



HAL
open science

Caractérisation de milieux multiples diffusants à l'aide de corrélations dans la coda

Vincent Clerc

► **To cite this version:**

Vincent Clerc. Caractérisation de milieux multiples diffusants à l'aide de corrélations dans la coda. Tectonique. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAU011 . tel-01686287

HAL Id: tel-01686287

<https://theses.hal.science/tel-01686287>

Submitted on 17 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement**

Arrêté ministériel : 7 Août 2006

Présentée par

Vincent Clerc

Thèse dirigée par **Philippe Roux** et codirigée par **Michel Campillo**

préparée au sein de l' **Institut des Sciences de la Terre**
et de l'**école doctorale Terre Univers Environnement**

Caractérisation de milieux multi- plement diffusants à l'aide de cor- rélations dans la coda

Thèse soutenue publiquement le 5 Janvier 2017 devant le jury composé de :

Michel Campillo

Professeur des universités, Institut des Sciences de la Terre, Grenoble, Co-Directeur de thèse

Denis Jongmans

Professeur des universités, Institut des Sciences de la Terre, Grenoble, Président

Julien de Rosny

Directeur de recherche CNRS, Institut Langevin, Paris, Rapporteur

Nikolai Shapiro

Directeur de recherche CNRS, Institut de Physique du Globe de Paris, Rapporteur

Jérôme Vergne

Physicien, École et Observatoire des Sciences de la Terre, Strasbourg, Examineur



En mémoire de Roger Maynard

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Philippe Roux d'avoir dirigé mon travail pendant ces années. Merci à Michel Campillo d'avoir supervisé cette thèse avec pertinence. Merci à Denis Jongmans d'avoir présidé le jury et à Jérôme Vergne d'avoir examiné ma soutenance. Merci enfin à Julien de Rosny et Nikolai Shapiro d'avoir accepté le travail de rapporteurs de mes travaux.

Merci à Roger, dont l'absence me sera douloureuse au-delà de la fin de ma thèse.

Par pudeur et par soucis d'exhaustivité, il est vain de tenter de remercier de manière personnelle tous ceux qui m'ont entouré pendant ces années dans cette page. Merci à tous ceux qui m'ont soutenu, de près ou de loin. Je sais ce que je vous doit, que vous le sachiez ou non.

Résumé

Les signaux enregistrés à la surface du globe sont composés de trois types d'ondes : des ondes directes, des ondes réfléchies plus ou moins facilement interprétables, et des ondes multiples diffusées beaucoup plus complexes à interpréter. Certaines propriétés physiques de ces ondes multiples diffusées permettent de les assimiler au bruit sismique ambiant. Nous appliquons des techniques de corrélation de bruit sismique développées ces dernières années à la coda sismique, afin de tirer des informations sur le caractère multiple diffusant du milieu. En particulier, nous montrons que le théorème reliant fonction de Green et champ ambiant peut être utilisé dans la coda. La dynamique temporelle de la reconstruction de la fonction de Green est alors un indicateur de la répartition de l'énergie dans le milieu. En reconstruisant la fonction de Green à l'aide de corrélations pour plusieurs fenêtres de temps dans la coda, nous montrons qu'il est possible de relier la symétrie des parties causales et acausales de la fonction de Green au libre parcours moyen du milieu. Nous développons ensuite des simulations numériques de propagation d'onde acoustique en 2D. Nous observons que l'évolution de la reconstruction des fonctions de Green observée dans ce milieu et celle prédite par la théorie est proche. La même approche est ensuite appliquée à des données sismologiques de terrain, sans permettre de retrouver la même dynamique. Nous développons alors une méthode de type MCMC permettant de reconstruire les fonctions de Green du milieu de manière optimale.

Abstract

Most of the waves recorded by seismometers are hard to interpret because of the complexity of the propagation medium, especially the late part of the seismic coda. These multiply scattered coda waves are close in nature to the ambient noise. We are applying recent noise correlation techniques to coda waves in order to retrieve information about the scattering medium. We show how the relationship between ambient noise and Green's function can be used in the case of the seismic coda. The quality of the Greens function retrieved by cross correlation of time windows in the coda is a proxy indicating the energy partition in the propagation medium. In particular, we establish a link between the symmetry of the causal and acausal parts of the reconstructed Green's function and the mean free path. We validate this theoretical approach with acoustical 2D numerical simulations. The same approach seems inefficient on a seismological dataset, due to the high S/N ratio and the non optimal repartition of receivers. Hence, we develop an MCMC based algorithm in order to optimally reconstruct the green's function in the seismic coda.



Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Propagation d’ondes en milieu hétérogène : observables en sismologie . . .	14
2	Ondes, fonctions de Green et corrélation de bruit	21
2.1	Equations d’ondes	22
2.1.1	Ondes acoustiques	22
2.2	Fonctions de Green en milieu homogène	24
2.3	Ondes acoustiques et fonction de Green en milieu hétérogène	26
2.4	En sismologie	28
2.4.1	Quelles informations dans la coda ?	29
2.4.1.1	Asymétrie des corrélations dans la coda sismique	31
2.4.2	Asymétrie du flux d’énergie	32
2.5	Fonction de Green et corrélation de bruit	33
2.5.1	Introduction à la corrélation par le retournement temporel	34
2.6	Corrélation de bruit ambiant en milieu homogène	36
2.7	Conclusion	39
3	Simulations numériques	41
3.1	Introduction	41
3.1.1	Schéma numérique	41
3.1.2	Conditions aux bords	42
3.1.3	Enjeux des simulations numériques	42
3.1.4	Position des sources et récepteurs et réciprocity de l’équation d’onde	43
3.2	Milieu de propagation	44
3.2.1	Propriétés des diffuseurs	45
3.2.2	Nombre de diffuseurs et propagation de l’énergie	47
3.2.3	Estimation du libre parcours moyen	49
3.3	Conclusion	52
4	Simulations numériques : résultats	53
4.1	Introduction	53

TABLE DES MATIÈRES

4.1.1	Que va-t-on reconstruire?	53
4.1.2	Protocole	56
4.2	Les moyennes et la qualité de la reconstruction de la fonction de Green	59
4.2.1	Moyenne, grains d'information et corrélation	59
4.2.2	Moyenne spatiale	61
4.2.3	Moyenne sur les réalisations	62
4.2.4	Moyenne temporelle	63
4.3	Analyse des simulations numériques	63
4.3.1	Diffusion forte : 128 diffuseurs	64
4.3.2	Diffusion faible : 16 diffuseurs	76
4.3.3	Evolution temporelle dans les différents milieux	80
4.4	Conclusion	82
5	Approche théorique des corrélations dans la coda	83
5.1	Expression analytique de l'équation de corrélation dans la coda	84
5.2	Quelles expressions pour les propagateurs?	88
5.2.1	Fonctions de Green en milieu homogène G_0	90
5.2.2	Le propagateur d'intensité σ pour la diffusion multiple	90
5.2.2.1	L'équation du transfert radiatif	91
5.2.2.2	L'équation de diffusion de la chaleur	92
5.2.2.3	Diffusion simple	94
5.3	La reconstruction du temps balistique dans les corrélations	95
5.4	Résultats	96
5.4.1	Diffusion simple	96
5.4.2	Equation de diffusion ou du transfert radiatif	96
5.5	Interprétation et utilisation	97
5.6	Comparaison avec les simulations numériques	98
5.7	Conclusion	98
6	Corrélations dans la coda : Application	107
6.1	Introduction	107
6.2	Présentation du jeu de données étudié	108
6.3	Evolution temporelle de la reconstruction de l'onde balistique dans la coda	111
6.4	Approche probabiliste MCMC	111
6.4.1	Enjeux	113
6.4.2	Méthode	115
6.4.3	Résultats	117
6.4.3.1	Simulations numériques et test de la méthode	118
6.4.3.2	Données Erebus	119
6.4.4	Conclusion	120

7 Conclusion et perspectives	125
7.1 Conclusion	125
7.2 Perspectives	126
Bibliographie	128

Chapitre 1

Introduction

L'un des phénomènes les plus étudiés de la physique des ondes est la diffusion multiple. L'ubiquité de ce phénomène, à des échelles très différentes, entraîne l'interaction de nombreux champs disciplinaires. Il existe ainsi de nombreuses similitudes entre des phénomènes en apparence si différents que la sismologie et la physique des électrons ou que l'optique et l'acoustique. Il est possible de développer des théories communes décrivant la propagation d'ondes dans des milieux désordonnés. Les différences de ces théories résideront alors dans la différence de nature des particules (photons, phonons, électrons) ou des ondes étudiées (électromagnétiques, acoustiques, élastiques...) et dans l'origine du désordre entraînant la diffusion multiple. Les impuretés dans un semi-conducteur, qui sont la cause de la diffusion multiple des électrons, ont été (et sont toujours) très étudiées dès les années 1950. En particulier, Anderson a montré en 1958 que ce désordre, s'il est suffisamment fort, pouvait déboucher sur l'absence totale de propagation des électrons dans le milieu (Anderson, 1958).

Dès lors, il était fondamental pour toutes ces disciplines de construire un cadre phénoménologique et théorique permettant l'interprétation des phénomènes observés lors de la propagation d'une onde dans un milieu aléatoire ou fortement désordonné. Cependant, pour que l'émergence de ces propriétés particulières ait lieu dans un milieu désordonné, il est nécessaire que l'échelle caractéristique du désordre soit du même ordre de grandeur que les ondes se propageant dans le milieu. En effet, une différence d'échelle trop importante entre le désordre et les ondes explorant le milieu nous porterait à l'observation de phénomènes soit microscopiques, soit macroscopiques. C'est pourquoi l'on parlera alors de physique mésoscopique des électrons et des photons, et plus particulièrement de théorie du transfert radiatif (Akkermans and Montambaux, 2007).

C'est d'abord en électromagnétisme et en astrophysique que la théorie du transfert radiatif a été développée, et a débouché sur de nombreux succès. On peut citer par exemple l'explication de la localisation forte mise en évidence par Anderson en électromagnétisme ou l'analyse de l'atmosphère de Jupiter (Taylor, 1973). Plus récemment,

il a été montré que dans un milieu un peu moins désordonné, on pouvait observer un phénomène particulier nommé cône de rétrodiffusion cohérente (Akkermans and Maynard, 1985) (Wolf et al., 1988). Le cône de rétrodiffusion cohérente est, simplement, une particularité du transport dans ce milieu entraînant une répartition de l'énergie dans le milieu différente de celle prédite par des modèles plus simples. Cette approche consistant à considérer la diffusion multiple comme un phénomène cohérent a ensuite été validée expérimentalement dans plusieurs domaines, que ce soit en acoustique (Tourin et al., 1997) ou en sismologie (Margerin et al., 2001) (Van Tiggelen et al., 2001). Dans les milieux géophysiques, l'observation du désordre renseigne sur les propriétés du milieu. Cependant, en règle générale, ce désordre est trop important pour pouvoir être décrit de manière exhaustive, et constitue plutôt un obstacle dans la qualité des observations en augmentant la complexité du signal étudié (Sato et al., 2012).

1.1 Propagation d'ondes en milieu hétérogène : observables en sismologie

Le point commun de toutes les disciplines précédemment citées est l'étude de la propagation d'ondes dans un milieu complexe. Nous allons nous concentrer sur la sismologie, soit l'étude de la propagation des ondes élastiques dans la Terre (bien que l'on puisse étudier la propagation d'ondes élastiques dans d'autres milieux comme d'autres planètes ou bien des matériaux industriels, et tenir toujours de la sismologie).

L'un des enjeux majeurs de la sismologie est l'extraction d'informations de signaux enregistrés à la surface du globe afin de reconstruire une image de l'intérieur de la Terre. Ces signaux sont composés de trois types d'ondes : des ondes directes, des ondes réfléchies et des ondes multiples diffusées (figure 1.1). Les deux premiers types d'ondes sont plus ou moins facilement interprétables, tandis que le troisième est beaucoup plus complexe. La qualité de l'image reconstruite dépendra de la façon dont les ondes se sont propagées dans le milieu. Si des zones ont été peu explorées par les ondes élastiques, elles resteront faiblement résolues. Pour obtenir une image satisfaisante, il est nécessaire d'avoir des sources d'ondes bien réparties et suffisamment intenses pour éclairer tout le milieu.

Dans la Terre, les sources d'ondes les plus intenses sont les séismes. Grâce à ces séismes, il a été possible de construire des modèles de l'intérieur de la Terre (Dziewonski and Anderson, 1981). Cependant, ces séismes ont une répartition spatiale loin d'être homogène (principalement sur les limites de plaques) ce qui nuit grandement à la reconstruction d'une image. Plus généralement, dans la plupart des milieux géophysiques, les sources naturelles intenses ne sont pas réparties de façon homogène (figure 1.2). Depuis quelques années, l'enregistrement continu du signal sismique a permis l'émergence d'une nouvelle technique, avec des résultats spectaculaires (Shapiro and Campillo, 2004).

En effet, sur un sismogramme, la majeure partie du signal enregistré n'est pas directement interprétable (Aki and Chouet, 1975) (Lacoss et al., 1969). Elle est composée d'une somme aléatoire d'ondes de faibles amplitudes, arrivant de directions diverses avec des phases différentes. Ce signal enregistré en permanence constitue le champ ambiant de la Terre, aussi appelé bruit de fond sismique. Son origine est multiple, et toujours un sujet actif de recherche. Selon les fréquences et les échelles observées, il peut être issu de l'interaction entre des ondes propagées dans l'océan et le plancher océanique, de l'activité anthropique, d'événements météorologiques ou de n'importe quel phénomène entraînant la propagation d'ondes dans le sol. La corrélation du champ ambiant enregistré par deux récepteurs permet, grâce à un cadre théorique bien défini, de considérer le couple récepteur/récepteur comme un couple source/récepteur (Roux et al., 2005). Ce changement de paradigme permet de multiplier les sources dans un milieu donné, et ainsi d'améliorer la reconstruction d'une image dudit milieu.

Cependant, pour que l'image soit la meilleure possible, il est toujours nécessaire que les sources à l'origine du champ ambiant soient réparties de manière homogène (ou plus exactement, que l'on soit dans un état d'équipartition du champ). Cette contrainte permet d'envisager une contrepartie intéressante : la qualité de la reconstruction du milieu pour un couple de récepteurs est un indicateur de l'équipartition du champ. Dans un contexte avec une source impulsionnelle dans un milieu multiplement diffusant, le temps nécessaire pour atteindre l'équipartition dépendra directement du degré d'hétérogénéité du milieu. Le but de ce manuscrit est donc d'utiliser les techniques de corrélation de bruit ambiant pour étudier les phénomènes de diffusion multiple, et en particulier le degré d'hétérogénéité du milieu de propagation.

L'intérêt principal de cette démarche est de revenir sur des résultats à l'origine de l'ouverture d'un nouveau champ de recherche publiés par Campillo and Paul (2003) (la corrélation de bruit en sismologie) pour leur apporter un éclairage nouveau. En effet, depuis cette première publication, la communauté s'est principalement intéressée au bruit sismique ambiant. Il est maintenant intéressant de voir comment les progrès de ces dernières années peuvent éclairer d'un jour nouveau les corrélations dans la coda sismique, issue d'une source ponctuelle dans un milieu multiplement diffusant. En particulier, la multiplication de réseaux denses de capteurs permet d'envisager des développements ardues en 2003, en apportant la possibilité d'effectuer des moyennes inenvisageable alors. Pour cela, il est aussi nécessaire d'établir un cadre théorique à notre étude. Ce manuscrit tentera donc de se trouver à l'interface entre l'étude de la diffusion multiple et celle de la corrélation du bruit sismique ambiant.

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, nous rappelons d'abord quelques notions essentielles sur la propagation des ondes, en particulier dans un milieu hétérogène. En

particulier, nous précisons le concept de fonction de Green et l'expression de ces fonctions de Green dans différents cas de figures. Nous rappelons aussi quelles informations peuvent être extraites de la coda sismique, et en particulier de l'asymétrie des corrélations dans la coda sismique. Nous concluons ce chapitre par un rappel théorique sur l'établissement de l'équivalence entre fonction de Green et corrélation de bruit ambiant en milieu homogène, dans le but d'explicitier certaines expressions ainsi que l'importance d'une géométrie hyperbolique pour les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les simulations numériques effectuées pour étudier un modèle simple de coda. Nous présentons notre dispositif de propagation d'ondes acoustiques dans un milieu hétérogène en 2D, avec ses propriétés numériques et ses conditions aux limites. Nous effectuons ensuite des tests sur les simulations numériques afin de mieux connaître les caractéristiques du milieu de propagation, comme la section différentielle de diffusion des hétérogénéités ou le libre parcours moyen.

Lors du troisième chapitre, nous exploitons les simulations numériques afin d'étudier les corrélations dans la coda. En particulier, nous étudions l'influence de différentes moyennes sur la qualité de la reconstruction de la fonction de Green, évaluée grâce à la variance de la fonction de corrélation. Nous étudions ensuite en détail l'asymétrie entre les parties causales et acausales de la fonction de Green reconstruite à partir de corrélations en fonction de la position de la source dans le milieu. Nous nous intéressons ensuite à la corrélation de fenêtres de temps prises dans la coda. Nous montrons l'influence de la diffusion multiple sur l'évolution temporelle de la reconstruction de la fonction de Green. Nous concluons que cette dynamique temporelle de l'asymétrie de la fonction de corrélation peut être liée à des paramètres du milieu.

Le quatrième chapitre voit l'élaboration d'un cadre théorique pour l'évolution temporelle de la symétrie des corrélations dans la coda. En nous appuyant sur les équations de corrélation rappelées lors du premier chapitre ainsi que sur la théorie de la diffusion multiple, nous développons une expression de la fonction de corrélation dans la coda sismique pour une fenêtre de temps donnée. Cette expression prend en compte les propriétés de diffusion du milieu ainsi que la position de la source. Nous montrons que la fonction de Green reconstruite à l'aide de corrélations dans la coda du milieu est comparable à la fonction de Green théorique pour ce milieu. Nous développons ensuite un proxy afin de suivre l'évolution temporelle de la symétrie de la fonction de corrélation en fonction de la position de la fenêtre temporelle observée dans la coda. Nous présentons ce proxy sous différentes approximations pour la diffusion multiple. Nous montrons ensuite que le proxy développé peut rendre compte efficacement des phénomènes observés dans les simulations numériques.

Le cinquième chapitre présente une première approche d'observation d'une dynamique temporelle dans les corrélations dans la coda dans des données réelles, issues d'un jeu de données d'icequakes dans un glacier. Cette approche est infructueuse, du à la grande complexité de ce milieu par rapport aux simulations numériques et au rapport Signal/Bruit

défavorable dans des données de terrain. Afin d'exploiter au mieux les corrélations dans la coda sismique, nous développons une approche probabiliste (Monte Carlo par chaînes de Markov) permettant de sélectionner une ensemble de fenêtres de temps dans les corrélations permettant une reconstruction optimale des fonctions de Green. Pour cela, nous définissons un indicateur de la qualité des corrélations dans la coda fondé sur leur symétrie et leur cohérence. Nous montrons que cette approche permet une nette amélioration de la qualité des corrélations, et donc est grandement bénéfique pour des applications de suivi temporel par exemple. Nous montrons aussi que la distribution de fenêtres temporelles considérée comme optimale par notre algorithme est cohérente, ce qui semble indiquer qu'il existe bien un temps optimal pour effectuer des corrélations dans la coda sismique dépendant des propriétés du milieu.

Nous concluons ce manuscrit en évoquant des applications futures du cadre théorique développé, ainsi que de la méthode bayésienne d'optimisation de reconstruction de la fonction de Green. Nous évoquons aussi d'autres études pouvant être menées sur la coda sismique, en particulier dans le cadre de réseaux denses.



FIGURE 1.1: Saint Joseph Charpentier, peinture de Georges De La Tour, entre 1638 et 1645. On peut prendre cette peinture à titre d'illustration pour la propagation des ondes (ici en optique). Nous sommes en présence d'une seule source de forte intensité, la flamme de la bougie. L'onde directe se propage de la flamme jusqu'à l'oeil du peintre. On voit aussi la présence d'ondes ayant subi la diffusion multiple à travers les doigts de l'enfant (qui apparaissent alors sans leur structure interne, prouvant que la lumière les ayant traversé a perdu en grande partie la "mémoire" de sa direction de propagation d'origine). Enfin, on observe des ondes réfléchies, qui sont tous les autres points de la scène éclairés par la bougie. Plusieurs points intéressants sont à noter. Tout d'abord, les points proches de la source sont peints de manière beaucoup plus détaillée que les points éloignés. Cela illustre la perte de résolution lorsque l'intensité de l'onde reçue diminue. D'autre part, les zones mal orientées ne reçoivent que peu de lumière, et sont donc aussi peu détaillées. Si la scène était éclairée par plusieurs bougies bien réparties, toutes ces zones d'ombres apparaîtraient également détaillées. En sismologie, la parcimonie des sources et leur inégale répartition entraîne l'équivalent des zones d'ombres du tableau.

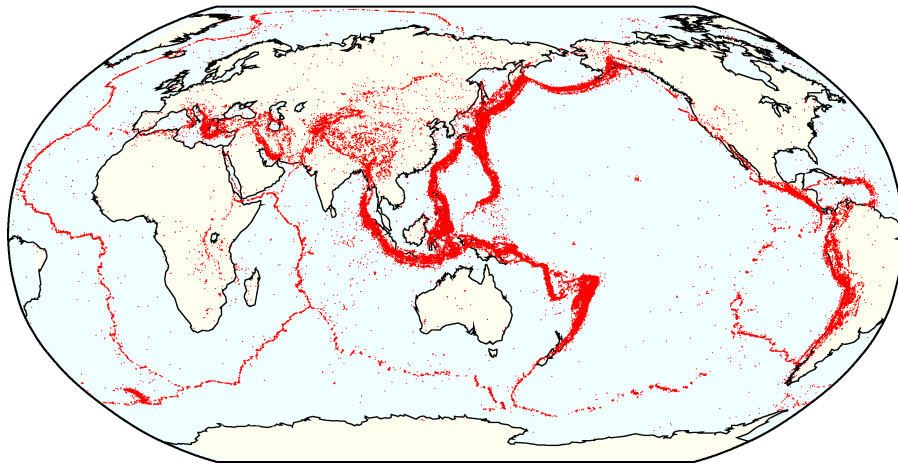


FIGURE 1.2: D'après l'international Seismological Centre. Carte illustrant la répartition des séismes (points rouges) de magnitude supérieure à 5 sur une période allant de 1960 à 2008. On voit tout de suite que la répartition des sources sismiques est très hétérogène (elle correspond aux limites de plaques). Cette hétérogénéité ne permet pas une reconstruction parfaite d'une image de l'intérieur de la Terre.

Chapitre 2

Ondes, fonctions de Green et corrélation de bruit

Sommaire

2.1	Equations d'ondes	22
2.1.1	Ondes acoustiques	22
2.2	Fonctions de Green en milieu homogène	24
2.3	Ondes acoustiques et fonction de Green en milieu hétérogène	26
2.4	En sismologie	28
2.4.1	Quelles informations dans la coda?	29
2.4.1.1	Asymétrie des corrélations dans la coda sismique . . .	31
2.4.2	Asymétrie du flux d'énergie	32
2.5	Fonction de Green et corrélation de bruit	33
2.5.1	Introduction à la corrélation par le retournement temporel . . .	34
2.6	Corrélation de bruit ambiant en milieu homogène	36
2.7	Conclusion	39

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques notions théoriques sur la propagation d'ondes. Il y a de nombreuses façons d'introduire les concepts que nous utiliserons tout au long de ce manuscrit, chacune présentant un intérêt particulier. Nous allons d'abord décrire brièvement l'obtention d'une équation d'onde, puis nous introduirons le concept de fonction de Green. Cette introduction est issue de nombreux ouvrages, Aki and Richards (2002), Stein and Wysession (2009), Shearer (2009), pour n'en citer que quelques-uns. Nous nous intéresserons ensuite aux propriétés de ces équations ayant permis le développement des techniques dites de corrélation de bruit.

2.1 Equations d'ondes

2.1.1 Ondes acoustiques

En premier lieu, nous allons détailler l'obtention de l'équation d'onde acoustique. Ce cas est relativement simple, en cela que l'on observera un seul type d'onde. Les équations de l'acoustique linéaire peuvent être considérées comme un cas particulier de propagation des ondes élastiques, dans le cas où le module de cisaillement serait nul. Nous décrirons dans la section suivante la propagation des ondes élastiques. Nous considérons un fluide parfait compressible tel que :

- la pression P du fluide peut être écrite $P = P_0 + p$, avec P_0 une constante et $p \ll P_0$;
- la masse volumique ρ_1 du fluide peut être écrite $\rho = \rho_0 + \rho_1$, avec ρ_0 une constante et $\rho_1 \ll \rho_0$;
- la vitesse du fluide sera notée u . On suppose qu'elle est faible.

Nous pouvons maintenant appliquer le principe fondamental de la dynamique à ce fluide, pour obtenir les équations d'Euler :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \cdot \vec{a} = -\nabla p + \rho \cdot \vec{g} \quad (2.1)$$

Avec $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. La complexité de cette équation réside dans son terme convectif $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. Cependant, ce terme étant d'ordre deux, on peut le négliger. En ne gardant que les termes d'ordre un, on obtient alors l'équation d'Euler linéarisée, beaucoup plus simple :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (2.2)$$

Nous pouvons aussi écrire la loi de conservation de la masse en tout point pour notre fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

En développant la divergence puis en ne gardant que les termes d'ordre un :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

Les équations (2.2) et (2.4) sont bien plus simples sous cette forme approchée : il n'y a plus de terme d'ordre supérieur à un, ce sont donc des équations linéaires. Nous allons maintenant chercher à les combiner, mais cela nécessite de trouver un lien entre la masse volumique ρ et la pression P . On choisit de fixer l'entropie (approximation isentropique). Cela revient à dire que les ondes acoustiques sont réversibles, c'est à dire que la chaleur créée n'a pas le temps de se propager (le phénomène est rapide). On peut alors utiliser un coefficient thermoélastique appelé compressibilité isentropique, défini par :

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$$

où V est le volume (ici, le volume de la particule fluide) et P la pression totale. On obtient les relations suivantes :

$$\Delta p - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

$$\Delta \mathbf{u} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

Il nous suffit maintenant de définir la vitesse de propagation des ondes dans le milieu comme :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} \quad (2.7)$$

Il est alors possible d'écrire l'équation de propagation de D'Alembert :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

Cette équation est la première équation d'onde historique, décrivant la variation spatio-temporelle d'une quantité ondulante. Cette équation est d'une omniprésence telle dans différents domaines de la physique (et elle est mathématiquement proche du concept d'opérateur laplacien) que l'on définit un opérateur \square nommé d'alembertien tel que :

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta \quad (2.9)$$

L'équation de D'Alembert présente quelques propriétés très intéressantes. La première, qui sera d'une importance fondamentale pour les applications de retournement temporel décrites dans ce manuscrit, développées en particulier depuis le début des années 1990 sous l'impulsion de Fink (1992), est sa réversibilité. En effet, l'invariance par retournement temporel stipule que si $f(\mathbf{x}, t)$ est solution, alors $f(-\mathbf{x}, t)$ le sera aussi. De manière visuelle, si

la flèche du temps s'inversait, une onde propagée dans un milieu quelconque convergerait exactement à son origine au temps $t=0$. L'autre caractéristique intéressante de cette équation est sa linéarité : la somme de deux solutions est aussi solution. Cette propriété expliquera la plupart des phénomènes d'interférences.

On peut écrire une solution générale de cette équation dans un espace unidimensionnel :

$$F(x, t) = F^+(t - \frac{x}{c}) + F^-(t + \frac{x}{c}) \quad (2.10)$$

Avec F^+ et F^- des fonctions dépendantes des conditions initiales. Il convient de noter que l'on retrouve le comportement de convergence/divergence décrit plus haut : on retrouve deux ondes se propageant à une vitesse c , dans des sens opposés.

L'établissement de l'équation de D'Alembert nécessite la séparation de deux potentiels. Cette séparation va avoir pour conséquence la présence de deux types d'ondes : les ondes P et S observées dans un solide élastique.

2.2 Fonctions de Green en milieu homogène

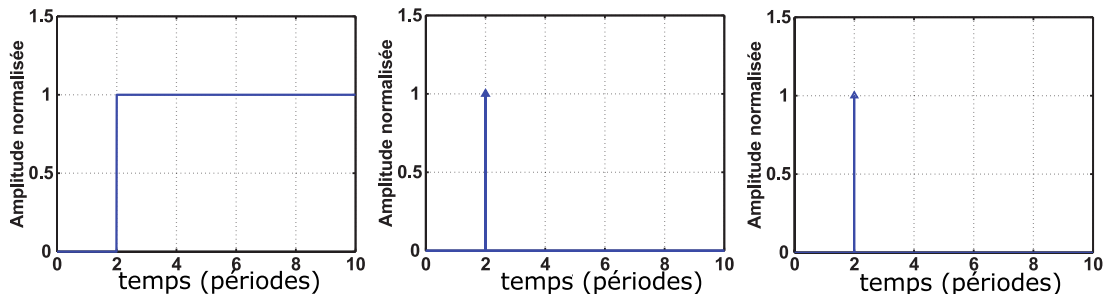


FIGURE 2.1: Représentation de la fonction de Green 1D, 2D, 3D en milieu homogène pour $r = 2, r_0 = 0, t_0 = 0$. Les triangles indiquent une singularité de type $G(\mathbf{r}, t = \mathbf{r}/c) = \inf$. Il est cependant important de noter que la fonction de $G^{2D} > 0$ pour tout $t > \mathbf{r}/c$, tandis que $G^{3D} = 0$ pour tout $t > \mathbf{r}/c$.

