



HAL
open science

Physique statistique des phénomènes de blocage dans les flux particuliers

Chloé Barré

► **To cite this version:**

Chloé Barré. Physique statistique des phénomènes de blocage dans les flux particuliers. Matière Condensée [cond-mat]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066227 . tel-01686170

HAL Id: tel-01686170

<https://theses.hal.science/tel-01686170>

Submitted on 17 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

ÉCOLE DOCTORALE
PHYSIQUE EN ÎLE-DE-FRANCE

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Mention : Physique

Présentée et soutenue par

Chloé Barré

Physique statistique des phénomènes de blocage dans les flux particuliers

Thèse dirigée par Julian TALBOT et Pascal VIOT

préparée au Laboratoire de Physique Théorique de la Matière
Condensée

soutenue le 26 septembre 2017

devant le jury composé de :

M.	Eric BERTIN	Rapporteur
M.	Andrea PARMEGGIANI	Rapporteur
M ^{me}	Cécile APPERT-ROLLAND	Examinatrice
M.	Florent KRZAKALA	Examineur
M.	Jacques RESING	Examineur
M.	Julian TALBOT	Directeur de thèse
M.	Pascal VIOT	Invité

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier toutes les personnes grâce à qui j'ai pu mener cette thèse à son terme, et qui m'ont rendu ces trois années plus agréable. Mais j'espère que les personnes importantes savent par plus que des remerciements ce que je pense et ce qu'elles m'ont apporté. Tout d'abord, je voudrais remercier grandement mes directeurs de thèse, Julian Talbot et Pascal Viot pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en acceptant la direction de deux stages puis de ma thèse. Je suis ravie d'avoir travaillé en leur compagnie, pour l'apport scientifique qu'ils m'ont apporté et pour m'avoir poussé toujours à continuer à avancer même dans les moments qui ont pu être les plus difficiles.

Je tiens ensuite à remercier Éric Bertin et Andrea Parmeggiani pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant à mon jury de thèse en qualité de rapporteurs, pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de cette thèse et pour les corrections qu'ils y ont apportées. Je remercie aussi les autres membres de mon jury, Cécile Appert-Rolland, Jacques Resing et Florent Krzakala d'avoir accepté d'être examinateur.

Merci à tous les membres du laboratoire qui ont fait de ces trois voire quatre années au LPTMC un agréable séjour. Les secrétaires du laboratoire pour leur gentillesse Sylvie Dalla Foglia, Liliane Cruzel et Diane Domand qui a en plus géré tous mes problèmes et mes pertes de clés. Merci à Michel Quaggetto pour avoir géré mes problèmes informatiques et pour nos échanges. Ainsi qu'à tous les chercheurs Annie Lemarchand pour ses gateaux, Julien Vidal et Charles Antoine pour leurs discussions dans la salle de pause et pour son aide pour la présentation. Je voudrais particulièrement remercier Olivier Bénichou pour les discussions et pour son aide pour la soutenance et dans ma recherche de post-doc.

Merci à tous mes colocataires qui se sont succédés, pour les repas partagés, les discussions, les verres de vin, et tout ce qui fait le quotidien : Elsa, Claire, Virginie, Gwen (et Kravitz bien sûr), Benjamin, Max, avec une mention spéciale pour Gabriel qui m'a vu rédiger ma thèse plusieurs fois à 00h dans le salon, et qui a dû attendre pour connaître mes skills à starcraft.

Merci à tous mes amis qui m'ont soutenu et eu le courage de m'entendre grogner lorsque cela ne fonctionnait pas. Ils ont empli ces trois années de joie, de rires, de jeux débiles et de trois tonnes de discussions intéressantes ! Merci aux parisiens pour tout le temps passé, pour ces vacances et ces soirées : Gary, Vivien, Ben, Julien, Sarah, JF, Solène, Gwen, Benjamin, Anais, Virginie, Nicolas, Gif, Victor, Amélie, etc. Certains ont même corrigé des passages de ma thèse ou eu le courage de me faire répéter ma soutenance, je les en remercie fortement. Sans vous je ne pense pas que ma vie parisienne aurait été aussi palpitante, et cela ne risque pas de s'arrêter là. Merci d'avoir été présents à chaque moment. Merci aussi à Enora qui est loin mais qui compte énormément pour moi ; les deux breaks en Irlande ont été vraiment top. Merci à tous les autres qui restent présents pour moi même de loin : Marjolaine (qui est revenue parmi nous), Rémi, Pierre, Claire, Tiphaine, Quentin, Mathieu, Florianne et bien d'autres.

Un très grand merci à tous les doctorants et post-doctorant du laboratoire, les anciens comme Thibault, Andréas, Éléna, Fred, Simon et Boris pour nous avoir aidés à arriver en douceur au LPTMC. Je remercie aussi les doctorants de mon année qui sont devenus des amis et que j'espère revoir pour d'autres aventures chouffées : Elsa, Charlie, Charlotte, Nicolas, Félix et Stanley (même si tu n'es pas vraiment du laboratoire c'est tout comme ! et j'espère un jour apprécier un concert de métal progressif à sa juste valeur dans notre tout nouveau restaurant).

Merci à ma famille, mon père, ma mère, ma soeur, Mounir et mon petit frère, pour avoir toujours cru en moi et m'avoir soutenu pendant toute ces années d'études. Je voudrais en particulier remercier ma mère pour ce pot qui était encore mieux que ce que j'imaginai et qui a tout géré pour moi ! Son cheesecake (et son tiramisu !) a convaincu tout le monde.

Un énorme merci à Elsa, Zaza, de m'avoir soutenu dans tous les bons et les mauvais moments et d'avoir suivi ma thèse depuis la demande de financement ! Elle m'a supportée en collocation pendant deux ans de ma thèse et j'espère qu'elle sera de nouveau ma colocataire pendant mon post-doc ! Je lui dis un grand merci pour tout ce qu'elle m'apporte au quotidien, notamment les vidéos de chats !

Je voudrais aussi dire quelques mots particuliers pour Charlie. Pour la fin de la thèse où nous nous sommes particulièrement soutenu avec Elsa. L'épicier devant Jussieu doit encore se souvenir de nous. Merci pour toutes nos discussions qui ont été très enrichissantes et m'ont permis de m'évader, notamment pendant la période rédaction. Je suis extrêmement heureuse d'avoir fait cette rencontre qui m'a énormément apporté. Et merci de m'avoir fait connaître Kardashian pour m'accompagner dans les moments difficiles !

En dernier je voudrais dire quelques mots pour Elsa avec qui j'ai vécu toute l'expérience de la thèse, dès la première année. Nous avons pu partager nos impressions, nos déboires, nos moments de rage et surtout beaucoup de rires. Sans elle mon séjour dans ce laboratoire aurait été nettement plus terne. Nous avons toutes les deux grandi et nous avons maintenant même le droit de ressembler à de vraies mères américaines ! Un très très grand merci et à bientôt aux Canaries pour clore non pas cette amitié créée mais ces trois années de thèse.

Table des matières

I	Introduction	1
I.1	Phénomènes physiques conduisant au blocage d'un écoulement de particules .	1
I.2	Encombrement d'un flux causé par une forte densité	1
I.3	Flux contrôlé par le canal	2
I.3.1	Passage d'ions dans des microcanaux	3
I.3.2	Trafic routier	4
I.3.3	Filtration par un tamis	4
I.4	Quelques approches simples	6
I.4.1	Exclusion et congestion	6
I.4.2	Théorie des files d'attente	7
I.4.3	Exemples de modèles numériques pour les mouvements de panique . .	9
I.4.4	Plan de la thèse	10
II	Modèle à un canal	13
II.1	Description du modèle et des observables	13
II.2	Modèle du pont	14
II.2.1	Présentation du modèle	14
II.2.2	Calcul des observables	15
II.3	Généralisation du modèle du pont	17
II.3.1	Solution pour $N = 2$	20
II.3.2	Limite en capacité augmentée, $N = 3$	25
II.3.3	Solution partielle pour $N > 3$	30
II.3.4	Fonction de grandes déviations et fonction de risques	33
II.4	Corrélations	37
II.4.1	Corrélations pour $N = 2$	38
II.4.2	Corrélations pour $N = 3$	42
II.5	Flux inhomogène	46
II.5.1	Observables	46
II.5.2	Intensité discontinue	50
II.5.3	Intensité exponentielle	51
II.5.4	Intensité périodique	52
II.6	Conclusion	55
III	Modèle à plusieurs canaux	57
III.1	Modèle d'un amas de fibres	57
III.1.1	Description générale	58
III.1.2	Redistribution locale	59
III.1.3	Comparaison entre GLS et LLS	59
III.2	Description du modèle multicanaux	61
III.3	Canaux indépendants	62
III.3.1	Résultats généraux	62
III.3.2	Cas $N = 1$	64

III.3.3 Cas $N = 2$	66
III.4 Canaux couplés	67
III.4.1 Résultats généraux	67
III.4.2 Cas $N = 1$	69
III.4.3 Seuil de blocage $N = 2$	71
III.5 Canaux couplés pour un seuil de particules bloquantes quelconque, N	77
III.5.1 Comparaison entre le temps moyen de N_c canaux et le temps moyen d'un seul canal	78
III.5.2 Flux par canal identique, λ	81
III.5.3 Flux total identique, Λ	82
III.6 Blocage avec les propriétés d'une répartition locale du flux	88
III.6.1 Ligne de canaux (une dimension)	89
III.6.2 Répartition locale à deux dimensions	92
III.6.3 Influence de la coordination	96
III.7 Conclusion	99
IV Modèle avec une durée finie de blocage	101
IV.1 Introduction à quelques modèles de la théorie des files d'attente	101
IV.1.1 Processus de Markov	102
IV.1.2 Modèle $M/M/1$	103
IV.1.3 Les différentes formules d'Erlang	104
IV.1.4 Modèle $M/M/1/K$	105
IV.1.5 Modèle $M/M/c/K$	106
IV.1.6 Autres modèles	107
IV.2 Définition générale du modèle du pont au temps fini de blocage	107
IV.3 Seuil de particules bloquantes réduit à un, $N = 1$	109
IV.3.1 Observables stationnaires	109
IV.3.2 Approche intégrale pour le cas d'un seul canal, $N_c = 1$	111
IV.3.3 Approche intégrale pour un système à deux canaux, $N_c = 2$	113
IV.3.4 Approche intégrale pour un système avec un nombre de canaux quelconque, N_c	116
IV.4 Modèle à plusieurs canaux avec une distribution exponentielle du temps de blocage	117
IV.4.1 Temps de déblocage distribué exponentiellement	117
IV.4.2 Cas $N = 1$ et $N_c = 1$ revisité par une approche différentielle	119
IV.4.3 Cas $N = 1$ et $N_c = 2$ par une approche différentielle	120
IV.5 Augmentation du seuil de blocage à deux particules, $N = 2$	123
IV.5.1 Valeur du flux stationnaire	123
IV.5.2 Approche intégrale, dépendance en temps	125
IV.5.3 Cas d'un nombre de canaux quelconque	132
IV.6 Cas d'un seuil de particules bloquantes supérieur à deux, $N \geq 2$	133
IV.7 Canaux hétérogènes	135
IV.7.1 Système à deux canaux, $N_c = 2$	135
IV.7.2 Système un nombre quelconque de canaux, N_c	136
IV.8 Conclusion	137

V	Dynamique de particules browniennes circulant dans un microcanal à rétrécissement	139
V.1	Approche microscopique	141
V.2	Simulation numérique	143
V.3	Étude du modèle	144
V.3.1	Réduction des paramètres d'étude	144
V.3.2	Analyse préliminaire	146
V.3.3	Effet de l'obstacle sur les observables	150
V.3.4	Diagramme de phase	154
V.4	Mise en relation de l'approche microscopique avec l'approche stochastique des phénomènes de blocage	155
V.5	Conclusion	157
	Conclusion générale	159
	Liste de publications	161
	Annexes	163
A	Distribution des particules sortant avant le blocage	163
B	Théorie des files d'attente : modèle $M/D/1/N$	163
C	Probabilité que le canal soit fermé, cas d'une durée de vie finie de blocage pour $N = 1$	164
	Bibliographie	167

Introduction

Sommaire

I.1	Phénomènes physiques conduisant au blocage d'un écoulement de particules	1
I.2	Encombrement d'un flux causé par une forte densité	1
I.3	Flux contrôlé par le canal	2
I.3.1	Passage d'ions dans des microcanaux	3
I.3.2	Trafic routier	4
I.3.3	Filtration par un tamis	4
I.4	Quelques approches simples	6
I.4.1	Exclusion et congestion	6
I.4.2	Théorie des files d'attente	7
I.4.3	Exemples de modèles numériques pour les mouvements de panique	9
I.4.4	Plan de la thèse	10

I.1 Phénomènes physiques conduisant au blocage d'un écoulement de particules

Le blocage est un phénomène très répandu que nous retrouvons dans une variété de situations physiques et à des échelles aussi bien macroscopiques que microscopiques, allant du trafic routier ou piétonnier au déplacement de molécules dans un micro-canal, voire dans le cas de la filtration par un tamis. Nous allons commencer par décrire les situations physiques qui entraînent un blocage d'un flux particulière dans un canal ou dans une voie confinée.

I.2 Encombrement d'un flux causé par une forte densité

Le trafic routier est un exemple de la vie de tous les jours. Lorsque sur une route, la densité des voitures devient trop importante alors il y a un embouteillage. Le trafic piétonnier peut se bloquer de manière similaire : lors d'une manifestation quand toutes les personnes avancent dans la même direction on voit apparaître des ralentissements dus à la densité. Les encombrements peuvent aussi être provoqués par la différence de direction de chaque voiture ou personne, par exemple sur un carrefour ou sur une place quand il y a plusieurs flux contre-propageants. Ces blocages sont causés par une forte densité qui entraîne l'encombrement. La limitation d'un flux est perceptible dans les situations physiques où il est nécessaire que chaque élément passe une étape limitante (caisse, rétrécissement, etc.). Le cas de personnes devant régler des achats dans un magasin en passant par une caisse en est un exemple. En

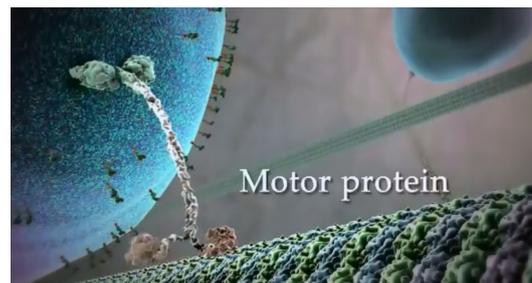


FIGURE I.1 – Image de kinésine transportant une vésicule accrochée à sa queue. Les deux têtes de la protéine se déplacent le long d'un microtubule *Inner life of a cell*.

effet, si trop de monde arrive au même instant alors il y aura de l'attente et le flux va se congestionner. Les files d'attente se remarquent aussi à l'arrivée aux départs des avions au niveau des aéroports, ou encore sur les réseaux internet.

Il y a aussi des phénomènes microscopiques qui semblent similaires [1]. Par exemple les moteurs moléculaires protéiques, comme la kinésine et la dynéine, qui sont les véhicules d'approximativement tous les transports intracellulaires dans les cellules eukaryotes, rencontrent parfois des embouteillages qui se manifestent comme une maladie de l'organisme [2, 3]. Plus précisément, la kinésine se déplace en présence d'ATP (adénosine triphosphate, qui fournit l'énergie nécessaire à la locomotion), son mouvement s'opère au niveau des microtubules, Fig I.1. Elle est composée d'une queue, constituée de chaînes légères emmêlées, ainsi que de deux têtes globulaires, constituées de chaînes lourdes. La queue est la partie qui se fixe sur l'objet à déplacer, tandis que les deux têtes permettent le mouvement le long des microtubules. Ces microtubes peuvent se voir comme une voie, et de la même façon que pour le trafic routier, les protéines y circulent et créent parfois des embouteillages.

I.3 Flux contrôlé par le canal

Nous avons passé en revue des exemples de phénomènes physiques de blocage provoqués par la densité du flux, mais dans un grand nombre de situations physiques, le flux est contrôlé directement par les caractéristiques du canal. Il peut y avoir aussi des blocages à faible densité profondément associés à la capacité limitée du conduit qui transporte les particules. Par exemple, certaines attaques internet se font par saturation d'un serveur pour rendre indisponible un service. C'est ce qu'on appelle les attaques par déni de service, elles peuvent être de plusieurs sortes : soit le réseau physique est sur-encombré par les requêtes et le flux du réseau sature, ce que l'on peut comprendre comme une forte densité, soit le serveur sature bien avant les capacités du réseau et on se trouve dans la situation précédemment indiquée. L'attaque qui rejoint les modèles de colmatage est l'inondation d'un serveur informatique, qui va induire une surcharge empêchant le bon fonctionnement ou même saturer le serveur [4–7]. Dans ces situations, le blocage est causé par un bombardement de données qui arrivent de façon trop précoce sur un serveur. Ce sont les caractéristiques du serveur qui influent sur la rupture du système (la densité des requêtes avant l'attaque peut être faible).

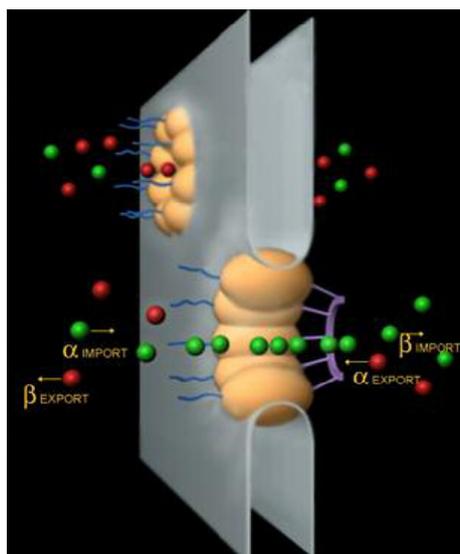


FIGURE I.2 – Image à trois dimensions de Kapon et al. [8] de pores nucléaires, à travers l’enveloppe nucléaire, qui transportent du matériel entre le cytoplasme à gauche et le noyau à droite. Les particules qui entrent sont montrées en vert et les particules qui sortent sont représentées en rouge. Nous observons que le pore ne permet le passage que d’un seul type d’ions en file indienne.

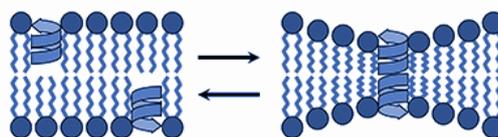


FIGURE I.3 – Création de canaux dans la couche bilipidique par la géométrie elliptique de la gramicidine.

I.3.1 Passage d’ions dans des microcanaux

En biologie, d’autres exemples illustrent des phénomènes de blocage : lorsque des bactéries ou des ions passent à travers des canaux qui ont des formes spécifiques comme des irrégularités. Des canaux qui se forment à travers la membrane d’une cellule permettent le transport d’ions mais sont parfois bloqués en présence de médicaments ou de toxines [9, 10]. En effet à travers les pores de l’enveloppe nucléaire, des flux de macromolécules entrent et sortent du noyau [8]. Il y a un trafic bidirectionnel à travers ces canaux. Les molécules qui sortent et celles qui entrent ne peuvent pas passer au même moment dans un pore. La Fig. I.2 montre des pores nucléaires, les particules rouges décrivent les particules qui entrent dans le noyau et les particules vertes celles qui en sortent. Nous pouvons remarquer que le flux à travers les pores ne se fait que selon une seule file et donc seulement pour un type de particules lorsque le flux est dense. Par moment, la capacité limitée des pores restreint le flux pour un type de molécules. Dans l’article de Kapon [8] il est montré qu’à basse densité le flux alterne très rapidement, et les molécules entrent et sortent de manière alternée sans conduire à un blocage ; à plus forte densité les temps de changement de direction sont croissants ce qui bloque certaines particules. Le principe de fonctionnement de la gramicidine, qui est un mélange d’antibiotiques, dont l’activité consiste en la création de canaux dans la membrane bilipidique, ce qui a pour effet d’augmenter la perméabilité de la bactérie cible [11], Fig. I.3. Ces canaux transportent des ions et de l’eau de manière sélective et sur une seule voie du fait de sa faible épaisseur. Les ions impliqués sont le sodium Na^+ , le potassium K^+ et le césium Cs^+ , ce sont tous les trois des petits ions. Le canal étant limité en capacité, suivant le type

de molécules il ne peut en contenir qu'un nombre spécifique. Par exemple, un seul ion sodium peut être présent au même instant dans le canal, contre deux pour l'ion césium. En plus de la géométrie du canal nous remarquons que la capacité limitée joue un rôle sur le flux.

I.3.2 Trafic routier

Nous pouvons aussi observer des situations où le nombre d'élément sur dans un canal est limité avec la mise en place des distances de sécurité entre les voitures pour la traversée de ponts fragiles ou de tunnels (Mont-Blanc, Fréjus, etc.), même si la densité est faible elles doivent rester espacées. Plus précisément dans le tunnel du Mont Blanc, depuis l'incendie en 1999 causé par un camion frigorifique qui a pris feu, les voitures doivent être suffisamment espacées les unes des autres pour éviter un drame en cas de problème. Les distances de sécurité ont été élargies et doivent être respectées même à l'arrêt, à la fois pour qu'un feu ne s'étende pas, et que les secours ne restent pas immobilisés dans le tunnel. Un autre exemple de trafic routier correspond à la situation d'une petite route à double sens : la capacité de la route est limitante. Lorsque deux voitures arrivent dans des sens opposés il faut que l'une d'elles se range sur le bas-côté pour laisser passer l'autre.

I.3.3 Filtration par un tamis

Un des principaux phénomènes de blocage que l'on retrouve dans tout type de situations physiques, aussi bien dans la vie de tous les jours que dans l'ingénierie ou l'environnement est la filtration. Un flux d'un mélange hétérogène en suspension passe à travers un tamis, une structure poreuse qui permet de filtrer certaines particules. Cela est beaucoup utilisé pour purifier des fluides ou séparer des espèces en microfluidique, nanofluidique ou en chromatographie. La filtration est une technique qui peut être utilisée aussi bien dans les domaines de l'agroalimentaire et la pharmacie que dans l'environnement etc. La structure qui permet de filtrer peut être faite par l'homme, par exemple pour la production de médicaments [12] ou simplement avec une passoire pour écouler l'eau et retenir les pâtes. On la retrouve aussi directement dans la nature, avec par exemple lors de l'accumulation de sédiments fins dans des cours de lit de gravier, du traitement des eaux usées fait grâce à du sable [13] ou de l'aquaculture où l'eau est filtrée par des huîtres ou autres bivalves [14]. La filtration peut se faire de deux façons différentes par ce que l'on appelle le tamisage où le filtre est une membrane perforée qui va retenir toutes les particules qui ont un diamètre supérieur à la maille. Une deuxième méthode peut être employée, l'absorption, qui permet de retenir dans un réseau les objets dont la taille peut être inférieure au diamètre des pores. Dans cette deuxième situation, une intensité forte du flux va conduire à coincer de nombreux objets entre eux et ainsi obstruer une maille. Mais dans les deux situations on peut voir apparaître des blocages avec des objets dont la dimension est inférieure à la taille des pores [15][16][17].

Dans l'article de Roussel et al. [18] où ce phénomène est illustré, l'expérience est faite avec un flux de billes en verre monodisperses (elles ont toutes le même diamètre) qui sont suspendues dans un gel viscoélastique. Cette suspension soumise à la gravité va s'écouler à travers un tamis et la densité de billes n'est pas trop élevée grâce au gel. Nous observons sur la Fig. I.4 que certaines particules sont bloquées entre elles et obstruent une maille. Roussel et al. ont étudié ce phénomène en analysant la fraction de billes retenues en fonction du rapport entre leur diamètre et la taille des mailles ainsi que la densité de billes dans le gel. Ils ont observé une fraction non nulle de billes bloquées, même lorsque le diamètre est inférieur à la

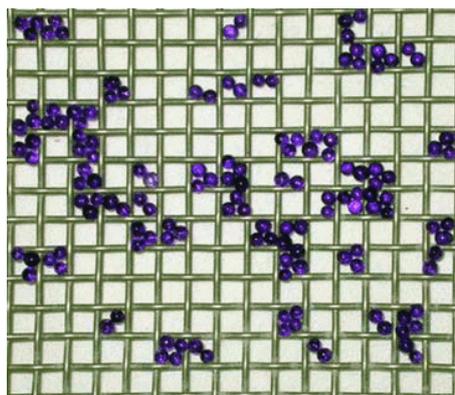


FIGURE I.4 – Vue du dessus de la fin de l'expérience de Roussel *et al.* [18]. Certaines billes en verre, qui ont toutes les même caractéristiques, sont bloquées à travers le tamis.

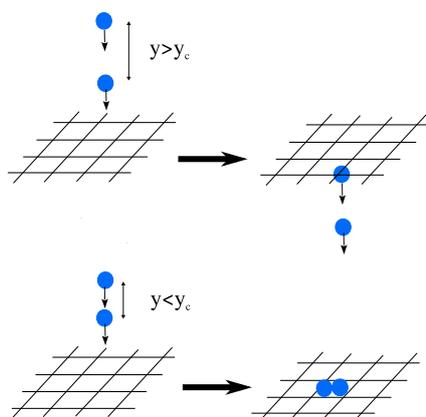


FIGURE I.5 – Modèle de filtration, dans un premier cas les particules arrivent avec un écart suffisant pour passer le tamis, dans le second cas elles arrivent de façon très rapprochée ce qui crée un blocage de la maille et des particules.

tailles des pores, Fig. I.4. Ils ont aussi observé que plus le volume de billes au départ est dense, plus il y a de mailles bloquées. Nous pouvons faire une interprétation simple de ce phénomène, cela en regardant l'écart d'arrivée en temps entre les particules : si deux particules ont un temps de résidence au voisinage de la grille trop long alors elles se coincent mutuellement, par contre si elles arrivent avec une distance les séparant assez grande alors elles passent. La Fig.(I.5) décrit cette interprétation, en effet si deux particules arrivent sur un même pore avec une distance qui les sépare inférieure à une distance critique y_c alors elles bloquent la maille. Si les billes vont toutes à la même vitesse alors nous pouvons définir un temps critique τ qui doit les séparer.

Nous avons vu que le blocage pouvait aussi être induit par la géométrie du canal. Lors d'un mouvement de panique par exemple lorsqu'il y a un incendie dans une pièce, les personnes se ruent vers la sortie, l'accumulation de personnes au voisinage de la sortie conduit à des densités locales élevées et à une structure locale ordonnée. Cette structure est très souvent incompatible avec la géométrie de la sortie et conduit à un blocage [19]. Pour plusieurs types d'objet la présence d'un obstacle en amont de la sortie permet de diminuer ou de supprimer le blocage, par exemple le mouvement collectif des moutons passant une porte dépend de la présence et de la géométrie d'un obstacle placé devant cette porte [20] [21]. En effet, il a été prouvé qu'un obstacle placé devant la porte permet de fluidifier le flux, et ainsi d'avoir un flux de sortie plus important du fait d'un plus faible nombre de blocages. Ce type de colmatage se retrouve aussi dans des écoulements granulaires d'un flux de Hopper à deux dimensions [22] ou dans la matière granulaire à l'intérieur de tubes verticaux étroits [23], par

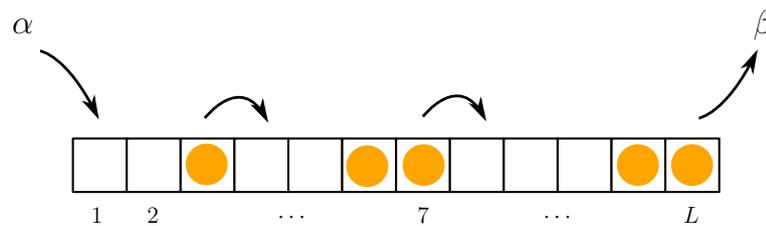


FIGURE I.6 – TASEP des sites $1, 2, \dots, L$. Les disques oranges représentent les particules et les flèches représentent des probabilités de transition. La dynamique se fait par le déplacement aléatoire d'une particule sur le site voisin de droite si celui-ci est vide. Le site 1 permet l'insertion d'une particule quand le site est vide avec un taux α . Le site L permet l'expulsion d'une particule (quand le site est plein) avec un taux β .

exemple un sablier [24]. L'expérience consiste à faire écouler de la matière granulaire le long de tubes étroits qui extraient et réinsèrent la matière avec un ratio constant. Une analyse des avalanches des granules permet de caractériser le blocage.

I.4 Quelques approches simples

I.4.1 Exclusion et congestion

Une première idée pour modéliser les blocages à forte densité est d'associer ce phénomène d'encombrement à des effets géométriques d'exclusion stérique. Ce type d'encombrement a été traité notamment avec le *totally asymmetric simple exclusion process* (TASEP), qui fournit une approche théorique au phénomène de congestion. Ce modèle a été introduit par MacDonald et al. en 1968 [25]. C'est un système hors-équilibre permettant d'étudier des flux de particules. Le modèle le plus simple considéré est un réseau fini de sites régulièrement espacés sur lesquels des particules peuvent sauter aléatoirement d'un site à un site voisin, de la gauche vers la droite [26]. Les particules se déplacent toujours dans le même sens¹ sur le réseau en passant de site en site selon le principe d'exclusion. Une condition d'exclusion s'exprime par le fait qu'une particule ne peut se placer sur un site déjà occupé. Le nombre total de particules dans le système est noté N et la densité moyenne $\bar{\rho} = N/L$, avec L le nombre de sites, Fig.I.6. Pour définir la dynamique il faut choisir un principe de mise à jour, c'est-à-dire l'ordre dans lequel les particules vont avancer². Il en existe plusieurs types dans la littérature : dans l'ordre d'entrée, avec un ordre aléatoire à chaque pas de temps [28, 29], ou encore un ordre aléatoire gardé pendant tout le temps de la simulation [29–31], etc. Une fois la particule choisie, elle passe sur un site adjacent de droite si celui-ci est vide. Les particules entrent sur le site 1 avec une probabilité $\alpha \leq 1$ et sortent par le site L avec une probabilité $\beta \leq 1$. À présent, présentons rapidement les propriétés du TASEP. Il est possible de tracer un diagramme de phase en fonction des paramètres de contrôle, qui sont le flux d'entrée α et le flux de sortie β [33, 34]. La Fig.I.7 montre le diagramme de phase. Il existe trois phases, la phase de faible densité (LD), de haute densité (HD) ainsi qu'une phase de courant maximal

1. Il existe d'autres modèles discrets permettant d'étudier des flux de particules dans les deux sens, comme l'*asymmetric simple exclusion process*, noté ASEP [27].

2. Les particules ne peuvent avancer toutes simultanément pour être sûr d'appliquer la règle d'exclusion.

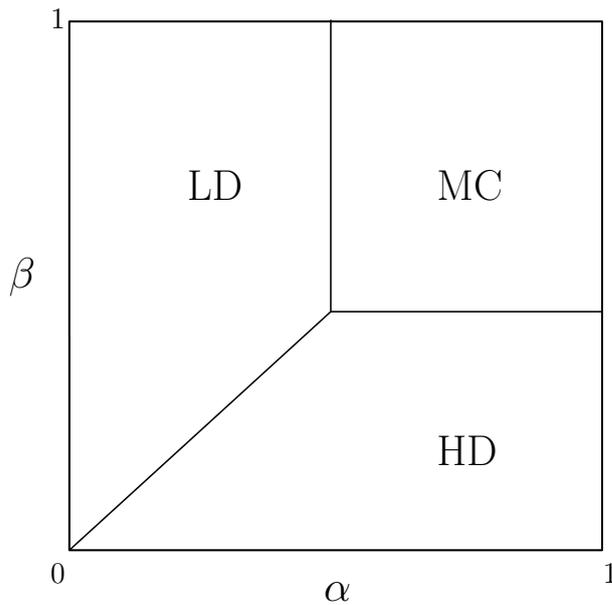


FIGURE I.7 – *Forme générale du diagramme de phase du TASEP en fonction des paramètres d'entrée α et de sortie β (À temps continu, ils deviennent des taux pouvant aller de zéro à l'infini [32]). Trois phases, LD (faible densité), HD (haute densité) et MC (courant maximal) peuvent être distinguées.*

(MC). La phase de faible densité se comprend bien par le fait que le flux d'entrée, α , est très faible devant le flux de sortie, β . La phase de haute densité est le cas où $\beta > \alpha$. Entre ces deux phases il y a une transition de phase du premier ordre, c'est-à-dire qu'il y a une discontinuité de la densité. La dernière phase, celle de courant maximal, se situe dans la région où α et β sont élevés³. Dans cette phase, le facteur limitant n'est pas l'entrée ou la sortie mais la chaîne elle-même. Ces différentes phases montrent la congestion ou non du système étudié. Nous remarquons une transition entre une phase de flux libre et une phase bloquée. Pour les modèles de transport ce phénomène est particulièrement important pour beaucoup d'autres applications que nous avons vues plus tôt dans l'introduction générale.

Ce modèle et ses dérivés donnent une description quantitative de la circulation des voitures et des piétons [26, 35–38]. Des géométries plus complexes ont été étudiées, par exemple pour ajouter les feux de circulation [39, 40]. Certains modèles considèrent deux TASEP avec des flux dans des directions opposées [38, 41–45]. Il existe aussi des applications à l'échelle microscopique de ce modèle, pour étudier le mouvement des ribosomes dans l'ARNm [25]. Pour ce type de phénomène la manière de faire avancer les particules est très souvent continue (cela correspond à la mise à jour que nous verrons plus en détail ultérieurement). La synthèse des protéines a aussi été modélisée en termes de TASEP [46]. Des mouvements collectifs semblables à ceux observés lors de la circulation de voitures sont visibles à presque tous les niveaux dans les systèmes biologiques [1]. Le déplacement des moteurs moléculaires, ainsi que le mécanisme de certains médicaments est très souvent décrit par un modèle sur réseau [47–50].

I.4.2 Théorie des files d'attente

Une théorie mathématique décrit les situations physiques de blocage : la théorie des files d'attente. C'est une approche stochastique pour décrire les situations de gestion des files d'at-

3. Le point de croisement des trois phases est une transition du deuxième ordre. Historiquement, cela représente un modèle hors-équilibre s'il est possible de définir une fonction de large déviation du courant, et généralement la notion de potentiels thermodynamiques.

tente en vue de les améliorer. Ce problème est présent dans différentes situations physiques comme l'attente aux caisses des supermarchés, historiquement la gestion des réseaux téléphoniques, l'optimisation de la gestion des départs et arrivées d'avion, etc. Erlang a introduit le premier modèle pour décrire les échanges téléphoniques à Copenhague [51] et a obtenu des formules analytiques sur la gestion des lignes téléphoniques. En 1909, il prouve que la distribution de Poisson peut être utilisée pour l'arrivée des appels dans les réseaux téléphoniques. Ensuite, en 1917, il introduit ses premières formules, que nous écrirons ultérieurement, pour le temps d'attente et la perte d'appel. Cette approche a été élargie pour être appliquée aux télécommunications [52–54], à l'informatique [55], aux magasins [56], au trafic routier [57], etc.

I.4.2.a Description générale, notations

Trois paramètres qui définissent le système sont introduits : les *clients* (personnes ou objets demandant une requête), les *serveurs* (offre pour cette requête) et le *service* (action qui fait aboutir la requête). Le client peut utiliser un serveur si celui-ci est vide. Lorsque la requête a abouti alors le serveur devient opérationnel pour les clients suivants [58]. Si le client ne trouve pas de serveur vide, alors selon le principe choisi celui-ci attend ou repart. Chaque modèle va être défini par trois caractéristiques : le processus d'arrivée, le mécanisme du service et les caractéristiques de la file d'attente. On utilise pour cela la notation de Kendall [59], $A/B/C/S$ avec A définissant la distribution d'arrivée des clients, B la distribution du temps de service (c'est-à-dire le temps pendant lequel un client reste dans le serveur), S la taille du système (c'est-à-dire le nombre maximal de personnes dans le système, en attente et en train d'être servis) et C le nombre de serveurs. Dans beaucoup de situations les clients arrivent de manière indépendante, et les distributions d'arrivée et de durée dans le serveur sont des processus de Poisson, notées dans ce cas M . Si la distribution est déterministe elle est notée D . Enfin, dans le cas général elle est notée G . Lorsque le modèle est noté avec seulement trois lettres $A/B/C$ le nombre de clients dans la file d'attente peut être infinie.

Nous pouvons compléter la notation avec des caractéristiques supplémentaires :

- Le comportement des clients : ils peuvent être patients et attendre quoi qu'il arrive, ou partir après un certain temps.
- Les caractéristiques du service : les clients peuvent être servis un par un, dans l'ordre d'arrivée, de façon aléatoire, par priorité, etc. Il y a plusieurs possibilités, la plus courante étant le “premier arrivé, premier servi”. Notons que dans les supermarchés les caisses rapides en complément des caisses usuelles permettent d'obtenir un temps d'attente en fonction du nombre d'achats. Dans ce cas, ce n'est pas le “premier arrivé, premier servi”.

Les modèles sont classés selon certains paramètres tels que le nombre de serveurs ou la longueur finie ou infinie de la file d'attente. Introduisant une notation si nous notons λ l'intensité d'arrivée, qui correspond au nombre moyen de clients arrivant par unité de temps et $\mathbb{E}(B)$, le temps moyen de service, alors ce que nous allons nommer “la demande de service” ou encore l'intensité du trafic est exprimée par $\lambda\mathbb{E}(B)$. Nous devons avoir $\lambda\mathbb{E}(B) > 1$ pour qu'il y ait une file d'attente. Nous allons utiliser la notation :

$$\rho = \lambda\mathbb{E}(B) \tag{I.1}$$

Si $\rho < 1$ alors il est appelé taux d'occupation et correspond au nombre moyen de clients

dans le serveur. Dans le cas où il y a plusieurs serveurs le taux d'occupation par serveur est $\rho = \lambda \mathbb{E}(B)/c$, avec c le nombre de serveurs. On définit aussi $p_n(t)$ comme la probabilité qu'au temps t il y ait n clients dans le système.

Mesure de performance. La caractérisation de ces modèles passe par l'obtention des observables suivantes :

- Le nombre moyen de clients dans le système N_{sys} .
- La taille moyenne de la queue, i.e. le nombre de clients dans la file d'attente N_q .
- Le temps moyen total dans le système (temps d'attente et service) W_{sys} .
- La durée d'attente moyenne dans la queue W_q .

Le nombre de clients et la taille moyenne de la queue sont liés très simplement, puisque le nombre de clients dans le système est $N_{sys} = N_q + N_s$, où N_s note le nombre de clients dans le serveur, et le temps dans le système et la durée d'attente sont aussi reliés : $W_{sys} = W_q + T_s$, où T_s note le temps moyen passé dans le serveur, $T_s = \mathbb{E}(B)$. Si nous prenons une distribution d'arrivée avec une intensité λ (le nombre de nouveaux clients qui arrivent par unité de temps) alors nous avons :

$$N_{sys} = \lambda W_{sys} \quad (\text{I.2})$$

$$N_q = \lambda W_q. \quad (\text{I.3})$$

Cela correspond au nombre moyen de clients arrivés pendant le temps d'attente, donc au nombre de clients dans le système (ou dans la queue). Nous pouvons directement calculer le nombre moyen de clients dans le système grâce aux probabilités stationnaires p_n , et donc en déduire les trois autres observables.

$$N_s = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n. \quad (\text{I.4})$$

Cela correspond au nombre de clients dans le système multiplié par la probabilité.

Le premier modèle introduit par Erlang en 1917 correspond au modèle $M/M/1$, c'est-à-dire avec un seul serveur et une infinité de clients. De plus les distributions de sortie et d'entrée des appels sur les lignes téléphoniques étaient prises comme poissonniennes. Certains modèles de cette théorie seront présentés de manière plus détaillée dans le Chapitre 4.

I.4.3 Exemples de modèles numériques pour les mouvements de panique

Des modèles numériques ont été étudiés pour comprendre les phénomènes physiques de blocage induit par la géométrie du canal, mais peu de théories microscopiques sont capables de prédire ce genre de dynamique. Le "*social force model*" est un modèle qui décrit pour des situations simples, le comportement humain dans les endroits où il peut apparaître des phénomènes de congestions tels que dans le métro, les stations de trains, les places et les centres commerciaux. Introduit par Helbing en 1995 [60], ce modèle se limite à la description des probabilités comportementales que nous retrouvons dans un grand groupe d'individus. Helbing a utilisé un modèle microscopique de particules qui interagissent entre elles avec une force répulsive *particule-particule* et *particule-mur*. En plus de ces forces s'ajoute une force de traînée qui agit sur toutes les particules. Une force répulsive dite de "psychologie" considérée comme une forme exponentielle et une seconde force de répulsion expliquent le chevauchement

des particules. Une troisième force comprend une dérive liée au flux du fluide qui dépend à la fois de la vitesse relative des particules et des particules qui se chevauchent.

Un système est défini par N particules de masse m_i et de vitesse désirée v_i^0 dans une certaine direction \vec{e}_i^0 qui peut être décrit comme un vecteur $\vec{F}_i(t)$ interprété comme la force sociale, pour chaque particule i [61][62]. La force de répulsion entre particules est notée f_{ij} et la force de répulsion avec le mur W , f_{iW} . À une dimension l'équation du mouvement s'écrit :

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = m_i \frac{v_i^0(t) e_i^0(t) - v_i(t)}{\tau_i} + \sum_{j(\neq i)} f_{ij} + \sum_W f_{iW}, \quad (\text{I.5})$$

avec v_i la vitesse actuelle de la particule et τ_i son temps caractéristique. Dans le cas d'un seul type de particule et d'une vitesse initiale identique, lorsque les particules sortent par une porte des résultats sur le temps d'échappement en fonction de la vitesse désirée initiale ont été obtenus [63]. En utilisant un rétrécissement, en général pris inférieur à deux fois le diamètre des particules, les auteurs ont observé une variation drastique du flux et des particules fortement comprimées (associées aux personnes blessées pour les modèles de piétons), l'augmentation spectaculaire des dommages humains a été constaté. Lorsque la force de dérive augmente, un phénomène de colmatage apparaît ainsi qu'un nombre de personnes blessées. Dans ce même article une voie avec une zone plus large a été étudiée, les résultats portent principalement sur l'angle de la zone. Helbing, lorsqu'il a introduit le modèle de *social force*, a travaillé sur un système à deux types de particules contre-propageantes [64] dans un canal, sans défauts dans un premier temps. Le résultat qu'il a obtenu est que les particules se rangent en ligne pour optimiser leur vitesse. Lorsque l'on fait passer ces mêmes particules à travers une porte, si une particule passe à travers cette porte alors les particules du même type vont passer plus facilement, et ainsi créer une ligne. Au bout d'un moment le flux est complètement bloqué car la pression des particules allant en sens inverse est trop forte. Cette approche numérique à été très utile pour faire une première observation du phénomène mais les multiples paramètres ne permettent pas une approche théorique ou au moins microscopique. Nous allons dans cette thèse définir une approche microscopique d'encombrement dans un canal rétréci à un endroit.

I.4.4 Plan de la thèse

Ce manuscrit définit des modèles permettant de mettre en évidence les phénomènes de blocage d'un flux particulaire induit par les caractéristiques du canal. Dans les trois premiers chapitres nous allons discuter des canaux dont la capacité est limitée, c'est-à-dire ne pouvant contenir qu'un nombre réduit de particules simultanément. Cela correspond aux phénomènes de blocage qui peuvent apparaître à faible densité par un événement rare, comme nous l'avons présenté plus tôt avec la filtration ou certains médicaments tels que la gramicidine. Pour comprendre ces situations un modèle stochastique continu a été introduit par A.Gabrieli, J.Talbot et P.Viot [65]. Il décrit un canal où des particules entrent selon une probabilité de Poisson et circulent toutes à la même vitesse. Les particules se bloquent lorsqu'il y en a deux simultanément dans le canal. Ce modèle a été complètement résolu et nous avons cherché à le généraliser à un plus grand nombre de phénomènes.

Dans le premier chapitre, nous présenterons le modèle de référence en détail, puis en analyserons une première généralisation. L'étude portera sur un canal où les particules entrent avec une distribution homogène quelconque et inhomogène et où le blocage n'est plus provoqué par deux mais par N particules simultanément dans le canal. Dans le second chapitre, nous

discuterons d'une étude à plusieurs canaux que nous comparerons à un modèle de rupture de fibres en ingénierie. Dans ce modèle nous analyserons les effets collectifs liés à l'augmentation du nombre de canaux.

Ensuite la dernière généralisation portera sur un modèle au temps fini de blocage, c'est-à-dire que lorsqu'un canal se bloque, au bout d'un certain temps les particules qu'il contient sont éjectées et le flux d'entrée reprend. Cela se rapproche de certains modèles de la théorie des files d'attente que nous aurons préalablement décrits. Grâce à cette analogie des approximations seront possibles pour obtenir des résultats.

Dans le dernier chapitre, nous analyserons une approche microscopique où le blocage est relié à la géométrie du canal. De la même manière que pour les simulations d'Helbing les particules qui se déplacent sont soumises à certaines forces, telles qu'une force de dérive, des forces d'interactions, et un bruit gaussien. Les modèles numériques observés dans la littérature pour ce type de phénomène de blocage ont une multitude de paramètres, ce qui ne permet pas d'effectuer une approche de physique statistique du système. Notre idée est de réduire les paramètres du système pour pouvoir observer des changements de comportement et ainsi définir des objets physiques comme un diagramme de phase. Nous étudierons les différents types de blocage du système, ainsi que l'influence de la modification des différents paramètres, à savoir la température, la force d'interaction entre particules, la largeur du rétrécissement, sur la vitesse et le blocage des particules.

Modèle à un canal

Sommaire

II.1	Description du modèle et des observables	13
II.2	Modèle du pont	14
II.2.1	Présentation du modèle	14
II.2.2	Calcul des observables	15
II.3	Généralisation du modèle du pont	17
II.3.1	Solution pour $N = 2$	20
II.3.2	Limite en capacité augmentée, $N = 3$	25
II.3.3	Solution partielle pour $N > 3$	30
II.3.4	Fonction de grandes déviations et fonction de risques	33
II.4	Corrélations	37
II.4.1	Corrélations pour $N = 2$	38
II.4.2	Corrélations pour $N = 3$	42
II.5	Flux inhomogène	46
II.5.1	Observables	46
II.5.2	Intensité discontinue	50
II.5.3	Intensité exponentielle	51
II.5.4	Intensité périodique	52
II.6	Conclusion	55

II.1 Description du modèle et des observables

Dans cette thèse nous étudions des phénomènes de blocage qui sont principalement induits par les caractéristiques du canal. Nous analysons des effets de colmatage où l'accumulation d'éléments dans le système. Nous commençons dans cette partie par étudier un modèle à un seul canal ou voie qui se retrouve obstrué définitivement dès que le nombre de particules arrivant de manière trop rapprochée dans le canal dépasse un certain seuil. C'est un modèle continu où un flux de particules est injecté avec une distribution de probabilité donnée dans un canal dont la capacité est limitée en particules. Lorsqu'il y a plus de N particules au même instant dans le système alors celui-ci se bloque de manière définitive. Chaque particule est introduite dans un canal unidimensionnel de manière aléatoire et se déplace à vitesse constante. Le temps de transit est noté $\tau > 0$, celui-ci est constant et unique pour toutes les particules. Ce sont des modèles où les caractéristiques du milieu influent sur l'avancée des particules. Nous analysons les quantités physiques de ces modèles. La première observable est la probabilité que le système soit ouvert au temps t , appelée probabilité de survie $p_s(t)$. Nous pouvons aisément écrire que $p_s(0) = 1$ et $p_s(\infty) = 0$, puisqu'aucune particule n'est injectée

avant le temps $t = 0$ et que le blocage est définitif. Ce modèle simple peut être résolu par de nombreuses méthodes, mais nous choisissons de décrire le processus à partir des distributions partielles $q(n, t)$ qui définissent la probabilité que le système soit encore ouvert au temps t alors que n particules sont entrées. À partir de ces probabilités partielles nous calculons la probabilité de survie totale du système,

$$p_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n, t). \quad (\text{II.1})$$

La probabilité d'avoir un blocage entre t et $t + dt$ se note $f(t)dt$, avec $f(t)$ la densité de probabilité d'avoir un blocage. Elle est simplement reliée à $p_s(t)$ par :

$$f(t) = -\frac{dp_s(t)}{dt}. \quad (\text{II.2})$$

À partir de ces grandeurs nous obtenons le temps moyen de blocage $\langle t \rangle$:

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} dt f(t)t = \int_0^{\infty} dt p_s(t). \quad (\text{II.3})$$

Nous écrivons la transformée de Laplace de la probabilité de survie comme $\tilde{p}_s(u) = \int_0^{\infty} p_s(t)e^{-ut} dt$. D'où l'équation :

$$\langle t \rangle = \tilde{p}_s(0). \quad (\text{II.4})$$

La variance du temps moyen, $\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2$, est aussi obtenue de façon analogue.

Nous nous intéressons au flux instantané, c'est-à-dire au nombre de particules sortantes par unité de temps, noté $j(t)$. Les autres observables sont liées aux particules sortant avant le blocage. C'est-à-dire la probabilité que m particules soient sorties du canal alors que celui-ci s'est bloqué entre 0 et t , notée $h(m, t)$, et le nombre moyen de particules sortantes sachant que le système s'est bloqué avant le temps t , $\langle m(t) \rangle$. Ce nombre moyen peut se calculer de deux manières différentes, soit à partir de la distribution :

$$\langle m(t) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} mh(m, t), \quad (\text{II.5})$$

soit à partir du flux :

$$\langle m(t) \rangle = \int_0^t dt' j(t'), \quad (\text{II.6})$$

Ce qui correspond au nombre de particules qui ont pu sortir avant le blocage, donc à l'intégrale entre 0 et t du flux.

II.2 Modèle du pont

II.2.1 Présentation du modèle

En 2013 Gabrielli *et al.* [65] ont introduit et résolu un modèle stochastique décrivant ce type de colmatage dans un canal. L'idée originale de ce modèle était d'étudier ce qu'il se passait lorsque deux voitures se croisaient sur une petite route de campagne qui ne permet

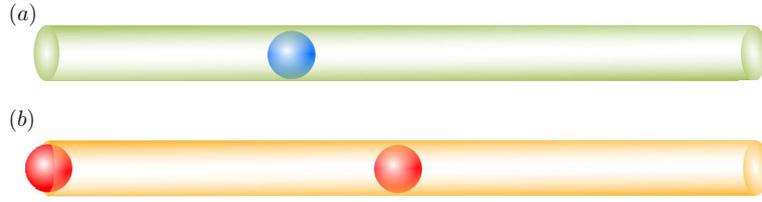


FIGURE II.1 – (a) Les particules entrent aléatoirement par le côté gauche avec une intensité λ et traversent le canal en un temps τ ; il n’y a qu’une particule entrante par unité de temps. (b) Lorsqu’une deuxième particule entre dans le canal alors que la précédente s’y trouve encore le blocage se produit instantanément.

de faire rouler qu’une voiture à la fois. Le nom de modèle du pont vient du fait que l’on peut décrire ce phénomène de manière très simple : en imaginant un pont qui ne peut supporter qu’une seule voiture à la fois, sinon celui-ci se casse et aucune voiture ne va plus pouvoir passer. Dans ce modèle le canal ne peut supporter qu’une seule particule, au-delà le canal se bloque de manière définitive, le seuil de particules bloquantes est donc deux particules que nous notons $N = 2$ (Fig. II.1). C’est à dire que N particules sont entrées avec un intervalle inférieur à τ . De plus nous injectons les particules suivant un processus de Poisson homogène dont la fonction de densité est :

$$\psi(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (\text{II.7})$$

avec λ l’intensité. Cette distribution permet d’obtenir des résultats analytiques simples du fait de sa caractéristique Markovienne où les événements sont indépendants du temps écoulé depuis l’événement précédent. La probabilité, $P_n(t)$ que n particules entrent dans le canal dans l’intervalle $(0, t)$ s’écrit :

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (\text{II.8})$$

Gabrielli et al. ont choisi de résoudre le système à partir de probabilités partielles $q(n, t)$ et nous analysons les équations différentielles de l’évolution en temps de ces probabilités.

II.2.2 Calcul des observables

Nous avons introduit précédemment les probabilités partielles $q(n, t)$, définies comme les probabilités que n particules soient entrées dans le système au temps t et que le canal soit encore ouvert. Cette quantité est reliée à la probabilité de survie du système, $p_s(t)$ par l’Eq. (II.1).

L’évolution des $q(n, t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dq(0, t)}{dt} &= -\lambda q(0, t) \\ \frac{dq(1, t)}{dt} &= \lambda q(0, t) - \lambda q(1, t) \\ \frac{dq(n, t)}{dt} &= \lambda q(n-1, t-\tau) e^{-\lambda \tau} - \lambda q(n, t), \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Lorsqu’il y a zéro particule dans le système à l’instant t , le seul changement d’état possible entre l’instant t et $t + dt$ correspond à l’entrée de la première particule dans le système. La

probabilité qu'une particule entre à l'instant t et donnée par la probabilité λ qu'une particule entre, multipliée par la probabilité qu'il n'y ait aucune particule à être entrée dans le système avant l'instant t donc $q(0, t)$. Le signe est négatif puisque le système passe de l'état où il y a zéro particule à être entrée à une particule. L'évolution de $q(1, t)$ correspond à deux situations possibles, une première où une particule entre dans le canal (c'est une contribution positive), une seconde où une particule entre dans le système alors qu'une particule est déjà entrée précédemment (c'est une contribution négative). Les deux premières probabilités correspondent au processus habituel de Poisson puisqu'il ne peut pas y avoir de blocage, le nombre de particules injectées étant $n < 2$. Pour $n = 0$ la probabilité peut seulement diminuer, il y a juste le terme de perte qui correspond à l'arrivée d'une particule au temps t . Pour $n = 1$, au terme de perte se rajoute un terme de gain ; le cas où une particule arrive au temps t alors qu'aucune particule n'est entrée dans le canal entre 0 et t . Pour $n \geq 2$ il y a un risque de blocage donc le terme de gain est tronqué au seul cas où deux particules ne se retrouvent pas au même moment dans le canal. Heureusement, la probabilité qu'une particule qui arrive au temps t ne bloque pas le pont s'exprime comme la probabilité jointe que $n - 1$ particules soient entrées entre 0 et $t - \tau$ et qu'aucune particule ne s'introduit entre $t - \tau$ et t . Nous observons une contrainte non-Markovienne : l'état au temps t dépend des temps précédents. En effet lorsqu'une particule entre au temps t , pour passer de l'état {"non bloqué", $n-1$ particules à être entrées} à l'état {"non bloqué", n particules à être entrées} il est nécessaire qu'aucune particule n'entre dans l'intervalle de temps $[t - \tau, t]$, la probabilité de cet évènement est $e^{-\lambda\tau}$. Le terme de gain s'écrit donc $\lambda q(n - 1, t - \tau)e^{-\lambda\tau}$.

Pour résoudre ce système d'équations différentielles nous introduisons la fonction génératrice :

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q(n, t). \quad (\text{II.10})$$

En multipliant l'Eq. (II.9) par z^n et en sommant les différents termes, nous obtenons l'équation différentielle :

$$\frac{\partial G(z, t)}{\partial t} = z\lambda e^{-\lambda\tau} G(z, t - \tau) - \lambda G(z, t). \quad (\text{II.11})$$

Pour la résoudre nous introduisons la transformée de Laplace temporelle $\tilde{G}(z, u) = \int_0^{\infty} dt G(z, t)e^{-ut}$. En passant dans l'espace de Laplace l'Eq. (II.11) devient une équation algébrique linéaire où la solution est donnée par :

$$\tilde{G}(z, u) = \frac{1}{\lambda + u} \left(1 + \frac{\lambda z}{\lambda + u - \lambda z e^{-(\lambda+u)\tau}} \right). \quad (\text{II.12})$$

Pour avoir la solution dépendante du temps il faut calculer la transformée de Laplace inverse, soit :

$$G(z, t) = \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \theta(t - n\tau) \frac{(\lambda(t - n\tau))^{n+1}}{(n+1)!} \right) e^{-\lambda t}, \quad (\text{II.13})$$

où $\theta(t)$ est la fonction de Heaviside. La probabilité de survie s'obtient facilement à partir de la fonction génératrice,

$$p_s(t) = G(1, t), \quad (\text{II.14})$$

finalement :

$$p_s(t) = \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \theta(t - n\tau) \frac{(\lambda(t - n\tau))^{n+1}}{(n+1)!} \right) e^{-\lambda t}. \quad (\text{II.15})$$

D'après sa définition donnée par l'Eq. (II.3), le temps moyen de survie est :

$$\langle t \rangle = \tilde{p}_s(0) = \frac{2e^{\lambda\tau} - 1}{\lambda(e^{\lambda\tau} - 1)}. \quad (\text{II.16})$$

Nous trouvons une divergence quand $\lambda\tau \rightarrow 0$:

$$\frac{\langle t \rangle}{\tau} \underset{\lambda\tau \ll 1}{\sim} \frac{2}{(\lambda\tau)^2}. \quad (\text{II.17})$$

Le calcul de la variance donne le résultat suivant :

$$\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 = \frac{2 - 2(1 - \lambda\tau)e^{-\lambda\tau} + e^{-2\lambda\tau}}{\lambda^2(1 - e^{-\lambda\tau})^2}. \quad (\text{II.18})$$

La variance tend vers 0 plus rapidement que la valeur moyenne $\langle t \rangle$ quand $\lambda\tau \gg 1$, cela correspond à une situation où peu de particules quittent le canal. Au contraire lorsque $\lambda\tau \ll 1$ la variance diverge comme $\langle t \rangle^2$. Cela illustre que beaucoup d'évènements, c'est-à-dire d'entrée d'une particule sans blocage, contribuent à la valeur moyenne du temps de blocage.

La probabilité d'avoir un blocage à l'instant t , $f(t)$, présente un maximum pour $t = \tau$. En effet au temps τ la première particule peut sortir du système et la probabilité d'avoir un blocage au temps $t > \tau$ diminue.

À partir du temps moyen de blocage nous pouvons déterminer combien de particules sortent en moyenne avant le blocage, cela correspond au nombre de particules qui entrent dans le canal pendant le temps $\langle t \rangle$ moins les deux particules qui bloquent le système. Le nombre moyen de particules sortant avant le blocage est :

$$\langle m \rangle = \lambda\langle t \rangle - 2 = \frac{1}{e^{\lambda\tau} - 1}, \quad (\text{II.19})$$

ce résultat se retrouve aussi à partir de la distribution des particules qui sortent du canal avant le blocage, App. A. Pour une grande intensité, $\lambda\tau \ll 1$ cette donnée va tendre vers $e^{-\lambda\tau}$ (qui tend vers 0), et pour de faible intensité vers $\frac{1}{\lambda\tau}$.

II.3 Généralisation du modèle du pont

Nous généralisons ce modèle à toute distributions d'entrées homogènes, notée $\psi(s)$, avec s le temps entre deux entrées, ainsi que pour un nombre seuil de particules bloquantes supérieur au cas précédent, $N > 2$ [66].

La méthode utilisée précédemment pour décrire le cas $N = 2$ ne permet pas d'obtenir la solution pour $N > 2$ avec une distribution aléatoire ; nous ne pouvons pas obtenir d'équations d'évolutions simples des $q(n, t)$. Pour résoudre le modèle, nous écrivons directement les $q(n, t)$ sous la forme d'intégrale.

La première particule entre au temps t_0 avec une distribution quelconque $\psi(s)$ ¹. La probabilité qu'il n'y ait aucune particule dans l'intervalle $[0, t]$ se note $1 - \psi_c(t)$, avec $\psi_c(t) = \int_0^t ds\psi(s)$ la distribution cumulative. Nous notons t_i l'intervalle de temps entre l'entrée de la particule i et la particule $i + 1$. Le temps d'entrée de la particule $i + 1$ peut

1. Pour la probabilité de Poisson $\psi(s) = \lambda e^{-\lambda s}$.

donc s'écrire $\sum_{i=0}^i t_i$; et le temps total pour l'entrée de n particules s'écrit $t = \sum_{i=0}^{n-1} t_i + t'$, avec t' l'intervalle entre le temps t et le temps d'entrée de la dernière particule n . Tous les temps t_i sont distribués selon la fonction de densité $\psi(s)$ mais il y a des contraintes sur ces intervalles de temps pour qu'il n'y ait pas de blocage. Le système est non-Markovien puisque le blocage dépend de l'histoire du canal, et non pas uniquement du temps t auquel nous observons le système. Lors de l'entrée d'une particule, l'évolution du système (blocage ou non) va dépendre des particules précédentes. Le temps de transit du canal est conservé et noté toujours τ . Un blocage survient lorsque N particules se trouvent au même instant dans le canal, i.e. N particules sont entrées dans un intervalle de temps inférieur à τ . Nous devons donc avoir $t_i + t_{i+1} \dots t_{i+N-2} < \tau$.

Les observables caractérisant le système physique restent les mêmes, c'est-à-dire la probabilité de survie, $p_s(t)$, le temps moyen de blocage $\langle t \rangle$, le nombre et la distribution des particules sorties avec le blocage $h(m)$, $\langle m \rangle$ ainsi que le flux de sortie instantané, $j(t)$. Nous exprimons la dynamique du système à partir de probabilités partielles $q(n, t)$, soit la probabilité que n particules soient entrées au temps t et que le canal soit encore ouvert. La probabilité de survie totale se calcule avec l'Eq. (II.1).

Les premières probabilités partielles correspondent aux situations physiques où aucun blocage ne peut se produire, donc les probabilités $q(n, t)$ suivent simplement la distribution d'entrée; il n'y a aucune contrainte sur les particules. Pour $0 \leq n \leq N - 1$:

$$\begin{aligned} q(0, t) &= 1 - \psi_c(t), \\ q(n, t) &= \int_0^\infty \left[\prod_{i=0}^{n-1} dt_i \psi(t_i) \right] \int_0^\infty dt' (1 - \psi_c(t')) \delta \left(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t' \right), \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

avec $\delta(t)$ la fonction delta de Dirac. La première équation exprime que $q(0, t)$ est la probabilité complémentaire de la distribution cumulée. Dans la seconde équation, les n premières intégrales correspondent à l'arrivée des n particules, puis l'intégrale sur t' exprime l'absence de particule dans le dernier intervalle, entre $\sum_{i=0}^{n-1} t_i$ et t . La fonction δ exprime la contrainte que le temps d'observation t est égal à la somme des t_i plus t' .

Pour $n > N - 1$ un blocage peut survenir donc nous insérons les contraintes précédemment décrites sur la somme des intervalles consécutifs :

$$\begin{aligned} q(n, t) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[\prod_{i=0}^{n-1} dt_i \psi(t_i) \right] \int_0^\infty dt' (1 - \psi_c(t')) \left[\prod_{j=1}^{n-N+1} \theta \left(\sum_{m=0}^{N-2} t_{j+m} - \tau \right) \right] \\ &\quad \times \delta \left(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t' \right), \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

avec $\theta(x)$ la fonction Heaviside. Les arrivées des n particules dans le canal sont décrites par les premières intégrales avec un temps entre les particules i et $i+1$ de t_i , et l'intégrale sur t' impose qu'il n'y ait aucune particule à arriver entre les temps $\sum_{i=0}^{n-1} t_i$ et t . Il y a des contraintes sur les deux arrivées puisqu'un blocage peut avoir lieu; les fonctions θ imposent que N particules consécutives doivent arriver dans un temps inférieur à τ , $t_i + t_{i+1} \dots t_{i+N-2} < \tau$.

Le flux de sortie instantané peut s'exprimer de manière analogue à la probabilité qu'une particule sorte à l'instant t . Le blocage est irréversible, donc le flux va tendre vers 0, $j(\infty) = 0$, cela pour n'importe quel N . Nous pouvons, de la même façon que pour la probabilité de survie,

diviser le flux en fonctions partiels, $j(n, t)$ soit la probabilité qu'une particule sorte du canal à l'instant t alors que le canal est encore ouvert et que n particules soient entrées dans le canal.

Lorsque $0 \leq n \leq N - 1$, il n'y a pas de blocage possible et les particules sortent au bout d'un temps τ après être entrées :

$$j(n, t) = \int_0^\infty \left[\prod_{i=0}^{n-1} dt_i \psi(t_i) \right] \int_0^\infty dt' (1 - \psi_c(t')) \left[\delta(t' - \tau) + \sum_{k=1}^{n-1} (\delta(t' + \sum_{w=1}^k t_{n-w} - \tau)) \right] \delta \left(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t' \right). \quad (\text{II.22})$$

Pour qu'une particule sorte à l'instant t , il faut qu'il y en ait une qui soit entrée au temps $t - \tau$. Cela peut être la dernière particule ou les $N - 1$ particules entrées ; puisqu'elles peuvent être en même temps dans le canal. Le premier δ impose que la dernière particule à être entrée sorte au temps $t - \tau$, la somme contraint qu'une des $n - 1$ autres particules sortent au temps $t - \tau$.

Pour $n \geq N$:

$$j(n, t) = \int_0^\infty dt' (1 - \psi_c(t')) \int_0^\infty \left[\prod_{i=0}^{n-1} dt_i \psi(t_i) \right] \left[\prod_{j=1}^{n-N+1} \theta \left(\sum_{m=0}^{N-2} t_{j+m} - \tau \right) \right] \delta \left(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t' \right) \left[\delta(t' - \tau) + \sum_{k=1}^{N-2} (\delta(t' + \sum_{w=1}^k t_{n-w} - \tau)) \right]. \quad (\text{II.23})$$

Dans ce cas les contraintes sont plus restrictives car il peut y avoir un blocage. La première ligne impose que les n particules ne se bloquent pas et la deuxième ligne correspond aux différentes situations possibles. La première fonction δ exprime le fait que la dernière particule entrante sorte du canal à l'instant t , donc qu'aucune particule n'est présente dans le système. La somme des fonctions δ correspond à tous les événements possible pour qu'une particule sorte à l'instant t , il peut y avoir jusqu'à $N - 1$ particules dans le canal au même instant sans causer de blocage. Il y a donc $N - 1$ suites d'événements possibles qui amènent à chaque fois la première à être entrée à sortir du canal à l'instant de l'observation. $\delta(t' - \tau)$ représente la possibilité que la dernière particule à être entrée dans le canal sorte à l'instant t , $\delta(t' + t_{n-1} + \tau)$ exprime la situation où l'avant-dernière particule à être entrée sorte, et qu'une autre particule soit donc entrée avant qu'elle ne s'échappe du canal.

Nous calculons aussi la distribution des particules sortantes avant le blocage. Nous notons $h(m, t)$ la probabilité qu'un blocage ait eu lieu entre $(0, t)$ alors que m particules soient sorties. Si m particules sont passées avant le blocage, cela veut dire que $n = m + N$ sont entrées dans le canal. Nous obtenons l'évolution de cette donnée en regardant la probabilité que le blocage ait lieu entre t et $t + dt$.

Pour $m = 0$, aucune particule ne sort avant le blocage et il n'y a aucun blocage avant $m + N - 1$ particules. Pour $m > 0$, donc $n > m + N - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{dh(m, t)}{dt} &= \int_0^\infty \prod_{i=0}^{m+N-1} dt_i \psi(t_i) \prod_{j=1}^m \theta \left(\sum_{p=0}^{N-2} t_{j+p} - \tau \right) \theta \left(\tau - \sum_{p=1}^{N-1} t_{m+p} \right) \\ &\quad \times \delta \left(t - \sum_{i=0}^{m+N-1} t_i \right). \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Cette équation correspond à l'événement où $n = m + N$ particules soient entrées dans le système et que le canal se bloque entre les temps t et $t + dt$. Les m premières particules passent dans le canal sans blocage, cette condition est imposée par le produit des m fonctions $\theta(x)$. Le blocage des dernières particules est décrit par la dernière fonction θ , en effet il faut que $\sum_{p=1}^{N-1} t_{m+p} < \tau$. Le blocage a lieu au temps t donc il n'y pas d'intégrale sur le temps t' , d'où $t = \sum_{i=0}^{m+N-1} t_i$. La probabilité que le canal soit bloqué à l'instant t peut s'écrire à partir de cette distribution $h(t) = \sum_{m=0}^\infty h(m, t)$. Comme la probabilité de survie tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$. De plus on peut montrer qu'il y a bien conservation de la probabilité totale : $\sum_{n \geq 0} [q(n, t) + h(n, t)] = 1$. Toutes les configurations sont représentées dans cette somme, que le canal soit ouvert ou fermé avec n'importe quel nombre de particules entrées.

Pour obtenir la moyenne du nombre de particules sortantes avant le blocage m , on somme la distribution $h(m)$ multiplié par m .

II.3.1 Solution pour $N = 2$

Nous obtenons des expressions exactes des probabilités partielles $q(n, t)$ et donc de l'ensemble des observables pour $N = 2$. Reprenons les Eqs.(II.20) et (II.21) pour $N = 2$. Pour $n < 2$, il ne peut pas y avoir de blocage donc l'Eq.(II.20) n'est pas modifiée. Pour $n \geq 2$ nous trouvons :

$$q(n, t) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[\prod_{i=0}^{n-1} dt_i \psi(t_i) \right] \int_0^\infty dt' (1 - \psi_c(t')) \left[\prod_{j=1}^{n-1} \theta(t_j - \tau) \right] \delta \left(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t' \right). \quad (\text{II.25})$$

Les transformées de Laplace des deux premières fonctions $q(n, t)$ s'obtiennent à partir de l'Eq. (II.25), et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{q}(0, u) &= \frac{1}{u} - \tilde{\psi}_c(u), \\ \tilde{q}(1, u) &= \tilde{\psi}(u) \left(\frac{1}{u} - \tilde{\psi}_c(u) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Pour $n \geq 2$ les fonctions d'Heaviside reviennent à tronquer chaque intégrale sur t et à remplacer la borne inférieure par τ :

$$\tilde{q}(n, u) = \tilde{\psi}(u) \left(\frac{1}{u} - \tilde{\psi}_c(u) \right) \left[\int_\tau^\infty dt e^{-ut} \psi(t) \right]^{n-1}, \quad (\text{II.27})$$

avec $\tilde{\psi}_c(u) = \frac{\tilde{\psi}(u)}{u}$ la transformée de Laplace de la fonction cumulative. Pour obtenir la

transformée de Laplace de la probabilité de survie nous sommons les Eqs. (II.26) et (II.27)

$$\begin{aligned}\tilde{p}_s(u) &= \frac{1 - \tilde{\psi}(u)}{u} + \tilde{\psi}(u) \left(\frac{1 - \tilde{\psi}(u)}{u} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{\psi}(u) \left(\frac{1}{u} - \tilde{\psi}_c(u) \right) \left[\int_{\tau}^{\infty} dt e^{-ut} \psi(t) \right]^{n-1} \\ &= \frac{1 - \tilde{\psi}(u)}{u} \left(1 + \frac{\tilde{\psi}(u)}{1 - \int_{\tau}^{\infty} e^{-ut} \psi(t) dt} \right).\end{aligned}\quad (\text{II.28})$$

Le temps moyen de blocage s'obtient comme :

$$\langle t \rangle = \tilde{p}_s(0) = \hat{t} \left[1 + \frac{1}{\int_0^{\tau} \psi(t) dt} \right], \quad (\text{II.29})$$

avec $\hat{t} = -\tilde{\psi}'(0) = \int_0^{\infty} dt t \psi(t)$, la durée moyenne d'entrée entre deux particules, et $\int_0^{\tau} \psi(t) dt$ la probabilité que deux particules consécutives soient séparées d'un temps inférieur à τ . On peut interpréter cette équation comme le temps moyen entre deux particules, multiplié par le nombre d'évènements avant le blocage (le nombre de fois où le temps entre deux particules a été supérieur à τ) plus le temps d'arrivée de la première particule.

Nous simplifions le flux instantané donné par les équations (II.22) et (II.23), en factorisant les intégrales multiples et en incluant les fonctions θ dans les bornes des intégrales. Nous obtenons :

$$j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt_0 \psi(t_0) \int_0^{\infty} dt' (1 - \psi_c(t')) \left[\int_{\tau}^{\infty} dt \psi(t) \right]^{n-1} \delta \left(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i \right) \delta(t' - \tau). \quad (\text{II.30})$$

La transformée de Laplace s'exprime en fonction des $\tilde{\psi}(u)$ et $\tilde{\psi}_c(u)$:

$$\tilde{j}(u) = \frac{(1 - \psi_c(\tau)) e^{-u\tau} \tilde{\psi}(u)}{1 - \int_{\tau}^{\infty} e^{-ut} \psi(t) dt}. \quad (\text{II.31})$$

De la même manière nous simplifions aussi la distribution des particules sortantes, $h(m, t)$. L'évolution temporelle de cette fonction est donnée par :

$$\frac{dh(m, t)}{dt} = \int_0^{\infty} dt_0 \psi(t_0) \prod_{i=1}^m \int_{\tau}^{\infty} dt_i \psi(t_i) \int_0^{\tau} dt_{m+1} \psi(t_{m+1}) \delta \left(t - \sum_{i=0}^{m+1} t_i \right). \quad (\text{II.32})$$

Et sa transformée de Laplace :

$$\tilde{h}(m, u) = \frac{\tilde{\psi}(u)}{u} \int_0^{\tau} \psi(t') e^{-ut'} dt' \left[\int_{\tau}^{\infty} dt \psi(t) e^{-ut} \right]^m. \quad (\text{II.33})$$

Pour une distribution d'entrée exponentielle $\psi(s) = \lambda e^{-\lambda s}$, nous retrouvons les différentes équations précédemment obtenues, Eqs. (II.15, II.16, II.19). Avec la méthode de la fonction génératrice les transformés de Laplace du flux et $h(m, t)$ deviennent :

$$\tilde{j}(u) = \frac{\lambda e^{-(u+\lambda)\tau}}{u + \lambda(1 - e^{-(u+\lambda)\tau})}. \quad (\text{II.34})$$

$$\tilde{h}(m, u) = \frac{\lambda^{m+2}}{u(\lambda + u)^{m+2}} \left[1 - e^{-(\lambda+u)\tau} \right] e^{-(\lambda+u)m\tau}. \quad (\text{II.35})$$

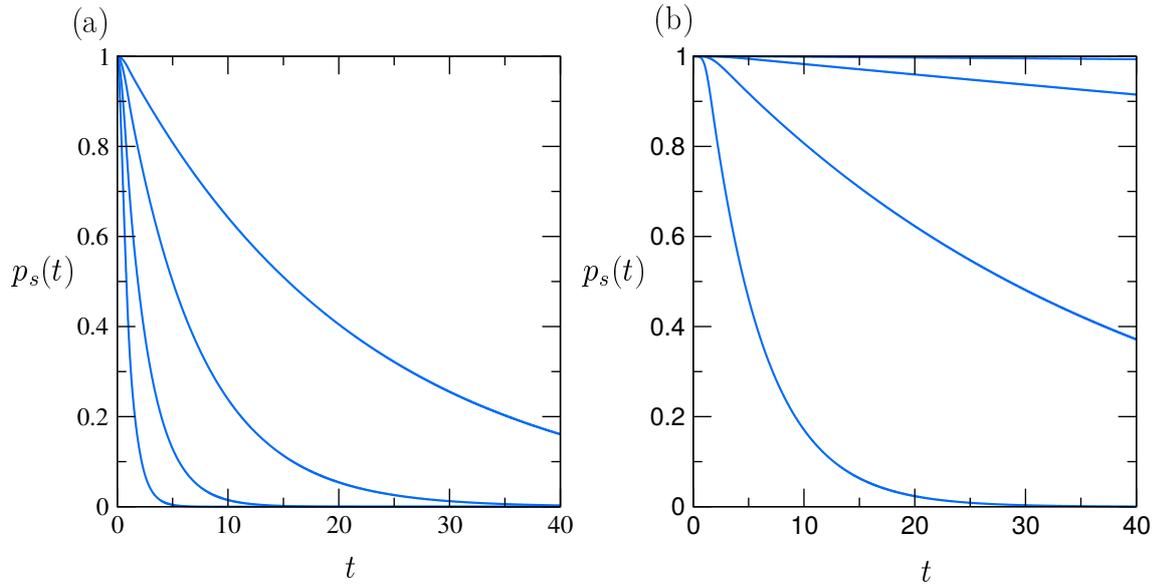


FIGURE II.2 – (a) Probabilité de survie en fonction du temps pour la distribution de Poisson et $\lambda = 2, 1, 0.5, 0.25$ (de bas en haut à droite). (b) Probabilité de survie pour une distribution Γ avec $\alpha = 3$ pour $\lambda = 2, 1, 0.5, 0.25$ (de bas en haut à droite). Pour $\tau = 1$.

