut donc savoir quels noms propres réfèrent non seulement pour déterminer les noms de fonctions sur lesquels tester notre nom propre – car le critère de référentialité des noms de type (0) exige de connaître les noms propres référentiels – mais aussi pour pouvoir déterminer le résultat de nos tests – car les noms formés à partir de ces saturations sont aussi des noms propres. Dans la formule ci-dessus – censée *caractériser* $R(t)$ pour tout nom propre t –, le problème est rendu par le fait que $R(\xi)$ est prédiqué de *plusieurs* noms propres dans le *second* membre de l'équivalence [164]. Frege était conscient de ces difficultés, et ouvrit le §30 sur la précision suivante :

> Ces énoncés ne peuvent être regardés comme des explications des expressions 'avoir une référence' ou 'référer à quelque chose', car leur application présuppose toujours que nous ayons déjà reconnu certains noms comme référentiels ; mais ils peuvent servir à étendre progressivement le cercle de tels noms. Il en découle que tous les noms formés à partir de noms référentiels réfèrent à quelque chose. (Frege 1893, p. 46)

Il s'agirait donc d'établir *autrement* la référentialité de certains noms, puis d'en déduire, sur la base du critère, celle des noms qu'ils permettent de former. Par exemple, en supposant que t et t' soient deux noms référentiels de types respectifs (0) et 0, alors le nom résultant de la saturation de t par t' possède aussi une référence, d'après le premier énoncé du critère.

163. Pour simplifier le raisonnement, qui n'en souffre aucunement, nous le limitons ici aux fonctions à un argument.
164. Pour une présentation approfondie de cette double circularité, voir (Linnebo 2004, section 3).

Frege aurait ainsi entrepris une démonstration *par induction* du fait que tout nom possède une référence. L'initialisation aurait consisté à établir ce point pour les cas de base, et le pas de récurrence aurait exploité le critère pour étendre cette propriété à la totalité des noms. Cette idée est renforcée par la forme des §§29-31. Après avoir énoncé son critère – §29 –, Frege expliqua que la formation d'un nom complexe à partir de noms plus simples préservait la référentialité – §30 –, puis s'appliqua à établir que les noms de bases de l'idéographie possédaient eux-aussi une référence – §31. Néanmoins, il eut aussi recours à son critère pour prouver la référentialité des noms primitifs. Après avoir énoncé ces derniers, il annonça ainsi la marche à suivre du §31 :

> Nous supposons que les noms des valeurs de vérité réfèrent à quelque chose, à savoir au Vrai ou au Faux. Nous allons ensuite progressivement étendre le cercle des noms admis comme référentiels. (Frege 1893, p. 48)

Frege resta extrêmement vague sur l'articulation de sa démonstration. À divers moments, il sollicita abruptement son critère sans expliquer proprement la manière dont celui-ci devait le conduire à son objectif. Le double usage qu'il en fit pour assurer le pas d'induction et traiter les cas de base motiva un certain nombre de chercheurs à diagnostiquer un enchevêtrement fatal entre les deux étapes [165]. Pour notre part, nous pensons qu'il commit plusieurs erreurs, qui manifestent autant de confusions. Nous allons donc tenter, en détectant les premières, de faire la lumière sur les secondes.

3.3.3.4 Une notion contextuelle ?

Sans présumer de l'articulation du raisonnement conduit dans les §§29-31, nous pouvons affirmer que Frege entendait exploiter son critère à deux différentes fins. D'une part, il comptait en déduire que tous les noms construits à partir de noms simples référentiels sont référentiels, comme il l'annonça ouvertement au début du §30. D'autre part, il espérait ainsi conclure à la référentialité des noms primitifs de l'idéographie, comme il l'expliqua en amorce du §31.

En examinant ces différents points, nous verrons que, *malgré la précision selon laquelle le critère ne sert qu'à "étendre progressivement le cercle" des noms référentiels*, la présentation proposée au §29 condamne irrémédiablement et immédiatement à la circularité. Autrement dit, une lecture raisonnable de ces paragraphes exige d'amender le critère de référentialité, d'une manière ou d'une autre. En tirant cette conclusion, nous rejoindrons la quasi-totalité des commentateurs de ces passages. Seule Weiner (2002) propose une interprétation basée sur une lecture *littérale* de ce critère. Pourtant, ce problème est indépendant du conflit qui oppose les deux camps, *i.e.* du fait que ces passages contiennent ou non une (tentative de) véritable preuve sémantique effectuée dans un métalangage. Au §30, Frege constata que son critère, pris comme unique moyen d'attester la référentialité d'un nom, sombrait dans la circularité. La mise en garde selon laquelle il peut seulement prolonger un mouvement déjà amorcé, *i.e.* étendre le cercle de noms préalablement reconnus comme référentiels, était justement destinée à y échapper. Il serait donc incorrect de supposer que Frege tolérait la circularité, pour une raison ou pour une autre, alors qu'il prit explicitement des mesures pour s'en débarrasser. Weiner admet volontiers ce point, et prétend donner une interprétation qui en tient compte. Au contraire, nous pensons qu'une telle lecture est impossible. Dans un premier temps, nous allons présenter et justifier notre propre vision de ces passages. Nous examinerons plus tard le détail des positions de Weiner et d'autres. Ce faisant, nous découvrirons là-bas une illustration de ce que nous disons ici. Nous constaterons que, contrairement à ce qu'affirme Weiner, sa reconstitution des §§29-31, basée sur une lecture littérale du critère, chavire bel et bien dans la circularité.

165. Voir par exemple (Bartlett 1961), (Parsons 1965), ou encore (Resnik 1986).

Il importe de préciser ce que nous entendons en affirmant que le critère doit être amendé.Certains commentateurs décèlent un lien étroit entre la preuve que chaque terme possède une unique référence et la démonstration de l'adéquation de l'Idéographie. Cette dernière étant interdite par le fait que le système soit inconsistant, les auteurs en concluent que la première contient irrémédiablement une erreur :

> Finalement, le paradoxe de Russell est apparu pour montrer que toutes les expressions bien formées de l'idéographie ne *pouvaient* pas posséder une référence unique, ainsi quelque chose ne va pas dans cette preuve. (Heck 2012, p. 52)

Quoi qu'il en soit du lien entre l'adéquation et le contenu des §§29-31 – nous en discuterons plus tard –, nous croyons aussi que ce que Frege tenta d'établir est incorrect. Nous n'entendons donc pas modifier le critère du §29, et subséquemment les contenus des §§30-31, pour corriger efficacement la preuve qui y est tentée. Il ne s'agit pas non plus de reconstituer une procédure décrite de façon sommaire à une époque où certains canons n'étaient pas fixés et certaines distinctions mal comprises. L'objectif est moins de cerner ce que Frege voulait dire derrière ce qu'il a dit, que de comprendre, à travers les confusions dont il fut responsable, les positions qui étaient les siennes. Heck décrit ainsi la situation :

> Le mieux que nous puissions faire consiste à essayer de démêler ce que Frege a emmêlé, et différentes personnes peuvent préférer le faire de différentes manières. Je ne sais pas s'il existe aucune explication tangible de ce que Frege "avait à l'esprit". L'explication tangible est qu'il était assez confus. (Heck 2012, p. 126)

Sur ce point, nous nous rallions totalement à Heck. Nous ne prétendons pas dévoiler ce que Frege "voulait faire" – entendons par là le chemin précis qu'il voulait emprunter pour établir la référentialité des noms de son langage. Nous désirons seulement distinguer les confusions dont il fut responsable des simples défauts de formulation ou autres imprécisions de son texte. L'affaire est subtile car, à divers moments, s'il n'a pas distingué ce qui devait l'être, c'est qu'il n'a pas formulé correctement ce qu'il fallait. Certains problèmes lui seraient probablement apparus s'il s'était appliqué à rédiger plus précisément son raisonnement. Par voie de conséquence, il aurait pu remettre en question des positions qu'il défendait ailleurs. Il est extrêmement délicat, voire impossible, de déterminer les réactions qu'aurait suscitées telle ou telle découverte de sa part. Ce n'est d'ailleurs pas notre objectif. Nous croyons que nombre de désaccords entre exégètes proviennent d'une volonté d'extrapoler certaines de ses idées, au détriment d'autres, jusqu'à en reconstruire une version cohérente mais, pourrait-on dire, totalement *ad hoc*. Au contraire, nous tenons, autant que possible, à présenter une photographie des conceptions de 1893, dans l'état parfois inachevé dans lequel elles se trouvaient alors. Dans les §§29-31, il ne s'agit donc pas d'identifier clairement *une* erreur, mais de déceler les différents degrés de confusion vis-à-vis de telle ou telle notion qui ont, souvent dans les deux sens, causé et été causées par diverses affirmations problématiques.

À cet égard, le cas du critère de référentialité est paradigmatique. Nous constaterons que, lu tel quel, il entraîne des problèmes immédiats, tandis qu'interprété autrement, il s'accorde davantage au travail des §§30-31 ou, au moins, permet de lire ces derniers sous un angle plus convaincant – en évitant d'y voir une erreur trop triviale pour être imputée à Frege. L'objectif est donc de réussir à interpréter ce critère conformément à la manière dont il a été appliqué, sans perdre de vue le fait qu'il ait été formulé ainsi. Et cela pose certaines difficultés qui méritent d'être présentées.

Dans les *Grundgesetze*, Frege invoqua une notion que, suivant la littérature, nous appellerons 'authentique' de référence : un nom possède une référence s'il existe une entité à laquelle il

réfère. Pourtant, au moment d'introduire son critère, il opta pour une version contextuelle : un nom a une référence si tous les contextes dans lesquels il apparaît en disposent. À proprement parler, les deux approches ne sont pas contradictoires. Néanmoins, nous ne pouvons les combiner sans admettre que, dès l'instant où nous connaissons la valeur de vérité de tous les énoncés qui expriment qu'un objet possède une propriété – ou, dans le cadre général de 1893, la référence de tous les noms '$\Phi(\Delta)$' tels que '$\Phi(\xi)$' possède une référence –, alors nous sommes assurés de l'existence de cet objet – de Δ. Cette stratégie est certes familière de Frege, nous ramenant à la manière dont il avait tenté d'introduire le concept de nombre en 1884 [166]. Mais en 1893, il avait modifié ses conceptions. Or une telle idée semble faire droit à ce qu'il nomma des 'définitions créatives', et qu'il critiqua vigoureusement, dans le second volume des *Grundgesetze* (§§138-147). Face à ce problème, plusieurs réactions sont possibles, permises par ce que nous avons dit plus haut et que nous vérifierons plus bas : il existe de solides raisons de ne pas lire à la lettre le contenu du §29.

La première solution consiste à y voir un aveu de faiblesse. Frege aurait préféré procéder d'une manière (devenue depuis) traditionnelle – assigner directement leurs références aux noms primitifs et définir celles des noms complexes en fonction de ces dernières – mais, pour des raisons qui ont trait aux spécificités de sa langue, n'aurait trouvé aucun moyen d'y parvenir. De plus, à une époque où la sémantique balbutiait encore, il aurait mal cerné l'écart considérable entre les deux stratégies. Finalement, Frege n'aurait pas adhéré à ce que *nous* appelons une vision contextuelle de la référentialité. Il aurait cru, à tort, que son critère était une simple traduction de la définition authentique que nous connaissons depuis Tarski mais que, longtemps avant Tarski, il échouait à formuler pour son idéographie. Resnik (1986) avance une interprétation de ce genre.

La seconde possibilité consiste à traduire le critère en termes non contextuels, sur la base de l'*application* qui en est faite dans les §§30-31. Frege ne serait coupable que d'une formulation maladroite, démentie par la manière dont il procéda *effectivement*. Heck (2012) développe, dans une certaine mesure, une explication de ce type.

Il importe de bien distinguer les deux précédentes réponses. Elles ont cela en commun de n'imputer à Frege aucune vision contextuelle de la référentialité. Mais, selon la première, Frege aurait bien *appliqué* un critère contextuel, échouant à procéder autrement. D'après la seconde, plus radicale, il se serait contenté de *formuler* un tel critère, qu'il faudrait, à la lumière de sa mise en œuvre, traduire différemment.

Il existe une troisième alternative, de loin la plus populaire. Elle consiste, à la lumière des §§30-31, à ajuster légèrement le critère, tout en respectant sa dimension contextuelle. Il s'agit alors d'expliquer comment une telle conception s'accorde avec un rejet catégorique des définitions créatives. Dummett (1991b, Chapitre 17), Parsons (1965), Linnebo (2004) et, dans une certaine mesure, Heck (2012) présentent une interprétation de cet acabit.

Nous avons attribué à Heck deux des trois lectures ci-dessus, qui semblent pourtant exclusives. La raison tient à ce que cet auteur lit le critère de référentialité de manière *hétérogène*. Il convient que Frege appliqua un critère contextuel dans le cas des noms propres, mais n'aboutit pas au même constat concernant les noms de fonctions. Il se situe donc à l'intersection entre la deuxième et la troisième alternatives. Dans son article, Resnik récusa toute interprétation hétérogène de ce critère *pour une même catégorie syntaxique* :

> On pourrait objecter que [les §§29-31] sont compatibles avec une théorie quasi-contextuelle de la référence. Selon une telle théorie, (certains) noms simples sont réfé-

166. Rappelons-nous. Il y avait renoncé en constatant que sa stratégie ne permettait pas de déterminer la valeur de vérité de *tous* les énoncés dans lesquels figurait un terme numérique. En particulier, elle échouait face aux énoncés $\ulcorner t = N_\beta(\Phi(\beta))\urcorner$, où t pouvait épouser n'importe quelle forme.

> rentiels parce qu'ils réfèrent à des fonctions ou objets spécifiques, tandis que d'autres noms simples et les noms composés sont référentiels seulement dans le sens où ils respectent le critère du §29. Mais l'idée qu'il puisse exister une telle distinction entre les noms d'une même catégorie syntaxique semble totalement non fregéenne. (Resnik 1986, p. 184)

À proprement parler, la critique ne s'applique pas à l'interprétation de Heck qui décrit une hétérogénéité inter- et non pas intra-catégories syntaxiques. Mais elle se généralise facilement. Le point le plus frappant, dans le §29, est l'extraordinaire homogénéité de la présentation. Il semble que le *même* critère soit *adapté* à chacune des catégories syntaxiques impliquées dans l'idéographie. Si Frege l'avait entendu différemment pour différents types, il l'aurait naturellement signalé, et surtout pas dissimulé dans des formulations totalement similaires [167]. Cependant, cela ne signifie pas qu'il n'a pas, *dans son application*, lu différemment le critère pour les objets et les fonctions. Cela révèle simplement que, si tel est le cas, alors il n'en eut pas conscience, autrement dit qu'il n'a pas réalisé qu'il interprétait lui-même ce critère de deux manières différentes. Ce point est d'autant plus important pour nous que nous allons aussi y distinguer deux composantes hétérogènes. Nous allons donc soutenir que Frege a, en effet, confondu différentes stratégies en énonçant son critère. Et c'est de cette confusion, qu'il faudra, le moment venu, tirer certaines conclusions.

3.3.4 Le §30

L'exploitation du critère de référentialité au cours de la démonstration ne laisse pas facilement deviner si celle-ci consiste en une seule ou en plusieurs inductions imbriquées. En revanche, Frege n'autorise aucun doute sur un point précis : le travail du §30 consiste à traiter le pas de récurrence d'au moins l'une d'entre elles. Il expliqua que le critère de référentialité permet "d'étendre progressivement le cercle des noms" qui possèdent une référence, car "il en découle que tous les noms formés à partir de noms référentiels réfèrent à quelque chose". Il est donc clair que, à ses yeux, une fois établie la référentialité de noms primitifs, le critère atteste immédiatement de celle des noms formés sur leur base. Pour comprendre ce point, il importe évidemment de connaître les règles grammaticales du langage, et de s'assurer qu'elles préservent la référentialité. C'est ce à quoi Frege s'appliqua au sein du §30. Sans surprise, il s'engagea dans une description (sommaire et imparfaite) de la construction que nous avons réalisée dans le second chapitre. Le versant sémantique du problème est plus délicat, et rejoint une interrogation que nous avons formulée, sans y répondre, à l'issue des développements techniques du chapitre précédent : comment, dans une pespective fregéenne, déterminer les références des noms complexes à partir de celles des noms simples ? Cette question trouve donc ici son environnement naturel, et nous allons la traiter en examinant les différentes explications du §30.

3.3.4.1 La saturation

Dans ce paragraphe, Frege procède en quatre temps. Il annonce d'abord sa stratégie : étendre le cercle des noms référentiels en montrant que tous les noms formés à partir de tels noms réfèrent à leur tour. Pour atteindre cet objectif, il décrit ensuite les *deux* manières de construire des noms, et constate qu'elles préservent la référentialité. La première correspond substantiellement à ce que nous avons nommé la 'saturation', et la seconde à ce que nous avons appelé la 'désaturation'.

167. Plus encore, comme Linnebo (2004, p. 84) le signale, si Frege l'avait conçu différemment pour les objets d'un côté, et les fonctions d'un autre, il n'aurait certainement pas localisé l'énoncé relatif aux objets *entre* celui relatif aux fonctions de premier niveau à un argument et celui relatif aux fonctions de premier niveau à deux arguments.

La section s'achève sur une illustration de ce procédé, *i.e.* sur la formation d'un nouveau nom dont la référentialité dépend alors de celles des noms à partir desquels il a été construit. Nous avons déjà restitué la première étape. Examinons la présentation du processus de saturation :

> Cette formation se déroule de telle manière qu'un nom occupe la place de l'argument d'un autre nom qui lui est adapté. Ainsi un nom propre résulte d'un nom propre et d'un nom de premier niveau à un argument, ou d'un nom de premier niveau à un argument et d'un nom de second niveau à un argument, ou d'un nom de second niveau à un argument [de type (0)] et du nom '$\mathring{\smile}\, \mu_\beta(f(\beta))$' d'une fonction de troisième niveau. Ainsi un nom de fonction de premier niveau à un argument résulte d'un nom propre et d'un nom de premier niveau à deux arguments. Les noms ainsi formés peuvent à leur tour être utilisés de la même manière dans la formation de noms, et tous les noms résultant de cette méthode sont référentiels si tant est que les noms simples le sont. (Frege 1893, pp. 46-47)

À une exception près, cette procédure correspond exactement, dans le cadre limité de l'idéographie, au premier moment de l'induction de notre définition 14 (p. 311), *i.e.* à celui de la *saturation*. Rappelons-nous : une fois connus des ensembles $\mathbf{N}_i^T$ de noms de type T, nous définissions $\mathbf{N}_{i,1}^0$ en ajoutant à $\mathbf{N}_i^0$ les expressions résultant de la saturation d'un élément de $\mathbf{N}_i^{(T_1,\ldots,T_n)}$ par des éléments appartenant respectivement à $\mathbf{N}_i^{T_1},\ldots,\mathbf{N}_i^{T_n}$. Puis nous réitérions le processus indéfiniment, obtenant ainsi les ensembles $\mathbf{N}_{i,j}^0$, pour tout entier j avant de réunir ces derniers dans $\mathbf{N}_{i+1}^0$.

Autrement dit, étant donnés des noms de chaque type, nous formions de nouveaux noms propres en saturant les uns par les autres, puis répétions l'opération en utilisant ces nouveaux noms, etc. C'est exactement ce que Frege réalise : il décrit d'abord la manière dont un nom propre peut être formé à partir d'autres noms, dans le cadre limité des types admis dans l'idéographie, puis conclut que "les noms ainsi formés peuvent à leur tour être utilisés de la même manière dans la formation de noms", générant l'induction. Sans spécifier proprement les manipulations syntaxiques dissimulées derrière la formule 'occuper la place d'un argument', il réalise donc l'étape de saturation de notre définition.

Nous avons néanmoins annoncé une exception. En effet, Frege ne permet pas la saturation d'un nom de type $(0,0)$ par *deux* noms de type 0. Dans l'idéographie, les seuls noms de fonctions à deux arguments sont de type $(0,0)$. Ainsi, ramenée au cadre général, la différence entre les deux stratégies est la suivante : alors que nous autorisons la formation d'un nouveau nom propre *via* la saturation d'un nom de type $(T_1,\ldots,T_n)$ par des noms de types respectifs $T_1,\ldots,T_n$, Frege l'envisage seulement à travers la saturation d'un nom de type (T) par un nom de type T. Autrement dit, il restreint la construction des noms propres à la saturation des noms de fonctions à *un* argument.

Ceci soulève une question : comment s'y prend-il pour exploiter les noms à plusieurs arguments ? Par exemple, comment forme-t-il $\ulcorner t = t' \urcorner$ à partir de '$\xi = \zeta$' et de deux noms propres t et t' ? Il y parvient en intégrant une étape supplémentaire : il construit d'abord le nom $\ulcorner t = \zeta \urcorner$ de type (0) à partir de '$\xi = \zeta$' et de t, puis le sature par t' afin d'obtenir $\ulcorner t = t' \urcorner$. Voilà pourquoi il lui fallait permettre qu'"un nom de fonction de premier niveau à un argument résulte d'un nom propre et d'un nom de premier niveau à deux arguments", autrement dit autoriser la saturation *partielle* des noms de fonctions.

Ainsi, la stratégie de notre définition 14 et celle qui est suggérée ici sont légèrement différentes. En décrivant la procédure de saturation (p. 303), nous avons pris soin d'intégrer les saturations partielles, mais nous n'avons pas utilisé cette caractéristique dans la construction des noms. À chaque étape, nous avons ajouté les noms propres résultant d'une saturation *totale* de n'importe

quel nom de fonction – même ceux qui présentent plusieurs arguments –, puis désaturé des noms simples dans les noms ainsi obtenus. Pour sa part, Frege choisit de saturer *une à une* les places pour les arguments d'un nom de fonction. Généralisée à la totalité des types, l'induction relative à la saturation n'est donc pas identique à la nôtre. Au lieu d'augmenter seulement l'ensemble des noms propres – à travers la définition des $\mathbf{N}^0_{i,j+1}$ –, elle étend l'ensemble des noms *de chaque type*. Rigoureusement, il s'agit d'obtenir $\mathbf{N}^{(T_1,\ldots,T_n)}_{i,j+1}$ en ajoutant à $\mathbf{N}^{(T_1,\ldots,T_n)}_{i,j}$, pour tout type T, le résultat de la saturation *partielle* de tout élément de $\mathbf{N}^{(T_1,\ldots,T_i,T,T_{i+1},\ldots,T_n)}_{i,j}$ par n'importe quel élément de $\mathbf{N}^T_{i,j}$. En particulier, il faut ajouter à l'ensemble des noms de type (0) le résultat de la saturation d'un nom de type $(0,0)$ par un nom propre, et à l'ensemble des noms propres le résultat de la saturation d'un nom de type (0) par un nom propre.

Bien entendu, les deux méthodes sont équivalentes. Si nous obtenons un nom d'objet à l'étape (i,j), Frege le retrouve, à travers des saturations partielles successives, à l'étape (i,j') avec $j \leq j'$. Par ailleurs, si Frege construit un nom de *fonction* à l'étape i, *via* une saturation partielle, nous l'obtenons grâce à la désaturation à l'étape $i+1$. Tout comme nous, Frege ne peut se passer de la désaturation. La suite du §30 est justement destinée à son traitement. En revanche, sa stratégie permet de construire certains noms de fonctions plus rapidement que la nôtre, tandis que nous formons certains noms propres en moins d'étapes que lui. Par exemple, sur la base de t, t' et '$\xi = \zeta$', Frege construit $\ulcorner t = t' \urcorner$ en deux temps, *via* la saturation successive des deux places pour chaque argument. Nous saturons simultanément ces deux places, et n'avons besoin que d'une étape. En revanche, il forme directement $\ulcorner t = \zeta \urcorner$, tandis que nous passons par $\ulcorner t = t' \urcorner$, afin d'y désaturer t'.

Malgré ces différences, nous avons choisi d'emprunter notre sentier pour bâtir l'édifice des noms. Il y a plusieurs raisons à cela. Premièrement, nulle part ailleurs dans les *Grundgesetze*, Frege ne fit droit à l'idée de saturation partielle, alors qu'il appliqua constamment des saturations totales des noms à deux arguments. Deuxièmement (et en particulier), lorsqu'il fournit les règles de construction des noms de fonctions, dans le §26, il se limita à la désaturation, et n'évoqua jamais la saturation partielle. Or c'est ce paragraphe qui a guidé notre travail. Enfin, sa méthode génère une dissymétrie avec son propre critère de référentialité. En effet, dans le §29, il affirme qu'un nom de type $(0,0)$ est référentiel si et seulement si sa saturation par *deux* noms propres référentielles – sa saturation *totale* – possède une référence. Pour adapter ce critère à sa stratégie, il aurait dû expliquer qu'un tel nom était référentiel si sa saturation partielle par *un* nom propre référentiel possédait une référence. Bien sûr, le résultat aurait été similaire, car un nom de type (0) est référentiel si sa saturation par un nom propre référentiel possède une référence. Les deux stratégies sont équivalentes, à la fois sur les plans syntaxique et sémantique. Néanmoins, en parlant de la saturation des noms de type $(0,0)$ par *deux* noms propres, Frege effectuait immédiatement ce qu'il ne permit qu'indirectement dans le §30. Il convient donc de retourner la question. Pourquoi s'est-il écarté du chemin vers lequel tout le reste de son texte le guidait naturellement ? Ici encore, la bonne réponse pourrait être la plus simple : sachant que les deux méthodes aboutissaient au même résultat, il n'a prêté aucune attention à cette nuance superficielle [168]. Nous y adhérons dans une large mesure. Néanmoins, nous pensons que certaines recherches qui ont précisément trait au pas d'induction ont pu le pousser à cette formulation légèrement différente dans cette section. Nous présenterons bientôt une hypothèse dans ce sens.

168. On pourrait aussi penser qu'il avait besoin, dans les §§29-31, d'examiner la formation de certains noms que cette méthode simplifiait. Mais au contraire, à chaque fois qu'il procéda à une saturation partielle, il en résultat une *perte* de temps. C'est notamment le cas dans l'exemple de la fin du §30.

Il s'agit maintenant de comprendre la phrase la plus importante de ce passage, que Frege formula abruptement en conclusion : "tous les noms résultant de cette méthode sont référentiels si tant est que les noms simples le sont". Ici, il manqua de vigilance quant à ce que son induction exigeait [169]. Pour obtenir la totalité des noms, il importe d'appliquer ω fois la succession des étapes de saturation et de désaturation. Autrement dit, il est essentiel de saturer des noms *complexes* de fonctions, y compris ceux qui ont été formés par désaturation. Frege lui-même prit soin, après avoir introduit la désaturation, de préciser qu'un nom ainsi construit pouvait "être à son tour utilisé pour former des noms référentiels". Mais un tel nom est complexe, il faut donc que la saturation préserve la référentialité en général, *et pas seulement dans le cas des noms simples.*

Cette conclusion (plus forte) peut cependant être tirée à partir du §29. Ce qui rendait le critère trop exigeant lorsqu'il s'agissait d'attester *ex nihilo* de la référentialité d'un nom – jusqu'au piège de la circularité – est aussi ce qui le rend extrêmement puissant une fois que certains noms ont été reconnus comme référentiels – et pourrait permettre d'en sortir. Le problème constaté plus haut provient du fait que, pour établir qu'un nom est référentiel, il faut montrer que d'autres noms (dont il participe à la construction) sont eux-mêmes référentiels. Mais pour parvenir à cette conclusion, le critère doit à nouveau être appliqué, impliquant de nouveaux noms dont nous devons encore confirmer la référentialité, en appelant une fois de plus au critère, etc. La procédure n'aboutit jamais. Cependant, cette particularité se retourne à notre avantage si nous considérons préalablement que certains noms sont référentiels, car les lourdes contraintes qui pèsent pour qu'un nom soit intégré au cercle des noms référentiels sont autant de caractéristiques que nous *reconnaissons* aux noms qui y appartiennent d'emblée.

Supposons que deux noms t et t' – *simples ou non* – de types respectifs 0 et (0) aient une référence. Alors, d'après notre critère, le résultat de la saturation de t' par n'importe quel nom de type 0 – y compris t – possède une référence. Donc $\mathrm{Sat}(t', t)$ réfère. Mais, d'après le critère, cela signifie justement que ce dernier nom peut à son tour venir saturer n'importe quel nom de type (0) – par exemple t' –, il en résulte un nom référentiel. Donc $\mathrm{Sat}(t', \mathrm{Sat}(t', t))$ réfère. Cette démarche peut être reproduite autant de fois que nous le souhaitons, et s'adapte immédiatement aux noms propres résultant de la saturation d'un nom de type ((0)) – respectivement (((0))) – par un nom de type (0) – respectivement ((0)).

L'étape dont Frege choisit de s'encombrer inutilement ne pose pas davantage de soucis. Soit t un nom référentiel de type $(0, 0)$ et t' le résultat de sa saturation partielle par un nom propre référentiel t_1. D'après le critère du §29, t' est référentiel si le résultat de sa saturation par n'importe quel nom référentiel t_2 réfère aussi, autrement dit si $\mathrm{Sat}(t, (t_1, t_2))$ [170] réfère. Mais ce point nous est assuré par le fait que t est référentiel. Et l'affaire est bouclée.

Lorsque nous tentions d'établir la référentialité d'un nom *ex nihilo*, sans connaître celle d'aucun autre, nous nous trouvions piégés dans une inéluctable régression à l'infini. Celle-ci se transforme en *progression* à l'infini si nous initialisons la démarche à un ensemble de noms préalablement reconnus comme référentiels, *que ces derniers soient atomiques ou non.* Nul besoin de nous attarder davantage sur la saturation. Le critère du §29, lu à la lettre, fonctionne très bien à cet égard. Il permet d'établir que tous les noms construits par saturations successives à partir d'un ensemble initial de noms reconnus comme tels sont eux aussi référentiels. Néanmoins, nous n'en sommes pas quittes pour autant. Les difficultés, sans surprise, vont venir de la désaturation.

169. si tant est qu'il souhaitait vraiment conduire l'induction *jusqu'au bout.* Nous poserons la question dans un instant.

170. ou $\mathrm{Sat}(t, (t_2, t_1))$, selon la place que notre premier nom est venu occuper.

3.3.4.2 La désaturation

Le §30 se prolonge ainsi :

> Un nom propre peut être employé dans une telle formation [par saturation] seulement s'il occupe les places d'un argument d'une fonction simple ou complexe de premier niveau. Les noms complexes de fonctions de premier niveau résultent, *via* la méthode ci-dessus, seulement d'un nom simple de premier niveau à deux arguments dont la ξ- ou la ζ-place d'argument est occupée par un nom propre. Les places d'argument restantes du nom complexe sont donc toujours celles d'un nom simple de fonction à deux arguments. Il s'ensuit qu'un nom propre qui fait partie d'un nom ainsi formé occupe toujours, où qu'il apparaisse, la place de l'argument d'un ou plusieurs noms de fonctions de premier niveau. (Frege 1893, p. 47)

L'objectif de Frege est simple : montrer que toute occurrence d'un nom propre qui fait partie d'un nom formé par saturation à partir de noms simples occupe toujours la place d'un argument de ces noms simples. Plus bas, il distingua les noms propres qui font partie d'un autre nom de celui qui coïncide totalement avec lui. Selon sa terminologie, un nom propre fait donc partie d'un autre nom s'il y figure sans lui être identique.

Ici, Frege sépare deux façons dont un nom propre peut faire partie d'un nom formé par saturation. Son but consiste à montrer que, pour chacune d'entre elles, le nom propre figure toujours à la place d'un argument d'un nom simple. Afin d'illustrer son propos, donnons-nous quatre noms simples : 'X^0' de type 0, '$X^{(0)}(\xi)$' de type (0), '$X^{(0,0)}(\xi,\zeta)$' de type (0,0), et '$X_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$' de type ((0)). Un nom propre peut faire partie d'un nom construit par saturation à partir de noms simples s'il vient, lors de cette construction, occuper la place d'un argument d'un nom *simple* de fonction. Par exemple, il est possible de former '$X^{(0)}(X^{(0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta))))$' à travers les trois étapes suivantes :

(1) saturation de '$X_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$' par '$X^{(0)}(\xi)$' : '$X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta))$' ;

(2) saturation de '$X^{(0)}(\xi)$' par ce dernier nom :'$X^{(0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)))$'

(3) saturation de '$X^{(0)}(\xi)$' par ce dernier nom :'$X^{(0)}(X^{(0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta))))$'

'$X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta))$' est venu occuper la place de l'argument de '$X^{(0)}(\xi)$' à l'étape (2). Dans le nom final, il occupe donc la place de l'argument de la deuxième occurrence de '$X^{(0)}(\xi)$'.

Tant que le nom propre vient compléter un nom *simple* de fonction, le point est évident. Mais la procédure permet aussi de saturer des noms *complexes*, car de tels noms peuvent être formés *via* la saturation partielle d'un nom de type (0,0) [171]. En voici une illustration :

(1) saturation de '$X_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$' par '$X^{(0)}(\xi)$' : '$X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta))$' ;

(2) saturation de '$X^{(0,0)}(\xi,\zeta)$' par ce dernier nom à la ξ-place : '$X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),\zeta)$'

(3) saturation de ce dernier nom *complexe* par 'X^0' : '$X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),X^0)$' ;

(4) saturation de '$X^{(0)}(\xi)$' par ce dernier nom :'$X^{(0)}(X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),X^0))$'

En examinant l'étape (3), nous constatons que 'X_0' occupe, dans le nom final, la place de l'argument du nom *complexe* '$X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),\zeta)$' de type (0). Néanmoins, l'étape (2)

171. Répétons-le, il s'agit d'une complication que Frege aurait pu s'épargner. En revanche, la manière dont il la traita nous aidera à deviner certaines choses qu'il a passé sous silence mais qui, cette fois, sont absolument essentielles.

révèle qu'il s'agit aussi de la place d'un argument (en l'occurrence, du ζ-argument) d'un nom *simple* : '$X^{(0,0)}(\xi, \zeta)$'. Voilà le point, très simple, que Frege voulait établir en expliquant que "les places d'argument restantes du nom complexe sont toujours celles d'un nom simple de fonction à deux arguments" : même lorsqu'un nom vient occuper la place de l'argument d'un nom complexe de fonction, celle-ci correspond à la place d'un argument d'un nom simple de type $(0, 0)$, dont l'autre place a été saturée préalablement.

Il put donc tirer sereinement sa conclusion : un nom propre qui fait partie d'un nom formé par saturation à partir de noms simples occupe toujours la place d'un nom simple. Il l'a néanmoins formulée maladroitement, ce qui occasionna une traduction malheureuse qui survécut pendant une cinquantaine d'années, jusqu'à ce que Ebert et Rossberg, suivant une remarque de Heck (2012, nbp 2, p. 65), la corrigent (Frege 1893, p. 47). Voici la suite du §30 :

> À présent, si on remplace ce nom propre par un autre à certaines où toutes les places, alors le **nom propre** qui en résulte est aussi formé selon notre méthode, donc celui-ci aussi possède une référence si tant est que tous les noms simples ici utilisés sont référentiels. (Frege 1893, p. 47)

Dans la première traduction anglaise de la première partie des *Grundgesetze*, Furth remplaça le terme que nous avons écrit en gras par 'nom de fonction' (Frege 1967b, p. 85). Il estimait que Frege s'était purement et simplement trompé de mot, expliquant en note de bas de page :

> Dans le texte figure '*Eigenname*' (nom propre), de manière incorrecte, car la procédure qui est ici décrite ne conduit pas, dans ce cas, à un nom propre. (Frege 1967b, nbp p. 85)

Il s'agit d'une erreur, mais d'une erreur compréhensible. Elle provient de l'ambiguïté attachée à l'expression 'un nom ainsi formé'. Au début du passage, Frege se demanda comment "un nom peut être employé dans une formation [par saturation]". Il convint qu'il était possible qu'il vienne compléter un nom *complexe* de fonction, et s'appliqua à montrer que, même dans ce cas, il occupait la place d'un argument d'un nom *simple*. Pour ce faire, il examina le processus dont "résultent les noms complexes de premier niveau". Ceci lui permit de conclure : "il s'ensuit qu'un nom propre qui fait partie d'un nom ainsi formé [...]". Mais cette dernière expression – 'un nom ainsi formé' – peut faire référence à l'un ou l'autre des genres de noms évoqués précédemment : soit *tous* les noms formés par saturation, soit seulement les noms complexes de fonctions formés par saturation. Furth la rapporta, assez naturellement, à celui qui fut mentionné le plus récemment : les noms complexes de fonctions. Mais ce n'est pas le dénouement que Frege désirait. Il cherchait à établir que dans *tous* les noms formés par saturation, les noms propres qui en font partie occupent la place de l'argument d'un nom simple. C'est donc son objectif qui nous permet ici de trancher, l'expression 'un nom ainsi formé' se rapporte (maladroitement) à 'une formation [par saturation]'.

Ceci ne règle néanmoins pas le problème, car il est possible de construire à la fois des noms propres et des noms de fonctions par saturation. Frege n'aurait donc dû écrire ni 'le **nom propre**' ni 'le **nom de fonction**', mais bien 'le **nom** qui en résulte'. Il existe néanmoins une explication simple à cette approximation. Il devait, pour tirer sa conclusion générale, régler le cas *problématique*. Or celui-ci n'est pas celui où un nom propre vient occuper la place d'un argument d'un nom simple pour former un nom complexe de fonction – par exemple '$X^{(0)}(X^0, \zeta)$' – mais bien celui où un nom propre vient occuper la place de l'argument d'un nom complexe pour former un nom *propre* – par exemple '$X^{(0)}(X^0_1, X^0_2)$'. Il avait donc probablement ce cas à l'esprit – le seul qui posait des difficultés – lorsqu'il parla du "nom propre qui en résulte". Ceci ne change rien au fait suivant : il avait bel et bien besoin de la conclusion générale – étendue à *n'importe quel*

nom qui résulte d'une saturation – pour conduire la suite de son propos. Il l'a seulement limitée (maladroitement) au cas dans lequel elle n'était pas immédiate [172].

Voyons à présent pourquoi il s'appliqua à établir ce point. Selon lui, il en découlait que *n'importe quel nom – d'objet ou de fonction –* qui résulte du remplacement dans un nom formé par saturation à partir de noms simples d'une ou plusieurs occurrences d'un nom propre qui en fait partie par des occurrences d'un autre nom propre référentiel possède aussi une référence. Voilà ce qu'il affirma dans l'extrait que nous venons de citer. Laissons quelques instants de côté les raisons de cette affirmation, et observons ce qu'il voulait en faire.

Soit un nom t référentiel – de type 0 ou (0) – dont fait partie un nom propre t_1. Notons t' le nom – de type (0) ou $(0,0)$ qui résulte du retranchement de t_1 dans t. Alors $t = \mathrm{Sat}(t', t_1)$. Supposons que le remplacement dans t de t_1 par n'importe quel nom propre t_2 référentiel est aussi référentiel. Ceci revient à dire que, pour tout nom t_2 référentiel, alors $\mathrm{Sat}(t', t_2)$ possède une référence. Voilà *exactement* ce que le critère du §29 réclame pour attester la référentialité de t', si celui-ci est de type (0). S'il est de type $(0,0)$, alors il faut que, pour tous noms t_2 et t_3 référentiels, $\mathrm{Sat}(t', (t_2, t_3))$ possède une référence. Mais cela revient exactement au fait que le résultat de la saturation partielle de t' par t_2, autrement dit que le remplacement de t_1 par t_2, possède une référence. Frege pouvait donc conclure que le nom résultant de la désaturation d'un nom propre dans un nom construit par saturation à partir de noms simples était référentiel. Et il ne s'en priva pas :

> Nous pouvons admettre une deuxième manière de former des noms de fonctions de premier niveau. Nous formons d'abord un nom de la première manière puis nous y retranchons un nom propre qui en fait partie (ou qui coïncide totalement avec lui) à quelques ou à toutes les places où il apparaît, mais de telle manière que ces dernières soient identifiables comme les places d'un argument [de type 0]. Le nom de fonction en résultant, lui aussi, possède toujours une référence si tant est que les noms simples à partir desquels il fut formé réfèrent à quelque chose, et il peut à son tour être utilisé pour former des noms référentiels de la première ou de la seconde manière. (Frege 1893, p. 47)

La deuxième manière de former des noms correspond à une version limitée de notre désaturation [173]. Les types des noms de l'idéographie justifient effectivement une certaine limitation, mais Frege eut tort de la restreindre à ce point. Nous allons le constater dans un instant.

Avant toute chose, remarquons que s'il avait vraiment voulu circonscrire aux noms propres la conclusion établie plus haut – autrement dit se contenter d'observer que "si on remplace [un] nom propre par un autre à certaines où toutes les places, alors le **nom propre** qui en résulte [...] possède une référence si tant est que tous les noms simples ici utilisés sont référentiels" –, alors il aurait permis *exclusivement* la désaturation de noms propres dans des **noms propres**, et ainsi la construction de noms de type (0) par ce biais. C'est l'avis de Heck, qui estime que Frege a

172. En vérité, elle n'est pas non plus immédiate concernant, par exemple, le nom complexe *de fonction* '$X^{(0)}(X^{(0,0)}(X_1^0, X_2^0), \zeta)$'. Mais c'est bien, ici encore, le nom *propre* '$X^{(0,0)}(X_1^0, X_2^0)$' qui est en cause.

173. C'est donc Frege lui-même qui, dans le §30, prescrivit la construction des noms par saturation-désaturation. Voilà un élément textuel qui s'oppose à la lecture de Landini, selon laquelle aucune stratégie de cet acabit n'est impliquée. Nous avons néanmoins décidé de ne pas en tenir compte en discutant son interprétation, dans la section 2.3.4 du chapitre 2. En effet, Landini est conscient que les §§29-31 jouent contre lui, et tente d'y apporter une réponse (2012, chapitre 6.3). Dans un premier temps, nous ne voulions donc pas présumer du contenu de ces paragraphes, et fonder autrement nos arguments. Nous allons bien sûr, dans un second temps, examiner (et contester) l'analyse que, pour sauver son idée, Landini en fait.

effectivement borné sa conclusion, non que son raisonnement ne permette pas de l'étendre, mais parce qu'il n'en avait pas *besoin* :

> Il n'y a pas lieu, dans le système de Frege, de former des expressions complexes pour des relations, car Frege ne quantifie pas sur des relations. (Heck 2012, nbp. 22, p. 65)

Bien qu'il n'en dise pas suffisamment, ce que Heck tente ici d'établir est correct. Dans quel cadre la désaturation d'un nom propre dans un nom de type (0) est-elle utile ? Puisqu'elle permet de former des noms complexes de type $(0,0)$, elle sert soit à saturer des noms qui attendent un argument de ce type, soit à être saturée par des noms propres. Mais l'idéographie n'intègre aucun nom qui attend des arguments de ce type. C'est ce que Heck explique, en se limitant à la quantification. Le premier point peut donc être écarté. Le second, qu'il tait, n'est pas plus concluant. Supposons que, en désaturant '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(\xi, X^0))$', nous formions le nom '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(\xi, \zeta))$'. Grâce à lui, nous pouvons construire $\ulcorner X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(t, t'))\urcorner$, pour n'importe quels noms propres t et t'. Mais nous pouvons y parvenir sans impliquer ce nom. Il suffit par exemple de saturer '$X_1^{(0)}(X_2^{(0)}(\xi, X^0))$' par t', puis de désaturer X^0 dans le résultat et, enfin, de saturer le nom ainsi obtenu par t.

Ainsi, Heck a raison : l'idéographie se passe totalement de la désaturation dans des noms de type (0). Néanmoins, elle s'en accommode tout aussi bien. Finalement, rien ne l'exige ni ne l'interdit. En l'intégrant, nous permettons par exemple d'accélérer la formation de certains noms. Il faut donc examiner la suite du texte pour découvrir la décision de Frege, et elle révèle que, contrairement à ce que prétend Heck, celui-ci l'incorpora à son langage. En effet, à la fin du passage ci-dessus, il spécifia que les noms de fonctions construits par désaturation pouvaient "à leur tour être utilisés pour construire des noms référentiels de la première ou de la seconde manière". D'après la procédure décrite plus haut, le seul moyen de construire un nom à partir d'un nom de *fonction* en exploitant la seconde manière – la désaturation – est bien d'y retrancher un nom propre. Ce passage est inexplicable si nous supposons que Frege n'autorisait pas la désaturation dans les noms de type (0).

D'une part, l'interprétation de Furth ne peut être valable. Si Frege avait voulu limiter sa conclusion aux noms de fonctions, il n'aurait pas permis la désaturation dans les noms propres, et celle-ci soutient tout l'édifice. D'autre part, celle de Heck n'est pas plus satisfaisante. La conclusion ne doit certes pas être étendue aux noms de fonctions pour que la totalité des noms propres du langage soit générée, mais pour rester cohérente avec la suite du texte. Frege y autorisa la désaturation de noms propres *à la fois* dans les noms propres et dans les noms de type (0). L'explication correcte est donc celle que nous avons fournie plus haut : il se contenta de *formuler* cette conclusion pour les seuls noms propres, car l'autre cas ne présentait aucune difficulté.

Nous sommes désormais en mesure d'exhiber la structure du raisonnement :

(a) Les occurrences des noms propres qui font partie des noms construits par saturation à partir de noms simples figurent toujours à la place d'argument d'une occurrence d'un de ces noms simples.

(b) Donc, si on remplace une ou plusieurs occurrences d'un nom propre qui fait partie d'un nom construit par saturation à partir de noms simples par des occurrences d'un autre nom propre, alors le résultat de l'opération est un nom référentiel, si tant est que les noms simples impliqués le sont aussi.

(c) Conformément au critère du §29, ceci nous assure que le résultat du retranchement d'une ou plusieurs occurrences d'un nom propre qui fait partie de (ou coïncide avec) un nom formé par saturation est référentiel.

(d) Les noms construits de la sorte peuvent être utilisés pour former de nouveaux noms par saturation ou désaturation.

Il reste encore à examiner les étapes (b) et (d). Nous avons vu que l'étape (a) ne posait aucun problème. L'étape (c) soulève une légère difficulté qu'il nous faut régler rapidement. Le critère du §29 permet, à partir de la conclusion de (b), d'attester que le résultat du retranchement d'un nom propre *qui fait partie* d'un nom formé par saturation est référentiel. D'après le raisonnement ci-dessus, cela provient du fait qu'un tel nom figure toujours à la place d'un argument d'un nom simple. Néanmoins, par (c), Frege étendit ce point aux noms qui *coïncident avec* un nom formé par saturation. Dans ce cas, néanmoins, le nom propre ne figure pas à la place d'un nom simple de fonction. Par exemple, dans 'X^0', 'X^0' figure à la place de l'argument de 'ξ', mais ce dernier nom n'est pas atomique.

Frege ne justifia pas cette partie, mais il est facile de voir ce qui l'autorise. Le résultat du retranchement, dans un nom formé par saturation, d'un nom propre qui coïncide avec lui est toujours le même : le nom de fonction 'ξ'. Or la saturation de celui-ci par un nom t référentiel n'est autre que t, et possède donc une référence. D'après le critère du §29, 'ξ' est donc référentiel. Ainsi, l'ajout de Frege est parfaitement licite, bien qu'il ne découle pas des étapes précédentes.

Venons-en à (b). Plus tôt, Frege avait établi que les noms construits par saturation à partir de noms simples référentiels possédaient une référence. Par (a), il montra que tout nom propre faisant partie d'un de ces noms occupait la place d'un argument d'un nom simple. Il s'en suit quasi-immédiatement qu'en remplaçant une ou plusieurs occurrences de ce nom par celles d'un autre nom, alors ce dernier occupera aussi la place d'un argument d'un nom simple. Il faut néanmoins émettre une réserve, à laquelle Frege accorda quelques lignes. Entre (b) et (c), il ajouta la précision suivante :

> Pour s'assurer [que (b) est correct], il est ici supposé que tous les noms simples de fonctions de premier niveau à un argument disposent d'une seule place d'argument, et que les noms simples de fonctions de premier niveau à deux arguments ont une seule ξ- et une seule ζ-place d'argument. Dans le cas contraire, il serait possible que, dans le remplacement évoqué, des places liées de noms simples de fonctions de premier niveau soient occupées par différents noms d'objets, et dans un tel cas nous ne disposerions pas d'une explication de leurs références. Cependant, ceci peut facilement être évité, et doit être évité afin d'empêcher l'apparition de noms sans référence. En effet, il ne serait d'aucune utilité d'introduire différentes ξ- ou ζ-places d'arguments pour les noms simples de fonctions. (Frege 1893, p. 47)

La nuance tient à la distinction entre un nom et ses occurrences. Pour établir (a), Frege avait conclut qu"'un nom propre qui fait partie d'un nom ainsi formé occupe toujours, *où qu'il apparaisse*, la place de l'argument d'un ou plusieurs noms de fonctions de premier niveau". En précisant 'où qu'il apparaisse', il insistait sur le fait que *chaque occurrence* d'un nom propre qui fait partie d'un nom ainsi formé occupe la place d'un argument d'un nom simple. Par conséquent, il est possible de remplacer *une ou plusieurs* de ces occurrences par celles d'un autre nom propre, chacune de ces dernières occupera aussi la place d'un tel argument. Mais supposons qu'un nom simple incorpore *deux* places pour un *même* argument. Par exemple, écrivons '$X^{(0)}(\xi, \xi)$' au lieu de '$X^{(0)}(\xi)$'. Par saturation, nous pouvons construire '$X^{(0)}(X_1^0, X_1^0)$'. Néanmoins, si les *deux* occurrences de 'X_1^0' occupent *conjointement* les places de l'argument de '$X^{(0)}(\xi, \xi)$', aucune d'entre elles ne l'occupe *isolément*. Ainsi, en remplaçant *seulement* la seconde occurrence de 'X_1^0' par 'X_2^0', alors nous construisons une expression qui contredit la conclusion de Frege : '$X^{(0)}(X_1^0, X_2^0)$'. Ici, ni l'occurrence de 'X_1^0', ni celle de 'X_2^0', n'occupe les places de l'argument

de '$X^{(0)}(\xi,\xi)$'. Pour écarter cette possibilité, il suffit d'emprunter le chemin le plus simple : ne jamais doubler inutilement la place d'un argument d'un nom simple.

(a) est donc assuré, et nous confirme que, dans les remplacements évoqués, chaque occurrence substituée occupera elle aussi la place d'un argument d'un nom simple de fonction. Néanmoins, (b) n'est pas établi pour autant. En effet, nous savons que les noms construits par saturation à partir de noms simples référentiels ont une référence, et que les occurrences des noms propres qui en font partie occupent la place d'arguments de ces noms simples. Mais cela ne signifie pas d'emblée que *tout* nom dans lesquels les noms qui en font partie occupent la place d'un argument d'un nom simple est référentiel [174]. Et ce point est essentiel pour atteindre (b). Alors pourquoi Frege se sent-il libre de l'invoquer ?

L'idée sous-jacente est la suivante : les noms simples étant référentiels, si les noms propres qui font partie d'un nom (sont référentiels et) occupent toujours la place d'un argument d'un tel nom simple, alors nous pouvons retracer la construction d'un tel nom et, pas à pas, constater que les noms construits à chaque étape – incluant le nom final – sont tous référentiels. En s'exprimant tel qu'il le fit, Frege évita les complications syntaxiques qui se situent au cœur de son argument. Mais, ce faisant, il en dit trop. Pour le comprendre, reprenons un exemple introduit plus haut :

(1) saturation de '$X_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$' par '$X^{(0)}(\xi)$' : '$X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta))$' ;

(2) saturation de '$X^{(0,0)}(\xi,\zeta)$' par ce dernier nom à la ξ-place : '$X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),\zeta)$'

(3) saturation de ce dernier nom *complexe* par 'X^0' : '$X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),X^0)$' ;

(4) saturation de '$X^{(0)}(\xi)$' par ce dernier nom :'$X^{(0)}(X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),X^0))$'

Supposons à présent que nous voulions remplacer l'occurrence de 'X^0' par celle d'un autre nom propre référentiel, par exemple 'X_1^0'. Alors il suffit de répéter la construction ci-dessus en impliquant le second nom au lieu du premier lors de l'étape (3). Nous savons que l'expression '$X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),\zeta)$' est référentielle. Ainsi, nous pouvons y injecter n'importe quel nom référentiel – par exemple 'X_1^0' – en lieu et place de 'X^0'. Le nom obtenu sera référentiel, et les étapes suivantes se dérouleront de la même manière. En définitive, ce qui importe ici n'est pas que l'occurrence de 'X^0' occupe la place d'un argument de '$X^{(0,0)}(\xi,\zeta)$', mais bien d'identifier l'étape à laquelle elle est venue occuper la place d'un nom référentiel – de '$X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),\zeta)$' – pour répéter cette étape en impliquant cette fois l'occurrence d'un *autre* nom propre – 'X_1^0'.

La réserve émise par Frege peut être traduite dans ce contexte. En doublant la place d'un argument d'un nom simple – en écrivant '$X^{(0)}(\xi,\xi)$' –, il n'est plus possible d'identifier l'étape à laquelle *une seule* occurrence d'un nom propre a été injectée dans ce nom, car un tel nom doit venir occuper les *deux* places de l'argument. Ainsi, en répétant pour 'X_1^0' l'étape de la saturation de '$X^{(0)}(\xi,\xi)$' par 'X^0', nous obtenons '$X^{(0)}(X_1^0,X_1^0)$', et non pas '$X^{(0)}(X^0,X_1^0)$'.

Pour échapper à ces considérations syntaxiques, Frege a fourni un critère *suffisant*. Si toute occurrence d'un nom propre figure à la place de l'argument d'un nom simple dans un nom construit par saturation à partir de noms simples, alors la construction de ce nom peut être répétée en remplaçant une ou plusieurs occurrences d'un nom propre par celles d'un autre. Mais Frege aurait pu dire moins. C'est bien assez que chaque occurrence d'un nom propre figure à la place de l'argument d'un nom *construit par saturation à partir de noms simples* – dans l'exemple ci-dessus, que 'X^0' figure à la place de l'argument de '$X^{(0,0)}(X_\beta^{((0))}(X^{(0)}(\beta)),X^0)$'. En dévoilant la substance de son argument, Frege aurait donc pu s'épargner le développement concernant

174. Traduisons logiquement ce raisonnement. Frege constate que certains noms référentiels possèdent une propriété. Il observe que d'autres noms possèdent cette même propriété, et en conclut qu'ils sont aussi référentiels. Ainsi posé, l'argument est incorrect.

les noms complexes de fonctions. Il tenait probablement à simplifier un argument syntaxique sophistiqué. Malheureusement, si sa formulation convient dans le cas initial, lorsque le nom est construit par saturation à partir de noms *simples*, elle s'avère inadéquate à la démonstration de l'hérédité de l'induction. Cette dernière pose des problèmes – surmontables mais complexes – que Frege n'a manifestement pas remarqués, et que nous allons bientôt découvrir [175].

Avant cela, rassemblons les diverses étapes de notre raisonnement. Lors de la construction d'un nom par saturation à partir de noms simples référentiels, chaque occurrence d'un nom propre qui en fait partie est venue occuper la place de l'argument d'un nom de fonction. Il est donc possible de répéter cette construction en remplaçant une telle occurrence par n'importe quelle occurrence d'un autre nom propre référentiel, chaque étape – et notamment celle du remplacement – permettra la construction d'un nom référentiel (car obtenu par saturation de noms référentiels), donc le nom final est lui aussi référentiel. Nous pouvons réitérer ce remplacement pour *n'importe quelle* occurrence d'un nom propre, et ainsi remplacer *une ou plusieurs* occurrences d'un nom propre par des occurrences d'un autre nom propre, le nom ainsi obtenu restera référentiel. Et nous aboutissons au point (b) qui, comme nous l'avons vu, conduit à (c) sur la base du critère du §29.

C'est en examinant (d) que les problèmes vont se manifester. Frege conclut son raisonnement en expliquant qu'un nom formé de la seconde manière – par désaturation – "peut à son tour être utilisé pour former des noms référentiels de la première ou de la seconde manière". Il existe deux façons de lire ce passage. Nous pouvons le prendre au mot. Supposons qu'un nom ait été formé par désaturation d'un nom propre dans un nom formé par saturation *à partir de noms simples référentiels*. Alors, en effet, nous pouvons saturer ce nom par un nom propre référentiel, ou y retrancher un nom propre qui y figure (ou coïncide avec), il en résultera toujours un nom référentiel. L'argument que nous venons de présenter tient bon. Il sera toujours possible de reproduire la construction du nom initial en effectuant les remplacements souhaités. Mais supposons que, implicitement, Frege aille plus loin car, nous allons le voir, *il a besoin d'aller plus*

175. Heck traduit ainsi l'argument de Frege :

> Soit '$\Phi(\Gamma)$' un nom propre formé de la première manière. Soit '$\Phi(\Delta)$' un autre nom propre dans lequel certaines (mais pas nécessairement toutes) les occurrences de 'Γ' ont été remplacées par des occurrences de 'Δ'. Alors '$\Phi(\Delta)$' peut aussi être formé de la première manière. Étant donné que 'Γ' arriva dans cette position en occupant la place d'un nom simple de fonction – étant donné qu'"un nom propre qui fait partie d'un nom ainsi formé occupe toujours, où qu'il apparaisse, la place de l'argument d'un ou plusieurs noms de fonctions de premier niveau" – nous pouvons construire '$\Phi(\Delta)$' en imitant la construction de '$\Phi(\Gamma)$', mais en injectant 'Δ' à (certaines des) places d'arguments qui étaient préalablement occupées par 'Γ'. (Heck 2012, p. 65)

Comme nous, Heck reconnaît que l'argument se réduit à la possibilité d'imiter la construction du nom en remplaçant certaines occurrences par d'autres. Néanmoins, remarquons qu'il postule plus qu'il n'analyse le lien entre ce fait et le point (a) de Frege. Cela n'a aucune incidence dans ce contexte, car le lien est réel. En revanche, il en va autrement dans le cadre des étapes postérieures de l'induction. En restant extérieur aux considérations techniques de l'affaire, Heck n'a pas vu que cet argument ne s'appliquait pas tel quel au-delà des premières étapes de la récurrence, *i.e.* qu'il était incapable de soutenir la preuve de l'hérédité, à moins d'être enrichi d'autres éléments qui ne vont pas sans un important travail. Voilà ce que nous nous apprêtons à expliquer.

Cette citation est l'occasion d'une remarque incidente. En suivant Frege, Heck y emploie des expressions – incorporant des lettres grecques majuscules – qui respectent la forme de l'idéographie et, ce faisant, simplifient grandement la lecture des raisonnements. Le lecteur se demande probablement pourquoi nous nous cantonnons à des métavariables traditionnelles – tels que 't' – qui s'adaptent mal à la structure idéographique. La réponse est simple : pour ne rien *présupposer* de cette structure. Nous choisissons de nous y heurter plutôt que de nous y fondre, car notre objectif consiste à détecter les problèmes qu'elle pose. Ces derniers resteraient invisibles si nous nous soumettions insidieusement à son diktat. Nous verrons bientôt qu'un grand nombre de questions émergent justement de l'usage fregéen des lettres grecques majuscules.

loin. Admettons qu'il tente ici d'instaurer une induction, en suggérant l'idée suivante :

> Soit $\mathbf{N}_0$ un ensemble de noms simples. Définissons $\mathbf{N}_1$ l'ensemble $\mathbf{N}_0$ enrichi des noms construits par saturation à partir des éléments de $\mathbf{N}_0$, puis $\mathbf{N}_2$ l'ensemble $\mathbf{N}_1$ enrichi des noms construits par désaturation à partir de $\mathbf{N}_1$, puis $\mathbf{N}_3$ l'ensemble $\mathbf{N}_2$ enrichi des noms construits par saturation ou désaturation à partir des éléments de $\mathbf{N}_2$, puis $\mathbf{N}_4$ l'ensemble $\mathbf{N}_3$ enrichi des noms construits par saturation ou désaturation à partir des éléments de $\mathbf{N}_3$, etc.
>
> Réunissons dans $\mathbf{N}$ l'ensemble des éléments de chaque $\mathbf{N}_i$, pour $i \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbf{N}$ est l'ensemble des noms construits par induction à partir de $\mathbf{N}_0$, et ils sont tous référentiels si tant est que ceux de $\mathbf{N}_0$ le sont.

Dans ce cas, nous allons voir que les arguments de Frege s'avèrent insuffisants. Plus précisément, ils ne tiennent pas au-delà de $\mathbf{N}_3$. Or c'est précisément à ce stade que son raisonnement s'arrête, si nous le lisons strictement tel qu'il fut rédigé. $\mathbf{N}_1$ résulte du développement sur la saturation, $\mathbf{N}_2$ du développement sur la désaturation, et $\mathbf{N}_3$ de la remarque selon laquelle "un nom ainsi formé peut à son tour être utilisé pour former des noms référentiels de la première ou de la seconde manière". Après celle-ci, Frege se contenta d'illustrer son propos avant de conclure que "tous les noms correctement formés sont ainsi formés" (p. 48).

Le problème consiste donc à déterminer si cette conclusion doit être lue comme un énoncé de clôture d'une induction que la remarque précédente était destinée à engager ; ou si cette remarque n'était pas censée s'étendre au-delà de ce qu'elle affirme, *i.e.* que les éléments de $\mathbf{N}_3$ sont référentiels. Il est vrai que cet ensemble est suffisant vis-à-vis de l'exemple fourni à la fin du paragraphe :

> Ainsi nous pouvons, par exemple, former le nom de fonction '$\Delta = \zeta$' de la première manière à partir du nom propre 'Δ' et du nom de fonction '$\xi = \zeta$' ; puis le nom propre '$\Delta = \Delta$' à partir de ce nom et de 'Δ'. Sur cette base, nous pouvons former, de la seconde manière, le nom de fonction '$\xi = \xi$', grâce auquel nous pouvons former de la première manière, en impliquant le nom de fonction '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$', le nom propre '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$'. (Frege 1893, p. 48)

'Δ', '$\xi = \zeta$' et '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$' appartiennent à $\mathbf{N}_0$, '$\Delta = \Delta$' à $\mathbf{N}_1$, '$\xi = \xi$' à $\mathbf{N}_2$ et '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' à $\mathbf{N}_3$. Tous les noms impliqués sont donc des éléments de $\mathbf{N}_3$. Néanmoins, il suffit de compliquer légèrement la situation pour déborder de cet ensemble. Supposons que $\mathbf{N}_0$ contienne les noms simples 'X^0', '$\xi = \zeta$' et '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$', et tentons de construire '$\frown_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, (\mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b} = \mathfrak{b})$'. Le nom '$(X^0 = X^0) = (X^0 = X^0)$' appartient à $\mathbf{N}_1$, donc '$(X^0 = X^0) = (\xi = \xi)$' appartient à $\mathbf{N}_2$. Lorsque ce dernier vient saturer '$\frown_{\mathfrak{b}}\, \varphi(\mathfrak{b})$', il en résulte un nom de $\mathbf{N}_3$: '$\frown_{\mathfrak{b}}\, (X^0 = X^0) = (\mathfrak{b} = \mathfrak{b})$'. Pour atteindre notre objectif, il est alors indispensable de désaturer les dernières occurrences de 'X^0' dans ce dernier nom, obtenant un élément de $\mathbf{N}_4$: '$\frown_{\mathfrak{b}}\, (\xi = \xi) = (\mathfrak{b} = \mathfrak{b})$'. Celui-ci peut alors saturer '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$', ce qui nous conduit au résultat : '$\frown_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, (\mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b} = \mathfrak{b})$', localisé dans $\mathbf{N}_5$.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, pour générer la totalité des noms, il est indispensable de procéder à une *succession infinie* de saturations-désaturations. Si nous nous limitons au cas que Frege prend explicitement en considération, alors nous échouons à construire des noms aussi simples que :

$$\text{`}\frown_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, (a = a) = (b = b)\text{'} \qquad \text{ou} \qquad \text{`}\frown_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\, \begin{array}{l} X(\mathfrak{c})\text{'} \\ \quad X(\mathfrak{b}) \\ \quad X(\mathfrak{a}) \end{array}$$

Or des noms de ce genre sont incontestablement présents dans les démonstrations des *Grundgesetze*. Frege avait donc besoin d'étendre la construction des noms au-delà de $\mathbf{N}_3$. Mais l'argument ci-dessus, pour sa part, ne se généralise pas sans modification.

Durant la précédente section, nous avons remarqué que le raisonnement était, relativement à la saturation, indépendant du fait que les noms initiaux sont atomiques. D'après le critère du §29, le résultat de la saturation (partielle ou totale) d'un nom référentiel par d'autres noms référentiels possède aussi une référence. En revanche, une telle conclusion ne peut être tirée aussi facilement pour la désaturation.

Plus haut, il fut établi qu'un nom construit par saturation à partir de noms *simples* référentiels – à partir de $\mathbf{N}_0$ – peut être désaturé sans perdre la propriété de référer. Autrement dit, nous avons montré que tous les noms de $\mathbf{N}_2$ étaient référentiels. Nous avons expliqué que $\mathbf{N}_3$ ne posait pas davantage de soucis. Intéressons-nous désormais à $\mathbf{N}_4$. Supposons que t soit un nom propre de $\mathbf{N}_3$ construit par saturation à partir d'un élément de $\mathbf{N}_2$, lui-même construit par désaturation d'un élément de $\mathbf{N}_1$. Par ailleurs, convenons qu'il y figure une ou plusieurs occurrences d'un nom propre t_1, lui aussi appartenant à $\mathbf{N}_3$. Notre objectif consiste à montrer que le résultat de la désaturation de t_1 dans t – qui appartient à $\mathbf{N}_4$ – reste référentiel.

Pour établir ce point dans le cadre de $\mathbf{N}_2$, Frege s'appuyait sur le fait que tous les noms qui avaient permis de construire t par saturation n'admettaient qu'une seule place pour chaque argument. Mais ce point n'est plus valable ici, car t a été construit par saturation à partir d'éléments de $\mathbf{N}_2$, autrement dit sur la base de noms éventuellement *complexes*. A priori, il peut donc advenir qu'une occurrence de t_1 n'occupe pas la place de l'argument d'un nom fonction.

Formulons le problème conformément à la manière dont nous avons traduit ce passage : dans un tel cas, il ne sera pas toujours possible d'identifier l'étape à laquelle le nom a été introduit. Un exemple aidera à y voir plus clair. Modifions légèrement celui qui nous a servi plus haut, et posons :

$$t_1 = \text{‘}X^0\text{’} \qquad \text{et} \qquad t = \text{‘}\smile_{\mathfrak{a}}\smile_{\mathfrak{b}} (X^0 = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}\text{’}$$

Grâce à une première désaturation, nous pouvons facilement former ‘$\smile_{\mathfrak{b}} (X^0 = \xi) = \mathfrak{b}$’. Il s'agit donc d'un élément de $\mathbf{N}_2$. Lorsqu'il vient saturer ‘$\smile_{\mathfrak{a}} \varphi(\mathfrak{a})$’, nous obtenons le nom propre ‘$\smile_{\mathfrak{a}}\smile_{\mathfrak{b}} (X^0 = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$’, qui appartient à $\mathbf{N}_3$. En désaturant ‘X^0’, nous formons finalement un élément de $\mathbf{N}_4$: ‘$\smile_{\mathfrak{a}}\smile_{\mathfrak{b}} (\xi = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$’.

Afin d'établir sa référentialité, il faut montrer que le processus qui permit de former le nom ‘$\smile_{\mathfrak{a}}\smile_{\mathfrak{b}} (X^0 = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$’ à partir de ‘$\smile_{\mathfrak{b}} (X^0 = \xi) = \mathfrak{b}$’ et ‘$\smile_{\mathfrak{a}} \varphi(\mathfrak{a})$’ en conservant la référentialité peut être reproduit, étape par étape, pour un quelconque nom propre t à la place de ‘X^0’. Malheureusement, durant cette procédure, ‘X^0’ n'est venu saturer aucun nom. Rien ne nous assure que $\ulcorner\smile_{\mathfrak{b}} (t = \xi) = \mathfrak{b}\urcorner$ soit référentiel. Or c'est précisément ce dont nous avons besoin.

Lorsqu'il s'agissait de démontrer la référentialité des éléments de $\mathbf{N}_2$, il fallait remplacer un nom propre figurant dans un élément de $\mathbf{N}_1$ par un autre. Ce dernier ayant été construit par saturation à partir de noms simples, le nom propre avait forcément saturé un nom référentiel durant la construction de l'élément. Ici, le nom est formé par saturation à partir du nom *complexe* ‘$\smile_{\mathfrak{b}} (X^0 = \xi) = \mathfrak{b}$’, et le raisonnement est bloqué.

Il existe néanmoins un remède. Le nom complexe ayant lui-même été construit à partir de noms simples, il suffit de remonter plus loin et d'observer quand, durant sa formation, ‘$\mathbf{N}^0$’ est venu saturer un nom référentiel. Observons la totalité des étapes :

(1) saturation de ‘$\xi = \zeta$’ par ‘X^0’ à la ξ-place : ‘$X^0 = \zeta$’ ;

(2) saturation de ce dernier nom par ‘X^0’ : ‘$X^0 = X^0$’ ;

(3) saturation de '$\xi = \zeta$' par ce dernier nom à la ξ-place : '$(X^0 = X^0) = \zeta$' ;

(4) saturation de '$\mathfrak{b}\ \varphi(\mathfrak{b})$' par ce dernier nom : '$\mathfrak{b}\ (X^0 = X^0) = \mathfrak{b}$' ;

(5) désaturation de la deuxième occurrence de 'X^0' dans ce dernier nom : '$\mathfrak{b}\ (X^0 = \xi) = \mathfrak{b}$' ;

(6) saturation de '$\mathfrak{a}\ \varphi(\mathfrak{a})$' par ce dernier nom : '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ (X^0 = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$' ;

(7) désaturation de l'occurrence restante de 'X^0' dans ce dernier nom : '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ (\xi = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$'.

Nous savons désormais que la première occurrence de 'X^0' est venu saturer un nom référentiel durant la première étape, ce qui va régler le problème. En effet, pour montrer que le nom '$\mathfrak{b}\ (X^0 = \xi) = \mathfrak{b}$' est référentiel, il suffit de répéter les étapes (1)-(4) avec un quelconque nom t' à la place de la *seconde* occurrence de 'X^0', et constater qu'il s'agit toujours d'un nom référentiel, en tant que résultat de saturations de noms référentiels. Mais ces étapes peuvent aussi être répétées pour un quelconque nom t à la place de la *première* occurrence de 'X_0', ce qui garantit la référentialité de $\ulcorner \mathfrak{b}\ (t = \xi) = \mathfrak{b} \urcorner$, donc de $\ulcorner \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ (t = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \urcorner$. Puisque cette conclusion ne dépend pas du nom t référentiel engagé, alors $\ulcorner \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ (\xi = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \urcorner$ possède une référence, d'après le critère du §29. Étape par étape, l'argument procède comme suit. Supposons que les noms simples et les deux noms propres t et t' soient référentiels, alors :

(1) '$\ulcorner t = \zeta \urcorner$' résulte de saturation de '$\xi = \zeta$' (référentiel) par t (référentiel) à la ξ-place : il est référentiel ;

(2) $\ulcorner t = t' \urcorner$ résulte de saturation de ce dernier nom (référentiel) par t' (référentiel) : il est référentiel ;

(3) $\ulcorner (t = t') = \zeta \urcorner$ résulte de la saturation de '$\xi = \zeta$' (référentiel) par ce dernier nom (référentiel) à la ξ-place : il est référentiel ;

(4) $\ulcorner \mathfrak{b}\ (t = t') = \mathfrak{b} \urcorner$ résulte de la saturation de '$\mathfrak{b}\ \varphi(\mathfrak{b})$' (référentiel) par ce dernier nom (référentiel) : il est référentiel ;

(5) ceci est valable *quel que soit le nom* t' référentiel, ainsi $\ulcorner \mathfrak{b}\ (t = \xi) = \mathfrak{b} \urcorner$ est référentiel, d'après le critère du §29 ;

(6) $\ulcorner \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ (t = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \urcorner$ résulte de la saturation de '$\mathfrak{a}\ \varphi(\mathfrak{a})$' (référentiel) par ce dernier nom (référentiel) : il est référentiel ;

(7) ceci est valable *quel que soit le nom* t référentiel, ainsi '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ (\xi = \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$' est référentiel, d'après le critère du §29.

Pour adapter le raisonnement de Frege à une induction complète, il faut donc déterminer, pour chaque occurrence d'un nom à désaturer, à quelle étape de formation elle fut introduite. Malheureusement, dans certains cas, une telle démarche est impossible. Voici le plus simple d'entre eux :

(1) Saturation de '$X_2^{(0)}(\xi)$' par 'X^0' : '$X_2^{(0)}(X^0)$' ;

(2) Saturation de '$X_3^{(0)}(\xi)$' par ce dernier nom : '$X_3^{(0)}(X_2^{(0)}(X^0))$' ;

(3) Saturation de '$X_4^{(0)}(\xi)$' par ce dernier nom : '$X_4^{(0)}(X_3^{(0)}(X_2^{(0)}(X^0)))$' ;

(4) Désaturation de 'X^0' dans ce dernier nom : '$X_4^{(0)}(X_3^{(0)}(X_2^{(0)}(\xi)))$' ;

(5) Saturation de '$X_1^{(0)}(\xi)$' par 'X^0' : '$X_1^{(0)}(X^0)$' ;

(6) Saturation du nom formé en (4) par ce dernier nom : '$X_4^{(0)}(X_3^{(0)}(X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(X^0))))$'

(7) Désaturation de '$X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(X^0))$' dans ce dernier nom : '$X_4^{(0)}(X_3^{(0)}(\xi))$'.

Pour démontrer la référentialité de '$X_4^{(0)}(X_3^{(0)}(\xi))$', il faut répéter les étapes ci-dessus en remplaçant '$X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(X^0))$' par un nom t référentiel quelconque à partir de l'étape où il est venu saturer un nom de fonction. Néanmoins, dans le cas présent, une telle étape n'existe pas. Ce nom est apparu sans qu'il ait complété, tel quel, un nom référentiel. Bien entendu, nous pouvons ici emprunter un autre sentier. Il suffit par exemple de compléter '$X_3^{(0)}(\xi)$' par 'X^0' – ce qui donne '$X_3^{(0)}(X^0)$' –, puis '$X_4^{(0)}(\xi)$' par le résultat obtenu – ce qui donne '$X_4^{(0)}(X_3^{(0)}(X^0))$' –, avant d'y désaturer 'X^0' – pour retrouver '$X_4^{(0)}(X_3^{(0)}(\xi))$'. Ainsi, l'étape à laquelle l'occurrence de 'X^0' est conforme à nos exigences, et le raisonnement de Frege (adapté) peut s'appliquer. Mais existe-t-il toujours, pour former un nom, un chemin alternatif qui respecte nos conditions ? L'exemple ci-dessus démontre que, parfois, des noms propres apparaissent dans un nom sans avoir complété, au cours de sa formation, aucun nom de fonction. Dans de tels cas, est-il toujours possible d'exhiber une autre construction dans laquelle toutes les occurrences désaturées sont venues occuper la place d'un argument d'un nom de fonction ? Le raisonnement l'exige, et Frege n'en dit absolument rien.

Nous sommes en mesure, pour notre part, d'apporter une réponse affirmative, car nous avons anticipé la difficulté durant le chapitre 2. En section 2.3.3.7, il fut établi que l'ensemble des noms restait le même que l'on autorise la désaturation de *tout* nom, ou seulement des noms *atomiques*[176]. Or, l'occurrence d'un nom simple ne peut apparaître qu'en venant occuper la place d'un argument. Le problème rencontré avec '$X_2^{(0)}(X_1^{(0)}(X^0))$' provenait de sa complexité. Ainsi, en se restreignant au second cadre – qui suffit à construire à la totalité des noms –, le raisonnement induit par Frege est totalement correct, et permet d'aboutir à l'induction recherchée.

Cela ne répond pas à une autre interrogation : Frege pensait-il avoir fourni les arguments nécessaires à la bonne tenue de l'induction complète, ou estimait-il que les étapes effectivement décrites suffisait à générer les noms dont il avait besoin ? Dans les deux cas, il commit une erreur. Il lui manquait incontestablement deux éléments pour achever la résolution du pas de récurrence. D'une part, il fallait étendre la saturation au-delà des noms formés à partir de noms atomiques. Cela exigeait de rentrer dans le détail de la formation syntaxique des noms, comme nous l'avons fait plus tôt. D'autre part, il importait de démontrer que les processus de désaturation de noms atomiques et de noms quelconques permettaient de construire exactement les mêmes expressions. Or, nous l'avons constaté à nos dépens lors du second chapitre, mener une telle preuve à terme n'est pas une mince affaire[177]. Rien n'interdisait néanmoins d'affirmer ce point essentiel sans l'établir rigoureusement. Mais Frege n'en fit rien. Au contraire, il basa son raisonnement sur certains éléments, notamment le fait que tout nom simple ne dispose que d'une place par argument, qui ne sont plus exploitables pour l'hérédité de l'induction. Tout indique que, s'il avait à l'esprit d'effectuer cette dernière, il n'a pas réalisé les difficultés qu'elle posait, et s'est contenté d'en décrire les premières étapes. Si, au contraire, il pensait pouvoir s'en tenir à celles-ci, alors il n'a pas vu que des noms pourtant couramment utilisés dans ses preuves échappaient à son emprise. Ce point peut sembler surprenant, d'autant qu'il ne s'agit pas d'expressions extrêmement sophistiquées. Nous ne pouvons pourtant pas écarter cette possibilité, car nous disposons d'autres

176. À une hypothèse près : que le langage incorpore un nom simple de chaque type dont il a besoin de construire des noms complexes. Bien que l'idéographie ne possède aucun nom propre atomique, il demeure possible d'en "simuler" un. Nous développerons bientôt ce point. Pour l'instant, nous souhaitons autant que possible nous maintenir à un niveau informel. Nous fournirons tous les détails nécessaires lorsque certaines choses essentielles auront été dites.

177. bien que Frege n'eût pas à la conduire, comme nous l'avons fait, dans le cadre général de tous les types.

exemples de noms que la description du §30 laisse de côté [178].

Telle qu'elle y est décrite, la désaturation aboutit notamment à la construction de noms complexes de type $(0,0)$ dont l'idéographie, qui ne contient aucun nom en attente d'un argument de ce genre, aurait pu se passer. En revanche, le retranchement de noms de type (0) n'est pas pris en compte. Ainsi, la méthode décrite par Frege ne permet pas de former des noms complexes de type $((0))$, dont il avait pourtant besoin pour compléter '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(f(\beta))$'. Par exemple, pour construire '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, f(X^0) = f(X^0)$', il faut d'abord engendrer '$X^{(0)}(X^0) = X^{(0)}(X^0)$', afin d'y retrancher le nom de *fonction* '$X^{(0)}(\xi)$' pour obtenir '$\varphi(X^0) = \varphi(X^0)$', qui peut ensuite venir compléter '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(f(\beta))$' : '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, f(X^0) = f(X^0)$'.

Étant donnés les types (peu nombreux) des noms de l'idéographie, Frege pouvait se contenter de désaturer les noms propres et les noms de fonctions de premier niveau à un argument. Il omit pourtant ce dernier cas. Doit-on en conclure qu'il n'a pas examiné la formation des noms en question ? Ce n'est pas certain car, dans le §26, il prit ce cas en considération. Peut-être oublia-t-il seulement de le répercuter au sein du §30, ou peut-être le céda-t-il volontairement à l'implicite, pour limiter les complications.

Il est difficile d'apporter des réponses précises à ces questions. Manifestement, Frege fut à la fois peu rigoureux et peu attentif aux difficultés induites par son raisonnement. Cependant, une fois adapté pour surmonter ces dernières, l'argument permet effectivement de conclure, sur la base du critère du §29, que *tout* nom construit par le processus général de saturation-désaturation à partir de noms simples référentiels possède une référence. Nous avons développé pas à pas cet argument, à partir des indices semés par Frege dans le §30. Et il n'est pas inutile, au sortir de ce travail, d'en rédiger une rapide synthèse.

Synthèse : D'après le critère de référentialité, le nom résultant de la saturation d'un nom référentiel par un ou plusieurs noms référentiels possède une référence. Ainsi les étapes de saturation préservent la référence. Par ailleurs, si un nom résulte de la désaturation dans un nom t d'un nom atomique t_1, alors il est possible de procéder à la construction de t en remplaçant n'importe quelle occurrence de t_1, à l'étape où elle fut introduite, par une occurrence de t_2. Si chaque étape n'implique que des noms référentiels, et si t_2 possède aussi une référence, alors le nom ainsi obtenu – qui résulte du remplacement de certaines occurrences de t_2 par t_1 dans t – est référentiel. Voilà exactement ce que le critère du §29 exige pour attester de la référentialité du nom qui résulte du retranchement dans t de ces occurrences de t_1. Ainsi les étapes de désaturation *de noms atomiques* préservent la référence. Mais tout nom qui est généré par désaturation peut être généré par la seule désaturation de noms simples, donc les étapes de désaturation préservent la référence. Et nous pouvons conclure que les noms construits *via* le processus de saturation-désaturation à partir de noms simples référentiels possèdent eux aussi une référence.

Nous n'allons pas rédiger ce raisonnement dans toute sa longueur, car nous allons développer une *autre* lecture du §30 qui, tout en s'appuyant sur ce qui fut dit ici, s'en écartera substantiellement. Nous ne voulons donc pas donner les longs détails de la démonstration sur laquelle repose une interprétation à laquelle nous n'allons pas souscrire. Néanmoins, trois choses méritent d'être dites à son sujet.

La première concerne l'équivalence entre les deux procédés : celui qui limite la désaturation aux noms simples, et celui qui l'étend à tous les noms. Le raisonnement ci-dessus est tributaire de cette équivalence qui, elle-même, dépend du fait que le langage incorpore un nom simple de

178. À notre connaissance, les difficultés que nous venons de soulever, posées par la généralisation de l'argument du §30 à une induction complète, n'ont jamais été mentionnées dans la littérature. En revanche, le problème que nous nous apprêtons à présenter est bien connu. Voir par exemple (Heck 2012, p. 125) et (Linnebo 2004, p. 95).

chaque type (dont des noms complexes doivent être construits). Nous avons établi ce point en prouvant le théorème 3 du second chapitre (p. 330). Malheureusement, l'idéographie n'incorpore aucun nom simple d'objet. Néanmoins ce problème peut facilement être contourné. Il suffit de construire un nom propre référentiel (en tant que résultat de la saturation de noms de fonctions référentiels) [179], puis de *définir* un nom propre atomique grâce à ce nom complexe [180]. Nous disposons alors d'un nom propre atomique référentiel capable de soutenir l'induction.

La seconde remarque a trait à une supposition livrée à l'implicite dans le raisonnement ci-dessus. Pour démontrer la référentialité du résultat t' du remplacement de certaines occurrences d'un nom atomique t_1 par un nom t_2 dans un nom t, nous avons reproduit la construction de t en remplaçant, aux étapes où elles furent introduites, les occurrences de t_1 en question par des occurrences de t_2. Néanmoins, il convient de s'assurer que nous obtenons bien le nom t' souhaité, autrement dit que les remplacements peuvent s'effectuer *après* les saturations – c'est ainsi que nous avons défini t' – ou avant – au moment où l'occurrence est introduite – sans changer le résultat. La question peut sembler surprenante car, dans le cas où t_1 et t_2 sont des noms propres, les manipulations syntaxiques effectuées se limitent en effet à de simples remplacements, et le constat est immédiat. Néanmoins, Frege a aussi besoin de désaturer des noms de fonctions. Or le "remplacement" d'un nom simple de fonction par un autre exige des manœuvres syntaxiques plus complexes. En définitive, il faut vérifier que ces "remplacements" peuvent s'effectuer avant ou après une saturation sans modifier le résultat. Voilà précisément ce que le théorème 6 du chapitre 2 (p. 336) garantit.

Nous avons donc pris toutes les précautions nécessaires, lors du précédent chapitre, pour réunir les éléments techniques exigés par la présente étude. Cela nous conduit à notre troisième remarque. Le travail fut là-bas réalisé dans le cadre général de la totalité des types, et nous avons volontairement rédigé la synthèse ci-dessus sans limiter ces derniers à ceux de l'idéographie. En effet, le raisonnement que nous avons reconstitué à partir des arguments dispersés par Frege au sein du §30 s'applique à n'importe quel langage fregéen. Quels que soient les types incorporés, il permet d'établir que, d'après le critère *contextuel* du §29, si les noms simples sont référentiels, alors les noms complexes construits sur leur base *via* le processus de saturation-désaturation le sont aussi. Le pas de récurrence est donc achevé dans le cadre le plus général possible. Et nous ne voyons pas, sur le plan technique, ce qui pourrait lui être reproché. Malheureusement, il soulève un problème qui, cette fois, échappe à ce domaine, et auquel il est temps de céder la place.

3.3.5 Le pas de récurrence : examen et rejet de la lecture contextuelle

3.3.5.1 L'objection de Heck

La précédente lecture du paragraphe §30 s'appuie sur une interprétation *contextuelle* du critère de référentialité. Une classe d'expressions bien formées – les noms – est définie parmi les suites de signes du langage par un procédé de saturation-désaturation. Le critère exprime alors qu'un élément de cette classe est référentiel si le résultat de sa saturation par (ou de) tout élément référentiel *de cette classe* est lui-même référentiel. Linnebo (2004) défend une telle interprétation contextuelle du critère [181], qu'il nomme une 'lecture non auxiliaire'. Cette appellation s'est largement imposée dans la littérature secondaire, nous expliquerons bientôt son origine. Heck s'oppose aux arguments de Linnebo. Il soulève une difficulté que nous souhaitons discuter et, surtout, préciser :

179. Nous pouvons choisir '$\frown^{\mathfrak{a}}$ — $\mathfrak{a}$'. Tout autre nom qui résulte de la saturation de noms simples conviendrait aussi bien.
180. Par exemple $\Vdash X^0 = \frown^{\mathfrak{a}}$ — $\mathfrak{a}$.
181. sans évoquer les difficultés attachées à la preuve complète de l'hérédité.

> Le plus sérieux problème vis-à-vis de la lecture non auxiliaire émerge à partir d'une réflexion sur la plus intéressante partie du §30 : la "deuxième manière" de former des noms. Rappelons comment l'argument procède. Nous supposons que tous les noms formés de la première manière réfèrent à quelque chose. Nous considérons maintenant un nom de fonction formé de la seconde manière, disons '$\xi = \xi$'. Nous voulons établir que ce nom de fonction réfère, ce pour quoi il nous faut montrer que $\ulcorner t = t \urcorner$ réfère, si tant est que t réfère, peu importe à quoi. [...] Pour conclure, Frege utilise l'argument selon lequel $\ulcorner t = t \urcorner$ peut lui aussi être formé de la première manière, et ainsi réfère. Comme je l'ai dit plus tôt, néanmoins, Frege doit évidemment supposer que t lui-même n'est pas formé de la seconde manière. S'il l'était, alors bien sûr $\ulcorner t = t \urcorner$ ne pourrait pas être formé de la première manière, et l'argument ne serait pas concluant. Mais si t est un nom quelconque référentiel de l'idéographie, alors il n'y a aucune raison de supposer qu'il ne peut être formé de la seconde manière – en tant que tel il peut s'agir de '$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' ou de '$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$' – donc l'argument syntaxique au cœur du raisonnement de Frege est incorrect. (Heck 2012, pp. 124-215)

Corrigeons immédiatement une erreur. Contrairement à ce que Heck affirme dans ce passage, un nom propre ne peut pas être construit de la deuxième manière. Frege est très clair sur ce point : ce procédé consiste à *retrancher* un nom dans un autre nom, et il en résulte nécessairement un nom de *fonction*. Heck s'autorise ici une approximation, causée par une faute plus grave. Il réunit sous l'appellation 'les noms formés de la première manière' tous ceux qui se construisent par saturation à partir des noms *atomiques*, et appelle 'les noms formés de la seconde manière' tous ceux qui exigent une étape de désaturation, *même s'il ne s'agit pas de la dernière étape*. Il est ainsi tombé dans le piège tendu par Frege au sein du §30 : supposer que la totalité des noms peut être engendrée *via* une *seule* étape de désaturation [182] ou, au moins, que l'argument fourni par Frege dans le cadre de la désaturation relative à un nom formé par saturation à partir de noms simples se généralise sans problème à n'importe quelle autre désaturation. Dans la section 3.3 de son ouvrage, il échoue à soulever (donc à régler) les importantes difficultés posées par le raisonnement de Frege lorsque celui-ci doit être adapté à la preuve du pas de récurrence, et non plus limité à la première étape de cette dernière.

Nous pouvons néanmoins traduire son argument en tenant compte de nos conclusions. Supposons que la formation d'un nom nécessite au moins n étapes de saturation-désaturation. En respectant la terminologie utilisée plus haut, un tel nom appartient à $\mathbf{N}_n$. L'objection de Heck est la suivante : on veut remplacer, dans ce nom, certaines occurrences d'un nom t_1 par celles d'un autre nom t_2. Pour cela, on répète les étapes de construction de ce nom en remplaçant, au moment où elles sont introduites, les occurrences de t_1 en question par celles de t_2. Néanmoins, on ne tient pas compte ici de la manière dont t_2 a lui-même été formé. Rien ne nous assure qu'il appartienne à $\mathbf{N}_n$, et nous ne pouvons rien déduire de ses étapes de formation, qui excèdent peut-être celles que nous avons jusqu'alors étudiées.

Comme Frege, Heck se contente de questionner les premières étapes de l'induction. En l'occurrence, il examine le problème posé par $\mathbf{N}_2$, et constate qu'un élément de cet ensemble provient du retranchement dans un élément t de $\mathbf{N}_1$ de certaines occurrences d'un nom t_1. D'après le critère du §29, un tel nom est donc référentiel si le résultat t' du remplacement des occurrences de t_1 en question par des occurrences de n'importe nom t_2 référentiel possède aussi une référence. Nous savons que t possède une référence, car il fut construit par saturation à partir de noms simples référentiels. Frege conclut que t' est "aussi formé selon cette méthode". Heck objecte que

182. plus précisément, que toutes les étapes de désaturation peuvent être réalisées *successivement*, sans être interrompues par une étape de saturation.

si la construction de t_2 exige une désaturation, alors celle de t' aussi. Autrement dit, la conclusion de Frege ne vaut que si t_2 appartient à $\mathbf{N}_1$. Or le critère *contextuel* du §29 exige une vérification pour n'*importe quel* nom t_2 référentiel de l'idéographie, pas seulement pour les éléments de $\mathbf{N}_1$. Heck en conclut que ce critère ne doit pas être lu ainsi, et en tire une réfutation de l'idée de Linnebo :

> Ainsi, selon la lecture de Linnebo, l'argument de Frege échouerait pour des raisons qui n'ont rien à voir avec la quantification de second ordre, mais à cause d'une grossière erreur qui gangrène même la partie inductive du raisonnement, d'une méprise qui s'étend jusqu'au fragment logique du langage. (Heck 2012, p. 125)

Cependant, Heck appuie sa réfutation sur une interprétation particulière de l'expression "aussi formé selon cette méthode". En examinant l'étape de désaturation décrite dans le §30, il explique :

> L'argument de Frege dépend de deux suppositions, parmi lesquelles une seule est explicite. Celle qui n'est pas formulée est la suivante : 'Δ' – le nom substitué à 'Γ' dans '$\Phi(\Gamma)$' – ne peut pas lui-même être un nom formé de la seconde manière [183]. Si 'Δ' était formé de la seconde manière, alors '$\Phi(\Delta)$' ne pourrait évidemment pas être formé de la première manière, et il est clair que la supposition est nécessaire. (Heck 2012, p. 66)

Au contraire, Frege a peut-être de bonnes raisons de ne pas formuler cette condition. En affirmant que t' devait être "aussi formé selon cette méthode", il ne signifiait peut-être pas qu'il était formé par saturation à partir de noms simples, mais à partir de noms simples *et du nom* t' dont, de toute manière, nous *supposons* la référentialité. Reprenons l'exemple de Heck et voyons comment, selon le raisonnement mis à jour dans la précédente section, nous pouvons garantir sa référentialité. Supposons que les noms simples du langage soient référentiels, et donnons-nous un nom t_2 qui possède aussi une référence :

(1) $\ulcorner t_2 = \zeta \urcorner$ résulte de la saturation du nom simple '$\xi = \zeta$' (référentiel) par t_2 (référentiel) à la ξ-place : il est référentiel ;

(2) $\ulcorner t_2 = t_2 \urcorner$ résulte de la saturation de ce dernier nom (référentiel) par t_2 (référentiel) : il est référentiel ;

(3) ceci est valable quel que soit le nom t_2 référentiel, '$\xi = \xi$' est donc référentiel, d'après le critère du §29.