Nous allons maintenant introduire un des éléments fondamentaux de notre boîte à outils théoriques, la fonction de Green. La fonction de Green n'est que l'expression dans le monde physique de la solution fondamentale d'une équation en mathématiques. Elle fut développée au XIXème siècle par un physicien britannique autodidacte du nom de George Green, de manière confidentielle, et est maintenant largement utilisée dans de nombreux domaines de la physique (Barton, 1989). La fonction de Green entre deux points A et B est la réponse du milieu en B à une force impulsionnelle en A. On pose la

fonction de Green G comme la solution de l'équation :

$$\square G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t) \quad (2.11)$$

avec δ la distribution de Dirac telle que définie dans Barton1989. On voit ici que la fonction de Green est la réponse spatio-temporelle à une impulsion, le système obéissant à une équation d'onde. Dans un cas idéal, c'est le signal qu'enregistrerait un récepteur après une impulsion $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$. Dans le cas d'un milieu infini homogène et sans atténuation, la fonction de Green n'est qu'un facteur dépendant de la géométrie. On peut écrire son expression sous forme temporelle en fonction de la dimension :

$$G^{3D}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = -\frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (2.12)$$

$$G^{2D}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G^{3D}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\theta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{-2\pi r \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} \quad (2.13)$$

$$G^{1D}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{c}{2} \theta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (2.14)$$

avec θ la distribution de Heaviside. Il est intéressant de noter qu'en dimension 1 et 2, la réponse est non nulle pour tout $t > r/c$. On a donc une réponse infinie pour une impulsion ponctuelle! Dans la suite de ce manuscrit, on notera implicitement $G^{mD}(r, t)$ si $r_0 = 0; t_0 = 0$. Ces fonctions de Green sont représentées figure 2.1.

Il est utile d'exprimer les solutions 2D et 3D en domaine fréquentiel :

$$G^{3D}(\omega, r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (2.15)$$

$$G^{2D}(\omega, r) = -\frac{i}{4} H_0(kr) \quad (2.16)$$

avec H_0 la fonction de Hankel du premier ordre.

2.3 Ondes acoustiques et fonction de Green en milieu hétérogène

On peut décrire un milieu hétérogène comme un milieu dans lequel la compressibilité et la densité λ et ρ ne seraient plus spatialement invariants mais seraient fonction de leur position dans l'espace $\lambda(\mathbf{r})$ et $\rho(\mathbf{r})$. Il en découle des variations spatiales de la célérité de l'onde, et donc, pour une impulsion ponctuelle, des temps d'arrivée différents. Il devient intéressant de séparer la célérité moyenne de ses fluctuations spatiales. L'expression de la célérité devient :

$$c(\mathbf{r}) = c_0(1 + \eta(\mathbf{r})) \quad (2.17)$$

Le terme c_0 représentant la vitesse moyenne et $\eta(\mathbf{r})$ des faibles variations spatiales de vitesse. Dans ce milieu hétérogène, la fonction de Green devient la solution de l'équation :

$$\Delta G(r, t) + \frac{\omega^2}{c^2} \Delta G(r, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t) \quad (2.18)$$

qui devient :

$$\Delta G(\mathbf{r}, t) + \frac{\omega^2}{c_0^2} G(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right) G(\mathbf{r}, t) \quad (2.19)$$

Dans le cas d'un milieu avec des variations spatiales de vitesse, comme présenté figure 2.2, on enregistrera alors un signal complexe pour une impulsion simple émise dans le milieu. Si l'on se place dans le cadre de l'approximation de Born $c(\mathbf{r}) \approx c_0$, alors le membre de gauche décrit la propagation d'une onde dans un milieu homogène moyen, et le membre de droite décrit l'action des hétérogénéités (diffuseurs) sur la propagation de l'onde. Pour la suite de ce manuscrit, il est intéressant de trouver une correspondance entre les termes de l'équation (2.19) et l'équation de Schrödinger.

L'équation de Schrödinger remplit le même rôle que le principe fondamental de la dynamique, mais pour une particule massive non relativiste :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) = i \hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.20)$$

L'équation de Schrödinger relie la densité de probabilité de la présence d'une particule ψ de masse m avec son potentiel V . On peut obtenir une équivalence entre ces deux équations en posant $\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{2m}{\hbar^2}$ et $\frac{\omega^2}{c_0^2} \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right) = \frac{2mV(\mathbf{r})}{\hbar^2}$. Cette équivalence est d'une importance cruciale : certains résultats issus des domaines de la physique utilisant cette équation pourront être transposés dans le cadre de notre étude.

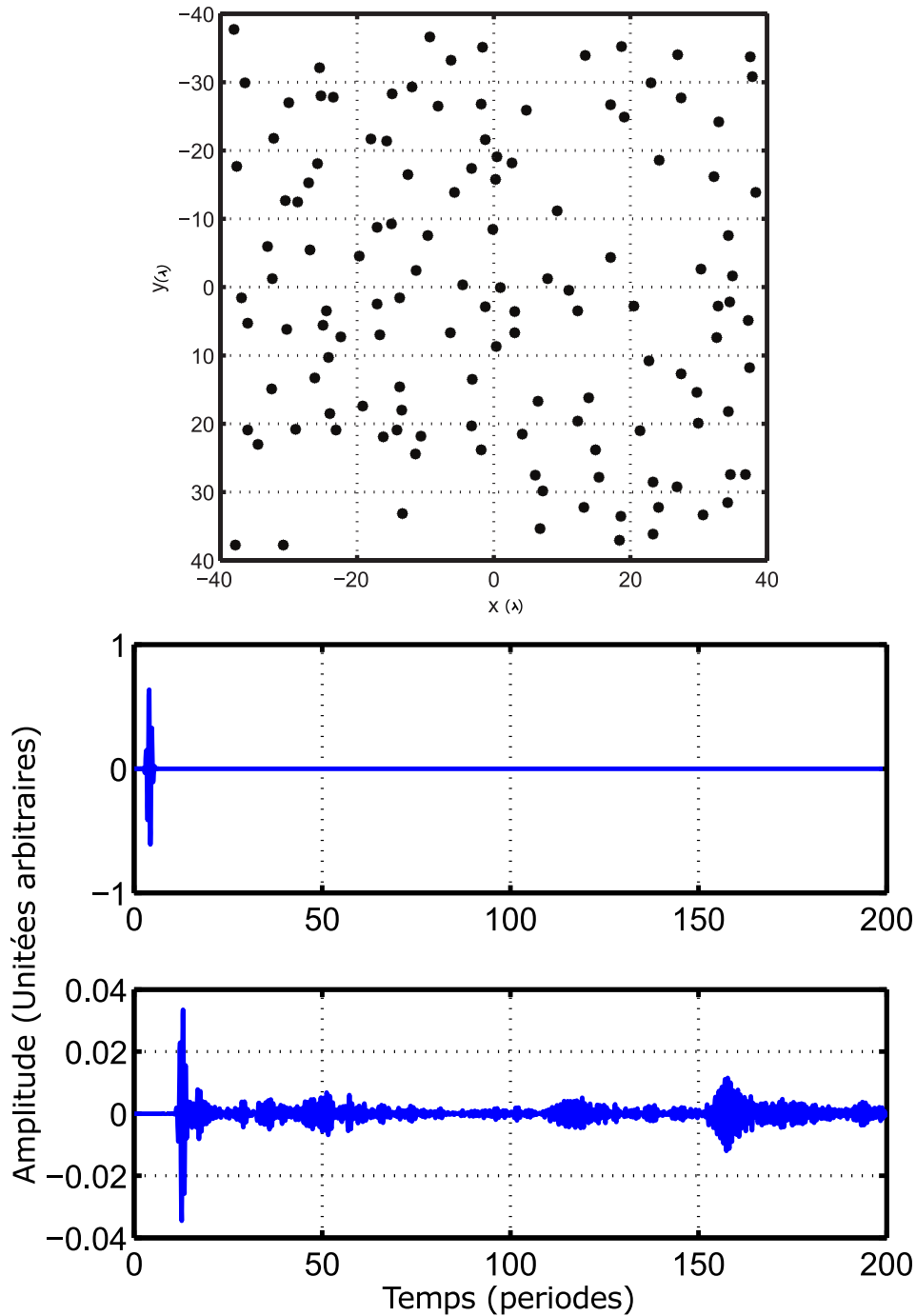


FIGURE 2.2: Exemple de milieu hétérogène 2D, et de signaux enregistrés lors de la propagation d'une onde acoustique dans ce milieu. En haut, milieu hétérogène, constitué d'un milieu dans lequel la vitesse de propagation des ondes est constante (en blanc) et de diffuseurs (ronds noirs) dans lesquels la propagation des ondes est impossible (la densité et la compressibilité adiabatique sont nulles $\rho_D = 0, \chi_D = 0$). Si l'on place dans ce milieu une source et un récepteur enregistrant un point du champ de pression, on enregistre des signaux complexes. Au milieu : signal émis à la source en fonction du temps ; En bas : signal enregistré au récepteur. On observe de nombreuses arrivées d'ondes tardives, qui composent la coda.

2.4 En sismologie

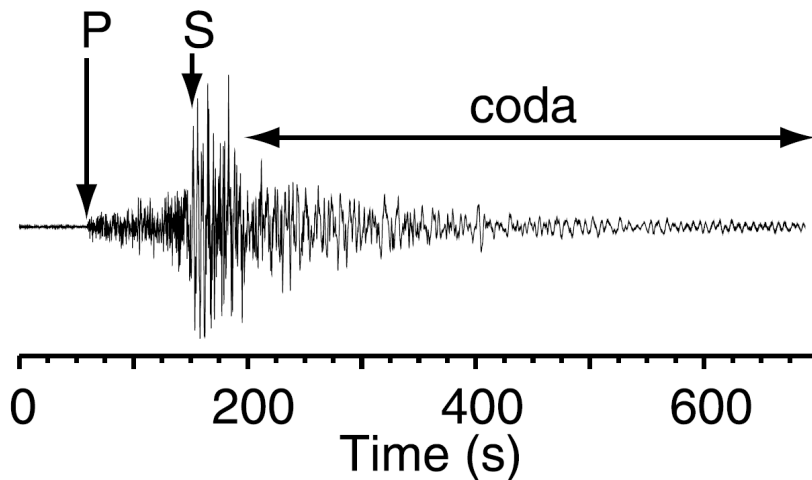


FIGURE 2.3: D'après Campillo and Paul (2003). Exemple du signal enregistré lors d'un séisme. Certaines ondes clairement identifiables peuvent être repérées (ici les ondes P et S). La coda forme ensuite un signal complexe, dont la décroissance suit une loi exponentielle. L'amplitude de la coda reste très longtemps (plusieurs dizaines de périodes) supérieure à l'amplitude du bruit de fond enregistré avant l'événement.

Les ondes se propageant dans la terre peuvent rencontrer différents types d'hétérogénéités. En effet, en plus des grandes interfaces signalant des grands changements structuraux, existent des plus petites hétérogénéités capables d'affecter elles aussi la propagation des ondes. Une hétérogénéité de taille suffisamment inférieure à la longueur d'onde incidente agira comme un point diffractant. Chaque point se comportera d'une manière similaire à une source, en émettant une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à l'onde incidente. Cette approche du phénomène de diffraction correspond simplement au principe de Huygens-Fresnel à des ondes mécaniques. Les ondes issues de ces hétérogénéités vont interférer pour former un champ d'ondes très complexe. Dans un milieu hétérogène, les variations spatiales de vitesse ne permettent plus de distinguer une seule arrivée. Si l'on enregistre un signal issu d'une seule source dans un tel milieu, sa forme sera caractéristique. On observera d'abord les ondes directes (en sismologie, les ondes P et S, voir chapitre 5), plus ou moins atténuées par le désordre du milieu, comme présenté figure 2.3. Une partie de cette énergie sera retrouvée plus loin dans le signal, sous la forme d'une queue plus ou moins longue : c'est la coda. L'analogie avec le terme musical est frappante par sa pertinence : la coda est le passage final d'une œuvre, que l'on répète plus ou moins longtemps, en modulant sur des éléments déjà entendus. Le signal enregistré dans un milieu hétérogène, même issu d'une seule source, aura donc

une durée très importante (dans le cas d'un milieu infini sans atténuation, ce signal aura théoriquement une durée infinie).

Les sismologues ont assez tôt observé la présence cette coda. Ces phénomènes sont particulièrement présents dans certaines structures comme les volcans (Fehler et al., 1988) ou les failles actives (Nishigami, 1997). L'identification des ondes formant la coda comme ondes diffractées dans les signaux enregistrés date de la fin des années 60 (Aki, 1969). La diffusion des ondes peut dans ces cas être simple ou multiple. La complexité de la propagation des ondes formant la coda rend celle-ci inutile pour reconstruire des trajets. Afin d'utiliser l'information contenue dans la coda, il va être nécessaire d'utiliser d'autres méthodes que celles de la sismologie classique en temps d'arrivée.

2.4.1 Quelles informations dans la coda ?

Aki and Chouet (1975) ont montré que les ondes de la coda, grâce à leur temps de résidence dans le milieu beaucoup plus important que celui des ondes directes, est porteuse d'informations sur ce milieu. Dans cette étude, les auteurs ont montré que la décroissance de la coda différait selon la région étudiée. Ce comportement particulier n'est pas affecté par la magnitude ou la distance de la source sismique. En effet, bien qu'apparemment chaotiques, ces phénomènes sont déterministes. Pour deux sources strictement identiques, si le milieu reste inchangé, le signal complexe enregistré restera inchangé aussi. L'enveloppe de la coda, pour une fréquence ω entre 1Hz et 10 Hz, est décrite par l'équation :

$$E_{\omega}(t) = \frac{1}{t^{\gamma}} \exp\left(\frac{-\omega t}{Q_c(\omega)}\right) \quad (2.21)$$

Avec $1/t^{\gamma}$ un facteur géométrique ($1 < \gamma < 2$) et $Q_c(\omega)$ un nombre sans dimension, appelé facteur de qualité de la coda, dépendant directement du milieu. Ce paramètre sans dimension nécessite une interprétation physique. Aki and Chouet (1975) ont aussi proposé un cadre de compréhension théorique, basé sur deux modèles complémentaires. Le premier décrit la coda comme étant issu principalement de la diffusion simple des ondes. Le facteur Q_c est dans ce cas représentatif de l'absorption dans le milieu. Le deuxième modèle est sur fondé sur une interprétation de la coda comme étant issue de la diffusion multiple. Ce modèle a la faveur d'avoir été bien expliqué par des simulations numériques faisant appel à la théorie du transport (Margerin et al., 1998) (Ryzhik et al., 1996). Mais on peut encore extraire plus d'informations de la coda, cette fois non plus uniquement grâce à l'enveloppe du signal mais aussi grâce à sa phase. Les ondes multiplement diffusées étant prépondérantes dans la coda, elles seront très sensibles à une variation du milieu, même faible. Les techniques de suivi de variation d'un milieu grâce aux changements dans la coda sont connues sous le nom de Coda Wave Interferometry, d'après Snieder et al. (2002) et Snieder (2006). Il est alors possible de détecter un chan-

gement local de vitesse aussi bien en sismologie (Brenguier et al., 2008) qu'en acoustique ultrasonore (Planès, 2013). Planès (2013) montre que si le changement de vitesse dans le milieu est faible, il est possible de l'assimiler à un changement de phase seul. Des modèles théoriques (Pacheco and Snieder, 2005) permettent de prédire ce déphasage, et de localiser des changements dans un milieu en utilisant des méthodes inverses (Planès, 2013).

2.4.1.1 Asymétrie des corrélations dans la coda sismique

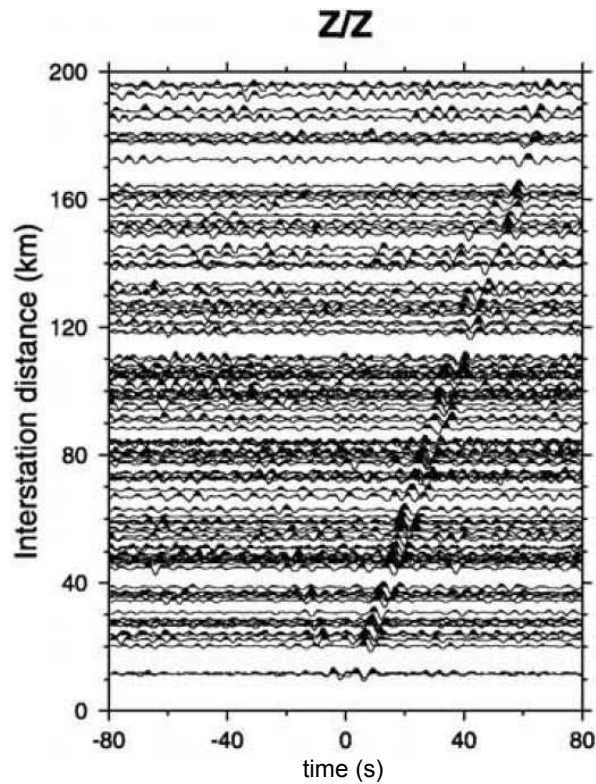


FIGURE 2.4: D'après Paul et al. (2005) Corrélation de codas sismiques enregistrées à deux stations, en fonction de la distance interstation. La figure obtenue est équivalente pour les temps positifs à celle que l'on aurait obtenue si une onde s'était propagée depuis une source en 0 et avait été enregistrée à différentes distances de la source. Les temps négatifs sont symétriques des temps positifs, comme expliqué lors du chapitre précédent. On observe une très forte asymétrie entre les amplitudes des temps positifs et négatifs. Cette différence d'amplitude est due à la position de la source et à la diffusion dans le milieu.

Depuis quelques années, les techniques de corrélation du bruit de fond ont pris un essor considérable, et sont largement utilisées dans de nombreuses applications. Ces techniques, comme nous le verrons dans la section suivante, permettent de retrouver la fonction de Green d'un milieu entre deux récepteurs, sans qu'il ne soit besoin que l'un de ces récepteurs agisse comme une source, grâce à la présence d'un champ ambiant. La première utilisation de la fonction de corrélation en sismologie n'était cependant pas basée sur l'utilisation du bruit de fond sismique, mais sur la corrélation de codas enregistrées lors de séismes importants (Campillo and Paul, 2003). Cette étude a montré l'importance des techniques de corrélation en sismologie, en prouvant qu'il est possible d'extraire des fonctions de Green d'un signal qui paraissait difficilement utilisable. Cependant, pour

avoir un ratio signal/bruit suffisant, il était nécessaire de faire des moyennes sur plusieurs séismes, de magnitude importante, dont la répartition était relativement étendue. L'étude de Paul et al. (2005) des corrélations dans la coda sismique a cette fois utilisé des séismes dont la répartition était plus locale. Ceci a permis de mettre en évidence un phénomène très intéressant : les fonctions de Green ainsi reconstruites présentent une forte asymétrie, bien visible figure 2.4. Cette asymétrie est expliquée comme découlant de la non-équpartition de l'énergie dans le milieu.

2.4.2 Asymétrie du flux d'énergie

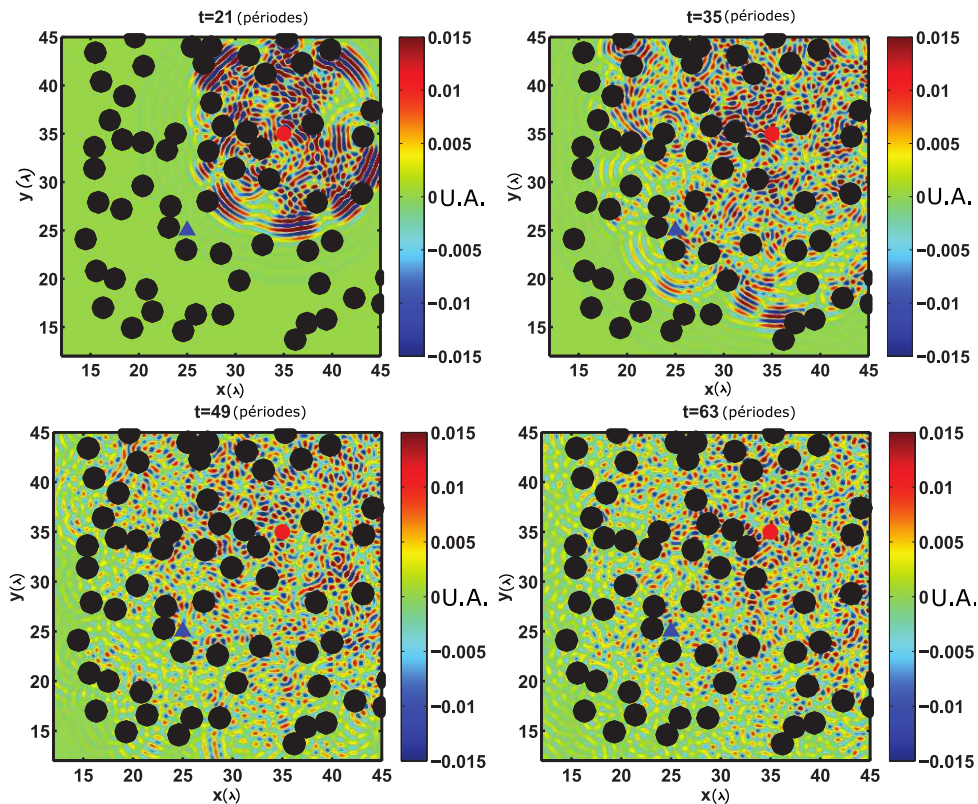


FIGURE 2.5: Champ de pression créé par une onde dans un milieu hétérogène (diffuseurs en noir) en présence d'une seule source (rond rouge), exprimé en unités arbitraires (UA) de pression. Le temps est exprimé en périodes. A $t=21$ et $t=35$, on peut encore distinguer le front d'onde. La répartition spatiale de l'énergie est très hétérogène. On observe ensuite des figures complexes, dues aux nombreuses diffusions dans le milieu. Il est notable que, si l'on se place au niveau du triangle bleu, l'énergie variera fortement en fonction de la direction observée.

En première approximation, nous pouvons considérer les hétérogénéités du milieu comme des sources secondaires (Derode et al., 2003a). Chaque source secondaire ne sera active qu’après avoir été à l’origine d’une diffusion. Les diffuseurs ne pourront donc être considérés comme des sources secondaires qu’après un temps au minimum supérieur au temps de trajet entre la source primaire du milieu et ce diffuseur.

La distribution spatiale des sources secondaires va donc être très fortement dépendante du temps, comme montré figure 2.5. Schématiquement, lorsque les temps sont courts, les sources secondaires sont distribuées vers la source primaire. Lorsque les temps sont longs, elles sont distribuées de façon plus homogène dans l’espace. L’étude d’un milieu avec une seule source induit donc la présence d’une dynamique temporelle dans la répartition de l’énergie dans le milieu, jusqu’à l’équipartition. Cette dynamique temporelle est porteuse d’informations sur le milieu.

Nous avons rappelé précédemment qu’une distribution anisotrope de source va influencer l’amplitude de la fonction de corrélation. Plus précisément, l’amplitude de la fonction de corrélation présentera une dissymétrie entre les temps positifs et les temps négatifs. La présence d’hétérogénéités dans le milieu va cependant contrebalancer l’effet de la répartition des sources dans une certaine mesure. Un milieu avec une seule source n’est en fait que le cas limite d’une répartition spatiale anisotrope des sources. La dissymétrie qui en résulte a été observée par Campillo and Paul (2003) lors de corrélations dans la coda sismique (bien que dans le cas de cette étude, plusieurs sources très proches aient été considérées). La distribution spatiale des sources secondaires n’est pas le seul paramètre contrôlant la distribution de l’énergie dans le milieu. En effet, l’intensité de l’émission par les sources secondaires sera aussi dépendante du temps et des propriétés intrinsèques du diffuseur.

2.5 Fonction de Green et corrélation de bruit

Les fonctions de Green et la fonction de corrélation présentent un lien très fort. Dès 2001 Lobkis and Weaver (2001) ont montré que l’on pouvait obtenir une relation entre fonction de Green et corrélation à l’aide d’une décomposition modale du champ. La première confirmation expérimentale est issue de l’acoustique ultra-sonore dans un solide réverbérant (Weaver and Lobkis, 2001). Le lien entre corrélation et fonction de Green fut ensuite confirmé dans de nombreux domaines, allant de l’optique (Van Tiggelen, 2003) à la sismologie (Campillo and Paul, 2003) en passant par l’acoustique (Roux et al., 2005).

2.5.1 Introduction à la corrélation par le retournement temporel

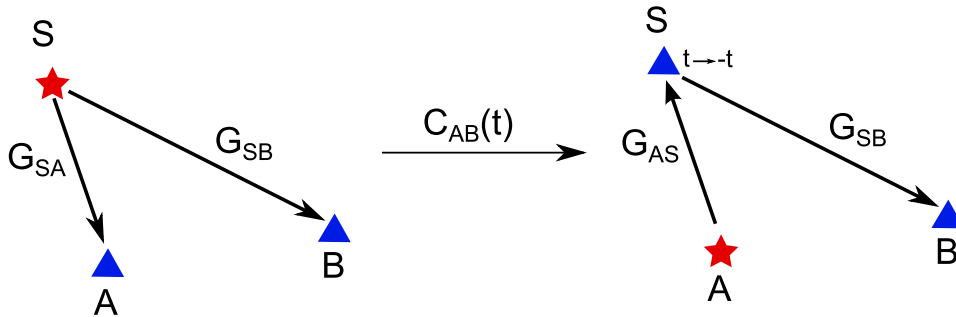


FIGURE 2.6: Illustration de l'analogie entre retournement temporel et corrélation ; dans la figure de gauche, une impulsion est émise en S et reçue en A et B. Faire la corrélation de ces signaux reçus revient à effectuer l'opération décrite dans la figure de droite : émettre une impulsion en A, l'enregistrer en S d'où on émet sa retournée temporelle que l'on enregistre en B.

Nous allons détailler les relations entre fonction de Green et corrélations, d'abord dans le cas d'un milieu homogène infini puis dans le cas d'un milieu hétérogène. Pour introduire le sujet de façon didactique, il est intéressant de passer par l'analogie avec le retournement temporel (Fink, 1992). Cette présentation est issue de celle de Derode et al. (2003b) Wapenaar et al. (2005) et Gouedard et al. (2008).

Dans un milieu invariant temporellement, une source S émet une impulsion. Les signaux $\phi_A(t)$ et $\phi_B(t)$ sont enregistrés en deux points A et B quelconques. Ce dispositif, ainsi que son équivalent par retournement temporel, sont présentés figure 2.6. Ces signaux sont donc les produits de convolution du signal source $\sigma_S(t)$ et de la réponse impulsionnelle du milieu entre S et A $G_{SA}(t)$ et entre S et B $G_{SB}(t)$. On peut donc écrire la corrélation en fonction du produit de convolution noté $*$:

$$C_{AB}(\tau) = \phi_A(t) * \phi_B(-t) = G_{AS}(t) * G_{BS}(-t) * \sigma_S(t) * \sigma_S(-t) \quad (2.22)$$

La corrélation entre deux signaux est par définition strictement équivalente à la convolution entre l'un de ces signaux et la retournée temporelle de l'autre. La réciprocity de l'équation d'onde dans un milieu invariant temporellement permet d'écrire :

$$C_{AB}(\tau) = G_{AS}(t) * G_{SB}(-t) * \sigma_S(t) * \sigma_S(-t) \quad (2.23)$$

Le retournement temporel peut être décrit de la manière suivante : émission de l'impulsion en A, enregistrement en S, émission du signal reçu retourné temporellement en S,

réception en B. Le signal enregistré en B s'écrira :

$$\phi_B(t) = G_{AS}(t) * G_{BS}(-t) * \sigma_S(t) * \sigma_S(-t) \quad (2.24)$$

Ce résultat signifie que la corrélation de signaux enregistrés en A et B est équivalente, au terme source près, au retournement temporel.

Dans un dispositif classique de retournement temporel, on enregistre le champ en un certain nombre de récepteurs autour d'une source S. Il est alors possible de refocaliser le champ au point S en émettant la retournée temporelle du signal enregistré par chaque récepteur. Ce dispositif est un miroir à retournement temporel. Dans un cas idéal, la réémission des signaux par le miroir va donner naissance à un front d'onde convergent. Ce front d'onde va être focalisé au point S. Après la focalisation, l'onde va continuer de se propager comme un front divergent (comme si la source au point S venait d'émettre le signal initial). Le résultat recherché est très souvent une focalisation de bonne qualité. Pour que cette focalisation soit bonne, le nombre et la répartition spatiale des récepteurs est très importante. La même idée peut être appliquée aux corrélations pour retrouver la fonction de Green décrivant la propagation entre A et B. Pour un ensemble de sources S entourant les récepteurs A et B, on peut écrire :

$$\frac{d[C_{AB}(\tau)]}{d\tau} = G_{AB}(t) - G_{BA}(t) \quad (2.25)$$

Avec les crochets [...] exprimant la moyenne sur les positions des sources. Cette fois, la qualité de la corrélation dépendra du nombre et de la disposition spatiale des sources (Froment et al., 2010) (Stehly et al., 2007).

2.6 Corrélation de bruit ambiant en milieu homogène

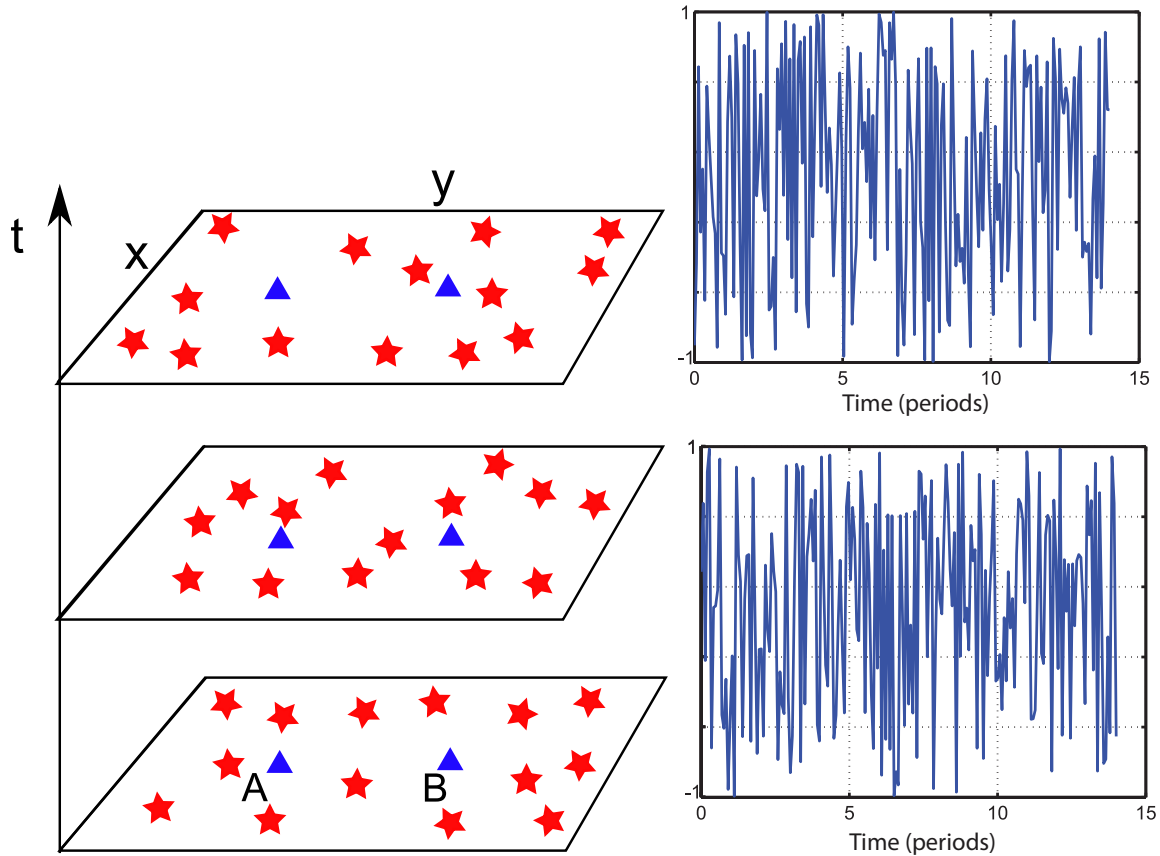


FIGURE 2.7: A Représentation dans le plan des récepteurs A et B (triangles bleu). La distribution spatiale des sources (étoiles rouges), varie en fonction du temps. B : signal enregistré en A et B respectivement.