À présent nous considérons une autre distribution que celle de Poisson. Par exemple pour la distribution Γ :

$$\psi(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\text{II.36})$$

de paramètre α et où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma d'Euler. Notons que si $\alpha = 1$ nous retrouvons la probabilité de Poisson, avec un maximum atteint à $t = 0$. Lorsqu'on augmente α le maximum se décale vers un temps fini, plus grand que 0². Pour calculer les différentes quantités nous utilisons la transformée de Laplace inverse de la distribution $\tilde{\psi}(u) = \frac{\lambda^\alpha}{(u+\lambda)^\alpha}$ et celle de la fonction cumulative $\psi_c(\tau) = \int_0^\tau \psi(t) dt = \frac{\Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, \lambda\tau)}{\Gamma(\alpha)}$. La Fig. II.2 montre la probabilité de survie pour une distribution exponentielle et une distribution Γ pour $\alpha = 3$, nous observons que cette probabilité décroît plus lentement pour la deuxième distribution, Fig. II.2 (b).

À partir de l'Eq. (II.29) nous obtenons :

$$\langle t \rangle = \frac{\alpha}{\lambda} \left(1 + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, \lambda\tau)} \right), \quad (\text{II.37})$$

où $\Gamma(\alpha)$ et $\gamma(\alpha, \xi)$ sont les fonctions gamma d'Euler et gamma incomplète. La Fig. II.3 montre la concordance entre cette équation et les valeurs numériques. De plus nous observons que le temps moyen de blocage augmente très fortement lorsque l'on augmente α pour une faible valeur de l'intensité $\lambda\tau$. Pour $\lambda\tau \ll 1$ la fonction se simplifie en :

$$\langle t \rangle \underset{\lambda\tau \ll 1}{\sim} \frac{1}{\lambda} \frac{\alpha!}{(\lambda\tau)^\alpha}. \quad (\text{II.38})$$

2. Nous pouvons voir un intérêt pour, par exemple, un trafic de bus dont les horaires d'arrivées sont piquées autour d'une certaine heure.

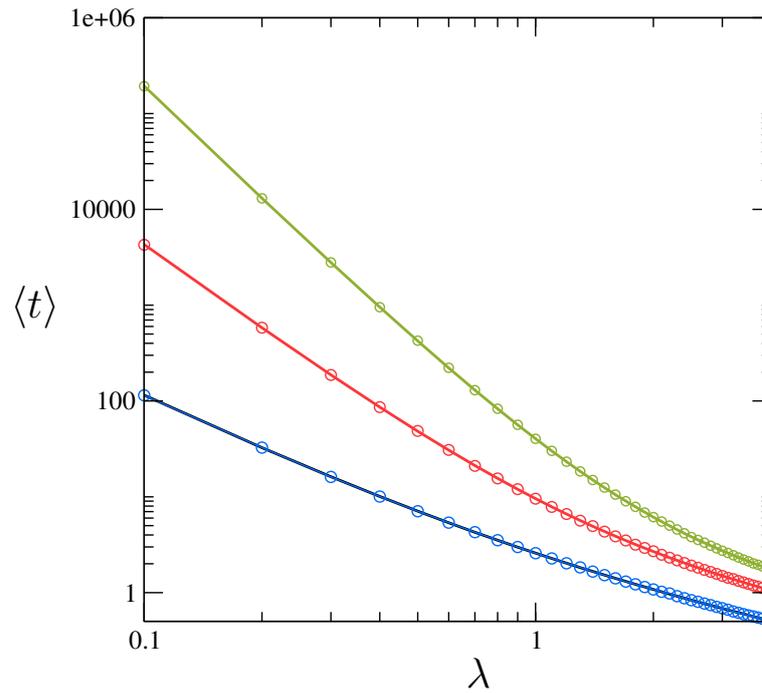


FIGURE II.3 – Temps moyen de blocage $\langle t \rangle$ en fonction de l'intensité λ pour $\tau = 1$ et une distribution Γ avec $\alpha = 2, 3, 4$ (du bas vers le haut), avec en lignes pleines les résultats de l'Eq. (II.37), en cercle les résultats numériques.

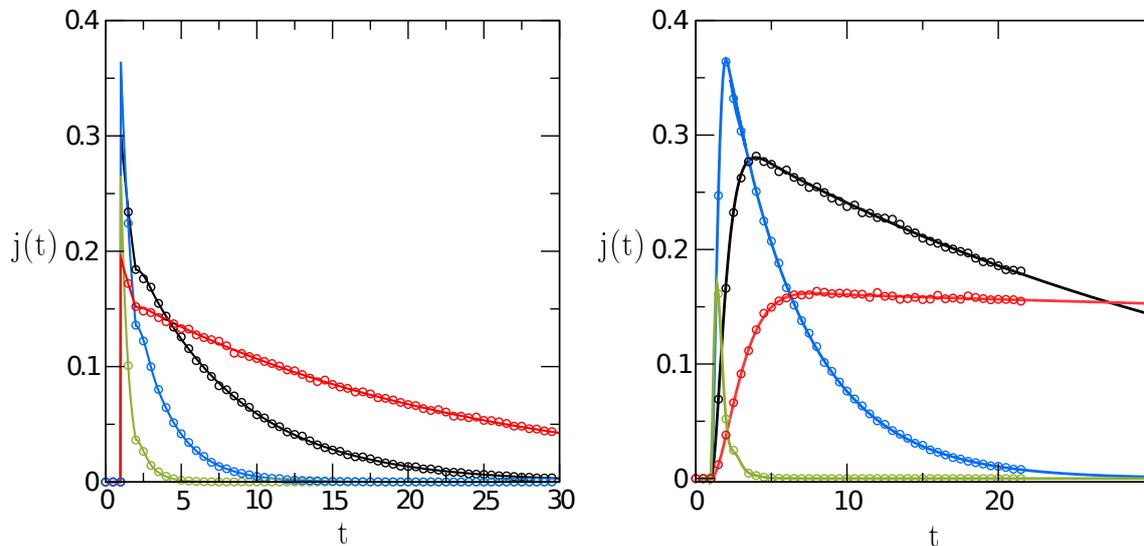


FIGURE II.4 – (a) Flux instantané en fonction du temps pour la distribution de Poisson et $\lambda = 2, 1, 0.5, 0.25$ (de bas en haut à droite). (b) Flux pour une distribution Γ avec $\alpha = 3$ pour $\lambda = 2, 1, 0.5, 0.25$ (de bas en haut à droite). Toutes les courbes sont tracées pour $\tau = 1$. Les cercles montrent dans les deux cas les simulations numériques et les lignes pleines les résultats analytiques, Eq. (II.31).

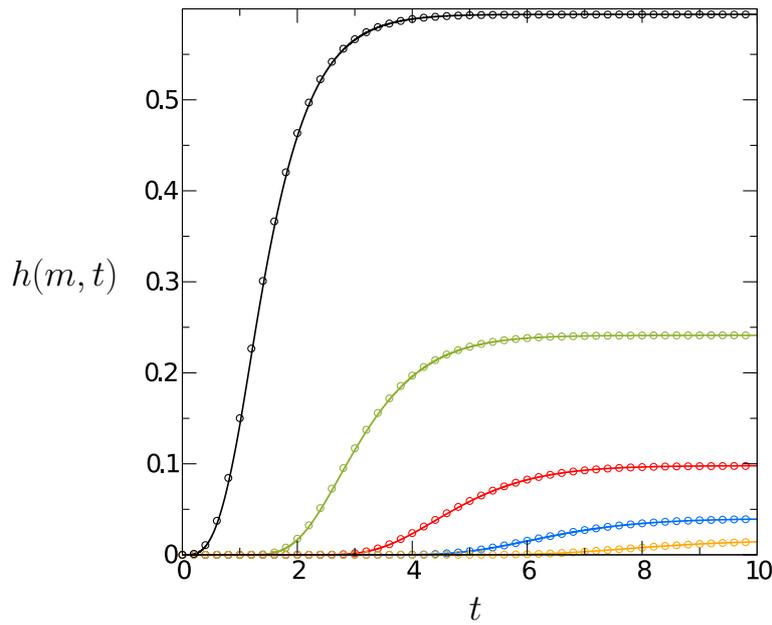


FIGURE II.5 – La probabilité que le canal se bloque entre 0 et t et que m particules soient sortie du canal $h(m, t)$ en fonction du temps pour une distribution Γ avec $\alpha = 2$, $\lambda = 2$ et $m = 0, 1, 2, 3, 4$ (du haut vers le bas). Les lignes pleines montrent les résultats exactes Eq. (II.39) et les cercles les résultats des simulations.

Pour $\alpha = 1$ nous retrouvons les équations correspondantes au processus homogène de Poisson, $\frac{\langle t \rangle}{\tau} = \frac{1}{(\lambda\tau)^2}$. Pour la distribution Γ avec un α entier, il est possible de calculer la valeur explicite de la transformée de Laplace du flux, mais en augmentant α nous obtenons vite une expression complexe à inverser.

La Fig. II.4(b) montre l'évolution en temps du flux instantané pour $\alpha = 3$, et différentes valeurs de λ . Pour $\lambda\tau \leq 1$ il y a un maximum à un temps légèrement plus grand que τ , puis cela décroît rapidement jusqu'à 0. Pour $\lambda\tau = 0.5$ le maximum se situe environ au temps $t_m \approx 3\tau$ et décroît autour de 100τ . Pour $\lambda\tau = 0.25$ le flux croît jusqu'à un quasi-plateau, cela correspond à une situation physique où un large nombre de particules sort avant le blocage définitif. Nous pouvons comparer ce graphique avec celui pour la distribution exponentielle II.4(a), dans les deux cas le flux devient différent de 0 pour $t > \tau$, puisqu'aucune particule ne peut sortir avant. Le maximum pour la distribution de Poisson est toujours à $t = \tau$, tandis que pour une distribution Γ nous remarquons que le maximum peut être à $t > \tau$. Pour $\alpha = 2$ nous calculons la distribution de sortie et nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{h}(m, u) = & \frac{1}{u(u + \lambda)^{2(m+2)}} (e^{-(u+\lambda)\tau m} \lambda^{2(m+2)} \\ & \times (1 + (u + \lambda)\tau)^m (1 - e^{-\tau(u+\lambda)} (1 + (u + \lambda)\tau))). \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

La Fig. II.5 montre l'évolution temporelle de $h(m, t)$ en fonction du temps avec $m = 0, 1, 2$ pour $\alpha = 2$ et $\lambda = 2$. Comme prévu, $h(m, t) = 0$ pour $t < m\tau$, ce qui s'explique par le fait que le temps minimum pour avoir une configuration où m particules sortent du canal doit être au moins supérieur à $m\tau$; ce qui est logique puisqu'il faut que les particules soient séparées au minimum par un temps τ . Nous remarquons que le temps de transition augmente lorsque

m augmente, les courbes tendent plus progressivement vers leur valeur stationnaire.

II.3.2 Limite en capacité augmentée, $N = 3$

Nous étudions maintenant l'augmentation du seuil de blocage pour que la présence de trois particules se trouvant simultanément dans le canal bloque le système, $N = 3$. Il n'est pas possible d'exprimer la dynamique sous la forme d'équations différentielles sur les probabilités partielles car la contrainte de blocage implique une séquence de trois particules consécutives.

À partir des Eqs.(II.20) et (II.21) nous obtenons les probabilités partielles. Les trois premières vont correspondre à un processus homogène, puisque pour $n < 3$ il ne peut pas y avoir de blocage. Ces équations sont les mêmes quel que soit N et nous trouvons donc la transformée de Laplace comme dans le cas $N = 2$, Eq. (II.26). L'équation pour $n = 2$ s'écrit :

$$\tilde{q}(2, u) = \left(\frac{1}{u} - \tilde{\psi}_c(u)\right)\tilde{\psi}(u)^2. \quad (\text{II.40})$$

Pour $n > 2$, l'Eq. (II.21) devient :

$$q(n, t) = \int_0^\infty dt' (1 - \psi_c(t')) \int_0^\infty \prod_{i=0}^{n-1} dt_i \psi(t_i) \times \prod_{j=1}^{n-2} \theta(t_j + t_{j+1} - \tau) \delta\left(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t'\right). \quad (\text{II.41})$$

La fonction θ impose ici la contrainte que trois particules doivent être espacées d'au moins un temps τ , donc que la somme de deux intervalles consécutifs doit être supérieure à τ . La transformée de Laplace de l'Eq. (II.41) est :

$$\tilde{q}(n, u) = \frac{\tilde{\psi}(u)(1 - \tilde{\psi}(u))}{u} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n-1} dt_i \psi(t_i) e^{-ut_i} \prod_{j=1}^{n-2} \theta(t_j + t_{j+1} - \tau), \quad (\text{II.42})$$

Nous pouvons réécrire cette équation avec une fonction auxiliaire $r(n, t, u)$ donné par :

$$r(n-1, t, u) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n-2} dt_i \psi(t_i) e^{-ut_i} \prod_{j=1}^{n-2} \theta(t_j + t_{j+1} - \tau), \quad (\text{II.43})$$

où $t_{n-1} = t$. Nous pouvons ainsi réécrire l'Eq. (II.42) comme :

$$\tilde{q}(n, u) = \frac{\tilde{\psi}(u)(1 - \tilde{\psi}(u))}{u} \int_0^\infty dt \psi(t) e^{-ut} r(n-1, t, u), \quad (\text{II.44})$$

Une relation de récurrence sous la forme d'une équation intégrale peut être obtenue pour la fonction auxiliaire :

$$r(n, t, u) = \int_{\max(\tau-t, 0)}^\infty dt' \psi(t') e^{-ut'} r(n-1, t', u), \quad (\text{II.45})$$

avec $r(1, t, u) = 1$. Nous introduisons une fonction génératrice, pour la fonction auxiliaire, $G_r(z, t, u)$ définie par

$$G_r(z, t, u) = \sum_{n=1} z^{n-1} r(n, t, u). \quad (\text{II.46})$$

Nous sommes l'Eq. (II.45) en multipliant chaque membre par z^n pour obtenir :

$$G_r(z, t, u) = 1 + z \int_{\max(\tau-t, 0)}^\infty dt' \psi(t') e^{-ut'} G_r(z, t', u). \quad (\text{II.47})$$

Pour $t > \tau$ la fonction génératrice est constante, $G_r(z, t, u) = G_r(z, \tau, u)$. Nous séparons l'intégrale en deux parties, une constante $t > \tau$ et une dépendante du temps $t < \tau$. Nous voulons exprimer l'évolution temporelle de $G_r(z, t, u)$ pour $t < \tau$. Pour cela nous prenons la deuxième dérivée partielle de $G_r(z, t, u)$ en fonction de t , une équation différentielle est obtenue,

$$\frac{\partial^2 G_r(z, t, u)}{\partial t^2} = \left(-\frac{\dot{\psi}(\tau-t)}{\psi(\tau-t)} + u \right) \frac{\partial G_r(z, t, u)}{\partial t} - z^2 \psi(\tau-t) \psi(t) e^{-u\tau} G_r(z, t), \quad (\text{II.48})$$

dont les conditions périodiques sont

$$\begin{cases} G_r(z, 0, u) &= 1 + z G_r(z, \tau, u) \int_{\tau}^{\infty} dt' \psi(t') e^{-ut'}, \\ \left. \frac{\partial G_r(z, t, u)}{\partial t} \right|_{t=\tau} &= z \psi(0) G_r(z, 0, u), \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

(obtenues grâce à Eq. (II.47)). Cette équation ne peut être résolue analytiquement dans le cas général. Pour une distribution de Poisson le rapport $\frac{\dot{\psi}(\tau-t)}{\psi(\tau-t)}$ est indépendant du temps d'observation, nous obtenons donc la forme explicite de la fonction génératrice. En considérant $\psi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, l'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 G_r(z, t, u)}{\partial t^2} = (\lambda + u) \frac{\partial G_r(z, t, u)}{\partial t} - (z\lambda)^2 e^{-(\lambda+u)\tau} G_r(z, t, u), \quad (\text{II.50})$$

avec les conditions aux limites données par Eq. (II.49), $\psi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ et $\psi(0) = \lambda$. On résout l'équation caractéristique de Eq. (II.50),

$$s_{1,2}(z, u) = \frac{(\lambda + u) \pm \sqrt{(\lambda + u)^2 - 4(z\lambda)^2 e^{-(\lambda+u)\tau}}}{2}, \quad (\text{II.51})$$

et la solution de la fonction génératrice est donnée pour $0 < t \leq \tau$ par $G_r(z, t, u) = A(z, u) e^{s_1(z, u)t} + B(z, u) e^{s_2(z, u)t}$ avec $A(z, u)$ et $B(z, u)$ déterminées par les conditions aux limites. En utilisant la fonction génératrice $G_r(z, t, u)$, nous déterminons toutes les transformées de Laplace $\tilde{q}(n, u)$:

$$\tilde{q}(n, u) = \frac{\lambda}{(\lambda + u)^2} \int_0^{\infty} dt \lambda e^{-(\lambda+u)t} \left. \frac{\partial^{n-2} G_r(z, t, u)}{\partial z^{n-2}} \right|_{z=0}. \quad (\text{II.52})$$

$$\begin{aligned} q(3, t) &= \theta(t - \tau) \lambda^3 e^{-\lambda t} \left[\frac{1}{2} \tau (t - \tau)^2 + \frac{1}{6} (t - \tau)^3 \right], \\ q(4, t) &= \lambda^4 e^{-\lambda t} \left[\theta(t - \tau) \frac{(t - \tau)^4}{12} - \theta(t - 2\tau) \frac{(t - 2\tau)^4}{24} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Pour obtenir la probabilité de survie, $p_s(t)$, nous calculons, tout d'abord, les transformées de Laplace. Grâce aux Eqs. (II.46) et (II.44), dans le cas général nous écrivons

$$\tilde{p}_s(u) = \tilde{q}(0, u) + \tilde{q}(1, u) + \frac{\psi(u)(1 - \tilde{\psi}(u))}{u} \int_0^{\infty} dt \psi(t) e^{-ut} G_r(1, t, u). \quad (\text{II.54})$$

Pour la distribution de Poisson cette probabilité est donnée par

$$\tilde{p}_s(u) = \frac{\lambda}{(\lambda + u)^2} \left[1 + \frac{u}{\lambda} + A(1, u) \left[1 + \frac{\lambda}{s_2} (1 - e^{-s_2 \tau}) \right] + B(1, u) \left[1 + \frac{\lambda}{s_1} (1 - e^{-s_1 \tau}) \right] \right], \quad (\text{II.55})$$

où

$$\begin{aligned} A(1, u) &= \frac{\lambda e^{s_2 \tau} (s_2 - \lambda)(s_1 + s_2)}{\Delta}, \\ B(1, u) &= \frac{\lambda e^{s_1 \tau} (s_1 - \lambda)(s_1 + s_2)}{\Delta}, \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

avec

$$\Delta = e^{(s_1 + s_2 \tau)} s_1 s_2 (s_1 - s_2) + \lambda (s_2^2 e^{s_2 \tau} - s_1^2 e^{s_1 \tau}). \quad (\text{II.57})$$

À partir de la fonction génératrice nous obtenons également le temps moyen de blocage $\langle t \rangle$. D'après l'Eq. (II.16) nous calculons cette grandeur grâce à la transformée de Laplace de la probabilité de survie pour $u = 0$, $\tilde{p}(0)$. Ainsi :

$$\langle t \rangle = \tilde{p}(0) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty dt e^{\lambda t} G(1, t). \quad (\text{II.58})$$

Nous prenons $g = \sqrt{|1 - 4e^{-\lambda\tau}|}$ et $\nu = \frac{\lambda\tau}{2}$ puis après quelques calculs nous obtenons, pour $\lambda\tau > 2 \ln(2)$:

$$\lambda \langle t \rangle = \frac{2e^\nu \sinh(\nu) + ge^{\lambda\tau}}{-g - 2 \sinh(\nu)e^{-\nu} + e^\nu (\sinh(\nu) + g \cosh(\nu))} + 1. \quad (\text{II.59})$$

et pour $\lambda\tau < 2 \ln(2)$

$$\lambda \langle t \rangle = \frac{2e^\nu \sin(\nu) + ge^{\lambda\tau}}{-g - 2 \sin(\nu)e^{-\nu} + e^\nu (\sin(\nu) + g \cos(\nu))} + 1. \quad (\text{II.60})$$

Nous observons une divergence lorsque $\lambda\tau$ tend vers 0, au premier ordre en $\lambda\tau$ l'Eq. (II.60) devient

$$\langle t \rangle \underset{\lambda\tau \ll 1}{\sim} \frac{2\tau}{(\lambda\tau)^3}. \quad (\text{II.61})$$

Nous remarquons qu'il y a un facteur $2/(\lambda\tau)$ par rapport au temps moyen pour $N = 2$ avec une distribution de Poisson. Cette approximation est justifiée pour de faibles valeurs de λ , donc lorsque $1/\lambda \gg 1$. Le temps moyen de blocage entre $N = 2$ et $N = 3$ a fortement augmenté. Par exemple pour une intensité de 0.1 le temps moyen de blocage passe de $\langle t \rangle \approx 100$ pour $N = 2$ à $\langle t \rangle = 2000$ pour $N = 3$; il y a un facteur 20 pour $\lambda = 0.1$ entre les deux temps de blocage. Par contre le seuil $N = 2$ avec une distribution γ si nous prenons $\alpha = 2$, nous obtenons le même résultat que pour $N = 3$ pour de faible intensité. Nous supposons que, pour de faibles intensités, le résultat $N = 2$ avec une distribution γ est analogue au résultat pour tout N si nous prenons $\alpha = N$.

L'équation du flux instantané moyen, l'Eq. (II.23), peut être simplifiée pour $N = 3$:

$$\begin{aligned} j(n, t) &= \int_0^\infty dt' (1 - \psi_c(t')) \int_0^\infty \left[\prod_{i=0}^{n-1} dt_i \psi(t_i) \right] \left[\prod_{j=1}^{n-2} \theta(t_j + t_{j+1} - \tau) \right] \\ &\quad \delta \left(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t' \right) [\delta(t' - \tau) + (\delta(t' + t_{n-1} - \tau))]. \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

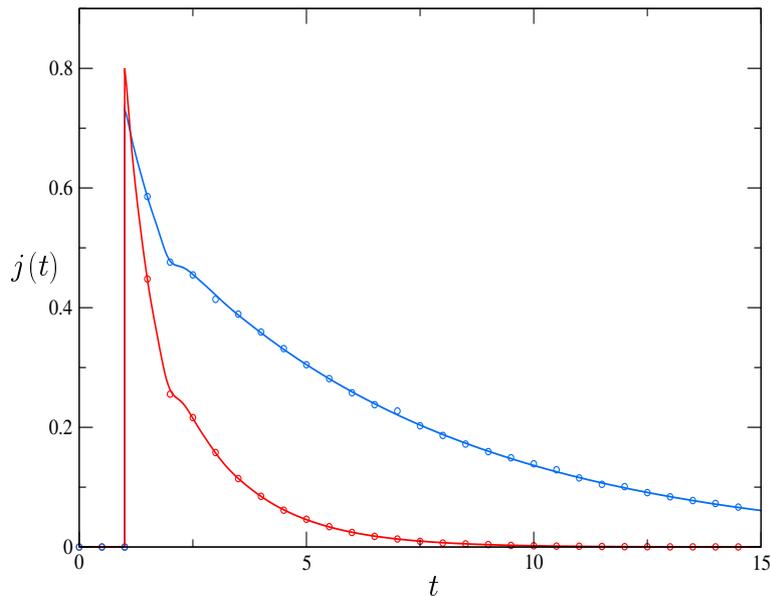


FIGURE II.6 – Flux moyen $j(t)$ pour $N = 3$ en fonction du temps pour une distribution de Poisson d'intensité $\lambda = 1, 2$ (de haut en bas respectivement) et $\tau = 1$. Les lignes pleines montrent l'expression exacte (la transformée de Laplace inverse de l'Eq. (II.65)) et les cercles montrent les résultats numériques.

En utilisant la fonction auxiliaire $r(n, t, u)$, l'Eq. (II.43) et l'équation précédente, (l'Eq. (II.62)), nous trouvons la transformée de Laplace $\tilde{j}(n, u)$ pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{j}(n, u) = & e^{-u\tau} \tilde{\psi}(u) \left((1 - \psi_c(\tau)) \int_0^\infty dt e^{-ut} \psi(t) r(n-1, t, u) \right. \\ & \left. + \int_0^\tau dt \psi(t) (1 - \psi_c(\tau-t)) r(n-1, t, u) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Nous sommions sur tous les n , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{j}(u) = & e^{-u\tau} \tilde{\psi}(u) (1 - \psi_c(\tau)) \int_0^\infty dt e^{-ut} \psi(t) G_r(1, t, u) \\ & + e^{-u\tau} \tilde{\psi}(u) \int_0^\tau dt \psi(t) (1 - \psi_c(\tau-t)) G_r(1, t, u) + \tilde{j}(1, u). \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

En utilisant l'Eq. (II.49) et la fonction génératrice $G_r(1, t, u)$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \tilde{j}(u) = & \frac{\lambda e^{-(u+\lambda)\tau}}{\lambda + u} \left[A(1, u) \left(e^{s_1\tau} \left(1 + \frac{\lambda}{s_1} \right) - \frac{\lambda}{s_1} \right) \right. \\ & \left. + B(1, u) \left(e^{s_2\tau} \left(1 + \frac{\lambda}{s_2} \right) - \frac{\lambda}{s_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

où $A(1, u)$ et $B(1, u)$ sont donnés par l'Eq. (II.56).

Il est logique que le flux soit nul pour $t < \tau$, puisqu'aucune particule ne peut être sortie du canal avant un temps τ . Cela est montré dans l'équation par la factorisation du terme $e^{-u\tau}$; qui donne une fonction $\theta(t)$ dans l'espace réel.

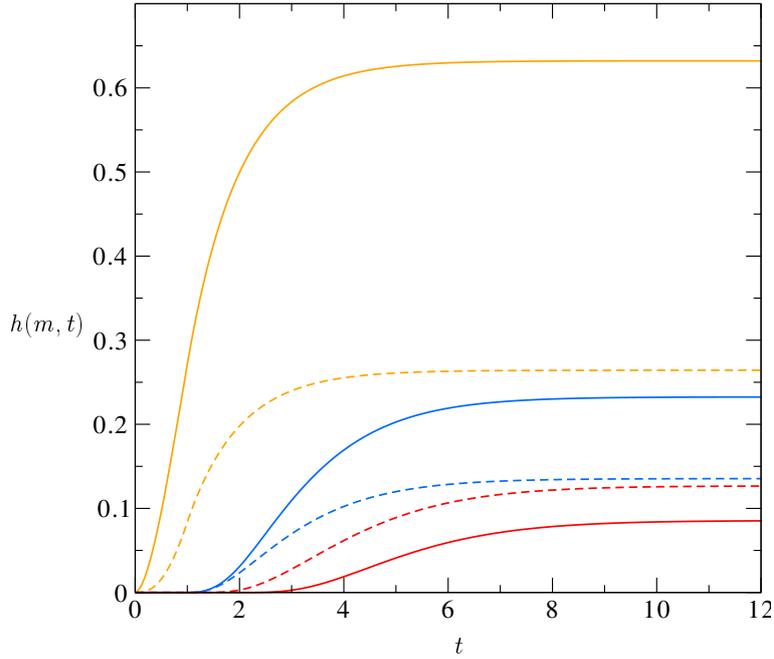


FIGURE II.7 – La probabilité que le canal soit fermé au temps t et que m particules aient pu passer, $h(m, t)$, en fonction du temps, pour une distribution de Poisson, pour $m = 0, 1, 2$ (de haut en bas), avec $\lambda = 1$ et $\tau = 1$. Les courbes pleines correspondent au seuil $N = 2$, et les lignes pointillés au seuil $N = 3$.

Il y a une concordance entre les résultats numériques et analytiques du flux moyen $j(t)$, Fig. II.6. Nous observons sur cette figure une discontinuité pour $t = \tau$ où le flux est maximal, $j(\tau) = \lambda$. Nous pouvons calculer cette valeur maximale du flux :

$$j(\tau) = \lambda(1 + \lambda\tau)e^{-\lambda\tau}. \quad (\text{II.66})$$

Cette équation correspond à l'évènement où une particule sort entre un temps t et $t + dt$, alors que 0 ou 1 particule est présente dans le canal. À $t = 2\tau$ il y a un saut qui correspond à la structure non-analytique de la solution. Au temps long, le flux décroît jusqu'à 0, avec une décroissance qui devient plus lente lorsque λ diminue. La fonction $h(m, t)$ peut aussi être écrite à partir de la fonction auxiliaire $r(n, t, u)$. Pour $m > 0$ nous donnons l'évolution en temps de la fonction $h(m, t)$:

$$\frac{dh(m, t)}{dt} = \int_0^\infty \prod_{i=0}^{m+2} dt_i \psi(t_i) \prod_{j=1}^m \theta(t_j + t_{j+1} - \tau) \theta(\tau - t_{m+1} - t_{m+2}) \delta(t - \sum_{i=0}^{m+2} t_i). \quad (\text{II.67})$$

Nous prenons la transformée de Laplace

$$\tilde{h}(m, u) = \frac{\tilde{\psi}(u)}{u} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{m+2} dt_i \psi(t_i) e^{-ut_i} \prod_{j=1}^m \theta(t_j + t_{j+1} - \tau) \theta(\tau - t_{m+1} - t_{m+2}), \quad (\text{II.68})$$

que nous pouvons écrire à partir de la fonction auxiliaire

$$\tilde{h}(m, u) = \frac{\tilde{\psi}(u)}{u} \int_0^\tau dt \psi(t) e^{-ut} \int_0^{\tau-t} dt' \psi(t') e^{-ut'} r(m+1, t', u). \quad (\text{II.69})$$

La figure II.7 montre l'évolution en temps de la probabilité $h(m, t)$ pour une distribution de Poisson avec $\lambda = 1$. La probabilité que 0 ou 1 particule soit sortie du canal lorsqu'un blocage survient est plus faible pour $N = 3$ que pour $N = 2$. Pour $m \geq 2$ les ordres se renversent, les probabilités sont supérieures pour $N = 3$ en comparaison avec $N = 2$. La probabilité $m = 0$ est supérieure pour tout N , cependant lorsque N augmente il y a plus de particules qui sortent avant le blocage.

II.3.3 Solution partielle pour $N > 3$

Lorsque l'on augmente N la solution devient de plus en plus complexe. Comme pour $N = 3$ nous introduisons une fonction auxiliaire mais celle-ci dépend de $N - 2$ variables de temps. Pour $N = 3$, nous avons une relation de récurrence sur la fonction auxiliaire simple. Mais nous ne pourrions pas pour $N > 3$ obtenir une équation différentielle ordinaire pour la fonction génératrice. Nous pouvons par contre proposer une approximation de la dynamique pour arriver à des résultats. Nous écrivons les équations d'évolution des $q(n, t)$, comme pour le modèle du pont [65], dans le cas général, i.e. lorsque le blocage est induit par N particules dans le canal. Pour simplifier, nous allons prendre une distribution de Poisson pour les particules entrantes. Pour les $N - 2$ premières équations il n'y a pas de blocage possible, donc les équations différentielles correspondent à un processus de Poisson :

$$\frac{dq(0, t)}{dt} = -\lambda q(0, t), \quad (\text{II.70})$$

et

$$\frac{dq(n, t)}{dt} = -\lambda q(n, t) + \lambda q(n - 1, t), \quad 1 \leq n \leq N - 1. \quad (\text{II.71})$$

Pour $n > N - 1$, il y a des contraintes entre les particules, mais pour $n = N$, l'évolution en temps est simplement donnée par

$$\frac{dq(N, t)}{dt} = -\lambda q(N, t) + \lambda \sum_{s=0}^{N-2} \frac{(\lambda \tau)^s}{s!} e^{-\lambda \tau} q(N - 1 - s, t - \tau). \quad (\text{II.72})$$

Le terme de gain est modifié pour qu'il n'y ait pas de blocage. Il y a $N - 1$ équations qui prennent chacune en compte les différents cas où lorsqu'une particule entre il peut y avoir de 0 à $N - 2$ particules présentes dans le canal, cela correspond à la probabilité $\frac{(\lambda \tau)^s}{s!} e^{-\lambda \tau}$. Nous multiplions cela par la probabilité que $N - s - 1$ particules soient sorties du canal. Pour $n > N$ les équations dépendent de l'histoire des n particules déjà entrées, il faudrait donc écrire toutes les possibilités des chaînes d'événements possibles pour avoir la valeur exacte. Nous pouvons les écrire de façon approchée :

$$\frac{dq(n, t)}{dt} = -\lambda q(n, t) + \lambda q(n - 1, t - \tau) e^{-\lambda \tau} + \lambda \sum_{s=1}^{N-2} \int_0^\tau dt_1 K_s(t_1) e^{-\lambda \tau} q(n - 1 - s, t - \tau - t_1). \quad (\text{II.73})$$

où nous introduisons une fonction noyau $K_s(t)$. Cela correspond à la probabilité qu'il n'y ai pas de blocage sur Cette fonction est compliquée mais nous pouvons écrire deux formes simples qui dépendent seulement du temps. Pour cela nous considérons deux situations physiques différentes. La première considère que s particules, avec s compris entre 0 et $N - 2$, peuvent être dans le canal, et que les autres particules sont entrées entre un temps de 0 à $t - \tau$.

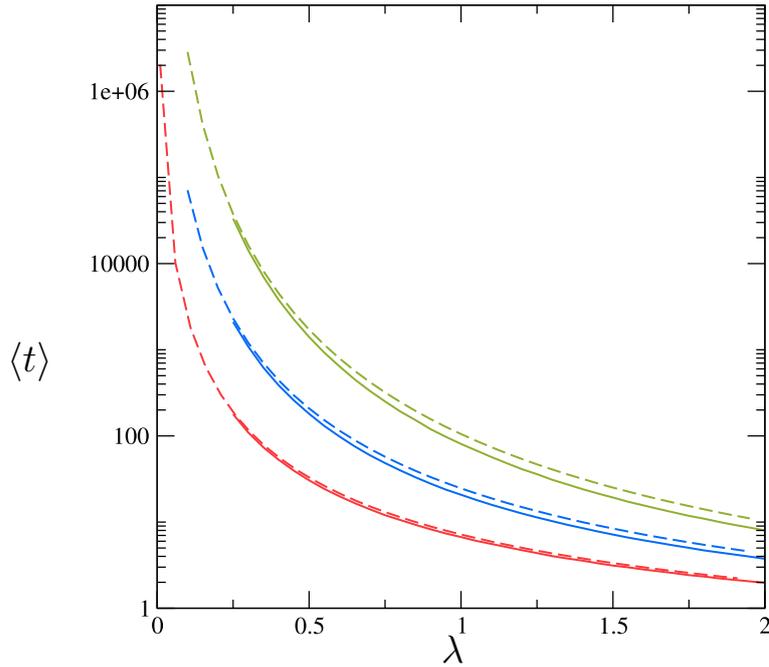


FIGURE II.8 – Temps moyen de blocage pour $\tau = 1$ et $N = 3, 4, 5$ (de bas en haut), les lignes montrent les résultats numériques et les lignes pointillés les résultats avec la fonction noyau surestimant les valeurs, Eq. (II.75)

Dans ce cas le noyau est donné par $K_s(t) = \frac{(\lambda\tau)^s}{s!} \delta(t)$ (avec $\delta(t)$ la fonction de Dirac). Dans ce cas nous surestimons la probabilité de survie, des éventuels blocages entre les s particules et les particules précédemment sorties sont négligées. Dans le second cas si une particule arrive à un temps t_1 entre t et $t - \tau$, il peut y avoir un maximum de $N - 3$ particules entre t et $t - t_1$ pour qu'il n'y ait pas de blocage, et aucune particule entre $t - t_1$ et $t - t_1 - \tau$. Si une particule arrive à un temps t il ne peut y avoir qu'un maximum de $N - 2$ particules dans le canal. Ce noyau est $K_s(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{s-1}}{(s-1)!} e^{-\lambda t}$, qui est proportionnelle à la probabilité que $s - 1$ particules entrent dans l'intervalle $[0, t]$. Cela va sous-estimer la probabilité de survie ; certaines configurations où les particules n'induisent pas un blocage sont négligées. Ces deux noyaux encadrent la solution, en sous-estimant et en surestimant la probabilité de survie. Nous calculons la transformée de Laplace des $q(n, u)$, avec les deux différentes fonctions noyau, pour

obtenir deux fonctions génératrices différentes :

$$\begin{aligned}
(\lambda + u)\tilde{q}(0, u) &= 1, \\
(\lambda + u)\tilde{q}(1, u) &= \lambda\tilde{q}(0, u), \\
(\lambda + u)\tilde{q}(2, u) &= \lambda\tilde{q}(1, u), \\
(\lambda + u)\tilde{q}(N - 1, u) &= \lambda\tilde{q}(N - 1, u), \\
(\lambda + u)\tilde{q}(N, u) &= \lambda e^{-(\lambda+u)\tau} \sum_{s=0}^{N-2} \frac{(\lambda\tau)^s}{s!} (\tilde{q}_s(N - 1 - s, u)), \\
(\lambda + u)\tilde{q}_s(n, u) &= \lambda e^{-(\lambda+u)\tau} \sum_{s=0}^{N-2} \tilde{q}_s(N - 1 - s, u) \int_0^\tau dt_1 e^{-ut_1} K_s(t_1). \tag{II.74}
\end{aligned}$$

En sommant chaque équation et en les multipliant par $\frac{z^n}{(\lambda+u)}$ on calcule $\tilde{G}(z, u)$. Nous cherchons à calculer le temps moyen de blocage, à partir des Eqs. (II.16) et (II.14). Nous nous intéressons au premier noyau $K_s(t) = \frac{(\lambda\tau)^s}{s!} \delta(t)$. Le temps moyen s'écrit comme :

$$\langle t \rangle = \frac{N + \sum_{s=0}^{N-2} \frac{(\lambda\tau)^s}{s!} (N - s - 1) e^{-\lambda\tau}}{\lambda(1 - e^{-\lambda\tau}) \sum_{s=0}^{N-2} \frac{(\lambda\tau)^s}{s!}}. \tag{II.75}$$

Dans la Fig. II.8 on trace les résultats analytiques et numériques (courbes pleines et pointillées), on y observe un accord approximatif entre les deux résultats. Cette concordance est de moins en moins satisfaisante lorsque l'on augmente N ou $\lambda\tau$. Mais nous remarquons que les limites pour de faibles valeurs de $\lambda\tau$ coïncident.

Nous obtenons le terme principal du temps moyen de blocage pour de faibles valeurs de $\lambda\tau$. Nous notons que ce terme est le même pour les deux fonctions noyaux :

$$\frac{\langle t \rangle}{\tau} = \frac{(N - 1)!}{(\lambda\tau)^N}. \tag{II.76}$$

Nous observons plus précisément cet accord dans l'encadré de la Fig. II.9 et nous calculons numériquement $g(t) = \langle t \rangle \times (\lambda\tau)^N$. Pour de faibles valeurs de $\lambda\tau$ nous observons que $\langle t \rangle$ se comporte comme une loi de puissance, et $g(t)$ est donc une constante. Nous pouvons extrapoler ces constantes d'après la courbe en pointillée, pour $N = 2$, $g(0) = 2$, $N = 3$, $g(0) = 6$, $N = 4$, $g(0) = 24$, etc. Ces valeurs correspondent à $g(0) = (N - 1)!$ ce qui coïncide avec l'Eq. (II.76). C'est intéressant de remarquer qu'une loi d'échelle apporte une bonne description du temps moyen de blocage pour $\lambda\tau < 0.5$. Dans la section du cas $N = 3$ nous avons supposé que le résultat pour N était analogue pour de faible intensité au résultat pour $N = 2$ avec une distribution γ pour $\alpha = N$ et nous remarquons que nous obtenons en effet ce même résultat pour tout N .

Nous présentons maintenant le flux moyen de particules sorties en fonction du temps dans la Fig. II.10. Le flux est nul avant τ , puisqu'aucune particule ne peut sortir du système, et atteint un maximum à $t = \tau$, donné par

$$j(\tau) = \lambda \sum_{i=1}^{N-2} \frac{(\lambda\tau)^i}{i!} e^{-\lambda\tau}. \tag{II.77}$$

Cette expression correspond à l'évènement où une particule sort entre t et $t + dt$ pendant que $0, 1, \dots, N - 2$ particules sont encore dans le canal. Pour $t > \tau$ on remarque une grande

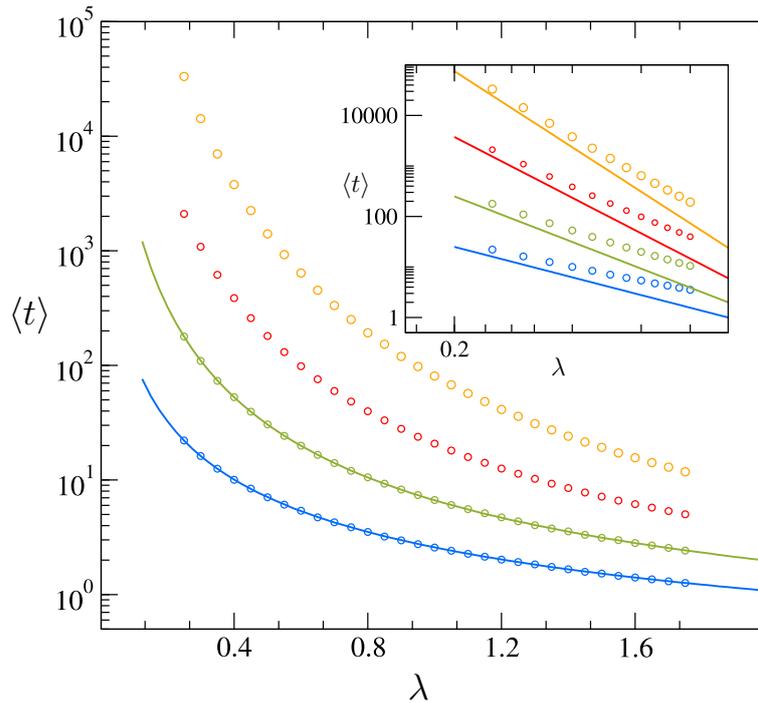


FIGURE II.9 – Temps moyen de blocage pour une distribution de Poisson en fonction de l'intensité λ pour $N = 3, 4, 5, 6$ (de bas en haut) et $\tau = 1$, les résultats numériques en cercles, et en pleine ligne l'Eq. (II.16) pour $N = 2$ et Eqs. (II.59) et (II.60) pour $N = 3$. L'encadré compare la formule asymptotique Eq. (II.76), avec les résultats numériques, pour de faibles $\lambda\tau$.

augmentation avec N , voir Fig. II.10. Pour $N = 2$, le flux est très faible pour $t > 3\tau$, alors que pour $N = 7$, le flux est presque constant pendant un temps inférieur à 2τ . En général la décroissance dure un temps comparable au temps moyen de blocage, Eq. (II.76), qui diverge rapidement lorsque N augmente.

II.3.4 Fonction de grandes déviations et fonction de risques

II.3.4.a Fonction de risques

Par la suite il sera utile de simplifier la probabilité de survie. Pour cela nous allons regarder la fonction de risques, *hazard function*, de nos systèmes [67]. Elle permet de mesurer un risque instantané de blocage. Cette fonction se définit comme :

$$h(t) = \frac{f(t)}{p_s(t)}, \quad (\text{II.78})$$

avec $p_s(t)$ la probabilité de survie et $f(t)$ la densité de blocage. La fonction $h(t)$ n'est pas une probabilité, elle mesure un risque de blocage, on peut la voir comme une probabilité de blocage dans un intervalle infiniment petit entre t et $t + dt$; sachant que le canal survit

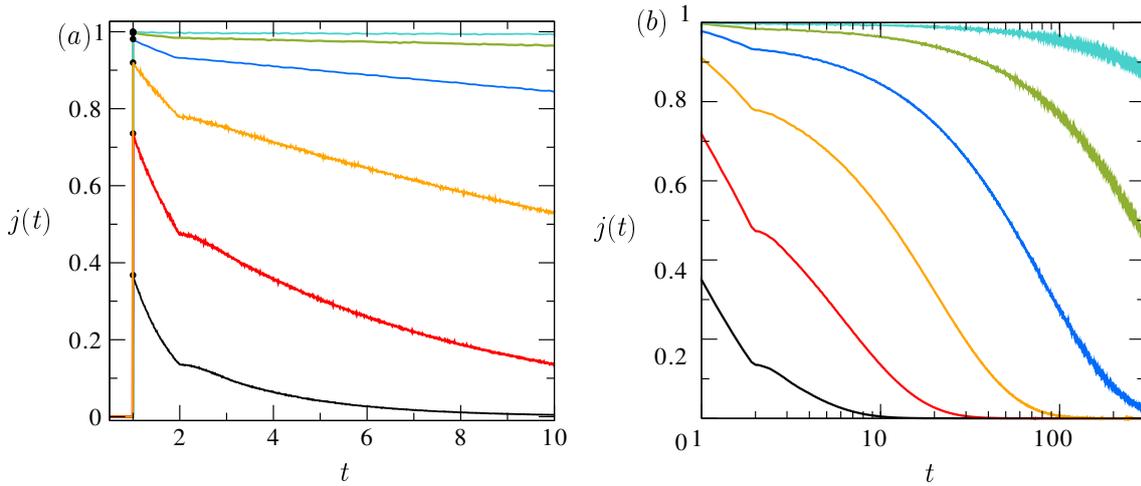


FIGURE II.10 – Flux moyen $j(t)$ en fonction du temps t pour $\tau = 1$ et $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (du bas vers le haut) pour une distribution de Poisson avec $\lambda = 1$. (a) Comportement à temps court, à $t = \tau = 1$ les cercles correspondent aux valeurs exactes du maximum, Eq. (II.77). (b) Le comportement aux temps longs avec une échelle de temps Logarithmique.

jusqu'à t . Nous avons $f(t) = -\frac{dp_s(t)}{dt}$ on peut donc simplifier la fonction

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{p_s(t)} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \log[p_s(t)]. \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

Il est intéressant de noter que si la probabilité de survie suit une loi exponentielle telle que $p_s(t) = e^{-at}$ alors la fonction de risques va donner une constante a . De manière non analytique nous pouvons faire l'hypothèse que dans nos modèles la probabilité de survie s'approche d'une loi exponentielle pour de faibles λ . Puisque dans ce cas les blocages sont rares, la probabilité se rapproche d'une probabilité de Poisson. Nous calculons la fonction de risques pour $N = 2$, les résultats analytiques sont tracés sur la Fig. II.11 pour différentes valeurs de λ . Nous observons sur cette figure que la fonction tend rapidement vers une constante, cela veut dire que nous pouvons approcher la probabilité de survie par une loi exponentielle. Nous remarquons tout de même que lorsque λ diminue le temps de relaxation, i.e. le temps pour arriver à la valeur stationnaire, est un peu plus court. Nous allons tracer pour $N > 2$ la fonction de risques, pour vérifier que cette approximation est plausible. Sur la Fig. II.12 nous remarquons que la fonction $h(t)$ tend vers une valeur constante, pour toutes les valeurs de N . Donc nous pouvons simplifier aux temps longs la probabilité de survie en exponentielle e^{-at} , avec a une constante. Et pour de faibles λ cela tend très rapidement vers une constante donc l'approximation peut s'utiliser pour de plus faibles temps. De plus la fonction de hasard correspond à la probabilité conditionnelle que le canal se bloque sur un temps infinitésimal entre t et $t + dt$, sachant que le canal survit jusqu'à l'instant t . Pour avoir un blocage au temps t il faut que $N - 1$ particules soient à l'intérieur du canal lorsque qu'une particule arrive à l'instant t . La condition pour cela est qu'il n'y ait aucune particule dans le canal à $t - \tau$ et que $N - 1$ particules entrent pendant un temps τ , cette probabilité correspond juste la probabilité de Poisson, $\frac{(\lambda\tau)^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\lambda\tau}$. Nous ne connaissons pas la probabilité que le canal

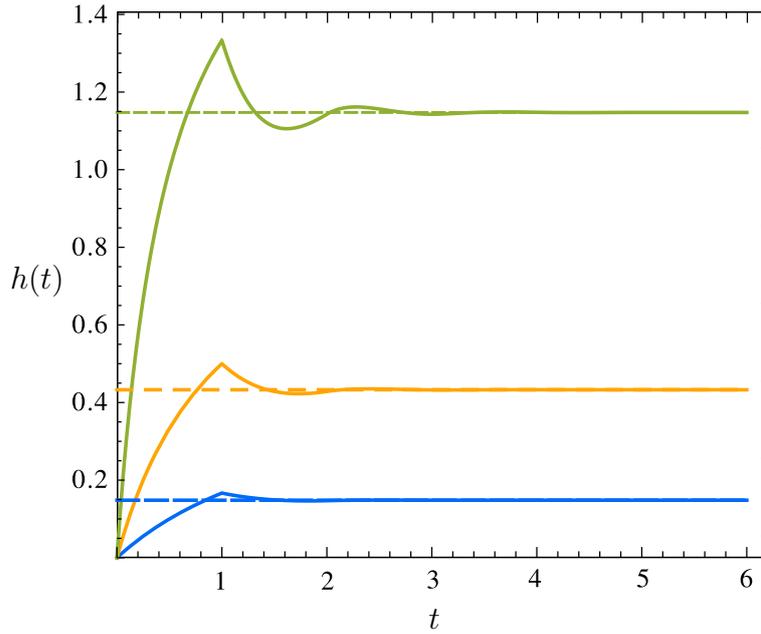


FIGURE II.11 – Fonction de risque pour $N = 2$, $\tau = 1$ et $\lambda = 0.25, 0.5, 1$ (de bas en haut). Les lignes pleines sont les résultats analytiques obtenus à partir de l'Eq. (II.15), et les lignes pointillés sont les valeurs asymptotiques, Eq. (II.88) et Eq. (??).

soit vide à $t - \tau$, mais si on se place dans le cas où l'intensité est très faible alors il y a de forte chance pour que cela vrai. Donc nous notons cette probabilité égale à 1. Au final nous approchons la fonction de hasard comme :

$$h(t) \approx \lambda \frac{(\lambda\tau)^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\lambda\tau} \quad (\text{II.80})$$

De plus par grâce à un développement limitée nous notons $e^{-\lambda\tau} \approx 1$. La fonction de hasard est alors une constante, comme nous avons fait l'hypothèse.

Grâce à ces approximations nous pouvons retrouver le temps moyen de blocage pour $\lambda\tau \ll 1$ plus facilement. Nous avons donc :

$$p_s(t) \approx e^{-h(t)t} \approx e^{\lambda \frac{(\lambda\tau)^{N-1}}{(N-1)!} t}. \quad (\text{II.81})$$

Et donc le temps moyen de blocage s'écrit comme :

$$\langle t \rangle = \frac{(N-1)!}{\lambda^N \tau^{N-1}}. \quad (\text{II.82})$$

Nous obtenons avec cette méthode le même résultat que l'Eq. (II.76).

II.3.4.b Fonction de grandes déviations

Pour calculer plus précisément ces limites nous utilisons les fonctions de grandes déviations. En effet nos systèmes sont non-Markoviens mais lorsque nous nous plaçons à une faible

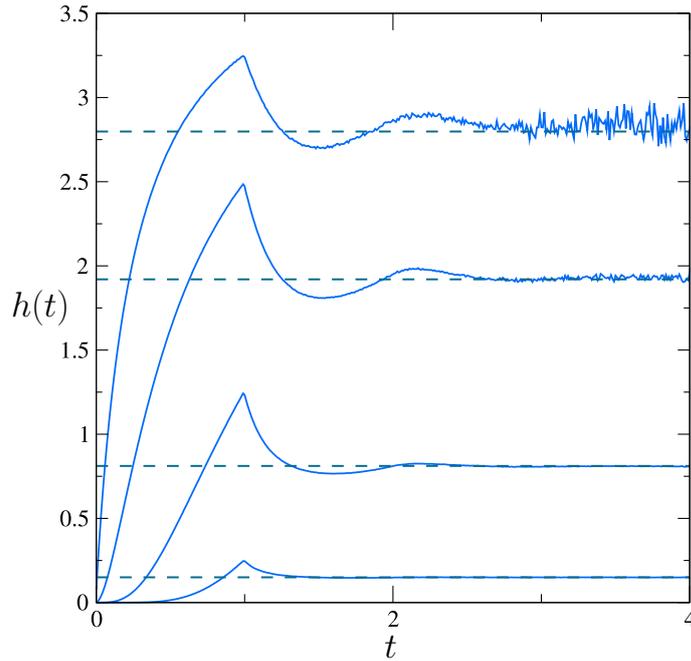


FIGURE II.12 – Fonction de risques pour $N = 2, 3, 5, 8$ (de haut en bas) et pour $\lambda = 4$. Les courbes pleines sont les résultats numériques, et les courbes en pointillées montrent les valeurs asymptotiques.

intensité nous pouvons considérer qu'il sont Markoviens et de la probabilité de survie suit une loi approximativement exponentielle [68]. Dans certains cas il est possible d'utiliser une des méthodes du principe de grandes déviations pour obtenir une simplification que la probabilité. Cette loi suit une forme asymptotique :

$$P(a) \approx e^{-tI(a)}, \quad (\text{II.83})$$

dans la limite des temps longs, $t \rightarrow \infty$. Cette approximation est appelée le *principe des grandes déviations*. La fonction de taux $I(a)$ contient des informations essentielles pour caractériser les fluctuations du système. Une des méthodes pour obtenir cette fonction est de calculer les résidus de la probabilité [68]. Prenons le cas $N = 2$, nous avons obtenu la probabilité de survie dans l'espace de Laplace :

$$\tilde{p}(u) = \frac{1}{\lambda + u} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + u - \lambda e^{-(\lambda+u)\tau}} \right). \quad (\text{II.84})$$

Pour obtenir les résidus de cette fonction il faut déterminer ses pôles dans l'espace de Laplace. Il existe deux pôles pour $\tilde{p}(u)$: $u = -\lambda$ ou $\lambda + u - \lambda e^{-(\lambda+u)\tau} = 0$. Cette deuxième équation peut se résoudre grâce à la fonction de Lambert-W, notée $L_W(z)$, qui est la réciproque de la fonction de variable complexe f définie par $f(w) = we^w$, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes z et w , nous avons :

$$z = we^w \iff w = L_W(z). \quad (\text{II.85})$$

Revenons à l'équation pour le deuxième pôle, nous choisissons $v = \lambda + u$ dans ce cas l'équation s'écrit comme

$$\lambda\tau = v\tau e^{v\tau}. \quad (\text{II.86})$$

La solution est donc $v\tau = L_W(\lambda\tau)$ soit

$$u = \lambda - \frac{L_W(\lambda\tau)}{\tau}. \quad (\text{II.87})$$

Au final la fonction de taux est donc $I(\lambda) = \lambda - \frac{L_W(\lambda\tau)}{\tau}$. L'approximation de la probabilité de survie pour $N = 2$ est :

$$p(t) = e^{-(\lambda - \frac{L_W(\lambda\tau)}{\tau})t}. \quad (\text{II.88})$$

Nous pouvons vérifier en calculant la fonction de risques. Dans ce cas là $h(t) = (\lambda - \frac{L_W(\lambda\tau)}{\tau})$, c'est ce que nous vérifions sur la Fig. II.11.

II.4 Corrélations

En plus des observables calculées jusqu'à présent nous nous intéressons dorénavant aux fonctions de corrélations à deux temps. Nous allons explorer la fonction de corrélation $C(t)$, qui représente la fonction de densité que deux particules aient un temps de séparation de t . Nous étudions ainsi l'entrée des particules qui sont contraintes par les particules précédentes pour qu'il n'y ait pas de blocage. Il y a donc un conditionnement à l'absence de blocage. Nous voulons observer s'il y a des corrélations entre les différentes arrivées des particules et analyser comment ces corrélations se modifient dans le temps. La fonction de corrélation en temps peut être exprimée comme une somme de fonctions de corrélations partielles $c(n, t)$ qui correspondent à la probabilité de densité que la première et la dernière particule des $n + 1$ particules soient séparées d'un temps t :

$$C(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n, t). \quad (\text{II.89})$$

La fonction de corrélation partielle $c(n, t)$ est la probabilité d'avoir une particule à $t = 0$ et que la $n^{\text{ème}}$ particule arrive au temps t , elle peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} c(n, t) = & \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{N-2+n} dt_i c^{(N-2)}(t_1, \dots, t_{N-2}) \prod_{j=N-1}^{N-2+n} \psi(t_j) \\ & \times \left[\prod_{j=1}^n \theta \left(\sum_{m=0}^{N-2} t_{j+m} - \tau \right) \right] \delta \left(t - \sum_{i=N-1}^{N+n-2} t_i \right), \end{aligned} \quad (\text{II.90})$$

où $c^{(N-2)}(t_1, \dots, t_{N-2})$ est la probabilité jointe d'avoir $N - 1$ particules alors que la première et la seconde particules sont séparées d'un temps t_1 , la seconde et la troisième d'un temps t_2 , et la $N - 2^{\text{ème}}$ et la $N - 1^{\text{ème}}$ séparées par un temps t_{N-2} . Nous écrivons cette probabilité comme

$$c^{(N-2)}(t_1, \dots, t_{N-2}) = \int dt_0 c^{(N-2)}(t_0, \dots, t_{N-3}) \times \psi(t_{N-2}) \theta \left(\sum_{j=1}^{N-2} t_j - \tau \right). \quad (\text{II.91})$$

Cette définition considère toutes les trajectoires, y compris celles qui bloquent le système avant ou au temps t . La fonction θ définit la contrainte, si il y a trop de particule alors il y a un blocage et dans ce cas la corrélation devient nulle. la corrélation va tendre vers 0 lorsque t tend vers l'infini, puisque toutes les situations vont finir par un blocage. Pour avoir une corrélation qui tend vers une constante non nulle, nous gardons seulement les trajectoires qui n'ont pas menés à un blocage. Cela semble plus intéressant d'exclure les particules qui causerait un blocage. Pour garder seulement les particules qui ne bloquent pas on génère une séquence de particules dont les intervalles de temps entre deux particules successives sont contraints par le fait que $t_1 + \dots + t_{N-1} < \tau$. D'après cette contrainte nous écrivons l'équation stochastique discrète :

$$t_n = \max\left(\tau - \sum_{j=1}^{N-2} t_{n-j}, 0\right) + \eta, \quad (\text{II.92})$$

où η est un nombre aléatoire qui est généré par la distribution $\psi(t)$, et les temps t_{n-j} sont les temps séparant les $N - 2$ particules entrées précédemment ; nous utilisons cette situation, où aucune particule ne bloque le système, pour calculer la fonction de corrélation, on remplace dans les Eqs. (II.90) et (II.91) la distribution des particules $\psi(t)$ par

$$\psi\left(t_i - \max\left(\tau - \sum_{j=1}^{N-2} t_{i-j}, 0\right)\right), \quad (\text{II.93})$$

soit nous remplaçons t_i par les intervalles de temps qui ne mènent pas à un blocage.

Nous exprimons les fonctions de corrélations $c(n, t)$ comme la moyenne d'avoir comme évènement la première et la particule $n + 1^{\text{ème}}$ séparées d'un temps t

$$c(n, t) = \left\langle \delta\left(t - \sum_{i=1}^n t_i\right) \right\rangle. \quad (\text{II.94})$$

L'équation de conservation de cette probabilité est

$$\int_0^\infty dt c(n, t) = 1. \quad (\text{II.95})$$

En sommant sur n , l'intégrale de la fonction de corrélation est donnée aux temps longs par

$$\int_0^t dt' C(t') \approx \langle n(t) \rangle, \quad (\text{II.96})$$

où $\langle n(t) \rangle$ est le nombre moyen de particules le long de la trajectoire pendant un temps t . Aux temps longs, cette quantité devient une constante puisque nous considérons uniquement les trajectoires qui ont survécues. En utilisant que $C(t)$ tend vers une constante aux temps longs ($C(t) \rightarrow C_\infty$), alors nous remarquons que $C_\infty = 1/\bar{t}$ où \bar{t} est le temps moyen entre deux particules successives. Nous allons comparer les résultats pour les corrélations de $N = 2$ et $N = 3$.

II.4.1 Corrélations pour $N = 2$

Le modèle général admet des interactions entre particules. Pour $N = 2$ il y a seulement des interactions entre plus proches voisins. La particule n doit entrer lorsque la particule $n - 1$

est déjà sortie du canal. Si une particule entre à un temps t alors la suivante doit entrer avec un temps supérieur à $t + \tau$. L'équation discrète est simplement donnée par

$$t_n = \tau + \eta, \quad (\text{II.97})$$

comme écrit dans l'Eq. (II.92). Les fonctions de corrélations partielles, $c(n, t)$, sont données par le produit d'intégrales indépendantes. La transformée de Laplace de $c(n, t)$ est donnée par

$$\tilde{c}(n, u) = \left(\int_{\tau}^{\infty} dt \psi(t - \tau) e^{-tu} \right)^n = \tilde{c}(1, u)^n. \quad (\text{II.98})$$

Nous obtenons des intégrales indépendantes puisque tous les temps entre deux particules successives sont indépendants les uns des autres pour le cas $N = 2$. Pour mieux comprendre cette relation on peut aussi calculer la probabilité d'avoir un intervalle de temps t entre deux particules, cela va donner

$$c(1, t) = \psi(t - \tau). \quad (\text{II.99})$$

Cette probabilité est indépendante des intervalles précédents. Donc $c(n, t)$ va être donné par l'intégrale des n probabilités indépendantes distribuées selon $c(1, t)$ avec la contrainte que $t = \sum_{i=1}^n t_i$:

$$c(n, t) = \int_{\tau}^{\infty} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \psi(t_1 - \tau) \cdots \psi(t_n - \tau) \delta(t - \sum_{i=1}^n t_i). \quad (\text{II.100})$$

Nous insérons l'Eq. (II.98) dans l'Eq. (II.89) pour obtenir :

$$\tilde{C}(u) = \frac{\tilde{c}(1, u)}{1 - \tilde{c}(1, u)}. \quad (\text{II.101})$$

Nous obtenons alors la transformée de Laplace de la fonction de corrélation temporelle. Nous prouvons qu'à temps long $C(t)$ approche une valeur constante. Nous savons que $\tilde{c}(n, u) = \tilde{c}(1, u)^n$, Eq. (II.98), et nous pouvons écrire le développement limité à l'ordre 1 de $\tilde{c}(1, u)$: $\tilde{c}(1, u) = \tilde{c}(1, 0) + u \partial \tilde{c}(1, u) / \partial u|_{u=0} + O(u^2)$; en utilisant ces deux équations nous montrons que nous pouvons calculer $C(\infty)$:

$$C(\infty) = \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{C}(u) = 1/\bar{t} \quad (\text{II.102})$$

où $\bar{t} = \int_0^{\infty} t c(1, t) dt = -\partial \tilde{c}(1, u) / \partial u|_{u=0}$ est la moyenne de l'intervalle de temps entre deux particules. Cela correspond donc au régime permanent de la fonction de corrélation. Regardons plus précisément la distribution de Poisson $\psi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pour laquelle nous trouvons

$$\tilde{C}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + u} \right)^n e^{-nu\tau}. \quad (\text{II.103})$$

En faisant la transformée de Laplace inverse de cette équation on trouve

$$C(t) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\lambda(t - n\tau)) \frac{(\lambda(t - n\tau))^{n-1} e^{-\lambda(t-n\tau)}}{(n-1)!}. \quad (\text{II.104})$$

La Fig. II.13 montre la corrélation temporelle $C(t)$ pour deux valeurs de $\lambda\tau$. Nous observons un accord parfait entre les résultats numériques et l'Eq. (II.104). Pour $t < \tau$ la fonction est nulle, c'est le résultat attendu puisque l'intervalle de temps entre deux particules doit être plus grand que τ pour que les particules ne bloquent pas le système; cela correspond sur ce domaine de temps à une forte anticorrélation. Nous remarquons ensuite un maximum pour $t = \tau$, qui correspond à $C(\tau) = \lambda$, suivi d'une courte période d'oscillations allant vers un régime permanent. Peu après τ les corrélations diminuent, il y en a peu entre les particules entrantes et sortantes. À $t = 2\tau$ la fonction $C(t)$ augmente, il y a un minimum que l'on retrouve dans les autres quantités, comme le flux, la probabilité de survie etc. Le régime permanent a pour valeur constante $C(t = \infty) = \lim_{u \rightarrow 0} u\tilde{C}(u) = \lambda/(1 + \lambda\tau)$, en accord avec la valeur numérique.

Il y a un rapprochement entre la fonction de corrélation temporelle de notre système, l'Eq. (II.104), et la fonction de corrélation de paires dans le cas d'un fluide de bâtonnets durs [69][70]. Dans les liquides ou les solides amorphes, la fonction de distribution de paires $g(x)$ à une dimension (qui est plus souvent une distribution de paires radiale dans un fluide et dans un solide amorphe $g(r)$), présente des pics successifs correspondant aux premiers voisins étudiés, le premier pic correspondant au premier voisin, le deuxième au second voisin, etc. La largeur des pics varie selon la distance entre les atomes les plus proches. Elle augmente avec la distance x (ou r) étudiée. Nous remarquons qu'au-delà du deuxième ou troisième pic la structure de la courbe change et nous obtenons une valeur stationnaire. Cela revient à dire qu'il n'y a pas d'ordre à longue distance (au-delà du deuxième ou troisième voisin). À partir de là, la courbe se comporte comme une distribution de paires pour un gaz, c'est-à-dire quand $g(x)$ est égal à 1. Dans notre modèle la structure de la fonction est la même, nous observons un ordre à courte distance avec des pics, puis une valeur stationnaire qui correspond au fait qu'il n'y a plus d'ordre au-delà du quatrième voisin pour le cas $N = 2$ et au-delà du troisième voisin pour le cas $N = 3$, même si les valeurs des corrélations sont supérieures. Il y a donc plus de corrélations lorsque N augmente ce qui est dû à une contrainte qui agit sur un plus grand nombre de particules, mais il y a moins d'ordre entre les plus proches particules, car la contrainte est moins forte.

Pour regarder avec plus de détails l'analogie entre notre modèle et les bâtonnets durs, on va calculer le facteur de structure du modèle. On peut faire une analogie entre l'espace et le temps; le facteur de structure est directement lié aux temps d'entrée des particules dans le canal. Le facteur de structure à une dimension s'écrit :

$$S(k) = \frac{\langle \rho_k \rho_{-k} \rangle}{N}, \quad (\text{II.105})$$

avec $\rho_k = \sum_{j=1}^N e^{ikt_j}$

$$\begin{aligned} S(k) &= 1 + \frac{1}{N} \sum_{l \neq m} \langle e^{ik(t_l - t_m)} \rangle, \quad k \neq 0 \\ &= 1 + \frac{1}{N} \sum_{l < m} \text{Re} \langle e^{ik(t_l - t_m)} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.106})$$

Pour $N = 2$, nous avons t_l l'intervalle entre la particule 1 et la particule l : $t_l = \sum_{n=1}^l u_n$. Avec t_n le temps entre la particule $n - 1$ et n , comme nous l'avons vu plus tôt : $t_n = 1 + \eta$, avec η un nombre aléatoire distribué selon une loi de Poisson $\lambda e^{-\lambda t}$.

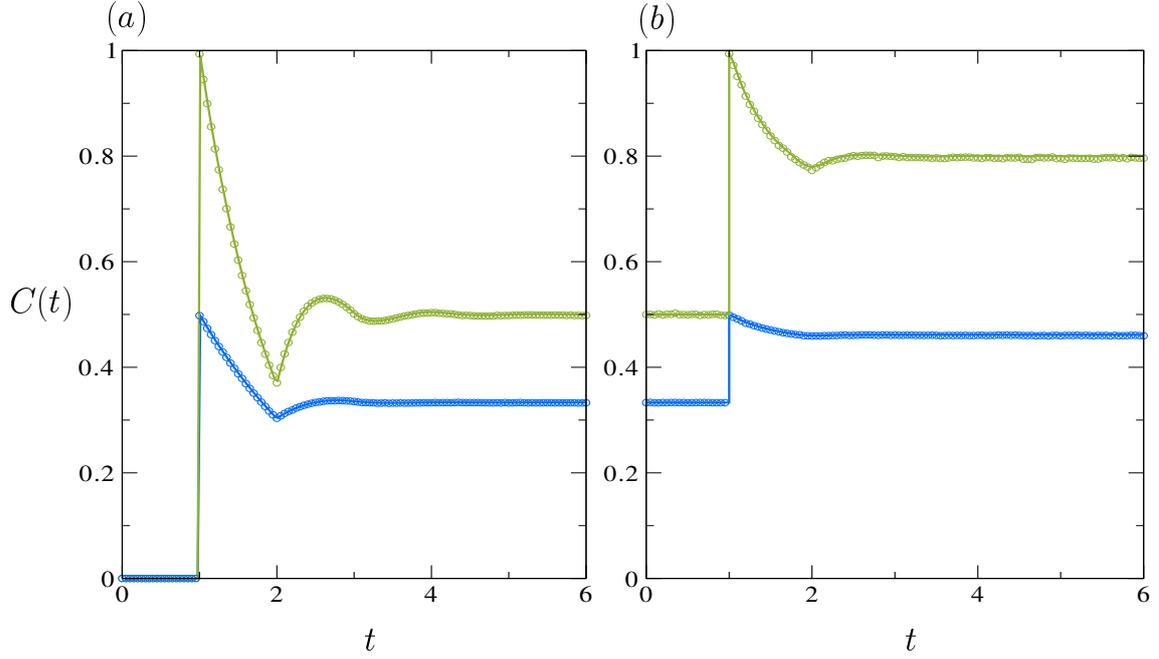


FIGURE II.13 – Fonction de corrélation pour (a) $N = 2$ et (b) $N = 3$ pour $\lambda = 1$ et 0.5 (de bas en haut). La courbe pleine correspond aux Eqs. (II.104) ($N = 2$) et (II.129) ($N = 3$) et les cercles aux simulations numériques.

La valeur moyenne $\langle e^{ik(t_l - t_m)} \rangle$ se calcule comme

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle e^{ik(t_l - t_m)} \rangle &= \text{Re}\langle e^{-ik \sum_{n=l+1}^m u_n} \rangle, \\ &= \text{Re}\langle e^{-ik(m-l)} e^{-ik \sum_{n=l+1}^m \eta_n} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{II.107})$$

où les η_n sont des variables indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle e^{ik(t_l - t_m)} \rangle &= \text{Re}\left(\left(\frac{\lambda e^{-ik}}{\lambda + ik}\right)^{l-m}\right), \\ S(k) &= 1 + \frac{2}{N} \text{Re}\left(\sum_{l < m} \left(\frac{e^{-ik}}{\lambda + ik}\right)^{m-l}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.108})$$

Nous calculons maintenant $\sum_{l < m} \left(\frac{e^{-ik}}{\lambda + ik}\right)^{m-l}$, il y a N_p particules, nous sommes toutes les corrélations entre les N_p particules, donc $t_l - t_m$ pour $l < m$, donc nous prenons l entre 1 et $N_p - 1$ et m entre $l + 1$ et N . Nous obtenons :

$$\sum_{l=1}^{N_p-1} \sum_{m=l+1}^{N_p} \left(\frac{\lambda e^{-ik}}{\lambda + ik}\right)^{m-l} \approx (N_p - 1) \frac{\lambda e^{-ik}}{1 + ik - \lambda e^{-ik}}.$$

Le facteur de structure est :

$$S(k) = 1 + 2 \frac{\lambda^2 (\cos(k) - 1) - \lambda k \sin(k)}{\lambda^2 (1 - \cos(k)) + (k + \lambda \sin(k))^2}. \quad (\text{II.109})$$

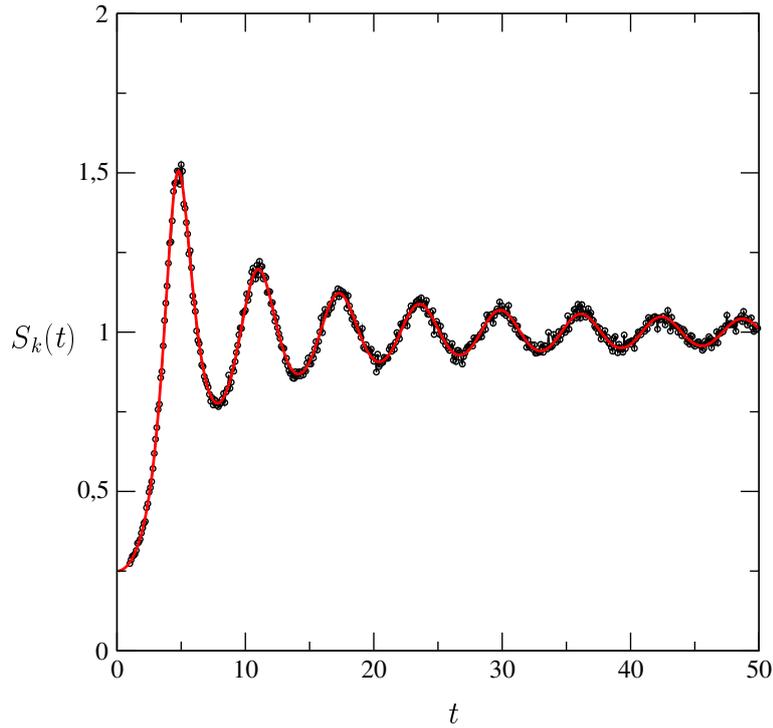


FIGURE II.14 – *Facteur de structure pour $N = 2$ et $\lambda\tau = 1$. Les valeurs numériques en cercles et les valeurs théoriques données par la transformée de Fourier inverse de l'Eq. (II.109) en ligne pleine.*

Cette formule analytique correspond aux résultats numériques. Dans la simulation nous calculons toutes les corrélations entre les N_p particules qui sont séparées de $t_n = 1 + \eta$, ce qui correspond à un système où 2 particules bloquent le système, Fig. II.14.

Nous observons sur la Fig. II.14 des oscillations, qui correspondent à des corrélations et anti-corrélations entre les particules. Lorsque le temps augmente le facteur de structure tend vers une valeur stationnaire. Le temps dans notre modèle correspond à la taille totale du système. Donc plus le système est grand plus les corrélations entre les particules aux extrémités sont faibles. Au vu de la formule obtenue et de la forme du facteur de structure, la correspondance entre notre modèle et un modèle à une dimension de bâtonnets durs paraît cohérente. Le facteur de structure est la transformée de Fourier de la distribution de paires :

$$S(k) = 1 + \rho_0 \int_0^\infty dx [g(x) - 1] e^{ikx} \quad (\text{II.110})$$

avec ρ_0 la densité moyenne du système.

II.4.2 Corrélations pour $N = 3$

Passons maintenant au cas $N = 3$ qui est plus complexe puisque chaque intervalle de temps n'est pas indépendant puisque les contraintes s'expriment comme $t_n + t_{n+1} < \tau$. Prenons une distribution de Poisson pour les temps d'entrées pour simplifier les équations. Nous avons vu que pour cette distribution l'équation pour obtenir la fonction génératrice était soluble. En

utilisant l'Eq. (II.92) nous obtenons l'équation stochastique discrète de ce modèle

$$t_n = \max(\tau - t_{n-1}, 0) + \eta, \quad (\text{II.111})$$

où t_n correspond à l'intervalle de temps entre la particule $n - 1$ et la particule n et η est un nombre aléatoire distribué selon une probabilité exponentielle $\lambda e^{-\lambda t}$. Si $t_{n-1} > \tau$ alors cela veut dire que la particule $n - 2$ est sortie du canal et qu'il ne reste que la particule $n - 1$, donc l'arrivée de la particule n n'est pas contrainte puisqu'il peut y avoir deux particules au même instant dans le canal. Nous avons donc : $t_n = \eta$. Si $t_{n-1} < \tau$, il y a deux particules dans le canal la particule $n - 1$ et la particule $n - 2$. L'arrivée de la particule n est contrainte par l'entrée de la particule t_{n-1} pour qu'il n'y ait pas de blocage. La somme des deux intervalles $t_n + t_{n-1}$ doit être supérieure à τ . Donc $t_n = \tau - t_{n-1} + \eta$. On peut faire un premier rapprochement avec la théorie des files d'attente dans laquelle cette équation est connue comme l'équation de Lindley-type, [71–73].