Le fait que t_2 soit construit selon la première manière n'est pas requis. L'argument de Frege peut tout à fait être reconstitué sans y avoir recours. Il procède ainsi : '$X^0 = X^0$' est construit par saturations de noms simples. Nous avons supposé que ces derniers étaient référentiels, et le critère du §29 nous assure que le résultat de la saturation de noms référentiels est référentiel, donc notre nom est référentiel. Pour obtenir le résultat $\ulcorner t_2 = t_2 \urcorner$, issu du remplacement de 'X_0' par un nom t_2 dans '$X^0 = X^0$', nous pouvons reproduire exactement les étapes de formation de ce dernier nom en y substituant t_2 à 'X^0'. Ainsi, $\ulcorner t_2 = t_2 \urcorner$ est "aussi formé selon cette méthode", *i.e.* construit pas saturation à partir de noms simples et de t_2. Les noms simples ont une références donc, d'après le critère du §29, si t_2 est référentiel, alors $\ulcorner t_2 = t_2 \urcorner$ l'est aussi. Nous venons de formuler *exactement* la condition de référentialité de '$\xi = \xi$', selon ce même critère. Il n'est donc absolument pas nécessaire d'ouvrir la boîte noir de la construction de t_2. Le critère de référentialité *suppose* que t_2 est référentiel, et c'est tout ce que le raisonnement *exige*.

Le constat s'étend à toutes les étapes de l'induction. Pour montrer qu'un élément s de $\mathbf{N}_{n+1}$, issu de la désaturation de certaines occurrences d'un nom t_1 dans un élément t de $\mathbf{N}_n$, est

183. Il faut lire : 'un nom dont la formation exige une étape de désaturation'.

référentiel, il suffit de former un nom t' en répétant les étapes de construction de t en remplaçant les occurrences en question par des occurrences d'un nom t_2. Ce qui garantit la référentialité de t nous assure aussi de celle de t', *si tant est que* t_2 *est référentiel.* Mais c'est précisément ce que le critère du §29 suppose pour aboutir à la conclusion que s réfère. Nul besoin, donc, de considérer que t_2 ait déjà été construit au point où nous en sommes de l'induction. Il peut tout à fait appartenir à $\mathbf{N}_{n+m}$ (avec $m > 0$), sans nuire au raisonnement.

Sous cette forme, l'objection de Heck n'est donc pas concluante. Elle va pourtant nous conduire au problème. Heck poursuit son idée en anticipant une réponse qui pourrait lui être faite, différente de la nôtre :

> Il existe une réponse, selon laquelle cette critique ne tient pas compte de l'objectif de Frege d'"étendre progressivement le cercle des noms référentiels". L'idée serait qu'à ce point du processus, nous savons seulement que les noms formés de la première manière réfèrent, ainsi eux seuls doivent être pris en considération dans l'argument initial selon lequel '$\xi = \xi$' réfère. L'idée serait donc celle d'une induction interne dissimulée dans l'argument : une fois que nous savons que '$\xi = \xi$' réfère lorsque des noms formés de la première manière sont injectés aux places de l'argument, nous pouvons générer des noms propres formés de la seconde manière, puis considérer ce qui se produit lorsque nous les insérons aux places des arguments des autres expressions. Mais je ne vois rien dans le texte de Frege qui suggère que son argument possède une structure si complexe. (Heck 2012, p. 125)

Heck pense avoir établi que l'argument de Frege ne vaut que si le nom substitué a déjà été construit au stade considéré de l'induction. Il propose une révision du raisonnement qui permet de sauver la lecture contextuelle du critère de référentialité. D'après l'argument en question, nous pouvons conclure que le résultat du remplacement de certaines occurrences d'un nom t_1 par un nom t_2 dans un nom t appartenant à $\mathbf{N}_n$ est référentiel *si* t_2 *appartient lui-aussi à* $\boldsymbol{N}_n$. Nous ne pouvons donc pas encore affirmer que l'élément s de $\mathbf{N}_{n+1}$ qui résulte du retranchement de ces occurrences de t_1 dans t est référentiel. En revanche, nous savons qu'il est référentiel *relativement à* $\boldsymbol{N}_n$, *i.e.* que le résultat de sa saturation *par un élément de* $\boldsymbol{N}_n$ est référentiel. Il suffit alors de continuer l'induction en vérifiant, lorsqu'un nouveau nom (de bon type) est introduit, qu'il est possible d'en saturer s sans perdre la référentialité. Autrement dit, il suffit de s'assurer, à chaque fois que nous étendons le cercle des noms, que les noms qui étaient reconnus référentiels relativement à l'ancien cercle le sont encore relativement au nouveau. Ainsi, au lieu de prouver une fois pour toutes, lors de son introduction, qu'un nom est référentiel, nous l'établissons au fur et à mesure où notre ensemble de noms s'enrichit.

En fin de compte, Heck rejette cette réponse sous le prétexte que rien ne suggère un raisonnement aussi sophistiqué dans le §30. Nous ne pouvons souscrire à cette conclusion car, contrairement à Heck, nous savons que le contenu de ce paragraphe doit *de toute manière* être substantiellement compliqué pour garantir la preuve du pas de récurrence, et non seulement celle des premières étapes. Il fournit néanmoins un autre argument, discrètement situé en note de bas de page :

> Frege s'exprime comme s'il voulait montrer que '$\xi = \xi$' réfère, et conclut ainsi que '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' réfère. À présent, cette dernière étape semble néanmoins incorrecte, car nous ne savons pas encore que '$\xi = \xi$' réfère, mais seulement que le résultat de l'insertion de certaines sortes de noms à ses places d'argument réfère. Est-on censé parcourir tous les autres noms avant de revenir au cas de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' ? Mais qu'en est-il du cas où nous insérons ce dernier nom dans '$\xi = \xi$' ? Il y a beaucoup d'inductions

> en jeu ici, et il n'est pas certain qu'elles puissent s'agencer convenablement. Je ne dis pas que c'est impossible mais, une fois encore, rien dans le texte ne suggère que Frege ait cette idée à l'esprit. (Heck 2012, nbp 10, p. 125)

L'idée que Heck proposa en réponse à son objection lui paraît difficile à mettre en place, parce qu'elle semble croiser des inductions dont les unes s'appuient sur les conclusions des autres. Le spectre de la circularité rôde encore. Heck n'en dit pas davantage, et il n'écarte pas définitivement la possibilité qu'elle puisse aboutir. Au contraire, nous allons voir que toute stratégie de ce genre est intrinsèquement vouée à l'échec. Nous serons donc plus radical que lui. Mais nous n'avons pas encore besoin de l'être, car nous disposons d'une méthode à laquelle son objection ne s'applique pas. Nous allons pourtant nous-même contester cette méthode, non pas sur la base de son argument – tel qu'il le présente – mais en discutant l'exemple qu'il fournit dans cette note de bas de page.

Le nom '$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' provient de la saturation de '$\mathfrak{a}$ $\varphi(\mathfrak{a})$' par '$\xi = \xi$'. Sa référentialité est établie, selon le critère du §29, à travers le fait que les deux noms précédents sont eux-mêmes référentiels ; elle en *dépend*. Néanmoins, puisque '$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' possède une référence, il a fallu vérifier que le résultat de sa saturation dans '$\xi = \xi$' référait pour établir la référentialité de ce dernier nom. Autrement dit, il fut nécessaire de réaliser les deux premières étapes du raisonnement ci-dessus avec '$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' en lieu et place de t_2, *i.e.* démontrer que '$(\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$' était référentiel. Ainsi, l'établissement de la référentialité de '$\xi = \xi$' exigea de tester sa complétion par un nom – '$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' – reconnu comme référentiel, tandis que la référentialité de ce dernier nom dépend précisément de la sienne. Donnons à cette affaire une tournure légèrement différente. Pour savoir si la preuve de la référentialité de '$\xi = \xi$' exige de tester le nom propre '$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$', il faut savoir si ce dernier est référentiel. Mais cela requiert, en retour, de connaître la référentialité de '$\xi = \xi$'. La circularité, semble-t-il, nous a rattrapé.

Heck reconnaît à demi-mot que le problème est insoluble. Il refuse d'imputer une telle erreur à Frege, ce qui le conduit à rejeter une lecture contextuelle du critère de référentialité. Pour notre part, nous ne sommes pas encore en mesure de prendre une décision. Nous admettons que l'objection de Heck est troublante, mais nous disposons pourtant d'un raisonnement – élaboré lors de la précédente section – qui ne présente absolument rien de circulaire. Notre étonnement sera dissipé lorsque nous comprendrons que nous sommes écartelés entre deux manières d'appréhender le critère du §29. Selon la première, notre méthode – et ainsi la lecture contextuelle du §29 – se tient parfaitement droit. L'exemple de Heck ne révèle aucune circularité, et les réflexions qu'il induit contiennent un sophisme. Selon la seconde, au contraire, elle n'est pas recevable, et toute tentative de correction qui conserverait le caractère contextuel du critère de référentialité est irrémédiablement voué à une circularité fatale. C'est entre ces deux perspectives qu'il nous faudra choisir. Et nous opterons pour la seconde.

3.3.5.2 Deux approches du critère contextuel

Pour mettre en exergue les problèmes qu'elle soulève, il nous faut décrire lentement l'approche que nous allons rejeter. Voici donc une des manières dont peuvent être lus les §§29-30.

Après avoir formulé son critère, Frege expliqua que "ces énoncés ne [pouvaient] être regardés comme des explications [*Erklarüngen*] des expressions 'avoir une référence' ou 'référer à quelque chose'". Ici, le terme 'explication' n'est pas innocent. Frege l'utilisa majoritairement pour instruire le lecteur sur la référence d'un nom [184]. En l'occurrence, il s'agit d'un nom du *concept* de référentialité. Dans le respect du critère de complétude, pour compter comme des *explications* de

184. Nous avons développé ce point en section 3.2.3.7 (p. 514).

ce nom, les énoncés en jeu doivent permettre d'établir quels objets – précisément quels noms de l'idéographie, tous les autres objets en étant écartés – tombent sous ce concept. Pourquoi, sans avoir préalablement identifié certains noms comme référentiels, le contenu du §29 échoue-t-il à remplir cette tâche ?

Remarquons que deux concepts importants sont impliqués dans ce paragraphe. Le premier est celui dont il tente de déterminer la référence : celui de *référentialité* – notons le '$\mathrm{R}(\xi)$'. Il s'agit d'un concept de premier niveau à un argument. Quant au second concept en jeu, il est de type ((0)). Nous pouvons écrire son nom en remplaçant, dans tout le §29, l'expression 'est référentiel' par 'possède la propriété φ', où 'φ' compte encore comme une lettre pour marquer les espaces vacants de type (0). Ce nom est donc constitué de la conjonction de tous les énoncés du §29 dans lesquels ce remplacement a été effectué, et sa référence est, cette fois, bien déterminée. Nous pouvons à loisir définir un nom simple qui possède la même référence, par exemple '$\mathrm{CR}_\beta(\varphi(\beta))$', que nous lirons entre nous : 'φ est Candidat à être le concept de *Référentialité*'.

Ainsi, dans le §29, Frege affirme que le concept de *référentialité* tombe sous le concept '$\mathrm{CR}_\beta(\varphi(\beta))$' : '$\vdash \mathrm{CR}_\beta(\mathrm{R}(\beta))$'. Pourquoi cet énoncé est-il incapable, à lui-seul, de déterminer la référence de '$\mathrm{R}(\xi)$' ? Exactement pour la même raison qui motiva la critique que Frege adressa aux "pseudo-définitions" d'Hilbert (1903b, p. 374) : *a priori*, rien n'assure ni qu'il existe un concept qui vérifie la propriété '$\mathrm{CR}_\beta(\varphi(\beta))$' ni que celui-ci soit unique. En réalité, le premier point pose peu de difficultés. On constate aisément que le concept d'*être un nom de l'idéographie* convient. Par exemple, il est trivial que si la saturation d'un nom de l'idéographie de type ((0)) par n'importe quel nom de l'idéographie de type (0) est un nom de l'idéographie, alors ce nom de l'idéographie est un nom de l'idéographie. Dans ce cas, tous les énoncés du §29 deviennent des tautologies. Malheureusement, le concept $\xi \neq \xi$ possède aussi la propriété $\mathrm{CR}_\beta(\varphi(\beta))$. Cela est tout aussi immédiat, car quel que soit le nom de type ((0)), s'il est différent de lui-même, alors ... – l'antécédent est faux, nous nous moquons du conséquent.

Résumons-nous : dans le §29, Frege a énoncé une propriété que possédait le concept de *référentialité*. Il est trivialement établi que le concept sous lequel tombe tous les énoncés de l'idéographie vérifie cette propriété. Mais il n'est pas seul dans ce cas. Autrement dit, il existe plusieurs candidats à être le concept de *référentialité*. Ce paragraphe ne détermine donc pas la référence de l'expression 'être référentiel'.

Face à ce problème, Frege ajouta l'hypothèse suivante : tous les noms simples de ce langage sont référentiels. Transportée dans ce cadre, la question demeure : quels sont les concepts sous lesquels tombent les noms simples de l'idéographie et qui possèdent la propriété $\mathrm{CR}_\beta(\varphi(\beta))$? Cette fois encore, le concept d'être un nom de l'idéographie convient. Mais à présent, l'objectif consiste à montrer qu'il est le seul. *Voilà ce à quoi le contenu du §30 parvient.* Ce raisonnement procède donc par analyse-synthèse [185]. Dans le §30, Frege suppose qu'il existe un concept qui admet le critère du §29 et sous lequel tombent les noms simples de l'idéographie, puis montre progressivement que chaque nom tombe inéluctablement dessous. Il passe la synthèse sous silence,

185. Il s'agit d'une méthode mathématique qui consiste à supposer qu'une équation admet une solution pour restreindre les candidats – analyse – avant de vérifier que ces candidats conviennent – synthèse.

Frege était familier des métaphores impliquant la notion d'équation. Elles intervinrent à de nombreuses reprises lors de la polémique qui l'opposa à Hilbert ainsi que dans la première section du chapitre 3 des *Grundgesetze*, par exemple à cette occasion :

> Il est encore moins efficace d'expliquer deux choses au moyen d'une seule définition. Toute définition doit, au contraire, contenir un seul signe dont elle stipule la référence. Après tout, il est impossible de déterminer la référence de deux inconnues au moyen d'une seule équation. (Frege 1903a, p. 79)

Son idée était toujours la même : il doit être possible de *déterminer* la référence d'un nom à partir de la manière dont il est introduit, qu'il s'agisse d'une définition ou d'explications. Le reproche adressé à ses adversaires était justement de ne pas suivre ce réquisit.

en omettant de *vérifier* que le concept ainsi exhibé, qui subsume tous les noms de l'idéographie, admet ce critère. Mais, une fois encore, ce point est trivial.

Il faut maintenant confronter cette lecture à l'objection de Heck. Dans son exemple, la circularité provient du fait que, pour établir la référentialité de '$\xi = \xi$', il est nécessaire de vérifier celle de $\ulcorner t = t \urcorner$, lorsque t est lui-même construit à partir de '$\xi = \xi$', et qu'il a donc fallu connaître la référentialité de ce dernier nom pour établir la sienne. En somme, Heck explique qu'il n'est pas possible de déterminer si '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' doit être testé pour établir la référentialité de '$\xi = \xi$' *avant* de connaître cette dernière. Mais, dans le cadre que nous avons posé, cela ne pose aucun souci. Nous n'avons pas besoin de savoir *à l'avance* quels noms propres sont référentiels pour que le test soit concluant. En effet, nous *supposons* qu'il existe un concept qui vérifie $\mathrm{CR}_\beta(\varphi(\beta))$ et qui subsume tous les noms simples. Nous faisons donc face à deux alternatives : soit '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' ne tombe pas sous ce concept – alors il n'a pas à être testé –, soit il tombe dessous – alors il faut le tester, et le raisonnement de la section précédente aboutit. Nous sommes bêtement sauvés par le tiers exclu.

La solution provient de ce que, à chaque pas, le raisonnement n'impose pas de savoir sur quel ensemble de noms doivent être testés les nouveaux noms dont la référentialité est questionnée ; il *suppose* qu'il existe un tel ensemble – les noms référentiels – et montre que, *quel qu'il soit* – tant qu'il respecte le critère du §29 –, alors le résultat du test ne peut être que positif.

Disons-le une fois pour toutes. Dans ce contexte, le raisonnement élaboré lors de la précédente section ne présente aucune circularité. Le §30, enrichi des éléments que nous avons apportés, établit que le seul candidat *possible* pour être le concept de référentialité et sous lequel tombent les noms simples de l'idéographie subsume *tous* les noms de l'idéographie – voilà la partie analyse. Il ne reste qu'un pas, implicite chez Frege mais trivial à effectuer : montrer que le candidat passe le test – voilà la partie synthèse. Ce faisant, il est démontré que, pour respecter les conditions qui pèsent sur elle, la référence de l'expression 'être référentiel' peut être et ne peut qu'être le concept qui subsume tous les noms de l'idéographie. Ainsi, les énoncés du §29, *conjointement avec l'affirmation selon laquelle tous les noms simples sont référentiels*, peuvent être regardés comme des explications de l'expression 'être référentiel', autrement dit suffisent à déterminer sa référence. C'était l'objectif annoncé par Frege, et il est atteint.

Néanmoins, l'autre solution que Heck propose en réponse à sa propre objection révèle une ambiguïté attachée à la formule 'étendre progressivement le cercle des noms référentiels'. Selon la méthode présentée ci-dessus, à chaque pas, il est possible de démontrer que les nouveaux noms construits à partir de $\mathbf{N}_n$ sont référentiels en sachant seulement que les éléments de $\mathbf{N}_n$ le sont, *mais en utilisant néanmoins le fait que des éléments extérieurs à cet ensemble sont ou ne sont pas référentiels.* Heck impose de limiter le test *aux noms qui ont déjà été reconnus comme référentiels.* Cette exigence n'apparaît nulle part dans le texte, mais nous croyons pourtant que Frege avait de bonnes raisons de s'y soumettre.

Pour éclaircir le problème, et quitte à nous écarter quelque peu du lexique fregéen, conférons-lui un visage ensembliste. L'ensemble $\mathbf{N}$ correspond à la propriété d'être un nom de l'idéographie. Sa construction procède par induction. L'ensembe $\mathbf{N}_0$ des noms simples est d'abord introduit puis, à chaque étape, un nouvel ensemble $\mathbf{N}_{n+1}$ est défini par saturation ou désaturation à partir de l'ensemble $\mathbf{N}_n$. Par ailleurs, l'ensemble d'ensembles $\mathbf{CR}$ correspond à la propriété de second niveau $\mathrm{CR}_\beta(\varphi(\beta))$. Selon la méthode ci-dessus, l'objectif consiste à démontrer qu'il existe un unique ensemble $\mathbf{NR}$ qui contient tous les éléments de $\mathbf{N}_0$ et appartient à $\mathbf{CR}$. On commence par prouver *par induction* qu'il existe *au plus* un ensemble vérifiant ces conditions. On suppose donc que $\mathbf{CR}$ n'est pas vide et contient au moins un ensemble C. Par hypothèse, tous les noms simples appartiennent à C. Par définition de $\mathbf{CR}$, nous savons que tous ses éléments ne contiennent que

des noms de l'idéographie. Ainsi, il suffit de prouver que, pour chaque entier naturel n, si $\mathbf{N}_n$ est inclus dans C, alors il en va de même pour $\mathbf{N}_{n+1}$. Pour ce faire, nous utilisons le fait que chaque nom t de l'idéographie, *même ceux qui ne sont pas des éléments de* $\boldsymbol{N}_n$, appartient ou n'appartient pas à C. On en déduit alors que $C = \mathbf{N}$. Autrement dit, $\mathbf{CR}$ contient au plus un élément : $\mathbf{N}$. Il ne reste alors, pour synthétiser, qu'à établir que $\mathbf{N}$ appartient à $\mathbf{CR}$. Et la démonstration est achevée : tous les noms sont référentiels, *i.e.* $\mathbf{NR} = \mathbf{N}$.

Cette stratégie n'est coupable d'aucune circularité. Mais Heck s'en écarte en un point précis, ajoutant une contrainte implicite que le raisonnement ci-dessus ne respecte pas. Notons que le critère du §29 permet de démontrer la référentialité d'un nom de deux manières différentes. La première, que nous qualifierons de 'directe', consiste à établir que ce nom est le résultat de la saturation de noms référentiels. La seconde, que nous appellerons 'indirecte', repose sur la preuve que le résultat de la saturation de ce nom par n'importe quel autre nom référentiel possède une référence[186]. La condition supplémentaire de Heck est la suivante : nous devons toujours connaître l'ensemble de noms impliqué dans la preuve qu'un autre nom est référentiel. Dans notre raisonnement, la transgression intervient lorsque nous nous appuyons sur le fait que chaque nom t de l'idéographie appartient ou n'appartient pas à C avant d'avoir déterminé C. Par exemple, pour démontrer que '$\xi = \xi$' est référentiel, nous disons que $\ulcorner t = t \urcorner$ est référentiel, en tant que résultat de la saturation de noms référentiels, si tant est que t possède aussi une référence. À travers t, nous impliquons un ensemble qui n'est pas encore déterminé : celui des noms propres référentiels . En définitive, Heck rejette l'usage d'une métavariable qui parcourt l'ensemble des noms (d'un type particulier) référentiels *avant* que ne soit établi quel est cet ensemble.

Avant d'expliquer les raisons de cette contrainte supplémentaire, observons l'alternative esquissée en note de bas de page. Heck considère le cas de '$\xi = \xi$'. Il suggère qu'après la première étape de la preuve, il ne soit pas encore établi que ce nom réfère, mais seulement que les résultats de sa saturation par les noms *déjà* reconnus comme tels possèdent une référence. Il se soumet ainsi à sa propre exigence, n'opérant le test que sur l'ensemble parfaitement déterminé des noms propres dont nous savons qu'ils réfèrent. Cependant, cet ensemble n'est pas encore complet ; il ne contient pas tous les noms d'objets référentiels. Heck propose donc de combler les lacunes étape par étape. À chaque fois qu'un nouveau nom est introduit dans cet ensemble, nous devons vérifier que, lorsqu'il vient saturer '$\xi = \xi$', un nom référentiel est obtenu. Au bout du compte, le test est achevé, bien qu'il soit réalisé en plusieurs temps – et non d'un seul geste, comme dans le raisonnement précédent –, et la référentialité de '$\xi = \xi$' est établie de manière indirecte. Heck estime qu'"il y a beaucoup d'inductions en jeu, et [qu']il n'est pas certain qu'elles puissent s'agencer convenablement". Il remarque notamment que '$\mathfrak{a} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' ne peut être testé qu'une fois reconnu comme référentiel, ce qui exige que '$\xi = \xi$' l'ait été lui aussi, donc que le test soit *déjà* complet. Néanmoins, l'exigence pourrait être contournée si la référentialité de '$\mathfrak{a} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' n'était pas établie directement, en exploitant le fait qu'il provient de la saturation de '$\mathfrak{a} \varphi(\mathfrak{a})$' par '$\xi = \xi$', mais indirectement. Heck ne soulève pas cette objection, mais il reste prudent. Bien qu'il choisisse une autre voie, il n'écarte pas définitivement la possibilité que cette stratégie aboutisse. Une enquête approfondie sur la manière dont les deux méthodes d'établissement de la référentialité, directe et indirecte, se répondent l'une l'autre lui fait défaut pour parvenir à cette conclusion. Nous souhaitons y procéder, afin de lever le doute et d'établir une fois pour toutes que si la contrainte de Heck est adoptée, alors aucune lecture littérale du critère du §29 n'est compatible avec la réalisation du pas d'induction.

186. quelle que soit la version que nous choisissions d'adopter : saturation totale ou partielle. Même dans le cadre étendu à la totalité des types, ces alternatives sont équivalentes.

3.3.5.3 La circularité de la seconde approche

L'exigence en cause impose de limiter le test de référentialité aux noms pour lesquels cette propriété a déjà été établie. Il devient donc indispensable d'étendre progressivement non seulement les noms reconnus comme référentiels mais aussi, *simultanément*, les noms sur lesquels un nom doit être testé pour être reconnu comme référentiel. Comment cette méthode pourrait-elle aboutir ? Supposons par exemple qu'à chaque étape de désaturation, nous obtenions un nom qui, une fois complété, devienne un élément de $\mathbf{N}_1$, *i.e.* un nom résultant de la saturation de noms simples. Ainsi, une fois $\mathbf{N}_{2n}$ construit (quel que soit n non nul), ses éléments seraient saturés par n'importe quels autres noms (de bons types) appartenant aussi à $\mathbf{N}_{2n}$, et il en résulterait des expressions de $\mathbf{N}_1$, autrement dit des noms référentiels. Les éléments de $\mathbf{N}_{2n}$ seraient donc référentiels relativement à $\mathbf{N}_{2n}$. De plus, $\mathbf{N}_{2n+1}$ serait formé, à l'étape suivante, par la saturation d'éléments de $\mathbf{N}_{2n}$. Puisqu'il serait établi que de telles saturations génèrent toujours des noms référentiels, alors les nouveaux noms ajoutés à cette étape seraient eux-mêmes référentiels. Les éléments de $\mathbf{N}_{2n}$ seraient alors à nouveau testés sur $\mathbf{N}_{2n+1}$, et il en résulterait encore des noms appartenant à $\mathbf{N}_1$, etc. Ainsi, un nom construit à une étape impaire appartiendrait à $\mathbf{N}_1$, tandis qu'un nom formé à une étape paire – par exemple $2n$ – serait testé avec succès sur le première ensemble auquel il appartient – $\mathbf{N}_{2n}$ – puis sur tous les ensembles formés postérieurement, donc progressivement sur *tous* les noms du langage (de bon type).

Voilà le cas le plus simple dans lequel la méthode serait couronnée de succès. Ce n'est cependant pas celui auquel nous sommes confrontés. En effet, si le résultat de la saturation de '$\xi = \xi$' – formé à l'étape 2 – par des éléments de $\mathbf{N}_2$ est toujours un nom de $\mathbf{N}_1$, en revanche celui de sa complétion par l'élément '$\frown\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' de $\mathbf{N}_3$ n'y appartient pas. En lui-même, ce constat ne suffit pas à disqualifier généralement la méthode. En effet, il demeure possible que la référentialité du nom en question soit établie *plus tard*, à travers d'autres tests successifs. Ainsi, lorsque le résultat du test d'un nouveau par un ancien nom reconnu comme référentiel donne un nom qui n'est pas *encore* reconnu comme tel, rien n'assure que ce dernier ne le sera *jamais*. En ce sens, les tests effectués sur un nom influent directement sur ceux qui en touchent un autre. Heck s'aperçut de cette difficulté, en remarquant qu'il y avait plusieurs inductions en jeu, et préféra justifier par l'exégèse le rejet de cette alternative – rien dans le texte de Frege ne la suggérant –, sans établir définitivement qu'elle ne pouvait aboutir. La référentialité semble pouvoir "contaminer" pas-à-pas la totalité des candidats, mais de manière extrêmement sophistiquée. En vérité, il suffit d'examiner calmement les conditions à réunir pour que cette méthode aboutisse afin de constater qu'elle en est incapable, et ainsi dissoudre la première impression de complexité qu'elle suscite.

Lorsqu'un nom t est introduit par désaturation, il importe d'examiner les résultats de sa saturation à la fois par les noms qui ont déjà été reconnus comme référentiels, et par ceux qui sont encore candidats à l'être. Ce faisant, nous nous soumettons toujours à la contrainte de Heck, car nous ne tirerons les conséquences d'un tel test uniquement lorsque les noms impliqués auront été effectivement reconnus comme référentiels, même s'ils ne le sont pas encore au moment où le test est effectué. Supposons qu'à un certain point de la démonstration, le résultat d'un nom t par un autre nom t' soit reconnu comme référentiel, contrairement à t et t' ; et imaginons que, plus tard dans la preuve, t' soit lui-même reconnu comme référentiel. Il sera alors établi que le test effectué pour t dans le cas de t' est concluant, car nous saurons que t' et que le résultat obtenu lorsqu'il sature t sont référentiels. Or c'est tout ce qui est exigé, et il nous est indifférent que ces deux points aient été confirmés *à différents moments* de la preuve. La contrainte de Heck impose seulement que la référentialité de t soit établie *après* celle de t', c'est-à-dire que la conclusion du test – potentiellement que t est référentiel – ne soit pas tirée avant que la référentialité de t' ne soit avérée. Elle est donc rigoureusement observée.

De cette manière, la référentialité pourrait se propager de noms en noms. Il convient néanmoins de mettre la méthode en forme, et notamment d'agencer proprement les définitions des candidats à la référentialité et des noms référentiels. Celles-ci doivent prendre en compte un certain nombre de cas. À chaque étape, un nom peut être reconnu comme référentiel, comme non référentiel, ou comme simple candidat à la référentialité. Supposons que t soit introduit par désaturation. D'une part, il faut tester sa saturation par les noms reconnus comme référentiels. Si, pour un tel nom t', le résultat est reconnu comme non référentiel, alors t n'est pas référentiel. S'il est au contraire reconnu comme référentiel, alors le test est définitivement passé pour t'. S'il n'est pour l'instant qu'un candidat à la référentialité, alors il faut attendre ce verdict pour savoir si le test a aboutit dans le cas de t'. D'autre part, il faut aussi tester sa saturation par les noms qui ne sont encore que des candidats à la référentialité. Nous retrouvons les trois précédents cas, mais ici le résultat du test n'a d'importance que si le candidat est finalement reconnu comme référentiel. Enfin, il faut répéter ce test au fur et à mesure où l'ensemble des noms s'élargit.

Supposons à présent qu'un nom t soit introduit par saturation à partir de t_1 et de t_2 [187]. Si t_1 et t_2 sont reconnus comme référentiels, alors t l'est immédiatement. Si au moins l'un des deux n'est qu'un candidat à la référentialité, alors il faut attendre de connaître le verdict. Par ailleurs, il est possible qu'un nom introduit par saturation voit sa référentialité établie de manière *indirecte*. Il faut donc répéter en entier le raisonnement appliqué à la désaturation.

Enfin, à chaque fois qu'un nom est établi comme référentiel ou comme non référentiel, il convient d'en tenir compte dans les tests relatifs aux autres noms.

La méthode générale est donc *extrêmement* complexe. Il n'est pas nécessaire, comme le pensait Heck, de croiser les inductions, mais il est indispensable de garder en mémoire l'état de chaque test pour chaque nom, et de modifier progressivement non seulement cet état, mais aussi celui des autres tests dans lesquels le nom est impliqué. Ceci exige de prendre en compte *énormément* de cas.

Il existe cependant un moyen de la simplifier. D'après le critère du §29, le résultat de la saturation de noms référentiels est référentiel. Par contraposée, si un nom t vient saturer, ou est saturé par, un nom référentiel et qu'il en résulte un nom qui n'est pas référentiel, alors nous pouvons conclure que t lui-même n'est pas référentiel. Néanmoins, il s'agit là de l'*unique* manière d'établir la non-référentialité d'un nom. Et elle suppose qu'un autre nom ait *déjà* été reconnu comme non-référentiel. Or notre hypothèse de départ – selon laquelle tous les noms simples ont une référence – ne permet pas d'aboutir à une telle conclusion. Ainsi, il est rigoureusement impossible d'aboutir à la non-référentialité d'un nom à partir de l'hypothèse initiale et du critère du §29. Par conséquent, il n'existe que deux possibilités : soit la méthode aboutit et permet de reconnaître progressivement *tous* les noms comme référentiels, soit elle n'aboutit pas et certains conservent jusqu'au bout leur statut de candidats. Dans notre raisonnement, nous n'avons donc pas à tenir compte du fait qu'un nom puisse être reconnu comme non-référentiel. Tous les noms introduits sont candidats, et le resteront jusqu'à ce qu'ils soient reconnus comme référentiels. Le problème est précisément de s'assurer qu'ils finissent tous par l'être.

Et ce problème, malheureusement, n'admet pas de solution. En vérité, la propagation de la référentialité est bloquée à un stade extrêmement précoce. Seules les deux premières étapes se déroulent correctement. En effet, les éléments de $\mathbf{N}_0$ sont par hypothèse reconnus comme référentiels. $\mathbf{N}_1$ ne contient que des noms formés par saturation à partir de noms référentiels, qui accèdent donc immédiatement au même statut. Ainsi, pour l'instant, l'ensemble des noms reconnus comme référentiels coïncide avec $\mathbf{N}_1$. La difficulté intervient à travers le constat sui-

187. Nous respectons ici la construction des noms esquissée dans le §30 qui procède par saturations *partielles*. Nous pourrions sans difficulté adapter notre raisonnement aux saturations totales.

vant : tout nom construit par saturation à partir d'éléments de $\mathbf{N}_1$ appartient lui-même à $\mathbf{N}_1$. Autrement dit, il n'est plus possible de former de *nouveaux* noms par saturation à partir de noms reconnus comme référentiels – donc d'établir *directement* la référentialité de nouveaux noms – tant que l'ensemble des noms référentiels n'aura pas été enrichi autrement. Il est donc nécessaire, à ce stade, d'étendre *indirectement* le cercle des noms reconnus comme référentiels. Si nous y parvenons, alors nous pourrons utiliser ces nouveaux noms dans diverses saturations, et la référentialité des résultats sera assurée de manière directe. C'est d'ailleurs ainsi que la contagion est censée opérer. Mais il est *avant tout* nécessaire d'établir indirectement la référentialité d'au moins un nom. Or c'est cela, précisément, qui est impossible. Qu'il s'agisse d'un nom d'objet ou de fonction, la reconnaissance indirecte exige d'avoir *déjà* établi la référentialité de *tous* les noms d'un type donné (impliqué dans la construction). Mais, quel que soit le type en question, certains noms ne sont formés qu'*après* l'étape de $\mathbf{N}_1$, et ne peuvent donc pas encore être directement reconnus comme référentiel. Il faut donc procéder indirectement, ce qui exige à nouveau d'avoir reconnu tous les noms d'un autre type comme référentiels, et le problème se répète. La circularité entrevue dans l'exemple de Heck est absolument générale, et rien ne permet d'en réchapper [188].

Finalement, le raisonnement pêche par là où il fut motivé. Il était nécessaire parce que certains noms – voire leur grande majorité – ne pouvaient être construits à travers les seules saturations de noms simples, et il échoue directement à cause de la présence de ces noms.

Nous savons désormais qu'il existe deux manières d'interpréter la formule 'étendre progressivement le cercle des noms référentiels', selon si nous autorisons ou interdisons le raisonnement à s'appuyer sur la totalité de ces noms avant d'avoir déterminé – afin de déterminer – à quoi elle correspond. Dans le premier cas, la preuve s'achève sans difficulté. Nous en avons décrit les différentes étapes, constatant qu'aucune circularité ne venait la paralyser. Dans le second, au contraire, elle ne peut aboutir.

Il nous semblait important de déceler clairement où la circularité se situe, ainsi que les pré-

188. Il est possible de décrire formellement la procédure par laquelle la référentialité est censée se propager. Définissons par récurrence les ensemble **NR** des noms reconnus comme référentiels et **T** des états des tests des candidats :

- Cas de base : **NR** ne contient que les noms simples et **T** est vide.
- Étape de désaturation : pour tout *nouveau* nom t introduit, nous enrichissons **T** du couple (t, E_t), où E_t contient les résultats *n'appartenant pas à **NR*** des saturations de t par les noms (de type adapté) construits jusqu'alors ; puis, pour tout nom t' déjà connu et saturable par t, nous modifions $(t', E_{t'})$ dans **T** de telle sorte que $E_{t'}$ soit enrichi du résultat de la saturation de t' par t si celle-ci n'appartient pas à **NR**.
- Étape de saturation :
  - pour tout nom déjà connu, nous enrichissons **T** du triplet (t, t, F_t), où F_t contient les noms *n'appartenant pas à **NR*** à partir desquels t vient d'être formé ;
  - pour tout *nouveau* nom, nous procédons aux *deux* dernières étapes décrites ci-dessus.

  Ensuite, nous intégrons à **NR** tous les noms t' tels que $(t', t', \emptyset)$ appartienne à **T**.

  Enfin, pour tout couple – respectivement tout triplet – dans **T**, nous vidons son second – respectivement troisième – membre de tous les éléments de **NR**.

L'idée tapie derrière cette mécanique est assez simple. Le troisième membre d'un triplet contient les éléments qui doivent être reconnus comme référentiels pour que le nom en cause le soit à son tour, de manière directe. Pour leur part, les couples gèrent la reconnaissance indirecte de la référentialité. Le second membre se vide d'anciens candidats au fur et à mesure où ceux-ci sont reconnus comme référentiels, mais se remplit de nouveaux tandis que l'ensemble des noms s'étend. Lorsque la procédure s'achève, tous les noms complexes reconnus comme référentiels l'ont été de manière directe. Si la stratégie fonctionnait, le deuxième membre de certains couples serait vide. Cela signifierait que le résultat de la saturation du nom en cause par n'importe quel nom appartient à **NR**, et nous pourrions ajouter indirectement ce nom à ce dernier ensemble, puis directement ceux qui résultent de sa saturation, etc. La contagion serait en marche. Malheureusement, à la fin de la mécanique, **NR** n'a pas bougé, il est toujours égal à $\mathbf{N}_1$, et aucun couple n'admet l'ensemble vide pour second membre.

supposés dont elle dépend. En effet, elle fut très régulièrement discutée dans la littérature, mais souvent d'une manière (qui nous semble) imprécise. Dummett, par exemple, souleva cette difficulté en examinant le contenu des §§29-31 :

> L'extraordinaire insouciance [de Frege] concernant le quantificateur de second ordre constitue la principale raison de son basculement dans l'incohérence. L'argument du §31 exige une preuve de la légitimité de l'opération générale de formation des noms de fonctions de second niveau. Donnons-nous un énoncé ou n'importe quel autre terme singulier. Comme condition pour attacher une occurrence initiale du quantificateur de second niveau, nous devons former à partir de ce terme un nom de fonction de second niveau en y retranchant une ou plusieurs occurrences. Affirmer que le nom de fonction de second niveau qui en résulte possède une référence revient à dire que le résultat de sa saturation par n'importe quel nom de fonction de premier niveau est aussi référentiel ; il s'en suivrait donc que le résultat obtenu lorsque le quantificateur de second niveau lui est attaché possède une référence. Mais comment la prémisse peut-elle être établie ? (Dummett 1991b, p. 218)

La question est simple : pour garantir que la saturation de '$\mathfrak{f}\!\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{f}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' par un nom t de type $((0))$ possède une référence, il faut s'assurer que ce dernier nom possède une référence ; cela, en retour, exige de montrer que le résultat de la saturation de ce dernier nom par n'importe quel nom t' de type (0) est référentiel. Dummett estime que ce dernier point ne peut être établi. On s'attend à ce qu'il soulève l'objection de Heck : il est possible de choisir un nom t' généré à partir du résultat de la saturation de '$\mathfrak{f}\!\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{f}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' par t et, ainsi, dont la référentialité dépend de celle de ce résultat, que nous cherchons à établir. Pourtant, il emprunte un autre chemin :

> L'erreur tient dans le fait que, en considérant les résultats de la saturation du nom de second niveau, nous devons considérer *tous* les noms de fonctions de premier niveau comme candidats à cette saturation, y compris ceux qui incorporent n'importe quel nombre d'occurrences du quantificateur de second niveau : l'hypothèse d'induction ne suffit donc pas à atteindre notre objectif. (Dummett 1991b, p. 218)

Dummett se contente de constater que '$\mathfrak{f}\!\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{f}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' peut être impliqué dans t', quoi qu'il en soit de t. Jusqu'à présent, nous avons identifié le problème en tentant d'établir la référentialité de noms *complexes*. Au contraire, Dummett cherche à montrer celle d'un nom simple – '$\mathfrak{f}\!\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{f}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$'. Il localise la source de la circularité dans la quantification de second ordre, en avançant la raison suivante : Frege aurait développé une conception *substitutionnelle* de cette quantification [189]. Ainsi le même critère contextuel vaudrait aussi pour le nom '$\mathfrak{f}\!\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{f}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$', dont la référence dépendrait de celles de tous les noms de type (0). Il développe donc exactement l'idée de Heck, mais appliquée à ce nom précis : pour savoir s'il possède une référence, il faut tester sa saturation par tous les noms de fonctions de premier niveau, y compris ceux qui l'intègrent, *i.e.* ceux qui présentent une ou plusieurs quantifications de second ordre. Il illustre ensuite son objection à travers un exemple qui se formalise comme suit. Définissons d'abord les deux noms suivants :

$$\text{`}\Vdash X_\beta^{((0))}(f(\beta)) = \begin{array}{l} f(\grave{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon))) \\ \grave{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon)) = \grave{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \end{array}, \qquad \text{`}\Vdash X^{(0)}(a) = \mathfrak{f}\!\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{f}\ \begin{array}{l} \mathfrak{f}(a) \\ a = \grave{\varepsilon}(\mathfrak{f}(\varepsilon)) \end{array},$$

189. Dummett a silencieusement modifié son point de vue entre 1973 et 1991. Dans (1981), il estimait encore que Frege faisait une lecture objectuelle de cette quantification. Au contraire, dans (1991b), juste avant le passage ci-dessus, il affirme que "les explications de Frege concernant le quantificateur de second ordre, contrairement à celles qu'il fournit pour le premier ordre, s'avèrent être substitutionnelles et non objectuelles" (p. 217).

La référence du premier nom dépend notamment de celle de sa saturation par le second, *i.e.* de :

$$\text{`}\begin{array}{l} X^{(0)}(\dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon))) \\ \dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon)) \end{array}\text{'}$$

Puisque l'antécédent est vrai, ce nom a la même référence que :

$$\text{`}X^{(0)}(\dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon)))\text{'}$$

En y explicitant la première occurrence de '$X^{(0)}(\xi)$', nous constatons qu'il a aussi la même référence que :

$$\text{`}\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{f}(\dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon))) \\ \dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}(\varepsilon)) \end{array}\text{'}$$

Ce dernier nom, pour sa part, résulte de la saturation de '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' par :

$$\text{`}\begin{array}{l} \varphi(\dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon))) \\ \dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon)) \end{array}\text{'}$$

Sa référence dépend donc de celle de ce dernier nom, c'est-à-dire celle que nous cherchons à déterminer depuis le début. Et la circularité est dévoilée.

Dummett a volontairement choisi pour exemple un nom proche de celui qui exhibe le paradoxe de Russell. Il remarque qu'à quelques modifications, "nous pourrions, à l'aide de l'axiome V, obtenir la contradiction de Russell" (p. 219). À ses yeux, cela justifie ce qu'il annonçait plus tôt :

> L'extraordinaire insouciance [de Frege] concernant le quantificateur de second ordre constitue la principale raison de son basculement dans l'incohérence. (Dummett 1991b, p. 218)

Mais Dummett commet ici une erreur. En élaborant rigoureusement son exemple, nous avons pu constater qu'il ne faisait *nulle part* appel à une conception substitutionnelle de la quantification. Certes, il implique le nom '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$', mais il le traite comme nous l'avons fait jusqu'à présent, *i.e.* comme un nom simple dont la référence est supposée connue. Clairement, nous pouvons répéter le même raisonnement en remplaçant ce nom par un quelconque nom simple '$X_\psi^{(((0)))}(\mu_\beta(\psi(\beta)))$' de même type. La seconde définition devient alors :

$$\text{`}\Vdash X^{(0)}(a) = X_\psi^{(((0)))}\left(\begin{array}{l} \psi(a) \\ a = \dot{\varepsilon}(\psi(\varepsilon)) \end{array}\right)\text{'}$$

La référence de '$X_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$' dépend de celle de :

$$\text{`}X_\psi^{(((0)))}\left(\begin{array}{l} \psi(\dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon))) \\ \dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\psi(\varepsilon)) \end{array}\right)\text{'}$$

Or ce nom n'est autre que le résultat de la saturation de '$X_\psi^{(((0)))}(\mu_\beta(\psi(\beta)))$' par le nom dont nous cherchons à déterminer la référence :

$$\text{`}\begin{array}{l} \varphi(\dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon))) \\ \dot{\varepsilon}(X^{(0)}(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon)) \end{array}\text{'}$$

La quantification de second ordre ne joue *aucun* rôle dans la circularité mise à jour.

Contrairement à ce que le raisonnement général annonçait, l'exemple de Dummett ne consiste pas à tenter (vainement) de déterminer la référence du nom '$\dot{\smile}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$', mais celle du nom *complexe* grâce auquel fut défini '$X_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$'. Dummett dégage donc exactement la même circularité que Heck, totalement indépendante de la quantification de second ordre. Bien sûr, il aurait pu trouver une illustration impliquant correctement cette dernière. Par exemple, il aurait suffit de dire que, selon une conception substitutionnelle de la quantification, la référence de '$\dot{\smile}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' dépend de celle du résultat de sa saturation par n'importe quel nom de second niveau, y compris '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\text{—}\ \varepsilon))$', donc de la référence de ce dernier nom. Celle-ci, en retour, d'après l'induction proposée, dépend de la référence du résultat de la saturation de ce nom par n'importe quel nom de premier niveau, donc notamment de la référence de '$\dot{\varepsilon}(\dot{\smile}\ (\text{—}\ \mathfrak{f}(\varepsilon)))$', elle-même tributaire de celle de '$\dot{\smile}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$'. Dans ce cas, la circularité provient *à la fois* de la quantification substitutionnelle *et* du critère contextuelle appliqué aux noms complexes. Il est d'ailleurs *possible* de construire un exemple de ce type proche du nom qui conduit au paradoxe de Russell. Mais celui que Dummett choisit révèle précisément qu'il n'est pas *nécessaire* d'impliquer cette vision de la quantification pour que le piège de la circularité se referme sur un tel nom.

Dummett remarque que, contrairement aux grammaires tarskiennes, celle de l'idéographie "autorise la formation d'expressions fonctionnelles ou de prédicats complexes *via* le retranchement d'un terme dans un terme complexe clos ou un énoncé clos" (p. 217). Il explique ensuite qu'associée à une vision contextuelle de la quantification de second ordre, cette stratégie conduit à une conception circulaire de la référence, de laquelle émerge le paradoxe de Russell. Mais, au lieu d'asseoir ce diagnostique, son exemple vient au contraire le contester, démontrant que la stratégie en question conduit à une telle circularité *indépendamment* de la position adoptée concernant la quantification.

Notons que nous ne nions aucunement la similarité troublante entre le critère du §29 lu en termes contextuels et une conception substitutionnelle de la quantification. Le but est justement de comprendre le lien qui les unit. Or la manière dont Dummett articule les deux questions est incorrecte : une telle vision de la quantification n'est pas une condition nécessaire au fait que le critère produise la circularité décrite ci-dessus.

Nous n'avons pas choisi ce passage au hasard. Nous croyons qu'un certain nombre d'erreurs dans les discussions des §§29-31 émanent d'une confusion entre les rôles joués par le pas d'induction, par les parcours-de-valeurs et par la quantification. Nous souhaitions affirmer avec force la conclusion que Heck formula sans l'établir proprement : si les tests indirects de référentialité sont effectués seulement sur des noms préalablement reconnus comme référentiels, alors le raisonnement du §30 basé sur une interprétation littérale du §29 est *irrémédiablement* circulaire. Et le problème provient du seul pas d'induction, *i.e.* de la grammaire du langage. Autrement dit, comme l'explique Heck, il s'ensuit que "l'argument de Frege échoue pour des raisons qui n'ont rien à voir avec la quantification de second ordre, mais à cause d'une grossière erreur qui gangrène même la partie inductive du raisonnement". La circularité ne dépend ni d'une vision substitutionnelle de la quantification – comme l'affirme Dummett –, ni du cadre imprédicatif de l'axiome V – comme le soutient Linnebo. Et il n'est certainement pas possible de corriger la preuve de Frege en abandonnant la première [190] ou en modifiant le second [191].

190. Dummett admet que cette démonstration échoue aussi dans le cadre du premier ordre, où (la restriction de) l'Idéographie est pourtant cohérente. Mais le second problème qu'il soulève n'a pas trait à cette circularité, qu'il présente donc, à tort, comme dépendante d'une vision substitutionnelle de la quantification de second ordre.

191. C'est pourtant exactement ce que Linnebo affirme :

> L'erreur de Frege ne se tient pas dans le critère contextuel de la référence ou dans la procédure d'extension des noms référentiels, mais dans son application de ces idées au cas en jeu. Le problème a trait à l'imprédicativité de [la loi] V. (Linnebo 2004, p. 95)

3.3.5.4 Détermination de la référence

Nous savons désormais que la circularité liée au critère contextuel intervient si et seulement si nous nous soumettons à la contrainte de Heck, en adoptant la seconde approche. Il est donc temps de poser la question suivante : existe-il de solides raisons de s'y plier ? Remarquons que, dans son exemple, Dummett ne cherchait pas seulement à montrer la référentialité d'un énoncé, mais à déterminer sa valeur de vérité, autrement dit sa *référence*. En effet, Frege déduisit des §§29-31 qu'une telle démarche était toujours possible pour les énoncés de son langage :

> Il est ainsi établi que nos huit noms de base possèdent une référence et par conséquent qu'il en va de même pour les noms correctement formés à partir d'eux. Cependant, non seulement une référence mais aussi un sens appartient à tous les noms correctement formés à partir de nos signes. Chacun des noms d'une valeur de vérité *exprime* un sens, une *pensée*. Car nos stipulations déterminent à quelles conditions un nom réfère au Vrai. Le sens de ce nom, la *pensée*, est : que ces conditions sont vérifiées.
>
> [...]
>
> Les noms simples ou complexes en lesquels consiste un nom de valeur de vérité contribuent à exprimer une pensée, et cette contribution du nom individuel est son *sens*. Si un nom fait partie d'un nom d'une valeur de vérité, alors le sens du premier fait partie de la pensée exprimée par le second.
>
> (Frege 1893, pp. 50-51)

En section 3.2.3.5, nous avons expliqué quelle était la contribution du sens d'un nom à celui d'un autre nom qui l'incorpore. Ce faisant, nous avons compris qu'un sens n'était rien d'autre qu'un mode de détermination de – un moyen de déterminer – une entité, même lorsque nous ne pouvons pas effectivement utiliser ce moyen. Frege estime avoir conféré un sens à ces énoncés, en livrant un moyen de déterminer la valeur de vérité à laquelle chacun d'eux réfère. Ce moyen dépend exclusivement de ceux à travers lesquels les références des noms qui les constituent sont déterminés, autrement dit à travers les sens qui le constituent. Il pensait donc avoir établi non seulement que tous les noms de son langage possédaient une référence unique, mais aussi qu'il existait une manière de *déterminer* cette référence à partir de la manière dont celle des noms simples était initialement déterminée.

Le pas de récurrence du §30 semble pourtant s'occuper exclusivement de la référentialité des noms complexes, sans exposer un moyen de déduire leurs références à partir de celles des noms simples. Nous pouvons cependant interpréter autrement le contenu du §29 afin de renforcer son action. Et c'est ce que Heck et Dummett ont à l'esprit en dénonçant la circularité, car cela exige d'adopter la contrainte de Heck, donc d'épouser la seconde approche. En somme, nous allons voir que seul un critère non-contextuel de référentialité peut faire justice au véritable objectif de Frege, et qu'un tel critère permet une lecture totalement homogène de nombreux passages des *Grundgesetze*, en apparences difficiles à concilier.

Rappelons le critère de référentialité pour les noms de type (0) :

> **Référentialité :** Un nom de type (0) est référentiel si et seulement si le résultat de sa saturation par n'importe quel nom propre référentiel possède une référence.

Cette clause se contente d'exprimer les conditions de référentialité d'un tel nom. Elle ne fournit aucun moyen de déterminer sa référence, mais suggère néanmoins l'idée suivante :

> **Référence$_1$:** Il existe une stratégie pour déterminer la référence d'un nom de type (0) si et seulement s'il existe une stratégie pour déterminer celles des résultats de

sa saturation par n'importe quel nom propre tels qu'il existe une stratégie pour en déterminer la référence.

Il est possible de reproduire dans ce cadre le raisonnement non circulaire mené dans celui de la référentialité. L'exemple de Heck ne pose aucun problème : soit il existe une stratégie pour déterminer la référence de '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$', auquel cas, d'après le second point, nous pouvons établir la référence de '$(\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$', et le test est passé ; soit il n'en existe pas, et le test n'a pas à être passé pour ce nom. Nous pouvons donc à nouveau procéder par analyse-synthèse, et démontrer que la seule propriété qui vérifie ce critère (adapté à tous les types) et sous laquelle tombe les noms simples de l'idéographie subsume exactement la totalité des noms de ce langage.

Ce faisant, nous prouverions qu'une seule propriété vérifie les conditions auxquelles nous soumettons la référence de 'il existe une stratégie pour déterminer la référence de ξ'. En ce sens, les énoncés du §29, ainsi adaptés, peuvent bel et bien être "regardés comme des explications de [cette] expression", *une fois admis que les noms simples tombent sous sa référence.*

Néanmoins, ce critère ne tient pas compte d'un élément important. Considérons le sens $\Leftarrow$ de l'équivalence. La stratégie évoquée en conclusion *dépend* de celles qui sont impliquées en prémisses. Ainsi, la stratégie pour déterminer la référence de '$\xi = \xi$' dépend de celle qui permet d'établir la référence de '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$', qui repose à son tour sur la première. Or on ne peut baser l'établissement d'une stratégie sur une stratégie qui l'exploite.

Donnons un éclairage ensembliste au problème. Le raisonnement non circulaire ci-dessus permet de montrer que le seul ensemble qui appartient à notre ensemble d'ensembles et contient les noms primitifs contient tous les noms du langage. En revanche, il ne permet en aucune manière de construire progressivement des stratégies pour tous les noms de ce langage. Dans ce but, il est indispensable de tenir compte du rôle que joue chaque stratégie dans la détermination d'une nouvelle. Il s'agit alors de définir *par induction* les stratégies qui permettent d'établir les références de tous les noms. Dans ce cas, nous ne pouvons plus utiliser le tiers exclu, en arguant qu'un nom appartient ou n'appartient pas à l'ensemble que nous cherchons à déterminer. Il convient d'exploiter la stratégie permettant de déterminer la référence de ce nom, donc de l'avoir déjà établie. Modifions le critère de sorte qu'il tienne compte de cette dépendance :

Référence$_2$:
- On peut déterminer la référence d'un nom de type (0) à partir de celles des résultats de sa saturation par n'importe quel nom propre dont nous pouvons déterminer la référence.
- On peut déterminer la référence du résultat de la saturation d'un nom de type (0) par n'importe quel nom propre dont nous pouvons déterminer la référence à partir de la référence de ce nom de type (0).

Le premier point, respectivement le second, se rapporte au sens $\Leftarrow$, respectivement $\Rightarrow$, de l'équivalence ci-dessus. L'ambiguïté responsable de la confusion qui règne au sein du §29 se tient ici dans le verbe 'pouvoir'. Pour déterminer la référence d'un nom t de type (0), il est indispensable d'impliquer tous les noms propres dont nous pourrons déterminer la référence, non pas à ce stade, mais à l'*issue* du processus. En revanche, nous ne pouvons utiliser ces stratégies que lorsqu'elles nous sont connues. Il faut donc parvenir à ce point avant de disposer d'une telle stratégie. Ainsi, si la référence d'un nom propre peut être déterminée à partir de celle de t, il est essentiel qu'elle puisse aussi être établie autrement, car celle de t dépend en retour de la sienne. Pour reprendre l'exemple de Heck, il faut être en mesure de dévoiler une stratégie pour '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' *indépendamment* de celle qui est liée à '$\xi = \xi$'. *A priori*, cela est envisageable en exploitant le premier point de **Référence$_2$**. Mais il est nécessaire que la procédure aboutisse pour tous les noms, autrement dit les deux parties du critère doivent permettre de construire progressivement des stratégies

pour déterminer les références de tous les noms du langage en exploitant d'autres stratégies *déjà connues*. Or c'est précisément ce problème dont nous avons vu, lors de la dernière section, qu'il n'admettait pas de solution.

3.3.6 Le pas de récurrence : examen et adoption de la lecture non contextuelle

3.3.6.1 Critère de référentialité et principe de complétude

À travers leurs exemples, Heck et Dummett ont dévoilé la circularité qui touchait le raisonnement du §30, interprété dans le cadre d'un critère contextuel de *détermination de la référence*. Heck est resté prudent quant à la question de savoir s'il était ou non possible d'y échapper, ne décidant pas si les deux manières que le critère offrait pour déterminer la référence pouvaient s'agencer correctement. Pour notre part, nous avons pu répondre négativement à cette question : une lecture contextuelle du §29 ne permet aucunement d'établir que la référence des noms complexes de l'idéographie peut être déterminée sur la base de celles des noms simples.

Il existe néanmoins une alternative, qui s'accorde admirablement avec le principe de complétude. D'après celui-ci, la référence d'un nom de fonction est correctement fixée si et seulement si sa valeur en n'importe quel argument est déterminée. Au moment d'introduire ses noms primitifs, Frege a fourni des explications destinées à accomplir cet objectif[192]. Observons par exemple la présentation de '— ξ' :

$$— \Delta$$

> est le Vrai quand Δ est le Vrai, le Faux quand Δ n'est pas le Vrai. (Frege 1893, p. 9)

Frege spécifie la référence du nom primitif en déterminant sa valeur en chaque argument Δ. Il accomplit donc exactement ce que son principe réclame. Relativement au type en question, celui-ci peut être exprimé ainsi :

> **Principe de complétude :** la référence d'un nom de type (0) est déterminée si et seulement si sa valeur en tout objet Δ l'est.

À d'autres occasions, Frege réalisa cette tâche d'une autre manière. Par exemple, en s'occupant du signe d'égalité :

$$\text{‘}\Gamma = \Delta\text{’}$$

> réfère au Vrai si Γ est le même que Δ ; dans tous les autres cas, il réfère au Faux. (Frege 1893, p. 11)

Ici, il n'explique pas dans quels cas *l'objet* $\Gamma = \Delta$ *est* le Vrai, et dans quels cas il *est* le Faux ; mais à quelles conditions le *nom* '$\Gamma = \Delta$' *réfère* au Vrai, et à quelles conditions il *réfère* au Faux. La nuance est de taille : contrairement à l'énoncé précédent, celui-ci est sémantique. Pourtant, au sein des *Grundgesetze*, les deux passages ont exactement le même statut. Ils servent de présentation officielle de noms primitifs, que Frege appelle aussi 'stipulation' ou 'explication'. Dans cette situation, son intention était toujours clairement annoncée :

> Je stipule à présent :
>
> La valeur de la fonction
>
> $$— \Delta$$

192. Pour l'instant, nous laissons de côté les parcours-de-valeurs.

> est le Vrai [...]
> [...]
> Nous avons déjà incidemment utilisé le signe d'égalité dans nos exemples, mais il est nécessaire de stipuler plus précisément les choses à son sujet :
>
> $$\text{‘}\Gamma = \Delta\text{’}$$
>
> réfère [...] (Frege 1893, pp. 10-11)

À l'occasion d'illustrations, Frege avait déjà utilisé le signe d'égalité sans stipuler "précisément les choses", autrement dit sans fournir les explications permettant de déterminer la valeur de sa référence en tout argument. Le rôle de la présentation officielle de chaque nom primitif consistait donc à remplir cette exigence de complétude. Les deux formulations utilisées à ce titre montrent que Frege écrivait indifféremment ‘Δ est le Vrai’ ou “Δ’ réfère au Vrai’, sans cerner l'écart important entre les deux formulations.

Notons cependant que les lettres grecques majuscules sont *extérieures* à l'idéographie. Dans la seconde version, Frege semble ainsi s'occuper de la référence de noms qui n'appartiennent *pas* à son langage. Il existe une réponse possible à ce problème. Peut-être entendait-il utiliser les lettres grecques majuscules comme des métavariables qui parcourent les noms *du langage* (d'un type donné), mais cernait mal la manière dont celles-ci devaient s'agencer avec les guillemets. En écrivant ‘— Δ est le Vrai’ ou “— Δ’ réfère au Vrai’, il aurait voulu indiquer que la référence de $\ulcorner$— $\Delta\urcorner$ – et non pas ni celle de ‘— Δ’, ni — Δ lui-même – était le Vrai. Il faudrait donc corriger ainsi les deux passages en cause :

$$\ulcorner\text{—}\ \Delta\urcorner$$

> réfère au Vrai quand Δ réfère au Vrai, au Faux quand Δ ne réfère pas au Vrai.

$$\ulcorner\Gamma = \Delta\urcorner$$

> réfère au Vrai si Γ et Δ sont co-référentiels ; dans tous les autres cas, il réfère au Faux.

Cette explication règle les problèmes que nous avons soulevés : l'écart entre les deux formulations et l'examen de la référence de noms extérieurs à l'idéographie. Elle pose néanmoins une autre difficulté. Si les lettres ‘Δ’ et ‘Γ’ parcourent l'ensemble des noms d'objets du langage, alors les stipulations de Frege fixent la valeur de la référence des noms primitifs seulement lorsque l'objet pris en argument *possède un nom dans le langage*. Or le principe de complétude requiert que ce travail soit étendu à la totalité des objets. De plus, la circularité menace à nouveau. En effet, pour établir la référence des noms simples, il devient nécessaire de connaître celles de Δ et Γ pour n'importe lesquelles des valeurs prises par ces lettres, notamment lorsqu'il s'agit de noms *complexes* de l'idéographie. Or la référence de ces derniers dépend de celles des noms simples, que nous souhaitons établir.

Pour éclaircir la situation, il convient d'examiner la note de bas de page qui fut associée au premier passage ci-dessus, dans laquelle Frege précisa le rôle des lettres grecques majuscules :

> De toute évidence, le signe ‘Δ’ ne peut être dépourvu de référence, et doit référer à un objet. Les noms sans référence ne doivent pas apparaître dans l'idéographie. Notre stipulation est faite de telle sorte que, dans toutes les circonstances, ‘— Δ’ réfère à quelque chose si tant est que ‘Δ’ réfère à quelque chose. Autrement — ξ ne serait pas un concept avec des limites nettes, donc à notre sens pas un concept du tout. J'utilise

> ici des lettres grecques majuscules comme s'il s'agissait de noms qui réfèrent à quelque chose, sans statuer sur leurs références. À l'intérieur de l'idéographie, comme 'ξ' et 'ζ', elles n'apparaîtront pas. (Frege 1893, nbp. 3, p. 9)

Il est incontestable que les lettres grecques majuscules jouent un rôle dans la détermination de la référence des noms de l'idéographie, bien qu'elles soient extérieures à ce langage. Frege explique qu'elles sont utilisées comme s'il s'agissait de noms référentiels, mais que rien n'est statué concernant leurs références. Voilà qui suggère la traduction suivante du critère du §29 :

> **Critère de référentialité :** un nom de type (0) est référentiel si et seulement si le résultat de sa saturation par 'Δ' l'est, quelle que soit la référence de 'Δ'.

Lu sous cet angle, le critère change radicalement de visage. L'alternative tient dans la manière dont nous interprétons le fait qu'un nom candidat à la référentialité doit pouvoir être saturé par *n'importe quel nom référentiel*. Une lecture contextuelle exige de connaître la référentialité de tous les noms *de l'idéographie* du type adapté. Selon notre nouvelle interprétation, il suffit d'établir la référentialité du résultat de la saturation du candidat par un nom qui soit référentiel seulement au sens où il possède une *quelconque* référence. Il n'est plus nécessaire, pour cela, de s'appuyer sur la référentialité d'autres noms de l'idéographie. Il suffit d'exploiter un symbole – par exemple la lettre 'Δ' – qui peut se voir assigner n'importe quel objet pour référence. Ici, 'Δ' n'est donc pas une métavariable syntaxique, mais un nom extérieur à l'idéographie dont la référence n'est pas déterminée.

La circularité de la lecture contextuelle émergea du problème de la *détermination* de la référence. C'est aussi sous cet angle que se dévoilent les atouts de notre nouvelle interprétation. Un nom est référentiel si et seulement s'il possède une référence déterminée. Or, selon le principe de complétude, la référence d'un nom de fonction n'est déterminée que si sa valeur en tout objet l'est aussi, autrement dit si sa saturation par 'Δ' l'est, quel que soit l'objet auquel réfère 'Δ', *i.e.* quel que soit Δ. Le critère du §29 est donc une adaptation du principe de complétude à la notion de référentialité :

> **Principe de complétude :** la référence d'un nom de type (0) est déterminée si et seulement si sa valeur en tout objet Δ l'est.
>
> **Critère de référentialité :** un nom de type (0) est référentiel si et seulement si le résultat de sa saturation par 'Δ' l'est, quelle que soit la référence de 'Δ'.

Non seulement cette lecture permet le rapprochement ci-dessus, mais elle respecte aussi la localisation des guillemets dans les passages en question. L'objet qui *est* le Vrai ou le Faux, selon l'assignation de 'Δ', n'est autre que — Δ lui-même ; et le nom qui *réfère* au Vrai ou au Faux est finalement '— Δ'. Un troisième avantage, de loin le plus précieux, est visible à travers l'exemple que Frege fournit du raisonnement général du §30 :

> Ainsi nous pouvons, par exemple, former le nom de fonction '$\Delta = \zeta$' de la première manière à partir du nom propre 'Δ' et du nom de fonction '$\xi = \zeta$' ; puis le nom propre '$\Delta = \Delta$' à partir de ce nom et de 'Δ'. Sur cette base, nous pouvons former, de la seconde manière, le nom de fonction '$\xi = \xi$'. (Frege 1893, p. 48)

La référence de '$\xi = \xi$' est déterminée si sa valeur en tout objet Δ l'est, autrement dit si celle de '$\Delta = \Delta$' est établie quelle que soit la référence de 'Δ'. Il n'est plus question d'impliquer des noms dont la référence dépend de celle que nous tentons d'établir, mais de respecter purement et simplement le principe de complétude : déterminer la valeur de la référence de notre nom en tout argument. La circularité est évitée.

Nous comprenons à présent pourquoi, dans le §32, Frege expliqua que ses "stipulations détermin[ai]ent à quelles conditions un [énoncé] référ[ait] au Vrai". Les stipulations en question avaient servi à introduire les noms primitifs de fonctions dans le respect du principe de complétude [193]. Elles leur avaient attribué un *sens* en conférant un moyen de déterminer leur référence, c'est-à-dire un moyen de déterminer une valeur en chaque argument. Par exemple, elles permettaient de déterminer la référence de '$\Gamma = \Delta$' quelle que soit celles de noms 'Δ' et 'Γ'. Peu importe la référence attribuée à 'Γ', il existait ainsi un moyen de déterminer celle de '$\Gamma = \Delta$' quelle que soit celle de 'Δ'. Par conséquent, peu importe la référence attribuée à 'Γ', il existait un moyen de déterminer celle '$\xi = \Delta$'. Puisque la stipulation par laquelle le nom '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' fut introduit livrait une manière de déterminer la référence de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$' quelle que soit la référence de '$\Phi(\xi)$', alors les deux stipulations conjointes offraient un moyen de déterminer la référence de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a} = \Delta$' quelle que soit celle de 'Δ', donc un moyen de déterminer celle de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a} = \xi$'. Par conséquent, elles livraient aussi un moyen de déterminer la référence de '$\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, et lui conféraient ainsi un sens.

Toute la stratégie de Frege – qui ne présente rien de circulaire – repose sur l'idée, contenue dans le principe de complétude, que le sens d'un nom de fonction n'est autre que le mode de détermination d'une valeur en chaque argument. Les stipulations par lesquelles Frege introduisit ses noms primitifs étaient donc destinées à leur conférer un sens. Sur cette base, il devenait possible de déduire le moyen de déterminer la valeur prise par la référence d'un nom complexe de fonction quelle que soit la référence attribuée à un (ou plusieurs) nom(s) qui viendrai(en)t le saturer, autrement dit de déduire le mode de détermination attaché à – le sens de – tous les noms complexes de fonctions. La solution au problème de la circularité tient donc dans la manière dont il faut entendre le critère selon lequel "un nom de premier niveau à un argument a une *référence* si le nom propre qui résulte de ce nom de fonction quand les places de l'argument sont occupées par un nom propre a toujours une référence dès lors que le nom inséré réfère à quelque chose", c'est-à-dire *quelle que soit la référence* d'un nom 'Δ' qui viendrait le saturer. L'usage que Frege fit des lettres grecques majuscules lors de l'introduction de noms primitifs, lors du pas d'induction et – nous le verrons bientôt – lors de la présentation des règles et axiomes appuie cette interprétation, qui permet de rendre compte de l'objectif qu'il prétendit avoir atteint lors du §32, ce qu'aucun critère contextuel de référentialité n'est en mesure de réaliser.

Néanmoins, si l'idée qui sous-tend cet usage est claire, le rôle sémantique de ces lettres n'est pas aisé à déterminer. Frege fixa la référence des noms de son langage en utilisant celle de noms qui lui sont extérieurs, formés grâce aux lettres grecques majuscules. Il proposa donc une sémantique pour l'idéographie *enrichie de ces nouveaux constituants*. Cependant, cette sémantique exigeait que la référence de ces derniers soit *relative* à une assignation, contrairement à celle des noms de l'idéographie. Or, qu'est ce qu'un nom dont la référence n'est pas fixée par l'interprétation du langage, mais seulement par une assignation qui lui est postérieure, sinon une *variable* au sens tarskien du terme ? Il semble donc que Frege ait établi sa sémantique en intégrant provisoirement à l'idéographie ce dont il avait pourtant cherché coûte que coûte à se débarrasser.

Au sein de notre deuxième chapitre, nous avons construit la langue idéale fregéenne sans nous munir de noms extérieurs à l'idéographie qui épousent pourtant d'emblée la forme des noms de ce langage : 'Δ', '$\Phi(\xi)$', '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$', etc. Ceux-ci simplifient grandement les explications à la fois syntaxiques et sémantiques, mais ils en dissimulent la substance. C'est justement parce que Frege s'est autorisé leur utilisation sans examiner davantage leur statut que d'importants passages des *Grundgesetze* posent de délicats problèmes d'interprétation. Nous voulons poursuivre, sur le terrain sémantique, le travail syntaxique réalisé dans la section 2.3.3. Nous allons tenir compte

193. Cette fois encore, nous laissons de côté le nom pour les parcours-de-valeurs.

du rapprochement entre le principe de complétude et le critère de référentialité pour montrer une fois pour toutes que la référence des noms complexes peut être établie à partir de celles des noms simples, et éclaircir ainsi le contenu du §30.

3.3.6.2 Un travail en deux étapes

Notre question est la suivante : la référence des noms complexes peut-elle être déterminée à partir de celle des noms simples ? Nous connaissons la morphologie *générale* du langage idéal. Seuls des noms d'entités (fonctions ou objets) de types compatibles peuvent se combiner, à travers un processus que nous avons mis à jour : celui de la saturation syntaxique. Supposons un nom t saturable par n noms $t_1, \ldots, t_n$ dont les références sont déterminées. Si celle de t l'est aussi, alors il en va de même de sa valeur en toutes entités, donc notamment en les références de $t_1, \ldots, t_n$. Autrement dit, la référence de $\mathbf{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))$ est établie. Par abus de langage, nous pouvons noter 'R' la "fonction" qui associe tout nom à sa référence. Nous savons que :

$$R(\mathbf{Sat}(t, (t_1, \ldots, t_n))) = R(t)(R(t_1), \ldots, R(t_n))$$

Frege n'aurait pas toléré cette écriture (d'où nos guillemets), car certaines des valeurs d'une telle "fonction" seraient elles-même des fonctions, ce qu'il interdisait. Il s'agit d'une simple façon de parler, à travers laquelle le parallèle entre sphère linguistique et sphère ontologique s'éclaircit. Dans le deuxième chapitre, nous avons pris soin de mettre en lumière *tous* les types de fonctions, ainsi que la formation des noms d'objets et de fonctions pour n'importe lequel d'entre eux. Nous avons donc exhibé la morphologie générale de la langue idéale, laquelle fut restreinte à l'occasion des *Grundgesetze*. Et il était essentiel de procéder ainsi pour aborder le lien entre noms et références, car la grammaire conçue par Frege embrassait tous les types, et était censée respecter dans ses combinaisons les opérations entre n'importe quelles références, même celles des noms dont l'idéographie est dépourvue.

Bien que la référence du résultat de la saturation de noms soit incontestablement déterminée à partir de celles de ces noms, nous ne pouvons pas encore prétendre cerner la complète similarité entre règles de grammaire et opérations entre références. Le problème est plus vaste, car un nom complexe est construit à travers les applications successives de règles grammaticales de saturation et de *désaturation*. Pour comprendre comment la référence d'un nom est déterminée à travers celles des noms primitifs qui le constituent, il faut parvenir à déterminer la référence du nouveau nom ainsi obtenu à partir des anciens lors de *chaque* application de règle. En d'autres termes, il faut savoir quelle opération sémantique correspond à chaque manipulation linguistique. Dans le cadre de la saturation, l'objectif est atteint. Mais qu'en est-il de la désaturation ? Par son concours, les noms complexes de fonctions sont formés à partir du nom d'*une seule* de leurs valeurs. Mais les fonctions auxquelles elles sont censées référer ne sont pas identifiables à moins de connaître la *totalité* de ces valeurs.

Supposons qu'un nom t soit construit à partir de la désaturation de m noms élémentaires $t_1, \ldots, t_m$ dans un nom t'. Pour déterminer sa référence, il convient d'établir la valeur prise par celle-ci en toutes entités de bons types. Nous pouvons obtenir le résultat relatif aux références de $t_1, \ldots, t_m$:

$$R(t)(R(t_1), \ldots, R(t_n)) = R(t')$$

Mais, *a priori*, nous sommes incapables de reproduire ce travail pour les autres arguments. Autrement dit, la construction d'un nouveau nom de fonction ne semble pas induire la détermination de sa référence. Ce problème a déjà été soulevé dans la littérature. Resnik l'expliqua de la manière suivante :

> Frege avait besoin d'un formalisme sémantique qui spécifie la référence de chaque nom composé en vertu de celles de ses constituants. Ainsi seulement la référence des noms composés peut-elle être déterminée récursivement à partir de celles des noms simples. À présent on serait tenté de dire 'Quoi de plus simple ?' '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \varphi(\mathfrak{a})$' réfère à la fonction du quantificateur universel, '— ξ' réfère à la fonction horizontale ; ainsi '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ — $\mathfrak{a}$' réfère au Vrai dans le cas où chaque objet est le Vrai, et réfère au Faux sinon. Il n'y a donc aucun problème ici, mais considérons à présent le cas de '$\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$'. Il peut être formé à partir du quantificateur universel et du nom de fonction de premier niveau '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \xi)$'. Nous devrions donc être capables de déduire sa référence à partir de celles de ses constituants. Mais nous devons alors déterminer la référence de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \xi)$'. Cependant, '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \xi)$' doit être formé [grâce au] nom '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = A)$', où A est un nom d'objet, puis en retranchant l'occurrence de A. Mais il n'existe pas de méthode analogue pour obtenir la référence du nom '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \xi)$'. Nous ne pouvons commencer avec l'*objet* $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = A)$ et "retrancher" l'objet A pour former la fonction. En effet, le même objet peut être la valeur de beaucoup de fonctions pour beaucoup d'arguments, donc il n'existe pas d'opération inverse qui envoie une paire d'objets sur une unique fonction. (Resnik 1986, p. 182)

En désaturant un nom propre dans un autre nom propre, nous construisons le nom d'une fonction dont nous ne connaissons la valeur que pour un objet : celui dont le nom a été retranché. Resnik en tire la conclusion que la grammaire de l'idéographie ne permet pas la détermination de la référence des noms complexes sur la base de celles des noms simples. Selon lui, Frege aurait poursuivi cet objectif mais, échouant à l'atteindre, il en aurait (malencontreusement) tenté une traduction à travers le critère inadapté du §29, qu'il aurait mal cerné. Au contraire, Heck estime qu'à travers celui-ci, Frege a effectivement développé un moyen de déterminer la référence des noms complexes sur la base des noms simples. Mais cette conclusion requiert une lecture non contextuelle de ce critère, basée sur le rôle des lettres grecques majuscules. Voici la réponse qu'il adressa à Resnik :

> La référence de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \xi)$' est déterminée à travers les instances qui sont formées en utilisant des noms auxiliaires, et non pas en "retranchant" des objets dans des valeurs de vérité. Sa valeur, en l'argument Γ, doit être la référence de l'expression '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \Gamma)$' lorsque '$\Gamma$' réfère à Γ. En termes tarskiens, '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \xi)$' est vrai en y si et seulement si '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = y)$' est vrai quand y est assigné à 'y'. Ce qui permet à Frege de surmonter l'objection de Resnik, c'est le caractère sémantique de son argument. (Heck 2012, nbp. 24, p. 67)

Dans la section précédente, nous avons vu que Frege tenta bel et bien un raisonnement de ce genre au sein du §30. Néanmoins, ni lui ni Heck n'ont tenu compte du fait que la construction de certains noms implique *plusieurs* étapes de désaturation. Dans ce contexte, la remarque de Heck doit être étendue de la manière suivante :

> Plaçons-nous à l'étape de construction d'un nom t formé par la désaturation de noms $t_1, \ldots, t_m$, et supposons que tous les noms construits préalablement à cette étape possèdent une référence déterminée. Incontestablement, la valeur la référence de t en celles de $t_1, \ldots, t_m$ est aussi déterminée : il s'agit de celle de t'. Mais la stratégie qui nous permet d'établir pas-à-pas la référence de t' ne dépend pas de celles de $t_1, \ldots, t_m$; elle peut être reproduite pour n'importe quelles entités $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ de bons types. Elle permet donc d'établir la référence de $\mathrm{Sat}(t, (\text{'}\Delta_1\text{'}, \ldots, \text{'}\Delta_n\text{'})$ lorsque chaque 'Δ_i'

réfère à Δ_i. Or nous avons :

$$R(t)(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = R(\mathrm{Sat}(t, (\text{`}\Delta_1\text{'}, \ldots, \text{`}\Delta_n\text{'}))$$

La valeur de la référence de t est donc déterminée pour tous arguments de bon type.

Cette remarque pose plusieurs difficultés. D'une part, il n'est pas évident qu'une telle solution puisse être appliquée lorsque les t_i sont des noms complexes. D'autre part, même en supposant que cela soit possible, la référence d'un nom serait ainsi déterminée relativement au chemin qui permet sa formation. Néanmoins, un même nom pouvant être construit de différentes manières, il est à craindre que plusieurs références *différentes* lui soient attribuées. En réalité, ces problèmes sont indépendants de l'usage des lettres grecques majuscules, car nous pouvons donner corps à la même stratégie sans les impliquer. Néanmoins, ce faisant, nous serons contraints de transgresser les règles de la hiérarchie catégoriale, ce que les lettres grecques majuscules pourraient permettre d'éviter. Le rôle de ces lettres n'est malheureusement pas aisé à déterminer, car le parallèle avec la sémantique tarskienne n'est pas clair. Dans ce dernier cadre, une valeur est attribuée à une variable en utilisant une constante du métalangage qui nomme cette valeur. Il est par exemple stipulé que a est assigné à 'y'. Au contraire, Heck explique que y est assigné à 'y'. Il semble confondre la variable du langage-objet et la constante du métalangage. Le problème est répercuté dans l'idéographie enrichie à travers les noms qui l'étendent, lorsqu'il est spécifié que 'Δ' réfère à Δ.

Notre objectif consiste à montrer que ces difficultés peuvent être surmontées. Nous affirmons que le raisonnement du §30 ne s'appuie sur aucun critère contextuel. Et nous soutenons que, malgré certaines lacunes qu'il nous faudra combler, il établit bel et bien que la référence des noms complexes peut être déterminée sur la base de celles des noms simples. La grammaire de l'idéographie est rarement étudiée dans le détail, si bien que le problème de la désaturation est souvent confondu avec (ou mêlé à) celui des noms primitifs, notamment '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. La morphologie de la langue idéale fregéenne est restée, dans le panorama contemporain, un véritable objet d'archéologie. Les méthodes sémantiques modernes permettent une définition beaucoup plus simple de la valeur des termes complexes en fonction de celles des termes simples. Celle de Frege est alambiquée, mais elle fonctionne correctement. La référence des noms complexes est déterminée à travers celles des noms primitifs. Le problème est, bien entendu, qu'un des noms primitifs de l'idéographie ne réfère pas. Mais l'étrange mécanique de saturation et de désaturation, *i.e.* le difficile appareil reposant sur les lettres pour marquer les espaces vacants, est absolument hors de cause. Nous voulons le montrer une fois pour toutes, et achever ainsi d'exhiber la totalité du dispositif compositionnel à la fois syntaxique et sémantique conçu par Frege.

Dans un premier temps, nous réaliserons cette démonstration sans exploiter les lettres grecques majuscules. Nous serons alors contraints d'utiliser des noms d'un certain type pour référer à des entités d'un autre type, et ainsi de transgresser les contraintes catégoriales imposées par l'ontologie fregéenne. Nous montrerons que le pas d'induction du §30 s'appuie sur une sémantique parfaitement convenable, indépendamment de ce problème. Dans un second temps, il nous faudra répondre de celui-ci, *i.e.* de la compatibilité entre cette sémantique et l'ontologie de Frege. Nous pourrons alors décider si les passages sémantiques des *Grundgesetze* possèdent un caractère proprement théorique, et prendre partie pour une des deux écoles interprétatives. Rappelons que Frege n'a jamais mesuré les conséquences des différences catégoriales, et qu'il n'a jamais proprement développé son appareil sémantique, se cantonnant à des remarques et des esquisses de démonstrations. Par conséquent, c'est à nous qu'il appartient de trancher la question. Une fois que nous aurons compris que sa sémantique générale fonctionne correctement, il nous faudra déterminer si elle s'accorde avec ses distinctions entre catégories ontologiques. Il ne s'agit donc pas

de demander si Frege lui-même envisageait l'élaboration d'une théorie sémantique – la réponse est positive –, mais si la sémantique qu'il tentait d'élaborer comme théorique l'est bel et bien dans le cadre dans lequel il se situait, *i.e.* si elle s'accorde avec son ontologie. Pour y répondre, nous abandonnerons notre première méthode, qui transgresse les contraintes catégoriales, au profit de celle qui, exploitant les lettres majuscules, tente de s'y soumettre.

3.3.6.3 Présentation transgressive de la sémantique fregéenne

Notre objectif consiste à construire la sémantique pour un quelconque langage idéal $\mathscr{L}$, *quels que soient les types des noms qu'il intègre.* En section 2.3.3, nous avons proposé trois différentes définitions des noms. Nous avons ensuite établi l'équivalence entre ces stratégies, *modulo l'hypothèse que le langage intègre un nom simple de chaque type.* Étant donné que nous aurons besoin de ce résultat, notre première tâche consiste à montrer que cette hypothèse est peu coûteuse d'un point de vue sémantique.

Nous pouvons librement supposer que $\mathscr{L}$ incorpore des noms simples capables de se combiner pour former des noms propres. Dans le cas contraire, aucun énoncé ne pourrait être construit. Ainsi, et de plus, si le langage ne dispose d'aucun nom atomique d'objet, nous pouvons artificiellement lui en attribuer un en accordant au nom 'X' la référence d'un nom propre complexe formé par saturation sur la base de noms simples.

À partir de là, nous pouvons définir inductivement un nom simple de chaque type. Soit un type $T = (T_1, \ldots, T_n)$; supposons que nous avons déterminé la référence de noms atomiques $t^{T'}$ pour tout T' de profondeur strictement inférieure à T. Nous pouvons attribuer à t^T la référence suivante : la fonction qui, à toutes entités $e_1, \ldots, e_n$ de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$, associe e_1 si $T_1 = 0$, et l'image de e_1 en les références de $t_{11}^{T_{11}}, \ldots, t_{1p}^{T_{1p}}$ telles que $T_1 = (T_{11}, \ldots, T_{1p})$ sinon [194].

Nous venons d'indiquer la valeur de la référence de t^T en tout argument donc, d'après le principe de complétude, de déterminer correctement cette référence. Ainsi, il est toujours possible d'ajouter au langage un nom primitif de n'importe quel type et de lui attribuer une référence. Par conséquent, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\mathscr{L}$ intègre un nom primitif de chaque type. C'est précisément la seule condition qui pèse sur les langages $\mathscr{L}_e$ tels que nous les avons définis en section 2.3.3. Notre tâche se réduit donc à construire une sémantique pour ces langages.

Dans cette même section, nous avons proposé trois différentes définitions des noms. La première procède par marqueurs. La seconde exploite la mécanique de saturation-désaturation, en limitant ces dernières aux noms simples. La troisième la généralise aux noms complexes. C'est celle-ci que Frege suggéra lorsqu'il indiqua brièvement comment construire des noms de fonctions au §26 [195]. Elle présente néanmoins un léger problème, que nous avons déjà introduit dans le cadre de la lecture contextuelle du critère de référentialité (p. 577). Pour établir la référence d'un nom t construit par désaturation de t' dans t'', il convient de déterminer à quelle étape de la formation de t'' le nom t' est venu saturer ou a été saturé par un autre nom. Or, si t' est complexe, il peut figurer dans t'' sans qu'il n'existe aucune étape de ce type. La difficulté disparaît si nous exigeons que les noms désaturés soient élémentaires, en adoptant la seconde définition proposée dans le second chapitre. Ceci est sans incidence, car les trois stratégies de construction des noms aboutissent au même résultat, ainsi que nous nous sommes appliqués à

194. Le travail réalisé dans le chapitre 2 nous permet de comprendre, en anticipant légèrement, que la référence de t^T est identique à celle que nous allons attribuer à 'φ^{T_1}' si $T_1 = 0$, et à celle que nous allons associer à $\ulcorner \varphi^{T_1}(t^{T_{11}}, \ldots, t^{T_{1p}}) \urcorner$ sinon.

195. Comme nous l'avons vu, lors du §30, il s'écarta légèrement de ce sentier en proposant, non plus des saturations totales, mais des saturations partielles des noms de fonctions, sans que la nuance n'influe sur le résultat obtenu.

le démontrer [196]. Nous voyons à présent pourquoi il nous fallut procéder à ces délicats travaux techniques. Ils nous placent en position d'élaborer la sémantique de la langue idéale fregéenne, laquelle s'appuie sur la *seconde* méthode de construction des noms, dont nous savons qu'elle est équivalente à celle de Frege.

Notre objectif consiste à attribuer une référence aux nouveaux noms à partir de celle des noms qui ont permis sa formation. Ce faisant, nous munirons chaque nom complexe du langage d'une référence qui dépendra de celles des noms simples.

Saturation : Si t est un nom propre, alors il fut construit par saturation :

> **Syntaxe :** t résulte de la saturation de t' par $t_1, \ldots, t_n$.
> **Sémantique :** La référence de t est la valeur de la référence de t' en les références de $t_1, \ldots, t_n$.

D'après le principe de complétude, puisque la référence de t' est déterminée, sa valeur en tout argument l'est aussi, notamment celle qu'elle prend en les références (déterminées) de $t_1, \ldots, t_n$. Nous avons donc correctement déterminé la valeur de t.

Désaturation : Si t est un nom de fonction, alors il fut construit par désaturation :

> **Syntaxe :** Il existe un nom propre t' et des noms élémentaires $t_1, \ldots, t_n$ tels que t' résulte de la saturation de t par $t_1, \ldots, t_n$.
> **Sémantique :** En tant que tel, t' ne peut être un nom simple. Il a donc été construit à travers la saturation d'un nom t'' par m noms $t'_1, \ldots, t'_m$. D'après le fait 7 (p. 338), il existe (à ré-indexations près) un unique nom t''', un unique entier p, une unique suite strictement croissante $(u_1, \ldots, u_p)$ et, pour tout i entre 1 et m, un unique nom t''_i, un unique entier p_i et une unique suite $(u_{i,1}, \ldots, u_{i,p_i})$ tels que :
> – $t'' = \mathrm{Sat}(t''', (t_{u_1}, \ldots, t_{u_{p_1}}))$;
> – pour i entre 1 et m, $t'_i = \mathrm{Sat}(t''_i, (t_{u_{i,1}}, \ldots, t_{u_{i,p_i}}))$;
> – $t = \mathrm{Sat}(t''', (t''_1, \ldots, t''_m))$.
> La valeur de la référence de t en n entités $e_1, \ldots, e_n$ est la valeur de t''' en les références de $t''_1, \ldots, t''_m$ et en $e_1, \ldots, e_n$ (classées par ordre croissant pour $\leq_{\mathscr{T}}$).

Il nous faut procéder lentement pour comprendre notre stipulation et, surtout, ce qui l'autorise. La clef du problème, et la réponse à l'objection de Resnik, tient dans le fait que, pour traiter le cas de la désaturation, nous ne nous appuyons pas seulement sur les noms impliqués lors de la dernière étape de construction de t, mais sur d'autres qui ont été formés préalablement – et dont la référence fut ainsi fixée en amont – même s'ils n'ont pas été directement impliqués dans cette construction.

Reprenons l'exemple de Frege. D'après le principe de complétude, la référence de '$\xi = \xi$' est déterminée si et seulement si sa valeur en tout objet l'est aussi. Intégrons un nom propre atomique 'X' à l'idéographie, en fixant sa référence tel que nous l'avons expliqué plus haut. '$\xi = \xi$' peut être construit par désaturation à partir de '$X = X$'. Mais ce dernier nom propre a lui-même été construit par saturation, en l'occurrence à partir de '$\xi = \zeta$'. Il suffit donc de stipuler que la valeur de la référence de '$\xi = \xi$' – que nous voulons déterminer – en un objet e est la valeur de la référence de '$\xi = \zeta$' – qui est déterminée – lorsque e vient saturer les deux places d'arguments.

Si la formation d'un nom de fonction se limitait toujours à une seule étape de saturation, tous les cas se traiteraient de cette manière. Mais plusieurs étapes de ce type sont parfois nécessaires,

196. Théorème 3, p. 330.

notamment dans l'exemple proposé par Resnik. '$\xi = X$' peut être construit par désaturation à partir de '$X = X$'. Il permet alors, en venant saturer '$\mathfrak{a}\ \varphi(\mathfrak{a})$', de former '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = X$'. Ce dernier nom, une fois désaturé de X, permet finalement d'aboutir à '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \xi$'. Pour déterminer la référence de ce nom de fonction, il faut fixer sa valeur en tout argument. Frege explique que nous connaissons la référence de '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \Delta$' quelle que soit celle de 'Δ'. L'idée sous-jacente est la suivante : nous pouvons répéter toutes les étapes menant à '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = X$' – qui ont permis d'établir sa référence – avec 'Δ' en lieu et place de l'occurrence de 'X' concernée. Il suffit donc d'effectuer ce remplacement au moment où la seconde occurrence de 'X' est venue saturer la ζ-place de '$\xi = \zeta$' [197].

Il est possible d'exploiter cette idée sans mobiliser les lettres grecques majuscules. À cette fin, nous avons besoin du processus de saturations *partielles* de fonctions auquel, comme nous l'avons dit, Frege fit droit uniquement dans le §30 ; mais qu'il est possible de reconstruire conformément à ses vues. Soit une fonction e qui dispose de n places d'arguments, et soient $e_1, \ldots, e_m$ (avec $m < n$) des entités qui peuvent venir s'intégrer aux places $\xi_{u_1}, \ldots, \xi_{u_m}$, avec u_i une suite strictement croissante. Soit v_i la suite de $n - m$ entiers strictement croissante telle que, pour tous entiers i et j, $u_i \neq v_j$. Alors nous posons que la valeur de e en $e_1, \ldots, e_n$ aux places $\xi_{u_1}, \ldots, \xi_{u_m}$ est la fonction qui, à toutes entités $e'_1, \ldots, e'_{m-n}$, associe le résultat de la saturation de e par $e_1, \ldots, e_m$ aux places $\xi_{u_1}, \ldots, \xi_{u_m}$, et par $e'_1, \ldots, e'_{m-n}$ aux places $\xi_{v_1}, \ldots, \xi_{v_{n-m}}$. Clairement, si e est déterminé – si sa valeur en tous arguments est connue – alors le résultat de sa saturation partielle l'est aussi.