Comme décrit précédemment, on enregistre dans certains milieux un champ ambiant, souvent appelé bruit. Ce champ est considéré comme étant issu de sources disséminées dans l'espace et le temps, illustrées, figure 2.7. Nous allons décrire ici comment, dans un cas simple, la corrélation du bruit enregistré en deux points du milieu nous permet de retrouver la réponse impulsionnelle du milieu entre ces deux points. On parlera alors improprement de corrélation de bruit pour exprimer l'autocorrélation spatiale du champ. Cette section sera utile au lecteur pour aborder plus en détail le lien entre corrélation de bruit ambiant et reconstruction de la réponse impulsionnelle du milieu, et sera donc une bonne introduction aux concepts évoqués dans ce manuscrit. Elle sera aussi utile à celui voulant comprendre de manière plus formelle l'utilité des coordonnées hyperboliques, illustrée dans la section suivante. Nous rappellerons ici brièvement les quelques

développements issus de Roux et al. (2005), principalement dans le but de montrer l'intérêt du passage à un système de coordonnées hyperboliques. Le milieu le plus adapté pour l'introduction de ce problème est un espace tridimensionnel homogène infini. La propagation des ondes s'y effectue à une vitesse c constante et sans atténuation. Par définition, la corrélation entre deux signaux $\phi_A(t)$ et $\phi_B(t)$ entre deux récepteurs A et B s'exprime :

$$C_{AB}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \phi_A(t) \phi_B(t + \tau) \quad (2.26)$$

Si l'on définit l'expression de la fonction de Green entre deux points S en r_s et A en r_A comme :

$$G(r_A, r_S; t, 0) = \frac{1}{4\pi|r_A - r_S|} \delta\left(t - \frac{|r_A - r_S|}{c}\right) \quad (2.27)$$

Avec δ la distribution de Dirac, il sera alors possible d'insérer une de ses formes simplifiées dans la fonction de corrélation. Sous l'hypothèse que les sources sont décorréliées en temps et en espace telles que :

$$\langle S(r_s, t_S) S(r_{s'}, t_{S'}) \rangle = Q^2 \delta(t_S - t_{S'}) \delta(r_s - r_{s'}) \quad (2.28)$$

Il est à noter que ceci est vrai lors d'une moyenne sur les réalisations, représentée par les crochets $\langle \dots \rangle$. S'ensuit :

$$\langle C_{AB}(\tau) \rangle = Q^2 \int_{-\infty}^{\infty} dr_s \int_{-\infty}^{\infty} ndt \frac{1}{|r_A - r_S|} \frac{1}{|r_B - r_S|} \delta\left(\tau - \frac{|r_B - r_S|}{c} + \frac{|r_A - r_S|}{c}\right) \quad (2.29)$$

Cette équation permet de relier la position d'une source quelconque à un temps τ de corrélation. En effet, l'argument du delta porte la condition :

$$|r_B - r_S| - |r_A - r_S| = c\tau \quad (2.30)$$

Cette condition impose que toutes les sources contribuant à un τ donné se trouveront sur une même hyperboloïde. Cela implique que si l'on s'intéresse au temps de contribution en fonction de la position de la source, il sera plus adapté de travailler en coordonnées hyperboliques qu'en coordonnées cartésiennes, comme montré figure 2.8. Ce problème est abordé plus en détail dans le chapitre suivant. Pour pallier le problème de la divergence de l'intégrale sur les temps, il est nécessaire de ne considérer le signal que sur un temps fini (ce qui a aussi pour avantage d'être plus réaliste). L'intégrale sur le temps t pourra alors être écrite comme le produit $T\nu$ avec T l'intervalle de temps considéré et ν la densité de sources par unité de temps et de volume. Après passage en coordonnées hyperboliques, cette équation se simplifie et l'on trouve :

$$\langle C_{AB}(\tau) \rangle = 2\pi a Q^2 T \nu \int_0^{\infty} \sinh(\phi) d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \delta\left(t + 2a \frac{\sin(\theta)}{c}\right) d\theta \quad (2.31)$$

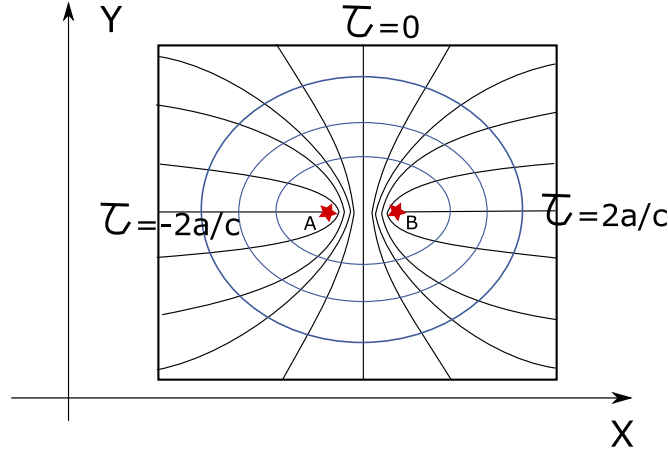


FIGURE 2.8: Schéma représentant un repère hyperbolique, adapté à l'étude des corrélations entre les points A et B. Ces deux points sont les foyers des hyperboles et des ellipses représentant le repère.

Après un dernier changement de variable, il est possible d'écrire :

$$\langle C_{AB}(\tau) \rangle = 2\pi a Q^2 T \nu \int_0^\infty \sinh(\phi) d\phi \int_{-a}^a \delta(t + \frac{2x}{c}) dx \quad (2.32)$$

L'intégration sur la variable x donne une fonction porte, telle que :

$$\Pi(\tau) = H(\tau + (2a)/c) - H(\tau - (2a)/c) \quad (2.33)$$

Avec H la fonction de Heaviside. L'amplitude de cette fonction est de 1 pour $-2a/c \leq \tau \leq 2a/c$, et de zéro partout ailleurs. L'intégrale sur la variable ϕ décrit l'amplitude de la fonction de corrélation. Dans un milieu infini sans atténuation, $\forall -2a/c \leq \tau \leq 2a/c$, $\lim_{\phi \rightarrow +\infty} \langle C_{AB}(\tau) \rangle$. Pour éviter que cette intégrale ne diverge, il est nécessaire, soit de fixer ϕ , soit de prendre en compte un milieu avec atténuation. Pour des raisons de simplicité, nous ne détaillerons que le premier cas. Si l'on prend $\phi = \phi_0$, on trouve l'expression :

$$\langle C_{AB}(\tau) \rangle = 2\pi Q^2 T a \nu e^{\nu} [\cosh(\phi_0) - 1] \Pi(\tau) \quad (2.34)$$

Dont l'expression de la dérivée est :

$$\frac{d\langle C_{AB}(\tau) \rangle}{d\tau} = 4\pi a Q^2 T \nu [\cosh(\phi_0) - 1] \frac{1}{2a} [\delta(t + \frac{2a}{c}) - \delta(t - \frac{2a}{c})] \quad (2.35)$$

Soit, sous sa forme implicite :

$$d\langle C_{AB}(\tau) \rangle / d\tau \propto G_{AB}(t) - G_{BA}(t) \quad (2.36)$$

On a donc montré que la dérivée de la fonction de corrélation permet d'obtenir les fonctions de Green causale $G_{AB}(t)$ et acausale $G_{BA}(t)$.

2.7 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que la propagation des ondes dans un milieu, qu'il soit complexe ou non, peut être décrite à l'aide de fonction de Green. Ces fonctions de Green peuvent aller d'une expression très simple dans un milieu homogène à une expression extrêmement complexe dans un milieu hétérogène.

La coda sismique est une démonstration de cette complexité. A partir d'une source ponctuelle dans un milieu présentant des hétérogénéités, on enregistre un signal dont l'interprétation est hasardeuse. En effet, l'onde émise explore le milieu lors d'une marche trop compliqué à reconstituer. Il est classique d'extraire des informations de cette coda en étudiant son enveloppe. Nous allons pour notre part nous intéresser à la reconstruction des fonctions de Green évoquées plus haut à l'aide de corrélations dans la coda.

Campillo and Paul (2003) ont montré que la corrélation de portions de coda enregistrées en deux récepteurs permettait de reconstituer la fonction de Green entre ceux-ci. Cette reconstruction souffrait cependant d'une asymétrie entre ses parties causales et acausales. A la suite de cette étude, les études fondées sur la corrélation du bruit sismique ambiant, issu de sources réparties sur le globe, ont été couronnées de succès. Dans ce cas, la reconstruction de la fonction de Green tend à être symétrique. Nous avons alors rappelé la théorie sous-tendant ces résultats. Cette théorie sera pour nous essentielle pour élaborer un modèle décrivant l'asymétrie des corrélations dans la coda. Ce rappel théorique sur l'équivalence entre fonction de Green et corrélation nous a aussi permis de rappeler que le repère hyperbolique est un repère particulièrement intéressant dans le cadre des études sur la corrélation entre deux points du milieu. Nous nous servons des avantages liés au repère hyperbolique lors du chapitre suivant.

Chapitre 3

Simulations numériques

3.1 Introduction

Afin d'étudier la convergence de la fonction de corrélation vers la fonction de Green dans la coda, nous avons besoin d'un cas d'étude relativement simple et aux paramètres contrôlables. De plus, nous nous intéresserons à des variations de faible amplitude, il sera donc nécessaire de rendre le ratio signal bruit le plus favorable possible. Dans cette optique, nous nous intéresserons non plus à un événement individuel, mais à des moyennes. Toutes ces contraintes rendent l'utilisation de simulations numériques particulièrement adaptée à notre étude.

L'usage de simulations numériques est de nos jours très répandu. Ces techniques permettent d'obtenir de façon rapide et peu coûteuse des données qu'il aurait été très compliqué d'obtenir par des expériences analogiques. Dans ce contexte, nous allons élaborer une expérience qui nous permettra d'étudier au mieux l'évolution temporelle de la fonction de Green dans un contexte de diffusion multiple.

3.1.1 Schéma numérique

Nous allons simuler la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu 2D. Pour cela, nous allons utiliser un code de simulations numériques développé par Julien de Rosny, d'après les schémas numériques détaillés dans Liu and Tao (1997). L'algorithme de différences finies en domaine temporel (FDTD) permet la résolution en temps et en espace des équations d'Euler linéarisées. Le solveur suit un schéma de type Leapfrog. L'intégration en « bonds de grenouille » (leapfrog) est une méthode d'intégration numérique pour les équations différentielles. Les déplacements et les vitesses sont évalués sur des pas de temps légèrement décalés, ce qui donne son nom à la méthode, chaque quantité « bondissant » par-dessus l'autre. Pour des questions de stabilité numérique, la grille temporelle

est régulière. Dans le cas de nos simulations, le maillage spatial sera lui aussi régulier, pour des questions pratiques. L'intégration de type leapfrog présente aussi l'intérêt d'être réversible temporellement.

3.1.2 Conditions aux bords

Notre but est de simuler la propagation d'ondes dans un milieu infini. Cependant, cela n'est évidemment pas possible. Il va donc falloir définir les conditions aux bords de notre milieu. Grossièrement, cela revient à effectuer un choix entre bords absorbants ou réfléchissants. Dans notre cas, il n'est pas possible de travailler dans une cavité réverbérante : les bords de la cavité auraient alors une influence prépondérante dans la répartition de l'énergie dans le milieu. En effet, nous serions alors dans une étude modale d'une cavité remplie de diffuseurs, qui bien qu'intéressante, dépasse le cadre de cette étude. Ainsi, les paramètres de diffusion du milieu ne seraient plus dépendants uniquement des hétérogénéités, mais aussi des propriétés de la cavité. Il est donc nécessaire de travailler dans un domaine à bords absorbants. Il existe de nombreux types de bords absorbants pour les méthodes de différences finies. Notre choix se porte sur des bords de type PML (perfectly matched layer, couche absorbante parfaitement adaptée), initialement décrits par Berenger (1994). L'avantage de ce type de couche absorbante est de minimiser les réflexions dans le milieu. Le modèle numérique exact utilisé est détaillé dans Liu and Tao (1997).

3.1.3 Enjeux des simulations numériques

Il sera possible de contrôler la taille, la forme et les paramètres intrinsèques des hétérogénéités du milieu. Comme expliqué dans le chapitre précédent, il sera intéressant de regarder l'influence de différentes moyennes sur la convergence. Ces moyennes sont de trois types : spatiales, temporelles et sur le désordre. On peut améliorer les moyennes spatiales en améliorant la résolution spatiale de notre expérience (par exemple en optimisant la densité de récepteurs pour un milieu donné). La moyenne temporelle peut s'effectuer simplement en augmentant la durée de l'expérience. Dans le cas de la moyenne sur le désordre, il va être nécessaire de réitérer un très grand nombre de fois chaque manipulation, afin de pouvoir effectuer une moyenne efficace sur les positions des diffuseurs. Chaque réalisation du milieu consistera à modifier la distribution spatiale des hétérogénéités, puis à effectuer une nouvelle simulation. Les facteurs limitant les simulations seront le temps de calcul, la stabilité numérique et le volume de mémoire disponible. L'échantillonnage temporel et spatial est fixé afin de permettre un temps de calcul et une dispersion/dissipation numérique raisonnables pour les temps et les fréquences considérés Zhou et al. (1996).

3.1.4 Position des sources et récepteurs et réciprocity de l'équation d'onde

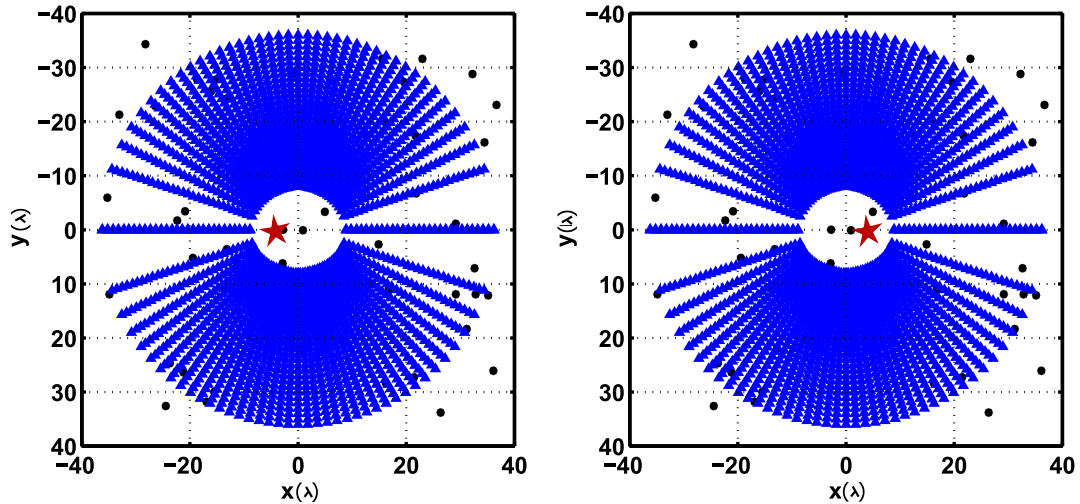


FIGURE 3.1: Illustration de l'utilisation de la réciprocity de l'équation d'onde dans les simulations numériques. Les distances sont exprimées en fonction de la longueur d'onde centrale choisie pour les simulations numériques, telles que la vitesse de propagation et la fréquence centrale soient toutes deux de valeur unitaire. Pour une réalisation du milieu, la source est alternativement placée au niveau des deux étoiles rouges. On enregistre le champ sur un grand nombre de récepteurs (triangles bleus). Afin de connaître la fonction de Green exacte entre les deux sources (récepteurs virtuels) on enregistre aussi le champ en ces points. Ainsi, nous n'avons besoin de n'effectuer que deux simulations pour avoir autant de corrélations que de récepteurs, tandis que sans l'usage de la réciprocity nous devrions effectuer une simulation par corrélation. Le gain de temps est donc très important.

Nous avons montré dans le chapitre 2 que la géométrie hyperbolique est la géométrie naturelle de notre étude. La répartition des sources sur des hyperboles et des ellipses confocales permet, pour une source donnée, de connaître le temps auquel elle contribuerait dans la fonction de corrélation dans un milieu homogène. On présente notre dispositif expérimental figure 3.1. Les deux récepteurs sont placés au centre du milieu, à une distance $2a=L/10$. Le protocole de simulation devant être répété un grand nombre de fois, nous allons nous servir de la réciprocity de l'équation d'onde afin de réduire le temps de calcul. L'approche directe consisterait à propager une onde depuis chaque source et de l'enregistrer à chaque fois au deux récepteurs. L'approche réciproque consiste cette fois à émettre une onde depuis la position de l'un des récepteurs, puis à enregistrer le champ à chaque position de source virtuelle. Il faut ensuite répéter l'opération en propageant l'onde depuis l'autre récepteur. De cette manière, seules deux simulations sont nécessaires

par réalisation du milieu, contre une pour chacune des 1800 sources auparavant.

3.2 Milieu de propagation

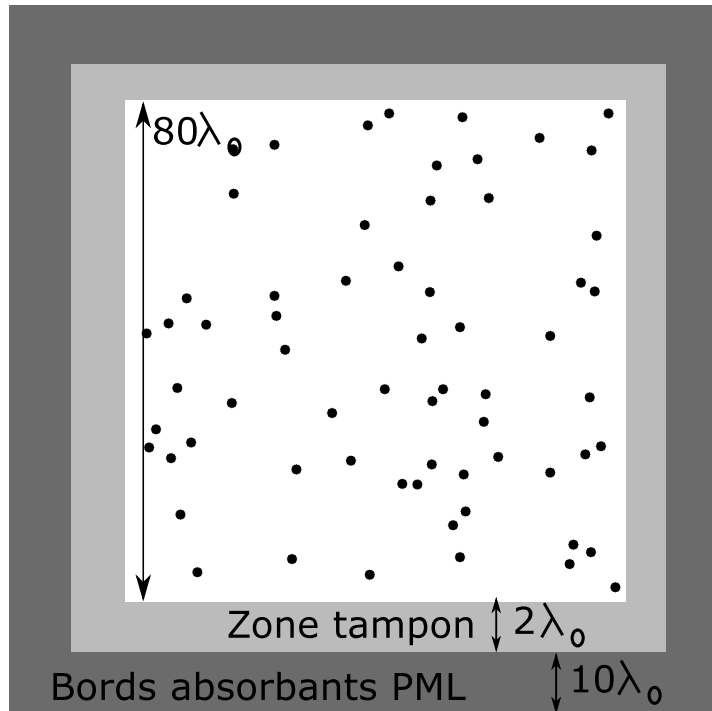


FIGURE 3.2: Schéma du milieu de propagation utilisé dans ce manuscrit. La zone d'intérêt dans laquelle seront placés les récepteurs est en blanc. Dans cette zone sont répartis des diffuseurs totalement impénétrables (ronds noirs). On délimite une zone sans diffuseurs (gris clair) autour de la zone d'intérêt afin que les ondes arrivant aux bords ne présentent pas des angles d'incidence trop importants, permettant ainsi une meilleure efficacité des conditions aux bords absorbants. En gris foncé, bords absorbants.

Nous allons ici décrire les choix effectués en terme de milieu de propagation. Dans un but de simplicité et d'homogénéité, on pose une longueur d'onde de référence $\lambda_0 = 1m$. La vitesse des ondes dans un milieu homogène (sans diffuseurs) est de $c_0 = 1m.s^{-1}$ et $t_0 = 1s$. Cela nous permet d'avoir une équivalence entre unités de temps et de période. Nous allons ensuite nous concentrer sur la caractérisation du milieu, afin de pouvoir relier de manière pertinente les paramètres physiques en jeu à nos observations. Nous allons enfin pouvoir étudier l'évolution de la fonction de corrélation dans la coda. Le milieu d'étude doit être choisi afin d'enregistrer un signal présentant une coda significative, dans le but de pouvoir étudier sa dynamique temporelle. Pour cela, il faut dimensionner le système afin de ne pas enregistrer un signal trop affecté par les effets de bord du

domaine. Nous verrons dans le chapitre suivant que cette tâche n'est pas triviale. La taille de l'espace est limitée par les performances de la simulation numérique. Des effets de bord se feront sentir à l'interface entre la zone hétérogène et la zone homogène qui la contient. En effet, dans cette zone la distribution d'énergie dans le milieu ne sera plus isotrope. On observera une fuite d'énergie de la zone hétérogène vers la zone homogène. Notre zone hétérogène de référence est une surface de $80\lambda_0 * 80\lambda_0$. Dans cette surface, on répartit de manière aléatoire un certain nombre d'hétérogénéités. Cette surface est inscrite dans une surface sans hétérogénéités de $84*84\lambda_0$. Les bords cette dernière surface sont absorbants. Ce milieu est représenté figure 3.2 . Le paramètre contrôlant la diffusion dans le milieu est le libre parcours moyen. Il est possible de modifier le libre parcours moyen dans le milieu de référence en agissant sur trois paramètres. En premier lieu, on peut modifier le nombre de diffuseurs dans le milieu. Le libre parcours moyen sera linéairement proportionnel à ce nombre. Il est possible de changer la taille des diffuseurs, afin de modifier leur section efficace. La section efficace de diffusion ne dépend cependant pas linéairement de la taille du diffuseur. Il est enfin possible de modifier les paramètres de propagation des ondes dans les diffuseurs, toujours dans le but de modifier leur section efficace de diffusion. Nous retiendrons dans le cadre de ce manuscrit les deux premières solutions.

3.2.1 Propriétés des diffuseurs

Dans notre étude, la propagation des ondes ne sera pas possible à l'intérieur des diffuseurs (infiniment rigides). En effet, si l'on choisit des diffuseurs pénétrables, la propagation des ondes à l'intérieur des diffuseurs aura une influence non négligeable sur le signal enregistré. Les diffuseurs agiront comme des résonateurs, et rendront les phénomènes étudiés plus complexes. La compressibilité des diffuseurs sera nulle, ainsi que leur densité. De cette façon, aucune onde ne se propagera à l'intérieur des diffuseurs.

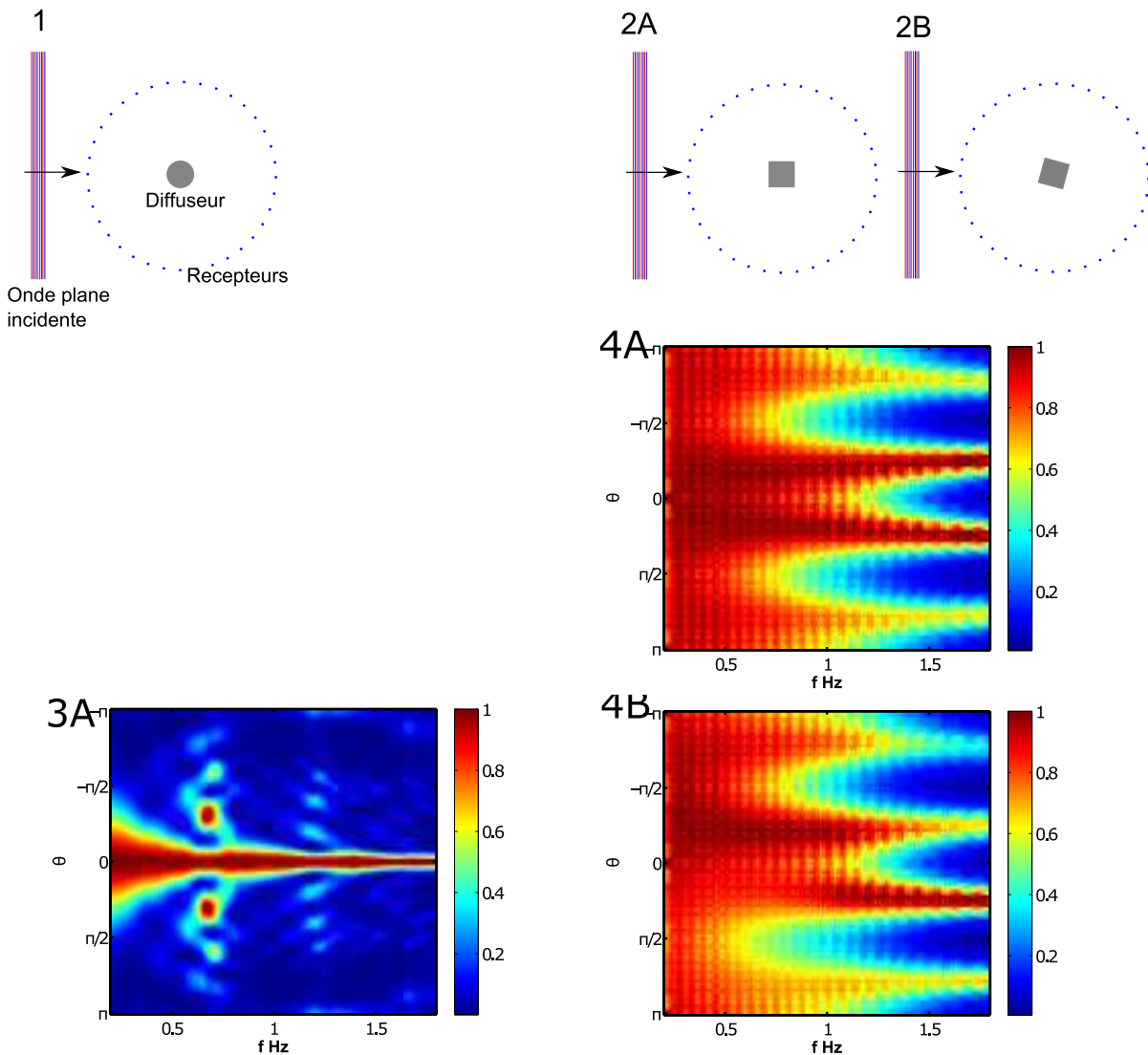


FIGURE 3.3: 1, 2A, 2B : protocole de détermination expérimentale de la section différentielle de diffusion. Un diffuseur sur lequel est envoyée une onde plane est entouré de capteurs. On enregistre le champ reçu sur ces capteurs, puis l'on retranche le champ enregistré lors de la même expérience sans diffuseur. On obtient alors le champ diffusé. Nous illustrons ici le fait que pour un diffuseur de forme circulaire (1A), l'angle de l'onde plane incidente n'aura pas d'influence sur la section différentielle de diffusion. Dans le cas d'un diffuseur de forme différente (2A et 2B), l'angle d'incidence modifiera la section différentielle de diffusion. 3A, 4A, 4B : section différentielle de diffusion en fonction de la longueur d'onde de l'onde incidente, normalisée pour chaque longueur d'onde. 3A : section différentielle de diffusion pour un diffuseur circulaire de rayon $r = 0.8\lambda_0$. On voit que la diffusion apparaît très piquée vers l'avant. 4A, 4B : section différentielle de diffusion pour un diffuseur carré d'arête $L = 0.1\lambda_0$, pour deux angles d'incidences différents correspondant respectivement à 2A et 2B. La section différentielle de diffusion est différente en fonction de l'angle incident. On distingue quatre zones de fortes amplitudes, correspondant aux quatre sommets du diffuseur.

On choisit des diffuseurs impénétrables de deux tailles différentes. Les premiers seront des diffuseurs ponctuels correspondant pour chacun à un point de grille. Les seconds, discoïdaux, auront un rayon $r = 0.8\lambda_0$. Il est possible d'estimer expérimentalement la section efficace de diffusion différentielle d'un diffuseur en fonction de la fréquence. Pour cela, on place un réseau circulaire de capteurs centrés sur le diffuseur. On simule la propagation de l'onde en l'absence du diffuseur et l'on enregistre le champ ψ_t , puis on enregistre le champ en présence du diffuseur ψ_s . On a donc une expression de la section différentielle de diffusion en fonction de l'angle θ par rapport au vecteur d'onde incident :

$$\frac{d\sigma_s(\theta)}{dt} = R \frac{|\psi_t(\theta) - \psi_s(\theta)|^2}{|\psi_t(\theta)|^2} \quad (3.1)$$

Pour connaître la section différentielle de diffusion, il suffit de calculer l'intensité du champ diffusé à une distance R suffisamment lointaine du diffuseur. Les résultats sur les simulations numériques sont présentés figure 3.3. Bien sûr, on retrouve dans nos simulations numériques le comportement évoqué plus tôt dans ce manuscrit. Plus le diffuseur est grand par rapport à la longueur d'onde, plus la propagation apparaît dirigée vers l'avant. Cependant, quelques points sont à noter. Dans le cas des diffuseurs dont le rayon est très inférieur à la longueur d'onde, la section différentielle de diffusion présente une forme particulière. Cela est dû au fait que plus les diffuseurs sont petits dans nos simulations numériques, moins leur forme approche celle d'un disque. Dans le cadre de nos simulations numériques, un diffuseur ponctuel est donc un carré très petit devant la longueur d'onde. Cela explique bien la forme de la section différentielle de diffusion dans ce cas. Pour un diffuseur plus grand, sa forme est plus proche de celle d'un disque, mais la diffusion est déjà très orientée vers l'avant. Le problème posé par les diffuseurs ponctuels est que, dans une grille régulière, tous les diffuseurs auront la même orientation. Les paramètres de diffusion du milieu varient donc en fonction de la position de la source par rapport aux diffuseurs, ce qui rendra l'analyse beaucoup plus complexe. Dans ce manuscrit, nous considérons donc des diffuseurs de rayon $r = 0.8\lambda_0$.