Les Eqs. (II.90) et (II.91), avec l'Eq. (II.93) donnent :

$$c(n, t) = \int_0^\infty dt_0 c(1, t_0) \delta\left(t - \sum_{i=1}^n t_i\right) \prod_{i=1}^n \left(\int_{\max(\tau - t_{i-1}, 0)}^\infty dt_i \lambda e^{-\lambda(t_i - \max(\tau - t_{i-1}, 0))} \right) \quad (\text{II.112})$$

et

$$c(1, t) = \int_{\max(\tau - t, 0)}^\infty dt_1 c(1, t_1) \lambda e^{-\lambda(t - \max(\tau - t_1, 0))}. \quad (\text{II.113})$$

Cette fois la contrainte affecte deux intervalles à la fois, le temps entre trois particules successives doit être inférieur à τ . Donc, la transformée de Laplace des fonctions partielles $\tilde{c}(n, u)$ ne sont pas le produit simple de la plus petite fonction de corrélation, $\tilde{c}(1, u)$, comme pour $N = 2$. Pour $t > \tau$ nous observons, d'après l'Eq. (II.113), que $\tilde{c}(1, u)$ est constant. Par contre, les corrélations pour $t < \tau$ vont varier au cours du temps.

Nous prenons la dérivée de l'Eq. (II.113)

$$\frac{dc(1, t)}{dt} = \lambda(-c(1, t) + \theta(\tau - t)c(1, \tau - t)). \quad (\text{II.114})$$

Pour la solution de cette équation, obtenue par transformée de Laplace, on trouve

$$c(1, t) = \frac{\lambda}{1 + \lambda\tau} (\theta(\tau - t) + e^{-\lambda(t-\tau)}\theta(t - \tau)). \quad (\text{II.115})$$

Grâce à cette équation on calcule le temps moyen entre deux particules consécutives (particules qui ne bloquent pas le système) :

$$\bar{t} = \int_0^\infty dt c(1, t)t = \frac{(\lambda\tau + 1)^2 + 1}{2\lambda(\lambda\tau + 1)}. \quad (\text{II.116})$$

Lorsque l'intensité est forte la probabilité de distribution est uniforme sauf dans l'intervalle $[0, \tau]$, et est égale à $\frac{1}{2}$. Par contre si $\lambda\tau$ tend vers 0 l'effet de la contrainte est négligeable et les blocages sont très rares donc \bar{t} diverge en $\frac{1}{\lambda}$, comme une distribution de Poisson classique.

Nous calculons facilement les premières corrélations partielles par l'intégration de l'Eq. (II.112). La probabilité $c(2, t)$ est donnée par

$$c(2, t) = \frac{\lambda^2 t}{\lambda\tau + 1} e^{-\lambda(t-\tau)}\theta(t - \tau). \quad (\text{II.117})$$

Pour obtenir la solution complète on va passer par la transformée de Laplace de l'Eq. (II.112), et nous utilisons une fonction auxiliaire :

$$\tilde{c}(n, u) = \int_0^\infty dt c(1, t) e^{-ut} m(n, t), \quad (\text{II.118})$$

avec $m(n, t)$ la fonction auxiliaire donnée par

$$m(n, t) = \int_{\max(\tau-t, 0)}^\infty dt' \lambda e^{-((u+\lambda)t' - \lambda \max(\tau-t, 0))} m(n-1, t'). \quad (\text{II.119})$$

Les conditions initiales sont données par $m(n, t) = 1$. Nous introduisons une fonction génératrice $G_m(z, t, u)$ de la fonction auxiliaire $m(n, t)$:

$$G_m(z, t, u) = \sum_{n=1}^\infty z^{n-1} m(n, t). \quad (\text{II.120})$$

Nous multiplions l'Eq. (II.119) par z^n et nous sommes sur tous les n pour obtenir :

$$G_m(z, t, u) = 1 + z \int_{\max(\tau-t, 0)}^\infty dt' G_m(z, t', u) \lambda e^{-((u+\lambda)t' - \lambda \max(\tau-t, 0))}. \quad (\text{II.121})$$

De même que pour le calcul de la dynamique, $G_m(z, t, u)$ est constant pour $t > \tau$, $G_m(z, t, u) = G_m(z, \tau, u)$. Il nous faut donc calculer $t < \tau$; pour nous dérivons l'équation intégrale au second degré, l'Eq. (II.121) :

$$\frac{\partial^2 G_m(z, t, u)}{\partial t^2} = z \lambda u e^{-u(\tau-t)} \left(G_m(z, \tau-t, u) + \frac{\partial G_m(z, \tau-t, u)}{\partial t} \right) - \lambda \frac{\partial G_m(z, t, u)}{\partial t}. \quad (\text{II.122})$$

Nous simplifions et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_m(z, t, u)}{\partial t^2} = & u \frac{\partial G_m(z, t, u)}{\partial t} + (u\lambda + \lambda^2 - (\lambda z)^2 e^{-u\tau}) \times G_m(z, t, u) - u\lambda \\ & - \lambda^2 - \lambda^2 z e^{-u(\tau-t)}. \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

avec les conditions aux limites (l'Eq. (II.121)) :

$$\begin{cases} G_m(z, 0, u) & = 1 + z G_m(z, \tau, u) \frac{\lambda e^{-u\tau}}{u+\lambda}, \\ \left. \frac{\partial G_m(z, t, u)}{\partial t} \right|_{t=\tau} & = z \lambda G_m(z, 0, u) - \lambda [G_m(z, \tau, u) - 1]. \end{cases} \quad (\text{II.124})$$

La solution est

$$G_m(z, t, u) = A_1(z, u) e^{s_1 t} + B_1(z, u) e^{s_2 t} + \frac{(u\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 z e^{-u(\tau-t)})}{u\lambda + \lambda^2 - (\lambda z)^2 e^{-u\tau}}, \quad (\text{II.125})$$

où $s_{1,2}$ sont les solutions de l'équation caractéristique

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} (u \pm \sqrt{(u+2\lambda)^2 - 4z^2 \lambda^2 e^{-u\tau}}). \quad (\text{II.126})$$

Finalement, la solution complète est donnée par

$$G_m(z, t, u) = \left(A_1(z, u)e^{s_1 t} + B_1(z, u)e^{s_2 t} + \frac{(u\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 z e^{-u(\tau-t)})}{u\lambda + \lambda^2 - (\lambda z)^2 e^{-u\tau}} \right) \theta(\tau - t) + G_m(z, \tau, u)\theta(t - \tau), \quad (\text{II.127})$$

et par

$$\begin{aligned} \tilde{C}(u) &= \int_0^\infty dt c(1, t) G_m(1, t, u) e^{-ut} \\ &= \frac{\lambda}{1 + \lambda\tau} \left(\int_0^\tau dt G_m(1, t, u) e^{-ut} + G_m(1, \tau, u) \frac{e^{-u\tau}}{u + \lambda} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.128})$$

En insérant l'Eq. (II.127) dans l'Eq. (II.128) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(u) &= \frac{\lambda}{(u + \lambda)(1 + \lambda\tau)} \left[A_1(1, u) \left(-\frac{e^{-s_2\tau}(\lambda + s_1) - u - \lambda}{s_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + B_1(1, u) \left(-\frac{e^{-s_1\tau}(\lambda + s_2) - u - \lambda}{s_1} \right) + \frac{(u + \lambda)^2 + e^{-u\tau}\lambda(u^2\tau + \lambda(u\tau - 1))}{u(u + \lambda - \lambda e^{-u\tau})} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.129})$$

La Fig. II.13 (b) montre la fonction de corrélation pour $N = 3$ en fonction du temps. Nous remarquons l'accord parfait entre la simulation et l'expression exacte, Eq. (II.129). Comme prédit précédemment pour $t \leq \tau$, $C(t)$ est constant et égal à $\frac{\lambda}{1 + \lambda\tau}$, puisque seul $c(1, t)$ est non nul et vaut une constante donnée par l'Eq. (II.115) sur cet intervalle de temps. Comme pour $N = 2$, nous observons une discontinuité à $t = \tau$, puis des petites oscillations avec un minimum en $t = 2\tau$. La fonction tend vers une valeur constante $\frac{2\lambda(1 + \lambda\tau)}{2 + 2\lambda\tau + \lambda^2\tau^2}$. Cette constante, de la même manière que pour $N = 2$, est égale à $1/\bar{t}$ avec \bar{t} donné par l'Eq. (II.116).

Nous comparons, maintenant, les corrélations pour $N = 2$ et $N = 3$ pour les mêmes valeurs de λ ; la valeur du régime permanent est supérieure pour $N = 3$, cela correspond à un temps plus petit entre les particules, ce qui est pertinent puisque deux particules peuvent se retrouver au même moment dans le canal, à comparer avec une seule particule pour $N = 2$. Les oscillations sont moins prononcées pour $N = 3$, et la fonction tend plus rapidement vers la valeur stationnaire que pour $N = 2$; ceci est dû au fait qu'il y a une plus grande contrainte imposée par le canal pour $N = 2$. Lorsque l'on va augmenter N , ces oscillations vont encore réduire et la valeur stationnaire sera de plus en plus grande, puisque les particules sont plus proches et ont moins de contraintes. De plus nous remarquons que le début de la courbe $N = 3$ correspond à la valeur stationnaire de la courbe $N = 2$, cela est dû au fait que lorsque l'on augmente le seuil de particules bloquantes, l'écart entre deux intervalles de temps est réduit. Les corrélations pour $N = 3$ pour $t < \tau$ sont liées juste à la corrélation moyenne entre deux particules, puisqu'il ne peut y avoir trois particules à être entrées, donc cela correspond à la valeur stationnaire pour $N = 2$.

II.5 Flux inhomogène

II.5.1 Observables

Jusqu'à présent nous avons étudié des situations de distribution homogène, en particulier la distribution de Poisson. Ce cas présente des simplifications de calcul et permet, en particulier, d'obtenir un résultat exact pour $N = 3$. Mais dans les phénomènes réels les distributions inhomogènes sont aussi présentées. Par exemple le cas des arrivées de bus qui dépendent des heures de fortes influences, ou encore les appels téléphoniques qui sont irréguliers dans la journée. Dans le chapitre introductif nous avons discuté des files d'attente homogènes. Nous abordons le cas où l'affluence des clients dépend des heures et des jours, [58, 74, 75], cela constitue une grande part de situations physiques où les flux peuvent être inhomogènes. Il y a de nombreuses applications où ce type de distribution est plus réaliste.

Dans cette section nous cherchons à obtenir les quantités intéressantes du modèle, en incluant une intensité variable [76]. Les quantités observées vont être identiques à celles énoncées en première partie, à savoir la probabilité de survie, le flux de sortie instantané, le temps moyen de blocage, etc. Nous allons nous placer dans le cas $N = 2$. Dans le cas homogène, nous avons vu que les particules arrivent avec une intensité constante $\lambda > 0$, donc le nombre moyen de particules qui arrive entre les temps entre 0 et t est λt . L'intensité λ est l'inverse de l'intervalle de temps moyen entre deux particules consécutives : $\bar{t} = 1/\lambda$. Dans le cas d'un processus de Poisson inhomogène, l'intensité n'est pas constante mais dépendante du temps $\lambda(t)$; les arrivées sont indépendantes entre elles mais pas stationnaires dans le temps. Pour un cas simple de processus inhomogène, nous pouvons obtenir des solutions en le ramenant à un processus homogène avec un changement d'échelle du temps : $s = \int_0^t dt' \lambda(t')$ [77]. Cette approche permet de résoudre des modèles Markoviens, mais elle ne permet pas de façon systématique de résoudre des modèles non-Markoviens. En général on ne peut donc pas utiliser cette approche, qui remplace t dans les équations par $s(t)$.

Nous allons nous intéresser à trois exemples d'intensités inhomogènes, avec une discontinuité simple, avec une décroissance exponentielle, et avec une variation périodique. Dans les précédentes sections nous avons vu différentes techniques pour résoudre les modèles, une approche différentielle et une approche intégrale.

Pour un flux inhomogène, nous allons obtenir une solution analytique en utilisant des équations maîtresses. Nous introduisons, comme dans les précédents études, les n probabilités de survie $q_i(n, t)$ qui définissent les probabilités que le système survive au temps t et que n particules soient entrées dans le canal durant ce temps. La probabilité de survie correspond à la somme de ces $q_i(n, t)$: $p_s(t) = \sum_{n \geq 0} q_i(n, t)$. L'évolution des probabilités partielles est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dq_i(0, t)}{dt} &= -\lambda(t)q_i(0, t), \\ \frac{dq_i(1, t)}{dt} &= \lambda(t)q_i(0, t) - \lambda(t)q_i(1, t), \\ \frac{dq_i(n, t)}{dt} &= \lambda(t)q_i(n-1, t-1)e^{-\tau \int_{t-1}^t \lambda(t')dt'} - \lambda(t)q_i(n, t), \end{aligned} \quad (\text{II.130})$$

la dernière équation va être utilisée pour $n \geq 2$, et les conditions limites sont $q_i(0, 0) = 1$ et $q_i(n, n-1) = 0$, $n > 0$. Pour $t \rightarrow \infty$ et $t < 0$ les $q_i(n, t)$ sont nulles.

Les deux premières équations correspondent simplement à l'évolution du temps d'un processus inhomogène de Poisson, il ne peut pas y avoir de blocage pour $n = 0, 1$. Les équations suivantes $n \geq 2$ sont plus complexes, puisqu'il y a une contrainte non-Markovienne sur l'entrée des particules. Nous voulons passer de l'état {"non bloqué", $n-1$ particules à être entrées} au temps t , à l'état {"non bloqué", n particules à être entrées} au temps $t + dt$, le canal ne doit pas se bloquer entre le temps t et le temps $t + dt$. Pour cela il faut qu'aucune particule n'arrive dans le canal dans l'intervalle de temps $[t - 1, t]$ et qu'une seule particule entre dans l'intervalle $[t, t + dt]$. Ces probabilités sont données par $e^{-\int_{t-1}^t dt' \lambda(t')}$ et $\lambda(t)dt$, respectivement.

Nous obtenons facilement les solutions des deux premières équations. La première donne

$$q_i(0, t) = e^{-\tau \int_0^t \lambda(t') dt'} , \quad (\text{II.131})$$

qui correspond à la probabilité qu'aucune particule ne soit entrée dans le canal entre 0 et t . La solution de la seconde équation s'écrit :

$$q_i(1, t) = \int_0^t dt' \lambda(t') e^{-\tau \int_0^{t'} ds \lambda(s)} , \quad (\text{II.132})$$

et elle correspond à la probabilité qu'une particule soit entrée dans l'intervalle $[0, t]$. Dans ces deux cas aucune particule ne peut bloquer le canal. Pour $n = 2$ on trouve :

$$\begin{aligned} q_i(2, t) &= \int_0^{t-\tau} dt_1 \lambda(t_1) e^{-\int_0^{t_1} dt' \tau \lambda(t')} \times e^{-\int_{t_1}^{t_1+1} dt' \tau \lambda(t')} \\ &\times \int_{t_1+\tau}^t dt_2 \lambda(t_2) e^{-\int_{t_1+\tau}^{t_2} dt' \tau \lambda(t')} \times e^{-\tau \int_{t_2}^t dt' \lambda(t')} \end{aligned} \quad (\text{II.133})$$

Donnons une interprétation à cette équation où les deux lignes se ressemblent. La première ligne correspond à l'entrée de la première particule et la seconde ligne à l'entrée de la deuxième. Chaque ligne est composée de deux termes, l'entrée de la particule et la probabilité qu'aucune particule n'arrive entre $(t_1, t_1 + 1)$ et $(t_1 + 1, t_2)$, respectivement.

Cette équation peut être simplifiée :

$$q_i(2, t) = \int_{\tau}^t dt_2 \lambda(t_2) \int_0^{t_2-\tau} dt_1 \lambda(t_1) e^{-\int_0^{t_1} dt' \lambda(t')} , \quad t > 1 . \quad (\text{II.134})$$

La dernière exponentielle correspond exactement au terme $q_i(0, t)$ de l'Eq. (II.131). Pour $n > 2$ nous pouvons écrire une forme longue, analogue à $n = 2$ (Eq. (II.133)), que nous réduisons par :

$$q_i(n, t) = \int_{(n-1)\tau}^t dt_n \lambda(t_n) \int_{(n-2)\tau}^{t_n-1} dt_{n-1} \lambda(t_{n-1}) \cdots \int_0^{t_2-1} dt_1 \lambda(t_1) q_i(0, t) , \quad t > n - 1 , \quad (\text{II.135})$$

où t_i correspond à l'entrée de la $i^{\text{ème}}$ particule. Chaque intégrale représente l'entrée d'une particule, où la contrainte est définie par les bornes d'intégration. Chaque particule i peut arriver au plus tôt à un temps $(i-1)\tau$, si t_i est plus petit que cette valeur, un blocage survient. Pour l'éviter il faut au minimum un temps τ entre chaque particule et pour que la particule suivante ne se bloque pas, il faut que la particule arrive avant un temps $t_{i+1} - \tau$.

Grâce à ces résultats on peut écrire la probabilité de survie comme :

$$p_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(t) q_i(0, t) \quad (\text{II.136})$$

où nous introduisons une fonction sans dimension, $z_n(t)$:

$$z_n(t) = \int_{(n-1)\tau}^t dt_n \lambda(t_n) \prod_{i=2}^n \int_{n-i}^{t_{n-i+2}-1} dt_{n-i+1} \lambda(t_{n-i+1}) \quad n \geq 1, \quad t > n-1, \quad (\text{II.137})$$

par définition $z_0(t) = 1$, et $z_1(t) = \int_0^t dt' \lambda(t')$ est simplement le nombre moyen de particules à entrer dans l'intervalle $[0, t]$. Grâce à cette fonction nous pouvons écrire les différentes probabilités partielles de survie $q_i(n, t) = z_n(t) q_i(0, t)$. La fonction $z_n(t)$ admet une relation de récurrence

$$z_n(t) = \int_{(n-1)\tau}^t dt' \lambda(t') z_{n-1}(t' - \tau). \quad (\text{II.138})$$

Avant de passer à des flux inhomogènes nous vérifions que cette approche redonne le résultat obtenu pour la probabilité homogène de Poisson, $\psi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Si $\lambda(t) = \lambda$, nous avons

$$z_n(t) = \theta(t - \tau(n-1)) \frac{(\lambda)^n (t - \tau(n-1))^n}{n!}. \quad (\text{II.139})$$

En sommant sur tous les n et en multipliant par $q_i(0, t) = e^{-\lambda t}$, nous retrouvons l'expression de la probabilité de survie trouvée précédemment, Eq. (II.15).

Grâce à cette fonction sans dimension nous pouvons facilement comprendre pourquoi le changement d'échelle ne fonctionne pas pour toutes les distributions dans le cas d'une dynamique non-Markovienne. Nous considérons par exemple $z_2(t)$ et nous introduisons un changement d'échelle $s(t)$, nous obtenons

$$z_2(t) = \int_{s(\tau)}^{s(t)} ds_2 \int_0^{s(t_2-\tau)} ds_1. \quad (\text{II.140})$$

Pour réduire cela à un flux homogène, il faut que $s(t_2 - \tau) = s(t_2) - s(\tau)$. Cela est vrai pour $\lambda(t) = \lambda$ et d'autre cas spécifiques, mais pas de manière générale.

Grâce à l'approche des probabilités partielles et de la relation de récurrence sur les $z_n(t)$ nous allons pouvoir obtenir des solutions pour la probabilité de survie. Nous commençons par calculer les différentes fonctions $z_n(t)$ pour $1 \leq n \leq n_{max} = [t/\tau] + 1$. Puis, en remplaçant la limite par n_{max} dans l'Eq. (II.136) nous avons une expression simplifiée de $p_s(t)$. Pour certaines distributions le calcul des $z_n(t)$ est trop complexe. L'approximation envisagée est :

$$p_s^{\text{approx}}(t) = \begin{cases} p_s(t), & t \leq t^* \\ p_s^\infty(t) \frac{p_s(t^*)}{p_s^\infty(t^*)}, & t \geq t^* \end{cases} \quad (\text{II.141})$$

où $p_s^\infty(t)$ représente l'approximation de la probabilité de survie donnée par

$$p_s^\infty(t) = e^{-(\lambda - \frac{1}{\tau} L_W(\tau\lambda))t}. \quad (\text{II.142})$$

En prenant $t = t^*$ nous arrivons au même résultat quelle que soit la formule utilisée, et ce temps est choisi différemment suivant les distributions. Au bout d'un certain temps l'approximation p_s^∞ est valable, pour qu'il y ait continuité nous multiplions par $p_s(t^*)$ que nous allons diviser par $p_s^\infty(t^*)$.

Maintenant que nous avons observé de manière approchée la probabilité de survie on va s'intéresser à la distribution des particules sortantes. Nous notons dans cette section $h(m)$ la probabilité que m particules passent avant le blocage³. Pour de faibles valeurs de λ , comme nous l'avons obtenu précédemment, le nombre de particule passantes est supérieur par rapport aux cas avec une forte intensité. Nous calculons les différents $h(m)$. Tout d'abord,

$$h(0) = \int_0^\infty dt_1 \int_{t_1}^{t_1+\tau} dt_2 \lambda(t_1)\lambda(t_2)e^{-\int_0^{t_2} dt' \lambda(t')} . \quad (\text{II.143})$$

Quand deux particules entrantes conduisent à un blocage du canal cela signifie que le délai entre les deux arrivées est inférieur à τ . Les bornes de la deuxième intégrale définissent que la deuxième particule doit arriver entre l'entrée de la première particule, t_1 , et $t_1 + \tau$, pour qu'il y ait un blocage. Cela va être le même raisonnement pour $m > 0$:

$$h(m) = \int_0^\infty dt_1 \int_{t_1+\tau}^\infty dt_2 \cdots \int_{t_{m+1}}^{t_{m+1}+\tau} dt_{m+2} \prod_{i=1}^{m+2} \lambda(t_i) e^{-\int_0^{t_{m+2}} \lambda(t') dt'} . \quad (\text{II.144})$$

Les $m + 1$ particules entrent dans le canal sans se bloquer avec la particule précédente (elles arrivent avec un temps supérieur à $(t_{i-1} + \tau)$, mais la particule $m + 2$ va arriver avec un temps inférieur à $t_{m+1} + \tau$, pour que le système se bloque). Nous vérifions que quand $\lambda(t) = \lambda$ l'équation est réduite à $h(m) = e^{-m\tau\lambda}(1 - e^{-\tau\lambda})$, comme obtenu précédemment, App. A.

À partir de cette équation nous obtenons le nombre moyen de particules sortantes $\langle m \rangle = \sum_0^\infty mh(m)$. Pour la cas homogène de Poisson nous retrouvons l'Eq. (II.19) :

$$\langle m \rangle = \frac{e^{-\tau\lambda}}{1 - e^{-\tau\lambda}} . \quad (\text{II.145})$$

Nous nous intéressons aussi au flux instantané entre t et $t + dt$, noté comme précédemment $j(t)dt$. Nous développons le flux comme :

$$j(t) = \lambda(t - \tau)e^{-\int_{t-\tau}^t \lambda(t') dt'} q_i(0, t - \tau) + \sum_{n \geq 1} \lambda(t - \tau)e^{-\int_{t-2\tau}^t \lambda(t') dt'} q_i(n, t - 2\tau) . \quad (\text{II.146})$$

Le premier terme provient du cas où aucune particule n'est entrée entre 0 et $t - \tau$, et qu'une particule entre au temps $t - \tau$. La particule va donc sortir au temps t , à condition qu'il n'y ait pas eu de blocage donc pas de particule à arriver entre $t - \tau$ et t . La somme va décrire les différentes situations où une particule sort au temps t alors que n particules sont déjà passées par le canal. Pour cela il faut qu'une particule entre au temps $t - \tau$, et la contrainte de blocage impose qu'aucune particule n'arrive entre les temps $t - 2\tau$ et $t - \tau$ ainsi que $t - \tau$ et t . Nous définissons que n particules sont déjà entrées au temps $t - 2\tau$, $q_i(n, t - 2\tau)$.

On peut simplifier cette équation en utilisant $p_s(t) = \sum_{n \geq 0} q(n, t)$:

$$j(t) = \lambda(t - \tau)q(0, t)\theta(t - \tau) + \lambda(t - \tau)[p_s(t - 2\tau)e^{-\int_{t-2\tau}^t \lambda(t') dt'} - q(0, t)]\theta(t - 2\tau) . \quad (\text{II.147})$$

Nous allons à présent utiliser les équations obtenues pour trois différentes formes d'intensité.

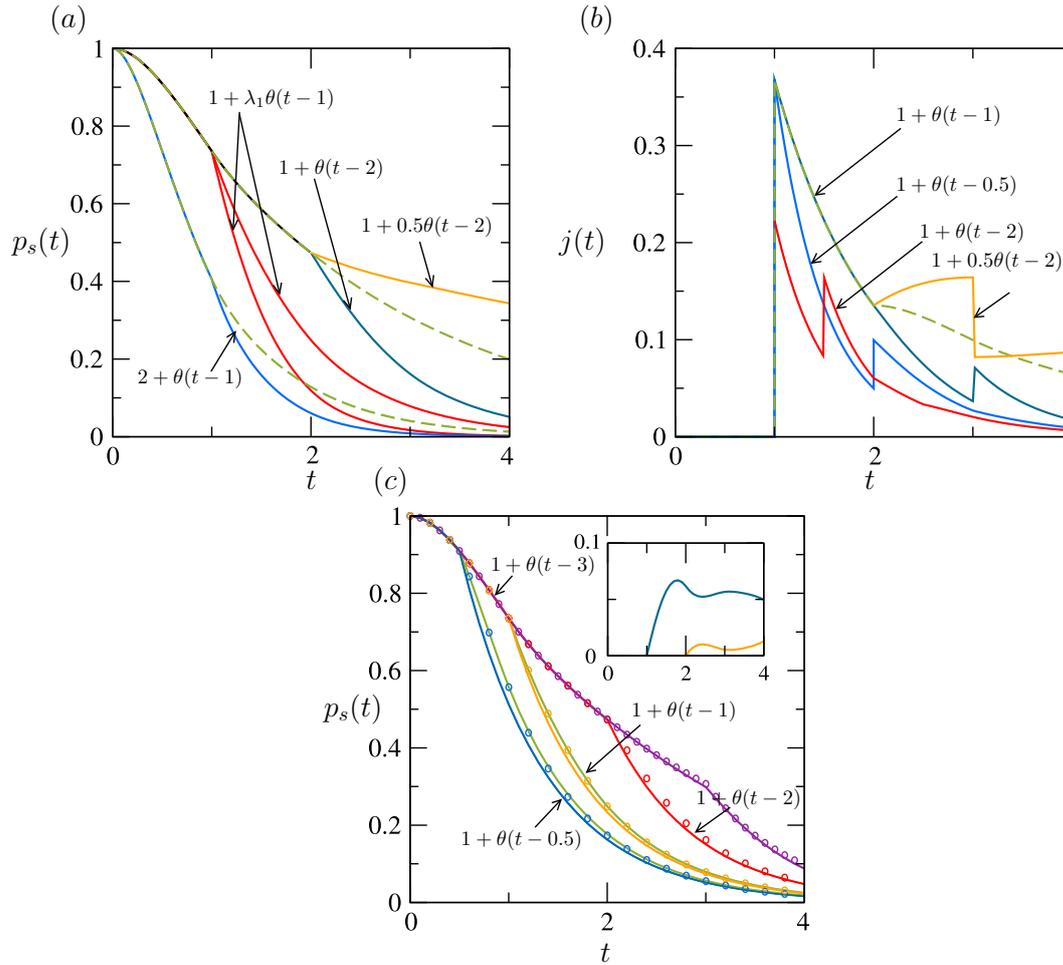


FIGURE II.15 – Nous avons pris $\tau = 1$, (a) Probabilité de survie et (b) Flux sortant l'Eq. (II.147) pour une intensité discontinue pour différentes valeurs de λ_0 et $t-1$, avec $\lambda_1 = 1, 3$ comparée avec le cas homogène (courbe pointillée), en fonction du temps pour différentes valeurs d'intensité. (c) Probabilité de survie exacte, Eq. (II.136) (en cercles), comparé avec les approximations (courbes pleines), Eq. (II.141) pour $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$, avec différentes valeurs de t^* (ligne pleine); ($t_1 = 0.5, t^* = 0.5, 1$), ($t_1 = 1, t^* = 1, 2$), ($t_1 = t^* = 2$), ($t_1 = t^* = 3$). L'insert montre les erreurs relatives de l'approximation pour le cas $t_1 = 1$ et $t^* = 1$ (courbe du haut) et $t^* = 2$ (courbe du bas).

II.5.2 Intensité discontinue

Nous considérons tout d'abord une intensité discontinue, c'est-à-dire qu'elle reste constante jusqu'à un instant t_1 , à partir duquel le flux va être modifié (augmenté ou diminué).

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_0, & t < t_1 \\ \lambda_0 + \lambda_1, & t > t_1. \end{cases} \quad (\text{II.148})$$

3. Cette probabilité correspond à $h(m) = \int_0^\infty dt h(m, t)$.

Nous obtenons facilement, à partir de l'Eq. (II.137) :

$$z_1(t) = \lambda_0 t + \lambda_1(t - t_1)\theta(t - t_1). \quad (\text{II.149})$$

Cela se complique lorsque l'on calcule $z_2(t)$.

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \frac{1}{2}(\lambda_0^2(t-1)^2 + \lambda_1\lambda_0\theta(1-t)\theta(1-t_1) \\ &\quad ((t^2 - 2t - (t_1 - 2)t_1)\theta(t - t_1) + (t_1 - 1)^2) \\ &\quad + \lambda_1\theta(t-1)(\lambda_1 + \lambda_0)(1-t+t_1)^2\theta(t-t_1-1) \\ &\quad + \lambda_1\theta(t-1)\theta(t-t_1) \\ &\quad \lambda_0((t_1 - 1)^2\theta(1-t_1) + t^2 - 2t - (t_1 - 2)t_1)). \end{aligned} \quad (\text{II.150})$$

Nous pouvons difficilement généraliser cette formule aux autres z_n , sauf dans le cas où $t_1 \in \mathbb{N}$. Cependant, pour tout t_1 , nous pouvons utiliser l'approximation, Eq. (II.141), pour simplifier les calculs.

Nous traçons la probabilité de survie pour plusieurs équations du flux discontinu, plusieurs valeurs de t_1 et λ_1 . Nous comparons cette valeur au cas non discontinu, Fig. II.15 (a), ainsi qu'à la valeur approximative donnée par l'Eq. (II.141). Nous remarquons qu'il y a une discontinuité (un *cusps*) à $t = t_1$, lorsque l'intensité varie, la probabilité va être modifiée, si l'intensité augmente alors la courbe va décroître plus rapidement, et au contraire si l'intensité diminue elle va tendre plus lentement vers 0.

Nous observons que le flux aussi est modifié, Fig. II.15 (b). Entre $t = 1$ et $t = t_1$, le flux est inchangé par rapport à l'intensité homogène, la valeur à $t = 1$ est la valeur maximale. Il n'y a aucune particule à passer avant $t = 1$ cela est dû au temps de transit. Si le temps t_1 est plus faible que 1 alors le maximum du flux (à $t = 1$) va être diminué. Lorsque l'intensité après t_1 est augmentée le flux de sortie est lui aussi diminué, car il y a davantage de blocages. Si par contre le flux est diminué après t_1 le flux sortant va être supérieur au flux sortant inhomogène. Nous observons sur toutes les courbes du flux inhomogène, un deuxième maximum plus faible à $t_1 + 1$, cela correspond à la réponse du changement d'intensité : si λ augmente alors à cet instant la valeur est augmentée, au contraire si λ diminue, à cet instant le flux diminue brusquement. Nous montrons aussi sur la Fig. II.15 (c), la comparaison entre les valeurs analytiques exactes, et l'approximation, Eq. (II.141). L'approximation donne une très bonne représentation de la fonction et si l'on augmente la valeur de t^* , l'accord entre les deux courbes augmente. Mais si nous prenons juste $t^* = t_1$ la représentation est très convenable et cela permet d'utiliser seulement la solution homogène, car $p_s(t^*)$ est donné par l'Eq. (II.15).

II.5.3 Intensité exponentielle

À présent nous considérerons une intensité variant de façon exponentielle :

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-\alpha t}, \quad (\text{II.151})$$

cela correspond à un nombre fini de particules émises durant tout le processus λ_0/α . Pour $\alpha > 0$ il y a une chance que toutes les particules passent sans causer de blocage. Cette distribution permet d'obtenir une expression exacte des $z_n(t)$ pour tout n (ce qui était complexe à obtenir pour la distribution précédente) :

$$z_n(t) = \theta(t - (n-1)\tau) \frac{\lambda_0^n e^{-n(n-1)\tau\alpha/2}}{n!\alpha^n} (1 - e^{-\alpha(t-(n-1)\tau)})^n. \quad (\text{II.152})$$

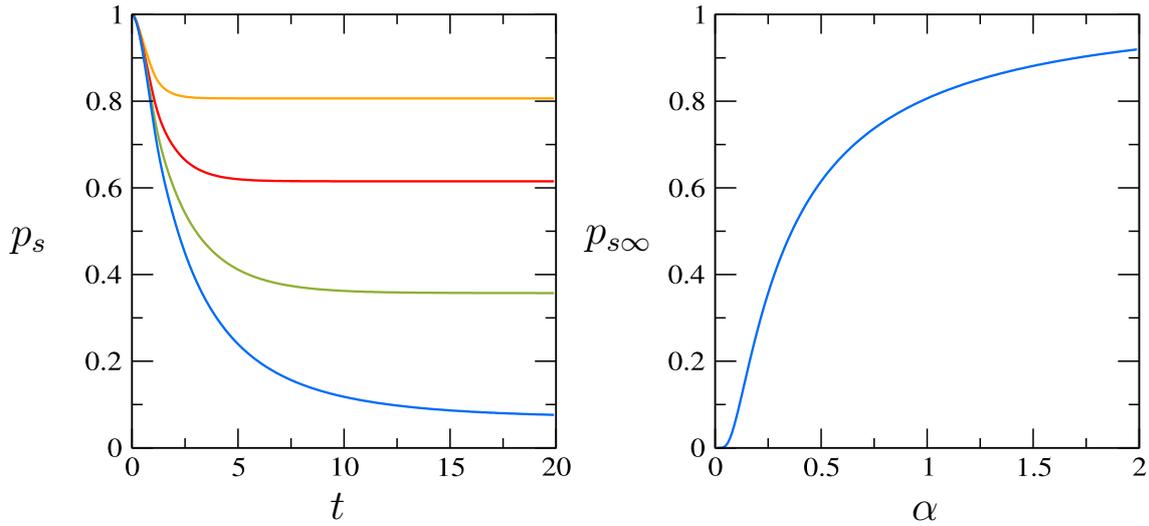


FIGURE II.16 – (a) Probabilité de survie pour une décroissance exponentielle de l'intensité, Eq. (II.151), pour $\alpha = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 1$. (b) Probabilité de survie asymptotique en fonction de α .

Sur la Fig. II.16 est tracée la probabilité de survie pour plusieurs valeurs de α , nous remarquons qu'aux temps longs la probabilité de survie tend vers une constante, qui peut être non nulle. Cela confirme qu'il peut y avoir des situations où aucune particule ne se bloque. Il est ainsi possible de tracer la probabilité asymptotique (aux temps longs) en fonction de α : quand α croît le blocage devient moins probable.

II.5.4 Intensité périodique

Dans cette partie nous allons considérer une variation périodique, sinusoïdale de l'intensité. Le flux de particules d'intensité périodique noté :

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin(\omega t + \phi), \quad (\text{II.153})$$

avec ω la pulsation et ϕ la phase. Nous trouvons à partir de l'Eq. (II.137) et l'Eq. (II.138) :

$$z_1(t) = \lambda_0 t + \frac{\lambda_1}{\omega} (\cos(\phi) - \cos(\omega t + \phi)), \quad (\text{II.154})$$

et

$$z_2(t) = \left(\frac{\lambda_0^2 (t-1)^2}{2} - \frac{\lambda_1}{\omega^2} \left(\frac{\lambda_1}{2} (\cos(\omega t) - \cos \omega) + (t-1)\omega (\lambda_0 \cos(\omega t + \phi) - \lambda_0 \cos \phi + \frac{\lambda_1}{2} \sin \omega) \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_1 \cos(\omega t + 2\phi) \sin^2\left(\frac{\omega}{2}(1-t)\right) + \lambda_0 (\sin(\omega + \phi) - \sin \phi + \sin(\omega(t-1) + \phi) - \sin(\omega t + \phi)) \right) \right) \\ \theta(t-1). \quad (\text{II.155})$$

De même que pour la distribution discontinue les expressions des $z_n(t)$ pour $n > 2$ ne sont pas exprimés car elles sont très longues. La Fig. II.17 montre quelques résultats sur cette distribution. La probabilité de survie oscille autour de la solution homogène. Nous remarquons

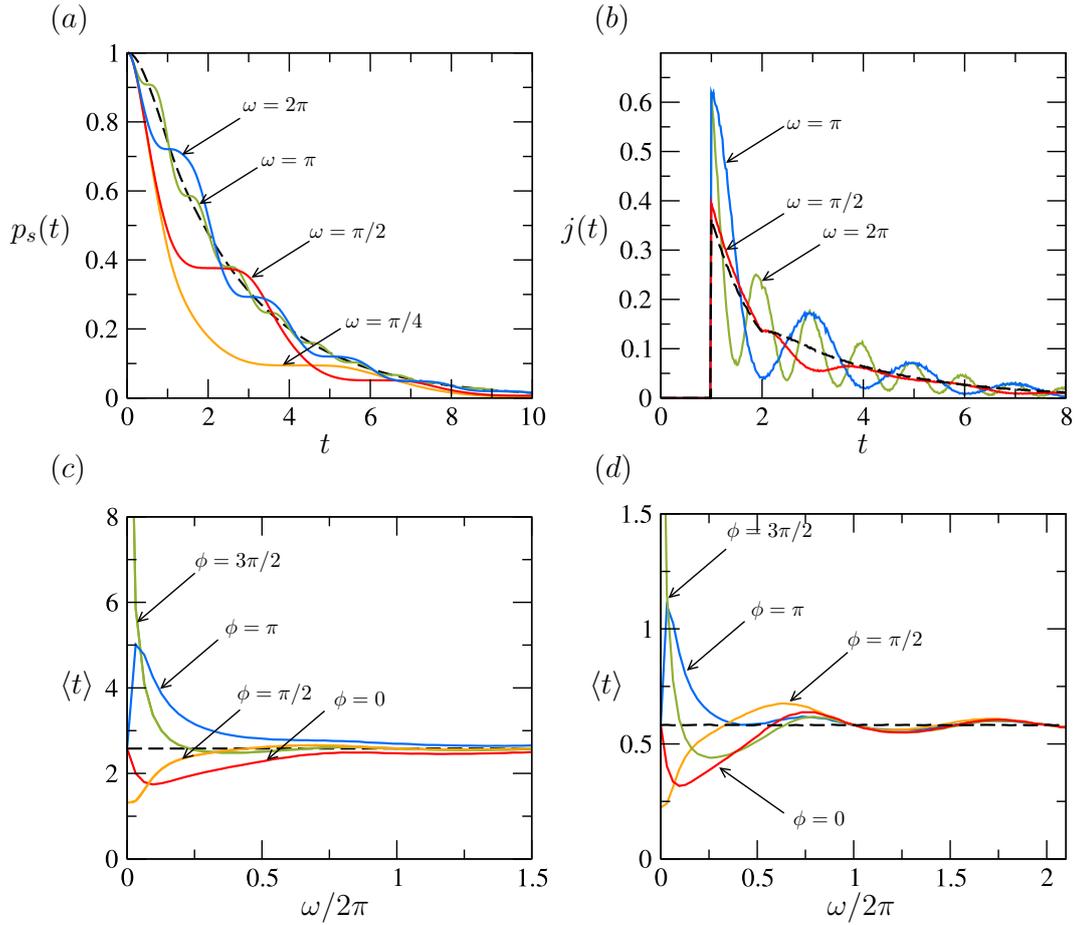


FIGURE II.17 – Comportement du canal avec une variation sinusoïdale du flux d'entrée, l'Eq. (II.153), comparé avec le cas homogène (en courbe pointillée) (a) Probabilité de survie pour différentes valeurs de ω . (b) Flux sortant pour différentes valeurs de ω . (c) Temps moyen de blocage en fonction de ω pour différentes valeurs de ϕ . (d) Le nombre moyen de particules qui sortent en fonction de ω pour différentes valeurs de ϕ .

sur la première figure, Fig. II.17 (a), pour $\lambda_1 \approx \lambda_0$, apparaît des plateaux constants, cela correspond aux modulations du flux périodique. Les plateaux diminuent lorsque le temps augmente, et ils sont plus visibles pour $\lambda = \tau$. Lorsque λ est proche de 0, la situation où une deuxième particule arrive est très peu probable donc la probabilité de survie ne diminue pas. Nous observons qu'au-delà d'un certain temps t le flux devient négligeable et donc la probabilité d'avoir une particule sortante est presque nulle, Fig. II.17 (b). Cela implique que la probabilité qu'une particule soit entrée au temps $t - \tau$ est aussi proche de 0. Lorsque ω augmente, les plateaux deviennent plus courts et plus fréquents, puisque les oscillations du flux entrant sont plus rapprochées. Si la pulsation augmente suffisamment, les résultats vont se rapprocher de la solution homogène, puisque les oscillations sont très courtes en comparaison avec le temps de transit. Nous pouvons aussi analyser le temps moyen de blocage en fonction de la pulsation ω , Fig. II.17 (c). Cette quantité dépend de la pulsation, pour de faibles valeurs, et surtout de la phase ϕ . Pour $\phi = 0$, $\langle t \rangle$ diminue jusqu'à une valeur minimale, ensuite la

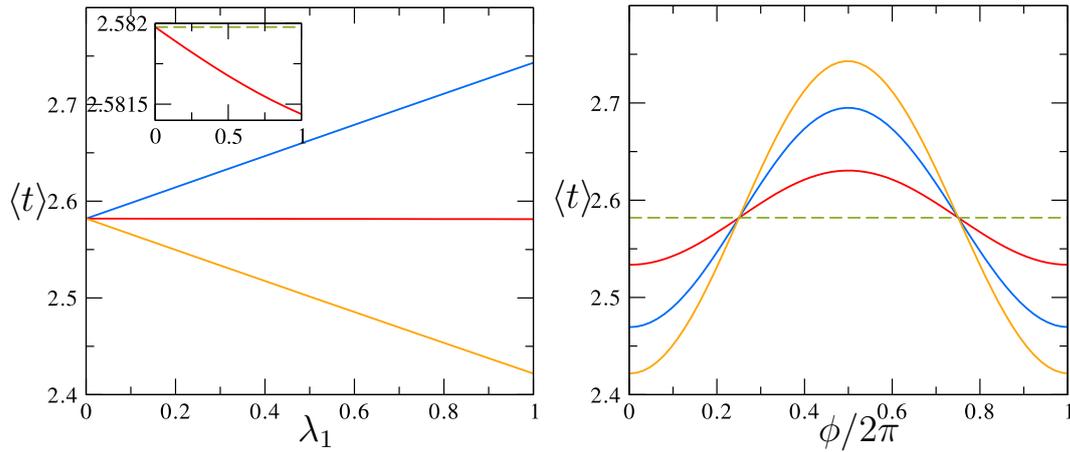


FIGURE II.18 – Temps moyen de survie pour un système avec une intensité périodique avec une période égale au temps de transit $\tau = 1$ ($\omega = 2\pi$) (a) en fonction de λ_1 pour $\phi = \pi, \pi/2, 0$ de haut en bas et (b) en fonction de $\phi/2\pi$ pour $\lambda_1 = 1, 0.7, 0.3$ de haut en bas à partir de l'Eq. (II.158). Les courbes pointillées montrent le cas homogène ($\lambda = \text{constant}$). Quand $\phi = \pi/2$ le temps moyen de blocage est presque identique au cas homogène, l'insert représente l'écart faible entre les deux cas.

valeur va osciller très proche de la valeur homogène. Lorsque $\phi = \pi/2$, le flux va lui décroître pour les premiers temps, donc la valeur du temps moyen de blocage augmente jusqu'à une valeur supérieure à la valeur homogène. Lorsque l'on augmente la pulsation, $\omega \leq 2\pi$, la valeur est proche d'une constante égale au temps moyen pour une intensité homogène, la dépendance en ϕ est faible. Pour $\omega = 2\pi$ la valeur de $\langle t \rangle$ est la même pour $\phi = \pi/2$ et $\phi = 3\pi/2$. Le nombre moyen de particules sortantes ressemble au temps moyen de blocage, Fig. II.17 (d). À partir de $\omega = 2\pi$ cette valeur est indépendante de ϕ et de λ_1 , il est le même que le cas homogène, l'Eq. (II.145).

Nous observons donc pour $\omega = 2\pi$, c'est-à-dire lorsque la pulsation est égale au temps de transit, les expressions des $z_n(t)$, l'Eq. (II.137) peuvent se simplifier :

$$z_n(t) = \frac{1}{n!} [\lambda_0(t - (n-1)\tau) + \frac{\lambda_1}{2\pi} (\cos \phi - \cos(2\pi t + \phi))]^n \theta(t - (n-1)\tau). \quad (\text{II.156})$$

Nous remarquons que pour cette valeur précise, le changement d'échelle peut être appliqué, $s(t - \tau) = s(t) - s(\tau)$. Nous obtenons directement l'Eq. (II.156) en substituant $s(t)$ par $z_1(t)$ pour t dans l'Eq. (II.137). À partir de ce changement d'échelle il est possible d'obtenir le temps moyen de blocage grâce à l'équation :

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty dt p_s(s(t)), \quad (\text{II.157})$$

avec $p_s(t)$ la probabilité de survie homogène. Finalement,

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty dx \left[1 + e^{\lambda_0} (e^{z_1(x, \lambda_1, \phi) e^{-\lambda_0}} - 1) \right] e^{-z_1(x, \lambda_1, \phi)}. \quad (\text{II.158})$$

Nous remarquons que lorsque $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, etc, la moyenne du temps de blocage est proche de celle du cas homogène. Pour $\phi = 0[\pi]$, le temps moyen $\langle t \rangle$ augmente presque linéairement

lorsque λ décroît, Fig. II.18 (a). Le temps moyen de blocage dépend de λ_1 et ϕ puisque qu'il est calculé à partir d'une intégrale sur tout le temps, alors que $h(m)$ dépend juste des propriétés à temps infini.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté et généralisé un modèle stochastique qui décrit un effet de colmatage déclenché par la limite de capacité du canal. Un premier modèle avait été introduit où deux particules présentes dans le canal créent un blocage ($N = 2$) avec une distribution Poissonnienne d'entrée [65]. Le premier travail effectué a été de généraliser ce modèle pour une distribution quelconque et pour une plus grande valeur seuil de particule $N > 2$. Nous avons observé que le cas $N = 2$ était soluble pour toutes les distributions mais le cas $N = 3$ est soluble seulement pour la distribution de Poisson. Les travaux sur les corrélations nous ont permis de remarquer que les corrélations entre deux particules ont une valeur stationnaire qui augmente lorsque N augmente car l'intervalle entre deux particules diminue, mais les oscillations sont moins prononcées car il y a une plus faible contrainte sur les particules dans ce modèle. Pour $N > 3$ les équations deviennent des équations intégral-différentielles non solubles, mais nous avons pu avec d'autres arguments obtenir une approximation intéressante. Le résultat le plus pertinent est que le temps moyen de blocage est en loi de puissance en λ pour une faible intensité, cela revient à dire qu'augmenter N va augmenter $\langle t \rangle$ d'un facteur $1/\lambda^N$. Le blocage devient extrêmement moins probable et se fait beaucoup plus tardivement lorsque N augmente. De plus ce résultat est similaire au temps moyen de blocage pour $N = 2$ avec une distribution Γ : en prenant $\alpha = N$ le temps moyen pour $\lambda\tau \ll 1$ est analogue au système où N particules bloquent le système. De plus nous avons analysé un flux d'entrée avec une intensité inhomogène pour $N = 2$, où des approximations sur la probabilité de survie sont possibles. Des résultats exacts peuvent être obtenus pour une variété de formes d'intensité. Pour une intensité périodique, le temps moyen de blocage dépend de λ_1 et de la phase ϕ , alors que le nombre de particules sortantes dépend seulement des propriétés à temps infini.

Modèle à plusieurs canaux

Sommaire

III.1	Modèle d'un amas de fibres	57
III.1.1	Description générale	58
III.1.2	Redistribution locale	59
III.1.3	Comparaison entre <i>GLS</i> et <i>LLS</i>	59
III.2	Description du modèle multicanaux	61
III.3	Canaux indépendants	62
III.3.1	Résultats généraux	62
III.3.2	Cas $N = 1$	64
III.3.3	Cas $N = 2$	66
III.4	Canaux couplés	67
III.4.1	Résultats généraux	67
III.4.2	Cas $N = 1$	69
III.4.3	Seuil de blocage $N = 2$	71
III.5	Canaux couplés pour un seuil de particules bloquantes quelconque, N	77
III.5.1	Comparaison entre le temps moyen de N_c canaux et le temps moyen d'un seul canal	78
III.5.2	Flux par canal identique, λ	81
III.5.3	Flux total identique, Λ	82
III.6	Blocage avec les propriétés d'une répartition locale du flux	88
III.6.1	Ligne de canaux (une dimension)	89
III.6.2	Répartition locale à deux dimensions	92
III.6.3	Influence de la coordination	96
III.7	Conclusion	99

III.1 Modèle d'un amas de fibres

Dans le précédent chapitre, nous avons introduit un modèle de référence soluble correspondant à la situation où un canal est bloquant quand se trouve deux particules simultanément dans celui-ci. Puis, nous avons analysé plusieurs extensions de ce modèle, une première où le seuil de blocage intervient quand N particules sont au même instant dans le canal, une deuxième liée à l'intensité d'entrée du flux. Nous étudions dans ce chapitre l'influence des effets collectifs dans le phénomène de blocage intervenant dans des systèmes multicanaux. L'exemple qui illustre au mieux ce phénomène est celui de la filtration par un tamis : le flux de particules arrive sur un système de mailles, lorsque qu'une maille est obstruée par des particules les autres continuent de tamiser. De plus une particule allant sur une maille bloquée

peut glisser et le bouchon ne grandit pas. S'il n'y avait qu'une seule maille, le système se bloquerait beaucoup trop vite, et le substrat n'aurait pas le temps de se filtrer. De même, en supermarché, les caisses sont multipliées pour éviter que les clients attendent trop longtemps. Un modèle à plusieurs canaux est proche du modèle existant, celui d'un amas de fibres (*Fiber bundle model*), qui décrit une collection de fibres associées en parallèle sur lesquelles est exercée une force qui peut progressivement casser les fibres [78]. Une fois l'une d'elles cassée, la force peut être redistribuée à toutes les fibres restantes ou aux plus proches voisins. Ces systèmes ont suscité un grand intérêt dans la littérature pour modéliser par exemple la dynamique de résistance des matériaux. Dans ce chapitre nous allons tout d'abord présenter des résultats et des définitions du modèle *FBM*, puis nous allons étudier un modèle multicanaux aux mêmes propriétés que le modèle de référence. Notre modèle a un blocage différent du modèle de fibres, en effet chaque fibre peut supporter une certaine contrainte et si celle-ci est dépassée alors elle se rompt. Dans notre modèle le blocage est défini par un événement ponctuel, à savoir N particules simultanément dans le canal. Lorsque les fibres se cassent la contrainte est directement répartie, et les fibres se cassent immédiatement si jamais elles supportent trop de charge. Ce côté immédiat du blocage n'est pas le cas pour le modèle du pont, en effet l'intensité par canal va augmenter mais le blocage ne se fait pas directement car il faut attendre que N particules soient dans le canal. Les deux modèles présentent des similitudes que nous allons par la suite identifier.

III.1.1 Description générale

Le modèle d'amas de fibres, que nous noterons *FBM* par la suite, a été étudié depuis des années pour expliquer une variété de phénomènes de fracture. Il représente un modèle stochastique de fracture dans un matériaux soumis à une charge ou une contrainte externe. Il est composé de fibres qui sont exposées à une contrainte externe le long de la direction des fibres (la charge agit dans une seule direction). Chaque fibre a une certaine capacité, ou une valeur de charge limite au delà de laquelle la fibre va se casser si la valeur de la charge excède la valeur seuil. La charge supportée par cette fibre doit alors être répartie à travers les autres fibres du système [78–80]. L'augmentation de la charge des autres fibres va influencer sur la fracture des fibres suivantes, nous allons voir apparaître un effet de cascade accélérée, c'est-à-dire un enchaînement de rupture se produisant très rapidement et conduisant à terme à la scission de l'ensemble des fibres¹. Le modèle introduit trois paramètres essentiels, le nombre d'éléments N_c , la distribution de probabilité du seuil de résistance de chaque élément et la règle de transfert de charges après les fractures.

Il y a deux grands types de *FBM*, le premier avec une répartition globale des charges (*global load sharing*), que nous noterons *GLS*, dans lequel la charge de la fibre cassée est distribuée également entre toutes les autres fibres. Le second avec une répartition locale des charges (*local load sharing*), *LLS*, où la charge est répartie seulement entre quelques fibres. Ce type de répartition peuvent être adaptée à notre modèle de blocage à multicanaux. La répartition globale correspond, pour notre modèle, au cas multicanaux où l'intensité des canaux bloqués est redistribuée entre tous les canaux encore ouverts [78].

1. Ce type de ruptures se retrouve dans plusieurs situations physiques, les avalanches, les tremblements de terre, les embouteillages, les coupures d'électricités, l'ingénierie (textiles) [81].

III.1.2 Redistribution locale

La répartition locale est introduit par Harlow et Phoenix en 1978 [82]. Les premiers résultats obtenus sont surtout numériques, les généralisations analytiques étant difficiles à obtenir. Dans ces articles sont étudiées des chaînes de fibres en parallèle (système unidimensionnel).

Il y a trois modèles stochastiques de redistribution de la charge dans la littérature :

1. la charge de l'élément cassé est redistribuée à un nombre fixé d'éléments choisis aléatoirement. [83]
2. Tous les éléments obtiennent une fraction aléatoire de la charge de l'élément endommagé [84].
3. La charge est redistribuée aléatoirement aux plus proches voisins [85][86].

III.1.2.a Redistribution aux plus proches voisins

Nous considérons plus précisément le cas où le flux est redistribué entre les plus proches voisins. Dans plusieurs articles [85–88] la contrainte, σ , est distribuée uniformément de distribution cumulative $P = \sigma$ ($0 \leq \sigma \leq 1$) ou avec une distribution de Weibull donnée par :

$$P(\sigma) = 1 - e^{-(\sigma/\lambda)^m}. \quad (\text{III.1})$$

La force totale appliquée au système reste constante, et dans l'état initial chaque fibre supporte une contrainte $\sigma = F/N_c$ avec N_c le nombre de fibres. Dans le cas unidimensionnel [78] si un système a n_1 fibres cassées à droite et n_2 fibres cassées à gauche alors sa charge appliquée est de

$$\sigma[1 + \frac{1}{2}(n_1 + n_2)] = f(2 + n_1 + n_2). \quad (\text{III.2})$$

Ici $f = \frac{F}{2N_c}$ est la moitié de la force par fibre.

III.1.3 Comparaison entre *GLS* et *LLS*

Dans les deux modèles, répartition globale ou locale, nous voyons apparaître un effet de cascade accélérée correspondant à une dynamique où les fibres se rompent de plus en plus rapidement. Lorsqu'une fibre se casse la contrainte est appliquée aux autres fibres, donc la charge par fibre augmente. Nous pouvons définir l'avalanche (ou le *Burst*, Δ) comme le nombre de fibres qui se brisent durant un temps faible dt . On peut étudier la distribution de l'avalanche (du *Burst*) $D(\Delta)$, pendant tout le processus jusqu'à ce qu'il y ait rupture totale du système. Nous pouvons ainsi repérer les différences entre les deux types de répartitions ; l'avalanche étant plus importante pour le cas *LLS*. Dans le cas *GLS* il est montré que la forme de la distribution de l'avalanche suit une loi de puissance,

$$\frac{D(\Delta)}{N} = C\Delta^{-\xi}, \quad (\text{III.3})$$

dans la limite $N \rightarrow \infty$ [78]. Avec $D(\Delta)/N$ la moyenne du nombre d'avalanches de taille Δ par nombre de fibres, et C un préfacteur. Pour *GLS*, $\xi = \frac{5}{2}$ l'exposant universel, Fig. III.1 (a) et (b). Pour *LLS* il semble que la distribution soit aussi en loi de puissance mais l'exposant est supérieur, $\xi = 5$, Fig. III.1 (c). Le brisure totale du système est plus rapide pour le cas d'une répartition locale donc l'effet cascade est donc plus important. C'est à dire que le temps de

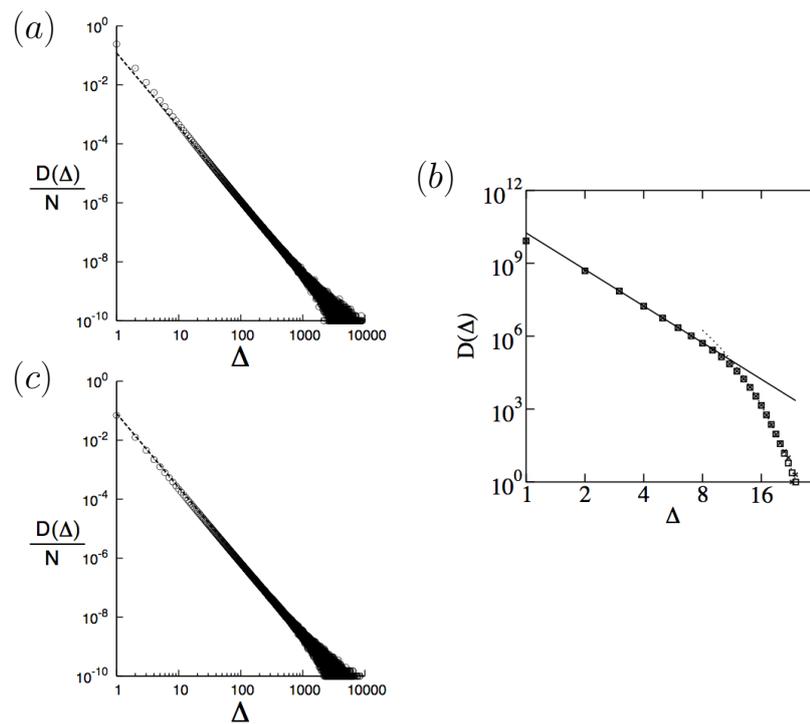


FIGURE III.1 – La distribution d’avalanches par fibre $D(\Delta)/N$ dans le cas d’une répartition globale pour (a) une distribution uniforme et pour (b) une distribution de Weibull. La ligne pointillée représente la loi de puissance $\xi = \frac{5}{2}$ pour $N = 10^6$ fibres [78]. (c) Le cas d’une répartition locale pour $N = 2000$ fibres, la ligne pleine montre la loi de puissance Δ^{-5} , pour une distribution de Weibull [78].

fracture entre deux fibres décroît plus rapidement ce qui est logique puisque la charge sur certaines fibres va être plus élevée dans le premier cas.

La valeur de la charge externe critique, σ_c , est différente dans les deux modèles. Il y a plusieurs manières de définir cette contrainte : nous pouvons choisir de la prendre comme étant la contrainte initiale pour laquelle à la fin de l'expérience toutes les fibres sont brisées, $\phi(\sigma_c) = 0$ [89], en notant $\phi(\sigma)$ la fraction de fibre intacte à la fin de l'expérience ; ou la valeur pour laquelle $\phi(\sigma_c) = \frac{1}{2}$. Il est démontré que pour le cas *LLS* cette valeur est proportionnelle à $\frac{1}{\ln(N_c)}$, ceci quelle que soit la dimension et le réseau utilisé. Dans l'article [85] les auteurs étudient des réseaux simples carrés, hexagonaux et triangulaires. Le matériau est hétérogène c'est-à-dire que la contrainte maximale que peut supporter chaque fibre est différente σ_{th}^i avec $i = 1, 2, \dots, N_c$, σ_{th}^i est cette contrainte limite à partir de laquelle la fibre i peut se casser, la contrainte appliquée sur la fibre i étant σ^i . Ce résultat se retrouve pour plusieurs formes de système, les plus étudiés étant un système à une dimension ou à deux dimensions pour des réseaux carrés (quatre plus proche voisins), triangulaire (trois plus proches voisins) [87], hexagonal (six plus proches voisins).

Nous allons maintenant étudier le modèle du pont dans le cas multicanaux et avec un seuil de N particules.

III.2 Description du modèle multicanaux

Nous considérons dans ce chapitre des effets collectifs lorsque plusieurs canaux agissent en même temps [90]. Les particules entrent suivant une distribution de Poisson dans un système de N_c canaux parallèles et elles sortent après un temps de transit τ . La distribution a une intensité λ_i constante, avec i dépendant du canal considéré. Un canal se bloque lorsque N particules sont présentes au même instant. Pour cette généralisation, la probabilité de survie du système est notée $P_{SN_c}(t)$; le système survit tant qu'au moins un des N_c canaux reste encore ouvert. Le temps moyen de blocage sera noté $\langle t_{N_c} \rangle$. Pour résoudre le modèle, on définit $Q_k(t)$ comme la probabilité que k des N_c canaux soient bloqués au temps t , ($k = 0, \dots, N_c$). Nous en déduisons facilement que

$$Q_k(0) = 0, \quad k > 0 \quad (\text{III.4})$$

$$Q_0(0) = 1, \quad (\text{III.5})$$

puisqu'au temps initial, aucune particule n'est entrée donc aucun canal n'est bloqué. La loi de conservation de la probabilité totale s'exprime comme $\sum_{k=0}^{N_c} Q_k(t) = 1$ puisque la somme décrit toutes les situations possibles. Nous pouvons aisément obtenir la probabilité de survie à partir de ces fonctions :

$$P_{SN_c}(t) = \sum_{k=0}^{N_c-1} Q_k(t) = 1 - Q_{N_c}(t), \quad (\text{III.6})$$

puisque $Q_{N_c}(t)$ est la probabilité que tous les canaux soient bloqués, cela correspond à la probabilité que le système soit complètement fermé. Lorsque que nous avons la probabilité de survie, nous pouvons en déduire le temps moyen de blocage :

$$\langle t_{N_c} \rangle = \int_0^{\infty} dt P_{SN_c}(t). \quad (\text{III.7})$$

Nous pouvons définir plusieurs densités de blocage : les densités de probabilités $F_k(t)$ que le $k^{\text{ème}}$ canal se bloque, la densité de probabilité que le dernier canal, entraînant le blocage complet du système est donc $F_{N_c}(t)$. À partir des probabilités $Q_k(t)$ nous écrivons :

$$\int_t^\infty dt' F_k(t') = Q_0(t) + Q_1(t) + \dots + Q_{k-1}(t), \quad (\text{III.8})$$

puisque l'intégrale correspond à la probabilité d'avoir un $k^{\text{ème}}$ canal qui se bloque à un instant plus grand que t , il est donc logique que celle ci soit égale à la somme des probabilités d'avoir moins de $k - 1$ canaux bloqués à l'instant t . Nous pouvons calculer $F_k(t)$ grâce à :

$$F_k(t) = - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{dQ_n(t)}{dt} \quad (\text{III.9})$$

La probabilité d'avoir le $k^{\text{ème}}$ blocage entre t et $t + dt$ est juste $F_k(t)dt$. Le temps moyen du $k^{\text{ème}}$ blocage, noté $\langle t_k \rangle$ se calcule à partir de la densité de probabilité,

$$\langle t_k \rangle = \int_0^\infty dt t F_k(t) = \int_0^\infty dt \sum_{n=0}^{k-1} Q_n(t) \quad (\text{III.10})$$

cela correspond à la moyenne d'avoir k blocages sur tous les temps. Une autre observable intéressante est la fraction de canaux ouverts en fonction du temps, noté $\Phi(t)$.

$$\Phi(t) = \frac{1}{N_c} \sum_{k=0}^{N_c-1} (N_c - k) Q_k(t). \quad (\text{III.11})$$

La somme est sur toutes les probabilités d'événements possibles qui admettent au moins un canal encore ouvert. Nous calculons la moyenne du nombre de canaux ouverts à l'instant t divisé par le nombre total de canaux.

Comme dans le modèle d'amas de fibres, le comportement est très lié à la répartition du flux (de la charge) quand un canal se bloque. Nous allons, dans ce chapitre, étudier trois cas : dans un premier temps le flux par canal reste constant, donc les canaux sont indépendants les uns des autres. Dans un second temps, le flux total reste constant, lors d'un blocage le flux du canal bloqué est redistribué également entre tous les canaux encore ouverts (*GLS*). Enfin le flux est redistribué aux plus proches voisins (*LLS*). Dans le *FBM* le premier modèle n'est pas étudié car dans le cas des fibres la tension totale appliquée reste constante lorsqu'une fibre se casse. Certaines situations correspondent à ce modèle, par exemple dans les chaînes d'assemblages avec plusieurs machines en parallèle qui peuvent aléatoirement se casser, alors que la maintenance et la production peuvent être complètement indépendantes d'une machine à une autre [91]. Lorsqu'une pression est appliquée sur un système de fibres, si une d'elles se casse, la force induite reste la même mais la charge est redistribuée à travers les fibres restantes.

Nous choisissons pour la suite que tous les canaux ont la même intensité λ à $t = 0$.

III.3 Canaux indépendants

III.3.1 Résultats généraux

Dans cette section nous allons discuter du cas où le flux par canal est constant jusqu'au blocage complet du système. Ce modèle simple nous permet d'obtenir des résultats exactes

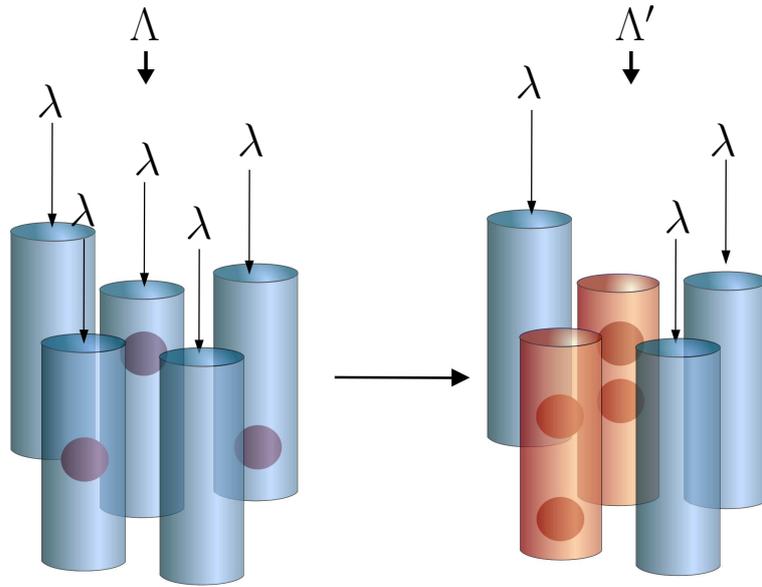


FIGURE III.2 – *Modèle des canaux indépendants, (a) l'intensité totale moyenne entrante est $\Lambda = N_c\lambda$ et est répartie sur N_c canaux. (b) k canaux se bloquent, l'intensité totale décroît alors à $\Lambda' = (N_c - k)\lambda$.*

pour commencer à comprendre l'influence de l'augmentation du nombre de canaux. Les canaux sont indépendants entre eux, le flux total va diminuer, si k canaux sont bloqués alors le flux devient $\sum_{n=k}^{N_c-1} \lambda = (N_c - k)\lambda$, avec $N_c - k$ le nombre de canaux encore ouverts (voir Fig. III.2).

Les fonctions $Q_n(t)$ d'un cas de canaux dissociés sont simples, puisque les probabilités de blocages sont indépendantes entre elles. La probabilité qu'un canal survive jusqu'au temps t , est la probabilité de survie du modèle à un canal $p_s(t)$. La probabilité qu'aucun canal ne soit bloqué est $p_s(t)^{N_c}$, et la probabilité qu'un canal soit bloqué est donné par $N_c(1 - p_s(t))p_s(t)^{N_c-1}$, c'est-à-dire la probabilité jointe qu'un canal se bloque, choisi parmi N_c multiplié par la probabilité que tous les autres canaux ne se bloquent pas. Cela correspond à une distribution binomiale, pour k blocages parmi N_c canaux indépendants avec une probabilité de blocage de $(1 - p_s(t))$, nous obtenons :

$$Q_k(t) = \frac{N_c!}{(N_c - k)!k!} p_s(t)^k (1 - p_s(t))^{N_c - k}. \quad (\text{III.12})$$

La moyenne du nombre de canaux bloqués est donnée par la valeur moyenne de la distribution binomiale $\langle k \rangle = N_c p_s(t)$ et la variance $\langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = N_c p_s(t)(1 - p_s(t))$. La probabilité de survie du système entier, c'est-à-dire qu'au moins un canal survive, s'obtient directement à partir de l'Eq. (III.6), puisque $Q_{N_c}(t) = (1 - p_s(t))^{N_c}$,

$$P_{SN_c}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{N_c} (1 - p_s(t, \lambda)). \quad (\text{III.13})$$

En insérant l'Eq. (III.12) dans l'Eq. (III.9) nous obtenons la probabilité de densité de blocage,

$F_k(t)$:

$$F_k(t) = \frac{N_c!}{(N_c - k)!(k - 1)!} p_s(t)^{N_c - k} [1 - p_s(t)]^{k-1} f(t), \quad (\text{III.14})$$

$f(t) = -\frac{dp_s(t)}{dt}$ (Eq. (II.2)). En exprimant le temps moyen de blocage à partir de l'Eq. (III.7) nous trouvons

$$\langle t_{N_c} \rangle = \int_0^\infty dt \left(1 - \prod_{i=1}^{N_c} (1 - p_s(t, \lambda)) \right). \quad (\text{III.15})$$

Nous introduisons un changement de variable $u = 1 - p_s(t)$ qui nous permet d'écrire la formule

$$\langle t_{N_c} \rangle = \int_0^1 du \frac{(1 - u^{N_c})}{f[p_s^{-1}(1 - u)]}. \quad (\text{III.16})$$

La dernière grandeur regardée est la fraction de canaux ouverts en fonction du temps. En substituant l'Eq. (III.12) dans l'Eq. (III.11) nous obtenons :

$$\Phi(t) = p_s(t). \quad (\text{III.17})$$

En effet, la fraction de canaux ouverts va correspondre à la probabilité d'un canal d'être ouvert. Ce qui est cohérent avec l'hypothèse d'indépendance des canaux.

III.3.2 Cas $N = 1$

Nous allons étudier le cas le plus simple où $N = 1$, c'est-à-dire que dès lors qu'une particule entre dans le canal celui-ci se bloque. Dans ce cas il n'y a pas de flux sortant, toutes les particules restent piégées dans le système. Pour ce système, la probabilité de survie d'un seul canal est $p_s(t) = e^{-\lambda t}$. D'après l'Eq. (III.13) la probabilité de survie s'écrit

$$P_{SN_c} = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^{N_c}. \quad (\text{III.18})$$

De même il est aisé de calculer avec l'Eq. (III.14) $F_k(t)$:

$$F_k(t) = \frac{N_c!}{(N_c - k)!(k - 1)!} \lambda e^{-\lambda(N_c - k + 1)t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1}, \quad (\text{III.19})$$

pour $k = 1, 2, \dots, N_c$. Nous traçons pour $\lambda = 1$ ces différentes fonctions sur la Fig. III.3 (a). D'après l'Eq. (III.16)

$$\begin{aligned} \langle t_{N_c} \rangle &= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 du \frac{(1 - u^{N_c})}{1 - u} = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 du \left(\sum_{i=0}^{N_c-1} u^i \right) = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N_c} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} H_{N_c} \approx \frac{1}{\lambda} \ln(N_c), \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

avec $u = 1 - e^{-\lambda t}$ et H_N est le $N^{\text{ème}}$ nombre harmonique ($H_0 = 0$). La fonction diverge logarithmiquement pour un grand nombre de canaux, le temps moyen de blocage va augmenter très lentement avec la taille du système. La variance est :

$$\langle t_{N_c}^2 \rangle - \langle t_{N_c} \rangle^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\pi^2}{6} - \psi^{(1)}(N_c + 1) \right], \quad (\text{III.21})$$

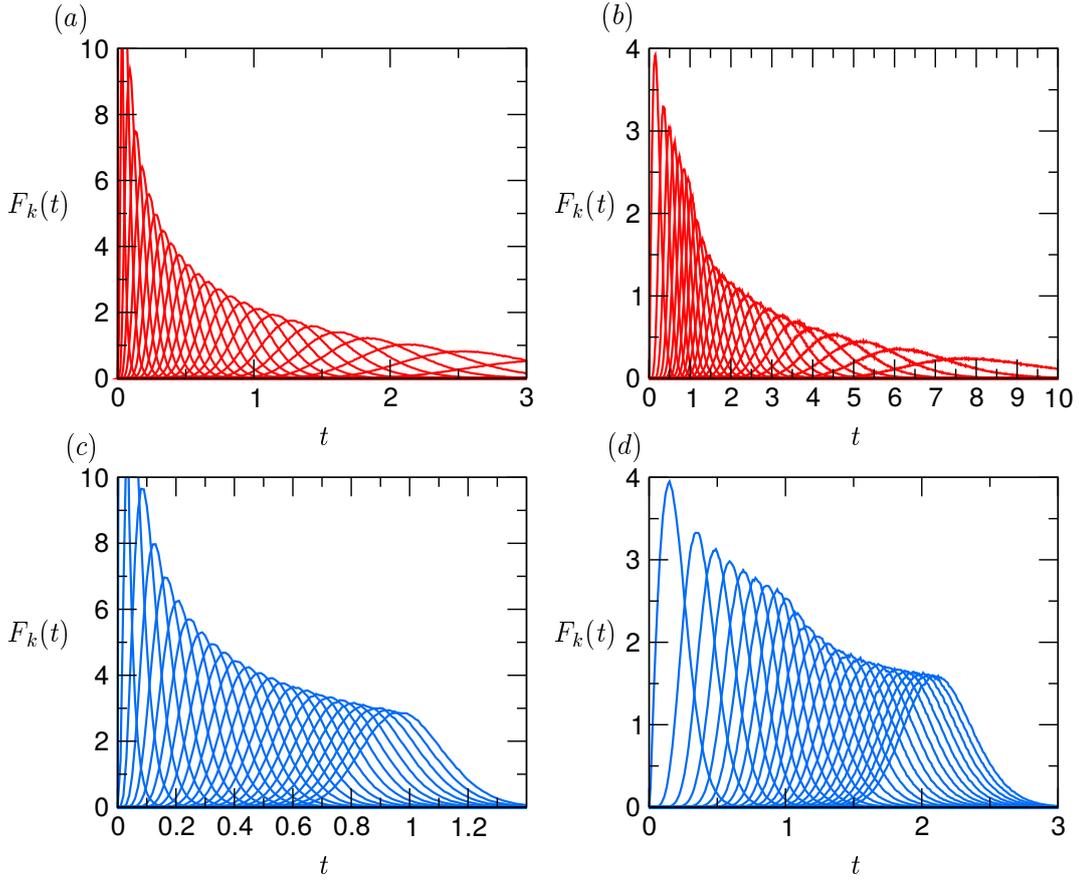


FIGURE III.3 – Distribution du $k^{\text{ème}}$ temps de blocage pour un système avec $N_c = 50$ canaux, pour $k = 1, 2, \dots, 50$ avec $\lambda = 1$ et $\tau = 1$. Dans les cas des canaux indépendants (en rouge), les résultats numériques pour (a) $N = 1$, (b) $N = 2$. Dans les cas des canaux dépendants (en bleu), les résultats numériques pour (c) $N = 1$, (d) $N = 2$.

où $\psi^{(m)}(x)$ est la fonction polygamma, $\psi^{(1)}(x) \sim 1/x$, $x \rightarrow \infty$. La variance approche une valeur constante $\frac{\pi^2}{6\lambda^2}$ quand $N_c \rightarrow \infty$. Nous calculons aussi plus précisément le temps moyen du $k^{\text{ème}}$ blocage :

$$\langle t_k \rangle = \frac{H_{N_c} - H_{N_c - k}}{\lambda}. \quad (\text{III.22})$$

Par exemple pour $k = 1$, le temps moyen du premier blocage est $\langle t_1 \rangle = \frac{1}{N_c \lambda}$, le blocage du premier canal se fait donc N_c fois plus rapidement que le modèle à un canal. Nous analysons l'évolution des temps de blocages en calculant le temps entre deux blocages successifs :

$$\langle t_{k+1} \rangle - \langle t_k \rangle = \frac{1}{\lambda(N_c - k)}. \quad (\text{III.23})$$

Nous observons que le temps entre deux blocages augmente lorsque k augmente. Le blocage se fait donc de plus en plus lentement. La Fig. III.3 (a) montre la densité de blocage $F_k(t)$ pour un système $N = 1$ indépendant, $N_c = 50$, $\lambda = 1$ et $\tau = 1$. Nous remarquons sur la figure une décelération du phénomène de blocage au cours du temps.