Il nous suffit alors de spécifier que le résultat de la saturation de la référence du nom de fonction '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \xi$' par un objet e est la valeur de la référence de '$\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))$' en la valeur de la référence de '$\xi = \zeta$' en e à la ζ-place. Ces deux dernières fonctions sont parfaitement déterminées (si tant est que la référence des noms primitifs le soit), donc le résultat de cette saturation l'est aussi. Autrement dit, la valeur de la référence de '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \xi$' est déterminée en tout argument, donc cette référence est déterminée. Notons que Frege s'appuie exactement sur la même idée, qu'il présente différemment. Selon lui, la référence de '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \Delta$' est la valeur de la référence de '$\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))$' en la référence '$\xi = \Delta$', quelle que soit la référence de 'Δ'. Par conséquent, la référence du résultat de la saturation de '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \xi$' par un nom '$\Delta$' est déterminée quelle que soit la référence de 'Δ' ; donc la valeur de la référence de '$\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \xi$' est déterminée en tout argument [198]. Pour éviter l'usage des lettres grecques majuscules, nous employons dans le métalangage des variables qui parcourent toutes les entités d'un type donné. Nous mobilisons ainsi des noms complets pour désigner des fonctions, violant les distinctions catégoriales. Il nous faudra donc bientôt éclaircir le rôle des lettres grecques, afin de décider si elles sont en mesure de conduire rigoureusement au même résultat dans le respect de ces distinctions.

En outre, le processus que nous venons d'appliquer est précisément celui que notre stipulation sémantique généralise. Supposons qu'à une certaine étape de la définition des noms du langage, un nom de fonction t soit construit par désaturation dans t' de n noms simples $t_1, \ldots, t_n$. Convenons par ailleurs que tous les noms préalablement formés disposent d'une référence déterminée. Notre objectif consiste à fixer celle de t. Puisque t' est un nom propre, il a été formé lors d'une étape antérieure à travers la saturation d'un nom t'' par m noms $t'_1, \ldots, t'_n$. Selon le fait 7, il est possible de désaturer, au sein de chacun d'entre eux, les occurrences des t'_i qui furent elles-mêmes retranchées de t' pour former t, obtenant ainsi des noms t''' et t''_i, pour i entre 1 et n. Il suffit alors de stipuler que le résultat de la référence de t en $e_1, \ldots, e_n$ est la valeur de la référence

197. C'est pourquoi il est essentiel que 'X' soit un nom simple. Dans le cas contraire, le nom complexe en question pourrait apparaître à une étape sans venir saturer (ou être saturé par) aucun nom.

198. Nous ne pouvons pas présumer de la forme des raisonnements que Frege a conduit pour lui-même. Mais si, à un moment ou un autre, il a posé le problème comme nous, alors ceci explique qu'il ait fait droit à la saturation partielle dans la section §30, tandis qu'elle n'apparaît nulle part ailleurs.

de la saturation partielle de t''' par $t''_1, \ldots, t''_n$ en $e_1, \ldots, e_n$. Nous connaissons cette référence – du fait que ce nom ait été obtenu antérieurement à t – et par conséquent sa valeur en $e_1, \ldots, e_n$. Nous avons donc correctement spécifié la valeur de la référence de t en tout argument.

Ces stipulations attendent néanmoins un complément. Elles permettent de fixer la référence d'un *nouveau* nom introduit à une étape quelconque du processus de définition. Cependant, ce dernier autorise la construction d'un même nom à travers *différents* chemins, que ce soit à une seule ou à plusieurs étapes. Il faudrait donc vérifier que, dans ces cas, les chemins empruntés déterminent la *même* référence [199]. Cette démonstration tient en réalité sur un seul fait, garanti par la manière dont nous avons fixé la référence des nouveaux noms de fonctions. Supposons t un tel nom qui résulte de la désaturation de noms $t_1, \ldots, t_n$ dans un nom t'. Alors la valeur de la référence de t en $t_1, \ldots, t_n$ est bien la référence de t', car $t' = \mathrm{Sat}(\mathrm{Sat}(t''', (t''_1, \ldots, t''_m)), (t_1, \ldots, t_n))$, où t''' et les t''_i sont définis comme ci-dessus. Sur cette base, il est possible de prouver que nos stipulations valent en réalité même lorsqu'un nom a déjà été construit à une étape antérieure, et par suite que tous les chemins conduisent à la même référence.

Ces deux étapes se déroulent sans difficultés, mais elles ne vont pas sans longueurs. Comme dans certaines démonstrations du second chapitre, elles exigent la prise en compte de plusieurs inductions enchevêtrées. Or les preuves, nombreuses et minutieuses, que nous avons fournies là-bas nous paraissent suffisantes pour que le lecteur curieux des spécificités techniques de la grammaire idéographique puisse, en suivant attentivement ces démonstrations, réaliser aisément celle sur laquelle nous faisons ici l'impasse, ou au moins se convaincre de sa bonne tenue. Nous n'en donnerons donc pas le détail, afin de maintenir le présent chapitre à la portée des uns qui souhaitent faire l'économie d'un tel examen, renvoyant les autres aux considérations du précédent chapitre, à nos yeux amplement suffisantes.

Pour compléter notre sémantique, il ne reste plus qu'à fixer la référence des noms primitifs, toujours dans le respect du principe de complétude. Il s'agit donc d'indiquer directement l'objet auquel réfère un nom propre, et d'indiquer la valeur prise par la référence d'un nom de fonction en chaque argument, par exemple :

— ξ associe le Vrai au Vrai, et le Faux à tout autre objet.

Ce faisant, nous disposons non seulement d'une sémantique qui fixe la référence de chaque nom du langage, mais aussi d'une preuve que cette référence est unique. Cette démarche s'appuie essentiellement sur le principe de complétude : déterminer la référence d'un nom de fonction consiste à déterminer une valeur en chaque argument. En suivant la procédure de saturation-désaturation, la référence de chaque nom de fonction (construit par désaturation) se voit ainsi déterminée, et par suite celle de chaque nom d'objet (construit par saturation), etc. Ainsi, tous les noms propres du langage – et notamment tous les énoncés – se voient attribuer une *unique* référence. Il devient alors possible de démontrer un théorème d'adéquation pour un système (adéquat) construit dans ce langage. Il suffit de prouver que les énoncés axiomatiques réfèrent au Vrai et que si des énoncés désignant le Vrai sont pris en prémisses alors un nom du Vrai figure toujours en conclusion. Pour l'Idéographie privée du nom et des axiomes pour les parcours-de-valeurs, une telle preuve est réalisable sans la moindre difficulté sur la base des règles sémantiques compositionnelles que nous venons de fournir.

199. Répétons que Heck (2012) esquisse une stratégie proche de celle que nous adoptons ici. Néanmoins, il ne tient pas compte du fait que la définition totale des noms exige une infinité d'allers-retours entre saturations et désaturations, en se limitant à une seule étape de désaturation. Il n'a donc pas pris en compte les difficultés générées par cette définition, notamment le risque d'attribuer *plusieurs* références à un même nom.

Le lecteur comprend à présent l'objectif des longs développements techniques du second chapitre. Il nous fallait préparer le terrain pour expliquer certaines choses qui, nous croyons, n'avaient jamais été proprement établies. Si la grammaire idéographique est incontestablement singulière, elle permet néanmoins la donnée d'une telle sémantique, qui fonctionne convenablement. Ainsi, Landini (2012) se trompe en proposant une morphologie linéaire, épurée du processus de désaturation, qui ne permet en aucune manière de suivre le chemin indiqué par Frege. Mais l'objection de Resnik (1986) n'est pas davantage concluante : la désaturation n'interdit pas de déterminer la référence des noms obtenus sur la base de celle des noms initiaux. Il suffit de tenir compte, à travers un procédé ingénieux, non pas seulement de la référence des noms impliqués dans la dernière étape, mais aussi de celle de certains noms qui furent impliqués dans la formation des noms impliqués dans la dernière étape. Nous aboutissons ainsi à la même conclusion que Heck (2012, p. 67) : "ce qui permet à Frege de lever l'objection de Resnik, c'est le caractère sémantique de l'argument qu'il développe" dans le §30. Cependant, Heck n'a pas tenu compte des nombreuses complications induites par le processus *infini* de saturation-désaturation. Qu'il s'agisse d'établir la morphologie fregéenne ou de développer une sémantique pour cette morphologie, les étapes sont nombreuses et, de loin, plus difficiles que pour nos langages tarskiens. Frege n'a jamais pris la peine de les décrire en détail, ce qui nous motiva à réaliser à sa place ce laborieux travail.

Cependant, nous avons emprunté un chemin qui n'est pas fregéen, car nous avons exploité la montée sémantique pour faire référence à des fonctions en utilisant des noms propres. Frege contourna la difficulté en utilisant "des lettres grecques majuscules comme s'il s'agi[ssait] de noms qui réfèrent à quelque chose, sans statuer sur leurs références" (nbp. 3, p. 9), se cantonnant à une brève esquisse de la démonstration. Il faut donc déterminer si celle-ci peut être proprement conduite sans qu'aucune fonction ne soit traitée comme un objet. Autrement dit, il convient de comprendre si la sémantique qu'il élabora s'accorde avec les distinctions absolues qu'il revendiqua entre catégories ontologiques. En somme, il convient de tirer au clair son utilisation des lettres grecques majuscules.

Par ailleurs, dans l'horizon néo-logiciste, diverses preuves d'adéquation sont souvent réalisées pour des sous-systèmes *traduits* de l'Idéographie. Nous disposons ici d'un moyen d'obtenir un tel résultat sans opérer la moindre traduction. Contrairement à ce que Dummett (1991b, Chapitre 17) affirma, le pas d'induction de la démonstration des §§29-31 ne présente aucune circularité. En suivant le chemin indiqué par Frege au sein du §30, il est possible de mettre à jour une manière de déterminer la référence de tous les noms de l'idéographie (à l'exception de celui pour les parcours-de-valeurs). À son tour, cette possibilité autorise à établir l'adéquation de l'Idéographie privée des axiomes concernés par les parcours-de-valeurs. Frege s'est lui-même lancé dans une telle entreprise, apportant une ultime confirmation à l'interprétation que nous développons ici.

3.3.6.4 Théorème d'adéquation

Nous avons élaboré notre lecture du §30 à partir de deux éléments importants. D'une part, nous avons compris que le pas d'induction était destiné à démontrer que si nous disposions d'une stratégie pour *déterminer la référence* des noms simples, alors nous pouvions en déduire une stratégie pour déterminer celle de n'importe quel nom complexe. En d'autres termes, si les noms simples sont attachés à un mode de détermination – s'ils possèdent un sens –, alors il en va de même des noms complexes. Voilà pourquoi, au début du §32, Frege conclut que "non seulement une référence mais aussi un sens correspond[ait] à chaque nom correctement formé" (p. 50). Or le critère de référentialité du §29, lu en termes contextuels, condamne ce pas d'induction à la circularité. Au contraire, notre lecture du critère ne prête pas une erreur aussi grossière à Frege. D'autre part, elle permet de rendre un même compte des manières dont celui-ci (1) fixa la

référence des noms primitifs de fonctions et (2) démontra que les noms complexes de fonctions disposaient d'une référence. Dans le premier cas, il suffisait de déterminer la valeur de la référence d'un tel nom en tout argument. Dans le second, il suffisait d'établir que la valeur de la référence d'un tel nom pouvait être déterminée à partir de la manière dont les références des noms simples l'étaient. Le même principe d'arrière-fond se tenait tapi derrière les deux stratégies, selon lequel la référence d'un nom de fonction est déterminée si et seulement si une valeur en chaque argument l'est. Ou, plus précisément [200], un sens est attribué à un nom de fonction dès lors qu'une stratégie est fixée pour déterminer une valeur relativement à un argument. Ce principe – le principe de complétude – fut longuement présenté dans la troisième partie des *Grundgesetze*, et se tient à la base des développements sémantiques de Frege, qu'il s'agisse de son introduction des noms primitifs ou de sa démonstration que les noms complexes possèdent un sens et une référence si les noms de base en disposent.

Néanmoins, cette lecture s'expose à certaines objections dont il nous faut tenir compte. En premier lieu, considérons une remarque de Weiner :

> Puisque les expressions primitives de l'idéographie sont des noms de fonctions, Frege devrait assigner une fonction à chaque signe primitif de fonction par stipulation. Ainsi, la charge du §31 est, semble-t-il, de montrer que ces stipulations conviennent. Mais personne ne s'attend à ce que cette tâche soit difficile et, en particulier, personne ne s'attend à ce que cette tâche requière une quelconque preuve. Seule semble requise une explication, dans la langue naturelle, de quelle fonction est assignée à quel signe primitif de fonction. Si, par exemple, on décide d'introduire un terme primitif pour la fonction successeur sur les nombres naturels, il semble suffisant de spécifier que le terme en question désigne cette fonction. Face à cette stipulation, aucune autre preuve n'est exigée (bien que, si nous ne prenons pas garde en choisissant nos axiomes, ces derniers peuvent s'avérer faux dans cette interprétation). (Weiner 2002, p. 153)

Tentons d'adapter cette objection à notre propre lecture. Weiner explique que, pour spécifier la référence d'un nom primitif de fonction, il suffit de stipuler dans la langue naturelle les fonctions auxquelles ces noms sont attachés. Par exemple, pour munir un langage $\mathscr{L} = \{s, +, \times\}$ d'une interprétation sur le domaine des entiers naturels, nous nous contentons d'expliquer que 's' se voit assigner la fonction successeur, '$+$' l'addition et '$\times$' la multiplication. Pourquoi Frege n'a-t-il pas procédé ainsi ? Entre autres choses, il aurait pu simplement spécifier que le nom pour l'implication référait au concept d'implication. Dans un langage idéal, une telle stipulation aurait pris le visage suivant :

$$\vdash \mathbf{R}_{\beta,\gamma}(\text{`}\ulcorner \zeta \text{'}, \beta \text{ implique } \gamma)$$
$$\llcorner \xi$$

Frege s'est abstenu d'emprunter un tel sentier parce qu'à ses yeux, le nom primitif de l'idéographie n'a ni le sens du verbe 'impliquer', ni celui que recouvre aucun terme de la langue naturelle. Non seulement il ne pouvait pas identifier le sens de ce nom primitif à celui d'un autre nom de la langue idéale – selon ses propres termes, il ne pouvait pas *définir* ce nom primitif – précisément à cause du caractère primitif qu'il souhaitait attribuer à ce nom, mais il ne pouvait pas non plus l'identifier à celui d'un terme de la langue naturelle, car il estimait que les mots de cette langue possédaient des sens fluctuants et imprécis. Rappelons-nous comment il prescrivit de fixer le sens des termes primitifs, lorsqu'il expliqua l'intérêt des élucidations :

> Venons-en aux *définitions*. On doit distinguer les définitions proprement dites des *élucidations*. Quand on débute en sciences, l'emploi de mots ordinaires est inévitable.

200. comme nous l'avons expliqué en section 3.2.3.5.

> Mais ces mots, pour la plupart, ne sont pas vraiment appropriés à des fins scientifiques, parce qu'ils ne sont pas assez déterminés et fluctuent dans leur usage. La science a besoin de termes techniques aux références déterminées et fixées ; et, pour parvenir à comprendre ces références et à exclure d'éventuels contresens, nous donnons des exemples illustrant leur usage. (Frege 1914, p. 224 / 246)

Frege conseillait d'employer le nouveau terme au sein d'énoncés du langage naturel afin de permettre au lecteur de deviner son sens. Plus les contextes sollicités sont nombreux, plus les erreurs dues aux imprécisions des autres termes employés deviennent improbables, plus les risques de quiproquos se réduisent. Si "d'un point de vue théorique, on ne parvient jamais vraiment à son but en procédant ainsi [car le risque de mésentente n'est jamais totalement éradiqué], en pratique, on réussit à parvenir à une compréhension de la référence des mots [car ce risque devient négligeable, lorsque suffisamment d'exemples sont mis à contribution]". Pourtant, ce n'est pas le sentier qu'il sembla suivre dans les *Grundgesetze*. Il ne mit pas son nouveau signe en action au sein de multiples énoncés allemands, il proposa une fois pour toutes ce qu'il nomma lui-même une 'stipulation' :

> J'introduis la fonction à deux arguments
>
> $$\left[\begin{matrix}\zeta\\ \xi\end{matrix}\right.$$
>
> au moyen de la stipulation selon laquelle sa valeur est le Faux si le Vrai est pris pour ζ-argument, tandis que tout autre objet qui n'est pas le Vrai est pris pour ξ-argument ; et dans tous les autres cas la valeur de la fonction est le Vrai. (Frege 1893, p. 20)

Pire encore : alors que Frege avait utilisé le symbole d'égalité à de multiples reprises, laissant croire que, conformément à ses propres prescriptions, il tentait d'en communiquer le sens en illustrant son usage, il expliqua finalement qu'il était "nécessaire de stipuler plus précisément les choses à son sujet" (p. 11). Il suggéra, non seulement que la stratégie des exemples était insuffisante, mais surtout qu'il existait une *autre* alternative plus efficace, ce qu'il nia pourtant dans le texte de 1914. En réalité, l'explication tient dans ce qu'il n'a pas pris la peine de préciser là-bas. Il s'intéressait généralement à l'introduction des noms primitifs d'un langage idéal, que celui-ci serve à l'expression des pensées logiques ou d'une quelconque autre science et, surtout, que ces noms soient complets ou insaturés. Or les expressions incomplètes des langues vernaculaires transgressent souvent le principe de complétude, et ne permettent donc pas de déterminer une valeur en *chaque* argument. Par conséquent, il ne suffit pas de mettre en action un nom de *fonction* au sein d'énoncés de la langue naturelle. Une telle méthode échouerait inéluctablement à couvrir tous les cas possibles. Il convient d'indiquer, à travers les énoncés adaptés, un moyen de déterminer une valeur pour *chaque* argument. Bien sûr, ces énoncés sont eux-aussi formulés en langue naturelle. Certaines élucidations peuvent donc à nouveau être sollicitées pour expliquer les termes problématiques qui les composent. Dans l'exemple ci-dessus, il s'agit que le lecteur comprenne le rôle des mots 'Vrai', 'Faux', 'fonction', 'objet', 'valeur' et 'argument' qui figurent dans la stipulation [201]. Les explications liées à ces noms, adjointes à la stipulation elle-même, constituent *collectivement* la totalité des élucidations permettant de fixer le sens du nom primitif.

201. Notons néanmoins que Frege fournit bien peu d'indications concernant les deux premiers termes. Il estimait que "ces deux objets [le Vrai et le Faux] seront admis, serait-ce tacitement, par quiconque forme un jugement et tient quelque chose pour vrai, même donc par un sceptique" (Frege 1892b, p. 149 / 110). On peut considérer qu'à ses yeux, de par leur rôle fondamental, les noms 'Vrai' et 'Faux' possédaient, une fois n'est pas coutume, un sens tout à fait précis dans la langue naturelle, sur lequel il n'était pas nécessaire de s'attarder.

Weiner et Ricketts se basent sur le texte de 1914 pour affirmer que l'introduction des noms primitifs ne pouvait constituer l'équivalent de nos définitions sémantiques contemporaines. Selon eux, il s'agissait seulement d'un guide d'apprentissage censé conduire le lecteur à cerner les sens que Frege voulait attribuer à ses termes, ainsi qu'on tente parfois d'expliquer dans notre langue celui d'un mot étranger. Pour leur répondre, leurs adversaires se contentent d'exposer à leurs yeux la méthode rigoureuse et systématique employée dans les *Grundgesetze*. L'écart entre les deux positions reflète celui qui sépare les deux textes en question, et ne peut se comprendre qu'à travers les enjeux liés à la notion d'élucidation [202]. Frege n'a jamais cru que les énoncés introduisant les termes primitifs étaient intraduisibles dans un langage idéal. Il ne voyait aucune raison de contester la possibilité de spécifier, au sein d'un tel langage adapté au développement d'une sémantique, la référence des noms primitifs d'un langage non interprété. Concernant les noms de fonctions (de premier niveau à un argument), ce travail pourrait être réalisé en impliquant directement la fonction de référence $\mathbf{R}_\beta(\xi, \varphi(\beta))$, ou en suivant la méthode des *Grundgesetze* qui consiste à spécifier la valeur de la fonction en chaque argument. Frege a lui-même envisagé cette possibilité lors de sa discussion avec Hilbert. S'il ne l'a pas conduite plus avant, c'est parce qu'il ne s'intéressait à la sémantique *que* comme un outil essentiel à l'élaboration d'une langue idéale, *i.e.* qu'à travers ses vertus *élucidatoires*. Il n'y a donc *aucune* contradiction dans le fait (1) que l'introduction des noms primitifs consiste en des élucidations et (2) qu'il s'agisse de l'équivalent fregéen de nos définitions sémantiques contemporaines. Certes, il ne leur aurait pas attribué le nom de 'définition', qu'il dédiait aux expressions à travers lesquelles il transférait *directement* – sans impliquer aucune relation de référence – le sens d'un nom d'une langue idéale à un autre nom de la même langue. Certes, cette méthode est basée sur le principe de complétude, et n'est pas celle de nos théories des modèles ; il s'agit donc bien d'un *équivalent*. Mais Frege n'aurait vu aucune objection à ce qu'elle soit proprement implémentée dans une langue idéale destinée au développement d'une théorie sémantique. Les passages-clefs des *Grundgesetze* étaient voués à poser les bases d'une telle théorie dans la langue naturelle afin d'orchestrer le bon fonctionnement de l'Idéographie, la cantonnant ainsi à sa fonction élucidatoire. Seules les imperfections de l'allemand exigeaient d'utiliser des "exemples illustrant l'usage" des termes en question. Le défi consistait à spécifier dans une langue imparfaite ce qui pourrait l'être dans un langage idéal pour la sémantique sans aucun recours à ces exemples. Entre autres, il s'agissait selon lui d'aider le lecteur à deviner les sens qui convenaient aux termes 'fonction', 'objet' etc., employés (notamment) pour octroyer une méthode pour déterminer la valeur de la référence des noms primitifs en chaque argument, autrement dit pour fixer le sens de ces noms. Aux yeux de Frege, ces exemples et illustrations n'étaient pas la marque de l'impossibilité d'une théorie sémantique, mais le moyen d'ancrer une telle théorie dans le cadre défaillant des langues naturelles.

Ainsi, il tenta bel et bien de suivre une rigoureuse méthode sémantique en fixant le sens des termes primitifs de l'idéographie, puis en établissant la manière dont la référence des noms complexes pouvait être déterminée à partir de celles des noms primitifs. En nous basant sur les passages en question, nous avons développé en détail cette méthode. Elle consiste à fixer la référence – et à dévoiler le sens – des noms primitifs en donnant une manière de déterminer la valeur de cette référence en chaque argument, puis à en déduire un moyen de déterminer la référence des – un sens aux – noms composés sur cette base, donc notamment un moyen de détermination de la valeur de la référence des noms complexes de fonctions en chaque argument. Développée dans la langue naturelle, cette méthode exige d'employer certains termes problématiques – 'argument', 'objet', etc. – qui doivent être expliqués par des exemples adéquats. Mais

202. Nous nous apprêtons à exploiter les conclusions tirées en section 3.2.3.7.

Frege ne contestait aucunement la dimension théorique de cette méthode, dont il pensait qu'elle se soumettait au carcan d'un système idéal dans lequel ces illustrations auraient été inutiles. Comme nous l'avons vu en section 3.2.3, il n'a jamais compris en quoi les élucidations se tenaient parfois *fondamentalement* à l'écart de la théorie. Il leur prêtait le seul avantage de surmonter, dans la pratique, les défauts de l'allemand. Selon lui, des énoncés de cet acabit étaient requis lors de la constitution d'une langue idéale, *i.e.* dans la réalisation du travail antérieur à l'exploitation de cette langue qui, en tant que tel, ne pouvait qu'être effectué à l'extérieur de celle-ci. À ses yeux, il était possible de déployer la sémantique à des fins, non plus pré-scientifiques de constitution d'une langue idéale, mais proprement scientifiques d'exploitation d'une telle langue. Rien n'interdisait, croyait-il, de mobiliser sa méthode en dehors du cadre élucidatoire, l'épurant ainsi des problèmes issus des imprécisions des langues naturelles. Il envisagea même cette possibilité dans le débat qui l'opposa à Hilbert, bien que celle-ci lui soit au fond indifférente, et qu'il ne prit jamais la peine d'enquêter sérieusement à son sujet.

La question n'est donc pas de savoir s'il s'essaya au développement d'une sémantique, ni s'il croyait possible d'ancrer un tel développement dans le cadre théorique d'un système idéale. Sur ce point, nous nous rangeons sans condition derrière les membres du courant sémantique. Le problème consiste à déterminer si cette sémantique s'accorde réellement avec les distinctions absolues qu'il maintenait entre les catégories ontologiques, et dont il n'a jamais mesuré les conséquences. En effet, durant la montée sémantique qui permit de développer rigoureusement la théorie de la référence, nous avons transgressé ces distinctions en escomptant référer à des fonctions à travers des noms propres. Pour sa part, Frege tenta de se maintenir dans un cadre adéquat en mobilisant habilement les lettres grecques majuscules. Néanmoins, il n'a pas fourni suffisamment de détails pour que nous puissions convenir immédiatement de l'adéquation de sa démarche. Il nous faut donc enquêter proprement sur son usage des lettres grecques afin de déterminer si celui-ci permet d'aboutir, dans le respect des contraintes catégoriales, au résultat auquel nous sommes parvenus. Dans ce cas, alors son aveuglement relatif à certaines conséquences de ces contraintes – notamment l'interdiction de toute théorie des catégories – serait sans conséquence vis-à-vis de la sémantique. Dans le cas contraire, alors les élucidations des §§29-31 devraient finalement être ramenées, comme le supposent les membres du clan antisémantique, à des indications condamnées à demeurer en marge de toute théorie proprement dite. Mais – nous insistons – une telle conclusion n'a *jamais* été envisagée par Frege lui-même, qui n'a pas réalisé les véritables difficultés induites par ses distinctions catégoriales.

Pour autant, nous n'avons pas entièrement répondu à l'objection de Weiner. Nous savons que Frege n'envisageait pas d'attribuer à ses noms primitifs les sens de noms de fonctions de la langue naturelle, car ceux-ci risquaient de varier selon les contextes et de transgresser le principe de complétude. Il était donc nécessaire, ainsi qu'il s'y appliqua, de fournir une méthode pour déterminer la valeur de la référence de ces noms en tout argument. Néanmoins, si ce travail était réalisé lors de leur introduction – et lors des explications liées aux termes 'valeur', 'argument', 'fonction', etc., que celle-ci incorporait –, alors un sens et une référence leur étaient correctement attribués. Ainsi, pourquoi a-t-il jugé nécessaire de *prouver* que cet objectif était atteint – que chaque nom *primitif* se voyait doté d'un sens et d'une référence – au cours du §31 ? Il existe une réponse simple à cette question, qui se rapporte à la fonction pour les parcours-de-valeurs. Frege l'introduisit comme suit :

> Si je dis généralement :
>
> soit
>
> $$\text{`}\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)\text{'}$$

> qui réfère au parcours-de-valeurs de la fonction $\Phi(\xi)$
> alors ceci aussi exige un complément, tout comme notre explication de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$' ci-dessus. (Frege 1893, p. 15)

Le complément en question a trait à la gestion de la portée associée à la lettre 'ε'. Frege semble ici conférer un sens au nom '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$', puisqu'en expliquant que sa référence envoie tout argument sur son parcours-de-valeur, il indique un moyen de déterminer sa valeur en chaque argument. Weiner explique :

> Selon la lecture métathéorique, Frege devrait stipuler que le signe pour la fonction de second niveau pour les parcours-de-valeurs est un nom de l'idéographie pour la fonction qui associe toute fonction de premier niveau [à un argument] à son parcours-de-valeurs. Car, bien qu'il soit d'une certaine manière mal à l'aise avec cela, Frege assumait bel et bien que chaque fonction de premier niveau [à un argument] possédait un parcours-de-valeurs dans les *Grundgesetze*. Et cette hypothèse est, du point de vue métathéorique, suffisante pour établir que le signe en question est associé à une entité du type approprié. Pourtant Frege ne fait pas appel à cette hypothèse dans le §31. Et il ne tente pas non plus de supposer que cette hypothèse est correcte – ni dans le §31, ni nulle part ailleurs. (Weiner 2002, p. 156)

Rappelons rapidement ce qui fut expliqué en section 3.2.3. Frege fit parfois droit à l'idée selon laquelle nous disposons d'un accès direct à l'opération logique de représentation qui lie toute fonction de premier niveau à un argument à son parcours-de-valeurs, et qui permet d'exprimer à un niveau de discours – à travers des sens d'un certain type – *exactement* ce qui peut l'être à un autre – en invoquant des sens d'un autre type. Ce faisant, il posait les bases suffisantes pour assurer à la fois sa procédure de désescalade des niveaux et la logicité de sa loi V. Néanmoins, il n'a jamais définitivement adopté cette idée, qui contredisait notamment sa vision des pensées comme des contenus *structurés*.

Comme Weiner, nous convenons donc qu'il était profondément mal à l'aise avec cette hypothèse. C'est justement pour cette raison que, contrairement à ce qu'elle prétend, il ne tint pas pour acquise l'existence des parcours-de-valeurs dans les *Grundgesetze*, et tenta de leur conférer une justification. La source de cette justification se tenait dans la stipulation selon laquelle '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(\Psi(\alpha))$' avait toujours la même référence que '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{b})$'. Néanmoins, comme il l'expliqua, cette stipulation ne permettait pas de "fixer complètement la référence du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'" (p. 16). Pour y parvenir, il croyait nécessaire de la mobiliser au sein d'une *autre* stratégie permettant d'assurer la référentialité d'un nom. Cette seconde méthode se tient à la source de l'erreur contenue dans la (tentative de) preuve des §§29-31. Néanmoins, elle n'était nécessaire que parce que les explications fournies dans le passage ci-dessus étaient insuffisantes pour assurer une référence au nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', car l'existence d'une telle valeur – d'un parcours-de-valeurs – pour chaque argument n'allait pas de soi. Ainsi, en l'absence du nom pour les parcours-de-valeurs, Frege n'aurait eu *aucun* besoin de rédiger le §31. L'objectif de ce passage résidait *exclusivement* dans la démonstration que l'expression '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' disposait d'une référence, ce que sa présentation initiale n'était pas suffisante à établir. Il employa à cette fin un *autre* instrument qui, à ses yeux, était inutile vis-à-vis des des autres noms primitifs de l'idéographie, lesquels s'étaient vus conférer un sens et une référence lors de leur introduction.

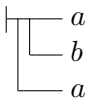
En somme, le sens et la référence d'un nom de fonction sont fixés dès lors qu'une méthode pour déterminer la valeur de cette référence en chaque argument est spécifiée. D'une part, Frege réalisa ce travail pour tous les noms primitifs de l'idéographie – c'était l'objet de leur introduction – à l'exception de celui pour les parcours-de-valeurs. D'autre part, il montra comment ce travail pouvait être réalisé pour les noms composés dès lors qu'il l'était pour les noms primitifs – c'était

l'objet du §30. Enfin, il envisagea une autre façon d'atteindre le même objectif afin de traiter le cas du nom problématique (provoquant ainsi l'erreur fondamentale des §§29-31) – c'était le propos du §31. Voilà pourquoi la sémantique développée dans la dernière section ne tient pas compte de ce paragraphe. Le rôle essentiel du principe de complétude dans l'attribution d'un sens et d'une référence à un nom de fonction est parallèlement tenu au sein de l'introduction des noms primitifs et du pas d'induction. La sémantique de Frege, qui s'appuie essentiellement sur ce rôle, ne s'en est (provisoirement) détournée – au sein du §31 – que pour traiter le cas d'un nom particulier, qui ne pouvait se voir attribuer le contenu adéquat selon cette méthode. Nous étudierons les raisons de cette impossibilité, le remède que Frege tenta de confectionner et la stérilité de ce remède, lorsque nous nous intéresserons aux parcours-de-valeurs. Mais, contrairement à ce qu'affirme Weiner, c'est bien à travers certaines clauses métathéoriques, imparfaitement formulées en allemand, que Frege escomptait indiquer une méthode de détermination de la valeur de la référence de la quasi-totalité des noms primitifs de fonctions de l'idéographie, donc de leur attribuer un contenu. Et c'est précisément parce qu'il était incapable de fournir une telle clause pour un de ces noms – parce qu'il ne voulait pas *supposer* l'existence d'un parcours-de-valeurs attaché à toute fonction de premier niveau à un argument – qu'il envisagea une autre manière d'attribuer une référence – et développa un argument (fallacieux) pour *assurer* l'existence de ces parcours-de-valeurs, sur une base que nous décrirons bientôt.

Frege tentait donc de développer une sémantique informelle et de prouver que cette sémantique parvenait à son but : assigner une unique référence à tout nom de l'idéographie. Ce réquisit, pensait-il, était "un principe essentiel pour une rigueur complète" (p. XII). Mais un autre travail préliminaire était essentiel afin de justifier le bon fonctionnement de son système : montrer que les axiomes étaient vrais et que les règles préservaient la vérité [203]. En d'autres termes, il lui fallait prouver un théorème d'adéquation pour l'Idéographie. Dans la première lettre adressée à Russell, il laissa entendre que le travail des §§29-31 était aussi destiné à cette tâche. Lorsqu'il découvrit que son système était contradictoire, il expliqua :

> Il semble donc que la transformation de la généralité d'une identité en une identité de parcours-de-valeurs [...] n'est pas toujours permise, que ma loi V [...] est fausse et que mes explications de la section 31 ne suffisent pas à garantir une référence à mes combinaisons de signes dans tous les cas. (Frege 1976, p. 213)

Ce passage suggère que, *puisque* le système est contradictoire, alors certains termes sont dénués de référence. Resnik (1986) conteste qu'il existe aucun lien de causalité entre les deux affaires. Après tout, il est possible d'assigner la valeur Faux à tous les noms d'un langage, puis de développer un système pour ce langage qui, bien sûr, permet de dériver le faux. Chaque nom d'un tel langage est référentiel sans que le système ne soit cohérent. Mais le propos de Frege n'était pas celui-là. Il ne croyait pas que la preuve de référentialité suffisait à assurer la cohérence de l'Idéographie, il pensait qu'elle constituait le chaînon manquant d'une telle démonstration, dont il avait réalisé les premières étapes lors de l'introduction des règles et axiomes. Considérons la loi I :



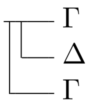
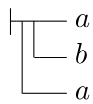
Nous pouvons facilement démontrer sa vérité en utilisant la sémantique telle qu'elle fut développée lors de la dernière section, sans mobiliser les lettres grecques majuscules. Mais tentons plutôt

203. au sens que nous avons précisé en section 3.2.4.3.

d'aboutir au même résultat à l'aide de ces dernières, *i.e.* selon la façon dont Frege lui-même présenta sa sémantique.

Il s'agit de prouver que le nom '$\smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{b}}\ \mathfrak{a} \to (\mathfrak{b} \to \mathfrak{a})$'[204] réfère au Vrai. Ce nom provient de la saturation de '$\smile^{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' par '$\smile^{\mathfrak{b}}\ \xi \to (\mathfrak{b} \to \xi)$'. Nous savons que la référence de '$\smile^{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' envoie seulement les concepts qui subsument tous les objets sur le Vrai. Ainsi, notre axiome est vrai si et seulement si la référence de '$\smile^{\mathfrak{b}}\ \xi \to (\mathfrak{b} \to \xi)$' subsume tous les objets, autrement dit si et seulement si, quelle que soit la référence d'un nom 'Γ', '$\smile^{\mathfrak{b}}\ \Gamma \to (\mathfrak{b} \to \Gamma)$' réfère au Vrai. Or ce dernier nom est issu de la saturation de '$\smile^{\mathfrak{b}}\ \varphi(\mathfrak{b})$' par '$\Gamma \to (\xi \to \Gamma)$'. Il réfère donc au Vrai si et seulement si la référence de '$\Gamma \to (\xi \to \Gamma)$' réfère au Vrai, si et seulement si, quelle que soit la référence d'un nom 'Δ', '$\Gamma \to (\Delta \to \Gamma)$' réfère au Vrai. Ce dernier nom est construit par saturation à partir de '$\xi \to \zeta$', 'Γ' et '$\Delta \to \Gamma$'. Ainsi, d'après la manière dont '$\xi \to \zeta$' fut introduit, il ne réfère pas au Vrai si et seulement si 'Γ' réfère au Vrai et '$\Delta \to \Gamma$' ne réfère pas au Vrai. Puisque ce dernier nom résulte de la saturation de '$\xi \to \zeta$' par 'Δ' et 'Γ', il ne réfère pas au Vrai si et seulement si 'Δ' réfère au Vrai et 'Γ' ne réfère pas au Vrai.

En somme, la loi I est fausse si et seulement s'il existe des références qui puissent être attribuées à des noms 'Δ' et 'Γ' telles que 'Γ' et 'Δ' réfère au Vrai tandis que 'Γ' ne réfère pas au Vrai. Cela est impossible, donc la loi I est vraie. Voyons maintenant la manière dont Frege discuta cette loi :

> Conformément au §12 [dans lequel le nom pour l'implication fut introduit]
>
> 
>
> serait le Faux seulement si Γ et Δ était le Vrai tandis que Γ n'est pas le Vrai. Ceci est impossible, donc
>
> 
>
> (FREGE 1893, p. 34)

Frege donne moins de détail, mais son argument est essentiellement le même. Et il s'en remit *systématiquement* à des raisonnement de cet acabit lorsqu'il introduisit des axiomes ou des règles de son système[205]. Ce fut notamment le cas au moment de présenter le *Modus Ponens* :

> À partir des énoncés ' ' et '$\vdash \Delta$' on peut déduire '$\vdash \Gamma$' ; car si Γ n'était pas le Vrai alors, puisque Δ est le Vrai, serait le Faux. (FREGE 1893, p. 25)

Il semble donc qu'il ait démontré l'adéquation de ses axiomes et de ses règles au fur et à mesure où il les introduisit. Weiner conteste cette conclusion en expliquant que, tandis que nous employons la tournure "Δ' réfère au Vrai', il utilisait la formulation 'Δ est le Vrai'. Ainsi, notre raisonnement serait de nature sémantique, contrairement au sien. Néanmoins, nous voyons mal quel pourrait être l'objectif de ces passages, sinon celui de déterminer la référence de noms complexes sur la base de leurs constituants en mobilisant les lettres grecques majuscules. Weiner propose une alternative, qui débute avec la remarque suivante : Frege pensait que les lois et

204. Dans le corps d'un paragraphe, nous utiliserons le symbole '→' afin d'uniformiser les espaces entre les lignes.
205. à l'exception de la règle pour les substitutions, nous y viendrons.

les règles logiques étaient évidentes – ne nécessitaient pas de preuves – et indémontrables – n'admettaient aucune preuve[206]. Le but n'aurait donc pas été de *démontrer* l'adéquation des axiomes et des règles, mais d'en *convaincre* le lecteur. Et puisque cette adéquation est évidente pour quiconque *comprend* ces axiomes et ces règles, il aurait suffit d'aider le lecteur dans cette tâche. Voilà, pour Weiner, le propos des passages en question :

> Plus tard dans sa carrière, Frege affirma que nier une loi logique pouvait apparaître comme dénué de sens ou, au moins, comme absurde. Il semble donc raisonnable d'en déduire que tout ce dont nous avons besoin, pour attester que les lois primitives sur lesquelles il s'appuie sont vraies, est de comprendre les énoncés idéographiques de ces lois. Ceci suggère que ces élucidations sont précisément ce dont nous avons besoin pour comprendre et reconnaître la vérité de ces lois fondamentales (Weiner 2005b, pp. 340-341)

En section 3.2.4.3, nous avons réfuté l'argument à la base de cette interprétation. En niant qu'il soit possible de démontrer la totalité des lois logiques, Frege tenait simplement compte du rôle fondamental que tient cette discipline au sein d'une quelconque preuve. Tout raisonnement s'appuie sur la logique, ainsi toute preuve de la vérité des lois logiques impliquerait ces mêmes lois, et serait inévitablement circulaire. Néanmoins, à proprement parler, les théorèmes d'adéquation n'ont jamais eu vocation à démontrer, dans un sens si fort, que les *lois logiques* sont vraies et que les *règles logiques* préservent la vérité. Rigoureusement, ils permettent seulement de montrer, en s'appuyant sur les lois logiques, les règles logiques et les lois sémantiques, que les *énoncés axiomatiques* expriment des pensées vrais et que les *règles syntaxiques* implémentent des règles qui préservent la vérité. Autrement dit, il s'agit de prouver, en s'appuyant *notamment* sur la logique, que *la manière dont des lois et des règles sont implémentées dans un système* est correcte. La logique elle-même n'est pas l'objet de l'enquête, mais seulement sa formalisation. Or Frege n'a *jamais* cru qu'il était impossible de conduire d'authentiques raisonnements en allemand. Le rôle des élucidations était précisément d'effectuer dans cette langue tout le travail nécessaire à l'élaboration *et à la justification* d'un système logique idéal, en impliquant toute la substance nécessaire à cette tâche : logique, sémantique ou autre. Ses réquisits étaient les suivants : n'admettre aucun nom privé de référence, n'intégrer que des énoncés (qui expriment des pensées) vrai(e)s et des règles syntaxiques qui (implémentent des règles qui) préservent la vérité. Il y a donc lieu de penser que le propos de ces passages était bel et bien d'établir, sur la base d'une théorie sémantique – *qui exploite la logique* – développée dans la langue naturelle, que les énoncés axiomatiques de l'Idéographie sont vrais et que lorsque des énoncés vrais sont pris en prémisses d'une règle syntaxique, un énoncé vrai figure en conclusion, autrement dit que le *système* idéographique est adéquat.

Au moins, nous pouvons affirmer que *rien* n'interdisait de poursuivre un tel objectif, dont Frege a lui-même souvent remarqué l'importance. Pour trancher entre l'interprétation de Weiner et la nôtre, il convient d'examiner le contenu des passages en question. Weiner ne traite que le cas du *modus ponens*, en expliquant :

> Si quiconque comprend le *modus ponens* peut le reconnaître comme une règle correcte, alors le travail de Frege consiste à conduire son lecteur à comprendre cette règle. Comment cela peut-il être accompli ? Une stratégie pour y parvenir – souvent utilisée face à des étudiants de logique – est de conduire son audience à regarder autrement la règle en question. Le *modus tollens* apparaît souvent comme plus convaincant que le *modus ponens*. On peut s'en tenir formuler quelque chose comme : si Δ est le Vrai

206. ou, au moins, que certaines d'entre elles l'étaient, car le seul moyen de démontrer une loi logique consistait à la réduire à une autre loi logique.

> et que $\Delta \to \Gamma$ est le Vrai, alors il en va ainsi de Γ. Mais il est parfois utile de dire, comme Frege :
>
> Car si Γ n'était pas le Vrai alors, puisque Δ est le Vrai, $\begin{array}{l}\top\ \Gamma\\ \llcorner\ \Delta\end{array}$ serait le Faux.
>
> (Weiner 2005b, pp. 339-340)

Cette explication présente un problème. Les lois logiques étant évidentes, quiconque parvient à saisir le sens d'un énoncé exprimant une de ces lois atteste immédiatement de la vérité de cet énoncé. L'objectif des passages introduisant les énoncés axiomatiques consisterait donc, selon Weiner, à aider le lecteur à saisir le sens de ces énoncés. Mais qu'en est-il des règles syntaxiques ? Pour Frege, la trivialité de ces règles permet à quiconque saisit le sens d'énoncés qui peuvent figurer en prémisses et en conclusion d'une d'entre elles de reconnaître que la vérité des premiers ne peut aller sans celle du dernier. En somme, son objectif devrait consister à aider le lecteur à saisir le sens de tels énoncés. Or cela ne correspond absolument pas à la manière dont Weiner traduit ce passage. À ses yeux, Frege nous aide à appréhender cette règle en présentant une *autre* règle. En quoi cela s'accorde-t-il avec la notion fregéenne de trivialité ? Elle n'en dit absolument rien.

Mais laissons les règles de côté et concentrons-nous sur les axiomes, *a priori* plus favorables à son interprétation. Elle n'aborde que le cas de la loi I, en remarquant que sa présentation ressemble à s'y méprendre à d'autres passages qualifiés d''élucidations' par Frege. Une fois de plus, ce point est sans conséquence, car Frege n'opposait pas preuves et élucidations. Weiner n'explique pas en quoi cette courte introduction – citée plus haut – pourrait se rapporter à une volonté de dévoiler un sens aux yeux du lecteur. Néanmoins, l'axiome I est suffisamment simple pour qu'il soit possible de défendre cette hypothèse. Examinons plutôt la loi III :

$$\begin{array}{l}\vdash\ g\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\begin{array}{l}\top\ \mathfrak{f}(a)\\ \llcorner\ \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ \llcorner\ g(a=b)\end{array}$$

Supposons que le nom '$\Gamma = \Delta$' réfère au Vrai. Alors la référence de 'Γ' est la même que celle de 'Δ'. Ainsi, quelle que soit la référence du nom '$\Phi(\xi)$', celle de '$\Phi(\Gamma)$' réfère au Vrai si et seulement si celle de '$\Phi(\Delta)$' y réfère aussi. Par conséquent, celle de '$\Phi(\Delta) \to \Phi(\Gamma)$' est le Vrai. Ainsi, la référence de '$\varphi(\Delta) \to \varphi(\Gamma)$' subsume toutes les fonctions de premier niveau à un argument. Or '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' réfère au concept qui envoie sur le Vrai tous et seulement les concepts qui subsument toutes les fonctions de premier niveau à un argument, et sur le Faux toutes les autres fonctions. Par conséquent, '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ (\mathfrak{f}(\Delta) \to \mathfrak{f}(\Gamma))$' réfère au Vrai.

Réciproquement, supposons que '$\Gamma = \Delta$' ne réfère pas au Vrai. Alors, puisque la fonction $\xi = \zeta$ envoie tous ses arguments sur des valeurs de vérité, ce nom réfère au Faux. Ainsi, la référence de '$\xi = \Delta$' envoie celle de 'Δ' sur le Vrai et celle de 'Γ' sur le Faux. Donc la référence de '$(\Delta = \Delta) \to (\Gamma = \Delta)$' est le Faux. Ainsi, la référence de '$\varphi(\Delta) \to \varphi(\Gamma)$' ne subsume pas le concept auquel réfère le nom '$\xi = \Delta$', donc '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ (\mathfrak{f}(\Delta) \to \mathfrak{f}(\Gamma))$' réfère au Faux.

Nous savons désormais que les noms '$\Gamma = \Delta$' et '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ (\mathfrak{f}(\Delta) \to \mathfrak{f}(\Gamma))$' ont même référence. Par conséquent, les références de '$\Phi(\Gamma = \Delta)$' et de '$\Phi(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ (\mathfrak{f}(\Delta) \to \mathfrak{f}(\Gamma)))$' sont identiques. En somme, quelles que soient les références de '$\Phi(\xi)$', 'Δ' et 'Γ', celle de '$\Phi(\Gamma = \Delta) \to \Phi(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ (\mathfrak{f}(\Delta) \to \mathfrak{f}(\Gamma)))$' est le Vrai. Donc le nom '$\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\ (\mathfrak{g}(\mathfrak{a} = \mathfrak{b}) \to \Phi(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ (\mathfrak{f}(\mathfrak{b}) \to \mathfrak{f}(\mathfrak{a}))))$' réfère au Vrai, ce qui valide la loi III. Voyons à présent comment Frege introduisit cette dernière :

> En accord avec le §7 [dans lequel le nom pour l'égalité fut introduit], la fonction à deux arguments $\xi = \zeta$ a toujours une valeur de vérité pour valeur, notamment le Vrai

si et seulement si le ζ-argument coïncide avec le ξ-argument. Si $\Gamma = \Delta$ est le Vrai, alors il en va de même de $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{f}(\Delta)\\ \mathfrak{f}(\Gamma)\end{array}$; *i.e.*, si Γ est le même que Δ, alors Γ tombe sous tout concept sous lequel Δ tombe ou, pourrait-on dire, toute prédication qui satisfait Δ satisfait aussi Γ. Mais aussi réciproquement, si $\Gamma = \Delta$ est le Faux, alors certaines prédications qui satisfont Δ ne satisfont pas Γ ; *i.e.*, dans ce cas $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{f}(\Delta)\\ \mathfrak{f}(\Gamma)\end{array}$ est le Faux. Par exemple, Γ ne tombe pas sous le concept $\xi = \Delta$, sous lequel Δ tombe. Ainsi, $\Gamma = \Delta$ est toujours la même valeur de vérité que $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{f}(\Delta)\\ \mathfrak{f}(\Gamma)\end{array}$. Par conséquent, $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{f}(\Delta)\\ \mathfrak{f}(\Gamma)\end{array}$ tombe sous chaque concept sous lequel $\Gamma = \Delta$ tombe ; ainsi :

$$\begin{array}{l}\vdash g\left(\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{f}(a)\\ \mathfrak{f}(b)\end{array}\right)\\ \quad g(a = b)\end{array}$$

(Frege 1893, p. 36)

Malgré l'écart de formulation mentionné plus haut, Frege utilisa exactement la même stratégie que nous. En exploitant la manière dont il avait introduit les noms primitifs – leur *définition* sémantique, entendue en termes contemporains – ainsi que les lois sémantiques autorisant à déterminer la référence d'un nom complexe sur la base de celles de ses constituants, il établit pas à pas la vérité de son énoncé axiomatique. Il est clair que la meilleure méthode pour assister le lecteur dans la saisie du sens d'un nom compliqué n'est pas de suivre mécaniquement la procédure sémantique de détermination de sa référence. Au contraire, les détails requis conduisent inéluctablement à perdre de vue le sens en question. En revanche, il s'agit bel et bien du moyen adéquat pour démontrer la vérité d'un énoncé. Voilà le chemin qu'il emprunta systématiquement en introduisant ses axiomes, lorsque l'essentiel n'avait pas déjà été dit lors de – lorsque la preuve n'était pas immédiate à partir de – la présentation des noms intégrés par ces axiomes. Par exemple, au sujet de la loi VI, il s'en tint à la précision suivante :

À partir de la référence du nom de fonction '$\backslash\xi$' (§11)

$$\vdash a = \backslash\dot{\varepsilon}(a = \varepsilon)$$

(Frege 1893, p. 34)

Ici, Frege ne dit *absolument* rien qui aide à comprendre le sens de son énoncé axiomatique. Or qu'est ce qui pourrait dépendre de la référence du nom '$\backslash\xi$', sinon la vérité de cet énoncé ? Dans le §11, il avait expliqué que "si, pour un argument, il existe un objet Δ tel que $\dot{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ est cet argument, alors la valeur de la fonction $\backslash\xi$ doit être Δ lui-même" (p. 19). Autrement dit, quelle que soit la référence de 'Δ', elle est identique à celle de '$\backslash\dot{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$'. À ce stade, il ne manquait donc qu'un pas, trivial, pour parvenir à établir la vérité de la loi en question [207]. Cette fois encore, sa remarque n'était donc pas destinée à aider le lecteur à *comprendre* une expression, mais à *démontrer* qu'elle référait au Vrai.

Le détail des passages en question, que ni Weiner ni aucun membre du courant antisémantique ne prend en considération, corrobore franchement notre interprétation. Dans le §30, Frege démontra généralement – bien qu'imparfaitement – qu'il existait une manière de déterminer la référence de n'importe quel nom de son langage. Certaines de ces manières avaient déjà été utilisées

207. modulo l'hypothèse selon laquelle le nom pour les parcours-de-valeurs était référentiel.

lors de la présentation de ses règles et axiomes pour déterminer la référence des énoncés axiomatiques ainsi que celle des énoncés qui peuvent figurer en conclusion d'une règle relativement à celle des énoncés qui peuvent figurer en prémisse. En somme, Frege avait déjà exploité, dans certains cas particuliers impliqués par le théorème d'adéquation, la sémantique dont il esquissa la preuve du bon fonctionnement général dans le §30. À partir de ce constat, nous pouvons enfin comprendre la lettre qu'il adressa à Russell lors de la découverte de la contradiction. Pourquoi a-t-il lié la cohérence de l'idéographie au travail du §31 ? Comme le remarque Resnik, il ne suffit pas de prouver que chaque terme possède une référence pour disposer d'un théorème d'adéquation. Mais Frege n'a jamais rien affirmé de tel. Il savait simplement qu'avant le §31, il lui manquait un dernier élément – que nous avons volontairement laissé de côté – pour garantir l'adéquation des axiomes V et VI : la preuve de la référentialité du nom pour les parcours-de-valeurs.

Procédons lentement. Lorsqu'il les présenta, Frege prit soin de fixer la référence de – de définir sémantiquement [208] – tous ses noms primitifs, à l'exception de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Sur la base de ces définitions sémantiques, et en exploitant les règles sémantiques, il démontra que les énoncés axiomatiques qui n'intégraient pas ce nom référaient (uniquement) au Vrai, écartant ainsi les loi V et VI. Par ailleurs, sur la même base, il lui fallait prouver que si des énoncés qui référaient (uniquement) au Vrai étaient pris en prémisses d'une de ses règles, alors un énoncé référant uniquement au Vrai figurait en conclusion. Il réalisa consciencieusement cette tâche pour les règles présentées dans le corps du texte. Néanmoins, celle qui régissait les substitutions ne fut jamais rigoureusement formulée avant la synthèse du §48. Or elle permettait de substituer, dans un énoncé, n'importe quel nom de l'idéographie d'un certain type à une lettre latine du même type. Si un nom sans référence était l'objet d'un tel remplacement, alors l'énoncé déduit aurait lui aussi été dénué de référence. Pour établir l'adéquation de cette dernière règle, Frege était donc tenu de prouver que tous les noms disposaient d'une unique référence. Là encore, hormis lorsqu'ils intégraient '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', le travail avait été réalisé à travers l'introduction des noms primitifs et le contenu du §30. Ainsi, à ce stade, Frege avait démontré que son système *privé du nom pour les parcours-de-valeurs et (par suite) des axiomes V et VI* était adéquat.

Par ailleurs, nous avons vu qu'en introduisant le nom '$\backslash\xi$', Frege avait fourni les éléments pour prouver immédiatement l'adéquation de la loi VI en supposant la référentialité du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Concernant l'axiome V, il expliqua :

> Nous avons vu (§3, §9) qu'une égalité de parcours-de-valeurs pouvait toujours être transformée en la généralité d'une égalité, et *vice versa* :
>
> $$\vdash \left(\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha} f(\alpha)\right) = \smile^{\mathfrak{a}} \left(f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})\right)$$
>
> (Frege 1893, p. 36)

En réalité, Frege s'avançait considérablement, et il en avait conscience. Dans le §9, il avait expliqué qu'il *voulait* attribuer au nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' une référence permettant de transformer une égalité de parcours-de-valeurs en la généralité d'une égalité. Dans le §10, il avait montré qu'une stipulation supplémentaire était nécessaire à cette tâche. À la fin de cette section, il avait prudemment conclu qu'il ne pourrait décider si cette stipulation était suffisante avant d'avoir introduit la totalité des noms primitifs. Le §31 était précisément et *uniquement* destiné à cet objectif : montrer que la stipulation du §10 permettait finalement d'attribuer une référence au nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' qui autorise systématiquement la transformation d'une égalité de parcours-de-valeurs en la géné-

208. Le terme 'définir' est ainsi entendu dans un sens élargi par rapport à celui que Frege lui conférait. Nous prenons ici une simple liberté *terminologique* pour récupérer l'usage contemporain. Que le lecteur choisisse un autre nom s'il préfère, ce point est sans *aucune* conséquence sur notre propos.

ralité d'une égalité[209]. Si le contenu du §31 avait été correct, alors Frege aurait simultanément démontré l'adéquation de la loi VI – puisqu'une référence aurait été attribuée au nom en question – et de la loi V – puisque cette référence aurait autorisé la transformation souhaitée. En d'autres termes, il aurait triomphalement placé la dernière pièce du puzzle de sa preuve du théorème d'adéquation, laquelle était alors éclatée entre l'introduction des noms primitifs, des règles et des axiomes, ainsi que dans le §30. Lorsqu'il apprit la terrible nouvelle de Russell, il comprit que le problème venait de sa loi V. En somme, il réalisa qu'il avait échoué à fixer la référence du nom pour les parcours-de-valeurs de telle sorte qu'il soit toujours possible de "transformer la généralité d'une identité en une identité de parcours-de-valeurs", comme l'exigeait cette loi. Ses "explications de la section 31 [et, aurait-il dû préciser, sa stipulation du §10] ne suffis[ai]ent pas à garantir une référence à [s]es combinaisons de signes dans tous les cas", car elles échouaient à régler l'unique cas auquel elles étaient destinées : celui du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' (et des noms complexes qui l'intégraient). Le reste était indemne, et ne fut pas incriminé. L'introduction des autres noms, des règles et des axiomes tenait bon, ainsi que le §30 qui légitimait la règle pour les substitutions. Il ne manquait qu'une seule pierre à son édifice, mais c'était une pierre centrale, sans laquelle il ne pouvait tenir.

3.3.6.5 Synthèse

Il est temps de payer notre tribut aux camps qui s'opposent depuis une quarantaine d'années. Les défenseurs de la lecture antisémantique ont su prendre au sérieux les lourdes implications des distinctions catégoriales et, sur cette base, poser la question de la *légitimité* d'une théorie sémantique fregéenne, *i.e.* de la possibilité d'une sémantique adaptée à la hiérarchie ontologique. Néanmoins, pour y répondre, ils n'ont pas entrepris un examen serré des diverses positions en cause. Ils ont développé deux arguments généraux visant à expliquer que Frege n'avait *jamais eu l'intention* de construire informellement une telle théorie. D'une part, celui-ci estimant que la logique, générale et normative, n'admettait aucune justification d'ordre sémantique (ou autre), ils en ont conclu qu'il ne pouvait entreprendre la démonstration d'un théorème d'adéquation pour son système logique. En section 3.2.4, nous avons vu que cette conclusion résultait d'une mauvaise interprétation du propos des théorèmes d'adéquation. D'autre part, ils ont cru que Frege maintenait essentiellement les élucidations – notamment celles par lesquelles les noms primitifs furent introduits – à l'écart de tout développement théorique. Ce point est incorrect, car le caractère élucidatoire d'un quelconque développement ne repose que sur la fonction de ce dernier – accompagner l'élaboration d'un système idéal – et non sur son contenu – théorique ou extra-théorique. Cette fois, l'erreur est compréhensible, et résulte de la prise en compte des nombreux énoncés qui, conformément aux distinctions absolues entre catégories ontologiques, n'ont pas leur place dans le domaine de la théorie. Cependant, Frege manqua (de peu) ce point, et conclut à tort que les seuls défauts de la langue naturelle étaient à la source des problèmes posés par les termes 'objet', 'fonction', etc. Comme nous l'avons vu en section 3.2.3, il n'a pas réalisé ce que la grammaire logique elle-même possédait de cloisonnant. Il n'a donc jamais envisagé que ses énoncés sémantiques soient soumis au seul régime de la suggestion et, dans les *Grundgesetze*, procéda sereinement au développement informel de ce qu'il croyait être une *théorie* sémantique.

Désormais, nous saisissons mieux les difficultés de communication entre les deux camps. Les membres du courant antisémantique se maintinrent à un niveau non technique, concentrés sur la notion d'élucidation et la hiérarchie catégoriale. On peut comprendre que, dans cette perspective, ils aient exagéré la proximité entre Frege et Wittgenstein, et contesté que le premier ait pu se lancer dans l'élaboration d'une sémantique. Au contraire, les membres du courant sémantique

209. Nous détaillerons tout ceci lorsque nous nous intéresserons aux §§10, 31.

ont examiné à la loupe les passages en question. À raison, ils en ont conclu qu'ils contenaient une tentative de développement d'une sémantique, sans se demander néanmoins si cette tentative était touchée par le problème, soulevé par leurs adversaires, des distinctions entre catégories. Incontestablement, Frege a exploité les lettres grecques majuscules de manière homogène dans les *trois* contextes suivants : l'introduction des noms primitifs, l'esquisse de preuve du §30 et la justification du choix des règles syntaxiques et des énoncés axiomatiques. Clairement, il posait ainsi les bases d'une théorie sémantique conforme au principe de complétude. Weiner affirme que, dans ce cadre, il aurait dû employer la formulation "Δ' réfère au Vrai' plutôt que 'Δ est le Vrai'. En réalité, il employait indifféremment les deux tournures, présentes dans des contextes totalement *identiques* – par exemple lors de l'introduction des noms pour l'égalité et pour l'horizontal. L'explication est la suivante : bien qu'il suivait une intuition précise – basée sur le principe de complétude – dans ses raisonnements sémantiques, il n'a jamais proprement développé l'appareil technique permettant de rendre compte de cette intuition. Si d'aventure celle-ci s'opposait aux distinctions entre catégories, il n'a donc jamais été en position d'en prendre conscience.

Avant toute chose, il nous fallait attester la pertinence de cette intuition, indépendamment de cette question. Nous lui avons donc fait droit en empruntant une voie plus naturelle, et confirmé une fois pour toutes qu'elle ne soulevait aucun problème technique. Ce faisant, nous avons néanmoins conféré à certaines expressions complètes du métalangage le rôle de variables de fonctions – en d'autres termes, plus fregéens, nous avons utilisé un nom d'une incomplétude de type (0) pour des quantifications de types supérieurs –, transgressant ainsi les règles imposées par la hiérarchie ontologique. Pour déterminer si la sémantique de Frege est conforme à son ontologie, il n'est donc pas question d'exploiter cette méthode, qui évite les lettres grecques majuscules tout en respectant l'objectif qu'elles servent. Il faut détailler l'appareil technique qui intègre ces symboles, utilisés "comme s'il s'agissait de noms qui réfèrent à quelque chose, sans statuer sur leurs références" (p. 9). Ce faisant, nous déterminerons si sa méthode peut être rigoureusement déployée pour – comme la nôtre – faire justice à ses intuitions sémantiques et – contrairement à la nôtre – respecter les distinctions entre catégories. Nous voulons donc tenir compte de la seule objection valable du clan antisémantique afin de décider, non pas – comme le contestent les membres de ce clan – si Frege voulait faire droit à une sémantique, mais si la sémantique à laquelle il faisait droit – comme le constatent les défenseurs de la lecture sémantique – s'opposent à sa hiérarchie des catégories ontologiques – ce que ces commentateurs oublient de questionner. Voilà, nous croyons, la question qui synthétise les positions des deux courants. En définitive, il est possible que le désaccord provienne exclusivement d'une *tension*, au sein des conceptions de Frege, entre la sémantique qu'il développait et l'ontologie qu'il impliquait. C'est au moins ce qu'il nous appartient désormais de déterminer, et nous nous y appliquerons après une dernière mise au point.

3.3.7 Lectures alternatives

De nombreux commentateurs ont discuté les §§29-31, en tentant d'en souligner diverses imperfections. Nous avons notamment cité certaines remarques de Dummett et Resnik. Néanmoins, à notre connaissance, seuls quatre auteurs ont tenté de démêler entièrement le problème de ces difficiles paragraphes, en tenant compte de tous ses aspects. Il s'agit de Weiner (2002), Linnebo (2004), Landini (2012) et Heck (2012). À présent, nous pensons en avoir dit suffisamment pour contester les interprétations des trois premiers d'entre eux, et appuyer celle du dernier.

3.3.7.1 La lecture de Weiner

Comme la totalité des membres du courant antisémantique, Weiner estime que Frege n'a *jamais eu l'intention* de développer informellement une théorie sémantique. Les §§29-31 fournissent d'importantes raisons de douter de cette interprétation. Frege y affirma expressément qu'il escomptait établir que tous les noms de l'idéographie disposaient d'une référence, en discutant la référentialité des uns sur la base de celle des autres. Nous voyons mal ce qu'il aurait pu ainsi tenter de réaliser, sinon un raisonnement s'appuyant sur une véritable montée sémantique. Au regard de ces paragraphes, la thèse de ces commentateurs semble hautement improbable – et c'est un euphémisme. Voilà pourquoi la plupart d'entre eux évitent soigneusement de les prendre en considération, et s'en tiennent aux analyses générales discutées (et combattues) plus haut. Nous devons reconnaître que Weiner fait exception, en tentant de réconcilier ces sections avec cette thèse. Comme nous, elle constate que toute tentative de *preuve* sémantique du fait que chaque nom possède une référence basée sur le critère du §29 lu en termes *contextuels* est trivialement circulaire. En revanche, elle ne conteste pas pour autant le caractère contextuel de ce critère ; mais elle en conclut que Frege n'a jamais tenté de réaliser une telle preuve. À ses yeux, ces passages ne doivent pas être lus comme l'exploitation d'une théorie sémantique informelle, ce qui s'accorde avec l'idée que Frege n'a jamais développé une telle théorie.

Elle explique que celui-ci "ne propose pas une preuve métathéorique du fait que toute expression d'une loi fondamentale de l'Idéographie nomme le Vrai. Il permet à ses lecteurs de comprendre ce qui est exprimé par ces expressions et, simultanément, de reconnaître chacune d'entre elles comme un nom du Vrai" (2002, p. 179). À ses yeux, en introduisant les noms primitifs, les lois et les axiomes, il n'escomptait pas proposer des définitions et réaliser des preuves sémantiques (de vérité et de conservation de la vérité), mais se contentait d'exprimer les pensées adéquates pour que son lecteur comprenne le sens de ces noms, axiomes, et des énoncés susceptibles d'être pris en prémisses et obtenus en conclusion des règles, afin que celui-ci puisse *constater* que les axiomes sont vrais et que les règles préservent la vérité. Ce constat n'aurait été le fruit d'aucune preuve sémantique, et proviendrait seulement de la saisie de certains sens qui ne laisseraient aucun doute à ce sujet. Il ne s'agirait donc pas de démontrer le bon fonctionnement du système, mais seulement d'en *convaincre* le lecteur. Weiner affirme aussi que, dans le §10, Frege employa une stratégie similaire pour que son lecteur réalise que deux noms spécifiques de parcours-de-valeurs référaient l'un au Vrai et l'autre au Faux.

Dans la dernière section, nous avons vu qu'elle n'apportait aucune justification satisfaisante à ces hypothèses, qui contrastent totalement avec le contenu des passages en question. Néanmoins, afin de comprendre l'interprétation des §§29-31 qu'elle compte en tirer, admettons-les provisoirement. Sans recourir à une quelconque preuve sémantique, Frege aurait fourni les explications nécessaires pour convaincre que toute dérivation qui débute par des axiomes de l'Idéographie et s'effectue pas à pas en impliquant des règles de ce système aboutit à un nom du Vrai. Weiner émet néanmoins une réserve :

> Dans les sections précédentes, Frege a expliqué que ses expressions pour les lois logiques expriment des vérités et que ses règles d'inférence permettent de déduire seulement des vérités à partir de vérités. [...] Il reste cependant un problème. Supposons que nous remplacions les variables d'une loi fondamentale par un nom propre de l'idéographie dénué de référence. Par construction, le résultat [de la démonstration] semblerait [référer au Vrai]. Pourtant, il n'en serait rien.
>
> Pour éviter ce problème, chaque nom propre de l'idéographie doit disposer d'une référence. Frege devrait-il s'attendre à ce que ses lecteurs comprennent immédiatement que chaque nom propre de l'idéographie est référentiel ? La plupart des noms propres

> qui apparaissent dans les preuves de Frege sont soit pourvus d'abréviations définies, soit immensément complexes. Ainsi Frege pourrait avoir voulu convaincre le lecteur que sa procédure de formation des noms complexes ne présente aucun problème. (Weiner 2002, p. 84)

Weiner suppose que, grâce à ses explications, Frege a rassuré le lecteur quant aux deux points suivants : (1) si des énoncés vrais figurent en prémisses d'une règle, alors un énoncé vrai figure en conclusion, (2) tout énoncé axiomatique est vrai. Selon elle, à ce stade, Frege était encore tenu de combler une carence, car si des noms propres référentiels sont substitués aux lettres latines d'objets dans les énoncés axiomatiques, alors l'énoncé obtenu est vrai.

Son raisonnement présente plusieurs défauts. D'une part, elle n'explique pas – et nous voyons mal pourquoi – sa réserve se limite aux lettres latines et aux noms d'*objets*. Les énoncés axiomatiques intègrent aussi bien des lettres de fonctions. Cela est néanmoins sans conséquence, car nous pouvons librement étendre sa remarque à toutes les catégories. D'autre part, si Frege est parvenu à convaincre que la totalité des règles d'inférence préservent la vérité, cela inclut les règles pour les substitutions. Une fois que le lecteur est convaincu de la vérité des axiomes *et* de l'adéquation de ces règles, il peut donc sereinement procéder aux remplacements évoqués par Weiner.

En tenant compte des seules substitutions effectuées au sein des énoncés axiomatiques, elle semble supposer que Frege a tenté de convaincre le lecteur de la vérité de ces énoncés en tentant de le convaincre de la vérité de tous les résultats de la substitution de noms propres *référentiels* aux lettres latines dans ces énoncés. Une telle démarche attendrait donc, pour complément, des explications convaincantes quant au fait que tout nom de l'idéographie est référentiel. Mais cet argument est incorrect, car l'idéographie ne dispose pas d'un nom pour chaque entité. Il est donc possible que les énoncés résultant de substitutions des lettres latines par des noms de l'idéographie soient vrais sans que l'énoncé initial le soit. Le lecteur n'a aucune raison d'être convaincu de la vérité des énoncés axiomatiques sur cette seule base.

En procédant à quelques arrangements, nous pouvons néanmoins proposer une lecture plus charitable de son raisonnement. Supposons que Frege ait bel et bien convaincu le lecteur de la vérité de ses axiomes et qu'il soit parvenu au résultat attendu concernant ses règles à l'exception de celles qui régissent les substitutions. À leur sujet, il aurait su guider le lecteur pour qu'il comprenne que, lorsqu'un énoncé référentiel résultait de la substitutions d'un nom de l'idéographie à une lettre latine dans un autre énoncé, alors cette référence était le Vrai. Weiner n'aurait donc pas dû se cantonner ni aux lettres latines d'objets ni aux énoncés axiomatiques, mais étendre son propos à toutes les lettres latines et les énoncés vrais. Néanmoins, cette fois, une telle démarche attendrait effectivement un argument convaincant quant au fait que le résultat du remplacement d'une lettre latine par un quelconque nom de l'idéographie dans un quelconque énoncé de l'idéographie possède une référence. Weiner remarque que tout nom qui respecte le critère contextuel du §29 vérifie cette condition :

> Ainsi Frege pourrait avoir voulu convaincre le lecteur que sa procédure de formation des noms complexes ne présentait aucun problème. Or la satisfaction du critère du §29 par les expressions de l'idéographie est exactement ce qui est requis pour cela. Elle montre que le résultat de l'implication d'expressions de l'idéographie dans des noms propres plus complexes ont une référence. Si Frege était parvenu à convaincre le lecteur que le critère du §29 était satisfait, il ne serait pas parvenu à convaincre le lecteur que toute expression de l'idéographie est associée à une entité extra-linguistique. Il serait parvenu à convaincre le lecteur que ses preuves étaient en bon ordre. (Weiner 2002, p. 84)

Weiner est consciente de la circularité du critère du §29, lu en termes contextuels, lorsqu'il est destiné à établir la référentialité dans un sens si fort. Néanmoins, selon elle, le propos de Frege n'était pas celui-là. Il s'agissait exclusivement de convaincre le lecteur de la référentialité du résultat du remplacement d'une lettre latine par un nom de l'idéographie dans un énoncé. Or, à ses yeux, le critère du §29 est adapté à cette tâche. Elle lit à la lettre la remarque de Frege selon laquelle celui-ci permet d'"étendre progressivement le cercle des noms admis comme référentiels" (p. 46) :

> La sphère qui doit être étendue, bien sûr, n'est pas la sphère des noms qui *ont* une référence, ce n'est pas la sphère des noms *dont il a été prouvé qu'ils ont* une référence, c'est la sphère des noms que nous *reconnaissons* comme dotés de référence. (Weiner 2002, p. 80)

Ainsi, il s'agit de débuter les explications à partir des énoncés qui furent le sujet d'élucidations, donc que le lecteur reconnaît désormais comme référentiels – les énoncés axiomatiques, un nom du Vrai et un nom du Faux – afin d'amorcer un processus permettant de vérifier que tous les autres noms vérifient aussi le critère du §29 :

> En premier lieu, on trouve les noms propres qui ont été reconnus comme référentiels lors de discussions préalables. Il s'agit de noms de valeurs de vérité. Frege explique ensuite que le résultat de la saturation de ses noms de premier niveau par des noms de valeur de vérité est référentiel [au sens du §29]. Une fois que les noms de premier niveau sont reconnus comme tels (par le critère du §29 et tant que nous nous limitons aux noms qui ont déjà été reconnus comme référentiels), Frege peut passer aux signes de fonctions de deuxième et troisième niveaux. Les quantificateurs viennent donc ensuite. La formation d'un nom propre par saturation du nom de fonction pour la quantification (un nom de second niveau) par un nom de premier niveau est le nom d'une valeur de vérité. Le cas du nom de troisième niveau vient ensuite et, enfin, le cas le plus difficile : le nom de second niveau pour les parcours-de-valeurs, qui requiert lui-même un argument complexe impliquant une certaine hiérarchie. (Weiner 2002, p. 81)

Malheureusement, cette lecture présente trois problèmes cruciaux. En premier lieu, Weiner insiste sur le fait que "le raisonnement de Frege ne procède pas par induction sur la complexité des expressions" (p. 81). Pourtant, au début du §31, Frege expliqua qu'il appliquait le travail du §30 pour "montrer que les noms propres et les noms de premier niveau qui peuvent être formés de cette manière à partir des noms simples préalablement introduits sont référentiels" (p. 48). Weiner passe totalement sous silence le contenu du §30, qui est donc destiné à traiter le cas des noms complexes sur le base de celui des noms simples. Nous pouvons néanmoins supposer que Frege aurait débuté son raisonnement à partir des noms complexes évoqués plus haut *afin de* traiter les noms simples *puis* la totalité des noms complexes.

Cependant, dans le §31, il explique qu'il "suppose que les noms de valeurs de vérité réfèrent à quelque chose", et qu'il va "progressivement étendre le cercle des noms qui doivent être reconnus comme référentiels" (p. 48), afin d'y inclure les noms simples de fonctions. Weiner estime que "les noms de valeurs de vérité" ainsi pris en compte sont seulement les lois de l'Idéographie et les deux noms spécifiques de parcours-de-valeurs. Mais elle ne tire pas cette conclusion à partir d'une quelconque remarque de Frege lui-même. Or le lecteur n'a absolument *aucune* chance de *deviner* ce point *essentiel* – selon l'interprétation de Weiner – à travers un énoncé aussi général. En effet, la formulation de Frege ne suggère *aucune* restriction parmi "les noms de valeurs de vérité", elle ne peut donc pas laisser entrevoir précisément celle que Weiner imagine. Si Frege n'avait pas tenté de proposer une démonstration, mais seulement de guider le lecteur à travers une certaine

compréhension, il aurait été particulièrement maladroit de passer sous silence *l'*élément essentiel à cette compréhension.

Venons-en à la deuxième difficulté. Weiner ne développe pas le cas des parcours-de-valeurs, qui contient pourtant à la fois la difficulté principal et l'intérêt majeur du paragraphe. En note de bas de page, elle explique qu'"à cause d'une limitation de place, [elle n'est] pas en mesure de décrire le fonctionnement de cet argument surtout, en particulier, la procédure de Frege concernant le nom de fonction de second niveau pour les parcours-de-valeurs" (p. 81). Malgré l'absence de détails à ce sujet, nous croyons que son explication générale est inapte à rendre compte de cette procédure. Cependant, nous n'allons pas traiter cette question, parce qu'elle a trait au §31 que nous n'avons pas encore abordé, et parce que les autres objections soulevées contre sa lecture nous semblent amplement suffisantes.

Le dernier problème concerne le §30. Weiner explique que Frege ne cherchait pas à convaincre le lecteur que "toute expression de l'idéographie était [référentielle au sens où elle était] associée à une entité extra-linguistique", mais seulement au sens où le résultat de l'intégration de ces expressions à des noms référentiels était lui-même référentiel. Disons qu'un nom est référentiel$_1$ dans le premier sens, et référentiel$_2$ dans le second. Weiner croyait entrevoir une issue à la circularité en scindant la notion de référentialité impliquée dans le critère du §29 :

> Un nom t de type (0) est référentiel$_2$ si et seulement si pour tout nom propre t' référentiel$_i$, alors la saturation de t par t' est référentiel$_1$

Selon elle, dans le §31, Frege s'est contenté de remarquer que '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' était référentiel$_2$ car, saturé par n'importe quel nom référentiel, il en résultait toujours le nom d'une valeur de vérité, donc un nom référentiel$_1$. Néanmoins, elle ne précise pas en quel sens le nom testé doit être référentiel. Si nous invoquons le premier sens, alors notre procédure n'aboutit pas. En effet, elle ne permet pas de déterminer quels noms sont référentiels$_1$, donc quels noms doivent être testés. Il semble donc que seule la seconde notion de référentialité soit envisageable. Malheureusement, cette alternative est tout aussi problématique. Une fois que nous avons attesté la référentialité$_2$ de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' et de '$\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\xi = \mathfrak{b}$' "tant que nous nous limitons aux noms qui ont déjà été reconnus comme référentiels", il convient de tester le premier nom par le second, autrement dit d'attester la référentialité$_1$ de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$'. Cependant, nous savons seulement que la référence de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' envoie sur le Vrai les fonctions qui associent tous les objets au Vrai, et nous ne sommes pas en mesure de décider s'il en va ainsi de la référence de '$\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\xi = \mathfrak{b}$'. En effet, nous connaissons exclusivement la référence du résultat de la saturation de ce nom par les noms *de l'idéographie déjà reconnus comme référentiels*$_2$. Cependant, non seulement l'idéographie ne dispose pas d'un nom pour chaque objet, mais de plus nous n'avons pas encore reconnu comme tels tous les noms de l'idéographie. En somme, le lecteur n'a aucune raison d'être "convaincu" de la référentialité$_2$ de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' dès lors que des noms complexes sont pris en considération.

Weiner explique que "la lecture métathéorique rencontre un sérieux problème" parce qu'en prétendant que Frege cherchait à démontrer la référentialité authentique – la première –, elle en appelait nécessairement à cette seule notion et sombrait dans la circularité. À ses yeux, "pour convaincre le lecteur que ses preuves étaient en bon ordre", il suffisait de recourir à la seconde notion. Mais la procédure qu'elle décrit n'a aucune chance de convaincre qui que ce soit de la référentialité, toute affaiblie soit-elle, des noms de l'idéographie. Elle s'écroule dès qu'un nom complexe reconnu seulement comme référentiel$_2$ est pris en compte. La solution ne tient pas dans le renoncement à la notion homogène de référentialité mais, comme nous l'avons vu, dans le rejet du caractère contextuel du critère du §29.

Afin d'examiner précisément l'interprétation de Weiner des §§29-31, nous avons adopté sa position générale, inhérente à cette interprétation, pour constater les problèmes déterminants

que celle-ci soulève en elle-même. D'une part, Weiner ne propose aucune explication convaincante du fait que Frege se serait limité à indiquer la référence de ses noms primitifs – sans fixer sémantiquement cette référence – et à convaincre le lecteur de la vérité de ses lois – sans impliquer aucune démonstration sémantique. D'autre part, son interprétation des §§29-31 n'est pas crédible, indépendamment des objections auxquelles le cadre de cette interprétation se heurte immédiatement.

Dans son premier ouvrage, Weiner traita rapidement des sections en question en remerciant Resnik de lui avoir "signalé que le §31 mettait ses vues en difficulté" [210]. Il est clair qu'à l'instar des autres membres du groupe antisémantique, sa vision des thèses fregéennes s'est construite indépendamment de ces paragraphes, qu'elle a tenté de réconcilier *après-coup* avec ses vues, en dépit des apparences. Là où ses camarades choisissent généralement de détourner les yeux, Weiner eut le courage de remonter ses manches afin de proposer une interprétation de passages qui, selon toute vraisemblance, viennent brutalement démentir la lecture antisémantique. Cette interprétation n'est pas convaincante, et elle n'y adhère pas de bonne grâce. Elle l'épouse parce qu'elle ne voit pas d'autre explication compatible avec l'idée (1) que Frege tenait les élucidations à l'écart de la sphère théorique et (2) que, refusant toute justification de la logique, il n'aurait pu envisager de démontrer l'adéquation de son système. Mais, comme nous l'avons vu, (1) et (2) sont incorrects. Il n'est donc pas nécessaire de chercher coûte que coûte une interprétation qui nie l'évidence. Frege a pu s'adonner – et s'est effectivement adonné – à un tentative de preuve sémantique dans les §§29-31.

3.3.7.2 La lecture de Linnebo

La tentative de Linnebo est intéressante dans une autre mesure. Contrairement à Weiner, il reconnaît que les paragraphes en question contiennent une tentative de preuve sémantique. Néanmoins, il soutient que cette preuve repose partiellement sur un critère *contextuel* de la référence, et que cet aspect particulier ne présente aucun défaut :

> Les remarques au sujet de la référence dans la preuve de référentialité sont difficiles à interpréter parce qu'elles apparaissent comme circulaires. Certains commentateurs nient ainsi que les *Grundgesetze* contiennent une quelconque vision contextuelle de la référence. D'autres maintiennent au contraires cette position, mais seulement au prix d'attribuer à Frege des vues peu attrayantes, telle une conception substitutionnelle de la quantification, ou de concéder que la circularité de cette vision est maligne. Contrairement au premier groupe de commentateurs, je soutiens que la preuve de référentialité des *Grundgesetze* intègre une vision contextuelle de la référence aux objets abstraits ; mais contrairement au second, je conteste que Frege défende une conception substitutionnelle de la quantification, ou que la circularité de cette vision soit maligne. (Linnebo 2004, pp. 73-74)

En apparence, l'interprétation de Linnebo est assez proche de la nôtre. Lorsque nous étudierons la manière dont Frege tenta de garantir la référentialité du nom pour les parcours-de-valeurs, nous défendrons aussi l'idée qu'il adopta une lecture hybride du critère du §29. Dans le détail, néanmoins, notre position ne s'accorde pas avec la sienne, laquelle échoue à répondre à certains enjeux que nous prenons en considération.

Selon lui, la démonstration de Frege s'organise comme suit. Dans le §10, il aurait établi la référentialité de deux noms propres particuliers de valeurs de vérité. Il aurait ensuite intégré un à un les noms atomiques de fonctions, en commençant par le premier niveau, la quantification, et

210. (Weiner 1990, nbp. 5, p. 241)

enfin les parcours-de-valeurs. Néanmoins, il n'aurait pas établi la référentialité de la totalité de ces noms avant d'effectuer généralement le pas d'induction, il aurait réalisé systématiquement un tel pas après l'introduction de chaque nouveau nom simple. Linnebo estime que le principe à la base de l'intégration d'un nom simple est le même qui permet l'ajout d'un nom complexe et que, s'il présente généralement une dimension circulaire, celle-ci peut être contournée dans certains cas, notamment dans ceux qui intéressent Frege. Davantage que l'architecture particulière de cette preuve, il nous importe de comprendre ce principe.

Considérons un nom '$X(\xi)$' de type (0) – le même critère s'adapte naturellement aux autres catégories et aux noms complexes – et un langage $\mathscr{L}$ *qui peut ou non* contenir '$X(\xi)$'. Selon Linnebo, la preuve de Frege met en jeu une notion *relative* de référentialité : [211]

'$X(\xi)$' réfère$_{\mathscr{L}}$ si et seulement si, pour tout nom propre t de $\mathscr{L}$, $\ulcorner X(t) \urcorner$ réfère$_{\mathscr{L}}$.

Sur cette base, il propose une interprétation de la manière dont Frege voulait étendre le cercle des noms référentiels. Supposons que la référentialité de tous les noms de $\mathscr{L}$ ait été reconnue relativement à $\mathscr{L}$, et (cette fois) que ce langage n'intègre pas '$X(\xi)$'. Afin d'y ajouter ce nom, il s'agirait d'abord de reconnaître la référentialité de '$X(\xi)$' relativement à $\mathscr{L}$, avant de reconnaître la référentialité de tous les noms de $\mathscr{L} \cup \{$'$X(\xi)$'$\}$ relativement à ce nouveau langage.

Rappelons tout de suite la situation qu'à nos yeux, Linnebo n'a pas tirée au clair. Il explique que sa stratégie permet d'éviter la circularité du critère du §29 lu en termes contextuels. Mais un tel critère est circulaire *seulement* si nous ne souhaitons pas tester un nom sur des noms dont la référentialité n'a pas encore été établie – ce qui est exigé si nous cherchons une méthode pour *déterminer* la référence en question. En section 3.3.5.2, nous avons vu que le critère contextuel était tout à fait acceptable, indépendamment de cette difficulté. En section 3.3.5.3, nous avons questionné sa capacité à surmonter celle-ci, en examinant comment une méthode de tests progressifs des noms évalués – à laquelle Linnebo fait ici droit – pourrait aboutir. Notre conclusion fut négative : tout processus de cet acabit est interrompu à un stade extrêmement précoce, et n'atteint donc jamais son objectif. Si notre raisonnement général est correct, alors la stratégie particulière de Linnebo ne peut être adaptée. Elle est inefficace si nous prenons en compte le problème de la détermination de la référence – car elle n'aboutit pas –, et inutile si nous ne le prenons pas en considération – car le critère du §29 n'a besoin d'aucun ajustement pour échapper à la circularité dans ce cadre. Voilà précisément ce que nous nous apprêtons à montrer.

Linnebo dit qu'un "nom de fonction f est non-extensif relativement à un langage $\mathscr{L}$ lorsque f est définie de telle sorte que, quelle que soit la référence d'un nom 'Δ', $\ulcorner f(\Delta) \urcorner$ se réduit à un nom propre b de $\mathscr{L}$. Plus précisément, il existe des conditions exclusives deux à deux et conjointement exhaustives $C_1, \ldots, C_n$ et des noms propres $b_1, \ldots, b_n$ telles que si 'Δ satisfait C_i, alors $\ulcorner f(\Delta) \urcorner$ se réduit à b_i" (p. 83). En somme – et en simplifié –, un tel nom est non-extensif relativement à $\mathscr{L}$ si et seulement si la valeur de sa référence en tout argument est un objet auquel réfère déjà un nom de $\mathscr{L}$. Linnebo souhaite exploiter le point suivant : puisque – selon lui – la preuve de Frege débute à partir d'un nom du Vrai et d'un nom du Faux, alors tous les noms simples testés seront non-extensifs par rapport aux langages pris en considération, à l'exception de l'opérateur pour les parcours-de-valeurs. Supposons que notre nom '$X(\xi)$' soit non-extensif, alors nous savons que, pour tout nom propre t de $\mathscr{L}$, $\ulcorner X(t) \urcorner$ dispose d'une référence sans qu'il soit nécessaire de tester à nouveau cette expression. C'est ainsi que Linnebo entend échapper à la circularité et, à ce stade, notre lecture s'accorde avec la sienne. Dans un tel cadre, nous disposons bel et bien d'une stratégie pour *déterminer* la référence de $\ulcorner X(t) \urcorner$ grâce à ce que nous savons de '$X(\xi)$'. Selon Linnebo, une fois établi que ce dernier nom est référentiel relativement à $\mathscr{L}$, il reste à prouver que tous les noms de $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{$'$X(\xi)$'$\}$ sont référentiels$_{\mathscr{L}'}$:

211. On écrira "'$X(\xi)$' réfère$_{\mathscr{L}}$" pour "'$X(\xi)$' réfère relativement à $\mathscr{L}$".

> On peut facilement voir qu'il suffit de montrer que chaque nom propre de $\mathscr{L}'$ réfère$_{\mathscr{L}'}$. À cet endroit, nous faisons à nouveau face à la circularité. Mais, une fois encore, cette circularité est bénigne parce qu'un nom peut toujours être montré référentiel$_{\mathscr{L}'}$ en montrant qu'il se réduit à un autre nom déjà accepté dans la sphère des noms référentiels. (Linnebo 2004, p. 86)

Pour garantir la référentialité$_{\mathscr{L}'}$ d'un nom de fonction, il suffit de montrer que le résultat de sa saturation par tout nom de $\mathscr{L}'$ de type adapté est référentiel$_{\mathscr{L}'}$. Or ce résultat est lui-même un nom propre de $\mathscr{L}'$. En somme, pour prouver que tous les noms de $\mathscr{L}'$ sont référentiels$_{\mathscr{L}'}$, il suffit d'établir ceci pour tout nom *propre* de $\mathscr{L}'$. Pour cela, Linnebo entend exploiter le fait que les noms de type (0) sont non-extensifs, et aboutir ainsi au résultat. Mais supposons que $\mathscr{L}$ intègre le nom '$X_{1,\beta}(\varphi(\beta))$' qui, donc, ait été préalablement reconnu comme référentiel$_{\mathscr{L}}$. Rien ne garantit pour autant que '$X_{1,\beta}(X(\beta))$' le soit à son tour. Dans ce cas, la non-extensivité d'un nom de fonction de premier niveau ne nous permet pas d'établir la référentialité$_{\mathscr{L}'}$ du résultat de sa saturation par '$X_{1,\beta}(X(\beta))$'. Linnebo tient compte de cette difficulté, et entreprend de la résoudre en adoptant un critère plus fort pour les noms de fonctions de niveaux supérieurs à 1 : le nôtre. Pour ces cas, il choisit donc un critère non contextuel et, par surcroît, non relatif de référentialité :

> '$X_{1,\beta}(\varphi(\beta))$' est référentiel ssi '$X_{1,\beta}(\Phi(\beta))$' l'est, quelle que soit la référence de '$\Phi(\xi)$'.

Le critère appliqué dépend ainsi du niveau du nom en question. En soi, nous n'avons rien à reprocher à ce choix. Nous allons nous aussi y recourir, lorsque nous examinerons le cas des parcours-de-valeurs. Cependant, sa stratégie particulière est problématique. D'une part, si Frege avait en vue d'établir la référentialité non contextuelle des noms de niveaux supérieurs à 1, pourquoi s'en serait-il privé pour les autres, tandis qu'il suffisait de procéder exactement de la même manière – que nous avons nous-mêmes décrite en détail ? D'autre part, nous voyons mal ici – et Linnebo n'explique pas – comment les deux aspects pourraient s'articuler au sein d'un même raisonnement, *i.e.* comment démontrer à une quelconque étape qu'un nom est référentiel en un sens (non contextuel) si fort si nous progressons pas-à-pas à travers une autre notion relative de référentialité. Enfin – et surtout – Linnebo n'a pas remarqué que sa méthode exigeait *aussi* de démontrer non-contextuellement la référentialité des noms de *premier* niveau.