3.2.2 Nombre de diffuseurs et propagation de l'énergie

On observe un comportement très différent en fonction du nombre de diffuseurs (figure 3.5). Quand le nombre de diffuseurs est faible, la diffusion joue un rôle peu important et l'énergie est concentrée dans le front balistique. A l'inverse, quand le nombre de diffuseurs est élevé, la diffusion est forte et l'on observe une localisation faible de l'énergie aux alentours de la source.

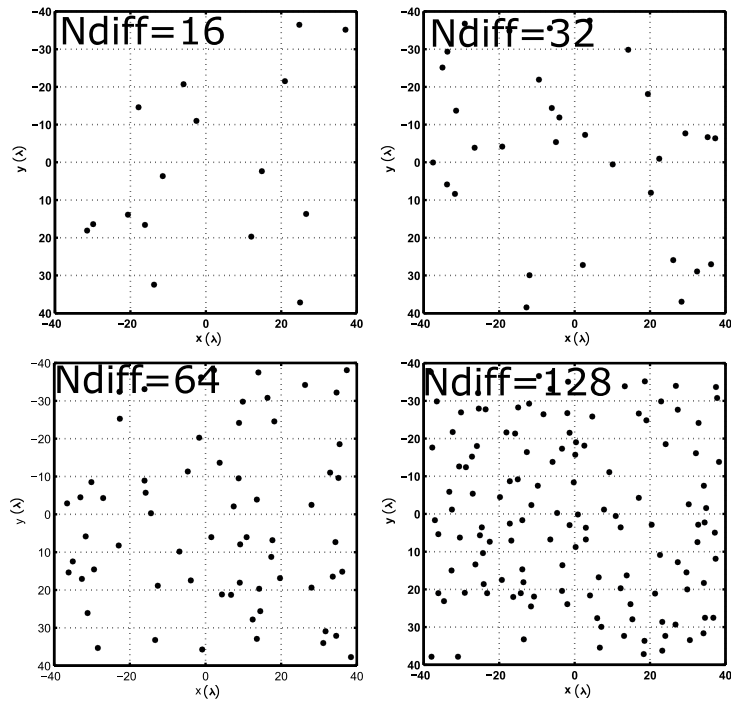


FIGURE 3.4: Exemple de milieux d'études utilisés lors des simulations numériques. Ces milieux comportent, de gauche à droite et de haut en bas, 16, 32, 64 et 128 diffuseurs. Le rayon d'un diffuseur est de $0.8m$.

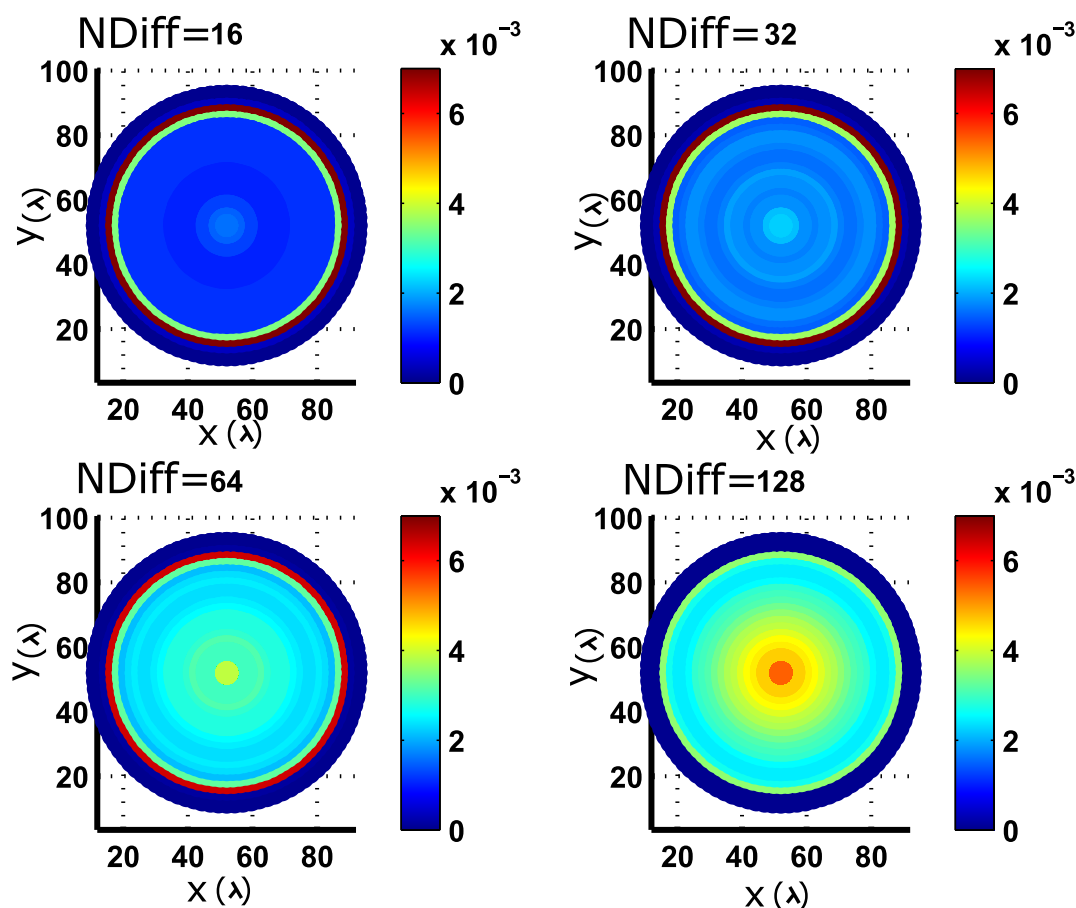


FIGURE 3.5: Intensité totale mesurée lors des simulations numériques en fonction de la distance à la source (la source est au centre) pour les quatre milieux contenant des diffuseurs épais. On effectue un grand nombre de simulations, puis l'on calcule l'intensité en tout point à un instant donné. On effectue ensuite une moyenne sur les réalisations du milieu puis une moyenne radiale centrée sur la source. Au temps montré ici, le front d'onde balistique n'est pas encore sorti du milieu. On voit que pour les milieux faiblement diffusants, la majeure partie de l'énergie est concentrée dans le front d'onde balistique (en rouge pour les milieux à 16, 32 et 64 diffuseurs). Pour les milieux plus diffusants, l'énergie reste localisée plus près de la source.

3.2.3 Estimation du libre parcours moyen

Il est important d'avoir une connaissance a priori du libre parcours moyen, afin de pouvoir décrire la propagation de l'énergie dans le milieu de façon rigoureuse. Il est possible d'estimer le libre parcours moyen à partir de la section efficace de diffusion, ou à partir d'une méthode reposant sur le calcul du ratio entre énergie totale I_t et énergie cohérente I_c . On se propose ici d'estimer le libre parcours moyen élastique du milieu en

appliquant la méthode décrite dans De Rosny and Roux (2001). Pour cela, on calcule le ratio entre énergie cohérente et énergie totale dans le milieu en fonction du temps pour un grand nombre de réalisations du milieu. Afin d'avoir de l'énergie cohérente sur des temps permettant l'estimation de ce rapport, on travaille dans une cavité réverbérante. Les parois de la cavité seront les mêmes pour toutes les réalisations du milieu (les réflexions sur les bords seront donc cohérentes). Expérimentalement, deux réalisations du milieu ne varieront que par la position des diffuseurs. On enregistre le champ ϕ en différents points afin de pouvoir faire une moyenne supplémentaire (et ainsi augmenter le rapport S/N). Le ratio calculé nous renseigne sur la capacité des diffuseurs à transformer l'énergie cohérente en énergie incohérente. Il est possible de le relier directement au libre parcours moyen. L'énergie cohérente et l'énergie totale sont décrites par les équations suivantes :

$$I_t = I_0 \exp(-R/l_a) \quad (3.2)$$

$$I_c = I_0 \exp(-R/l_a) \exp(-R/l_s) \quad (3.3)$$

avec I_0 l'intensité du champ, R la distance à la source, l_s le libre parcours moyen élastique et l_a le libre parcours moyen d'absorption. On a donc une expression reliant le champ enregistré et le libre parcours moyen. Dans une cavité réverbérante, cette expression peut être écrite en fonction du temps et non plus de la distance par rapport à la source grâce à la méthode des images, ce qui donne :

$$\frac{I_c}{I_t}(t) = \exp(-tc/l_s) \quad (3.4)$$

avec t représentant le temps d'arrivée d'un écho de la source sur un bord réfléchissant. Nous pouvons appliquer cette méthode pour caractériser le libre parcours moyen élastique dans nos milieux de propagation. Les résultats sont présentés figure 3.6. Dans les milieux considérés, le libre parcours moyen varie de $107 \lambda_0$ à $13 \lambda_0$. Dans ce cas, les valeurs pour le temps de Thouless ($\tau_D = L^2/D$, avec L la taille de la zone de propagation et D une constante de diffusion) vont d'environ 30 à 250 périodes. Pour des temps $t \ll \tau_D$, on sera dans le régime diffusif. L'effet de la position de la source sera encore observable dans les données. Pour des temps $t \gg \tau_D$, on sera dans un régime dit ergodique. On peut aussi estimer le libre parcours moyen à partir de la section efficace de diffusion. Dans ce cas, on suivra la loi $l = 1/n\sigma_s$. En appliquant cette loi, il est possible d'obtenir une estimation de σ_s . Les résultats obtenus figure 3.6 sont du même ordre de grandeur que les résultats obtenus par la méthode décrite figure 3.3.

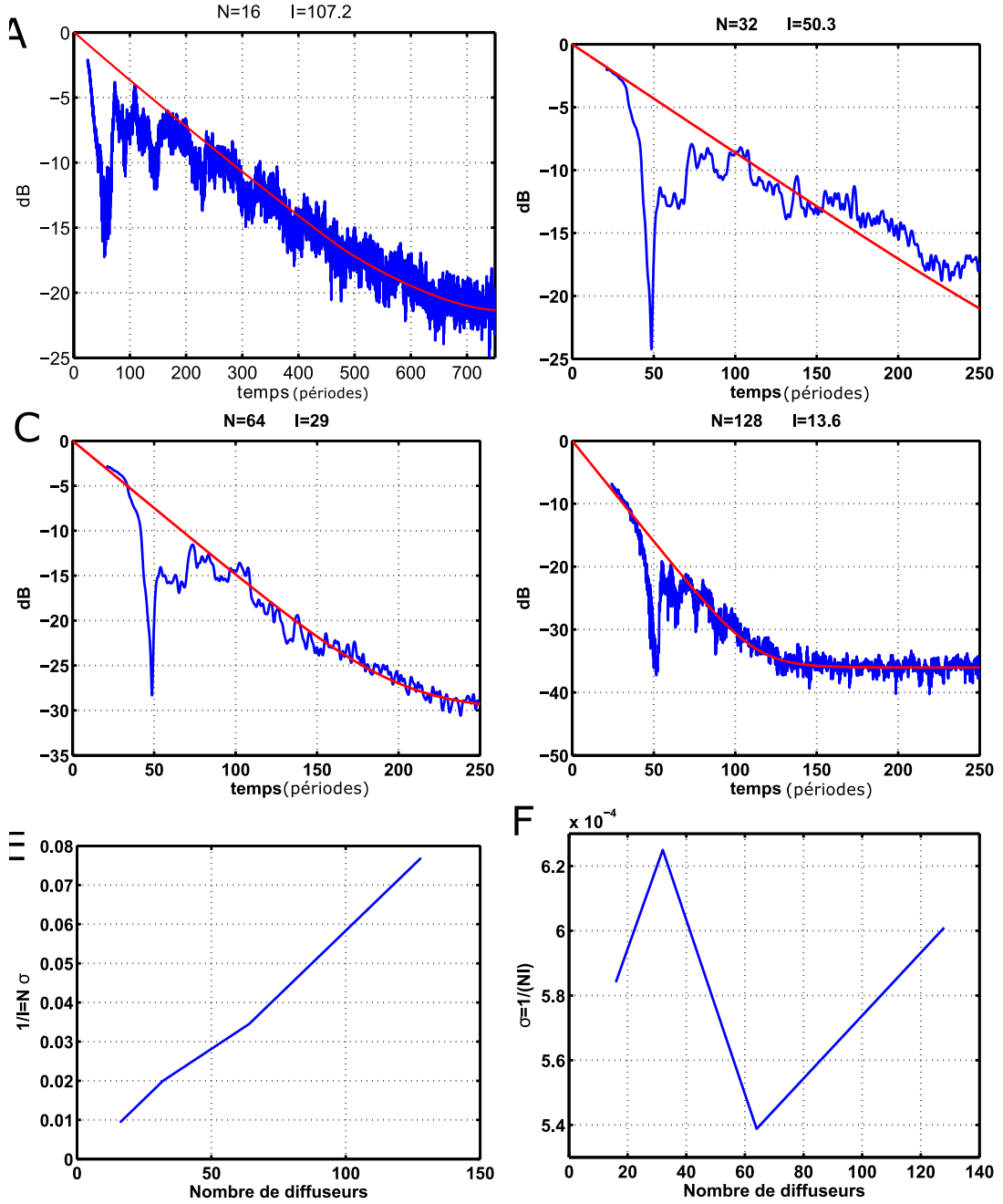


FIGURE 3.6: A à D : en bleu, $\frac{I_c}{I_t}(t)$ mesuré dans une cavité réverbérante, pour des milieux comprenant respectivement 16, 32, 64 et 128 diffuseurs. On estime le libre parcours moyen élastique pour chaque milieu grâce à l'ajustement aux moindres carrés de la loi $\exp(-tc/l_s)$, représentée par la courbe rouge. Le nombre de réalisations du milieu et le temps de propagation ont été choisis pour chaque milieu afin d'avoir une tendance clairement discernable. E : Inverse du libre parcours moyen élastique estimé par l'ajustement aux moindres carrés en fonction du nombre de diffuseurs. L'évolution étant linéaire, on vérifie ici $1/l = n\sigma_s$, ce qui nous permettra d'estimer σ_s . F : σ_s estimé en fonction du nombre de diffuseurs dans le milieu.

3.3 Conclusion

Nous avons présenté les simulations numériques effectuées pour étudier un modèle simple de coda. Nous avons choisi de simuler la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu hétérogène en 2D. Dans notre cas, le milieu de propagation est composé d'un milieu homogène dans lequel sont disposés un certain nombre de diffuseurs impénétrables tous identiques. Les propriétés numériques et les conditions aux limites de ce modèle numériques sont détaillées, afin de montrer que l'on peut considérer notre dispositif expérimental comme un milieu multiplement diffusant. Nous effectuons ensuite des tests sur les simulations numériques afin de mieux connaître les caractéristiques du milieu de propagation, comme la section différentielle de diffusion des hétérogénéités ou le libre parcours moyen. Ces tests permettent d'avoir une référence pour l'étude des résultats dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Simulations numériques : résultats

4.1 Introduction

Dans cette section nous allons présenter les résultats issus des simulations numériques. Nous allons étudier l'effet des différentes moyennes (spatiale, temporelle et d'ensemble) sur la reconstruction de la fonction de Green moyenne. Nous nous intéresserons particulièrement à l'amplitude de l'onde balistique reconstruite à l'aide de la fonction de corrélation. Nous comparerons les parties causales et acausales de la fonction de Green ainsi reconstruite, afin de montrer l'évolution de la répartition de l'énergie dans le milieu. En corrélant différentes fenêtres de temps dans la coda, nous mettrons en évidence la dynamique temporelle de la partition de l'énergie dans le milieu. Nous montrerons que cette dynamique temporelle dépend du libre parcours moyen du milieu. Nous développerons un modèle théorique pour les phénomènes observés dans le chapitre suivant.

4.1.1 Que va-t-on reconstruire ?

Comme nous l'avons rappelé plus tôt, il est possible de reconstruire la fonction de Green entre deux récepteurs grâce à la corrélation du champ enregistré en ces deux récepteurs (intercorrélation spatiale). Dans un milieu donné, notre but est de reconstruire cette fonction de Green entre deux récepteurs, en présence d'une source ponctuelle grâce à la contribution de la diffusion multiple. Dans un tel cas, la fonction de Green entre les récepteurs est d'une complexité infinie, car elle sera constituée de l'onde directe ainsi que du signal diffusé. Il sera donc impossible de la reproduire parfaitement. Il est de plus impossible de considérer des temps infinis pour la corrélation. La reconstruction de la fonction de Green du milieu sera donc forcément imparfaite. Dans ce cas, les fluctuations de la fonction de Green reconstruite issues des imperfections du processus de corrélation formeront du bruit (pseudonoise) (Larose et al., 2008). Ce bruit pourra être

très important, jusqu'à masquer la fonction de Green. Afin de diminuer ce bruit tout en conservant une géométrie identique entre source et récepteurs, il est possible d'effectuer une moyenne sur différentes réalisations du milieu. Nous illustrons l'effet de la moyenne sur les réalisations du milieu figure 4.1. Nous ne reconstruirons alors plus la fonction de Green d'un milieu réel, mais une fonction de Green moyenne qui rendra compte de la propagation de l'onde dans un milieu effectif. La fonction de Green moyenne ne permettra donc d'observer que les contributions cohérentes d'une réalisation à l'autre. Dans le cas d'un milieu hétérogène infini dont tous les diffuseurs seraient redistribués aléatoirement à chaque réalisation du milieu, la seule contribution cohérente est l'onde associée à l'onde directe. La fonction de Green reconstruite aura ainsi l'allure de la fonction de Green observée dans un milieu homogène, à un facteur d'amplitude près. Ce facteur d'amplitude sera lié à la conversion de l'intensité cohérente en intensité incohérente par les diffuseurs (voir le chapitre 6). Dans le cas où l'énergie est répartie de manière homogène dans le milieu, l'amplitude de l'onde balistique reconstruite sera la même pour les parties causales et acausales. Dans le cas contraire, les fluctuations de cette amplitude nous renseigneront sur la répartition de l'énergie dans le milieu. Nous allons donc nous servir des amplitudes de l'onde balistique reconstruites dans les parties causales et acausales de la fonction de Green comme d'un proxy pour étudier la répartition de l'énergie dans le milieu. Afin d'observer une évolution temporelle liée à la répartition de l'énergie dans le milieu, il sera nécessaire de normaliser les corrélations par leur énergie.

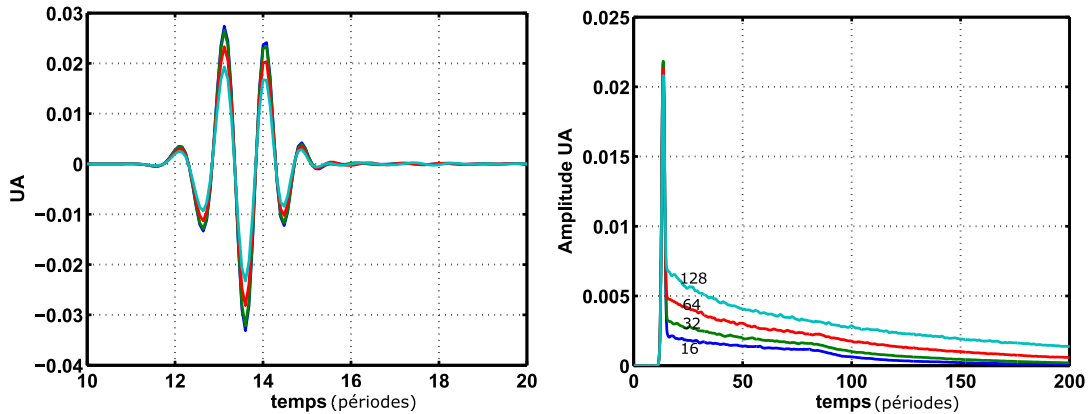


FIGURE 4.1: Moyenne sur les réalisations du champ (droite) et de l'intensité (gauche) lors de la propagation d'une onde entre deux points dans un milieu multiples diffusant (émission en et réception en deux points distincts, comme présenté figure 3.1) pour les quatre milieux considérés (16 diffuseurs : bleu foncé, 32 diffuseurs vert, 64 diffuseurs rouge, 128 diffuseurs bleu clair, voir figure ??). A gauche : Moyenne sur 100 réalisations du signal enregistré en B pour les quatre milieux considérés. La moyenne sur les réalisations permet de n'observer que la partie cohérente du signal, soit ici l'onde directe. On voit que l'amplitude de l'onde directe diminue lorsque le nombre de diffuseurs augmente. A droite : Moyenne sur 100 réalisations du milieu de l'enveloppe du signal enregistré en B. On voit que le signal est très clairement dominé par l'amplitude de l'onde directe. L'intensité diminue ensuite de façon plus lente et régulière. Dans les milieux les moins diffusants, on observe une légère inflexion de cette évolution à un temps d'environ 90 périodes. Les deux sources étant disposées à environ 80λ des bords, il est probable qu'une diminution de la diffusion de l'énergie due aux bords absorbants soit observée à des temps similaires (temps de Thouless). Il sera donc nécessaire d'envisager une fuite d'énergie du milieu.

4.1.2 Protocole

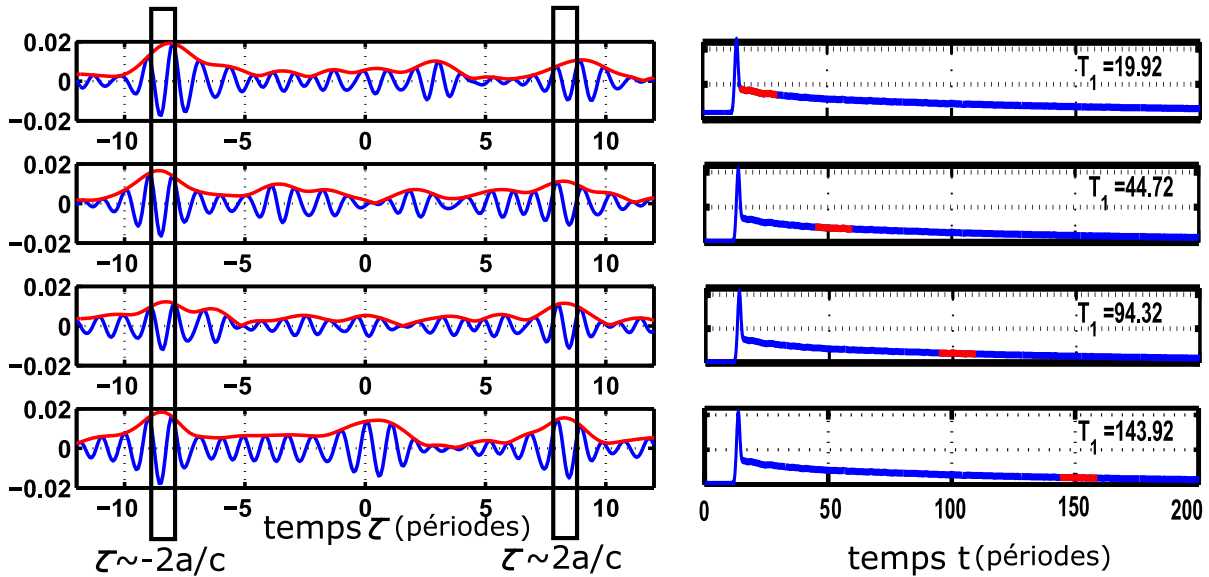


FIGURE 4.2: Illustration du protocole de construction d'un indicateur pour l'évolution temporelle de la fonction de corrélation. A gauche, fonction de corrélation (en bleu) et son enveloppe (en rouge) pour différentes fenêtres de temps. Pour chaque fenêtre de temps, on sélectionne l'amplitude mesurée en $\tau = \pm 2a/c$, avec $2a$ représentant la distance entre A et B, foyers du repère hyperbolique. A droite, enveloppe du signal total (en bleu) et de la fenêtre de temps sélectionnée pour la corrélation correspondante (en rouge).

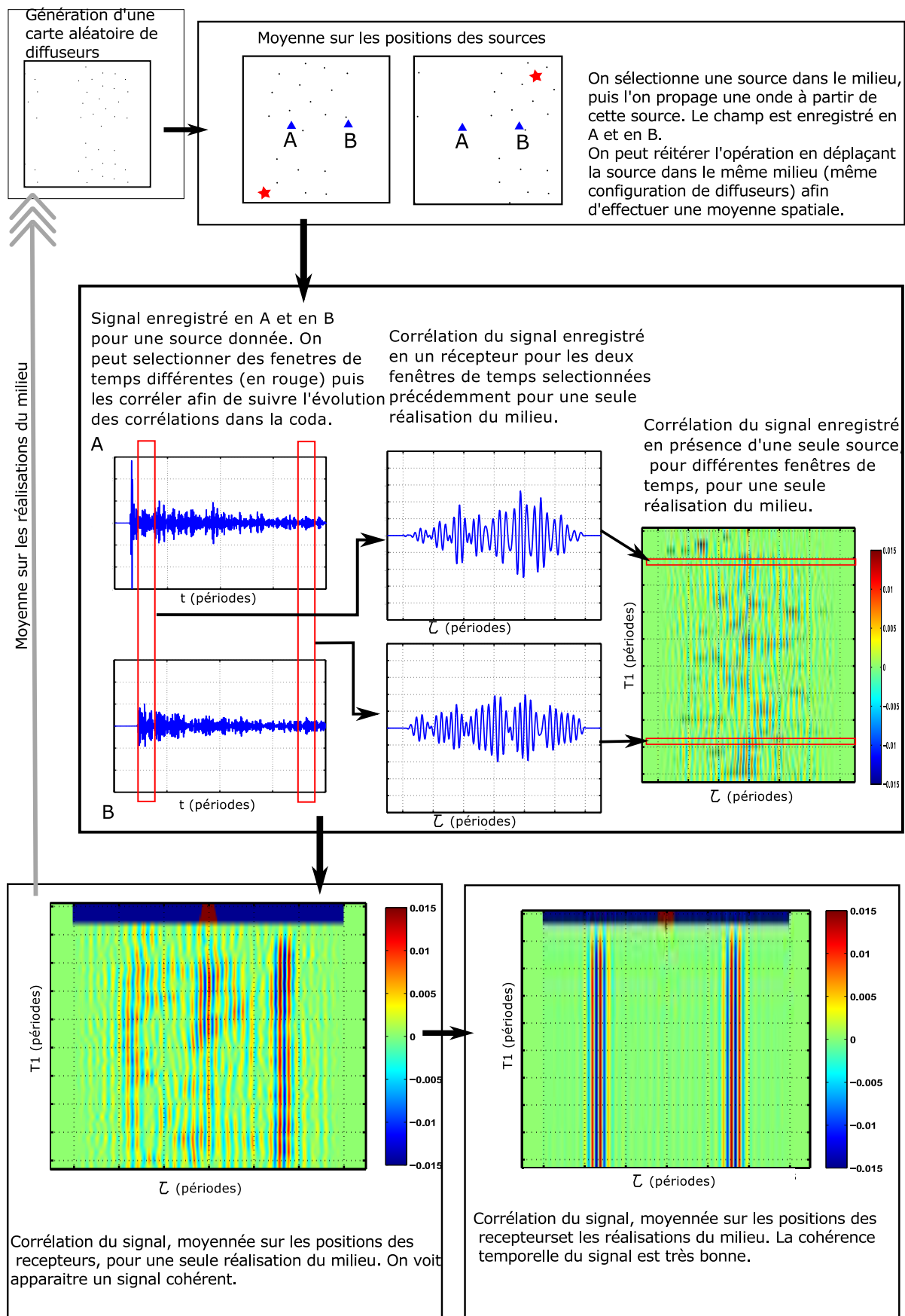
L'utilisation de la réciprocité de l'équation d'onde a l'avantage, en plus de la réduction des temps de calcul, de permettre la connaissance de la fonction de Green entre les deux points d'intérêt. On définit deux points A et B, foyers d'un repère hyperbolique. Pour un milieu donné, on procède ensuite à deux simulations. Une impulsion est d'abord émise en un point A du milieu, et enregistrée sur un nombre N de points placés sur le repère hyperbolique. La même impulsion est ensuite émise au point B, puis enregistrée aux mêmes points que précédemment. Lors des deux simulations, on enregistre aussi le champ aux points A et B. On considère maintenant, par réciprocité, que les points A et B sont nos récepteurs, et que chaque point auquel le champ a été enregistré est une source. On a donc, pour un milieu donné, N couples de signaux enregistrés aux points A et B. Afin de retrouver la fonction de Green entre ces deux récepteurs, il est nécessaire de corréler les signaux enregistrés. Il est possible de corréler tout ou partie du signal. Afin d'observer une dynamique temporelle dans la fonction de corrélation, nous corrélerons uniquement des fenêtres temporelles relativement courtes. Ainsi, pour chaque fenêtre temporelle, nous aurons la marque de la répartition de l'énergie dans le milieu. Nous serons alors en mesure de faire différentes moyennes afin d'étudier au mieux

la dynamique temporelle de la fonction de corrélation. La répartition inégale de l'énergie dans le milieu aura une influence sur la reconstruction des amplitudes des parties causales et acausales. Nous nous servirons de l'amplitude de la fonction de corrélation au temps de l'onde directe ($\pm 2a/c$) comme d'un proxy pour décrire l'évolution de l'énergie dans le milieu. Pour chaque fenêtre de temps, nous aurons deux valeurs d'amplitude pour une source initiale donnée. Ce processus est décrit figure 4.2. Nous allons particulièrement nous intéresser à l'évolution de ces amplitudes en fonction du temps, afin d'en tirer un lien avec les propriétés du milieu. De manière formelle, nous pouvons définir une valeur I telle que :

$$I(T_1, T_2; r) = C_{AB} \left(\tau = \pm \frac{2a}{c} \right) \quad (4.1)$$

On voit que I peut prendre deux valeurs par fenêtre de temps pour une source r donnée. Si l'on fixe la taille de la fenêtre $T_2 - T_1 = cste$, on s'intéressera uniquement à l'évolution temporelle de I .

SIMULATIONS NUMÉRIQUES : RÉSULTATS



58
 FIGURE 4.3: Illustration du protocole de corrélation utilisé pour les simulations numériques et des moyennes afférentes.

4.2 Les moyennes et la qualité de la reconstruction de la fonction de Green

Nous allons maintenant étudier l'effet des différentes moyennes sur la convergence de la fonction de corrélation et de la fonction de Green. Comme nous l'avons expliqué plus tôt (enjeu des simulations), ces moyennes sont de trois types : moyenne spatiale, moyenne temporelle et moyenne sur les réalisations du milieu. Nous allons ici les décrire indépendamment, afin de bien pointer les spécificités de chacune. Cette problématique a été étudiée plus en détail (et formalisée) par Larose et al. (2006) et Larose et al. (2008). La figure 4.3 résume les principales étapes du traitement des simulations numériques, et permet de visualiser les différentes moyennes qu'il est possible d'effectuer. On voit d'emblée que ces moyennes permettent d'améliorer drastiquement la qualité du signal reconstruit. Cependant, dans cet exemple, nous effectuons une moyenne spatiale. Les sources virtuelles (récepteurs) étant réparties de manière homogène autour des sources, nous allons perdre lors de cette moyenne toute information sur la répartition spatiale de l'énergie, qui nous intéresse particulièrement. De manière générale, une moyenne, si elle permet d'améliorer un rapport signal/bruit, se fait toujours au prix d'une perte d'information locale (que ce soit spatiale, temporelle, ou sur un milieu précis). Il faudra donc être prudent quant à l'utilisation de ces différentes moyennes.