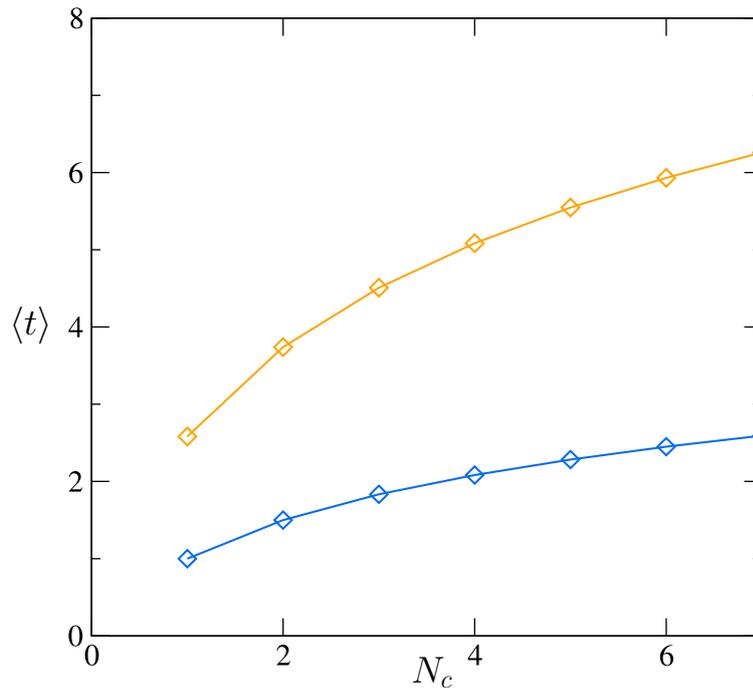


FIGURE III.4 – Temps moyen de blocage pour un système de N_c canaux indépendants, et $\lambda = 1$ et $\tau = 1$ en fonction de N_c pour $N = 1$, en bas, et $N = 2$, en haut, résultats numériques en losanges et résultats exacts en lignes pleines.

III.3.3 Cas $N = 2$

Augmentons maintenant le seuil de particules bloquantes, la probabilité de survie dépend uniquement de N et de $p_s(t)$ ce qui permet d'obtenir une expression exacte pour $N = 2$. Pour le temps moyen de blocage, à partir de l'Eq. (III.16) nous obtenons une expression exacte. En étudiant la différence entre le temps moyen pour $N = 1$ et pour $N = 2$, nous remarquons que les deux cas sont similaires, Fig. III.4. Le temps moyen augmente de façon monotone, mais plus faiblement que linéairement avec N_c .

Nous observons les fonctions de densité de blocages sur la Fig. III.3 (b). De la même façon que pour $N = 1$, les maximums s'éloignent, la séparation entre eux suit l'augmentation des intervalles de temps entre deux blocages successifs. L'enveloppe des fonctions $F_k(t)$ présente un saut à $t = \tau = 1$, qui correspond à la première sortie possible d'une particule. Ce saut n'était pas observé pour $N = 1$, puisqu'aucune particule ne pouvait sortir du système.

Sur la Fig. III.4 (b), à plus grand échelle, nous observons le comportement du temps moyen de blocage lorsque N augmente. La probabilité de survie d'un système à un canal a été calculée pour $N = 1, 2$ et $N = 3$ pour une distribution de Poisson, lorsque que N augmente elle n'est plus soluble. Donc la probabilité de survie pour le cas des canaux indépendants admet une solution exacte seulement pour les trois premières valeurs de N .

Nous observons sur la Fig. III.5 où sont tracés les temps moyens des $k^{\text{ème}}$ blocages en fonction de k , le nombre de canaux bloqués, que ce temps augmente lorsque k augmente. Il va augmenter de plus en plus rapidement. Cela est dû à la diminution de l'effet combinatoire du nombre de canaux ; lorsqu'il y a moins de canaux alors la probabilité qu'un canal se bloque

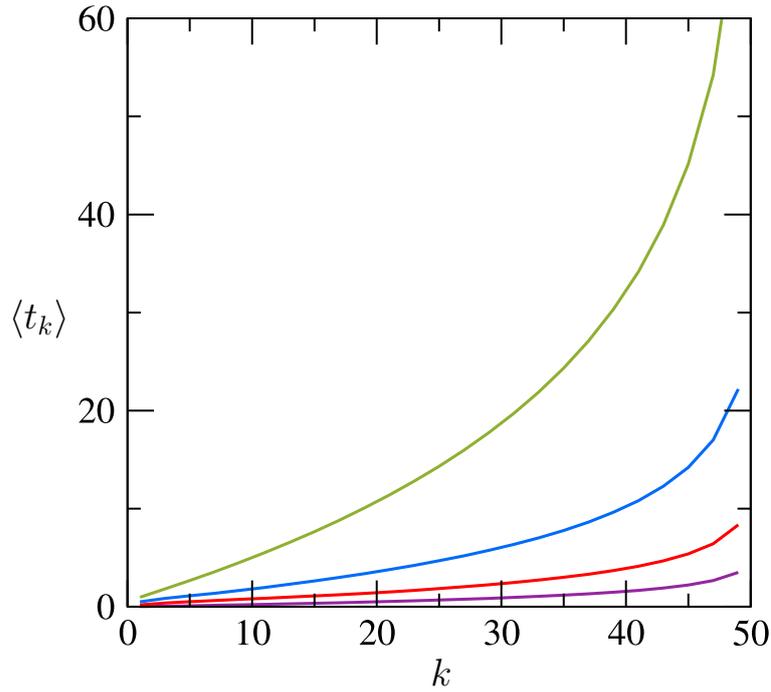


FIGURE III.5 – Temps moyen de blocage total du système, $\langle t_{N_c} \rangle$ à $N_c = 2$ canaux, une intensité d'entrée $\lambda = 1$ et $\tau = 1$ pour $N = 2, 3, 4, 5, 6$ (de bas en haut).

est réduite. Cela revient à remarquer que l'intervalle de temps entre deux blocages successifs augmente avec k , ce qui est en adéquation avec l'Eq. (III.23).

III.4 Canaux couplés

III.4.1 Résultats généraux

Nous nous intéressons maintenant à des canaux couplés, c'est-à-dire que lorsqu'un se bloque son flux est redistribué aux canaux ouverts. Le flux total est $\Lambda = N_c \lambda$, avec λ le flux par canal à $t = 0$, il reste constant, par contre le flux par canal est modifié, Fig. III.6. S'il y a eu k blocages alors le flux d'entrée des $N_c - k$ autres canaux est :

$$\lambda_k = \lambda \frac{N_c}{N_c - k}. \quad (\text{III.24})$$

Il est possible, comme pour le cas indépendant, de calculer la probabilité de survie à partir des $Q_k(t)$, Eq. (III.6). Les différentes observables peuvent aussi être obtenues à partir de ces fonctions. $Q_0(t)$ se calcule aisément comme :

$$Q_0(t) = p_s(t)^{N_c}, \quad (\text{III.25})$$

avec $p_s(t)$ la probabilité de survie d'un seul canal. Cela représente l'évènement où nous notons aucun blocage donc les N_c canaux ont survécu jusqu'au temps t et chaque canal, à ce moment là, se comporte comme des canaux indépendants d'intensité λ . Lorsqu'il y a un blocage, la

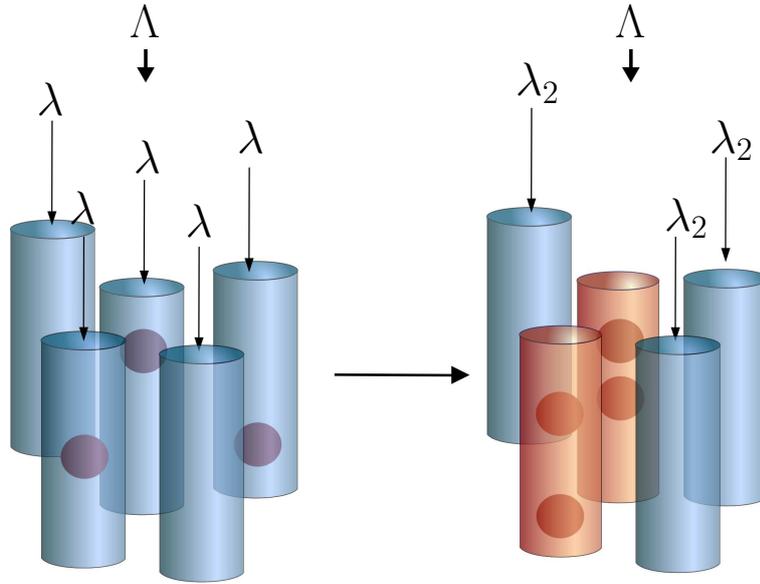


FIGURE III.6 – (a) Modèle de $N_c = 5$ canaux couplés d'intensité total $\Lambda = N_c\lambda$, chaque canal a une intensité initiale λ . (b) $k = 2$ canaux se bloquent, l'intensité totale reste la même mais les canaux restant ont une intensité de $\lambda_2 = \frac{5}{5-2}\lambda = \frac{5}{3}\lambda$.

probabilité s'exprime comme :

$$Q_1(t) = N_c \int_0^t dt_1 f(t_1) p_s^{(1)}(t; t_1)^{N_c-1}, \quad (\text{III.26})$$

$f(t_1)$ est la densité de probabilité d'avoir un blocage entre t_1 et $t_1 + dt$. L'intégrale exprime la multiplication de toutes les probabilités jointes associées à l'évènement où un seul canal se bloque à l'instant t_1 tandis que tous les canaux ont un flux initial de λ , cela implique que les autres canaux survivent entre les temps t_1 et t . Nous multiplions cette intégrale par le nombre de canaux puisque le système à N_c manières de bloquer un canal. Les bornes de l'intégrale expriment que $0 \leq t_1 \leq t$. La probabilité $p_s^{(k)}(t; t_1, t_2, \dots, t_k)$ correspond à la probabilité qu'un canal survive au temps t , alors qu'il y a eu k blocages précédemment. L'histoire des blocages implique que :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq t < t_1 \\ \lambda_1, & t_1 \leq t < t_2 \\ \dots \\ \lambda_k, & t_k \leq t < t \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

à chaque fois qu'un canal se bloque, l'intensité par canal est augmentée.

Cette probabilité est différente de $p_s(t)$ pour un seul canal, puisqu'à l'instant du blocage t_1 , il se peut qu'une particule puisse être présente dans les canaux ouverts. À cause de cette particule, le blocage devient plus probable, $p_s^{(k)}(t; t_1, \dots, t_k) < p_s(t)$, quelque soit k . Nous noterons aussi $f^{(k)}(t; t_1, \dots, t_k)$ la fonction de densité qu'il y ait un blocage à l'instant t , alors qu'il y en a déjà eu k . Cette fonction a la même histoire que $p_s^{(k)}(t; t_1, \dots, t_k)$.

Nous écrivons de la même façon $Q_2(t)$:

$$Q_2(t) = N_c(N_c - 1) \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 f(t_1) f^{(1)}(t_1; t_2) p_s^{(2)}(t; t_1, t_2)^{N_c-2}. \quad (\text{III.28})$$

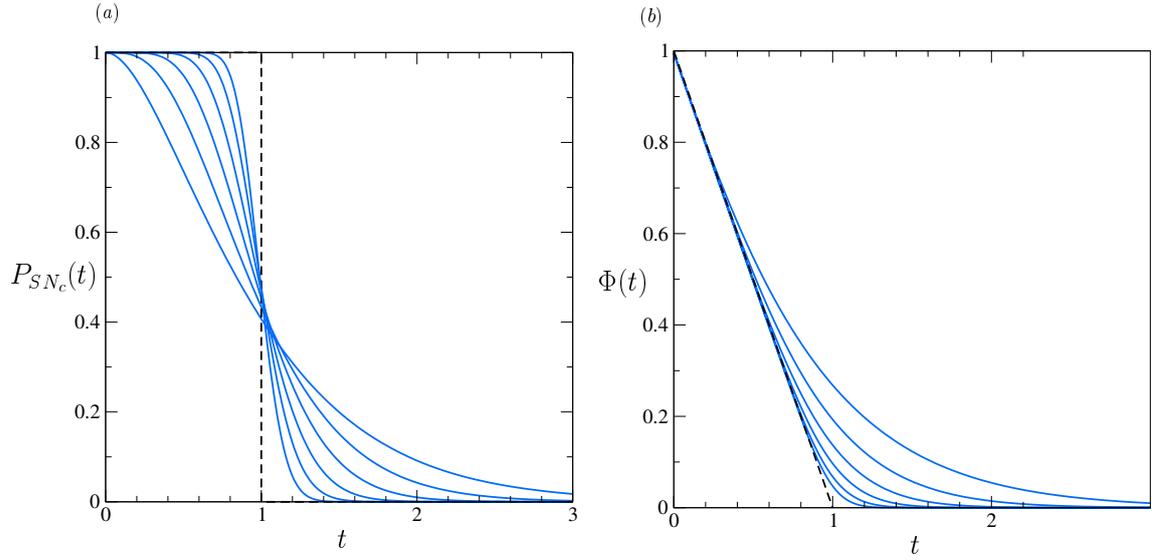


FIGURE III.7 – (a) Probabilité de survie et (b) Fraction de canaux ouverts pour $N = 1$, $\lambda = 1$ et $\tau = 1$ en fonction du temps pour $N_c = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ (de droite à gauche à droite des figures). Les lignes pointillés correspondent à la limite du comportement $\theta(1 - t)$, $t > 0$ et l'Eq. (III.42).

Ces équations sont généralisables pour k blocages avec $2 \leq k \leq N_c$:

$$Q_k(t) = \frac{N_c!}{(N_c - k)!} \int_0^t dt_1 \dots \int_{t_{k-1}}^t dt_k f(t_1) \times \prod_{n=2}^k f^{(n-1)}(t_n; t_1, \dots, t_{n-1}) p_s^{(k)}(t; t_1, \dots, t_k)^{N_c - k}. \quad (\text{III.29})$$

La probabilité que k canaux soient bloqués, et que les $N_c - k$ autres canaux survivent au temps t , se calcule avec le produit des k densités de probabilités de blocages aux temps respectifs t_1, t_2, \dots, t_{k-1} . La fonction $f(t)$ est modifiée lorsque le temps initial n'est pas $t = 0$, par exemple $f^{(1)}(t_1; t_2)$ est la probabilité qu'un canal se bloque au temps t_2 , alors qu'il a survécu à une augmentation d'intensité à t_1 . Nous multiplions par le nombre de façons d'obtenir k canaux bloqués : $\Omega = \frac{N_c!}{(N_c - k)!}$.

III.4.2 Cas $N = 1$

Tout d'abord nous étudions le système le plus simple, $N = 1$. Lorsqu'une particule entre, le canal se bloque et son intensité est redistribuée de façon équilibrée entre tous les canaux ouverts. Le flux total est constant et égal à $\Lambda = N_c \lambda$ et le calcul des $Q_k(t)$ est simplifié grâce au fait que nous pouvons directement noter que :

$$Q_k(t) = \frac{(\lambda N_c t)^k}{k!} e^{-\lambda N_c t}, \quad 0 \leq k \leq N_c - 1. \quad (\text{III.30})$$

Il y a un blocage quand une particule s'insère dans un canal, c'est à dire des lors qu'une particule entre dans le système d'intensité λN_c . La probabilité est Poissonnienne car le nombre de blocages coïncide avec le nombre de particules entrées. À partir de ces fonctions, nous

calculons la probabilité de survie du système :

$$\begin{aligned} P_{SN_c}(t) &= \sum_{k=0}^{N_c-1} Q_k(t) = \sum_{k=0}^{N_c-1} \exp(-N_c\lambda t) \frac{(N_c\lambda t)^k}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(N_c, N_c\lambda t)}{\Gamma(N_c)}, \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

où $\Gamma(k)$ et $\Gamma(n, k)$ sont les fonctions gamma et gamma incomplète. Cette probabilité est tracée sur la Fig. III.7 (a).

Ce résultat se retrouve à partir de l'équation générale des $Q_k(t)$, Eqs. (III.25), (III.26) et (III.29), avec $N = 1$, $p_s^{(k)}(t; t_1, \dots, t_k) = p_s(t, \lambda)p_s(\lambda_1, t_1) = e^{\lambda t}e^{\lambda_1(t-t_1)}$, puisqu'aucune particule ne peut pas être présente dans le canal alors que celui-ci survit. La probabilité de survie d'un seul canal après k blocages aux temps t_1, t_2, \dots, t_k est :

$$p_s^{(k)}(t) = e^{-(\lambda t_1 + \lambda_1(t_2 - t_1) + \dots + \lambda_k(t - t_k))}, \quad (\text{III.32})$$

il ne faut pas qu'une particule s'introduise pour éviter le blocage. De plus il faut prendre en compte la modification de l'intensité à chaque particule entrée dans le système. La fonction de densité est

$$f^{(k)}(t) = \lambda_k p_s^{(k)}(t). \quad (\text{III.33})$$

En reportant ces équations dans l'Eq. (III.29), nous obtenons pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} Q_k(t) &= \frac{N_c!}{(N_c - k)!} \int_0^t dt_1 \dots \int_{t_{k-1}}^t dt_k \lambda_1 e^{-\lambda t_1} \prod_{n=2}^k \lambda_n e^{-(\lambda t_1 + \lambda_1(t_2 - t_1) + \dots + \lambda_k(t - t_{n-1}))} \\ &\quad \times e^{-(\lambda t_1 + \lambda_1(t_2 - t_1) + \dots + \lambda_k(t - t_k))(N_c - k)}. \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Au final en sommant ces équations, nous retrouvons l'Eq. (III.31).

Le temps moyen de blocage, que nous avons calculé à partir de l'Eq. (III.7) est :

$$\langle t \rangle = \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{III.35})$$

Il est donc indépendant de la taille du système ; il est donc cohérent que nous retrouvions la valeur du temps moyen de blocage pour un seul canal. Considérons maintenant la variance :

$$\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 = \frac{1}{\lambda^2 N_c} \quad (\text{III.36})$$

elle est inversement proportionnelle au nombre de canaux. L'indépendance du temps moyen est due à l'exacte annulation de deux effets : le premier est l'effet combinatoire, et le deuxième est l'augmentation de l'intensité après chaque blocage. L'effet combinatoire est dû au nombre de manières qu'a le système de se bloquer, il fait diminuer le temps du prochain blocage. Mais lorsque le nombre de canaux diminue alors il y a une baisse des possibilités de choisir le nouveau canal qui se bloque et donc une baisse de cet effet. L'augmentation de l'intensité devient de plus en plus forte au fil des blocages. Cette élévation diminue aussi le temps entre deux blocages successifs. Les deux effets se compensent et donc le temps entre deux blocages successifs est constant.

Ce comportement est spécifique à $N = 1$; nous allons démontrer que ce n'est pas le cas lorsque que nous augmentons le nombre seuil de particules. Nous justifions cet effet en

calculant le temps entre deux blocages successifs $\langle t_k \rangle - \langle t_{k-1} \rangle$. Pour atteindre ce résultat, nous commençons par calculer $F_k(t)$. D'après les Eqs. (III.9) et (III.30), la fonction de densité du $k^{\text{ème}}$ blocage est :

$$F_k(t) = \lambda N_c Q_{k-1}(t) \quad (\text{III.37})$$

La probabilité qu'un canal se bloque dans l'intervalle $[t, t + dt]$ est $F_k(t)dt$. Nous interprétons cette équation comme la probabilité qu'il y ait eu $k - 1$ blocages au temps t , soit $Q_{k-1}(t)$, multipliée par la probabilité qu'un canal se bloque dans l'intervalle dt soit $\lambda N_c dt$. Cette équation est pertinente seulement pour $N = 1$ où l'entrée d'une particule dans le système ferme obligatoirement un canal. Elle nous permet de calculer le temps moyen de blocage du canal k , ainsi que la variance. Précédemment, nous avons explicité la formule pour calculer $\langle t_k \rangle$, Eq. (III.10). Grâce à cette équation nous obtenons :

$$\langle t_k \rangle = \frac{k}{\lambda N_c}, \quad (\text{III.38})$$

$$\langle t_k^2 \rangle - \langle t_k \rangle^2 = \frac{k}{(\lambda N_c)^2}. \quad (\text{III.39})$$

Nous montrons bien que le temps entre deux blocages successifs est constant :

$$\langle t_k \rangle - \langle t_{k-1} \rangle = \frac{1}{\lambda N_c}, \quad (\text{III.40})$$

et $\langle t_{N_c} \rangle = \frac{1}{\lambda}$.

La Fig. III.3 montre la distribution des temps de blocage. Nous observons ainsi que les fonctions sont décalées par un temps constant. Comme discuté précédemment, ce décalage constant est dû à la compensation entre l'effet combinatoire et l'augmentation de l'intensité par canal.

Ensuite nous analysons la fraction de canaux ouverts, calculée à partir des Eqs. (III.11) et (III.30) :

$$\Phi(t) = \frac{\lambda t (\lambda N_c t)^{N_c} e^{-\lambda N_c t} + (1 - \lambda t) \Gamma(N_c + 1, \lambda N_c t)}{\Gamma(N_c + 1)}. \quad (\text{III.41})$$

Lorsque le nombre de canaux tend vers l'infini, la fraction de canaux ouverts s'approche d'une fonction universelle,

$$\lim_{N_c \rightarrow \infty} \Phi(t) = 1 - \lambda t, \quad (\text{III.42})$$

avec $\lambda t > \frac{1}{N_c}$. Le comportement est illustré sur la Fig. III.7 où est tracée cette fonction pour $\lambda = 1$ et différentes valeurs de N_c . Nous constatons que pour un grand nombre de canaux, cette fraction tend vers une fonction affine, excepté quand $\Phi(t)$ est proche de 0.

III.4.3 Seuil de blocage $N = 2$

Nous augmentons le seuil à deux particules bloquantes, $N = 2$, dans ce cas des particules peuvent sortir du canal, nous observons un flux sortant non-nul. Nous commençons par $N_c = 2$ avec une intensité total de 2λ distribuée entre les deux canaux. Lorsqu'un canal se bloque

alors tout le flux est redistribué sur le survivant. Dans ce cas la probabilité de survie se calcule avec seulement deux fonctions $Q_k(t)$:

$$P_{S2}(t) = Q_0(t) + Q_1(t). \quad (\text{III.43})$$

D'après les Eqs.(III.25) et (III.26) nous obtenons :

$$P_{S2}(t) = p_s(t, \lambda)^2 + 2 \int_0^t dt_1 f(t_1) p_s^{(1)}(t; t_1). \quad (\text{III.44})$$

Le premier terme correspond aux deux canaux encore ouverts au temps t . Ce n'est pas le seul évènement possible pour que le système survive, en effet un canal peut se bloquer à un instant t_1 alors que l'autre reste ouvert jusqu'au temps t , le second terme le décrit justement. $p_s^{(1)}(t; t_1)$ est la probabilité qu'un canal survive au temps t , alors que le flux a été modifié de λ à 2λ à l'instant t_1 . Dans le cas où deux particules bloquent le système $p_s^{(k)}(t; t_1, \dots, t_k) \neq p_s(t, \lambda) p_s(\lambda_1, t_1)$, ce qui rend plus complexe le calcul de la probabilité de survie.

Nous décomposons $p_s^{(1)}(t; t_1)$ en deux termes. Premièrement, la probabilité que le canal survive à l'instant t_1 , avec une intensité λ avec soit 0 ou 1 particule dans le canal à l'instant t_1 ; que nous multiplions par la probabilité que le canal survive pendant un temps $t - t_1$ avec une intensité de 2λ , sachant qu'à l'instant 0, il peut y avoir 1 ou 0 particule dans le canal. Si aucune particule n'est constatée à l'instant t_1 dans l'autre canal la probabilité sera simplement $p_s(t - t_1, 2\lambda) p_s(t_1 - \tau, \lambda) e^{-\lambda\tau}$. Si une particule est présente cette probabilité sera :

$$\int_{t_1 - \tau}^{t_1} dt' f(t_1) e^{-\lambda\tau} p_s(t' - \tau) e^{-\lambda(t_1 - t')} p_s(t - t' - \tau, \lambda) e^{-2\lambda(t' + \tau - t_1)}. \quad (\text{III.45})$$

Une particule s'infiltré à un temps t' compris entre $t_1 - \tau$ et t_1 dans le canal ouvert, il ne faut pas qu'il se bloque, donc il doit être ouvert au temps t' sans particules dans le canal : $p_s(t' - \tau, \lambda)$. Il est nécessaire qu'aucune particule ne s'infiltré entre t' et $t' + \tau$: $e^{-\lambda(t_1 - t')} e^{-2\lambda(t' + \tau - t_1)}$, car le flux change à partir de t_1 , il passe à 2λ . Au temps $t' + \tau$ nous sommes sûr qu'il n'y a pas de particules dans le canal, donc pour qu'il soit ouvert jusqu'à t , nous ajoutons la probabilité : $p_s(t - t' - \tau, 2\lambda)$.

Avec ces équations nous obtenons la forme de la probabilité de survie totale :

$$P_{S2}(t) = p_s(t, \lambda)^2 + 2e^{-\lambda\tau} \int_0^t dt_1 f(t_1, \lambda) p_s(t_1 - \tau, \lambda) p_s(t - t_1, 2\lambda) + 2 \int_0^t dt_1 \int_{t_1 - \tau}^{t_1} dt' f(t_1, \lambda) e^{-\lambda\tau} p_s(t - t' - \tau, 2\lambda) e^{-2\lambda(t' + \tau - t_1)}. \quad (\text{III.46})$$

La Fig. III.8 (a) montre le parfait accord entre cette équation et les résultats numériques. L'équation de la probabilité de survie peut être simplifiée, la probabilité que le canal reste ouvert au temps t sachant que le flux d'entrée a été modifié au temps t_1 , fait penser à un canal avec un flux inhomogène. Nous avons exploré cette distribution d'entrée dans le chapitre précédent avec l'approximation :

$$p_s^{(1)}(t; t_1) = \begin{cases} p_s(t, \lambda), & t < t_1 \\ p_s^\infty(t, 2\lambda) \frac{p_s(t_1, \lambda)}{p_s^\infty(t_1, 2\lambda)}, & t > t_1, \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

avec comme précédemment $p_s^\infty(t, 2\lambda) = e^{-(\lambda - L_W(\lambda))t}$, le comportement asymptotique de la probabilité de survie. Nous avons constaté que pour un flux inhomogène l'approximation

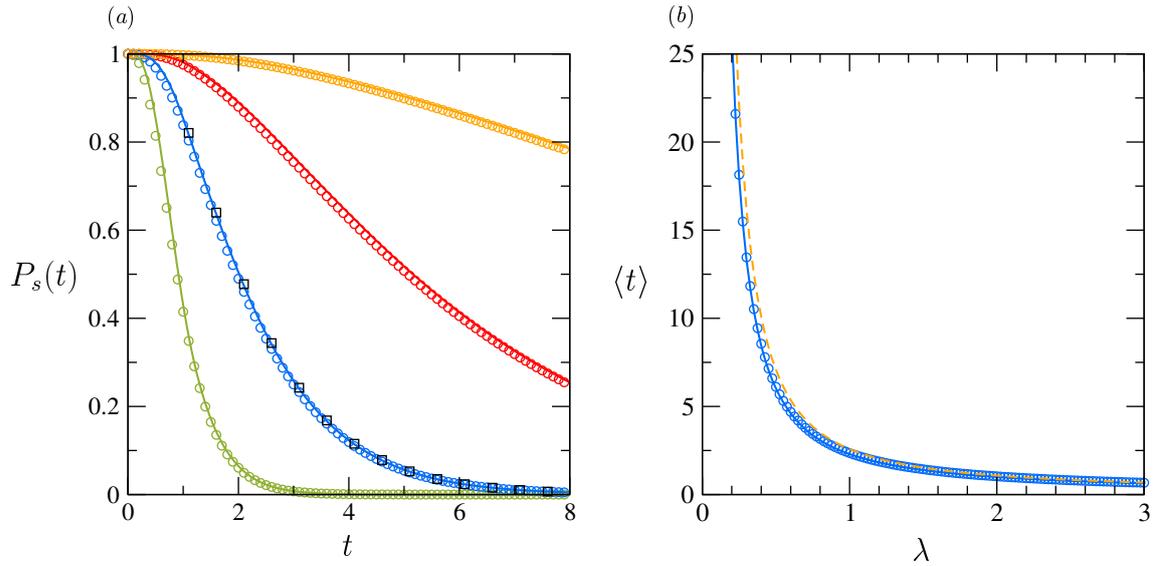


FIGURE III.8 – *Système avec 2 canaux, $N = 2$ et $\tau = 1$, (a) probabilité de survie pour $\lambda = 2, 1, 0.5, 0.25$ (de bas en haut). Les courbes pleines sont les résultats numériques, les cercles sont les résultats approchés, Eq. (III.47), les carrés sont la solution exacte pour $\lambda = 1$, Eq. (III.46). (b) Temps moyen de blocage en fonction de λ , résultats numériques en courbes pleines, l’approximation, Eq. (III.48) en cercle, et la solution pour un seul canal en pointillées oranges.*

s’accorde très bien avec la fonction réelle, même si on prend le temps t_1 au changement d’intensité. Nous allons choisir le temps t_1 de l’approximation égal au temps du premier blocage, où le flux entrant est modifié dans le canal ouvert. Cette approximation permet d’utiliser seulement la probabilité de survie pour un canal d’intensité constante. Cela apporte une très bonne estimation de la probabilité de survie en substituant l’Eq. (III.47) dans l’Eq. (III.44), Fig. III.8 (a). L’Eq. (III.46) ne permet pas d’obtenir d’autres observables ; mais grâce à l’approximation, nous obtenons une valeur approchée du temps moyen de blocage. À partir de l’Eq. (III.7) nous déterminons la valeur de $\langle t_2 \rangle$:

$$\langle t_2 \rangle = \int_0^\infty dt p_s(t, \lambda)^2 + \frac{1}{2[2\lambda - L_W(2\lambda)]}. \quad (\text{III.48})$$

La première partie correspond à la situation où les deux canaux sont encore ouverts, et la seconde à la situation où un canal est fermé. La Fig. III.8 (b) montre que cette équation donne un très bon accord avec les valeurs numériques. Nous observons aussi que le temps moyen de blocage pour un seul canal est très proche de celui à 2 canaux, mais il est légèrement supérieur pour de faibles valeurs de λ . Lorsque λ augmente, la différence entre les deux systèmes diminue. L’effet de l’augmentation de l’intensité sur le deuxième canal lors d’un premier blocage joue donc un rôle dans l’accélération du blocage. Si l’intensité est très forte les canaux vont se bloquer de manière très rapprochée, nous ne consignons donc aucune différence avec le modèle du pont.

Une approximation simple sur le nombre moyen de particules à sortir avant le blocage total, noté $\langle m \rangle_{N_c}$, est possible pour un système de N_c canaux. Pour le cas à deux canaux et pour de faibles valeurs de $\lambda\tau$ cela correspond à :

$$\langle m \rangle_2 = \langle m \rangle_1(\lambda) + \langle m \rangle_1(2\lambda), \quad (\text{III.49})$$

avec $\langle m \rangle_1(\lambda)$ le nombre moyen de particules sortant avant le blocage sachant qu'il n'y a qu'un canal de flux λ , qui est donné par l'Eq. (II.19) :

$$\langle m \rangle = \frac{e^{-\lambda\tau}}{1 - e^{-\lambda\tau}}. \quad (\text{III.50})$$

L'Eq. (III.49) consiste à analyser le nombre de particules sortant avant le premier blocage, dans le premier canal, puis d'ajouter le nombre de particules sortant entre les deux blocages. Nous pouvons faire l'hypothèse que $\langle t_1 \rangle = \langle t \rangle / N_c$ ce qui, nous le verrons par la suite, n'est pas exact mais une approximation raisonnable. Si nous supposons que le temps moyen du premier blocage est égal au temps moyen de blocage d'un système à un canal divisé par deux, alors nous pouvons supposer que le nombre de particules sortant avant ce blocage est $\langle m \rangle_1$ divisé par deux. Comme il y a des particules à sortir des deux canaux avant le premier blocage nous avons au final $2 \times (\langle m \rangle_1 / 2) = \langle m \rangle_1$. Ensuite nous devons ajouter les particules sorties entre le premier et le deuxième blocage, dans ce cas il y a seulement un canal et nous faisons l'approximation qu'il n'y a pas de particule dans le canal 2 lorsque le canal 1 se bloque, ce qui maximise le nombre $\langle m \rangle$, pour le cas de faibles valeurs d'intensités cette approximation est justifiée. Donc le nombre de particules sortantes va juste être le nombre moyen de particules dans le cas d'un seul canal d'un flux de 2λ . Dans le cas d'un plus grand nombre de canaux en prenant le même raisonnement et les mêmes approximations nous obtenons :

$$\langle m \rangle_{N_c} = \sum_{i=1}^{N_c} \langle m \rangle_1 \left(\frac{N_c \lambda}{i} \right). \quad (\text{III.51})$$

Sur la Fig. III.9 nous remarquons que ces valeurs approchées donnent une bonne approximation du nombre moyen de particules sortantes, mais lorsque nous analysons le nombre canaux les valeurs données par l'Eq. (III.51) et les valeurs numériques s'écartent.

Nous avons analysé différentes observables notamment à partir de l'approximation, Eq. (III.47), mais lorsque le nombre de canaux augmente, $N_c \geq 3$, l'approximation utilisée ne permet pas d'obtenir des résultats simples. Pour trois canaux il y aura deux changements d'intensités avant d'arriver au blocage complet. Nous pouvons toutefois obtenir les résultats numériques. Sur la Fig. III.10, nous remarquons que la probabilité de survie tend vers une fonction Heaviside avec l'augmentation de N_c , ce résultat était le même pour $N = 1$. Nous notons cependant une différence, l'aire en dessous de chaque fonction n'est pas constante. L'intégrale pour calculer cette aire correspond au temps moyen de blocage $\langle t_{N_c} \rangle$, nous en déduisons donc que cette donnée dépend du nombre de canaux dans le cas $N = 2$; ce que nous supposons également d'après l'Eq. (III.48) pour deux canaux. Pour un très grand nombre de canaux, la probabilité de survie tend vers une Heaviside de la forme $\theta(2 - t/\tau)$, le système survit avec une probabilité proche de 1 jusqu'à $t/\tau \approx 2$, puis chute très rapidement.

Avec ces caractéristiques il est logique d'observer que la densité de blocage est plus piquée lorsque N_c augmente et ce pic se situe à $t/\tau \approx 2$. Pour un faible nombre de canaux la plage du blocage définitif est plus étendue, mais il y a une plus forte probabilité pour que le blocage se fasse à $t/\tau < 3$. Le maximum se décale vers la droite lorsque N_c augmente.

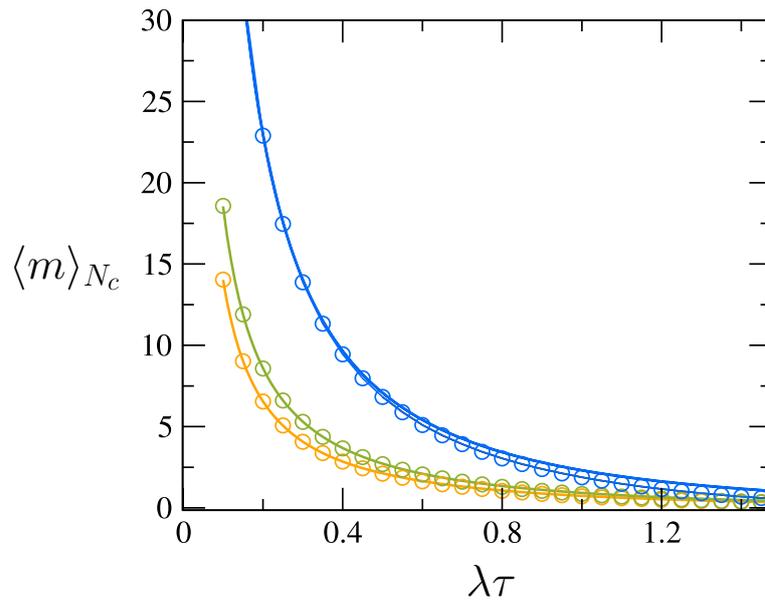


FIGURE III.9 – Nombre moyen de particules sortant avant blocage total du système $\langle m \rangle_{N_c}$ en fonction de $\lambda\tau$, pour $N = 2$, $\tau = 1$ et $N_c = 2, 3, 10$ (de bas en haut), avec les cercles les valeurs numériques et les lignes pleines l'approximation, Eq. (III.51).

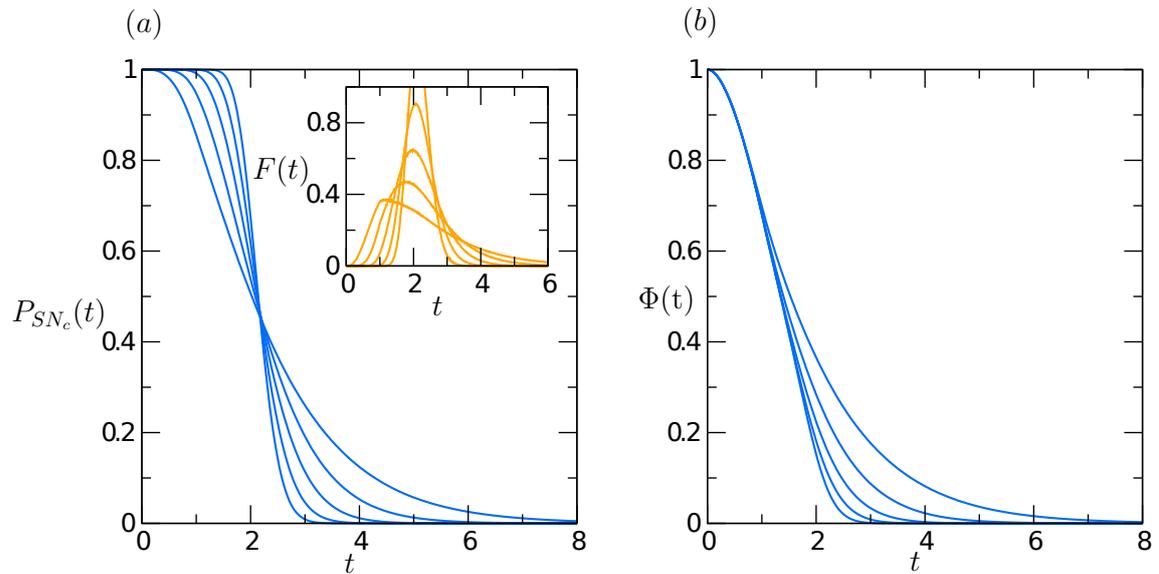


FIGURE III.10 – (a) Probabilité de survie et (b) Fraction de canaux ouverts pour $N = 2$, $\lambda = 1$ et $\tau = 1$ en fonction du temps pour $N_c = 2, 4, 8, 16, 32$. L'insert montre les fonctions de densités de blocage $F(t)$.

Une des grandes différences entre le cas des canaux indépendants et celui des canaux couplés est le temps moyen de blocage. Dans le premier cas, celui-ci augmente si N_c augmente, ce qui est cohérent avec le fait que la probabilité qu'un canal se bloque reste constante $p_s(t)$, comme ceux-ci sont totalement indépendants. Dans le second cas il est indépendant de N_c

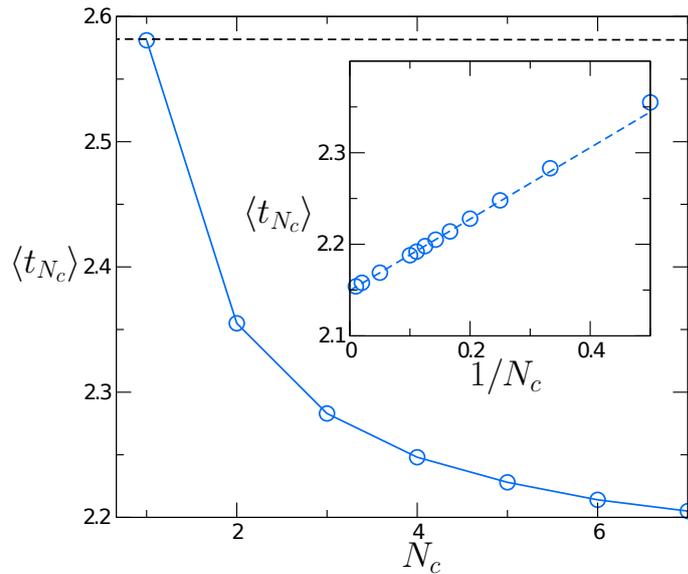


FIGURE III.11 – Temps moyen de blocage pour un système de N_c canaux couplés, $N = 2$ et $\lambda = 1$ en fonction de N_c .

pour le cas $N = 1$ et en analysant les résultats numériques, Fig. III.11, nous constatons que le temps moyen de blocage diminue inversement avec N_c pour $N = 2$. Nous vérifions bien que le temps moyen de blocage pour un seul canal $\langle t \rangle / \tau = 2.58$, Eq. (II.16). La fonction $\langle t_{N_c} \rangle$ est de la forme $\langle t_{N_c} \rangle = T + \frac{A}{N_c}$, avec T et A constants, particulièrement aux grandes valeurs de N_c . La courbe dans l'encadré coupe l'axe des ordonnées au point 2.15. Nous avons remarqué que pour $N = 1$ le temps moyen est indépendant du nombre de canaux, et égal à $\frac{1}{\lambda}$, car l'effet dû à la décroissance du nombre de canaux compense l'augmentation de l'intensité par canal. Pour $N = 2$ le temps moyen diminue, donc l'augmentation de l'intensité agit plus fortement dans la baisse du temps moyen, que la diminution du nombre de canaux. Nous déduisons donc que les canaux se bloquent de plus en plus rapidement avec l'augmentation du nombre de canaux bloqués. Pour mettre en évidence ce phénomène, on peut regarder les densités de blocage du $k^{\text{ème}}$ canal. La Fig. III.3 (d) trace, pour un système de 50 canaux et $N = 2$ la fonction densité de chaque blocage. Nous remarquons, comme pour le cas indépendant $N = 2$, Fig. III.3 (b), un saut à $t = \tau = 1$. Ce bond est dû à la première sortie possible d'une particule. Nous observons aussi que les canaux se bloquent de plus en plus vite. À l'inverse de la Fig. III.3 (b) les courbes se rapprochent lorsque k augmente, ce qui veut dire que l'effet cascade est accéléré. Le temps entre deux blocages devient de plus en plus faible. Nous allons ultérieurement analyser quantitativement ce phénomène. À présent nous nous concentrons sur le flux de particules sortantes, $j(t)$. De la même façon que pour un seul canal, le flux sera nul avant un temps τ , puisqu'aucune particule ne peut sortir du canal avant, Fig. III.12. De plus le point $t = \tau$ présente un maximum puis la fonction décroît. La Fig. III.12 présente les résultats numériques pour différents nombres de canaux mais un flux total constant $\Lambda = \lambda N_c = 2$. Le flux par canal diminue avec N_c . Notons que lorsque N_c augmente la décroissance est moins rapide. Pour $N_c = 1$ la décroissance est abrupte, alors que pour $N_c = 16$ et $N_c = 32$ le flux sortant est presque constant après le maximum. Pour une intensité totale constante le flux tend vers une valeur stationnaire pour un système à grand

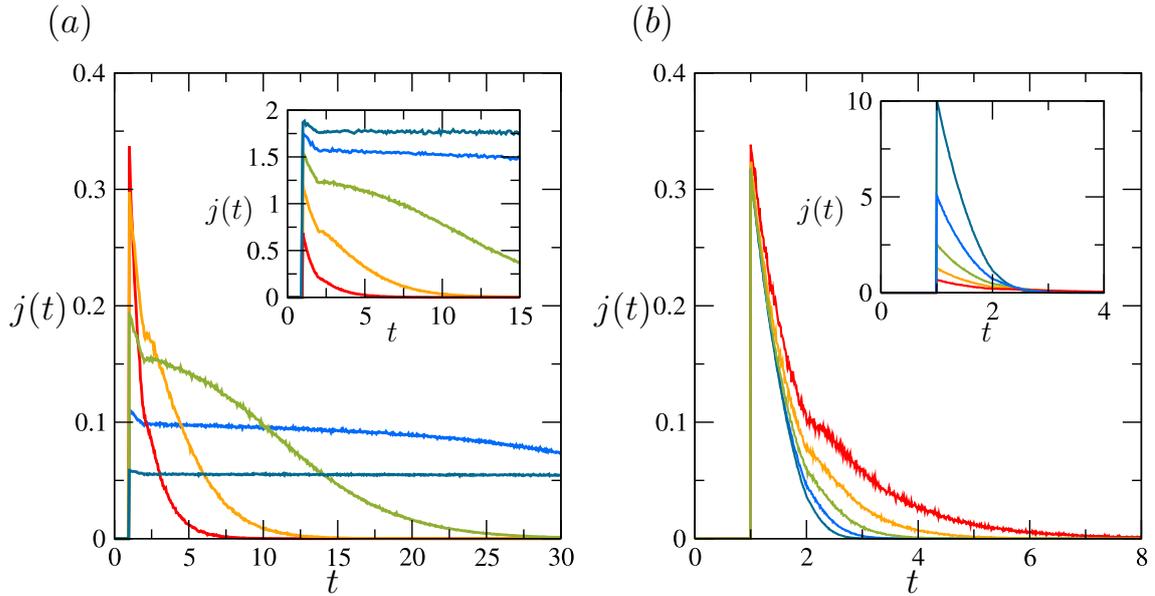


FIGURE III.12 – Flux sortant pour un système de $N = 2$, $\tau = 1$ et $N_c = 2, 4, 8, 16, 32$ (de haut en bas dans les insertions). (a) Flux entrant total est constant, $\Lambda = \lambda N_c = 2$, la figure montre le flux par canal et la figure insérée le flux total, le nombre de canaux allant du plus élevé à droite au plus faible à gauche en regardant pour de grandes valeurs de t . (b) Flux entrant par canal est constant, $\lambda = 1$, la figure montre le flux par canal et la figure insérée le flux total, le nombre de canaux allant du plus élevé à gauche au plus petit à droite.

nombre de canaux, cela est dû au fait que le flux par canaux est très faible, donc le temps moyen de blocage d'un canal est très long et la plupart des canaux restent ouverts longtemps. À présent, pour un flux par canal constant et un flux total mouvant, $\lambda = N_c \lambda$, Fig. III.12 (b), nous observons qu'aucun flux sortant ne tend vers une constante, puisque nous avons choisi arbitrairement $\lambda = 1$. Le temps moyen de blocage pour un canal n'est pas assez important pour que le flux tende vers une constante. Nous notons, pour des systèmes au flux total égal $\Lambda = N_c \lambda$ avec λ constant, que lorsque N_c augmente le flux sortant diminue plus rapidement. Nous conjecturons que les canaux se bloquent de plus en plus vite avec k . Nous constatons là encore un effet cascade accéléré qui augmente avec le nombre de canaux.

III.5 Canaux couplés pour un seuil de particules bloquantes quelconque, N

Dans cette section nous allons étudier l'effet de l'augmentation du seuil du nombre de particules qui peuvent être présentes dans le canal. Pour commencer nous analysons la probabilité de survie pour deux canaux et $N = 2, 3, 4, 5$, Fig. III.13 (a); comme nous pouvons nous y attendre cette donnée augmente avec N , à cause d'un temps moyen de blocage plus grand. En général, vont aussi croître avec N : les effets du couplage, le flux sortant ainsi que la probabilité de survie, Fig. III.13 (b). Cet effet est dû à un nombre augmenté de particules possibles dans le canal.

Quand nous observons le temps moyen de blocage pour ces mêmes systèmes et que nous

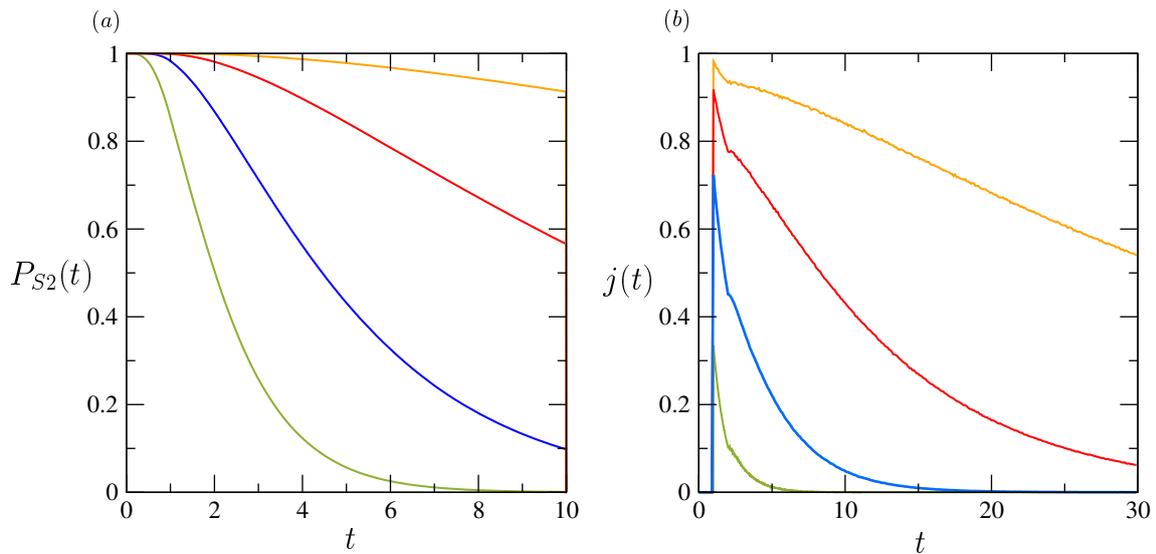


FIGURE III.13 – Système avec $N_c = 2$ canaux, une intensité d'entrée $\lambda = 1$ et $\tau = 1$. (a) Probabilité de survie P_{S2} pour $N = 2, 3, 4, 5$ (de bas en haut). (b) Flux sortant pour $N = 2, 3, 4, 5$ (de bas en haut).

comparons avec le cas $N_c = 1$, nous constatons que les blocages s'effectuent plus rapidement, et l'écart entre 1 et 2 canaux s'intensifie avec l'augmentation de N . Nous devons donc avoir un effet cascade qui s'accélère avec N , Fig. III.14 (a). Pour vérifier ce résultat nous traçons les $\langle t_k \rangle$ en fonction de k , le nombre de blocage et $\langle t_k \rangle$ la durée entre le $(k-1)^{\text{ème}}$ et le $k^{\text{ème}}$ blocage. Sur la Fig. III.14 nous observons bien que les canaux se bloquent plus rapidement avec k , la fonction croît de plus en plus lentement. Pour le cas indépendant, l'effet inverse se remarque, les canaux se bloquent plus lentement lorsque k augmente. Ce phénomène augmente avec N , l'écart de croissance entre le début et la fin de la courbe est plus important. Nous traçons directement $\langle t_k \rangle - \langle t_{k-1} \rangle$ et nous observons que cette différence diminue lorsque k augmente, et cela est plus fortement visible pour de grand N , Fig. III.14 (b). En comparant cette figure avec le cas indépendant, nous remarquons que dans le cas couplé le temps moyen entre deux blocages diminue lorsque k augmente alors que dans le cas indépendant $\langle t_k \rangle$ augmente avec k , Fig. III.5. Quand N devient grand la courbe tend vers une valeur asymptotique pour de grand k .

III.5.1 Comparaison entre le temps moyen de N_c canaux et le temps moyen d'un seul canal

Pour caractériser le phénomène, nous analysons aussi le rapport entre $\langle t_k \rangle - \langle t_{k-1} \rangle$, la moyenne du temps de blocage entre deux canaux, et $\langle t_1 \rangle$. Ce rapport vaut 1 quand le temps de blocage reste constant, donc si $\langle t_k \rangle$ reste constant pour tout k . Par contre si $\frac{\langle t_k \rangle - \langle t_{k-1} \rangle}{\langle t_1 \rangle} < 1$ pour $k \neq 1$, les canaux se bloquent de plus en plus rapidement.

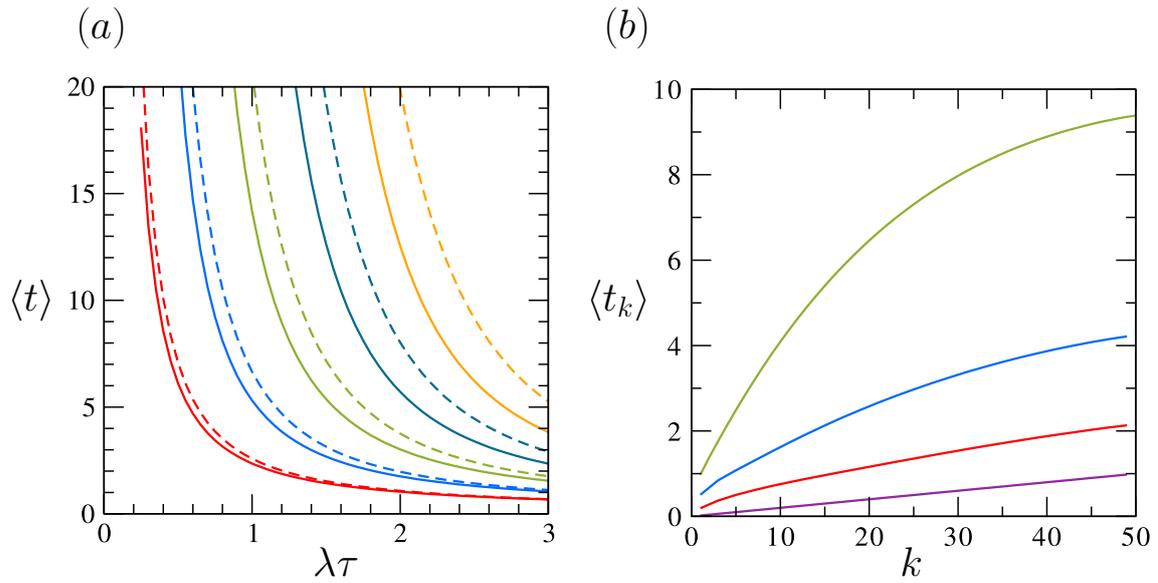


FIGURE III.14 – Système à $N_c = 2$ canaux, pour une intensité d'entrée $\lambda = 1$ et $\tau = 1$. (a) Temps moyen de blocage total du système, $\langle t_{N_c} \rangle$ pour $N = 2, 3, 4, 5, 6$ (de bas en haut) en lignes pleines et en pointillés temps moyen de blocage d'un seul canal. (b) Temps moyen de blocage du $k^{\text{ème}}$ canal en fonction du nombre de canaux bloqués, k , pour $N = 1, 2, 3, 4$ (de bas en haut).

Nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
 \langle \langle t_k \rangle - \langle t_{k-1} \rangle \rangle &= \frac{1}{N_c} \sum_{k=0}^{N_c-1} [\langle t_{k+1} \rangle - \langle t_k \rangle] \\
 &= \frac{1}{N_c} [\langle t_{N_c} \rangle - \langle t_0 \rangle] \\
 &= \frac{\langle t_{N_c} \rangle}{N_c}, \tag{III.52}
 \end{aligned}$$

avec $\langle t_0 \rangle = 0$.

Nous comparons alors cette valeur avec le temps du premier blocage, $\langle t_1 \rangle$. Nous savons que pour $N = 1$:

$$\langle t_k \rangle = \frac{k}{\lambda N_c}. \tag{III.53}$$

Nous obtenons donc $\langle t_1 \rangle = \frac{1}{\lambda N_c}$. Le temps moyen de blocage n'est pas dépendant du nombre de canaux, il est égal à $\langle t_{N_c} \rangle = \frac{1}{\lambda}$. Nous savons que pour un seul canal, le temps moyen de blocage est aussi $1/\lambda$, donc on a bien $\langle t_{N_c} \rangle = \langle t \rangle$. Donc $\langle t_1 \rangle = \frac{\langle t_{N_c} \rangle}{N_c}$. Comme nous l'avions remarqué précédemment pour $N = 1$ l'effet cascade est constant, l'intervalle entre deux blocages successifs reste constant quelque soit le nombre de canaux bloqués.

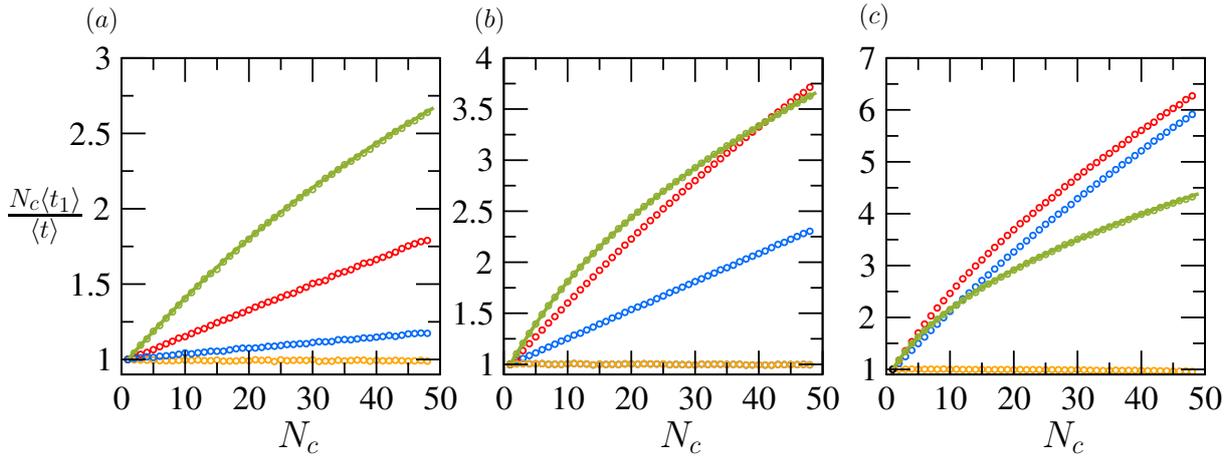


FIGURE III.15 – $\frac{N_c \langle t_1 \rangle}{\langle t \rangle}$ en fonction de N_c pour $\tau = 1$ et des seuils $N = 1$ (orange), 2 (bleu), 3 (rouge), 4 (vert). Pour (a) $\lambda = 0.5$, (b) $\lambda = 1$, (c) $\lambda = 2$.

Regardons maintenant le cas général, pour tout N . Nous notons que :

$$\begin{aligned} \langle t_1 \rangle &= \int_0^\infty dt t F_1(t) = \int_0^\infty dt Q_0(t) \\ &= \int_0^\infty dt p_s(t)^{N_c}, \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

avec $p_s(t)$ la probabilité de survie d'un seul canal. Le temps de premier blocage correspond à l'intégrale de la probabilité que tous les canaux soient ouverts. Cette probabilité correspond à la multiplication de la probabilité de survie de tous les canaux, $P_{SN_c}(t) = p_s(t)^{N_c}$. Si nous reprenons le cas le plus simple $N = 1$, comme la probabilité de survie est de la forme exponentielle alors $\int_0^\infty dt p_s(t)^{N_c} = \frac{1}{N_c} \int_0^\infty dt p_s(t)$ avec $\int_0^\infty dt p_s(t) = \langle t \rangle$ qui correspond au temps moyen de blocage pour un seul canal. Au final nous avons $\langle t_1 \rangle = \frac{\langle t \rangle}{N_c}$, comme nous avons précédemment. Pour $N > 1$, la probabilité de survie n'est pas de forme exponentielle donc $\int_0^\infty dt p_s(t)^{N_c} \neq \frac{1}{N_c} \int_0^\infty dt p_s(t)$, de ce fait $\langle t_1 \rangle \neq \frac{\langle t \rangle}{N_c}$. Pour savoir comment évolue ce rapport nous traçons $\langle t_1 \rangle \frac{N_c}{\langle t \rangle}$; la Fig. III.15 montre ce rapport pour différents N en fonction du nombre de canaux du système N_c . Nous voyons que ce rapport est supérieur à 1 pour $N > 1$, $\langle t_1 \rangle > \frac{\langle t \rangle}{N_c}$. Nous remarquons aussi que le rapport augmente avec N_c , et avec N pour de grands λ .

Nous avons observé plus tôt que $\langle t_{N_c} \rangle < \langle t \rangle$ donc $\langle t_1 \rangle > \frac{\langle t_{N_c} \rangle}{N_c}$, cela implique que les autres intervalles de temps entre les blocages successifs doivent être inférieurs à $\langle t_1 \rangle$, nous mettons en évidence l'effet de la cascade accéléré pour $N > 1$. Pour le cas $N > 1$: $\frac{N_c \langle t_1 \rangle}{\langle t \rangle} > 1$ (pour $N = 1$ ce rapport est exactement 1). Cela veut dire que lorsqu'il n'y a aucun blocage, donc qu'il y a un flux λ par canaux, le temps moyen qu'un canal se bloque n'est pas égal à $\langle t \rangle / N_c$. Ce n'est pas juste le temps que met un système d'un canal à se bloquer divisé par le nombre de canaux du système, N_c .

Pour étudier précisément comment le nombre de canaux et N influent sur le système, nous allons prendre en compte deux cas possibles. Le premier est celui que l'on a considéré précédemment, l'intensité par canal λ identique pour tous les systèmes, et un flux total $\Lambda = N_c \lambda$ (qui va donc être modifié lorsque l'on change le nombre de canaux). Ensuite nous

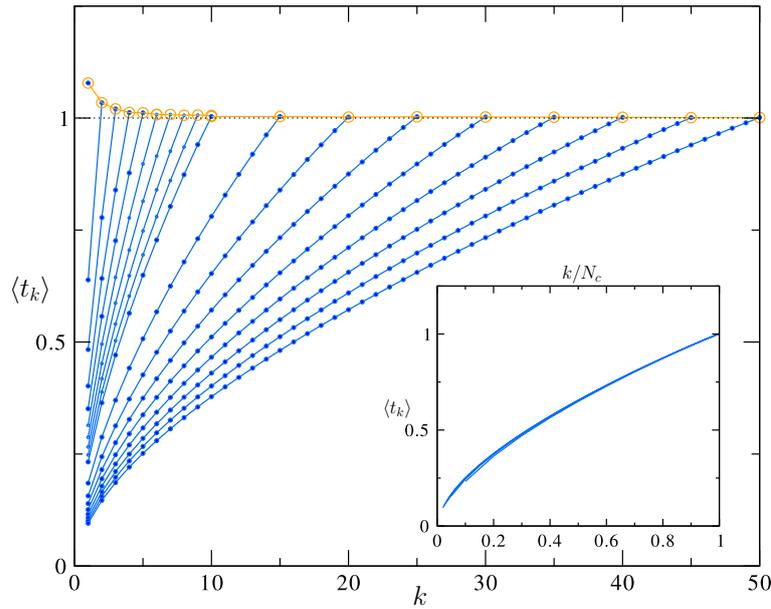


FIGURE III.16 – Temps moyen du $k^{\text{ème}}$ blocage pour $N = 2$, un flux par canal $\lambda = 2$ et $\tau = 1$, pour des systèmes de $N_c = 1, 2, \dots, 10, 15, \dots, 50$, l’enveloppe orange correspond à $\langle t_{N_c} \rangle$. La ligne pointillée correspond au temps limite, Eq. (III.55). L’encadré montre les données en fonction de k/N_c pour $N_c > 10$.

choisissons un flux total identique pour chaque système, Λ , le flux par canal sera égal à $\frac{\Lambda}{N_c}$.

III.5.2 Flux par canal identique, λ

Les Figs. III.16 et III.17 montrent le temps moyen du $k^{\text{ème}}$ blocage, $\langle t_k \rangle$, en fonction de k pour $\lambda = 1$ et $N = 2, 3$ en fonction de N_c . Nous observons que $\langle t_{N_c} \rangle$ diminue et approche une valeur asymptotique lorsque le nombre de canaux augmente ; ceci est dû à l’effet cascade. Pour un système de dix ou plus canaux il y a très peu de dépendance en fonction du nombre de canaux. Nous remarquons notamment que toutes les courbes des différents N_c en modifiant la variable en k/N_c se superposent, encadrés des Fig. III.16 et III.17. Reprenons le temps moyen de blocage du système, $\langle t_{N_c} \rangle$ et notons M le nombre de particules qui entrent dans le canal avant le blocage. Sachant que le flux d’entrée est $N_c \lambda$, M va être caractérisé par $\langle t_{N_c} \rangle N_c \lambda$ (le flux multiplié par le temps au bout duquel les particules peuvent encore entrer). Lorsque le flux tend vers l’infini, le blocage apparaît presque instantanément lors de l’entrée des N premières particules, il n’y a alors plus de particules sortantes. Nous pouvons ainsi minimiser M . En effet le nombre total minimum de particules entrantes est juste $N_c N$, soit le nombre qu’il faut pour bloquer tous les canaux sans qu’aucune particule ne sorte. Ces deux manières de calculer M permettent une approximation sur le temps de blocage :

$$\begin{aligned} \langle t_{N_c} \rangle N_c \lambda &\geq N_c N, \\ \langle t_{N_c} \rangle &\geq \frac{N}{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

Cette équation généralise celle pour $N = 1$, Eq. (III.35).

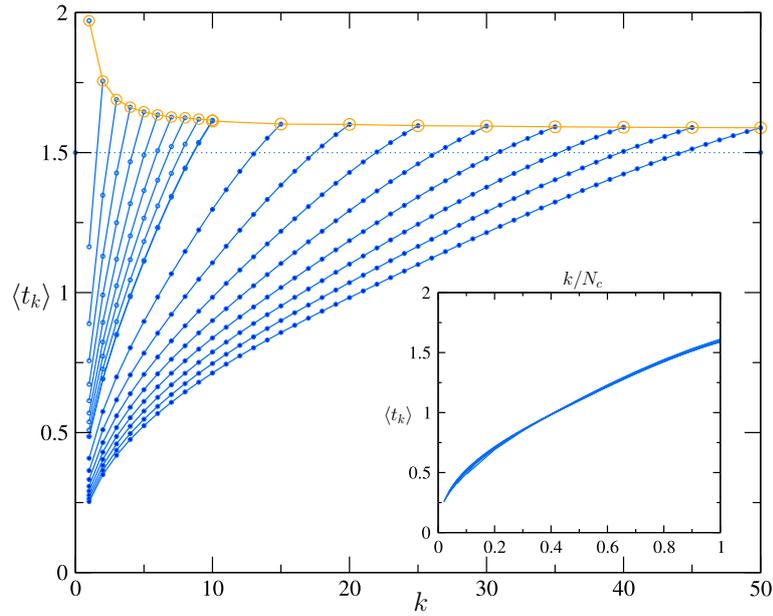


FIGURE III.17 – Temps moyen du $k^{\text{ème}}$ blocage pour $N = 3$, un flux par canal $\lambda = 3$ et $\tau = 1$, pour des systèmes de $N_c = 1, 2, \dots, 10, 15, \dots, 50$, l’enveloppe orange correspond à $\langle t_{N_c} \rangle$. La ligne pointillée correspond au temps limite, Eq. (III.55). L’encadré montre les données en fonction de k/N_c pour $N_c > 10$.

La Fig. III.18 trace le temps moyen de blocage en fonction de $1/N_c$, nous observons que le temps moyen tend vers $\frac{N}{\lambda}$ pour un grand nombre de canaux, ce qui justifie cette approximation. Nous remarquons aussi que pour $\lambda = 2$ le temps moyen de blocage est presque une valeur constante, mais lorsque la valeur de l’intensité diminue alors la courbe s’écarte de plus en plus de la valeur asymptotique. Pour obtenir cette approximation nous avons négligé les particules sortantes, lorsque λ est grand cette hypothèse est justifiée puisque la probabilité de blocage est forte, mais lorsque que l’intensité est faible des particules peuvent sortir sans provoquer d’interruption. Nous pouvons malgré tout supposer que la valeur du temps moyen de blocage est proportionnelle à N et inversement proportionnelle à λ .

III.5.3 Flux total identique, Λ

Analysons maintenant le deuxième cas, lorsque l’intensité totale est constante pour tous les systèmes et égale à Λ . L’intensité totale est indépendante du nombre de canaux, et l’intensité par canal au début de la simulation est $\lambda = \Lambda/N_c$ [92]. Nous commençons par tracer $\langle t_k \rangle$ pour $N = 2$ et $N = 3$ pour différentes tailles de systèmes, l’encadré des Figs. III.19 (a) et III.20 (b). Ces courbes montrent que le temps moyen de blocage augmente avec N et N_c , le temps moyen du blocage total étant représenté par l’enveloppe orange. Nous remarquons aussi que $\langle t_{N_c} \rangle$ a une augmentation quadratique (en N_c^2) pour $N = 2$ et cubique (en N_c^3) pour $N = 3$, Figs. III.19 et III.20. Dans les figures III.19 (b) et III.20 (b) nous observons très nettement que la fonction est proportionnelle à N_c^N et cela d’autant plus quand Λ augmente, ce qui est en accord avec l’hypothèse de base qui prend seulement en compte les particules qui bloquent le système et non les particules sortantes. Nous pouvons donc supposer que cette

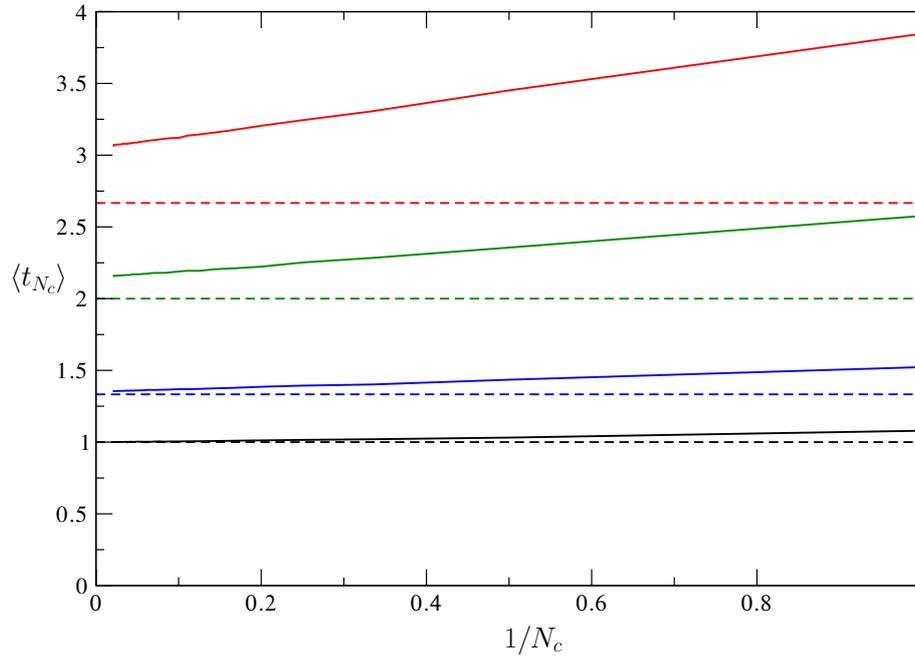


FIGURE III.18 – Valeur numérique du temps moyen de blocage total du système, $\langle t_{N_c} \rangle$, en fonction de $1/N_c$ avec $N = 2$ et $\lambda = 0.75, 1, 1.5, 2$ (de haut en bas) et les lignes pointillées montre les prédictions de l'Eq. (III.55).

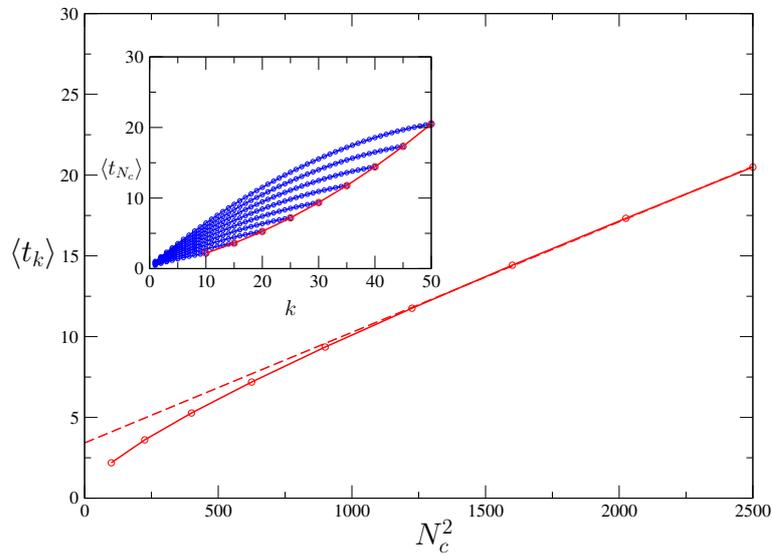


FIGURE III.19 – Temps moyen de blocage total en fonction de N_c^2 pour un système $N = 2$ et un flux total $\Lambda = 10$ (indépendant du nombre de canaux), la ligne pointillée est une interpolation linéaire de la courbe numérique. L'encadré montre $\langle t_k \rangle$ pour différentes tailles de systèmes $N_c = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$, l'enveloppe trace $\langle t_{N_c} \rangle$.

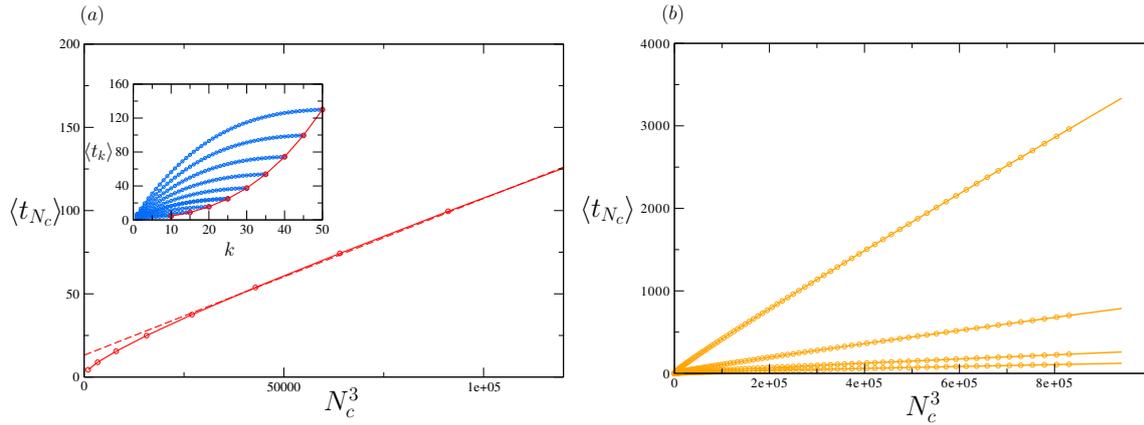


FIGURE III.20 – Temps moyen de blocage total en fonction de N_c^3 pour un système $N = 3$ et un flux total $\Lambda = 10$ (indépendant du nombre de canaux), la ligne pointillée est une interpolation linéaire de la courbe numérique. L'encadré montre $\langle t_k \rangle$ pour différentes tailles de systèmes $N_c = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$, l'enveloppe trace $\langle t_{N_c} \rangle$. (b) Temps moyen de blocage en fonction de N_c^3 et $N = 3$ pour $\lambda = 1, 2, 2.5, 3, 4, 10, 15, 20$.