En effet, il entend éviter la circularité en établissant la référentialité des noms propres *sans appliquer à nouveau le critère contextuel.* À cette fin, il exploite le fait que ces noms propres résultent de certaines saturations particulières. Supposons qu'une saturation implique un nom simple de premier niveau et un (ou des) nom(s) propre(s), alors le caractère non-extensif du premier nous conduit au but. Le problème intervient dans le cas – ignoré par Linnebo – de la présence d'un nom *complexe* de premier niveau. Nous devons réaliser les deux étapes décrites ci-dessus pour intégrer un tel nom à $\mathscr{L}$ – par exemple '$\smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} = \xi$'. Si les résultats de sa saturation par des noms propres de $\mathscr{L}$ sont référentiels, alors sa référentialité$_{\mathscr{L}}$ est établie. Mais il reste à accomplir la seconde étape, notamment montrer que le résultat de la saturation d'un nom de second niveau – par exemple '$\smile^{\mathfrak{b}}\ (\varphi(\mathfrak{b}))$' – par '$\smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} = \xi$' est référentiel$_{\mathscr{L}'}$ [212]. Or la référentialité$_{\mathscr{L}}$ de ce dernier nom ne nous assure pas qu'il dispose d'une référence au sens (non contextuel) où nous parlons de 'la référence de '$\Phi(\xi)$''. Le fait que '$\smile^{\mathfrak{b}}\ (\Phi(\mathfrak{b}))$' est référentiel quelle que soit la référence de '$\Phi(\xi)$' ne garantit donc pas la référentialité$_{\mathscr{L}'}$ de '$\smile^{\mathfrak{b}}\smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$'. Pour cela, il est nécessaire d'établir la référentialité de '$\smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} = \xi$' de manière non contextuelle.

Bien sûr, cette référentialité est une conséquence du caractère non-extensif. Le raisonnement de Linnebo s'appuie silencieusement sur l'hypothèse selon laquelle *tous* les noms de fonctions de

212. Bien sûr, il n'est pas question d'utiliser le critère contextuel. La non-extensivité d'un nom de fonction nous assure de la référentialité$_{\mathscr{L}'}$ du résultat de sa saturation par '$\smile^{\mathfrak{b}}\smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$' seulement si ce dernier nom réfère.

premier niveau de l'idéographie sont non extensifs relativement aux langages dans lesquels ils sont introduits. Néanmoins, encore faut-il établir ce point pour les noms *complexes*. L'application du critère non-contextuel ne conduit pas à ce résultat. Le seul moyen à disposition consiste à montrer que, quelle que soit la référence d'un nom 'Δ', la saturation d'un nom complexe par 'Δ' dispose d'une référence identique à celle d'un nom propre du langage considéré. Il faut donc prouver (notamment) que les noms de fonctions de premier niveau sont tous référentiels *au sens non-contextuel*.

Comme nous, Linnebo s'est aperçu que, pour échapper à la circularité, il importait de montrer que la valeur de la référence des noms de fonctions était déterminée *en chaque argument*. Mais en constatant (à raison) que la tentative de preuve de Frege reposait partiellement sur un critère contextuel de référentialité, il a tenté de traduire en termes de non-extensivité – garantie pour les noms simples de premier niveau – le critère non contextuel. Il a ainsi cru pouvoir reconstruire un raisonnement partiellement basé sur une notion relative et contextuel de référentialité proche de ceux que nous avons examinés en section 3.3.5.3. Mais il n'a pas réalisé que la non-extensivité des noms simples de premier niveau était insuffisante. Pour l'étendre aux noms complexes, il est nécessaire de récupérer précisément ce que son raisonnement visait à chasser : un critère non-contextuel pour le premier niveau. Fondamentalement, son erreur est d'avoir voulu unir les deux aspects du critère au sein d'un même raisonnement homogène, alors que Frege a (maladroitement) joint deux raisonnements indépendants basés chacun sur un de ces deux aspects (qu'il a confondus) au sein d'une même preuve. Le premier – que nous avons présenté – servait à démontrer la référentialité des noms construits à partir de noms primitifs dont la valeur de la référence était connue en chaque argument. Le second – qui viendra bientôt – servait à démontrer la référentialité d'un nom simple qui ne pouvait être introduit *via* la spécification de la valeur de sa référence en chaque argument.

3.3.7.3 La lecture de Landini

Nous allons être brefs, car nous avons longuement critiqué la position générale de Landini au sein du second chapitre, avant de découvrir que le §30 l'affaiblissait encore davantage. Il nous intéresse seulement de vérifier que son interprétation des §§29-31 ne permet pas de répondre aux différentes objections que nous avons formulées, d'une manière que nous n'aurions pas anticipée.

Rappelons que, selon Landini, Frege n'aurait jamais impliqué la référence des noms complexes de fonctions – se limitant aux noms simples – pour déterminer celles des noms propres de l'idéographie. En ce sens, son objectif des §§29-31 aurait consisté (1) à montrer que la "référence des signes primitifs de fonctions dépend[ait] essentiellement de *tous* les axiomes du système qui gouvernent ces signes" (2012, p. 170) – selon Landini, il s'agirait du propos du §31 –, et (2) à expliquer comment la référence des noms propres pouvait être déduite à partir de celle des noms primitifs de fonctions. Ceci étant fait, il aurait alors établi que la référence de tous les noms propres de l'idéographie, y compris des énoncés, dépendait essentiellement de tous les axiomes du système qui gouvernent les signes qui y figurent. Selon cette lecture, nous voyons mal quel aurait pu être l'objet du §30, sinon l'établissement du point (2). Néanmoins, Landini ne le dit pas lui-même, et n'aborde pas *une seule fois* le contenu précis de cette section. Et pour cause : celui-ci rentre en contradiction totale avec sa lecture. Non seulement Frege y explique comment la construction de noms propres impliquant la désaturation – donc des noms *complexes* de fonctions – préserve la référentialité, mais il expose même un exemple dans lequel il établit la référentialité de '$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' sur la base de celle du nom *complexe* '$\xi = \xi$'. En somme, il n'a jamais fait mystère du rôle central joué par ces noms dans la détermination de la référence des noms propres. C'est à ce rôle que Landini reste résolument aveugle, sans prendre la peine de discuter les passages dans

lesquels il est indubitablement présenté.

3.3.7.4 La lecture de Heck

Jusqu'à présent, notre lecture demeure très similaire à celle de Heck (2012, Partie 1). Comme nous, celui-ci estime que le §30 fait droit à un critère non contextuel de référentialité basé sur le principe de complétude pour les fonctions. Comme nous, il voit ce même principe à la source de l'introduction des noms primitifs. Comme nous, il constate que la présentation des lois et axiomes fut accompagnée d'une tentative de preuve de leur adéquation. Et enfin, comme nous, il renforce ces conclusions grâce à l'extraordinaire homogénéité de l'usage des lettres grecques majuscules dans ces trois contextes. Cependant, nous espérons avoir atteint deux objectifs importants qui lui ont échappé. D'une part, nous avons montré que toute lecture contextuelle du critère de référentialité condamne *nécessairement* le seul pas d'induction à la circularité, lorsque le problème de la *détermination* de la référence est pris en considération. D'autre part, nous avons vu que le pas d'induction ne pouvait être réalisé à travers l'intégration d'une *seule* étape de désaturation – auquel Frege se cantonna à tort –, et exigeait un développement aussi long que délicat. Le travail technique du second chapitre fut conduit dans cette perspective : reconstruire proprement et intégralement la sémantique basée sur le principe de complétude et, donc, inspirée des remarques de Frege. Nous y sommes parvenus en adoptant une présentation contemporaine qui transgressait les catégories ontologiques, et évitait l'usage peu intuitif des lettres grecques majuscules. Il nous faut désormais éclaircir cet usage, afin de constater s'il est à même de présenter cette sémantique sous un autre jour, cette fois compatible avec son ontologie. Heck s'est aussi risqué dans cette entreprise, et c'est à cet endroit précis que nous voulons prendre nos premières distances.

3.3.8 Sémantique fregéenne

3.3.8.1 Mise au point

Rappelons rapidement ce qui fut expliqué en section 2.4.1. Frege identifiait la pensée dont la vérité est assertée par '$\vdash a \to (b \to a)$' à celle qui est exprimée par le nom '$\smile\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b}\smile\ (\mathfrak{a} \to (\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}))$'. Relativement au sens des énoncés assertifs, les lettres latines jouent donc le rôle de lettres gothiques associées à des quantificateurs (invisibles) situés juste après le trait de jugement. Néanmoins, il précisa qu'il était "possible d'étendre la portée [des lettres latines] à plusieurs énoncés, de telle sorte que [celles-ci] puissent servir à réaliser des inférences que les lettres gothiques, avec leurs strictes démarcations de portées, ne pourraient conduire" (p. 31). Une remarque similaire fut formulée à l'occasion d'un examen du système de Peano :

> Mais du point de vue de l'inférence, la généralité qui s'étend au-delà du contenu d'un énoncé a une signification essentiellement différente de celle dont la portée constitue seulement une partie de l'énoncé. Ainsi, le fait que l'œil puisse discerner ces différents rôles dans différentes sortes de lettres, gothiques et latines, contribue à la clarté de manière essentielle. (Frege 1897b, pp. 232-233)

Frege n'a jamais proprement étayé cette idée, qui suggère néanmoins que, derrière les lettres latines, se cache un processus analogue à celui des assignations de Tarski. Nous avions promis d'examiner plus tard cette hypothèse, et sommes désormais en position d'honorer notre engagement. En effet, le deuxième rôle des lettres latines – qui ne se limite pas à la représentation d'une quantification déguisée – a trait à la justification sémantique des règles et axiomes du système, et se comprend à partir de celui des lettres grecques majuscules.

D'après la définition de '$\xi \to \zeta$', le nom '$\Gamma \to (\Delta \to \Gamma)$' réfère au Vrai quelles que soient les références de 'Δ' et 'Γ'. Ainsi, d'après la définition de '$\mathfrak{a}\,(\varphi(\mathfrak{a}))$', l'expression '$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a} \to (\mathfrak{b} \to \mathfrak{a})$' réfère au Vrai. Par conséquent, l'assertion '$\vdash a \to (b \to a)$' est correcte. Par ailleurs, supposons que nous voulions utiliser la règles pour les substitutions afin de remplacer, dans cet énoncé, la lettre 'b' par le marqueur '$b \to c$' :

$$\frac{\vdash a \to (b \to a)}{\vdash a \to ((b \to c) \to a)}$$

Nous savons que '$\Gamma \to (\Delta \to \Gamma)$' nomme le Vrai quelles que soient les références de 'Δ' et 'Γ' Donc, quelles que soient les références de '$\Gamma_1 \to \Gamma_2$' et 'Γ', alors '$\Gamma \to ((\Gamma_1 \to \Gamma_2) \to \Gamma)$' désigne le Vrai. A fortiori, quelles que soient les références de 'Γ_1', 'Γ_2' et 'Γ', alors ce nom réfère au Vrai. En réitérant le raisonnement effectué ci-dessus, nous pouvons conclure que '$\vdash a \to ((b \to c) \to a)$' est correct.

Notons que ces arguments n'exigent pas d'étendre la portée des lettres latines au-delà de l'énoncé. Au contraire, dans notre dernière exemple, la lettre b n'est pas tenue d'"indiquer" le même objet dans la prémisse et la conclusion. Bien que cette décision ne pose aucun problème, il n'existe aucune raison de choisir le même symbole dans les deux cas. Nous aurions librement pu employer n'importe quelle autre lettre. La justification des axiomes et de la règle pour les substitutions [213] ne sollicite donc aucunement ce que Frege nommait 'l'extension de la portée au-delà de l'énoncé'. En réalité, en utilisant cette formule, il avait en vue *toutes* les autres règles.

Supposons que deux théorèmes E_1 et E_2 intègrent exclusivement 'a' et 'b' comme lettres latines, et permettent conjointement de dériver un énoncé E_3 grâce au *modus ponens*. Quelles que soient les références des noms 'Δ' et 'Γ', en vertu de la définition de '$\xi \to \zeta$', $E_1[\Gamma/a, \Delta/b]$ et $E_2[\Gamma/a, \Delta/b]$ ne peuvent référer au Vrai sans que $E_3[\Gamma/a, \Delta/b]$ ne désigne aussi le Vrai. C'est en ce sens que la portée de 'a' et 'b' embrasse les trois énoncés, car la justification de la déduction en cause exige de remplacer ces lettres par les mêmes lettres grecques majuscules, dont les références ne doivent pas varier entre ces énoncés. Par ailleurs, puisque E_1 et E_2 sont des théorèmes, alors $E_1[\Gamma/a, \Delta/b]$ et $E_2[\Gamma/a, \Delta/b]$ nomment le Vrai quelles que soient les références choisies pour 'Δ' et 'Γ'. Donc, d'après ce que nous venons de voir, il en va de même pour $E_3[\Gamma/a, \Delta/b]$, ce qui établit que E_3 est aussi un théorème.

Le rôle des lettres latines relativement à la justification sémantique des règles et axiomes est donc entièrement subordonné à celui des lettres grecques majuscules, qui fut impliqué dans deux contextes supplémentaires. Pour définir sémantiquement les noms primitifs [214], Frege indiqua quelle était la référence du résultat de leur saturation par des lettres grecques majuscules en fonction de celles de ces lettres, en prenant bien soin de couvrir tous les cas possible. Par exemple, il lui fallut expliquer que '— Δ' référait au Vrai lorsque 'Δ' nommait le Vrai, au Faux sinon. Enfin, pour prouver la référentialité d'un nom complexe tel que '$\mathfrak{a}\,(\xi = \mathfrak{a})$', Frege montrait que la référence de '$\mathfrak{a}\,(\Delta = \mathfrak{a})$' pouvait toujours être déterminée en fonction de celle de 'Δ'. Dans ces deux situations, il fit ainsi droit au critère non-contextuel de référentialité :

> Un nom de type (0) est référentiel si et seulement si le résultat de sa saturation par 'Δ' est référentiel, quelle que soit la référence de 'Δ'.

Comme nous l'avons expliqué, ce critère se base sur le principe de complétude longuement discuté au début du second volume des *Grundgesetze*.

213. Comme nous l'avons vu en section 3.3.6.4, en toute généralité, celle-ci exige aussi la preuve que chaque nom possède une référence, qui était l'objet des §§29-31.

214. à l'exception de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'.

La présentation (incomplète) de la sémantique, y compris du rôle tenu par les lettres latines, s'appuyait donc sur des lettres employées "comme s'il s'agissait de noms qui réfèrent à quelque chose, sans statuer sur leurs références". Frege n'en dit pas davantage sur cette utilisation qui, à première vue, repose sur une quantification hybride impliquée dans la formule 'quelle que soit la référence de 'Δ'', laquelle mêle doublement le nom 'Δ' et l'objet Δ. Il nous incombe désormais de combler cette carences en développant le fonctionnement technique de ces lettres, *i.e.* en réalisant ce sur quoi Frege fit l'impasse.

Avant toute chose, nous voulons revenir quelques instants sur l'objection des avocats de la lecture antisémantique selon laquelle, puisque Frege écrivait volontiers '$\Delta \to \Delta$ est le Vrai pour tout objet Δ' au lieu de "$\Delta \to \Delta$' réfère au Vrai quelle que soit la référence de 'Δ'', contestent tout caractère sémantique aux passages en question. Nous avons déjà formulé une réponse, en expliquant qu'il employait *indifféremment* les deux tournures, dans des contextes totalement analogues – par exemple dans les introductions respectives de '$— \xi$' et de '$\xi = \zeta$'. Si, comme le croient Weiner et Ricketts, la première formulation reflétait le rejet du cadre sémantique de la seconde, Frege aurait pris grand soin d'éviter systématiquement cette dernière. Par ailleurs, les raccourcis qu'il utilisait parfois – et qui dissimulent le caractère sémantique de certains de ces énoncés – sont aujourd'hui encore largement empruntés par les logiciens. Donnons-nous l'interprétation $\mathscr{I} = \{\mathbb{N}, 0, \leq\}$ pour un langage du premier ordre $\mathscr{L} = \{c, R\}$, où 'c' est une constante d'individu et 'R' est un prédicat binaire. Pour expliquer que l'énoncé '$\forall x(0Rx)$' est vrai dans $\mathscr{I}$, nous allons rarement dire que toute assignation σ satisfait '$0Rx$' dans $\mathscr{I}$. Plus souvent, nous nous contenterons d'affirmer $0Rx$ pour tout *objet* x. Il suffit d'ouvrir n'importe quel ouvrage contemporain pour trouver ce type de tournures, derrière lesquelles chacun peut aisément deviner ce qui se tient en réalité.

D'une part, les membres du courant antisémantique n'expliquent pas pourquoi Frege aurait *aussi* employé des énoncés proprement sémantiques s'il s'était tenu à l'écart de ces considérations. D'autre part, comme nous l'avons vu, l'interprétation qu'ils proposent de ces passages, selon laquelle il aurait seulement tenté de communiquer le sens de certaines formules idéographiques, ne s'accordent absolument pas avec leur contenu. Au contraire, si nous faisons droit à ces raccourcis, il devient clair qu'il tentait de définir sémantiquement ses noms primitifs, de montrer que ces définitions octroyaient généralement une référence aux noms complexes, et que cette référence était le Vrai pour les énoncés axiomatiques de l'Idéographie. En somme, si nous concédons – le prix n'est pas élevé – que Frege ait pu être parfois aussi "imprécis" que nous le sommes nous-mêmes aujourd'hui, alors tous les passages en cause s'éclairent immédiatement. Si nous nous obstinons à vouloir lire à la lettre les énoncés "qui font usage et non mention des formules impliquées", alors ces passages demeurent implacablement incompréhensibles. Il semble que le dilemme ne soit pas difficile à résoudre.

Ceci étant dit, notons que nous avons rapproché une fois encore les lettres grecques majuscules fregéennes des variables tarskiennes. Pourtant, nous savons qu'à partir de 1881-1882, Frege se débarrassa totalement de la notion de contenu *indéterminé*. À ses yeux, dès lors que la référence des noms simples était fixée, alors celle des noms complexes pouvait être déterminée sans qu'aucune information supplémentaire ne soit requise. La référence du nom '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$' ne dépendait donc pas de celle de $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ selon telle ou telle *assignation*. Le deuxième nom était dénué de référence, tandis que la référence du premier se déduisait directement à partir de celles de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' et de '$\xi = \xi$'. Voilà l'idée qui permit à Frege de corriger la vision bancale de la quantification qui gangrenait la *Begriffsschrift*. Ce faisant, il compliqua néanmoins considérablement la morphologie de son langage.

En réalité, il s'agit d'une seule des *deux* causes de cette grammaire atypique. La seconde fut mentionnée lors de l'examen du travail de Landini, sans que nous ayons jamais identifié ce qui revenait à l'une et à l'autre. Il est temps de faire toute la lumière sur cette affaire, afin de comprendre la similarité qui, malgré des perspectives différentes, se maintient entre les lettres grecques majuscules et les variables tarskiennes. En somme, nous atteignons l'un des buts que nous nous étions fixés : comprendre les enjeux qui sous-tendent la morphologie originale de l'idéographie, ainsi que – et à travers – la sémantique qui la gouverne ; et examiner si cette morphologie et cette sémantique s'accordent ou rentrent en conflit avec les autres thèses défendues par Frege.

3.3.8.2 Deux causes *indépendantes* de la morphologie de l'idéographie

Pour former les noms de l'idéographie, nous pourrions autoriser les deux types de saturations partielles. D'une part, il s'agirait de permettre la saturation d'un nom à plusieurs arguments par un seul argument, par exemple celle de '$\xi = \zeta$' par un nom propre t relativement à son ξ ou ζ-argument. D'autre part, ce processus inclurait la saturation d'un nom de type $((T_1, \ldots, T_n))$ par un nom qui requiert *au moins* n arguments de types respectifs $T_1, \ldots, T_n$. Une telle saturation serait effectuée relativement à ces arguments, car le nom en question pourrait attendre des arguments supplémentaires qui n'y joueraient aucun rôle. Par exemple, nous pourrions saturer '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$' par '$\xi = \zeta$' en son ξ-argument afin d'engendrer '$\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \zeta)$'.

Ces deux procédés permettraient conjointement de se débarrasser *totalement* de la désaturation. Une fois que '$\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \zeta)$' est construit par saturation partielle, il suffit de le laisser saturer '$\frown_{\mathfrak{b}}\, \varphi(\mathfrak{b})$' pour obtenir '$\frown_{\mathfrak{b}}\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$'. Tandis que ce dernier nom exigeait la réalisation d'une étape de désaturation selon le procédé fregéen, il s'en dispense donc aisément selon celui-ci. Et le constat s'étend – nous le prouverions sans difficulté – à l'ensemble des noms du langage. Mais, dans la quasi-totalité des *Grundgesetze*, Frege prévoyait que chaque saturation engendre un nom *propre*, rejetant toute forme de saturation partielle. Seul le §30 fit isolément droit au premier procédé, tandis que le second se voyait encore rejeté. Pourtant, ses positions auraient dû motiver l'adoption générale des saturations partielles. Rappelons que[215] l'insaturation d'un nom de fonction reflète essentiellement celle de son *sens*. Un sens fonctionnel ne peut "subsister par lui-même" parce qu'il attend la donnée d'un autre sens pour que soit déterminé un objet. Or cette idée, située au cœur des conceptions sémantiques de Frege, ne s'oppose aucunement aux saturations partielles. Au contraire, elle en exige fermement l'intégration à la morphologie.

En effet, comme nous l'avons vu[216], il existe une importante tension entre la thèse selon laquelle un langage idéal reflète la *structure* du sens et la morphologie que Frege prévoyait pour ces langages. Selon cette thèse, le sens de '$\frown_{\mathfrak{b}}\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$' est ultimement constitué de ceux de '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$' et de '$\xi = \zeta$'. Pourtant, si nous suivons la grammaire idéographique, deux sens ne peuvent s'unir que pour former un sens propre, ce qui bloque la décomposition de '$\frown_{\mathfrak{b}}\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$'. La première étape ne pose aucun problème : le sens de ce nom résulte de l'union de celui de '$\frown_{\mathfrak{b}}\, \varphi(\mathfrak{b})$' avec celui de '$\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \zeta)$'. La difficulté intervient au moment de décomposer ce dernier sens, car le nom qui l'exprime fut construit par désaturation à partir de $\ulcorner\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = t)\urcorner$ – où t est un nom propre –, qui fut lui même construit grâce à la saturation de '$\frown_{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a})$' par '$\ulcorner\xi = t\urcorner$'. Il est clair que le sens de t ne joue aucun rôle dans celui '$\frown_{\mathfrak{b}}\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$', notamment parce que nous pouvons choisir n'importe quel nom t sans influer sur le résultat. Néanmoins, dans ce cadre, nous ne sommes pas en mesure de proposer une décomposition du sens de '$\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \zeta)$' qui nous conduise à ses constituants et, conséquemment, à ceux du sens de '$\frown_{\mathfrak{b}}\frown_{\mathfrak{a}}\, (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$'.

215. Voir section 3.2.3.5.
216. en section 3.2.3.4.

Le moyen de remédier à ce défaut ne fait pas mystère. Il suffit d'admettre que le sens de '$\frown^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} = \zeta)$' résulte de la saturation partielle de celui de '$\frown^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$' par celui de '$\xi = \zeta$', *i.e.* que ces deux derniers sens s'unissent en un sens *insaturé*. Et cette idée est totalement compatible avec la notion d'insaturation telle qu'elle se déploie dans la pensée fregéenne. Le sens de '$\frown^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$' attend, pour déterminer un objet, un moyen de déterminer un objet relativement à un objet. Le sens '$\xi = \zeta$' détermine un objet relativement à deux objets, l'un associé à la ξ-place, et l'autre à la ζ-place. Pour n'importe quel objet associé à la ζ-place, ce sens permet donc de conduire à un objet relativement à un autre – lui-même associé à la ξ-place. À travers les sens de '$\frown^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$' et de '$\xi = \zeta$', nous disposons donc d'un moyen de déterminer un objet pour n'importe quel objet associé à la 'ζ'-place de '$\xi = \zeta$'. Autrement dit, l'union de ces sens est un mode de détermination d'un objet relativement à l'argument associé à cette 'ζ'-place, *i.e.* un sens de type (0). Il s'agit donc évidemment de celui que nous voulons conférer à '$\frown^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} = \zeta)$'.

Pour asseoir l'idée que les pensées sont des contenus articulés dont l'expression dans une langue idéale respecte la structure, Frege aurait impérativement dû admettre les saturations partielles. Au contraire, il tira une conséquence erronée du fait qu'un sens fonctionnel ne pouvait "subsister par lui-même" qui le conduisit à interdire généralement ces saturations, trahissant ainsi sa propre conception des pensées. Nous pouvons donc, conformément à ses vues, rapprocher la morphologie de l'idéographie des grammaires contemporaines en renonçant aux étapes de désaturation. Néanmoins, il n'en résulterait pas pour autant une identification entre les deux cadres, car ces derniers sont aussi distingués par la manière dont ils rendent compte de la quantification. Pour Frege, le contenu de '$\frown^{\mathfrak{a}} — \mathfrak{a}$' n'est pas déterminé à partir de celui que prend '$— \mathfrak{a}$' selon toute assignation. Il est composé à partir de ceux de '$\frown^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$' et de '$— \xi$'. La différence fondamentale entre la morphologie induite par les positions sémantiques de Frege et celle dans laquelle nous évoluons traditionnellement a donc moins trait aux étapes de désaturation qu'à l'intégration de noms de fonctions de niveaux supérieurs [217]. Ces derniers sont seuls à même d'exposer un sens (fixe) d'un nom complexe constitué des sens (tout aussi fixes) des noms simples qui y figurent. Mais ce point n'interdit aucunement de mobiliser un procédé similaire à celui des assignations pour déterminer la référence – et ainsi fixer le sens – de ces noms de fonctions.

Reprenons notre exemple : le sens de '$\frown^{\mathfrak{a}} — \mathfrak{a}$' n'est pas déterminé en fonction du sens que diverses assignations attribuent à celui de '$— \mathfrak{a}$', il est constitué des sens de '$\frown^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$' et de '$— \xi$'. Or ce dernier consiste en une manière de déterminer un objet relativement à un objet, il est donc fixé à travers un moyen de déterminer la valeur prise par '$— \Delta$' relativement à

217. Ces considérations nous ramènent à la critique que nous avons développée contre la reconstruction de Landini. En section 2.3.4.6, nous avons expliqué que celle-ci ne permettait aucunement de dévoiler la structure fondamentale du sens telle que Frege la concevait, car elle s'appuyait sur une morphologie selon laquelle les noms étaient formés sur la base d'expressions dénuées de sens. En effet, Landini ne se contente pas de rejeter le processus de désaturation, il construit les noms du langage comme si la quantification était traitée à la manière de Tarski, formant notamment '$\frown^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' à partir de '$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$'. Nous avons dit que, pour s'écarter de la grammaire que Frege suggéra lui-même, il fallait fournir une raison convaincante de procéder ainsi. Nous tenons désormais une telle raison : les compatibilités que Frege reconnaissait entre les différents types doivent être étendues pour s'accorder avec sa propre notion d'insaturation, sur laquelle se base sa conception des pensées comme contenus structurés.

Nous voulons néanmoins faire deux remarques à ce sujet. D'une part, une telle extension ne conduit pas à la grammaire développée par Landini, qui identifie à tort les lettres du second et quatrième groupes – notamment gothiques et latines. D'autre part, si elle est indispensable pour développer de manière cohérente la thèse fregéenne selon laquelle les sens sont articulés, rien n'assure qu'elle soit *suffisante* à cette tâche. En effet, nous ne savons pas, par exemple, comment rendre compte du fait qu'un même sens soit *doublement* intégré au sein d'une pensée – notamment celui de '$\frown^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$' dans la pensée exprimée par '$\frown^{\mathfrak{b}}\frown^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$'. Nous n'aborderons ni cette question, ni celles qui s'en rapprochent, et renvoyons le lecteur qui souhaiterait s'y intéresser à l'article de Textor (2009). Notre objectif ne consiste pas à réparer coûte que coûte la notion fregéenne de pensée structurée. Nous disons seulement que cette notion *exige* d'admettre les saturations partielles, lesquelles s'accordent tout à fait aux autres vues de Frege, en dépit de la manière dont celui-ci présenta (sommairement) sa propre morphologie.

n'importe quelle interprétation $\mathscr{I}$ qui attribue une référence à 'Δ'. C'est ainsi qu'il convient de traduire la formule 'quelle que soit la référence de 'Δ'' qui accompagne l'usage sémantique des lettres grecques majuscules. Toute intuitive soit-elle, cette tournure présente quelque chose de maladroit. La référence de 'Δ' n'étant autre que l'objet Δ, la quantification en jeu semble dénuée d'une quelconque composante sémantique. En réalité, si nous parlons de 'la référence de 'Δ'' au lieu de 'l'objet Δ', c'est parce que nous quantifions sur la totalité des interprétations qui octroient une référence à ce nom, et non sur la totalité des objets. Rappelons comment Frege introduisit l'égalité :

$$\text{`}\Gamma = \Delta\text{'}$$

> réfère au Vrai si Γ est le même que Δ ; dans tous les autres cas, il réfère au Faux. (Frege 1893, p. 11)

Voici la formulation rigoureuse de cette stipulation :

> Ajoutons provisoirement les noms 'Δ' et 'Γ' à l'idéographie. Quelle que soit l'interprétation $\mathscr{I}$ qui octroie une référence à ces noms, alors la référence de '$\Gamma = \Delta$' dans $\mathscr{I}$ est le Vrai si celle de 'Γ' dans $\mathscr{I}$ est identique à celle de 'Δ' dans $\mathscr{I}$, le Faux sinon.

Ou, plus formellement :

$$\begin{array}{lrcl} \forall \mathscr{I} : & \mathbf{R}(\text{`}\Gamma = \Delta\text{'}, \mathscr{I}) = \mathbf{V} & \leftrightarrow & \mathbf{R}(\text{`}\Gamma\text{'}, \mathscr{I}) = \mathbf{R}(\text{`}\Delta\text{'}, \mathscr{I}) \\ & \mathbf{R}(\text{`}\Gamma = \Delta\text{'}, \mathscr{I}) = \mathbf{F} & \leftrightarrow & \mathbf{R}(\text{`}\Gamma\text{'}, \mathscr{I}) \neq \mathbf{R}(\text{`}\Delta\text{'}, \mathscr{I}) \end{array}$$

Pour Frege, le sens de '$\xi = \zeta$' n'est autre qu'un mode de détermination d'une valeur relativement à deux arguments. L'objectif consiste donc purement et simplement à indiquer un moyen de déterminer la valeur du nom '$\Gamma = \Delta$' quelle que soit l'interprétation choisie pour les noms 'Γ' et 'Δ'. Voici exactement ce que la stipulation ci-dessus accomplit, à l'instar de toutes les stipulations que Frege attachait aux autres noms primitifs de l'Idéographie – à l'exception de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'.

Nous comprenons enfin comment il parvint à rendre compte de la quantification conformément à sa notion de sens. Il impliqua un procédé techniquement assez proche des assignations tarskiennes, mais qui reste sous-tendu par l'idée que le sens d'un nom est constitué des sens déterminés des composants de ce nom. En premier lieu, il s'agit d'ajouter des noms simples de chaque type – que, suivant Heck, nous nommerons des 'noms auxiliaires' – à l'aide des lettres grecques majuscules. En nous appuyant sur toutes les interprétations possibles de ces noms, nous parvenons (1) à un moyen de déterminer la référence de n'importe quel nom propre de l'*idéographie* qui ne dépend pas de l'interprétation choisie pour les noms auxiliaires ; et (2) à un moyen de déterminer la référence du résultat de la saturation de n'importe quel nom de fonction de l'idéographie par un nom auxiliaire de type adapté pour toute interprétation, de telle sorte que le résultat soit le même pour toutes les interprétations qui octroient la même référence à ce nom.

Ainsi, en impliquant les noms auxiliaires "comme s'il s'agissait de noms qui réfèrent à quelque chose, sans statuer sur leurs références", *i.e.* en mobilisant toutes les interprétations possibles pour ces noms, Frege donna jour à une stratégie qui permet de fixer une fois pour toutes la référence des noms d'un langage idéal et de démontrer l'adéquation d'un système pour ce langage. Dans un instant, nous allons fournir les détails requis dans le cas de l'Idéographie, sans tenir compte du nom pour les parcours-de-valeurs et des énoncés axiomatiques qui l'intègrent [218]. Mais avant cela, nous voulons faire quelques remarques d'importance.

218. car, comme nous l'avons déjà dit, Frege se décida pour une autre stratégie concernant les parcours-de-valeurs.

Nous savons que le nom 'élucidation' était lié au *rôle* et non au *contenu* des passages en question. Pour Frege, les élucidations étaient vouées à l'élaboration et l'établissement du bon fonctionnement d'un système idéal dans la langue naturelle, tandis que le terme 'définition' se voyait limité à la donnée de nouveaux noms simples d'un langage idéal comme synonymes de noms complexes de la même langue, dont les sens étaient déjà connus. À ses yeux, la donnée d'une définition était donc interne à l'exploitation d'une langue parfaite, postérieure à l'élaboration de celle-ci. Au contraire, les stipulations attachées aux noms primitifs, rédigées en allemand, constituaient une part importante du travail élucidatoire, puisqu'elles permettaient d'attribuer un contenu à une langue idéale à partir de la langue naturelle. Cependant, en guise d'introduction au principe de complétude, Frege précisa :

> La définition d'un concept [...] doit être complète. Pour chaque objet, il doit être déterminé sans ambiguïté s'il tombe ou non sous le concept [...]. Ainsi, il ne doit pas exister d'objets pour lesquels, après la définition, il demeure incertain qu'ils tombent ou non sous le concept, même s'il n'est pas toujours possible, pour nous autres humains, avec notre savoir lacunaire, de trancher la question. Métaphoriquement, nous pouvons nous exprimer ainsi : un concept doit avoir des limites nettes. (Frege 1903a, p. 69)

En section 3.2.3.7, nous avons expliqué pourquoi il employa le terme 'définition' au moment de présenter un principe qu'il prit soin de respecter pour les *élucidations* attachées aux sens des noms primitifs qui, selon ses propres dires, n'étaient pas des définitions. Nous avons dit qu'il s'intéressait alors aux travaux de ses contemporains qui, contrairement à lui, n'évoluaient pas dans une langue idéale. À cette occasion, il étendit donc la portée de ce terme pour qualifier *toute* stipulation permettant de fixer le sens d'un nom. Car c'est bien ce à quoi étaient aussi vouées celles qu'il liait aux noms primitifs de l'idéographie.

Il est clair qu'il n'aurait vu aucun intérêt à formuler techniquement ces stipulations, ainsi que nous nous y sommes appliqués pour l'égalité. Sans aucun doute, le double usage – dans le métalangage et le langage-objet – du symbole d'égalité lui serait apparu comme circulaire et stérile. C'est précisément *parce qu'*il ne disposait pas encore d'une langue idéale qu'il était contraint de formuler ses clauses en allemand. En revanche, supposons qu'une fois l'Idéographie proprement façonnée, il ait étendu ce système pour développer une théorie sémantique dans un cadre idéal. Alors les clauses permettant de fixer le sens des termes primitifs d'un *nouveau* langage-objet auraient cette fois présenté un visage totalement formel. En outre, elles n'auraient plus compté parmi les élucidations, n'étant plus partie du travail essentiel à l'élaboration d'un système idéal, mais prenant part au développement d'une science dans un tel système. Frege leur aurait-il octroyé le titre de définitions, ou aurait-il gardé les mêmes restrictions pour ce terme ? La question nous est totalement indifférente, car l'enjeu est purement terminologique. Une seule chose nous importe : les clauses attachées à ses noms primitifs étaient vouées à en fixer le sens, car elles étaient destinées à indiquer un moyen de déterminer une valeur en chaque argument – donc, dans le cas d'un concept, de déterminer si chaque argument tombait ou non sous ce concept – même s'il n'était pas toujours possible d'exploiter ce moyen. La méthode (sémantique) consistait à indiquer la référence du résultat de la saturation de ces noms par des noms auxiliaires pour toute interprétation attachant une référence à ces derniers, autrement (et maladroitement) dit à utiliser les noms auxiliaires "comme s'il s'agissait de noms qui réfèrent à quelque chose, sans statuer sur leurs références". Dans les *Grundgesetze*, cette méthode était utilisée à des fins élucidatoires : fixer en allemand le sens des noms primitifs afin de doter l'idéographie de contenu. Au sein d'une théorie sémantique développée dans un système idéal, elle aurait servi d'autres objectifs. Dans les deux cas, elle consistait à fixer le sens des noms primitifs d'un langage par un biais sémantique – qu'elle fût rigoureusement déployée dans un système idéal ou prise dans

les imperfections de la langue naturelle. Or voilà précisément ce que nous nommons aujourd'hui des '*définitions sémantiques*'. Nous pouvons donc légitimement employer cette formule, tant que nous avons conscience d'élargir le sens que Frege prêtait lui-même au terme 'définition' afin de retrouver celui que nous lui conférons désormais en logique.

Par ailleurs, comme nous l'avons vu, cette stratégie exige de quantifier sur des interprétations. Elle semble donc intégrer une quantification restreinte à certains objets. Nous avons déjà soulevé ce problème dans le cadre de la géométrie. Une fois l'idéographie enrichie des noms primitifs d'une langue pour une science particulière – qu'il s'agisse de la sémantique ou de la géométrie –, Frege aurait dû écrire les axiomes de cette science, et ainsi quantifier sur ses objets spécifiques. À proprement parler, ce point précis ne soulève aucune difficulté. Il lui aurait suffit d'utiliser, par exemple, les concepts de *droites* ou d'*interprétations* afin d'y limiter la portée de ses lois :

$$\vdash^{\mathfrak{a}} \ldots \quad \mathbf{Dr}(\mathfrak{a}) \qquad\qquad \vdash^{\mathfrak{a}} \ldots \quad \mathbf{Int}(\mathfrak{a})$$

En revanche, un problème plus sérieux intervient vis-à-vis du principe de complétude. Comment aurait-il spécifié la valeur des concepts inhérents aux domaines en question pour des arguments qui leur sont extérieurs ? Par exemple, comment aurait-il étendu le concept de *parallélisme* au-delà des droites – ou des plans, etc. –, et celui de *référence* au-delà des noms d'un langage-objet ? Frege n'en a jamais rien dit mais, au vu de la manière dont il traita le nom '$\backslash\xi$', il est probable qu'il ait attribué aux fonctions en question la valeur la plus simple possible dans les cas non pertinents. Quoi qu'il en soit, cette difficulté concerne la totalité des sciences extra-logiques, et n'est pas spécifique à la sémantique [219].

Venons-en à notre seconde remarque. Heck fut le premier à envisager les expressions intégrant les lettres grecques majuscules comme des noms ajoutés provisoirement à l'idéographie pour en fixer la sémantique. Néanmoins, notre lecture se démarque de la sienne à deux niveaux importants. D'une part, plutôt que de considérer différentes interprétations pour un même langage enrichi (de noms auxiliaires), Heck sollicite plusieurs langages enrichis dont chacun possède une seule interprétation. Or, non seulement notre méthode permet de limiter la cardinalité du langage impliqué, mais de plus (nous croyons qu')elle rend meilleur compte de la manière dont Frege présentait lui-même les lettres grecques majuscules. La mobilisation de toutes les interprétations possibles pour ces noms s'accorde pleinement avec l'idée qu'ils sont traitées "comme des noms qui réfèrent à quelque chose, sans statuer sur leurs références". Au contraire, cette formulation ne suggère aucunement la mise en jeu d'une multitude d'extensions de l'idéographie sur laquelle Heck fonde sa méthode.

D'autre part, et surtout, la sémantique qu'il construit *n'est pas* celle que Frege développa informellement dans les *Grundgesetze*. Heck utilise (adroitement) le fait que tous les noms primitifs de l'idéographie – excepté '$\grave{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' – réfèrent à des concepts. Par exemple, il traduit la définition sémantique du nom '$\xi = \zeta$' de la façon suivante [220] :

$$\forall \mathscr{I} \quad : \quad \mathbf{Vr}(\text{`}\Gamma = \Delta\text{'}, \mathscr{I}) \leftrightarrow \mathbf{R}(\text{`}\Gamma\text{'}, \mathscr{I}) = \mathbf{R}(\text{`}\Delta\text{'}, \mathscr{I})$$

Ainsi, il s'appuie sur l'équivalence entre les énoncés '$\mathbf{R}(\ulcorner t = t' \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{V}$' et '$\mathbf{Vr}(\ulcorner t = t' \urcorner)$' pour abréger la clause de Frege et, à partir de sa version, développe une théorie qui permet effectivement de déterminer la référence de tous les noms de l'idéographie – en se limitant au

219. Nous en avons dit davantage en section 3.2.4.2.

220. Nous modifions légèrement sa formulation, pour ne pas anticiper sur le contenu de notre prochaine section. Ces changements sont sans incidence sur notre présent propos.

premier ordre et, comme nous, en excluant les parcours-de-valeurs. Néanmoins, sa stratégie est inadéquate dès lors que la définition d'un nom primitif implique des objets différents des valeurs de vérité. Au contraire, celle de Frege ne s'appuie pas sur une telle hypothèse. Si celui-ci choisit d'emprunter un autre chemin pour les parcours-de-valeurs, c'est seulement parce qu'il voulait *s'assurer* de leur existence, et non parce que sa sémantique se cantonnait d'une quelconque façon aux concepts. Comme nous l'avons dit, la clause attachée au symbole d'égalité était en réalité la suivante :

$$\begin{array}{lll} \forall \mathscr{I}: & \mathbf{R}(\text{`}\Gamma = \Delta\text{'}, \mathscr{I}) = \mathbf{V} & \leftrightarrow \quad \mathbf{R}(\text{`}\Gamma\text{'}, \mathscr{I}) = \mathbf{R}(\text{`}\Delta\text{'}, \mathscr{I}) \\ & \mathbf{R}(\text{`}\Gamma = \Delta\text{'}, \mathscr{I}) = \mathbf{F} & \leftrightarrow \quad \mathbf{R}(\text{`}\Gamma\text{'}, \mathscr{I}) \neq \mathbf{R}(\text{`}\Delta\text{'}, \mathscr{I}) \end{array}$$

Par conséquent, la sémantique fregéenne ne tient pas compte du fait que les objets impliqués dans cette stipulation sont les valeurs de vérité. Elle s'adapte aussi bien aux autres circonstances, dans lesquelles la traduction de Heck ne survit pas. Après avoir exposé sa version, celui-ci expliqua :

> Évidemment, il existe plusieurs variations possibles sur le même thème. Certaines d'entre elles sont peut-être d'un intérêt supérieur à [la mienne]. Mon objectif était simplement de montrer que des théories de la vérité qui prennent au sérieux les doctrines sémantiques de Frege peuvent être façonnées. Comment formuler au mieux une telle théorie, relativement à différents buts, est une question que je ne traiterai pas ici. (Heck 2012, p. 279)

Parce qu'il fut le premier à concevoir les lettres grecques majuscules comme des noms extérieurs à l'idéographie jouant néanmoins un rôle central dans la sémantique de ce langage, Heck a indiscutablement su montrer la voie d'une "théorie de la vérité qui prend au sérieux les doctrines sémantiques de Frege". Néanmoins, il n'a pas su proposer fidèlement une telle théorie. En empruntant divers raccourcis, il trahit en réalité certains aspects fondamentaux de ces doctrines et, sans y prendre garde, galvauda les véritables définitions sémantiques de Frege. Nous espérons qu'en rectifiant ces défauts, notre prochaine section contribuera modestement à améliorer les remarquables résultats auxquels il est parvenu.

Désormais, nous connaissons les deux éléments à l'origine de l'écart entre la grammaire de Frege et celle de nos langages contemporains. Le premier est un principe illégitime au regard de ses propres thèses, selon lequel deux sens ne peuvent s'unir qu'en un sens propre. Il exigea la prise en compte de la désaturation dans les étapes de formation des noms. Au contraire, le second se tient au cœur de sa notion de sens, puisqu'il s'agit du fait qu'un sens complexe est articulé à partir de sens simples. Dans ce cadre, le contenu d'un quelconque constituant d'un nom complexe ne peut souffrir aucune indétermination. Plus exactement, ce constituant ne peut attendre la donnée d'une assignation – ou de quoi que ce soit d'autre – pour acquérir un contenu. Frege choisit donc de transporter l'indétermination, non pas dans les lettres gothiques attachées à la quantification, mais dans les lettres grecques majuscules à l'aide desquelles la référence des noms de fonctions se voyait déterminée. Et cette indétermination ne prit pas la forme d'assignations qui font varier le contenu d'un constituant d'un nom complexe, mais d'interprétations qui permettent de fixer une fois pour toutes celui des noms de fonctions conformément au principe de complétude [221].

Seul le deuxième élément est co-substantiel des positions sémantiques de Frege. Si nous voulons respecter son principe selon lequel deux sens ne s'unissent que dans un sens propre, alors nous devons néanmoins tenir compte du premier. Si nous souhaitons réconcilier ses résultats avec sa propre notion de sens – qu'il trahit à l'occasion de ce principe –, alors nous devons l'ignorer. En réalité, l'établissement de la sémantique nous guidera dans cette décision. Il nous permettra

221. Ce point ne signe donc aucunement le retour des *contenus* indéterminés que Frege chassa peu de temps après la rédaction de la *Begriffsschrift*, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre (sections 1.4.9, 1.4.10 et 1.5.4).

de comprendre et de rectifier les erreurs (de Frege) qui nous ont placés face à cette alternative, en indiquant une voie pour la contourner.

3.3.8.3 Présentation fregéenne de la sémantique fregéenne

Construisons $\mathscr{L}_{\text{aux}}$ le langage de l'idéographie enrichi des noms auxiliaires. À cette fin, étoffons l'alphabet des lettres 'Δ_i', 'Φ_i' et 'Ω_i' pour $i \in \mathbb{N}$ [222]. Reproduisons l'édification du langage réalisée dans le deuxième chapitre [223] en ajoutant aux étiquettes ces lettres grecques majuscules. Les noms de $\mathscr{L}_{\text{aux}}$ qui n'appartiennent pas à l'idéographie sont donc exactement ceux qui intègrent une lettre grecque majuscule. Nous les appelons 'les noms auxiliaires'.

Notre objectif consiste à formuler les schémas d'axiomes qui régissent l'usage du prédicat '$\mathbf{R}(\xi, \zeta)$', autrement dit qui expriment les lois liées à la fonction qui associe à un nom propre t^0 et à une interprétation $\mathscr{I}$ la référence t^0 dans $\mathscr{I}$. Ainsi, nous utiliserons la lettre '$\mathscr{I}$' (potentiellement indexée par les entiers naturels) comme métavariable parcourant la totalité des interprétations des noms auxiliaires atomiques – ayant préalablement [224] expliqué comment une telle métavariable devait être conçue dans le cadre fregéen – et l'expression 't^0' (potentiellement indexée par les entiers naturels) comme signe schématique pour les nom propres de $\mathscr{L}_{\text{aux}}$. Par ailleurs, nous emploierons '$t^{(0)}(\xi)$' – respectivement '$t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$' ; '$t_\psi^{(((0)))}(\mu_\xi(\psi(\xi)))$' – (potentiellement indexé par les entiers naturels) comme signe schématique pour les noms de type (0) – respectivement ((0)), (((0))) – de $\mathscr{L}_{\text{aux}}$. Ainsi, nous pourrons par exemple désigner par $\ulcorner \mathfrak{a} \smile (t^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner$ le résultat de la saturation de '$\mathfrak{a} \smile (\varphi(\mathfrak{a}))$' par un nom $t^{(0)}(\xi)$ – plutôt que par l'expression peu intuitive '$\mathbf{Sat}$('$\mathfrak{a} \smile (\varphi(\mathfrak{a}))$', $t^{(0)}(\xi)$)'. Enfin, nous dirons que $\mathscr{I}_1 \underset{t}{\approx} \mathscr{I}_2$ lorsque deux interprétations $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ attribuent la même référence à tous les noms simples auxiliaires qui figurent dans un nom t.

La sémantique de Frege réunit les axiomes suivants [225] :

$\mathbf{St}$'$\text{—}\,\xi$' :	$\forall \mathscr{I}$,	$\mathbf{R}(\ulcorner \text{—}\, t^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{R}(t^0, \mathscr{I}) = \mathbf{V}$
		$\mathbf{R}(\ulcorner \text{—}\, t^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{R}(t^0, \mathscr{I}) \neq \mathbf{V}$
$\mathbf{St}$'$\top\,\xi$' :	$\forall \mathscr{I}$,	$\mathbf{R}(\ulcorner \top\, t^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{R}(t^0, \mathscr{I}) \neq \mathbf{V}$
		$\mathbf{R}(\ulcorner \top\, t^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{R}(t^0, \mathscr{I}) = \mathbf{V}$
$\mathbf{St}$'$\xi = \zeta$' :	$\forall \mathscr{I}$,	$\mathbf{R}(\ulcorner t_1^0 = t_2^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{R}(t_1^0, \mathscr{I}) = \mathbf{R}(t_2^0, \mathscr{I})$
		$\mathbf{R}(\ulcorner t_1^0 = t_2^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{R}(t_1^0, \mathscr{I}) \neq \mathbf{R}(t_2^0, \mathscr{I})$
$\mathbf{St}$'$\xi \to \zeta$' :	$\forall \mathscr{I}$,	$\mathbf{R}(\ulcorner t_1^0 \to t_2^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{V} \leftrightarrow \Big(\mathbf{R}(t_1^0, \mathscr{I}) = \mathbf{F} \vee \mathbf{R}(t_2^0, \mathscr{I}) = \mathbf{V}\Big)$
		$\mathbf{R}(\ulcorner t_1^0 \to t_2^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{F} \leftrightarrow \Big(\mathbf{R}(t_1^0, \mathscr{I}) = \mathbf{V} \wedge \mathbf{R}(t_2^0, \mathscr{I}) = \mathbf{F}\Big)$

222. pour généraliser la sémantique à un langage intégrant tous les noms de niveaux supérieurs, il suffirait par exemple d'utiliser 'Δ_i^T' comme lettres schématiques de type T.
223. en section 2.3.3.6.
224. dans la dernière section.
225. Nous appelons '$\mathbf{St}_t$' l'axiome lié à tout nom primitif t de l'idéographie, et nous employons le symbole contemporain pour l'implication.

$\mathbf{St}_{`\smile\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))'}$: Si 'Δ_i' ne figure pas dans $t^{(0)}(\xi)$, alors $\forall\mathscr{I}_1$:

$$\mathbf{R}(\ulcorner\smile\mathfrak{a}\ (t^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{V} \quad\leftrightarrow\quad \forall\mathscr{I}_2 \underset{t^{(0)}}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner t^{(0)}(\Delta_i)\urcorner, \mathscr{I}_2) = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{R}(\ulcorner\smile\mathfrak{a}\ (t^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{F} \quad\leftrightarrow\quad \exists\mathscr{I}_2 \underset{t^{(0)}}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner t^{(0)}(\Delta_i)\urcorner, \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{V}$$

$\mathbf{St}_{`\smile\mathfrak{f}\ (\mu_\xi(\mathfrak{f}(\xi)))'}$: Si 'Φ_i' ne figure pas dans $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$, alors $\forall\mathscr{I}_1$:

$$\mathbf{R}(\ulcorner\smile\mathfrak{f}\ (t_\beta^{((0))}(\mathfrak{f}(\beta)))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{V} \quad\leftrightarrow\quad \forall\mathscr{I}_2 \underset{t^{((0))}}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner t_\beta^{((0))}(\Phi_i(\beta))\urcorner, \mathscr{I}_2) = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{R}(\ulcorner\smile\mathfrak{f}\ (t_\beta^{((0))}(\mathfrak{f}(\beta)))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{F} \quad\leftrightarrow\quad \exists\mathscr{I}_2 \underset{t^{((0))}}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner t_\beta^{((0))}(\Phi_i(\beta))\urcorner, \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{V}$$

$\mathbf{St}_{`\smile\mathfrak{M}\ (\sigma_\varphi(\mathfrak{M}_\beta(\varphi(\beta))))'}$: Si 'Ω_i' ne figure pas dans $t_\psi^{(((0)))}(\mu_\xi(\psi(\xi)))$, alors $\forall\mathscr{I}_1$:

$$\mathbf{R}(\ulcorner\smile\mathfrak{M}\ (t_\psi^{(((0)))}(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{V} \quad\leftrightarrow\quad \forall\mathscr{I}_2 \underset{t^{(((0)))}}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner t_\psi^{(((0)))}(\Omega_\beta(\psi(\beta)))\urcorner, \mathscr{I}_2) = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{R}(\ulcorner\smile\mathfrak{M}\ (t_\psi^{(((0)))}(\mathfrak{M}_\beta(\psi(\beta))))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{F} \quad\leftrightarrow\quad \exists\mathscr{I}_2 \underset{t^{(((0)))}}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner t_\psi^{(((0)))}(\Omega_\beta(\psi(\beta)))\urcorner, \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{V}$$

Frege expliqua que "la définition d'[une fonction] devait être complète. Pour chaque objet, [sa valeur en la fonction] devait être déterminée sans ambiguïté". Cette formulation présente un premier défaut, car ce n'est pas la fonction elle-même qui est définie, mais un nom pour la désigner. En guise de correction, nous avons dit que, pour chaque objet, la valeur en la *référence* d'un nom de fonction devait être déterminée – ou, au moins, qu'un moyen de déterminer cette valeur devait être fournie. Mais cette rectification hérite un autre problème des explications de Frege. En parlant de 'la valeur de *la fonction*' – ou de 'la valeur de *la référence* d'un nom de fonction –, Frege s'exprime – nous nous exprimons – comme si l'objectif consistait à déduire des valeurs pour une fonction qui serait *déjà* déterminée. En réalité, nous voulons justement déterminer cette fonction, et cela est effectué *via* la détermination d'une valeur pour chaque argument. Car, selon Frege, une fonction n'est rien d'autre qu'un *lien* entre des objets – les valeurs – et un certain type d'entités – les arguments. Par conséquent, à ses yeux, nous disposons d'un moyen de déterminer une fonction – nous fixons le sens d'un nom de fonction – dès lors que nous disposons d'un moyen de déterminer une valeur relativement à chaque entité d'un certain type.

Nous en avons dit davantage à ce sujet en section 3.2.3.5. Il nous importe ici de comprendre comment il ancra techniquement ce principe de complétude à travers l'usage des noms auxiliaires. Nous disposons d'un moyen de déterminer la référence d'un nom $t^{(0)}(\xi)$ dès lors que nous disposons d'un moyen de déterminer une valeur en chaque objet. Or, pour tout objet, il existe toujours une interprétation qui attribue cet objet comme référence à 'Δ'. Ainsi, nous disposons d'un moyen de déterminer une valeur en chaque objet dès lors que nous pouvons (en principe) déterminer la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ – avec 'Δ' qui ne figure pas dans $t^{(0)}(\xi)$ – quelle que soit l'interprétation considérée. Voilà qui explique les définitions sémantiques par lesquelles Frege introduisit ses noms primitifs, notamment :

$$\forall\mathscr{I} : \quad \mathbf{R}(`\text{—}\ \Delta', \mathscr{I}) = \mathbf{V} \quad\leftrightarrow\quad \mathbf{R}(`\Delta', \mathscr{I}) = \mathbf{V}$$
$$\mathbf{R}(`\text{—}\ \Delta', \mathscr{I}) = \mathbf{F} \quad\leftrightarrow\quad \mathbf{R}(`\Delta', \mathscr{I}) \neq \mathbf{V}$$

Cette stipulation suffit à fixer le sens et la référence de '— ξ'. Il faut ensuite l'exploiter pour déterminer la référence de $\ulcorner\text{—}\ t^0\urcorner$ lorsque t^0 est un quelconque nom propre de l'idéographie enrichie – donc potentiellement différent de 'Δ'. Supposons que t^0 réfère à un objet x dans $\mathscr{I}_1$. Il existe une interprétation $\mathscr{I}_2$ qui attribue x comme référence à 'Δ'. D'après notre définition, nous savons que $\mathbf{R}(`\text{—}\ \Delta', \mathscr{I}_2)$ est le Vrai si $\mathbf{R}(`\Delta', \mathscr{I}_2)$ est le Vrai, le Faux sinon. Nous pouvons donc

en conclure que $\mathbf{R}(\ulcorner — t^0 \urcorner, \mathscr{I}_1)$ est le Vrai si $\mathbf{R}(t, \mathscr{I}_1)$ est le Vrai, le Faux sinon. En somme :

$$\begin{array}{lll} \forall \mathscr{I} : & \mathbf{R}(\ulcorner — t^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{V} & \leftrightarrow \quad \mathbf{R}(t^0, \mathscr{I}) = \mathbf{V} \\ & \mathbf{R}(\ulcorner — t^0 \urcorner, \mathscr{I}) = \mathbf{F} & \leftrightarrow \quad \mathbf{R}(t^0, \mathscr{I}) \neq \mathbf{V} \end{array}$$

En choisissant $t^0 =$ 'Δ', nous retrouvons notre clause initiale. Ce schéma de formules permet donc simultanément de fournir la définition sémantique de '$\xi = \zeta$' et d'en exploiter le contenu.

Considérons à présent le cas des noms de fonctions de niveaux supérieurs, par exemple '$\mathfrak{a}\!\!\smile\ \varphi(\mathfrak{a})$'. Suivant le même raisonnement, l'objectif consiste à attribuer une référence à '$\mathfrak{a}\!\!\smile\ \Phi(\mathfrak{a})$' dans toute interprétation $\mathscr{I}_1$. Cette référence doit donc dépendre exclusivement de celle de '$\Phi(\xi)$' dans $\mathscr{I}_1$, autrement dit de sa valeur dans $\mathscr{I}_1$ en chaque objet. Or, pour chaque objet, il existe une interprétation $\mathscr{I}_2$ qui attribue cet objet comme référence à 'Δ' et qui confère la même référence que $\mathscr{I}_1$ à '$\Phi(\xi)$'. Ainsi, la référence de '$\mathfrak{a}\!\!\smile\ \Phi(\mathfrak{a})$' dans $\mathscr{I}_1$ dépend donc exclusivement de la référence de '$\Phi(\Delta)$' dans toute interprétation $\mathscr{I}_2$ telle que $\mathscr{I}_2 \underset{\Phi(\xi)}{\approx} \mathscr{I}_1$. Et nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{lll} \forall \mathscr{I}_1 : & \mathbf{R}(\ulcorner \mathfrak{a}\!\!\smile\ (\Phi(\mathfrak{a}))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{V} & \leftrightarrow \quad \forall \mathscr{I}_2 \underset{\Phi}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner \Phi(\Delta_i)\urcorner, \mathscr{I}_2) = \mathbf{V} \\ & \mathbf{R}(\ulcorner \mathfrak{a}\!\!\smile\ (\Phi(\mathfrak{a}))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{F} & \leftrightarrow \quad \exists \mathscr{I}_2 \underset{\Phi}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner \Phi(\Delta_i)\urcorner, \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{V} \end{array}$$

Il faut ensuite exploiter cette stipulation pour déterminer la référence de $\ulcorner \mathfrak{a}\!\!\smile\ t^{(0)}(\mathfrak{a})\urcorner$ lorsque $t^{(0)}(\xi)$ est un quelconque nom de fonction de type (0) de l'idéographie enrichie – donc potentiellement différent de '$\Phi(\xi)$'. Supposons que $t^{(0)}(\xi)$ réfère à une fonction $h(\xi)$ dans $\mathscr{I}_1$. Il existe une interprétation $\mathscr{I}_3$ qui attribue $h(\xi)$ comme référence à '$\Phi(\xi)$'. D'après notre définition, $\mathbf{R}(\text{'}\mathfrak{a}\!\!\smile\ (\Phi(\mathfrak{a}))\text{'}, \mathscr{I}_3)$ est le Vrai si $\mathbf{R}(\text{'}\Phi(\Delta)\text{'}, \mathscr{I}_4)$ est le Vrai pour toute interprétation $\mathscr{I}_4$ telle que $\mathscr{I}_4 \underset{\Phi}{\approx} \mathscr{I}_3$, le Faux sinon. Choisissons un entier naturel i tel que Δ_i ne figure pas dans $t^{(0)}(\xi)$ [226], nous pouvons conclure que $\mathbf{R}(\ulcorner \mathfrak{a}\!\!\smile\ t^{(0)}(\mathfrak{a})\urcorner, \mathscr{I}_1)$ est le Vrai si $\mathbf{R}(\ulcorner t^{(0)}(\Delta_i)\urcorner, \mathscr{I}_2)$ est le Vrai pour toute interprétation $\mathscr{I}_2$ telle que $\mathscr{I}_2 \underset{t^{(0)}}{\approx} \mathscr{I}_1$, le Faux sinon. En somme, lorsque 'Δ_i' ne figure pas dans $t^{(0)}(\xi)$:

$$\begin{array}{lll} \forall \mathscr{I}_1 & \mathbf{R}(\ulcorner \mathfrak{a}\!\!\smile\ (t^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{V} & \leftrightarrow \quad \forall \mathscr{I}_2 \underset{t^{(0)}}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner t^{(0)}(\Delta_i)\urcorner, \mathscr{I}_2) = \mathbf{V} \\ & \mathbf{R}(\ulcorner \mathfrak{a}\!\!\smile\ (t^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner, \mathscr{I}_1) = \mathbf{F} & \leftrightarrow \quad \exists \mathscr{I}_2 \underset{t^{(0)}}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(\ulcorner t^{(0)}(\Delta_i)\urcorner, \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{V} \end{array}$$

En choisissant $t^{(0)}(\xi) =$ '$\Phi_i(\xi)$', nous retrouvons notre clause initiale. Ce schéma de formules permet donc simultanément de fournir la définition sémantique de '$\mathfrak{a}\!\!\smile\ (\varphi(\mathfrak{a}))$' et d'en exploiter le contenu. Et l'ensemble de ces explications s'adapte facilement aux niveaux supérieurs.

Malheureusement, nous ne pouvons pas *théoriquement* démontrer récursivement que chaque nom de $\mathscr{L}_{\text{aux}}$ possède une référence unique dans toute interprétation $\mathscr{I}$. Bien sûr, nous pouvons utiliser nos axiomes pour démontrer que, si deux noms $t^{(0)}(\xi)$ et t^0 sont dans ce cas, alors $\ulcorner t^{(0)}(t^0)\urcorner$ dispose *au moins d'une* référence. Mais, *a priori*, rien n'assure que cette référence soit unique, *i.e.* que différentes manières de construire un nom déterminent la même référence dans $\mathscr{I}$. Et le problème se manifeste à nouveau lors des étapes de désaturation.

Nous pourrions lever cette difficulté ainsi que nous l'avons indiqué en section 3.3.6.3. Mais cela ne serait possible qu'au prix d'une transgression totale de l'ontologie de Frege. Selon celle-ci, la seule manière *théorique* de dire, par exemple, que la valeur de la fonction $\mathfrak{a}\!\!\smile\ \varphi(\mathfrak{a})$ en $\xi = \Delta$

226. En effet, dans le cas contraire, la référence de $t^{(0)}(\xi)$ dans $\mathscr{I}_1$ dépend de celle de 'Δ'. Il pourrait donc être impossible de trouver, pour un certain objet, une interprétation $\mathscr{I}_2$ qui conserve la référence de $t^{(0)}(\xi)$ et attribue cet objet comme référence à 'Δ'.

est égale à la valeur de la fonction $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \xi)$ en Δ est la suivante :

$$\Big(\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \Delta)\Big) = \Big(\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \Delta)\Big)$$

En effet, la seule manière de parler théoriquement de la valeur de la fonction $\mathfrak{a}\,\varphi(\mathfrak{a})$ en $\xi = \Delta$, ou de la valeur de la fonction $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \xi)$ en Δ, consiste à utiliser le nom '$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \Delta)$'. Pour distinguer les deux approches, il est nécessaire de présenter des fonctions comme des objets, et donc d'adopter un régime métaphorique[227]. Et le problème se manifeste à nouveau si nous tentons de comparer la valeur de la référence de '$\mathfrak{a}\,\varphi(\mathfrak{a})$' en la référence de '$\xi = \Delta$' dans une interprétation $\mathscr{I}$ à la valeur de la référence de '$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \xi)$' en la référence de '$\Delta$' dans cette même interprétation.

Disons-le autrement : il est impossible de justifier le bien-fondé de la grammaire idéographique en utilisant cette même grammaire, ce que tout régime théorique exige pourtant. Et nous retrouvons l'une des facettes du cloisonnement du langage mis à jour par les membres du courant antisémantique. Nous pourrions en rester là, et admettre aussi une barrière – plus locale que ce que croient ces commentateurs, mais tout aussi élevée – dressée devant l'élaboration de certains raisonnements sémantiques dans le contexte fregéen. Cependant, nous allons défendre l'hypothèse contraire, et abattre pour cela la dernière forteresse du clan antisémantique. Nous allons donc définitivement trancher en faveur de leurs adversaires, parvenant ainsi au dénouement de toute cette affaire.

3.3.8.4 Morphologie sous-jacente à la sémantique fregéenne

Voici la question fondamentale : pourquoi Frege estime-t-il que sa manière d'écrire les noms constitue *la* bonne manière d'exprimer un sens ? Il est insuffisant de répondre que sa morphologie est compatible avec la détermination d'une référence unique pour chaque nom. D'une part, il pourrait exister d'autres choix aboutissant au même résultat. D'autre part, comme nous venons de le voir, il est nécessaire de s'extraire de cette morphologie pour s'assurer qu'elle possède cette qualité. En réalité, c'est dans la notion de sens, et non dans celle de référence, que son langage trouve toute sa légitimité. Si, comme il le revendiquait, ce langage permet de dévoiler la structure fondamentale des sens exprimés, alors il exhibe ainsi *le* mode de détermination attaché à un nom complexe, *i.e. le* moyen de déterminer la référence de ce nom. Malheureusement, la morphologie suggérée dans tous les *Grundgesetze* – et que nous avons pris la peine de reconstruire en détail dans notre second chapitre – respecte le principe (inadapté) selon lequel des sens ne peuvent s'unir que dans un sens propre. Ce faisant, elle ne permet pas de décomposer progressivement tous les constituants d'un nom, et ouvre la voie à plusieurs analyses différentes d'un même sens, dont il faut *démontrer* qu'elles aboutissent à la même référence. En somme, cette grammaire n'est pas adaptée à la notion fregéenne de sens, car elle ne dévoile pas les constituants élémentaires de la structure des pensées exprimées par les énoncés du langage.

En réalité, s'il est impossible de démontrer en dehors de cette langue que tous les chemins de formation d'un nom aboutissent à la même référence, c'est parce qu'il est *inutile* de procéder à une telle démonstration. Sa langue est universelle et – pourrions-nous dire – légitimement cloisonnante parce qu'elle présente syntaxiquement l'*unique* décomposition fondamentale de toute pensée. Elle dévoile ainsi l'unique moyen de déterminer la référence d'un nom et, par conséquent, n'exige aucune preuve d'équivalence entre différents chemins. Voilà précisément le point que la morphologie pour laquelle Frege opta dissimule totalement. La véritable grammaire adaptée à sa notion de sens est en réalité différente, bien que cette différence soit superficielle d'un

227. Voir section 3.2.3.5.

point de vue technique. Avant de discuter les causes de l'erreur de Frege, nous voulons décrire la morphologie sous-jacente à sa notion de sens. Nous allons voir que ce n'est pas dans les considérations syntaxiques des *Grundgesetze* que celle-ci apparaît, mais bien dans la mise en œuvre sémantique de l'idéographie.

Débutons à partir des noms simples de $\mathscr{L}_{\text{aux}}$ – incluant les noms auxiliaires atomiques. La totalité des noms de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ résulte des étapes successives de saturation et désaturation suivantes [228] :

Sat : saturation d'un nom *simple* par un ou des noms de types adaptés (*i.e.* tel qu'il en résulte un nom saturé) ;

Désat : désaturation de noms *auxiliaires atomiques* dans un nom propre.

Dans le second chapitre, nous avons dit tout ce qu'il fallait pour définir rigoureusement ce langage. La seule différence entre $\mathscr{L}_{\text{aux}}$ et $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ repose sur le fait que le second limite les étapes de saturation aux noms simples et celles de désaturation aux noms auxiliaires atomiques [229]. Par ailleurs, $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ fonctionne techniquement suivant la méthode par marqueurs présentée en section 2.3.3.5. Or, d'une part, nous avons prouvé l'équivalence des deux tactiques [230], assurant ainsi que les noms de $\mathscr{L}_{\text{aux}}$ et de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ sont les mêmes, bien qu'ils soient formés différemment. D'autre part, comme pour la méthode par marqueurs, la morphologie de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ ne propose qu'un seul chemin pour former chaque nom. Il suffit donc d'établir que chaque nom possède une référence pour garantir simultanément l'unicité de celle-ci. Voilà ce à quoi nous allons désormais nous employer.

3.3.8.5 Preuve que chaque nom dispose d'une unique référence

La clef de l'énigme tient dans le fait que la preuve de référentialité des noms *propres* de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ procède sans démontrer simultanément celle des noms de fonctions, la seconde étant une conséquence immédiate de la première. Nous allons établir le point suivant :

Fait 8. *Soient $\mathscr{I}$ une interprétation et t^0 un nom propre de $\mathscr{L}'_{aux}$, alors la référence de t^0 dans $\mathscr{I}$ est déterminée. De plus, soient deux interprétations $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ tels que $\mathscr{I}_1 \underset{t^0}{\approx} \mathscr{I}_2$, alors :*

$$\boldsymbol{R}(t^0, \mathscr{I}_1) = \boldsymbol{R}(t^0, \mathscr{I}_2)$$

Autrement dit, la référence de t^0 dans $\mathscr{I}$ ne dépend que des références attribuées par $\mathscr{I}$ aux noms simples auxiliaires figurant dans t^0.

Démonstration. Par induction, il nous faut vérifier cet énoncé (1) pour les noms propres atomiques, (2) pour les noms résultant de la saturation de noms simples par des noms simples, et (3) pour les noms résultant de la saturation de noms simples par des noms complexes, *i.e.* soit par un nom propre dont nous supposons qu'il vérifie notre énoncé, soit par un nom de fonction issu de la désaturation d'un nom atomique auxiliaire dans un nom propre dont nous supposons qu'il vérifie notre énoncé.

(1) est trivial, car les seuls noms propres atomiques de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ sont les 'Δ_i', dont la référence dans $\mathscr{I}$ ne dépend bien sûr que de celle qui leur est attribuée par cette interprétation. Pour (2), les cas de '$\Phi_i(\Delta_j)$' et '$\Omega_{i,\beta}(\Phi_j(\beta))$' sont immédiats.

Venons-en aux saturations des noms simples *de l'idéographie* – donc non auxiliaires – par des noms simples de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$. $\mathbf{St}$'— ξ' nous assure que $\mathbf{R}$('— Δ', $\mathscr{I}$) est le Vrai si $\mathbf{R}$('Δ', $\mathscr{I}$) est le Vrai,

228. En réalité, seule la désaturation doit être limitée, la saturation peut rester générale. Nous la restreignons provisoirement, avant d'expliquer ce qui doit l'être dans le cadre général.

229. Il y a une seule nuance avec la manière dont nous avons défini là-bas la désaturation. Ici, nous demandons que *toutes* les occurrences du ou des noms simples auxiliaires soient retranchées.

230. Voir section 2.3.3.7.

le Faux sinon. La référence de '— Δ' est donc garantie, et ne dépend que de celle que $\mathscr{I}$ attribue à 'Δ'. Un raisonnement analogue vaut pour '$_{\top}\,\xi$', '$\xi = \zeta$' et '$\xi \to \zeta$'.

Considérons à présent le cas des niveaux supérieurs. D'après $\mathbf{St}_{\text{‘}\frown_{\mathfrak{a}}\,(\varphi(\mathfrak{a}))\text{’}}$, $\mathbf{R}(\text{‘}\frown_{\mathfrak{a}}\,(\text{—}\,\mathfrak{a})\text{’}, \mathscr{I})$ est le Vrai si $\mathbf{R}(\text{‘}\text{—}\,\Delta\text{’}, \mathscr{I}_2)$ est le Vrai pour tout $\mathscr{I}_2$ qui attribue la même référence que $\mathscr{I}$ aux noms élémentaires figurant dans '— ξ', autrement dit pour tout $\mathscr{I}_2$; et le Faux sinon. En mobilisant à nouveau $\mathbf{St}_{\text{‘}\text{—}\,\xi\text{’}}$, nous pouvons conclure que $\mathbf{R}(\text{‘}\frown_{\mathfrak{a}}\,(\text{—}\,\mathfrak{a})\text{’}, \mathscr{I})$ est le Vrai si et seulement si $\mathbf{R}(\text{‘}\Delta\text{’}, \mathscr{I}_2)$ est le Vrai dans toute interprétation $\mathscr{I}_2$, le Faux sinon. Par conséquent, la référence de '$\frown_{\mathfrak{a}}\,(\text{—}\,\mathfrak{a})$' est *toujours* le Faux quelle que soit l'interprétation considérée, ce qui valide notre énoncé. Un raisonnement analogue s'applique à '$\frown_{\mathfrak{a}}\,(_{\top}\,\mathfrak{a})$'.

Par ailleurs, $\mathbf{R}(\text{‘}\frown_{\mathfrak{a}}\,(\Phi(\mathfrak{a}))\text{’}, \mathscr{I})$ est le Vrai si $\mathbf{R}(\text{‘}\Phi(\Delta)\text{’}, \mathscr{I}_2)$ est le Vrai pour tout $\mathscr{I}_2$ qui attribue la même référence que $\mathscr{I}$ à '$\Phi(\xi)$', et le Faux sinon. Par conséquent, la référence de '$\frown_{\mathfrak{a}}\,(\text{—}\,\mathfrak{a})$' est le Vrai dans $\mathscr{I}$ si cette interprétation attribue à '$\Phi(\xi)$' la fonction qui envoie tout objet sur le Vrai ; le Faux sinon. Cette référence est donc déterminée, et ne dépend que de celle que $\mathscr{I}$ attribue à '$\Phi(\xi)$'. Notre énoncé est validé. Enfin, des raisonnements analogues conduisent au même résultat relativement aux noms pour les quantifications de niveaux supérieurs.

Venons-en à (3), *i.e.* au pas d'induction. Le résultat est immédiat lorsque nous considérons des résultats de saturations de noms simples *auxiliaires*. Supposons qu'un nom propre t^0 vérifie notre énoncé, alors $R(\ulcorner\Phi(t^0)\urcorner, \mathscr{I})$ est déterminé et ne dépend que de la référence de '$\Phi(\xi)$' et de $R(t^0, \mathscr{I})$ qui, par hypothèse, ne dépend que de la référence des noms simples auxiliaires figurant dans t^0. Ainsi, la référence de $\ulcorner\Phi(t^0)\urcorner$ dans $\mathscr{I}$ ne dépend que de la référence que cette interprétation attribue aux noms simples auxiliaires qui figurent dans $\ulcorner\Phi(t^0)\urcorner$ dans $\mathscr{I}$, et notre énoncé est vérifié. Un raisonnement analogue convient pour les noms simples auxiliaires de niveaux supérieurs.

Abordons le cas des noms simples *de l'idéographie*. Si t^0 est un nom propre vérifiant notre énoncé, alors $R(\ulcorner\text{—}\,t^0\urcorner, \mathscr{I})$ est le Vrai si $R(t^0, \mathscr{I})$ est le Vrai, le Faux sinon. D'une part, cette référence est ainsi déterminée. D'autre part, supposons deux interprétations $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ qui attribuent la même référence à tous les noms simples auxiliaires figurant dans t^0. Alors, par hypothèse, les références de ce nom dans ces deux interprétations sont identiques, donc :

$$R(\ulcorner\text{—}\,t^0\urcorner, \mathscr{I}_1) = R(\ulcorner\text{—}\,t^0\urcorner, \mathscr{I}_2)$$

. Ainsi notre énoncé est vérifié. Et ce raisonnement s'adapte aux noms '$_{\top}\,\xi$', '$\xi \to \zeta$' et '$\xi = \zeta$'.

Enfin, supposons qu'un nom propre $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ – tel que 'Δ' ne figure pas dans $t^0(\xi)$ – vérifie notre énoncé. Alors, d'après $\mathbf{St}_{\text{‘}\frown_{\mathfrak{a}}\,(\varphi(\mathfrak{a}))\text{’}}$, $\mathbf{R}(\ulcorner\frown_{\mathfrak{a}}\,(t^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner, \mathscr{I})$ est le Vrai si, pour toute interprétation $\mathscr{I}_2$ qui attribue les mêmes références aux noms simples auxiliaires figurant dans $t^{(0)}(\xi)$, $\mathbf{R}(\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner, \mathscr{I}_2)$ est le Vrai ; et le Faux sinon. D'une part, par hypothèse, la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ dans toute interprétation $\mathscr{I}_2$ de cette sorte est déterminée. Il en va donc de même de celle de '$\ulcorner\frown_{\mathfrak{a}}\,(t^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner$'. D'autre part, toujours par hypothèse, la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ dans toute interprétation ne dépend que des références attribuées à 'Δ' et aux noms simples auxiliaires figurant dans $t^{(0)}(\xi)$. Par conséquent, le fait que $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ réfère au Vrai quelle que soit l'interprétation $\mathscr{I}_2$ du genre considéré ne dépend que des références attribuées par $\mathscr{I}_1$ aux noms auxiliaires atomiques figurant dans $t^{(0)}(\xi)$. Notre énoncé est vérifié, et un raisonnement similaire aboutirait au même résultat pour les quantifications d'ordres supérieurs.

Tous les cas relatifs à l'induction sur les étapes de formation des noms de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ ont été traités. Nous pouvons conclure (a) que notre sémantique attribue une référence unique à tout nom propre dans toute interprétation, et (b) que les références d'un même nom propre dans deux interprétations sont identiques dès lors que ces interprétations octroient la même référence à chaque nom simple auxiliaire qui figure dans ce nom. □

Comme nous l'avons annoncé, nous pouvons établir immédiatement la référentialité des noms de fonctions sur la base de celle des noms propres :

Fait 9. *Soient $\mathscr{I}$ une interprétation et t un nom de fonction de $\mathscr{L}'_{aux}$, alors la référence de t dans $\mathscr{I}$ est déterminée. De plus, soient deux interprétations $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ tels que $\mathscr{I}_1 \underset{t}{\approx} \mathscr{I}_2$, alors :*

$$\boldsymbol{R}(t, \mathscr{I}_1) = \boldsymbol{R}(t, \mathscr{I}_2)$$

Autrement dit, la référence de t dans $\mathscr{I}$ ne dépend que des références attribuées par $\mathscr{I}$ aux noms simples auxiliaires figurant dans t.

Démonstration. Les clauses liées aux noms simples de l'idéographie leur assurent la même référence (unique) dans toute interprétation. La référence (unique) des noms simples auxiliaires est garantie par la seule donnée d'une interprétation. Enfin [231], tout nom complexe de fonction $t^{(0)}(\xi)$ provient de la désaturation d'un nom simple auxiliaire 'Δ_i' dans un nom propre. D'une part 'Δ_i' ne figure pas dans $t^{(0)}(\xi)$, d'autre part la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ dans une interprétation est déterminée et ne dépend que des références octroyées aux noms simples qui y figurent. Or la référence de $t^{(0)}(\xi)$ dans une interprétation $\mathscr{I}$ est elle-même déterminée par celles de $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ dans toute interprétation qui attribue les mêmes références que $\mathscr{I}$ aux noms simples auxiliaires qui figurent dans '$t^{(0)}(\xi)$'. Elle ne dépend donc que de la référence attribuée à ces termes. □

Par conséquent, la sémantique de Frege garantit à chaque nom t de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$ une unique référence dans toute interprétation, de telle sorte que si $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ attribuent la même référence à tous les noms simples auxiliaires figurant dans t, alors ils confèrent la même référence à t. Puisque les noms de l'idéographie n'intègrent aucun nom simple auxiliaire, cette sémantique leur assure une référence unique indépendamment de l'interprétation considérée, et atteint ainsi son objectif.

3.3.8.6 Analyse du sens

Nous voulons insister sur un aspect essentiel des deux preuves ci-dessus, qui nous conduira au problème soulevé plus haut quant à la notion de sens. Rappelons la forme aboutie que nous avons conférée au critère non contextuel de référentialité de Frege :

> Considérons une interprétation $\mathscr{I}$ pour les noms simples auxiliaires. Un moyen de déterminer la référence d'un nom de fonction $t^{(0)}(\xi)$ dans $\mathscr{I}$ consiste en un moyen de déterminer celle de $\ulcorner t^{(0)}(\Delta_i)\urcorner$ – où 'Δ_i' ne figure pas dans $t^{(0)}(\xi)$ – dans toute interprétation qui attribue la même référence que $\mathscr{I}$ à chaque nom simple auxiliaire figurant dans $t^{(0)}(\xi)$.

Les désaturations réalisées par Frege rendent justice à cette version du critère. Elles impliquent toujours des noms auxiliaires, et l'argument sémantique qui garantit la référentialité du résultat s'appuie systématiquement sur la procédure que nous avons décrite. À la fin du §30, Frege établit la référentialité de '$\xi = \xi$' à partir de celle de '$\Delta = \Delta$'. Comme nous l'avons vu, une lecture contextuelle du critère ne permet pas de déduire la référence de '$\xi = \xi$' à partir de celle de '$\Delta = \Delta$'. Notre interprétation corrige le tir en respectant à la lettre l'idée selon laquelle la détermination d'un nom de fonction n'est rien d'autre que la détermination de valeurs relativement à des arguments. Par ailleurs, afin d'intégrer les noms de fonctions de niveaux supérieurs à la sémantique, il est indispensable que ces derniers soient (sémantiquement) définis selon cette même idée. Si Frege peut utiliser la manière dont il détermine la référence de '$\xi = \xi$' – donc la

231. Nous traitons le cas du premier niveau, les autres suivent le même schéma.

manière dont il détermine '$\Delta = \Delta$' pour toute référence de 'Δ' – afin de déterminer la référence d'un nom '$\ulcorner t_\beta^{((0))}(\beta = \beta)\urcorner$, c'est parce que tout nom simple de l'idéographie $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$ n'est pas défini en spécifiant directement sa valeur en chaque argument $\Phi(\xi)$, mais en spécifiant sa valeur *relativement* à celle que prenait chaque argument en chacun de ses arguments propres, autrement dit relativement à la référence de '$\Phi(\Delta)$' quelle que soit celle de 'Δ'. Par exemple, la stipulation associée à la quantification de premier ordre garantit que la référence de '$\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$' est le Faux si celle de '$\Delta = \Delta$' est le Faux pour au moins une interprétation $\mathscr{I}$. C'est pourquoi, dès que nous pouvons déterminer la référence de '$\Delta = \Delta$' pour toute interprétation, alors nous pouvons déterminer celle de '$\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$'. Voilà le point que nos preuves ont exploité, et qui débarrasse totalement la sémantique des noms de fonctions, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Considérons le nom '$\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$'. Par $\mathbf{St}_{`\smile_{\mathfrak{a}}\ (\varphi(\mathfrak{a}))'}$, nous pouvons établir que :

$$\begin{array}{lrcl} \forall \mathscr{I}_1 : & \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})', \mathscr{I}_1) = \mathbf{V} & \leftrightarrow & \forall \mathscr{I}_2, \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \Delta_1)', \mathscr{I}_2) = \mathbf{V} \\ & \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})', \mathscr{I}_1) = \mathbf{F} & \leftrightarrow & \exists \mathscr{I}_2, \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \Delta_1)', \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{V} \end{array}$$

En appliquant à nouveau $\mathbf{St}_{`\smile_{\mathfrak{a}}\ (\varphi(\mathfrak{a}))'}$, nous obtenons :

$$\begin{array}{lrcl} \forall \mathscr{I}_1 : & \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})', \mathscr{I}_1) = \mathbf{V} & \leftrightarrow & \forall \mathscr{I}_2 \underset{\Delta_1}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(`\Delta_2 = \Delta_1', \mathscr{I}_2) = \mathbf{V} \\ & \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})', \mathscr{I}_1) = \mathbf{F} & \leftrightarrow & \exists \mathscr{I}_2 \underset{\Delta_1}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(`\Delta_2 = \Delta_1', \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{V} \end{array}$$

Il ne reste alors qu'à faire appel à $\mathbf{St}_{`\xi=\zeta'}$:

$$\begin{array}{lrcl} \forall \mathscr{I}_1 : & \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})', \mathscr{I}_1) = \mathbf{V} & \leftrightarrow & \forall \mathscr{I}_2 \underset{\Delta_1}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(`\Delta_2', \mathscr{I}_2) = \mathbf{R}(`\Delta_1', \mathscr{I}_2) \\ & \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})', \mathscr{I}_1) = \mathbf{F} & \leftrightarrow & \exists \mathscr{I}_2 \underset{\Delta_1}{\approx} \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(`\Delta_2', \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{R}(`\Delta_1', \mathscr{I}_2) \end{array}$$

Choisissons $\mathscr{I}_2$ telle que :

- $R(`\Delta_1', \mathscr{I}_2) = R(`\Delta_1', \mathscr{I}_1)$;
- si $R(`\Delta_1', \mathscr{I}_1) = \mathbf{V}$, alors $R(`\Delta_2', \mathscr{I}_2) = \mathbf{F}$;
- si $R(`\Delta_1', \mathscr{I}_1) \neq \mathbf{V}$, alors $R(`\Delta_2', \mathscr{I}_2) = \mathbf{V}$.

Par le premier point, nous savons que $\mathscr{I}_2 \underset{\Delta_1}{\approx} \mathscr{I}_1$. Selon les deux autres : $\mathbf{R}(`\Delta_2', \mathscr{I}_2) \neq \mathbf{R}(`\Delta_1', \mathscr{I}_2)$. Nous pouvons donc conclure :

$$\forall \mathscr{I}_1, \mathbf{R}(`\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})', \mathscr{I}_1) = \mathbf{F}$$

Transformons légèrement ce raisonnement, afin de le rapprocher de la forme que Frege lui conféra dans le §30. D'après la définition sémantique de '$\xi = \zeta$', '$\Delta = \Gamma$' est référentiel dans toute interprétation $\mathscr{I}$ – *i.e.* quelles que soient les références de 'Δ' et de 'Γ' ou, pour le dire comme Frege, quels que soient Δ et Γ. Par conséquent, d'après la définition sémantique de '$\smile_{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$', '$\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \Gamma)$' est référentiel dans toute interprétation $\mathscr{I}$, et cette référence ne dépend que de la valeur attribuée à 'Γ' par $\mathscr{I}$. Enfin, d'après cette même définition, '$\smile_{\mathfrak{b}}\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$' est référentiel, et cette référence est indépendante de l'interprétation $\mathscr{I}$ choisie.

Nous constatons qu'aucun nom insaturé ne figure ni dans le premier raisonnement, ni dans le second. Bien sûr, nous pourrions ajouter certaines étapes pour les intégrer. Par exemple, nous pourrions dire que, '$\Delta = \Gamma$' étant référentiel dans toute interprétation $\mathscr{I}$, alors il en va de même de '$\xi = \Gamma$', et par conséquent de '$\smile_{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{a} = \Gamma)$'. Mais cette étape est totalement superflue.

Pour Frege, déterminer une fonction de premier niveau consiste *essentiellement* à déterminer la valeur associée à chaque objet. Et déterminer une fonction de second niveau consiste à déterminer la valeur associée à chaque lien entre des objets et des objets. Il s'agit ultimement, non pas de déterminer la référence d'un nom $t_{\beta}^{((0))}(\Phi(\beta))$ quelle que soit la fonction à laquelle '$\Phi(\xi)$' réfère, mais quelle que soit la référence de '$\Phi(\Delta)$' relativement à celle de 'Δ'. Bien sûr, la première formulation n'est ni incorrecte ni théoriquement défaillante. Il demeure possible de développer une sémantique à l'aide de multiples relations de référence : $\mathbf{R}_{\beta}^{(0)}(t^{(0)}(\xi), h(\beta), \mathscr{I})$,[232] $\mathbf{R}_{\beta,\gamma}^{(0,0)}(t^{(0,0)}(\xi,\zeta), h(\beta,\gamma), \mathscr{I})$, $\mathbf{R}_{\psi}^{((0))}(t_{\beta}^{((0))}(\varphi(\beta)), H_{\beta}(\psi(\beta)), \mathscr{I})$, etc. Mais cette formulation, et par suite cette sémantique, seraient *dérivées* par rapport à celles que, fidèles à Frege, nous proposons. Elles ne placeraient pas les sens fonctionnels dans leur rôle fondamental – celui de déterminer une valeur en chaque argument –, et échoueraient ainsi à dévoiler la manière dont les sens se composent.

Cette dernière remarque nous conduit à notre ultime question : en quoi la nouvelle morphologie que nous avons proposée, et la sémantique qu'elle sous-tend, permettent-elles d'atteindre cet objectif ? Nous avons souvent répété que le sens d'un nom de fonction de type (0) était un moyen de déterminer une valeur relativement à un objet ; que le sens d'un nom de fonction de type ((0)) était un moyen de déterminer une valeur relativement à une valeur elle-même relative à un argument. Nous convenons que ces formulations deviennent rapidement confuses dès que nous élevons les niveaux. Mais, précisément, elles sont formellement capturées par la stratégie qui exploite les noms auxiliaires.

Le sens de '$\mathfrak{a}\,(\varphi(\mathfrak{a}))$' est un moyen de déterminer la référence de '$\mathfrak{a}\,(\Phi(\mathfrak{a}))$' quelle que soit celle qui est choisie pour '$\Phi(\xi)$', autrement dit quelle que soit celle de '$\Phi(\Delta)$' pour toute référence de 'Δ'. Rigoureusement, si $\mathscr{I}_1$ est une interprétation des noms atomiques auxiliaires, alors la référence de '$\mathfrak{a}\,(\Phi(\mathfrak{a}))$' est déterminée dans $\mathscr{I}_1$ sur la base de celle de '$\Phi(\Delta)$' dans toute interprétation $\mathscr{I}_2 \underset{\Phi}{\approx} \mathscr{I}_1$, et ne dépend que de celle que $\mathscr{I}_1$ attribue à '$\Phi(\xi)$'. Par ailleurs, le sens de '$\xi = \zeta$' permet de déterminer la référence de '$\Delta = \Gamma$' dans toute interprétation $\mathscr{I}_2$, donc dans toute interprétation $\mathscr{I}_2 \underset{\Gamma}{\approx} \mathscr{I}_1$. Conjointement avec celui de '$\mathfrak{a}\,(\varphi(\mathfrak{a}))$', il permet donc de déterminer la référence de '$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \Gamma)$' dans $\mathscr{I}_1$, laquelle ne dépend que de la valeur attribuée à 'Γ' par $\mathscr{I}_1$. Cela, bien sûr, est valable quelle que soit l'interprétation $\mathscr{I}_1$. Or, si $\mathscr{I}$ est une interprétation des noms atomiques auxiliaires, alors le sens de '$\mathfrak{a}\,(\varphi(\mathfrak{a}))$' permet de déterminer la référence de '$\mathfrak{b}\,(\Phi(\mathfrak{b}))$' dans $\mathscr{I}$ sur la base de celle de '$\Phi(\Delta)$' dans toute interprétation $\mathscr{I}_1 \underset{\Phi}{\approx} \mathscr{I}$, et ne dépend que de celle que $\mathscr{I}$ attribue à '$\Phi(\xi)$'. Il devient donc possible de déterminer la référence de '$\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$', laquelle ne dépend pas de l'interprétation $\mathscr{I}$.

En somme, les modes de détermination attachés à '$\mathfrak{a}\,(\varphi(\mathfrak{a}))$' et '$\xi = \zeta$' permettent conjointement de déterminer la référence de '$\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$'. Autrement dit, les sens des deux premiers noms peuvent s'unir pour former celui du troisième. Résumons une partie du raisonnement : le sens de '$\xi = \zeta$' permet de déterminer la référence de '$\Delta = \Gamma$' en fonction de l'interprétation de 'Δ' et de 'Γ'. À l'aide du sens de '$\mathfrak{a}\,(\varphi(\mathfrak{a}))$', ceci permet de déterminer la référence de '$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \Gamma)$' relativement à l'interprétation de 'Γ'. Mais le mode de détermination de la référence de '$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \Gamma)$' relativement à l'interprétation de 'Γ' n'est rien d'autre que le sens de '$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \zeta)$'. Par conséquent, les sens de '$\mathfrak{a}\,(\varphi(\mathfrak{a}))$' et de '$\xi = \Gamma$' s'unissent en celui de '$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \zeta)$'.