4.2.1 Moyenne, grains d'information et corrélation

Une notion cruciale pour la plupart des problèmes évoqués dans ce manuscrit est celle de grain d'information. Le nombre de grains d'information d'un problème représente le nombre de données décorrelées observables sur ce problème. Schématiquement, le grain d'information est la brique élémentaire de la construction du ratio signal/bruit. Plus le nombre de grains d'information sera élevé, plus le ratio signal/bruit sera bon. Pour un exposé détaillé, le lecteur est invité à se rapporter à Derode et al. (2001). Le grain d'information peut dans ce cas être vu comme la plus petite variation d'un paramètre entraînant la décorrélation. Le nombre de grains d'information peut donc être évalué en calculant la fonction de corrélation pour différents paramètres. Par exemple, si l'on utilise plus de réalisations du milieu, le milieu moyen sera mieux exploré. Le nombre de grains d'information spatiaux est le nombre de couples source/récepteur spatialement décorrelés. Le nombre de grains d'information fréquentiels est le nombre de bandes de fréquence décorrelées. Nous allons ici décrire la variance de la fonction de corrélation pour les différentes moyennes effectuées. Le calcul de ces variances se fait simplement en calculant l'erreur de la fonction de Green reconstruite par rapport à la fonction de Green réelle du milieu. Pour cela, nous allons partir de la variance observée pour une fenêtre de temps de 15 périodes prise dans la coda, pour une source et un couple de

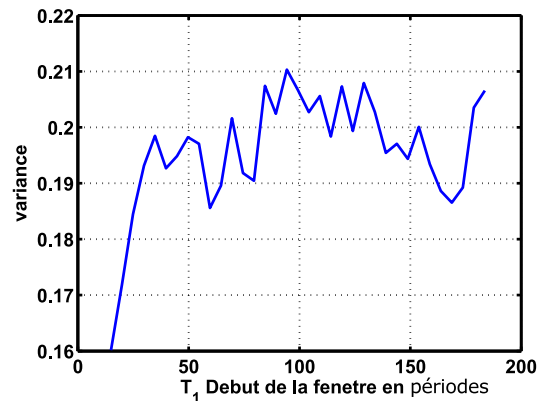


FIGURE 4.4: Variance de la fonction de corrélation obtenue avec une seule source et une seule réalisation du milieu, en fonction du début de la fenêtre temporelle choisie pour la corrélation. On calcule cette variance pour des temps inférieurs au temps de l'onde balistique, temps pour lesquels aucun signal ne devrait être reconstruit. Pour des fenêtres de temps dont le début se situe assez tôt dans la coda, la variance ne présente pas de valeur définie (l'onde n'a pas atteint les récepteurs, il est alors impossible de calculer une corrélation). Dès qu'il est possible de calculer des corrélations, la variance est proche de 0,2 et reste stable en fonction de la fenêtre observée. Cependant, une valeur de variance de cet ordre est beaucoup plus grande que l'amplitude de l'onde balistique. Il sera nécessaire d'effectuer des moyennes afin d'avoir une variance raisonnable.

récepteur, puis observer les variations de la variance selon les moyennes appliquées. Afin que cette fenêtre soit représentative de la coda, on déplace une fenêtre de 15 périodes sur tout le signal. On observe figure 4.4 que la variance pour une fenêtre est stable aux alentours de 0.2 dès que l'onde balistique n'est plus présente dans la fenêtre considérée. Cette valeur est problématique car l'amplitude de l'onde balistique à reconstruire est inférieure à cette valeur d'un ordre de grandeur. Il sera donc impératif d'effectuer des moyennes afin d'avoir un rapport signal/bruit acceptable.

4.2.2 Moyenne spatiale

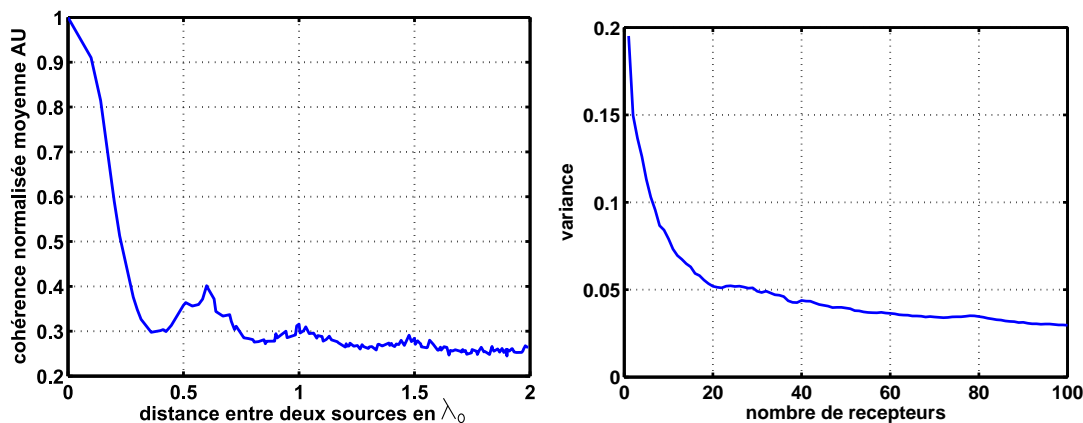


FIGURE 4.5: Illustration des propriétés spatiales du milieu. A gauche : cohérence spatiale de la fonction de corrélation. On calcule la valeur moyenne du maximum de la corrélation entre deux récepteurs. La valeur de la cohérence suit la valeur absolue d'une fonction de Bessel de premier ordre, au bruit près. On voit que pour des distances inférieures à $\lambda/2$, deux récepteurs seront fortement corrélés, tandis que pour des distances supérieures, on pourra les considérer comme décorrélés. A droite : Variance de la fonction de corrélation en fonction du nombre de récepteurs décorrélés spatialement utilisées pour calculer la corrélation moyenne. La moyenne spatiale améliore de façon très importante cet écart type.

Effectuer une moyenne spatiale revient à faire la moyenne des fonctions de Green reconstruites à l'aide de sources dont la position ne sera pas identique. La moyenne sur les positions des sources se fait donc au prix d'une perte d'information locale. Dans notre approche où la position de la source par rapport aux récepteurs est un des paramètres clés, il est nécessaire d'être prudent sur l'application de cette moyenne. Cependant, l'apport de cette moyenne est indéniable. On voit dans la figure 4.5 A qu'un petit nombre de capteurs suffit à améliorer le rapport signal/bruit d'un facteur 4. Cependant, la moyenne spatiale revient à multiplier les sources dans le milieu. Elle ne sera efficace que jusqu'à un certain nombre de sources. En effet, lorsque l'on atteint une certaine densité spatiale de sources, deux sources très proches l'une de l'autre contribueront de la même façon à la fonction de corrélation. Lorsque l'on éloignera progressivement ces deux sources, on pourra observer la diminution de leur corrélation en fonction de leur distance. Bien sûr, la longueur de décorrélation entre deux sources dépendra de la fréquence étudiée. La corrélation entre deux sources en fonction de leur distance est présentée 4.5. On voit que deux sources sont corrélées lorsque leur distance est inférieure à $\lambda/2$. Dans la figure 4.5, les sources utilisées pour la moyenne sont décorrélées.

4.2.3 Moyenne sur les réalisations

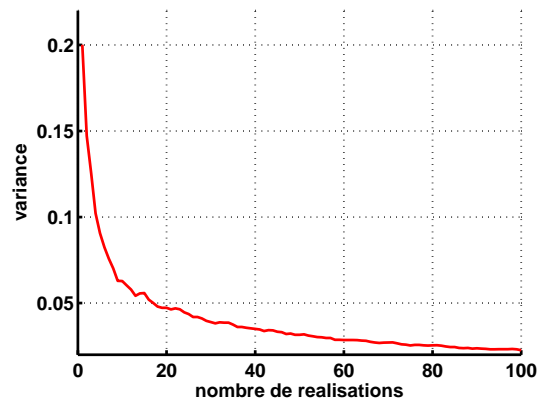


FIGURE 4.6: Variance de la fonction de corrélation en fonction du nombre de réalisations du milieu utilisées pour calculer la corrélation moyenne. La moyenne sur les réalisations améliore de façon très importante cet écart type.

La moyenne sur les réalisations est très intuitive. Pour un nombre donné de diffuseurs, une réalisation du milieu consistera en une disposition aléatoire de ces diffuseurs. Il suffira donc, pour une source et deux récepteurs A et B, de réitérer la propagation dans un milieu en disposant aléatoirement les diffuseurs à chaque fois. Une nouvelle réalisation du milieu sera effectuée à chaque modification de la position des diffuseurs, leur nombre et l'ensemble source/récepteurs restant inchangés. Les résultats de la moyenne sur les réalisations du milieu sont présentés figure 4.6 B. De même que précédemment, un petit nombre de réalisations du milieu (environ 20) permet d'améliorer le rapport signal/bruit d'un facteur 4.

4.2.4 Moyenne temporelle

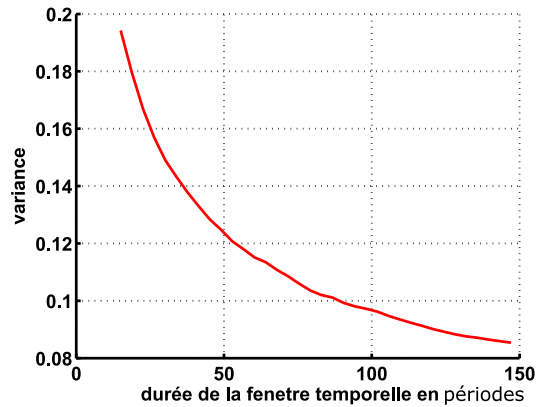


FIGURE 4.7: Effet des moyennes temporelles. Variance de la fonction de corrélation en fonction de la durée de la fenêtre de corrélation. On observe que l'on suit une loi de type $1/\sqrt{N}$

Il est possible de faire varier la taille de la fenêtre de référence ou de moyenniser plusieurs fenêtres afin d'améliorer le rapport signal/bruit de la fonction de corrélation. Les résultats de l'augmentation de la durée de la fenêtre sont présentés figure 4.7. Les deux approches ont un effet similaire dans la réduction de l'erreur observée.

4.3 Analyse des simulations numériques

Dans notre étude, la moyenne sur les réalisations semble le moyen le plus adapté d'améliorer le ratio signal/bruit, tout en conservant une dynamique temporelle et les spécificités dues à la position relative de la source. Pour cela, les résultats des simulations numériques présentés ici seront tous issus de moyennes sur les réalisations du milieu, sauf indication contraire.

4.3.1 Diffusion forte : 128 diffuseurs

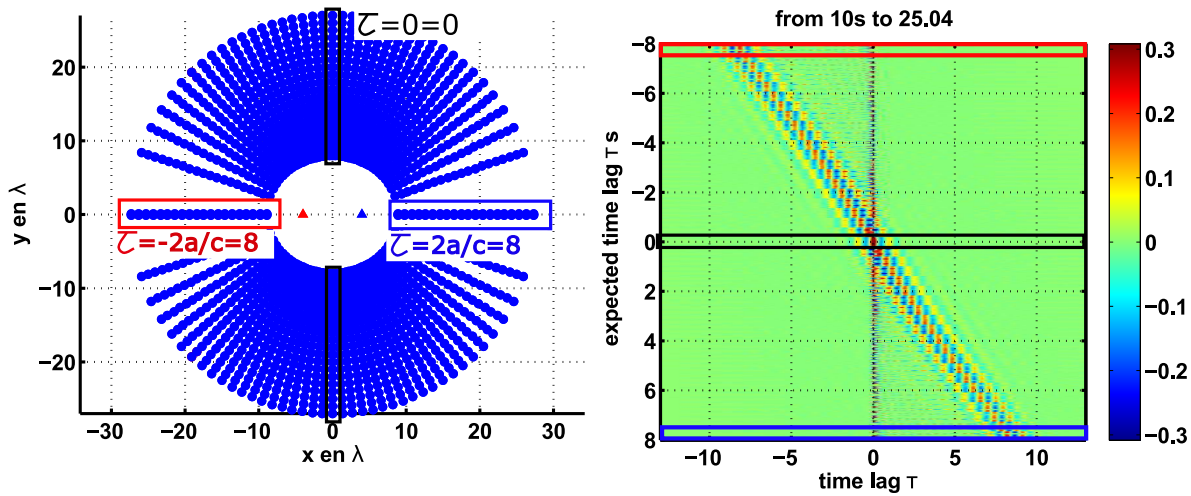


FIGURE 4.8: Schéma représentant la mise en place de la visualisation de la fonction de corrélation en fonction de la position de la source utilisée. On calcule la fonction de corrélation entre les deux récepteurs A et B (représentés par les triangles sur la figure de gauche) pour chaque source (ronds bleus). La géométrie choisie nous permet de regrouper les sources par hyperboles, c'est à dire par temps de contribution à la fonction de corrélation en fonction de la position de la source.

Nous allons commencer l'analyse des simulations numériques par le milieu dans lequel la diffusion est la plus forte. Ce milieu comprend 128 diffuseurs, de rayon 0.8λ . Pour rappel, le libre parcours moyen de diffusion mesuré à l'aide de la méthode Intensité cohérente/Intensité totale dans le chapitre précédent est de 15λ . Nos simulations se déroulant sur une durée totale de 200 périodes, le temps de Thouless ne sera pas tout à fait atteint (on en sera cependant assez proche).

Les sources étant toutes placées respectivement sur des hyperboles et des ellipses confocales, il va être judicieux d'utiliser cette disposition dans la représentation des corrélations. Nous choisissons donc de regrouper les sources selon l'hyperbole à laquelle elles appartiennent, comme expliqué figure 4.8. Il est possible, en observant les fonctions de corrélation pour différentes fenêtres de temps, de voir l'influence de la position de la source sur la dynamique temporelle. Dans la figure 4.9, on présente la fonction de corrélation en fonction de la position de la source, pour plusieurs fenêtres de temps. La durée d'une fenêtre de temps est de 15 périodes. L'axe des abscisses correspond au temps de la corrélation. La construction de l'axe des ordonnées est moins intuitive. Cet axe représente le temps auquel la source observée contribuerait si l'on se trouvait dans un milieu homogène (voir chapitre 3).

La première fenêtre de temps est bornée par 10 périodes et 25,04 périodes. Ces temps

étant de l'ordre du temps de propagation de l'onde cohérente depuis une source vers les récepteurs, il va être possible d'observer les effets de cette onde cohérente dans les corrélations. On voit très nettement une diagonale apparaître. Cette diagonale signifie que les sources contribuent à la fonction de corrélation au temps auquel leur contribution serait attendue en milieu homogène. Cependant, toutes les sources ne sont pas marquées par la présence de l'onde cohérente. Pour certaines sources éloignées des récepteurs, la fenêtre de temps considérée ne permet pas d'observer de corrélation. On voit apparaître une ligne verticale au temps $\tau = 0$. Cette ligne verticale est un artefact numérique dû à la normalisation des corrélations par leur énergie. En effet, les sources pour lesquelles l'onde cohérente n'a pas eu le temps de contribuer pourront présenter une corrélation à $\tau = 0$, dont la valeur avant normalisation sera très faible.

La deuxième fenêtre de temps montrée ici ne comprend plus aucune contribution de l'onde cohérente (entre 44,72 périodes et 59,76 périodes, l'onde cohérente a traversé le milieu et été absorbée par les bords du milieu). On voit clairement deux lignes verticales centrées sur les temps $\tau = -8$ et $\tau = 8$. La présence d'une reconstruction cohérente de l'onde cohérente est un effet de la diffusion dans le milieu. En effet, comme on l'a montré dans le chapitre 3, dans un milieu sans diffuseurs ces sources ne pourraient pas contribuer aux temps observés ici. Cet effet découle donc directement de la présence de diffuseurs dans le milieu.

La fonction de corrélation est relativement cohérente spatialement. Cependant, on observe pour la plupart des récepteurs une asymétrie entre les temps positifs et négatifs. Cette asymétrie est forte pour les sources proches des end fire lobes (on appelle end fire lobes les zones proches de l'hyperbole de paramètre $\tau = 2a/c$). Dans ce milieu fortement diffusant, on observe que la zone contribuant le plus fortement à l'amplitude de la fonction de corrélation reste pendant un certain temps proche de la source.

La fenêtre de temps comprise entre 69,52 périodes et 84,56 périodes présente encore une très légère asymétrie des corrélations entre partie causale et acausale. L'équirépartition n'est donc toujours pas atteinte. La quatrième fenêtre de temps, comprise entre 143,92 et 158,96 périodes présente des fonctions de corrélation symétriques. La reconstruction de la fonction de Green ne dépend plus de la position de la source initiale. Ces fenêtres de temps étant situées plus loin dans la coda, il semble que l'équipartition soit atteinte. Les fluctuations incohérentes sont encore relativement importantes.

Il est possible de voir de façon plus claire cette évolution en ne regardant que les amplitudes de la fonction de corrélation au temps de l'onde cohérente, ($\tau = \pm 8s$) comme présenté sur les figures 4.10 et 4.11. Pour ces deux figures, les contributions de toutes les sources comprises sur une hyperbole donnée sont prises en compte afin de construire un rapport signal/bruit acceptable. La figure 4.10 représente l'évolution de l'amplitude de la fonction de corrélation en fonction du temps pour différentes hyperboles. On voit très clairement que la position des sources par rapport aux récepteurs est d'une influence

déterminante dans l'évolution temporelle de ces amplitudes. La figure 4.11 présente l'amplitude de la fonction de corrélation en fonction de la position des sources, pour différentes fenêtres de temps. Cette figure permet de mettre en exergue l'asymétrie de la fonction de corrélation aux temps courts. Aux temps longs, l'amplitude de la fonction de corrélation est la même quelle qu'ait été la position de la source, confirmant l'observation effectuée sur la figure 4.9.

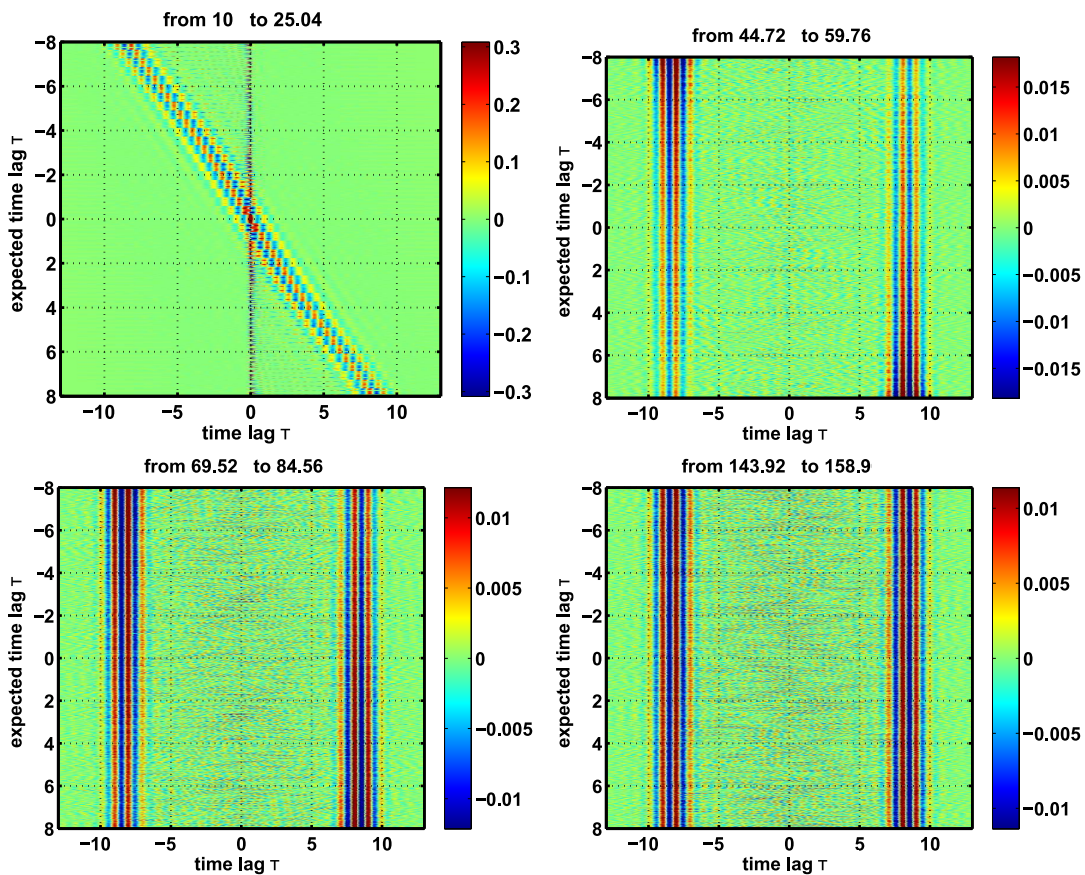


FIGURE 4.9: Représentation de $C_{AB}(\tau)$ en fonction de la position de la source par rapport aux récepteurs pour différentes fenêtres temporelles, dans un milieu à 128 diffuseurs. La fonction de corrélation est très asymétrique par rapport à l'axe $\tau = 0$ pour des fenêtres de temps prises tôt dans la coda.

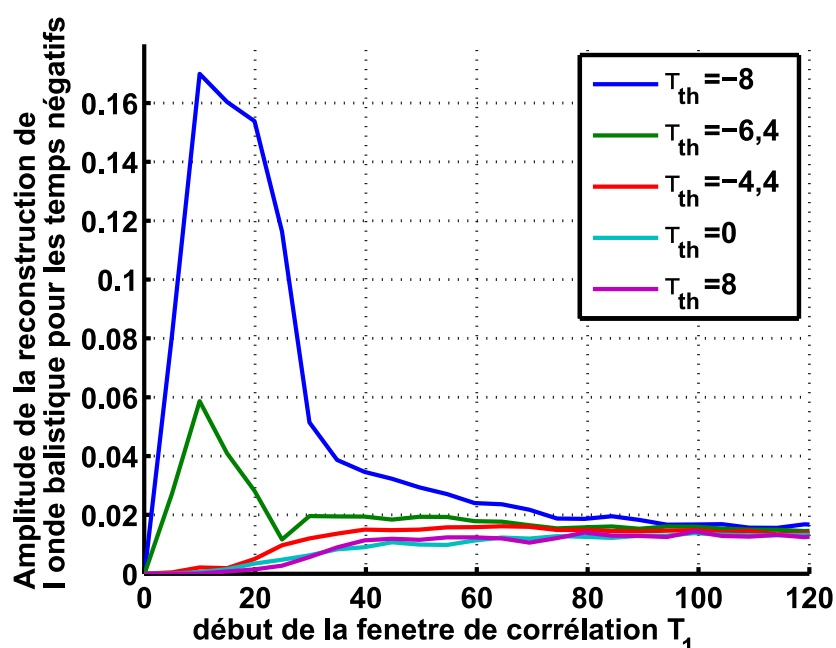


FIGURE 4.10: Amplitude de la fonction de corrélation à $\tau = -8$ en fonction de la position de la source pour différentes fenêtres temporelles, dans un milieu à 128 diffuseurs. La position de la source est exprimée avec le temps de contribution attendu $\tau_t h$. Ces temps de contribution correspondant chacun à une hyperbole donnée, chaque valeur d'amplitude est issue d'une moyenne de toutes les sources situées sur cette hyperbole. On voit des très fortes amplitudes aux temps courts pour les sources dont le temps de contribution attendu est proche de τ . Ces fortes amplitudes marquent la présence de l'onde directe. On observe ensuite une évolution lente des valeurs d'amplitude, en fonction de la position de la source. Les courbes se stabilisent à une valeur d'environ 0.015 à des temps proches de 100 périodes. Cette amplitude est très proche de la valeur de l'amplitude de la fonction de Green de référence pour le milieu observé.

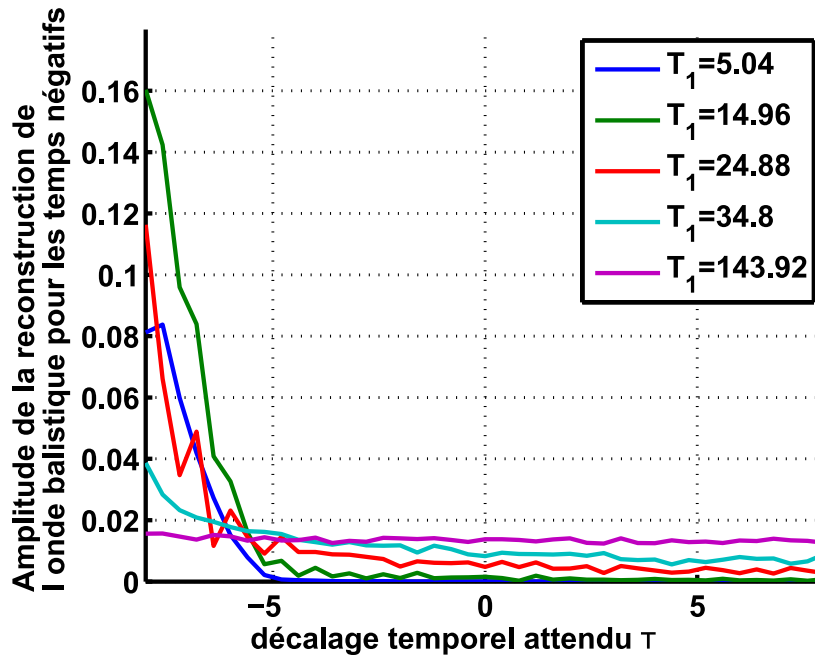


FIGURE 4.11: Amplitude de la fonction de corrélation à $\tau = -8$ en fonction de la fenêtre de temps utilisée pour la corrélation pour différentes positions de sources, dans un milieu à 128 diffuseurs. La position de la source est exprimée avec le temps de contribution attendu τ . On note T_1 le début de la fenêtre temporelle. Comme dans la figure précédente, chaque courbe représente l'amplitude moyenne de la fonction de corrélation pour toutes les sources situées sur cette hyperbole. La répartition de l'intensité, très localisées pour les temps courts, tend à devenir indépendante de la position de la source pour les temps longs.

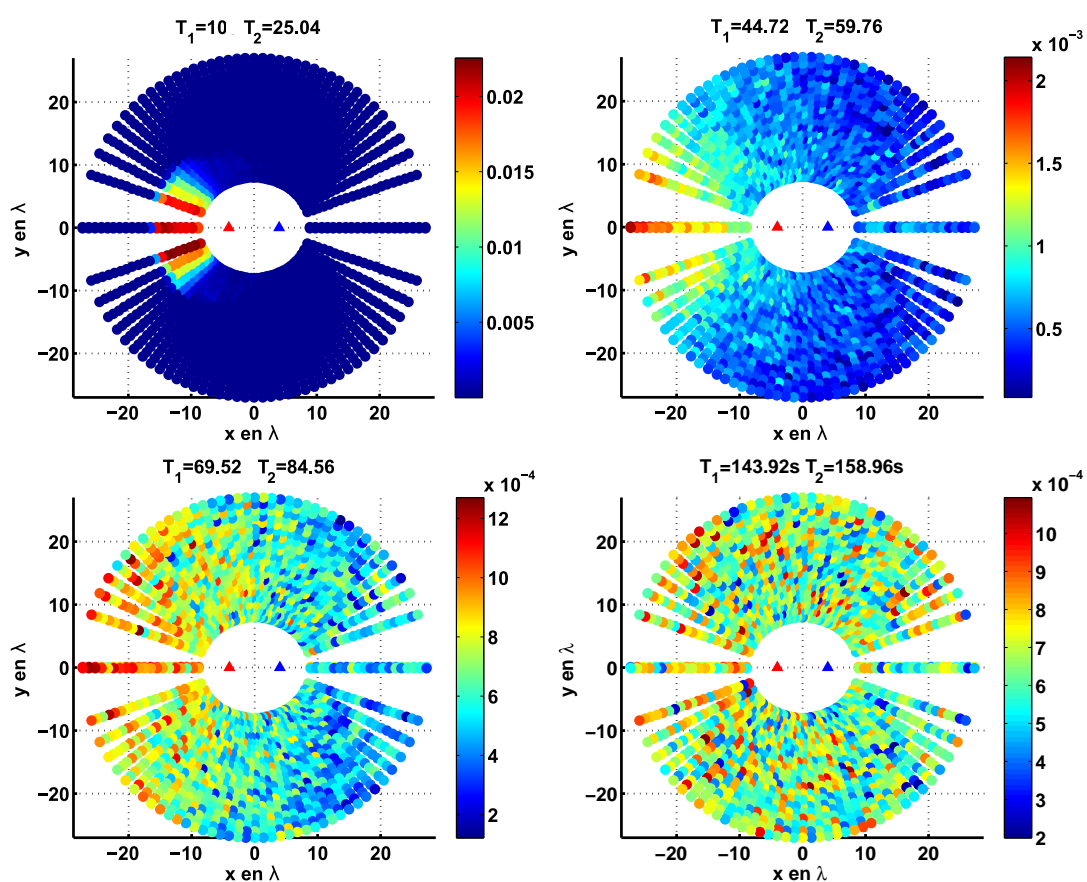


FIGURE 4.12: Amplitude de la fonction de corrélation à $\tau = -8$ en fonction de la position de la source pour différentes fenêtres de temps, dans un milieu à 128 diffuseurs. Pour chaque fenêtre de temps, on voit la répartition spatiale des sources contribuant à la reconstitution du trajet direct AB. Pour des temps courts, les sources dont la contribution est majoritaire sont situées sur les end fire lobes. Pour des temps plus longs, l'effet de la diffusion permet à des sources ne se situant pas sur le end fire lobe de gauche de contribuer au trajet AB. La contribution reste localisée quelques temps après la contribution de l'onde directe. Aux temps longs, les contributions semblent réparties de façon homogène dans le milieu. L'emplacement de la source initiale n'a plus d'influence sur sa contribution à la fonction de corrélation.