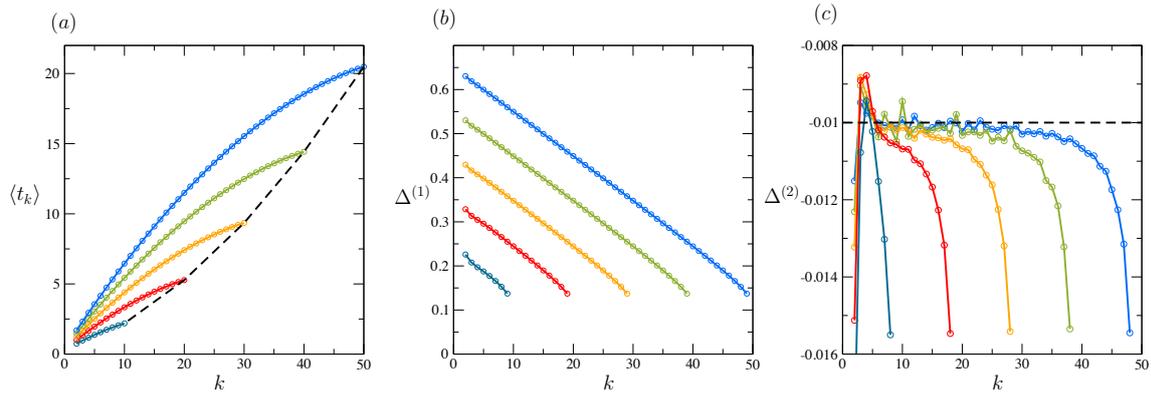


FIGURE III.21 – Systèmes avec $N = 2$, $\Lambda = 10$ et $N_c = 10, 20, 30, 40, 50$. (a) Temps moyen de blocage de $k^{\text{ème}}$ canal avec la courbe en pointillée montrant le temps moyen du blocage total. (b) La première différence du temps de blocage. (c) La seconde différence du temps de blocage, et la ligne pointillée correspond à la valeur $-1/\Lambda^2$.

fonction pour N particules bloquantes est affine en N_c^N . Comme le temps moyen de blocage croît en loi de puissance de N , il augmente considérablement avec N et N_c , nous supposons que l'effet cascade devient de plus en plus prononcé. Les courbes peuvent être modélisées par un polynôme du second degré pour $N = 2$ et du troisième degré pour $N = 3$. Nous pouvons alors donner le temps moyen du blocage total comme :

$$\langle t_{N_c} \rangle = \sum_{i=0}^N A_i N_c^i. \quad (\text{III.56})$$

En s'intéressant à cette accélération de l'effet cascade, nous remarquons qu'en effet à partir de $N > 2$, plus il y a de canaux bloqués plus le prochain se bloque rapidement.

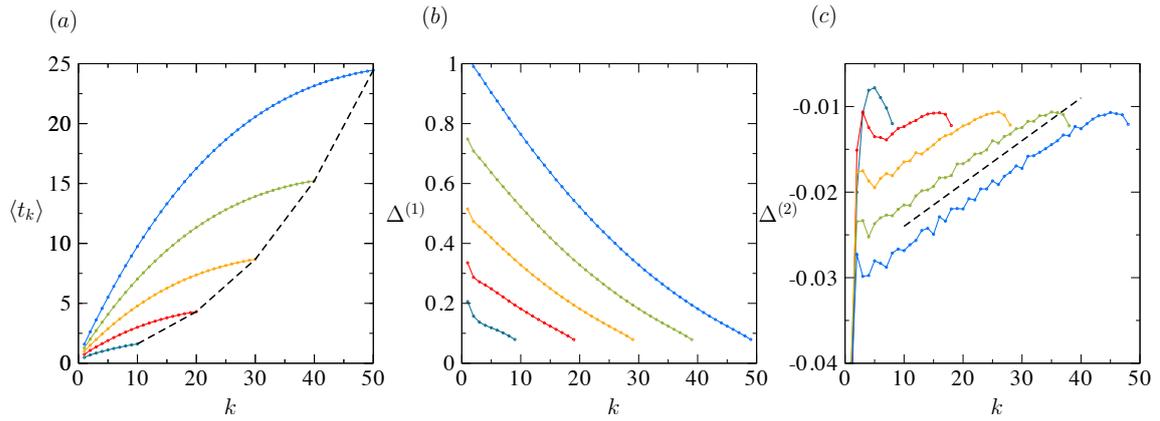


FIGURE III.22 – *Systèmes avec $N = 3$, $\Lambda = 20$, $\tau = 1$ et $N_c = 10, 20, 30, 40, 50$. (a) Temps moyen de blocage de $k^{\text{ème}}$ canal avec la courbe en pointillée montrant le temps moyen du blocage total. (b) La première différence du temps de blocage. (c) La seconde différence du temps de blocage, et la ligne pointillée montrant la fonction $4k/\Lambda^3$.*

Nous pouvons évaluer l'accélération en calculant les $n^{\text{ème}}$ différences successives entre deux blocages. Nous notons ces différences : $\Delta_k^{(n)}$, avec $\Delta_k^{(1)} = \langle t_{k+1} \rangle - \langle t_k \rangle$, $\Delta_k^{(2)} = \Delta_k^{(1)} - \Delta_{k-1}^{(1)} = \langle t_{k+2} \rangle - \langle t_{k+1} \rangle - (\langle t_k + 1 \rangle + \langle t_k \rangle)$ etc. La première différence va correspondre à la vitesse de blocage. Pour obtenir ces valeurs on peut soit les calculer directement avec les simulations ou alors partir des courbes des $\langle t_k \rangle$ déjà obtenues et effectuer des différences successives [92].

La Fig. III.21 montre les différences successives pour $N = 2$, nous observons que la première différence diminue avec k de façon linéaire avec le même coefficient directeur quelque soit N_c . La deuxième différence se comporte comme une constante négative avec une chute pour les derniers canaux bloqués. Pour $N = 3$, Fig. III.22, la première différence diminue aussi mais pas de façon linéaire, et la deuxième différence se comporte comme une fonction affine avec le même coefficient quelque soit N_c (cela ressemble à la première différence pour $N = 2$). Le fait que la première différence diminue lorsque k augmente prouve bien qu'il y a un effet cascade accéléré, le temps entre deux blocages successifs est réduit lorsqu'un plus grand nombre de canaux sont bloqués. Lorsque N et N_c augmentent l'accélération est plus importante dans les premiers temps de la dynamique. Nous remarquons un autre phénomène : la seconde différence pour $N = 2$ est constante puis diminue légèrement pour de grands k ; nous observons aussi pour $N = 3$ et pour k élevé qu'il y a une baisse des valeurs. Cela correspond à l'effet de taille finie dû au grand nombre de canaux initiaux. Nous pouvons aussi supposer que lorsqu'il reste très peu de canaux ouverts l'effet cascade accéléré augmente moins rapidement, la valeur de l'intensité dans les derniers canaux est déjà très élevée, ils se bloquent de façon très rapide donc l'accélération est diminuée. C'est dû à l'augmentation du pourcentage de changement du flux dans les canaux ouverts. Lorsque le premier canal bloque, l'intensité va être modifiée d'une fraction de $N_c/(N_c - 1)$, il est donc très faiblement modifié. Lorsque $(N_c - 1)$ canaux sont bloqués le flux dans le dernier canal à doublé, lors du dernier blocage. Si nous analysons les résultats d'un flux inhomogène nous remarquons que pour une modification de l'intensité très élevée, à partir d'une certaine valeur de l'augmentation, $\lambda_1 = 9$, la probabilité de survie varie très peu, Fig. III.23. De plus nous observons que plus le changement d'intensité se fait tardivement, plus l'écart entre ces courbes diminuent. D'où le

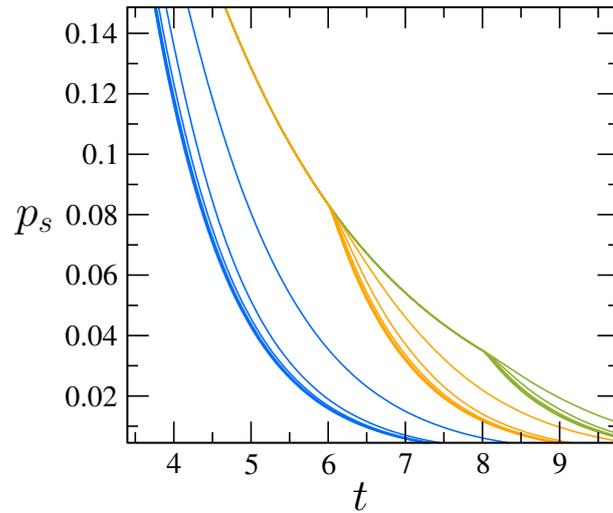


FIGURE III.23 – Probabilité de survie d'un système d'un seul canal, $\tau = 1$ avec un flux inhomogène discontinue $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1\theta(t - t')$ pour $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_1 = 1, 4, 9, 14, 19, 24$ et $t' = 3$ à gauche et $t' = 6$ au centre et $t' = 8$ à droite.

fait que pour les derniers canaux, leur probabilité de survie change très peu quand l'intensité est doublée donc nous remarquons une baisse de l'accélération. Par contre cette effet diminue quand N augmente, puisqu'à grand λ , le canal $N = 2$ se bloque immédiatement alors que pour des N supérieurs la probabilité à grande intensité que le canal se bloque est plus faible, elle n'est pas proche de 1.

Nous avons analysé les résultats numériques des différences successives, à présent nous allons proposer une approche analytique pour décrire le phénomène de l'accélération. Commençons par le cas le plus simple $N = 1$. Pour ce cas $\langle t_k \rangle = 1/\lambda_k$ avec $\lambda_k = \frac{N_c \lambda}{N_c - k}$. La première différence, qui correspond à la vitesse de blocage, se calcule simplement $\Delta_k = \langle t \rangle_{k+1} - \langle t \rangle_k = \frac{1}{\lambda_k} \frac{1}{N_c - k} = \frac{1}{N_c \lambda} = \frac{1}{\Lambda}$. Elle a une valeur constante. C'est ce que nous avons obtenu précédemment.

Pour N plus grands nous ne pouvons pas obtenir ce résultat aussi précisément, puisque les $\langle t_k \rangle$ deviennent plus complexes. Pour comprendre les résultats numériques nous pouvons utiliser l'approximation lié au principe des grandes déviations sur la probabilité de survie sur un canal : la probabilité se comporte comme une exponentielle à grand temps, Eq. (??) (cf. Sec. (??) et discussion associées). Une approximation pertinente à grand temps est

$$p_s(t) = e^{-t/\langle t \rangle}. \quad (\text{III.57})$$

Cela nous permet d'étudier analytiquement les résultats pour tout N .

Pour un système avec un seul canal nous avons obtenu une limite du temps de blocage pour $\lambda \ll 1$:

$$\frac{\langle t \rangle}{\tau} = \frac{(N-1)!}{(\lambda\tau)^N}. \quad (\text{III.58})$$

Nous pouvons supposer aussi que pour de faible λ et un grand temps nous avons :

$$\Delta_k^{(1)} = \frac{\langle t \rangle_{(\lambda_k)}/\tau}{N_c - k}. \quad (\text{III.59})$$

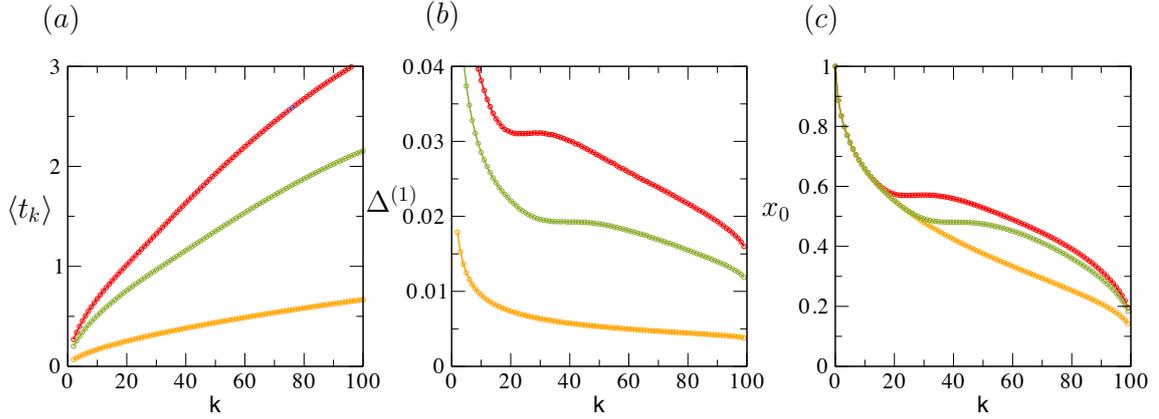


FIGURE III.24 – Système de 100 canaux pour $N = 2$, $\tau = 1$ et $\Lambda = 75, 100, 300$ (de haut en bas). (a) Temps moyen de blocage, (b) Première différence du temps de blocage, (c) la fraction de canaux ouverts et vides en fonction de k .

Avec $\langle t \rangle_{(\lambda_k)}$ le temps moyen de blocage d'un canal, lorsque les canaux ont une intensité $\frac{N_c \lambda}{N_c - k}$ puisqu'il reste $N_c - k$ canaux ouverts. C'est une approximation raisonnable, mais dans cette équation en faisant l'hypothèse que le temps moyen d'un blocage équivaut au temps moyen d'un seul canal divisé par le nombre de canaux ouverts. Or, nous savons que $\langle t_1 \rangle \neq \frac{\langle t \rangle}{N_c}$, sauf pour $N = 1$. Nous injectons l'Eq. (III.58) dans l'Eq. (III.59),

$$\Delta_k^{(1)} = \frac{(N-1)!}{(\Lambda\tau)^N} (N_c - k)^{N-1}. \quad (\text{III.60})$$

À partir de ces équations nous calculons les différences successives pour $N = 2$.

$$\Delta_k^{(1)} = \frac{\langle t \rangle_{\lambda_k}}{N_c - k} = \frac{(N_c - k)^2}{(N_c \lambda)^2} \frac{1}{N_c - k}, \quad (\text{III.61})$$

avec $\langle t \rangle = \frac{1}{\lambda^2}$ et $\lambda_k = \frac{N_c \lambda}{N_c - k}$. Au final on obtient

$$\Delta_k^{(1)} = \frac{(N_c - k)}{(N_c \lambda)^2}. \quad (\text{III.62})$$

Nous calculons ensuite la seconde différence :

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(2)} &= \Delta_k^{(1)} - \Delta_{(k-1)}^{(1)} \\ &= \frac{(N_c - (k-1))}{(N_c \lambda)^2} - \frac{(N_c - k)}{(N_c \lambda)^2} \\ &= -\frac{1}{N_c \lambda^2} = -\frac{1}{\Lambda^2}, \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

puisque $\Lambda = N_c \lambda$. Au final la seconde différence est une constante, ce qui coïncide avec la Fig. III.21. Nous effectuons le même calcul pour $N = 3, 4, \dots$ et en définitif l'équation généralisée est donnée par :

$$\Delta_k^{(N)} = (-1)^N \frac{((N-1)!)^2}{(\Lambda\tau)^N}. \quad (\text{III.64})$$

Nous avons bien sûr $\Delta_k^{(j)} = 0$ pour $j > N$. L'effet cascade du blocage d'un modèle N_c canaux et un seuil N est caractérisé par une $k^{\text{ème}}$ différence constante. Par exemple pour $N = 1$ on aura $\Delta_k^{(1)} = 1/\Lambda\tau$, constant. Pour $N = 2$, la première différence est linéaire en k , $\Delta_k^{(1)} = (N_c - k)/(\Lambda\tau)^2$, et la seconde différence est constante, $\Delta_k^{(2)} = -1/(\Lambda\tau)^2$. Pour $N = 3$, la première et la seconde différence, sont quadratiques et linéaire en k respectivement, et la troisième est constante $\Delta_k^{(3)} = 4/(\Lambda\tau)^3$. Ces résultats soutiennent un très bon accord avec les valeurs numériques (Figs. III.21 et III.22). Ce résultat analytique a été obtenu à partir d'une approximation qui suppose qu'il n'y a pas de mémoire dans l'évolution du système, c'est-à-dire que la probabilité de survie est exponentielle. Cependant la comparaison avec les valeurs numériques montre un excellent accord surtout quand le nombre de canaux est suffisamment large.

Dans la Fig. III.24 nous montrons le résultat pour un système de $N_c = 100$, $N = 2$ pour différentes valeurs d'intensités totales, Λ . Nous notons que si Λ n'est pas trop élevé, la première différence présente un plateau, nous l'observons pour $\Lambda = 75$ et $\Lambda = 100$. Pour l'intensité la plus faible, $\Lambda = 75$, aucun changement de $\Delta_k^{(1)}$ pour $20 \leq k \leq 30$ est observé. Le début du plateau commence pour $t = \tau = 1$, donc lorsque la première particule peut sortir du canal. Puisqu'une particule peut sortir le taux de blocage diminue. Pour comprendre ce phénomène nous traçons la fraction de canaux ouverts vides, appelé x_0 , en fonction du nombre de canaux bloqués. Lorsque k diminue cette fraction décroît. En effet, l'intensité par canal a augmenté, donc la probabilité de blocage, ainsi que la probabilité qu'il y ait une particule présente pour chaque canal est supérieure. Lorsque l'intensité totale est faible, $\Lambda = 75$ ($\lambda = 0.75$) et $\Lambda = 100$ ($\lambda = 1$), nous remarquons un plateau dans cette fonction qui correspond à $t = \tau$, le temps à partir duquel une particule peut s'échapper. En analysant la Fig. III.24 (a) nous remarquons que pour le cas $\Lambda = 75$ il y a environ 20 canaux bloqués lorsque $t/\tau = 1$ et pour $\Lambda = 100$ il y en a environ 25. Ce qui correspond au début du plateau sur la courbe de la fraction de canaux vides. Lorsque l'intensité est augmentée, $\Lambda = 300$, le temps moyen de blocage total est inférieur à τ donc nous n'observons pas ce plateau.

Nous avons observé dans le cas de canaux multiples dont la répartition de l'intensité lors d'un blocage correspond à un partage équitable à tous les canaux, *GLS*, c'est-à-dire un effet de blocage en cascade accélérée. Dans le modèle d'amas de fibres dans le cas d'une répartition globalement partagée nous remarquons aussi cet effet, cependant il est plus faible que le cas où la répartition se fait localement, *LLS*. Nous allons à présent comparer pour notre modèle l'effet de la répartition sur la probabilité de survie et l'effet cascade, pour cela nous allons étudier le cas de la répartition locale sur notre le modèle à plusieurs canaux, où N particules bloquent le canal.

III.6 Blocage avec les propriétés d'une répartition locale du flux

Dans le cas d'une répartition locale de l'intensité lors d'un blocage, nous allons tout d'abord étudier une ligne de canaux, donc un système à une dimension. Dans ce cas lorsqu'un canal se bloque son intensité se divise en deux pour se répartir équitablement entre ses deux plus proches voisins. Ensuite nous allons regarder un système à deux dimensions, où le flux sera divisé entre ses plus proches voisins, dont le nombre dépend du réseau choisi. Nous étudierons un réseau carré et un réseau hexagonal.

III.6.1 Ligne de canaux (une dimension)

C'est un modèle à une dimension à N_c canaux, Fig. III.25, chaque canal a une intensité d'entrée initiale de λ et deux plus proches voisins. Il faut N particules pour bloquer un canal. Lorsqu'un canal se bloque son flux est redistribué entre ses plus proches voisins, celui à sa gauche et celui à sa droite, admettons que le canal i se bloque le flux est redistribué également entre le canal $i + 1$ et le canal $i - 1$. Si le canal $i + 1$ est bloqué alors le flux est redistribué avec le canal $i + 2$ etc. Le flux total, Λ , ne va donc pas varier. Lorsqu'il reste un seul canal son flux est donc de Λ . Les conditions sont périodiques c'est-à-dire que lorsque le canal 1 se bloque le flux est réparti entre les canaux 2 et N_c , et lorsque le canal N_c se bloque le flux est redistribué entre le canal $N_c - 1$ et 1.

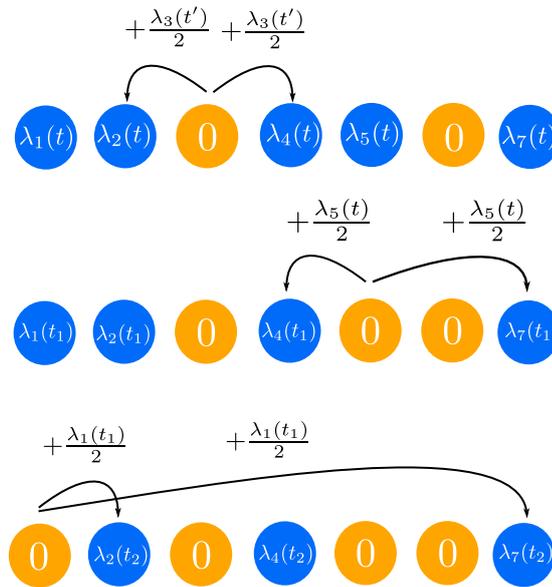


FIGURE III.25 – (a) Système à 7 canaux à l'instant t , avec le canal 6 déjà bloqué et le canal 3 qui se bloque à l'instant t , l'intensité de ses voisins direct augmentent. (b) Système à l'instant $t_1 > t$ où le canal 5 se bloque, le canal 6 étant bloqué son flux est reparti entre les canaux 4 et 7. (c) Système à l'instant $t_2 > t_1 > t$ où le canal 1 se bloque, les conditions étant périodiques le flux est reparti entre les canaux 2 et 7.

Dans notre modèle la probabilité que le système soit entièrement bloqué tend vers 1 quelque soit la valeur de l'intensité initiale. Pour le modèle *LLS* après un temps long, toutes les fibres ne sont pas forcément cassées, si les fibres restantes supportent la charge qui leur est appliquée, c'est-à-dire que la contrainte $\sigma_{th}^i > \sigma^i$.

La Fig. III.26 montre la probabilité que le système soit ouvert, $P_s(t)$, c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait au moins un canal encore ouvert, pour un système de $N = 1$ et $N = 2$. Nous remarquons que les courbes se superposent pour la répartition locale et globale pour une taille et une intensité identique. Les résultats dépendent donc seulement de l'intensité globale, et non de l'intensité par canal. Pour le modèle $N = 1$ ce résultat est intuitif puisque dès qu'une particule entre, un canal se bloque. La probabilité de blocage est donc juste lié à l'intensité total du système Λ , et non à la probabilité par canal. Dans le modèle *LLS* nous

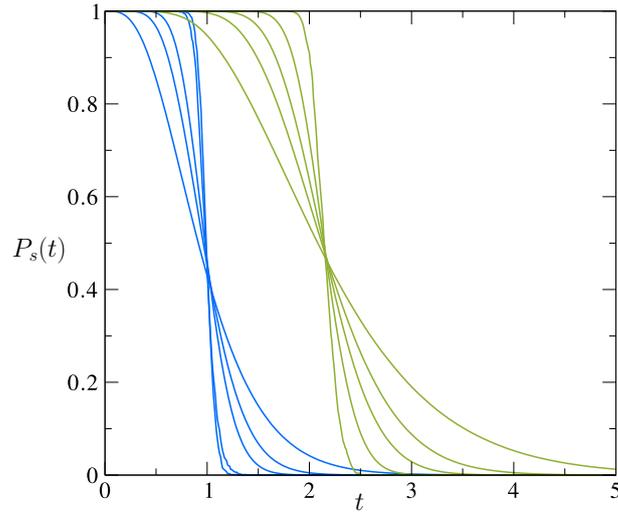


FIGURE III.26 – Probabilité de survie des systèmes *LLS* et *GLS*, pour $N = 1$, $\tau = 1$ (premier groupe de courbes) et $N_c = 4, 10, 20, 50, 200$ (de droite à gauche) et $N = 2$ (deuxième groupe de courbes), pour $N_c = 4, 10, 20, 50, 200$ (de droite à gauche), pour $\lambda = 1$.

avons des intensités par canaux hétérogènes mais l'intensité totale reste la même à tout moment (si le canal i a une intensité d'entrée supérieure il y aura plus de chance que ce soit ce canal qui se bloque en comparaison avec les canaux de plus faible intensité λ). Ce résultat est moins évident pour $N = 2$, mais lorsque l'on trace la probabilité que le système soit ouvert pour $\lambda = 1$ pour le modèle *LLS* et le modèle *GLS* les courbes ont l'air de coïncider. Mais si nous traçons $P_s(t)$ pour $N = 2$ et une faible intensité, alors des différences entre le modèle *LLS* et *GLS* apparaissent, les résultats ne sont donc pas exactement les mêmes. Lorsque nous augmentons N nous observons que les écarts entre le modèle *LLS* et *GLS* augmentent. À faible et à grand temps les courbes se rejoignent, mais pour tous les temps intermédiaires la probabilité de survie est plus faible dans le cas d'une répartition locale. Ce résultat est très net pour $N > 5$, Fig. III.27 (a). Le nombre de canaux ouverts est lui aussi inférieur pour le cas *LLS*, Fig. III.27 (b). Cela se comprend par le fait qu'un des canaux a une intensité supérieure à la moyenne donc il y a plus de chance que N particules arrivent avec un temps inférieur à τ . Lorsque nous diminuons λ , les écarts se creusent car la probabilité qu'un canal se bloque est plus faible.

Nous définissons un temps typique, t_{cri} qui correspond au temps pour lequel la probabilité de survie est égale à $1/2$, $P(t_{cri}) = 1/2$. Pour $N_c \rightarrow \infty$ nous avons $P_s(t) = \theta(t_{cri} - t)$, $P(t) = 0$ pour $t > t_{cri}$ et $P(t) = 1$ pour $t < t_{cri}$. Nous traçons la courbe t_{cri} en fonction de N_c , Fig. III.28. Nous remarquons que pour tout N cette valeur tend vers une constante pour de grands N_c lorsque que nous sommes proches de la fonction d'Heaviside. Plus N augmente plus cette valeur augmente, car le blocage devient moins probable, il faut donc un plus long temps pour l'observer. Nous traçons pour différentes valeurs de λ la courbe t_{cri} en fonction de N . La valeur t_{cri} pour de grand N_c revient à calculer le temps moyen de blocage :

$$\langle t_{N_c} \rangle = \int_0^\infty dt P_{SN_c}(t) = \int_0^\infty \theta(t_{cri} - t) = t_{cri}. \quad (\text{III.65})$$

Nous savons que le temps moyen de blocage pour le cas d'une répartition globale tend vers

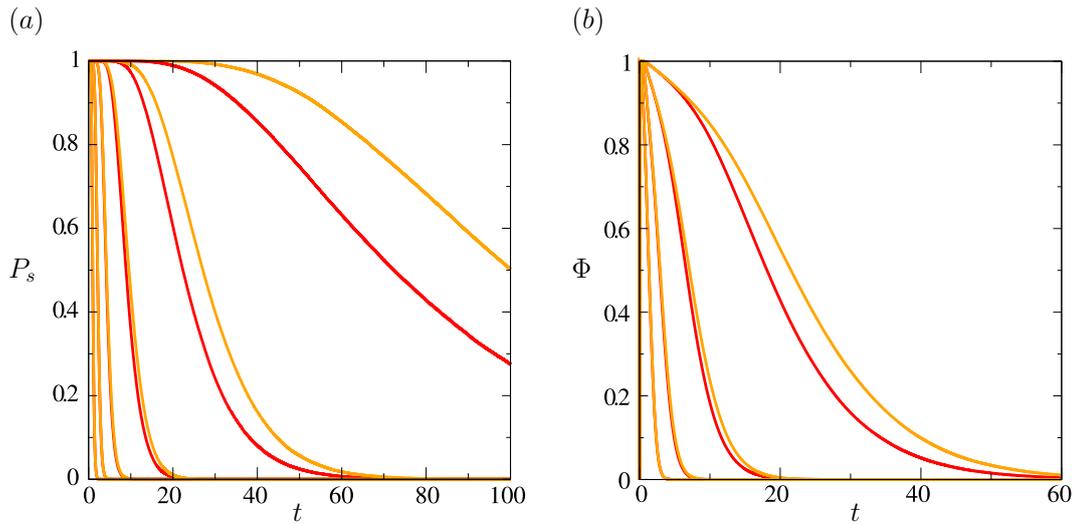


FIGURE III.27 – (a) Probabilité de survie du système avec $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (de gauche à droite), $\lambda = 1$, $\tau = 1$ et $N_c = 10$ pour LLS (courbes rouges) et GLS (courbes oranges). (b) Fraction de canaux ouverts avec $N = 2, 3, 4, 5$ (de gauche à droite) avec $\lambda = 1$ et $N_c = 10$, pour LLS (en rouge) et GLS (en orange)

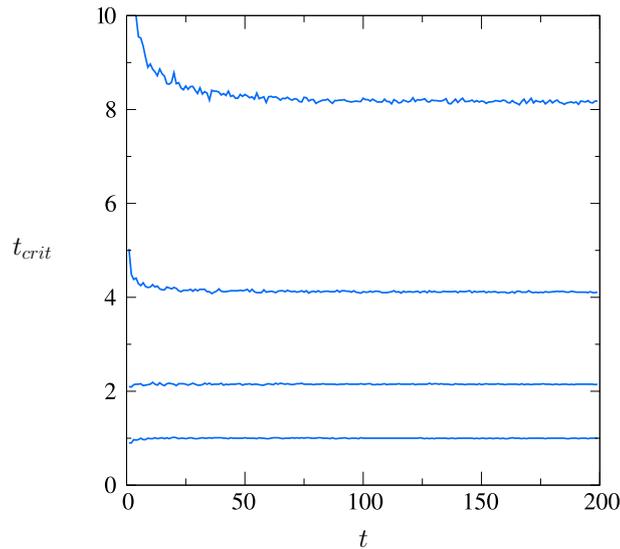


FIGURE III.28 – t_{crit} pour $N = 1, 2, 3, 4$, $\lambda = 1$ et $\tau = 1$

$\langle t_{N_c} \rangle = \frac{N}{\lambda}$ pour de grandes valeurs de λ . Pour $N = 1$ ce résultat est exact pour tout λ , pour $N = 2$ on retrouve cette équation pour des λ moyens et plus on augmente N , plus il faut être à de très grands λ pour retrouver ce comportement. Pour de grandes valeurs de λ nous avons donc :

$$P_s(t) = \theta\left(\frac{N}{\lambda} - t\right). \quad (\text{III.66})$$

Cette valeur va aussi être différente du cas GLS, sauf pour $N = 1$. Cette différence va s'accroître lorsque N augmente et lorsque l'on diminue λ (lorsque que le blocage devient de

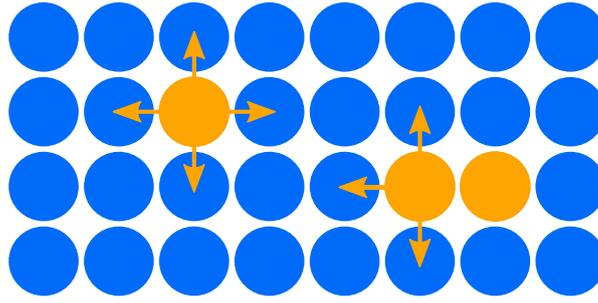


FIGURE III.29 – Système à 32 canaux ($N_x = 8$ et $N_y = 4$) à l’instant t . Le canal $(7,2)$ s’est bloqué ultérieurement, le canal $(3,3)$ de flux $\lambda(3,3)$ se bloque et le flux d’entrée de ses 4 plus proches voisins est agrémenté de $\frac{\lambda(3,3)}{4}$. Le canal $(6,2)$ se bloque également, les 3 plus proches voisins ouverts se répartissent son flux ($+\frac{\lambda(6,2)}{3}$ pour chaque canal).

moins en moins probable). La valeur, qui correspond à la valeur de la fonction d’Heaviside lorsque $N_c \rightarrow \infty$ va être plus basse pour le *LLS*, le saut de la probabilité de blocage va se faire pour un temps plus faible. Nous pouvons comprendre ce phénomène par le fait que dans le cas *LLS* l’effet cascade est supérieur, les canaux se bloquent de plus en plus rapidement. Cette valeur du temps critique tend vers une constante, dans le modèle des fibres avec cette même définition de la contrainte critique, $P_s(\sigma_c) = \frac{1}{2}$, il est admis que cette contrainte est proportionnelle à $\frac{1}{\ln(N_c)}$ ce qui est différent de ce que nous trouvons ici, le temps critique ne dépend pas de la taille du système (pour de grands systèmes).

III.6.2 Répartition locale à deux dimensions

Nous nous intéressons maintenant à des modèles bidimensionnels où chaque particule a plus que deux plus proches voisins. Pour simplifier le modèle, lorsqu’un canal se bloque on redistribue son flux seulement à ses plus proches voisins, et si tous ses voisins sont bloqués alors le flux est redistribué entre tous les canaux encore ouverts.

Dans ce modèle on peut faire changer plusieurs éléments :

1. la taille du réseau
2. la forme du réseau (le nombre de plus proche voisins)
3. la relation aux bords, périodique ou non.

Lorsque le réseau est carré, chaque canal à 4 plus proches voisins, Fig. III.29. La taille totale du système est de $N_x \times N_y$. Lorsque le réseau est hexagonal alors chaque canal à 6 plus proches voisins, la taille totale du système sera également pris comme $N_x \times N_y$, avec l’angle de axes $(0_x, 0_y)$ à $\pi/3$ Fig. III.30. L’intensité totale n’est pas modifiée, donc pour le modèle $N = 1$ les courbes vont être les mêmes que celles du cas à une dimension avec la même répartition ainsi que celles d’une répartition globale. Maintenant pour $N > 1$ les quantités vont être modifiées.

La Fig. III.31 représente l’état des canaux au cours du temps pour différents systèmes. Le système où $\lambda = 1$ et $N = 5$ (l’image des particules n’est pas représentée dans les canaux, seulement l’évolution des blocages). Les cas (b), (c) et (d) ont des propriétés du *LLS*, le cas (a) a les propriétés du *GLS*. Dans le cas *LLS* des agglomérats apparaissent, des regroupements

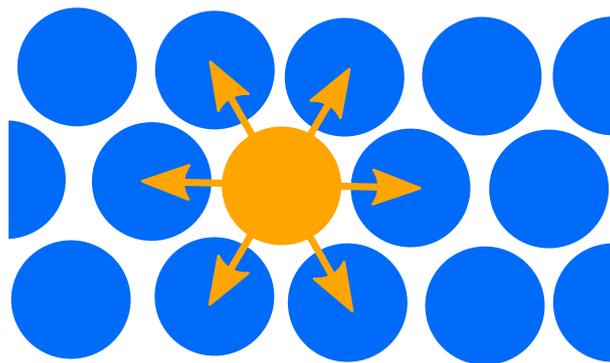


FIGURE III.30 – Morceau d'un système avec un réseau hexagonale, le canal orange vient de se bloquer, son flux est donc redistribué à travers ses 6 plus proches voisins ($+\lambda/6$).

de canaux bloqués; nous ne retrouvons pas ce phénomène dans le cas *GLS*, les blocages sont aléatoires. Au début de l'expérience, les canaux bloqués sont plutôt isolés, au fur et à mesure un agrégat englobe tout le système. (b) est un système aux bords périodiques, (c) aux bords non périodiques, nous remarquons que les blocages se font légèrement plus sur les bords lorsqu'ils ne sont pas périodiques (voir images $k = 3000$ et $k = 4000$). Pour le système hexagonal on conjecture que les agrégats sont orientés selon une diagonale. Étudions l'évolution de l'intensité par canal présenté sur la Fig. III.32. Les canaux rouges sont bloqués et l'intensité dans ceux ouverts va du jaune au bleu en augmentant. Pour les cas *LLS*, c'est-à-dire (b), (c) et (d), l'intensité par canal n'est pas constante et est plus grande autour des canaux bloqués, ce qui crée des zones à plus fort flux entrant. Les canaux aux bords des agglomérats ont un flux supérieur aux autres; c'est pour cela que les agrégats fusionnent au fil de la simulation. En comparant l'intensité à celui du cas *GLS*, (a), nous remarquons une modification : un écart se crée entre les différents canaux. Ils semblent en comparant la figure (b) (réseau carré) et (d) (réseau hexagonal) que l'écart d'intensité est plus fort dans le cas où le nombre de plus proches voisins est faible (nous observons plus de canaux bleus foncés et de canaux jaunes). Nous observons sur la Fig. III.33 que plus N est grand et λ est petit moins il y a de agrégats, les canaux bloqués sont regroupés. Cela s'explique par le fait que le temps moyen de blocage entre deux canaux est proportionnel à $(\frac{1}{\lambda r})^N$. Donc si nous augmentons N la différence d'intensité va jouer un rôle très important dans le blocage. Les canaux aux intensités les plus fortes ont une plus grande probabilité de se bloquer d'où l'apparition d'un grand agglomérat, les canaux proches des régions bloquées ont un flux supérieur. C'est le même effet lorsque λ est faible.

La Fig. III.34 représente la probabilité que le système soit ouvert pour $N = 5$, pour ce cas les écarts entre les différents systèmes sont plus visibles que pour des N inférieurs, pour 4 types de cas, le système à la répartition globale, le réseau hexagonal et carré *LLS* avec des conditions périodiques, et des conditions non périodiques. Nous remarquons que ces courbes sont différentes, lorsque nous augmentons N les courbes vont s'écarter du modèle basique *GLS*, l'effet cascade étant supérieur dans le cas du *LLS*, la probabilité de survie est plus faible. Nous avons observé sur la Fig. III.32 des canaux à forte intensité, nous supposons qu'ils vont se bloquer rapidement. De plus le cas des conditions non périodiques a aussi une probabilité de survie plus faible. Ce phénomène augmente avec N . Nous déduisons aussi

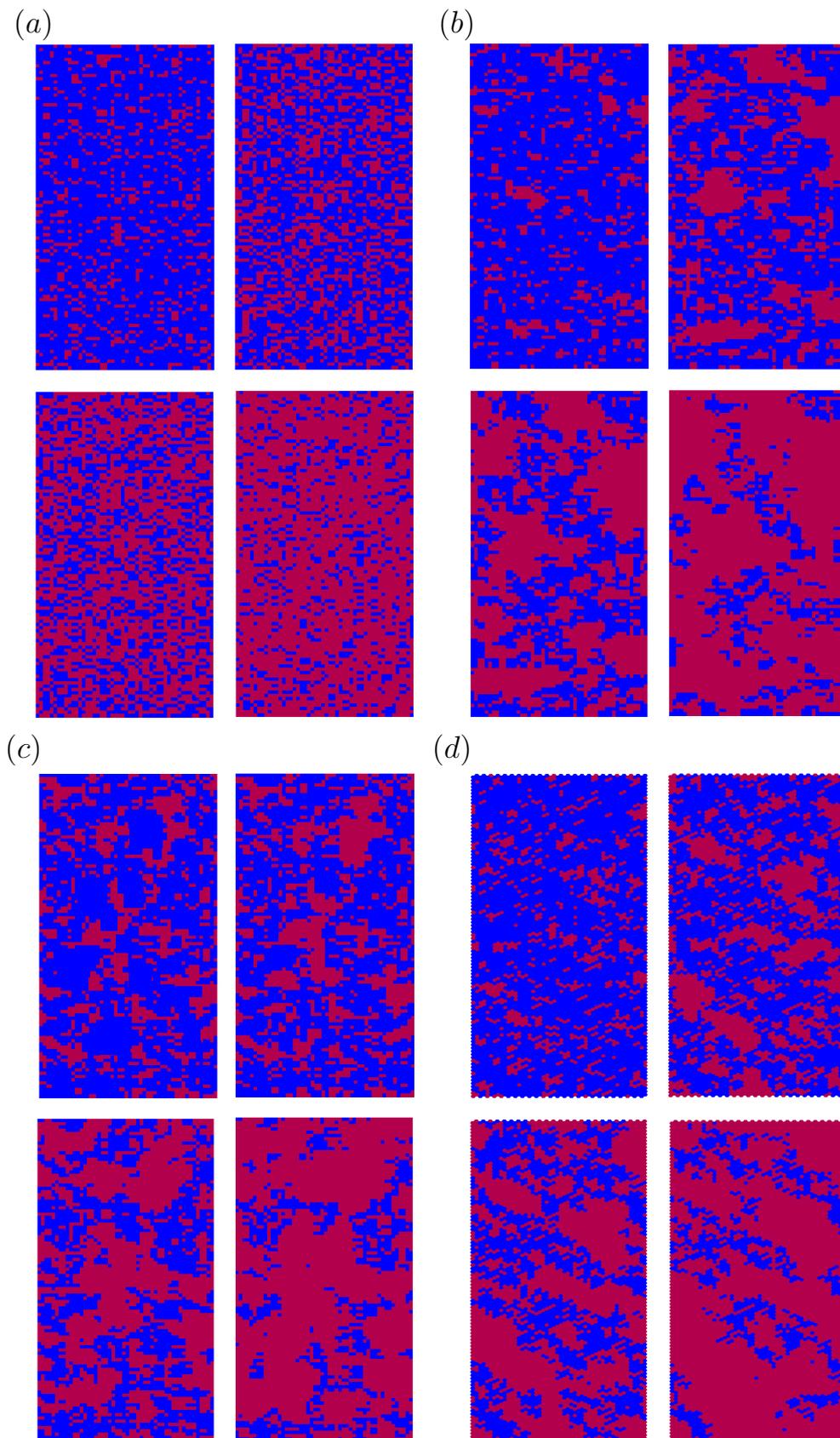


FIGURE III.31 – *Système (100; 50), $N = 5$ et $\lambda = 1$ pour différents nombres de canaux bloqués $k = 1000, 2000, 3000, 4000$ (dans le sens de lecture), les canaux bloqués sont en rouges les canaux ouverts en bleus : (a) GLS carré aux bords périodiques, (b) LLS carré aux bords périodiques, (c) LLS carrés aux bords non périodiques, (d) LLS hexagonal aux bords périodiques.*

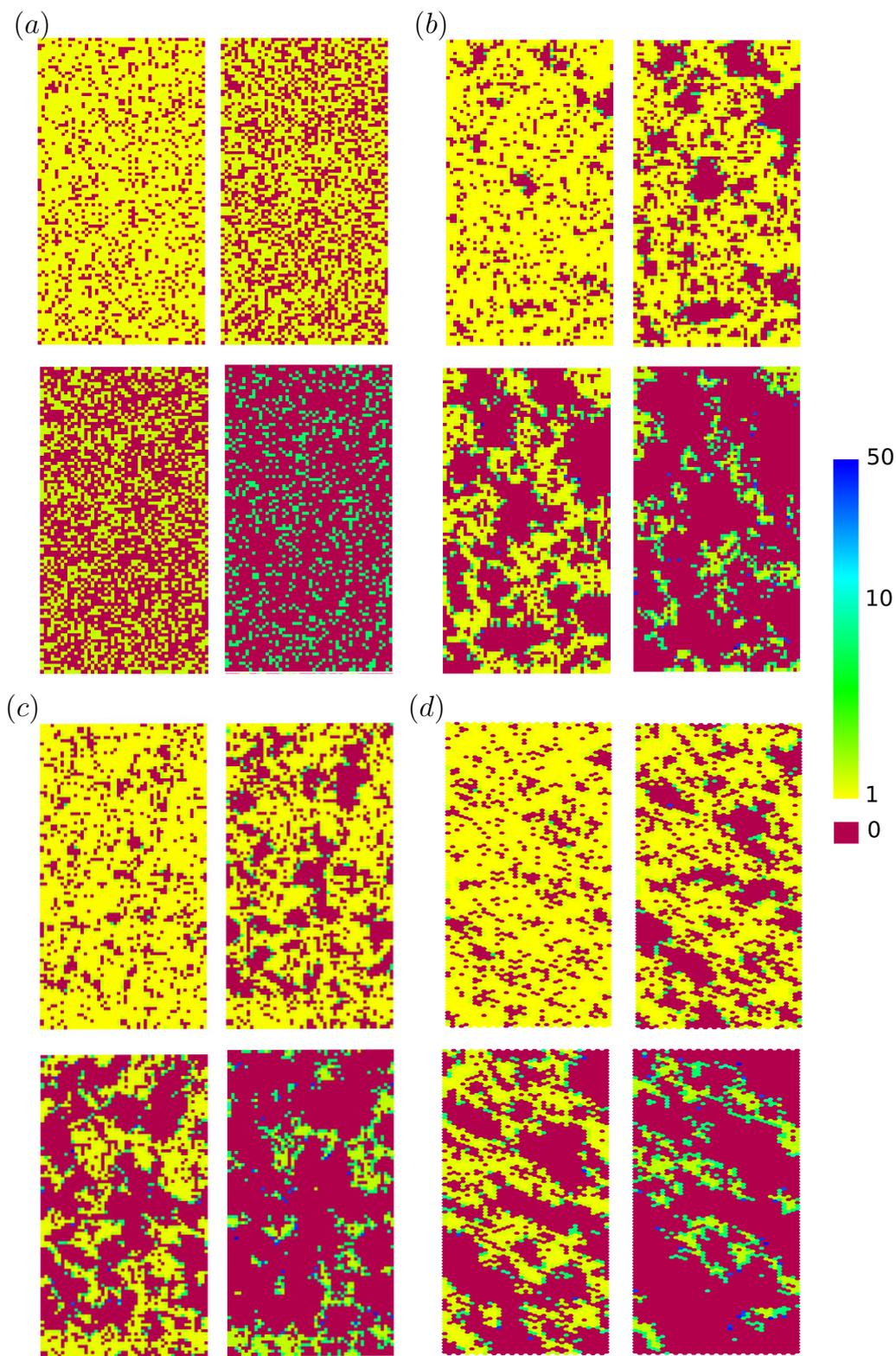


FIGURE III.32 – Intensité par canal dans un système $(100; 50)$, $N = 5$, $\tau = 1$ et $\lambda = 1$, pour différents nombres de canaux bloqués $k = 1000, 2000, 3000, 4000$ (dans le sens de lecture); les canaux bloqués sont en rouge les canaux ouverts en bleu ou vert suivant leur intensité : (a) GLS carré aux bords périodiques, (b) LLS carré aux bords périodiques, (c) LLS carrés aux bords non périodiques, (d) LLS hexagonal aux bords périodiques.

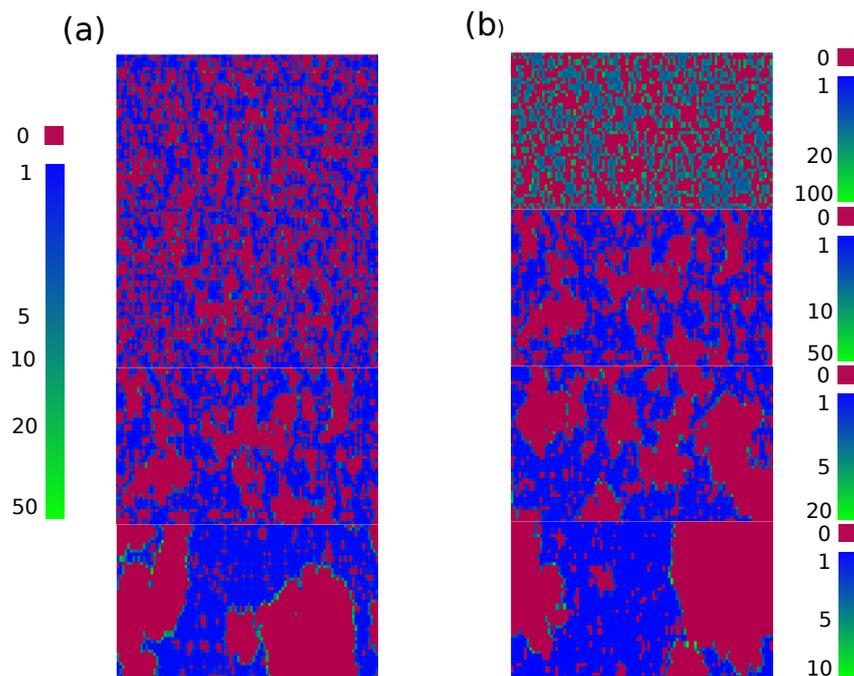


FIGURE III.33 – Intensité par canal dans un système carré aux bords périodiques (100; 50) et $k = 3000$, (a) $\lambda = 1$ et $N = 1, 2, 5, 7$ (de haut en bas) (b) $N = 5$ et $\lambda = 5, 1, 0.5, 0.2$.

de cette courbe et de la Fig. III.35 (b) que la géométrie du système joue un faible rôle, pour un réseau carré ou hexagonal avec un même nombre de canaux, les $P_s(t)$ sont presque identiques (les systèmes (20, 20) et (40, 10) ont la même probabilité). Nous supposons donc que la probabilité de survie dépend juste du nombre de canaux. Sur la Fig. III.35 (a) nous traçons la probabilité de survie pour un cas *LLS* avec des bords périodiques et des bords non périodiques, pour plusieurs tailles et formes de systèmes. Plus le système est grand plus la probabilité s'approche d'une fonction Heaviside. Nous remarquons qu'il y a des différences de probabilités entre les deux cas, la probabilité pour le cas périodique est plus forte que dans l'autre cas ; les effets aux bords limitent la propagation. Nous observons que les probabilités du cas local et du cas global s'écartent quand la taille du système augmente ; dans l'encadré (c) nous repérons que les courbes (20, 20) se juxtaposent parfaitement. Au bout d'une certaine taille les conditions aux bords n'ont plus de rôle dans la dynamique du système. À l'inverse lorsque le système est petit les écarts sont grands entre les deux cas, sauf lorsqu'un des deux cotés est égal à 2. Dans ce cas les courbes se superposent (encadré (c)).

III.6.3 Influence de la coordination

Nous modifions la coordination c'est-à-dire le nombre de plus proche voisins. Lorsque l'on augmente le nombre de plus proche voisins, la probabilité de survie augmente car l'effet cascade diminue, Fig. III.34. En analysant la Fig. III.35 (a) nous remarquons dans le cas des bords non périodiques la probabilité de survie était inférieure, et ce qui est plus net pour un réseau faible (4, 6). Au contraire pour un grand réseau carré l'écart entre les deux probabilités va se réduire. Sur la Fig. III.35 (c) nous repérons plus facilement l'effet de l'augmentation de la probabilité de survie dans le cas de bords périodiques pour des réseaux rectangulaires, ce

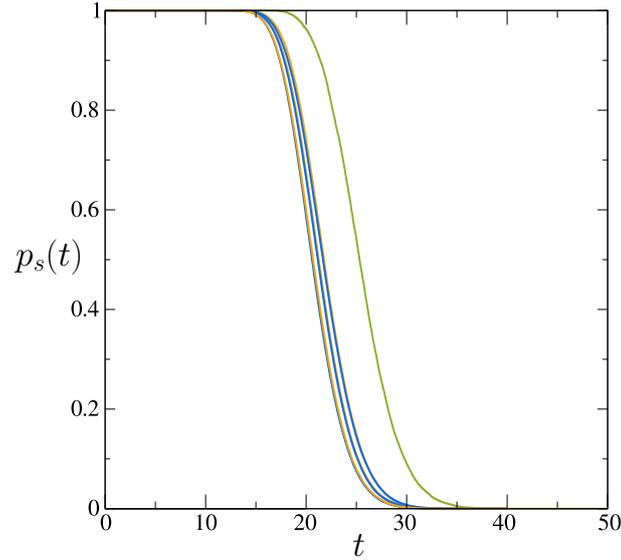


FIGURE III.34 – Probabilité de survie $P_s(t)$ pour $N = 5$, $\lambda = 1$ et $\tau = 1$ avec en vert le cas GLS, en orange et bleu le cas LLS : de droite à gauche le cas hexagonal, périodique et non périodique avec en orange un système $N_x = 10 = N_y$ et en bleu $N_x = 20$, $N_y = 5$.

qui est très faible pour un réseau carré. Voyons à présent la différence sur chaque système pour un réseau carré et rectangulaire.

Lorsque la coordination est faible les canaux vont se bloquer de plus en plus rapidement, Fig. III.36, car certains canaux auront une plus grande intensité d'entrée, donc plus de chance qu'un nombre de particules important entre sur un intervalle de temps inférieur à τ . Nous définissons $\Delta_k^{(1)}$ comme le temps entre deux blocages successifs, i.e la dérivée de la figure $\langle t_k \rangle$ [90].

Nous approximations pour de faibles λ , la probabilité de survie d'un seul canal comme $e^{-t/\langle t \rangle}$. Avec cette simplification nous écrivons la première différence pour le modèle GLS, Fig. III.36(b) :

$$\Delta_{k+1}^{(1)} = \int_0^\infty p_s(t)^{(N_c-k)} dt = \frac{\langle t \rangle / \tau}{N_c - k}, \quad (\text{III.67})$$

avec $\langle t \rangle$ la valeur moyenne de blocage d'un seul canal. Nous avons précédemment une approximation sur le temps moyen : $\langle t \rangle = \frac{(N-1)!}{(\lambda\tau)^N}$ pour une faible intensité λ , Eq. (III.58). Nous obtenons alors :

$$\Delta_{k+1}^{(1)} = \frac{(N-1)!}{(N_c\lambda\tau)^N} (N_c - k)^{N-1}. \quad (\text{III.68})$$

Plus l'effet cascade est important plus le temps entre deux blocages successifs est faible, donc plus $\Delta_k^{(1)}$ est faible. Nous vérifions que pour un faible nombre de plus proches voisins le $\Delta_k^{(1)}$ va être plus faible. Prenons le cas le plus simple, avec un seul plus proche voisin. Lorsqu'un blocage survient le flux du canal est redistribué entièrement à ce voisin. Le canal passe de l'intensité de départ λ à l'intensité 2λ . Nous calculons le temps entre le début de l'expérience et le premier blocage :

$$\Delta_1^{(1)} = \int_0^\infty p_s(t)^{N_c} dt = \frac{(N-1)!}{N_c(\lambda\tau)^N}. \quad (\text{III.69})$$

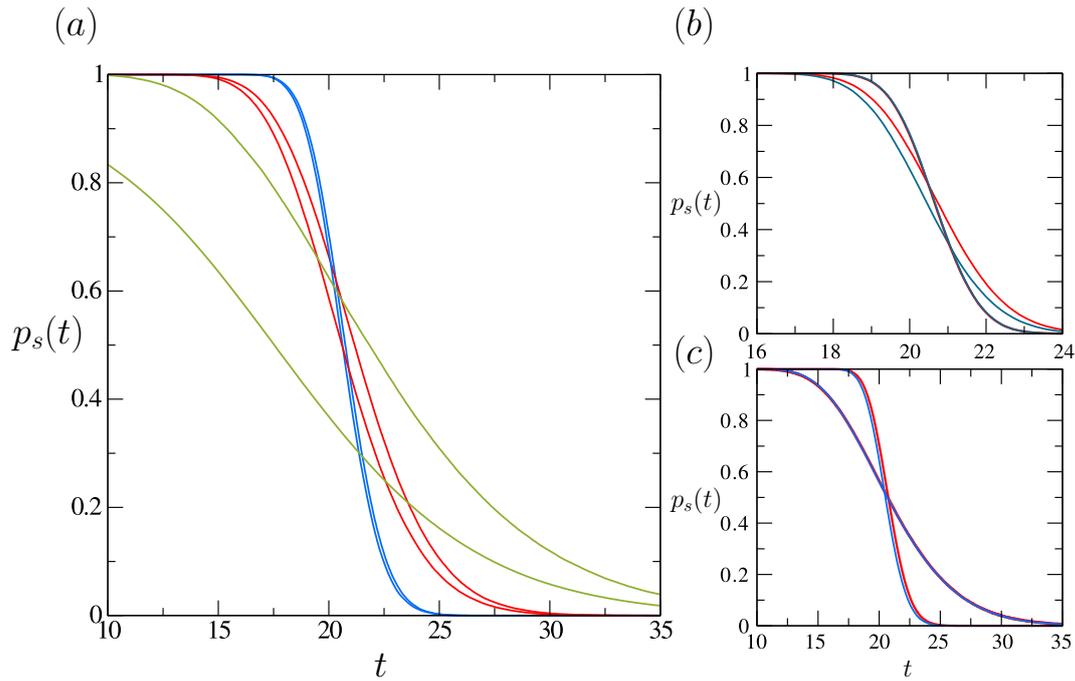


FIGURE III.35 – (a) Probabilité de survie pour le cas LLS pour $\lambda = 1$, $\tau = 1$ et $N = 5$, le cas aux bords périodiques et non périodiques pour les système (N_x, N_y) : (4, 6) en vert, (20, 5) en rouge, (20, 20) en bleu, à chaque fois le cas non périodique à gauche. Dans l’encadré (a) : $P_s(t)$ pour le cas seulement aux bords périodiques pour deux tailles de systèmes $N_c = 400$ et 900 : en bleu foncé un système rectangulaire ((40, 10), (90, 10)), en rouge un système carré ((20, 20), (30, 30)). (b) : $P_s(t)$ pour deux systèmes (20, 20) et (20, 2) pour le cas non périodiques en bleu et périodiques en rouge

Nous avons, à présent, $N_c - 2$ canaux d’intensité λ et 1 canal d’intensité 2λ , nous calculons maintenant l’écart de temps entre le premier et le deuxième blocage, donc le temps moyen pour qu’un deuxième canal se bloque sachant qu’un canal est bloqué avec un système : $N_c - 2$ canaux d’intensité λ et 1 canaux d’intensité 2λ .

$$\begin{aligned}
 \Delta_2^{(1)} &= \int_0^\infty e^{-\frac{(\lambda\tau)^N}{(N-1)!}(N_c-2)t} e^{-\frac{(2\lambda\tau)^N}{(N-1)!}t} dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\frac{(\lambda\tau)^N}{(N-1)!}[N_c-2+2^N]t} dt \\
 &= \frac{(N-1)!}{(\lambda\tau)^N(N_c-2+2^N)}, \tag{III.70}
 \end{aligned}$$

correspond à l’intégrale de la probabilité que $N_c - 2$ canaux survivent avec l’intensité λ multiplié par la probabilité qu’un canal survive d’intensité 2λ . Dans le cas du GLS $\Delta_2^{(1)} = \frac{(N-1)!}{(N_c\lambda\tau)^N}(N_c-2)^{N-1}$, à partir d’un certain nombre N_c , pour N_c grand on a $\Delta_{2GLS}^{(1)} > \Delta_{2LLS}^{(1)}$ donc les canaux se bloquent plus rapidement pour le cas LLS. (Par exemple pour le cas

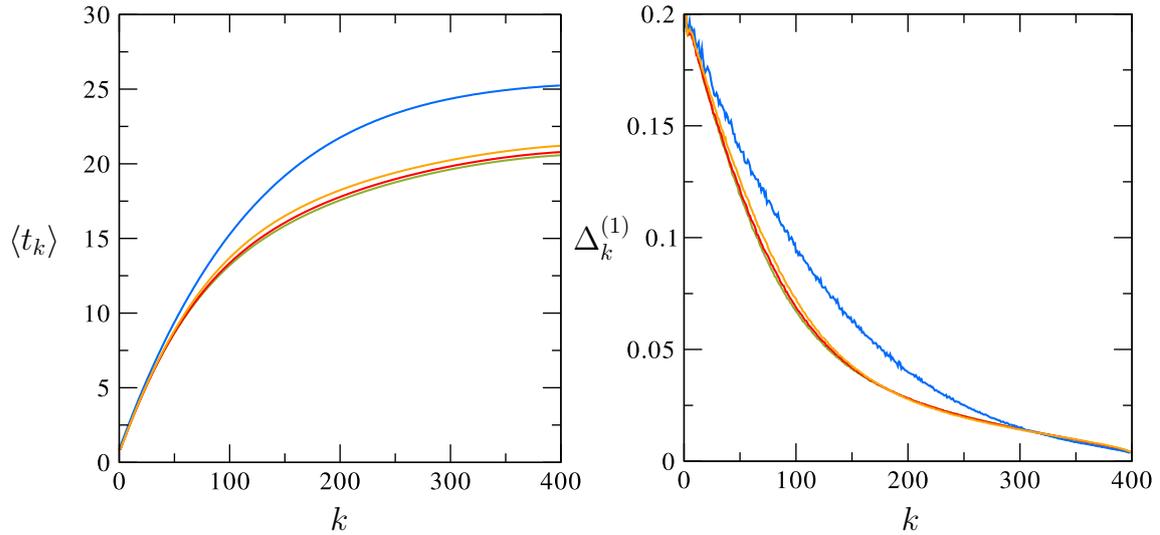


FIGURE III.36 – Pour un système $N_c = 400$, $\tau = 1$ et $\lambda = 1$. (a) Temps moyen de blocage du $k^{\text{ème}}$ canal en fonction du nombre de canaux bloqués. (b) Différence entre les blocages successifs $\Delta_k^{(1)} = \langle t_k \rangle - \langle t_{k-1} \rangle$, pour $N_x = 20$ et $N_y = 20$ et $\lambda = 1$ avec en bleu le modèle GLS en orange le modèle LLS bords périodiques hexagonale, en rouge LLS bords périodiques carrés, en vert LLS bords non périodiques carrés.

$N = 4$ cela est vrai pour $N_c > 6$).

$$\begin{aligned} \Delta_3^{(1)} &= \int_0^\infty dt e^{-t \frac{(\lambda\tau)^N}{(N-1)!} \left[\frac{2}{N_c} (N_c - 3 + 3^N) + \frac{(N_c - 2)}{N_c} (N_c - 4 + 2^{N+1}) \right]} \\ &= \frac{(N-1)!}{(\lambda\tau)^N \left(\frac{2}{N_c} (N_c - 3 + 3^N) + \frac{(N_c - 2)}{N_c} (N_c - 4 + 2^{N+1}) \right)}, \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

il y a deux cas de figures : soit le canal qui se bloque est celui d'intensité 2λ (le premier terme de la somme) soit le canal qui se bloque est un parmi les $N_c - 2$ canaux d'intensité λ (le deuxième terme de la somme). Nous obtenons encore $\Delta_{3GLS}^{(1)} > \Delta_{3LLS}^{(1)}$ pour de grand N_c . Lorsque nous augmentons le nombre k , le nombre de termes augmente, il y a, à chaque fois $3(k-1)!$ termes dans la somme. Nous justifions que l'effet cascade est plus prononcé pour le cas LLS, et même plus fortement lorsque la coordination est faible. Dans le cas des bords périodiques ou non périodiques l'explication est la même. Pour le cas des bords non périodiques il y a $2N_x + 2N_y$ canaux qui ont une coordination plus faible (3 pour un système carré). C'est un résultat commun avec le modèle de fibres, mais cela diffère car $\langle t_k \rangle \neq \langle t_{k+1} \rangle$, quelque soit k , alors que dans le modèle d'ingénierie la distribution des temps de ruptures est en loi de puissance pour les deux cas de répartition.

III.7 Conclusion

Pour conclure ce chapitre nous avons étudié plusieurs modèles multicanaux. Ce cas se rapproche d'un modèle déjà existant en ingénierie : le modèle d'amas de fibres. Nous nous sommes aussi intéressés à plusieurs sortes de répartitions, la première partie a traité

de canaux indépendant, dans la seconde les canaux sont couplés et la redistribution se fait équitablement entre tous les canaux. Enfin dans la dernière partie nous avons étudié un système de canaux couplés où la répartition se fait entre plus proche voisins. Nous avons obtenu les résultats analytiques pour le cas indépendant lorsque les résultats pour un canal étaient connus, c'est-à-dire $1 \leq N \leq 3$. Pour les modèles couplés des phénomènes intéressants apparaissent : le modèle $N = 1$ est complètement soluble, nous remarquons que le $\langle t \rangle$ ne dépend pas du nombre de canaux, il correspond au temps moyen de blocage d'un seul canal, $\langle t \rangle = 1/\lambda$. De plus nous remarquons que les canaux se bloquent à un même intervalle les uns des autres, la vitesse de blocage entre les premiers canaux et le canal k et $k + 1$ est égale. Pour le modèle $N = 2$, le calcul de la solution exacte devient complexe et n'est pas soluble pour tout $N_c > 1$. En traçant les résultats numériques nous avons observé un effet de cascade accéléré intéressant. En effet, les canaux se bloquent de plus en plus vite pour $N > 1$, l'intervalle de temps entre deux blocages diminue lorsque le nombre de canaux bloqués augmente. En analysant ce phénomène analytiquement, nous sommes arrivé à la conclusion que la $N^{\text{ème}}$ différence de l'intervalle de blocage entre deux canaux était constant, cela pour un grand nombre de canaux : $\Delta_k^{(N)} = (-1)^N \frac{((N-1)!)^2}{(\lambda\tau)^N}$. Ainsi nous remarquons que l'effet de cascade accéléré augmente avec N . Lorsque nous avons traité la répartition du flux sur les plus proches voisins, nous avons commencé par un modèle unidimensionnel puis bidimensionnel avec différentes géométries de réseaux. Le résultat pertinent dans cette étude est de voir que l'effet de cascade, de la même manière que pour le modèle d'amas de fibres, est plus important pour le cas où la répartition est locale, et a donc une probabilité de survie plus faible. Pour des conditions aux bords libres nous remarquons aussi une diminution de la probabilité de survie. Au final, pour les systèmes avec peu de plus proches voisins la probabilité de survie est plus faible car l'effet de cascade est plus important. En effet, le flux est alors réparti entre moins de canaux donc ces derniers ont une intensité qui augmente de manière plus importante. Nous avons vérifié cela analytiquement en calculant pour les deux modèles de répartition la différence entre deux temps de blocages successifs, $\Delta_k^{(1)}$, plus l'effet cascade est élevé plus le temps entre deux blocages successifs est faible, donc Δ_k . Nous repérons bien que $\Delta_{kGLS}^{(1)} > \Delta_{kLLS}^{(1)}$.

Modèle avec une durée finie de blocage

Sommaire

IV.1 Introduction à quelques modèles de la théorie des files d'attente . .	101
IV.1.1 Processus de Markov	102
IV.1.2 Modèle $M/M/1$	103
IV.1.3 Les différentes formules d'Erlang	104
IV.1.4 Modèle $M/M/1/K$	105
IV.1.5 Modèle $M/M/c/K$	106
IV.1.6 Autres modèles	107
IV.2 Définition générale du modèle du pont au temps fini de blocage . .	107
IV.3 Seuil de particules bloquantes réduit à un, $N = 1$	109
IV.3.1 Observables stationnaires	109
IV.3.2 Approche intégrale pour le cas d'un seul canal, $N_c = 1$	111
IV.3.3 Approche intégrale pour un système à deux canaux, $N_c = 2$	113
IV.3.4 Approche intégrale pour un système avec un nombre de canaux quelconque, N_c	116
IV.4 Modèle à plusieurs canaux avec une distribution exponentielle du temps de blocage	117
IV.4.1 Temps de déblocage distribué exponentiellement	117
IV.4.2 Cas $N = 1$ et $N_c = 1$ revisité par une approche différentielle	119
IV.4.3 Cas $N = 1$ et $N_c = 2$ par une approche différentielle	120
IV.5 Augmentation du seuil de blocage à deux particules, $N = 2$	123
IV.5.1 Valeur du flux stationnaire	123
IV.5.2 Approche intégrale, dépendance en temps	125
IV.5.3 Cas d'un nombre de canaux quelconque	132
IV.6 Cas d'un seuil de particules bloquantes supérieur à deux, $N \geq 2$. .	133
IV.7 Canaux hétérogènes	135
IV.7.1 Système à deux canaux, $N_c = 2$	135
IV.7.2 Système un nombre quelconque de canaux, N_c	136
IV.8 Conclusion	137

IV.1 Introduction à quelques modèles de la théorie des files d'attente

Avant de définir une nouvelle généralisation de notre modèle nous allons détailler quelques modèles de la théorie des files d'attente qui nous seront utiles dans ce chapitre. En introduction

nous avons présenté la notation de Kendall ainsi que les différentes observables, dans ce chapitre nous allons présenter les résultats analytiques de certains modèles. Pour commencer nous allons expliquer brièvement ce qu'est un processus de Markov, les modèles de la théorie des files d'attente utilisant les propriétés des processus de Markov pour être résolus.

IV.1.1 Processus de Markov

Un processus de Markov est un processus stochastique qui possède la propriété de Markov c'est-à-dire qu'il n'a pas de mémoire, l'état du système dans l'instant $t + dt$ dépend seulement de l'instant t et non du passé [93]. L'observation de points successifs définit une séquence de variables aléatoires X_0, X_1, \dots, X_n . Chaque valeur des X_n dépend seulement du temps n . Un processus stochastique $X_n, n \geq 0$ est une famille de variables aléatoires avec un paramètre discret $n = 0, 1, 2, \dots$ et un espace métrique discret $S = 0, 1, \dots, m$. Nous pouvons l'appeler chaîne de Markov, si pour tous les x_i , état quelconque du processus $\in S$, on a la propriété :

$$Pr\{X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0\} = Pr\{X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}\}. \quad (IV.1)$$

Cette équation donne l'état futur n du système sachant le passé du processus, nous remarquons que le futur dépend seulement du présent et non des anciens événements. Nous appellons la probabilité de transition de l'état j à l'état k

$$p_{jk}(n) = Pr\{X_n = k | X_{n-1} = j\}. \quad (IV.2)$$

Le processus de Markov est homogène si toutes les probabilités de transition $p_{jk}(n)$ sont égales quelque soit n .

$$Pr\{X_n = k | X_{n-1} = j\} = Pr\{X_{n+m} = k | X_{n+m-1} = j\}, \quad (IV.3)$$

pour $m = -(n-1), -(n-2), \dots, 0, \dots$

Distribution de Poisson Cette distribution qui décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé, est une distribution homogène. Si le nombre moyen d'occurrences dans cet intervalle est λ , alors la probabilité qu'il existe exactement k (entier positif) occurrences sur un intervalle donné est

$$p(k) = Pr\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (IV.4)$$

et la probabilité de transition de passer de l'état $X_n = k$ sachant $X_{n-1} = j$ est

$$Pr\{X_n = k | X_{n-1} = j\} = \frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda}, \quad (IV.5)$$

avec $k > j$.

Les processus décrits par les modèles des files d'attente sont généralement des chaînes de Markov continues en temps, alors qu'ils restent discret dans l'espace. On a $X(t), 0 \leq t < \infty$ qui est un processus de Markov avec un espace métrique $S = 0, 1, 2, \dots$. Ces chaînes sont homogènes en temps. Dans ce cas on peut écrire les probabilités de transition comme

$$p_{ij}(t) = Pr\{X(t+u) = j | X(u) = i\} \quad t > 0, i, j \in S, \quad (IV.6)$$

avec la loi de conservation des probabilités $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ pour tous i . La probabilité que le système soit à l'état j au temps t est

$$Pr\{X(t) = j\} = \sum_i p_{ij}(t) Pr\{X(0) = i\}. \tag{IV.7}$$

Dans le cas d'une chaîne de Markov continue en temps et homogène on appelle la relation de Chapman-Kolmogorov la propriété qui relie les probabilités des n évènements à celle d'un seul évènement, c'est-à-dire

$$p_{ij}(T + t) = \sum_k p_{ik}(T) p_{kj}(t) \text{ pour tous } i, j, k \in S. \tag{IV.8}$$

Nous pouvons donner une brève mais rigoureuse démonstration de cette équation :

$$\begin{aligned} p_{ij}(T + t) &= Pr\{X(T + t) = j | X(0) = i\} \\ &= \sum_k Pr\{X(T + t) = j, X(T) = k | X(0) = i\}. \end{aligned} \tag{IV.9}$$

D'après la définition des probabilités conditionnelles nous écrivons

$$\begin{aligned} p_{ij}(T + t) &= \sum_k \frac{Pr\{X(T + t) = j, X(T) = k, X(0) = i\}}{Pr\{X(0) = i\}} \\ &= \sum_k \frac{Pr\{X(T + t) = j | X(T) = k, X(0) = i\} Pr\{X(T) = k, X(0) = i\}}{Pr\{X(0) = i\}} \\ &= \sum_k p_{ik}(T) p_{kj}(t). \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Nous avons utilisé la propriété de Markov, Eq. (IV.1), pour passer de l'avant dernière à la dernière équation.

IV.1.2 Modèle $M/M/1$

Le modèle le plus simple et le plus étudié de files d'attente est le modèle $M/M/1$. Il correspond à la situation avec un seul serveur, où les clients arrivent suivant une distribution de Poisson d'intensité que nous allons noter λ et avec un temps de service qui suit une distribution exponentielle de temps moyen que nous notons $\frac{1}{\mu}$ [93]. Ce modèle Markovien, puisque les deux distributions sont exponentielles, permet de ne prendre en compte que le temps t observé pour les changements d'états du système. Dans ce modèle, il n'y aura pas de solution donc le cas où $\rho = \frac{\lambda}{\mu} > 1$ puisque la file d'attente va toujours continuer à croître. Par contre dans le cas où $\rho < 1$ alors il y aura une solution stationnaire. Le serveur traite les clients un à un selon le mode "premier arrivé, premier servi". On note i le nombre de clients. Lorsqu'un client arrive le système passe de i à $i + 1$ clients et lorsque le service est fini le client quitte le système, et leur nombre total passe de i à $i - 1$. On peut écrire les équations différentielles du système

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \tag{IV.11}$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) + \lambda p_{n-1}(t). \tag{IV.12}$$



FIGURE IV.1 – File d’attente pour un casting ouvert de chat noir pour le film d’horreur “Tales of Terror”, qui peut représenter le modèle $M/M/1$, les chats arrivent et passent le casting avec une distribution de temps exponentiel. Tous les chats qui arrivent se mettent au bout de la file d’attente sans limite de nombre de participants.

Ces équations, appelées équations de Kolmogorov, décrivent l’évolution dans le temps des probabilités¹.

La probabilité stationnaire que k clients soient dans le système est simple et donnée par

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, \quad (\text{IV.13})$$

avec

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right)^{-1} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \quad (\text{IV.14})$$

avec $\mu > \lambda$.

IV.1.3 Les différentes formules d’Erlang

IV.1.3.a Distribution d’Erlang

La distribution d’Erlang correspond à un cas particulier de la distribution Gamma où le paramètre k est un entier, dans la loi Gamma, ce paramètre est réel positif. Une variable aléatoire suit une distribution d’Erlang avec une moyenne k/μ si x est la somme de k variables aléatoires exponentielles indépendantes x_1, \dots, x_k de paramètre μ . La fonction de densité est donnée par

$$f(t) = \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} \mu e^{-\mu t}. \quad (\text{IV.15})$$

1. Équation de Chapman-Kolmogorov : $p_{ik}(t_1 + t_2) = \sum_{n=1}^N p_{in}(t_1) p_{nk}(t_2)$.

La fonction de répartition vaut :

$$F(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t}, \tag{IV.16}$$

avec μ appelé le paramètre d'échelle et k est le paramètre de forme (entier naturel). La loi d'Erlang est la distribution de la somme de k variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre μ . La valeur moyenne est $\langle x \rangle = \frac{k}{\mu}$ et la variance $\sigma^2(x) = \frac{k}{\mu^2}$. Nous allons voir par la suite que la distribution d'Erlang été utilisée dans la théorie des files d'attente, notamment pour analyser un système $M/E_r/1$, avec E_r une distribution de service qui suit la loi d'Erlang, qui permet des approximations sur des modèles plus généraux.

IV.1.3.b Formule d'Erlang

Les formules d'Erlang ont été, elles, développées dans la compréhension de la gestion de l'attente des réseaux téléphoniques. Il existe plusieurs formules pour différents modèles : celle présentée dans les sections ultérieures est la formule Erlang-B aussi nommée la formule de perte d'Erlang, notée $B(\rho, m)$. C'est une formule de probabilité de blocage qui décrit la probabilité de perte d'appel pour un groupe de ressources parallèles identiques. La formule d'Erlang-B générale est

$$B(\rho, m) = \frac{\frac{\rho^m}{m!}}{\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!}} \tag{IV.17}$$

avec $\rho = \lambda \mathbb{E}(B)$ ² et m correspond au nombre de clients présents dans le système.