Pourtant, Frege interdisait l'union de deux sens en un sens insaturé. Nous pouvons désormais comprendre l'origine de son erreur. La morphologie qui sous-tend la sémantique de l'idéographie

232. Cette fonction réfère au Vrai lorsque $t^{(0)}(\xi)$ réfère à $h(\xi)$ dans $\mathscr{I}$. L'exposant de la lettre '$\mathbf{R}$' ne désigne pas le type de la fonction dont cette lettre est l'étiquette, mais celui des fonctions auxquelles réfèrent les noms qu'elle prend en premier argument, autrement dit celui de $h(\xi)$. La même remarque s'adapte aux deux autres noms.

se limite en effet aux saturations desquelles résultent des noms propres. Néanmoins, elle intègre les noms auxiliaires qui permettent de conférer un sens aux noms insaturés *en utilisant des noms propres*. L'union des sens de '$\mathfrak{a}$ $(\varphi(\mathfrak{a}))$' et de '$\xi = \zeta$' constitue le sens de '$\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = \zeta)$' parce que, lorsqu'il est possible de déterminer la référence de '$\mathfrak{a}$ $\Phi(\mathfrak{a})$' en fonction de l'interprétation de '$\Phi(\xi)$' et celle de '$\Delta = \Gamma$' en fonction de l'interprétation de 'Γ' et 'Δ', alors il est possible de déterminer celle de '$\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = \Gamma)$' en fonction de l'interprétation de 'Γ'. Et nous voyons émerger les raisons de la nouvelle morphologie que nous avons prescrite. La sémantique de Frege ne procède pas, comme celle de Tarski, en décomposant progressivement une formule selon le connecteur principal qui figure à chaque étape, mais en retranchant le nom de fonction principal du nom complexe (auxiliaire) de chaque étape. Pour déterminer la référence de '$\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$' à l'aide du sens de '$\mathfrak{b}$ $(\varphi(\mathfrak{b}))$' – conféré par sa définition sémantique –, il suffit de déterminer celui de '$\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = \Gamma)$' pour toute interprétaton de 'Γ'. Pour cela, et toujours grâce au sens de '$\mathfrak{a}$ $(\varphi(\mathfrak{a}))$', il suffit de déterminer la référence de '$\Delta = \Gamma$' pour toute interprétation de 'Δ' et de 'Γ'. Ceci est possible en invoquant le sens de '$\xi = \zeta$'. Le schéma est donc le suivant :

$$\text{`}\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})\text{'} \rightarrowtail \text{`}\mathfrak{a}\ (\mathfrak{a} = \Gamma)\text{'} \rightarrowtail \text{`}\Delta = \Gamma\text{'}$$

En section 3.3.6.3, nous avons développé une sémantique conforme à la morphologie suggérée par Frege, mais qui transgressait son ontologie. Dans le métalangage, les fonctions étaient présentées comme des objets. Pour fixer la référence d'un nom $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$, nous avons spécifié sa référence pour toute fonction e de type (0). La question se posait alors de savoir si les divers moyens de construire un nom, qui allaient avec divers moyens de déterminer sa référence, aboutissaient toujours à la même référence. En tenant compte du rôle que Frege attribuait aux sens insaturés, ces problèmes sont évités. En effet, l'insaturation des noms de fonctions se rapportent fondamentalement à celles de leurs sens. La notion même d'insaturation est, dans l'horizon fregéen, une notion *sémantique*. Le sens d'un nom de type ((0)) détermine une valeur relativement à des valeurs déterminées en chaque argument. En d'autres termes, le sens d'un nom $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$ détermine la référence de $\ulcorner t_\beta^{((0))}(\Phi(\beta))\urcorner$ relativement à celle que reçoit '$\Phi(\Delta)$' dans toute interprétation de 'Δ'. Il attend donc seulement la donnée du sens d'un nom $t^{(0)}(\xi)$ qui détermine la référence de '$\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$' relativement à celle de 'Δ' pour que soit déterminée la référence de $\ulcorner t_\beta^{((0))}(t^{(0)}(\beta))\urcorner$. L'étonnante syntaxe de l'idéographie se fonde sur les différents modes de détermination qu'elle prend en considération, donc sur la notion de sens qu'elle vise à implémenter. Chaque catégorie de sens se conçoit vis-à-vis des ce qui est attendu pour déterminer une valeur, visible à travers les noms qui expriment ces sens. C'est pourquoi un sens d'un certain type est idéalement exprimé par un nom du même type. Et c'est pourquoi la définition sémantique de chaque nom exploite les noms auxiliaires, afin d'exhiber la catégorie du sens défini et, ainsi, de permettre le dévoilement de la structure des sens exprimés par les noms complexes en détachant un à un les noms simples qui y figurent.

Vu sous cet angle, le problème des différentes décompositions d'un sens disparaît. Nous l'avons coupé à la racine en proposant une morphologie limitée à une seule manière de former chaque nom. Selon celle-ci, un nom propre est construit à travers la saturation de ce qui devient son nom de fonction *principal*. Néanmoins, nous ne devons pas en conclure qu'un sens possède un constituant privilégié. Notre méthode ne visait qu'à suivre la décomposition la plus naturelle jusqu'à la structure fondamentale. C'est pourquoi nous avons interdit la saturation des noms complexes, sans altérer la totalité des noms engendrés. Mais en réalité, cette saturation est parfaitement licite. Si $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$ et $t^{(0)}(\xi)$ sont deux noms complexes, alors leurs sens sont parties du sens de $\ulcorner t_\beta^{((0))}(t^{(0)}(\beta))\urcorner$. En revanche, cette fois, la sémantique en jeu nous assure

immédiatement que, en poursuivant la décomposition des deux premiers noms, nous aboutissons à la même structure fondamentale de $\ulcorner t_{\beta}^{((0))}(t^{(0)}(\beta))\urcorner$ qu'en exploitant la grammaire de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$. Pour les besoins de l'exemple, supposons que le nom du Vrai '$\mathbf{V}$' soit intégré à l'idéographie. Formons le nom '$\mathfrak{a}$ $((\mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = \mathbf{V})$' en respectant la morphologie de $\mathscr{L}'_{\text{aux}}$:

$$\begin{array}{rccc}
\textbf{Sat}: & \text{`}\xi = \zeta\text{'}\,;\ \text{`}\Delta\text{'}\,;\ \text{`}\Delta\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\Delta = \Delta\text{'} \\
\textbf{Sat}: & \text{`}\xi = \zeta\text{'}\,;\ \text{`}\Delta = \Delta\text{'}\,;\ \text{`}\mathbf{V}\text{''} & \rightarrowtail & \text{`}(\Delta = \Delta) = \mathbf{V}\text{'} \\
\textbf{Désat}: & \text{`}(\Delta = \Delta) = \mathbf{V}\text{'}\,;\ \text{`}\Delta\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}(\xi = \xi) = \mathbf{V}\text{'} \\
\textbf{Sat}: & \text{`}\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))\text{'}\,;\ \text{`}(\xi = \xi) = \mathbf{V}\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\mathfrak{a}\ ((\mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'}
\end{array}$$

En résumé :

$$\text{`}\Delta = \Delta\text{'} \quad \rightarrowtail \quad \text{`}(\Delta = \Delta) = \mathbf{V}\text{'} \quad \rightarrowtail \quad \text{`}\mathfrak{a}\ ((\mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'}$$

À présent, prenons un chemin qui exploite la saturation d'un nom complexe :

$$\begin{array}{rccc}
\textbf{Sat}: & \text{`}\Phi(\xi)\text{'}\,;\ \text{`}\Gamma\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\Phi(\Gamma)\text{'} \\
\textbf{Sat}: & \text{`}\xi = \zeta\text{'}\,;\ \text{`}\Phi(\Gamma)\text{'}\,;\ \text{`}\mathbf{V}\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\Phi(\Gamma) = \mathbf{V}\text{'} \\
\textbf{Désat}: & \text{`}\Phi(\Gamma) = \mathbf{V}\text{'}\,;\ \text{`}\Gamma\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\Phi(\xi) = \mathbf{V}\text{'} \\
\textbf{Sat} & \text{`}\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))\text{'}\,;\ \text{`}\Phi(\xi) = \mathbf{V}\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\mathfrak{a}\ (\Phi(\mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'} \\
\textbf{Désat} & \text{`}\mathfrak{a}\ (\Phi(\mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'}\,;\ \text{`}\Phi(\mathfrak{a})\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'} \\
\hline
\textbf{Sat}: & \text{`}\xi = \zeta\text{'}\,;\ \text{`}\Delta\text{'}\,;\ \text{`}\Delta\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\Delta = \Delta\text{'} \\
\textbf{Désat}: & \text{`}\Delta = \Delta\text{'},\ \text{`}\Delta\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\xi = \xi\text{'} \\
\hline
\textbf{Sat}: & \text{`}\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'}\,;\ \text{`}\xi = \xi\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\mathfrak{a}\ ((\mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'}
\end{array}$$

En résumé :

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{`}\Phi(\Gamma)\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\Phi(\Gamma) = \mathbf{V}\text{'} & \rightarrowtail & \text{`}\mathfrak{a}\ (\Phi(\mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'} & & \text{`}\Delta = \Delta\text{'} \\
 & & & & & & \text{`}\mathfrak{a}\ ((\mathfrak{a} = \mathfrak{a}) = \mathbf{V})\text{'}
\end{array}$$

Voyons le pendant sémantique des deux méthodes. Concernant la première, $\mathbf{St}_{\text{`}\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))\text{'}}$ permet de déterminer la référence de notre nom en fonction de celle que reçoit '$\Delta = \Delta$' pour toute interprétation de '$\Delta$', laquelle nous est donnée en appliquant à deux reprises $\mathbf{St}_{\text{`}\xi=\zeta\text{'}}$. Concernant la seconde, $\mathbf{St}_{\text{`}\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))\text{'}}$ permet de déterminer la référence de '$\mathfrak{a}$ $(\Phi(\mathfrak{a}) = \mathbf{V})$' pour une interprétation de '$\Phi(\xi)$' en fonction de celle que reçoit '$\Phi(\Gamma) = \mathbf{V}$' pour toute interprétation de 'Γ'. Celle-ci est en retour déduite de $\mathbf{St}_{\text{`}\xi=\zeta\text{'}}$, relativement à l'interprétation de '$\Phi(\xi)$'. Par ailleurs, la référence de '$\Delta = \Delta$' pour toute interprétation de '$\Delta$' – connue grâce à $\mathbf{St}_{\text{`}\xi=\zeta\text{'}}$ – nous octroie l'interprétation attendue pour '$\Phi(\xi)$', faisant ainsi peser *exactement* les mêmes conditions sur notre nom pour qu'il réfère au Vrai ou au Faux que la première méthode. Voilà précisément ce qui importe : que les conditions sémantiques soient les mêmes bien que nous y accédions dans un ordre différent. Quelle que soit la manière dont nous décomposons progressivement un nom complexe, nous retrouvons toujours les mêmes noms simples, qui y jouent sémantiquement le même rôle – *i.e.* vis-à-vis de la détermination de sa référence. Au bout du compte, les deux décompositions dévoilent la même structure fondamentale, constituée des mêmes éléments dédiés à la même fonction sémantique.

La notion d'insaturation, fondamentalement sémantique, fut brutalement répercutée sur le plan ontologique sans que Frege n'apporte jamais aucune justification à ce geste. Il n'a pas expliqué pourquoi il séparait catégorialement les références déterminées par certains sens catégorialement distincts. Et pour cause : l'essentiel était que, lorsque des références sont atteintes *via* un sens insaturé, elles jouent alors le rôle *sémantique* de liens entre les objets. 'Sémantique', parce que la manière dont elles sont déterminées permet, conjointement avec la manière dont d'autres entités sont déterminées, de déterminer une fois pour toutes une entité. Rigoureusement, parce qu'une entité est déterminée sur la base des interprétations possibles pour certains noms simples auxiliaires, elle permet, conjointement avec d'autres modes de détermination, de déterminer une entité indépendamment de ces interprétations. C'est donc bien dans le rôle que joue le mode de détermination d'une certaine entité vis-à-vis d'autres modes de détermination que cette entité permet de *lier* des entités.

Si, contrairement à Frege, nous refusons de projeter les catégories logiques dans la sphère ontologique, alors rien ne s'oppose plus au développement d'une théorie telle que nous l'avons proposée en section 3.3.6.3, *i.e.* qui fasse référence à travers des noms propres aux entités qui sont aussi déterminées par des sens fonctionnels. Parallèlement, en franchissement le même cap que Frege, il demeure possible de développer une théorie sur la base des relations de références pour les noms de niveaux supérieurs – $\mathbf{R}^{(0)}_{\beta}(t^{(0)}(\xi), h(\beta), \mathscr{I})$, etc. Ces deux théories permettraient, à travers leurs axiomes, d'établir quelles sont les références de chaque nom du langage. Mais l'une comme l'autre emprunteraient des détours qui dissimuleraient les positions sémantiques fondamentales de Frege. Par exemple, la seconde s'appuierait sur le nom '$h(\xi)$' du métalangage, et ainsi sur la manière dont la fonction $h(\xi)$ est déterminée dans le métalangage, au lieu de s'en tenir au nom $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ du langage-objet qui, par sa forme et la notion d'interprétation qui l'accompagne, révèle directement la manière dont la fonction est déterminée dans le langage-objet. C'est précisément parce que la notion d'insaturation est sémantique – et non parce que Frege l'a transposée dans son ontologie – que toute sémantique organiquement fregéenne est tenue de la respecter, à travers l'usage de noms auxiliaires et la mobilisation des interprétations possibles pour ces noms.

3.3.8.7 Synthèse

Dans les *Grundgesetze*, Frege a posé les bases d'une théorie sémantique, puis esquissé les preuves, d'une part, que cette théorie déterminait une référence pour chaque nom du langage et, d'autre part, que son système était adéquat. Ces démonstrations auraient abouti sans encombre si, d'aventure, il n'avait pas sollicité les parcours-de-valeurs. Les passages en question, que les membres du courant antisémantique disqualifient sous prétexte qu'il s'agit d'élucidations, avaient à ses yeux une dimension proprement théorique. Il n'avait rien à objecter au développement d'une sémantique dans une langue idéale. Comme nous l'avons vu, elle aurait pu s'y déployer sans problème. Il n'y eut jamais recours parce qu'il n'a pas envisagé d'utiliser cette discipline autrement que pour préparer son système, ce qui ne pouvait avoir lieu qu'à l'extérieur de celui-ci. C'est donc parce qu'il limitait son propre usage de la sémantique à des fins élucidatoires qu'il maintint cette science dans les griffes des langues vernaculaires, et non parce qu'il croyait que cette "non-science" en était captive qu'il la qualifiait d''élucidatoire'.

Cette sémantique s'appuie sur une stratégie techniquement assez proche de celle de Tarski. Si nous résistons néanmoins à parler d''assignation' et de 'variable', c'est parce que Frege rejetait l'idée que certains constituants des énoncés d'un langage scientifique puissent disposer d'un contenu variable (ou indéterminé). Pour lui, il ne s'agit pas d'assigner un contenu à '$\mathfrak{a}$ $(P(\mathfrak{a}))$' à travers les différentes valeurs prises par '$P(\mathfrak{a})$' selon chaque assignation de '$\mathfrak{a}$'. Il s'agit d'assigner

des contenus *fixes* à '$\mathfrak{a}$ $(\varphi(\mathfrak{a}))$' et à '$P(\xi)$' – constitutifs de celui de '$\mathfrak{a}$ $(P(\mathfrak{a}))$' – en indiquant les valeurs prises pour chaque argument. Il n'était donc pas question de faire varier une partie du contenu de ce nom, mais seulement d'en spécifier les parties en fournissant un moyen de déterminer la référence de '$P(\Delta)$' relativement à celle qui était attribuée à 'Δ', ainsi que la référence de '$\mathfrak{a}$ $(\varphi(\mathfrak{a}))$' relativement à celle qui était attribuée à '$\Phi(\xi)$'. La notion sémantique d'insaturation unissait l'idée qu'un sens est constitué de sens simples à un procédé de variations d'interprétations permettant de déterminer ces sens simples, lequel reposait sur l'usage des noms auxiliaires.

Dans le second chapitre [233], nous avons reconstruit en détail la morphologie que Frege suggéra tout au long des *Grundgesetze*. Dans la présente section, nous avons vu qu'elle ne permettait pas exactement de "refléter la structure des pensées". Nous avons choisi de débuter par sa grammaire imparfaite pour éviter les considérations sémantiques que toute correction exigeait. Surtout, les deux versions sont techniquement assez proches ; nous avons pu procéder ici aux modifications parce que la totalité des mécaniques syntaxiques sollicitées – notamment la saturation et la désaturation – avaient déjà été rigoureusement définies là-bas. Par ailleurs, nous sommes parvenus à identifier l'erreur de Frege : exiger que deux noms de l'idéographie se saturent l'un l'autre en un sens propre – que deux sens s'unissent toujours en un sens propre. En réalité, cette exigence provient du fait que, pour fixer la référence d'un nom insaturé issu d'une saturation, il importe de saturer ce nom par des noms simples auxiliaires, et ainsi de travailler sur un nom propre *du langage enrichi*. Néanmoins, peut-être imputons-nous à Frege une faute dont nous sommes seuls responsables. Après tout, nous avons dit que le terme 'nom' renvoyait aux noms auxiliaires dans le critère de référentialité du §29. La situation pourrait être similaire dans le §26, au sein duquel apparut la désaturation. L'exemple du §30 semble confirmer ce point, puisqu'il fut l'occasion de désaturer un nom simple *auxiliaire* dans un nom complexe. Il est possible que Frege ait implicitement et provisoirement ajouté les noms auxiliaires à sa langue, même lorsqu'il en décrivait la morphologie.

En réalité, la situation est plus complexe. L'argument correct – bien que résumé – pour justifier la désaturation des noms simples auxiliaires est le suivant : si nous sommes parvenus à déterminer la référence d'un nom quelle que soit celle qui est attribuée à un nom simple auxiliaire qui y figure, alors nous sommes parvenus à déterminer la référence du nom de fonction qui résulte de la désaturation de ce nom simple. Pourtant, dans le §30, Frege dit tout autre chose. Il expliqua que la procédure de construction d'un nom pouvait toujours être répétée en remplaçant un constituant par un autre nom du même type. Ainsi formulé, l'argument est syntaxique – impliquant des noms différents – et non sémantique – impliquant différentes interprétations d'un même nom. Au fil des *Grundgesetze*, Frege maintint une certaine confusion vis-à-vis des lettres grecques majuscules. Il ne parvint jamais à tirer au clair l'explication selon laquelle il "[les] emplo[yait] comme s'il s'agi[ssait] de noms qui réfèrent à quelque chose, sans statuer sur leurs références" [234], et n'a donc pas conçu sa propre sémantique dans toute sa complexité. Cependant, pour l'instant, les dégâts sont superficiels. Certes, les clauses générales formulées en allemand – par exemple dans les §§26 et 29 – sont ambiguës. Mais la situation se précise dès que les lettres grecques majuscules sont mobilisées, que ce soit à l'occasion d'un exemple de désaturation (§30), de l'introduction d'axiomes (§18) ou de règles (§20). Nous voyons que Frege a su poser les bases de sa sémantiques, et qu'il l'a correctement exploitée. Finalement qu'importe qu'il ait échoué à la développer dans toute sa rigueur, nous avons pu nous y employer pour lui.

Néanmoins, un mal plus profond s'engouffra par les parcours-de-valeurs. Tant que nous les

233. en section 2.3.

234. Le lecteur ne sera pas surpris de nous voir diagnostiquer à cet endroit précis la cause de nombreux désaccords entre commentateurs.

tenions à l'écart, nous pouvions sereinement préciser certaines formulations imparfaites de Frege. Après correction, celles-ci convenaient parfaitement à son usage *homogène* des lettres grecques majuscules. Malheureusement, dès que nous prenons les parcours-de-valeurs en considération, nous voyons surgir une utilisation gravement hétérogène de ces symboles. Les formules incriminées cessent d'être de simples maladresses de rédaction, pour devenir le reflet d'une confusion maligne entre deux visions différentes de la référentialité, qui coexistent clandestinement dans les *Grundgesetze*. Nous avons présenté la première, qui constitue le socle remarquable d'une sémantique parfaitement convenable. La seconde n'aura pas cette chance. Et, plus grave encore, Frege n'a jamais su les distinguer. Son insouciance technique à l'égard de symboles qu'il utilisait abondamment causa une erreur philosophique majeure, à laquelle nous allons désormais nous intéresser.

3.3.9 Les §§10, 31

Nous savons désormais que le pas d'induction procède correctement. Il permet de montrer que la référence des noms complexes peut être déduite sur la base de celles des noms simples, lorsque ces dernières sont fixées conformément au principe de complétude. Pour parvenir à cette conclusion, nous avons néanmoins dû enrichir considérablement le contenu du §30 – qui s'est avéré insuffisant – sans altérer pour autant l'idée qui le sous-tendait. Par ailleurs, il nous a fallu éclaircir la formulation du §29 qui, en l'état, présentait une importante ambiguïté. Désormais, nous allons découvrir que celle-ci n'était pas le fruit d'une simple maladresse d'écriture, mais provint d'une confusion dont Frege ne parvint jamais à se débarrasser, et qui explique le contenu du §31.

En amorce à cette longue étude, nous avons précisé que nous ne cherchions pas à reconstituer *le* chemin que Frege avait emprunté pour sa démonstration, mais à comprendre les confusions dont il fut responsable, et qui permettent après-coup d'envisager également différentes directions. À cette fin, nous avons dit qu'il fallait distinguer ces confusions des simples défauts de formulation ou autres imprécisions de son texte. Nous avons prévenu que l'affaire serait délicate car, à divers moments, s'il n'a pas distingué ce qui devait l'être, c'est qu'il n'a pas formulé correctement ce qu'il fallait. À ce titre, le cas du §29 est emblématique. Si Frege s'était appliqué à énoncer le critère de référentialité avec davantage de rigueur, il aurait noté – et donc levé dans un sens ou dans l'autre – l'ambiguïté dans laquelle il le maintint jusqu'au bout. Nous avons réalisé cette étape à sa place, pour comprendre l'intuition logée au cœur du §30, et pour conférer un visage accompli à ce dernier. Cette tâche fut possible parce que ce paragraphe ne met en jeu qu'une seule version du critère ambigu, à laquelle nous nous sommes donc limités. Mais le §31 n'eut pas cette chance, car Frege y mobilisa les deux versions.

Certains commentateurs voient dans cette section le signe qu'il traitait la quantification de second ordre de manière substitutionnelle – par exemple Dummett –, qu'il fit involontairement droit à une approche contextuelle de la référentialité à laquelle il n'adhérait plus – par exemple Resnik – ou encore qu'il aborda, dans ce seul contexte, l'opérateur des parcours-de-valeurs comme s'il était prédicatif – par exemple Linnebo. Nous ne croyons pas – et nous allons contester – que le pêché originel se situe dans ces lieux, bien qu'il ait pu biaiser son regard à ces différents niveaux. Par ailleurs, à partir de leurs conclusions respectives, ces auteurs demandent ce qui manquait à la preuve en question. Mais Frege tentait de démontrer la référentialité des noms de son langage. Le fait que la preuve soit correcte *à ses yeux* dépend donc de sa conception de la référentialité, qui présente des traits proprement hétérogènes. La question que nous souhaitons poser – et qui nous apparaît comme la plus pertinente – est donc la suivante : Frege a-t-il maintenu une ambiguïté parce qu'il a échoué à implémenter techniquement une vision claire de la référentialité,

ou parce que cette vision était elle-même confuse ? Ainsi, notre premier objectif consiste à dévoiler les aspects techniques concernant lesquels il a été suffisamment peu rigoureux pour créer cette ambiguïté. Cette fois encore, nous allons retrouver le problème des lettres grecques majuscules.

3.3.9.1 Un autre usage des lettres grecques majuscules

Dummett explique que "les explications de Frege concernant la quantification de deuxième ordre, contrairement à celles qu'il fournit pour le premier ordre, dévoilent son caractère substitutionnel et non objectuel" (1991b, p. 217). Le nom de fonction relatif à cette quantification fut le dernier introduit par Frege, et ne fut malheureusement pas présenté aussi rigoureusement que les autres. Au moment de discuter la loi IIb, il écrivit :

> Soit $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ un nom de deuxième niveau à un argument [de type (0)] dont la place est marquée par 'φ'. Alors $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\,\Omega_\beta(f(\beta))$ est le Vrai seulement si la valeur de notre fonction de deuxième niveau est le Vrai pour tout argument adapté. (Frege 1893, p. 42)

Dummett estime qu'il ne peut s'agir d'une stipulation car, à proprement parler, les cas dans lesquels la valeur de la fonction n'est pas le Vrai en tout argument ne sont pas pris en considération. Il préfère donc s'en remettre au passage suivant qui, à première vue, s'appuie sur une vision substitutionnelle de la quantification de second ordre :

> '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$ $\mathfrak{f}(\Gamma)$' doit être compris comme la valeur de vérité de : un nom du Vrai est
> $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $\mathfrak{f}\mathfrak{a})$
> toujours obtenu quel que soit le nom de fonction introduit à la place de '$\mathfrak{f}$' dans
> '$\mathfrak{f}(\Gamma)$'
> $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $\mathfrak{f}\mathfrak{a})$
>
> (Frege 1893, p. 35)

Prise à la lettre, cette formulation appuierait effectivement l'interprétation de Dummett. Néanmoins, nous savons désormais comment ce type de tournures doit être entendue. Ici, Frege tentait de justifier la loi IIa. Il sollicitait implicitement un nom '$\Phi(\xi)$', ainsi que 'Δ' et 'Γ' furent mobilisés pour fonder l'axiome III. En somme, il tentait de montrer que le Vrai serait toujours obtenu quel que soit l'interprétation du *nom auxiliaire* substitué à '$\mathfrak{f}$', autrement (et imparfaitement) dit quelle que soit *la référence de* '$\Phi(\xi)$' lorsque ce dernier nom est substitué à '$f(\xi)$'. Il n'existe pas davantage de raison d'y lire le signe d'une quantification substitutionnelle que dans le cas du premier ordre. Au début de son raisonnement, il indiqua que "$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$ [était] le Vrai seulement si la valeur de la fonction correspondante $\Phi(\xi)$ [était] le Vrai en tout argument". D'une part, il laissa clairement apparaître le nom auxiliaire en question. D'autre part, il ne s'occupa pas non plus des cas dans lesquels la fonction ne prenait pas toujours la valeur Vrai, ainsi qu'il s'abstint dans le passage écarté par Dummett. Les raisons sont identiques dans les deux situations : la justification de la loi IIa (respectivement la loi IIb) ne nécessitait pas de prendre ces cas en considération pour la quantification de premier (respectivement de second) ordre. Puisque Frege s'était donné la peine de formuler une rigoureuse stipulation pour le premier ordre, il comptait sur le fait que le lecteur soit capable d'en déduire celle qui correspondait au second. Rien n'expliquerait qu'il ait fait l'impasse à son sujet s'il ne l'avait pas conçue de manière analogue [235].

235. Incidemment, nous souhaitons démarquer la position que nous venons de combattre de celle qu'Hintikka et Sandu défendent dans (1992, voir aussi 1994). L'idée que Frege ait franchement adopté ou involontairement fait droit à la quantification substitutionnelle pour le deuxième ordre est absente de "Frege : Philosophy of Language".

En outre, dans un texte posthume, il proposa successivement les deux formulations différentes pour présenter la même quantification :

> Ce que dit une phrase close par le trait de jugement, qui comprend des lettres latines d'objets, c'est que son contenu est vrai quels que soient les noms propres doués de références que l'on substitue à chaque lettre, dès lors qu'on remplace une seule et même lettre partout où elle figure dans la phrase par le même nom propre. Et, comme les noms propres sont des signes qui réfèrent à un seul objet bien déterminé, on peut éventuellement formuler cela aussi de la façon suivante : une telle phrase dit que son contenu est vrai quels que soient les objets qu'on veuille entendre par les lettres latines d'objets qui y figurent. (Frege 1882c, pp. 166-167)

À ses yeux, les deux tournures valaient pour chaque cas : premier et second ordre. Il n'y a donc pas lieu de croire qu'il ait conçu la quantification d'une certaine manière – substitutionnelle – en évoquant les noms –, et d'une autre – objectuelle – en évoquant les objets. Il n'a pas non plus *confondu* les deux conceptions, car il n'ignorait pas que son langage ne permettait pas de construire un nom pour chaque objet. La méthode grâce à laquelle nous pouvons "entendre [n'importe quel] objet par les lettres latines d'objets" – et ainsi quantifier sur la totalité des objets – consiste justement à remplacer ces lettres par des noms *auxiliaires*. Néanmoins, nous savons que Frege n'a pas proprement développé ni ne concevait clairement cette méthode. La plupart du temps, il se contentait de traiter vaguement les lettres grecques comme si elles possédaient une "quelconque" référence. Nous avons pris soin, en prolongeant le travail de Heck, de traduire rigoureusement ce point dans le contexte fregéen. Au contraire, Frege s'est maintenu à un niveau intuitif qui, dans certains cas, entraîna une véritable bifurcation dans son usage. L'exemple le plus explicite se tient dans l'écritures des schémas de règles :

> Si l'énoncé '$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, \Gamma\\ \;\;\llcorner\, \Delta\end{array}$' a reçu le label '$\alpha$' et '$\vdash \Delta$' le label '$\beta$', alors j'écrirai l'inférence soit ainsi :
>
> $$\text{`}\quad (\beta) :: \frac{\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\, \Gamma\\ \;\;\llcorner\, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma}\;\text{'} \qquad \text{soit ainsi :} \qquad \text{`}\quad (\alpha) : \frac{\vdash \Delta}{\vdash \Gamma}\;\text{'}$$
>
> (Frege 1893, p. 25)

Elle n'apparut sous la plume de Dummett qu'en 1991, précisément lorsque celui-ci examina les §§29-31. Demopoulos en conclut que "Dummett avança [finalement] de nouvelles considérations qui semblent appuyer la vision de Hintikka et Sandu selon laquelle Frege aurait favorisé une certaine interprétation non-standard de la quantification" (2011, p. 4). Mais, à ce sujet, les positions de Dummett d'un côté, et d'Hintikka et Sandu d'un autre, sont très éloignées. Le premier estime qu'au second ordre, Frege ne quantifiait pas sur la totalité de ce qu'il reconnaissait *lui-même* comme étant des fonctions. Les seconds prétendent que ce qu'il reconnaissait comme telles ne correspond pas à ce que *nous* reconnaissons désormais comme telles. Plus exactement, ils affirment qu'il n'admettait pas comme parcours-de-valeurs tout ce qui est admis comme ensembles dans le cadre standard – entendu au sens de Henkin – dans lequel l'arithmétique peut être développée. L'argument que nous venons de présenter s'oppose seulement à la première idée, contestant que Frege ait jamais restreint sa quantification, volontairement ou non, vis-à-vis de ce qu'il concevait comme la totalité des fonctions. La critique d'Hintikka et Sandu est différente. Ces derniers estiment que Frege n'a pas "trouv[é le] moyen de générer suffisamment de concepts (et, donc, d'ensembles) afin de répondre aux exigences existentielles de la théorisation mathématique" (p. 309 / 194). Leur question n'est donc pas liée à la manière dont Frege aurait restreint sa quantification vis-à-vis de son cadre général, mais à ce cadre lui-même qui serait insuffisant pour asseoir "l'ensemble de son projet logiciste en ce qu'il ruine sa définition de l'équinuméricité des nombres" (p. 207). Burgess (1993), Bell et Demopoulos (1993), ainsi que Heck et Stanley (1993) ont contesté cette conclusion. Nous n'y croyons pas davantage, mais son examen nous entraînerait trop loin de notre présente recherche. Par conséquent, nous ne la discuterons pas ici.

> Un énoncé avec une lettre latine peut toujours être transformé en un énoncé avec une lettre gothique dont le creux est séparé du trait de jugement seulement par un trait horizontal. Nous écrivons ainsi une telle transition :
>
> $$\frac{\text{‘}\vdash \Phi(x)}{\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a})\text{’}}$$
>
> (Frege 1893, p. 32)

Frege indiqua que tout marqueur ou nom du bon type pouvait librement se substituer à ‘Γ’ ou ‘Δ’ dans le premier schéma, et à ‘$\Phi(\xi)$’ dans le second. À un (mauvais) usage des guillemets près [236], il les employa donc ici comme le furent ‘t^0’ et ‘$t^{(0)}(\xi)$’ dans notre notre dernière section, *i.e.* comme des signes schématiques pour les noms et marqueurs du langage-objet [237]. Il n'a pas lui-même envisagé la traduction technique de ses intuitions sémantiques, et s'en tenait à expliquer parfois qu'il utilisait les lettres grecques majuscules comme des "noms disposant d'une quelconque référence", parfois comme des "noms quelconques du langage", sans réellement cerner la différence. Celle-ci est pourtant cruciale : le premier usage renvoie à des noms auxiliaires ajoutés provisoirement au langage-objet pour en fixer la sémantique, tandis que le second implique des signes schématiques du métalangage permettant d'écrire des schémas dans lesquels ces signes sont destinés à être remplacés par des marqueurs du langage-objet. Le premier permettait de présenter la quantification objectuelle en termes de substitutions, de réaliser le pas d'induction du §30, de définir les noms primitifs, et de justifier les règles et les axiomes, et le second servait à présenter les schémas de règles. Mais Frege ne formula pas le moindre avertissement quant à cette bifurcation, comme s'il s'agissait d'une nuance négligeable. Au contraire, l'écart entre les deux cadres est considérable. Le premier soutient une vision non-contextuel du critère du §29, tandis que le second en livre une lecture contextuel. L'erreur du §31 prend sa source dans cette confusion entre ces deux utilisations, qui reflète une importante tension dans la notion de référentialité mobilisée à cette occasion.

Le double usage des lettres grecques majuscules ne se propagea pas jusqu'à la quantification. Si un contradicteur avait objecté qu'il ne suffisait pas de remplacer les lettres latines par un quelconque nom – car certains objets ne disposaient d'aucun nom dans le langage –, Frege aurait simplement répondu qu'il n'impliquait pas ici les expressions de son langage, mais des noms utilisés comme s'ils "référ[ai]ent à quelque chose, sans statuer sur leurs références" (nbp. 3, p. 9), retrouvant la vision objectuelle de la quantification qu'il avançait partout ailleurs. La même remarque s'applique à la justification de ses règles et axiomes – hors parcours-de-valeurs. Dans ces différents contextes, il faisait droit à une méthode – basée sur les noms auxiliaires – qui lui permettait effectivement d'arriver à ses fins. S'il ne développa jamais techniquement cette méthode, il parvint néanmoins à l'exploiter convenablement. En la clarifiant, il devient aisé de corriger les quelques imperfections de sa rédaction. Ainsi, dans ces différents contextes, la présentation intuitive des lettres grecques majuscules fut totalement innocente, car elle en sous-tendait une utilisation parfaitement homogène. Parallèlement, l'écriture des règles d'inférence se cantonna au deuxième usage de ces lettres, sans jamais solliciter le premier. Si Frege avait dédié des contextes exclusifs à chaque utilisation, son manque de clarté aurait été sans conséquence. Le problème émergea précisément dans le lieu qui *réunit* ces deux usages : le §31. Pour le comprendre, nous devons commencer par examiner le §10, dans lequel des données essentielles à la preuve qui y est (prétendument) conduite furent collectées.

236. et indépendamment du fait que nous nous limitions aux noms, sans impliquer les marqueurs.
237. enrichi ou non, le problème est le même.

3.3.9.2 Le §10

Au moment d'introduire ses noms primitifs, Frege livra un moyen de déterminer une valeur en tout argument. Ce faisant, il octroyait un sens et une référence à chacun de ces noms. Le procédé fonctionnait correctement dans la quasi-totalité des cas, n'impliquant spécifiquement que les valeurs de vérité comme objets, lesquelles sont reconnues par "quiconque forme un jugement". En revanche, il ne pouvait aboutir au même résultat en stipulant que la référence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' associait chaque fonction de type (0) à son parcours-de-valeurs, car rien n'assurait l'existence de ces parcours-de-valeurs. C'est pourquoi cette stipulation, réalisée dans le §9, était insuffisante. Frege emprunta donc un autre chemin pour établir la référentialité de ce nom [238], dans lequel il s'engagea au sein du §10, croyant finalement aboutir au sein du §31. En premier lieu, nous allons soigneusement présenter sa stratégie, ainsi que l'importante confusion qu'elle renferme. Il sera ensuite temps de la questionner.

Frege commença par formuler ce que, suivant Heck, nous nommerons 'la stipulation initiale' : la référence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' permet de transformer la généralité d'une identité en une identité de parcours-de-valeurs, et *vice versa*.

> **Stipulation initiale :** La référence de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon))$' est toujours égale à celle de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$'.

Il se demanda ensuite si cette stipulation fixait bel et bien la référence en question, autrement dit s'il existait une unique fonction autorisant ces transformations. Au début du §10, il apporta une réponse négative. Il reconnut qu'en "présentant la combinaison de signes '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(\Psi(\alpha))$' comme co-référentielle avec '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$', [il n'avait] en aucune manière fixé la référence d'un nom comme '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$'" (p. 16). Il importe d'observer les *deux* traductions qu'il proposa pour cette affirmation. Sautons d'abord quelques lignes, afin de les présenter dans l'ordre qui nous semble le plus pertinent :

> Si nous supposons que $X(\xi)$ est une fonction qui ne reçoit jamais la même valeur pour différents arguments, alors le même critère de reconnaissance vaut pour les objets dont les noms prennent la forme '$X(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))$' que ceux dont les signes prennent la forme '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$'. Car ainsi '$X(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))))$' est aussi co-référentiel avec '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$'. Il s'ensuit qu'en identifiant la référence de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(\Psi(\alpha))$' et celle de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$', la référence d'un nom tel que '$\Phi(\xi)$' n'est en rien déterminée, au moins s'il existe une telle fonction $X(\xi)$. (Frege 1893, p. 16)

En utilisant une fonction injective de type (0), Frege établit qu'il n'existait pas une *unique* fonction de type ((0)) permettant les transformations souhaitées. En effet, en supposant l'existence d'une telle fonction – candidate pour la référence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' –, il *montra* celle d'une seconde. Il conclut alors que la stipulation initiale n'était pas suffisante pour fixer la référence du nom en question. Néanmoins, il importe de préciser son raisonnement, afin d'éviter le piège dans lequel Wehmeir et Schroeder-Heister [239] ont sombré. Ces auteurs contestent que l'argument doive être lu ainsi car, prétendent-ils, il ne peut aboutir dans ce cadre.

L'objection est développée en supposant que la référence attribuée à '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' n'envoie pas — ξ sur le Vrai. Wehmeir et Schroeder-Heister utilisent la fonction injective $X(\xi)$ qui échange le Vrai et $\dot{\varepsilon}(— \varepsilon)$, sans faire varier aucun autre objet. Ils observent alors que, $\dot{\varepsilon}(— \varepsilon)$ étant distinct du Vrai, il ne tombe pas sous le concept — ξ. Par conséquent, celui-ci est différent de $\xi = \dot{\varepsilon}(— \varepsilon)$. Suivant Frege, ils entendent ensuite spécifier la référence d'un nouveau nom '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', en stipulant

238. et accessoirement celle de '$\backslash\xi$' qui en dépendait.
239. (K. Wehmeier 1999 ; K. F. Wehmeier et Schroeder-Heister 2005)

qu'elle associe l'objet $X(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$ à toute fonction $\Phi(\xi)$. Enfin, ils comparent les références des deux noms ci-dessous :

$$\text{`}\mathfrak{a}\,((-\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} = \acute{\alpha}(-\,\alpha)))\text{'} \qquad \text{`}\acute{\varepsilon}(-\,\varepsilon) = \acute{\varepsilon}(\varepsilon = \acute{\alpha}(-\,\alpha))\text{'}$$

Si, comme le croit Frege, la référence attribuée à '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' permet de transformer la généralité d'une égalité en une égalité de parcours-de-valeurs, alors ces deux noms doivent être coréférentiels. Pourtant '$\acute{\varepsilon}(-\,\varepsilon)$' réfère à $X(\dot{\varepsilon}(-\,\varepsilon))$, *i.e.* au Vrai ; tandis que, selon Wehmeir et Schroeder-Heister, '$\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \acute{\alpha}(-\,\alpha))$' réfère à $X(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \dot{\alpha}(-\,\alpha)))$, *i.e.* à $\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \dot{\alpha}(-\,\alpha)))$ qui est distinct du Vrai.

Le lecteur aura peut-être compris leur erreur. En réalité, '$\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \acute{\alpha}(-\,\alpha))$' ne réfère pas à $X(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \dot{\alpha}(-\,\alpha)))$ mais à $X(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = X(\dot{\alpha}(-\,\alpha))))$, c'est-à-dire à $X(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \mathbf{V}))$, donc au Vrai. Nous avons présenté cette objection de telle façon que la faille en devienne apparente, mais nous souhaitons en exposer la cause. L'argument de Frege était le suivant : puisque les deux langages – avec l'esprit doux et l'accent aigu – respectaient la stipulation initiale, alors celle-ci ne suffisait pas à fixer la référence d'un nom. Pour parvenir à son but, Frege devait d'abord attribuer une référence à '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' en s'appuyant sur celle (supposée) de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Wehmeir et Schroeder-Heister raisonnent comme s'il avait fixé la référence de ce nom en déterminant directement celles de tous les noms *complets* du nouveau langage – c'est-à-dire de l'idéographie dans laquelle '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' s'est substitué à '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' – dans lesquels il apparaît :

> Pour tout nom propre t de l'idéographie, notons t' le résultat du remplacement de chaque esprit doux par un accent aigu dans t. Alors la référence de t' est l'objet auquel $X(\xi)$ associe celle de t : $\mathbf{R}(t') = X(\mathbf{R}(t))$

Ainsi conçu, il est clair que l'argument est fallacieux. La manière dont la référence d'un nom t' est spécifiée joue un rôle dans celle qui est requise pour, notamment, $\ulcorner\acute{\varepsilon}(\varepsilon = t')\urcorner$. Dans l'exemple ci-dessus, nous attendons du nom '$\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \acute{\alpha}(-\,\alpha))$' qu'il réfère à la valeur de $\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$ en $\xi = \acute{\alpha}(-\,\alpha)$, et non en $\xi = \dot{\alpha}(-\,\alpha)$. La difficulté peut sembler insurmontable : comment spécifier les références des noms propres dans lesquels figurent $\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$ tandis qu'elles dépendent les unes des autres ? À première vue, nous ne pouvons pas procéder récursivement à cause du rôle des noms complexes, qui fut étudié lors de l'examen du pas d'induction. Le problème *va* en effet se révéler fatal, lorsqu'il nous rattrapera dans le §31. Mais, dans le §10, Frege n'escomptait aucunement spécifier la référence des noms intégrant $\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$ les uns en fonction des autres. Et il importe de comprendre ce qu'il avait le droit de faire ici – et qu'il réalisa correctement – parce qu'il s'agit précisément de ce qui lui était interdit là-bas – et qu'il invoqua pourtant. Dans notre affaire, Frege fixa la référence de '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' en *supposant* que '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' vérifiait la stipulation initiale, donc qu'il disposait lui aussi d'une référence. Il n'eut qu'à spécifier, non pas quelle référence était attachée à chaque *nom propre* dans lequel figurait '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', mais simplement quelle valeur prenait cette fonction en chaque *argument*. En d'autres termes, il se contenta de procéder *exactement* comme il l'avait fait pour ses autres noms primitifs, en impliquant encore les lettres grecques majuscules. Complétons à peine son argument, en écrivant le début qui lui fait défaut :

> Nous connaissons la référence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', autrement dit la valeur de cette référence en tout argument $\Phi(\xi)$. Nous pouvons donc librement spécifier celle de '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' en stipulant qu'elle associe tout argument $\Phi(\xi)$ à $X(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))$. Puisque les références des autres noms primitifs sont aussi fixées, alors nous pouvons appliquer le pas d'induction pour déterminer celles de tous les noms du langage.

Et le nom en question vérifie bien la stipulation initiale, ainsi que Frege le précisa en mobilisant lui-même les lettres grecques majuscules. La référence de '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' envoie celle de '$-\,\xi$' sur

la valeur de $X(\xi)$ en $\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)$, *i.e.* sur le Vrai. Par conséquent, '$\acute{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)$' réfère au Vrai, donc '$\xi = \acute{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)$' désigne $\text{—}\,\xi$. Or la référence de '$\acute{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' envoie celle de '$\xi = \acute{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)$' sur la valeur de $X(\xi)$ en $\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \acute{\alpha}(\text{—}\,\alpha))$, donc sur $X(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon))$, autrement dit sur le Vrai. Nos deux noms ont la même référence, et nous pourrions reproduire généralement ce raisonnement. Il fonctionne parce que le pas d'induction procède correctement. En somme, Wehmeir et Schroeder-Heister n'ont simplement pas tenu compte du rôle spécifique des lettres grecques majuscules, dont Frege fit pourtant usage dans le passage concerné. Puisqu'il *supposait* qu'un premier nom disposait d'une référence, il pouvait librement fixer celle d'un second en employant la même méthode que pour tous les autres noms primitifs : spécifier sa valeur en chaque argument à l'aide de ces lettres [240].

Mais cette stratégie ne permet pas d'attribuer directement une référence au nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', *i.e.* sans s'appuyer sur celle d'un nom différent. Puisque Frege refusait de tenir pour acquise l'existence des parcours-de-valeurs, il devait emprunter un sentier alternatif. Il entreprit alors de solliciter *autrement* le critère de référentialité du §29. Le lecteur aura probablement noté que, jusqu'à présent, nous avons mobilisé ce critère exclusivement pour établir la référentialité des noms de *fonctions*. Le rôle logique de ces noms étant de déterminer des valeurs relativement à des arguments, leur référence ne dépend que de ces valeurs. Pour établir que la référence des noms complexes se déduit de celles des noms simples, il nous a ainsi suffit de montrer que, lorsque ces valeurs étaient déterminées pour les noms simples de fonctions, alors elles l'étaient pour les noms complexes.

En revanche, il n'existe *a priori* aucune raison de caractériser un objet à travers les valeurs sur lesquels les fonctions l'envoient. Un nom insaturé réfère à une fonction lorsqu'il est attaché à une manière de déterminer des objets relativement à des arguments, conforme à l'action de cette fonction ; et un nom complet réfère à un objet lorsqu'il est attaché à une manière de déterminer cet objet. Nous avons vu comment ces deux aspects s'accordaient afin qu'un sens et une référence soient conférés aux noms complexes dès lors qu'ils l'étaient aux noms primitifs. En somme, si le critère de référentialité est interprété à la lumière de la notion fregéenne de fonction – sur laquelle se base le principe de complétude –, alors il n'existe aucune raison de l'adapter aux noms propres. Pourtant, non seulement Frege le formula aussi pour ces derniers, mais il tenta incontestablement d'exploiter ce pendant pour établir la référentialité du nom pour les parcours-de-valeurs. Voyons notamment la seconde traduction qu'il proposa du fait que la stipulation initiale ne permettait

240. Nous saisissons cette occasion pour digresser légèrement. Wehmeir et Schroeder-Heister présentèrent leur objection afin de défendre une autre lecture du §10. Dans cette section, Frege montra que si les transformations recherchées étaient permises pour une fonction de second niveau, alors elles l'étaient aussi pour une autre. Selon toute vraisemblance, il tentait ainsi d'établir l'existence de *plusieurs* interprétations possibles pour le nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', *i.e.* d'interprétations *distinctes* qui respectaient la stipulation initiale – si une au moins y parvenait. Ceci le conduisit à exiger une autre stipulation – qu'il formula à la fin du paragraphe – pour fixer la référence en question. On voit mal comment ce passage pourrait être compris différemment, *i.e.* autrement que comme une nouvelle illustration d'un raisonnement proprement *sémantique*. Il s'agit donc d'un défi supplémentaire adressé au clan antisémantique, qui se voit une fois encore contraint de défendre sa lecture en dépit des apparences.

Rickett (1997) tenta de relever le défi, appuyé par l'objection de Wehmeir et Schroeder-Heister. Nous savons désormais que celle-ci n'aboutit pas, ne causant aucun tort à la lecture (naturelle) sémantique. Mais nous n'allons pas discuter directement leur analyse. Nous avons déjà longuement critiqué la manière dont Ricketts, Weiner, etc., tentèrent vainement de nier l'évidence quant à l'introduction des noms primitifs, axiomes et règles, ainsi qu'à la réalisation du pas d'induction. À ces sujets, nous avions des arguments particuliers à avancer, basés sur l'examen de leurs idées générales. Ces arguments nous paraissent suffisants pour écarter définitivement la thèse selon laquelle Frege n'a jamais envisagé aucun usage théorique des notions sémantiques, co-substantielle de leur interprétation du §10. Ils peuvent donc aussi être avancés contre cette dernière, sans qu'il soit nécessaire d'en examiner le détail. Par ailleurs, Heck (2012, pp. 110-117) s'est déjà emparé du problème, s'opposant point par point à cette interprétation. Nous n'avons ni à redire ni à ajouter à son travail, auquel nous renvoyons donc le lecteur curieux de découvrir une nouvelle tentative – toujours aussi peu convaincante – de la part des membres du clan antisémantique de montrer que Frege ne voulait pas vraiment dire ce qu'il disait, dès lors qu'il traitait de sémantique.

pas de fixer la référence de ce nom :

> Nous disposons toujours d'un moyen pour reconnaître un parcours-de-valeurs comme le même s'il est désigné par un nom tel que '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$', à travers lequel il est toujours reconnaissable comme un parcours-de-valeurs. Néanmoins, nous ne pouvons pas encore décider si un objet qui ne nous est pas donné comme un parcours-de-valeurs est un parcours-de-valeurs ou à quelle fonction il appartient ; pas plus que nous pouvons décider en général si un parcours-de-valeurs particulier possède une certaine propriété si nous ne savons pas que cette propriété est connectée avec une propriété de la fonction correspondante. (Frege 1893, p. 16)

L'expression 'en général' doit ici être prise au sérieux. Malgré des présentations relativement éloignées, la seconde objection de Frege est une *généralisation* de la première. Quelle que soit la référence de '$\Phi(\xi)$' et'$\Psi(\xi)$', il est possible déterminer la valeur de vérité de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon))$'. En effet, $\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$ possède la propriété $\xi = \dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon))$ si et seulement si $\Phi(\xi)$ possède la propriété $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$. Or nous pouvons déduire la valeur de vérité de $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$ à partir de celles de '$\Phi(\xi)$', '$\Psi(\xi)$' et '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$'. En revanche, nous ne sommes pas en mesure de déterminer celle de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta$' – où '$\Delta$' dispose d'une quelconque référence – car aucune transformation ne nous conduit au résultat. En remarquant que nous sommes incapables de décider si un objet Δ est un parcours-de-valeurs ou de quelle fonction il est le parcours-de-valeurs, Frege signala simplement que nous ne pouvons savoir s'il possède la propriété $\xi = \Delta$. Généralement, nous ne pouvons donc pas toujours déterminer si un parcours-de-valeurs particulier possède une certaine propriété.

En quoi cette incapacité influe-t-elle sur la référentialité de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' ? Nous savons que ce nom est référentiel si et seulement si, quelle que soit la référence de '$\Phi(\xi)$', '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' dispose d'une référence. À ce stade, Frege entreprit d'appliquer à nouveau son critère pour ce *nom propre*. Pour ce faire, il fallait déterminer la référence des résultats de la saturation des noms de premier niveau par celui-ci, autrement dit décider si ce parcours-de-valeurs possédait les propriétés désignées par ces noms. Or voilà justement ce qu'il estimait impossible. Néanmoins, il ne précisa pas s'il impliquait les noms auxiliaires ou seulement ceux de l'idéographie, maintenant le doute quant à la version du critère mobilisée. Dans tous les cadres que nous avons examinés jusqu'à présent, il choisit l'option non contextuelle. Par conséquent, nous nous attendons à ce qu'il adopte ici la même position. Pourtant, après avoir avancé l'argument des permutations – établissant que, si une interprétation convenait pour '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', alors une autre faisait aussi l'affaire –, il expliqua :

> Comment cette indétermination peut-elle être levée ? En déterminant pour chaque fonction, lorsque nous l'introduisons, quelle valeur elle reçoit lorsqu'elle prend des parcours-de-valeurs pour arguments, tout comme pour tous les autres arguments. Réalisons cette tâche pour les fonctions considérées jusqu'à présent. Il s'agit des suivantes[241] : $\xi = \zeta$, $-\!\!-\xi$, $\top\xi$. (Frege 1893, p. 16)

Frege entreprit de déterminer la référence de '$\Psi(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))$' lorsque '$\Psi(\xi)$' disposait d'une quelconque référence, donc d'établir la référentialité du résultat de la saturation d'un nom *simple* de premier niveau *de l'idéographie* par '$\Phi(\xi)$'. Bien que rien ne l'assure encore, il pourrait être possible d'en déduire la référence du résultat de la saturation de n'importe quel nom – simple ou complexe – de premier niveau *de l'idéographie* par '$\Phi(\xi)$'. En revanche, il n'existe aucun moyen d'en déduire une valeur relative à chaque *fonction* de premier niveau, autrement dit de déterminer la référence de '$\Psi(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))$' lorsque '$\Psi(\xi)$' dispose d'une *quelconque* référence. C'est donc incontestablement au critère *contextuel* de référentalité que Frege fit ici appel.

241. À ce stade de l'ouvrage, Frege n'avait pas encore introduit le nom pour l'implication.

Pourquoi laissa-t-il entendre que nous pouvons décider si un parcours-de-valeurs particulier possède une certaine propriété dès lors que nous savons que cette propriété est connectée avec une propriété de la fonction correspondante ? *A priori*, la réponse suivante s'impose comme la plus naturelle. Supposons qu'une propriété $\Psi(\xi)$ soit ainsi connectée avec une propriété $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$. Alors nous pouvons déterminer la référence de '$\Psi(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))$' : il s'agit de celle de '$\Omega_\beta(\Phi(\beta))$'. Néanmoins, cette réponse ne peut convenir au regard de ce que nous venons de dire. En réalité, Frege supposa deux noms $t^{(0)}(\xi)$ et $t'^{((0))}_\beta(\varphi(\beta))$ *de l'idéographie*, respectivement de type (0) et ((0)), et envisagea que la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))\urcorner$ se réduise à celle de $\ulcorner t'^{((0))}_\beta(\Phi(\beta))\urcorner$. Si un tel $t'^{((0))}_\beta(\varphi(\beta))$ avait existé dans tous les cas, la démarche aurait consisté à réduire progressivement les noms intégrant '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' à des noms qui ne l'intègrent pas, et dont nous connaissons ainsi la référence. Mais elle n'aurait abouti que si les $t'^{((0))}_\beta(\varphi(\beta))$ n'étaient jamais eux-mêmes constitués de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', sans quoi la circularité aurait à nouveau menacé.

Nous pouvons constater deux points importants. D'une part, Frege n'expliqua pas comment déterminer la référentialité des résultats de la saturation des noms de l'idéographie par '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' à partir de celle des résultats de la saturation des noms *simples* de l'idéographie par '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$. D'autre part, il employa la version *contextuelle* du critère, qu'il avait jusqu'alors laissée sur la touche. Pire encore, son raisonnement complet *mélange* les deux versions. Pour établir la référentialité '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', il questionna celle de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' lorsque '$\Phi(\xi)$' dispose d'une quelconque référence, faisant ainsi droit au critère non contextuel. En revanche, pour établir la référentialité de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$', il examina celle de $\ulcorner t'^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\urcorner$ lorsque t est un nom de premier niveau *de l'idéographie*, s'appuyant sur le pendant contextuel de son critère.

Et nous ne sommes pas au bout de nos surprises. Frege expliqua ensuite que la référence d'un nom $\ulcorner_{\top}\, t\urcorner$ pouvait être déterminée à partir de celle de '$-\!\!-\, \Delta$'. Par ailleurs, il remarqua que la référence de ce dernier nom était identique à celle de '$\Delta = (\Delta = \Delta)$'. Enfin, nous pouvons compléter son argument en formulant le point trivial – qu'il tut probablement pour cette raison – selon lequel '$\Delta = \Gamma$' et '$\Gamma = \Delta$' ont même référence. Par conséquent, si nous parvenons à déterminer la référence du nom '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \zeta$', alors nous disposerons d'un moyen pour aboutir à celles des quatre noms ci-dessous, établissant ainsi la référentialité de la saturation de tout nom simple de premier niveau de l'idéographie par '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' :

$$\text{`}_{\top}\, \dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\text{'} \qquad \text{`}-\!\!-\, \dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\text{'} \qquad \text{`}\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \zeta\text{'} \qquad \text{`}\xi = \dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\text{'}$$

Frege connaissait donc son objectif : déterminer la référence de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta$' relativement à celle de 'Δ'. Néanmoins, puisque la stipulation initiale ne permettait pas d'atteindre ce but, il ajouta une stipulation complémentaire selon laquelle les valeurs de vérité sont identiques à des parcours-de-valeurs spécifiques.

> **Stipulation complémentaire** : La référence de '$\dot{\varepsilon}(-\!\!-\, \varepsilon)$' est le Vrai et celle de '$\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\,_{\top}\!\smile^{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$' est le Faux.

Deux questions émergent immédiatement : pourquoi avait-il le droit de procéder à cette stipulation ? Et comment celle-ci règle-t-elle le problème ? Voici sa réponse à la première interrogation :

> La question de savoir si les valeurs de vérité sont des parcours-de-valeurs ne peut être décidée à partir du seul fait que '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(\Psi(\alpha))$' a la même référence que '$\smile^{\mathfrak{a}}\, (\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$'. Il est possible de stipuler généralement que '$\tilde{\eta}(\Phi(\eta)) = \tilde{\alpha}(\Psi(\alpha))$' doit avoir la même référence que '$\smile^{\mathfrak{a}}\, (\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$', sans que nous puissions inférer pour autant l'égalité entre $\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$ et $\tilde{\eta}(\Phi(\eta))$. Nous pourrions ainsi avoir une classe d'objets dont les noms prennent la forme $\tilde{\eta}(\Phi(\eta))$ pour lesquels vaut le même critère d'identification et de différentiation que pour les parcours-de-valeurs. Nous pourrions

> alors déterminer la fonction $X(\xi)$ en disant que sa valeur doit être le Vrai pour $\tilde{\eta}(\Lambda(\eta))$ en argument, et qu'elle doit être $\tilde{\eta}(\Lambda(\eta))$ pour le Vrai en argument ; et de plus que la valeur de $X(\xi)$ doit être le Faux pour l'argument $\tilde{\eta}(M(\eta))$, et doit être $\tilde{\eta}(M(\eta))$ pour le Faux en argument ; enfin que pour tout autre argument, la valeur de la fonction $X(\xi)$ coïncide avec l'argument lui-même. Ainsi, pour autant que les fonctions $\Lambda(\xi)$ et $M(\xi)$ ne prennent pas toujours la même valeur en le même argument, notre fonction $X(\xi)$ n'aurait jamais la même valeur en différents arguments, et donc '$\tilde{\eta}(\Phi(\eta)) = \tilde{\alpha}(\Psi(\alpha))$' serait aussi toujours co-référentiel avec '$\smile^{\mathfrak{a}}(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$'. Les objets dont les noms prennent la forme $X(\tilde{\eta}(\Phi(\eta)))$ seraient donc identifiés par le même moyen que les parcours-de-valeurs, et $X(\tilde{\eta}(\Lambda(\eta)))$ serait le Vrai et $X(\tilde{\eta}(M(\eta)))$ serait le Faux. Par conséquent,sans contredire notre identification de $\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\alpha}(\Psi(\alpha))$ avec $\smile^{\mathfrak{a}}(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$, il est toujours possible de spécifier qu'un parcours-de-valeurs quelconque est le Vrai et qu'un autre parcours-de-valeurs quelconque est le Faux. Nous allons donc stipuler que $\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)$ est le Vrai et que $\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\neg\smile^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$ est le Faux. (Frege 1893, p. 17)

Frege reprit l'argument qu'il avait développé plus haut, selon lequel nous pouvons modifier la référence du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' à l'aide d'une fonction injective $X(\xi)$ sans contredire la stipulation initiale. Si la fonction en question permute chaque valeur de vérité avec un parcours-de-valeurs sans faire varier les autres objets, alors la nouvelle interprétation attribue le Vrai et le Faux comme références aux deux noms (dans la première interprétation) des parcours-de-valeurs concernés. Il en conclut qu'il est toujours possible de spécifier que deux noms de parcours-de-valeurs, quels qu'ils soient [242], réfèrent à ces objets. Il choisit '$\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)$' pour le Vrai et '$\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \neg\smile^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$' pour le Faux, identifiant ainsi chaque valeur de vérité à son singleton.

---

242. En réalité, il existe des exceptions et des contre-exemples à son raisonnement. Supposons qu'une interprétation $\mathscr{I}_1$ attribue à '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' une référence qui vérifie la stipulation initiale, et qui n'envoie aucun argument sur une valeur de vérité. Pour tout nom t de l'idéographie, notons $\ulcorner\left(t\right)^{\mathscr{I}_1}\urcorner$ sa référence dans $\mathscr{I}_1$. Nous savons que $\left(\text{—}\,\xi\right)^{\mathscr{I}_1}$ et $\left(\xi = \dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{\mathscr{I}_1}$ sont distincts, car $\left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{\mathscr{I}_1}$ n'est pas le Vrai. Soit $X(\xi)$ la fonction injective qui permute seulement le Vrai avec $\left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{\mathscr{I}_1}$ et le Faux avec $\left(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_1}$. Considérons l'interprétation $\mathscr{I}_2$, construite grâce à $X(\xi)$ selon le procédé développé par Frege, qui envoie toute fonction $\Phi(\xi)$ sur l'image par $X(\xi)$ de la valeur en $\Phi(\xi)$ de la référence que $\mathscr{I}_1$ attribue à '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', autrement dit :

$$\left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{\mathscr{I}_2} = \left(\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\right)^{\mathscr{I}_2}(\left(\text{—}\,\xi\right)^{\mathscr{I}_2}) = X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\right)^{\mathscr{I}_1}(\left(\text{—}\,\xi\right)^{\mathscr{I}_2})\right)$$

Ce cas ne présente aucun problème, car les deux interprétations attribuent les mêmes références aux autres noms primitifs de l'idéographie. Ainsi $\left(\text{—}\,\xi\right)^{\mathscr{I}_1} = \left(\text{—}\,\xi\right)^{\mathscr{I}_2}$, et :

$$X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\right)^{\mathscr{I}_1}(\left(\text{—}\,\xi\right)^{\mathscr{I}_2})\right) = X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\right)^{\mathscr{I}_1}(\left(\text{—}\,\xi\right)^{\mathscr{I}_1})\right) = X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{\mathscr{I}_1}\right) = \mathbf{V}$$

Le problème intervient dans le cas du nom qui est censé être envoyé sur le Faux :

$$\left(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_2} = X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\right)^{\mathscr{I}_1}(\left(\xi = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_2})\right)$$

Si nous avions $\left(\xi = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_1} = \left(\xi = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_2}$, alors nous pourrions conclure :

$$X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\right)^{\mathscr{I}_1}(\left(\xi = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_1})\right) = X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_1}\right) = \mathbf{F}$$

Voilà la stipulation complémentaire, mais est-elle réellement fondée ? Faisons le point, Frege donna deux traductions du fait qu'une ou plusieurs stipulations ne permettaient pas à elles seules de fixer la référence du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' :

(1) En supposant l'existence d'une première interprétation vérifiant les stipulations, alors nous pouvons en construire une seconde.

(2) À partir de ces seules stipulations, il n'est pas possible de montrer que $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\urcorner$ est référentiel pour tout nom $t^{(0)}(\xi)$ de l'idéographie, lorsque '$\Phi(\xi)$' dispose d'une quelconque référence.

Au début du §10, Frege concéda que (2) était vrai relativement à la stipulation initiale. Néanmoins, il ne le démontra pas directement. Il se contenta de le justifier en prouvant (1), suggérant ainsi que (1) impliquait (2). Ce lien de causalité fut aussi revendiqué lorsqu'il proposa de "lever l'indétermination" liée à (1) en réfutant (2), cette fois relativement aux *deux* stipulations (initiale et complémentaire). Autrement dit, il proposa de prouver non (2) afin d'établir non (1). Pourtant, il est clair que les deux stipulations ne permettent pas collectivement de démontrer que (1) est faux. Supposons qu'une interprétation $\mathscr{I}_1$ vérifie la stipulation initiale et attribue le Vrai et le Faux aux deux noms de parcours-de-valeurs choisis par Frege. Considérons la fonction $X(\xi)$ qui permute les objets $\left(\dot{\varepsilon}(_{\top}\,\varepsilon)\right)^{I_1}$ et $\left(\dot{\varepsilon}(_{\top}\,(\varepsilon = (_{\top}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))))\right)^{I_1}$. Alors l'interprétation $\mathscr{I}_2$ construite sur la base de $X(\xi)$ selon la méthode de Frege vérifie la stipulation initiale. De plus[243] :

Mais ceci est incorrect car, comme nous venons de le voir, $\left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{\mathscr{I}_2} = \mathbf{V}$. Par conséquent $\left(\xi = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_2}$ ne subsume que le Vrai, donc il s'agit de $\left(\text{—}\,\xi)\right)^{\mathscr{I}_1}$. Ainsi :

$$\left(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \dot{\alpha}(\text{—}\,\alpha))\right)^{\mathscr{I}_2} = X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\right)^{\mathscr{I}_1}(\left(\text{—}\,\xi)\right)^{\mathscr{I}_1})\right) = X\left(\left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{\mathscr{I}_1}\right) = \mathbf{V}$$

En somme, $\mathscr{I}_2$ attribue le Vrai comme référence aux deux expressions, et n'attache aucun nom au Faux.

Nous rejoignons la remarque de Wehmeir et Schroeder-Heister. Lorsque $\mathscr{I}_1$ envoie un nom t de parcours-de-valeurs sur un objet Δ, alors $\ulcorner\left(t\right)^{\mathscr{I}_2}\urcorner$ n'est pas toujours égal à $X(\Delta)$. Précisément, il est possible que ce ne soit pas le cas lorsque le nom de fonction t' qui vient saturer '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' pour former t intègre lui même le nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. En effet, t' peut ainsi recevoir deux interprétations différentes dans $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$. Or $\ulcorner\left(t\right)^{\mathscr{I}_2}\urcorner$ est l'image $\left(\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))\right)^{\mathscr{I}_2}$ par $\ulcorner\left(t'\right)^{\mathscr{I}_2}\urcorner$. Par conséquent, si ce dernier objet est différent de $\ulcorner\left(t'\right)^{\mathscr{I}_1}\urcorner$, alors :

$$\ulcorner\left(t\right)^{\mathscr{I}_2}\urcorner \neq X\left(\left(t\right)^{\mathscr{I}_1}\right)$$

Heureusement, Frege choisit deux noms de fonctions – '$\text{—}\,\xi$' et '$\xi = (_{\top}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$' – qui n'intègrent pas le nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Son raisonnement fonctionne donc correctement dans ce cas précis, et l'objection de Wehmeir et Schroeder-Heister n'est pas davantage concluante ici qu'elle ne l'était plus haut. Mais nous concédons que la manière dont il formula son argument suggère qu'il échappa à la difficulté sans l'avoir aucunement aperçue ; par "chance", pourrions-nous dire, si nous ignorions l'issue tragique de toute cette affaire.

243. Comme nous l'avons vu en note de bas de page 242, ceci provient du fait que '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' ne figure dans aucun des quatre noms '$\text{—}\,\xi$', '$_{\top}\,\xi$', $\xi = \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$', '$_{\top}\,(\xi = \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$' – qui reçoivent donc les mêmes références par $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ – et du fait que ces références sont distinctes deux à deux.

$$\left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{I_2} = \left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\right)^{I_1} = \mathbf{V}$$
$$\left(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\mathfrak{a} = \mathfrak{a})))\right)^{I_2} = \left(\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\mathfrak{a} = \mathfrak{a})))\right)^{I_1} = \mathbf{F}$$
$$\left(\dot{\varepsilon}(\top\,\varepsilon)\right)^{I_2} = \left(\dot{\varepsilon}(\top\,(\varepsilon = (\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))))\right)^{I_1}$$
$$\left(\dot{\varepsilon}(\top\,(\varepsilon = (\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))))\right)^{I_2} = \left(\dot{\varepsilon}(\top\,\varepsilon)\right)^{I_1}$$

$\mathscr{I}_2$ est donc différente de $\mathscr{I}_1$ – car elle inverse les références de deux noms –, tout en attribuant le Vrai et le Faux comme références des noms souhaités. Par conséquent, nous pouvons construire une *seconde* interprétation qui vérifie les stipulations initiale et complémentaire dès lors que nous faisons l'hypothèse de l'existence d'une première. Contrairement à ce que Frege prétend, la stipulation complémentaire ne permet donc absolument pas de lever l'indétermination laissée par la stipulation initiale. Les deux sont incapables de conduire collectivement à non (1).

Ce premier problème a trait au début du §10, en ce qu'il touche au lien entre les deux manières dont Frege traduit le fait que certaines stipulations ne permettent pas de fixer la référence du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Mais il existe une seconde difficulté, cette fois posée par la fin du paragraphe, *i.e.* par la justification apportée à la stipulation complémentaire. Frege explique que nous pouvons admettre cette dernière parce que, s'il existe une interprétation qui valide la stipulation initiale, alors il en existe une qui valide simultanément les deux stipulations. Il semble ainsi reconnaître que l'ajout de la stipulation complémentaire est compatible avec la recherche d'une interprétation validant la stipulation initiale. Néanmoins, son objectif ne consiste pas à démontrer non (1), qui établirait seulement qu'il existe *au plus* une interprétation validant les deux stipulations. À ses yeux, la référentialité de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' est établie à travers non (2), censé montrer que les stipulations en question *fixent* bel et bien une interprétation, autrement dit que celle-ci existe *et* qu'elle est unique. En toute rigueur, il n'a donc aucune raison de proposer une telle "justification", qui ne prépare ni n'ajoute rien à ce qu'il entend réaliser : la preuve de non (2) relativement aux deux stipulations.

Par ailleurs, Frege escompte analyser les pensées arithmétiques à l'aide du contenu de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Il ne peut donc se contenter d'établir que les deux stipulations permettent d'octroyer un contenu à ce nom, mais doit montrer que ce contenu permet effectivement d'exprimer les pensées en question. Il estime que notre accès aux nombres est subordonné à notre accès aux extensions, lequel est à son tour régi par la stipulation initiale. À ce titre, il conviendrait donc de montrer que cette stipulation suffit *en elle-même* à fixer un contenu au nom en question, qui pourrait être reconnu comme constitutif des pensées arithmétiques. Mais, puisque ce n'est pas le cas, qu'est-ce qui justifie *in fine* la stipulation complémentaire ? Pourquoi le contenu que celle-ci confère à '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' est-il plus qu'un autre constitutif de ces pensées ? Pour le dire autrement, en quoi l'interprétation ainsi fixée est-elle plus convenable que celle qui résulterait de la stipulation selon laquelle, par exemple, '$\dot{\varepsilon}(\top\,\varepsilon)$' réfère au Vrai et '$\dot{\varepsilon}(\top\,(\varepsilon = \top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\mathfrak{a} = \mathfrak{a})))$' au Faux ? Nous ne trouvons rien, au sein du §10, qui permette de répondre à cette question.

Tant que l'existence des objets spécifiques impliqués dans les définitions sémantiques des noms primitifs – *i.e.* celle des valeurs de vérité – était préalablement reconnue par Frege, sa méthode était claire. Il s'agissait de spécifier une valeur relativement à chaque argument, puis d'appliquer le pas d'induction en mobilisant le critère non-contextuel du §29, conformément au principe de complétude. Toute la difficulté provient de l'intervention des parcours-de-valeurs, dont Frege entendait justifier l'existence *via* des moyens sémantiques, *i.e.* à travers la preuve que certaines stipulations *adaptées* – voici un premier problème – permettaient bel et bien d'attribuer une référence au nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' – en voilà un second.

Et cette difficulté philosophique possède son corrélat technique dans les exploitations entremêlées des deux pendants – contextuel et non contextuel – du critère de référentialité. En effet, nous savons que le second soutient adéquatement la donnée d'une sémantique basée sur le principe de complétude, tandis que le premier rappelle le principe du contexte des *Grundlagen*, par lequel Frege escomptait fonder l'existence des objets abstraits. Ses conceptions concernant la référentialité doivent être dévoilées à travers la manière dont il articula ces deux pendants dans les §§10, 29-31. Plus précisément, nous devons comprendre si cette mécanique reflète des idées cohérentes à cet égard, ou dévoile au contraire que Frege n'est pas parvenu à réconcilier les enjeux liés à la donnée d'une sémantique *compositionnelle* et ceux de l'existence des parcours-de-valeurs.

Par ailleurs, nous avons posé une autre question technique quant à sa méthode. Pour établir la référentialité de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', Frege fait d'abord appel au critère non contextuel en questionnant celle de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' lorsque '$\Phi(\xi)$' dispose d'une quelconque référence. Il traduit ensuite ce point de manière contextuelle, projetant de déterminer la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\urcorner$ pour tout nom $t^{(0)}(\xi)$ *de l'idéographie*. Néanmoins, il laisse entendre qu'il suffit d'établir ce point lorsque $t^{(0)}(\xi)$ est un nom *simple* pour aboutir à sa conclusion, sans justifier cette hypothèse.

Enfin, une dernière interrogation vient s'ajouter aux précédentes. Comme nous l'avons vu, il parvient à réduire son objectif à la démonstration de la référentialité de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta$'. La stipulation complémentaire intervient précisément dans ce cadre :

> Puisque nous n'avons encore introduit comme objets que les valeurs de vérité et les parcours-de-valeurs, la question consiste seulement à savoir si les valeurs de vérité sont des parcours-de-valeurs. Si ce n'est pas le cas, alors il est ainsi établi que la valeur de la fonction $\xi = \zeta$ est toujours le Faux lorsqu'une valeur de vérité est prise pour un argument et un parcours-de-valeurs pour l'autre. Si, d'un autre côté, le Vrai est aussi un parcours-de-valeurs d'une fonction $\Phi(\xi)$, alors la valeur de la fonction $\xi = \zeta$ est ainsi déterminée dans tous les cas dans lesquels le Vrai est pris pour un des arguments, et la situation est similaire lorsque le Faux est aussi le parcours-de-valeurs d'une certaine fonction. (Frege 1893, p. 17)

Frege pense avoir atteint son objectif en limitant son cadre aux seuls objets déjà introduits. Cette remarque semble signer la réduction – au moins provisoire – du domaine aux parcours-de-valeurs et aux valeurs de vérité. En bref, le §10 n'est pas départi d'un certain désordre. Rappelons qu'il était censé servir le §31. Il faut donc examiner celui-ci pour préciser ces différentes difficultés, qu'il sera ensuite temps de traiter.

3.3.9.3 Le §31 : la méthode

Dans les §§10 et 30, Frege adopta le critère contextuel de référentialité pour les noms propres, et non-contextuel pour les noms de fonctions. Or il est possible de développer une stratégie qui s'appuie sur cet usage équivoque pour (tenter de) démontrer la référentialité de tous les noms d'un langage. Nous allons voir qu'en définitive, cette stratégie ne fonctionne pas, tout comme la preuve dont nous tentons ainsi de rendre compte. Mais nous soutenons que la première livre la meilleure traduction possible de la seconde. Dans un premier temps, nous n'allons pas discuter l'erreur qu'elles contiennent. Nous présenterons seulement la stratégie concernée, avant d'examiner le §31 sous ce jour particulier. Il sera ensuite temps de traiter le problème qui, appuyé par les difficultés du §10, dévoilera ultimement la position (bancale) que Frege occupait.

Donnons-nous une langue idéale $\mathscr{L}$ et son acolyte enrichi des noms auxiliaires $\mathscr{L}'$. Supposons que tous les noms de $\mathscr{L}$ se sont vus assigner une référence à l'aide de $\mathscr{L}'$ selon la méthode décrite

en section 3.3.8. Considérons ensuite un nom de fonction $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$ [244] auquel n'est conféré aucune référence selon cette méthode, mais qui est attaché à une clause sémantique C. L'objectif consiste à prouver que C suffit à fixer la référence de $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$.

Nous débutons à partir d'un domaine D_0. La première étape consiste à vérifier que les stipulations sémantiques générales associées aux noms primitifs de $\mathscr{L}$ s'adaptent au cadre limité de D_0, *i.e.* que celles des noms propres leur ont attribué pour références des objets de D_0, et que celles noms de fonctions leur ont attribué pour références des fonctions qui prennent toutes leurs valeurs dans D_0. Grâce au pas d'induction du §30, nous pouvons généraliser ce point à tous les noms de $\mathscr{L}$. La seconde étape consiste à établir que la clause C suffit à fixer la référence de $\ulcorner t^{(0)}(t_\beta^{((0))}(\Phi(\beta)))\urcorner$ pour tout nom '$t^{(0)}(\xi)$' *primitif* de $\mathscr{L}$ et pour toute interprétation $\mathscr{I}$ – autrement dit quelle que soit la référence de '$\Phi(\xi)$'. En sollicitant à nouveau le pas d'induction, nous pouvons étendre cette conclusion à tous les noms '$t^{(0)}(\xi)$' de $\mathscr{L}$. À partir du critère contextuel de référentialité, nous en déduisons que, pour toute interprétation $\mathscr{I}$, $\ulcorner t_\beta^{((0))}(\Phi(\beta))\urcorner$ possède une référence. Nous ajoutons toutes ces références à D_0 pour obtenir D_1.

Il s'agit ensuite de reproduire l'opération pour D_1. Le première étape n'a pas besoin d'être répétée. Le fait que les stipulations générales associées aux noms de $\mathscr{L}$ s'adaptent au cadre de D_1 est une conséquence de leur adéquation à celui de D_0. Seule la seconde étape doit être réitérée pour aboutir à un domaine D_2, qui conduira à son tour à D_3, etc. Nous réunissons tous les D_i dans l'ensemble D. Nous avons alors prouvé progressivement que, quelle soit l'interprétation $\mathscr{I}$, $\ulcorner t_\beta^{((0))}(\Phi(\beta))\urcorner$ disposait d'une référence, laquelle fut intégrée à D. En somme, nous avons purement et simplement démontré que $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$ était référentiel.

Sans surprise, dans notre cas particulier, D_0 est limité au Vrai et au Faux, $t_\beta^{((0))}(\varphi(\beta))$ est '$\dot{\varepsilon}(\varphi((\varepsilon))$', tandis que C n'est autre que la conjonction de nos stipulations initiale et complémentaire. Comme nous l'avons vu, l'objectif n'est pas de montrer que $\ulcorner\dot{\varepsilon}(t^0(\varepsilon))\urcorner$ est référentiel pour tout nom $t^{(0)}(\xi)$ de l'idéographie, mais que $\ulcorner\dot{\varepsilon}(\Phi^0(\varepsilon))\urcorner$ est référentiel pour toute interprétation de '$\Phi(\xi)$'. Néanmoins, le premier point étant une conséquence du second, voyons comment cette stratégie est censée intégrer progressivement les noms $\ulcorner\dot{\varepsilon}(t^0(\varepsilon))\urcorner$ de l'idéographie [245].

Notons '$\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$' l'idéographie privée du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', et donnons-nous un nom $t^{(0)}(\xi)$ de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$. Durant la première étape, nous attestons de la référentialité de $t^{(0)}(\xi)$ dans le cadre de D_0. Durant la seconde étape, nous établissons que $\ulcorner t'^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))\urcorner$ est référentiel quels que soient le nom $t'^{(0)}(\xi)$ de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$ et la référence attribuée à '$\Phi(\xi)$'. Cela vaut donc aussi lorsque '$\Phi(\xi)$' se voit assigner la référence de $t^{(0)}(\xi)$. Par conséquent, $\ulcorner t'^{(0)}(\dot{\varepsilon}(t^{(0)}(\varepsilon)))\urcorner$ est référentiel pour tout nom $t'^{(0)}(\xi)$ de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$. Ainsi, $\ulcorner\dot{\varepsilon}(t^{(0)}(\varepsilon))\urcorner$ est référentiel.

Les deux étapes liées à D_0 permettent donc d'établir la référentialité de noms tels que '$\dot{\varepsilon}(_\top\,\varepsilon)$', '$\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a})$' et, grâce à la dernière application du pas d'induction, de noms tels que '$\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon) = \dot{\varepsilon}(\varepsilon = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a})$'. En revanche, ces deux étapes sont insuffisantes dès qu'une occurrence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' figure dans la portée d'une autre occurrence de ce nom. Quel que soit l'objet de D_0 attribué comme référence à 'Δ', la référence de '$\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon = \Delta)$' n'est pas dans D_0 mais dans D_1. C'est donc seulement une fois que D_0 est étendu à D_1 que nous pouvons établir la référentialité de ce nom, et d'un même geste celle de '$\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon = \xi)$'. La seconde étape liée à D_1 nous assure alors que '$\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon = \alpha))$' est référentiel, laquelle référence est ensuite intégrée à D_3, etc. En somme, les étapes permettent d'augmenter le nombre des occurrences imbriquées du nom pour

244. Nous choisissons volontairement un nom de fonction du même type que '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', mais cette stratégie se généralise à tous les autres.

245. La stipulation associée au nom '$\backslash\xi$' permet de lui attribuer une référence dès lors que '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' en dispose. Nous pouvons donc sereinement laisser ce nom en dehors de toute cette affaire, et l'exclure provisoirement de l'idéographie.

le parcours-de-valeurs.

Examinons à présent le contenu du §31. Après avoir présenté ses noms simples, Frege annonça ainsi son objectif :

> Nous supposons que les noms pour les valeurs de vérité réfèrent à quelque chose, autrement dit au Vrai ou au Faux. Nous allons alors étendre progressivement le cercle des noms reconnus comme référentiels, en démontrant que les noms qui ont été ajoutés forment des noms référentiels avec ceux qui ont déjà été ajoutés, lorsque l'un vient occuper la place de l'argument de l'autre. (Frege 1893, p. 48)

La première phrase est déroutante. Tous les noms de l'idéographie qui réfèrent au Vrai et au Faux sont complexes, et ainsi pris dans la récurrence de cette preuve. D'ailleurs, quelques lignes plus loin, Frege prit soin de *démontrer* qu'un certain nom référait bien à une valeur de vérité. Néanmoins, si nous considérons qu'il fit ici le même usage du terme 'nom' que dans le §29 – pour désigner les noms simples auxiliaires –, alors la situation s'éclaire. Il signalait seulement que les 'Δ' et 'Γ' ne se verraient pas encore attribuer d'autres références que les valeurs de vérité, car le domaine se limitait pour l'instant à celles-ci. Or voilà précisément du point de départ de notre stratégie.

La suite du passage est extrêmement vague et requiert que nous observions comment il procéda effectivement. Il débuta par les noms simples de premier niveau à un argument :

> À présent, afin de montrer d'abord que nos noms de fonctions '$-\!\!-\,\xi$' et '$\top\,\xi$' réfèrent à quelque chose, nous devons montrer que les noms obtenus lorsque nous plaçons un nom de valeur de vérité à la place de 'ξ' sont référentiels (ici, nous ne reconnaissons pas encore d'autres objets). Ceci provient immédiatement de nos explications. Les noms obtenus sont encore des noms de valeurs de vérité.

Ici, Frege reprend la tournure utilisée dans le §10 , en parlant des objets qui ont été *reconnus*, ce qui suggère plus directement que le domaine s'est vu provisoirement restreint. Par ailleurs, il est à nouveau (extrêmement) peu probable qu'il ait convoqué les noms de valeurs de vérité de l'idéographie pour venir saturer '$-\!\!-\,\xi$' et '$\top\,\xi$'. D'une part, cela l'aurait conduit à la circularité que nous avons longuement décrite. Celle-ci est trop évidente pour que, dans ce cas, il ait choisi de garder le silence [246]. D'autre part, au moment de traiter les noms de second niveau, il exhiberait cette fois ceux qui sont censés venir les saturer : les noms simples auxiliaires. Notre conclusion est donc cohérente avec celle que nous avons tirée pour le passage précédent : il utilisa à nouveau le terme 'nom de valeur de vérité' pour désigner les lettres 'Δ' et 'Γ' dont les références devaient pour l'instant être choisies parmi le domaine $D_0 = \{\mathbf{V},\mathbf{F}\}$. Son objectif consistait à montrer que '$-\!\!-\,\Delta$' et '$\top\,\Delta$' référaient toujours à des valeurs de vérité dans ce cadre, ce qui était parfaitement claire d'après les explications générales – lire 'les stipulations sémantiques' [247] – par lesquelles il introduisit '$-\!\!-\,\xi$' et '$\top\,\xi$'. En d'autres termes, Frege cherchait à prouver que ces noms disposaient bien d'une référence lorsque les seules valeurs de vérité étaient impliquées. Voilà exactement le début de la première étape de notre méthode.

Ce point est encore plus limpide lors du traitement des noms de premier niveau à plusieurs arguments :

> Si nous plaçons des noms de valeurs de vérité au lieu de 'ξ' et 'ζ' dans '$\begin{array}{l}\top\,\xi\\ \llcorner\,\zeta\end{array}$' et '$\xi = \zeta$',

246. Comme nous l'avons vu en section 3.3.5, il n'est pas immédiat que cette circularité soit fatale. La menace qu'elle représente l'est en revanche, et Frege n'aurait certainement ni pu l'ignorer, ni choisi de la taire.

247. Nous avons analysé son usage du terme 'explication' [*Erläuterung*] en section 3.2.3.7.

> alors nous obtenons des noms qui réfèrent à des valeurs de vérité. Par conséquent, nos noms de fonctions de premier niveau à un argument sont référentiels.

Frege savait qu'il avait introduit le nom '$\xi = \zeta$' de telle sorte que '$\Delta = \Gamma$' dispose toujours d'une référence indépendamment de celles qui étaient choisies pour 'Δ' et 'Γ'. Son objectif véritable consistait à démontrer que, lorsque ces lettres référaient à des valeurs de vérité, alors il en allait de même pour '$\Delta = \Gamma$'. C'est pour cela – "par conséquent" – que ce nom de fonction était aussi référentiel *dans le cadre limité à* D_0. La situation est similaire pour les niveaux supérieurs :

> Afin d'examiner si un nom de second niveau, '$\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ \varphi(\mathfrak{a})$', réfère à quelque chose, nous demandons si, quand un nom de fonction '$\Phi(\xi)$' réfère à quelque chose, il s'ensuit que '$\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))$' est référentiel. Maintenant, '$\Phi(\xi)$' a une référence si, pour tout nom propre référentiel 'Δ', '$\Phi(\Delta)$' est référentiel. Dans ce cas, soit cette référence est toujours le Vrai (quel que soit ce à quoi 'Δ' réfère), soit elle ne l'est pas toujours. Dans le premier cas, '$\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ \Phi(\mathfrak{a})$' réfère au Vrai, dans le second, au Faux. Ainsi, dès que le nom de fonction introduit '$\Phi(\xi)$' réfère à quelque chose, il s'ensuit que '$\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ \Phi(\mathfrak{a})$' réfère à quelque chose. Par conséquent, '$\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ \varphi(\mathfrak{a})$' doit être ajouté au cercle des noms référentiels. (Frege 1893, p. 49)

La formule 'quel que soit ce à quoi 'Δ' réfère' ne laisse aucun doute. Les "noms référentiels" qui viennent saturer les noms primitifs de l'idéographie sont bien les noms simples auxiliaires. Frege n'est donc pas en train d'établir la référentialité de $\ulcorner - t \urcorner$, $\ulcorner \smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ (t^{(0)}(\mathfrak{a})) \urcorner$, etc., quels que soient les noms t et $t^{(0)}(\xi)$ de l'idéographie. Il tente de prouver celle de '$- \Delta$', '$\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ \Phi(\mathfrak{a})$)', etc., pour toutes références de 'Δ' et '$\Phi(\xi)$' lorsque le domaine est restreint aux deux valeurs de vérité.

À ce stade, la première étape de notre stratégie est quasiment achevée. Il reste seulement à étendre la conclusion aux noms complexes de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$ – *i.e.* de l'idéographie privée du nom '$\grave{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Dans le §31, Frege ne proposa rien de tel. Mais le pas d'induction du §30 fonctionnait aussi lorsque le domaine était restreint. Le travail avait donc été réalisé préalablement, et il ne restait plus qu'à accomplir la deuxième étape :

> L'affaire est moins simple avec '$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$', car ainsi nous n'introduisons pas seulement un nouveau nom de fonction, mais en même temps un nouveau nom propre (nom de parcours-de-valeurs) pour tous les noms de premier niveau à un argument et, en fait, pas seulement pour ceux qui sont déjà connus, mais aussi, à l'avance, pour tous ceux qui pourraient finalement être introduits. (Frege 1893, p. 49)

Rigoureusement, cette remarque vaut pour n'importe quel nom de type ((0)). Par exemple, '$\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ (\varphi(\mathfrak{a}))$' permet aussi de construire de nouveaux noms propres *via* sa saturation par *tout* nom de type (0) – qu'il s'agisse de '$- \xi$' préalablement introduit ou de '$\smile\!\!\!\!\!\!\mathfrak{a}\ (\mathfrak{a} = \xi)$' qui ne l'était pas encore. En quoi la situation est-elle spécifique dans le cadre des parcours-de-valeurs ? Notre stratégie apporte la réponse. Nous avons vu que l'étape liée aux noms de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$ pouvait être réalisée une fois pour toutes. En revanche, la seconde étape doit être répétée pour tous les domaines D_i progressivement étendus. Ainsi, le nom '$_{\top}\,\xi$' est tout de suite introduit parmi les noms référentiels, si bien qu'à l'issue du raisonnement appliqué à D_0, nous pouvons ajouter le nom '$\grave{\varepsilon}(_{\top}\,\varepsilon)$' au cercle des noms référentiels à travers l'extension D_1. Mais c'est seulement à ce stade que nous pouvons intégrer '$\grave{\varepsilon}(- \varepsilon = \Delta)$' parmi les noms référentiels, et c'est donc seulement après avoir réitéré la procédure pour D_1 – au moment d'étendre ce dernier en D_2 – que nous pouvons ajouter '$\grave{\alpha}(\grave{\varepsilon}(- \varepsilon = \alpha))$'.