Il est maintenant possible de récupérer l'amplitude de la fonction de corrélation aux temps cohérents pour chaque source, en fonction de la fenêtre de temps. La reprojec-tion de cette amplitude sur les positions des sources donne une bonne visualisation de l'évolution de la contribution de chaque source à la fonction de corrélation.

Comment en faire un indicateur efficace : moyenne sur une zone

Nous nous sommes intéressés à l'évolution temporelle de la fonction de corrélation. Nous avons présenté plus haut l'évolution de l'amplitude de la fonction de corrélation au temps de l'onde cohérente pour la partie causale et la partie acausale en présence d'une seule source. Cette représentation, bien qu'étant issue d'une moyenne sur un grand nombre de réalisations du milieu, souffre toujours d'un niveau de bruit très élevé. Nous avons aussi montré qu'une moyenne spatiale (sur plusieurs sources) permettait une amélioration importante du ratio signal/bruit. Nos sources pouvant être considérées comme décorréelées spatialement, il va être intéressant d'effectuer une moyenne spatiale dans notre cas. Cependant, nous voulons conserver la spécificité observée dans le cas d'une seule source, c'est-à-dire l'asymétrie de la fonction de corrélation. Pour cela, nous n'allons plus effectuer de moyenne sur tout l'espace, mais uniquement sur une zone restreinte de celui-ci figure 4.13. Il est aussi possible de tirer profit de la symétrie axiale du milieu à notre avantage. Les sources situées symétriquement par rapport à l'axe horizontal AB (passant par les deux récepteurs, voir figure 4.13) contribueront à des temps identiques ; il est donc possible d'utiliser deux fois plus de sources sans trop biaiser notre moyenne. Il est encore possible d'utiliser la symétrie du milieu afin d'améliorer le ratio signal/bruit grâce à la réciprocity de l'équation d'onde. On voit immédiatement que le ratio signal/bruit est drastiquement amélioré grâce à cette méthode ; cela permet d'observer des effets qui étaient dissimulés par le bruit.

Dans le cas de sources n'étant pas placées sur l'axe de symétrie vertical, il est toujours possible d'utiliser la symétrie du milieu à notre avantage. De manière schématique, la contribution causale d'une source placée à gauche de l'axe de symétrie sera équivalente à la contribution acausale d'une source placée à droite de ce même axe, et réciproquement (figure 4.13 D). Bien sûr, cela ne sera valable que si l'on a effectué des moyennes sur les réalisations.

Sachant cela, nous pouvons étudier l'évolution temporelle de la fonction de corrélation avec un rapport signal/bruit assez bon. Nous allons maintenant décrire la dynamique temporelle dans le milieu le plus diffusant d'abord.

Lorsque la zone source est placée perpendiculairement à l'axe horizontal des récepteurs, la partie causale et la partie acausale sont symétriques (au bruit près). On observe une stabilisation de l'amplitude à partir d'environ 100 périodes. La valeur de ce plateau est d'environ 0.013. Nous pouvons comparer cette valeur avec l'amplitude de la fonction de Green mesurée expérimentalement au temps $t=8$ périodes. Nous retrouvons donc bien l'amplitude attendue ; ceci confirme que la fonction de corrélation converge donc bien vers la fonction de Green avec le temps, non seulement pour la phase mais aussi pour l'amplitude.

L'évolution de cette amplitude en fonction de la position des sources varie très fortement (figure 4.14). L'asymétrie est très forte lorsque les sources sont proches des end fire lobes,

et diminue lorsque les sources se rapprochent de l'axe de symétrie verticale du milieu. Toutefois, la convergence vers l'amplitude de la partie cohérente de la fonction de Green est toujours observée.

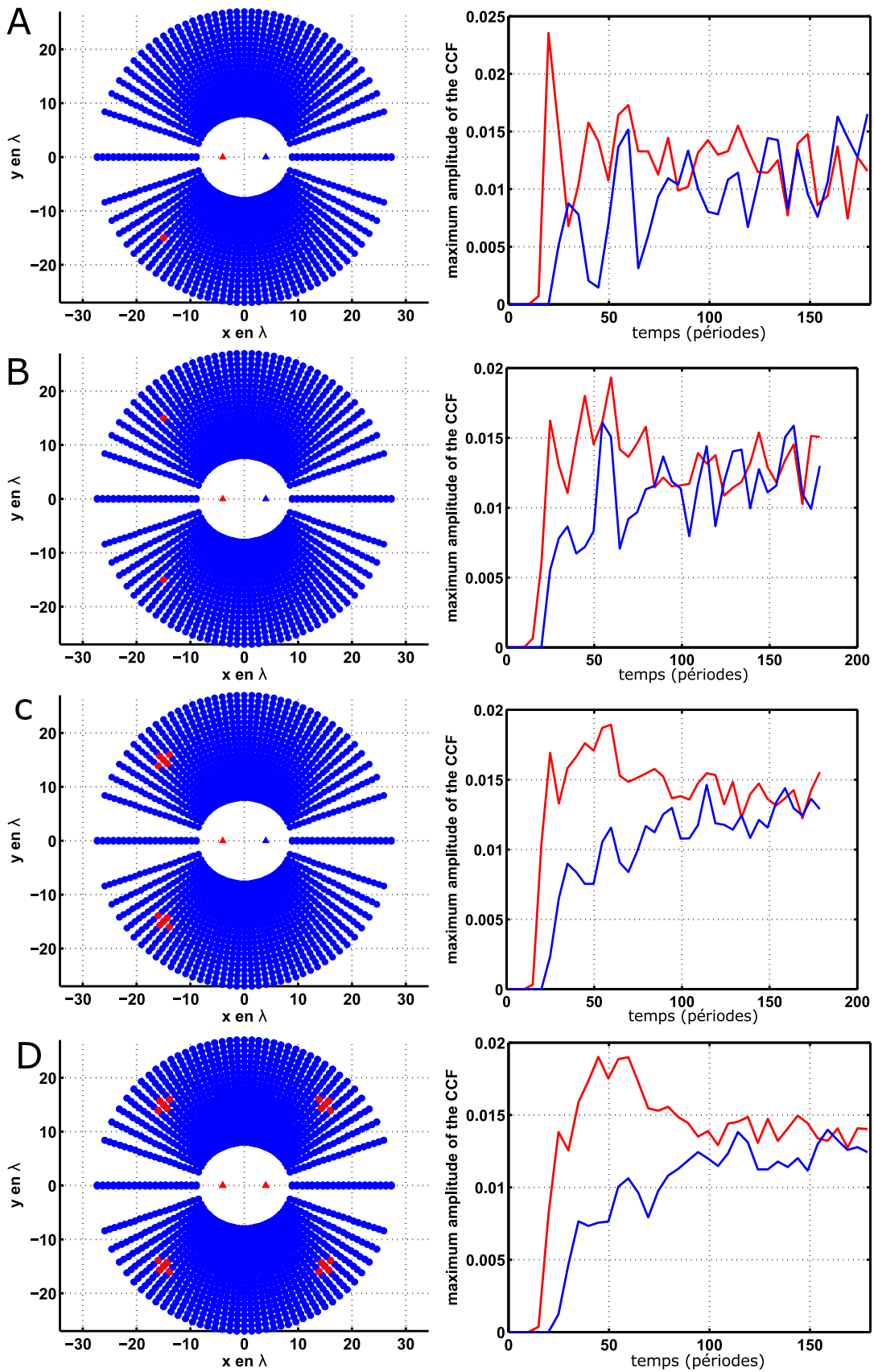


FIGURE 4.13: Légende page suivante

FIGURE 4.13: Evolution de l'amplitude de la reconstruction de la contribution cohérente pour la partie causale et la partie acausale en fonction du temps (colonne de droite). Pour obtenir chacune des courbes de droite, on effectue en plus de la moyenne d'ensemble une moyenne sur plusieurs récepteurs proches, représentés colonne de gauche.

En A, on représente la contribution d'une seule source.

En B, on représente les amplitudes issues de la moyenne des deux sources présentant exactement les mêmes temps de contribution attendus τ .

En C, on représente cette fois les amplitudes issues de la moyenne sur deux zones dont les contributions attendues sont exactement les mêmes.

En D, on effectue la moyenne entre la contribution à la partie causale du trajet AB pour les sources situées à gauche et la partie acausale du trajet BA pour les sources situées à droite. On observe une très forte amélioration du rapport signal/bruit grâce à la moyenne spatiale. Pour cette position de sources, on observe que l'amplitude de la partie causale augmente d'abord très fortement (de 15 à 20 périodes) pour ensuite diminuer jusqu'à environ 100 périodes, où elle atteindra un plateau dont la valeur est celle de l'amplitude de l'onde cohérente. La partie acausale présente une évolution beaucoup plus lente. Sa valeur augmente jusqu'à environ 100 périodes pour ensuite se stabiliser. La valeur atteinte alors reste malgré tout inférieure à celle de la partie causale, bien qu'elle ne semble plus évoluer.

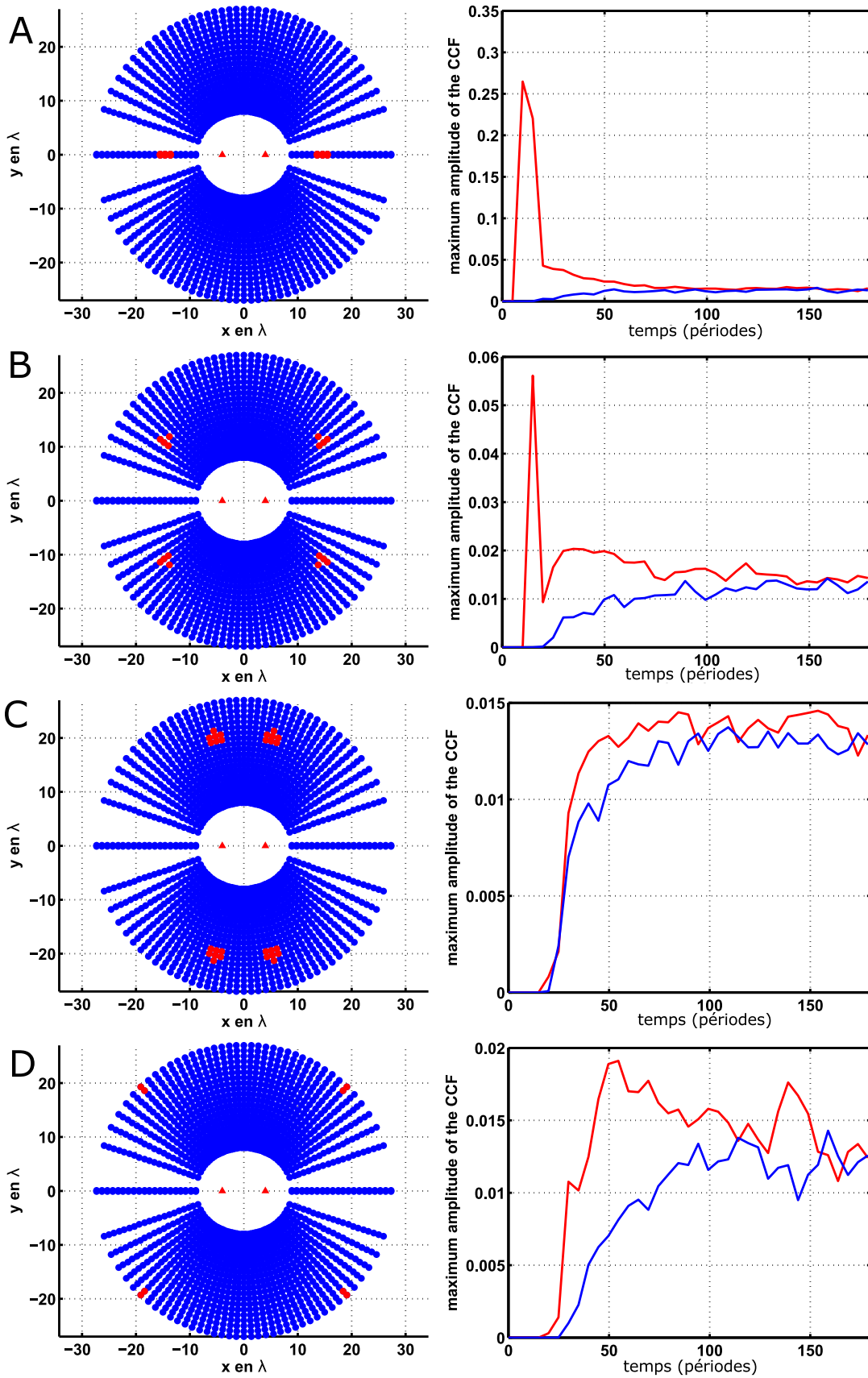


FIGURE 4.14: Evolution de l'amplitude de la reconstruction de la contribution cohérente pour les parties causales et acausales en fonction du temps (colonne de droite), pour différentes positions de sources (colonne de gauche). Lorsque les sources sont situées sur les end fire lobes, l'asymétrie est très prononcée (en A). Les temps courts sont dominés par la contribution de l'onde cohérente (entre 10 et 20 périodes ici). L'amplitude observée pour la partie causale est alors supérieure de plus d'un ordre de grandeur aux amplitudes observées après. Passé la contribution cohérente, l'évolution se fait plus lente et monotone pour atteindre un plateau à environ 80 périodes. En B, on présente l'évolution des amplitudes pour des sources non plus situées directement sur les end fire lobes, mais toujours relativement proches. On observe les mêmes tendances que précédemment, bien que l'amplitude de la contribution cohérente soit cette fois beaucoup moins importante. Les figures situées en C représentent la contribution de sources proches de l'hyperbole $\tau = 0$. Dans ce cas, la position des sources favorise beaucoup moins que précédemment la reconstruction d'un trajet particulier (causal ou acausal). On n'observe pas distinctement de contribution de l'onde cohérente. Une légère asymétrie due à la position des sources subsiste cependant. Les figures situées en D présentent des sources situées sur une hyperbole de paramètre $\tau = 5.6$. La distances des sources par rapport aux récepteurs est plus importante que dans les exemples précédents. On observe bien une forte asymétrie, due à la position des sources. Cependant, on n'observe plus cette fois une contribution très importante de l'onde cohérente. En effet, pour des sources plus éloignées, l'onde cohérente est beaucoup plus atténuée que précédemment.

4.3.2 Diffusion faible : 16 diffuseurs

Nous nous intéressons maintenant au milieu dans lequel la diffusion est la plus faible, c'est-à-dire le milieu ne comprenant que 16 diffuseurs (figures 4.15 et 4.16). Le libre parcours moyen estimé lors du chapitre précédent est d'environ 110λ . Le libre parcours moyen étant plus grand que le milieu de propagation réel, on s'attend à ce que la diffusion multiple soit peu importante. Il est intéressant de décrire ce milieu avant les milieux intermédiaires, car il permet de déceler des effets complètement différents que ceux décrits précédemment. Les milieux intermédiaires ne seront qu'une superposition des effets observés dans le milieu avec 128 diffuseurs et 16 diffuseurs.

La première fenêtre est très fortement marquée par la présence de l'onde cohérente. Les contributions principales à la fonction de corrélation se trouvent dans la zone du end fire lobe. La largeur de cette zone peut être reliée à la durée de l'impulsion initiale. Dans un cas idéal où les sources émettraient toutes une impulsion ponctuelle en temps et en espace, les seules sources contribuant se trouveraient sur la ligne passant par les deux récepteurs.

La deuxième fenêtre ne comprend plus que des ondes diffusées. On voit que les amplitudes les plus importantes se situent toujours sur le end fire lobe de gauche. On voit donc de manière frappante que la symétrie des corrélations dans la coda dépend de la position de la source initiale.

La troisième fenêtre présente un comportement original. Les fortes amplitudes se retrouvent dans presque tout le milieu, sauf le end fire lobe de gauche. La première contribution pouvant expliquer la propagation de ce front semble être une réflexion sur les bords du milieu. En effet, bien que les bords soient absorbants, une petite fraction de l'onde est réfléchiée dans le milieu. Les corrélations étant normalisées par l'énergie du signal, une réflexion, même faible, contribuera de façon importante à la fonction de corrélation si elle domine par rapport à l'intensité diffusée par les hétérogénéités du milieu. L'autre effet pouvant expliquer ce phénomène est la présence de diffusion simple principalement. Nous allons maintenant essayer de discriminer la part de chacune de ces explications dans ce phénomène.

Pour tester l'hypothèse de la réflexion sur les bords, il est possible de réitérer la même expérience dans un milieu totalement homogène. On n'observe alors pas la propagation d'un front identique à celui observé dans le milieu faiblement diffusant. Il semble que le phénomène observé dans le milieu diffusant soit bien un effet de la diffusion simple.

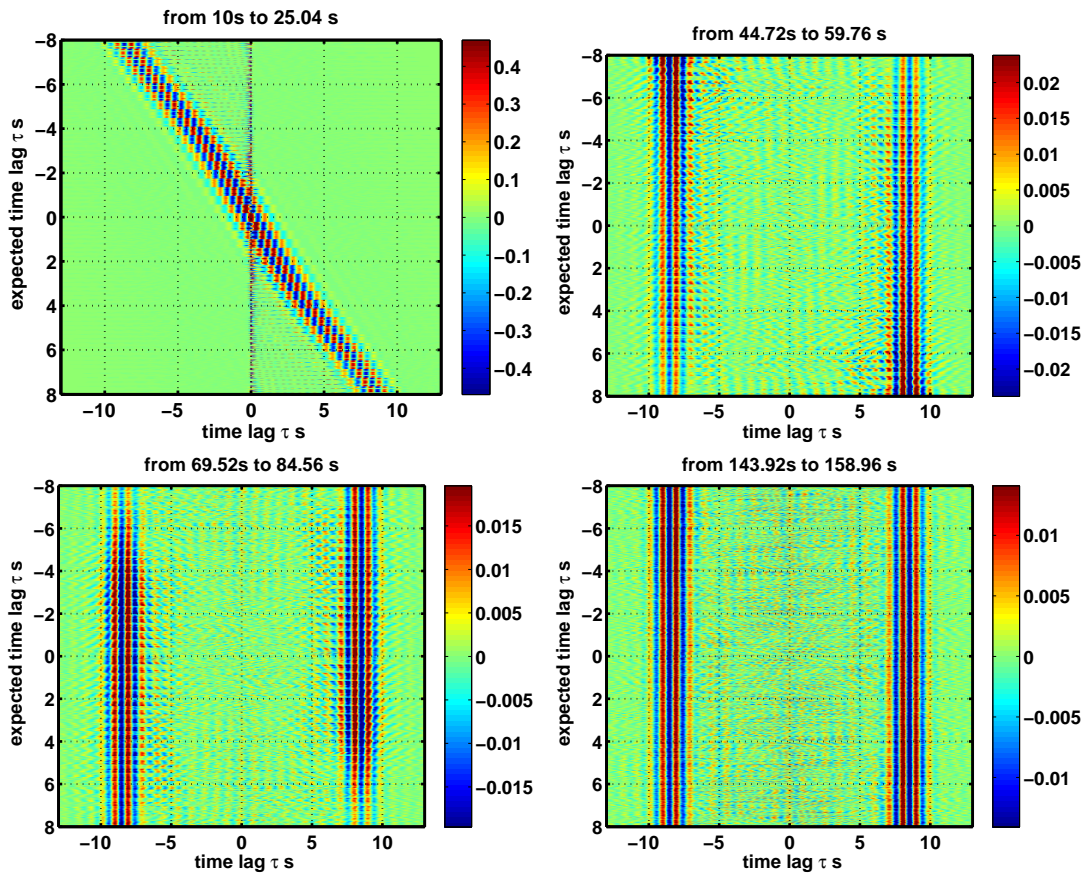


FIGURE 4.15: Représentation de $C_{AB}(\tau)$ en fonction de la position de la source par rapport aux récepteurs pour différentes fenêtres temporelles, dans un milieu à 16 diffuseurs. La fonction de corrélation est très asymétrique par rapport à l'axe $\tau = 0$ pour des fenêtres de temps prises tôt dans la coda.

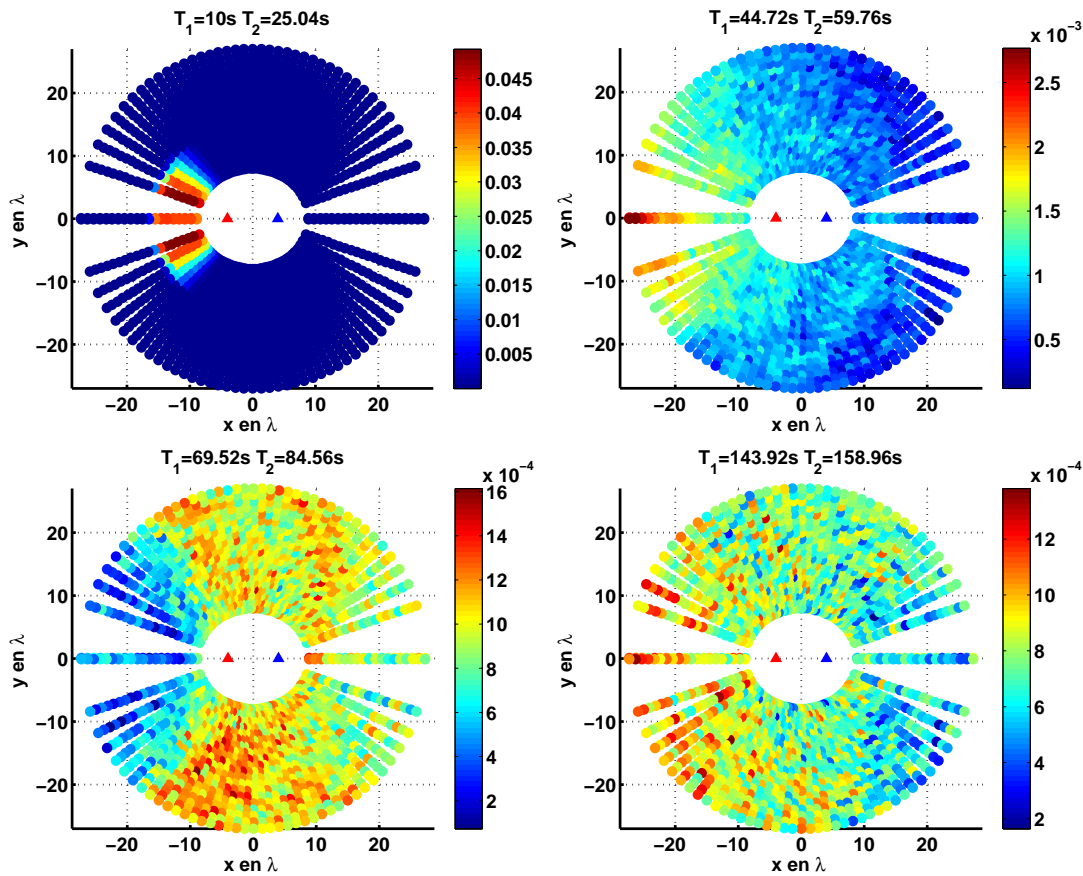


FIGURE 4.16: Amplitude de la fonction de corrélation à $\tau = 8$ périodes en fonction de la position de la source pour différentes fenêtres de temps, dans un milieu à 16 diffuseurs. Pour des temps courts, on voit très nettement la contribution de l'onde directe. Après que l'onde directe soit sortie du milieu, on observe un front de forte amplitude parcourant le milieu. Aux temps longs, les amplitudes sont plus fortes au niveau des sources placées sur des hyperboles de τ positifs.

Nous décrirons dans le chapitre 6 un modèle géométrique permettant de décrire l'évolution de la fonction de corrélation dans un milieu très fortement dominé par la diffusion simple.

Si nous nous intéressons maintenant au cas des milieux intermédiaires (figures 4.18 4.17), nous voyons que la réflexion sur les bords se fait toujours sentir, fortement pour le milieu à 32 diffuseurs et faiblement pour celui à 64. Hors de cette analyse, il est difficile de déceler une localisation de l'énergie aussi forte que dans le milieu à 128 diffuseurs. Il est cependant intéressant de noter que l'amplitude de la fonction de corrélation correspond relativement bien à l'amplitude de la fonction de Green effective de chacun de ces milieux, mesurée entre A et B.

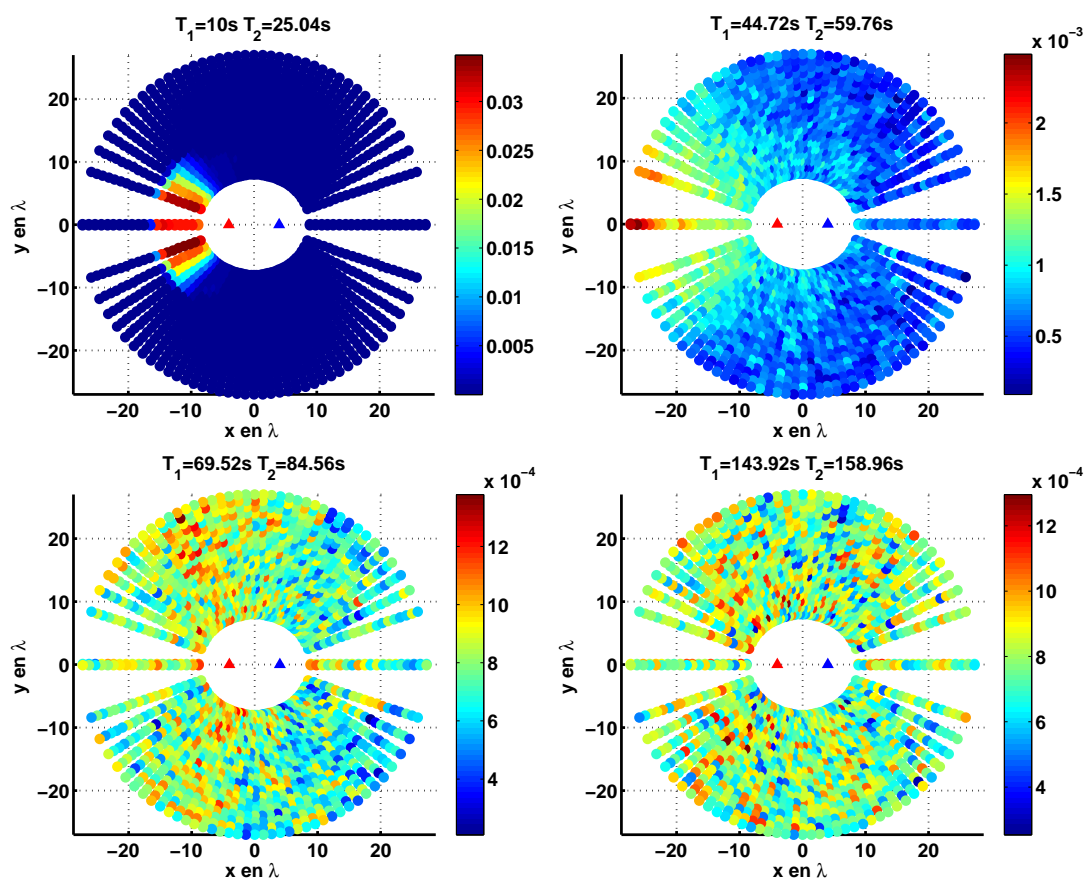


FIGURE 4.17: Amplitude de la fonction de corrélation à $\tau = 8$ périodes en fonction de la position de la source pour différentes fenêtres de temps, dans un milieu à 64 diffuseurs. Pour chaque fenêtre de temps, on voit la répartition spatiale des sources contribuant à la reconstitution du trajet AB.

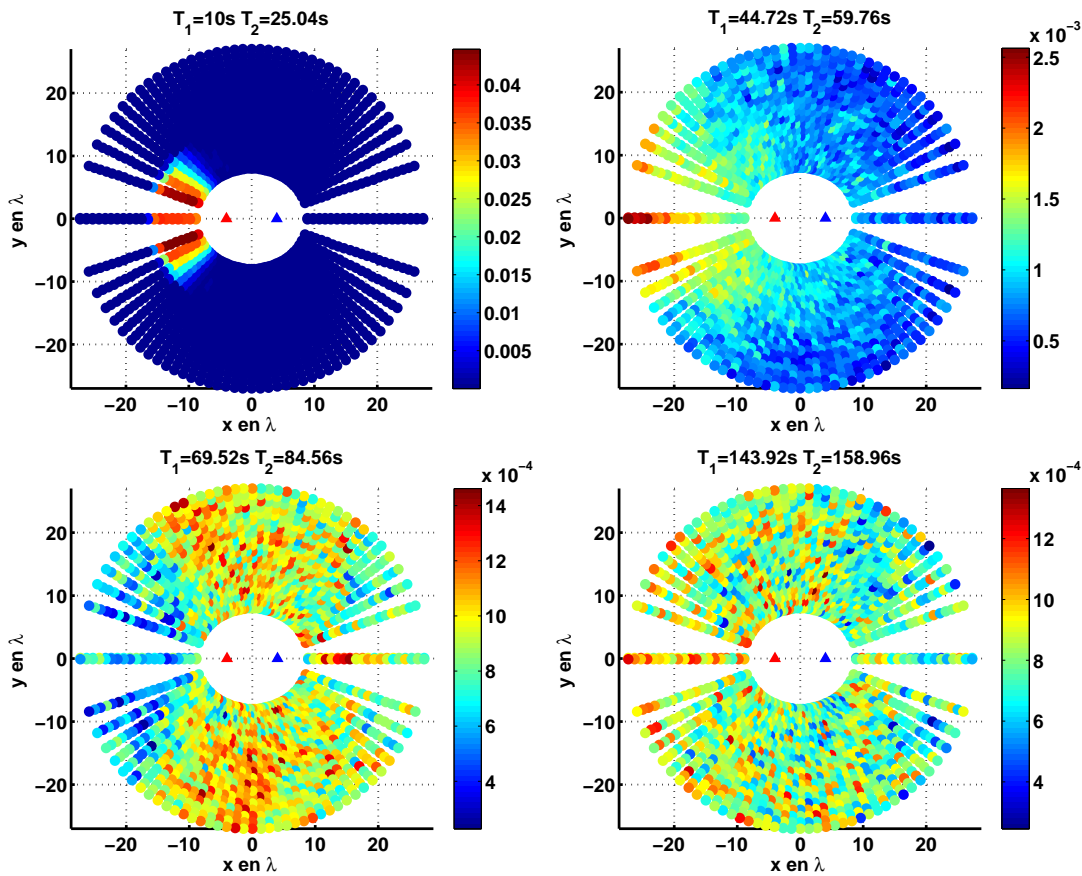


FIGURE 4.18: Amplitude de la fonction de corrélation à $\tau = 8$ périodes en fonction de la position de la source pour différentes fenêtres de temps, dans un milieu à 32 diffuseurs.