IV.1.4 Modèle $M/M/1/K$

Ce modèle considère un serveur avec un temps d'arrivée et de sortie exponentiellement distribué, de paramètres λ et μ respectivement, avec un nombre fini de clients qui peuvent attendre. Ce modèle ressemble au modèle $M/M/1$ mais avec un nombre limité de clients donc si on reprend les équations d'évolution il n'y aura non pas un nombre infini de possibilités d'événements dont les probabilités de chaque sont les $p_n(t)$ mais un nombre fini allant jusqu'à K . De plus la dernière équation va être modifiée puisque lorsqu'il y aura K clients dans le système aucun ne pourra entrer et prendre place dans la file d'attente, donc le terme $\mu p_{K+1}(t)$ disparaît et les $p_n(t) = 0$ pour $n > K$. Ce qui nous donne finalement l'évolution des probabilités $p_n(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ \frac{dp_n}{dt} &= \lambda p_{n-1} - (\mu + \lambda) p_n + (\mu + (n+1)\lambda) p_{n+1}, \quad 1 \leq n < K, \\ \frac{dp_K}{dt} &= \lambda p_{K-1} - \mu p_K, \end{aligned} \tag{IV.18}$$

avec $p_n(0) = -\delta_{n,0}$; $p_n(t)' = \frac{d}{dt} p_n(t)$ [94]. Ces équations sont similaires à celles du modèle $M/M/1$, Eq.(IV.13), sauf pour l'équation $n = K$ qui est la limite imposée sur le nombre de

2. Correspond à la moyenne du temps de service.

clients. La dérivée de ces probabilités correspond au changement d'état à l'instant t . Pour la première équation il y a un terme de perte qui correspond à l'entrée d'un client dans le serveur et un terme de gain où le seul client dans le système sort du serveur. Les autres équations pour $0 < n < K$ ont deux termes de gain puisqu'il est possible de passer d'un système $n - 1$ à un système n avec l'arrivée d'un client, ainsi que passer de $n + 1$ à n avec la sortie d'un client. Il y a aussi deux termes de perte où avec l'arrivée d'un client le système passe de n à $n + 1$ et la sortie d'un client fait passer le système de n à $n - 1$. La dernière équation $n = K$ diffère puisqu'il y a un nombre fini de clients possible donc n ne peut pas être supérieur à K , donc le système peut seulement perdre des clients et ainsi passer de K à $K - 1$; le terme de gain n'est lui pas modifié. Il y a une conservation des probabilités donc $d(\sum_{n=0}^K p_n)/dt = 0$. Les valeurs stationnaires sont

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad (\text{IV.19})$$

avec

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^K \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)^{-1}, \quad (\text{IV.20})$$

cette probabilité correspond à la loi d'Erlang-B [93]. Les solutions de ces équations sont calculées dans [94] et [95] et donnent

$$p_n(t) = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}} + e^{-(1+\rho)t} \rho^n \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(\rho-1)(1+\rho)^m}{1-\rho^{K+1}} + a(m, n) \right] \frac{t^m}{m!}, & \rho \neq 1, 0 \leq n \leq K \\ \frac{1}{N+1} + e^{-2t} \sum_{m=0}^{\infty} \left[a(m, n) - \frac{2}{N+1} \right] \frac{t^m}{m!}, & \rho = 1, 0 \leq n \leq K, \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

avec $\rho = \lambda/\mu$ et $a(m, n)$ qui est une constante polynomiale en ρ . Le nombre moyen de clients est alors donné par

$$\langle n \rangle = \sum_0^K n p_n = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial \ln p_0}{\partial (\lambda/\mu)} \quad (\text{IV.22})$$

IV.1.5 Modèle $M/M/c/K$

Dans ce système des clients arrivent avec une distribution exponentielle sur c serveurs, la distribution de service est aussi exponentielle et il peut y avoir un maximum de K clients dans tout le système (c'est-à-dire ceux dans les c serveurs ajoutés à ceux de la file d'attente).

Cas $K > c$. C'est une variation d'un système multi-serveurs avec seulement K clients au maximum, qui peuvent rester dans le système. La probabilité stationnaire, est définie comme le modèle précédent

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 & \text{pour } 0 \leq n \leq c, \\ \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} P_0 & \text{pour } c \leq n \leq K, \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

avec la condition de normalisation

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \sum_{n=c}^K \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} \right)^{-1}. \quad (\text{IV.24})$$

La probabilité stationnaire d'un système complètement bloqué correspondrait à prendre $n = c$, et donc nous obtenons :

$$P_c = \frac{\lambda^c}{c! \mu^c} P_0. \quad (\text{IV.25})$$

Pour deux serveurs, $c = 2$, nous obtenons :

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0. \tag{IV.26}$$

Cas $K = c$. Dans ce cas là il y a c serveurs et aucun client ne peut attendre. Les valeurs stationnaires sont

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \tag{IV.27}$$

avec

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^K \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)^{-1}, \tag{IV.28}$$

Lorsque $c = K$ nous retrouvons exactement l'équation d'Erlang-B, $B(\rho, c)$, Eq. (IV.17).

IV.1.6 Autres modèles

D'autres versions de ces modèles ont été étudiées par la suite. Dans l'App. B est donné le modèle avec une distribution de service déterministe, c'est-à-dire un temps de service constant, soit le modèle $M/D/1/N$ qui a été très tôt étudié dans la littérature notamment par Pollaczek (en 1930) [96] et Crommelin (en 1932,1934) [97], plus récemment une solution exacte du modèle à été donnée par Garcia et Brun [98][99]. Une autre généralisation possible est celle avec un “*bulk service*”, ou “*batch service*”, qui correspondent à une arrivée ou un service par groupe de clients [100–103]. Le batch service est noté $M/M(a, b)/1$, si les distributions sont exponentielles, c'est un modèle où le service peut prendre plusieurs clients à la fois, b est la capacité maximale du serveur donc si le nombre de clients est supérieur à ce nombre alors il y a de l'attente. De plus, le service commence lorsque a clients sont dans le système ($b \geq a \geq 1$). Des distributions différentes ont aussi été analysées [104] [105]. Une arrivée par groupe est utilisée pour beaucoup d'applications physiques [106][107], le service par groupe est utilisé pour la gestion des ascenseurs, des transports aux capacités limitées [108]. Ont été étudiés aussi des modèles avec des serveurs hétérogènes, c'est-à-dire chaque serveur peut avoir un temps de service différent [109] [110]. Toute cette théorie mathématique permet de comprendre et de minimiser l'encombrement dans les files d'attente dans différentes situations physiques.

IV.2 Définition générale du modèle du pont au temps fini de blocage

Ce chapitre traitera des modèles où le temps de blocage a une durée de vie finie, ce qui signifie que les particules peuvent s'éjecter du canal elles-mêmes au bout d'un certain temps. Pour rappel la vitesse des particules est choisie constante donc le temps de transit est une constante, τ . Lorsqu'elles sont bloquées, les particules vont s'éjecter du canal après un temps τ_b et ensuite le flux reprend. Pour une cohérence physique il faut que $\tau_b > \tau$, sinon les particules qui se bloquent ressortent plus vite que lorsqu'elles traversent directement le canal. Une fois que les particules sont ressorties le canal revient à son état initial, de la même manière qu'une marche aléatoire avec réinitialisations, où le marcheur revient au site de départ après un certain temps constant [111, 112]. Le modèle $N = 1$ correspond à un système à deux états

et non à un phénomène de blocage, puisqu'en effet, toutes les particules qui entrent vont se retrouver coincées pendant un temps τ_b . Lorsque le canal est bloqué aucune particule ne peut entrer, elles sont donc rejetées. Les deux états sont : un canal ouvert avec 0 jusqu'à $N - 1$ particules présentes, un canal fermé avec N particules temporairement bloquées. Nous nous intéressons à un modèle à un canal mais aussi à un système de N_c canaux couplés.

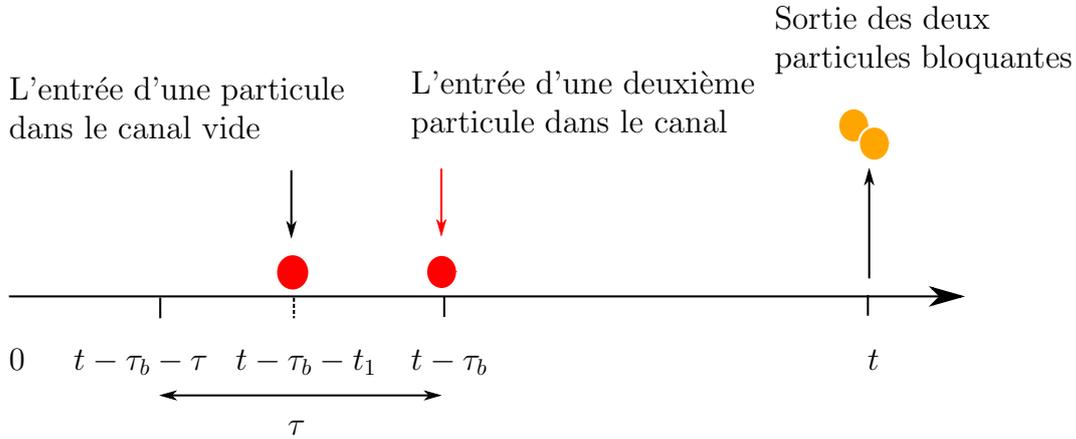


FIGURE IV.2 – Illustration du modèle $N = 2$. Une première particule arrive dans le canal entre $t - \tau_b$ et $t - \tau_b - \tau$ (ou 0 si ce temps est négatif), la seconde particule entre à $t - \tau_b$ et cause un blocage, ensuite les deux particules sortent après le temps de blocage, donc à t .

Une caractéristique fondamentale de l'ensemble de ces modèles est l'établissement d'un état stationnaire avec l'apparition d'un flux stationnaire de particules. En conséquence, la probabilité de survie et le flux sortant ne tendent pas vers zéro mais vers une valeur finie.

Dans ces modèles, nous nous intéressons, entre autres, à la probabilité que le système soit ouvert, P_A , c'est-à-dire qu'au moins un des canaux survive. Nous notons $p_k(t)$ la probabilité que le canal k soit ouvert au temps t ,

$$P_A(t) = 1 - \prod_{k=0}^{N_c} (1 - p_k(t)). \quad (\text{IV.29})$$

Cela correspond à la probabilité complémentaire que tous les canaux soient fermés. Nous notons la probabilité que le système soit fermé P_B , que nous calculons comme $P_B(t) = 1 - P_A(t)$. Le flux sortant, $J(t)$, peut aussi être exprimé ainsi que le flux des particules qui sont rejetées $K(t)$. Lorsque l'ensemble du système est bloqué, les particules entrantes sont immédiatement éjectées. Nous remarquons qu'avec ces définitions, dans l'état stationnaire nous obtenons l'équation

$$\Lambda = J_\infty + K_\infty, \quad (\text{IV.30})$$

Λ est le flux entrant total. De manière générale l'équation d'évolution du système est donnée par

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - J(t) - K(t), \quad (\text{IV.31})$$

avec $N(t)$ le nombre de particules dans le système à l'instant t . Nous pouvons aussi remarquer que le flux des particules rejetées $K(t)$ va correspondre au flux entrant multiplié par la

probabilité que le système soit fermé

$$K(t) = \Lambda P_B(t), \quad (\text{IV.32})$$

nous le vérifierons numériquement et analytiquement ci-dessous. Par contre, le flux sortant n'est pas égal au flux entrant multiplié par la probabilité que le canal soit ouvert puisque les particules bloquées sont éjectées simultanément lors de la réouverture du canal, et vont ainsi augmenter de N le flux. Cependant ces effets d'intermittence sont moyennés sur l'ensemble des réalisations indépendantes, ce qui donne lieu à des valeurs stationnaires. Mais chaque chaîne de réalisations prise séparément a un flux de forme discontinue. Nous avons

$$J_\infty = \Lambda P_{A\infty} \quad (\text{IV.33})$$

Dans le modèle à plusieurs canaux où le blocage a une durée de vie finie, quand un canal se bloque le flux total entrant est redistribué entre les autres canaux. Le flux total reste constant Λ et après k blocages l'intensité dans les $N_c - k$ canaux restants devient

$$\lambda_k = \lambda \frac{N_c}{N_c - k}. \quad (\text{IV.34})$$

Dans ce chapitre, nous allons commencer par obtenir des solutions analytiques grâce aux équations d'évolutions de la cinétique pour un modèle à un seul canal. Puis nous allons utiliser la théorie des files d'attente pour obtenir davantage de résultats pour un plus grand nombre de canaux. Dans un premier temps le modèle sera $N = 1$ puis nous allons augmenter le seuil de particules bloquantes.

IV.3 Seuil de particules bloquantes réduit à un, $N = 1$

Commençons par considérer un système où une seule particule bloque les canaux c'est-à-dire le modèle $N = 1$.

IV.3.1 Observables stationnaires

Nous nous intéressons aux valeurs stationnaires du flux et de la probabilité que le canal soit ouvert.

IV.3.1.a Cas d'un seul canal, $N_c = 1$

Ce modèle est équivalent à un système à deux états, ici "*ouvert*" ou "*fermé*". Pour le cas d'un seul canal, nous obtenons facilement les valeurs exactes de ces grandeurs. Dans ce modèle toutes les particules qui entrent se bloquent pendant un temps τ_b et aucune particule ne peut s'insérer à ce moment-là. Le temps moyen du premier blocage pour un canal est $\langle t \rangle = 1/\lambda$. Après un temps moyen $1/\lambda$ il y aura en moyenne une particule qui sera relâchée après un temps τ_b , comme on peut le voir sur le schéma Fig. IV.3 où le blocage est montré en rouge sur la ligne de temps.

Cela veut dire qu'en moyenne sur un temps $\tau_b + 1/\lambda$ le système sera bloqué un temps τ_b et ouvert un temps $1/\lambda$. Nous obtenons donc la probabilité que le système soit fermé dans l'état stationnaire comme

$$P_B(\infty) = \frac{\tau_b}{1/\lambda + \tau_b} = \frac{\lambda\tau_b}{1 + \lambda\tau_b}. \quad (\text{IV.35})$$

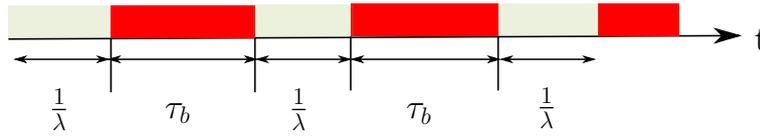


FIGURE IV.3 – Les carrés rouges montrent les moments où l'on trouve une particule dans le canal, donc un blocage, et le reste correspond aux moments où le canal est ouvert.

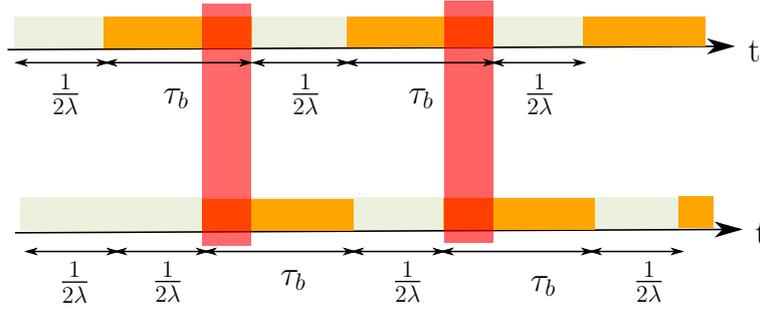


FIGURE IV.4 – les carrés oranges montrent les moments où une particule est dans un canal, Les rectangles rouges correspondent au moment où tout le système est bloqué.

Ce résultat correspond au modèle $M/D/1/1$ de la théorie des files d'attente dont la solution est donnée par Garcia et al. [98].

Le flux sortant dans l'état stationnaire va correspondre au fait qu'une particule sorte dans un temps moyen de $1/\lambda + \tau_b$ donc

$$J_\infty = \frac{1}{1/\lambda + \tau_b} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\tau_b}. \quad (\text{IV.36})$$

IV.3.1.b Deux canaux, $N_c = 2$

Pour le cas à deux canaux le blocage total est défini par le blocage simultané des deux canaux. Cette fois l'intensité totale est 2λ donc le premier blocage survient après un temps $\frac{1}{2\lambda}$. Si $\frac{1}{2\lambda} < \tau_b$, alors il y aura un blocage complet au bout d'un temps $\frac{2}{2\lambda}$ suivi de la réouverture après un temps $\tau_b - \frac{1}{2\lambda}$. Nous remarquons sur la Fig. IV.4 qu'après cette réouverture le canal encore fermé va se débloquent lorsque l'autre canal se bloque. Il n'y a donc pas de moment où le système est complètement fermé. Le système n'est complètement bloqué que sur une durée $\tau_b - 1/2\lambda$ sur un intervalle de temps $\tau_b + 1/2\lambda$. Dans ce cas, la probabilité stationnaire que le système soit fermé est donc

$$P_B(\infty) = \frac{2\lambda\tau_b - 1}{1 + 2\lambda\tau_b}. \quad (\text{IV.37})$$

Et le flux stationnaire est

$$J_\infty = \frac{4\lambda}{1 + 2\lambda\tau_b}. \quad (\text{IV.38})$$

Le flux dépend de l'intensité entrante. Les expressions de la probabilité que le canal soit ouvert et celle du flux stationnaire correspondent aux résultats numériques pour de grandes intensités, Fig. IV.5. Si l'intensité est très faible alors $\frac{1}{2\lambda} \gg \tau_b$ et le risque d'un blocage complet du système est très faible donc $P_B(\infty) \rightarrow 0$ ainsi que $J_\infty \rightarrow 0$.

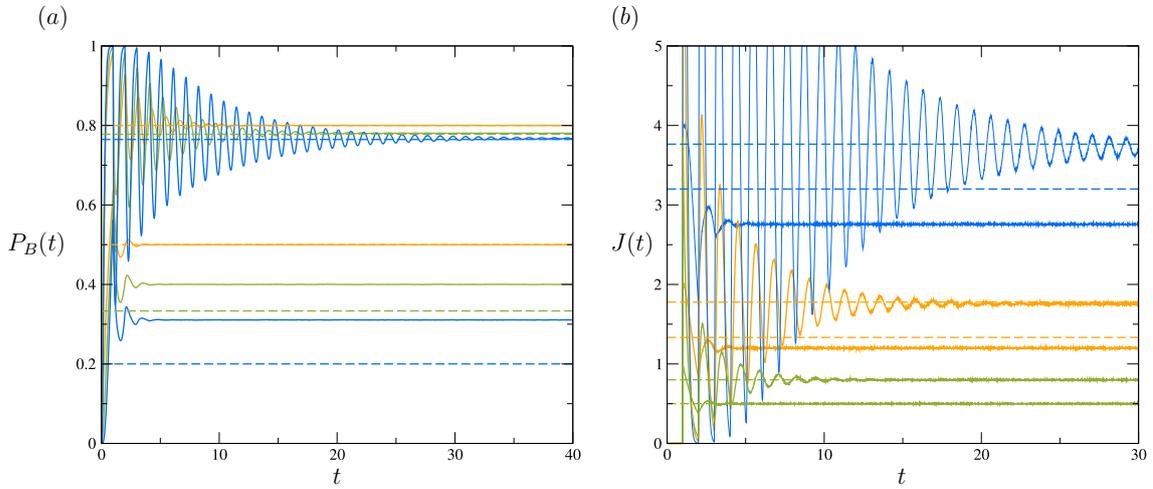
IV.3.1.c Cas avec un nombre quelconque de canaux, N_c 

FIGURE IV.5 – (a) Probabilité que le système soit ouvert (b) Flux sortant pour $N = 1$ et $N_c = 2, 3, 4$ (vert, orange, bleu, respectivement) avec $\tau_b = 1$, $\tau = 1$ et deux intensités différentes $\lambda = 1, 4$ (les six courbes plus basses, puis les six courbes plus hautes respectivement), lignes pleines, valeurs numériques, lignes pointillées, expression approchée des grandeurs stationnaires, Eqs. (IV.40) et (IV.41).

Nous utilisons la même méthode approchée pour N_c quelconque. Pour que tous les canaux soient bloqués simultanément un moment, il faut un temps $(N_c - 1)/N_c\lambda$ puisque lorsqu'un canal se ferme il faut le temps que les $N_c - 1$ autres canaux se bloquent. Pour qu'il y ait un blocage complet, il est nécessaire que $(N_c - 1)/N_c\lambda < \tau_b$, ce qui donne

$$\lambda > \frac{N_c - 1}{N_c\tau_b}. \quad (\text{IV.39})$$

Pour ce flux le système va complètement se fermer pendant un temps $\tau_b - (N_c - 1)/N_c\lambda$. Donc la probabilité stationnaire que le système soit ouvert est donc

$$P_B(\infty) = \frac{N_c\lambda\tau_b - (N_c - 1)}{N_c\lambda\tau_b + 1}. \quad (\text{IV.40})$$

Et le flux stationnaire est

$$J_\infty = \frac{N_c^2\lambda}{1 + N_c\lambda\tau_b}, \quad (\text{IV.41})$$

car pendant un temps $\tau_b + 1/N_c\lambda$ il y a $N_c - 1$ particules qui sont éjectées.

IV.3.2 Approche intégrale pour le cas d'un seul canal, $N_c = 1$

Nous allons étudier la dynamique du modèle pour $N = 1$ par une approche intégrale. Lorsque celui-ci est bloqué alors les particules n'entrent plus dans le système et on passe donc directement d'un système ouvert à un système fermé. Quand le canal est fermé alors les particules du flux entrant sont rejetées. Pour ce modèle, nous obtenons la probabilité

$P_A(t)$ que le système soit ouvert. $P_A(t)$ est égale à la somme des probabilités partielles $q(n, t)$ (probabilité que le canal soit ouvert avec n particules entrées dans le système entre 0 et t) :

$$P_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n, t). \quad (\text{IV.42})$$

Pour que le canal soit ouvert, il faut que la dernière particule entrée soit arrivée à un temps inférieur à $t - \tau_b$. Il existe bien sûr une probabilité $q(0, t)$ qui correspond à la probabilité qu'aucune particule ne soit entrée entre l'instant initial et l'instant t . Compte tenu des règles de ce modèle, les probabilités partielles satisfont les conditions suivantes : $q(0, 0) = 1$ et $q(n, t) = 0$ pour $t < n\tau_b$, si n particules sont entrées alors il y a eu n blocages qui se sont débloqués après un temps τ_b chacun, donc il ne peut pas y avoir $t < n\tau_b$ sans que le canal soit bloqué. La probabilité $q(0, t)$ correspond à la probabilité qu'aucune particule ne soit arrivée entre 0 et t et est donnée par distribution de Poisson $q(0, t) = e^{-\lambda t}$. Pour obtenir les probabilités partielles $q(n, t)$, nous calculons les probabilités associées aux trajectoires. Pour $n = 1$:

$$q(1, t) = \int_0^{\infty} dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} \int_0^{\infty} dt' e^{-\lambda t'} \delta(t - t_1 - \tau_b - t'), \quad (\text{IV.43})$$

qui correspond à la probabilité qu'une particule arrive au temps t_1 ; ensuite le système est bloqué jusqu'à $t_1 + \tau_b$ et la deuxième intégrale correspond au fait qu'aucune particule ne soit entrée pendant un temps t' , $t_1 + \tau_b < t' < t$. La somme de tous les temps est égale à t , d'où l'introduction de la contrainte $\delta(t - t' - t_1 - \tau_b)$ dans la sommation. En prenant la transformée de Laplace $q(1, t)$, nous obtenons que

$$\tilde{q}(1, u) = \lambda e^{-u\tau_b} \int_0^{\infty} dt_1 e^{-t_1(\lambda+u)} \int_0^{\infty} dt' e^{-t'(\lambda+u)} \quad (\text{IV.44})$$

$$= \frac{\lambda e^{-u\tau_b}}{(\lambda + u)^2}, \quad (\text{IV.45})$$

qui peut être aisément inversée et donne

$$q(1, t) = \lambda e^{-\lambda(t-\tau_b)} (t - \tau_b) \theta(t - \tau_b). \quad (\text{IV.46})$$

Cette équation se comprend facilement puisqu'elle correspond à la probabilité de Poisson d'avoir une particule dans un temps $t - \tau_b$, multipliée par la contrainte $t > \tau_b$ pour que le canal soit ouvert. Nous généralisons cette équation pour tout n :

$$q(n, t) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t_1} dt_1 \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t_2} dt_2 \dots \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t_n} dt_n \quad (\text{IV.47})$$

$$\int_0^{\infty} dt' e^{-\lambda t'} \delta(t - t_1 - t_2 \dots - t_n - n\tau_b - t'). \quad (\text{IV.48})$$

Les premières intégrales correspondent à l'arrivée des n particules après chaque déblocage. Pour chaque intervalle de temps t_n s'ajoute un temps τ_b nécessaire au déblocage. Le temps total est égal à la somme des intervalles de temps plus $n\tau_b$, temps nécessaire aux n déblocages plus t' , l'intervalle de temps où aucune particule supplémentaire n'entre avant t . En prenant la transformée de Laplace nous obtenons

$$\tilde{q}(n, u) = e^{-nu\tau_b} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n [\lambda e^{-(\lambda+u)t_i} dt_i] \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+u)t'} dt' \quad (\text{IV.49})$$

$$= \frac{\lambda^n e^{-nu\tau_b}}{(\lambda + u)^{n+1}}. \quad (\text{IV.50})$$

Nous calculons l'inversion de la transformée de Laplace :

$$q(n, t) = \frac{(\lambda(t - n\tau_b))^n}{n!} e^{-\lambda(t - n\tau_b)} \theta(t - n\tau_b). \quad (\text{IV.51})$$

C'est la probabilité que n particules soient arrivées dans un temps $t - n\tau_b$, avec $n\tau_b$ le temps où le canal était fermé. Cette probabilité d'entrée suit la loi de Poisson et on la multiplie par la contrainte que t doit être supérieur à $n\tau_b$. D'après l'Eq. (IV.42) nous pouvons maintenant calculer la probabilité en sommant les probabilités partielles,

$$P_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t - n\tau_b))^n}{n!} e^{-\lambda(t - n\tau_b)} \theta(t - n\tau_b). \quad (\text{IV.52})$$

La transformée de Laplace s'écrit

$$\tilde{P}_A(u) = \frac{1}{\lambda(1 - e^{-u\tau_b}) + u}. \quad (\text{IV.53})$$

Nous avons obtenu l'expression de la transformée de Laplace de la probabilité pour que le système soit ouvert pour $N_c = 1$ et $N = 1$ à l'instant t . Le flux sortant de ce système se déduit à partir de cette probabilité : pour avoir une particule sortant du canal au temps t , il faut qu'une particule soit entrée dans le canal au temps $t - \tau_b$ pour qu'elle se débloque au temps t , donc

$$J(t) = \lambda P_A(t - \tau_b). \quad (\text{IV.54})$$

Aux temps longs, $t \rightarrow \infty$, les grandeurs deviennent constantes, cela caractérise un état stationnaire. À partir des expressions dans l'espace de Laplace, nous obtenons les expressions de l'état stationnaire en prenant la limite lorsque $u \rightarrow 0$: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{f}(u)$. La probabilité stationnaire d'avoir le système ouvert est donnée par

$$\begin{aligned} P_A(\infty) &= \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{P}_A(u) \\ &= \frac{1}{1 + \lambda\tau_b}. \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

L'état stationnaire du flux se calcule à partir de l'état stationnaire de la probabilité de survie, Eq. (IV.33)

$$J_\infty = \frac{\lambda}{1 + \lambda\tau_b}. \quad (\text{IV.56})$$

La probabilité que le système soit fermé dans l'état stationnaire est donc $P_B(\infty) = 1 - P_A(\infty) = \frac{\lambda\tau_b}{1 + \lambda\tau_b}$. Nous retrouvons les mêmes équations que celles obtenues à partir de la méthode géométrique, Eq. (IV.35) et Eq. (IV.36).

IV.3.3 Approche intégrale pour un système à deux canaux, $N_c = 2$

En utilisant la correspondance entre le modèle à deux canaux et le modèle à un canal, nous allons tenter d'obtenir une solution complète. Nous introduisons les probabilités jointes $q(n, t)$ qui correspondent à la probabilité que n particules soient entrées et que le système soit ouvert, c'est-à-dire qu'au moins un des deux canaux soit ouvert. Les deux premières

probabilités sont triviales car il n'y a pas de blocage complet possible et cela correspond à la probabilité de Poisson,

$$q(0, t) = e^{-2\lambda t}, \quad (\text{IV.57})$$

$$q(1, t) = 2\lambda t e^{-2\lambda t}, \quad (\text{IV.58})$$

Pour $n \geq 2$, la formule générale est :

$$\begin{aligned} q(n, t) &= \int_0^\infty \prod_{i=0}^{n-1} dt_i 2\lambda e^{-2\lambda t_i} \int_0^\infty dt' e^{-2\lambda t'} \delta(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t') \\ &\times \prod_{j=1}^{n-2} \theta(t_j + t_{j+1} - \tau_b) \left(\prod_{k=1}^{n-1} (\theta(\tau_b - t_k) e^{2\lambda(\tau_b - t_k)} + \theta(t_k - \tau_b)) \right) \theta(t' + t_{n-1} - \tau_b). \end{aligned} \quad (\text{IV.59})$$

Pour obtenir ce résultat, nous considérons en premier la probabilité de Poisson d'avoir émis n particules entre 0 et t (le terme en δ fixe la contrainte de temps total). La première fonction Heaviside contraint qu'un canal ne peut être disponible qu'après un temps τ_b ; la somme correspond aux deux situations possibles : soit les deux canaux sont fermés pendant un temps, ce qui signifie que lorsque la dernière particule n est entrée l'autre canal était fermé. L'exponentielle dont le facteur est positif provient du fait qu'aucune particule ne peut entrer entre $\tau - t_k$ puisque tout le système est bloqué. Soit le canal fermé à déjà ré-ouvert à l'insertion de la nouvelle particule, dans ce cas, l'intervalle de temps est supérieur à t_i . Le dernier terme correspond au fait que nous souhaitons qu'un des canaux soit ouvert à l'instant t .

Prenons la transformée de Laplace de la probabilité $q(n, t)$. Nous pouvons facilement intégrer sur t_0 , mais pour intégrer sur t' , il faut séparer l'intégrale en deux. Nous obtenons le résultat suivant :

$$\tilde{q}(n, u) = \frac{(2\lambda)^2}{(2\lambda + u)^2} \left[e^{-u\tau_b} \int_0^{\tau_b} dt e^{-2\lambda t} r(n-1, u, t) + \int_{\tau_b}^\infty dt e^{-(2\lambda+u)t} r(n-1, u, t) \right], \quad (\text{IV.60})$$

avec

$$\begin{aligned} r(n-1, t, u) &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n-2} dt_i 2\lambda e^{-(2\lambda+u)t_i} \prod_{j=1}^{n-2} \theta(t_j + t_{j+1} - \tau_b) \\ &\times \prod_{k=1}^{n-2} (\theta(\tau_b - t_k) e^{2\lambda(\tau_b - t_k)} + \theta(t_k - \tau_b)), \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

où $t_{n-1} \equiv t$. Nous avons évidemment la condition initiale suivante $r(1, u, t) = 1$. La relation de récurrence pour $r(n, u, t)$ est la suivante,

$$r(n, t, u) = \int_{\max(\tau_b - t, 0)}^{\tau_b} dt' 2\lambda e^{-(2\lambda+u)t'} e^{2\lambda(\tau_b - t')} r(n-1, t', u) + \int_{\tau_b}^\infty dt' 2\lambda e^{-(2\lambda+u)t'} r(n-1, t', u), \quad (\text{IV.62})$$

nous obtenons une structure similaire au modèle $N = 3, N_c = 1$, mais l'équation différentielle de la fonction génératrice sera soluble. Nous introduisons la fonction génératrice,

$$G(z, t, u) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} r(n, t, u). \quad (\text{IV.63})$$

Cela donne la relation suivante

$$G(z, t, u) = 1 + z \int_{\max(\tau_b - t, 0)}^{\tau_b} dt' 2\lambda e^{-(2\lambda+u)t'} e^{2\lambda(\tau_b - t')} G(z, t', u) + z \int_{\tau_b}^{\infty} dt' 2\lambda e^{-(2\lambda+u)t'} G(z, t', u). \quad (\text{IV.64})$$

$G(z, t, u)$ est constant pour $t \geq \tau_b$. Pour $t < \tau_b$, nous dérivons deux fois l'équation précédente pour arriver à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 G(z, t, u)}{\partial t^2} - (4\lambda + u) \frac{\partial G(z, t, u)}{\partial t} + 4z^2 \lambda^2 e^{-u\tau_b} G(z, t, u) = 0. \quad (\text{IV.65})$$

La solution de cette équation différentielle est donnée par

$$G(z, t, u) = A(u)e^{r_1 t} + B(u)e^{r_2 t}, \quad (\text{IV.66})$$

où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique

$$r_{1,2} = \frac{4\lambda + u \pm \sqrt{(4\lambda + u)^2 - (4z\lambda)^2 e^{-u\tau_b}}}{2}. \quad (\text{IV.67})$$

Pour déterminer les conditions initiales, nous ajoutons deux équations aux bords. À l'instant initial, d'après l'Eq. (IV.64) $G(z, 0, u)$ est facilement calculable :

$$G(z, 0, u) = 1 + zG(z, \tau_b, u) \frac{2\lambda}{2\lambda + u} e^{-(2\lambda+u)\tau_b}. \quad (\text{IV.68})$$

Maintenant calculons la première dérivée de l'Eq. (IV.64) à $t = \tau_b$, nous obtenons la deuxième condition initiale :

$$\left. \frac{\partial G(z, t, u)}{\partial t} \right|_{t=\tau_b} = 2z\lambda e^{2\lambda\tau_b} G(z, 0, u). \quad (\text{IV.69})$$

La probabilité dans l'espace de Laplace que l'un des canaux soit ouvert est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A(u) = e^{-u\tau_b} & \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + u} \right)^2 \left[A(u) \left(\frac{1 - e^{(r_1 - 2\lambda)\tau_b}}{2\lambda - r_1} + \frac{e^{(r_1 - 2\lambda)\tau_b}}{2\lambda + u} \right) + \right. \\ & \left. + B(u) \left(\frac{1 - e^{(r_2 - 2\lambda)\tau_b}}{2\lambda - r_2} + \frac{e^{(r_2 - 2\lambda)\tau_b}}{2\lambda + u} \right) \right] + \frac{1}{2\lambda + u} + \frac{2\lambda}{(2\lambda + u)^2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.70})$$

Les fonctions $A(u)$ et $B(u)$ peuvent être calculées mais elles ne seront pas données ici car elles ne présentent pas d'intérêt pour la suite de la discussion. Sachant que la probabilité stationnaire d'avoir l'un des canaux ouvert est donnée par la limite

$$P_A(\infty) = \lim_{u \rightarrow 0} \sum_{n \geq 0} u \tilde{q}_n(u), \quad (\text{IV.71})$$

nous trouvons la solution exacte de ce modèle.

En utilisant les équations ci-dessus, nous obtenons, après un calcul un peu subtil, que dans la limite $u \rightarrow 0$ les racines de l'équation caractéristique sont un développement non analytique en \sqrt{u} , mais que le discriminant du système linéaire des coefficients A et B s'annule non pas en \sqrt{u} , car son coefficient est nul, mais en u . Cela donne un développement pour A et B qui

diverge en $1/u$ avec un terme sous dominant en $1/\sqrt{u}$. Finalement, après simplification, nous obtenons

$$P_A(\infty) = \frac{1 + 2\lambda\tau_b}{1 + 2\lambda\tau_b + 2\lambda^2\tau_b^2}. \quad (\text{IV.72})$$

De manière similaire, nous obtenons la probabilité dans l'espace de Laplace que les deux canaux soient bloqués :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_B(u) = & \frac{(2\lambda)^2}{u(2\lambda + u)} \left[A \left(\frac{1 - e^{-(2\lambda+u-r_1)\tau_b}}{2\lambda + u - r_1} - e^{-u\tau_b} \frac{1 - e^{(r_1-2\lambda)\tau_b}}{2\lambda - r_1} \right) \right. \\ & \left. + B \left(\frac{1 - e^{-(2\lambda+u-r_2)\tau_b}}{2\lambda + u - r_2} - e^{-u\tau_b} \frac{1 - e^{(r_2-2\lambda)\tau_b}}{2\lambda - r_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.73})$$

le calcul est effectué en App. (B).

$$P_B(\infty) = \frac{2\lambda^2\tau_b^2}{1 + 2\lambda\tau_b + 2\lambda^2\tau_b^2}. \quad (\text{IV.74})$$

La probabilité stationnaire dépend de $\lambda\tau_b$ et non de ces données séparément, donc les systèmes avec ce produit égal auront le même état stationnaire, mais peuvent avoir des régimes transitoires différents qui dépendent de λ et τ_b . Cette équation analytique correspond bien aux résultats numériques, Fig. IV.6.

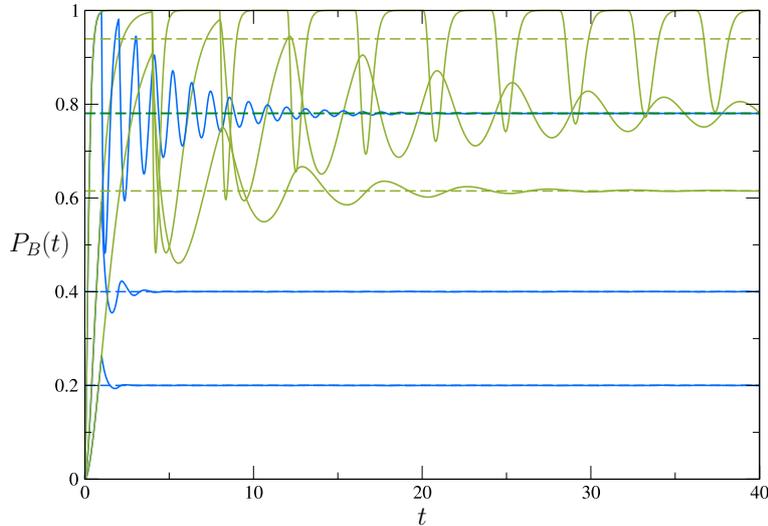


FIGURE IV.6 – Probabilité que le canal soit fermé pour un système $N = 1$ à deux canaux pour $\tau_b = 1$, $\tau = 1$ et différentes intensités, $\lambda = 0.5, 1, 2$ (de bas en haut).

IV.3.4 Approche intégrale pour un système avec un nombre de canaux quelconque, N_c

Pour généraliser à un nombre de canaux quelconque, nous écrivons les $q(n, t)$ pour un N_c quelconque. Pour $n < N_c$ il ne peut pas y avoir de blocage donc cela correspond juste à

l'arrivée des particules sans qu'il y ait de blocage total possible,

$$q(0, t) = e^{-N_c \lambda t}, \quad (\text{IV.75})$$

$$q(1, t) = N_c \lambda t e^{-N_c \lambda t}, \quad (\text{IV.76})$$

$$[\dots] \quad (\text{IV.77})$$

$$q(N_c - 1, t) = (N_c \lambda t e^{-N_c \lambda t})^{N_c - 1}. \quad (\text{IV.78})$$

Pour $n \geq N_c$, la formule générale est

$$q(n, t) = \int_0^\infty \prod_{i=0}^{n-1} dt_i N_c \lambda e^{-N_c \lambda t_i} \int_0^\infty dt' e^{-N_c \lambda t'} \delta(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t') \prod_{j=1}^{n-N_c} \theta\left(\sum_{l=0}^{N_c-1} t_{j+l} - \tau_b\right) \\ \times \left(\prod_{k=1}^{n-(N_c-1)} \left(\theta(\tau_b - \sum_{m=0}^{N_c-2} t_{k+m})\right) e^{N_c \lambda (\tau_b - \sum_{m=0}^{N_c-2} t_{k+m})} + \theta\left(\sum_{m=0}^{N_c-2} t_{k+m} - \tau_b\right) \right) \theta\left(t' + \sum_{q=1}^{N_c-1} t_{n-q} - \tau_b\right). \quad (\text{IV.79})$$

Pour construire cette probabilité, nous considérons en premier la probabilité de Poisson d'avoir émis n particules entre 0 et t (le terme en δ fixe la contrainte de temps total). La première fonctions θ correspond à la contrainte qu'un canal ne peut être disponible qu'après un temps τ_b . Le terme correspond aux deux situations possibles. Soit les deux canaux sont fermés à un instant où une particule entre dans un canal à un moment où le second est encore fermé et dans ce cas le facteur exponentiel provient du fait que pendant l'intervalle de temps où les systèmes sont fermés aucune particule ne peut entrer. Soit l'intervalle de temps est supérieur à $\sum_{m=0}^{N_c-2} t_{k+m}$ et dans ce cas, au moins un des canaux fermés est déjà réouvert quand une nouvelle particule entre à nouveau. Le dernier terme correspond au fait que l'on souhaite qu'un des canaux soit ouvert à l'instant t . Nous avons obtenu les résultats analytiques pour $N = 1$ pour un et deux canaux, et des valeurs stationnaires pour tout N_c . Nous allons maintenant voir que ces observables stationnaires peuvent être retrouvées grâce à la théorie des files d'attente.

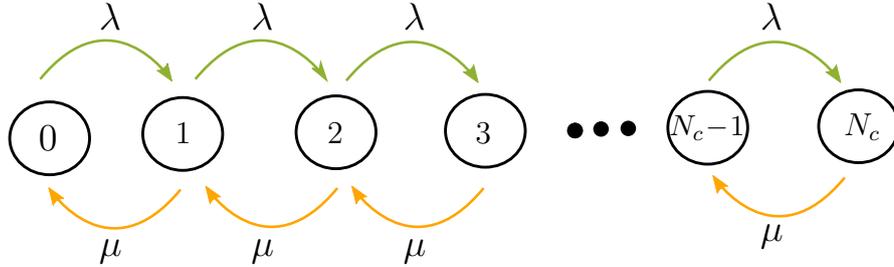
IV.4 Modèle à plusieurs canaux avec une distribution exponentielle du temps de blocage

Nous étudions maintenant un modèle où le temps de blocage n'est pas constant mais distribué exponentiellement. En effet, pour certain cas le blocage ne dure pas toujours le même temps. Par exemple, dans les supermarchés le temps du passage en caisse diffère d'un client à un autre. Le modèle $N = 1$ avec un temps de blocage exponentiel correspond à un modèle beaucoup étudié de la théorie des files d'attente : le modèle $M/M/K/K$ c'est-à-dire que les distributions de sortie et d'entrée suivent une loi exponentielle. Il y a K serveurs et K clients au maximum peuvent se trouver dans le système (le client dans le serveur ajouté à ceux de la file d'attente) [58][93], Section.IV.1.2.

IV.4.1 Temps de déblocage distribué exponentiellement

Nous prenons un temps de blocage distribué aléatoirement selon une loi exponentielle avec un paramètre μ , donc le temps moyen de blocage est $\langle \tau_b \rangle = \mu^{-1}$. Modifier le temps de

blocage simplifie le modèle car le temps de sortie devient alors un processus Markovien. Le flux entrant est $\Lambda = N_c\lambda$. Lorsqu'aucune particule n'est entrée, la probabilité que le canal de se bloque est Λdt ; lorsque le système se bloque par l'entrée de la première particule, l'intensité que celle-ci soit éjectée du canal est μdt . Lorsque N_c canaux sont bloqués, donc que le système est complètement fermé, la probabilité de déblocage est $N_c\mu$ puisque chaque canal séparément a une probabilité μ de se débloquer que nous multiplions par le nombre de possibilités de déblocages. Le système se représente comme ceci :



La dynamique du système peut être calculée par une approche différentielle. Pour cela nous définissons des probabilités où le système a k canaux occupés au temps t , $p_k(t)$. L'évolution de ces probabilités est

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_0}{dt} &= -\Lambda p_0 + \mu p_1, \\
 \frac{dp_1}{dt} &= \Lambda p_0 - (\mu + \Lambda)p_1 + 2\mu p_2, \\
 &\vdots \\
 \frac{dp_k}{dt} &= \Lambda p_{k-1} - (k\mu + \Lambda)p_k + (k+1)\mu p_{k+1}, \\
 &\vdots \\
 \frac{dp_{N_c}}{dt} &= \Lambda p_{N_c-1} - N_c\mu p_{N_c}.
 \end{aligned} \tag{IV.80}$$

Les dérivées de ces probabilités correspondent au changement d'état à l'instant t . Pour la première équation, il y a un terme de perte qui correspond à l'entrée d'une particule au temps t et un terme de gain où un seul canal est bloqué et il se débloque au temps t . La seconde équation a cette fois un terme de gain où une particule entre au temps t alors que tous les canaux sont vides ajouté au terme où deux canaux sont bloqués et une particule sort. Le terme de perte est défini par la probabilité qu'un deuxième canal se bloque ou qu'un canal fermé se débloque. Les autres équations où $0 < k < N_c$ ont la même forme que pour $k = 1$ et nous notons deux termes de gain et deux termes de perte. La dernière équation $k = N_c$ diffère car tous les canaux sont bloqués donc aucune particule ne peut entrer. Il y a donc juste le terme de perte qui correspond à l'événement où un canal se débloque et un seul terme de gain qui correspond au cas où $N_c - 1$ canaux sont bloqués et que le dernier se bloque au temps t . Nous pouvons vérifier la conservation des probabilités : $d(\sum_{k=0}^{N_c} p_k)/dt = 0$. Nous obtenons exactement les équations d'évolutions du modèle $M/M/K/K$, avec K le nombre de clients maximum dans la file d'attente qui correspond ici au nombre de canaux, Sec.IV.1.4 [94][58]. Nous avons vu dans la Sec.IV.1.5 que les équations stationnaires du modèle $M/M/c/c$ correspondaient exactement à celles du modèle $M/M/1/K$. Or dans notre modèle

nous prenons N_c canaux et aucune possibilité d'attente, ce modèle est connu dans la littérature et correspond aux modèles $M/M/N_c/N_c$ [58].

Les valeurs stationnaires ont donc les mêmes solutions, Eq. (IV.81) avec $K = N_c$:

$$p_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)^k p_0, \quad (\text{IV.81})$$

avec

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{N_c} \frac{1}{k!} \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)^k \right)^{-1}. \quad (\text{IV.82})$$

La probabilité stationnaire que le système soit complètement bloqué est

$$p_{N_c} = \frac{1}{N_c!} \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)^{N_c} p_0. \quad (\text{IV.83})$$

Cette équation est la formule d'Erlang, l'Eq. (IV.17), Sec. IV.1.3.b. Par exemple pour $N_c = 2$ la solution est

$$p_2 = \frac{2\lambda^2}{\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda^2}. \quad (\text{IV.84})$$

Maintenant, si nous modifions $1/\mu$, la moyenne du temps de blocage, par τ_b pour revenir au premier modèle, c'est-à-dire avec un temps de blocage constant nous obtenons

$$p_2 = \frac{2\lambda^2 \tau_b^2}{1 + 2\lambda\tau_b + 2\lambda^2 \tau_b^2}. \quad (\text{IV.85})$$

Ce qui correspond exactement à la valeur stationnaire obtenue à partir d'une approche intégrale, Eq. (IV.74). La formule d'Erlang, Eq. (IV.83), s'applique donc pour un modèle à un ou deux canaux même pour une distribution déterministe [98][93]. Nous pouvons spéculer que cela correspond aussi aux valeurs exactes de la probabilité stationnaire pour tout N_c . Ce qui nous donnerait cette équation suivante pour trois canaux :

$$p_3 = \frac{27\rho^3}{6 + 18\rho + 27\rho^2 + 27\rho^3}, \quad (\text{IV.86})$$

où $\rho = \lambda\tau_b$.

IV.4.2 Cas $N = 1$ et $N_c = 1$ revisité par une approche différentielle

Nous avons vu que les valeurs stationnaires sont données par la formule d'Erlang pour les deux modèles : lorsque le temps de blocage est constant et lorsqu'il suit une distribution exponentielle. Nous pouvons comparer la dynamique des deux systèmes. Dans la première partie on a étudié le processus par une approche intégrale, le modèle $M/M/1/K$ a été examiné par une approche différentielle. De la même manière, nous analysons le modèle $N_c = 1$ et $N = 1$ où τ_b est une constante par une approche différentielle, la dynamique du processus peut être décrite en utilisant $p_0(t)$ et $p_1(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \lambda p_0(t - \tau_b), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda p_0(t) - \lambda p_0(t - \tau_b). \end{aligned} \quad (\text{IV.87})$$

Dans la première équation, le terme de perte de la probabilité $p_0(t)$ correspond à l'insertion d'une particule dans le canal au temps t sachant que le canal est ouvert. Le terme de gain provient de l'événement où le canal se débloque au temps t ce qui signifie que la particule a été insérée au temps $t - \tau_b$. La conservation des probabilités est bien préservée, $\frac{dp_0(t)}{dt} + \frac{dp_1(t)}{dt} = 0$. Les solutions de ces deux équations correspondent au modèle introduit précédemment par l'approche intégrale, c'est-à-dire que $p_0(t) = \sum_{n \geq 0} q(n, t)$, avec les $q(n, t)$ donnés par l'Eq. (IV.51).

Ces deux équations différentielles peuvent être comparées avec le modèle d'un blocage fini de distribution exponentielle :

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda p_0(t) - \mu p_1(t). \end{aligned} \quad (\text{IV.88})$$

Ces deux équations correspondent exactement au cas du modèle des files d'attente $M/M/1/1$, IV.1.4. Dans ce cas là, le modèle est Markovien puisque le changement d'état du système est seulement imposé par le temps t . Dans ces équations, en remplaçant $\mu p_1(t)$ par $\lambda p_0(t - \tau_b)$ nous retrouvons les Eqs.(IV.87), cela explique que l'on retrouve bien la valeur stationnaire avec la formule d'Erlang. Cependant la dynamique est différente, certains termes dépendent de $t - \tau_b$ dans le premier modèle alors que dans ce cas là les probabilités dépendent seulement de l'instant t , les équations en fonction du temps vont donc être différentes. Dans la Sec.IV.1.4 nous avons noté la solution dynamique du modèle $M/M/1/K$, et en effet, cela ne correspond pas à la solution déterministe lorsque $K = 1$ (nous allons le voir ultérieurement). Nous avons précédemment vu que la solution stationnaire du modèle $M/D/1/K$ était approximativement la solution du modèle $M/M/1/K$. La dynamique du modèle est donnée analytiquement par Garcia et al. [98]. Cela correspond à notre modèle pour $K = 1$, où il n'y a qu'un serveur et aucune possibilité d'attente, App.B.

IV.4.3 Cas $N = 1$ et $N_c = 2$ par une approche différentielle

Nous allons à présent nous intéresser au cas à deux canaux dont la durée du blocage est constante. Les équations différentielles pour ce système peuvent s'écrire à partir des probabilités p_k avec seulement $0 \leq k \leq 2$,

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \lambda p_0(t - \tau_b), \quad (\text{IV.89})$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) - \lambda p_0(t - \tau_b) + 2\lambda p_1(t - \tau_b), \quad (\text{IV.90})$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - 2\lambda p_1(t - \tau_b). \quad (\text{IV.91})$$

Si nous remplaçons dans ces équations $\lambda p_{n-1}(t - \tau_b)$ par $\mu p_n(t)$ nous retrouvons le cas de la théorie des files d'attente pour deux serveurs, qui a exactement la même dynamique que le modèle du pont $N = 1$ avec un temps de blocage de distribution exponentielle. Mais ici nous regardons un système avec un temps fini et constant de blocage, cela devrait correspondre au modèle $M/D/c/c$ de la théorie des files d'attente. Le $M/D/c/c$ n'est pas bien compris dans la littérature, mais nous retrouvons les mêmes probabilités stationnaires à partir de la formule d'Erlang. Cela voudrait dire que pour un système avec c serveurs qui n'admet aucune file

d'attente et une distribution déterministe les solutions stationnaires sont les mêmes qu'avec une distribution exponentielle de sortie ($M/M/c/c$). Si nous analysons le modèle $M/D/1/K$ les équations stationnaires ne correspondent pas exactement, sauf pour $K = 1$ à la formule d'Erlang-B, [98]. Les dynamiques du système sont aussi différentes ; pour le prouver, il est possible de calculer les $p_k(t)$ à partir des $q(n, t)$ calculés avec la méthode intégrale. Pour cela, on va découper les probabilités $q(n, t)$ en deux probabilités : $q_k(n, t)$ avec $k = 0, 1$ où k définit le nombre de particules à l'intérieur du canal à l'instant t . La probabilité $p_2(t)$ correspond au cas où le canal est bloqué donc la probabilité que le système soit fermé, $P_B(t) = 1 - P_A(t)$. Ces trois probabilités s'écrivent :

$$p_0(t) = \sum_{n \geq 0} q_0(n, t), \quad (\text{IV.92})$$

$$p_1(t) = \sum_{n \geq 0} q_1(n, t), \quad (\text{IV.93})$$

$$p_2(t) = P_B(t). \quad (\text{IV.94})$$

Les équations des deux nouvelles probabilités partielles, $q_k(n, t)$ pour $n > 1$ sont :

$$q_0(n, t) = \int_0^\infty \prod_{i=0}^{n-1} dt_i 2\lambda e^{-2\lambda t_i} \int_0^\infty dt' e^{-2\lambda t'} \delta(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t') \prod_{j=1}^{n-2} \theta(t_j + t_{j+1} - \tau_b) \quad (\text{IV.95})$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{n-1} (\theta(\tau_b - t_k) e^{2\lambda(\tau_b - t_k)} + \theta(t_k - \tau_b)) \right) \theta(t' - \tau_b),$$

$$q_1(n, t) = \int_0^\infty \prod_{i=0}^{n-1} dt_i 2\lambda e^{-2\lambda t_i} \int_0^\infty dt' e^{-2\lambda t'} \delta(t - \sum_{i=0}^{n-1} t_i - t') \prod_{j=1}^{n-2} \theta(t_j + t_{j+1} - \tau_b) \quad (\text{IV.96})$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{n-1} (\theta(\tau_b - t_k) e^{2\lambda(\tau_b - t_k)} + \theta(t_k - \tau_b)) \right) \theta(\tau_b - t') \theta(t' + t_{n-1} - \tau_b).$$

Ces équations correspondent aux équations des $q(n, t)$ avec des contraintes sur les dernières particules, pour $q_0(n, t)$ pour qu'il n'y ait aucune particule dans le système il faut que $t' > \tau_b$ pour que les deux canaux soient débloqués. Pour $q_1(n, t)$ on doit avoir seulement une particule dans le système donc il faut que $t' < \tau_b$ pour que la particule n soit dans le canal mais il faut que la particule $n - 1$ soit sortie donc que $t' - t_{n-1} > \tau_b$. Dans le cas où le système est fermé, $q_2(n, t)$, nous avons $t' + t_{n-1} < \tau_b$, cette équation est légèrement modifiée par rapport aux précédentes car il y a une contrainte sur t_{n-1} , du fait que le temps t' intervient lorsque les deux canaux sont bloqués, donc il ne peut pas y avoir de particules entrantes durant ce temps, $e^{-2\lambda t'}$ n'a plus de sens. En additionnant $q_0(n, t)$ et $q_1(n, t)$, nous retrouvons $q(n, t) = q_0(n, t) + q_1(n, t)$. Nous calculons les transformées de Laplace des p_k , en écrivant les $q_k(n, t)$ en fonction des $r(n, t, u)$, et $\sum_n z^n r(n, t, u) = G(z, t, u)$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0(u) &= \frac{(2\lambda)^2}{(2\lambda+u)^2} e^{-u\tau_b} \left[\int_0^{\tau_b} dt e^{-(4\lambda+u)t} G(1, t, u) + e^{-2\lambda\tau_b} \int_{\tau_b}^{\infty} dt e^{-(2\lambda+u)t} G(1, t, u) \right] \\ &\quad + \frac{1}{u+2\lambda} + \frac{2\lambda}{(u+2\lambda)^2} e^{-(2\lambda+u)\tau_b}, \end{aligned} \quad (\text{IV.97})$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(u) &= \frac{(2\lambda)^2}{(2\lambda+u)^2} \left[e^{-u\tau_b} \int_0^{\tau_b} dt G(1, t, u) [e^{-2\lambda t} - e^{-(4\lambda+u)t}] + (1 - e^{-(2\lambda+u)\tau_b}) \right. \\ &\quad \left. \int_{\tau_b}^{\infty} dt e^{-(2\lambda+u)t} G(1, t, u) \right] + \frac{2\lambda}{(u+2\lambda)^2} (1 - e^{-(2\lambda+u)\tau_b}). \end{aligned} \quad (\text{IV.98})$$

Sachant que $p_2(t)$ est la probabilité que le système soit fermé nous a

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2(u) &= \frac{(2\lambda)^2}{u(2\lambda+u)} \left[A \left(\frac{1 - e^{-(2\lambda+u-r_1)\tau_b}}{2\lambda+u-r_1} - e^{-u\tau_b} \frac{1 - e^{(r_1-2\lambda)\tau_b}}{2\lambda-r_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + B \left(\frac{1 - e^{-(2\lambda+u-r_2)\tau_b}}{2\lambda+u-r_2} - e^{-u\tau_b} \frac{1 - e^{(r_2-2\lambda)\tau_b}}{2\lambda-r_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.99})$$

Si nous reprenons la transformée de Laplace des résultats de la dynamique du modèle $M/M/1/K$, Eq. (IV.21) nous remarquons qu'ils sont, en effet, différents des probabilités ci-dessus.

Le calcul pour l'état stationnaire est

$$p_0 = \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{p}_0(u) = \frac{1}{1 + 2\lambda\tau_b + 2\lambda^2\tau_b^2}, \quad (\text{IV.100})$$

$$p_1 = \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{p}_1(u) = \frac{2\lambda\tau_b}{1 + 2\lambda\tau_b + 2\lambda^2\tau_b^2}, \quad (\text{IV.101})$$

$$p_2 = \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{p}_2(u) = \frac{2\lambda^2\tau_b^2}{1 + 2\lambda\tau_b + 2\lambda^2\tau_b^2}. \quad (\text{IV.102})$$

Ce qui nous redonne exactement le résultat du modèle de file d'attente $M/M/1/K$ décrit précédemment pour toutes les probabilités stationnaires. Les deux modèles ont donc le même comportement à temps long, mais à temps court les caractéristiques du régime transitoire vont dépendre de la distribution de sortie. Un des résultats important de la théorie des files d'attente est de noter que pour des distributions de sortie quelconques, nous retrouvons le même état stationnaire. Nous vérifions la conservation des probabilités : $\tilde{p}_0(u) + \tilde{p}_1(u) + \tilde{p}_2(u)$, à partir des transformées de Laplace cela donne

$$\tilde{p}_0(u) + \tilde{p}_1(u) + \tilde{p}_2(u) = \frac{1}{u}. \quad (\text{IV.103})$$

Nous avons maintenant toutes les probabilités que le système contienne 0, 1 ou 2 particules, et grâce à ces probabilités nous pouvons calculer le nombre moyen de canaux bloqués,

$$\langle k \rangle = \sum_0^{N_c} k p_k = p_1 + 2p_2 \quad (\text{IV.104})$$

$$= \frac{2\lambda\tau_b(1 + 2\lambda\tau_b)}{1 + 2\lambda\tau_b + 2\lambda^2\tau_b^2}. \quad (\text{IV.105})$$

Si nous reprenons les solutions du modèle $M/M/1/2$, le nombre moyen de clients dans le système est défini par

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= \sum_0^2 k p_k = -\frac{\Lambda}{\mu} \frac{\partial \ln p_0}{\partial (\Lambda/\mu)} \\ &= \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1 + \lambda/\mu}{1 + \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda^2}{2\mu^2}} \\ &= \frac{2\frac{\lambda}{\mu}(1 + 2\frac{\lambda}{\mu})}{1 + 2\frac{\lambda}{\mu} + 2(\frac{\lambda}{\mu})^2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.106})$$

En prenant $1/\mu = \tau_b$ nous retrouvons le même résultat. Nous élargissons ce résultat à un nombre quelconque de canaux, grâce à la formule du nombre moyen de clients dans le système pour le modèle $M/M/1/N_c$.

IV.5 Augmentation du seuil de blocage à deux particules, $N = 2$

À présent nous nous plaçons dans le cas où il est nécessaire d'avoir deux particules pour bloquer un canal, $N = 2$. Tout d'abord, nous nous intéressons à un système à un seul canal et $N = 2$, avec une distribution de Poisson [113]. Ensuite on analyse pour un plus grand nombre de canaux si l'approche de la théorie des files d'attente permet d'obtenir plus de résultat lorsque l'on augmente N_c et N .

Dans cette étude, il peut y avoir 0 ou 1 particule dans le canal, si deux sont présentes alors le canal se bloque provisoirement. Le déblocage se fait après un temps τ_b . Nous observons aussi un état stationnaire précédé d'un état oscillant.

IV.5.1 Valeur du flux stationnaire

Nous obtenons avec des arguments simples la valeur de l'état stationnaire [113]. Quand le premier blocage apparaît, une moyenne de $\langle m \rangle$ particules doivent être sorties pendant un temps moyen $\langle t \rangle$. Ensuite, pendant un temps τ_b , le canal est obstrué et aucune particule ne peut entrer. Puis les deux particules bloquantes ressortent au même instant et le flux reprend. À partir de ce constat, nous écrivons le flux sortant :

$$j_\infty = \frac{\langle m \rangle + 2}{\langle t \rangle + \tau_b}. \quad (\text{IV.107})$$

Pendant un temps $\langle t \rangle$, $\langle m \rangle$ particules sortent puis pendant un temps τ_b , deux particules sortent. Si nous observons ce flux stationnaire nous retrouvons le résultat à temps long du modèle à un canal au blocage définitif. Cet autre modèle correspond à un temps de blocage infini, $\tau_b \rightarrow \infty$. En prenant cette limite le flux stationnaire est inexistant, $j_\infty = 0$. Mais si nous analysons seulement le premier blocage, il est identique au modèle de référence. Or, nous avons calculé précédemment $\langle m \rangle$ et $\langle t \rangle$ pour $N = 2$. Le temps moyen de blocage est donné par

$$\langle t \rangle = \frac{2 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda(1 - e^{-\lambda\tau})}, \quad (\text{IV.108})$$

et le nombre moyen de particules sortant avant le blocage est

$$\langle m \rangle = \frac{e^{-\lambda\tau}}{1 - e^{-\lambda\tau}}. \quad (\text{IV.109})$$

En insérant ces équations dans l'Eq. (IV.107) nous obtenons

$$j_\infty = \lambda \frac{2 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau_b(1 - e^{-\lambda\tau}) + 2 - e^{-\lambda\tau}}. \quad (\text{IV.110})$$

Grâce à cette dernière équation nous en déduisons des premières limites. Nous retrouvons que pour $\tau_b \rightarrow \infty$ le flux est nul, comme pour le modèle irréversible. Ensuite, nous nous concentrons sur de faibles λ , le flux est proportionnel à λ , ce qui correspond au flux entrant (comme pour $\lambda\tau \rightarrow \infty$), la probabilité de blocage est très faible, et l'état ouvert domine sur l'état bloqué. Quand nous augmentons l'intensité initiale, le flux stationnaire augmente mais plus faiblement que λ du fait de la présence de blocage. Cette observable sature à une valeur de $2/\tau_b$ pour de grands λ . Cela correspond à la séquence "immédiatement bloqué - 2 particules sortent après un temps τ_b - immédiatement bloqué - etc". Nous traiterons ici le comportement directement puisque, pour $\lambda\tau \gg 1$, le temps où le canal est ouvert tend vers 0 ainsi que le nombre de particules sortant avant le blocage. En reprenant l'Eq. (IV.107), nous retrouvons bien $2/\tau_b$ dans la limite des grandes intensités. Grâce au flux stationnaire nous pouvons obtenir la probabilité stationnaire que le système soit ouvert. En effet, le flux est relié à la probabilité que le canal soit ouvert par la multiplication de la moyenne de la distribution d'entrée λ , soit

$$P_{A\infty} = \frac{J_\infty}{\lambda} = \frac{2 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau_b(1 - e^{-\lambda\tau}) + 2 - e^{-\lambda\tau}}. \quad (\text{IV.111})$$

Nous séparons le flux stationnaire en deux parties, une qui est due aux particules qui sont sorties sans blocage, $j_{1,\infty}$, et une autre qui est due aux 2 particules sortantes à chaque déblocage, noté $j_{2,\infty}$. Le premier flux correspond donc aux particules qui sortent seules, et le second aux particules qui sortent par paires. Nous utilisons les mêmes arguments que pour l'Eq. (IV.107), nous obtenons

$$\begin{aligned} j_{1,\infty} &= \frac{\langle m \rangle}{\langle t \rangle + \tau_b} = \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau_b(1 - e^{-\lambda\tau}) + 2 - e^{-\lambda\tau}}, \\ j_{2,\infty} &= \frac{2}{\langle t \rangle + \tau_b} = \frac{2\lambda(1 - e^{-\lambda\tau})}{\lambda\tau_b(1 - e^{-\lambda\tau}) + 2 - e^{-\lambda\tau}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.112})$$

La fraction du flux dû à la sortie d'une particule qui ne s'est pas bloquée est

$$\frac{j_{1,\infty}}{j_\infty} = \frac{e^{-\lambda\tau}}{2 - e^{-\lambda\tau}} \quad (\text{IV.113})$$

comme espéré, pour des grandes valeurs de $\lambda\tau$ ce rapport tend vers 0, donc les particules s'immobilisent toutes, et il tend vers 1 quand $\lambda\tau \ll 1$, puisque la probabilité qu'une particule se bloque est très faible. Modifier τ_b pour une intensité constante influe seulement sur la longueur du cycle, "ouvert - bloqué - ouvert", sans modifier le nombre de particules qui sortent seuls ou par paires. Lorsque nous augmentons τ_b , on étend la durée de vie du blocage, donc on prolonge l'état fermé. Le ratio $j_{1,\infty}/j_\infty$ n'est pas modifié ; il ne dépend pas du temps de blocage. Cependant, la dynamique du flux sera différente car les échelles de temps sont modifiées.

IV.5.2 Approche intégrale, dépendance en temps

Ayant analysé d'une manière simple le flux stationnaire nous nous intéressons à présent à la dynamique du système [113]. Pour rappel, nous notons $P_A(t)$ la probabilité que le canal soit ouvert et $P_B(t)$ la probabilité que le canal soit fermé au temps t . Il est logique que la probabilité que le système soit ouvert soit égale à 1 à $t = 0$, et nous notons qu'après un régime transitoire elle va tendre vers une valeur constante aux temps longs, qui dépend de τ , τ_b et λ . À présent, nous étudions les équations d'évolution de la cinétique. Pour ce faire, nous introduisons une probabilité jointe $P_A(n, t)$ que le canal soit actif au temps t et que n particules soient entrées dans le système. Pour écrire l'évolution en temps nous scindons cette probabilité en deux, $q(n, t)$ qui note la probabilité que n particules soient entrées avec le canal ouvert au temps t et que le dernier événement soit l'entrée d'une particule seule (s'il n'y a pas eu de blocage alors cette probabilité correspond aux $q(n, t)$ que nous avons analysés pour le cas $N = 2$ définitif). La deuxième probabilité, notée $q_R(n, t)$, est la probabilité jointe que n particules soient entrées dans le système entre 0 et t , avec comme dernier événement le déblocage de deux particules, qui ouvre le canal. Pour que cette probabilité soit non nulle il faut obligatoirement qu'il y ait eu un blocage, donc pour $n \leq 2$, $q_R(0, t) = q_R(1, t) = 0$. De plus, pour qu'une particule sorte, il faut que le temps soit supérieur au temps de déblocage, $q_R(n, t) = 0$ pour $t < \tau_b$.

La probabilité que le canal soit ouvert à l'instant t correspond à la somme sur les probabilités jointes :

$$P_A(t) = \sum_{n \geq 0} (q(n, t) + q_R(n, t)). \quad (\text{IV.114})$$

L'évolution du processus est donné par des équations différentielles des probabilités partielles. Nous séparons ces équations en deux parties, la première regroupe les équations différentielles des $q(n, t)$ et la seconde, les équations différentielles des $q_R(n, t)$. Observons le premier groupe d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{dq(0, t)}{dt} &= -\lambda q(0, t), \\ \frac{dq(1, t)}{dt} &= \lambda q(0, t) - \lambda q(1, t), \\ \frac{dq(2, t)}{dt} &= \lambda e^{-\lambda\tau} q(1, t - \tau) - \lambda q(2, t), \\ \frac{dq(n, t)}{dt} &= \lambda e^{-\lambda\tau} q(n - 1, t - \tau) + \lambda q_R(n - 1, t) - \lambda q(n, t), \quad n > 2. \end{aligned} \quad (\text{IV.115})$$

La dérivée de $q(0, t)$ contient juste le terme de perte dû à la possibilité de l'arrivée d'une nouvelle particule dans le canal, cela correspond à la distribution de Poisson. Pour $n = 1$ un terme est ajouté, mais comme il ne peut pas y avoir de blocage, là encore l'équation équivaut à une distribution de Poisson. Le premier terme est l'arrivée d'une particule lorsqu'aucune n'est déjà présente dans le canal, c'est un terme de gain et le second à l'arrivée d'une seconde particule dans le canal, c'est un terme de perte. La troisième équation fait intervenir l'événement où se produit un blocage. Nous notons donc le terme de perte auquel s'ajoute le terme qui n'inclut pas le blocage. Cela signifie qu'aucune particule ne doit être entrée entre les temps $t - \tau$ et t : $e^{-\lambda\tau} q(1, t - \tau)$. Ces trois premières probabilités correspondent exactement au modèle de blocage définitif. Quand $n = 2$, pour que le dernier événement soit une particule à sortir seule du canal, il ne doit pas y avoir eu de blocage. Le cas $n > 2$ est plus

complexe. Pour le terme de gain il est nécessaire de prendre en compte les cas où la dernière particule, $n - 1$, n'était pas bloquée. Dans ce cas, il y a une contrainte sur elle afin de ne pas créer de blocage avant que la particule arrive au temps t . Mais il faut aussi ajouter le cas où la dernière particule était bloquée et se débloque avant l'entrée de la particule n . Le premier terme positif contraint que la particule $n - 1$ soit sortie avant le temps $t - \tau$ et qu'aucune particule ne soit entrée pendant ce temps. Le second terme positif exprime que les deux dernières particules se soient bloquées et ressortent avant le temps t , cette probabilité est $q_R(n - 1, t)$. À ces deux termes s'additionne le terme de perte. Pour la dernière équation nous utilisons la seconde probabilité jointe, donc, pour résoudre ce système d'équations différentielles il est important d'examiner l'évolution des $q_R(n, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{dq_R(2, t)}{dt} &= \lambda \int_0^{\min(t_{\tau_b}, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} q(0, t_{\tau_b} - t_1) - \lambda q_R(2, t), \\ \frac{dq_R(n, t)}{dt} &= \lambda \int_0^{\min(t_{\tau_b}, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} q_R(n-2, t_{\tau_b} - t_1), \\ &+ \lambda \int_0^{\min(t_{\tau+\tau_b}, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda(\tau+t_1)} q(n-2, t_{\tau+\tau_b} - t_1) - \lambda q_R(n, t), \quad n > 2, \end{aligned} \quad (\text{IV.116})$$

où $t_{\tau} = t - \tau$, $t_{\tau_b} = t - \tau_b$, et $t_{\tau+\tau_b} = t - \tau - \tau_b$.

Nous avons vu précédemment que les deux premiers termes étaient nuls puisqu'aucun blocage n'avait pu avoir lieu. Le cas $n = 2$ correspond à l'événement où les deux particules sortent au temps t . Le terme de perte est dû à la possible entrée d'une troisième particule au temps t . Le terme de gain est la probabilité d'avoir deux particules qui se bloquent à l'instant $t - \tau_b$ pour qu'elles ressortent à l'instant t . Pour cela il faut 0 particule au temps $t - \tau_b$: $q(0, t - \tau_b)$, la probabilité qu'une particule soit entrée entre $t - \tau_b - \tau$ et $t - \tau_b$: $\int_0^{\min(t_{\tau_b}, \tau)} \lambda e^{-\lambda t_1} dt_1$ et la probabilité qu'une deuxième soit entrée au temps $t - \tau_b$: λ . Pour $n > 2$ il y a deux termes de gain, dans ce cas précis les différents cas visibles se font sur la particule $n - 2$, soit elle est sortie toute seule, soit par un déblocage. Dans le premier cas il ne faut pas que la particule $n - 1$ se bloque avec elle, donc si la particule $n - 1$ entre à t_1 la particule $n - 2$ doit être entrée avant $t_1 - \tau$. De plus, il est important que les particules n et $n - 1$ se bloquent au temps $t - \tau_b$ donc le temps t_1 doit être supérieur à $t - \tau_b - \tau$. Si la particule $n - 2$ sort par un déblocage alors il faut qu'elle se soit bloquée avant les temps $t - \tau_b - t_1$ ce qui correspond à la probabilité $q_R(n - 2, t - \tau_b - t_1)$.

Pour résoudre la dynamique, nous introduisons la fonction génératrice :

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q(n, t), \quad (\text{IV.117})$$

et sa transformée de Laplace :

$$\tilde{G}(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{q}(n, u), \quad (\text{IV.118})$$

avec $\tilde{q}(n, u) = \int_0^{\infty} dt e^{-ut} q(n, t)$ la transformée de Laplace des probabilités jointes. Nous définissons de la même manière les fonctions $G_R(z, t)$, $\tilde{G}_R(z, u)$ et $\tilde{q}_R(n, u)$, nous notons que

$$\tilde{G}_R(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{q}_R(n, u). \quad (\text{IV.119})$$

Nous multiplions chacune des Eqs.(IV.115) par z^i avec $i \leq 0$ et nous sommons sur tous les n , cette équation différentielle est alors obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, t)}{\partial t} &= \lambda z e^{-\lambda \tau} G(z, t - \tau) - \lambda G(z, t) \\ &+ z \lambda (q(0, t) - e^{-\lambda \tau} q(0, t - \tau)) + \lambda z G_R(z, t). \end{aligned} \quad (\text{IV.120})$$

En prenant la transformée de Laplace de cette équation, nous obtenons

$$\left[\lambda + u - \lambda z e^{-(\lambda+u)\tau} \right] \tilde{G}(z, u) = 1 + \frac{z\lambda}{\lambda + u} (1 - e^{-(\lambda+u)\tau}) + \lambda z \tilde{G}_R(z, u). \quad (\text{IV.121})$$

Nous appliquons le même calcul pour $G_R(z, t)$, nous multiplions les termes des Eqs.(IV.116) par z^i puis nous les additionnons pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_R(z, t)}{\partial t} &= \lambda z^2 \int_0^{\text{Min}(t\tau_b, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} G_R(n-2, t\tau_b - t_1) \\ &+ \lambda z^2 \int_0^{\text{Min}(t\tau + \tau_b, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda(\tau+t_1)} G(n-2, t\tau + \tau_b - t_1) - \lambda G_R(n, t). \end{aligned} \quad (\text{IV.122})$$

Ensuite nous prenons la transformée de Laplace et nous trouvons :

$$\begin{aligned} \left[\lambda + u - \lambda^2 z^2 \frac{1 - e^{-(\lambda+u)\tau}}{\lambda + u} e^{-u\tau_b} \right] \tilde{G}_R(z, u) &= \lambda^2 z^2 \frac{1 - e^{-(\lambda+u)\tau}}{\lambda + u} e^{-(\lambda+u)\tau} e^{-u\tau_b} \tilde{G}(z, u) \\ &+ \lambda^2 z^2 \frac{(1 - e^{-(\lambda+u)\tau})^2}{(\lambda + u)^2} e^{-u\tau_b}. \end{aligned} \quad (\text{IV.123})$$

Nous résolvons les Eqs.(IV.121) et (IV.123) pour avoir les solutions de $\tilde{G}(z, u)$ et de $\tilde{G}_R(z, u)$. Et en utilisant l'Eq.(IV.114), la transformée de Laplace de $P_A(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A(u) &= \tilde{G}(1, u) + \tilde{G}_R(1, u) \\ &= \frac{\frac{1}{u+\lambda} + \frac{\lambda(1-e^{-(\lambda+u)\tau}}{(u+\lambda)^2}}{1 - \left[\frac{\lambda e^{-(\lambda+u)\tau}}{u+\lambda} + \frac{\lambda^2(1-e^{-(\lambda+u)\tau})}{(u+\lambda)^2} e^{-u\tau_b} \right]}. \end{aligned} \quad (\text{IV.124})$$

Nous développons le dénominateur en série en $x = \left[\frac{\lambda e^{-(\lambda+u)\tau}}{u+\lambda} + \frac{\lambda^2(1-e^{-(\lambda+u)\tau})}{(u+\lambda)^2} e^{-u\tau_b} \right]$. Nous avons donc la transformée de Laplace de la probabilité que le canal soit ouvert qui s'écrit comme une somme dont chaque terme peut être facilement inversé,

$$\tilde{P}_A(u) = \left(\frac{1}{u+\lambda} + \frac{\lambda(1-e^{-(\lambda+u)\tau})}{(u+\lambda)^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\lambda e^{-(\lambda+u)\tau}}{u+\lambda} + \frac{\lambda^2(1-e^{-(\lambda+u)\tau})}{(u+\lambda)^2} e^{-u\tau_b} \right] \right)^n. \quad (\text{IV.125})$$

Après le calcul de l'inversion de Laplace, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_A(t) &= e^{-\lambda t} \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \left[\frac{e^{\lambda \tau_b k}}{(k+n)!} \sum_{l=0}^k C_k^l (-1)^l (\lambda t_{lnk})^{k+n} \theta(\lambda t_{lnk}) \right. \\ &\left. + \frac{e^{\lambda \tau_b k}}{(k+n+1)!} \sum_{l=0}^{k+1} C_{k+1}^l (-1)^l (\lambda t_{lnk})^{k+n+1} \theta(\lambda t_{lnk}) \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.126})$$

où $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ est un coefficient binomial et $t_{lnk} = t - (l+n-k)\tau - k\tau_b$.