En somme, le raisonnement doit être répété une seconde fois pour prendre en considération '$\grave{\varepsilon}(- \varepsilon = \xi)$', puis une troisième pour prendre en considération '$\grave{\alpha}(\grave{\varepsilon}(\xi = (- \varepsilon = \alpha)))$', etc. Lue sous cet angle, la remarque de Frege signale simplement qu'il ne peut plus se limiter à D_0, mais

doit réaliser sa preuve *indépendamment* du domaine D_i considéré, lequel peut éventuellement contenir des parcours-de-valeurs en plus des – autres que les – valeurs de vérité. Et c'est en effet ainsi qu'il procéda :

> En demandant si un nom de parcours-de-valeurs réfère à quelque chose, nous devons seulement considérer ceux qui sont formés à partir de noms de fonctions référentiels de premier niveau à un argument. Nous les appellerons brièvement les noms *réguliers* de parcours-de-valeurs. Nous devons examiner si un nom régulier de parcours-de-valeurs introduit en place d'argument de '$—\, \xi$', '$_\top\, \xi$' forme un nom propre et référentiel, et de plus si, introduit en ξ- ou ζ-place d'argument de '$\begin{array}{l}\top\, \xi \\ \llcorner\, \zeta\end{array}$' et '$\xi = \zeta$', il forme dans chaque cas un nom référentiel de premier niveau à un argument. (Frege 1893, p. 49)

Il ne reste plus la moindre trace du rôle privilégié que jouaient les valeurs de vérité vis-à-vis des autres noms primitifs. Et l'extrait peut encore être lu conformément à notre méthode : en considérant un domaine D_i qui contient les valeurs de vérité et d'autres parcours-de-valeurs progressivement introduits, nous devons demander si le résultat de la saturation des noms simples de premier niveau de l'idéographie par '$\grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' est référentiel indépendamment de la fonction – qui associe des objets de D_i à des objets de D_i – attribuée comme référence à '$\Phi(\xi)$'. Une ligne plus loin, Frege fit d'ailleurs usage du nom *auxiliaire* '$\grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' comme "nom régulier de parcours-de-valeurs" :

> Si on place le nom de parcours-de-valeurs '$\grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' au lieu de '$\zeta$' dans '$\xi = \zeta$', alors le problème consiste à demander si '$\xi = \grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' est un nom référentiel de premier niveau à un argument, et pour cela nous devons en retour demander si tous les noms propres qui résultent de sa saturation par un nom de parcours-de-valeurs ou de valeur de vérité est référentiel. (Frege 1893, p. 49)

Choisissons comme référence de '$\Phi(\xi)$' une fonction qui associe tout objet de D_i à un objet de D_i. Pour déterminer la référence de '$\xi = \grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$', il faut (et il suffit de) déterminer celle de '$\Delta = \grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' quel que soit l'objet de D_i auquel 'Δ' réfère. Puisque D_i ne contient que les valeurs de vérité (reconnues dès le départ) et des parcours-de-valeurs (progressivement introduits), nous sommes assurés que 'Δ' réfère à une valeur de vérité ou un parcours-de-valeurs. Frege n'en demandait pas davantage pour passer tranquillement le cap problématique :

> D'après nos stipulations selon lesquelles '$\grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' doit toujours être co-référentiel avec '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Psi(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a})$', '$\grave{\varepsilon}(—\, \varepsilon)$' doit référer au Vrai et '$\grave{\varepsilon}(\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$' doit référer au Faux, tout nom propre de la forme '$\Delta = \Gamma$' est assuré de référer si 'Δ' et 'Γ' sont des noms de parcours-de-valeurs ou des noms de valeurs de vérité. (Frege 1893, p. 49)

Nous cherchons à déterminer la référence de '$\Delta = \grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$'. '$\Delta$' peut référer à un parcours-de-valeurs de fonction qui fut introduit à une certaine étape (à un certain D_j). Dans ce cas, attribuons à '$\Psi(\xi)$' cette fonction pour référence. La référence de '$\Delta = \grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' est alors celle de '$\grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$'. Selon la stipulation initiale, il s'agit aussi de celle de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\Psi(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a}))$', laquelle peut être déterminée à l'aide de la définition sémantique de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\varphi(\mathfrak{a}))$'. Mais '$\Delta$' peut aussi référer à une valeur de vérité. Supposons qu'il s'agit du Vrai, car l'autre cas se traite de manière analogue. Selon la stipulation complémentaire, '$\grave{\varepsilon}(—\, \varepsilon)$' réfère au Vrai. Ainsi, ce dernier nom est co-référentiel avec 'Δ'. Par conséquent, '$\Delta = \grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' possède la même référence que '$\grave{\varepsilon}(—\, \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' qui, d'après la stipulation initiale, est aussi co-référentiel avec le nom '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (—\, \mathfrak{a} = \Phi(\mathfrak{a}))$'. Cette référence peut être déterminée à l'aide des définitions sémantiques de '$—\, \xi$' et '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\Psi(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a}))$'

Nous pouvons conclure que, quelle que soit la référence de 'Δ' (dans D_i), celle de '$\Delta = \dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' est déterminée. Frege n'avait donc plus qu'à employer de nouveau l'astuce du §10 pour montrer que les cas des autres noms primitifs de premier niveau - incluant cette fois celui pour l'implication – se réduisent à celui de l'égalité. Il s'y appliqua soigneusement, avant de poursuivre :

> Nous avons vu que nos noms simples de fonctions de premier niveau jusqu'alors reconnus comme référentiels, '$— \xi$', '$\vdash \xi$', '$\begin{array}{l}\vdash \xi \\ \quad\ \ \zeta\end{array}$', '$\xi = \zeta$', forment un nom référentiel lorsqu'on intègre des noms réguliers de parcours-de-valeurs à leurs places d'arguments. Les noms réguliers de parcours-de-valeurs peuvent donc être ajoutés au cercle des noms référentiels. Ainsi la même chose fut établie pour le nom de fonction '$\dot{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$', puisque lorsqu'un nom de premier niveau à un argument réfère à quelque chose, il s'ensuit que le nom propre qui résulte de son intégration à '$\dot{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$' est référentiel. (Frege 1893, p. 50)

Une nouvelle fois, notre méthode implique une étape que Frege n'a pas pris en considération. Lorsque la référence du résultat de la saturation des noms *simples* de premier niveau de l'idéographie par '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' est déterminée, il faut effectuer la même opération pour les noms *complexes* de premier niveau de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$. Cependant, ce point résulte encore du pas d'induction du §30 ou, plutôt, de la version proposée en section 3.3.8 qui s'appuie sur la morphologie adéquate de l'idéographie. Considérons un nom complexe $t^{(0)}(\xi)$ de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$. Selon cette morphologie, l'étape de construction de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))\urcorner$ durant laquelle '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' fut intégré consista à saturer un nom *simple* de l'idéographie par ce nom. D'après ce que nous venons de voir, la référence du nom ainsi obtenu est déterminée. D'après ce que nous avons vu en section 3.3.8, la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))\urcorner$ peut alors être déterminée pas à pas sur la base de celle du premier nom et des définitions sémantiques associées aux noms de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$.

À ce stade, il ne reste qu'à conclure que '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' est référentiel quelle que soit la référence attribuée à '$\Phi(\xi)$', tant qu'elle envoie des objets de D_i sur des objets de D_i, et étendre cet ensemble en D_{i+1}. Puisque ce raisonnement vaut pour n'importe quel entier naturel i, il est possible de réunir tous les D_j dans le domaine D, pour constater que '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' est référentiel quelle que soit la référence attribuée à '$\Phi(\xi)$' qui envoie des objets de D sur des objets de D. En d'autres termes, le nom '$\dot{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$' est référentiel.

3.3.9.4 Le §31 : le défaut

À présent, voyons la faille de cette méthode. Considérons l'énoncé selon lequel il existe au plus quatre parcours-de-valeurs différents [248] :

$$\text{`}\overbrace{\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2\ \mathfrak{f}_3\ \mathfrak{f}_4\ \mathfrak{f}_5}\ (\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_1(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_5(\varepsilon))) \vee (\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_2(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_5(\varepsilon))) \vee (\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_3(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_5(\varepsilon))) \vee (\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_4(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_5(\varepsilon)))\text{'}$$

$$\begin{array}{l}
\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_3(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_4(\varepsilon)) \\
\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_2(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_4(\varepsilon)) \\
\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_1(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_4(\varepsilon)) \\
\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_2(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_3(\varepsilon)) \\
\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_1(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_3(\varepsilon)) \\
\dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_1(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}_2(\varepsilon))
\end{array}$$

Puisque cet énoncé n'intègre aucune occurrence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' elle-même prise au sein d'une autre occurrence du même nom, sa référence devrait être déterminée une fois le raisonnement appliqué au domaine D_0. Théoriquement, c'est bien le cas. La seconde étape du raisonnement nous

248. Pour améliorer la lisibilité, nous utilisons le nom '$\xi \vee \zeta$' qui se définit à partir de la négation et de l'implication.

permet, à l'aide de la stipulation initiale, de déterminer la référence du nom '$\dot{\varepsilon}(\Phi_i(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_j(\varepsilon))$' pour tous entiers naturels i et j. Lors du pas d'induction, les stipulations liées à l'implication et la négation nous assurent alors le même résultat pour :

'$(\dot{\varepsilon}(\Phi_1(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_5(\varepsilon))) \vee (\dot{\varepsilon}(\Phi_2(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_5(\varepsilon))) \vee (\dot{\varepsilon}(\Phi_3(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_5(\varepsilon))) \vee (\dot{\varepsilon}(\Phi_4(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_5(\varepsilon)))$'

$\dot{\varepsilon}(\Phi_3(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_4(\varepsilon))$

$\dot{\varepsilon}(\Phi_2(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_4(\varepsilon))$

$\dot{\varepsilon}(\Phi_1(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_4(\varepsilon))$

$\dot{\varepsilon}(\Phi_2(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_3(\varepsilon))$

$\dot{\varepsilon}(\Phi_1(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_3(\varepsilon))$

$\dot{\varepsilon}(\Phi_1(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Phi_2(\varepsilon))$

Enfin, la stipulation associée à la quantification de second niveau permet de déterminer celle de notre énoncé. Malheureusement, puisque D_0 ne contient que deux objets, seules quatre fonctions différentes sont limitées à ce cadre. L'énoncé selon lequel il existe au plus quatre parcours-de-valeurs se voit donc attribuer le Vrai pour référence.

Nous n'avons pas choisi cet exemple au hasard. Nous voulons insister sur le fait que la quantification de second ordre n'est pas responsable de l'erreur. Le pas d'induction procède correctement, et permet effectivement d'obtenir la référence du premier des énoncés ci-dessus à partir de celle du second en passant par les désaturations des noms '$\Phi_i(\xi)$'. Les clauses sémantiques associées aux noms primitifs, enrichies de la stipulation initiale, conduisent à la référence du deuxième énoncé quelles que soient les fonctions de D_0 dans D_0 attribuées comme références aux '$\Phi_i(\xi)$'. La clause associée à la quantification (objectuelle) conduit donc légitimement à celle du premier nom, lorsque le domaine est réduit au Vrai et au Faux. Le problème n'est pas lié à une mauvaise appréhension de la quantification lorsque le domaine de celle-ci est fixée. Le problème provient de la prise en compte pour un domaine étendu de résultats obtenus pour un domaine plus restreint, qui a lieu à chaque application de la stipulation initiale à cause de la quantification *de premier ordre* qui y prend place.

Attribuons une référence – située dans D_0 – au nom 'Γ'. Le raisonnement appliqué à D_0 permet d'intégrer la référence des noms suivants à D_1 :

$$\text{`}\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \Gamma) \vee (\varepsilon = {}_{\top}\Gamma))\text{'} \qquad ; \qquad \text{`}\dot{\varepsilon}((\varepsilon = {}_{-}\Gamma) \vee (\varepsilon = {}_{\top}\Gamma))\text{'}$$

Il permet aussi de comparer ces références. Grâce aux clauses attachées à l'implication et à la négation, la première étape assure que le nom ci-dessous réfère au Vrai quelle que soit l'objet de D_0 attribué comme référence à 'Δ' :

$$\text{`}((\Delta = \Gamma) \vee (\Delta = {}_{\top}\Gamma)) = ((\Delta = {}_{-}\Gamma) \vee (\Delta = {}_{\top}\Gamma))\text{'}$$

La clause attachée à la quantification de premier ordre garantit alors que le nom suivant réfère au Vrai :

$$\text{`}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Big((\mathfrak{a} = \Gamma) \vee (\mathfrak{a} = {}_{\top}\Gamma)) = ((\mathfrak{a} = {}_{-}\Gamma) \vee (\mathfrak{a} = {}_{\top}\Gamma))\Big)\text{'}$$

Puis la stipulation initiale permet d'aboutir au même résultat concernant :

$$\text{`}\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \Gamma) \vee (\varepsilon = {}_{\top}\Gamma)) = \dot{\varepsilon}((\varepsilon = {}_{-}\Gamma) \vee (\varepsilon = {}_{\top}\Gamma))\text{'}$$

Ensuite, le raisonnement appliqué à D_1 (qui intègre les références de nos deux noms), est censé

attribuer une référence au nom :

$$\text{‘}\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \alpha) \vee (\varepsilon =_{\top} \alpha)))\text{’}$$

Pour cela, il faut déterminer, quelle que soit la référence ‘Λ’ choisie dans D_1, la référence de :

$$\text{‘}\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \alpha) \vee (\varepsilon =_{\top} \alpha))) = \Lambda\text{’}$$

D_1 contient le Vrai, le Faux, $\dot{\varepsilon}(\varepsilon \vee_{\top} \varepsilon)$ et $\dot{\varepsilon}({}_{\top}(\varepsilon \vee_{\top} \varepsilon))$. Pour aboutir au résultat, par exemple, pour le Vrai, il convient de déterminer la référence de :

$$\text{‘}\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \alpha) \vee (\varepsilon =_{\top} \alpha))) = \dot{\varepsilon}(\text{—}\, \varepsilon)\text{’}$$

D'après la stipulation initiale, il s'agit de celle de :

$$\text{‘}\mathfrak{a}\, \Big(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \mathfrak{a}) \vee (\varepsilon =_{\top} \mathfrak{a})) = \text{—}\, \mathfrak{a}\Big)\text{’}$$

D'après la clause associée à la quantification de premier ordre, cette référence dépend de celle du nom suivant relativement à celle de ‘Γ’ :

$$\text{‘}\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \Gamma) \vee (\varepsilon =_{\top} \Gamma)) = \text{—}\, \Gamma\text{’}$$

Le problème intervient précisément à cet endroit. Nous ne savons déterminer la référence de ce nom que si celle de ‘Γ’ est choisie dans D_0. Si, au contraire, nous optons par exemple pour $\dot{\varepsilon}(\varepsilon \vee_{\top} \varepsilon)$, alors il faut déterminer la référence de :

$$\text{‘}\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \dot{\alpha}(\alpha \vee_{\top} \alpha)) \vee (\varepsilon =_{\top} \dot{\alpha}(\alpha \vee_{\top} \alpha))) = \text{—}\, \dot{\alpha}(\alpha \vee_{\top} \alpha)\text{’}$$

Celle-ci dépend de celle de :

$$\text{‘}(\Delta = \dot{\alpha}(\alpha \vee_{\top} \alpha)) \vee (\Delta =_{\top} \dot{\alpha}(\alpha \vee_{\top} \alpha))) = (\text{—}\, \Delta \vee_{\top} \Delta)\text{’}$$

Les cas où ‘Δ’ ne réfère pas à une des valeurs de vérité exigent de relancer la boucle, et la procédure ne termine jamais. Ainsi, pour aboutir, notre méthode exige (à tort) que nous choisissions la référence de ‘Λ’ dans D_0. La même difficulté intervient lorsque nous tentons de déterminer la référence de :

$$\text{‘}\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \alpha) \vee (\varepsilon =_{\top} \alpha))) = \dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \text{—}\, \alpha) \vee (\varepsilon =_{\top} \alpha)))\text{’}$$

Cette référence est identique à celle de :

$$\text{‘}\mathfrak{a}\, \Big(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \mathfrak{a}) \vee (\varepsilon =_{\top} \mathfrak{a})) = \dot{\varepsilon}((\varepsilon = \text{—}\, \mathfrak{a}) \vee (\varepsilon =_{\top} \mathfrak{a}))\Big)\text{’}$$

Celle-ci dépend de celle de :

$$\text{‘}\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \Gamma) \vee (\varepsilon =_{\top} \Gamma)) = \dot{\varepsilon}((\varepsilon = \text{—}\, \Gamma) \vee (\varepsilon =_{\top} \Gamma))\text{’}$$

Pour les mêmes raisons, nous ne pouvons choisir la référence de ‘Γ’ dans D_1. Limités à D_0, nous savons qu'il s'agit toujours le Vrai, et notre nom initial se voit donc attribuer cette valeur de vérité tandis que, cette fois encore, nous attendions le Faux.

Tentons de déceler à quel moment le défaut est apparu. Le raisonnement appliqué à D_1 permet de déterminer la référence de ‘$\dot{\alpha}(\Phi(\alpha)) = \Delta$’ quels que soient la fonction de D_1 dans D_1 et

l'objet de D_1 attribués pour références respectivement à '$\Phi(\xi)$' et 'Δ'. Par conséquent, il suffit de connaître la référence de '$\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \xi) \vee (\varepsilon =_{\top} \xi))$' pour en déduire celle de '$\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \alpha) \vee (\varepsilon =_{\top} \alpha)))$'. Le problème est que, précisément, le nom '$\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \xi) \vee (\varepsilon =_{\top} \xi))$' ne réfère pas à une fonction de D_1 dans D_1 ; sa référence est censée prendre certaines valeurs dans D_2.

Durant l'exposé de la méthode, nous avons volontairement dissimulé une faille. Le nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' – tout comme '$\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \xi) \vee (\varepsilon =_{\top} \xi))$' – ne peut se voir attribuer de référence, relativement aux domaines D_i, comme les autres noms simples de l'idéographie. En effet, lorsque nous choisissons certaines fonctions de D_i dans D_i pour références de '$\Phi(\xi)$', alors les stipulations initiale et complémentaire exigent que, si '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' est référentiel, sa référence sorte de D_i. Notre méthode entend justifier la référentialité de ce nom en montrant que, pour tout nom $t^{(0)}(\xi)$ de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$, alors $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))\urcorner$ possède une référence, quelle que soit la fonction à arguments et valeurs dans D_i à laquelle '$\Phi(\xi)$' réfère. Elle entreprend alors de l'ajouter au domaine pour constituer D_{i+1}. Une fois cette procédure répétée ω fois, elle prétend prouver que, pour tout nom $t^{(0)}(\xi)$ de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$, la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))\urcorner$ peut être déterminée *pour toute fonction à arguments et valeurs dans* D à laquelle '$\Phi(\xi)$' référait. En réalité, elle n'aboutit jamais à un tel résultat.

Donnons-nous une fonction f de D dans D et a un objet de D. Relativement à un domaine D_i qui intègre a et dans lequel f est stable – qui contienne toutes ses valeurs lorsque ses arguments sont choisis dans D_i–, nous connaissons la référence de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta$' lorsque '$\Delta$' réfère à a et '$\Phi(\xi)$' à la restriction de f sur D_i – que nous noterons '$f_{/D_i}$. Mais nous n'avons aucun moyen d'en déduire la référence du même nom relativement à D lorsque '$\Phi(\xi)$' réfère à f. Une solution consisterait à *stipuler* l'identité des deux références :

$$\text{`}\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta\text{'}^{D} \leftrightarrow \text{`}\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta\text{'}^{D_i}$$

Néanmoins, il faudrait pour cela que cette référence demeure la même quel que soit le D_i adapté considéré. Or voilà précisément ce que nos stipulations initiale et complémentaire interdisent. En effet, à partir de ces stipulations, nous constatons aisément que D_1 doit contenir quatre éléments : le Vrai, le Faux et deux autres objets a_1 et a_2. Considérons les situations suivantes :

$D_0 = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$	$D_1 = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}, a_1, a_2\}$
$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \mapsto & \mathbf{V} \\ \mathbf{F} & \mapsto & \mathbf{F} \end{array} \right\}$	$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \mapsto & \mathbf{V} \\ \mathbf{F} & \mapsto & \mathbf{F} \\ a_1 & \mapsto & \mathbf{V} \\ a_2 & \mapsto & \mathbf{V} \end{array} \right\}$
'$\Phi(\xi)$' réfère à f	'$\Phi(\xi)$' réfère à g
'Δ' réfère à $\mathbf{V}$	'Δ' réfère à $\mathbf{V}$

La stipulation complémentaire assure que les noms ci-dessous partagent la même référence dans les deux situations :

$$\text{`}\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta\text{'} \qquad ; \qquad \text{`}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\Phi(\mathfrak{a}) = \text{—}\,\mathfrak{a})\text{'}$$

Or cette référence est le Vrai dans la première et le faux dans la seconde, tandis que f est bien une réduction de g dans D_0.

Nous pourrions produire beaucoup (une infinité !) d'exemples de ce type. Mais il est possible d'apporter un meilleur éclairage sur la profondeur de l'erreur, et sur le fait que la méthode en cause n'avait absolument aucune chance d'aboutir, en tentant de comprendre à quelle genre de tentative cette méthode faisait droit. Il a parfois été dit que le contenu du §31, s'il avait été correct, aurait assuré l'existence d'un *modèle* de l'Idéographie [249]. Dummett fait à ce titre une remarque qui nous importe, même si nous sommes en désaccord sur sa manière de l'exploiter :

> Le domaine adéquat à un langage formel peut être spécifié par voies externe ou interne. Une spécification externe le caractérise comme intégrant certains objets avec lesquels nous sommes présumés familiers – les nombres naturels, par exemple. Nous aurons généralement besoin d'un moyen d'isoler dans le métalangage des éléments particuliers du domaine ainsi caractérisé. Une spécification interne exige seulement un moyen complet d'isoler chaque élément du domaine, sans identifier ces éléments à des objets donnés d'une autre manière. Bien sûr, une spécification externe n'est pas externe au *langage* en tant que tel – elle est interne au métalangage – mais seulement au langage-objet. Une spécification interne apparaît néanmoins plus en accord avec l'usage du principe de contexte généralisé des *Grundgesetze*. Il s'ensuit certainement de ce principe qu'une spécification externe n'est pas *nécessaire*. Afin de réaliser une spécification interne du domaine, nous avons besoin d'indices, tirés d'un ensemble d'indices déjà connu, permettant d'isoler chaque élément. Nous pouvons spécifier d'abord l'ensemble d'indices, puis fournir les conditions pour que deux indices déterminent le même élément. Une fois le domaine spécifié, les prédicats et constantes individuelles doivent être interprétés conformément à ce domaine, mais cela ne peut être fait qu'une fois établi le critère d'identité entre différents indices, sans quoi un prédicat pourrait être interprété de manière incohérente, comme étant vrai d'un élément isolé par un indice et faux du même élément isolé par un autre indice. (Dummett 1991b, pp. 220-221)

Donnons-nous un ensemble I d'indices et un énoncé de la forme :

$$\text{‘}\forall x \in I, \forall y \in I, (e_x = e_y \leftrightarrow F(x,y))\text{’}$$

Cet ensemble et cet énoncé permettent conjointement de spécifier un domaine de quantification au sens où nous pouvons interpréter un langage dans une structure $\mathscr{M}$ construite sur $D = \{e_i / i \in I\}$ dès lors que, respectivement pour chaque prédicat P et pour chaque constante c du langage :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, (F(x,y) \rightarrow (P^{\mathscr{M}}(e_x) \leftrightarrow P^{\mathscr{M}}(e_y)))\,^{250}$$
$$\forall x \in I, \forall y \in I, (F(x,y) \rightarrow (c^{\mathscr{M}}(e_x) = c^{\mathscr{M}}(e_y)))$$

Dummett explique que la procédure de Frege s'apparente à une telle spécification "interne". L'ensemble I n'est autre que la totalité des noms de type (0) de l'idéographie, tandis que l'énoncé en question devient [251] :

$$\text{‘}\forall t^{(0)}(\xi) \in I, \forall t'^{(0)}(\xi) \in I(e_{t^{(0)}(\xi)} = e_{t'^{(0)}(\xi)} \leftrightarrow \forall x \in D, (t^{(0)}(x) \leftrightarrow t'^{(0)}(x)))\text{’}$$

249. par exemple (Heck 2012, p. 127).
250. Si P est d'arité 1, sinon il suffit d'adapter cette stipulation.
251. À une confusion près entre usage et mention. Rigoureusement, l'énoncé devrait être le suivant :

$$\text{‘}\forall t^{(0)}(\xi) \in I, \forall t'^{(0)}(\xi) \in I, (e_{t^{(0)}(\xi)} = e_{t'^{(0)}(\xi)} \leftrightarrow (\ulcorner \forall x \in D, (t^{(0)}(x) \leftrightarrow t'^{(0)}(x))\urcorner \text{ réfère au Vrai})\text{’}$$

Par ailleurs, il faudrait aussi intégrer la stipulation complémentaire, que nous laissons provisoirement sur la touche pour ne pas compliquer nos formules.

‘$e_{t^{(0)}(\xi)}$’ n’étant rien d’autre qu’une nouvelle manière d’écrire $\ulcorner \dot{\varepsilon}(t^{(0)}(\varepsilon))\urcorner$ – par exemple, ‘$e_{\text{‘}\text{—}\ \xi\text{’}}$’ n’étant rien d’autre qu’une nouvelle manière d’écrire ‘$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \varepsilon)$’– , cette démarche aurait dû assurer la vérité de l’énoncé suivant pour tous noms $t^{(0)}(\xi)$ et $t'^{(0)}(\xi)$ de l’idéographie :

$$\ulcorner \dot{\varepsilon}(t^{(0)}(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(t'^{(0)}(\varepsilon)) \leftrightarrow \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (t^{(0)}(\mathfrak{a}) \leftrightarrow t^{(0)}(\mathfrak{a}))\urcorner$$

Bien sûr, la circularité provient du fait que l’énoncé censé assurer la spécification du domaine D s’appuie lui-même sur ce domaine – comme le signale l’expression ‘$\forall x \in D$’. Notons néanmoins qu’aboutir au résultat ci-dessus n’aurait aucunement garanti l’existence d’un modèle de l’Idéographie. La vérité de cet énoncé pour tous noms $t^{(0)}(\xi)$ et $t'^{(0)}(\xi)$ de l’idéographie n’est pas équivalente à la vérité de loi V. Pour aboutir à cette dernière, il faudrait s’assurer que, quelles que soient les fonctions f et g de D dans D auxquelles réfèrent les noms ‘$\Phi(\xi)$’ et ‘$\Psi(\xi)$’, alors l’énoncé ci-dessous réfère au Vrai :

$$\text{‘}\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon)) \leftrightarrow \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (\Phi(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \Psi(\mathfrak{a}))\text{’}$$

Dummett estime que Frege aurait contesté cette conclusion, car il épousait une version *substitutionnelle* de la quantification de second ordre. Comme nous l’avons vu, cette conclusion ne rend pas justice à l’utilisation fregéenne des lettres grecques majuscules. En réalité, l’objectif consistait davantage à identifier I à l’ensemble des fonctions de D dans D, avant d’utiliser l’énoncé suivant pour spécifier le domaine D [252] :

$$\text{‘}\forall f \in I, \forall g \in I(e_f = e_g \leftrightarrow \forall x \in D, (f(x) = g(x))\text{’}$$

Évidemment, dans ce cadre, la circularité est encore plus flagrante, car à la fois notre énoncé et notre ensemble d’indices s’appuient sur l’ensemble D qu’ils sont censés spécifiés. La méthode que nous avons développée peut être conçue comme une tentative (malheureuse) d’échapper à cette circularité.

Débutons à partir de l’ensemble $D_0 = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. L’ensemble I_0 qui contient toutes les fonctions de D_0 dans D_0 est correctement défini. Il peut donc nous servir d’ensemble d’indices. Nous enrichissons D_0 en $D_1 = D_0 \cup \{e_f / f \in I_0\}$, spécifié grâce à l’énoncé suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{‘}\forall f \in I_0, \Big(& (e_f = \mathbf{V} \leftrightarrow \forall x \in D_0, (f(x) = \text{—}\ x))) \\ \bigwedge & (e_f = \mathbf{F} \leftrightarrow \forall x \in D_0, (f(x) = (x = \neg\forall y(y = y)) \\ \bigwedge & \forall g \in I_0, (e_f = e_g \rightarrow \forall x \in D_0(f(x) = g(x)))\Big)\text{’} \end{array}$$

Cette stratégie n’est coupable d’aucune circularité. Les deux premières lignes expriment une condition suffisante sur f pour déterminer si e_f est égal au Vrai ou au Faux – elles correspondent à la stipulation complémentaire –, et la dernière exprime une condition suffisante sur f et g pour déterminer si $e_f = e_g$ – elle correspond à la stipulation initiale. Nous pouvons ainsi prouver que, si$f$ est la fonction identité, alors e_f est le Vrai ; si f permute le Vrai et Faux, alors e_f est le Faux ; si f et g sont les deux autres fonctions de D_0 dans D_0, alors e_f et e_g sont différentes entre elles et distinctes du Vrai et du Faux. En somme, D_1 contient exactement quatre objets.

L’objectif de notre méthode consiste à répéter le processus pour générer la totalité des D_i, à les réunir en un domaine de quantification définitif D, à solliciter *ensuite* toutes les fonctions de D dans D dans un ensemble I qui nous sert d’indices, et à *conclure* à la vérité de l’énoncé suivant :

$$(\star) \qquad \text{‘}\forall f \in I, \forall g \in I, (e_f = e_g \leftrightarrow \forall x \in D(f(x) = g(x)))\text{’}$$

252. L’usage des guillemets est cette fois convenable, bien que la stipulation complémentaire fasse toujours défaut.

Ainsi conçue, la démarche n'est pas circulaire. Elle n'utilise ni I ni l'énoncé ($\star$) pour spécifier D. Elle exploite la manière dont D a été *préalablement* spécifié par induction pour définir I et pour prouver ($\star$).

L'erreur tient dans le fait que, si la définition inductive de D permet de prouver ($\star$) pour des fonctions allant de D_i dans D_i (quel que soit i), elle n'autorise absolument rien de tel pour D lui-même. En réalité, les f et les g de I ne sont *pas* ceux qui figurent en indice des éléments de D. Le seul moyen de contourner la difficulté serait de décider à quelles fonctions de D dans D "correspondent" les fonctions de D_i dans D_i, mais cette piste s'avère finalement impraticable.

Examinons généralement la situation. Conservons les D_i et les I_i tels que nous les avons définis relativement à un énoncé E_1 permettant de décider si un quelconque e_f est égal au Vrai ou au Faux et à un énoncé E_2 permettant de décider si e_f et e_g sont égaux lorsque f et g sont des fonctions de D_i dans D_i. Rigoureusement, il manque encore un énoncé E_3 afin de décider, au moment d'enrichir D_i pour aboutir à D_{i+1}, si e_f et e_g sont égaux lorsqu'une nouvelle fonction f va de D_i dans D_i tandis que g était déjà pris en compte – car il relie D_j à lui-même pour un certain $j < i$. Ci-dessus, nous avons implicitement supposé que tous les nouveaux éléments e_f – donc pour f allant de D_i dans D_i – étaient différents des anciens éléments (sauf s'il s'agissait du Vrai ou du Faux). Mais ce point pose problème car, par exemple, la fonction ${}_{\top}\xi$ se voit alors assigner une infinité de représentants : tous les éléments e_{f_i} tels que, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, f_i soit la fonction de D_i sur D_i qui envoie le Vrai sur le Faux et tous les autres éléments sur le Vrai.

Lors du passage à D_l, nous introduisons *une fois pour toutes* les e_f pour f allant de D_0 à D_O, sans savoir encore de quelle fonction *de D dans D* cet élément est supposé être le parcours-de-valeurs ; puis nous reproduisons le même schéma pour D_2, D_3, etc. La question est la suivante : donnons-nous une fonction h de D dans D, quel est l'élément e_f de D destiné à être le parcours-de-valeurs de h ? La réponse naturelle – proposée plus haut – est qu'il s'agit de e_f lorsque f est une restriction de h. Néanmoins, puisque deux parcours-de-valeurs ne peuvent être attachés à la même fonction, il est nécessaire d'identifier tous les e_f et e_g tels que f étend g. En somme, l'énoncé E_3 devient le suivant [253] :

$$\text{`}\forall i \in \mathbb{N} \forall j \in \mathbb{N}, (j < i \rightarrow \forall f \in I_i, \forall g \in I_j, (e_f = e_g \leftrightarrow \forall x \in D_j, f(x) = g(x)))\text{'}$$

À ce stade, pouvons-nous enfin affirmer que le parcours-de-valeurs d'une fonction h allant de D dans D est l'*unique* élément e_f tel que f est une restriction de h sur un quelconque D_i ? Certes, il n'est plus possible que deux éléments différents se voient désignés comme parcours-de-valeurs d'une même fonction. Néanmoins, il n'existe parfois aucune restriction de h à aucun D_i – lorsqu'il existe toujours un x appartenant à D_i tel que $h(x)$ sorte de D_i. Dans ce cas, h est purement et simplement dénué de parcours-de-valeurs. Par ailleurs, cette stratégie permet d'éviter que deux éléments ne soient plus associés à une même fonction, mais elle exige qu'un même élément puisse être associé à deux fonctions. Si g est une fonction de D_i dans D_i, alors il existe deux fonctions différentes f_1 et f_2 de D_{i+1} dans D_{i+1} qui étendent g, et deux fonctions distinctes h_1 et h_2 de D dans D qui étendent respectivement f_1 et f_2, donc unanimement g. Ces deux fonctions partagent alors le même parcours-de-valeurs e_g. Par conséquent, il n'est pas davantage possible de prouver l'énoncé ($\star$) dans ce cadre.

En somme, la construction cumulative des D_i ne permet pas de choisir naturellement un unique représentant pour chaque fonction de D dans D. D'une part, certaines fonctions sont dénuées de parcours-de-valeurs. D'autre part, soit nous formulons un critère d'identité trop fort entre les e_f, et certaines fonctions partagent le même parcours-de-valeurs ; soit nous formulons

253. Cette stipulation ne rentre pas en contradiction avec E_1 car, si cet énoncé établi que e_f et e_g sont identiques à la même valeur de vérité, alors f étend g.

un critère trop faible, et certaines fonctions admettent plusieurs parcours-de-valeurs. Face à cette situation, nous pourrions entreprendre de corriger légèrement notre construction. Visiblement, le problème est lié au fait que les éléments e_f sont intégrés à D tandis que f n'est qu'une *restriction* des fonctions de D dans D. Pour y remédier, nous pouvons exclure de D_{i+1} les éléments de D_i. Ainsi, l'élément e_g tel que g envoie le Vrai sur le Faux et le Faux sur le Vrai n'appartient plus à D_2, il est "supplanté" par tous les e_f tels que f est une extension de g. Nous évitons ainsi la question de savoir à quelle restriction d'une fonction h de D dans D correspond le parcours-de-valeurs de h. Malheureusement, en procédant de la sorte, nous avons purement et simplement vidé D de son contenu. Soit nous laissons chaque e_f dans D_{i+1}, et nous ne savons pas comment choisir entre les différentes restrictions ; soit nous les y ôtons, mais nous ne disposons plus de la moindre base pour construire D.

Une autre piste consisterait à chasser les éléments de D_i en tant que tels, mais à les "conserver en mémoire" à travers des suites adaptées. Par exemple, les éléments de D_2 seraient les couples (e_g, e_f) tels que f se comporte comme g sur D_0. En définissant ingénieusement chaque i-uplet des D_i, nous pourrions identifier D à une suite infini $(e_{f_1}, e_{f_2}, \dots)$ où chaque $e_{f_{i+1}}$ correspondrait à une fonction de D_i dans D_i. Ce faisant, D conserverait sa substance sans nous confronter au choix de la restriction de h qui détermine son parcours-de-valeurs. Nous n'allons pas approfondir cette idée, car elle nous mènerait à la même impasse : il serait à nouveau impossible de sélectionner naturellement un *représentant* pour chaque fonction – notamment et surtout pour celles dont aucun D_i n'intègre toutes les valeurs.

Il faut bien comprendre l'ambition démesurée qui se cache derrière cette méthode. Elle consiste à étendre progressivement un ensemble initial en ajoutant, à chaque étape, des éléments correspondant aux fonctions de l'ensemble actuel dans lui-même. Le but est d'exploiter la réunion infinie de tous les ensembles pour échapper à la fatalité selon laquelle ce processus grossit pas à pas l'ensemble concerné, ainsi que nous capturons par exemple $\mathbb{N}$ sur la base de $\{0\}$, $\{0, s(0)\}$, $\{0, s(0), s(s(0))\}$, etc. Nous voulons identifier un représentant d'une fonction h agissant dans le domaine définitif à travers les représentants des fonctions agissant dans les domaines restreints, donc à travers les représentants des restrictions de ces fonctions. En tant que tel, le procédé ne conduit à aucune solution naturelle, et suggère certains ajustements. Néanmoins, quelles que soient les corrections envisagées, nous ne parviendrons *jamais* à "simuler" chaque fonction agissant sur D à travers les éléments qui "simulent" les fonctions agissant sur nos ensembles provisoires. Nous n'y parviendrons pas car la fatalité évoquée plus haut touche aussi l'ensemble final. Cantor l'a montré : il existe toujours plus de fonctions de D dans D que d'éléments de D.

Suivie à la lettre, notre méthode construit des ensembles D_i finis puis les réunit dans un ensemble D dénombrable. L'ensemble D^D des fonctions de D dans D est ainsi de cardinalité $2^{\aleph_0}$, et il est impossible de construire une injection de D^D dans D, donc d'aboutir à $(\star)$. Ces problèmes de cardinalité sont doublement dramatiques : d'une part parce qu'ils condamnent à l'échec notre entreprise, mais aussi parce qu'ils révèlent que celle-ci ne pouvait conduire qu'à un ensemble trop limité pour servir l'objectif que Frege poursuivait. Ces difficultés apparaissent – pour ainsi dire – immédiatement lorsque nous présentons la situation en utilisant un métalangage pour référer aux fonctions qui s'étendent progressivement, tel que nous nous y sommes dernièrement employés. En revanche – et c'est ce qui nous importe –, elles demeurent dans l'ombre lorsque nous nous confinons au langage-objet (incluant les noms auxiliaires) ainsi que nous avons d'abord procédé.

Par exemple, le nom '$_{\top}\,\xi$' réfère à différentes fonctions selon le domaine de quantification envisagé. Bien sûr, il réfère toujours à "la" fonction qui associe le Vrai au Faux et tous les autres objets au Vrai, mais "cette" fonction dépend des objets pris en compte, autrement dit du domaine considéré. La référence du nom '$_{\top}\,\xi$' relativement à D_0 – $_{\top}\,\xi^{D_0}$ – n'est pas la référence du nom '$_{\top}\,\xi$' relativement à D – $_{\top}\,\xi^{D}$. Sans être attentif à cette distinction, nous pourrions prétendre que

$\dot{\varepsilon}({}_{\top}\,\varepsilon)^{D}$ a été fixé au moment d'ajouter au domaine la référence de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' lorsque '$\Phi$' réfère à ${}_{\top}\,\xi^{D_0}$, tandis que nous avons seulement introduit $\dot{\varepsilon}({}_{\top}\,\varepsilon)^{D_0}$. Généralement, nous pourrions croire que les noms $\ulcorner\dot{\varepsilon}(t^0(\varepsilon))\urcorner$, pour $t(\xi)$ un nom de $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$, se voient un à un attribuer une référence fixe et définitive, tandis que nous nous limitons en réalité à leur attribuer *différentes* références relatives aux D_i en jeu et, ainsi, échouons inéluctablement à attribuer une référence (même relative) au nom $\ulcorner\dot{\varepsilon}(t^0(\varepsilon))\urcorner$ lorsque $t^{(0)}(\xi)$ intègre lui-même le nom pour les parcours-de-valeurs. Ce problème fut examiné plus haut dans le cas du nom '$\dot{\alpha}(\dot{\varepsilon}((\varepsilon = \alpha) \vee (\varepsilon = {}_{\top}\,\alpha)))$', lequel exigeait un résultat pour D_2 qui n'était accessible que pour D_1.

Par conséquent, seul un regard limpide sur le rôle du nom simple auxiliaire présent dans $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)))\urcorner$ – ou dans le cas particulier '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta$' – permet de déceler le défaut de cette méthode, lorsqu'elle est présentée à l'aide de tels noms. Or nous savons que Frege cernait mal le fonctionnement général de ces derniers, bien qu'il les employa lui-même à bon escient dans divers lieux. Il s'agit probablement d'une des raisons qui expliquent qu'il échoua à détecter la faille du §31. Mais ceci ne répond pas à toutes nos questions, car Frege ne cherchait pas coûte que coûte à construire *un* modèle de l'idéographie, mais à récupérer *le* cadre de l'arithmétique. Pour comprendre les raisons qui l'ont motivé à s'en remettre à cette méthode, il faut commencer par quelques remarques concernant le principe du contexte.

3.3.9.5 Quelques remarques au sujet du principe du contexte

Le principe du contexte fut seulement présenté dans les *Grundlagen* à travers l'énoncé ci-dessous.

Principe du contexte : On doit rechercher ce que les mots veulent dire, non pas isolément, mais pris dans le contexte des énoncés.

Par ailleurs, rappelons que Frege exploita les deux versions suivantes du critère de référentialité dans les §§10, 29-31 :

Critère non contextuel : Un nom $t^{(0)}(\xi)$ est référentiel si et seulement si, quelle que soit la référence du nom auxiliaire 'Δ', $\ulcorner t^{(0)}(\Delta)\urcorner$ est référentiel.

Critère contextuel : Un nom $t^{(0)}(\xi)$ est référentiel si et seulement si, quel que soit le nom t^0 du langage, $\ulcorner t^{(0)}(t^0)\urcorner$ est référentiel.

La question s'impose alors de savoir quelle version est compatible avec le principe du contexte. Nous les avons ainsi nommées car la première version, contrairement à la seconde, n'est pas relative au contexte *linguistique*. Elle permet d'établir la référentialité d'un nom indépendamment des autres noms de la langue et de ce à quoi ils font référence. Est-elle pour autant incompatible avec notre principe ? Tentons de restituer celui-ci dans le cadre des prédicats. Supposons que quelqu'un connaisse le sens d'un nom propre 'A' mais ignore celui d'un prédicat '$P(\xi)$'. Pour comprendre le sens de '$P(A)$', il ne lui suffit pas d'être informé que ce nom réfère à telle ou telle valeur de vérité. Il lui faut être en principe capable de déterminer lui-même cette dernière, et ainsi connaître la manière dont le sens de '$P(\xi)$' permet de déterminer une valeur de vérité en chaque argument, *i.e.* saisir le sens de ce prédicat. Réciproquement, il n'a pas besoin de saisir le sens de $\ulcorner P(t)\urcorner$, pour tout nom propre t du langage, afin de connaître celui de '$P(\xi)$'. Pour cela, il suffit de – et il faut – connaître le moyen, associé au nom '$P(\xi)$', de déterminer une valeur de vérité en chaque argument. Si notre homme comprend le sens de t, alors il connaît un moyen de déterminer l'argument attendu et, par suite, de déterminer la valeur de vérité de $\ulcorner P(t)\urcorner$.

Finalement, ce propos rejoint celui de la section 3.3.8. Le sens d'un prédicat consiste en un moyen de déterminer une valeur de vérité *en chaque argument*. Les définitions sémantiques fregéennes, qui dévoilent ce sens en fixant la référence, montrent clairement ce point. Comme nous

l'avons vu, une clause qui expose le sens de '$P(\xi)$' est un moyen de déterminer la référence de '$P(\Delta)$' quelle que soit celle de 'Δ'. En lisant cette clause, nous ne parvenons pas pour autant à saisir *isolément* le sens dévoilé. Nous le comprenons dans le contexte de la procédure de détermination d'une valeur de vérité appliquée à l'argument Δ. Cette perspective est donc tout à fait compatible avec le principe du contexte, mais elle ne fait pas dépendre pour autant le sens du prédicat de celui des énoncés *du langage* auquel ce prédicat appartient. Elle s'appuie seulement sur la détermination de la référence de certains énoncés du langage *auxiliaire* pour fixer le sens du prédicat. Même si un certain objet ne dispose pas de nom dans ce langage, le sens du prédicat doit le prendre en considération à travers le fait qu'il s'agit d'une référence possible pour le nom auxiliaire 'Δ' dans '$P(\Delta)$'. Autrement dit, le sens de '$P(\xi)$' doit permettre de déterminer la valeur de vérité de '$P(\Delta)$' lorsque 'Δ' réfère à cet objet. Cette perspective s'appuie donc sur la première version du critère, selon laquelle la référentialité d'un nom ne dépend pas du contexte linguistique du nom examiné. Comme nous l'avons vu, il s'agit effectivement de la version que Frege exploita pour montrer que les noms de *fonctions* étaient référentiels.

Nous avons néanmoins laissé un problème de côté, car il est clair que nous devons pouvoir saisir le sens de '$P(\xi)$' sans connaître la totalité des objets auxquels il peut s'appliquer. Par exemple, il n'est pas nécessaire de disposer d'une connaissance exhaustive de tous les objets physiques pour comprendre le sens du mot 'planète'. Ainsi, la saisie du sens d'un prédicat doit tenir dans la connaissance d'une méthode permettant de déterminer une valeur de vérité pour chaque argument, même pour ceux dont nous ignorons l'existence. Frege prit ce point en considération lors de la donnée des clauses sémantiques associées aux prédicats de l'idéographie. Ses stipulations s'appuyaient exclusivement sur les deux objets qu'il supposait connus, étant impliqués dans chacun de nos jugements : les valeurs de vérité. Lorsque nous sommes avertis que le concept — ξ envoie tout autre argument que le Vrai sur le Faux, il n'est pas nécessaire de savoir à l'avance à quels autres objets ce concept peut s'appliquer pour être en mesure, une fois un tel objet déterminé, de lui associer une valeur de vérité – en l'occurrence le Faux.

Mais Frege refusait de s'appuyer sur l'hypothèse de l'existence des objets abstraits, notamment celle des parcours-de-valeurs. Il tenait au contraire à *justifier* leur existence en répondant de notre capacité à y faire référence. Il ne pouvait donc pas supposer d'emblée qu'un nom 'Δ' soit capable de les désigner. En somme, il ne savait pas initialement quels étaient les arguments relativement auxquels un prédicat devait être en mesure de déterminer une valeur de vérité. Pour cela, il devait à nouveau en appeler au principe du contexte. Néanmoins, il n'était pas question de traduire ce principe comme il l'avait fait dans le cadre des noms insaturés :

> Pour dévoiler le sens d'un nom propre t, il faut indiquer une manière de déterminer la référence de $\ulcorner\Phi(t)\urcorner$ quelle que soit celle de '$\Phi(\xi)$'.

En effet, la circularité aurait alors été immédiate, car Frege ne savait pas quelles pouvaient être les références attribuées à '$\Phi(\xi)$' tant qu'il ne savait pas sur quels arguments ces références devaient opérer. Par ailleurs, pour saisir un sens fonctionnel, il faut disposer d'un critère qui permette de déterminer une valeur lorsqu'un argument est déterminé. Il est inhérent aux fonctions d'être caractérisées par leurs valeurs en chaque argument, mais les objets ne présentent pas une telle nature. C'est pourquoi Frege, qui répétait inlassablement qu'un sens fonctionnel ne pouvait "subsister par lui-même", ne formula jamais la même réserve au sujet des sens propres.

La question était donc de savoir comment traduire le principe du contexte dans ce cadre. Eu égard aux objets concrets, Dummett propose une issue possible à travers des énoncés de reconnaissance tels que 'c'est t'. Notre saisie du sens de ces énoncés serait constitutive de notre saisie du sens des noms propres qu'ils intègrent, laquelle serait alors constitutive du sens des autres énoncés intégrant ces noms propres. Mais de tels énoncés ne sont pas envisageables dans le cas des objets abstraits. Dans les *Grundlagen*, la solution de Frege consistait à expliquer

généralement le contenu des noms propres '$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta))$' en indiquant celui de la totalité des énoncés d'identité du langage dont ils constituaient l'un des deux membres. Mais cette solution exploitait l'identification, ayant court à cette époque, entre sens et référence. En effet, *le contenu d'un nom n'étant autre que l'objet qu'il désigne*, une fois qu'il est établi que les noms propres en question disposent d'un contenu, l'existence des objets qu'ils désignent et notre capacité à y faire référence sont simultanément garanties. Cette démarche ne pouvait donc être reproduite telle quelle après le basculement de 1890. C'est pourquoi Dummett a d'abord cru que Frege avait dû choisir entre un principe du contexte pour le sens ou pour la référence. En réalité, les deux questions se rejoignent dans un seul et même problème. Selon Frege, les noms dotés de sens mais dénués de référence figurent exclusivement dans des énoncés dénués de valeurs de vérité. Il suffisait donc de montrer que tous les énoncés dans lesquels figuraient un nom propre étaient associés à un moyen de déterminer *une valeur de vérité* pour attester que ce nom était attaché à un moyen de déterminer un objet, autrement dit qu'il possédait un sens *et* une référence. Dummett tira finalement (et tardivement) la même conclusion :

> Le principe du contexte, s'il gouvernait uniquement le *Sinn*, dirait que nous pouvons parfois déterminer le *Sinn* d'un mot, d'une phrase, ou d'un symbole en établissant les *Sinne* des énoncés qui le contiennent ; mais Frege ne défend pas cela [...]. Il représente plutôt le *Sinn* de toute expression comme étant donné par la façon particulière dont sa *Bedeutung* est déterminée ou, s'il est nouvellement introduit, stipulée. Ainsi, la pertinence du principe du contexte pour la notion de *Sinn* dépend de sa pertinence pour la notion de *Bedeutung* ; il n'y a donc pas deux questions, mais une seule. (Dummett 1995, p. 14 / pp. 78-79)

La stratégie était donc similaire à celle des *Grundlagen*, bien qu'elle ne se limitât plus aux énoncés d'identité. En effet, Frege tenta de montrer que les trois stipulations ci-dessous fournissaient un moyen de déterminer la valeur de vérité de chaque nom – et ainsi de chaque énoncé – intégrant le nom '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$'.

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{S}_1 : & \forall \mathscr{I}\Big(\mathbf{R}(\text{`}\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\Psi(\varepsilon))\text{'}) = \mathbf{R}(\text{`}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))\text{'})\Big) \\
\mathrm{S}_2 : & \mathbf{R}(\text{`}\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)\text{'}) = \mathbf{V} \\
\mathrm{S}_3 : & \mathbf{R}(\text{`}\dot{\varepsilon}(\varepsilon = \overset{\mathfrak{a}}{\top\!\smile}(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))\text{'}) = \mathbf{F}
\end{array}$$

Dans un premier temps, il reconnut seulement les deux objets qui nous sont immédiatement donnés : les valeurs de vérité. Les stipulations sémantiques associées aux noms de l'idéographie (hors parcours-de-valeurs) étaient ainsi limitées à ce domaine restreint – bien qu'une telle restriction soit sans conséquence. L'objectif était alors, sur la base de ces stipulations, de déterminer la référence de tous les énoncés de l'idéographie impliquant le nom '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' quelle que soit la fonction (opérant sur le domaine restreint) à laquelle '$\Phi(\xi)$' référait. C'est ici, précisément, que la seconde version du critère de référentialité entre en scène. Selon celle-ci, la référentialité de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' est établie. Il est donc légitime d'ajouter cet objet au domaine. Il faut ensuite répéter la procédure en étendant au nouveau domaine à la fois les stipulations sémantiques associées aux autres noms primitifs et les fonctions susceptibles d'être attribuées pour références à '$\Phi(\xi)$'. En répétant la procédure ω fois, Frege croyait avoir montré la référentialité de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' quelle que soit la fonction opérant sur le domaine *final* à laquelle '$\Phi(\xi)$' réfère, et ainsi celle de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'.

Si la stratégie avait abouti, il aurait alors pu conclure que les trois stipulations permettaient de fixer la référence de ce dernier nom ; et la vérité de la loi V aurait été assurée par S_1. Bien entendu, nous savons qu'une telle conclusion est illégitime, car nous connaissons l'erreur dissimulée au sein

de cette méthode. Frege ne s'est pas rendu compte qu'il ajoutait progressivement plusieurs objets qui seraient associés à une même fonction opérant sur le domaine final. Par conséquent, il ne pouvait parvenir à établir la référentialité de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$' quelle que soit la fonction opérant sur le domaine *final* à laquelle '$\Phi(\xi)$' réfère. Notons néanmoins que ce constat n'invalide pas le principe du contexte en lui-même, mais seulement la traduction particulière que Frege en proposa. Et nous voulons insister sur le fait que celui-ci n'était pas totalement au clair sur cette traduction, en procédant à diverses remarques concernant la forme particulière du §31.

Nous avons pris soin de justifier le fait que la méthode décrite ci-dessus constituait une lecture convaincante du §31, en relevant divers indices dans ce sens [254]. Néanmoins, il serait absurde de prétendre que le contenu de ce paragraphe est *évidemment* une mise en œuvre de cette méthode. Par exemple, nous avons constaté qu'il y manquait les deux pas d'induction contenus dans cette dernière. Certes, Frege avait déjà réalisé (maladroitement) le travail nécessaire dans le §30. Néanmoins, la manière dont ce travail est transporté dans notre stratégie implique certaines subtilités – par exemple la distinction entre l'idéographie (enrichie) et $\mathscr{L}_{-\mathrm{pc}}$ – qui, sans être insurmontables, restent plus substantielles que les premières étapes de sa preuve, qu'il prit pourtant la peine de rédiger proprement. À la fin du §31, il remarqua que la référentialité du nom '$\backslash\xi$' jusqu'alors laissé sur la touche était une conséquence de celle de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Celle de tous les noms primitifs étant ainsi établie, il pouvait s'interrompre parce que, comme il avait annoncé au début du paragraphe, il suffisait alors d'"appliquer [le contenu du §30] pour montrer que les noms propres et les noms de fonctions que nous pouvons former à partir des noms simples préalablement introduits ont toujours une référence" (p. 48), et donc que tous les noms de l'idéographie, simples ou complexes, sont référentiels. Tout ceci suggère que Frege n'a jamais eu l'intention d'intégrer le contenu du §30 à celui du §31, et concevait sa démonstration globale comme structurée entre l'initialisation – pour les noms simples – et le pas d'induction – pour les noms complexes.

Notons que ce problème n'affecte pas seulement notre interprétation. Nous voyons mal comment Frege pouvait espérer étendre sa conclusion concernant la référentialité de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\urcorner$ lorsque $t^{(0)}(\xi)$ est un nom simple, au constat similaire lorsqu'il s'agit d'un nom complexe – ainsi que l'exigeait son critère – sans impliquer une quelconque induction. À notre connaissance, aucun commentateur n'a tenté de reconstituer cette preuve sans procéder à cet ajout. Même Heck (2012, pp. 79-80), qui tente de rester au plus près du texte, s'autorise ce détour [255]. La juste conclusion à tirer de cette carence n'est pas que notre interprétation – ou toute lecture concurrente

254. L'un d'entre eux étant situé au §10, nous n'en avons pas encore fait état. Après avoir (abusivement) montré que les stipulations initiales et complémentaires permettaient de fixer les références de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\urcorner$ et de $\ulcorner t^{(0,0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon),\Delta)\urcorner$ pour tous noms simples $t^{(0)}(\xi)$ et $t^{(0,0)}(\xi,\zeta)$ de l'idéographie introduits jusqu'alors, Frege fit le commentaire suivant :

> Nous avons présentement déterminé les *parcours-de-valeurs* autant que possible. C'est seulement lorsqu'un prochain problème proviendra de l'introduction d'une fonction qui n'est pas complètement réductible aux fonctions déjà connues que nous serons en position de stipuler quelle valeur elle doit recevoir pour chaque parcours-de-valeurs pris en argument, et ceci peut être regardé comme une détermination des parcours-de-valeurs aussi bien que de la fonction. (Frege 1893, p. 18)

Frege signale ici qu'une nouvelle indétermination pourrait être provoquée par l'ajout d'une autre fonction, qu'il faudrait alors lever à l'aide d'une troisième stipulation. Le point qui nous importe est localisé à la fin du passage. Une telle stipulation permettrait de lever l'indétermination en fixant la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\urcorner$ lorsque $t^{(0)}(\xi)$ est le nouveau nom simple de fonction. Selon Frege, ceci permettrait de déterminer aussi bien les parcours-de-valeurs que la fonction elle-même. Cette remarque peut être lue comme le signe d'une extension progressive du domaine. La détermination de la référence de $\ulcorner t^{(0)}(\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))\urcorner$ autorise (prétendument) à intégrer l'objet $\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$ au domaine. Il s'agit ainsi (soi-disant) d'une spécification à la fois de la référence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' – à travers sa valeur en '$\Phi(\xi)$' –, et de celle de $t^{(0)}(\xi)$ – à travers sa valeur en ce nouvel objet.

255. Accessoirement, précisons que sa lecture n'explique pas comment le domaine était censé être progressivement généré, bien qu'il prétende que c'était bien l'intention de Frege.

– doit être améliorée pour se rapprocher de la version fregéenne, mais que la version fregéenne est intrinsèquement en décalage par rapport à toute reconstitution homogène d'une quelconque preuve, aussi incorrecte soit-elle. En d'autres termes, Frege s'est perdu quelque part, et notre rôle consiste à déterminer où et comment.

La trace la plus claire de son égarement se tient dans le critère de référentialité. Si Frege exploita deux versions distinctes de ce critère – selon qu'il l'appliqua aux noms de fonctions ou aux noms propres –, il est incontestable qu'il ne réalisa pas lui-même qu'il empruntait des sentiers différents. En effet, le critère fut présenté dans le §29 de manière totalement homogène, sans suggérer le moindre décalage entre son exploitation pour les noms propres et les noms de fonctions. Son absence de vigilance à l'égard des lettres grecques majuscules explique qu'il ait pu manquer jusqu'au bout de comprendre dans quelle situation il se trouvait. Comme nous l'avons vu, il exploitait parfois ces lettres pour construire les noms auxiliaires sur lesquels reposait sa sémantique, et parfois comme de simples symboles schématiques. Nous ne pouvons plus douter que ces deux usages relèvent d'une véritable confusion – et non d'un simple manque de clarté – lorsque nous constatons qu'ils se tiennent parfois côte à côte au sein d'une seule et même phrase. C'est justement le cas au cœur du passage-clef du §31 :

> D'après nos stipulations selon lesquelles '$\grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' doit toujours être co-référentiel avec '$\smile\!\!\!\!\mathfrak{a}\ \Psi(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a})$', '$\grave{\varepsilon}(\text{—}\ \varepsilon)$' doit référer au Vrai et '$\grave{\varepsilon}(\urcorner\!\smile\!\!\!\!\mathfrak{a}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$' doit référer au Faux, tout nom propre de la forme '$\Delta = \Gamma$' est assuré de référer si 'Δ' et 'Γ' sont des noms de parcours-de-valeurs ou des noms de valeurs de vérité. (Frege 1893, p. 49)

Si 'Δ' et 'Γ' sont conçus comme des noms auxiliaires – qui se voient attribuer une référence dans le domaine par une quelconque interprétation –, alors la définition sémantique du nom '$\xi = \zeta$' suffit à déterminer la référence de '$\Delta = \Gamma$'. Les remarques préliminaires en deviennent totalement inutiles. Par conséquent, Frege employa ces lettres comme des symboles schématiques, et escomptait établir que la référence d'un quelconque nom $\ulcorner t = t' \urcorner$ pouvait être déterminée sur la base des stipulations initiale et complémentaire. Néanmoins, cette conclusion exigeait d'appliquer le pas d'induction du §30 une fois qu'il a été montré que la référence de '$\grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' pouvait être déterminée quelles que soient celles '$\Phi(\xi)$' et de '$\Psi(\xi)$' – et non pas quels que soient les noms $\Phi(\xi)$ et de $\Psi(\xi)$, lesquels pourraient à leur tour intégrer une occurrence du nom pour les parcours-de-valeurs. Les expressions '$\Phi(\xi)$' et '$\Psi(\xi)$' doivent donc être conçues comme des noms auxiliaires, et certainement pas comme des signes schématiques.

Il est probable qu'en échouant à distinguer les deux usages des lettres grecques majuscules, Frege n'ait pas pris la mesure des conditions essentielles (et non remplies) sur lesquelles reposait sa démonstration. S'il avait proprement conçu cette preuve comme nous l'avons construite, il aurait écrit les choses différemment et (surtout) compris l'erreur qui la condamnait. Mais il n'a jamais eu à l'esprit une quelconque stratégie *nettement* dessinée, car il n'a jamais pris la peine de poser techniquement les bases de son propos. Nous avons donc été confrontés au même défi que tous les commentateurs qui se sont intéressés à ces passages : développer nous-mêmes une telle stratégie à partir du contenu imprécis de ces derniers. Nous ne devons cependant pas oublier que Frege a échoué dans cette tâche, ce qui constitue finalement la meilleure explication de l'articulation bancale qui lie les §§30 et 31.

En somme, il n'est parvenu ni à distinguer les deux usages des lettres grecques majuscules, ni à proposer une interprétation précise du principe du contexte. Il n'a jamais mesuré la distance qui séparait l'idée selon laquelle le sens d'un nom de fonction est insaturé – sur laquelle il basait ce principe pour les noms de fonctions – de celle selon laquelle le sens d'un nom propre doit être expliqué à travers ceux des énoncés dans lesquels il figure – sur laquelle il basait ce principe pour les noms d'objets. Les deux facettes du critère de référentialité, qui emploient différemment les

lettres grecques majuscules, sont restées résolument confondues dans son esprit. C'est seulement en traçant une frontière nette entre ces versions que nous sommes parvenus à proposer une interprétation possible des §§29-31 basée sur une traduction précise du principe du contexte, et à comprendre ce que cette interprétation présentait d'inacceptable.

Pour autant, il n'est pas certain que le principe du contexte constitue par nature une impasse, ni bien sûr – et par conséquent – que l'entreprise néologiciste soit illégitime. Ce problème n'est pas le nôtre, car nous cherchons seulement à reconstituer la position particulière dans laquelle Frege se trouvait, notamment en dévoilant les confusions qui ont provoqué ses erreurs majeures. Celle qui le conduisit à identifier les deux versions du critère de référentialité est considérable, à la fois par son contenu et par ses conséquences. Comme nous venons de le voir, elle explique que Frege n'ait pas réalisé le problème qui touchait la démonstration des §§29-31. Mais elle va aussi permettre de répondre aux questions que nous avons soulevées lors de l'étude du §10. En effet, nous savons désormais pourquoi Frege estimait (à tort) que sa stratégie permettait d'établir que les stipulations initiale et complémentaire fixaient la référence du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', et ainsi d'intégrer l'axiome V à son système. Néanmoins, nous ignorons encore ce qui garantissait à ses yeux que ces stipulations – et notamment la stipulation complémentaire – octroyaient la référence *adaptée* à ce nom, *i.e.* celle qui permettait de récupérer les nombres à travers les définitions adéquates. Il s'agit de l'ultime problème que nous aurons à résoudre, et notre réponse offrira incidemment une nouvelle perspective concernant un désaccord qui divise les exégètes au sujet des parcours-de-valeurs.

3.3.10 Deux approches des parcours-de-valeurs

3.3.10.1 Un problème transversal à deux époques

L'objectif de la seconde partie des *Grundgesetze* consistait à montrer que l'arithmétique était une branche de la logique. Pour cela, Frege devait proposer une analyse des pensées de l'arithmétique grâce à laquelle la vérité de ces pensées pouvait être établie à partir des strictes lois logiques. À ce titre, l'idéographie jouait un rôle moteur. En exhibant la structure des pensées, elle rendait visibles les liens logiques que ces dernières entretiennent les unes avec les autres. Le système s'appuyait alors sur ces liens pour permettre la démonstration des unes sur la base des autres. En somme, une fois que les noms référant aux objets et concepts arithmétiques étaient identifiés dans l'idéographie, les théorèmes arithmétiques pouvaient être prouvés dans l'Idéographie.

Cependant, la première étape était loin d'être une formalité. Comment s'assurer que certains noms du langage idéal disposent bien du même sens que les termes par lesquels nous désignons traditionnellement les nombres en arithmétique ? Pour Frege, il était hors de question de tenir ce point pour acquis, ou de s'en désintéresser. Il ne s'agissait pas de proposer un axiome – par exemple la loi V – intégrant un nom – par exemple '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' –, de montrer que cet axiome n'impliquait aucune contradiction, puis de l'exploiter pour prouver la vérité de certains énoncés *similaires* aux théorèmes premiers de l'arithmétique. Une telle démarche n'aurait eu aucune valeur à ses yeux. D'une part, elle aurait seulement entraîné le développement d'une science parallèle – dans quelque sens que ce soit – à l'arithmétique, et non de l'arithmétique elle-même. Elle n'aurait donc pu ni dévoiler la nature de celle-ci, ni en assurer les fondations. D'autre part, elle aurait échoué à effectuer cette dernière tâche même dans le cas de la nouvelle science. En effet, Frege ne pensait pas que la cohérence impliquât l'existence. Il croyait donc insuffisant d'assurer la consistance d'une théorie pour garantir l'existence de références pour les noms du langage qui valident les axiomes de cette théorie.

À ses yeux, l'enjeu tenait dans le dévoilement des sens d'anciens énoncés, dans la confirmation

de leur caractère logique, et dans leur expression au sein du nouveau langage. Il faisait donc face à la question suivante : quel est le sens des énoncés (traditionnels) de l'arithmétique ou, pour le dire différemment, par quels moyens parvient-on à déterminer leurs références ? Et cette question en appelait immédiatement deux autres : qu'est ce qui garantit l'existence de ces références, et qu'est ce qui explique notre accès à elles ? Dans les *Grundlagen*, Frege régla les problèmes ontologique et épistémique à travers la solution qu'il apporta au problème sémantique. Il en appela au principe du contexte, et entreprit de répondre du contenu des énoncés d'égalité intégrant un nom pour répondre de ce que celui-ci exprime et, conséquemment, de ce qu'il désigne. L'existence des nombres et notre accès à eux se voyaient ainsi simultanément garantis par notre capacité à employer des termes numériques dans des énoncés dotés de sens.

Pour ce faire, Frege tenta de s'appuyer sur le principe de Hume, afin de conférer un contenu aux énoncés d'égalité dans lesquels figurait le nom de nombre cardinal '$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta))$'. La méthode aboutissait tant que l'autre membre de l'égalité épousait aussi cette forme, mais elle échouait dans les autres cas. Par exemple, elle ne permettait pas de doter de contenu des énoncés tels que '$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta)) =$ Jules César'. Frege décida alors de contourner la difficulté en définissant explicitement les nombres à partir des extensions. Il conclut que cette définition était correcte *parce qu*'elle permettait d'aboutir au principe de Hume. En d'autres termes, le *seul* enjeu était de parvenir à ce résultat, quel que soit le chemin emprunté. Frege fut clair à cet égard lorsqu'il affirma qu'il "n'attachait pas une importance décisive à l'introduction des extensions de concepts" (p. 117 / 227).

En section 1.5.3, nous avons objecté que, si le principe de Hume n'était pas suffisant pour assurer un contenu aux termes numériques, alors le fait de parvenir à démontrer ce principe pour une certaine définition des termes numériques ne pouvait assurer que la définition en question conférait bien à ces termes le contenu qu'ils possèdent en arithmétique. Spécifiquement, nous n'avions aucune garantie que ces termes, tels qu'ils sont traditionnellement employés, désignent aussi des extensions. Nous n'avions donc aucune garantie de parvenir à capturer les nombres *eux-mêmes* – et non des objets qui présentent certaines similarités avec eux – à travers notre définition.

Nous avons ensuite remarqué que la structure des *Grundgesetze*, contrairement à celle des *Grundlagen*, n'accordait aucune place privilégiée au principe de Hume. Sur cette base, nous avons formulé l'hypothèse selon laquelle Frege se serait finalement rétracté. En 1893, il aurait cessé de croire que *toute* définition aboutissant à la démonstration du principe permettait de capturer le sens traditionnel des énoncés arithmétiques, et réalisé que *seule* la définition par les extensions possédait cette qualité. Néanmoins, nous n'avons pas cherché à comprendre ce qui aurait pu motiver ce choix particulier, et ainsi corroborer notre hypothèse. D'ailleurs, celle-ci fut mise à rude épreuve par le §10 des *Grundgesetze*, dans lequel Frege constata à nouveau qu'un principe particulier – selon lequel une égalité de parcours-de-valeurs pouvait être transformée en la généralité d'une égalité – ne permettait pas d'assurer une référence à tous les énoncés dans lesquels figurait un nom particulier – '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Certes, il ne s'en remit pas cette fois à une définition explicite, et remédia au problème *via* l'ajout d'une stipulation complémentaire. Néanmoins, il indiqua clairement que le choix de cette stipulation spécifique lui était indifférent. Or la référence octroyée à un terme numérique dépend de celle qui est conférée à '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', laquelle varie si nous décidons, comme Frege, que '$\dot{\varepsilon}(\text{—}\,\varepsilon)$' réfère au Vrai ou, contrairement à lui, au Faux. Il est donc surprenant de soutenir que ces différentes stipulations attribuent toutes aux termes numériques les références qu'ils possèdent traditionnellement en arithmétique, tandis qu'elles fixent différemment ces références [256]. En somme, la même difficulté touche les deux

256. Il pourrait nous être rétorqué qu'en réalité, Frege était indifférent au choix de la stipulation complémentaire seulement parce que celle-ci touchait aux valeurs de vérité. Nous ne serions alors plus confrontés, comme dans

ouvrages, car Frege n'attachait pas plus d'importance au choix de la stipulation complémentaire – tant qu'elle comblait les carences de la stipulation initiale pour fixer la référence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' – qu'à celui de la définition de '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' – tant qu'elle permettait de démontrer le principe de Hume.

3.3.10.2 Préservation du sens

Le problème que nous posons n'est pas aisé à résoudre, car Frege est resté extrêmement vague au sujet des sens des énoncés des langues naturelles. Une chose est certaine, il voyait dans ces dernières le point de départ à la fois incontournable et risqué de toute recherche scientifique :

> La liaison d'une pensée avec une certaine phrase n'est aucunement nécessaire ; mais qu'une pensée dont nous sommes conscients soit liée dans notre conscience à l'une ou l'autre phrase, est pour nous autres hommes, une nécessité. Il n'y a aucune contradiction à admettre l'existence d'êtres qui peuvent saisir la même pensée que nous sans avoir besoin de l'habiller d'une forme sensible. Mais, cela étant, cette nécessité existe pour nous autres hommes. (Frege 1924-1925a, p. 288 / 317)

Frege n'abordait pas ici le problème de la *communication*, de la transmission d'une pensée entre différents individus, mais bien celui de la *saisie* d'une pensée par un seul individu. L'accès humain aux pensées est intrinsèquement linguistique. Par conséquent, toute enquête scientifique doit se déployer à l'intérieur d'un langage. Les langues naturelles étant initialement les seules disponibles, ces enquêtes ne peuvent qu'y débuter – et y ont effectivement débuté. Malheureusement, ces langues induisent fréquemment en erreur quant aux pensées qu'elles expriment. Elles sont sources de confusions, d'illusions, et le scientifique doit agir avec la plus grande vigilance, la plus rude méfiance, lorsqu'il les manipule :

> Il est extrêmement difficile, peut-être même impossible, de vérifier que toute expression que nous propose la langue est logiquement inoffensive. (Frege 1924-1925a, p. 289 / 318)

Le rôle du logicien consiste précisément à en déjouer les nombreux écueils :

> [La logique] a plutôt pour tâche de purifier l'élément logique de tout ce qui lui est étranger, donc aussi de ce qui est psychologique, et de libérer l'activité de pensée des entraves de la langue en mettant à jour les imperfections logiques de cette dernière. (Frege 1897a, pp. 160-161 / p. 175)

> Une grande partie du travail du philosophe consiste – ou devrait du moins consister – en un combat avec la langue. Mais peut-être seules quelques personnes sont-elles conscientes de cette nécessité. (Frege 1924-1925a, p. 289 / 318)

Le travail de purification des langues naturelles doit permettre l'avènement d'un langage idéal qui, pour sa part, ne présente pas ce défaut. Mais ce travail doit aussi être mené dans une langue qui, fatalement, ne peut elle-même être que naturelle :

> Ces recherches sont particulièrement difficiles, justement parce que nous nous y laissons facilement égarer par la langue, laquelle nous y est pourtant un instrument indispensable. (Frege 1924-1925c, p. 285 / 314)

---

les *Grundlagen*, à la question de savoir pourquoi il envisageait *n'importe quelle* possibilité compatible avec la stipulation initiale, mais au problème du statut particulier des valeurs de vérité. Cependant, cette piste s'écroule face à la note de bas de page associée au §10. Frege y envisagea d'étendre la stipulation complémentaire à tous les objets, *i.e.* de les identifier à leur singleton, et renonça à ce projet *uniquement* parce qu'il rentrait en contradiction avec la stipulation initiale. Son choix n'était donc absolument pas tributaire du rôle des valeurs de vérité.

S'il faut se battre *contre* les langues naturelles, c'est qu'il n'existe initialement aucun moyen de *se passer* de ces langues. Il s'agit ici d'une bataille insolite, livrée avec le soutien de son adversaire. Dans cette lutte, les langues naturelles sont à la fois l'allié incontournable et l'ennemi mortel.

Frege s'est souvent désolé de cette situation, mais ne l'a jamais proprement mise en lumière. Quelles sont les pièges des langues naturelles ? En quoi celles-ci sont-elles défaillantes ? Comment peut-on parvenir à combler leurs lacunes ? Les réponses à ces questions sont dispersées dans différents textes, et il nous appartient de les réunir. Pour commencer, proposons une métaphore. Le logicien est semblable au potier qui confectionne un moule dans une matière aux propriétés singulières. Cette matière est seule capable de révéler une substance invisible et impalpable pour l'homme, mais néanmoins rigide. Une fois enclose, la substance apparaît à l'œil humain. Cependant, elle est d'une forme si fine et complexe que les premiers moules, fabriqués à l'aveugle, échouent à en épouser les contours. Des zones restent creuses. Le potier observe alors la substance révélée et, grâce à ce qu'il discerne, façonne des moules de plus en plus adaptés, ouvrant davantage d'angles sous lesquels observer la substance. Le moule est à la fois son objectif et son moyen. Il ne peut espérer contempler la substance sous tous ses aspects à moins de forger le moule parfait. Mais les moules eux-même sont seuls capables de le guider dans cette tâche.

Le langage est le moule du logicien, les langues naturelles les premiers moules imparfaits et, bien sûr, l'idéographie se révèle être le moule idéal. Ils permettent de lever le voile sur les pensées, substance invisible sans leur concours. Bien entendu, nous invoquons là une métaphore problématique à bien des égards, mais les raisons qui nous poussent à la mettre à l'épreuve vont se dessiner progressivement.

Remarquons que notre problème intervient postérieurement à la réalisation de cette démarche. Il s'agit de s'assurer, une fois la langue idéale édifiée et pourvue de contenu, que le sens d'un énoncé de cette langue est identique à celui d'un énoncé de la langue naturelle, *i.e.* que nous sommes parvenus à *analyser* logiquement ce sens en l'exhibant au sein d'une langue qui en dévoile la structure. Même dans le cas d'un énoncé soi-disant élémentaire, cette difficulté n'est pas facile à résoudre. Considérons l'exemple suivant :

(a) le nombre cardinal $\mathfrak{1}$ est le successeur du nombre cardinal $\mathfrak{0}$

(b) $s(\mathfrak{0}) = \mathfrak{1}$

(c) $\vdash \mathfrak{p}\dot{\varepsilon}(\vdash \varepsilon = \varepsilon) \frown \left(\mathfrak{p}\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\mathfrak{p}\dot{\varepsilon}(\vdash \varepsilon = \varepsilon))) \frown \dot{\alpha}\dot{\varepsilon} \left(\vdash \overset{\mathfrak{b}}{\smile} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \vdash \mathfrak{p}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \\ \quad \mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} \\ \quad \mathfrak{p}\dot{\varepsilon}_1 \left(\begin{array}{l} \vdash \varepsilon_1 = \mathfrak{a} \\ \quad \varepsilon_1 = \mathfrak{b} \end{array} \right) = \varepsilon \end{array} \right) \right)$

Selon Frege, (c) est la version idéographique[257] de l'énoncé traditionnel (b), exprimé par (a) dans la langue naturelle. Pourtant, un seul coup d'œil est impuissant à établir l'identité des pensées exprimées. De quels moyens dispose-t-on pour statuer sur la réussite de l'analyse logique ? Comment s'assurer que la pensée exprimée dans l'idéographie correspond effectivement à la pensée dont l'analyse a été entreprise ? Un critère d'identité des pensées paraît indispensable, ainsi que Frege lui-même l'expliqua à Husserl :

> Il me semble qu'un critère objectif pour reconnaître deux pensées comme identiques est nécessaire, sans quoi l'analyse logique est impossible. (Frege 1976, p. 105)

Il en proposa deux versions. La première prolonge notre dernière citation :

257. raccourcie *via* l'usage des noms '$\xi \frown \zeta$' et '$\mathfrak{p}\xi$', qui ne sont pas primitifs (Frege 1893, pp. 57-58). L'expression censée exposer *totalement* la composition de la pensée contenue dans (a) et (b) est donc encore plus complexe.

> Il me semble que le seul moyen pour décider si un énoncé A exprime la même pensée qu'un énoncé B est le suivant, et ici je suppose qu'aucun des sens des deux énoncés ne contient une partie triviale. Si *à la fois* la supposition que le contenu de A est faux et celui de B vrai *et* la supposition que le contenu de A est vrai et celui de B faux conduisent à une contradiction logique, et si ce peut être établi sans savoir si le contenu de A ou B est vrai ou faux, et sans recourir à rien d'autre que les lois logiques, alors rien qui soit susceptible d'être jugé vrai ou faux ne peut appartenir au contenu de A, hormis ce qui appartient aussi au contenu de B [...] De la même manière, étant donné notre supposition, rien de susceptible d'être jugé vrai ou faux ne peut appartenir au contenu de B, hormis ce qui appartient aussi au contenu de A. Ainsi ce qui est susceptible d'être jugé vrai ou faux dans les contenus de A et B est identique, et seul ceci est du ressort de la logique, et c'est ce que j'appelle la pensée exprimée à la fois par A et B. (Frege 1976, pp. 105 - 106)

Par précaution, Frege eut recours à une formulation complexe. Il précisait ainsi qu'il n'escomptait pas identifier la totalité du contenu de deux énoncés, mais seulement les pensées qu'ils expriment. Cette réserve permettait d'écarter le problème de la coloration. Plus simplement, le critère s'énonce ainsi :

> Soient deux énoncés qui ne contiennent aucune partie triviale, alors les pensées qu'ils expriment sont identiques si et seulement si elles sont logiquement équivalentes.

À l'exception de la condition d'applicabilité, nous retrouvons le critère d'identité des contenus jugeables établi pour la langue formulaire [258]. La différence est néanmoins de taille, et permit à Frege d'éviter l'erreur commise en 1879. En effet, la condition écarte les énoncés mathématiques, qui possèdent souvent une partie triviale. Il n'est pas nécessaire d'expliquer pourquoi, il suffit de remarquer que Frege ne pouvait en aucun cas leur appliquer ce critère sans s'opposer à ses propres conceptions. La lettre date de 1906, dernière année durant laquelle il ne fait aucun doute que Frege adhérait au logicisme. Les théorèmes mathématiques (hors géométrie) étaient donc, à ses yeux, logiquement vrais, et par conséquent logiquement équivalents. Or, Frege tenait la plupart des théorèmes mathématiques pour différents [259]. L'équivalence logique ne peut donc pas, dans ce domaine, impliquer l'identité des pensées. Malheureusement, le cas des mathématiques est celui qui nous intéresse, car l'analyse de leurs contenus est le biais de leur réduction à la logique [260]. La seconde version date de la même année et présente le même problème :

> Entre deux phrases A et B, il peut y avoir une relation telle que quiconque reconnaît comme vrai le contenu de A doit reconnaître aussitôt comme vrai également celui de B et telle que, réciproquement, quiconque reconnaît le contenu de B doit reconnaître aussitôt également celui de A (*équipollence*) étant présupposé que l'appréhension des contenus de A et de B n'offre aucune difficulté. [...] [La pensée] est la même dans des phrases équipollentes de la sorte indiquée plus haut.(Frege 1906c, p. 213 / 235)

Contrairement au précédent, ce critère est cognitif. À l'instar du précédent, il ne nous est d'aucun secours car, quelques lignes plus loin, Frege demanda "qu'il n'y ait rien dans le contenu d'aucune des deux phrases équipollentes A et B qui doive être immédiatement reconnu comme

258. Voir section 1.4.3.

259. Il n'est pas utile de considérer des théorèmes complexes. Dès l'ouverture des *Grundgesetze*, Frege affirme que '$2^2 = 4$' et '$2 + 2 = 4$' diffèrent par leurs sens" (Frege 1893, p. 7).

260. Notons que même si cette lettre avait été postérieure à son renoncement à la logique, elle ne nous aurait été d'aucune utilité. Nous cherchons à établir comment Frege comptait s'y prendre pour exprimer les énoncés mathématiques dans le vocabulaire de la logique, *lorsqu'il était logiciste*. Il faut donc un critère par lequel discriminer entre des pensées logiquement équivalentes.

vrai par tout un chacun qui l'appréhende correctement". On retrouve la condition de l'absence de "parties triviales", laquelle exclut les énoncés mathématiques [261]. Par ailleurs, il exigeait que l'appréhension des pensées en cause ne présente aucune difficulté ou, pour le dire différemment, que l'agent qui les appréhende soit capable de les saisir parfaitement. Ce faisant, il ignorait plus qu'il ne résolvait la difficulté. Il est certain que quiconque parvient à saisir exactement des pensées ne pourra manquer d'attester leur identité ou leur différence. Ainsi posé, le problème consiste à déterminer sous quelles conditions quelqu'un est assuré de saisir parfaitement une pensée. Et il y aurait encore (beaucoup) à reprocher à ces deux critères. Mais cela ne nous avancerait à rien. Nos interrogations ont trait à des énoncés qui, étant logiques (selon Frege), intègrent des parties triviales et échappent à leur portée. Par conséquent, il nous faut chercher une autre voie pour trouver nos réponses.

Il semble difficile de nier que les mathématiciens qui ont précédé Frege sont, d'une manière ou d'une autre, parvenus à saisir la pensée exprimée par un énoncé aussi simple que (a). Pourtant, même en connaissance du sens des symboles de l'idéographie, c'est-à-dire en capacité de saisir la pensée exprimée par (b), nombre d'entre eux auraient contesté l'identité des deux pensées. Frege s'opposait frontalement aux analyses du concept de *nombre cardinal* [262] proposées par d'autres mathématiciens, qui divergeaient largement de celle sur laquelle (b) s'appuie. Pour cette raison, certains commentateurs [263] ont nié qu'il ait exigé, en définitive et malgré les textes qui semblent le confirmer, une contrainte aussi importante que l'identité entre la pensée analysée et celle qui résulte de l'analyse, et ont suggéré des contraintes plus légères.

Il existe cependant une autre hypothèse. Le second critère suppose des énoncés dont les contenus peuvent être *saisis aisément*. La facilité d'accès aux pensées semble donc variable. Peut-être les mathématiciens ont-ils échoué à appréhender *clairement* des pensées – et ainsi à attester leur identité – sans pour autant les manquer totalement. Nous pouvons distinguer deux causes possibles (et compatibles) aux difficultés de saisie d'une pensée : celle-ci peut être complexe par nature et/ou le langage dans lequel elle est exprimée peut compliquer notre accès à elle. La formulation du second critère – qui évoque non pas la saisie d'une pensée mais du contenu d'un énoncé – suggère davantage la deuxième difficulté.

L'examen de cette question exige de mettre en lumière le mode de rapport d'un individu et d'une pensée. En premier lieu, il faut déterminer si leur relation est binaire ou si elle admet des degrés. Autrement dit, est-il possible de saisir partiellement ou imparfaitement une pensée ? Ou bien est-ce qu'aucun langage ne peut nous donner un accès limité ou défaillant à une pensée : un homme la saisit intégralement et adéquatement, où il la manque totalement ? Frege ne fournit aucune réponse définitive à ces interrogations, qu'il reléguait au plan psychologique. Il dispersa cependant quelques indices au sein d'un texte inédit datant de 1914, dans lequel il considéra un signe simple ramené, après analyse de son sens, à une composition de symboles. C'est précisément le cas de '$\mathfrak{0}$' '$\mathfrak{1}$' et 's' développés durant le passage de l'énoncé (b) à (c).

> En fait, il peut arriver que, dans le développement de la science, on ait employé un mot, un signe, une expression, sur une période de temps étendue, en ayant l'impression

261. Notons que, si nous suivons à la lettre les dires de Frege, ce critère et le précédent nous offrent seulement des conditions *nécessaires* à l'identité de deux pensées. Frege ne se prononça pas concernant la réciproque. Ceci, loin d'altérer nos précédentes objections, diminue encore l'intérêt des critères, car rien n'interdit qu'une même pensée exprimée dans deux langages – l'un précédant et l'un succédant à l'analyse logique – ne soit pas identifiée comme telle.

262. Nous reprenons la formulation approximative de Frege. Il parle parfois d'analyse, parfois de définition de concepts. Rigoureusement, une analyse concerne un sens et une définition concerne un signe. Il emprunte probablement ces raccourcis pour alléger la rédaction en épurant le texte de formules comme 'l'analyse du sens de l'expression 'nombre naturel".

263. Voir par exemple (Weiner 1990, Chap. 3) et (Blanchette 2012, Chap. 4).

> que son sens est simple, jusqu'à ce qu'on réussisse à l'analyser en des constituants logiques plus simples. (Frege 1914, p. 227 / 249)

Une fois encore, il semble que les pensées analysée et résultante de l'analyse soient identiques. Alors comment expliquer que des mathématiciens qui découvraient l'analyse (soi-disant correcte) proposée par Frege en venaient à la contester ? Généralement, comment est-il possible qu'ils ne s'accordassent pas sur l'analyse du sens des énoncés traditionnels de leur science ? Selon Frege, même les mathématiciens les plus illustres étaient incapables de jeter la lumière sur les pensées complexes qu'ils démontraient. Quelques lignes plus loin, il tenta d'expliquer ce singulier reproche :

> Le fait est que, si nous avons bel et bien une saisie claire du sens du signe simple, alors on ne peut plus avoir de doutes sur le fait qu'il soit en accord avec le sens de l'expression composée. Si la question continue de se poser, bien que nous puissions reconnaître le sens de l'expression composée à partir de la composition, alors ce doit être parce que nous n'avons pas une saisie claire du sens du signe simple, mais que les contours sont confus comme si nous le voyions à travers un brouillard. L'effet de l'analyse logique dont nous parlons sera précisément celui-ci – d'articuler clairement le sens. (Frege 1914, p. 228 / 251)

Frege expliqua que les mathématiciens ne possédaient pas toujours une saisie *claire* du sens du signe simple. Il suggéra donc différents *degrés* d'exactitude auxquels une pensée peut être saisie, rejoignant l'explication que nous avons proposée. Il formula néanmoins une autre hypothèse :

> De toute évidence, chacun [des mathématiciens qui fournissent des analyses distinctes du concept de *nombre*] attache un sens différent au mot "nombre". Aussi l'arithmétique de ces [...] mathématiciens doit-elle être très différente. Une phrase du premier mathématicien doit avoir un sens tout à fait différent de la phrase du second mathématicien, qui a l'air d'être équivalente. (Frege 1914, p. 233 /256)

Ici, il ne considéra plus qu'un même sens était saisi différemment – plus ou moins clairement, par exemple – mais que deux sens étaient différents. Voilà qui soulève un nouveau problème. Lorsque deux mathématiciens démontrent le même énoncé, ils prouvent en définitive des vérités distinctes, car ils attachent chacun un sens spécifique à cet énoncé. Ils pratiquent alors deux sciences différentes. En revanche, la première hypothèse de Frege permettait de régler cette difficulté :

> Ou bien est-ce que l'explication ne serait pas plutôt que nous avons vraiment affaire à la même science ; que tel homme attache bien le même sens au mot nombre que tel autre, mais que, simplement, il ne réussit pas à le saisir comme il faut ? Peut-être le sens apparaît-il aux deux dans un tel brouillard que, lorsqu'ils cherchent à s'en saisir, ils le manquent. (Frege 1914, p. 234 / 257)

Les sens attachés aux expressions sont identiques, mais leur saisie est variable. Les mathématiciens échouent à les appréhender clairement. La différence entre les sciences développées est ainsi résorbée, tandis qu'une autre objection voit le jour :

> Et pourtant, comment quelqu'un peut-il effectuer un vrai travail dans une science lorsqu'il est totalement dans le brouillard sur l'un des concepts fondamentaux de cette science ? Le concept d'entier positif est en effet fondamental pour toute la partie arithmétique des mathématiques. Et la moindre obscurité à cet égard ne peut que s'étendre à tout l'ensemble de l'arithmétique. C'est, de toute évidence, un grave défaut qui, devrait-on penser, ne peut qu'empêcher quiconque d'effectuer le moindre vrai

> travail dans cette science. À coup sûr, aucun énoncé arithmétique ne peut avoir un sens arithmétique clair pour quelqu'un qui est dans le noir sur ce qu'est un nombre. (Frege 1914, pp. 239-240 / p. 264)

À chaque conjecture sa force et sa faiblesse. Si les mathématiciens attachent un même sens – qu'ils saisissent peu clairement – aux mêmes expressions, alors ils pratiquent en effet la même science. Il reste néanmoins à expliquer comment ils parviennent à effectuer des démonstrations si profondes en invoquant des sens qu'ils saisissent mal. Au contraire, si les mathématiciens attachent des sens différents – qu'ils saisissent parfaitement – aux mêmes expressions, alors rien ne s'oppose plus à ce qu'ils démontrent des vérités composées des sens en question. Néanmoins, les sciences développées ne sont plus identiques, les pensées qui y sont prouvées étant elles-mêmes différentes. Dans la suite du texte, Frege favorisa la première hypothèse, et tenta de répondre à l'objection qui lui faisait face :

> Cette question n'est ni une question arithmétique, ni une question logique, mais une question psychologique. Nous n'avons tout simplement pas la capacité mentale d'avoir présente à l'esprit une structure logique très complexe de manière à ce qu'elle nous soit pareillement claire dans chacun de ses détails. Par exemple, quel est celui qui, en employant le mot "entier" dans une démonstration, a jamais clairement à l'esprit tout ce qui relève du sens de ce mot ? Et pourtant, cela ne nous empêche pas d'effectuer des inférences correctes, même si ce faisant, une partie du sens continue de rester dans l'ombre. Weierstrass a une intuition correcte de ce qu'est un nombre et, partant de là, il ne cesse de réviser et de compléter ce qui devrait en réalité suivre de ses définitions officielles. En faisant cela, il tombe dans des contradictions, et parvient néanmoins à des pensées vraies, qui, il faut le reconnaître, lui viennent à l'esprit par pur hasard. Ses énoncés expriment des pensées vraies, si ils sont correctement compris. Mais si on essayait de les comprendre conformément à ses propres définitions, on se fourvoierait. (Frege 1914, p. 240 / 264)

Weierstrass fournit une analyse inadéquate du sens de l'expression 'est un nombre'. Ainsi, cette analyse rentre en contradiction avec certains théorèmes dont il parvient pourtant à réaliser les démonstrations. Frege trancha le nœud gordien en expliquant que "Weierstrass a une intuition correcte de ce qu'est un nombre". À ses yeux, le sens est la manière dont la dénotation nous est donnée. Weierstrass pourrait-il ignorer le sens de l'expression 'est un nombre' et néanmoins disposer d'un moyen de la manipuler adéquatement ? Y aurait-il un autre chemin d'accès à sa référence : l'intuition ? Nulle part ailleurs Frege ne fait état d'une telle notion. L'explication fut fournie un peu plus tôt dans le texte :

> Lorsque nous considérons ce qui se passe vraiment dans notre esprit, lorsque nous faisons des efforts intellectuels, nous nous rendons compte qu'une pensée qui se présente à notre conscience est loin d'être dans tous les cas claire dans toutes ses parties. Par exemple, lorsque nous employons le mot "intégrale", sommes-nous toujours conscients de tout ce qui appartient à ce mot ? Je crois que ce n'est que très rarement le cas. Habituellement, c'est seulement le mot qui est présent à notre conscience, sans nul doute conjointement au savoir plus ou moins obscur que ce mot est un signe, qui a un sens, et que nous pouvons, quand nous le voulons, nous souvenir de ce sens. Mais nous nous contentons le plus souvent de savoir que nous le pouvons. Si nous voulions nous souvenir de tout ce qui appartient à ce mot, nous ne pourrions pas aller de l'avant. Notre conscience n'est tout bonnement pas assez vaste. Nous avons souvent besoin d'employer un signe auquel nous associons un sens très composé. Un tel signe apparaît, pour ainsi dire, comme un réceptacle, pour le sens, à telle enseigne

> que nous pouvons l'emmener avec nous, tout en étant toujours conscients du fait que nous pouvons ouvrir ce réceptacle si nous avons besoin de ce qu'il contient. (Frege 1914, pp. 225-226 / p. 248)

C'est l'expérience de la pratique mathématique de Frege qui lui a soufflé cet exemple. C'est elle, aussi, qui est à l'origine de l'usage du terme 'intuition' dans le précédent passage. Qui a un tant soit peu frayé son chemin à travers la jungle des mathématiques sait combien le succès dépend avant tout de la capacité de sélection. La gymnastique essentielle pour venir à bout d'un problème *via* un raisonnement complexe et multifacette exige une souplesse dans le rapport aux objets mathématiques. Il est impossible de maintenir à flot toutes les propriétés que nous connaissons de ces derniers, il faut choisir et travailler sur les plus adéquates, basculer entre les unes et les autres selon l'objectif poursuivi. Supposons une preuve qui s'initie par la supposition qu'un entier naturel est premier, et qui fait un usage central de sa non-parité. Durant le raisonnement, le mathématicien ne fait aucun usage de ce – et n'a probablement pas à l'esprit – que le nombre en question n'est multiple ni de 3 ni de 7. Ce qui vaut pour les propriétés des objets s'étend au sens de certaines expressions. Plusieurs composantes de celui-ci sont maintenues dans l'ombre. Voici par exemple la définition moderne de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ si pour tout nombre réel a :

$$\forall\epsilon(\epsilon > 0 \to \exists\alpha(\alpha > 0 \wedge \forall x(x \in \mathbb{R} \to (|x - a| < \alpha \to |f(x) - f(a)| < \epsilon))))$$

Beaucoup de théorèmes ont été prouvés à ce sujet. Différentes propriétés de conservation de la continuité ont été établies concernant des opérations sur les fonctions. Il fut aussi montré que toute fonction dérivable est continue. Lors d'une preuve complexe, il arrive que, en invoquant ces théorèmes, le mathématicien utilise la continuité d'une fonction comme simple *passage* d'une propriété à une autre. Considérons par exemple un théorème A qui affirme que toute fonction f ayant la propriété P est continue, et un théorème B selon lequel toute fonction continue possède la propriété Q. Lorsque le mathématicien déduit du fait que f possède la propriété P le fait qu'elle possède la propriété Q, il n'a aucune raison de conserver à l'esprit le sens de l'expression "est continue". Il lui suffit d'invoquer les théorèmes A et B et de passer par la continuité comme à travers un mot *vide*. Selon ses propres termes, il ne *revient pas à la définition*. Frege en fournit la raison déterminante : "Si nous voulions nous souvenir de tout ce qui appartient à ce mot, nous ne pourrions pas aller de l'avant." Trop de considérations essentielles envahissent déjà l'esprit du chercheur. Tout ceci relève de la psychologie, et n'affaiblit en aucune façon la justification de la pensée démontrée. Dans le cas considéré, le mathématicien oublie le sens d'un terme, mais il utilise des théorèmes qui ont eux-mêmes été prouvés en vertu de ce sens. Plus généralement, rien n'interdit de perdre de vue l'intégralité ou une partie du sens d'une expression au cours d'un raisonnement, si tant est que la partie essentielle à la démonstration est gardée à l'esprit, ou fut sollicitée dans la preuve de lemmes préparatoires.