4.3.3 Evolution temporelle dans les différents milieux

Il est maintenant possible de décrire l'évolution temporelle de notre proxy pour différents milieux (figure 4.19). On peut distinguer une tendance commune pour les différents milieux : les amplitudes évoluent de façon très marquée jusqu'à environ 100 périodes, puis elles se stabilisent au niveau de l'amplitude de l'onde directe à $\tau = \pm 8$ périodes. L'évolution avant d'atteindre ce plateau est très différente pour les quatre milieux. Lorsque la diffusion est faible on observe une très forte fluctuation de l'amplitude pour la partie causale. On observe d'abord une très forte augmentation des amplitudes (jusqu'à deux fois l'amplitude réelle de l'onde directe pour le milieu le moins diffusant). Cette augmentation est due à la faible atténuation de l'onde directe. Dès que l'onde directe ne contribue plus, on observe une diminution brutale des amplitudes, dont la valeur minimale est inférieure à l'amplitude de l'onde directe. Dans le même temps, les amplitudes mesurées au niveau de la partie acausale augmentent très fortement. Nous tenterons d'expliquer

par la suite cet effet à l'aide de modèles de diffusion. Les valeurs d'amplitude évoluent ensuite lentement vers la valeur attendue.

Dans les milieux plus diffusants, on n'observe plus ces très fortes fluctuations. L'amplitude mesurée à la partie causale augmente d'abord fortement et rapidement (effet de l'onde directe) puis diminue plus lentement jusqu'à atteindre la valeur attendue. Pour la partie acausale, on observe une augmentation rapide lors de la première fenêtre, puis plus lente et régulière jusqu'à la valeur attendue.

De manière générale, plus le milieu est diffusant plus l'évolution des amplitudes est régulière. Ce comportement permettra d'envisager l'estimation des paramètres de diffusion dans le milieu à l'aide des corrélations.

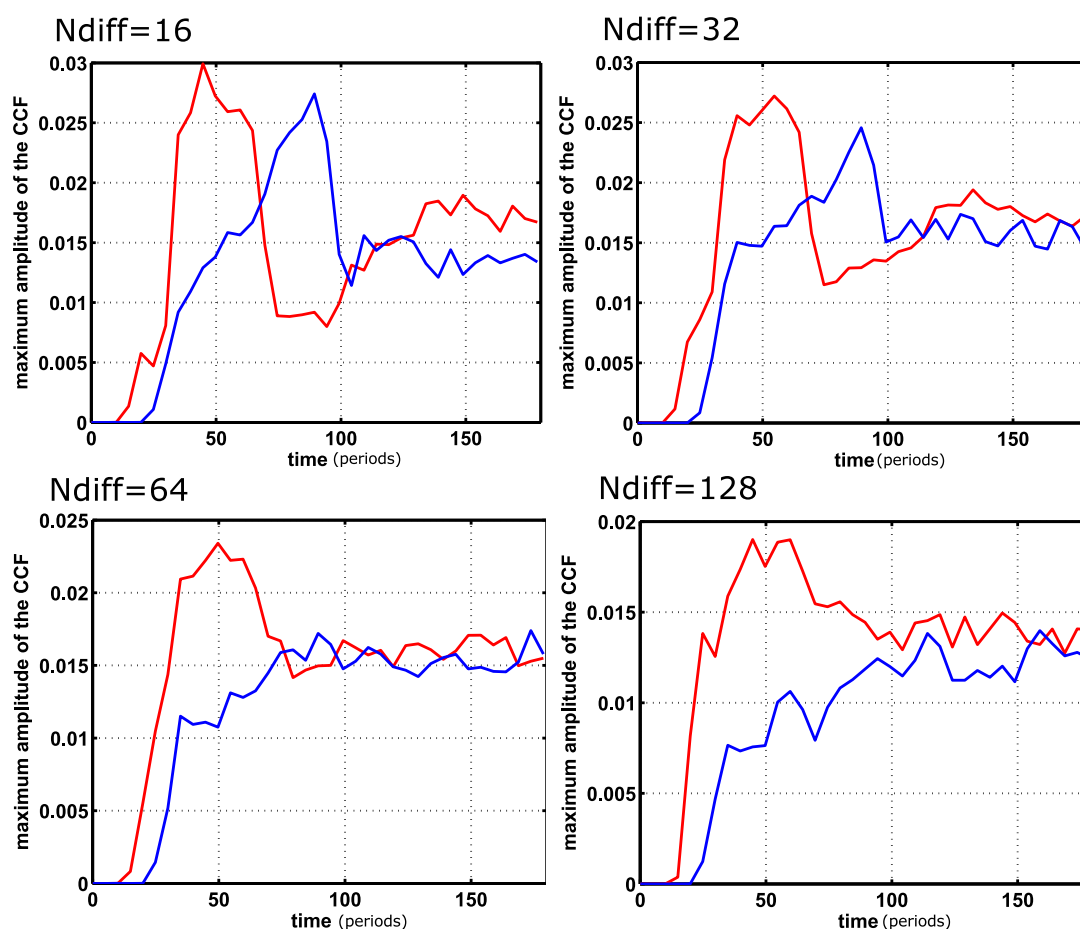


FIGURE 4.19: Evolution de l'amplitude de la reconstruction de la contribution cohérente pour la partie causale et la partie acausale en fonction du temps (colonne de droite) dans les quatre milieux étudiés, pour une position de source donnée.

4.4 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre l'intérêt des simulations numériques pour l'étude des corrélations dans la coda. En particulier, nous avons montré comment améliorer le rapport signal/bruit des corrélations obtenues à l'aide des différentes moyennes disponibles (moyenne sur les réalisations du milieu, spatiales et temporelles). Cette première étape nous permet d'aller plus loin dans l'étude de l'asymétrie des corrélations dans la coda. Nous montrons que l'asymétrie de la fonction de corrélation est dépendante de trois paramètres : la position de la source, les propriétés de diffusion dans le milieu et la fenêtre de temps prise dans la coda pour effectuer les corrélations. En nous focalisant sur l'amplitude de l'onde balistique reconstruite grâce aux parties causales et acausales des corrélations, nous montrons que les corrélations tendent à se symétriser lorsque la fenêtre observée est plus tardive dans la coda. Nous montrons que l'évolution temporelle de la symétrie des corrélations est liée aux paramètres de diffusion du milieu.

Ces résultats confirment que la diffusion multiple permet de tendre vers des corrélations symétriques aux temps longs. On peut donc chercher un équilibre entre la symétrie des parties causales et acausales des corrélations et leur énergie. Ceci signifie que l'on peut choisir une fenêtre temporelle optimale dans laquelle effectuer les corrélations pour une application donnée. En sismologie, cela implique que l'on peut exploiter au mieux l'information contenue dans la coda d'une source impulsionnelle. Les applications de monitoring dans un milieu contenant ce type de sources pourraient en être considérablement améliorées.

L'évolution temporelle observée en fonction propriétés de diffusion dans le milieu ouvre aussi la possibilité d'évaluer le libre parcours moyen d'un milieu en observant la symétrie des corrélations dans la coda. Pour cela, nous allons développer un modèle théorique décrivant cette évolution dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Approche théorique des corrélations dans la coda

L'objectif de ce chapitre est d'établir un cadre théorique pour passer de l'équation de corrélation de bruit ambiant à une équation décrivant la fonction de corrélation dans un milieu avec une seule source et de nombreux diffuseurs répartis de façon homogène. Pour cela, nous allons repartir de l'équation de corrélation décrite dans le chapitre 2. L'établissement d'une solution va demander le passage d'un terme source stationnaire à un terme source dépendant du temps. Pour tenir compte de la dynamique temporelle du signal enregistré, l'intégration sur les temps se fera sur une fenêtre de temps donnée. Comme rappelé en annexe, on peut décrire la propagation d'une onde dans un milieu avec plusieurs diffuseurs à l'aide d'une série intégrale infinie. Pour l'établissement de cette série, on décrit d'abord la propagation depuis la source jusqu'à un point du milieu. On décrit ensuite l'effet de ce point du milieu sur le signal reçu, puis on décrit ensuite la propagation depuis ce point jusqu'à un autre point du milieu, et ainsi de suite pour tous les ordres de diffusion. Cette description a l'avantage d'être une solution exacte et déterministe, mais elle suppose une connaissance a priori parfaite du milieu (et l'évaluation d'une série infinie). Selon le type de milieu, on peut décrire la propagation de manière statistique lorsqu'on l'on n'observe plus une seule réalisation du milieu, mais la moyenne sur un nombre important de réalisations du milieu. Les approximations permettant de décrire la propagation dans le milieu seront détaillées dans ce chapitre.

5.1 Expression analytique de l'équation de corrélation dans la coda

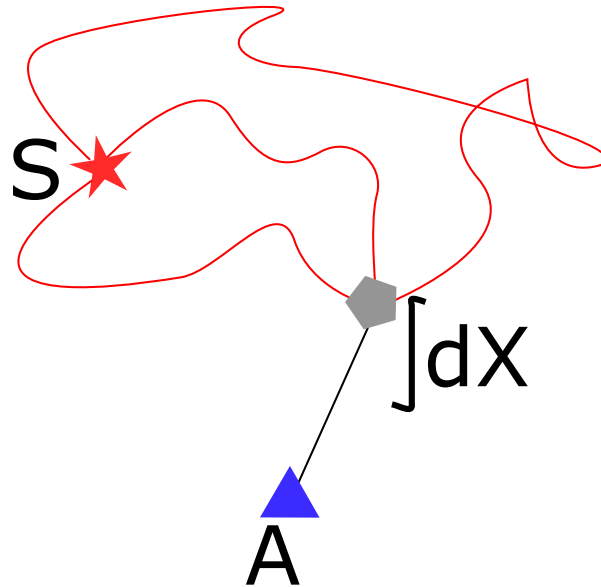


FIGURE 5.1: Schéma représentant le principe des sources secondaires. Une onde est émise depuis une source (étoile rouge). Elle se propage dans le milieu en suivant de nombreux trajets (traits rouges) lors desquels elle peut être diffusée un certain nombre de fois. Certains de ces trajets rencontrent un diffuseur X particulier (pentagone gris). On peut alors considérer ce diffuseur comme une source réémettant les ondes reçues. Dans ce cas, on peut alors considérer que cette source contribue au signal enregistré en un autre point de l'espace (triangle bleu A). Pour reconstruire le signal reçu en A , on intègre alors sur toutes les sources secondaires, c'est à dire toutes les positions de diffuseurs. Dans un milieu moyen (grand nombre de réalisations), on intègre sur tout l'espace, la densité de diffuseur (source secondaire) par unité d'espace étant quasi-constante.

Nous avons posé l'expression de la corrélation entre deux récepteurs A et B sur une fenêtre de temps comme :

$$C_{AB}(\tau, T_1, T_2) = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} dt \phi_A(t) \phi_B(t + \tau) \quad (5.1)$$

Cette expression générale a déjà été utilisée dans le cas d'un milieu avec des sources réparties de façon homogène. Dans un milieu multiplement diffusant avec une seule source, le signal reçu va différer grandement. C'est à partir d'une modélisation du signal reçu que nous allons être capable de décrire l'évolution temporelle de la fonction de corrélation. Il nous faut maintenant une description de $\phi_A(t)$. Nous allons faire l'hypothèse, d'après le

principe de Huygens, que chaque diffuseur peut être considéré comme une source $S_X(t)$. Cette source peut être décrite comme le produit de convolution de la source initiale et de la réponse impulsionnelle du milieu pour un diffuseur situé en X :

$$S_X(t) = S_0(t) \otimes G(X, S; t) \quad (5.2)$$

avec \otimes dénotant le produit de convolution.

On voit immédiatement que la fonction de Green $G(X, S; t)$ comprend tous les ordres de diffusion. On peut donc exprimer le signal enregistré en un point comme le produit de convolution de toutes les "sources secondaires" du milieu et le trajet entre ces sources secondaires et ce point du milieu :

$$\phi_A(t) = \int dX S_0(t) \otimes G(X, S; t) \otimes G_0(A, X; t) \quad (5.3)$$

soit :

$$\phi_A(t) = \int dX \int_{-\infty}^t dt S_X(t - t_{SX}) G(X, S; t_{SX}) G_0(A, X; t - t_{SX}) \quad (5.4)$$

Avec t_{SX} le temps de propagation entre la source et le diffuseur X considéré. Cette expression en sources secondaires est représentée figure 5.2. Il est nécessaire d'intégrer sur les positions de tous les diffuseurs, à tous les ordres de diffusion. Nous allons considérer l'intensité au niveau du dernier diffuseur comme un terme source, puis nous prendrons en compte la propagation depuis ce diffuseur jusqu'aux récepteurs, en considérant que la fonction de corrélation dépend du déphasage initié pendant ce trajet. L'expression 5.13 représente sous cette approximation le propagateur $G(X, S; t_{SX})$ de la source jusqu'au dernier diffuseur comme une fonction de Green complexe, et le propagateur $G_0(X, A; t - t_{SX})$ comme la fonction de Green balistique entre ce dernier diffuseur et le récepteur. En injectant l'expression du champ dans celle de la corrélation, on obtient l'expression suivante, que nous chercherons à simplifier :

$$C_{AB}(\tau, T_1, T_2) = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^t dt_{SX} G(X, A; t - t_{SX}) G_0(X, S; t_{SX}) \int_{-\infty}^{\infty} dX' \int_{-\infty}^{t+\tau} dt_{SX'} G(X', B; t + \tau - t_{SX'}) G_0(X', S; t_{SX'}) \quad (5.5)$$

Cette expression fait entrer en jeu des couples de diffuseurs X et X' .

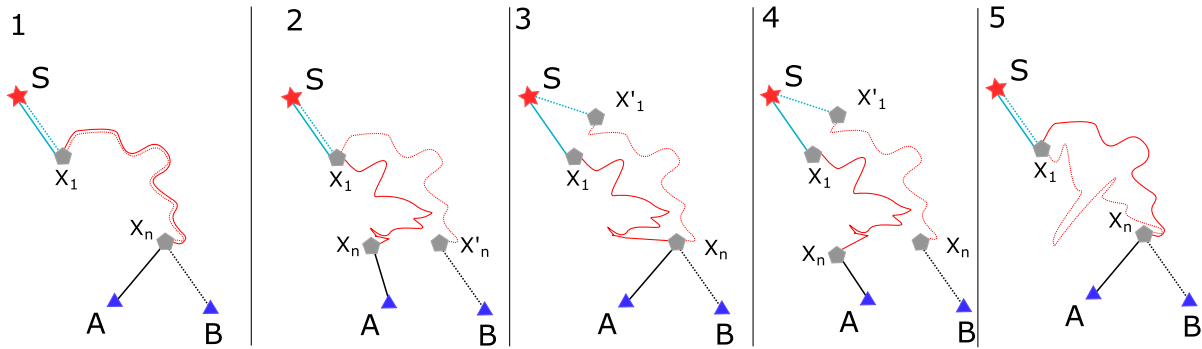


FIGURE 5.2: Schéma représentant les trajets pouvant contribuer à la fonction de corrélation dans le cadre de notre description du milieu. Dans un contexte de corrélations, nous nous intéressons principalement au déphasage entre deux sources différentes. Si le déphasage est nul, la corrélation est maximale. Si le déphasage est grand, on considérera que la contribution à la fonction de corrélation est négligeable. Nous représentons ici les principaux cas de figure pour l'arrivée d'une onde émise par une source S (étoile rouge) et reçu en A et en B (triangles bleus) après avoir été multiples fois diffusée entre les diffuseurs (pentagones gris) X_1 et X_n , premiers et derniers diffuseurs de la série de diffusion (traits rouges). Dans le cadre de notre approximation, seul le type de trajet représenté en 1 contribuera à la fonction de corrélation. Les autres trajets induisent un déphasage important, et donc une contribution faible avant le dernier diffuseur. Cette conclusion est importante car il existe des modèles physiques pour décrire la propagation schématisée en 1.

Pour avoir une description correcte du propagateur $G(X, S; t_{SX})$ il est nécessaire de passer à l'expression de la corrélation moyenne :

$$\langle C_{AB}(\tau, T_1, T_2) \rangle = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^t dt_{SX} \int_{-\infty}^{\infty} dX' \int_{-\infty}^{t+\tau} dt_{SX'} \left\langle G_0(X, S; t_{SX}) G_0(X, S; t_{SX'}) G(X', B; t + \tau - t_{SX'}) G(X, A; t - t_{SX}) \right\rangle \quad (5.6)$$

L'avantage de la corrélation moyenne est de pouvoir décrire la propagation dans le milieu grâce à des modèles statistiques. Le fait de considérer uniquement le dernier diffuseur comme contribuant à la fonction de corrélation est une approximation (l'approximation des "ladders", représentée ?? 1). Différentes contributions à l'intensité des corrélations sont décrites figure 5.8. En effet, d'autres trajets contribuent à la fonction de corrélation et permettent d'expliquer certains effets que l'approximation utilisée ici ne prend pas en compte. Cependant, cette approximation prend en compte la majeure partie de la contribution à la fonction de corrélation. Elle est donc justifiée ici. On considère que

les positions de diffuseurs (sources secondaires) sont décorréliées d'une réalisation du désordre à l'autre. Cette hypothèse nous permet d'écrire une expression de l'intensité en fonction de la position et du temps $\omega(X, S; t_{SX})$:

$$\langle G(X, S; t_{SX})G(X, S; t_{SX'}) \rangle = \omega(X, S; t_{SX})\delta(X - X')\delta(t_{SX} - t_{SX'}) \quad (5.7)$$

L'un des effets de cette approximation est la présence des termes $\delta(X - X')\delta(t_{SX} - t_{SX'})$. Comme montré dans la figure 5.8, le seul cas considéré est le cas 1. Bien sûr, cette approximation néglige certains effets contribuant à la corrélation. Cependant, la contribution principale à la fonction de corrélation est contenue dans l'approximation du C_1 . Cela nous permet de ne s'intéresser qu'aux cas où $X = X'$ (deux diffuseurs différents ne seront pas corrélés), et nous permet d'écrire une équation de corrélation en considérant les diffuseurs comme des sources secondaires à part entière. Si nous nous intéressons maintenant à la fonction de corrélation dans le cadre de l'approximation des ladders, on trouve, comme montré dans De Rosny and Davy (2014) :

$$\begin{aligned} \langle C_{AB}(\tau, T_1, T_2) \rangle &= \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} dt \\ &\langle G(S, B; t + \tau) \rangle \langle G(X, A; t) \rangle \omega(X, S; t) + \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dX' \int_{-\infty}^t dt_{SX'} \\ &\langle G(X', B; t + \tau - t_{SX'}) \rangle \langle G(X', A; t - t_{SX'}) \rangle \Gamma(X', S; t_{SX'}) \quad (5.8) \end{aligned}$$

La fonction $\Gamma(X', S; t_{SX})$ est une fonction d'intensité s'exprimant :

$$\begin{aligned} \Gamma(X', S; t_{SX}) &= \int_{T_1}^{T_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dX'' \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^t dt_{SX} \\ &| \langle G(X, X''; t + \tau - t_{SX}) \rangle |^2 S_X(t) G_0(X', X'') \quad (5.9) \end{aligned}$$

Dans l'équation 5.8, le premier terme correspond à la contribution cohérente du champ. Cette contribution est issue de trajets identiques. Le deuxième terme correspond à une contribution incohérente. Il est issu des diffuseurs agissant comme des sources secondaires. Ces sources secondaires, si elles sont assez proches des récepteurs, contribueront à la corrélation. Nous avons donc maintenant une expression décrivant l'évolution temporelle de la fonction de corrélation. Pour pouvoir ultérieurement comparer les résultats théoriques aux résultats des simulations numériques, il sera nécessaire d'effectuer le même type de normalisation par l'énergie de la corrélation. Pour pouvoir résoudre cette équation, il va maintenant falloir expliciter l'expression des différents termes.

5.2 Quelles expressions pour les propagateurs ?

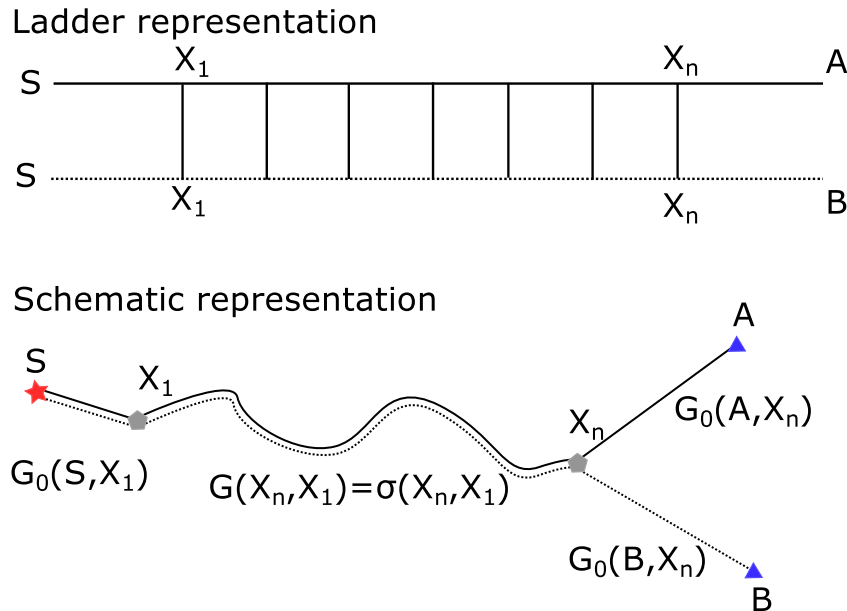


FIGURE 5.3: Représentation des différentes équations mises en jeu lors du calcul de la fonction de corrélation. En haut, la représentation est conforme aux diagrammes classiquement utilisés lors d'études de la diffusion multiple (diagramme de Feynman). Ce diagramme spécifique, dit diagramme en ladder, permet de visualiser la propagation directe depuis une source S jusqu'à un premier diffuseur X_1 , puis la propagation depuis ce diffuseur jusqu'au diffuseur X_n dernier diffuseur de la série de diffusion, puis de ce diffuseur jusqu'aux deux récepteurs A et B. La propagation entre les premiers et derniers diffuseurs peut être approximée par une série de diffusions simples, ce qui donne à ce diagramme son apparence en échelle. L'établissement de ce diagramme est détaillé en annexe. Le schéma du bas reprend les conventions utilisées plus tôt. Chaque trajet peut être exprimé grâce à des fonctions de Green. Dans les deux diagrammes, les diffuseurs X_1 et X_n sont des variables sur lesquelles il est nécessaire d'effectuer une intégration spatiale.

La propagation dans un milieu multiplement diffusant a été extensivement étudiée depuis de nombreuses années, que ce soit en cinétique des gaz ou en physique mésoscopique. L'approximation de Boltzmann permet une description appropriée de ces phénomènes. Elle consiste à remplacer des événements complexes de diffusion par la diffusion par un seul diffuseur, considérant le milieu comme dilué. La figure 5.3 représente l'approximation dite des ladders pour l'intensité en milieu multiplement diffusant. Cette approximation nous permet d'exprimer l'intensité par l'équation du transfert radiatif. On voit sur cette figure que le propagateur Γ est le terme incohérent explicite dans l'équation 5.9. Cependant, il faudra aussi veiller à conserver le terme cohérent (premier terme) de l'équation

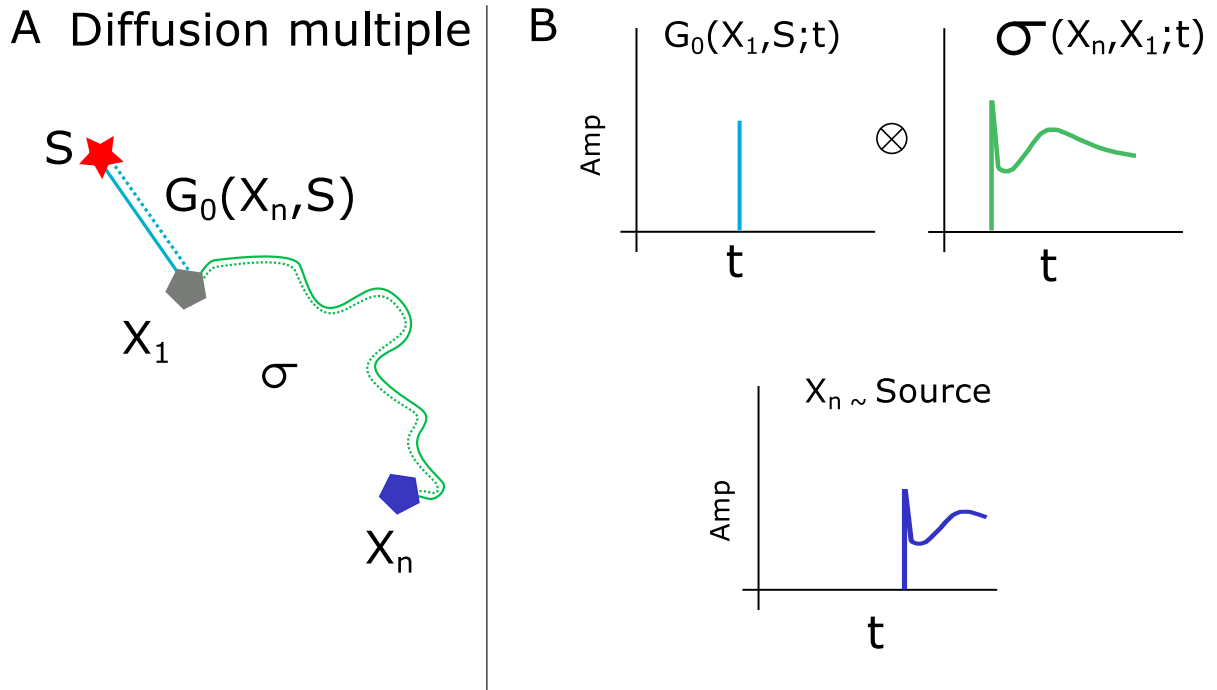


FIGURE 5.4: Représentation schématique de l'établissement d'une fonction source secondaire. A : représentation spatiale de la solution. B : Etablissement d'une fonction source à partir des propagateurs entre les différents points du milieu. La source secondaire est représentée en bleu foncé, la source principale en rouge, et le premier diffuseur de la série de diffusion en gris. Le premier diffuseur est, dans ce cas, une variable spatiale sur laquelle il sera nécessaire d'effectuer une intégration afin de pouvoir exprimer la source secondaire. Dans le cas considéré où la fonction de transfert jusqu'au premier diffuseur n'est positive qu'en un temps (en bleu clair), la contribution à la fonction source secondaire peut être assimilée à la fonction de transfert associée à la série de diffusion (en vert), décalée temporellement et modulée par un facteur d'amplitude (en bleu foncé).

5.8. La figure 5.4 représente schématiquement ces termes.

Nous allons d'abord rappeler l'expression des fonctions de Green utilisées pour la propagation directe entre deux points, puis nous introduisons la solution de l'équation de transfert radiatif. Nous décrivons ensuite deux formes issues de cette équation de transfert radiatif, l'équation de diffusion de la chaleur et la solution de la diffusion simple. Nous décrivons ensuite le comportement de l'équation de corrélation en fonction de ces différentes approximations.

5.2.1 Fonctions de Green en milieu homogène G_0

En 2D, on utilise une expression approximative de la fonction de Green G_0 à l'instar de Sato (1993) et Paasschens (1997) :

$$G_0^{2D}(r, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{r}} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \exp(-\zeta t) \quad (5.10)$$

Cette expression pour la fonction de Green en 2 dimensions est uniquement composée d'un facteur d'atténuation géométrique (conservation de l'énergie au niveau du front d'onde) et d'un facteur d'atténuation intrinsèque du milieu (représenté par ζ). Elle présente le double avantage de pouvoir se réduire à un seul coefficient pour l'amplitude et à un décalage temporel.

5.2.2 Le propagateur d'intensité σ pour la diffusion multiple

Le propagateur σ représente la propagation entre le premier et le dernier diffuseur de la série de diffusion. Plusieurs approximations ont été développées pour décrire la propagation d'onde en milieu multiplement diffusant, dont on présente figure 5.5 quelques exemples. Nous allons détailler ici l'intérêt et l'expression de ces propagateurs.

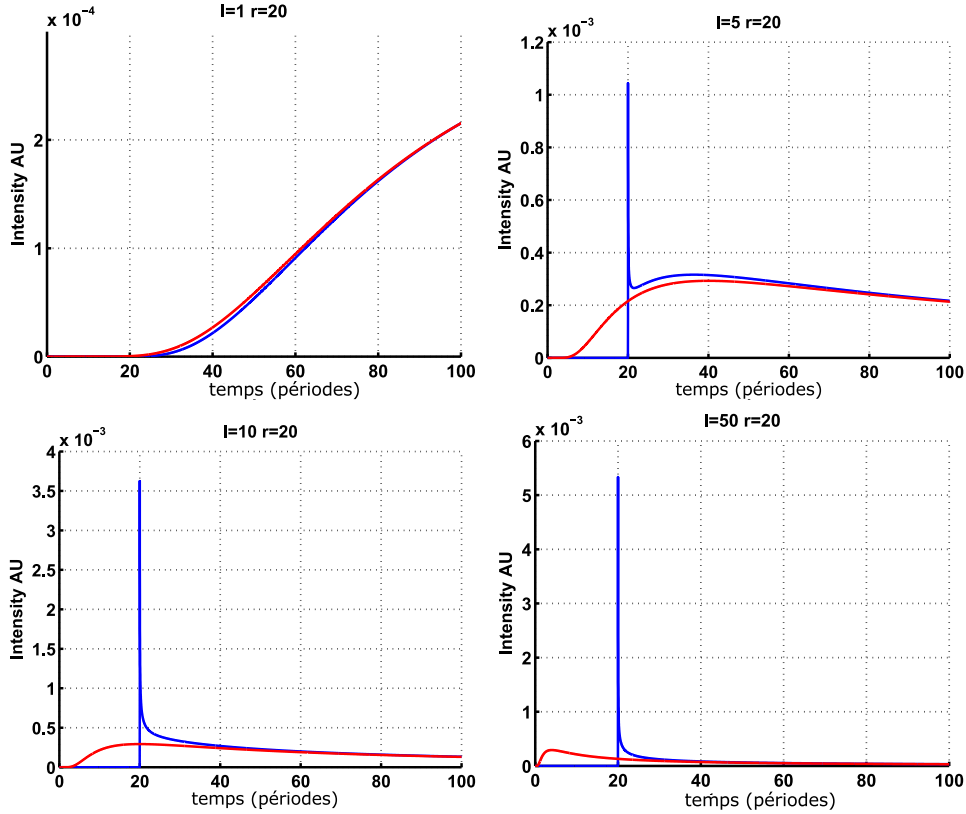


FIGURE 5.5: Comparaison des solutions analytiques à l'équation du transfert radiatif (en bleu) et à l'équation de diffusion de la chaleur (en rouge) en fonction du temps pour différentes valeurs de libre parcours moyen. Lorsque le libre parcours moyen est faible, on voit que les solutions sont très proches. Leur évolution est lente. Lorsque le libre parcours moyen est plus élevé, les solutions ne sont proches que pour les temps longs. On notera l'importance de l'arrivée directe dans le cas du transfert radiatif.