Comme le blocage a une durée de vie finie, la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} P_A(t) = P_{A\infty}$ est finie, cela correspond à la valeur stationnaire aux temps longs. Du fait que la probabilité de survie tend vers une valeur constante, alors, la transformée de Laplace se comporte comme $P_{A\infty}/u$ lorsque $u \rightarrow 0$. De la même manière, chaque $\sum_{n \geq 0} q(n, t)$ et $\sum_{n \geq 0} q_R(n, t)$ tend vers une valeur non nulle quand $t \rightarrow \infty$, donc les transformées de Laplace des deux fonctions génératrices $\tilde{G}(1, u)$ et $\tilde{G}_R(1, u)$ se comportent comme $P_{A\infty}/u$ et $P_{AR\infty}/u$ pour de faibles u , respectivement.

En utilisant la formule de la probabilité que le système soit ouvert, Eq. (IV.114), nous calculons la valeur stationnaire de cette probabilité, soit

$$P_{A\infty} = \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{P}_A(u) = \frac{2 - e^{-\lambda\tau}}{2 + \lambda\tau_b - (1 + \lambda\tau_b)e^{-\lambda\tau}}. \quad (\text{IV.127})$$

Nous obtenons le même résultat que celui donné à partir d'arguments simples, Eq. (IV.111). Nous étudions les limites de cette valeur pour de faibles intensités $\lambda\tau$. Le comportement est donné par $1 - P_{A\infty} = \tau\tau_b\lambda^2 + O(\lambda^3)$, c'est-à-dire qu'il a une dépendance non-linéaire en λ . Par contre lorsque $\lambda\tau \gg 1$, $P_{A\infty} \sim \frac{2}{\lambda\tau_b}$. Cette probabilité est donc inversement proportionnelle à λ et indépendante de τ . Cela veut dire que la probabilité va tendre doucement vers zéro, lorsque λ augmente.

La Fig. IV.7 trace la probabilité que le canal soit ouvert ainsi que la limite théorique, Eq. (IV.127), pour différents systèmes. Nous modifions soit λ soit τ_b , pour $\tau = 1$. Nous constatons comme nous l'avions remarqué précédemment qu'il y a des oscillations avant d'arriver à une valeur stationnaire. Nous notons aussi que les valeurs théoriques et les valeurs numériques coïncident parfaitement. Les oscillations sont présentes pour tous les systèmes, mais elles sont plus prononcées quand $\lambda\tau$ augmente. Pour de petites valeurs de l'intensité les oscillations sont rapidement amorties. Lorsque $\lambda\tau$ est très grand, la période des oscillations tend alors vers τ_b , puisque cela correspond à la limite où le système se bloque et se débloque immédiatement, et la probabilité est nulle à certain temps. De plus, dans ce cas, le flux est très élevé lorsque cela se débloque puisque les particules sortent par paires. Nous notons que pour le cas $\lambda\tau = 4$ et $\tau_b/\tau = 4$ le canal alterne entre des états ouverts et fermés et qu'il met un temps long à arriver à une valeur constante. Pour de faibles ou de moyennes valeurs de $\lambda\tau$ la probabilité que le canal soit ouvert est non nulle.

À présent, nous nous intéressons au flux de particules sortantes. Pour calculer cette donnée, nous définissons des probabilité $\pi_k(t)$ qu'il y ait k particules dans le canal au temps t . Pour un seuil de particules égal à $N = 2$, seules les probabilités $\pi_0(t)$ et $\pi_1(t)$, qui correspondent aux probabilités qu'il y ait 0 ou 1 particule dans le canal au temps t , sont pertinentes puisque dans ces deux cas le canal est ouvert. Nous écrivons la probabilité que le système soit ouvert à l'instant t comme

$$P_A(t) = \pi_0(t) + \pi_1(t). \quad (\text{IV.128})$$

Grâce à ces deux nouvelles probabilités, nous déduisons aisément le flux sortant :

$$j(t) = \lambda e^{-\lambda\tau} \pi_0(t - \tau) + 2\lambda\pi_1(t - \tau_b). \quad (\text{IV.129})$$

Pour qu'une particule sorte au temps t , deux événements d'entrée sont possibles. Un premier événement au cours duquel la particule est entrée au temps $t - \tau$ et ressort sans avoir été bloquée (probabilité calculée par le premier terme). Mais lors d'un déblocage au temps t deux

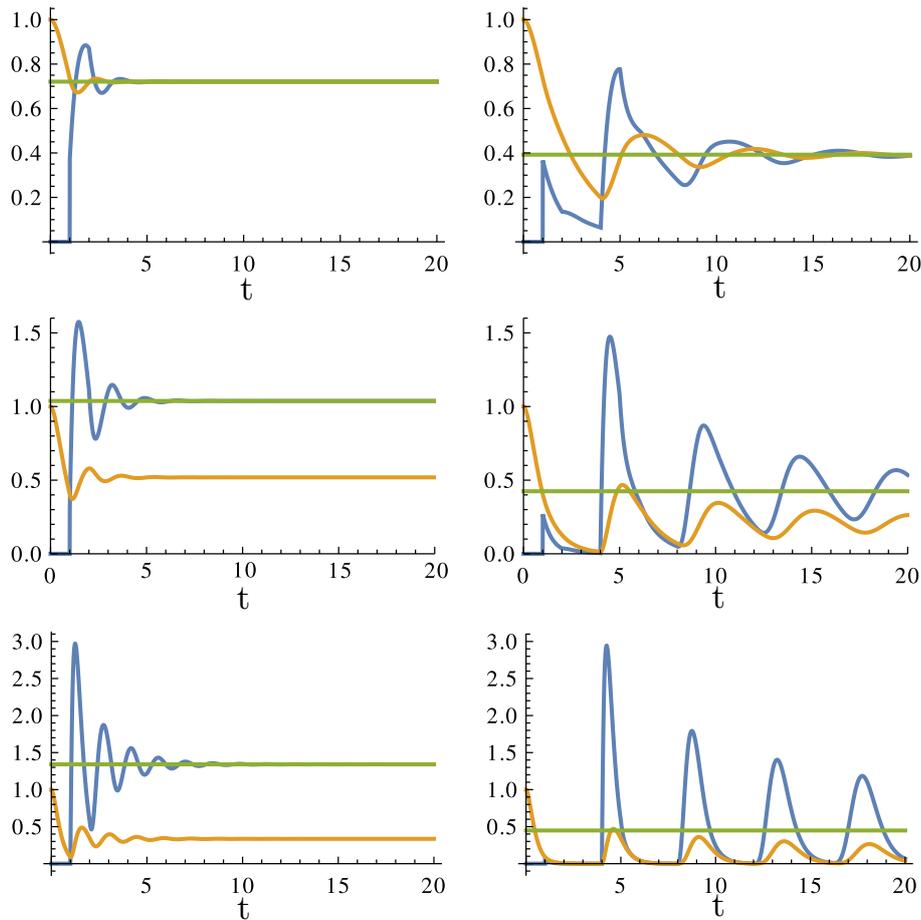


FIGURE IV.7 – Probabilité $P_A(t)$ que le canal soit ouvert (ligne orange) et le flux sortant, $j(t)$ (ligne bleue) en fonction du temps pour $N = 2$, $\tau = 1$ et différentes valeurs de λ et τ_b , et les lignes vertes correspondent au flux stationnaire, Eq. (IV.110). À gauche $\tau_b = 1$ et de bas en haut les intensités sont : $\lambda = 4, 2, 1$; À droite $\tau_b = 4$ et de bas en haut $\lambda = 4, 2, 1$.

particules sortent ce qui consiste à faire augmenter le flux sortant. Un deuxième événement qui correspond à la probabilité qu'une particule soit entrée au temps $t - \tau_b$ alors qu'il y en avait déjà une dans le canal. Nous multiplions le terme par deux car deux particules sortent au même moment.

Nous avons calculé $P_A(t)$ précédemment à partir des probabilités jointes, d'après l'Eq. (IV.128) cette probabilité s'écrit aussi en fonction des deux probabilités $\pi_k(t)$. Nous utilisons donc les probabilités partielles, $q(n, t)$ et $q_R(n, t)$, pour obtenir les $\pi_k(t)$,

$$\pi_0(t) = q(0, t) + \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda \tau} q(n, t - \tau) + \sum_{n \geq 2} q_R(n, t). \quad (\text{IV.130})$$

La probabilité qu'il n'y ait aucune particule dans le canal coïncide avec la somme de trois probabilités : la première correspond à ce qu'aucune particule ne soit entrée, la seconde à ce qu'un nombre de particules quelconque supérieur ou égal à un soit entré avant $t - \tau$, et qu'il n'y en ait aucune qui soit entrée pendant le temps τ . La dernière correspond au déblocage de deux particules comme dernier événement, avec $n \geq 2$. Les deux probabilités $\pi_0(t)$ et $\pi_1(t)$

sont corrélées, à partir de l'Eq. (IV.130) nous obtenons la probabilité qu'il y ait une particule dans le canal,

$$\pi_1(t) = \lambda \int_0^{\min(t-\tau, \tau)} dt_1 e^{-\lambda t_1} \pi_0(t - t_1). \quad (\text{IV.131})$$

Si une particule entre au temps $t - t_1$, $0 \leq t_1 \leq t - \tau$ est nécessaire pour que le canal contienne encore cette particule au temps t . De plus, la particule ne doit pas créer de blocage, la condition est qu'il n'y avait aucune particule au temps $t - t_1$, $\pi_0(t - t_1)$.

$$\tilde{\pi}_0(u) = \frac{1 - e^{-(\lambda+u)\tau}}{\lambda + u} + e^{-(\lambda+u)\tau} \tilde{G}(1, u) + \tilde{G}_R(1, u), \quad (\text{IV.132})$$

et

$$\tilde{\pi}_1(u) = \lambda \frac{1 - e^{-(\lambda+u)\tau}}{\lambda + u} \tilde{\pi}_0(u). \quad (\text{IV.133})$$

Nous utilisons les expressions de $\tilde{G}_R(1, u)$ et $\tilde{G}(1, u)$, Eqs.(IV.123) et (IV.121) pour obtenir la transformée de Laplace du flux $\tilde{j}(u)$:

$$\tilde{j}(u) = \frac{2\lambda^2(1 - \varepsilon(u))e^{-u\tau_b} + \lambda(u + \lambda)\varepsilon(u)}{(u + \lambda)^2 - \lambda^2(1 - \varepsilon(u))e^{-u\tau_b} - \lambda(u + \lambda)\varepsilon(u)}, \quad (\text{IV.134})$$

avec $\varepsilon(u) = e^{-(\lambda+u)\tau}$.

Grâce à cette transformée nous obtenons la valeur stationnaire du flux. Nous avons observé que le flux tendait vers une valeur constante non nulle. Pour l'obtenir, nous calculons la limite de $\tilde{j}(u)$ lorsque $u \rightarrow 0$, car la transformée du flux se comporte comme j_∞/u à temps long,

$$j_\infty = \lim_{u \rightarrow 0} u \tilde{j}(u) = \lambda \frac{2 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau_b(1 - e^{-\lambda\tau}) + 2 - e^{-\lambda\tau}}. \quad (\text{IV.135})$$

Le résultat est le même que celui obtenu avec des arguments simples, Eq. (IV.110). Nous observons que $j_\infty = \lambda p_\infty$, cette formule est logique puisque le flux de sortie est égal au flux d'entrée multiplié par la probabilité que le système soit ouvert. Pour obtenir l'expression complète du flux, nous prenons l'inversion de la transformée de Laplace de Eq. (IV.134), ce qui nous donne

$$j(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f_n^k(t) + \sum_{k=0}^n C_n^k f_n^{k+1}(t) \right], \quad (\text{IV.136})$$

où

$$f_n^k(t) = \frac{e^{\lambda\tau_b k}}{(n+k)!} \sum_{l=0}^k C_k^l (-1)^l (\lambda t_{l(n+1)k})^{n+k} \theta(t_{l(n+1)k}). \quad (\text{IV.137})$$

La Figure IV.7 montre la probabilité que le canal soit ouvert ainsi que le flux sortant pour différentes valeurs de $\lambda\tau$ et de τ_b/τ . Le flux est nul pour $t < \tau$ puisqu'aucune particule ne peut sortir avant ce temps. Lorsqu'un blocage apparaît le flux va diminuer jusqu'au temps τ_b où il y aura un pic. Nous observons que pour de grandes valeurs de λ et τ_b le flux et la probabilité que le canal soit ouvert sont en phase, ce qui est compréhensible puisque dans ce cas à chaque déblocage, le blocage suivant s'effectue rapidement. Donc le flux est juste implémenté par les particules éjectées après un blocage. Mais pour de faibles valeurs de l'intensité, λ , et du temps

de déblocage, τ_b les deux courbes ne sont pas en phase. Nous remarquons que les oscillations tendent vers une valeur constante qui coïncide avec la valeur analytique, Eq. (IV.135). Nous constatons aussi que le flux est juste $j(t) \sim \lambda P_A(t)$ aux temps longs.

Ayant calculé la probabilité de survie et le flux sortant, étudions maintenant la probabilité que le canal soit bloqué au temps t que l'on note $P_B(t)$. On sait que cette probabilité est juste $P_B(t) = 1 - P_A(t)$. Nous introduisons la probabilité que le canal soit fermé au temps t et que n particules soient déjà sorties dans le canal que l'on appelle $q_B(n, t)$. La conservation de la probabilité totale est requise :

$$\sum_{n \geq 0} (q_A(n, t) + q_B(n, t)) = 1. \quad (\text{IV.138})$$

Nous donnons l'évolution des probabilités $q_B(n, t)$ qui vont dépendre des $q(n, t)$ et $q_R(n, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dq_B(n, t)}{dt} = & \lambda \int_0^{\min(t, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda(t_1 + \tau)} q(n, t_\tau - t_1) + \lambda \int_0^{\min(t, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} q_R(n, t - t_1) \\ & - \lambda \int_0^{\min(t_\tau + \tau_b, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda(t_1 + \tau)} q(n, t_\tau + \tau_b - t_1) \\ & - \lambda \int_0^{\min(t_\tau, \tau)} dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} q_R(n, t_\tau - t_1) \quad \text{pour } n \geq 2. \end{aligned} \quad (\text{IV.139})$$

La première et la troisième équation correspondent au cas où le dernier événement est une sortie d'une particule seule. Le premier est un terme de gain où une particule entre à l'instant t et bloque le canal avec une autre particule entrée entre $t - \tau$ et t , alors que l'événement précédent était la sortie d'une particule. Le deuxième terme correspond lui aussi à un terme de gain où l'événement précédent, l'entrée des deux particules qui cause le blocage, était le déblocage de deux particules. Les troisième et quatrième termes sont des termes de perte où le canal se débloque au temps t , avec soit, la sortie d'une particule seule, soit le déblocage de deux particules comme événement précédant le dernier blocage. Pour le cas où $n = 0$ seuls les termes 2 et 4 vont être présents et pour $n = 1$ il y aura seulement les termes 1 et 3. Nous introduisons la fonction génératrice : $G_B(z, t) = \sum_{n \geq 0} z^n q_B(n, t)$. Nous multiplions l'Eq. (IV.139) par z^n puis nous sommions sur n , en prenant la transformée de Laplace nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda^2(1 - e^{-(\lambda+u)\tau})(1 - e^{-u\tau_b})\tilde{G}_B^{-1}(z, u) = & u[(\lambda + u)^2 - \lambda z(e^{-(\lambda+u)\tau}(\lambda + u) + \\ & \lambda z e^{-u\tau_b}(1 - e^{-(\lambda+u)\tau})]. \end{aligned} \quad (\text{IV.140})$$

Nous vérifions la conservation des probabilités, Eq. (IV.138), en sommant les différentes fonctions génératrices

$$\tilde{G}_B(1, u) + \tilde{G}_R(1, u) + \tilde{G}(1, u) = \frac{1}{u}. \quad (\text{IV.141})$$

En inversant cette équation nous retrouvons bien que la somme des fonctions génératrices pour $z = 1$ (c'est-à-dire la probabilité que le système soit ouvert ajouté à la probabilité que le système soit fermé) vaut 1. Ensuite, nous obtenons les probabilités individuelles à partir des fonctions génératrice. Les probabilités jointes correspondant à un canal bloqué sont données par : $\tilde{q}_B(n, u) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \tilde{G}_B(z, u)}{\partial u^n} \right|_{z=0}$. Après inversion de Laplace nous arrivons aux résultats des $q_B(n, t)$. Nous remarquons qu'en augmentant n on arrive à des équations très longues. En général, $q_B(n, t)$ change de forme pour chaque intervalle $k\tau + l\tau_b$ où $l = 0, \dots, (n + 1)$ et

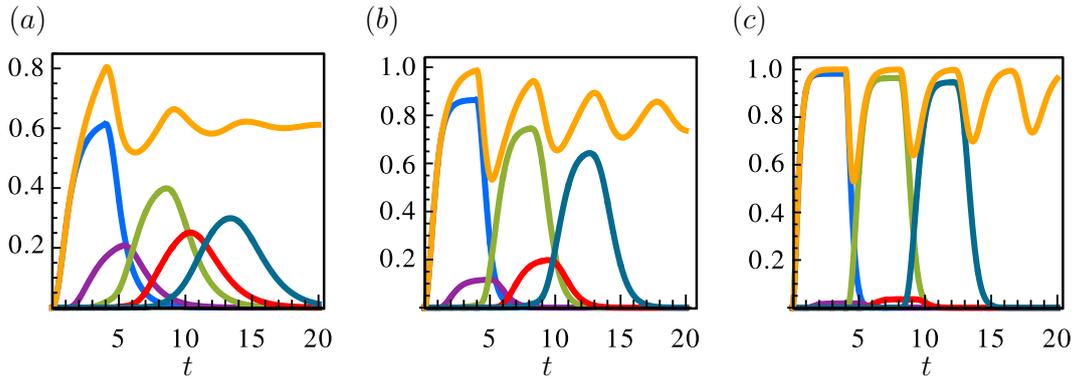


FIGURE IV.8 – Les probabilités de blocage $q_B(n, t)$ pour $\tau = 1$ en fonction du temps pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (de gauche à droite) et la probabilité $P_B(t) = 1 - P_A(t)$ au-dessus en orange, cela pour $\tau_b = 4$ et $\lambda = 4, 2, 1$ (de gauche à droite).

$k = 0, \dots, (n + 1)$ et ils sont indépendants de τ_b pour $t < \tau_b$ puisqu'aucun déblocage n'a lieu dans cet intervalle. Par exemple, nous pouvons regarder le premier terme :

$$q_B(0, t) = \begin{cases} 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t} & t < \tau \\ 1 - e^{-\lambda \tau} - \lambda \tau e^{-\lambda t} & \tau < t < \tau_b \\ (1 - \lambda t \tau_b)e^{-\lambda t \tau_b} - e^{-\lambda \tau} - \lambda \tau e^{-\lambda t} & \tau_b < t < \tau_b + \tau \\ \lambda \tau (e^{-\lambda(t - \tau_b)} - e^{-\lambda t}) & t > \tau_b + \tau \end{cases} . \quad (\text{IV.142})$$

Nous traçons, sur la Fig. IV.8, l'évolution en temps de ces probabilités pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, $\tau_b/\tau = 4$ et pour $\lambda\tau = 1, 2, 4$. Chaque probabilité tend vers 0 au temps long, mais la probabilité que le canal soit fermé, $P_B(t)$ tend vers une valeur constante. Nous traçons seulement les premiers n . Plus n augmente, plus la courbe va se décaler vers la droite et ainsi être non nulle au temps long. Nous observons que pour de fortes valeurs de λ et de τ_b les probabilités des n impairs sont proches de 0 alors que les probabilités des n paires sont des quasi-fonctions portes, comme les particules se bloquent plus facilement presque toutes se retrouvent bloquées et ne ressortent pas seules du canal.

IV.5.3 Cas d'un nombre de canaux quelconque

À présent nous analysons l'augmentation du nombre de canaux sur notre étude du seuil $N = 2$. Pour que le système soit complètement fermé, il faut que tous les canaux soient bloqués.

IV.5.3.a Système à deux canaux, $N_c = 2$

Pour un système à plusieurs canaux, il n'est à priori pas aussi aisé d'obtenir la formule obtenue dans le cas $N = 1$ de la probabilité stationnaire que le système soit fermé. Pour le cas $N = 1$, rappelons pour tout N_c cette probabilité grâce à la formule d'Erlang, soit

$$P_B(\infty) = \frac{\lambda \tau_b}{1 + \lambda \tau_b} . \quad (\text{IV.143})$$

Nous utilisons ces résultats de la théorie des files d'attente pour tenter d'obtenir des solutions approchées pour un système $N = 2$. Lorsqu'une seule particule bloque le système d'un seul canal de façon infinie le temps moyen de blocage est : $\langle t \rangle = 1/\lambda$. Le temps du premier blocage pour un temps fini de blocage est aussi $1/\lambda$. Si nous injectons ce résultat dans l'Eq. (IV.143) nous obtenons que

$$P_B(\infty) = \frac{\tau_b}{\langle t \rangle + \tau_b}. \tag{IV.144}$$

C'est ce que nous avons obtenu de manière graphique précédemment. Nous pouvons extrapoler ce résultat pour $N = 2$, c'est-à-dire pour un temps moyen de blocage d'après l'Eq. (IV.108). Cette équation signifie que le canal est bloqué un temps τ_b sur un temps moyen de $\langle t \rangle + \tau_b$, ce qui fonctionne lorsque nous avons un seul canal,

$$P_B(\infty) = \frac{\tau_b}{2 - e^{-\lambda\tau}}. \tag{IV.145}$$

Cette équation correspond parfaitement à celle trouvée précédemment par une approche différentielle, Eq. (IV.127), avec $P_B(\infty) = 1 - P_A(\infty)$. Si nous extrapolons cette méthode pour $N_c = 2$, nous reprenons la formule d'Erlang en remplaçant $1/\lambda$ par $\langle t \rangle$ donné par l'Eq. (IV.108). La formule d'Erlang pour $N_c = 2$ en fonction du temps moyen de blocage est

$$P_B(\infty) = \frac{2\tau_b^2}{\langle t \rangle^2 + 2\langle t \rangle\tau_b + 2\tau_b^2}. \tag{IV.146}$$

Pour tout N_c la formule d'Erlang en fonction du temps moyen est

$$P_{N_c} = \frac{1}{N_c!} \left(\frac{\tau_b}{\langle t \rangle} \right)^{N_c} P_0, \tag{IV.147}$$

avec

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{N_c} \frac{1}{N_c!} \left(\frac{\tau_b}{\langle t \rangle} \right)^k \right)^{-1}. \tag{IV.148}$$

Nous constatons sur la Fig. IV.9 (a) que l'approximation est justifiée, surtout pour de grandes valeurs de λ et pour de faibles valeurs de N_c . Lorsque l'on augmente N_c les erreurs s'accumulent et l'approximation faite avec la formule d'Erlang est de moins en moins en accord avec les valeurs numériques.

IV.6 Cas d'un seuil de particules bloquantes supérieur à deux, $N \geq 2$

Nous observons maintenant ce qu'il se passe lorsque nous augmentons le nombre de particules bloquantes. La méthode présentée ne permet pas d'obtenir une solution exacte quand $N \geq 2$. Pour le modèle définitif, seuls les cas $N = 2, 3$ étaient solubles et complexes. Sur la Fig. IV.10, nous traçons la probabilité que le canal soit ouvert pour $N = 2, 3, 4, 5$. La valeur stationnaire augmente lorsque N augmente ce qui est cohérent avec le fait que la chance de voir un blocage diminue. Nous remarquons aussi que les oscillations diminuent pour des N supérieurs. Le flux évolue de la même manière avec N , la valeur stationnaire augmente et les oscillations diminuent.

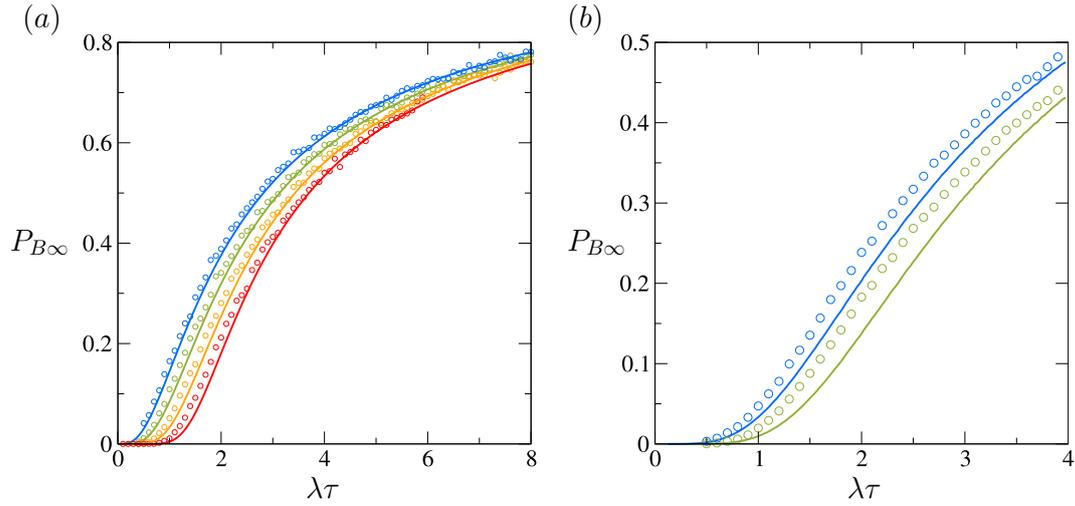


FIGURE IV.9 – Probabilité stationnaire que le système soit fermé, pour (a) $N = 2$, $\tau = 1$ avec $N_c = 2, 3, 5, 10$ et (b) $N = 3$ avec $N_c = 2, 3$ en fonction de λ , avec les cercles désignant les valeurs numériques et les lignes pleines l'Eq. (IV.146).

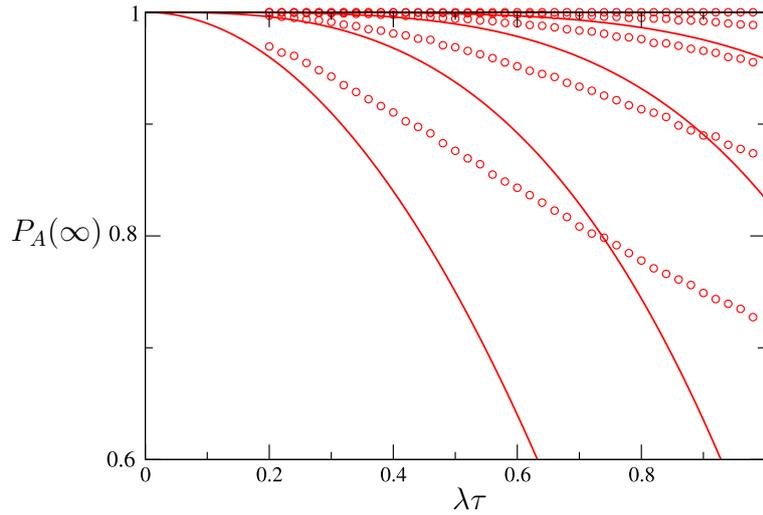


FIGURE IV.10 – Probabilité stationnaire pour des systèmes $N = 2, 3, 4, 5$ (de bas en haut) avec un seul canal, $\tau = 1$, $\tau_b = 1$ et $\lambda = 1$, les cercles correspondent aux résultats numériques et les lignes pleines représentent l'approximation théorique, Eq. (IV.150).

Lorsque $N_c = 1$ une approximation des valeurs stationnaires est possible, de la même façon que pour le seuil $N = 1$. Ce canal alterne entre état bloqué et ouvert, lorsqu'il est bloqué, même s'il faut plusieurs particules pour obstruer le canal, celui-ci va se débloquent après un temps τ_b . Le canal se bloque en moyenne après un temps $\langle t \rangle$, que nous connaissons pour $N = 1, 2, 3$. Le canal est donc bloqué sur un temps τ_b pendant un temps $\langle t \rangle + \tau_b$, donc la probabilité stationnaire est :

$$P_B(\infty) = \frac{\langle t \rangle}{\tau_b + \langle t \rangle}. \quad (\text{IV.149})$$

Pour une faible intensité d'entrée alors on a déterminé une valeur approchée du temps moyen de blocage pour tout N , Eq. (II.76). On insère cette approximation dans l'Eq. (IV.149), le résultat est alors

$$P_A(\infty) = \frac{(N-1)!}{(N-1)! + \lambda^N \tau^{N-1} \tau_b}. \quad (\text{IV.150})$$

La Fig. IV.10 montre les valeurs numériques des probabilités stationnaires ainsi que les valeurs approchées analytiques, l'Eq. (IV.150). Nous remarquons que plus les valeurs de N sont élevées plus l'approximation est réaliste, nous pouvons faire l'hypothèse que lorsque N augmente alors les blocages sont moins probables ce qui correspond à la structure où l'intensité diminue puisque le temps moyen de blocage augmente énormément (cette approximation est réaliste pour de faibles valeurs de l'intensité).

Nous avons testé plusieurs modèles de la théorie des files d'attente pour améliorer cette approximation. Nous avons analysé le modèle $M/M/1/N$ dont l'état stationnaire correspond au modèle $M/D/1/N$, nous avons tenté de nous rapprocher du modèle $N = 2$ en prenant deux serveurs dont la file d'attente totale ne doit pas dépasser N_c . Ce modèle correspond à $M/M/2/N_c$, dont l'état stationnaire est connu, en prenant $1/\mu = \tau_b$ nous espérons obtenir une approximation pour $N = 2$ cependant ces résultats sont plus éloignés du résultat numérique que l'Eq. (IV.127). Le modèle de batch service permet aux serveurs d'accueillir plus d'un client à la fois. Il est noté $M/M(a, b)/c$, avec a le nombre de clients limite pour que le service commence et b le nombre maximal de clients possibles dans le serveur au même instant. Nous avons émis l'hypothèse qu'en étudiant $M/M(N, N)/N_c$, c'est-à-dire que le service commence et ne se fait que lorsqu'il y a N clients arrivés, et N_c serveurs, cela pourrait davantage coïncider avec notre modèle. Au final, plusieurs modèles de la théorie des files d'attente ont été analysés pour obtenir des résultats approchés pour $N > 1$, mais le modèle le plus simple $M/M/1/K$ est l'approximation la plus pertinente. D'autres modèles de files d'attente nous ont intéressés comme le cas des serveurs hétérogènes. En effet, nous remarquons dans la littérature l'étude de serveurs à différentes distributions de service. Notamment dans le cas de serveurs à la distribution exponentielle mais qui ont différentes intensités.

IV.7 Canaux hétérogènes

Nous allons dans le cas du blocage fini analyser le comportement d'un système à plusieurs canaux hétérogènes, c'est-à-dire qu'il y a plusieurs types avec des temps de transit, pour le cas d'une distribution exponentielle l'intensité μ_i sera différente. Nous étudions un système de N_c canaux, les particules entrent avec une probabilité de Poisson, Λ .

Nous prenons des canaux hétérogènes qui ont différents temps de blocage. Commençons par le cas le plus simple $N = 1$, toutes les particules vont se bloquer, elles entrent avec une probabilité de Poisson d'intensité totale Λ également répartie à travers tous les canaux encore ouverts. Les particules sortent du système suivant une distribution exponentielle de moyenne μ_i différentes suivant les canaux. Pour chaque système nous allons analyser les états stationnaires du modèle, dont la probabilité stationnaire que le système soit fermé.

IV.7.1 Système à deux canaux, $N_c = 2$

Nous considérons le cas à deux canaux, le canal 1 d'intensité de sortie μ_1 et le canal 2 d'intensité μ_2 . Nous voulons connaître l'état stationnaire. Pour cela nous écrivons les

différentes probabilités d'être dans un état possible du système, lorsqu'il y a deux canaux et que le blocage est induit par l'entrée d'une seule particule, il y a quatre états possibles, avec à chaque fois le canal 1 vide ou plein et le canal 2 vide ou plein. Les probabilités sont $p_{00}(t), p_{10}(t), p_{01}(t), p_{11}(t)$ le premier indice correspond au canal 1 et le second au canal 2, l'indice 1 montre que le canal est occupé (il y a une particule dedans) et l'indice 0 montre que le canal est vide. $p_{11}(t)$ correspond à la probabilité que le système soit bloqué. Dans l'état stationnaire nous écrivons les équations dynamiques sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -\Lambda & \frac{\Lambda}{2} & \frac{\Lambda}{2} & 0 \\ \mu_1 & -\Lambda - \mu_1 & 0 & \Lambda \\ \mu_2 & 0 & -\Lambda - \mu_2 & \Lambda \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -\mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est soluble, il suffit de la diagonaliser pour obtenir les différentes probabilités stationnaires :

$$p_{00} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\Lambda^2 + 2\mu_1\mu_2 + \Lambda(\mu_1 + \mu_2)}, \quad (\text{IV.151})$$

$$p_{10} = \frac{2\mu_2}{\Lambda^2 + 2\mu_1\mu_2 + \Lambda(\mu_1 + \mu_2)}, \quad (\text{IV.152})$$

$$p_{01} = \frac{2\mu_1}{\Lambda^2 + 2\mu_1\mu_2 + \Lambda(\mu_1 + \mu_2)}, \quad (\text{IV.153})$$

$$p_{11} = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + 2\mu_1\mu_2 + \Lambda(\mu_1 + \mu_2)}. \quad (\text{IV.154})$$

Si nous choisissons $\mu_1 = \mu_2$, p_{11} se réduit au cas homogène :

$$p_{11} = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + 2\mu^2 + \Lambda\mu^2}. \quad (\text{IV.155})$$

IV.7.2 Système un nombre quelconque de canaux, N_c

En écrivant la matrice de transition, qui permet d'obtenir facilement les équations dynamiques, nous obtenons les résultats pour $N_c = 3$ et $N_c = 4$. Pour $N_c = 3$ il y a 8 états

possibles dont les probabilités sont

$$p_{000} = \frac{6\mu_1\mu_2\mu_3}{\Lambda^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\Lambda(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (\text{IV.156})$$

$$p_{100} = \frac{2\Lambda\mu_2\mu_3}{\Lambda^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\Lambda(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (\text{IV.157})$$

$$p_{010} = \frac{2\Lambda\mu_1\mu_3}{\Lambda^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\Lambda(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (\text{IV.158})$$

$$p_{001} = \frac{2\Lambda\mu_1\mu_2}{\Lambda^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\Lambda(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (\text{IV.159})$$

$$p_{110} = \frac{\Lambda^2\mu_3}{\Lambda^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\Lambda(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (\text{IV.160})$$

$$p_{101} = \frac{\Lambda^2\mu_2}{\Lambda^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\Lambda(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (\text{IV.161})$$

$$p_{011} = \frac{\Lambda^2\mu_1}{\Lambda^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\Lambda(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (\text{IV.162})$$

$$p_{111} = \frac{\Lambda^3}{\Lambda^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\Lambda(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}. \quad (\text{IV.163})$$

À partir de ces trois cas on peut généraliser à n'importe quel nombre de canaux. Nous obtenons que la probabilité que le système soit bloqué pour N_c est

$$P_B = \frac{\Lambda^{N_c}}{Z}, \quad (\text{IV.164})$$

$$\begin{aligned} Z = & \Lambda^{N_c} + N_c! \prod_{i=1}^{N_c} N_c \mu_i + \Lambda(N_c - 1)! \sum_{j=1}^{N_c} \frac{\prod_{i=1}^{N_c} \mu_i}{\mu_j} + (N_c - 2)! \Lambda^2 \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{j=k}^{N_c} \frac{\prod_{i=1}^{N_c} \mu_i}{\mu_j \mu_k} \\ & + 2\Lambda^{N_c-2} \sum_{i=1}^{N_c-1} \sum_{j=i}^{N_c} \mu_i \mu_j + \Lambda^{N_c-1} \sum_{i=1}^{N_c} \mu_i. \end{aligned} \quad (\text{IV.165})$$

Ce résultat analytique est en accord avec les simulations et ce pour n'importe quel N_c . Nous avons retrouvé un résultat connu de la théorie des files d'attente [110]. Pour un seuil plus grand de particules bloquantes les résultats analytiques sont complexes à obtenir. Pour une autre distribution de sortie, des approximations sont possibles mais nous ne les traiterons pas dans cette thèse.

IV.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité de canaux au temps de blocage fini. Nous remarquons alors un état stationnaire précédé d'oscillations pour les observables telles que la probabilité que le système soit ouvert ou le flux. Tout d'abord, les résultats pour $N = 1$ étaient plus simples à obtenir, dans ce cas là, le système a seulement deux états qui se juxtaposent. Par des approches simples nous pouvons obtenir les résultats stationnaires pour des systèmes à N_c canaux. Ensuite, la dynamique du système est obtenue par des approches intégrales,

comme nous avons traité le cas $N \geq 2$. Pour $N_c > 2$ le résultat n'est pas soluble. Ce qui est pertinent à repérer dans ce chapitre c'est que notre modèle pour $N = 1$ est très lié à celui de la théorie des files d'attente. En effet, les solutions stationnaires pour N_c canaux correspondent aux probabilités stationnaires du modèle $M/M/1/K$ (distribution d'entrée et de service exponentiel, avec un seul canal et une file d'attente qui se limite à K clients). En modifiant le temps moyen du temps de service qui est $1/\mu$ dans le cas du modèle $M/M/1/K$ par le temps de blocage τ_b nous ré-obtenons exactement les probabilités stationnaires, alors que notre modèle a lui N_c canaux et aucune possibilité d'attente. Ce résultat nous permet d'obtenir des approximations pour un seuil de particules supérieur, $N \geq 2$, en reprenant les formules stationnaires et en remplaçant le temps moyen de blocage du cas $N = 1$, à savoir $1/\lambda$, par le temps de blocage du cas $N = 2$, Eq. (IV.108). Cela peut se comprendre par le fait qu'on ne s'occupe que des instants bloqués et non des particules directement. Cependant, cette approche est très éloignée du résultat exact sauf pour de faibles intensités $\lambda\tau$. Le cas $N = 2$ a néanmoins été résolu analytiquement par une approche différentielle. Nous obtenons l'expression exacte de la probabilité que le canal soit ouvert ainsi que le flux. Le modèle présente un comportement complexe avec un état stationnaire qui peut se calculer par des arguments simples.

Dynamique de particules browniennes circulant dans un microcanal à rétrécissement

Sommaire

V.1	Approche microscopique	141
V.2	Simulation numérique	143
V.3	Étude du modèle	144
V.3.1	Réduction des paramètres d'étude	144
V.3.2	Analyse préliminaire	146
V.3.3	Effet de l'obstacle sur les observables	150
V.3.4	Diagramme de phase	154
V.4	Mise en relation de l'approche microscopique avec l'approche stochastique des phénomènes de blocage	155
V.5	Conclusion	157

Une approche microscopique d'un phénomène de blocage est à présent étudiée. Nos études précédentes ont mis en évidence différents comportements et reposent sur le paramètre phénoménologique de la capacité d'un canal. Notre but en utilisant une approche microscopique est de dégager les caractéristiques physiques pertinentes conduisant au blocage, afin de retrouver les comportements obtenus dans nos approches précédentes quand la capacité du canal est contrôlée par sa géométrie. Par exemple, si le canal présente un rétrécissement alors cela va influencer directement sur le flux en le ralentissant voire même en l'interrompant.

Nous avons présenté en introduction le modèle d'Helbing, Sec.I.4.3, qui décrit entre autres les effet effet de panique en utilisant un modèle microscopique de particules qui interagissent de manière répulsives. Cependant, la multiplicité des paramètres utilisés ne permet pas une approche de physique statistique et phénoménologique. D'autres situations physiques avec ce phénomène de colmatage dû à la géométrie d'un canal ont été étudiées. Nous les retrouvons notamment dans des écoulements granulaires d'un flux de Hopper à deux dimensions [22] ou dans la matière granulaire à l'intérieur de tubes verticaux étroits [23]. L'expérience consiste à faire écouler de la matière granulaire le long de tubes étroits qui extraient et réinsèrent la matière avec un ratio constant. Une analyse des avalanches des grains permet de caractériser le blocage. L'effet de colmatage dépend de la formation d'une arche, qui dépend elle même des frottements entre les particules et des formes diverses de particules. Cet effet peut être considéré par la dynamique de Jansen étudiée dans la matière granulaire. La stabilité des arches dans un silo est soumis à une vibration verticale [23]. La fraction de configurations de blocages sur un flux de granulaire de Hopper a été étudiée par Thomas et Durian [114][115].

Le blocage d'un silo peut être paradoxalement réduit par la présence d'un obstacle situé en amont de la sortie [20] ; le colmatage dépend de la géométrie de l'espace. Ces modèles sont plus pertinents pour l'étude de nos systèmes car les caractéristiques du canal influent sur le blocage.

Pour plusieurs types d'objets la présence en amont de la sortie d'un obstacle permet de diminuer ou de supprimer le blocage, par exemple le mouvement collectif des moutons passant une porte dépend de la présence et de la géométrie d'un obstacle placé devant cette porte [20] [21]. L'universalité des blocages pour différentes situations physiques a été repérée (moutons, granulaires, piétons, etc.) [116]. Dans ce même article les auteurs considèrent une dynamique brownienne avec deux types de particules qui avancent dans un canal dans des directions opposées. Le canal présente des rétrécissements périodiquement positionnés. Ils obtiennent un diagramme de phase selon les paramètres de la largeur moyenne du canal ainsi que la fraction de particules regroupées. Pour ce modèle, il est pertinent de calculer le nombre de Péclet car il représente le rapport des deux temps caractéristiques, à savoir celui du transfert par convection et celui du transfert par diffusion : $Pe = \frac{L_c v}{\alpha}$. Il sert à comparer les propriétés advectives et diffusives d'un écoulement. Pour cette étude il est fixé à 10. Il est observé une brisure de symétrie dans l'encombrement pour des particules allant dans deux directions opposées [117]. Une expérience a été faite sur ce type de système avec une géométrie périodique, grâce à des simulations numériques les déformations des particules ont pu être étudiées [118]. Romanczuk et al. [119] ont écrit un article très exhaustif sur les particules browniennes, en particulier sur les particules actives dans un potentiel confiné. Lorsque les effets stériques sont les principaux responsables de la limitation de la circulation, les modèles sur réseau (dans lesquels les effets stériques consistent à supposer une interaction entre les particules) sont pertinents car on peut obtenir des solutions analytiques et la simulation est beaucoup plus facile à utiliser que l'utilisation de modèles microscopiques. Par exemple, Mishra et Chowdhury introduisent un modèle en treillis dans lequel deux espèces se déplacent le long d'un réseau unique [120]. Ils visent à décrire la contradiction de deux processus d'exclusion codirectionnelle en présence d'un goulot d'étranglement statique.

D'un point de vue expérimental Altshuler et al. [121] ont étudié la densité de l'écoulement et la dispersion anormale des bactéries *E. coli* à travers un rétrécissement. La rupture de symétrie est analysée en introduisant un paramètre associé à la différence relative de nombre de particules devant l'obstacle et au-delà. (Le paramètre est susceptible d'être intéressant dans notre simulation, mais le mouvement d'*E.coli* est fondamentalement décrit en utilisant un modèle de *run and tumble*, ce qui n'est pas notre approche). Zimmermann et al. [122] ont étudié le flux de solides et de fluides colloïdaux à travers des contraintes : ils considèrent un système de particules interagissant avec une dynamique brownienne dans un canal avec un rétrécissement, mais ils complètent leur étude en utilisant une théorie de la densité fonctionnelle dynamique qui pourrait être pertinente pour nos modèles.

D. Bartolo et D.G.L Aarts [123] présentent des outils de la microfluidique soulignant l'action du confinement. Ils montrent comment la géométrie peut être exploitée en combinant la microfluidique avec des modèles de systèmes colloïdaux.

Enfin Wyss et al. [124] analysent un phénomène de colmatage à l'intérieur de microcanaux ; le processus est étudié à faible fraction de volume et à débit élevé, un régime important et probablement proche de nos approches antérieures.

V.1 Approche microscopique

Nous modélisons le mouvement des particules dans un micro-canal qui comporte un rétrécissement. Les particules se déplacent avec un mouvement brownien et une force de dérive liée à l'écoulement du fluide faisant avancer le flux de la gauche vers la droite préférentiellement. Les particules que nous étudions peuvent être déformées par la géométrie du canal, c'est-à-dire les murs, ou par les particules voisines. Dans plusieurs situations biologiques, des molécules déformables se déplacent à travers des vésicules de transports. Ce sont des structures sphériques formées d'une membrane biologique refermée sur elle-même qui peuvent contenir des molécules et de nombreuses protéines trans-membranaires [118, 125]. Le flux de particules dans un micro-canal dépend des propriétés physiques comme la taille du canal ou la taille des particules ainsi que des différentes interactions qui agissent entre les particules, entre les particules et le mur et enfin à la force de dérive. Dans notre modèle, nous étudions un canal de longueur L_x et de largeur L_y avec des bords périodiques où des particules identiques de masse m et de diamètre σ_1 circulent, Fig. V.1. Nous choisissons le centre des axes (O_y, O_x) au centre du canal. Nous posons dans le micro-canal deux grandes particules, de diamètre σ_2 et dont le centre est positionné à $\frac{L_y - \sigma_1}{2}$ et $\frac{L_y + \sigma_1}{2}$, qui induisent un rétrécissement arrondi, nous allons les nommer les particules "obstacles". Nous noterons la plus petite distance entre ces deux objets l_w . La courbure du rétrécissement est l'inverse du rayon des deux particules $\sigma_2/2$. La plus petite largeur peut être calculée avec $l_w = L_y - \sigma_2 + \sigma_1$, ce qui signifie que dans notre modèle pour garder la même largeur l_w lorsque l'on augmente la largeur du canal nous avons besoin de modifier le diamètre des particules de type "obstacles" et donc la courbure du rétrécissement, Fig. V.1.

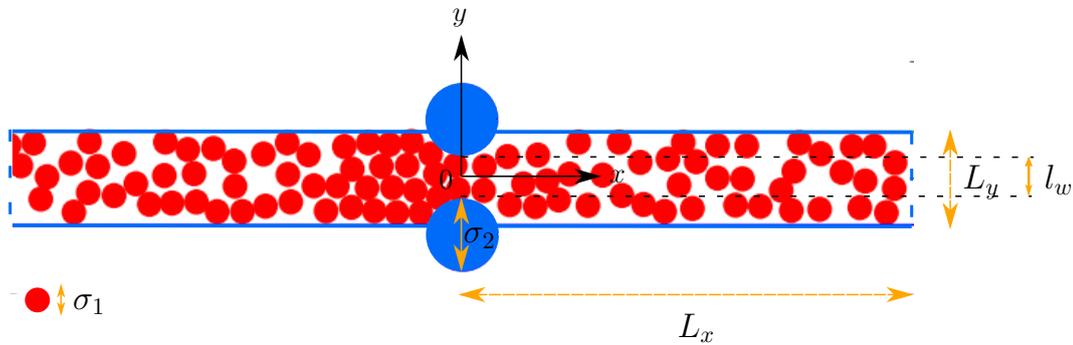


FIGURE V.1 – Canal d'une longueur L_x et d'une largeur L_y avec un rétrécissement arrondi d'une valeur minimale de l_w causé par deux particules d'un diamètre σ_2 . Dans ce canal, des particules, d'un diamètre σ_1 , avancent avec un mouvement brownien et une force de frottement liquide

Plusieurs forces entrent en jeu dans notre modèle, dont une force d'interactions entre les particules qui est donnée pour la force appliquée par i sur j par :

$$\mathbf{F}_{ij} = k\theta(\sigma_{12} - r_{ij})(r_{ij} - \sigma_{12})\hat{\mathbf{r}}_{ij}, \quad (\text{V.1})$$

avec r_{ij} la distance entre les particules i et j , $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ le vecteur unité orienté de i vers j et θ est la fonction Heaviside. k est le facteur de rigidité, plus il est élevé plus les particules sont considérées comme des sphères dures non déformables. $\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ avec σ_1 et σ_2 le diamètre des particules et des deux obstacles respectivement. La force d'interaction sera de la même

forme quelle que soit l'espèce des particules, celles qui induisent le rétrécissement possèdent le même facteur de rigidité que les particules du fluide. La force entre une particule i et les deux murs horizontaux (les murs sont notés $w\pm$) est :

$$\mathbf{F}_{w\pm,i} = k_w \theta(r_{iw\pm} - \sigma_1/2)(r_{i,w\pm} - \sigma_1/2) \hat{\mathbf{r}}_{iw\pm}, \quad (\text{V.2})$$

où $r_{i,w\pm}$ est la distance entre la particule i et le mur, $\hat{\mathbf{r}}_{iw\pm}$ est le vecteur unité orienté du mur vers la particule i et k_w le facteur de rigidité du mur. Nous rajoutons une force externe qui correspond à une force de dérive pour les faire avancer, elle est donnée par

$$\mathbf{F}_{d,i} = -\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0), \quad (\text{V.3})$$

où \mathbf{v}_0 est un vecteur constant dans la direction de la longueur du canal, $\mathbf{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. Les particules se déplacent avec un mouvement brownien en plus de l'effet de la force de frottement fluide. L'équation du mouvement d'une dynamique brownienne est donnée par une équation de Langevin

$$m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = F_{ext} + F_{d,i} + \xi(t), \quad (\text{V.4})$$

avec $\xi(t)$ un bruit blanc Gaussien d'amplitude unité, c'est-à-dire que $\langle \xi(t) \rangle = 0$ et $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = A\delta(t-t')$ avec A un préfacteur. Nous développons cette équation comme :

$$m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \sum_w \mathbf{F}_{w,i} + \sum_{i_0} \mathbf{F}_{i_0,i} + \mathbf{F}_{d,i} + \xi(t). \quad (\text{V.5})$$

Pour que le bruit synthétise la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide environnantes, il faut que

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2m\Gamma\delta(t-t'), \quad (\text{V.6})$$

avec Γ le coefficient de diffusion de la vitesse. D'après la relation d'Einstein ce coefficient Γ est donné par

$$\Gamma = \frac{k_B T \alpha}{m^2}. \quad (\text{V.7})$$

En injectant l'Eq. (V.7) dans l'Eq. (V.6) nous obtenons

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2k_B T \alpha \delta(t-t'). \quad (\text{V.8})$$

Au final, l'équation du mouvement brownien est donné par

$$m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \sum_w \mathbf{F}_{w,i} + \sum_{i_0} \mathbf{F}_{i_0,i} + \mathbf{F}_{d,i} + \sqrt{2k_B T \alpha} \eta(t), \quad (\text{V.9})$$

avec T la température et $\eta(t)$ un bruit Gaussien, c'est-à-dire que $\langle \eta(t) \rangle = 0$ et $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \sqrt{2k_B T \alpha} \delta(t-t')$.

Nous considérons la dynamique brownienne suramortie, c'est-à-dire que le terme de l'accélération est négligé. Nous nous intéressons à un système périodique et nous pouvons considérer

que le système a déjà évolué, nous positionnons des particules aléatoirement dans le canal, donc $t \gg m/\alpha$. En négligeant ainsi l'accélération nous obtenons :

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \sum_w \mathbf{F}_{w,i} + \sum_{i_0} \mathbf{F}_{i_0,i} \right) + \sqrt{\frac{2T}{\alpha}} \eta(t). \quad (\text{V.10})$$

Dans un premier temps, nous introduisons un nombre minimal de paramètres réduits qui caractérisent le système. Les paramètres physiques définis par ce modèle sont : la température T du système, l'intensité de friction α , les diamètres des deux types de particules σ_1 et σ_2 , l'intensité des facteurs de rigidités k et k_w ainsi que la masse m des particules, mais ce dernier paramètre n'est pas pertinent pour le cas d'un mouvement Brownien suramorti. La taille du canal sera aussi choisie L_x et L_y , ainsi que la densité que nous prendrons comme $\rho = N/(L_x L_y)$ même s'il faudrait soustraire la taille du rétrécissement pour avoir le résultat exact, mais nous allons négliger ce volume. En plus des paramètres géométriques du canal, nous devons prendre en compte la géométrie du rétrécissement c'est-à-dire l_w la distance minimum entre les deux grandes particules ainsi que leur rayon $\sigma_1/2$ qui caractérise la courbure. Les paramètres physiques réduits sont :

$$\begin{aligned} k' &= \frac{k\sigma_1}{\alpha}, & k'_w &= \frac{k_w\sigma_1}{\alpha}, & \tau &= \frac{2T}{\alpha v_0^2}, & \sigma'_i &= \frac{\sigma_i}{\sigma_1} \\ L'_x &= \frac{L_x}{\sigma_1}, & L'_y &= \frac{L_y}{\sigma_1}, & L'_w &= \frac{L_w}{\sigma_1}. \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Nous introduisons aussi des variables sans dimension

$$\mathbf{v}'_i = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad r'_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sigma_1}, \quad (\text{V.12})$$

en injectant les paramètres réduits et les variables sans dimension dans l'équation du mouvement, Eq. (V.10) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_i(t) &= \mathbf{1} + \sum_{j \neq i} k' \theta(1 - r'_{ij})(r'_{ij} - 1) \hat{\mathbf{r}}_{ij} + \sum_w k'_w \theta(r'_{i,w} - 1/2)(r'_{i,w} - 1/2) \hat{\mathbf{r}}'_{i,w} \\ &+ \sum_{i_0} k' \theta(\sigma'_{12} - r'_{i,i_0})(r'_{i,i_0} - \sigma'_{12}) \hat{\mathbf{r}}'_{i,i_0} + \sqrt{\tau} \eta(t). \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

Pour simplifier, nous n'allons pas noter l'apostrophe dans les parties suivantes, mais nous noterons directement les données sans dimension. Nous avons pu réduire l'équation du mouvement à 3 paramètres, qui contiennent en tout 9 paramètres physiques. Ces paramètres sont : la température, la largeur du rétrécissement et la constante de raideur du mûr et des particules qui sont égales. Pour étudier le système nous analysons les résultats du modèle à partir d'une simulation numérique.

V.2 Simulation numérique

Pour simuler notre système nous commençons par poser les murs de notre canal, soit un rectangle de longueur L_x et de largeur L_y , où nous posons deux particules de diamètre σ_2 à la

position $(0, \frac{L_y+1}{2})$ et $(0, \frac{L_y-1}{2})$ ¹. Ensuite nous positionnons les N particules aléatoirement dans le canal sans superposition avec le mur ou entre elles. Le nombre de particules est donné par la densité réduite : $\rho = \frac{N\sigma^2}{L_x L_y}$, où nous négligeons la taille du rétrécissement. Nous imposons des conditions périodiques dans la direction x et nous implémentons les forces pour faire avancer les particules, d'après l'équation du mouvement, Eq. (V.13), à la fois sur la composante x et la composante y pour cela sur chaque particule. Ensuite nous calculons les forces d'interactions puis nous ajoutons la force de dérive. Nous utilisons l'algorithme d'Euler pour résoudre les équations différentielles, c'est-à-dire que nous allons discrétiser le temps sur un pas de Δt . L'équation discrétisée est

$$\Delta r = \left(\Delta t \left(\sum_{j \neq i} k' \theta(1 - r'_{ij})(r'_{ij} - 1) \hat{\mathbf{r}}_{ij} + \sum_w k'_w \theta(r'_{i,w} - 1/2)(r'_{i,w} - 1/2) \hat{\mathbf{r}}'_{i,w} + \sum_{i_0} k' \theta(\sigma'_{12} - r'_{i,i_0})(r'_{i,i_0} - \sigma'_{12}) \hat{\mathbf{r}}'_{i,i_0} \right) + \sqrt{\tau \Delta t} \varepsilon \right) / \alpha \quad (\text{V.14})$$

avec ε un nombre aléatoire choisi à partir d'une distribution Gaussienne de valeur moyenne nulle $\langle \varepsilon \rangle = 0$. Dans l'algorithme il est nécessaire de prendre en compte les bords périodiques. Les vitesses sont ensuite calculées à partir de Δr et du temps discrétisé.

V.3 Étude du modèle

V.3.1 Réduction des paramètres d'étude

Pour étudier le système nous devons réduire l'espace des phases et pour cela nous supprimons des paramètres et des variables. Dans un premier temps, pour simplifier, nous prenons k et k_w égaux. Pour réduire les corrélations entre les particules agitées et entrantes, nous choisissons une densité de $\rho = 0.5$. De plus nous avons considéré qu'initialement les particules ne se chevauchaient pas, à forte densité il y a un risque que nous ne puissions pas placer les particules aléatoirement sans chevauchement. Nous nous plaçons dans le cas où $\tau \ll 1$, lorsque la température est faible et que la force stochastique est faible. La longueur L_x est choisie bien supérieure à L_y pour réduire les effets de la périodicité. Dans le cas où $L_x \gg 1$ ils deviennent insignifiants. En effet, la Fig. V.2 montre deux clichés des simulations de longueur L_x différentes, un pour $L_x = 10$ et l'autre où $L_x = 60$. Nous remarquons que l'encombrement pour une plus grande longueur de canal n'influe pas sur l'entrée du canal. Par contre, nous remarquons que pour $L_x = 10$ il y a une forte corrélation entre l'entrée des particules et l'encombrement. Ce qui pose des problèmes pour comprendre le phénomène. Nous observons que sur le cliché court les particules entrantes ont été influencées par le rétrécissement, certaines particules sont bloquées en amont et ne peuvent pas entrer dans le canal, alors que sur la deuxième image, la longueur du canal permet aux particules de se réinjecter sans problème de blocage. Pour une plus forte température, $T = 1.0$, nous constatons que les particules ont le temps de se désordonner avant d'arriver sur l'encombrement, puisque les particules ont une vitesse dans le sens de Oy . Mais à basse température, nous repérons que même pour un $L_x \gg L_y$ les particules restent regroupées au centre dans la largeur du canal. Mais aucun changement ne se produit si nous agrandissons L_x puisqu'à faible température leur vitesse

1. Nous rappelons que nos paramètres sont pris sans dimensions.

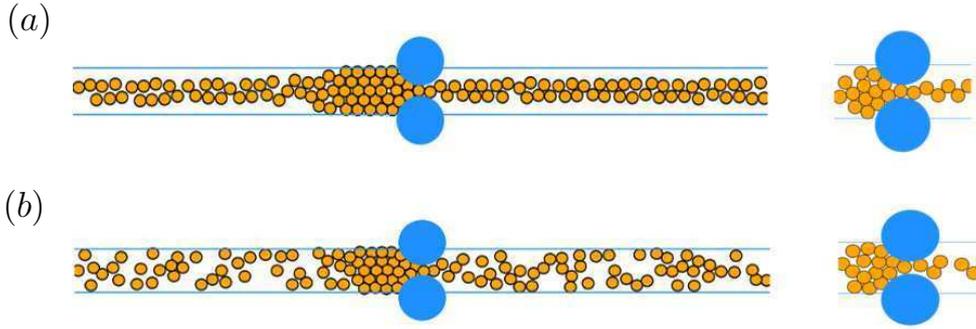


FIGURE V.2 – Configuration du système au temps $t = 114$ pour $L_x = 60$ et $L_x = 10$ (de gauche à droite) pour $l_w = 1$, $v_0 = 1.0$, et $L_y = 4$ pour une température de (a) $T = 0.01$ et (b) $T = 1.0$.

est très faible selon O_y . Au final, nous choisissons un L_x suffisamment grand pour que les conditions périodiques le long de Ox ne biaisent pas la simulation. Maintenant que nous avons diminué le nombre de paramètres physiques, le système est défini par 5 paramètres. Pour réduire encore ce nombre, nous cherchons à enlever L_y de la première étude ; pour cela nous espérons que quand $L_y \gg 1$ le résultat est indépendant de la largeur du canal.

Sur la Fig. V.3 nous traçons la vitesse moyenne de toutes les particules moyennée une fois que le régime stationnaire est atteint, notée $\langle V \rangle$ en fonction de l_w et de T pour plusieurs largeurs L_y du canal. Nous remarquons que les courbes en fonction de l_w sont très proches, la valeur critique pour laquelle le système se bloque complètement est proche pour toutes les courbes. Nous observons par contre que la largeur L_y est pertinente pour la pente de la courbe, plus L_y est grand, plus les vitesses intermédiaires vont être représentées. La courbe en fonction de la température montre clairement un changement pour les différentes largeurs, mais le comportement constant reste le même. Nous allons choisir une valeur pour laquelle il est possible de voir les phases intermédiaires autres que l'état bloqué et l'état fluide, ainsi qu'une valeur pas trop élevée pour que notre système se comporte comme un canal. Par la suite la largeur du canal sera $L_y = 4$.

En résumé, nous définissons certains paramètres physiques : $L_x \gg 1$, $\tau \ll 1$, $k = k_w$, $\rho = 0.5$, $L_y > 3$. De plus, nous avons choisi arbitrairement d'avoir une relation entre la courbure et l_w : $l_w = L_y - \sigma_2 + \sigma_1$. Nous aurions pu réduire la courbure pour garder ce paramètre stable lorsque l_w diminue, mais nous avons choisi la première méthode. Grâce à cette relation l'étude du diagramme de phase va se porter sur 3 paramètres : T , l_w et k . Après un temps transitoire t_t où le système évolue vers un état stationnaire, nous nous attendons à observer une transition de phase qui dépend du rétrécissement ou d'autres paramètres physiques comme la température, la force d'interaction ou la force de traînée. Dans cette transition l'encombrement ou le blocage complet du système induirait une diminution ou une chute rapide de la vitesse. Les observables du système sont la vitesse instantanée moyenne des particules $\langle v(t) \rangle$, le flux moyen des particules $\langle J(t) \rangle$ ainsi que la vitesse moyenne $\langle V \rangle = \frac{\int_{t_t}^{t'} v(t) dt}{t' - t_t}$ et le flux moyen calculé de la même façon à partir du flux instantané $\langle J \rangle = \frac{\int_{t_t}^{t'} J(t) dt}{t' - t_t}$. Nous relierons

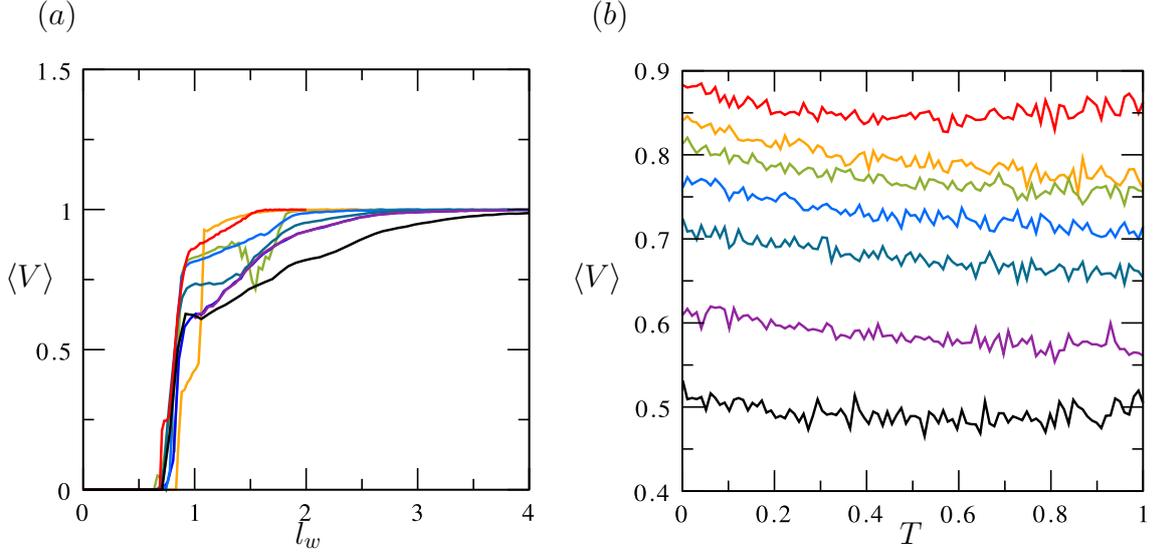


FIGURE V.3 – Vitesse globale moyenne pour différentes valeurs de L_y , $L_y = 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5, 6$. (a) En fonction de la largeur du rétrécissement pour $T = 0.01$ (haut en bas dans les L_y croissant à droite), (b) en fonction de la température pour $l_w = 0.8$ (de haut en bas dans les L_y croissants).

ces deux observables à l'état stationnaire par l'équation

$$\langle J \rangle = \rho L_y \langle V \rangle. \tag{V.15}$$

Ces quantités dépendent de l'ensemble de tous les paramètres physiques. Ensuite, nous étudions en priorité un système $L_y = 4$, $L_x = 60$, $\rho = 0.5$ et $k = 300$.

V.3.2 Analyse préliminaire

Nous commençons par une étude préliminaire à partir des films obtenus par la simulation. Tout d'abord, nous remarquons sur la Fig. V.4, pour un système $l_w = 2.0$ et $T = 0.01, 1.0, 2.0$ (de haut en bas),² que le rétrécissement a créé une structure locale ordonnée et que la densité est plus forte que la densité moyenne du canal avant les obstacles. Après le rétrécissement la densité est légèrement plus faible que la densité moyenne. Nous repérons que l'encombrement semble plus important lorsque la température est faible, les particules étant plus agitées à haute température elles ont une vitesse V_y plus grande qui leur permettent de mieux passer l'obstacle. Les particules de l'encombrement paraissent moins ordonnées à plus haute température. L'image Fig. V.4 (b) montre cette fois un cliché de la simulation de paramètre de rétrécissement $l_w = 2$ et avec les trois mêmes vitesses que précédemment. Nous observons cette fois que l'effet de congestion avant le rétrécissement a été augmenté avec la formation d'une structure locale ordonnée et la densité après le rétrécissement à été diminuée par rapport à la première figure. De plus, les particules s'agglomèrent plus tôt dans le canal. L'ordre géométrique avant l'obstacle est plus marqué puisque la taille du bouchon est plus longue. Nous notons que les particules se positionnent en réseau triangulaire (réseau compact disques

2. Nous nous rappelons que toutes les longueurs sont redimensionnées à partir du diamètre σ_1 des particules du fluide.

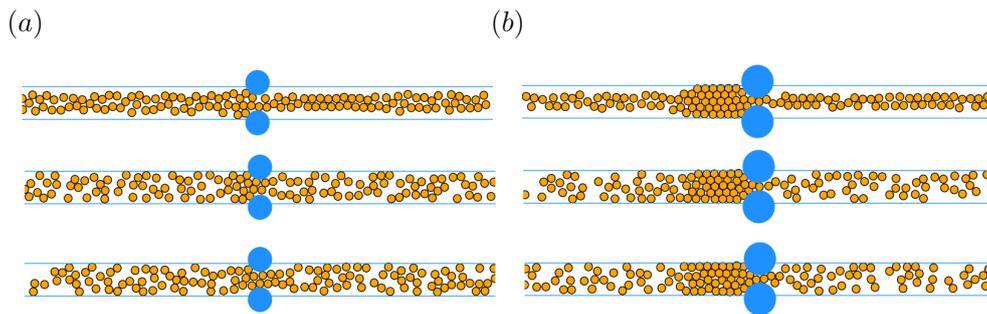


FIGURE V.4 – Configuration du système au temps $t =$ pour $L_x = 60$, $L_y = 4$ et avec des températures $T = 0.01, 1.00, 2.00$ (de haut en bas) pour une ouverture du rétrécissement de (a) $l_w = 2$ et (b) $l_w = 1$.

durs), dans le but de minimiser l’espace qui sépare les particules. Pour une faible température cet ordre est visible mais lorsque la température augmente il diminue, les particules sont toujours positionnées en réseau triangulaire mais avec des défauts. L’ordre dans le bouchon est dû aux particules suivantes qui arrivent avec une certaine vitesse sur l’agglomérat, ce qui accentue la densité de l’encombrement. Les particules se réorganisent donc pour réduire l’espace entre elles, ce qui crée un ordre. Il est cohérent, et les images le démontrent, que modifier l_w va agir sur l’ordre et la densité des particules autour de la zone réduite. Ces deux régions définissent des corrélations spatiales qui dépendent de la température, la largeur du rétrécissement et d’autres paramètres.

Dans le cliché du canal, nous visualisons la vitesse grâce à une échelle de couleur : le vert pour les particules rapides qui va jusqu’au rouge pour les particules de vitesse nulle. Nous analysons cette donnée sur la Fig. V.5. Nous notons que le rétrécissement agit sur la vitesse des particules, pour la première image, Fig. V.5 (a) et $l_w = 2.0$. Les particules passent relativement aisément l’obstacle et aucune particule n’est bloquée dans le canal, nous remarquons juste une légère baisse de la vitesse au niveau du rétrécissement. Quand celui-ci correspond au diamètre d’une particule, nous observons en amont de l’obstacle des particules avec une vitesse fortement diminuée. Les particules peuvent aussi être immobilisées complètement, avec une plus forte probabilité lorsqu’elles sont positionnées entre le mur et les deux grandes particules ; dans ce cas un bouchon apparaît. Les particules arrivent dans l’encombrement donc diminuent en vitesse mais elles vont pousser les autres particules ce qui va permettre à la particule bloquée entre les deux grandes particules de se débloquent. Cette dernière ressort de l’engorgement avec une vitesse plus forte que la vitesse v_0 , environ $v(t) = 1.5v_0$. La particule bloquée dans l’embouchure n’est soumise à aucune force transversale par les grandes particules puisque leur force d’interaction à ce niveau s’annule. En analysant toutes les images de la Fig. V.5, nous observons que pour tous les systèmes, les particules ont une vitesse faible ou nulle lorsqu’elles se situent avant le rétrécissement dans la zone à forte densité et au contraire elles reprennent une vitesse rapide dès qu’elles ont passé l’obstacle. De plus, nous remarquons que les particules positionnées à la fois contre les deux grandes particules et contre le mur ont une vitesse plus faible que les autres, parce qu’elles sont comprimées contre des éléments fixes. La température agit aussi sur la vitesse des particules, pour un mouvement brownien où la température est plus importante, les particules ont des fluctuations de vitesse élevées alors que pour $T = 0.01$ toutes les particules de l’encombrement

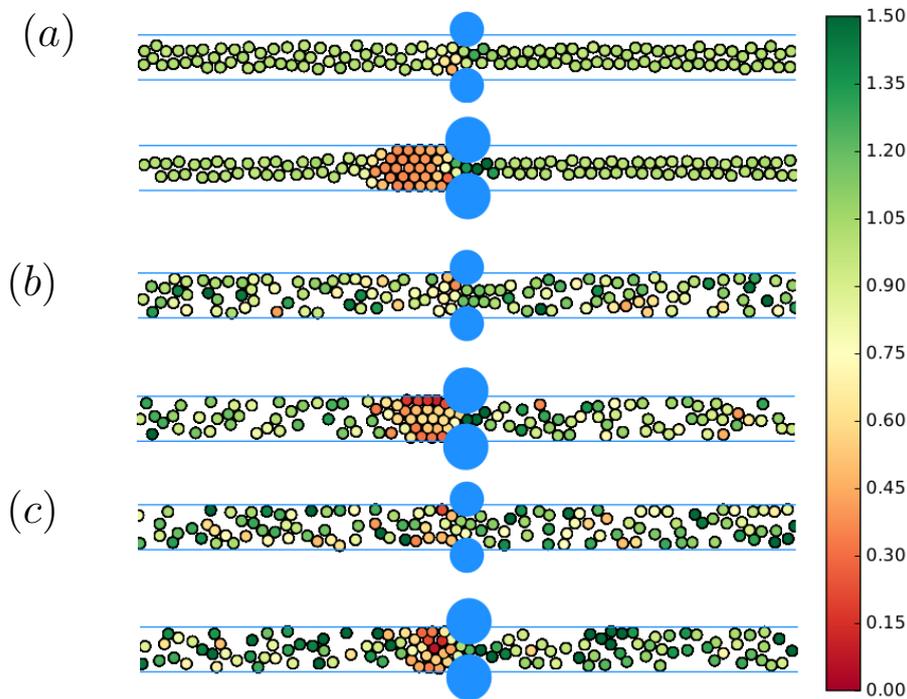


FIGURE V.5 – Configuration du système au temps $t =$ pour $L_x = 60$, $L_y = 4$ et avec différentes températures (a) $T = 0.01$, (b) $T = 1.00$ et (c) $T = 2.00$, pour chaque température, deux configurations pour deux tailles d'ouvertures $l_w = 2, 1$ (en haut et en bas respectivement) sont montrées. La couleur des particules correspond à la vitesse de 0 à 15 suivant l'échelle de couleur.

ont environ la même vitesse. Nous observons plus facilement la différence de vitesse entre l'amont de l'embouchure et l'aval ainsi qu'entre les particules arrivant sur le bouchon au niveau du mur et celles au centre. Pour $T = 1.00$ nous constatons très bien ce phénomène : toute une ligne de particules coincées contre le mur du haut a une vitesse proche de 0.

Sur la Fig. V.6 sont tracés les parcours des particules. Nous repérons facilement l'ordre créé par l'encombrement du fait que des lignes parallèles et situées à égale distance sont observées pour tous les systèmes. Les particules arrivant sur le bouchon avec une certaine vitesse vont appliquer une force sur les particules ralenties qui vont ainsi devoir se resserrer. Pour minimiser l'espace entre les particules elles se rangent en quinconce, nous observons un réseau compact de disques durs. Nous présentons sur la figure deux températures différentes $T = 0.01$ et $T = 1.0$ pour les trois systèmes. En analysant ces différentes trajectoires un résultat ressort : lorsque la température augmente, les particules après le blocage se désordonnent rapidement et peuvent ainsi se positionner proche du mur et des deux obstacles. À faible température, nous observons une traînée qui s'élargit plus lentement où les particules restent au centre du canal.