Par sa formation mathématique, Frege ne pouvait ignorer que l'adresse – ou l'intuition – mathématique consiste justement à privilégier une propriété d'un objet ou une partie d'un sens : celle(s) qui est (sont) engagée(s) dans la pensée à démontrer. Ainsi Frege l'affirme sans détour : *une pensée peut se présenter à notre esprit sans être claire dans toutes ses parties.* L'action de saisir une pensée admet des degrés, des nuances. Reprenons notre métaphore de la poterie. Même lorsqu'un homme a conçu le moule idéal, il ne peut embrasser du regard la totalité de la substance, certains angles sont plus visibles que d'autres. C'est exactement le propos de Frege dans les deux derniers passages. La saisie du sens est une activité psychologique complexe, qui admet différents niveaux de précision, qui peut être orientée vers divers aspects de ce sens. Weierstrass n'ignore pas totalement le sens de l'expression 'est un nombre', peut-être même en a-t-il examiné chacune

des facettes. Il parvient en tous cas à solliciter habilement la partie du sens impliqué dans tel ou tel problème. En revanche, il échoue à réunir ces nombreuses composantes dans une analyse complète. Il n'existe aucune incompatibilité entre le fait de saisir clairement un sens sous certains de ses aspects et celui d'échouer à articuler précisément la totalité de ces aspects.

Cette interprétation répond de la possibilité d'une identité entre la pensée analysée et la résultante de l'analyse, en conciliant la capacité à saisir une pensée – à un certain degré, sous un certain jour – et l'incapacité à en articuler le sens. Frege aurait pu en rester là. Au contraire, il procéda à une remarque déroutante, qui semble prendre à contre-pied tout ce qui fut dit jusqu'à présent :

> Si nous avons réussi de la sorte à construire un système pour les mathématiques sans avoir besoin du signe A, nous pouvons nous en tenir là ; point n'est besoin de répondre à la question concernant le sens dans lequel – quel qu'il puisse être – ce signe était auparavant utilisé. De cette manière, nous coupons court à toutes les objections. [...] Rien de ce qui existait en mathématiques avant la nouvelle construction du système ne peut logiquement continuer à être pris en considération par la nouvelle construction. Tout doit être renouvelé de fond en comble. Quoi que nous ayons pu effectuer dans le cadre de nos analyses, cela ne doit être considéré que comme un travail préparatoire, ne figurant absolument pas dans la nouvelle construction du système lui-même. (Frege 1914, p. 228 / pp. 250-251)

Frege semble ici se désintéresser du sens des énoncés traditionnels de l'arithmétique, et s'en tenir au nouveau sens qu'il attribue à ses propres énoncés. Cependant, en l'absence d'une comparaison, comment peut-il être sûr de ne pas développer une science inédite, distincte de l'arithmétique ? Le réussite dans l'entreprise de construction d'un système *pour les mathématiques* n'est-elle pas tributaire du succès de l'analyse du sens d'anciens énoncés *via* leur traduction dans la langue idéale ? N'était-ce pas le problème depuis le début ? C'est en tout cas la manière dont nous l'avons posé, et l'extrait ci-dessus démontre que cette manière ne peut convenir totalement. Pour le comprendre, il faut cerner les limites de la métaphore par laquelle nous avons débuté cette section.

Il existe deux raisons pour lesquelles la substance dévoilée par notre moule pourrait n'être vue qu'imparfaitement par un spectateur. La première concerne la complexité de la substance elle-même. Même si nous disposons d'un angle de vue idéal, nous ne pouvons pas toujours embrasser tous les détails d'un même regard, notamment lorsque ces détails sont trop nombreux. Frege fit droit à cette idée quand il expliqua que "nous n'avons pas la capacité mentale d'avoir présente à l'esprit une structure logique très complexe de manière à ce qu'elle nous soit pareillement claire dans chacun de ses détails". La deuxième raison a trait à l'imperfection du moule, qui dissimule parfois certains des détails en question. À divers endroits [264], Frege parla de 'sens clairs' en opposition aux sens des énoncés des langues vernaculaires qui, pour leur part, présenteraient un certain degré d'obscurité. Sa tournure fut maladroite, car il tenait les sens pour totalement objectifs et parfaitement indépendants du langage dans lequel il sont exprimés. En lui-même, un sens peut disposer d'un certain niveau de complexité, mais non de clarté. En dépit de la formulation utilisée, Frege visait plutôt l'*expression* du sens. Celle-ci peut être plus ou moins claire, induisant différents degrés de difficulté dans la saisie de ce sens, ainsi que notre moule imparfait peut dissimuler certains aspects de la substance.

C'est en cherchant les causes de ces imperfections que nous allons voir s'écrouler notre métaphore. En effet, le lien entre le moule et la substance fut présenté comme naturel, tandis que

264. Par exemple (Frege 1914, p. 228 / 251).

celui qui intervient entre un langage et certains sens est totalement artificiel. Seul l'être humain confère son sens à une expression. Alors pourquoi cette dernière en vient-elle parfois à exprimer maladroitement ce sens ? Frege expliqua souvent que "les mots fluctuent dans leur usage". Doit-on simplement conclure qu'il nous arrive régulièrement d'attribuer à un mot un premier sens dans un contexte, et un second dans un autre ? Si tel est le cas, alors ce défaut doit bien sûr être corrigé dans les langages scientifiques. Néanmoins, considéré isolément, il ne tend aucun piège sérieux, car il suffirait par exemple de choisir le contexte dans lequel le nombre 1 fut correctement attribué comme référence au signe '1'. La difficulté fondamentale tient davantage dans ce que, comme le dit Frege, "les mots ne sont pas assez déterminés". Le problème n'est pas que nous attribuons différents sens à un même mot dans plusieurs contextes, mais que nous sommes incapables d'attribuer correctement un sens à un mot. C'est parce que nos stipulations sémantiques sont incomplètes que nous en venons à les compléter nous-mêmes, de différentes manières selon les contextes en cause. C'est aussi pour cette raison que plusieurs individus peuvent, dans un même contexte, combler différemment ce fossé.

L'enquête sur la nature du sens, et l'édification d'une langue idéale qui lui est corrélative, vise avant toute chose à dévoiler les stipulations nécessaires à la donnée d'un sens. Par exemple, en discernant la hiérarchie inhérente au domaine du sens, nous éclairons le rôle joué par les noms de fonctions. Ce faisant, nous réalisons qu'un contenu leur est conféré *via* la spécification d'un moyen de déterminer une valeur en *chaque* argument. Sans cette mise au point, il peut arriver – et il arrive fréquemment – que nous utilisions un tel nom tandis que nous nous sommes seulement (et implicitement) accordés sur un moyen de déterminer sa valeur en *certains* arguments. Le sens qu'y voit telle ou telle personne dans tel ou tel contexte dépend alors de la manière dont cette personne comble spontanément cette lacune, et varie fréquemment. En soi, l'utilisation de noms d'un certain type pour exprimer un sens d'un autre type n'est pas gênante. Par exemple, tant que nous savons que la pensée exprimée par 'un cheval existe' épouse la forme de '$M_\beta(\Phi(\beta))$' – et non celle de '$\Phi(\Delta)$' –, alors cette expression peut être manipulée sans risque. Le problème survient lorsque, n'étant pas au clair sur ces conventions, il nous arrive d'écrire des énoncés tels que 'Dieu existe', et fatalement de modifier (clandestinement) le sens que nous attribuons au mot 'existe'. En renonçant à toute forme de convention, une langue idéale statue définitivement sur ce qui doit être spécifié pour qu'un nom d'un certain type possède un sens, et permet ainsi d'éviter tous les quiproquos dont les mots des langues quotidiennes sont victimes :

> En logique, nous pouvons aussi être influencés par le langage, et c'est à cela qu'est bonne l'idéographie : elle nous aide à nous émanciper des formes du langage. (Frege 1906b, p. 204 / 224)

En somme, une langue idéale permet "d'exprimer clairement le sens" parce qu'elle appelle à une spécification adéquate du sens de ses expressions, là où une langue vernaculaire voile cette exigence et provoque des stipulations défaillantes qui, étant compatibles avec *différents* sens, ne fixent pas celui de ses termes.

Revenons à l'arithmétique. Frege savait que les mathématiciens ne s'accordaient pas sur le sens de l'expression 'nombre cardinal'. Cela était rendu possible parce le fait que différents sens pouvaient être attribués à celle-ci qui validaient également les énoncés traditionnels que chacun reconnaissait comme vrais. Comment sélectionner parmi eux le sens *authentique* de cette expression ? Comment confirmer que la traduction idéographique possède bien ce sens ? Il est vain de faire appel à un critère d'identité des pensées. Soit le critère est cognitif, et implique la manière dont nous comprenons un énoncé. Il est alors inutile, car les mathématiciens affirment comprendre différemment ces énoncés. Soit il doit tenir compte de ce qui fait que le sens est ce qu'il est, et s'appuie sur ce que nous cherchons à déterminer. Voilà pourquoi Frege n'a jamais

sollicité un tel critère au sein de sa démarche. L'expression 'nombre cardinal' ne possède aucun sens indépendamment de celui que nous choisissons de lui conférer. Or c'est précisément à ce sujet que les avis divergent. Il ne s'agit donc pas de déterminer le sens qu'elle possède *effectivement*, car rien de suffisant n'a été spécifié pour lui assigner univoquement un sens. Il s'agit de déterminer le sens qu'elle *doit* recevoir pour permettre l'expression des lois du dénombrement, *i.e.* pour rendre compte de l'applicabilité de l'arithmétique. C'est lui que nous nommons son 'sens authentique'.

Frege était conscient que la majorité des mathématiciens avaient dû, au moins furtivement, lui accorder pour eux-même le sens qu'elle était censée recevoir. Ils n'avaient pu manquer de saisir celui-ci par endroits, imparfaitement ou provisoirement. Autrement, l'arithmétique aurait de tout temps manqué son objet. Frege constatait seulement qu'ils se trompaient au moment d'en rendre compte proprement. Quelle était la cause de leur erreur ? Soit ils saisissaient systématiquement le sens adéquat, mais toujours de manière incomplète, et échouaient à en rassembler les multiples facettes. C'est l'hypothèse que Frege favorisa, et qu'il tenta d'étayer. Soit ils s'égaraient régulièrement à saisir un sens inadéquat, qui restait néanmoins compatible avec la conduite des preuves recherchées. C'est la seconde hypothèse, que Frege ne prit pas la peine de discuter. En définitive, il lui était indifférent de trancher, car la réponse relevait de la pure psychologie.

Seule lui importaient l'interrogation suivante : qu'est ce qui détermine le sens qui, nous donnant accès aux nombres, permet d'exprimer les lois du dénombrement ? Une fois ce problème résolu, il pouvait s'estimer satisfait d'avoir "réussi de la sorte à construire un système pour les mathématiques". Il pouvait alors s'en "tenir là ; point n'[était] besoin de répondre à la question concernant le sens dans lequel – quel qu'il puisse être – [cette expression] était auparavant utilisé[e]. De cette manière, [il] coup[ait] court à toutes les objections." Il n'y coupait pas court en choisissant arbitrairement un sens qui *lui* convenait. Il y coupait court en établissant qu'il s'agissait du *seul* sens adapté au propos de l'arithmétique. L'origine des échecs des autres mathématiciens – qui, à tort ou à raison, prétendaient employer autrement cette expression – ne lui importait pas, car elle ne relevait pas de la logique. Toute la difficulté résidait donc dans cette question.

3.3.10.3 La première approche

Dans un article dédié au principe du contexte, Dummett explique :

> Décrire l'objectif de Frege comme une tentative de réduction de l'arithmétique à la logique rend opaque son objectif central. Il espérait trouver une façon de justifier l'existence des objets abstraits, en particulier de ceux qui forment le domaine d'une théorie mathématique fondamentale (c'est-à-dire une théorie dont les objets ne sont pas donnés par une autre théorie plus fondamentale). (Dummett 1995, p. 13/ pp. 77-78)

Nous souscrivons à la première partie de cette affirmation. Le but scientifique que Frege poursuivit durant toute sa vie n'était pas de montrer que l'arithmétique se réduisait à la logique, mais de dévoiler les sources de cette science, *i.e.* de comprendre *à quoi* elle se réduisait. Frege était moins attaché à justifier telle ou telle réponse qu'à découvrir *la* bonne réponse. Il souhaitait épargner à sa science "la honte d'être si peu éclairée sur son objet le plus proche" (1884, p. II / 116). En 1879, il disposait déjà d'une méthode générale de développement de l'arithmétique, sans savoir encore dans quel sol cette méthode plantait ses racines. Entre 1880 et 1882, il crut qu'elle se nourrissait des seules ressources logiques. Il renonça à cette idée quelques années après la découverte – et à cause – des paradoxes ensemblistes, puis entreprit de la fonder sur la géométrie. Durant sa période logiciste, il est vrai que son problème consistait pour une grande part à trouver une façon de justifier l'existence des objets abstraits. Mais ce serait renverser l'ordre des choses

que d'y voir son intention première. C'est parce que la réponse à sa question dépendait largement de ce problème que celui-ci fut promu au centre de son attention.

Frege pensait avoir établi le lien entre les deux affaires dans la première moitié des *Grundlagen*, dans laquelle il réfuta une à une les thèses concurrentes (qu'elles soient physicalistes, formalistes ou psychologistes). À ses yeux, la portée universelle de l'acte de compter exigeait que la science qui en établissait les lois s'appuyât sur des entités *abstraites*. Par ailleurs, le début de la seconde moitié des *Grundlagen* avait permis de comprendre (1) que les nombres était des objets, et (2) qu'attribuer un nombre, c'était dire quelque chose d'un concept. À partir de ces deux points, Frege déduisit que l'expression 'est un nombre cardinal' épousait idéalement la forme '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' (ou '$\mathfrak{n}(\xi)$' en exploitant la désescalade des niveaux). En d'autres termes, le contenu *authentique* de l'expression 'nombre cardinal' – *i.e.* adéquat à l'objectif que celle-ci devait servir – associait des concepts à des objets abstraits.

Par ailleurs, à partir des mêmes idées qui avaient abouti à (2), Frege avait conclu que '$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta))$' devait référer au nombre n lorsque la référence de '$\Phi(\xi)$' subsumait exactement n objets. Placée dans le contexte des *Grundgesetze* – dans lequel l'établissement de la hiérarchie catégoriale avait mis en lumière les stipulations sémantiques autorisant à fixer le sens des noms d'un langage [265] –, cette donnée semble suffire pour attribuer un sens au nom en question. Néanmoins, elle est inapte à dévoiler la nature de ce sens, lui-même étant utilisé dans le métalangage. Par ailleurs, pour fonder sa thèse, Frege était tenu de répondre de la possibilité de faire référence à des objets abstraits – laquelle n'allait pas de soi –, et ne pouvait donc s'appuyer sur cette possibilité. Généralement, il devait justifier l'existence de ces objets et comprendre ce qui garantissait notre accès à eux.

Nous allons développer notre propos à partir de ce point précis. Sans discuter tout ce qui le plaça face à ce défi – et qui fut résumé plus haut –, nous allons voir comment Frege tenta de relever celui-ci et, par suite, d'attribuer son sens authentique à l'expression 'nombre cardinal'. Dummett estime que le principe du contexte joua un rôle déterminant à cet égard :

> Dans les *Grundlagen*, le principe du contexte est censé fournir [une justification de l'existence des objets abstraits], mais l'objectif est obscurci, puisque nous ne savons pas si Frege pensait avoir le droit de considérer comme étant donnée, sans aucune justification, la notion d'extension de concept. Dans les *Grundgesetze*, l'ambiguïté est résolue. Tous les objets mathématiques seront représentés en tant que parcours-de-valeurs ; cependant, l'existence de ces parcours-de-valeurs ne peut être considérée donnée, mais exige une justification qui reposera sur une interprétation forte du principe du contexte. (Dummett 1995, p. 13/ pp. 77-78)

Au contraire, nous allons soutenir que l'ambiguïté ne fut *jamais* résolue. Dans différents cadres, Frege fit droit à deux approches *distinctes* des objets abstraits, ainsi qu'à deux conceptions *incompatibles* de la référentialité – dont une seule s'appuie sur le principe du contexte. Nous savons néanmoins qu'au moment déterminant des §§29-31, il privilégia effectivement l'approche défendue par Dummett. Mais il nous importera surtout de comprendre comment elles ont pu tranquillement cohabiter au sein des écrits de Frege, et quel genre de confusion elles manifestent.

En 1884, Frege invoqua explicitement le principe du contexte, en tentant de déterminer le contenu d'un nom propre à travers celui des énoncés dans lesquels il figure. En outre, Frege avait établi que le contenu de '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' devait valider le principe de Hume, autrement dit que

265. selon la méthode décrite en section 3.3.8.

l'énoncé suivant devait être vrai [266] :

$$\text{`}\vdash^{\mathfrak{f}\ \mathfrak{g}} (\mathbf{N}_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) = \mathbf{N}_\beta(\mathfrak{g}(\beta)) \leftrightarrow \mathfrak{f}(\beta) \approx_\beta \mathfrak{g}(\beta))\text{'}$$

Nous insistons sur ce point : Frege ne cherchait pas coûte que coûte à *démontrer* le principe de Hume [267]. Dès qu'il avait compris qu'attribuer le nombre n, c'était dire d'un concept qu'il subsumait n objets, il savait que l'opérateur $\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$ associait tout concept subsumant n éléments au nombre n, et donc que le principe de Hume était vrai. Tout ceci faisait partie de l'enquête préliminaire permettant d'établir certaines choses que respecte le contenu authentique de '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$', *i.e.* celui qui prend part aux lois du dénombrement. L'objectif ne consistait pas à vérifier que ces lois étaient vraies, mais à en établir l'origine. Ainsi, une fois mis en lumière certains points que doit respecter le contenu qu'il attribuerait à '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$', Frege devait garantir l'existence et l'unicité d'un contenu qui vérifie ces différents points et qui associe tout concept à un objet *abstrait*. Il s'y appliqua en invoquant le principe du contexte. Nous parvenons à faire référence à des objets abstraits à travers un nom quelconque lorsque nous associons ce nom à certaines stipulations qui permettent d'établir que tous les énoncés incorporant ce nom disposent d'*exactement* un contenu car, grâce au principe du contexte, nous savons qu'il en va de même pour notre nom. Ces stipulations attribuent donc un contenu logique à notre nom, et peuvent être posées comme axiomes de notre système.

Le but de Frege consistait à appliquer cette stratégie relativement au principe de Hume. S'il y était parvenu, il aurait pu sereinement conclure qu'un seul contenu pour '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' était capable de valider ce principe. Suivant sa méthode, il aurait alors octroyé ce contenu au nom en question, puis posé ce principe comme l'axiome logique à partir duquel les autres théorèmes de l'arithmétique auraient été prouvés. *Mais le fait est que Frege n'a pas atteint son but.* Le principe de Hume ne suffit pas à octroyer un contenu à tous les énoncés contenant '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$'. À ce stade, la réaction naturelle aurait consisté à ajouter une nouvelle stipulation compatible avec ce que nous attendons du contenu de ce nom afin de déterminer les contenus des énoncés qui étaient alors restés à l'écart. Au contraire, Frege expliqua que n'importe quel moyen d'attribuer un contenu qui valide le principe de Hume convenait, sans tenir compte du fait qu'un tel contenu pouvait rentrer en conflit avec nos attentes.

En vertu du principe du contexte, nous pouvons conclure qu'un seul contenu pour un certain nom vérifie une certaine stipulation lorsque cette stipulation permet de déterminer exactement un contenu pour les énoncés qui intègrent ce nom. La méthode échouant dans le cas du principe de Hume, comment être sûr qu'un contenu choisi conformément à ce principe n'altérera pas celui d'un autre énoncé d'arithmétique ? Nous croyons que Frege aurait formulé la réponse suivante : les énoncés dont la stipulation échoue à déterminer le contenu sont des énoncés marginaux absents de l'arithmétique, même s'ils sont syntaxiquement bien formés. En d'autres termes, la stipulation parvient à fixer le contenu de tous les énoncés d'*arithmétique* qui intègrent ce nom. Nous pouvons donc – et devons – combler le vide en choisissant arbitrairement le contenu de ces autres énoncés. Tous les choix conformes au principe de Hume attribuerons le même contenu aux énoncés qui importent.

Cette réponse s'accorde avec le travail du §10 des *Grundgesetze*, par lequel Frege décida arbitrairement d'identifier les valeurs de vérité à certains parcours-de-valeurs [268]. Néanmoins,

266. où '$\varphi_1(\beta) \approx_\beta \varphi_2(\beta)$' abrège le nom complet de la relation d'équinumérocité.

267. Il le tint d'ailleurs pour acquis au moment de l'introduire, dans le §63 des *Grundlagen*.

268. Cette stipulation était censée permettre de déterminer le contenu des énoncés d'égalité dont un terme est un nom explicite de parcours-de-valeurs, tandis que l'autre est un nom explicite de valeur de vérité. Or clairement, nous ne rencontrons jamais d'énoncés tels que '$1 = (\forall x, x = x)$' en arithmétique, même si un tel énoncé est syntaxiquement bien formé du point de vue fregéen.

elle pose immédiatement une difficulté que nous voulons présenter dans ce cadre. La référence d'un terme numérique dépend de celle qui est attribuée au nom pour les parcours-de-valeurs, laquelle dépend en retour de cette stipulation artificielle. Comment concilier cette conclusion avec le réalisme de Frege ? Comment tolérer que deux stipulations distinctes, qui assignent deux objets différents à un même nom, soient également adéquates pour fixer la référence des termes numériques ? La seule option raisonnable a déjà été présentée par Dummett :

> Le caractère internaliste du principe du contexte montre que le réalisme de Frege n'est pas le réalisme métaphysique (ou externe) critiqué avec force par Putnam, mais plutôt une forme de réalisme interne qu'il serait prêt à approuver (Dummett 1995, p. 19 / 84)

Dummett tente de montrer comment une telle position peut s'accorder avec l'usage d'un métalangage pour fixer la référence des termes d'un langage-objet. À ses yeux, Frege s'y serait cru autorisé tant que "la procédure s'abstient d'exploiter ce qui peut être connu par la seule compréhension du métalangage" (p. 17 / pp. 81-82), autrement dit tant qu'elle débute à partir du domaine restreint aux deux seuls objets reconnus initialement : les valeurs de vérité. Nous croyons aussi que la forme conférée au principe du contexte dans les §§29-31 fait droit à une telle idée. Néanmoins, Frege n'y a jamais cédé, même lorsque ses développements l'y forçaient pourtant. Dans le §10, il fournit deux arguments afin d'établir que la stipulation initiale était inapte à fixer la référence du nom pour les parcours-de-valeurs. L'un d'entre eux consistait à montrer que, si une fonction était compatible avec cette stipulation, alors au moins une autre fonction l'était à son tour. Cet argument est sous-tendu par une conception externaliste de la référentialité, car il exige de faire référence aux objets en question extérieurement au langage construit pour les désigner. Ensuite, Frege exploita ce même argument pour garantir la légitimité de sa stipulation complémentaire, laquelle était censée achever de fixer la référence du nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$'. Pourtant, cet argument venait aussi contester cette conclusion, montrant qu'une *autre* fonction vérifiait les *deux* stipulations [269]. Dummett commente :

> Il est difficile d'expliquer le recours à l'argument de permutation par Frege autrement qu'en supposant une défaillance passagère de sa part : l'échec total de sa réfutation dans ses propres termes nous rassure toutefois qu'il est hasardeux de tirer des conclusions de cet argument. Au contraire,si la solution qu'il présente au problème est adéquate, alors l'argument de permutation ne peut qu'avoir été faux depuis le début. (Dummett 1995, p. 14 / 79)

La solution de Frege s'appuie sur le principe du contexte pour établir que la référence d'un nom est fixée. Cette solution est donc sous-tendue par une vision internaliste de la référentialité compatible avec le principe du contexte. L'argument de permutation déroge à cette vision, et cela se traduit par le fait qu'il établit que la référence du nom en question n'est pas fixée même lorsqu'elle est censée l'être selon ce principe. En d'autres termes, Frege n'a pas réalisé qu'il mobilisait un argument contredit par la vision de la référentialité qu'il mettait en jeu, car il n'a jamais pris la mesure de la position internaliste à laquelle son interprétation du principe du contexte le confinait. Il serait donc vain de tenter de préciser cette position. Cela n'aurait aucun intérêt philosophique, car cette interprétation est incorrecte. Et ce serait historiquement inutile, car Frege n'y a pas souscrit.

Le principe du contexte constitue l'une des thèses fregéennes les plus discutées et, peut-être, les plus prometteuses. Néanmoins, nous devons reconnaître que Frege n'a pas su lui-même le traduire précisément, ni comprendre certaines de ses conséquences. Non seulement il n'a pas

269. Tout ceci fut expliqué en détail en section 3.3.9.2.

réalisé qu'il l'exploitait en mobilisant deux *différentes* versions du critère de référentialité, mais il n'a pas non plus aperçu qu'il mettait à mal son réalisme métaphysique. Ce point est visible dans les *Grundlagen*, lorsqu'il soumit d'abord notre accès aux objets abstraits à une certaine forme d'internalisme en mobilisant ce principe, avant de l'en émanciper totalement en "suppos[ant] connu ce qu'est une extension de concept" (p. 80), et en invoquant abruptement notre droit à y faire référence. Le même problème fut répercuté dans les *Grundgesetze*, lorsqu'il sollicita ce même principe en invoquant parallèlement l'argument de permutation qui y dérogeait pourtant. Notons par ailleurs que ce principe ne fut plus nommément mentionné après 1890, alors que Frege fit parfois droit à une autre conception de notre accès aux objets abstraits, à laquelle il est enfin temps de nous confronter.

3.3.10.4 La seconde approche

Certains commentateurs estiment que, pour Frege, les objets abstraits étaient essentiellement des parcours-de-valeurs, lesquels ne pouvaient donc être remplacés par d'autres entités, inaptes à soutenir la définition des nombres et la démonstration du principe de Hume. Ruffino introduit un article sur le sujet de la manière suivante :

> Dans ce papier, je tente d'éclaircir un aspect de la pensée de Frege qui n'a été qu'insuffisamment expliqué dans la littérature, à savoir sa notion d'objet logique. Je présente des éléments de la philosophie de Frege capables d'expliquer pourquoi il regardait les extensions comme les candidats naturels pour les cas paradigmatiques d'objets logiques. De plus, je soutiens (contre la suggestion de certains commentateurs contemporains, en particulier Wright et Boolos) que Frege n'aurait pas pu choisir le principe de Hume au lieu de l'axiome V comme loi fondamentale de la logique. Ceci aurait contredit sa conception des objets logiques. (Ruffino 2003, p. 51)

Nous avons nous-même envisagé que les parcours-de-valeurs aient possédé un statut privilégié à un moment précis de notre étude : lors de l'examen du paradoxe du concept *cheval*. Nous ne sommes donc pas surpris que Ruffino achève ainsi d'annoncer son propos :

> Finalement, je soutiens qu'il existe une connexion entre les vues de Frege sur le sujet et la célèbre thèse formulée initialement dans "Concept et objet" selon laquelle "le concept *cheval* n'est pas un concept". Pour autant que je sache, l'attention des commentateurs n'a pas suffisamment porté sur cette connexion dans la littérature. (Ruffino 2003, p. 51)

En section 3.2.3.5, nous avons longuement décrit cette connexion [270]. Aucun sens propre ne peut déterminer un concept, ainsi le nom 'le concept *cheval*' réfère à un objet [271]. Cet objet n'est autre que l'extension dudit concept, car les extensions sont ce sur quoi nous tombons fatalement lorsque nous tentons de parler des concepts comme des objets. Elles permettent de contourner les interdits catégoriaux, car elles autorisent à formuler les *mêmes* pensées qui impliquent des concepts en mobilisant leurs extensions. C'est pourquoi Frege expliqua, dans "Concept et objet", que l'énoncé 'il y a au moins une racine carré de 4' exprime le même sens que 'le concept *racine*

270. Nous ne prétendons pas que ce qui fut dit là-bas est entièrement fidèle à la thèse de Ruffino, ou de quiconque emprunte un sentier voisin. Nous cherchons seulement à mettre en exergue les éléments qui plaident en faveur des parcours-de-valeurs et de la loi V contre toute autre alternative, sans chercher à discuter le travail spécifique des commentateurs qui défendent cette idée.

271. Nous avons répondu aux questions soulevées par cette remarque, notamment celle de savoir pourquoi ce nom ne peut pas constituer l'expression imparfaite – car écrite en langue naturelle – d'un sens fonctionnelle. Nous ne répétons pas ici tout ce qui fut expliqué en section 3.2.3.5, nous nous contenons de résumer nos conclusions.

carré de 4 est satisfait', bien que le premier porte sur un concept tandis que le second porte sur son extension. Plus généralement, c'est pourquoi les noms $\ulcorner t^{(0)}(t^0)\urcorner$ et $\ulcorner t^0 \frown \dot{\varepsilon}(t^{(0)}(\varepsilon))\urcorner$ sont synonymes.

Cette idée suggère une autre approche des parcours-de-valeurs, selon laquelle leur existence n'attend pas davantage de justification que celle des objets ou des fonctions. Dans les deux cas, nous ne pouvons rien faire d'autre que les *exhiber* à travers le langage ; et cette démarche est amplement suffisante. Nous *constatons* l'existence des fonctions et des objets lorsque nous nous appliquons à déstructurer la langue et, ainsi, à décomposer les pensées. Une fois cette étape franchie, nous savons que des expressions telles que 'la fonction $\Phi(\xi)$' ne peuvent référer qu'à des objets, tandis qu'elles autorisent pourtant à exprimer les mêmes pensées qui traitent des fonctions en question. Ce faisant, nous réalisons l'existence d'un représentant – ou d'un corrélat – logique de chaque fonction qui permet l'effacement catégorial de celle-ci, et que Frege nomme le 'parcours-de-valeurs'.

En somme, notre appréhension des objets logiques est subordonnée à celle des fonctions, laquelle est une conséquence de notre capacité à saisir des pensées. Le point-clef est le suivant : les expressions telles que 'la fonction $\Phi(\xi)$' ne peuvent référer qu'à des objets, et prennent pourtant part à des pensées qui traitent des fonctions en question. Elles effectuent ce tour de force en désignant les représentants des fonctions visées. L'opération de représentation permet l'expression d'une même pensée à différents niveaux. Par exemple, nous pouvons exprimer que pour tout $\mathfrak{a}$, $\Phi(\mathfrak{a})$ est égal à $\Psi(\mathfrak{a})$ en disant : 'la fonction Φ est identique à la fonction Ψ' – même si les deux membres de l'égalité de cette dernière expression font référence aux représentants. En d'autres termes, les deux membres de la loi V expriment la même pensée ; ils possèdent le même *sens*.

Ce développement est totalement conforme à la manière dont Frege expliqua pourquoi il avait été initialement convaincu de l'existence des parcours-de-valeurs, après que la contradiction l'ait poussé à y renoncer :

> L'expression ['le concept *étoile fixe*'] semble désigner un objet, à cause de l'article défini ; mais il n'y a aucun objet qui pourrait linguistiquement être désigné ainsi. De là sont nés les paradoxes de la théorie des ensembles, paradoxes qui ont ruiné celle-ci. (Frege 1924-1925a, pp. 288-289 / p. 318)

Ici, il n'est pas fait mention du principe du contexte. Frege ne blâma pas une mauvaise justification sémantique de l'existence des objets abstraits et de notre accès à eux. Il affirma qu'il avait d'abord cru que ce genre d'expressions témoignait directement de leur existence.

Cette approche possède certains avantages sur sa concurrente. Par exemple, contrairement au principe du contexte, elle assure une synonymie entre $\ulcorner t^{(0)}(t^0)\urcorner$ et $\ulcorner t^0 \frown \dot{\varepsilon}(t^{(0)}(\varepsilon))\urcorner$, légitimant ainsi la méthode de désescalade des niveaux. Relativement à celle-ci, le risque était de démontrer la vérité de pensées intégrant des sens situés un ou plusieurs niveaux plus bas que ceux des pensées attendues. Or ces synonymies garantissaient l'*identité* des pensées portant sur les fonctions et de celles portant sur les parcours-de-valeurs, préservant de toute méprise quant aux théorèmes recherchés [272].

Par ailleurs, le principe du contexte permet – ou aurait dû permettre – d'assurer que le sens des énoncés de la langue idéale respecte celui des énoncés traditionnels de l'arithmétique *tout en comblant ses lacunes*. Il s'appuie sur un réalisme interne qui justifie d'attribuer indifféremment telle ou telle référence à certaines expressions, *i.e.* de procéder à n'importe quelle stipulation complémentaire compatible avec la stipulation initiale. Au contraire, si la justification de l'existence des parcours-de-valeurs fait l'économie du principe du contexte, alors rien ne barre plus la route au réalisme métaphysique qui émergeait si souvent des formulations de Frege. Rien n'interdit de

272. Pour un examen complet du problème, voir section 3.2.3.4.

faire abruptement usage de l'expression 'le parcours-de-valeurs de' dans le métalangage, afin de stipuler directement que le nom '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' réfère au parcours-de-valeurs de '$\Phi(\xi)$' quelle que soit la référence de ce dernier nom.

Dans ce cadre, nous pouvons aussi rejeter l'idée que les sens des énoncés arithmétiques traditionnels sont intrinsèquement défaillants et soutenir que ces sens ont toujours porté sur les parcours-de-valeurs, bien que leur expression lacunaire ait dissimulé cette dimension en langue naturelle. Le problème est ainsi déplacé du niveau du sens à celui de la langue. Les mathématiciens sont concentrés sur certaines facettes des pensées arithmétiques, car celles-ci sont essentielles aux problèmes qu'ils se posent. Ce faisant, ils développent et emploient un langage qui expose franchement ces facettes, tout en masquant le rôle joué par les parcours-de-valeurs. En somme, ils saisissent imparfaitement des pensées qui, en elles-mêmes, traitent impeccablement des parcours-de-valeurs. On trouve une trace de cette idée au sein même des *Grundgesetze* :

> Il est assurément clair que la possibilité de conversion évoquée [entre la généralité d'une égalité et une égalité de parcours-de-valeurs] a en réalité toujours été utilisée, bien que la coïncidence soit prédiquée des fonctions elles-mêmes, plutôt que des extensions. Si une première fonction possède toujours la même valeur qu'une seconde pour le même argument, il est d'usage de dire : 'La première fonction est la même que la seconde' ou 'les deux fonctions coïncident'. Même si cette expression est différente de la nôtre, la généralité d'une égalité est bel et bien transformée en une égalité.

Les formulations courantes sont trompeuses. Elles dissimulent le fait que les énoncés en question – des énoncés d'arithmétique traditionnels – portent sur les parcours-de-valeurs. En utilisant ces derniers pour fonder l'arithmétique, Frege ne comble donc pas la place laissée vacante par les sens des énoncés traditionnels, mais rend visible ce que ces derniers dissimulent. Quiconque dispose d'un accès à une fonction dispose d'un accès à son représentant. La transition de l'une à l'autre ne s'appuie sur une aucune intuition, elle s'exhibe à travers le fonctionnement même du sens. Il n'est donc pas davantage nécessaire de justifier notre accès à la fonction de représentation que de justifier notre accès aux valeurs de vérité. Le second est garanti par notre capacité à réaliser des jugements. Le premier est garanti par notre capacité à saisir des pensées, donc à accéder en principe à des fonctions, et par suite (immédiate) à leurs représentants. Les mathématiciens reconnaissent implicitement l'existence des parcours-de-valeurs et la vérité de la loi V, car ils s'appuient dessus dès lors qu'ils formulent une identité entre des fonctions. S'ils nient ce point, c'est parce qu'ils cernent mal la nature des pensées qu'ils saisissent, et notamment la distinction entre fonctions et objets. Lorsque nous prenons acte de la hiérarchie qui sous-tend les pensées que nous exprimons, nous comprenons que l'expression 'la fonction Φ' réfère à un objet, et que le sens de cette expression prend part aux mêmes pensées que le sens de '$\Phi(\xi)$', en particulier que les deux membres de la loi V ont le même sens. Tout ceci repose sur une compréhension – certes aigüe de, mais – limitée au fonctionnement du sens, et fait ainsi l'économie de toute connaissance extra-logique. En définitive, les objections potentielles des mathématiciens sont aussi stériles que celle du sceptique qui nie l'existence des valeurs-de-vérité et, par là-même, effectue un jugement qui témoigne de son accès à ces objets.

Dans ce cadre, l'appel aux parcours-de-valeurs ne constitue plus une solution parmi d'autres au problème de Jules César. Il est philosophiquement central, car la démarche de Frege s'appuie sur le fait que les objets logiques – en particulier les nombres – sont *par nature* des parcours-de-valeurs. Ainsi, pour fixer adéquatement le sens du nom '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' – de l'expression 'nombre cardinal' –, il suffit de déterminer la référence de '$\mathbf{N}_\beta(\Phi(\beta))$' quelle que soit celle de '$\Phi(\xi)$', *i.e.* de déterminer le parcours-de-valeurs qui est désigné lorsque nous attribuons un nombre à '$\Phi(\xi)$', ainsi que Frege s'y appliqua dans le §40 du premier volume des *Grundgesetze*. Par conséquent, cette

méthode repose essentiellement sur les parcours-de-valeurs en fondant notre accès aux nombres sur notre accès à ces derniers, lequel ne dépend que de notre capacité à saisir des pensées – donc à accéder en principe à des fonctions – et n'attend aucune justification. La possibilité de faire référence aux nombres – de fixer un sens permettant d'exprimer les lois de l'arithmétique – est garantie par un accès direct à la fonction de représentation.

En section 3.2.3.5, nous avons examiné pour elle-même cette approche des parcours-de-valeurs, sans soulever la question des nombres. Nous avons alors présenté les difficultés qui lui étaient fatales. Par ailleurs, nous savons que Frege ne fit pas droit à cette approche dans les §§10 et 31. En effet, selon celle-ci, nous n'avons pas besoin de répondre de notre capacité à faire référence à la fonction de représentation. En d'autres termes, nous pouvons directement fixer le sens de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' en stipulant qu'il associe chaque fonction de type (0) à son parcours-de-valeurs. Or Frege refusa obstinément d'emprunter ce chemin. Il eut recours à une stipulation complémentaire qui apparaît, dans le cadre que nous venons d'introduire, aussi superflue que dangereuse. En effet, rien ne garantit que le parcours-de-valeurs de — ξ soit le Vrai. Ainsi, au lieu de spécifier directement que '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' réfère à la fonction de représentation, nous adoptons gratuitement une méthode extrêmement complexe par laquelle nous risquons de lui attribuer une autre fonction pour référence.

Dans la difficile tâche de la réduction de l'arithmétique à la logique, la donnée des clauses sémantiques pour les noms de l'implication, de la négation, de la quantification, etc. n'était qu'une formalité. L'écriture des règles et axiomes attachés à ces noms, ainsi que la démonstration de leur adéquation, ne soulevaient pas davantage de problèmes. Aucun obstacle sérieux ne se dressait devant l'élaboration de cette partie du système, et sa logicité ne faisait pas mystère. L'étape délicate tenait dans l'analyse du concept de *nombre*. Selon la première approche, l'importance du principe de Hume était considérable. En effet, il s'agissait de formuler des clauses sémantiques capables d'octroyer une référence à un nom particulier grâce auquel les termes numériques seraient définis, d'assurer la vérité et la logicité d'un axiome contenant (le sens de) ce nom, et de permettre la démonstration du principe de Hume à partir de cet axiome (et du reste du système). Le travail était difficile mais, une fois accompli, il garantissait (1) que le sens authentique des énoncés de l'arithmétique était capturé dans le nouveau langage, et (2) que cette discipline reposait sur des fondations purement logiques. Néanmoins, dans les *Grundgesetze*, le lien profond entre (1) et le principe de Hume est resté totalement sous-terrain. Nous avons demandé si Frege l'avait dissimulé pour une raison précise, ou s'il estimait seulement que l'essentiel avait déjà été dit dans les *Grundlagen*. Au moment d'introduire la définition du concept de *nombre cardinal* (§43), il se dispensa de tout commentaire, et renvoya abruptement à son ancien ouvrage. Il est donc certain qu'il ne comptait pas reproduire en 1893 le détail du travail réalisé en 1884. Mais ce point ne semble pas suffisant pour expliquer qu'un principe fondamental à son projet ait été totalement fondu dans la totalité des théorèmes démontrés, sans qu'il ne soit jamais fait état de son rôle. En réalité, ce silence peut être conçu comme un autre signe du fait que Frege était toujours tenté par la seconde approche en écrivant les *Grundgesetze*. En effet, celle-ci n'octroie aucune place privilégiée au principe de Hume, fixant la référence de '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' sur la base de celle de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$', à laquelle nous avons immédiatement accès – sans impliquer le principe du contexte. Une fois ce travail réalisé, le principe de Hume peut être démontré au même titre que n'importe quel théorème de l'arithmétique. Frege a donc laissé cohabiter – généralement dans son œuvre et en particulier dans les *Grundgesetze* – deux approches profondément éloignées des parcours-de-valeurs, et nous souhaitons préciser certaines choses au sujet de cette cohabitation, qui expliquent notamment comment elle fut possible.

3.3.10.5 Confrontation des deux approches

Les deux approches répondent différemment du statut des parcours-de-valeurs. Selon la première, le principe du contexte garantit la possibilité de faire référence à des objets abstraits. Il peut ainsi être utilisé pour introduire les parcours-de-valeurs, lesquels offrent un cadre général de définition des autres objets abstraits. Mais ce détour n'est intéressant que parce qu'il permet – ou était censé permettre – de surmonter le problème de Jules César. Les parcours-de-valeurs n'ont aucune primauté ontologique sur les autres objets abstraits. Il serait tout à fait acceptable, si cela était possible, de conférer un sens convenable aux termes numériques – et ainsi de déterminer les nombres – sans passer par les parcours-de-valeurs. Au contraire, selon la seconde approche, l'effacement catégorial, permettant de formuler des pensées traitant des concepts en référant à des objets, témoigne de l'existence des parcours-de-valeurs qui, en retour, servent de base indispensable à la définition des nombres. Les parcours-de-valeurs disposent ainsi d'un statut privilégié.

Par conséquent, les deux démarches sont différentes, et même incompatibles. Selon la première, tant que nos stipulations respectent certaines conditions, nous pouvons attribuer un sens aux termes numériques avec ou sans l'aide des parcours-de-valeurs. Nous ne pouvons donc pas demander si les nombres sont des parcours-de-valeurs. Plus précisément, nous ne pouvons le demander qu'à l'intérieur du langage dans lequel cette attribution a lieu, et nous ne pouvons donc espérer une réponse qui en soit indépendante. Le principe du contexte confine les questions de référence à l'intérieur du langage envisagé [273], et ne tolère pas plus qu'un réalisme interne. Au contraire, la seconde approche est héritée d'un réalisme métaphysique. Nous n'avons pas à douter de l'existence des parcours-de-valeurs. Celles-ci sont, ont toujours été et doivent être les références des termes numériques du langage de l'arithmétique, quelle que soit la précision avec laquelle nous sommes jusqu'alors parvenus à saisir le sens de ces termes.

Est-il nécessaire de trancher entre les deux approches ? D'un point de vue philosophique, la question ne se pose pas, car ces approches sont également incorrectes, toutes incompatibles soient-elles. Dans chaque cas, nous sommes parvenus à localiser le problème, celui-là même dont la contradiction de l'Idéographie témoignait sans l'expliquer pour autant. D'une part, nous avons élucidé le principe du contexte à partir de la manière dont Frege l'exploita, puis réalisé qu'il était intenable sous cette forme. D'autre part, nous avons prolongé l'idée d'un effacement catégorial permis par les (sens des expressions référant aux) parcours-de-valeurs, puis constaté qu'elle conduisait à une impasse [274].

Mais qu'en est-il d'un point de vue historique ? En 1884, la première approche était seule en lice. Frege sollicita à plusieurs reprises le principe du contexte, avant d'expliquer que le recours aux parcours-de-valeurs n'était qu'une solution parmi d'autres. En 1890, la situation changea radicalement de visage. Non seulement il ne fit plus *jamais* mention du principe du contexte, mais il priva le principe de Hume de toute place privilégiée dans les *Grundgesetze*. Il semble donc qu'il ait renoncé à la première approche. Quelle était l'alternative ? À quelle conception des parcours-de-valeurs faisait-il finalement droit ? On ne trouve qu'une possibilité dans ses écrits : la seconde approche, selon laquelle les parcours-de-valeurs sont les représentants logiques des fonctions par lesquels certaines pensées portant sur les secondes peuvent être exprimées en référant aux premiers. Cette thèse traverse tous les passages traitant du paradoxe du concept *cheval*.

273. sans que cela n'interdise l'exploitation d'un métalangage sous certaines conditions.

274. Ce point fut consciencieusement expliqué en section 3.2.3.5. Frege n'a pas vu que son idée, si elle s'appliquait aux expressions telles que 'le concept *cheval*', devait s'étendre aux prédicats tels que 'est un concept'. Or, dans ce cadre, le problème se manifestait clairement, et ne laissait plus aucun doute concernant ce que les paradoxes ont forcé Frege à accepter sur le tard : aucune référence ne se cache derrière ces expressions.

Néanmoins, il existe de solides raisons de résister à cette conclusion. D'une part, Frege abordait systématiquement ces considérations de mauvaise grâce, lorsque certaines polémiques l'y forçaient. Il restait alors extrêmement prudent, affirmant qu'il s'agissait de remarques incidentes sur lesquelles sont projet ne reposait pas [275]. Pourtant, il devait impérativement répondre du fait que les énoncés de l'idéographie exprimaient les pensées de l'arithmétique, et non celles d'une nouvelle science. S'il renonçait au principe du contexte, il lui fallait fournir une autre justification. Certes, il pouvait s'agir du fait que les parcours-de-valeurs, qui trouvaient leur origine dans le rapport logique entretenu avec les fonctions, étaient depuis toujours présents dans les raisonnements arithmétiques, tapis derrière l'effacement catégorial qui les dissimulait. Mais, dans ce cas, ce point était d'une importance capitale pour garantir que le développement de l'*arithmétique* elle-même était réalisé dans l'Idéographie. Contrairement à ce que Frege prétendit, son projet reposait intégralement dessus.

D'autre part, il ne revendiqua qu'à deux reprises les synonymies corrélatives de cette approche, toujours lorsqu'il traitait du paradoxe du concept *cheval* [276]. Nulle part dans les *Grundgesetze* il ne prétendit que les deux membres de la loi V partageaient le même *sens*, bien que ce point découlât de la même idée. Peut-être y résista-t-il en comprenant que ces synonymies, même si elles justifiaient la méthode de désescalade des niveaux, heurtaient de plein fouet sa vision compositionnelle des pensées [277]. Cependant, il ne pouvait y renoncer sans répudier entièrement la seconde approche. Enfin, et surtout, sans faire directement mention du principe du contexte, les §§10 et 31 s'appuient incontestablement sur celui-ci. Incidemment, notons qu'il n'est donc pas surprenant que la plupart des auteurs qui militent en faveur de la seconde approche se concentrent généralement sur le paradoxe du concept *cheval*, laissant ces sections dans l'ombre [278].

En somme, nous devons admettre que ces deux approches incompatibles cohabitent dans les écrits de Frege. Le première intervint avec force lors de la démonstration des §§10 et 29-31 mais, à cette exception près, disparut totalement des textes post-1890. La seconde est en revanche présente dans plusieurs textes, mais elle ne fut formulée que du bout des lèvres, pour répondre à un problème particulier qui gênait manifestement Frege. Et pourtant, celui-ci avait besoin de l'une d'entre elles afin de garantir que la science développée dans la seconde partie des *Grundgestze* était bien l'arithmétique. Alors que conclure ?

Plusieurs raisons nous poussent à trancher en faveur de la première possibilité. D'une part, Frege se montrait clairement réfractaire à discuter la seconde approche, qu'il ne sollicitait que dans un cadre particulier. Il semble donc qu'il y ait eu recours *exclusivement* parce qu'il ne voyait pas d'autres moyens de régler le problème du paradoxe du concept *cheval*, bien que cette approche ne gagnât pas entièrement son assentiment, probablement car il savait qu'elle rentrait en contradiction avec certaines de ses thèses fondamentales. D'autre part, nous croyons que la décision concernant sa conception des parcours-de-valeurs dépend ultimement de la manière dont il entendait justifier la référentialité du nom qui leur était dédié. Or, incontestablement, il fit droit à la première approche dans ce lieu. Bien qu'il ait tu le principe du contexte partout ailleurs, il n'en reste pas moins qu'il y eut recours au moment décisif.

275. Le lecteur peut trouver un développement plus consistant sur ce thème, enrichi des citations adaptées, en section 3.2.3.5.

276. (Frege 1892a et Frege 1892-1895)

277. Nous avons détaillé ce problème en section 3.2.3.4.

278. Landini (2012, pp. 105-107) fait exception. À ses yeux, Frege tenait les parcours-de-valeurs pour les représentants [*correlate*] logiques des fonctions dont traitaient les contenus arithmétiques. Il entreprend une explication du §10 compatible avec un réalisme métaphysique, qui nie toute toute résurgence du problème de Jules César et du principe du contexte. Malheureusement, son interprétation n'explique ni la présence de la stipulation complémentaire, ni l'usage du critère contextuel de référentialité. Autrement dit, elle ne tient aucun compte des éléments qui, précisément, témoignent de l'intervention du principe du contexte.

S'il faut proposer une conclusion catégorique, nous optons donc pour la suivante : Frege appuyait ultimement son projet de réduction de l'arithmétique sur la première approche, et s'en écartait parfois, au profit de la seconde, pour répondre au problème spécifique du paradoxe du concept *cheval*. Mais une telle conclusion suppose qu'il ait été clair à la fois dans le rôle que servait chaque approche, et dans les conséquences qu'elle induisait. Or nous avons vu que ce n'était pas le cas. L'argument de permutation du §10 montre que, même au cœur du principe du contexte, il ne pouvait se résoudre à renoncer totalement au réalisme métaphysique. Un exemple symbolique de ce genre de mélanges se trouve dans la troisième partie des *Grundgesetze*, et fait suite à une longue critique des définitions créatives :

> S'il existe des objets logiques – et les objets de l'arithmétique en sont – alors il doit aussi y avoir un moyen de les saisir, de les reconnaître. La loi fondamentale de la logique qui permet de transformer la généralité d'une égalité en une égalité sert cet objectif. Sans un tel moyen, toute fondation scientifique de l'arithmétique serait impossible. Pour nous, il sert l'objectif que d'autres mathématiciens atteignent en créant de nouveaux nombres. Nous espérons ainsi qu'à partir des huit fonctions dont les noms sont énumérés dans I, §31, nous pouvons développer, comme à partir d'une seule graine, la complète diversité des objets et des fonctions auxquels les mathématiques ont affaire. Notre procédure peut-elle être appelée une création ? La discussion concernant cette question peut facilement dégénérer en une querelle terminologique. Quoi qu'il en soit, notre création, si l'on veut l'appeler ainsi, n'est pas arbitraire ; au contraire, cette manière de procéder, et son bien-fondé, sont décidés une fois pour toutes. (Frege 1893, p. 149)

Frege évoqua une manière de reconnaître *généralement* les objets logiques, ce qui s'accorde avec la première approche. D'ailleurs, la dernière phrase renvoie à la preuve des §§10, 29-31 qui fit usage du principe du contexte. Pourtant, cet extrait se situe au sein du même paragraphe que le passage cité plus haut, dans lequel il expliquait, non pas que sa loi V était fondée, mais qu'elle était (implicitement) utilisée par l'ensemble des mathématiciens, faisant droit à la seconde approche.

Chacune des deux approches répondait à un problème particulier. La première relevait d'une tentative de justifier généralement l'existence des objets logiques, tandis que la seconde était vouée à expliquer le rôle du terme 'concept' dans les langues naturelles. Frege concevait la première difficulté comme l'obstacle principal dressé devant son projet, lequel était à ses yeux indépendant de la seconde. Nous pouvons donc dire qu'il favorisait pour l'essentiel l'approche reposant sur le principe du contexte, et ne s'en remettait à l'autre que de mauvaise grâce, lorsqu'il abordait des thèmes (qu'il tenait pour) extérieurs à son propos. Néanmoins, nous ne devons pas perdre de vue qu'il ne parvint jamais à développer proprement ces approches. S'il s'y était appliqué, il n'aurait pu manquer de remarquer leurs défauts respectifs. Au contraire, il maintint une certaine confusion, qui généra une insatisfaction manifeste à l'égard de chacune d'entre elles. Concernant la première, il ne réalisa jamais la scission, provoquée par l'application particulière qu'il faisait du principe du contexte, entre deux différentes versions du critère de référentialité. Concernant la seconde, il ne parvint pas à généraliser ses conclusions au sujet de l'expression 'le concept *cheval*'. Ces différents points expliquent les soudains – et silencieux – basculements qui eurent lieu au sein de certains paragraphes. Il serait donc incorrect d'affirmer que la distinction était claire dans son esprit. Il lui arrivait de taire quelque part une conclusion qu'il avait tirée ailleurs mais qui lui semblait suspecte – par exemple celle de l'identité de sens entre les deux membres de la loi V. Et cela survenait précisément parce qu'une telle conclusion était héritée d'une approche à laquelle il refusait de faire droit dans un autre cadre. Ces réactions – ainsi que ces nombreux mélanges –

dénotent précisément une certaine confusion entre les deux approches. Il est notoire que la plupart des écrits traitant des parcours-de-valeurs sont emprunts d'un certain malaise. Frege n'a jamais été pleinement confiant concernant la loi V, au sujet de laquelle il émit plusieurs fois des réserves (antérieures à la découverte de la contradiction). Son absence de discernement à l'égard des deux manières *distinctes* par lesquelles il proposait de justifier cette loi peut – au moins partiellement – expliquer sa méfiance. Pris dans le développement d'une de ces approches, sa pensée achoppait sur une conclusion que l'autre ne pouvait supporter. Le mécontentement sous-jacent aux écrits concernant les parcours-de-valeurs se fait l'écho d'une confusion dont il distinguait les traces sans parvenir à en identifier les causes. Pour réussir à différencier ces deux conceptions, il lui aurait fallu les éclaircir. Il aurait alors immédiatement compris, non seulement qu'elles étaient incompatibles, mais aussi qu'aucune d'entre elles ne pouvait convenir. La contradiction lui a finalement emboîté le pas, établissant à sa place cette redoutable conclusion [279].

Pour autant, nous ne devons pas transformer ces "défaillances" en une charge contre Frege. Celui-ci parvint à soulever un nombre considérable de problèmes qui résistent toujours aux philosophes de la logique. De plus, il entreprit de s'y attaquer en proposant des solutions qui constituent encore une source fertile d'inspiration pour ces philosophes – comme en témoigne notamment l'important développement de l'école néo-logiciste. Il n'est donc pas surprenant que, face au défi considérable qu'il s'était lancé, il ait parfois échoué à concevoir clairement et à développer rigoureusement ses propres solutions. En définitive, notre étude visait moins à tenir compte de ce point qu'à en rendre compte. En étudiant les différents écrits de Frege, nous avons tenté simultanément de reconstituer les chemins qu'il a empruntés, d'indiquer où ceux-ci conduisaient, et de dévoiler à quel stade il s'est interrompu. Nous espérons humblement avoir atteint cet objectif.

3.4 Retour sur la limitation du domaine

Il y a une quarantaine d'années, une école interprétative prit naissance sous l'impulsion d'un bref article de van Heijenoort. Les membres de cette école s'accordent sur l'idée que les thèses de Frege interdisent de concevoir une théorie sémantique développée dans un métalangage et permettant de déterminer la référence des noms d'un langage-objet. Dans ce chapitre, nous avons contesté point par point leurs arguments. D'une part, Frege a incontestablement posé les bases d'une telle théorie compatible avec sa notion de sens. D'autre part, il a tenté d'exploiter cette théorie afin de réaliser les démonstrations des théorèmes métalogiques selon lesquels ses stipulations sémantiques octroyaient une unique référence à chaque nom de son langage et rendaient son système adéquat. Cette démarche aurait abouti sans l'intervention des parcours-de-valeurs, dont il tenta de rendre compte à travers une exploitation illégitime du principe du contexte dans les §§10, 29-31.

279. Notons que la conception des parcours-de-valeurs comme représentants logiques des fonctions ne tolère aucune restriction à un spectre limité de fonctions (de premier niveau à un argument). Par conséquent, en vertu de la seconde approche, aucune des pistes de solution à la contradiction proposées en appendice du second volume des *Grundgesetze* n'aurait été envisageable. Ce point est d'ailleurs visible à travers la remarque tardive de Frege concernant l'expression 'le concept *étoile fixe*', selon laquelle l'article défini ne témoigne pas de l'existence d'un quelconque objet. Il n'existe aucune raison de limiter cette conclusion à certaines expressions de ce type. Une telle remarque conduit donc au rejet *complet* (et immédiat) des parcours-de-valeurs. Pourtant, durant quelque temps, Frege tenta bel et bien d'en restreindre le champ pour éviter les paradoxes. Il est donc probable qu'il ait alors fait droit à la première approche, en essayant de retravailler la traduction imprécise qu'il fournit du principe du contexte dans les §§29-31 afin de l'éclaircir et, simultanément, de l'adapter à de telles restrictions. Cette hypothèse est renforcée par la première réaction qui suivit la découverte de la contradiction, à l'occasion de laquelle il concéda immédiatement que la preuve du §31 était incorrecte. Voici une trace supplémentaire de la cohabitation des deux approches au sein de ses écrits.

Notre conclusion est sans appel : Frege n'a jamais privé – et, au regard de ses propres thèses, n'avait aucune raison de priver – de leur valeur théorique les passages à "consonance sémantique" des *Grundgesetze*. En construisant la sémantique sous-jacente à ces différents extraits, nous avons vérifié qu'elle ne s'opposait à aucune de ses positions fondamentales. Il est vrai qu'il n'a pas lui-même réalisé rigoureusement ce travail, mais il a clairement indiqué le moyen d'y parvenir en recourant à un usage spécifique des lettres grecques majuscules. Cet usage lui permit de mettre à jour un procédé proche des assignations tarskiennes – sans adhérer à l'idée que certains constituants d'un nom disposent d'un contenu indéterminé – qui explique en quoi les stipulations sémantiques associées aux noms primitifs d'un langage dévoilent le sens de ces noms et, par suite, celui des noms complexes qu'ils permettent de former.

Frege a néanmoins échoué à répondre à certaines questions essentielles sur lesquelles nous voulons revenir. Supposons que le nom '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' se voit attribuer pour référence l'opérateur de cardinalité à travers une stipulation sémantique qui fasse elle-même usage du nom du métalangage '$\underline{\mathbf{N}}_\beta(\varphi(\beta))$' référant à ce même opérateur. Frege n'aurait vu aucune objection à l'exploitation d'une telle stipulation au sein d'une théorie sémantique permettant de dévoiler la place du sens du nom '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' dans celui des noms complexes qui l'intègrent. En revanche, il aurait contesté la simplicité de ce sens, soutenant que le sens *complexe* du nom '$\underline{\mathbf{N}}_\beta(\varphi(\beta))$', investi dans la stipulation sémantique permettant de fixer celui de '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$', est partie prenante de ce dernier. À ses yeux, une telle stipulation n'aurait donc pas attribué un sens simple à '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$', et ne permettrait pas de dévoiler la structure *fondamentale* du sens des noms complexes qui l'intègrent. Généralement, la difficulté est la suivante : comment s'assurer qu'un sens simple a été spécifié pour un quelconque nom de base du langage-objet ? La réponse pourrait s'inspirer du fait que, dans les *Grundgesetze*, Frege a toujours limité les noms propres atomiques du métalangage à 'Vrai' et 'Faux', et les noms de fonctions à des expressions pour des concepts. Néanmoins, il n'a jamais affirmé qu'une telle restriction des ressources du métalangage suffisait à garantir qu'une stipulation attachait un sens simple au nom auquel elle était associée, et il est peu probable qu'il se soit réellement penché sur le problème [280].

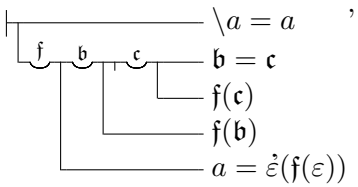
Ce constat soulève immédiatement une autre question : si, pour prétendre attribuer un sens simple, les stipulations doivent intégrer exclusivement, comme expressions du métalangage, des noms pour des concepts ou des valeurs de vérité, comment fixer le sens des noms qui ne réfèrent pas à – des fonctions dont toutes les valeurs sont – des valeurs de vérité ? Frege a tenté de surmonter cette difficulté en invoquant le principe du contexte. Pour déchirer la cloison des seuls objets dont nous avons une appréhension immédiate – les valeurs de vérité –, il renonça aux stipulations "directes" qui permettent d'assigner la référence d'un nom propre en l'indiquant directement dans le métalangage, et celle d'un nom de fonction en indiquant directement sa valeur en chaque argument dans le métalangage. Il envisagea de procéder à certaines stipulations "indirectes" dont le propos consistait à fournir un moyen de déterminer la référence de tous les énoncés intégrant le nom qui devait ainsi recevoir un contenu. Nous avons vu que – et pourquoi – cette stratégie n'aboutissait pas, mais nous voulons ajouter certains compléments à cette conclusion.

Un grand nombre d'auteurs s'accordent sur l'idée que Frege refusait de limiter son domaine de quantification. Nous nous sommes fermement opposés à cette interprétation sur la base des §§10, 29-31, dans lesquels Frege expliqua que la référence de '$\dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon))$' n'était pas spécifiée tant qu'il restait impossible de décider si "un objet qui ne nous est pas donné comme un parcours-de-valeurs est un parcours-de-valeurs" (p. 16). Ce faisant, il ne réclamait pas seulement une méthode pour déterminer la référence de $\ulcorner\dot{\varepsilon}(t^0)(\varepsilon)) = t^0\urcorner$ lorsque $t^{(0)}(\xi)$ et t^0 sont des noms de l'idéographie,

280. Comme nous l'avons vu en section 3.2.3.4, ses explications concernant les 'constituants logiquement simples' ont toujours demeuré à un stade extrêmement rudimentaire et, à bien des égards, insatisfaisant.

mais un moyen de déterminer celle de '$\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon)) = \Delta$' quelle que soit la référence de '$\Phi(\xi)$' et de 'Δ'. Or, si le domaine des références admissibles pour ces noms auxiliaires déborde du seul cadre des valeurs de vérité et des parcours-de-valeurs, alors la stipulation complémentaire n'a plus aucune chance d'apporter la solution.

Par ailleurs, il est clair que Frege n'a pas tenté de développer un système syntaxiquement complet. Il a notamment choisi de ne pas y intégrer l'axiome ci-dessous, qui exprime que tout objet qui n'est pas un parcours-de-valeurs sous lequel tombe un unique objet est envoyé sur lui-même par la fonction $\backslash\xi$:



Cette décision s'explique par le fait que l'énoncé en question n'était pas impliqué dans la réalisation des démonstrations visées, bien que Frege ait clairement indiqué qu'il le tenait pour vrai lorsqu'il introduisit le nom '$\backslash\xi$'. À ses yeux, tous les énoncés de l'idéographie devaient posséder une valeur de vérité – et généralement tous les noms de ce langage devaient disposer d'une référence – même s'il n'était pas toujours possible de démontrer la vérité ou la fausseté de chacun d'entre eux dans le système. Cette contrainte pesait donc aussi sur l'énoncé qui exprime que chaque objet est un parcours-de-valeurs :

$$(1) \qquad \text{`}\vdash\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\vdash a = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{f}(\varepsilon))\text{'}$$

Le travail des §§29-31 était destiné à établir que chaque nom possédait une référence à travers l'intégration progressive des parcours-de-valeurs au domaine de quantification. Que cet énoncé soit ou non prouvable dans l'Idéographie, il est ainsi clair que Frege estimait que ses stipulations sémantiques en assuraient la vérité.

Dans les *Grundgesetze*, le domaine de quantification était donc limité aux parcours-de-valeurs et aux valeurs de vérité. Mais cette limitation semble s'opposer au caractère général de la logique tel que Frege le concevait. Les énoncés de l'idéographie peuvent difficilement être conçus comme généraux alors qu'ils sont interprétés dans ce cadre restreint et que certains voient leur valeur de vérité basculer lorsque ce dernier est étendu – par exemple (1) quand des objets non abstraits sont intégrés au domaine. Nombre d'exégètes en concluent que Frege ne pouvait limiter son domaine, et traduisent la notion de généralité logique par la neutralité du vocabulaire logique ou, ultimement, par celle des entités désignées par ce vocabulaire. Une vérité serait logique si et seulement si tous ses constituants élémentaires déterminent des fonctions qui s'appliquent indifféremment à n'importe quelle entité de bon type. Ces auteurs tentent ainsi de rendre compte des nombreuses affirmations de Frege selon lesquelles la logique, contrairement aux autres sciences, ne possède aucun domaine particulier. Dans le premier chapitre, nous avons vu qu'une telle idée avait en effet été motrice dans le basculement, opéré lors du premier mouvement, d'une vision de la logique en termes d'indétermination à une vision de la logique en termes de généralité. Nous ne contestons ni qu'elle respecte l'intuition de Frege dans une certaine mesure, ni qu'elle traduise habilement certaines de ses remarques. Néanmoins, elle possède trop de défauts pour qu'il soit possible de l'utiliser comme *caractérisation* de la logicité.

En effet, Frege estimait que les noms fonctionnels de toute langue idéale, même adaptée à une science particulière, devaient respecter le principe de complétude. En ce sens, le concept de *parallélisme* intégré à l'idéographie enrichie pour la géométrie aurait aussi dû s'appliquer "à

toute entité de bon type". Techniquement, il n'existe donc aucune manière de discriminer entre les fonctions logiques et extra-logiques lorsque celles-ci sont prises dans un cadre scientifique rigoureux, et ainsi d'appuyer la notion de logicité sur cette distinction. Mais peut-être Frege estimait-il que la manière dont nous avons accès au concept de *parallélisme* limite ce dernier à certains objets géométriques, et qu'il est ensuite nécessaire de l'étendre *artificiellement* aux autres objets pour respecter le principe de complétude – par exemple en spécifiant qu'il renvoie la valeur Faux lorsque ces autres objets sont pris en arguments. Peut-être Frege marquait-il une différence entre – disons – la portée "naturelle" d'une fonction et celle qu'elle devait recevoir dans un cadre scientifique. Il est vrai qu'il n'a jamais directement fait état d'une telle nuance, mais il n'a pas non plus abordé en détail le problème de l'extension de l'idéographie aux sciences particulières. *A priori*, nous ne pouvons écarter l'hypothèse qu'il aurait pu répondre au problème de cette manière, s'il s'y était confronté.

Néanmoins, cette réponse ne règle pas entièrement la difficulté. Supposons que la forme particulière conférée au principe du contexte ait été correcte. Supposons, donc, que Frege soit parvenu à montrer que les stipulations initiale et complémentaire aient assuré une référence au nom pour les parcours-de-valeurs. En vertu de la stipulation initiale, il aurait été légitime à intégrer la loi V au système, laquelle aurait été reconnue comme une pensée vraie. Par ailleurs, Frege croyait que la logicité de cette pensée dépendait du fait que la stipulation initiale permettait (en partie) de fixer la référence d'un nom pour des objets *abstraits*. Mais encore fallait-il garantir ce dernier point : comment s'assurer que certaines stipulations permettent de fixer une référence qui envoie tous ses arguments sur de tels objets ?

Frege traçait une frontière nette entre les objets abstraits et les autres, sans limiter pour autant le principe du contexte aux noms désignant les premiers. Au contraire, ce principe lui permettait de soumettre les deux sortes d'objets au même défi. Leur existence n'est pas garantie par les images internes imparfaites et changeantes auxquelles nous pouvons les associer dans certains cas – justement lorsqu'il ne s'agit pas d'objets abstraits –, mais par notre capacité à exprimer des pensées dont certains constituants les déterminent. Cependant, cette dernière phrase doit se traduire différemment relativement aux deux sortes d'objets. La méthode qui permet d'attester la référentialité d'un nom pour un objet physique ou géométrique doit être différente de celle qui permet d'attester la référentialité d'un nom pour un objet abstrait, bien qu'elles reposent toutes deux sur le principe du contexte. Sans cela, rien ne permettrait de comprendre à quelle sorte d'objet nous avons affaire, autrement dit rien ne les distinguerait plus. Une telle différence pourrait reposer sur certains énoncés qui ont leur place seulement dans le cadre des objets non abstraits. C'est en tous cas l'hypothèse de Dummett [281], qui invoque à ce titre les énoncés de reconnaissance tels que 'c'est T'.

Frege n'a jamais tenté de préciser le principe du contexte hors du cas des objets abstraits. En réalité, il n'a même pas décrit le cadre général de son application pour ces objets. Considérons l'exemple des directions de droites, utilisé dans les *Grundlagen*, que Frege tenait pour des objets abstraits. La stipulation ci-dessous ne suffit pas à garantir leur existence, car elle est incapable de répondre du contenu du nom '$\mathbf{dir}(\xi)$' [282] :

$$(2) \qquad \forall \mathscr{I}\Big(\mathbf{R}(\text{`}\mathbf{dir}(\Delta) = \mathbf{dir}(\Gamma)\text{'}) = \mathbf{R}(\text{`}\Delta//\Gamma\text{'})\Big)$$

Pour remédier au problème, Frege proposa la même solution que dans le cas des nombres : le

281. ou, plus précisément, l'hypothèse que Dummett fait à propos de la manière dont Frege concevait le problème. Voir par exemple (Dummett 1991b, p. 204).

282. '$\xi//\zeta$' réfère à la relation de parallélisme, ici supposée connue.

détour par les extensions. Cependant, rien n'interdit en principe que nous cherchions certaines stipulations complémentaires pour combler les lacunes de l'énoncé ci-dessus. Qu'en est-il si, à cet égard, nous spécifions qu'un nom de la forme $\ulcorner \mathbf{dir}(t) \urcorner$ réfère à une droite particulière ? Dans ce cas, non seulement $\mathbf{dir}(\xi)$ ne serait pas le concept authentique de direction, mais il n'associerait pas un objet abstrait à tous ses arguments. Il pourrait nous être rétorqué que le langage de la géométrie ne dispose pas d'un nom pour une droite *particulière*. Mais supposons que nous nous intéressions à l'introduction de noms pour les objets abstraits dont l'existence est contingente à celle d'objets physiques – par exemple d'un nom pour l'équateur de la Terre –, alors notre langage-objet lui-même devrait disposer de noms pour ces objets, et pourrait supporter certaines stipulations les impliquant.

Le problème n'est donc pas seulement celui de la méthode permettant d'attester que certaines stipulations suffisent à conférer une référence à un nom pour des objets abstraits, mais aussi celui du critère que doivent respecter ces stipulations pour être légitimement soumises à cette méthode. Frege n'a jamais répondu à ce problème, pas plus qu'il n'a tenté de fournir un cadre d'application du principe du contexte pour les objets concrets. Supposons néanmoins qu'il soit parvenu à surmonter cette difficulté, et qu'il ait pu conférer une référence au nom '$\mathbf{dir}(\xi)$' en vertu du principe du contexte à travers certaines stipulations adaptées au cadre des objets abstraits. Alors, comme dans le cas des extensions, il aurait conclu à la logicité de la pensée exprimée par (2), laquelle intègre pourtant un sens qui détermine le concept "naturellement limité" de *parallélisme*. En somme, la notion sous-jacente de logicité à travers laquelle il comptait garantir celle de l'axiome V n'était pas compatible avec le critère, proposé plus haut, selon lequel une vérité est logique si et seulement si elle n'intègre ultimement que des constituants qui sont "naturellement généraux". En outre, même en admettant que Frege n'ait jamais restreint son domaine de quantification et qu'il ait reconnu immédiatement la logicité de la fonction pour les parcours-de-valeurs, ce critère permettrait d'établir la logicité de la négation de (1) – qui n'implique qu'un vocabulaire neutre – tandis que Frege aurait certainement refusé de soumettre à la seule logique la question de l'existence d'un objet différent des parcours-de-valeurs.

Les membres du courant antisémantique estiment que la vision fregéenne de la logicité bloque la constitution d'une théorie sémantique. Le travail abattu dans ce chapitre nous permet de prendre le contre-pied de cette affirmation. Frege n'est parvenu ni à proposer une version convaincante du principe du contexte permettant d'assurer l'existence des objets abstraits, ni à cerner la conception de la référentialité dissimulée derrière l'application qu'il fit de ce principe. Ses oscillations entre deux approches incompatibles des parcours-de-valeurs [283], son maintien d'un réalisme fort au moment où celui-ci ne pouvait convenir [284], sa confusion entre deux versions distinctes du critère de référentialité [285] dénotent que, s'il disposait depuis 1879 d'une stratégie permettant de reconstruire habilement la structure des nombres cardinaux, il ne parvint jamais à répondre correctement à ces deux questions essentielles : que sont ces nombres, et où puise sa source la science qui en établit les lois ? Bien avant de prendre connaissance des paradoxes, il cultivait déjà des réserves relatives à sa loi V, dont il ne savait pas réellement comment répondre de la logicité – à travers un accès immédiat à la fonction de représentation ou *via* l'intervention du principe du contexte. Comme nous venons de le voir, il n'est jamais parvenu à fournir un critère adéquat pour cette notion de logicité, ni à développer une vision claire à cet égard. En définitive, il n'a pas su rendre compte de ce qu'il nommait la 'généralité' de la logique. Et, bien qu'il n'ait jamais renoncé au terme, il n'en fit pas la forteresse inviolable que certains y voient,

283. Voir section 3.3.10.
284. notamment lors de l'exploitation de l'argument par permutation durant l'application du principe du contexte.
285. Voir section 3.3.9.

autorisant notamment la restriction du domaine de quantification. Il est incontestable qu'il n'a jamais tenté d'exploiter des moyens sémantiques pour caractériser la logicité. Mais rien n'interdit de croire que son enquête à ce sujet aurait pu le mener à cet endroit. Car si cette enquête n'est jamais parvenue à son terme, sa tentative d'établissement des bases d'une théorie sémantique a au contraire abouti, et aurait pu être mise à contribution dans ce cadre. Dans ce chapitre, nous n'avons pas tenté de trancher cette question, parce que cette tâche aurait exigé d'extrapoler sur la manière dont il aurait pu préciser et corriger ses intuitions concernant l'essence de la logique. Notre but consistait seulement à montrer que la sémantique qu'il développa à l'occasion des *Grundgesetze* était étonnamment proche de celles que nous exploitons aujourd'hui, et qu'il la mit au service de certains des objectifs que les nôtres permettent désormais d'accomplir [286]. À ce titre, nous espérons être arrivés à destination.

286. comme la démonstration des théorèmes d'adéquation (voir section 3.3.6.4).

Conclusion

Notre enquête fut structurée en trois grands moments : la présentation de la genèse des idées qui peuplent les *Grundgesetze*, la construction rigoureuse du système qui y est développé, et l'analyse de la sémantique sous-jacente à ce système. Notre intention était d'éclaircir un certain nombre de problèmes – et de trancher un certain nombre de questions – vivement discutés dans la littérature au sujet des thèses fregéennes. À cette fin, nous avons dû pénétrer des champs divers : logique, philosophie de la logique, des mathématiques et du langage. Dans une large mesure, Frege est aujourd'hui considéré comme un penseur incontournable relativement à ces différentes disciplines, auxquelles il a su contribuer de manière déterminante. À tout le moins la majorité des chercheurs s'accordent-ils sur cette conclusion, que d'autres (peu nombreux) entendent encore contester. Hintikka et Sandu font partie de ceux-ci :

> Il nous semble dès lors regrettable que les philosophes continuent de nos jours à se tourner vers les travaux de Frege afin d'y rechercher leurs problématiques ainsi que les concepts qui nous permettraient de les résoudre. Frege était bien trop aveugle pour pouvoir constituer une source valable de concepts, d'idées ou de problématiques. Et il est fort probable que les travaux de certains de ses contemporains se révéleront dans le futur être bien plus riches d'inspiration dans le domaine des fondements des mathématiques que ne le furent, jusqu'à présent, les travaux de Frege. (J. Hintikka et Sandu 1992, p. 315 / 202)

L'attaque visait directement Frege, que l'impact devait expulser hors du panthéon dans lequel il fut installé au sortir d'une longue et difficile carrière. Mais la cible était plus générale, car l'onde de choc était censée s'étendre à la fois aux historiens qui lui font cet honneur et aux philosophes qui s'obstinent à puiser leur inspiration dans ses textes. Nous voulons conclure – et synthétiser – notre recherche à l'aune de cette critique, en répondant à la question suivante : en quoi devons-nous être redevables à Frege ? Quelle place tint-il de son vivant dans le développement des différents champs de recherche auxquels il prit part ? Et pourquoi ses idées sont-elles toujours présentes, affinées et parfois défendues dans la philosophie contemporaine ? En somme, quelles sont la mesure et la légitimité de son influence passée et présente ?

Il est au moins trois mérites que nous ne pouvons lui retirer. D'une part, il proposa la première formalisation de la quantification, bien qu'il employât à cette fin un symbole qui ne fut jamais repris. D'autre part, il construisit le premier système propositionnel complet de l'histoire de la logique. Cette avancée fut accomplie dès 1879 dans la langue formulaire de la *Begriffsschrift*, et maintenue dans l'idéographie des *Grundgesetze*. Il est vrai que le qualificatif 'propositionnel' n'était plus totalement adapté à ce dernier cadre, car les énoncés s'étaient alors fondus parmi les noms propres. Il n'existait donc ni règles ni lois qui leur soient réservées. Néanmoins, certaines d'entre elles n'avaient d'intérêt que dans le cas des énoncés – même si elles s'étendaient généralement aux noms propres à travers l'action de l'horizontal – et constituaient pour eux un système sémantiquement complet.

Enfin, Frege développa le premier système de preuves rigoureusement conçu, *i.e.* la donnée précise d'une morphologie et d'une syntaxe permettant d'effectuer pas à pas des déductions dans lesquelles aucune étape ni aucune prémisse n'était implicitement mobilisée. À ce titre, la *Begriffsschrift* restait défaillante, car Frege ne disposait pas encore d'une grammaire homogène pour soutenir la construction des énoncés de sa langue formulaire [287]. La solution fut apportée par la mise à jour des concepts – puis des fonctions – de niveaux supérieurs ainsi que par l'élaboration, pour l'idéographie, de l'appareil morphologique adapté à ces entités. Bien que Frege n'ait jamais rigoureusement exposé cet appareil, nous avons pu le reconstruire proprement en examinant ses différentes remarques, et nous assurer progressivement du bien-fondé d'une telle construction. Ce travail fut long et fastidieux, car la grammaire en cause se démarque nettement de celles de nos langages des prédicats. Elle exploite un difficile processus de saturation-désaturation qui s'appuie sur les lettres pour les espaces vacants intégrées aux noms de fonctions, compliquant drastiquement la formation des expressions et les "remplacements" des unes dans les autres. Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes cependant assurés qu'elle fonctionnait convenablement : la langue idéale de Frege ne présente aucun défaut syntaxique, pas plus que le système dans lequel il la coucha à l'occasion des *Grundgesetze*.

Ces trois points sont difficilement contestables. Ils contribuèrent probablement au fait que, malgré leurs réserves, Hintikka et Sandu reconnaissent que "Frege est à l'origine de la conception que nous nous faisons aujourd'hui de la logique, non seulement parce qu'il en a conçu l'idée générale mais aussi parce qu'il l'a développée" (p. 314 / 201). Ici, notre but n'est pas d'expliquer pourquoi ils se sont néanmoins engagés dans la critique radicale dont nous avons restitué plus haut la brutale conclusion, ni si celle-ci se réduit ou excède les résultats de Frege concernant les fondements des mathématiques [288]. Notre longue recherche ne constitue pas une réponse à la totalité des arguments de ceux qui posent un regard circonspect, voire dubitatif, sur le travail de Frege. Elle permet cependant le traitement de l'objection qui occupe une place privilégiée dans la littérature des quarante dernières années : Frege aurait développé des thèses en opposition radicale avec toute approche contemporaine de la sémantique. À cet égard, les perspectives qu'il a ouvertes auraient donc grandement entravé, et aucunement nourri, certaines avancées de logique du début du vingtième siècle. Notre étude des *Grundgesetze* fut conduite à travers le prisme de cette affirmation, dont nous avons cherché *in fine* à mesurer la pertinence. C'est donc aussi à l'aune de ce reproche que nous voulons, en guise de conclusion, tirer le bilan de cette étude.

Frege se voit souvent décoré d'une médaille pour avoir mis en lumière la composition du contenu objectif des énoncés, en remplaçant le découpage traditionnel et inapproprié sujet-prédicat par le couple fonction-argument. Nous avons appuyé cette conclusion tout en contestant la forme particulière que l'orthodoxie lui confère. La notion de fonction de la *Begriffsschrift* n'était pas encore celle des *Grundgesetze*. Elle n'était que le biais à travers lequel l'analyse des énoncés était menée, sans constituer une (ou plusieurs) catégorie(s) de contenus d'expressions impliqués dans ceux des énoncés. Le chemin par lequel Frege aboutit à ses conceptions matures de 1890, et qui fut motivé par ses travaux au sujet des fondements de l'arithmétique, s'orchestra autour des variations subies par cette notion. La première version disparut lors d'un important mouvement qui eut lieu entre 1880 et 1882. Celui-ci est rarement souligné par les commentateurs, probablement parce que Frege le confina dans un silence qui contraste avec les nombreuses annonces des changements de 1890. Pourtant, ce mouvement signa de profondes modifications, telles l'adhésion au logicisme, l'analyse de la quantification en termes de concepts, la mise à jour de l'appareil

287. et, surtout, pour assurer les substitutions qui y avaient cours, comme nous l'avons vu en section 1.4.9.

288. L'article dont est tirée la citation (1992) est concentré sur ce sujet, tandis qu'une autre contribution des mêmes auteurs (1994) épouse une perspective plus générale.

linguistique adapté à la hiérarchie qui sous-tendait cette analyse, la substitution de la notion de généralité à celle d'indétermination, l'adoption de l'identité objectuelle, ou encore l'extension des modes de détermination aux énoncés. Pour autant, il n'en résulta pas une stabilisation complète de l'architecture des contenus à laquelle Frege faisait droit. Celui-ci s'en aperçut lorsqu'il dirigea son regard vers la seconde notion de fonction, que ses conceptions portaient en germe depuis le début sans qu'elles ne lui aient encore permis d'éclore. Il procéda alors à la célèbre démarcation entre le *Sinn* et la *Bedeutung* présentée dans les trois articles fondateurs de 1891-1892.

Précisément, c'est lorsqu'il entreprit de réaliser une analyse des noms propres parallèle à celle des énoncés qu'il comprit finalement l'ambiguïté attachée aux concepts et qu'il permit l'avènement de la seconde notion de fonction. Il parvint à lever cette ambiguïté en scindant le contenu des termes conceptuels entre ce qu'il appelait autrefois 'le concept', qu'il concevait comme intensionnel et qui n'est en réalité qu'un mode de détermination, et ce à quoi il donna finalement ce nom, *i.e.* l'entité extensionnelle ainsi déterminée. La même distinction valait pour la fonction, tandis que le mode de détermination de l'objet rejoignait le contenu du nom propre aux côtés de l'objet lui-même. Dans ce contexte, Frege put enfin reconnaître la *pensée* – la portion jugeable du contenu – comme résultant de la composition des modes de détermination attachés aux constituants d'un énoncé, et restituer dans ses droits la distinction analytique-synthétique que le premier mouvement avait détériorée. Parallèlement, le mode de détermination attaché à un nom propre complexe résultait enfin de la composition de ceux qui étaient attachés à ses constituants, et l'objet auquel conduisait le premier mode de détermination résultait de la composition des entités auxquelles conduisaient les seconds. En somme, un processus compositionnel touchait les modes de détermination – qu'il appelait désormais les '*sens*' et constituaient ce qu'une expression *exprime* – et un autre s'appliquait aux entités ainsi déterminées – qu'il appelait désormais les '*références*' et constituaient ce qu'une expression *désigne*. Néanmoins, si le premier s'étendait légitimement aux énoncés, Frege aurait pu limiter le second aux noms propres. Au contraire, il vit dans les valeurs de vérité la référence des énoncés, qui résultait de la composition des références de leurs constituants. En les mêlant aux objets standards, il fut en mesure d'identifier les concepts à des fonctions dont les valeurs étaient toujours le Vrai ou le Faux.

La mise en lumière de ces différents éléments – que nous venons de résumer (trop) brièvement – fut l'objet de notre premier chapitre. Cette longue recherche historique ne nous confronta pas seulement à la transformation des fonctions, mais aussi aux liens entretenus par les trois notions d'identité objectuelle, d'identité métalinguistique et d'égalité arithmétique, aux mutations subies par les notions de concept et de mode de détermination, ainsi qu'aux divers arrangements de la langue formulaire qui assurèrent les démonstrations des principaux théorèmes de l'arithmétique réalisées dans un premier manuscrit (perdu) avant le basculement de 1890 et dont nous avons restitué les grandes lignes au sein du deuxième chapitre. Nous sommes ainsi parvenus à reconstituer le détail des mouvements épousés par les conceptions de Frege entre 1879 et 1890, tout en décelant les problèmes qui en ont donné l'impulsion. Nous avons pu constater que, déjà dans la *Begriffsschrift*, Frege tentait de refléter dans sa langue le contenu des énoncés en dévoilant les éléments à partir desquels celui-ci pouvait être déterminé. L'enjeu consistait à représenter des démonstrations correctes en vertu du rapport entretenu par certains contenus à travers des dérivations régies par la forme des éléments syntaxiques qui y figuraient. À chaque étape d'une dérivation, la vérité du contenu du conséquent devait être justifiée par celles des contenus des antécédents, ce qui devait être garanti par les liens qui unissaient les contenus de leurs constituants. Il est vrai que les contenus des énoncés étaient alors analysés en termes de concepts – et non de fonctions – et d'objets, que ces constituants ne permettaient pas de rendre entièrement compte de la composition de ces contenus, et qu'ils entretenaient encore une relation inadéquate. Mais l'objectif était posé dès le départ, et il fut atteint lors du second mouvement : le couple

fonction-objet de 1890 permettait à lui seul de déterminer le contenu d'une expression sur la base de ceux des constituants de cette expression.

Frege proposa donc une des premières matrices d'analyse *sémantique* exhaustive du langage. Par conséquent, il est surprenant que certains commentateurs résistent à lui attribuer une part du mérite des avancées considérables du début du vingtième siècle dans le domaine de la sémantique, en le tenant au contraire pour un adversaire des principaux acteurs de ces progrès. L'explication tient dans ce que ces auteurs appellent l''universalisme logique', au nom duquel Frege nous tiendrait pour "captifs de la langue". À ce titre, il aurait regardé comme illégitime la théorisation de cette matrice au sein d'une véritable science ou, au moins, l'usage que nous faisons aujourd'hui de telles théorisations. Un grand nombre d'exégètes – que nous avons réunis dans le camp antisémantique – renvoient ainsi dos à dos sémantique et universalisme, bien que Frege n'ait *jamais* lui-même fait usage de ce dernier terme.

Il est fréquent que des interprètes choisissent de circonscrire une frange particulière des idées d'un auteur à travers une formule spécifique. Ce geste peut s'avérer commode et, parfois, extrêmement fertile. Il met en relief ce qui était, à l'époque où cet auteur écrivait, ferré au reste de ses idées. Mais il requiert une détermination *précise* du fragment en jeu. Or, à cet égard, l'expression 'universalisme logique' présente d'importantes lacunes. Elle apparut pour la première fois sous la plume de van Heijenoort pour désigner ce qu'il s'était agi de dépasser afin de développer les sémantiques contemporaines, sans soutenir pour autant un quelconque désaveu de Frege. Elle fut ensuite reprise par Hintikka qui formula une critique bien plus sévère à son égard, puis par divers philosophes qui s'en emparèrent à leurs fins propres. Mais l'article fondateur de van Heijenoort est trop court pour contenir une caractérisation précise de cette notion. En s'y référant collectivement, ses successeurs ne se sont pas appropriés une lecture claire et détaillée, ils ont extrapolé et prolongé une idée (trop) générale dans des directions souvent bien différentes. C'est pourquoi leurs adversaires en appellent régulièrement à des éclaircissements de ce que Tappenden nomme "des occurrences répétées de phrases spécifiques et des stratégies dialectiques surgissant sans explication aux points clefs d[e leurs] articles" [289].

L'objectif de notre troisième chapitre fut précisément de faire la lumière sur cette question. Il s'est agi d'ouvrir la boîte noir de l'"universalisme" de Frege en dévoilant – puis en évaluant – les différents arguments avancés contre la possibilité de l'élaboration (ou de l'exploitation) d'une théorie sémantique dans une perspective fregéenne. Nous voulions offrir une tribune plus vaste à un débat qui s'est souvent tenu dans l'intimité d'articles assez courts, fatalement limités à traiter l'une ou l'autre des nombreuses facettes du problème, afin de décider si, comme le prétend Hintikka, certaines composantes des thèses de Frege démontrent que son importance dans l'histoire de la logique est largement surestimée.