Étudions maintenant le système avec différents coefficients de dureté des particules. Pré-

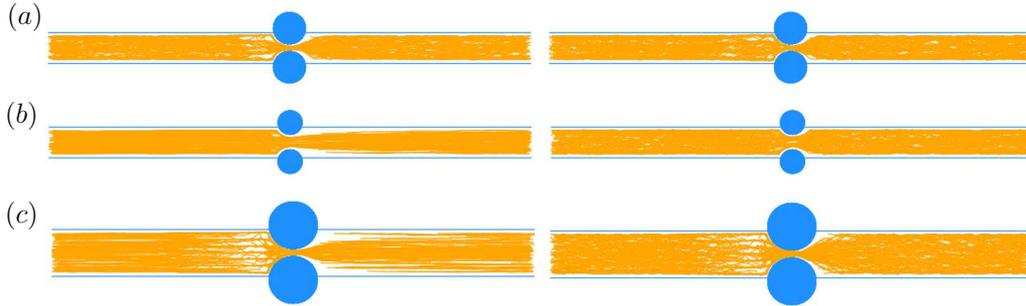


FIGURE V.6 – Configuration au temps $t = 114$ du système $L_x = 60$, $v_0 = 1.0$ pour des particules déformables ($k = 300$), la colonne de gauche correspond à $T = 0.01$ et la colonne de gauche correspond à $T = 1.0$ avec (a) $L_y = 4$ et $l_w = 1$, (b) $L_y = 4$ et $l_w = 2$, (c) $L_y = 6$ et $l_w = 1$.

cédemment nous avons choisi des systèmes où les particules étaient déformables mais pas complètement molles. Sur la Fig. V.7 nous montrons différentes images au même instant de la simulation dans le régime stationnaire, pour 4 valeurs différentes du coefficients k , qui correspondent à des particules raides, $k = 1000$, un modèle avec des particules complètement modulables, $k = 100$, et un modèle intermédiaire de particules déformables, $k = 300$. Il est logique de remarquer que pour des sphères très molles, même pour un largeur $l_w = 0.5$, les particules passent de la même façon que lorsque que $l_w = 0.8$, dans ce cas là, à partir de $l_w < 1$, la largeur n'influence que très peu l'encombrement. Par contre, lorsque qu'on augmente la raideur, nous notons que les particules s'immobilisent davantage et sortent par à-coups de l'embouchure. Un régime intermittent se crée dans cette situation. Nous pouvons observer sur la Fig. V.7 (b) pour $l_w = 0.5$ que les particules sortent du bouchon par paquets de particules. Des défauts apparaissent dans le réseau triangulaire formé par les particules immobilisées qui vont débloquent parfois le système. Pour un système où les particules ont des interactions fortes entre elles, on peut considérer que ce sont des disques raides. Nous observons bien que pour $l_w = 0.5$ le système est complètement immobilisé puisqu'aucune particule ne peut passer. Par contre, pour $l_w = 0.8$ quelques particules arrivent à sortir par paquet. Dans ce cas là, la force exercée par toutes les particules du bouchon sur la particule au centre permet à celle-ci de se débloquent même si elle est solide. De manière analogue à une barrière de potentielle, l'obstacle est normalement impossible à franchir sauf si l'objet atteint une énergie suffisante, donnée par les forces d'interactions. La particule du centre a une énergie libre suffisante pour passer à travers la barrière. Lorsque la température augmente, la force exercée par les particules à l'amont des obstacles est plus forte donc l'énergie requise est plus facilement dépassée ; ce qui explique que nous observons plus de particules qui s'échappent du blocage. Nous pourrions, pour plus de détails, analyser la force appliquée à chaque particule avec une échelle de couleur déjà utilisée pour la vitesse. Dans l'agrégat de particules, celles-ci sont immobiles et l'intensité de la somme des forces appliquées est supérieure à une particule

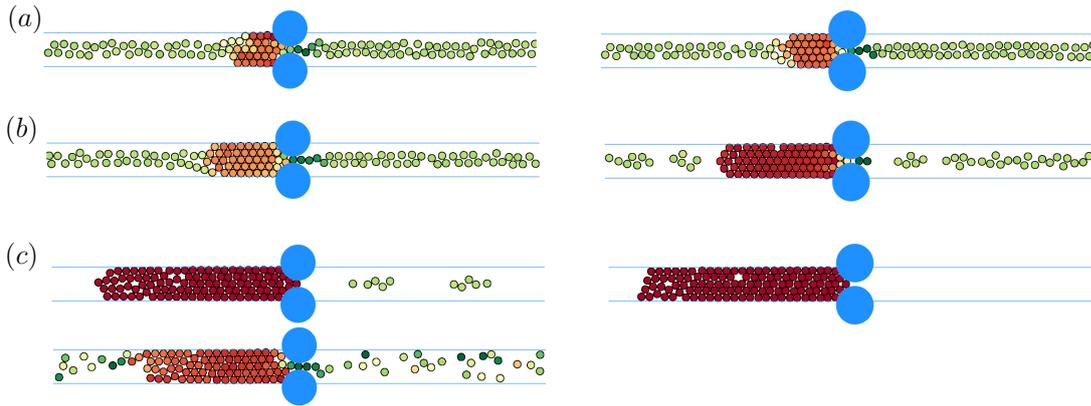


FIGURE V.7 – Configurations du système au temps $t = 114$ pour $L_x = 60$, $L_y = 4$, $v_0 = 1.0$ pour (a) $k = 100$ $T = 0.01$ et $l_w = 0.8$ et $l_w = 0.5$ (de droite à gauche) et (b) $k = 300$ et $T = 1.0$ avec $l_w = 0.8$ et $l_w = 0.5$ (de droite à gauche) enfin (c) $k = 1000$ et en haut $T = 0.01$ avec $l_w = 0.8$ et $l_w = 0.5$ (de droite à gauche) et en bas $T = 2.0$ et $l_w = 0.8$.

sortant du bouchon.

V.3.3 Effet de l’obstacle sur les observables

Nous étudions maintenant l’effet de l’obstacle sur les observables en traçant des courbes de la vitesse moyenne et du flux. La vitesse moyenne, notée $\langle V \rangle$, correspond à la vitesse de toutes les particules moyennée sur le temps de la simulation après un temps de relaxation. Le système atteint un régime stationnaire. Rappelons que nous traitons en priorité un système $L_y = 4$, $L_x = 60$ $k = 300$ et $\rho = 0.5$. Pour commencer, nous analysons la vitesse moyenne des particules en fonction de la température pour différentes largeurs du rétrécissement, Fig. V.8 (a). Nous constatons que lorsque le rétrécissement $l_w > 1.5$ quelle que soit la température, l’écoulement dans le canal est fluide, et pour des températures $T \approx 1$ nous observons que même pour une faible ouverture l_w les particules ont une certaine vitesse, qui correspond à leur vitesse dans l’encombrement due à leur agitations thermiques. Nous observons une diminution de la vitesse brusque pour une ouverture minimale de $l_w = 1.5$, et pour de très faibles températures, nous pouvons définir une température “critique” qu’il nous faudra déterminer pour les différents systèmes. En analysant la courbe Fig. V.8 (c), l’Eq. (V.15) est vérifiée, les courbes de la vitesse se superposent avec celle du flux moyen avec un coefficient $1/(\rho L_y)$.

La Fig. V.8 (b) montre la vitesse moyenne en fonction du rétrécissement l_w pour une constante de raideur $k = k_w = 300$, donc pour des particules assez déformables. Nous remarquons qu’autour de $l_w = 1$ il y a une marche pour tous les systèmes, qui correspond au cas où une seule particule peut passer dans l’embouchure. Pour une faible température, $T = 0.01$, nous observons un plateau à partir de $l_w = 1$, puis une deuxième marche à $l_w = 2$ qui correspond à la possibilité que deux particules passent à la fois; pour de plus fortes températures nous ne repérons pas ce phénomène car dès que $l_w > 1$ le système est fluide et la vitesse est proche de v_0 , il n’y a pas d’encombrement et le passage de deux particules ne joue pas sur la vitesse déjà haute. La vitesse moyenne commence à 0 pour une ouverture très faible puis va augmenter rapidement jusqu’à la vitesse v_0 autour d’un rétrécissement critique qui

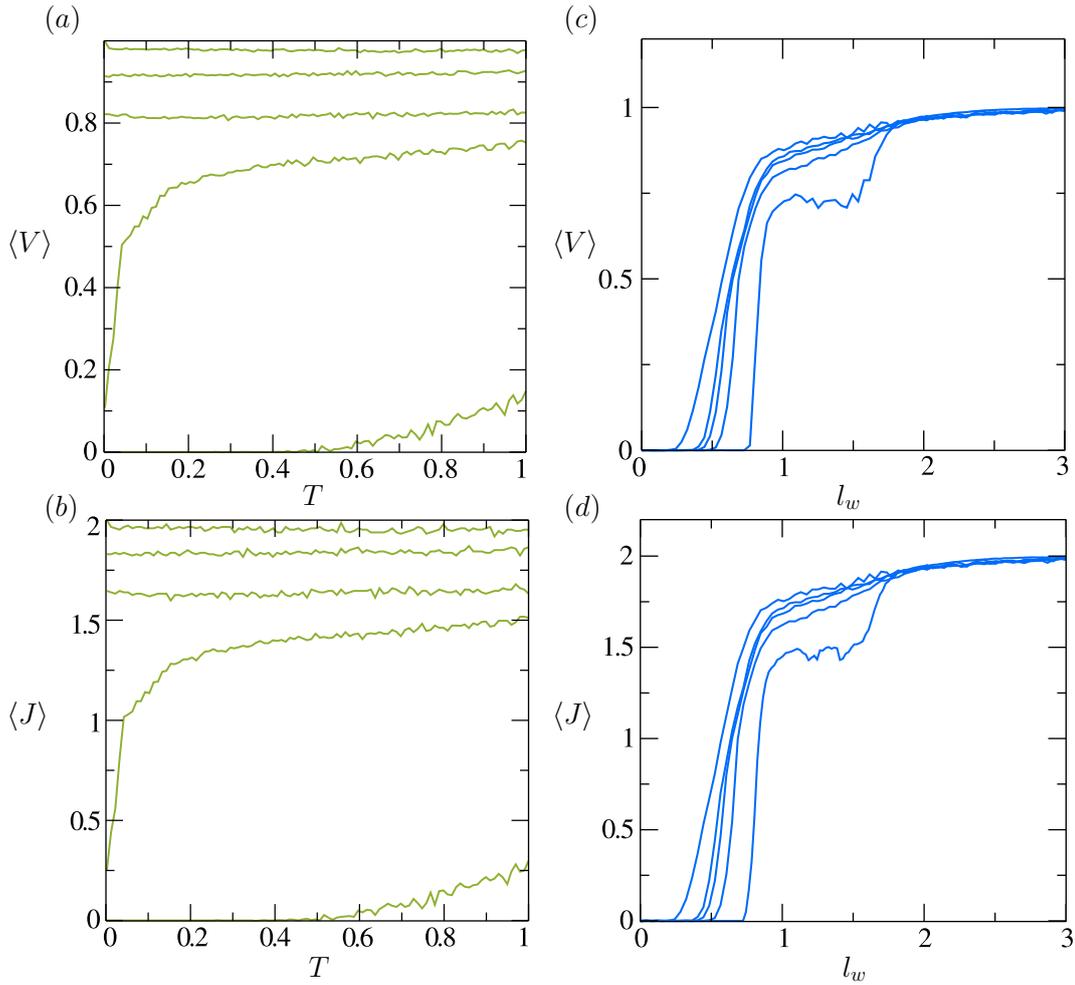


FIGURE V.8 – Système $L_y = 4.0$, $L_x = 60$, $\rho = 0.5$, $k = 300.0$, $\alpha = 1.0$ et $v_0 = 1.0$. (a) La vitesse moyenne et (b) Le flux moyen en fonction de la température pour les largeurs du rétrécissement égales à $l_w = 2, 1.5, 1, 0.8, 0.5$ (de haut en bas). (c) La vitesse moyenne et (d) Le flux moyen en fonction de la largeur entre les deux particules pour différentes températures $T = 0.01, 0.4, 0.8, 1.0, 2.0$ (de droite à gauche).

dépend de la température. Lorsque la température augmente, nous observons que cette valeur critique de l_w va diminuer. Cela est dû à l'augmentation de la température qui va agiter les particules, et la force sur chaque particule va donc être augmentée : les particules ne vont pas rester bloquées dans le rétrécissement. Lorsque la température est très faible, $T = 0.01$, la valeur critique du rétrécissement est égale à 1, la courbe est plus pentue et plus nette en comparaison d'une température $T = 1$, où la valeur à partir de laquelle la vitesse moyenne augmente vaut $l_w = 0.5$. Plus précisément, une transition de colmatage apparaît pour $l_w < 1$, qui dépend de la température et du coefficient de raideur entre les particules du fluide ainsi que les particules qui causent le rétrécissement. La transition, suivant les caractéristiques du modèle, peut être observée pour $l_w < 1$ puisque nous avons étudié sur cette courbe des particules déformables. De plus les particules situées avant l'embouchure exercent une force sur la particule située entre les deux obstacles et aucune force horizontale n'est exercée par les parois sur la particule au centre du système en raison de la géométrie du rétrécissement. Nous

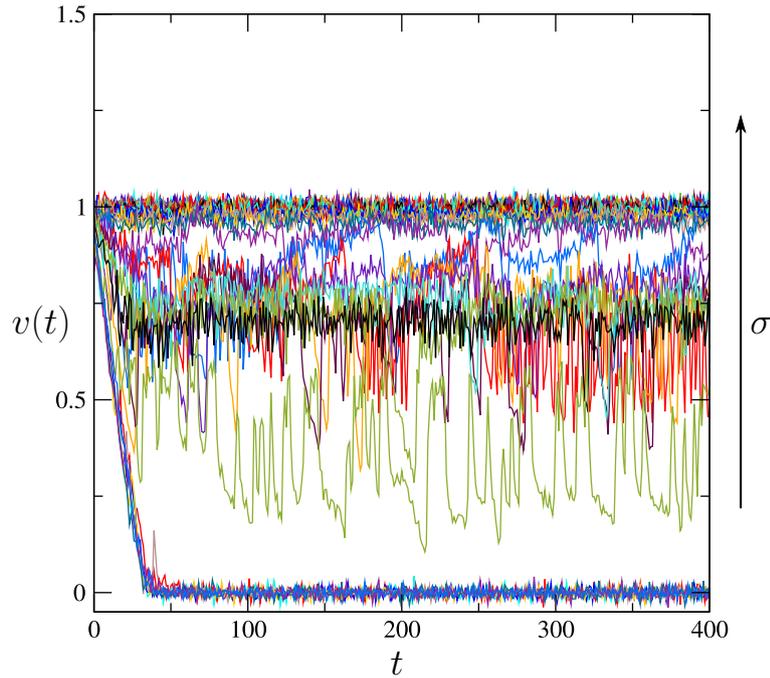


FIGURE V.9 – Vitesse instantanée du système, $v(t)$, en fonction du temps, pour $L_y = 4$, $L_x = 60$, $\rho = 0.5$, $\alpha = 1.0$ et $T = 0.01$. Chaque courbe a une valeur de largeur différente allant de 0 à 4 (de bas en haut).

vérifions aussi L'Eq. (V.15) avec la Fig. V.8 (b) et (d). Nous avons tracé la vitesse moyennée sur toutes les particules et sur un temps long après le temps de relaxation. Montrons maintenant la vitesse moyennée instantanée, notée $v(t)$, redimensionnée par v_0 . Fig. V.9 présente $v(t)$ en fonction du temps pour différentes tailles d'obstacle. Tout d'abord nous notons que le temps transitoire augmente lorsque l_w diminue. Pour un espacement entre les deux particules supérieur à 1, $l_w > 1$, la vitesse moyenne tend vers v_0 et les fluctuations sont plus faibles. Lorsque la largeur du rétrécissement diminue nous observons des fluctuations importantes dans la région où les premiers événements d'encombrement apparaissent. Cela correspond à une séquence d'événements dans laquelle aucune particule n'est capable de traverser l'étranglement, suivi d'un événement où un certain nombre de particules est relâché, c'est un régime intermittent. D'après les différentes courbes, nous remarquons trois régimes différents suivant les paramètres du système ; un régime fluide, suivi d'un régime plus ou moins long transitoire et enfin un régime complètement bloqué.

Nous étudions maintenant des observables que nous avons fixées précédemment, à commencer par la densité. Pour observer un encombrement ainsi qu'un mouvement des particules nous prenons des densités autour de $\rho = 0.5$. La Fig. V.10 montre la vitesse moyenne en fonction de la température et de la taille du rétrécissement pour différentes densités, $\rho = 0.4, 0.5, 0.6$. Nous observons que suivant le rétrécissement, la densité n'influe que très peu sur le système, sauf pour $\rho = 0.4$ où nous observons une baisse de la vitesse à partir de $l_w \approx 1.0$, puis augmente à nouveau à $l_w = 1.5$; ce phénomène n'est pour le moment pas compris. Nous remarquons que pour $\rho = 0.5$ la courbe est plus stable, les plateaux sont nettement définis. Sur la Fig. V.10 (b) nous observons que pour une faible densité la vitesse moyenne est approximativement constante, l'encombrement n'augmente pas assez vite avec l'arrivée

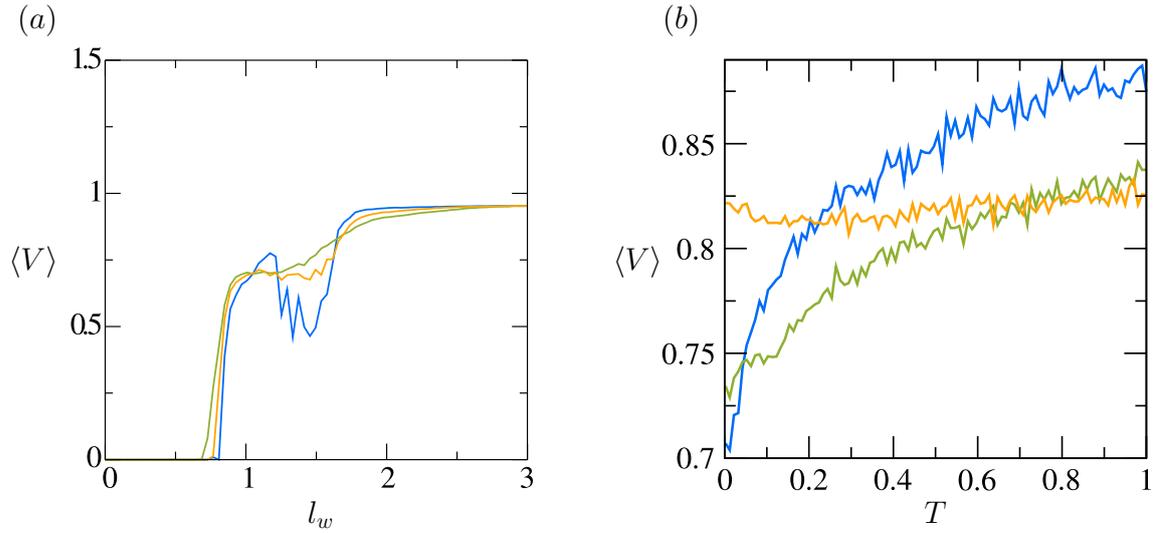


FIGURE V.10 – Système $L_y = 4.0$, $L_x = 60$, $T = 0.01$, $\alpha = 1.0$, $k = 300$ et $v_0 = 1.0$. (a) La vitesse moyenne en fonction de l_w pour $T = 0.01$ et $\rho = 0.4, 0.5, 0.6$ (de droite à gauche). (b) La vitesse moyenne en fonction de T pour $l_w = 2$ et $\rho = 0.4, 0.5, 0.6$ (de haut en bas au centre de la figure).

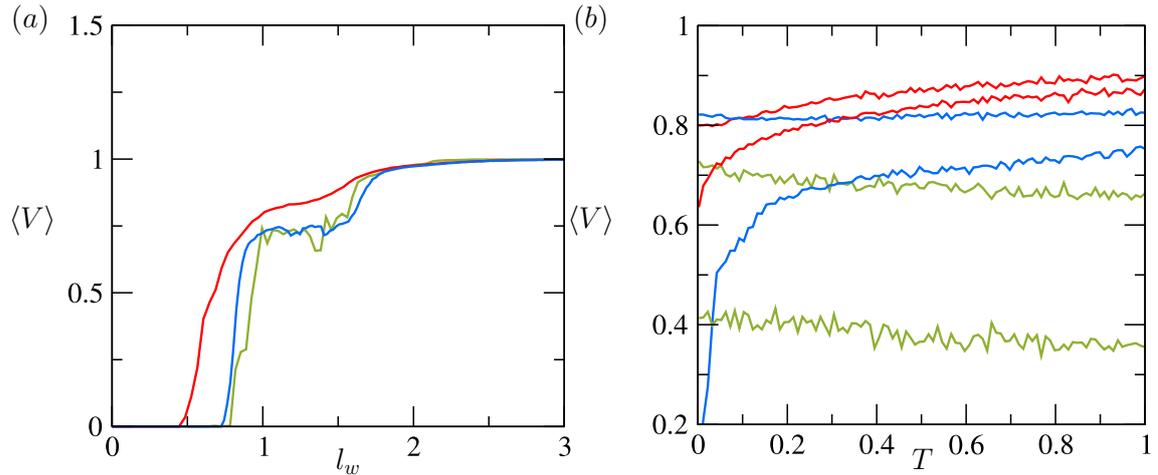


FIGURE V.11 – Système $L_y = 4.0$, $L_x = 60$, $T = 0.01$, $\alpha = 1.0$, $\rho = 0.5$ et $v_0 = 1.0$ pour $k = 100, 300, 1000$. (a) la vitesse moyenne en fonction de l_w pour $T = 0.01$, les cas sont observés de gauche à droite et (b) la vitesse en fonction de la température pour $l_w = 0.8, 0.5$ (de bas en haut) pour $k = 100$ en rouges, $k = 300$ en bleus et $k = 1000$ en verts

des particules par rapport au flux de particules sortantes ; avec la longueur du bouchon la vitesse reste stable quelle que soit la température. Pour $\rho = 0.5$ et $\rho = 0.6$ la vitesse augmente avec la température, de façon plus forte pour $\rho = 0.6$ puisque l'encombrement va croître plus rapidement avec l'arrivée croissante de particules, elles vont pousser sur le bouchon et ainsi débloquent plus vite la particule au centre des deux grandes particules. Par ailleurs, avec une vitesse plus importante, les particules se débloquent plus rapidement puisque les forces qui agissent sur elles sont plus grandes. S'il y a plus de blocage le fluide s'écoule plus vite, mais si la densité est forte il y a plus de particules immobilisées donc la vitesse pour de faibles

températures est plus basse.

À présent nous allons étudier l'effet du coefficient de raideur des particules et du mur avec $k = k_w$, sur le colmatage du système. Nous traçons pour un système avec des particules que l'on peut considérer comme des disques rigides, $k = 1000$, pour des particules déformables, $k = 300$ ainsi que pour des particules molles, $k = 100$, la vitesse moyenne en fonction de la température, Fig. V.11 (a) ainsi qu'en fonction du rétrécissement, Fig. V.11 (b). Nous observons que pour des disques rigides l'encombrement total s'observe pour des valeurs du rétrécissement plus grandes en comparaison avec les deux autres types de particules (même si entre les deux systèmes $k = 300$ et $k = 1000$ les vitesses moyennes sont très proches). Dans ce cas là elles ne sont pas déformables, à partir de $l_w < 1$ logiquement aucune particule ne peut passer, la transition est évidemment déplacée vers le diamètre de la particule, σ_1 . Mais nous avons observé précédemment que des particules étaient éjectées de l'encombrement même lorsque $l_w < 1.0$, cela à cause de l'énergie assez grande sur la particule au centre du rétrécissement pour passer la barrière de potentiel. Pour $k = 100$ et pour un rétrécissement $l_w > 0.5$ la vitesse est non nulle et il n'y a pas de blocage total observé. Si nous analysons maintenant l'effet de la dureté sur la courbe de la vitesse en fonction de la température, Fig. V.11 (b), nous remarquons que pour une grande dureté la température ne joue pas un rôle important dans l'encombrement (nous avons observé précédemment que cela permettait à davantage de particules de passer la barrière de potentiel). Par contre, pour $l_w = 0.5$ pour les deux autres duretés $k = 100$ et $k = 300$, la vitesse moyenne chute brusquement pour une température très faible $t < 0.2$. Nous remarquons donc un effet de la température sur la dureté.

La Fig. V.12 présente $\langle V \rangle$ en fonction de l_w pour différentes vitesses v_0 , la forme des trois courbes est relativement la même, à un facteur multiplicatif près. Ce facteur correspond à la valeur de v_0 . Nous pouvons en déduire que la vitesse initiale n'influe pas sur le blocage.

V.3.4 Diagramme de phase

Nous avons observé trois régimes dans ce modèle, un régime fluide, un régime bloqué et un régime intermittent. Ce dernier correspond au cas où les particules sont immobiles dans le bouchon, mais quelques particules, grâce à la pression et aux défauts de l'encombrement, peuvent sortir. Nous traçons un diagramme de phase *Température-Largeur du rétrécissement* pour étudier ces régimes suivant ces paramètres, Fig. V.13. Ce diagramme de phase est représenté en deux dimensions avec une échelle de couleur et de profondeur pour la vitesse. Les zones vertes élevées suivant z représentent le régime bloqué et les zones rouges à $z = 0$ correspondent au régime fluide. Nous remarquons que pour de faibles températures et une faible largeur le système est complètement immobile, c'est ce que nous avons repéré précédemment avec les courbes. Nous observons une transition de phase à environ $l_w = 0.7$, passant d'une phase congestionnée à une phase intermittente, puis vers $l_w = 0.9$ d'une phase intermittente à une phase fluide. Nous remarquons cela pour toutes les températures, cependant, pour une température très basse, les transitions se font pour de plus fortes valeurs de rétrécissement et la région intermittente semble durer moins longtemps. Il serait intéressant d'observer ce diagramme de phase pour différentes température, taille de système ou encore constante de raideur.

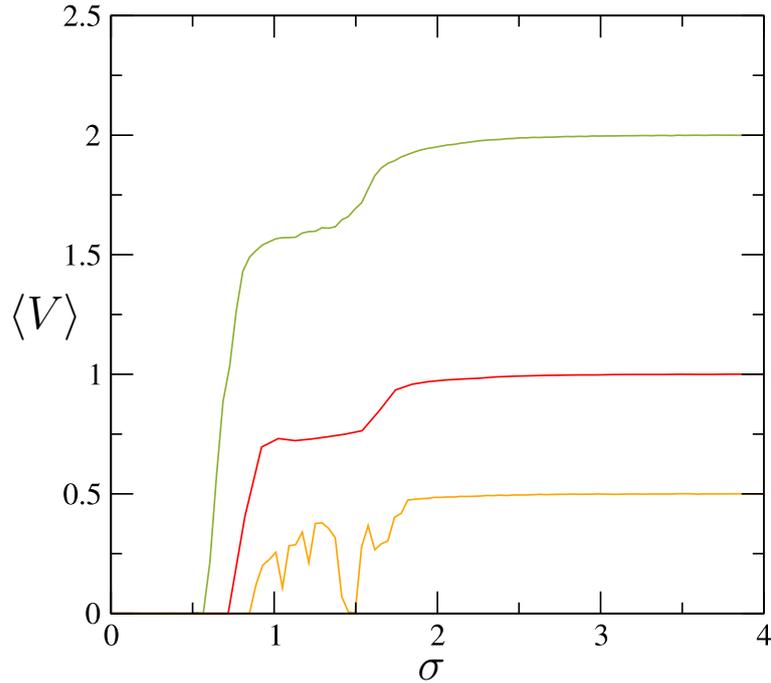


FIGURE V.12 – Vitesse moyenne pour un système de vitesse initiale $v_0 = 2, 1, 0.5$ (de haut en bas) avec $L_y = 4.0$, $\alpha = 1$, $L_x = 60$, $T = 0.01$ et $\rho = 0.5$.

V.4 Mise en relation de l'approche microscopique avec l'approche stochastique des phénomènes de blocage

Nous pouvons mettre en relation le phénomène de blocage que nous venons de voir avec la situation où la capacité du canal est limitée. Pour cela nous allons prendre un canal très mince pour que seulement deux particules puissent se croiser. Dans le cas où la largeur du canal et du rétrécissement est faible, deux particules peuvent se coincer entre elles. Dans les premières parties de la thèse nous avons étudié des phénomènes de blocage induits par des particules qui arrivent de manière trop rapprochée dans le canal, l'une des principales applications est la filtration où il a été remarqué que lorsque deux particules arrivent avec un intervalle de temps suffisamment faible sur la maille alors celles-ci se bloquent. Dans notre modèle microscopique nous pouvons analyser cela en faisant entrer seulement deux particules avec un temps les séparants Δt ; si les deux particules arrivent sur le rétrécissement de manière trop rapprochée alors elles se coincent entre elle. Il faut bien entendu que le rétrécissement soit plus petit que le diamètre de deux particules, Fig. V.14. Nous étudions dans ce cas l'intervalle de temps d'entrée entre les deux particules, Δt . La question est : peut-on définir un temps critique à partir duquel les particules ont une plus forte probabilité de se bloquer ? Pour répondre à cette question nous traçons la vitesse en fonction de l'intervalle. La Fig. V.15 montre la vitesse des deux particules en fonction de l'intervalle de temps d'entrée Δt , nous remarquons qu'à partir d'un temps la vitesse moyenne correspond à la vitesse initiale des particules, v_0 , dans ce cas l'obstacle n'a aucun effet sur les particules. Cependant lorsque Δt diminue, des blocages entre les deux particules apparaissent et la vitesse moyenne est réduite. Cette forme de courbe montre qu'on peut potentiellement définir un temps critique à partir duquel les particules n'influent pas l'une sur l'autre, et aucun embouteillage n'apparaît. Ce

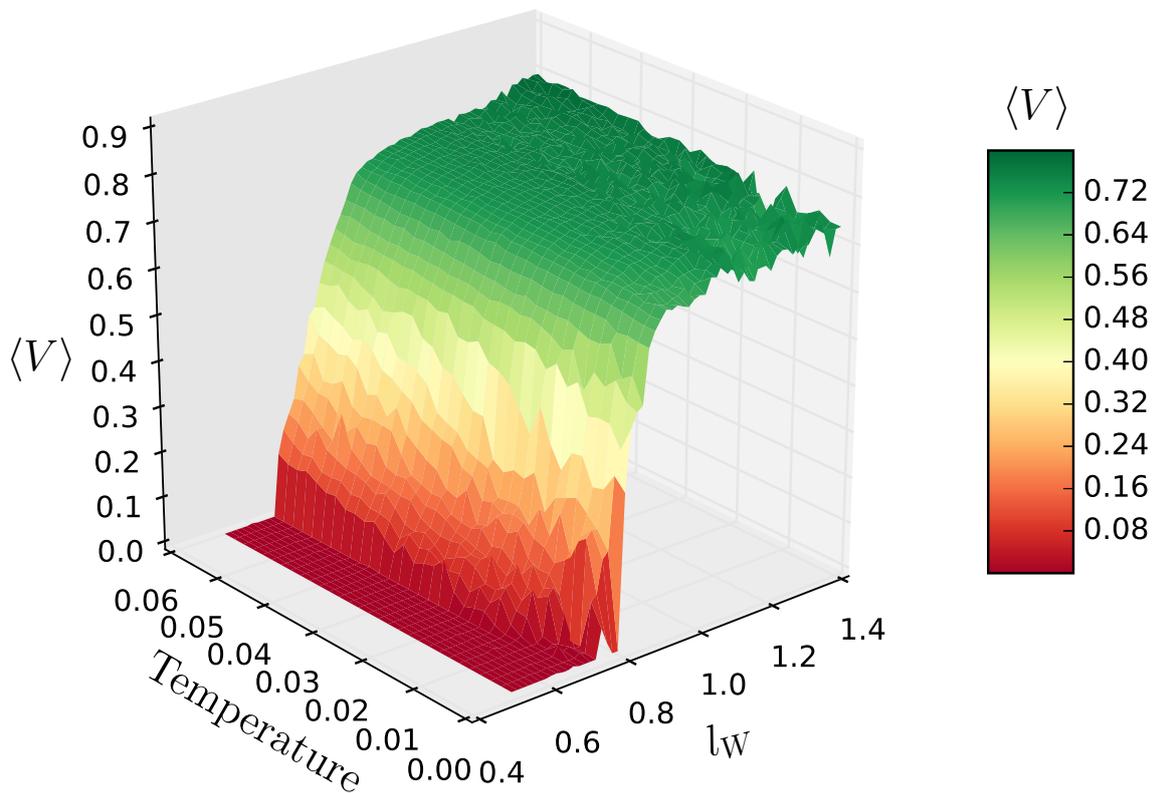


FIGURE V.13 – Diagramme de phase pour un modèle $L_y = 4$, $L_x = 60$, $\rho = 0.5$, $\alpha = 1$ et $v_0 = 1.0$ avec la vitesse selon O_z , la température selon O_y et l_w selon O_x .

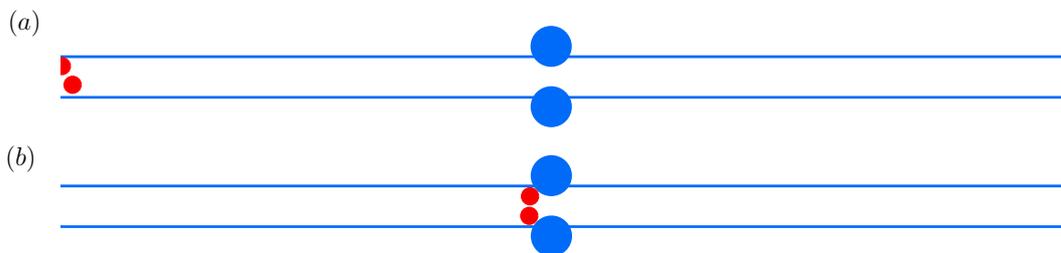


FIGURE V.14 – Canal de largeur $L_y = 2$, de longueur $L_x = 60$, un rétrécissement $l_w = 1$ et une force de dérive $D_g = 5$. Deux particules entrent avec un intervalle de temps entre les deux de $\Delta t = 0.01$. (a) Le système au début de la simulation. (b) Le système lorsque les particules sont arrivées sur l’obstacle et se retrouvent bloquées.

type de système est analogue avec nos premiers modèles stochastiques dans le cas $N = 2$. Les paramètres internes des particules et du canal comme la température, la force de dérive, etc. jouent un rôle non négligeable sur le blocage. À forte température les particules s’agitent et se débloquent beaucoup plus rapidement, il est possible aussi qu’elles ne se bloquent pas du tout. Avec une vitesse et une force de dérive plus grande, les particules vont aussi être plus indépendantes et vont moins interagir au niveau de l’obstacle.

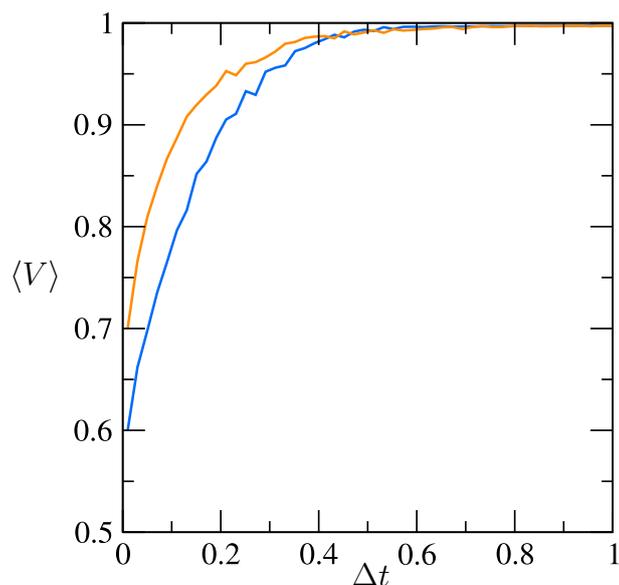


FIGURE V.15 – *Vitesse globale moyenne en fonction du temps d'entrée entre les deux particules pour deux températures $T = 0.01, 0.001$ (de gauche à droite).*

V.5 Conclusion

Ce travail est encore en cours mais nous avons pu repérer plusieurs régimes qui dépendent des différents paramètres, notamment de la température et de la taille du rétrécissement. Nous avons tracé un diagramme de phase de ce modèle pour connaître les limites de ces régimes. Nous observons trois régimes, un premier régime fluide pour une forte température et à faible rétrécissement, un deuxième régime encombré à faible température et à fort rétrécissement et enfin, celui qui va nous intéresser par la suite, un régime intermittent où le canal se bloque tout en laissant passer des particules par moment. Nous avons aussi mis en relation ce modèle avec le modèle stochastique de blocage induit par la capacité limitée du canal. Grâce aux simulations nous avons montré que notre premier modèle est cohérent avec ce type de blocage à rétrécissement. Ce travail demande à être encore exploré mais permet de comprendre le colmatage de particules en biologie ou même d'animaux dans une voie rétrécie.

Conclusion générale

Les situations de blocage représentent un phénomène important intervenant dans l'étude des trafics et écoulements de flux particuliers. Dans ce manuscrit nous avons analysé à travers deux modèles des situations très variées. Dans les trois premières parties nous avons détaillé et généralisé un modèle de blocage d'un flux particulière dans un canal. L'intérêt majeur de ce modèle est de décrire des phénomènes de blocage induits par les caractéristiques limitantes du canal. Ainsi l'arrêt du système peut survenir à faible densité, ces phénomènes ont été très peu étudié en comparaison du cas où la forte densité particulière domine le processus. Dans le modèle qui nous intéresse, introduit récemment dans [65], le blocage est provoqué par un nombre trop élevé de particules présentes dans le canal. Le modèle le plus simple comporte un canal confiné dans lequel des particules sont injectées avec une distribution de Poisson et traversent le canal avec un temps constant. Au cours de ce manuscrit ont été présentées différentes généralisations et résultats obtenus. Pour chaque extension du modèle, le but a été d'avoir accès à toutes les observables, la probabilité de survie, le temps moyen de blocage, le flux des particules sortantes ainsi que la distribution et le nombre moyen des particules sortantes avant le blocage.

Le premier chapitre porte sur une généralisation du modèle de référence, lorsque le seuil de particules déclenchant le blocage, noté N , est supérieur à deux pour une distribution d'entrée quelconque [76]. Le cas d'une distribution homogène et inhomogène est aussi étudiée. La formule exacte de la fonction génératrice du système, qui donne accès à toutes les observables, a été obtenue pour toute distribution de probabilité dans le cas $N = 2$, et pour une distribution d'entrée poissonnienne pour $N = 3$ [66]. L'extension à un plus grand seuil s'est relevée particulièrement difficile, les résultats pour $N > 3$ n'étant plus solubles analytiquement. Cependant, une approximation sur le temps moyen de blocage est obtenue pour un faible flux d'entrée. Le temps moyen de blocage se comporte ainsi comme $1/\lambda^N$ pour $\lambda \ll 1$, avec λ l'intensité de la distribution de Poisson, ce qui signifie que l'augmentation de N accroît très fortement le temps de survie du canal. Ce comportement permet de montrer qu'en augmentant la capacité du canal d'une unité le temps moyen de blocage est multiplié de $1/\lambda$ (lorsque $\lambda \ll 1$).

Une des situations physiques que nous avons présentée en introduction était la filtration par un tamis, par exemple l'expérience de Roussel [18]. C'est donc naturellement que nous avons développé dans un deuxième chapitre une approche multicanaux des phénomènes de blocage. Nous nous sommes intéressés à un système à plusieurs canaux où chaque canal possède les mêmes propriétés que le canal de référence. Nous avons étudié trois manières différentes de redistribuer le flux lorsqu'un canal se ferme. Dans un premier temps, nous avons considéré un flux par canal constant, donc lorsqu'un canal se bloque son flux est supprimé, et le flux total est réduit. Dans un second temps, nous avons analysé une redistribution partagée équitablement entre tous les canaux encore ouverts. Dans une dernière partie, nous avons étudié une redistribution du flux sur les plus proches voisins. Dans les deux dernières situations nous avons observé un phénomène intéressant : une cascade accélérée de blocages [90]; plus il y a de canaux bloqués, plus les canaux suivants vont se bloquer rapidement.

Pour quantifier ce phénomène nous avons calculé analytiquement l'intervalle de temps ainsi que ses différences successives entre deux blocages consécutifs. Avec une répartition locale du flux nous remarquons que l'effet de cascade accélérée est plus élevé que dans le cas où la répartition est égalitaire entre tous les canaux.

Dans le cas d'un seul canal et des canaux multiples et simple, nous avons également considéré des situations où le blocage est temporaire; après un temps fini et supposé constant, les particules bloquées s'éjectent du canal. Cela introduit une nouvelle échelle de temps : la durée de vie d'un blocage [113]. Le flux sortant pour un seul enchaînement d'entrée de particule va être discontinu puisque lorsque qu'une particule sort le flux est égal à un et lorsque le canal se débloque il est égal à N , entre temps le flux sortant est zéro, cela même à temps long. Cependant lorsque cette quantité observée est moyennée, une valeur constante apparaît; de la même manière la probabilité que le canal soit ouvert va tendre vers une valeur stationnaire. Notre intérêt se porte particulièrement sur ces observables stationnaires. La dynamique pour un modèle est soluble pour un système à un seul canal à $N = 1$ et $N = 2$. Pour un nombre de canaux plus grand que un ($N > 1$) les modèles ne sont plus solubles analytiquement mais nous obtenons des résultats numériques précis, ce qui a permis d'obtenir des résultats qualitatifs intéressants. En utilisant la théorie des files d'attente, nous avons pu obtenir de bonnes approximations pour nos modèles.

La dernière partie de cette thèse a concerné une approche microscopique du phénomène de blocage des flux particulières à partir d'un modèle bidimensionnel de particules actives soumises à une dynamique brownienne dans un canal possédant un rétrécissement. Les particules avancent selon une force de dérive et un mouvement brownien, les forces qui s'ajoutent sont les forces d'interactions entre les particules ainsi qu'entre les parois du canal et les particules. La première difficulté de ce projet a été de réduire le nombre de paramètres du modèle. Pour cela nous avons repéré des régions où un comportement universel apparaît, par exemple pour une forte température le blocage disparaît, et la largeur du canal n'influe pas grandement sur le colmatage. La seconde idée est d'analyser si le blocage s'apparente à une transition de phase; ce projet est en cours.

L'intérêt d'avoir eu deux approches, une phénoménologique (dans un premier temps) et une microscopique (dans la dernière partie de ma thèse) est de pouvoir analyser si la première approche permet de reproduire et de comprendre simplement le phénomène. Le comportement dynamique à faible flux s'accorde-t-il avec l'approche phénoménologique que nous avons développée? Nous avons observé rapidement, surtout à faible température, que les intervalles d'entrées entre les particules dans la zone proche de l'obstacle agissent sur le colmatage : les particules semblent devoir être suffisamment espacées pour pouvoir passer sans blocage. Des études expérimentales [21] ont mis en évidence que la présence d'un obstacle en amont de la sortie d'un flux diminuait fortement l'apparition de blocage. Cela permet ainsi de fluidifier le flux et d'espacer l'entrée des particules dans la zone de blocage. L'encombrement est une situation universelle qui a été beaucoup étudiée mais il reste un assez grand travail à faire notamment au niveau microscopique, qui est un outil puissant pour analyser ces phénomènes. Mais l'idée de cette approche n'est pas de multiplier les paramètres pour reproduire le phénomène [60, 61] mais de l'analyser avec des outils de physique statistique.

Liste de publications

1. C. Barré, J. Talbot, “Models of blockage-induced selectivity”, [JSTAT](#) **2017**, 043406 (2017).
2. C. Barré, J. Talbot, “Diminishing blocking interval in particle-conveying channel bundles”, [EPJ B](#) **89**, 208 (2016).
3. C. Barré, J. Talbot, P. Viot, L. Angelani et A. Gabrielli, “Generalized model of blockage in particulate flow limited by channel carrying capacity”, [Phys. Rev. E](#) **92**, 032141 (2015).
4. C. Barré and J. Talbot, Cascading blockages in channel bundles, [Phys. Rev. E](#) **92**, 0521541 (2015).
5. C. Barré and J. Talbot, Stochastic model of channel blocking with an inhomogeneous flux of entering particles”, [EPL](#) **110**, 20005 (2015).
6. C. Barré, J. Talbot et P. Viot, “Stochastic model of single-file flow with reversible blockage”, [EPL](#) **104**, 20005 (2013).

Annexes

A Distribution des particules sortant avant le blocage

On s'intéresse à une autre quantité, le nombre et la distribution des particules sortie du canal avec le blocage. On note la probabilité que m particules arrivent à sortir avant le blocage, $h(m)$, et le nombre moyen $\langle m \rangle$. Si lors d'un blocage m particules sont sorties alors $n = m + 2$ particules sont entrées dans le canal. Il faut qu'au moins deux particules soient entrées pour qu'il y ait un blocage. La distribution $h(m)$, correspond à la probabilité que m particules soient entrées avec un intervalle supérieur à τ , et deux particules entrées avec un intervalle inférieur à τ . Si on note Δt_i le temps entre l'entrée de la particule i^{th} et la particule $(i + 1)^{th}$, alors,

$$h(m) = \left(\prod_{i=1}^m Pr(\Delta t_i > \tau) \right) Pr(\Delta r_{m+1} < \tau). \quad (16)$$

Pour avoir $\Delta t_i > \tau$ il faut qu'aucune particule ne soit entrée dans l'intervalle τ , soit la probabilité $Pr(\Delta t_i > \tau) = e^{-\lambda\tau}$. Et la probabilité que $\Delta t_i < \tau$ peut simplement s'écrire $1 - e^{-\lambda\tau}$. Finalement :

$$h(m) = e^{-m\lambda\tau}(1 - e^{-\lambda\tau}). \quad (17)$$

peu de particules sortent avant le blocage, le plus probable étant la situation où aucune particule ne sorte, cela pour toutes les intensités λ .

B Théorie des files d'attente : modèle $M/D/1/N$

Nous présentons à présent un modèle très proche du précédent mais avec une distribution de service déterministe, c'est-à-dire avec un temps de service constant. Cette constante sera notée D (de valeur moyenne D). Ce modèle est plus complexe puisqu'il est non-Markovien, mais les solutions stationnaires sont connues. Le premier modèle étudié avec une distribution de service déterministe est $M/D/s$, qui correspond à un modèle à s serveurs. Pollaczek (en 1930) [96] et Crommelin (en 1932,1934) [97] ont complété les travaux d'Erlang avec ce modèle et ont démontré la puissance des techniques mathématiques qui pouvaient être appliquées [126]. Après avoir résolu une partie du modèle $M/D/s$, Pollaczek s'intéressa à un modèle plus général : $M/G/s$, ce modèle correspond à un temps de service quelconque. En 1930, il obtient une équation des probabilités stationnaires dans le cas d'un serveur, et deux ans plus tard Khinchin à réécrit la formule avec des termes probabilistes. Cette formule fût appelée formule de Pollaczek-Khinchin (P-K). C'est un résultat très important pour la théorie des files d'attente. La solution $M/G/1$ est donnée par :

$$\tilde{P}(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\tilde{B}(\lambda - \lambda z)}{\tilde{B}(\lambda - \lambda z) - z}, \quad (18)$$

avec $\tilde{B}(s)$ la transformée de Laplace de la distribution de service. Les solutions du modèle $M/M/1$, Eq. (IV.1.2) peuvent être retrouvées grâce à cette formule. Cette équation étant

complexe des approximations ont été obtenues. Un des résultats les plus pertinents est l'approximation [127, 128]³ :

$$P(M/G/s) \approx P(M/M/s). \quad (19)$$

Tijms et al. [129] ont proposé une approximation améliorée. Cependant, pour le cas $M/D/s$ cette formule approchée est suffisante pour obtenir des résultats cohérents, pour d'autres distributions cette approximation n'est pas utilisable directement [130].

Nous utiliserons par la suite le fait que les probabilités stationnaires sont proches, cela même dans le cas où il peut y avoir K clients et un serveur : $P(M/D/1/N) \approx P(M/M/1/N)$. Mais une approximation plus précise a été faite plus tard, en effet pour une distribution d'Erlang, lorsque $k \rightarrow \infty$ alors celle-ci peut être considérée comme déterministe. Grâce à cela nous pouvons insérer $\tilde{B}(s) \rightarrow e^{-s/\mu}$ dans l'Eq. (18) pour retrouver les valeurs stationnaires de $M/D/1$ [93]. Bien plus tard, l'état stationnaire exacte et l'évolution dynamique du modèle $M/D/1$ et $M/D/1/K$ ont été obtenus par Garcia et Brun en 2002 [98] [99].

C Probabilité que le canal soit fermé, cas d'une durée de vie finie de blocage pour $N = 1$

Pour compléter cette étude, nous allons calculer l'expression de la probabilité que le canal soit fermé à partir des probabilités partielles $q_f(n, t)$, représentant la probabilité que n particules soient entrées dans le canal à l'instant t et que le canal soit bloqué (temporairement).

Pour $n = 1$, cela correspond au fait que la particule soit entrée entre l'instant $t - \tau_b$ et t . Notons que $q(0, t) = 0$

$$q_B(1, t) = \int dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} \int_0^{\tau_b} dt' \delta(t - t_1 - t'), \quad (20)$$

ce qui donne dans l'espace de Laplace

$$\begin{aligned} \tilde{q}_B(1, u) &= \int_0^{\tau_b} dt' \lambda e^{-ut'} \int_0^{\infty} dt' e^{-(\lambda+u)t'} \\ &= \frac{1 - e^{-u\tau_b}}{u(\lambda + u)}. \end{aligned} \quad (21)$$

De manière analogue, pour $q_f(n, t)$, on a :

$$q_B(1, t) = \int dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} \int dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} \dots \int dt_n \lambda e^{-\lambda t_n} \int_0^{\tau_b} dt' \delta(t - t_1 - (n-1)\tau_b - t'), \quad (22)$$

ce qui donne dans l'espace de Laplace

$$\tilde{q}_B(n, u) = \frac{1 - e^{-u\tau_b}}{u(\lambda + u)} \left[\frac{\lambda e^{-u\tau_b}}{\lambda + u} \right]^{n-1}. \quad (23)$$

En sommant les probabilités partielles, nous obtenons la probabilité que le canal soit fermé dans l'espace de Laplace

3. Cette approximation provient du théorème de Palm-Khinchin qui explicite qu'un nombre large n'est pas nécessairement Poissonien pour avoir les propriétés Poissoniennes. Les clients ont les propriétés de Poisson en ayant pourtant une distribution de services quelconques.

$$\tilde{P}_B(u) = \frac{\lambda(1 - e^{-u\tau_b})}{u} \frac{1}{\lambda + u - \lambda e^{-u\tau_b}}. \quad (24)$$

On vérifie aisément que

$$\tilde{P}_B(u) + \tilde{P}_A(u) = \frac{1}{u}, \quad (25)$$

ce qui redonne la conservation de la probabilité dans l'espace réel

$$P_B(t) + P_A(t) = 1. \quad (26)$$

Bibliographie

- [1] N. Champagne, R. Vasseur, A. Montourcy, and D. Bartolo, “Traffic Jams and Intermittent Flows in Microfluidic Networks,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 044502 (2010).
- [2] D. Chowdhury, A. Schadschneider, and K. Nishinari, “Physics of transport and traffic phenomena in biology : from molecular motors and cells to organisms,” *Physics of Life reviews* **2**, 318–352 (2005).
- [3] D. Chowdhury, A. Schadschneider, and K. Nishinari, “Traffic phenomena in biology : from molecular motors to organisms,” in *Traffic and Granular Flow'05* (2007) pp. 223–238.
- [4] F. Gao, Q. Liu, and H. Zhan, “Research of sip dos defense mechanism based on queue theory,” in *Advances in Computer Science, Environment, Ecoinformatics, and Education*, Vol. 214 (2011).
- [5] S. Jin and D. Yeung, “A covariance analysis model for ddos attack detection,” in *Communications, 2004 IEEE International Conference on*, Vol. 4 (2004) pp. 1882–1886.
- [6] S. Limkar and R. Jha, “An effective defence mechanism for detection of ddos attack on application layer based on hidden markov model,” in *Proceedings of the International Conference on Information Systems Design and Intelligent Applications 2012*, Vol. 132 (2012) pp. 943–950.
- [7] Y. Xie and S. zheng Yu, “A large-scale hidden semi-markov model for anomaly detection on user browsing behaviors,” *Networking, IEEE/ACM Transactions on* **17**, 54–65 (2009).
- [8] R. Kapon, A. Topchik, D. Mukamel, and Z. Reich, “A possible mechanism for self-coordination of bidirectional traffic across nuclear pores,” *Phys. Biol.* **5**, 036001 (2008).
- [9] Y. J. Kim, H. K. Hong, H. S. Lee, S. H. Moh, J. C. Park, S. H. Jo, and H. Choe, “Papaverine, a vasodilator, blocks the pore of the hERG channel at submicromolar concentration,” *J. Cardiovasc. Pharmacol.* **52**, 485–493 (2008).
- [10] M. J. Twiner, G. J. Doucette, A. Rasky, X.-P. Huang, B. L. Roth, and M. C. Sanguinetti, “Marine Algal Toxin Azaspiracid Is an Open-State Blocker of hERG Potassium Channels,” *Chemical Research in Toxicology* **25**, 1975–1984 (2012).
- [11] A. Finkelstein and O. Andersen, “The gramicidin a channel : A review of its permeability characteristics with special reference to the single-file aspect of transport,” *J. Membr. Biol* **59**, 155–171 (1981).
- [12] M. Pirbazari, V. Ravindran, B. N. Badriyha, and S.-H. Kim, “Hybrid membrane filtration process for leachate treatment,” *Water Res.* **30**, 2691–2706 (1996).
- [13] M. Edwards and M. M. Benjamin, “Adsorptive filtration using coated sand : A new approach for treatment of metal-bearing wastes,” *J. Water Pollut. Control Fed.* **61**, 1523–1533 (1989).

- [14] A. Jones, W. Dennison, and N. Preston, “Integrated treatment of shrimp effluent by sedimentation, oyster filtration and macroalgal absorption : a laboratory scale study,” *Aquaculture* **193**, 155–178 (2001).
- [15] G. H. Goldsztein and J. C. Santamarina, “Suspension extraction through an opening before clogging,” *Appl. Phys. Lett.* **85**, 4535–4537 (2004).
- [16] N. Roussel and A. Gram, “Physical phenomena involved in flows of fresh cementitious materials,” (2014) pp. 1–24.
- [17] G. Veylon, G. Stoltz, P. Mériaux, Y.-H. Faure, and N. Touze-Foltz, “Performance of geotextile filters after 18 years service in drainage trenches,” *Geotext. Geomembr.* **44**, 515–533 (2016).
- [18] N. Roussel, T. L. H. Nguyen, and P. Coussot, “General probabilistic approach to the filtration process,” *Phys. Rev. Lett.* **98**, 114502 (2007).
- [19] D. Helbing, P. Molnar, and F. Schweitzer, “Computer Simulations of Pedestrian Dynamics and Trail Formation,” *Evolution of Natural Structures*, 9805074 (1998).
- [20] A. Garcimartín, J. M. Pastor, L. M. Ferrer, J. J. Ramos, C. Martín-Gómez, and I. Zuriguel, “Flow and clogging of a sheep herd passing through a bottleneck,” *Phys. Rev. E* **91**, 022808 (2015).
- [21] I. Zuriguel, J. Olivares, J. M. Pastor, C. Martín-Gómez, L. M. Ferrer, J. J. Ramos, and A. Garcimartín, “Effect of obstacle position in the flow of sheep through a narrow door,” *Phys. Rev. E* **94**, 032302 (2016).
- [22] K. To, P.-Y. Lai, and H. K. Pak, “Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper,” *Phys. Rev. Lett.* **86**, 71–74 (2001).
- [23] I. Zuriguel, A. Janda, A. Garcimartín, C. Lozano, R. Arévalo, and D. Maza, “Silo clogging reduction by the presence of an obstacle,” *Phys. Rev. Lett.* (2011), 10.1103/PhysRevLett.107.278001.
- [24] Y. Morita and J. L. Tilly, “Oocyte apoptosis : Like sand through an hourglass,” *Dev. Biol.* **213**, 1–17 (1999).
- [25] C. T. MacDonald, J. H. Gibbs, and A. C. Pipkin, “Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates,” *Biopolymers* **6**, 1–25 (1968).
- [26] J. Cividini, *Multilane transport systems : application to pedestrian traffic*, *Theses*, Université Paris Sud - Paris XI (2014).
- [27] S. A. Janowsky and J. L. Lebowitz, “Exact results for the asymmetric simple exclusion process with a blockage,” *Journal of Statistical Physics* **77**, 35–51 (1994).
- [28] M. Wölki, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg, “Asymmetric exclusion processes with shuffled dynamics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39**, 33 (2005).
- [29] A. Keßel, H. Klüpfel, J. Wahle, and M. Schreckenberg, “Microscopic simulation of pedestrian crowd motion,” *Pedestrian and evacuation dynamics*, 193–200 (2002).

- [30] H. Klüpfel, “The simulation of crowds at very large events,” *Traffic and Granular Flow’05* , 341–346 (2007).
- [31] C. Appert-Rolland, J. Cividini, and H. Hilhorst, “Frozen shuffle update for an asymmetric exclusion process on a ring,” *J. Stat. Mech: Theory Exp.* , 07009 (2011).
- [32] B. Derrida, “An exactly soluble non-equilibrium system : the asymmetric simple exclusion process,” *Phys. Rep.* **301**, 65–63 (1998).
- [33] J. Krug, “Boundary-induced phase transitions in driven diffusive systems,” *Physical review letters* **67**, 1882 (1991).
- [34] B. Derrida, E. Domany, and D. Mukamel, “An exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries,” *J. Stat. Phys.* **69**, 667–687 (1992).
- [35] M. Moussaïd, E. G. Guilloit, M. Moreau, J. Fehrenbach, O. Chabiron, S. Lemerrier, J. Pettré, C. Appert-Rolland, P. Degond, and G. Theraulaz, “Traffic instabilities in self-organized pedestrian crowds,” *PLoS Comput. Biol.* **8**, e1002442 (2012).
- [36] T. Ezaki, D. Yanagisawa, K. Ohtsuka, and K. Nishinari, “Simulation of space acquisition process of pedestrians using proxemic floor field model,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **391**, 291–299 (2012).
- [37] C. Appert-Rolland, J. Cividini, and H. Hilhorst, “Intersection of two tasep traffic lanes with frozen shuffle update,” *J. Stat. Mech: Theory Exp.* , P10014 (2011).
- [38] C. Schiffmann, C. Appert-Rolland, and L. Santen, “Shock dynamics of two-lane driven lattice gases,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* , P06002 (2010).
- [39] D. Chowdhury and A. Schadschneider, “Self-organization of traffic jams in cities : Effects of stochastic dynamics and signal periods,” *Phys. Rev. E* **59**, R1311 (1999).
- [40] M. E. Fouladvand, Z. Sadjadi, and M. R. Shaebani, “Optimized traffic flow at a single intersection : traffic responsive signalization,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 561 (2004).
- [41] A. Jelić, C. Appert-Rolland, and L. Santen, “A bottleneck model for bidirectional transport controlled by fluctuations,” *EPL* **98**, 40009 (2012).
- [42] S. Grosskinsky, G. Schütz, and R. Willmann, “Rigorous results on spontaneous symmetry breaking in a one-dimensional driven particle system,” *J. Stat. Phys.* **128**, 587–606 (2007).
- [43] C. Godrèche, J. M. Luck, M. R. Evans, D. Mukamel, S. Sandow, and E. R. Speer, “Spontaneous symmetry breaking : exact results for a biased random walk model of an exclusion process,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**, 6039 (1995).
- [44] M. R. Evans, D. P. Foster, C. Godrèche, and D. Mukamel, “Spontaneous Symmetry Breaking in a One Dimensional Driven Diffusive System,” *Phys. Rev. Lett.* **74**, 208–211 (1995).

- [45] V. Popkov, M. R. Evans, and D. Mukamel, “Spontaneous symmetry breaking in a bridge model fed by junctions,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **41**, 432002 (2008).
- [46] Y. Zhao, M. Li, X. Lu, L. Tian, Z. Yu, K. Huang, Y. Wang, and T. Li, “Optimal layout design of obstacles for panic evacuation using differential evolution,” *Physica A* **465**, 175–194 (2017).
- [47] A. Parmeggiani, T. Franosch, and E. Frey, “Totally asymmetric simple exclusion process with langmuir kinetics,” *Phys. Rev. E* **70**, 046101 (2004).
- [48] J. Uhde, M. Keller, E. Sackmann, A. Parmeggiani, and E. Frey, “Internal motility in stiffening actin-myosin networks,” *Phys Rev Lett* **93**, 268101 (2004).
- [49] L. Ciandrini, M. C. Romano, and A. Parmeggiani, “Stepping and crowding of molecular motors : statistical kinetics from an exclusion process perspective,” *Biophys J* **107**, 1176–1184 (2014).
- [50] A. Parmeggiani and G. W. Swart, “Mechanism of action of kirromycin-like antibiotics,” *Annu Rev Microbiol* **39**, 557–577 (1985).
- [51] A. K. Erlang, “The theory of probabilities and telephone conversations,” *Nyt Tidsskrift for Matematik* (1909).
- [52] A. Senderovich, M. Weidlich, A. Gal, and A. Mandelbaum, “Queue mining for delay prediction in multi-class service processes,” *Information Systems* **53**, 278–295 (2015).
- [53] G. Koole and A. Mandelbaum, “Queueing models of call centers : An introduction,” *Annals of Operations Research* **113**, 41–59 (2002).
- [54] F. Barcelo, V. Casares, and J. Paradells, “M/d/c queue with priority : application to trunked mobile radio systems,” *Electron. Lett.* **32**, 1644 (1996).
- [55] A. Masrub, “Delay analysis for multiple channel access in cognitive radio networks,” in *MELECON 2014 - 2014 17th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference* (2014) pp. 398–402.
- [56] H. Papadopoulos and C. Heavey, “Queueing theory in manufacturing systems analysis and design : A classification of models for production and transfer lines,” *Eur. J. Oper. Res.* **92**, 1–27 (1996).
- [57] C. F. Daganzo, “The cell transmission model : A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory,” *Transportation Research Part B: Methodological* **28**, 269–287 (1994).
- [58] I. Adan and J. Resing, *Queueing theory* (Eindhoven University of Technology, 2002).
- [59] D. G. Kendall, “Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain,” *Ann. Math. Statist.* **24**, 338–354 (1953).
- [60] D. Helbing and P. Molnár, “Social force model for pedestrian dynamics,” *Phys. Rev. E* **51**, 4282–4286 (1995).

- [61] Helbing Dirk, Farkas Illes, and Vicsek Tamas, “Simulating dynamical features of escape panic,” *Nature* **407**, 487–490 (2000).
- [62] D. Helbing, “Traffic and related self-driven many-particle systems,” *Rev. Mod. Phys.* **73**, 1067–1141 (2001).
- [63] J. M. Pastor, A. Garcimartín, P. A. Gago, J. P. Peralta, C. Martín-Gómez, L. M. Ferrer, D. Maza, D. R. Parisi, L. A. Pugnaloni, and I. Zuriguel, “Experimental proof of faster-is-slower in systems of frictional particles flowing through constrictions,” *Phys. Rev. E* **92**, 062817 (2015).
- [64] D. Helbing, I. J. Farkas, and T. Vicsek, “Freezing by heating in a driven mesoscopic system,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1240–1243 (2000).
- [65] A. Gabrielli, J. Talbot, and P. Viot, “Non-markovian models of blocking in concurrent and countercurrent flows,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, 170601 (2013).
- [66] C. Barré, J. Talbot, P. Viot, L. Angelani, and A. Gabrielli, “Generalized model of blockage in particulate flow limited by channel carrying capacity,” *Phys. Rev. E* **92**, 032141 (2015).
- [67] M. Finkelstein, *Failure rate modelling for reliability and risk* (2008).
- [68] H. Touchette, “The large deviation approach to statistical mechanics,” *Phys. Rep.* **478**, 1–69 (2009).
- [69] D. S. Corti and P. G. Debenedetti, “Statistical mechanics of fluids under internal constraints : Rigorous results for the one-dimensional hard rod fluid,” *Phys. Rev. E* **57**, 4211–4226 (1998).
- [70] S. B. Yuste and A. Santos, “Radial distribution function for sticky hard-core fluids,” *J. Stat. Phys.* **72**, 703–720 (1993).
- [71] M. Vlasiou and I. Adan, “Exact solution to a lindley-type equation on a bounded support,” *Oper Res Lett* **72**, 105–113 (2007).
- [72] O. Boxma and M. Vlasiou, “On queues with service and interarrival times depending on waiting times,” *Queueing Systems* **56**, 121–132 (2007).
- [73] P. Jodra, “Computer generation of random variables with lindley or poisson lindley distribution via the lambert w function,” *Math. Comput. Simul* **81**, 851–859 (2010).
- [74] S. A. Fayazi, A. Vahidi, G. Mahler, and A. Winckler, “Traffic signal phase and timing estimation from low-frequency transit bus data,” *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* **16**, 19–28 (2015).
- [75] A. Ceder, “Methods for creating bus timetables,” *Transportation Research Part A: General* **21**, 59–83 (1987).
- [76] C. Barré and J. Talbot, “Stochastic model of channel blocking with an inhomogeneous flux of entering particles,” *EPL* **110**, 20005 (2015).

- [77] J. F. C. Kingman, *Poisson processes* (1993).
- [78] S. Pradhan, A. Hansen, and B. K. Chakrabarti, “Failure processes in elastic fiber bundles,” *Rev. Mod. Phys.* **82**, 499–555 (2010).
- [79] P. M. Duxbury and P. L. Leath, “Exactly solvable models of material breakdown,” *Phys. Rev. B* **49**, 12676–12687 (1994).
- [80] D. Sornette and S. Redner, “Rupture in the bubble model,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L619 (1989).
- [81] S. M. Toffoli and R. L. Lehman, “Determination of individual fiber failure in fiber bundles,” *J. Am. Ceram. Soc.* **84**, 123–128 (2001).
- [82] D. G. Harlow and S. L. Phoenix, “The Chain-of-Bundles Probability Model for the Strength of Fibrous Materials II : A Numerical Study of Convergence,” *J. Compos. Mater.* **12**, 314–334 (1978).
- [83] F. Dalton, A. Petri, and G. Pontuale, “A random neighbour model for yielding,” *J. Stat. Mech: Theory Exp.* **3**, 03011 (2010).
- [84] J. Lehmann and J. Bernasconi, “Breakdown of fiber bundles with stochastic load-redistribution,” *Chem. Phys.* **375**, 591–599 (2010).
- [85] T. Derda, “Stochastic local load redistribution in the fibre bundle model of nanopillar arrays,” *J. Appl. Math. Comput. Mech.* (2015), 10.17512/jamcm.2015.4.03.
- [86] S. Sinha, J. T. Kjellstadli, and A. Hansen, “Local load-sharing fiber bundle model in higher dimensions,” *Phys. Rev. E* **92**, 020401 (2015).
- [87] U. Divakaran and A. Dutta, “Fibers on a Graph with Local Load Sharing,” *Int. J. Mod. Phys. C* **18**, 919–926 (2007).
- [88] D.-P. Hao, G. Tang, Z.-P. Xun, H. Xia, and K. Han, “Crossover behavior in the avalanche process of the fiber bundle model in local load sharing,” *Physica A* **416**, 135–141 (2014).
- [89] D.-H. Kim, B. J. Kim, and H. Jeong, “Universality Class of the Fiber Bundle Model on Complex Networks,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 025501 (2005).
- [90] C. Barré and J. Talbot, “Cascading blockages in channel bundles,” *Phys. Rev. E* **92**, 0521541 (2015).
- [91] V. Boschian, N. Rezg, and A. Chelbi, “Contribution of simulation to the optimization of maintenance strategies for a randomly failing production system,” *Eur. J. Oper. Res.* **197**, 1142 – 1149 (2009).
- [92] C. Barré and J. Talbot, “Diminishing blocking interval in particle-conveying channel bundles,” *EPJ B* **89** (2016), 10.1140/epjb/e2016-70411-1.
- [93] J. Medhi, *Stochastic Models in Queueing Theory* (Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1991).

- [94] O. P. Sharma and A. M. K. Tarabia, "A simple transient analysis of an $m/m/1/n$ queue," *Sankhya* **62**, 273–281 (2000).
- [95] O. Sharma and U. Gupta, "Transient behaviour of an $m/m/1/n$ queue," *Stochastic Processes Appl.* **13**, 327 – 331 (1982).
- [96] F. Pollaczek, "Über eine aufgabe der wahrscheinlichkeitstheorie. i," *Mathematische Zeitschrift* **32**, 64–100 (1930).
- [97] C. Crommelin, "Delay probability formulae," *Post Office Electrical Engineers Journal* **26**, 266– (1934).
- [98] J.-M. Garcia, O. Brun, and D. Gauchard, "Transient analytical solution of $m/d/1/n$ queues," *J. Appl. Probab.* **39**, 853–864 (2002).
- [99] J.-M. G. Olivier Brun, "Analytical solution of finite capacity $m/d/1$ queues," *J. Appl. Probab.* **37**, 1092–1098 (2000).
- [100] N. T. J. Bailey, "On queueing processes with bulk service," *J R Stat Soc Series B (Methodological)* **16**, 80–87 (1954).
- [101] M. F. Neuts, "A general class of bulk queues with poisson input," *Ann. Math. Stat* **38**, 759–770 (1967).
- [102] S. Z. Selim, "Time-dependent solution and optimal control of a bulk service queue," *J. Appl. Probab.* **34**, 258–266 (1997).
- [103] S. Sim and J. Templeton, "Steady state results for the $m/m(a, b)/c$ batch-service system," *Eur. J. Oper. Res.* **21**, 260 – 267 (1985).
- [104] U. C. Gupta and A. Banerjee, "New results on bulk service queue with finite-buffer : $M/g(a,b)/1/n$," *OPSEARCH* **48**, 279–296 (2011).
- [105] M. Chaudhry and U. Gupta, "Modelling and analysis of $m/g a, b /1/n$ queue – a simple alternative approach," *Queueing Systems* **31**, 95–100 (1999).
- [106] M. Berg, F. van der Duyn Schouten, and J. Jansen, "Optimal batch provisioning to customers subject to a delay-limit," *Manage. Sci.* **44**, 684–697 (1998).
- [107] S. K. Bar-Lev, M. Parlar, D. Perry, W. Stadje, and F. A. V. der Duyn Schouten, "Applications of bulk queues to group testing models with incomplete identification," *Eur. J. Oper. Res.* **183**, 226 – 237 (2007).
- [108] A. Glazer and R. Hassin, "Equilibrium arrivals in queues with bulk service at scheduled times," *Transportation Science* **21**, 273–278 (1987).
- [109] M. Matsui and J. Fukuta, "On a multichannel queueing system with ordered entry and heterogeneous servers," *A I I E Transactions* **9**, 209–214 (1977).
- [110] H. Gumbel, "Waiting lines with heterogeneous servers," *Oper. Res.* **8**, 504–511 (1960).
- [111] M. R. Evans and S. N. Majumdar, "Diffusion with stochastic resetting," *Phys. Rev. Lett.* **106**, 160601 (2011).

- [112] L. Kusmierz, S. N. Majumdar, S. Sabhapandit, and G. Schehr, “First order transition for the optimal search time of lévy flights with resetting,” *Phys. Rev. Lett.* **113**, 220602 (2014).
- [113] C. Barré, J. Talbot, and P. Viot, “Stochastic model of single-file flow with reversible blockage,” *EPL* **104**, 20005 (2013).
- [114] C. C. Thomas and D. J. Durian, “Fraction of clogging configurations sampled by granular hopper flow,” *Phys. Rev. Lett.* **114**, 178001 (2015).
- [115] C. C. Thomas and D. J. Durian, “Intermittency and velocity fluctuations in hopper flows prone to clogging,” *Phys. Rev. E* **94**, 022901 (2016).
- [116] I. Zuriguel, D. R. Parisi, R. C. Hidalgo, C. Lozano, A. Janda, P. A. Gago, J. P. Peralta, L. M. Ferrer, L. A. Pugnaloni, E. Clément, *et al.*, “Clogging transition of many-particle systems flowing through bottlenecks,” *Scientific reports* **107**, 278001 (2014).
- [117] L. Bocquet and E. Charlaix, “Nanofluidics, from bulk to interfaces,” *Chem. Soc. Rev.* **39**, 1073–1095 (2010).
- [118] H. Noguchi, G. Gompper, L. Schmid, A. Wixforth, and T. Franke, “Dynamics of fluid vesicles in flow through structured microchannels,” *EPL* **89**, 28002 (2010).
- [119] P. Romanczuk, M. Bär, W. Ebeling, B. Lindner, and L. Schimansky-Geier, “Active brownian particles,” *EPJ ST* **202**, 1–162 (2012).
- [120] B. Mishra and D. Chowdhury, “Interference of two codirectional exclusion processes in the presence of a static bottleneck : A biologically motivated model,” *Phys. Rev. E* **95**, 062117 (2017).
- [121] E. Altshuler, G. Mino, C. Perez-Penichet, L. d. Rio, A. Lindner, A. Rousselet, and E. Clement, “Flow-controlled densification and anomalous dispersion of e. coli through a constriction,” *Soft Matter* **9**, 1864–1870 (2013).
- [122] U. Zimmermann, F. Smallenburg, and H. Löwen, “Flow of colloidal solids and fluids through constrictions : dynamical density functional theory versus simulation,” *J. Phys.: Condens. Matter* **28**, 244019 (2016).
- [123] D. Bartolo and D. G. A. L. Aarts, “Microfluidics and soft matter : small is useful,” *Soft Matter* **8**, 10530–10535 (2012).
- [124] H. M. Wyss, D. L. Blair, J. F. Morris, H. A. Stone, and D. A. Weitz, “Mechanism for clogging of microchannels,” *Phys. Rev. E* **74**, 061402 (2006).
- [125] K. Stamer, R. Vogel, E. Thies, E. Mandelkow, and E.-M. Mandelkow, “Tau blocks traffic of organelles, neurofilaments, and app vesicles in neurons and enhances oxidative stress,” *J. Cell Biol.* **156**, 1051–1063 (2002).
- [126] A. J. E. M. Janssen and J. S. H. Van Leeuwen, “Back to the roots of the m/d/s queue and the works of erlang, crommelin and pollaczek,” *Stat Neerl.* **62**, 299–313 (2008).

-
- [127] M. Miyazawa, “Approximation of the queue-length distribution of an $m/gi/s$ queue by the basic equations,” *J. Appl. Probab.* **23**, 443–458 (1986).
- [128] P. Hokstad, “Approximations for the $m/g/m$ queue,” *Oper. Res.* **26**, 510–523 (1978).
- [129] H. C. Tijms, M. H. Van Hoorn, and A. Federgruen, “Approximations for the steady-state probabilities in the $m/g/c$ queue,” *Adv. Appl. Probab.* **13**, 186–206 (1981).
- [130] T. Kimura, “Approximations for the delay probability in the $m/g/s$ queue,” *Math. Comput. Modell.* **22** (1995).

Résumé : L'objectif de cette thèse porte sur l'étude des phénomènes de blocage dans un flux particules à faible densité dans un canal. Le blocage est induit par la géométrie du canal. L'essentiel de mes travaux concerne la description de nombreuses situations où le blocage est contrôlé par les limites en capacité d'un canal. Le paramètre pertinent pour ce phénomène est donné par le nombre de particules minimum, N , conduisant à l'interruption du flux de particules. Un modèle stochastique simple introduit par Gabrielli et al. (Phys. Rev. Lett. 110, 170601, 2013) illustre ce comportement : des particules arrivent aléatoirement selon une distribution de Poisson à l'entrée d'un canal unidimensionnel et se déplacent avec un temps de traversé constant, noté τ . Le blocage survient lorsque N particules sont simultanément sur le pont (le premier modèle portant sur $N = 2$). Le travail de cette thèse a été d'étudier les extensions de ce modèle. Les observables du système sont la probabilité de survie, le flux sortant ainsi que la statistique sur les particules sorties avant le blocage. Les différentes études ont permis pour le cas $N > 2$, pour une distribution homogène quelconque et inhomogène d'entrée, pour un système de multi-canaux ainsi que pour une durée finie de blocage d'obtenir des résultats analytiques exactes ainsi que des approximations à l'aide des outils statistique tel que la fonction génératrice. Le dernier projet de cette thèse porte sur l'étude microscopique des phénomènes de blocage. Le modèle simple que nous avons étudié est un système bidimensionnel de particules browniennes soumis à une force de traînée et se déplaçant dans un canal avec rétrécissement. La présence d'un obstacle au milieu du canal peut causer un colmatage selon les valeurs des différents paramètres du système.

Mots clés : modèles stochastiques, phénomènes de blocage, modèle de trafic, processus non-Markovien, simulation de dynamique brownienne, théorie des files d'attente.

Abstract : This manuscript presents a study of blocking phenomenon in particulate streams flowing through a narrow channel. In particular, it examines situations in which blocking is controlled by the limited carrying capacity of the channel. It builds on a simple stochastic model, introduced by Gabrielli et al. (Phys. Rev. Lett. 110, 170601, 2013), in which particles arrive randomly according to a Poisson distribution at the entrance of a one-dimensional channel with an intensity λ and, unless interrupted, exit after a transit time, τ . Blocking occurs instantaneously when $N = 2$ particles are simultaneously present in the channel. The quantities of interest include the probability that the channel is still open at time t (survival probability) and the flux and total number of exiting particles. The thesis examines a number of generalizations including when more than two particles must be present to induce blockage, $N > 2$, a time dependent intensity, a finite blocking time, and multi-channel systems. We obtain exact and approximate analytical results using tools such as the master equations describing the evolution of the n -particle partial probabilities, large deviation theory and queuing theory. The theoretical results are validated by comparison with the results of numerical simulations. The final chapter of the thesis uses a different approach, namely a brownian dynamics simulation of a two dimensional system of soft particles subjected to an external driving and drag forces. The presence of an obstacle in the middle of the channel can cause irreversible or intermittent clogging depending on the system geometry, temperature and particle stiffness.

Keywords : Stochastic models, blocking phenomena, traffic models, non-Markovian processes, queuing theory, Brownian dynamics simulation.