La discussion s'articule systématiquement autour de ce que Frege aurait reproché à nos théories sémantiques. Pourtant, dans les *Grundgesetze*, il parut faire lui-même usage d'une telle théorie. Lors de l'introduction des noms, règles et axiomes ainsi qu'au sein des §29-31, il procéda à de nombreuses remarques qui semblent constituer collectivement de véritables définitions et raisonnements sémantiques concernant l'idéographie et réalisées dans la langue d'exposition. D'une même voix, le clan antisémantique rétorque qu'il s'agit seulement d'*élucidations* situées en dehors de tout cadre théorique. Frege aurait emboîté le pas à Wittgenstein en écrivant des énoncés visant à "montrer ce qui ne pouvait se dire". Les passages en question, ainsi que tous ceux incorporant un prédicat de vérité (ou de référence), en seraient constitués. Il ne faudrait donc pas y lire la légitimation de la sémantique, mais au contraire son bannissement du régime

289. (Tappenden 1997, p. 220)

scientifique.

Geach fut le premier à identifier la paternité de la notion wittgensteinnienne d'élucidation dans celle de Frege, rapidement rejoint par Ricketts et Weiner. D'une certaine manière, le lien entre les deux notions est incontestable. À différents égards, les positions de Frege nous placent face au même genre d'interdits qui frappe celles de Wittgenstein. Néanmoins, contrairement au second, le premier ne prit jamais pleinement conscience de cette situation. Il ne perçut pas distinctement les limites du sens, ni ne considéra que ce qui était manqué par telle expression était par nature manqué par *toute* expression, que ce qui était était visé, suggéré, indiqué était en soi inapte à l'expression. Jusqu'au bout, il se crut victime des seules langues naturelles. À aucun moment il ne manifesta la conviction qu'un (pseudo-)raisonnement quelconque, qu'il soit ou non employé à des fins élucidatoires, échappait *de jure* au cadre de la théorie. Car il ne concevait pas l'activité élucidatoire comme extérieure au domaine du sens, mais comme un tremplin, situé là où le sens est imparfaitement exprimé, vers là où il l'est idéalement, *i.e.* comme un travail destiné à l'établissement d'un système idéal.

Par conséquent, Frege localisait les passages sémantiques des *Grundgesetze* parmi les élucidations *exclusivement* parce que ces sections constituaient une part essentielle du travail préliminaire indispensable à l'élaboration de l'Idéographie. Il ne maintenait pas les énoncés en jeu en dehors du cadre rigoureux d'un système idéal en vertu de leur contenu – ou de leur absence de contenu – mais en vertu de leur fonction : poser les fondations pour édifier un tel cadre, ce qui ne pouvait avoir lieu qu'avant cette édification. En outre, lors de la polémique qui l'opposa à Hilbert, il a sereinement envisagé d'exploiter la sémantique à des fins non élucidatoires, lesquelles auraient donc parfaitement supporté la domestication idéographique. Ainsi, si ses conceptions contiennent en creux de solides objections contre la constitution d'une théorie sémantique, il ne s'en est jamais lui-même aperçu. Et la question ne peut être tranchée à la seule lumière de ses remarques au sujet des élucidations. Il ne s'agit pas de décider s'il faisait droit à la sémantique, mais si la sémantique à laquelle il faisait droit s'opposait clandestinement à d'autres franges de ses idées. Le débat doit être déplacé de ce qu'il *a dit* vers ce qu'il *aurait dû dire* à ce sujet, et s'émanciper d'une dimension exagérément exégétique.

Depuis quarante ans, la discussion est pourtant largement empreinte de cette dimension. La raison tient dans le fait que Frege est passé près de comprendre à quel défi le confrontait son ontologie. Ses différentes réflexions concernant le lien entre l'insaturation d'un nom et celle de son contenu l'ont conduit à reconnaître que l'expression manquait irrémédiablement la pensée lorsqu'elle s'obstinait à présenter une fonction comme un objet, laissant croire qu'il savait que tout tentative de description des catégories ontologiques était irrévocablement exclue du royaume de la théorie – et vouée au régime métaphorique. Il résista cependant à cette conclusion, soutenant obstinément qu'une authentique théorie des catégories était envisageable dans un système idéal, entravée par la seule forme inadéquate de certaines expressions des *langages naturels*. Il n'a donc pas compris que la projection des catégories de sens dans la sphère des références interdisait *derechef* de décrire les conséquences de cette projection. Il n'a pas vu qu'il était, à cet égard, captif de l'implacable grammaire logique, à laquelle nul accommodement linguistique ne permettait d'échapper.

Mais il n'est pas certain que les terres fertiles de la sémantique ne soient pas entièrement contenues dans cette prison. En effet, sur ces terres, rien n'exige de travestir les fonctions ou de les distinguer théoriquement des objets. Aucun des énoncés problématiques requis par la mise en lumière des distinctions catégoriales n'est plus impliqué. S'il n'existe pas de fonction capable de lier toute expression à sa référence, une multitude de fonctions – potentiellement relationnelles – de types différents pourraient collectivement jouer le rôle du prédicat de vérité

tarskien, et permettre l'établissement d'une théorie de la référence proprement fregéenne. En réalité, la solution exploite seulement l'une d'entre elles. Frege en fournit les grandes lignes à travers son usage des lettres grecques majuscules. Elle consiste à ajouter provisoirement au langage des noms extérieurs à celui-ci – des noms auxiliaires – afin de fixer la référence des noms insaturés à travers la seule mobilisation d'expressions complètes.

En effet, la notion d'insaturation fregéenne est fondamentalement sémantique. Lorsque des références sont déterminées *via* un sens insaturé, elles jouent alors le rôle *sémantique* de liens entre des entités. 'Sémantique', parce que la manière dont elles sont déterminées permet, conjointement avec la manière dont d'autres entités sont déterminées, de déterminer une fois pour toutes une entité. Rigoureusement, parce qu'une entité est déterminée sur la base des interprétations possibles pour certains noms simples auxiliaires, elle permet, conjointement avec d'autres modes de détermination, de déterminer une entité indépendamment de ces interprétations. Voilà pourquoi Frege fixa la référence de ses noms primitifs en indiquant celle que recevait le résultat de leur saturation par un nom auxiliaire de bon type pour toute interprétation de ce dernier nom. Son principe de complétude exigeait qu'une fonction soit déterminée à travers sa valeur en chaque argument, autrement dit que le sens d'un nom de fonction soit dévoilé à travers la donnée d'une valeur pour chaque argument. C'est donc bien dans le rôle que joue le mode de détermination d'une certaine entité vis-à-vis d'autres modes de détermination que cette entité permet de *lier* des entités. C'est précisément parce que la notion d'insaturation est sémantique – et non parce que Frege l'a transposée dans son ontologie – que toute sémantique organiquement fregéenne est tenue de la respecter, à travers l'usage de noms auxiliaires et la mobilisation des interprétations possibles pour ces noms.

Le clan antisémantique rejette cette conclusion au prétexte que Frege, exigeant d'un langage scientifique – y compris logique – qu'il dispose toujours d'un contenu fixe, n'aurait jamais attaché un quelconque processus d'interprétation à l'idéographie. D'une part, notons que ce réquisit n'interdit pas d'octroyer une substance au langage logique en fixant une fois pour toutes son interprétation, laquelle sera ainsi conservée lors de sa mise en action. La langue *dans laquelle* cette interprétation est fixée possède elle aussi un contenu déterminé, et peut ainsi jouer son rôle scientifique d'assignation sémantique des références des noms du langage-objet. Dans une perspective fregéenne, rien ne proscrit l'utilisation d'une quelconque montée sémantique, pas même pour le langage logique. Au contraire, Frege y voyait l'une des facettes des élucidations. Une telle montée sémantique ne visait pas seulement à stipuler quelles étaient les références des noms primitifs – conformément au principe de complétude –, elle permettait aussi de vérifier que ces stipulations attribuaient une référence aux noms *complexes* et de démontrer l'adéquation de l'Idéographie. Aucune de ces démarches ne s'opposait à l'idée que la logique est d'une quelconque manière absolue ou générale. L'enjeu n'était pas de fonder cette discipline, mais d'élaborer un appareil adapté à son développement puis de vérifier la validité de cet appareil. Tout ceci avait lieu sous l'autorité de la logique déployée dans les seules langues à disposition avant la constitution de cet appareil : les langues naturelles.

D'autre part, c'est précisément *parce que* chaque nom du langage logique devait posséder un contenu fixe que Frege ne mobilisa à proprement parler ni variable ni assignation, bien qu'il s'appuyât sur une stratégie techniquement assez proche de celle de Tarski. Pour lui, il ne s'agissait pas d'assigner un contenu à '$\mathfrak{a}$ $(P(\mathfrak{a}))$' à travers les différentes valeurs prises par '$P(\mathfrak{a})$' selon chaque assignation de '$\mathfrak{a}$'. Il s'agissait d'assigner des contenus *fixes* à '$\mathfrak{a}$ $(\varphi(\mathfrak{a}))$' et à '$P(\xi)$' – constitutifs de celui de '$\mathfrak{a}$ $(P(\mathfrak{a}))$' – en indiquant les valeurs prises pour chaque argument. Il n'était donc pas question de faire varier une partie du contenu de ce nom, mais seulement d'en spécifier les parties en fournissant un moyen de déterminer la référence de '$P(\Delta)$' relativement à celle qui était attribuée à 'Δ', ainsi que la référence de '$\mathfrak{a}$ $(\Phi(\mathfrak{a}))$' relativement à celle qui était

attribuée à '$\Phi(\xi)$'. La notion sémantique d'insaturation unissait l'idée qu'un sens est constitué de sens déterminés à un procédé de variations d'interprétations de noms *extérieurs* au langage permettant d'attribuer ces sens déterminés aux noms atomiques *du langage*.

En somme, non seulement Frege n'a jamais soulevé d'objection contre l'établissement d'une théorie sémantique, mais il n'avait pas, là où il se situait, la moindre raison de s'y opposer. Une telle démarche ne contrevenait à aucun des principes enclos dans sa notion d'insaturation, laquelle en prescrivait seulement le cadre de réalisation. Dans les *Grundgesetze*, Frege lui donna forme – d'une manière rudimentaire et intuitive que nous avons tenté d'améliorer – afin d'abattre le travail essentiel à la construction d'un véhicule parfaitement adéquat à l'expression des pensées, ainsi qu'au lancement de ce véhicule sur une route adaptée au développement rigoureux de la logique. Par conséquent, ce travail ne pouvait pas lui-même bénéficier de ce véhicule, ce qui contraignit Frege à composer avec les défauts des langues naturelles. Néanmoins, ces défauts ne touchaient pas directement le contenu (sémantique) du travail en cause, mais la seule manière dont celui-ci était présenté. Son caractère théorique ne se voyait pas mis en doute par le fait qu'il ne pouvait être soumis au cadre rigoureux de développement des sciences qu'il contribuait à constituer. En effet, il ne "pouvait" pas être soumis à ce cadre seulement *parce qu*'il contribuait à le constituer, aucunement à cause de la nature de son contenu. D'ailleurs, Frege envisagea d'exploiter à d'autres fins – et d'enrichir – la *théorie* sémantique sous-jacente à ce travail, ce qui aurait cette fois permis son assimilation à un tel cadre. S'il ne donna jamais suite à ce projet, il n'avait *strictement* rien à y objecter.

Frege mérite donc sa place parmi les inspirateurs de la sémantique contemporaine. Dans son ouvrage principal, il posa les bases d'une théorie sémantique qu'il exploita à certaines fins auxquelles nous destinons désormais les nôtres – par exemple pour la démonstration d'un théorème d'adéquation. Il n'envisageait cependant pas de développer l'arithmétique en s'appuyant sur l'existence d'un ensemble d'objets supposés connus. Il voulait répondre de la nature des nombres, et conséquemment dévoiler la source de la connaissance arithmétique. Il ne pouvait donc se résoudre à fixer la référence du nom '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' pour l'opérateur de cardinalité en spécifiant seulement que cette référence associait à toute fonction le nombre qui lui appartient. Afin de justifier la thèse selon laquelle les nombres sont des objets logiques, il lui fallait fonder l'existence de tels objets et expliquer la manière par laquelle nous y accédons. Le chemin qu'il choisit pour atteindre ce but fut celui des extensions. Il l'entraîna vers la contradiction, et scella ainsi le destin de son projet.

En effet, dès 1879, il disposait d'une stratégie pour circonscrire les nombres cardinaux à partir des relations d'accessibilité, de succession et du nombre 0. La première était définie dans la *Begriffsschrift* ; seule manquait l'analyse des deux derniers éléments pour enclencher le développement de l'arithmétique. La tâche fut accomplie dans les *Grundlagen*, et permettait de dériver les axiomes de Peano à partir du principe de Hume. Ces "axiomes" – qui, bien sûr, n'étaient que des théorèmes dans le système de Frege – furent quasi-intégralement présentés dans cet ouvrage, à l'exception de celui qui s'ensuivait trivialement des définitions. Frege connaissait donc parfaitement les (contenus d')énoncés dans lesquels l'arithmétique était enclose, et qui furent mis en lumière par Dedekind et Peano à la même époque. Aux côtés de ces deux auteurs, il se situe incontestablement parmi les pionniers de l'arithmétique formalisée. Mais son analyse des énoncés de cette science mobilisait les extensions – qui furent ensuite généralisées à travers les parcours-de-valeurs, bien que Frege précisât qu'il "n'attachait pas une importance décisive à" ce point particulier [290]. En 1884, l'essentiel était à ses yeux de parvenir à la démonstration *logique* du principe de Hume, lequel ne pouvait compter comme une définition convenable de l'opéra-

290. (Frege 1884, p. 117 / 227)

teur de cardinalité. La question se posait néanmoins de savoir sur quelle base l'introduction des extensions était permise. Et ce problème ne fut pas résolu dans les *Grundlagen*, car Frege se contenta d'expliquer qu'il "suppos[ait] connu ce qu'[était] une extension de concept" [291]. Qu'est-ce qui validait une telle hypothèse ? Était-ce une nouvelle intervention du principe du contexte ou un autre biais totalement indépendant ?

Cette question ne trouva pas davantage de réponse après 1890. Durant toute sa période logiciste, Frege érigea son bâtiment arithmétique à partir des extensions – puis des parcours-de-valeurs – sans jamais soupçonner le problème des paradoxes ensemblistes. Si, après 1890, il émit pourtant de nombreuses réserves sur ce point précis de sa stratégie, c'est qu'il n'était pas certain du moyen approprié pour garantir l'existence de ces objets. En effet, il développa *partiellement* deux approches *incompatibles* des parcours-de-valeurs, qui répondaient *différemment* à ce problème. Soit parce qu'il a échoué à en identifier les multiples facettes, soit parce que son attention était concentrée ailleurs – notamment sur des considérations philosophiques au sujet de la sémantique et sur les développements techniques inhérents à son projet –, il n'est parvenu à conduire à son terme aucune d'entre elles. Dans le cas contraire, il se serait aperçu qu'au-delà de leur opposition, ni l'une ni l'autre ne pouvait convenir. La contradiction tira à sa place cette redoutable conclusion, le forçant plus tard à rejeter chacune des deux approches.

La première s'appuyait sur le principe du contexte. Frege lui donna corps dans les célèbres §§10, 29-31 des *Grundgesetze*. Elle consiste à résoudre les problèmes ontologique et épistémique par voie sémantique, en garantissant notre capacité à faire référence aux parcours-de-valeurs sur la base du principe du contexte. Frege commit deux erreurs en développant cette stratégie. D'une part, il ne réalisa pas qu'elle mobilisait deux différentes versions du critère de référentialité du §29 – qui portaient deux différentes traductions du principe du contexte – selon si celui-ci s'appliquait aux noms de fonctions ou d'objets. D'autre part, d'après cette approche, toutes les stipulations permettant, en vertu de ce principe, d'attribuer un sens au nom '$\mathbf{N}_\beta(\varphi(\beta))$' qui valide le principe de Hume ouvrent sur une analyse *authentique* des énoncés arithmétiques. Dans ce cadre, les parcours-de-valeurs ne disposent d'aucun statut privilégié. Tout autre chemin permettant d'aboutir au même résultat, en identifiant les nombres à d'autres objets logiques, serait également convenable. Par conséquent, les nombres ne sont pas essentiellement des parcours-de-valeurs, pas plus que le Vrai n'est essentiellement son propre singleton. Les stipulations effectuées dans ce sens – par exemple celles du §10 – ne constituent qu'une alternative parmi d'autres. Cette position exige donc de renoncer au réalisme métaphysique auquel Frege s'accrocha pourtant, notamment lorsqu'il appuya sur celui-ci l'argument de permutation du §10, tandis qu'il réalisait simultanément un raisonnement qui s'y opposait.

La seconde approche accordait en revanche une place de choix aux parcours-de-valeurs, en faisant totalement l'impasse sur le principe du contexte. On en trouve une trace très nette dans une lettre adressée à Russell, à l'occasion de laquelle Frege expliqua qu'il ne voyait pas comment nous pouvions appréhender les objets logiques sinon "comme extensions de concepts, ou plus généralement comme parcours-de-valeurs de fonctions" [292]. Selon cette approche, les parcours-de-valeurs sont ce sur quoi nous tombons fatalement lorsque nous tentons de présenter des fonctions comme des objets. Notre appréhension des parcours-de-valeurs (en général) est ainsi subordonnée à notre appréhension des fonctions (en général), laquelle repose exclusivement sur notre capacité à saisir des pensées. Elle n'attend donc pas davantage de justification que notre appréhension des valeurs de vérité. Frege développa cette idée lorsqu'il discuta les paradoxes relatifs à l'expression 'le concept cheval'. Elle lui permit d'expliquer pourquoi les mathématiciens échouaient à comprendre que les pensées qu'ils démontraient traitaient des parcours-de-valeurs, ces derniers étant

291. (Frege 1884, p. 80)
292. (Frege 1976, p. 223)

dissimulés derrière des formules telles que 'la fonction *f*'. Dans ce cadre, les parcours-de-valeurs servent de base *indispensable* à la définition des nombres et au développement de l'arithmétique. Cette fois, l'erreur de Frege fut d'avoir mal mesuré la portée d'une telle idée – et ainsi manqué les lieux qui la condamnaient – en l'appliquant dans le contexte de l'analyse de certaines expressions tandis qu'il l'ignorait relativement à d'autres.

Lorsqu'il apprit que son système était incohérent, il jeta immédiatement le blâme sur les §§29-31 [293]. Il est possible qu'il se soit alors tourné à nouveau vers leur contenu, notant l'ambigüité dans laquelle il avait maintenu le critère de référentialité. Peut-être a-t-il tenté de traduire autrement – et plus convenablement – le principe du contexte, tout en limitant la portée de la fonction pour les parcours-de-valeurs afin d'éviter la contradiction. Ceci expliquerait qu'il ait fait droit, dans son entreprise d'amendement de l'Idéographie, à une telle limitation que la seconde approche ne pouvait tolérer. Cependant, après avoir entièrement répudié les parcours-de-valeurs, c'est bien à cette dernière qu'il s'adressa en expliquant que les paradoxes de la théorie des ensembles étaient nés de l'idée qu'un objet se cachait derrière les expressions telles que 'le concept *étoile fixe*' [294]. Parmi les textes qui nous sont parvenus, il n'existe aucun signe clair témoignant du rôle de chaque approche dans son renoncement au logicisme. Il n'est pas possible de deviner si – et à quel point – Frege en approfondit l'examen après 1902. Une seule chose est certaine : ces deux approches incorrectes ont largement cohabité dans ses écrits. Leur caractère incompatible démontre qu'il n'a pas su – ou n'a pas pris le temps – de les développer tel que nous nous y sommes appliqués dans notre troisième chapitre, et explique en grande partie les réserves qu'il formulait au sujet des parcours-de-valeurs, tandis qu'il était enclin parfois à tirer certaines conclusions à leur sujet, parfois à y résister, selon l'approche qu'il privilégiait.

Nous avons ouvert cette longue étude en annonçant que l'idéographie se tiendrait au cœur de notre enquête. Nous sommes désormais en mesure de comprendre ce qui guida ce choix. Certains désaccords entre exégètes ne sont pas seulement dûs au fait que le symbolisme fregéen est rarement pris en compte dans les discussions concernant ses conceptions. Ils proviennent en grande partie des confusions dont Frege fut lui-même responsable vis-à-vis de son propre langage. Le manque d'attention qu'il porta à sa grammaire et, surtout, le rôle équivoque qu'il attribua involontairement aux lettres grecques majuscules dissimulèrent certaines difficultés à ses yeux, et ne les rendent pas davantage apparentes aux nôtres. Ils masquent notamment l'erreur tapie dans les §§29-31 et, plus profondément, la notion de référentialité ambigüe que ceux-ci mettent en jeu. Notre recherche fut motivée par l'idée que ces différents points ne pouvaient être mis en lumière sans prêter un œil attentif à la manière dont Frege bâtit, justifia et exploita l'idéographie. Il est désormais temps d'y mettre un terme, en tirant les conclusions qui s'imposent.

Il est incontestable que Frege n'est pas parvenu à résoudre la totalité des problèmes auxquels il se confronta – par exemple celui du statut des objets mathématiques. Même lorsqu'il disposait d'une solution, il échoua parfois à lui conférer une forme aboutie – par exemple dans le cas de sa théorie sémantique. Cependant, s'il a été – et est encore – une source considérable d'inspiration pour les philosophes, ce n'est pas parce qu'il a su apporter des réponses cohérentes et définitives à ces problèmes, mais bien parce qu'il fut en mesure de les formuler distinctement et de proposer des pistes de solutions qui, si elles s'opposèrent parfois les unes aux autres, furent toujours d'une finesse et d'une profondeur remarquables. Nous ne savons pas si, comme le prétendent Sandu et Hintikka, Frege était aveugle aux travaux de ses contemporains. En revanche, au sortir de notre étude, il est clair que ses contemporains et successeurs directs auraient eu meilleur compte – et, pour certains, ont eu bon compte – à ne pas rester aveugles à ses travaux. En effet, Dedekind

293. (Frege 1976, p. 213)
294. (Frege 1924-1925a, pp. 288-289 / p. 318)

et Peano pouvaient y lire une construction de l'arithmétique techniquement voisine des leurs, Wittgenstein pouvait y puiser l'inspiration pour sa propre notion d'élucidation – en détectant ce que Frege avait lui-même laissé dans l'ombre – et les pères de la sémantique pouvaient y trouver l'esquisse et l'exploitation de la toute première théorie sémantique de l'histoire. C'est donc à de nombreux égards que Frege était en mesure de nourrir les recherches de ses collègues. Et, quelque cent ans plus tard, ce constat n'est toujours pas obsolète. Bien que Frege n'en ait proposé aucune traduction convenable – et bien qu'il s'en éloigna parfois au profit d'une autre approche –, il fut le premier à formuler le célèbre principe du contexte que le mouvement néologiciste a ressuscité – et questionne ardemment – au sein d'un colossal programme de recherche. Pour l'heure, ses thèses concernant le jugement n'ont pas rencontré le même succès. Sans nous y confronter directement, notre enquête a néanmoins pu laisser entrevoir toutes les promesses qu'elles renfermaient. S'il reste encore des éléments, dans les écrits fregéens, qui pourraient poser les jalons de formidables progrès, c'est, nous croyons, dans ce lieu qu'il convient avant tout de forer. En somme, non seulement les travaux de Frege constituent des terres toujours fertiles d'inspiration dans le domaine des fondements des mathématiques mais, de plus, il est fort probable qu'ils soient tout aussi féconds dans d'autres secteurs. À travers cette thèse, notre objectif n'était pas de contribuer directement à ces nouvelles recherches, mais de retracer leurs origines jusqu'à Frege, en éclairant les difficultés très diverses qu'il a su soulever, les tentatives de résolution – parfois équivoques – qu'il a envisagées, et les stades auxquels il s'est interrompu. Nous espérons avoir, à ce titre, rempli notre contrat.

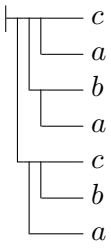
Annexe A

Démonstrations

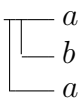
Dans cette annexe sont réunies les différentes démonstrations esquissées dans le corps du texte et représentées selon la méthode introduite en section 2.2.2.3. Pour chaque preuve, l'énoncé dérivé est indiqué au centre d'une nouvelle page et suivi de la dérivation, elle-même répartie sur deux colonnes [1].

Rappelons que la numérotation en caractères gras est transversale à toutes les démonstrations. Un énoncé indexé en gras reste attaché à son indice dans les preuves suivantes. Au sein d'une dérivation, il peut arriver qu'un même nombre face référence à deux énoncés différents : une occurrence étant écrite en caractères gras, dont la référence fut éventuellement fixée dans une autre preuve, une autre occurrence étant écrite en caractères standards, dont la référence fut fixée à l'intérieur de la dérivation.

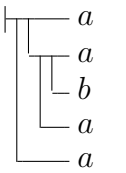
1. lorsque la longueur des formules le permet.



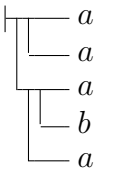
I. b :



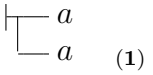
viii



i

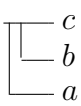


v

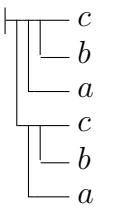


I.

(**1**) a :

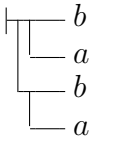


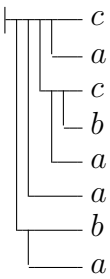
viii



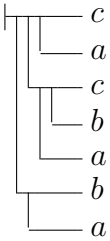
vi

(**1**) a :

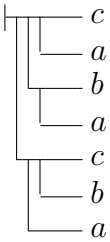


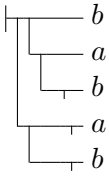


ii



i

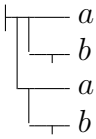




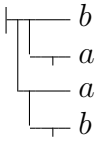
---

(1) a :

viii ———



iii, iv ———

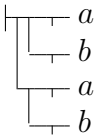


(1)

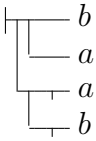
---

(1) a :

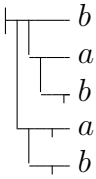
viii ———

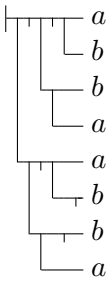


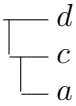
iii, iv ———



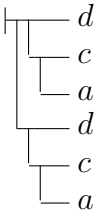
vii ——— (1)



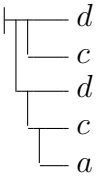


(**1**) $a :$ 

viii



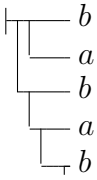
iv



(1)

I.
$a : c\,;\, b : a$

viii

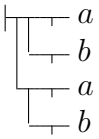


(2)

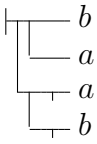
$a :_{\top} b\,;\, c : a\,;\, d : b$

(**1**) $a :$

viii

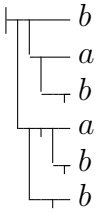


iii, iv



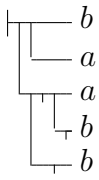
(3)

viii



$a :$ $a\,;\, b : b$

vi



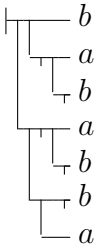
(4)

(2)

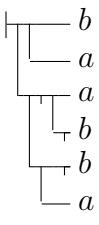
---

(1) $a : a\,;\, c :_{\top} b\,;\, d :$

viii



vi

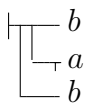


(5)

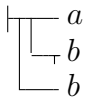
(4)

I. $a : b\,;\, b :_{\top} a$

viii

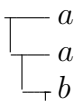


iii, iv

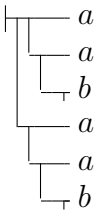


(6)

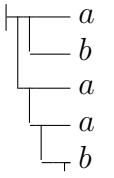
(**1**) $a :$



viii



vi (6)

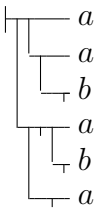


(7)

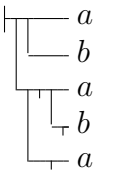
(3) $a :$

$; b : a$

viii

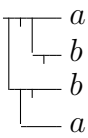


vi (7)

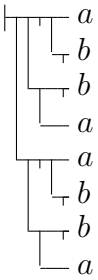


(8)

(**1**) a :

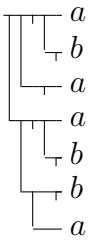


viii

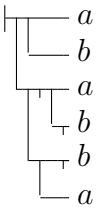


vi (6)

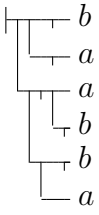
$a :_{\top} b ; b :_{\top} a$



vi (8)



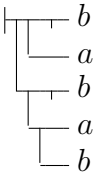
iii



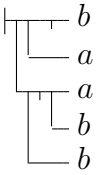
(9)

(1) $a : b ; c : a ; d :_{\top} b$

vii



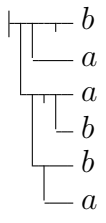
vi (3)



$a :$

$; b :_{\top} b$

vi

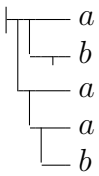


(10)

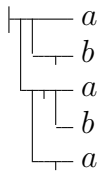
(1) $a : a\,;\ c : c\,;$
$d :$

(7) $a : a\,;\ b : \top\, b$

viii, iv

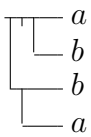


vi

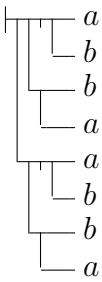


(11)

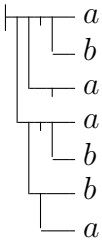
(3)
$a :$ $a\,;\ b : a$

(**1**) $a :$ 

viii

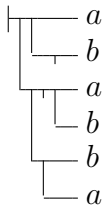


vi

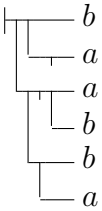


(6)
$a : b\,;\ b : \top\, a$

(11)



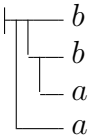
iii, iv



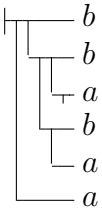
(12)

(**1**)

i



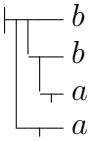
ix, i



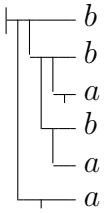
(13)

(**1**) $a : \top\, a\,;\ b : b$

viii, i

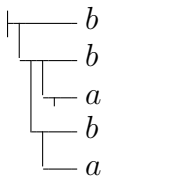


ix, i

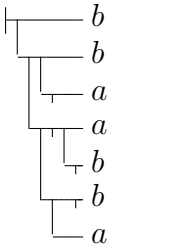


(14)

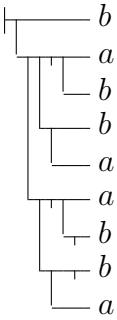
vii (13)



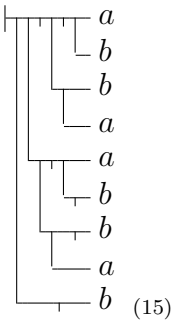
vi (5)



vi (12)

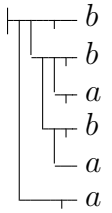


iii, i



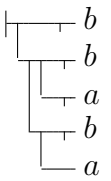
(13) $a :_{\top} a \,;\, b :_{\top} b$

viii, iv, i

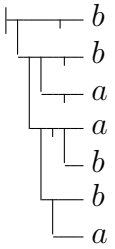


vii (14)

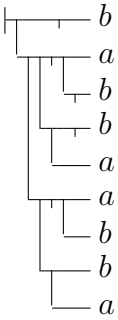
$a :_{\top} a \,;\, b :_{\top} b$



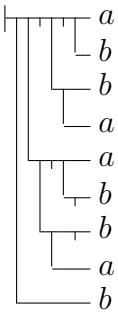
vi (10)



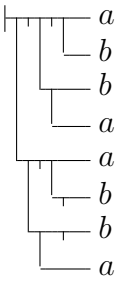
vi (9)

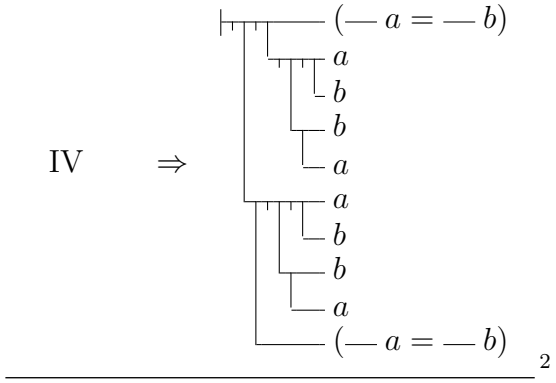


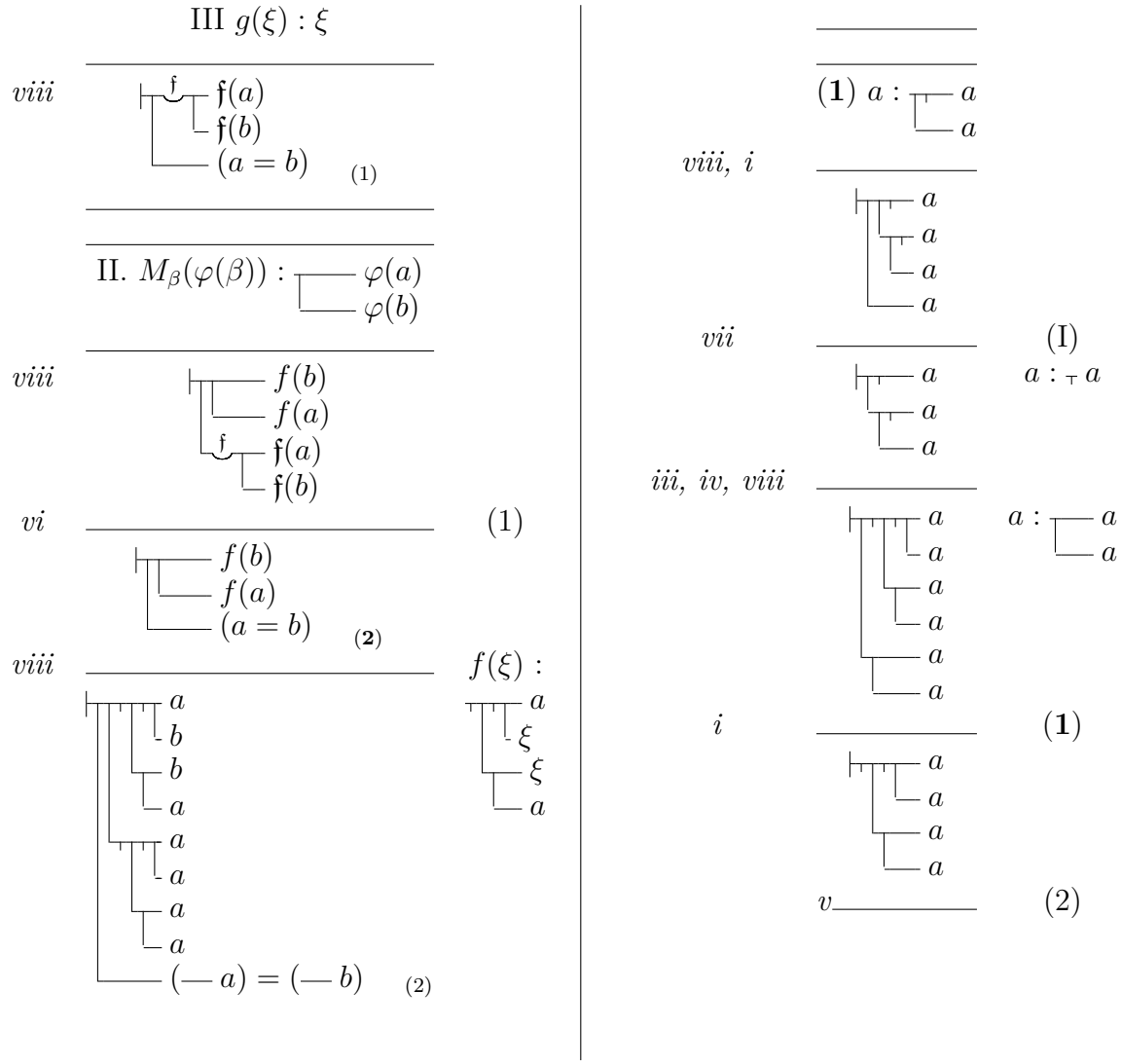
iii, iv



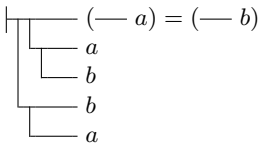
vii (15)

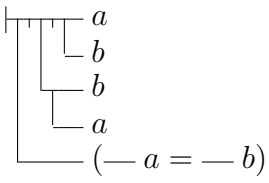






2. Nous allons utiliser le théorème IVa démontré par Frege à la page 68 des *Grundgesetze* :

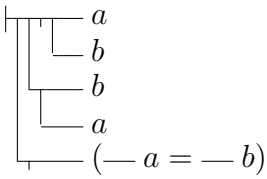




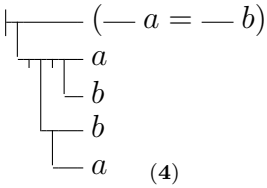
(3)

VIa.

iii, i



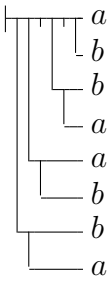
iii, iv



(4)

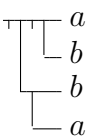
IV.

vi



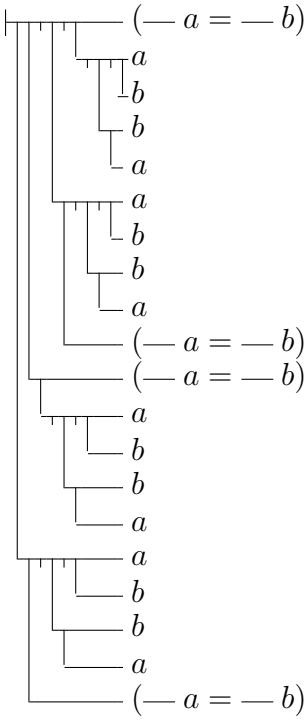
(3)

(3) $a : (— a = — b)\,;\, b :$

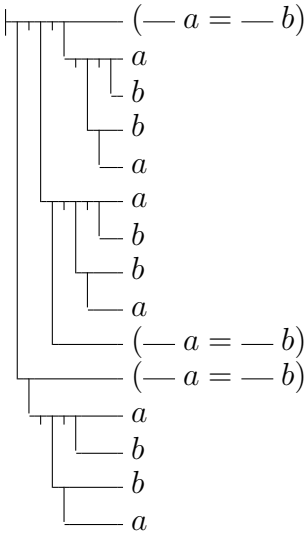


viii

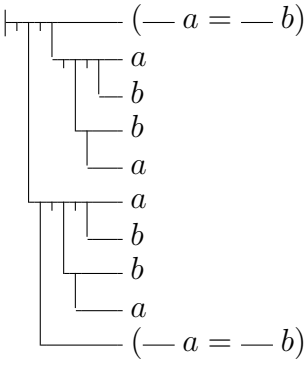
(3)



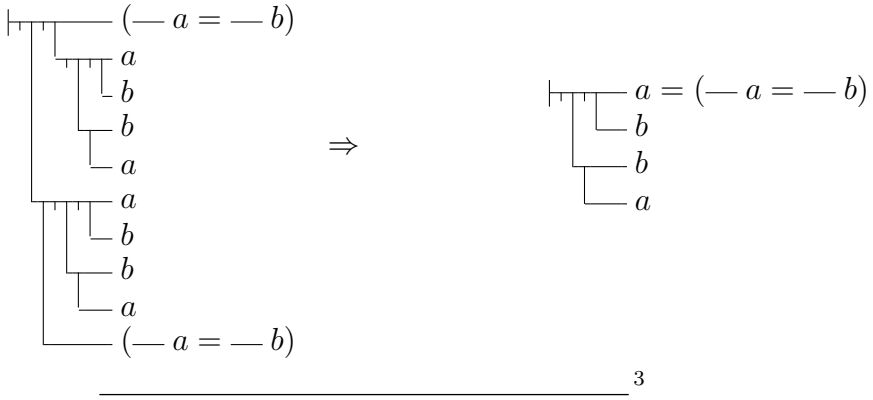
v **(4)**

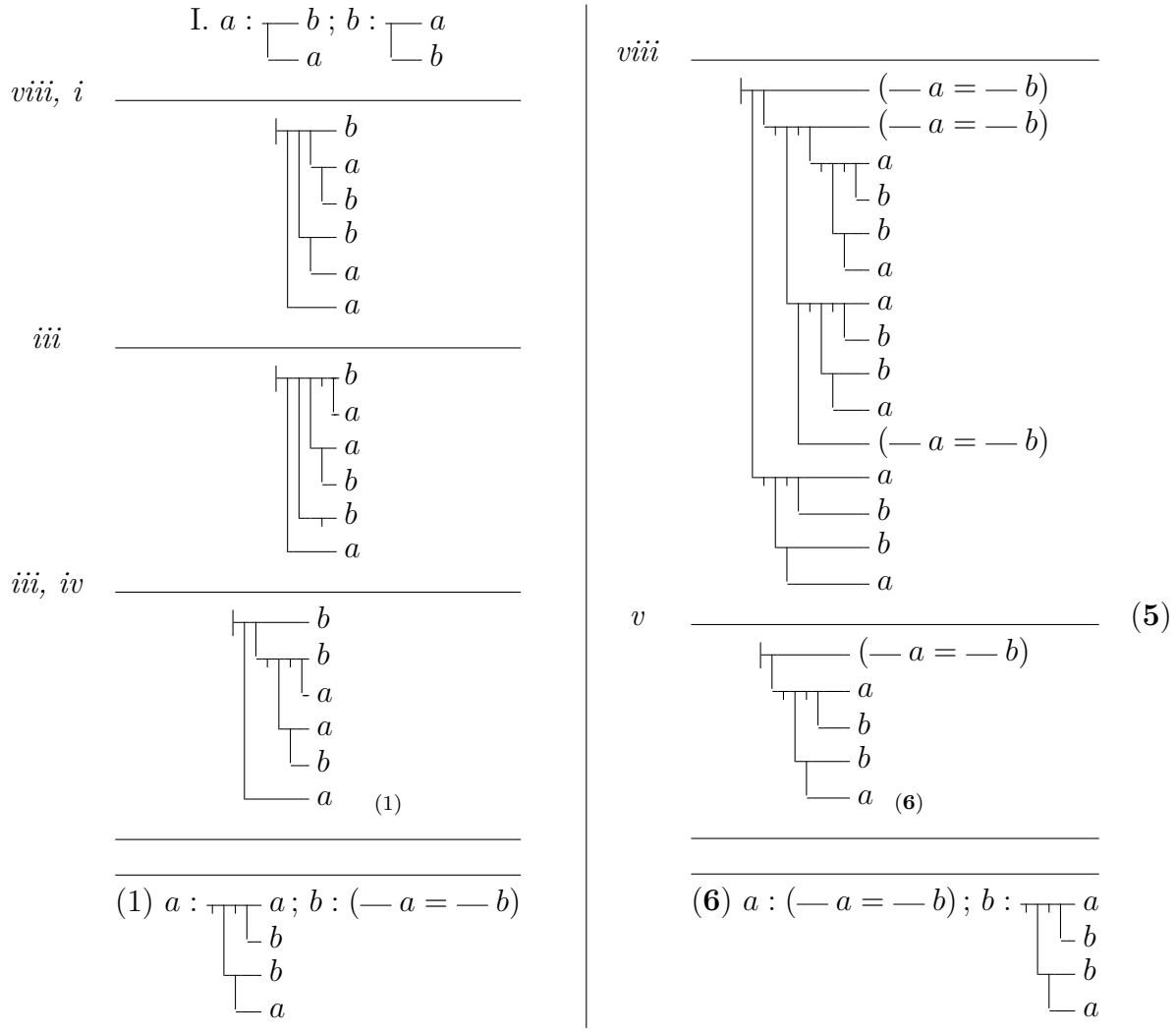


v **(3)**



(5)





3. Nous allons utiliser le théorème IIIi démontré par Frege *sans aucun recours à la loi IV* (p. 67 des *Grundgesetze*) :

$$\vdash — (— a = — b) = (— a = — b)$$

viii, xii

$$\vdash (\text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b) = \text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a)\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a$$

$$\text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b)\ \text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a\ \text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a\ \text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b)$$

v (**5**)

$$\vdash \left(\text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b) = \text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a\ {}_{(2)}\right)$$

(**2**) $f(\xi) : (\xi = (\text{—}\,a = \text{—}\,b))$

$$a : \text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b)\,;\ b : \text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a$$

viii

$$\vdash \left(\text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a = (\text{—}\,a = \text{—}\,b)\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a\right)\ \text{—}\,(\text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b) = (\text{—}\,a = \text{—}\,b))\ \text{—}\,\left(\text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b) = \text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a\right)$$

v (2)

$$\vdash \left(\text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a = (\text{—}\,a = \text{—}\,b)\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a\right)\ \text{—}\,(\text{—}\,(\text{—}\,a = \text{—}\,b) = (\text{—}\,a = \text{—}\,b))$$

v IIIi

$$\vdash \text{—}\,\text{—}\,\text{—}\,a = (\text{—}\,a = \text{—}\,b)_{(\mathbf{7})}\ \text{—}\,b\ \text{—}\,b\ \text{—}\,a$$

$$\vdash a = (— a = — b)_{(\mathbf{7})},\ b,\ b,\ a \quad \Rightarrow \quad \text{IV}$$

$$\frac{}{(\mathbf{2})\ f(\xi) : \xi\,;\ a : \vdash a = (— a = — b),\ b,\ b,\ a\,;\ b : (— a = — b)}\ {}^{4}$$

$$\textit{viii}\quad \frac{}{\vdash (— a = — b),\ a,\ b,\ b,\ a,\ a = (— a = — b),\ b,\ b,\ a}$$

$$\textit{v}\quad \frac{}{\vdash (— a = — b),\ a,\ b,\ b,\ a_{(\mathbf{6})}} \qquad (\mathbf{7})$$

$$\textit{viii, iii, iv}\quad \frac{}{\vdash a,\ b,\ b,\ a,\ (— a =_{\top} b)} \qquad a : a\,;\ b :_{\top} b$$

$$\textit{vi}\quad \frac{}{\vdash a,\ b,\ b,\ a,\ (— a =_{\top} b)} \qquad \text{IV}_{\text{PL}}$$

$$\textit{vi}\quad \frac{}{\vdash (— a = — b),\ (— a =_{\top} b)} \qquad (\mathbf{6})$$

4. Puisque nous voulons démontrer l'équivalence de certains axiomes modulo le système de l'Idéographie privé de IV, nous n'utilisons les résultats d'anciennes preuves que s'ils ont été clairement obtenus sans l'intervention de IV. C'est par exemple le cas de IV_{PL} et (**2**). Au contraire, (**6**) est redémontré.

$$\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\not{\mathfrak{C}}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathfrak{C}} \end{array} \qquad \vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\not{\mathfrak{C}}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathfrak{C}} \end{array}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\,5}$$

$$\begin{array}{rl} (\mathbf{2}) & f(\xi) : \xi \\ a : \dot{\varepsilon}(\text{—}\ f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}\left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right) & \\ b : {}^{\mathfrak{a}} \left(\text{—}\ f(\mathfrak{a}) = \left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \mathfrak{a} \end{array}\right)\right) & \end{array}$$

viii

$$\vdash^{\mathfrak{a}} \left(\text{—}\ f(\mathfrak{a}) = \left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \mathfrak{a} \end{array}\right)\right)$$

$$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}\left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right)$$

$$\left(\dot{\varepsilon}(\text{—}\ f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}\left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right)\right) = \left({}^{\mathfrak{a}} \left(\text{—}\ f(\mathfrak{a}) = \left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \mathfrak{a} \end{array}\right)\right)\right)$$

v V

$$\vdash^{\mathfrak{a}} \left(\text{—}\ f(\mathfrak{a}) = \left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \mathfrak{a} \end{array}\right)\right)$$

$$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}\left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right) \quad (1)$$

IIa $\quad a : \not{\mathfrak{C}} \quad ; \quad f(\xi) : \text{—}\ f(\xi) = \left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\xi) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \xi \end{array}\right)$

$$\vdash \left(\text{—}\ f(\not{\mathfrak{C}}) = \left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\not{\mathfrak{C}}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathfrak{C}} \end{array}\right)\right)$$

$${}^{\mathfrak{a}} \left(\text{—}\ f(\mathfrak{a}) = \left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \mathfrak{a} \end{array}\right)\right)$$

vi (1)

$$\vdash \left(\text{—}\ f(\not{\mathfrak{C}}) = \left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\not{\mathfrak{C}}) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathfrak{C}} \end{array}\right)\right)$$

$$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}\left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right) \quad (2)$$

5. Nous utilisons une abréviation pour l'extension du concept sous lequel tombent toutes les extensions des concepts sous lesquels leurs propres extensions ne tombent pas ou, pour le dire en termes ensemblistes, l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas eux-mêmes :

$$\Vdash \not{\mathfrak{C}} = \dot{\varepsilon}\left(\vdash^{\mathfrak{g}} \begin{array}{l} \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right)$$

---

(2) $f(\xi) : \xi \quad ; \quad a : \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\not{\mathbb{C}})$, $\quad \dot{\varepsilon}(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathbb{C}} \quad ; \quad b : -\,f(\not{\mathbb{C}})$

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; f(\not{\mathbb{C}})$$
$$\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\not{\mathbb{C}}),\ \dot{\varepsilon}(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathbb{C}}\right)$$
$$\left(-\,f(\not{\mathbb{C}}) = \left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\not{\mathbb{C}}),\ \dot{\varepsilon}(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathbb{C}}\right)\right)$$

vi (2)

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; f(\not{\mathbb{C}})$$
$$\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\not{\mathbb{C}}),\ \dot{\varepsilon}(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathbb{C}}\right)$$
$$\dot{\varepsilon}(-\,f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\varepsilon),\ \dot{\varepsilon}(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon\right)$$

i + abrév.

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; f(\not{\mathbb{C}})$$
$$\dot{\varepsilon}(-\,f(\varepsilon)) = \not{\mathbb{C}}$$
$$\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\not{\mathbb{C}}),\ \dot{\varepsilon}(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathbb{C}}$$

ix

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\, \mathfrak{g}(\not{\mathbb{C}}),\ \dot{\varepsilon}(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathbb{C}}$$
$$\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(\not{\mathbb{C}}),\ \dot{\varepsilon}(-\,\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \not{\mathbb{C}} \quad (3)$$

---

(1) $a : f(a)$

viii

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; f(a),\ f(a)$$

ix

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; \mathfrak{f}(a),\ \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mathfrak{f}(a) \quad (4)$$

III $a : a \quad ; \quad b : a \quad ; \quad g(\xi) : \top\, \xi$

viii

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; \top\, \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mathfrak{f}(a),\ \mathfrak{f}(a),\ \top\, a = a$$

iii, iv

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\; a = a,\ \mathfrak{f}(a),\ \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mathfrak{f}(a)$$

v (4)

$a = a$ (**8**)

viii

$\cancel{\mathfrak{C}} = \cancel{\mathfrak{C}}$ (5)

IIb $M_\beta(\varphi(\beta)) :$ $\varphi(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \varphi(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$

viii

$f(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ f(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$
$\mathfrak{g}(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$

viii

$\mathfrak{g}(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$
$\dot{\varepsilon}\left(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)\right) = \cancel{\mathfrak{C}}$
$\mathfrak{g}(\varepsilon)$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon$
$\mathfrak{g}(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$

$f(\xi) :$ $\mathfrak{g}(\xi)$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \xi$

vi abrév. + (5)

$\mathfrak{g}(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$
$\mathfrak{g}(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$

vii (**1**)

$\mathfrak{g}(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$

$a :$ $\mathfrak{g}(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$

v (3)

$\mathfrak{g}(\cancel{\mathfrak{C}})$
$\dot{\varepsilon}(\text{—}\ \mathfrak{g}(\varepsilon)) = \cancel{\mathfrak{C}}$

$$\vdash f(c) = c \frown \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))$$

---[6]

(1) $a : \begin{array}{l} f(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \end{array}$

viii, i

$$\begin{array}{l} f(c) = f(c) \\ f(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \end{array}$$

iii, iv

$$\begin{array}{l} f(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \\ f(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \end{array}$$

v **(8)** $a : \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))$

$$\begin{array}{l} f(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \\ f(c) = f(c) \end{array}$$

v **(8)** $a : f(c)$

$$\begin{array}{l} f(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \quad (1) \end{array}$$

IIb $M_\beta(\varphi(\beta)) : \begin{array}{l} \varphi(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon)) \end{array}$

viii

$$\begin{array}{l} f(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \\ \mathfrak{g}(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}$$

iii

$$\begin{array}{l} \mathfrak{g}(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \\ f(c) = f(c) \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \end{array}$$

---

6. Nous allons utiliser les lois IIIi et VIa discutées en section 2.5.1.2 et prouvées par Frege aux pages 67-68 des *Grundgesetze*. De plus, pour éviter des formules trop longues, nous emploierons parfois les abréviations suivantes :

$$\Vdash X = \text{—} \; (f(c) = b) \qquad \Vdash Y = \begin{array}{l} \mathfrak{g}(c) = b \\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \end{array}$$

Enfin, nous allons répéter à plusieurs reprises une manipulation impliquant le théorème (**2**) afin de substituer un terme à un autre lorsque ceux-ci se trouvent en rapport d'égalité. Toujours pour éviter les formules trop longues, nous synthétiserons deux étapes en une lors des trois dernières applications de cette mécanique.

v (1)

$$\mathfrak{g}\ \mathfrak{g}(c) = f(c)$$
$$\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \quad (2)$$

IIa $\quad f(\xi) : f(\xi) = g(\xi)$

viii

$$f(c) = g(c)$$
$$\mathfrak{a}\ f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) \quad (3)$$

---

(2) $\quad a : f(c) \quad ; \quad b : g(c) \quad ; \quad f(\xi) : \top\,(\xi = b)$

viii

$$g(c) = b$$
$$f(c) = b$$
$$f(c) = g(c)$$

vi,i (3)

$$g(c) = b$$
$$\mathfrak{a}\ f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$$
$$f(c) = b \quad (4)$$

---

(2) $\quad a : \mathfrak{a}\,(f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) \quad ; \quad b : \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(g(\varepsilon)) \quad ; \quad f(\xi) : \xi$

viii

$$(\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(g(\varepsilon)))$$
$$(\mathfrak{a}\,(f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})))$$
$$(\mathfrak{a}\,(f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) = (\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(g(\varepsilon))))$$

v V

$$(\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(g(\varepsilon)))$$
$$(\mathfrak{a}\,(f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})))$$

vi (4)

$$g(c) = b$$
$$\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(g(\varepsilon))$$
$$f(c) = b$$

ix

$$\mathfrak{g}\ \mathfrak{g}(c) = b$$
$$\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))$$
$$f(c) = b$$

iii, iv

$$f(c) = b$$
$$\mathfrak{g}\ \mathfrak{g}(c) = b$$
$$\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) \quad (5)$$

IVa $\quad a : f(c) = b \quad ; \quad b : \mathfrak{g}\ \mathfrak{g}(c) = b$
$\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) = \dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))$

viii

$$\vdash \left(\text{—}\,(f(c)=b) = \text{—}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=b\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)\right)$$

$$\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\mathfrak{g}(c)=b\\ \quad\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\\ f(c)=b\\ f(c)=b\\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\mathfrak{g}(c)=b\\ \quad\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}$$

v (5)

$$\vdash \left(\text{—}\,(f(c)=b) = \text{—}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=b\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)\right)$$

$$\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\mathfrak{g}(c)=b\\ \quad\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\\ f(c)=b\end{array}$$

v (2)

$$\vdash \left(\text{—}\,(f(c)=b) = \text{—}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=b\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)\right)$$

xii

$$\vdash \left(\text{—}\,(f(c)=b) = \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=b\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)\right)\ {\scriptstyle (6)}$$

abrév.

$$(\mathbf{2}) \qquad a : \text{—}\,X=Y \quad ; \quad b : X=Y \quad ; \quad f(\xi) : \xi$$

viii

$$\vdash \begin{array}{l}(X=Y)\\ (\text{—}\,X=Y)\\ (\text{—}\,X=Y)=(X=Y)\end{array}$$

v IIIi

$$\vdash \begin{array}{l}(X=Y)\\ (\text{—}\,X=Y)\end{array}$$

a : $X; b : Y$

v (6) + abrév.

$$\vdash \left((f(c)=b) = \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=b\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)\right)$$

ix

$$\vdash \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\left((f(c)=\mathfrak{b}) = \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=\mathfrak{b}\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)\right)$$

v (**2**) + V

$$\vdash \dot{\varepsilon}((f(c)=\varepsilon)) = \dot{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=\alpha\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)$$

v (**2**)

$$\vdash \backslash\dot{\varepsilon}((f(c)=\varepsilon)) = \backslash\dot{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=\alpha\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)$$

v (**2**) + VI

$$\vdash f(c) = \backslash\dot{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(c)=\alpha\\ \dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\varepsilon}(\mathfrak{g}(\varepsilon))\end{array}\right)$$

abrév.

$$\vdash f(c) = c\frown\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))$$

Annexe B

Traductions

Les différents termes-clefs des écrits de Frege ont été traduits de la manière suivante :

andeuten	indiquer
anerkennen	reconnaître
Anerkennung	reconnaissance
Anzahl	nombre cardinal
Ausdruck	expression
ausdrucken	exprimer
bedeuten	signifier (avant 1891) référer (après 1891)
Bedeutung	signification (avant 1891) référence (après 1891)
Begriff	Concept
behaupten	asserter
Behauptung	assertion
bejahen	affirmer
Bejahung	affirmation
bestimmen	déterminer
Bestimmungsweise	mode de détermination
beurteilbarer Inhalt	contenu jugeable
Beziehung	relation
Definition	définition
DoppleWerthverlauf	double parcours-de-valeurs
einfaches	simple (nom, signe)
Eigenname	nom propre
Eigenschaft	propriété
ergänzen	complet
erklären	expliquer
Erklärung	explication
Erläuterung	élucidation
falsch	faux
Falsche	Faux
festsetzen	spécifier
Function	fonction
Gedanke	pensée

Gegenstand	objet
gesättigt	saturé
Gleichheit	égalité
Gleichung	équation
Identität	Identité
Inhalt	contenu
Marke	marqueur
Name	nom
Oberglied	sur-constituant
Satz	énoncé
scharfe Begrenzung	limites nettes
Sinn	sens
Stufe	niveau
Umfang	extension
unbeurteilbarer Inhalt	contenu non jugeable
ungesättigt	insaturé
Unterglied	sous-constituant
Urteil	jugement
vertreten	représenter
Vertreter	représentant
Vorstellung	idée
Vorstellungsverbindung	combinaison d'idées
wahr	vrai
Wahre	Vrai
Wahrheit	vérité
Wahrheitswerth	valeur de vérité
Werthverlauf	parcours-de-valeurs
Zahl	nombre
Zeichen	signe
Zeicheverbindungn	combinaison de signes
zusammengesetzter	complexe (nom, signe)

Bibliographie

Grundgesetze : original, réimpressions et traductions successives

Frege, G. (1893). *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet.* T. 1. Jena : H. Pohle.

— (1903a). *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet.* T. 2. Jena : H. Pohle.

— (1915b). "The Fundamental Laws of Arithmetic". Trad. par J. Stachelroth et P.E.B. Jourdain. In : *The monist* 25 (4). Trad. de la première partie de l'avant-propos, pp. 481–494.

— (1916). "The Fundamental Laws of Arithmetic. Psychological Logic". Trad. par J. Stachelroth et P.E.B. Jourdain. In : *The monist* 26(2). Trad. de la seconde partie de l'avant-propos, pp. 182–199.

— (1917). "Class, Function, Concept, Relation". Trad. par J. Stachelroth et P.E.B. Jourdain. In : *The monist* 27(1). Trad. de l'introduction et du Vol 1, §§1-7, pp. 114–127.

— (1950). "Frege against the Formalists". Trad. par M. Black. In : *The Philosophical Review* 59. trad. du Vol. 2, §§86-137, pp. 77–93, 202–220, 332–345.
Réimpression in : Frege *1952d*, pp. 182–233.

— (1952a). "Frege on Definitions I". In : Frege *1952d*. trad. du Vol. 1, §§56-67, pp. 159–172.

— (1952b). "Frege on Definitions II". In : Frege *1952d*. trad. du Vol. 1, §§139-144, 146,147, pp. 173–181.

— (1952c). "Frege on Russell's Paradox". In : Frege *1952d*. trad. de la postface, pp. 234–244.

— (1962). *Grundgesetze der Arithmetik*. T. 1 et 2. Fac-similé. Hildesheim : Olms.

— (1967b). *The Basic Laws of Arithmetic. Exposition of the System.* Éd. établie, trad. et introd. par M. Furth. Trad. de la préface, de l'introduction et du Vol. 1. Berkeley et Los Angeles : Univ. of California Press.

— (1997a). "*Grundgesetze der Arithmetik*, Volume I : Sélections (Preface - Introduction, §§1-7, 26-29, 32-33)". In : Frege *1997c*. Trad. par M. Beaney.

Frege, G. (1997b). "*Grundgesetze der Arithmetik*, Volume II : Sélections (§§55-67, 138-147, Appendix)". In : Frege *1997c*. Trad. par M. Beaney et P. Geach.

— (1998). *Grundgesetze der Arithmetik*. T. 1 et 2. Fac-similé, avec notes critiques de C. Thiel. Hildesheim : Olms.

— (2009). *Grundgesetze der Arithmetik, Paragraphen in moderner Notation - Corrigenda nicht eingearbeitet*. T. 1 et 2. Adapté en notations modernes par T. Müller, Bernhard Schröder et Rainer Stuhlmann-Laeisz. Paderborn : mentis Verlag.

— (2013). *Basic Laws of Arithmetic*. Éd. établie et trad. par P. Ebert, M. Rosberg et C. Wright. Avec une introd. de P. Ebert et M. Rosberg. Avec une préf. de C. Wright. Avec une postf. de R.T. Cook. T. 1 et 2. Oxford : Oxford University Press.

Travaux de Frege cités

Frege, G. (1879a). "Anwendungen der Begriffsschrift". In : *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*. Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft. T. 13, pp. 29–33. Réimpression in : Frege *1964*, pp. 89–93.

— (1879b). *Begriffsschrift, eine der Arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle : Nebert.
Version française : *Idéographie*. Trad. par C. Besson. Avec une postf. de J. Barnes. Paris : Librairie philosophique J. Vrin, 1999.

— (1879-1891). "**Logik**". In : Frege *1969b*, pp. 1–8.
Version française : "**Logique**". In : Frege *1994*, pp. 9–16.

— (1881). "**Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift**". In : Frege *1969b*, pp. 9–52.
Version française : "**La logique calculatoire de Boole et l'idéographie**". In : Frege *1994*, pp. 17–59.

— (1882a). "**Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift**". In : Frege *1969b*, pp. 53–59.
Version française : "**Le langage formulaire logique de Boole et mon idéographie**". In : Frege *1994*, pp. 61–66.

— (1882b). "Über den Zweck der Begriffsschrift". In : *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft* 16, pp. 1–10.
Réimpression in : Frege *1964*, pp. 97–106.
Version française : G. Frege. "Sur le but de l'Idéographie". In : Frege *1971*, pp. 70–79.

— (1882c). "Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift". In : *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 81, pp. 48–56.
Réimpression in : Frege *1964*, pp. 106–114.
Version française : G. Frege. "Que la science justifie le recours à une idéographie". In :

FREGE *1971*, pp. 63–69.

— (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau : W. Köbner.
Version française : *Les fondements de l'arithmtique*. Trad. par C. IMBERT. Paris : Editions du Seuil, 1969.

— (1884 au plus tard). "**Dialog mit Pünjer über Existenz**". In : FREGE *1969b*, pp. 60–75.
Version française : "**Dialogue avec Pünjer sur l'existence**". In : FREGE *1994*, pp. 67–84.

— (1885). "Über formale Theorien der Arithmetik". In : *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft* 19, pp. 94–104.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 103–111.

— (1891). *Funktion und Begriff*. Texte de conférence. Prononcé le 9 janvier 1891. Iéna : *La société savante d'Iéna pour la médecine et les sciences naturelles*.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 125–142.
Version française : G. FREGE. "Fonction et concept". In : FREGE *1971*, pp. 80–101.

— (1892a). "Über Begriff und Gegenstand". In : *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie* 16, pp. 192–205.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 167–178.
Version française : G. FREGE. "Concept et objet". In : FREGE *1971*, pp. 127–141.

— (1892b). "Über Sinn und Bedeutung". In : *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* NF 100, pp. 25–50.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 143–162.
Version française : G. FREGE. "Sens et dénotation". In : FREGE *1971*, pp. 102–126.

— (1892-1895). "**Ausführungen über Sinn und Bedeutung**". In : FREGE *1969b*, pp. 128–136.
Version française : "**Précisions sur sens et référence**". In : FREGE *1994*, pp. 139–148.

— (1894). "Rezension von Dr. E. G. Husserl : *Philosophie der Arithmetik* I". In : *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 103, pp. 313–332.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 179–192.
Version française : G. FREGE. "Compte rendu de *Philosophie der Arithmetik I* de E.G. Husserl". In : FREGE *1971*, pp. 142–159.

— (1895). "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*". In : *Archiv für systematische Philosophie* 1, pp. 433–456.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 193–210.

— (1897a). "**Logik**". In : FREGE *1969b*, pp. 137–163.
Version française : "**Logique**". In : FREGE *1994*, pp. 149–177.

— (1897b). "Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene". In : *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig : Mathematisch-physische Klasse* 48, pp. 361–378.

Réimpression in : FREGE *1964*, pp. 220–233.

— (1897-1898). "**Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens**". In : FREGE *1969b*, pp. 164–170.
Version française : "**Justification de mes principes plus rigoureux de définition**". In : FREGE *1994*, pp. 179–185.

— (1899-1906). "**Über Euklidische Geometrie**". In : FREGE *1969b*, pp. 182–184.
Version française : "**Sur la géométrie euclidienne**". In : FREGE *1994*, pp. 199–201.

— (1903b). "Über die Grundlagen der Geometrie". In : *Jahresbericht* 12. Première série, pp. 319–324, 368–375.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 262–272.

— (1904). "Was ist eine Funktion ?" In : *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20, Februar 1904*. Sous la dir. de S. MEYER. Leipzig : J. A. Barth, pp. 656–666.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 273–280.
Version française : G. FREGE. "Qu'est-ce qu'une fonction ?" In : FREGE *1971*, pp. 160–169.

— (1906a). "Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae". In : *Jahresbericht* 15, pp. 586–590.

— (1906b). "**Einleitung in die Logik**". In : FREGE *1969b*, pp. 201–212.
Version française : "**Introduction à la logique**". In : FREGE *1994*, pp. 220–233.

— (1906c). "**Kurze Übersicht meiner logischen Lehren**". In : FREGE *1969b*, pp. 213–218.
Version française : "**Bref aperçu de mes doctrines logiques**". In : FREGE *1994*, pp. 235–240.

— (1906d). "Über die Grundlagen der Geometrie". In : *Jahresbericht* 15. Seconde série, pp. 293–309, 377–403, 423–430.
Réimpression in : FREGE *1967a*, pp. 281–323.

— (1906e). "**Über Schoenflies : Die logischen Paradoxien der Mengenlehre**". In : FREGE *1969b*, pp. 191–199.
Version française : "**Sur Schoenflies : Les paradoxes logiques de la théorie des ensembles**". In : FREGE *1994*, pp. 209–217.

— (1906f). "**Was kann ich als Ergebnis meiner Arbeit ansehen ?**" In : FREGE *1969b*, p. 200.
Version française : "**Que puis-je considérer comme le résultat de mon travail ?**" In : FREGE *1994*, p. 219.

— (1908). "Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue nachgewiesen". In : *Jahresbericht* 17, pp. 52–55.

— (1914). “**Logik in der Mathematik**”. In : Frege *1969b*, pp. 219–270.
Version française : “**La logique dans les mathématiques**”. In : Frege *1994*, pp. 241–296.

— (1915a). “**Meine grundlegenden logischen Einsichten**”. In : Frege *1969b*, pp. 271–272.

— (1918, 1923). “Logische Untersuchungen”. In : *Philosophie des deutschen Idealismus* I,III, 58–77 (I), 143–157 (I), 36–51 (III).
Réimpression in : Frege *1967a*, pp. 343–394.
Version française : G. Frege. “Recherches logiques”. In : Frege *1971*, pp. 170–234.

— (1919). “**Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter**”. In : Frege *1969b*, pp. 273–277.
Version française : “**Notes pour Ludwig Darmstaedter**”. In : Frege *1994*, pp. 299–303.

— (1923). “**Logische Allgemeinheit**”. In : Frege *1969b*, pp. 278–281.
Version française : “**Introduction à la logique**”. In : Frege *1994*, pp. 305–309.

— (1924-1925a). “**Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften**”. In : Frege *1969b*, pp. 286–294.
Version française : “**Les sources de connaissance en mathématiques et en sciences mathématiques de la nature**”. In : Frege *1994*, pp. 315–323.

— (1924-1925b). “**Neuer Versuch der Grundlegun der Arithmetik**”. In : Frege *1969b*, pp. 298–302.
Version française : “**Nouvelle tentative de fondation de l’arithmétique**”. In : Frege *1994*, pp. 329–331.

— (1924-1925c). “**Zahlen und Arithmetik**”. In : Frege *1969b*, pp. 295–297.
Version française : “**Nombre et arithmétique**”. In : Frege *1994*, pp. 325–327.

— (1969a). *Les fondements de l’arithmtique*. Trad. par C. Imbert. Paris : Editions du Seuil.

— (1972). *Conceptual notations. and Related Articles*. Éd. établie, trad. et introd. par T.W. Bynum. Version anglaise de Frege 1879b. Oxford : Oxford University Press.

— (1999). *Idéographie*. Trad. par C. Besson. Avec une postf. de J. Barnes. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.

Recueils de travaux de Frege cités

Frege, G. (1952d). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Sous la dir. de P. Geach et M. Black. Trad. par P. Geach et al. 1re éd. Oxford : Basil Blackwell.

— (1964). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Sous la dir. d’I. Angelelli. Hildesheim : Olms.

— (1967a). *Kleine Schriften*. Sous la dir. d’I. Angelelli. Darmstadt et Hildesheim : Wissenschaftliche Buchgesellschaft et Olms.

Frege, G. (1969b). *Nachgelassene Schriften*. Sous la dir. de H. Hermes, F. Kambartel et F. Kaulbach. Hambourg : Felix Meiner.

— (1971). *Écrits logiques et philosophiques*. Trad. par Claude Imbert. Paris : Éditions du Seuil.

— (1976). *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Sous la dir. de G. Gabriel et al. Hambourg : Felix Meiner.

— (1980). *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Sous la dir. de G. Gabriel et al. Trad. par H. Kaal. Version abrégée de Frege 1976 par G. Gabriel. Chicago : U. of Chicago Press.

— (1984). *Collected papers on Mathematics, Logic and Philosophy*. Sous la dir. de B. McGuiness. Trad. par M. Black et al. Trad. anglaise de Frege 1967a. Oxford : Basil Blackwell.

— (1994). *Écrits posthumes*. Trad. française de Frege 1969b sous la direction de Philippe de Rouilhan et Claudine Thiercelin. Nîmes : Éditions Jacqueline Chambon.

— (1997c). *The Frege Reader*. Sous la dir. de M. Beaney. Oxford : Blackwell.

Autres travaux cités

Angelelli, I. (1967). *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*. Dordrecht : D. Reidel.

Antonelli, A. et R. May (2000). “Frege’s New Science”. In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 41.3, pp. 242–270.

— (2005). “Frege’s *Other* Program”. In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 46.1, pp. 1–17.

Backer, G.P. et P.M.S. Hacker (1984). *Frege : Logical Excavations*. Oxford : Oxford University Press.

Baker, G.P. (2001). “‘Function’ in Frege *Begriffsschrift* : Dissolving the Problem”. In : *British Journal for the History of Philosophy* 9, pp. 525–544.

Baker, G.P. et P.M.S. Hacker (2003). “Functions in "Begriffsschrift"”. In : *Synthese* 135.3, pp. 273–297.

Bar-on, D. et K. Simmons (2007). “The Use of Force against Deflationism : Assertion and Truth”. In : *Truth and Speech Acts : Studies in the Philosophy of Language*. Sous la dir. de D. Greimann et G. Siegwart. New York : Routledge, pp. 61–89.

Bartlett, J. (1961). “Funktion und Gegenstand”. Thèse de doct. Munich : Ludwig-Maximilians-Universität.

Bealer, G. (1993). “A Solution to Frege’s Puzzle”. In : *Philosophical perspectives, 7, Language and logic*. Atascadero : Ridgeview Publishing Company, pp. 17–60.

Beaney, M. (2007). “Frege’s Use of Function-Argument Analysis and his Introduction of Truth-Value as Objects”. In : *Grazer Philosophische Studien* 75, pp. 93–123.

Beaney, M. et E.H. Reck, éds. (2005). *Gottlob Frege : Critical Assessments of Leading Philosophers*. London : Routledge.

Bell, D. (1996). “The Formation of Concepts and the Structure of Thoughts”. In : *Philosophy and Phenomenological Research* 56, pp. 583–597.

Bell, J. L. et W. Demopoulos (1993). “Frege’s Theory of Concepts and Objects and the Interpretation of Second-order Logic”. In : *Philosophia Mathematica* 3.1, pp. 139–156.

Blanchette, P. (1996). “Frege and Hilbert on Consistency”. In : *The Journal of Philosophy* XCIII.7, pp. 317–336.

— (2012). *Frege’s Conception of Logic*. Oxford : Oxford University Press.

Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought*. London : Walton et Maberly.

Bromberger, S. (1992). “Types and Tokens in Linguistics”. In : *On What We Know We Don’t Know*. Chicago : University of Chicago Press, pp. 170–208.

Burgess, J. P. (1993). “Hintikka and Sandu *versus* Frege *in re* Arbitrary Functions”. In : *Philosophia Mathematica* 3rd ser. 1, pp. 50–65.

Burgess, J.P. (2005). *Fixing Frege*. Princeton : Princeton University Press.

Bynum, T.W. (1972). “On the Life and Work of Gottlob Frege”. In : Frege *1972*, pp. 1–54.

Cadet, M. et M. Panza (2015). “The Logical System of Frege’s Grundgesetze : A Rational Reconstruction”. In : *Manuscrito* 38.1, pp. 5–95.

Cantor, G. (1885). “Rezension der *Grundlagen der Arithmetik*”. In : *Deutsche Litteraturzeitung* VI.20.

Caplan, B. et M. Thau (2001). “What’s Puzzling Gottlob Frege ?” In : *Canadian Journal of Philosophy* 31.2, pp. 159–200.

Carnap, R. (1963). “The Development of my Thinking”. In : *The Philosophy of Rudolph Carnap*. Sous la dir. de P.A. Schilpp. The Library of Living Philosophers T.11. La salle : Open Court, pp. 3–44.

Cavailles, J. (1962). *Philosophie mathématique*. Paris : Hermann.

Church, A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic*. T. 1. Princeton : Princeton University Press.

Conant, J. (1991). "The Search for Logically Alien Thought : Descartes, Kant, Frege and the *Tractatus*". In : *Philosophical Topics* 20, pp. 115–180.

Cook, R.T. (2013). "How to read *Grundgesetze*". In : Frege *2013*, A1–A42.

Cori, R. et D. Lascar (2003). *Logique mathématique*. T. 1-2. Première édition : 1993. Paris : Dunod.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und Irratationale Zahlen*. Braunschweig : Vieweg.

— (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen ?* Braunschweig : Vieweg.

Demopoulos, W. (2011). "On Logicist Conceptions of Functions and Classes". In : *Logic, Mathematics, Philosophy : Vintage Enthusiasms. Essays in Honour of J. L. Bell*. Sous la dir. de D. DeVidi, M. Hallett et P. Clark. Dordrecht, Heidelberg, London, New York : Springer-Verlag, pp. 3–18.

Diamond, C. (1991). *The Realistic Spirit : Wittgenstein, Philosophy and the Mind*. Cambridge : MIT Press.
Version française : *L'esprit réaliste : Wittgenstein, la philosophie et l'esprit*. Paris : Presses Universitaires de France, 2004.

— (2010). "Inheriting from Frege : the Work of Reception, as Wittgenstein did it". In : Potter *et* Ricketts *2010*, pp. 550–601.

Dreben, B. et J. van Heijenoort (1986). "Introductory Note to 1929, 1930 and 1930a". In : Gödel *1986*, pp. 44–59.

Duarte, A.B. (2009). "Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege". Thèse de doct. Pontífica Universidade Católica do Rio De Janeiro.

Dummett, M. (1973[1], 1981[2]). *Frege : Philosophy of Language*. London : Duckworth.

— (1978). *Truth and Other Enigmas*. London : Duckworth.

— (1981). *The Interpretation of Frege's Philosophy*. Cambridge : Harvard University Press.

— (1984). "An unsuccessful Dig : Critical Notice of G. Baker and P. Hacker, *Logical Excavations*". In : Wright *1984*, pp. 194–226.

— (1991a). *Frege and other philosophers*. Oxford : Oxford University Press.

— (1991b). *Frege : Philosophy of Mathematics*. London : Duckworth.

— (1994). *Origins of Analytical Philosophy*. Cambridge : Harvard University Press.

— (1995). "The Context Principle : Centre of Frege's Philosophy". In : *Logik und Mathematik : Frege-Kolloquium Jena 1993*. Sous la dir. d'I. Max et W. Stelzner. Berlin : Gruyter, pp. 3–19.
Version Française : "Le principe du contexte : au cœur de la philosophie de Frege". In : Marion *et* Voizard *1998*, pp. 63–84.

Erdmann, B. (1892). *Logik*. Halle a. d. Saale : Max Niemeyer.

Ferreira, F. (2005). "Amending Frege's *Grundgezetze der Arithmetik*". In : *Synthese* 147, pp. 3–19.

— (2015). "Zigzag and Fregean Arithmetic". In : *Workshop : Ontological Commitment in Mathematics. In Memoriam of Aldo Antonelli*. IHPST, Paris.

Ferreira, F. et K.F. Wehmeier (2002). "On the consistency of the Δ^1_1-CA fragment of Frege's *Grundgesetze*". In : *Journal of Philosophical Logic* 31, pp. 301–311.

Geach, P. (1976). "Saying and Showing in Frege and Wittgenstein". In : *Acta Philosophica Fennica* 28, pp. 54–70.

Geach, P.T. (1965). "Assertion". In : *The Philosophical Review* 74.4, pp. 449–465.

Gödel, K. (1986). *Collected Works*. Sous la dir. de S. Feferman et al. T. 1. Oxford : Oxford University Press.

Goldfarb, W. (1979). "Logic in the Twenties : the Nature of the Quantifier". In : *Journal of Symbolic Logic* 44, pp. 351–368.

— (1982). "Logicism and Logical Truth". In : *Journal of Philosophy* 79, pp. 692–695.

— (1997). "Metaphysics and Nonsense. On Cora Diamond's *The Realistic Spirit*". In : *Journal of Philosophical Research* 22, pp. 57–73.

— (2010). "Frege's Conception of Logic". In : Potter *et* Ricketts *2010*, pp. 63–85.

Haaparanta, L. et J. Hintikka, éds. (1986). *Frege Synthesized*. Synthese Library (181). Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Hale, B. et C. Wright (2001). *The Reason's Proper Study : Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Oxford : The Clarendon Press.

Halimi, B. (2017). "Logical Univerality and Logical Contextuality in Frege". In : *À paraître*.

Heck, R. (1996). "The Consistency of Predicative Fragments of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*". In : *History and Philosophy of Logic* 17, pp. 209–220.

Heck, R. (2003). “Frege on Identity and Identity-Statements : A Reply to Thau and Caplan”. In : *Canadian Journal of Philosophy* 33.1, pp. 83–102.

— (2010). “Frege and Semantics”. In : Potter *et* Ricketts *2010*, pp. 342–378.

— (2011). *Frege’s theorem*. Oxford : Oxford University Press.

— (2012). *Reading Frege’s Grundgesetze*. Oxford : Oxford University Press.

— (2017). “Formal Arithmetic Before *Grundgesetze*”. In : *A Companion to Frege’s Grundgesetze*. Sous la dir. de P. Ebert et M. Rossberg, à paraître.

Heck, R. et R. May (2006). “Frege’s Contribution to Philosophy of Language”. In : *The Oxford Handbook of Philosophy of Language*. Sous la dir. d’E. Lepore et B. Smith. Oxford : Oxford University Press, pp. 3–39.

— (2010). “The Composition of Thoughts”. In : *Noûs* 45.1, pp. 126–166.

— (2013). “The Function is Unsaturated”. In : *The Oxford Handbook of the History of Analytic Philosophy*. Sous la dir. de M. Beaney. Oxford : Oxford University Press, pp. 825–850.

— (2017). “Truth in Frege”. In : *The Oxford Handbook of Truth*. Sous la dir. de M. Glanzberg. Oxford : Oxford University Press, à paraître.

Heck, R. et J. Stanley (1993). “Reply to Hintikka and Sandu : Frege and Second-Order Logic”. In : *The Journal of Philosophy* 90, pp. 416–424.

Heijenoort, J. van (1967). “Logic as Calculus and Logic as Language”. In : *Synthese* 3 : *Language in Use Including Wittgenstein’s Comments on Frazer and a Symposium on Mood and Language-Games*, pp. 324–330.

— (1979). “Absolutism and Relativism in Logic”. In : Heijenoort *1985*. 75-83.

— (1985). *Selected Essays*. Naples : Bibliopolis.

Hilbert, D. (1900). *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart : Teubner.

Hintikka, J. (1979). “Frege’s Hidden Semantic”. In : *Revue Internationale de Philosophie* 33, pp. 716–722.

— (1988). “La théorie des modèles en logique, tradition et perspectives”. In : *J.* Hintikka *1994*, pp. 209–251.

— (1989). “Is Truth Ineffable ?” In : *J.* Hintikka *1997*, pp. 20–47.

— (1994). *Fondement d’une théorie du langage*. Paris : PUF.

— (1997). *Lingua Universalis VS Calculus Ratiocinator. An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy.* Dordrecht : Kluwer.

Hintikka, J. et M.B. Hintikka (1986). *Investigating Wittgenstein.* Oxford : Blackwell.

Hintikka, J. et G. Sandu (1992). "The Skeleton in Frege's Cupboard : The Standard Versus Nonstandard Distinction". In : *The Journal of Philosophy* 89, pp. 290–315.
Version française : "La vérité est au fond du puits". In : Marion *et* Voizard *1998.* Trad. par L. Perrin. (avec une postface inédite de 1997), pp. 171–209.

— (1994). "Uses and Misuses of Frege's Ideas". In : *The Monist* 77.3, pp. 278–293.

Hugly, P. et C. Saywar (2000). "Frege on identities". In : *History and Philosophy of Logic* 21, pp. 195–205.

Husserl, E. (1891). "Frege Versuch". In : *Philosophie der Arithmetik.* Halle : Pfeffer, pp. 129–134.

Jeshion, R. (2001). "Frege's Notions of Self-Evidence". In : *Mind* 110, pp. 937–976.

Jourdain, P.E.B. (1912). "The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics". In : *The quaterly journal of pure and applied mathematics* 43, pp. 219–314.
Réimpression : in : Frege *1980*, pp. 179–206.

Kemp, G. (1995). "Truth in Frege's 'Law of Truth"'. In : *Synthese* 105.1, pp. 31–51.

Kenny, A.J.P (1995). *Frege.* London : Penguin.

Kerry, B. (1887). "Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung". In : *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie* 11, pp. 249–307.

Kremer, M.J. (2000). "Judgment and Truth in Frege". In : *Journal of the History of Philosophy* 38.4, pp. 549–581.

— (2010). "On Sense and Reference : a Critical Reception". In : Potter *et* Ricketts *2010*, pp. 220–292.

Kripke, S. (1975). "Outline of a Theory of Truth". In : *Journal of Philosophy* 72, pp. 690–716.

Landini, G. (2012). *Frege's Notation : What They Are and How They Mean.* London : Palgrave McMillan.

Linnebo, O. (2003). "Frege's Conception of Logic : From Kant to *Grundgesetze*". In : *Manuscrito* 26.2, pp. 235–252.

— (2004). "Frege's Proof of Referentiality". In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 45, pp. 73–98.

Marion, M. et A. Voizard, éds. (1998). *Frege. Logique et philosophie.* Trad. par L. Perrin et P. Philie. Montréal : Harmattan.

May, R. (2001). "Frege on Identity Statements". In : *Semantic Interfaces : Reference, Anaphora, and Aspect.* Sous la dir. de C. Cecchetto et al. Stanford : CSLI Publications, pp. 1–62.

Mendeloson, E. (1997). *Introduction to Mathematical Logic.* Quatrième édition. London : Chapman et Hall.

Moore, A. et A. Rein (1986). "*Grundgesetze* Section 10". In : Haaparanta *et J.* Hintikka *1986*, pp. 375–384.

— (1987). "Frege's Permutation Argument". In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 28, pp. 51–54.

Panza, M. (2015). "From Lagrange to Frege : Functions and expressions". In : *Functions and Genrality of Logic : Refections on Dedekind's and Frege's Logicisms.* Sous la dir. de M. Panza et G. Sandu. H. Benis Sinaceur.

Parsons, C. (1965). "Frege's Theory of Number". In : Ithaca : Cornell University Press, pp. 180–203.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Turin : Bocca.

— (1895). "Recensione di *Grundgesetze der Arithmetik* I". In : *Revista di matematica* 5, pp. 122–128.

Potter, M. et T. Ricketts, éds. (2010). *Frege and Semantics.* Cambridge, New York, etc. : Cambridge University Press.

Resnik, M.D. (1986). "Frege's Proof of Referentiality". In : Haaparanta *et J.* Hintikka *1986*, pp. 177–195.

Ricketts, T. (1985). "Frege, the *Tractatus*, and the logocentric predicament". In : *Noûs* 67, pp. 3–15.

— (1986a). "Generality, Sense, and Meaning in Frege". In : *Pacific Philosophical Quarterly* 67, pp. 172–195.

— (1986b). "Objectivity and Objecthood : Frege's Metaphysics of Judgement". In : Haaparanta *et J.* Hintikka *1986*, pp. 65–95.

— (1996). "Logic and Truth in Frege". In : *Aristotelian Society Supplementary Volume* 70, pp. 121–140.

— (1997). "Truth-values and Courses-of-values in Frege's *Grundgesetze*". In : *Early Analytic Philosophy : Frege, Russell, Wittgenstein.* Sous la dir. de W. W. Taid. Chicago : Open Court,

pp. 187–211.

— (1998). “Frege’s 1906 Foray into Metalogic”. In : *Philosophical Topics* 25, pp. 169–188.

Rouilhan, P. de (1988). *Frege : les paradoxes de la représentation*. Paris : Les Éditions de Minuit.

— (2012). “In Defense of Logical Universalism : Taking Issue with Jean van Heijenoort”. In : *Logica Universalis* 6, pp. 553–586.

Ruffino, M. (2000). “Extensions as representative Objects in Frege’s Logic”. In : *Erkenntnis* 52, pp. 232–252.

— (2003). “Why Frege Would Not Be a Neo-Fregean”. In : *Mind* 112.445, pp. 51–78.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. London : Campridge U.P.

Schirn, M. (1990). “Frege’s Objects of a Quite Special Kind”. In : *Erkenntnis* 32, pp. 27–60.

Schröder, E. (1880). “Review of Frege’s *Begriffsschrift*”. In : *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch-literaturische Abteilung* 25, pp. 81–93.

Schroeder-Heister, P. (1987). “A model-theoretic Reconstruction of Frege’s Permutation Argument”. In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 28, pp. 69–79.

Sheffer, H. (1926). “Review of Whitehead and Russell, *Principia Mathematica*”. In : *Isis* 25, pp. 226–231.

Sluga, H. (1980). *Gottlob Frege*. Londres : Routledge et Kegan Paul ltd.

— (1987). “Frege Against the Booleans”. In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 28, pp. 374–392.

— (2002). “Frege on the Indefinability of Truth”. In : *From Frege to Wittgenstein : Perspectives on Early Analytic Philosophy*. Sous la dir. d’E. Reck. Oxford : Oxford University Press.

Stanley, J. (1996). “Truth and Metatheory in Frege”. In : *Pacific Philosophical Quarterly* 77, pp. 45–70.

Sullivan, P.M. (2005). “Metaperspectives and Internalism in Frege”. In : Beaney *et* Reck *2005*. T. 2, pp. 85–105.

Sundholm, G. (2001). “Frege, August Bebel and the Return of Alsace-Lorraine : The dating of the distinction between Sinn and Bedeutung”. In : *History and Philosophy of Logic* 22, pp. 57–73.

Tappenden, J. (1997). “Metatheory and mathematical practice in Frege”. In : *Philosophical topics* 25.2, pp. 213–244.

Tappenden, J. (2000). “Frege on Axioms, Indirect Proof, and Independence Arguments in Geometry : did Frege Reject Independence Arguments ?” In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 41.2, pp. 271–315.

— (2005). “The Caesar Problem in its Historical Context : Mathematical Background”. In : *Dialectica* 59.2, pp. 237–264.

Tarski, A. (1933). “Le concept de vérité dans les langages formalisés”. In : *Logique, sémantique, méta-mathématique*. Sous la dir. de G.G. Granger. T. 1. Paris : Armand Colin, pp. 157–269.

Taschek, William W. (2008). “Truth, Assertion, and the Horizontal : Frege on ‘The Essence of Logic”’. In : *Mind* 117, pp. 375–401.

Textor, M. (2009). “A Repair of Frege’s Theory of Thoughts”. In : *Synthese* 167.1, pp. 105–123.

— (2010). “Frege on Judging as Acknowledging the Truth”. In : *Mind* 119, pp. 615–655.

Thomae, J. (1890^1, 1898^2). *Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Nebert : Hall a. d. Saale.

Venn, J. (1980). “Review of Frege’s *Begriffsschrift*”. In : *Mind* 5, n°18, p. 79.

Wehmeier, K. F. et P. Schroeder-Heister (2005). “Frege’s Permutation Argument Revisited”. In : *Synthese* 147, pp. 43–61.

Wehmeier, K.F. (1999). “Consistent fragments of *Grundgesetze* and the existence of non-logical objects”. In : *Synthese* 121, pp. 309–328.

Weiner, J. (1990). *Frege in Perspective*. Ithaca (N.Y.) : Cornell University Press.

— (1997). “Has Frege a Philosophy of Language ?” In : *Early Analytic Philosophy : Essays in Honor of Leonard Linski*. Sous la dir. de W. W. Tait. Lasalle : Open Court Press.

— (2001). “Theory and Elucidation : The End of the Age of Innocence”. In : *Future Pasts. The Analytic Tradition in Twentieth Century Philosophy*. Sous la dir. de J. Floyd et S. Shieh. New York et Oxford : Oxfort University Press, pp. 43–65.

— (2002). “Section 31 Revisited”. In : *From Frege to Wittgenstein*. Sous la dir. d’E. Reck. Oxford University Press, pp. 149–184.

— (2005a). “On Fregean Elucidation”. In : *BeaneyReck*, pp. 197–214.

— (2005b). “Semantic Descent”. In : *Mind* 114, pp. 321–354.

— (2008). “How Tarskian is Frege ?” In : *Mind* 177, pp. 427–450.

— (2010). “Understanding Frege’s Project”. In : Potter *et* Ricketts *2010*, pp. 32–62.

WIGGINS, D. (1992). "Meaning, Truth-conditions, Proposition : Frege's Doctrine of Sense Retrieved, Resumed and Redeployed in the Light of Recent Criticism". In : *Dialectica* 46, pp. 61–90.

WITTGENSTEIN, L. (1993). *Tractacus logico-philosophicus*. Paris : Gallimard.

WRIGHT, C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen : Aberdeen University Press.

— éd. (1984). *Frege : Tradition and Influence*. Oxford : Blackwell.

— (1998). "Why Frege does not deserve his *Granum Salis*". In : *Grazer Philophische Studien 55, New Essays of the Philosophy of Michael Dummett*. Sous la dir. de J. BRANDL et P. SULLIVAN. Amsterdam, Atlanta : Rodophi, pp. 239–263.
Réimpression in : HALE *et* WRIGHT *2001*, pp. 72–90.