5.2.2.1 L'équation du transfert radiatif

La théorie du transfert radiatif a été développée en astrophysique pour expliquer les phénomènes de rayonnement stellaire. Cette équation est établie à partir d'un bilan d'énergie sur les diffuseurs. Elle décrit donc de façon statistique l'intensité lumineuse dans le milieu. Nous sommes intéressés ici par une solution analytique de cette équation dans un milieu infini isotrope. La solution en 2D est établie par Tielang and Longsheng (1988) et par Sato (1993), à l'aide d'une transformation de Laplace en temps et de Fourier en espace. Pour le cas 3D, La solution décrite par Paasschens (1997) résulte de l'interpolation des solutions 2D et 4D. La solution en 2D est donc :

$$\sigma_{TR}(r, t) = \frac{\zeta}{2\pi c^2 \sqrt{t^2 - (\frac{r}{c})^2}} \exp^{\zeta(\sqrt{t^2 - (\frac{r}{c})^2} - t)} \theta(t - \frac{r}{c}) \quad (5.11)$$

La solution de l'équation du transfert radiatif est représentée figure 5.5 pour différents parcours moyens. Cette expression présente une singularité intégrable en $t = r/c$, dont l'effet diminue de façon exponentielle avec le temps. Cette singularité représente l'arrivée de l'onde directe et de ses échos diffusés une seule fois. Ensuite, selon le libre parcours moyen du milieu, on observe deux types de comportements très distincts. Si le milieu est très dilué, on observe une décroissance constante et exponentielle de l'intensité. Si le milieu est très diffusant, on observe après la première arrivée une légère décroissance de l'intensité, puis une augmentation jusqu'à atteindre le pic de diffusion. Ensuite, la décroissance se fait exponentielle.

5.2.2.2 L'équation de diffusion de la chaleur

L'équation de diffusion n'est qu'un cas limite de l'équation de transfert radiatif. Nous comparons ces deux solutions figures 5.5 et 5.6. La première solution utilisée pour décrire l'évolution de l'intensité dans un milieu multiplement diffusant est la solution de l'équation de la chaleur :

$$\sigma_{Diff}(r, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \exp(-r^2/4Dt) \quad (5.12)$$

avec $D = cl/2$

Cette solution simple est intéressante mais elle souffre de plusieurs problèmes. Elle n'est valide que pour des temps longs ou pour des temps courts uniquement lorsque la diffusion est très importante dans le milieu. De plus, $\sigma_{Diff}(r, t) > 0 \forall t > 0$. Cette propriété pose des problèmes de causalité dans notre cas. En effet, l'intensité ne peut être que nulle pour des temps inférieurs au temps balistique. On peut tenir compte de cette particularité en posant $\sigma_{Diff}(r, t) = 0; \forall t < t_{balistique}$. Cette solution permet une meilleure représentation de la dynamique temporelle de l'intensité dans le milieu. Cependant, il faut garder à l'esprit que l'on ne se trouve alors plus dans un cadre de conservation de l'énergie.

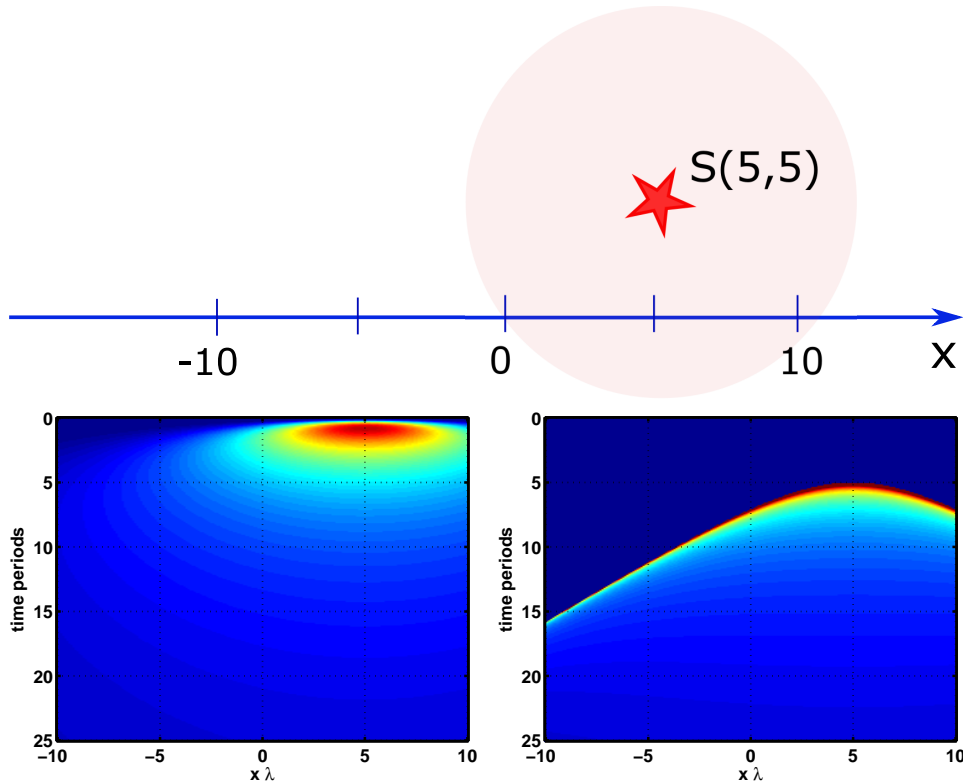


FIGURE 5.6: Comparaison des solutions de l'équation de diffusion et de l'équation du transfert radiatif en fonction du temps et de l'espace pour un libre parcours moyen de 15λ . Le schéma représente la configuration dans laquelle le signal a été enregistré. Une source (étoile rouge) est placée à une certaine distance d'une ligne de récepteurs (ligne bleue). Les figures du bas représentent le signal enregistré sur cette ligne (position des récepteurs en abscisse) en fonction du temps (ordonnées). La figure de gauche est la solution de l'équation de diffusion et celle de droite celle du transfert radiatif. On voit que dans ce cas les deux solutions sont très différentes, en particulier pour les temps courts. Cela justifie l'utilisation de l'équation du transfert radiatif dans le cas de notre étude, qui se focalise sur la dynamique temporelle de la fonction de corrélation, principalement aux temps courts.

5.2.2.3 Diffusion simple

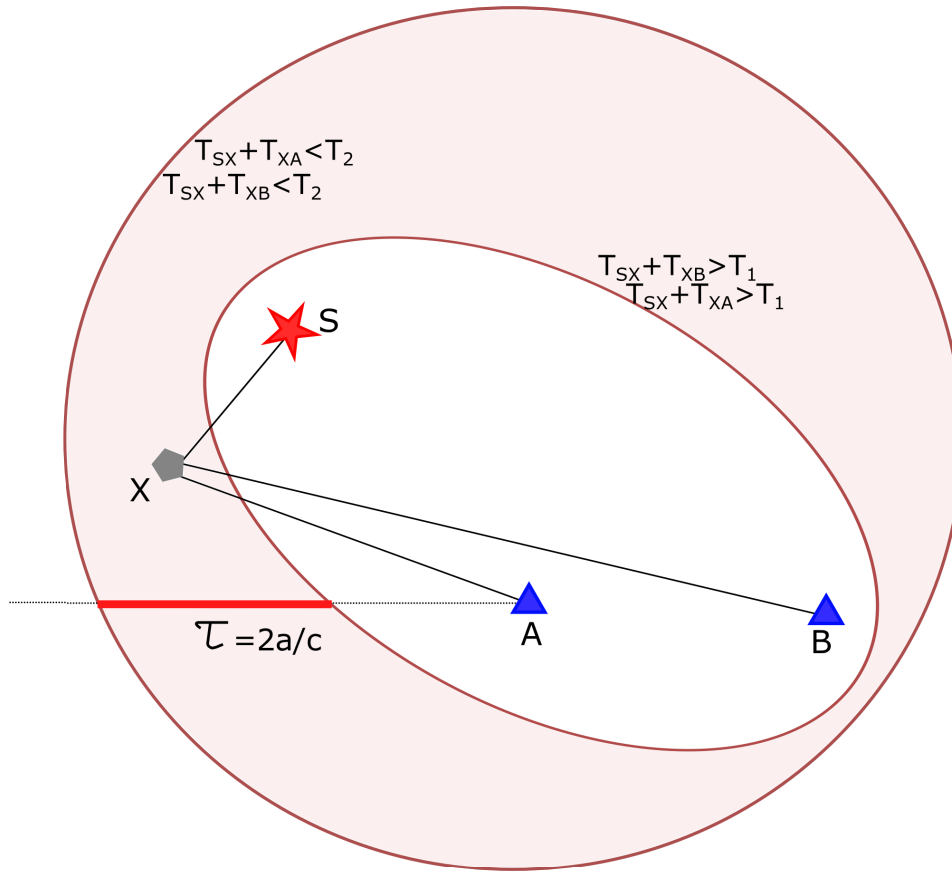


FIGURE 5.7: Schéma représentant la contribution à la fonction de corrélation dans le cas de la diffusion simple. Pour une fenêtre de temps donnée, les diffuseurs pouvant contribuer à la fonction de corrélation sont tous compris dans la zone rouge. Cette zone est définie de manière géométrique par calcul des temps de trajet entre la source et un diffuseur quelconque du milieu. Ce temps doit impérativement être compris dans la fenêtre de temps observée. Si l'on ne s'intéresse maintenant qu'à la reconstruction du temps balistique dans les corrélations, les diffuseurs subissent une double condition spatiale (temps de trajet et end fire lobe). Ce critère est représenté par la ligne rouge, qui représente les positions des diffuseurs contribuant à la reconstruction de l'onde balistique pour une fenêtre de temps donnée dans un milieu simplement diffusant. Cette représentation permet d'alléger grandement les calculs lors d'une évaluation numérique de cette contribution. Il n'est plus nécessaire d'intégrer spatialement que sur un seul segment.

Le cas de la diffusion simple est intéressant car il peut être résolu de façon géométrique, comme présenté figure 5.7. On choisit de n'assimiler le processus de diffusion qu'à une seule diffusion. On peut alors identifier les diffuseurs contribuant à la fonction de corrélation pour une fenêtre de temps donnée bornée par T_1 et T_2 . Si l'on note t_{SD} le

temps de trajet depuis la source vers un diffuseur quelconque D et t_{SA} et t_{SB} le temps de trajet depuis ce diffuseur jusqu'aux récepteurs A et B, alors ce diffuseur contribuera à la fonction corrélation pour tout $T_1 < t_{SD} + t_{DB} \wedge t_{SD} + t_{DA} < T_2$.

5.3 La reconstruction du temps balistique dans les corrélations

Nous avons rappelé précédemment que dans un milieu homogène avec des sources réparties de manière uniforme, chaque source contribuera à un temps précis dans la fonction de corrélation en fonction de sa position. Dans un milieu multiplement diffusant avec une seule source, on considère les diffuseurs comme des sources secondaires. Ces sources secondaires ne seront pas d'intensité constante ; leur intensité sera fonction de leur position et du temps. Si l'on s'intéresse au temps balistique dans les corrélations, les sources secondaires contribuant à ce temps seront situées sur les hyperboles $\tau = \pm 2a/c$. La figure 5.8 décrit comment est évaluée la fonction de corrélation. On calcule d'abord la fonction de Green $\langle G_0(X_1, S, t) \rangle^2$ pour chaque point de l'espace. Ensuite, pour chacun de ces points, on calcule $\sigma(X_n, X_1; t)$. Les points X_n se trouvant forcément sur l'hyperbole contribuant au temps τ considéré. Ensuite, on évalue la propagation $\langle G_0(A, X_n; t) \rangle \langle G_0(B, X_n; t) \rangle$ depuis le dernier diffuseur jusqu'aux récepteurs. Les temps ainsi que les amplitudes sont ainsi respectés. Afin de s'abstraire de la singularité présente dans la solution du transfert radiatif, on peut convoluer cette solution avec une fonction continue. Dans le cas de nos simulations numériques, la source est une gaussienne. On convolue donc la solution du transfert radiatif par une gaussienne représentant la source. Cette solution a l'avantage de permettre la prise en compte de la dynamique temporelle de la source dans l'évaluation de la fonction de corrélation.

5.4 Résultats

Nous allons maintenant détailler les résultats obtenus grâce à l'approche analytique puis les comparer aux solutions obtenues lors des simulations numériques. Les figures 5.9, 5.10 et 5.11 présentent le modèle théorique pour les trois types d'approximations. Dans les trois figures, on présente l'évolution temporelle des amplitudes reconstruites pour la partie causale et acausale pour différentes positions de sources et différents libres parcours moyens. On représente la valeur de la fonction de Green associée au trajet de l'onde entre les deux récepteurs en noir. On voit que toutes les courbes présentent d'abord une évolution rapide, pour ensuite converger vers un plateau. La valeur de ce plateau est proche de la valeur de la fonction de Green moyenne calculée pour un milieu de même libre parcours moyen, même si les deux valeurs ne convergent pas parfaitement. Cette différence peut être due à des problèmes numériques d'évaluation des expressions analytiques (prise en compte de singularité lors de l'intégration). De manière générale, on voit que l'évolution est plus rapide et la différence entre les parties causales et acausales moins importantes lorsque le libre parcours moyen est plus grand.

5.4.1 Diffusion simple

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, la diffusion simple peut être assimilée à un problème géométrique. Les diffuseurs contribuant à la fonction de corrélation se trouvent tous sur un segment, la taille de ce segment étant contrôlée par la durée de la fenêtre d'intégration. Il nous suffira juste de calculer trois fonctions de Green par diffuseur (on considère chaque point du segment comme un diffuseur). On calcule donc d'abord la fonction de Green en milieu homogène associée au trajet entre la source initiale et chacun de ces points, puis les fonctions de Green entre chacun de ces points et les deux récepteurs. Il suffit alors d'intégrer sur ce segment pour calculer la contribution à la fonction de corrélation. Les résultats sont présentés figure 5.9. On voit que cette approximation peut rendre compte des phénomènes observés dans certain cas.

5.4.2 Equation de diffusion ou du transfert radiatif

Dans le cas où nous utilisons la solution de l'équation de diffusion ou l'équation du transfert radiatif pour décrire la propagation dans le milieu, nous devons calculer les solutions de deux fonctions de Green homogène (entre la source initiale et le premier diffuseur, et entre le dernier diffuseur et les récepteurs). Comme précédemment, les derniers diffuseurs contribuant à la reconstruction du balistique se trouveront toujours sur les end fire lobes. Cependant, cette fois, la diffusion multiple va entraîner des arrivées continues

sur cette ligne. Chaque point de la ligne contribuera non plus comme une source ponctuelle, mais comme une source continue. Les résultats sont présentés figures 5.10 et 5.11 respectivement pour le modèle utilisant l'équation de diffusion et l'équation du transfert radiatif.

5.5 Interprétation et utilisation

Quel que soit le type de modèle utilisé, on voit que l'amplitude évolue d'abord assez vite pour ensuite converger plus lentement vers un plateau. On peut donc diviser ces modèles d'évolution en une partie initiale et une partie finale. La partie finale ne nous apportera des informations que sur la fonction de Green entre les deux récepteurs, grâce à la valeur du plateau. En effet, l'évolution de la partie finale est assez similaire quelle que soit le milieu. Ceci est particulièrement frappant quand on observe le ratio entre les amplitudes des parties causales et acausales. Les résultats issus des trois modèles physiques différents sont assez proches. Leur allure diffère principalement aux temps courts. Nous pouvons nous intéresser non plus aux amplitudes des parties causales et acausales mais aux ratio de ces amplitudes, comme l'a fait Malcolm et al. (2004). Le ratio α exprimant la tendance à la symétrie s'écrit :

$$\alpha_{2D}(t) = \frac{(1 + (R/(c * t)))}{(1 - (R/(c * t)))} \quad (5.13)$$

Avec R la distance de la source aux récepteurs, c la vitesse de propagation dans le milieu et t le temps. Cette formule, bien qu'intéressante, ne permet pas d'expliquer les phénomènes observés aux temps courts dans nos simulations numériques. Cette solution simple est intéressante mais elle ne permet pas de décrire de façon précise les phénomènes particuliers observés aux temps courts. On voit alors que notre solution permet une meilleure prise en compte des temps courts.

L'autre implication de notre modèle est de pouvoir définir (sous réserve de connaître le libre parcours moyen du milieu et la position de la source) la fenêtre temporelle dans la coda pour laquelle la corrélation sera optimale. Si l'on recherche la symétrie entre les parties causales et acausales, il sera intéressant de se placer après l'évolution rapide observée au temps courts de notre modèle. Si l'on recherche juste à reconstruire un signal avec la plus grande amplitude possible, on pourra se placer aux temps courts en ne sélectionnant qu'une seule partie des corrélations (causale ou acausale).

On peut aussi chercher à reconstruire une carte représentant l'amplitude attendue pour la partie causale ou acausale à un temps donné en fonction de la position de la source. De telles cartes sont présentées figures 5.12 et 5.13, pour deux libre parcours moyens différents. La différence entre les deux figures nous renseigne sur la tendance

plus ou moins rapide à l'équipartition de l'énergie dans le milieu. On peut envisager dans un contexte favorable d'utiliser ce type de carte afin de localiser la source impulsionnelle grâce à l'asymétrie entre les parties causales et acausales (à l'ambiguïté près de l'axe de symétrie sur lequel se trouvent les récepteurs).

5.6 Comparaison avec les simulations numériques

Cette solution simple est intéressante, mais elle souffre de plusieurs problèmes. Elle n'est valide que pour des temps longs ou pour des temps courts uniquement lorsque la diffusion est très importante dans le milieu. De plus, $\sigma_{Diff}(r, t) > 0 \forall t > 0$. Cette propriété pose des problèmes de causalité dans notre cas. En effet, l'intensité ne peut être que nulle pour des temps inférieurs au temps balistique. On peut tenir compte de cette particularité en posant $\sigma_{Diff}(r, t) = 0; \forall t < t_{balistique}$. Cette solution permet une meilleure représentation de la dynamique temporelle de l'intensité dans le milieu. Cependant, il faut garder à l'esprit que l'on ne se trouve alors plus dans un cadre de conservation de l'énergie.

Cette description de la symétrie de la fonction de corrélation en fonction de la position d'une source unique dans un milieu multiplement diffusant présente un triple intérêt. En premier lieu, comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, nous pouvons optimiser le choix de la fenêtre de temps utilisée pour les corrélations dans un milieu relativement connu. Cet avantage peut permettre de réduire le nombre d'événements nécessaires pour la reconstruction d'une fonction de Green de bonne qualité (du moins l'onde directe). Dans un contexte de monitoring par exemple (suivi des variations temporelles de vitesse), un nombre d'événements nécessaires moins élevé peut entraîner une amélioration de la résolution temporelle. Ensuite, il est possible d'envisager le problème inverse. En effet, l'évolution temporelle aux temps courts constitue une "signature" à la fois du libre parcours moyen et de la position de la source. Si l'on connaît l'évolution des amplitudes des parties causales et acausales pour une source donnée, et l'un de ces deux paramètres, il devient possible d'estimer le paramètre inconnu (position de la source ou libre parcours moyen du milieu). La figure 5.14 montre une première approche de ce problème, en comparant nos modèles théoriques avec des paramètres choisis pour correspondre aux résultats obtenus par simulation numérique.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons élaboré un modèle théorique pour écrire l'évolution de la symétrie des corrélations dans un milieu multiplement diffusant. Pour cela, nous avons injecté une expression représentant un terme source dans un milieu diffusant dans

l'équation de corrélation de bruit ambiant montrée chapitre 2. Cette équation permet ainsi de rendre compte de la corrélation quand l'énergie n'est pas équirépartie dans le milieu. Pour cela, nous discutons des approximations possibles pour le terme représentant la diffusion multiple. Nous observons que les résultats varient de manière importante selon le cadre théorique considéré (diffusion simple, transfert radiatif ou diffusion) tout en gardant cependant une certaine homogénéité. La corrélation comprenant maintenant un terme dépendant du temps, il est possible d'effectuer la corrélation sur une seule fenêtre de temps. Nous représentons donc l'amplitude théorique des parties causales et acausales des corrélations en fonction du temps. Nous montrons que l'asymétrie observée dans les données issues de simulations numériques est plus ou moins bien prédite par le modèle théorique. Nous montrons aussi que lorsque l'énergie tend vers l'équipartition dans le milieu, l'amplitude des corrélations tend bien vers l'amplitude des fonctions de Green théoriques du milieu. Nous présentons ensuite une première comparaison de ce modèle théorique aux données issues de simulations numériques. Bien que l'accord ne soit pas parfait, on voit nettement une similarité entre les résultats issus des deux approches. Cela semble encourageant pour d'autres études, par exemple pour tenter de retrouver le libre parcours moyen d'un milieu ou pour localiser une source (à une ambiguïté près) dans un milieu dont le libre parcours moyen est connu.

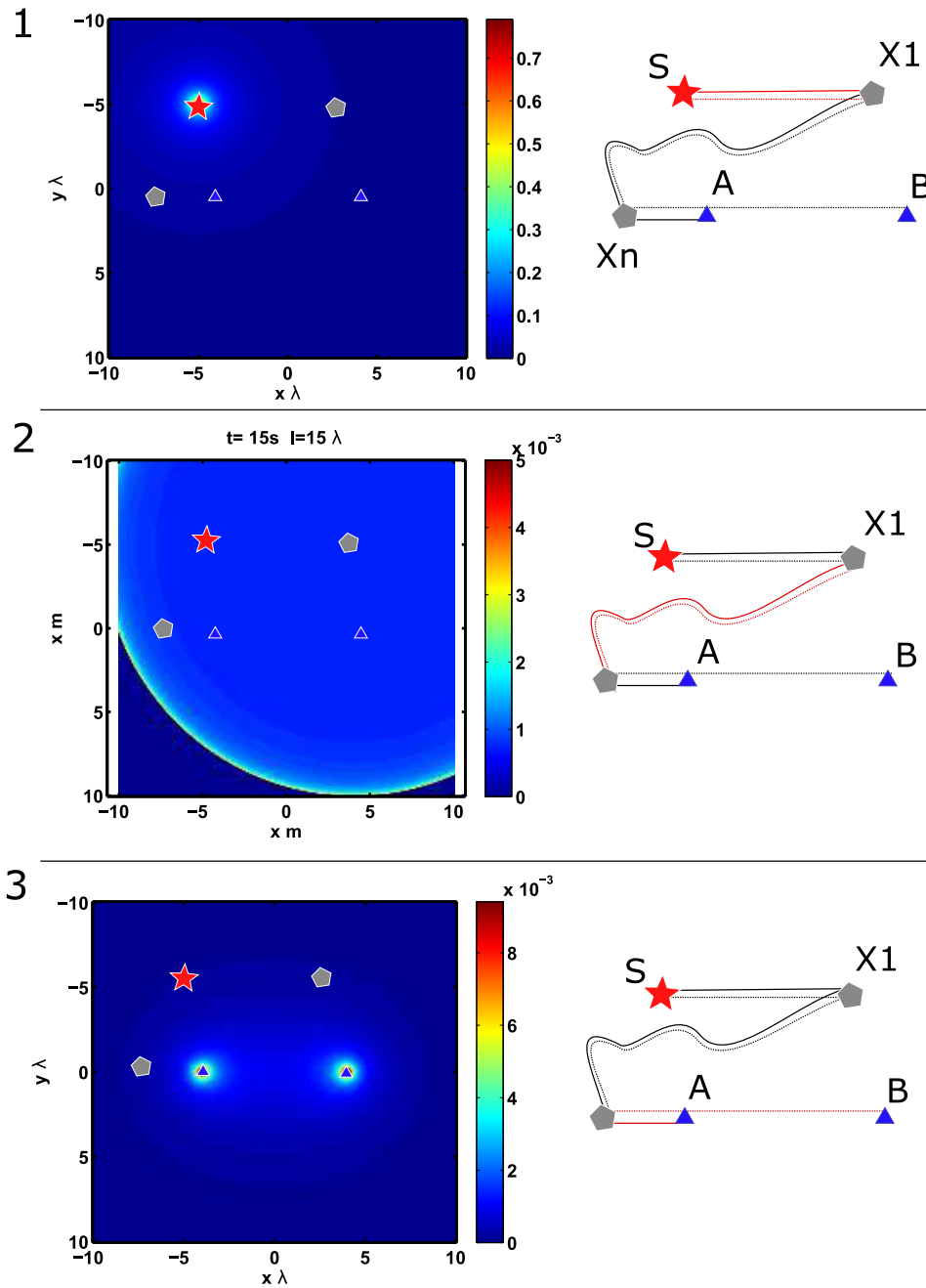


FIGURE 5.8: Schéma représentant les étapes nécessaires au calcul de la fonction de corrélation au temps balistique. Pour cela, il nous faut utiliser la série de diffusion. On définit d'abord l'emplacement de la source initiale. Comme décrit précédemment, il est nécessaire d'intégrer sur tout l'espace. Nous allons décrire le calcul d'une série de diffusion quelconque, puis il suffira de réitérer l'opération pour toutes les séries de diffusion. Il va donc être nécessaire de décrire le trajet de l'onde depuis la source initiale jusqu'au premier diffuseur (1), puis du premier diffuseur jusqu'au dernier diffuseur(2) et enfin de ce dernier diffuseur jusqu'aux récepteurs (3). La figure (1) représente la fonction de Green à 2D entre la source initiale et chaque point de l'espace. La figure (2) représente la solution du transfert radiatif dans tout l'espace à un temps donné (ici 15s). La source n'est cette fois plus la source initiale mais la le premier diffuseur de la série de diffusion. La figure (3) représente le produit des fonctions de Green entre le dernier diffuseur et les deux récepteurs. Il est intéressant de noter que, dans le cas de la reconstruction de l'onde balistique, le dernier diffuseur se trouve obligatoirement sur l'un des end fire lobes.

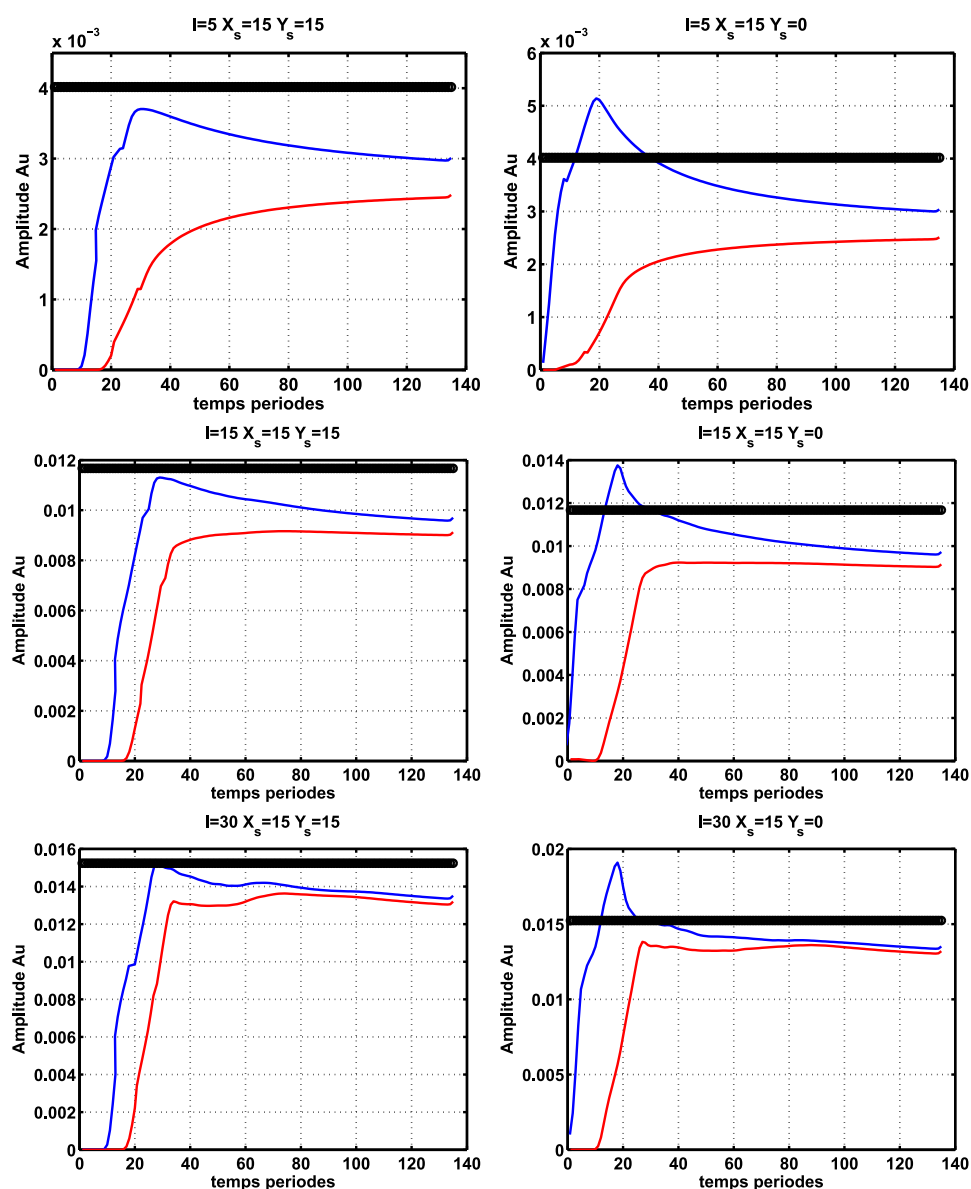


FIGURE 5.9: Evolution de l'amplitude de la reconstruction de l'onde balistique en fonction de temps pour la partie causale (rouge) et acausale (bleu) en fonction du temps (début de la fenêtre d'intégration) pour différents libres parcours moyen et positions de source. Le modèle utilisé ici pour le calcul de ces solutions est basé sur la diffusion simple. Le trait noir représente la valeur théorique de la fonction de Green moyenne entre les deux récepteurs pour un milieu de même libre parcours moyen.

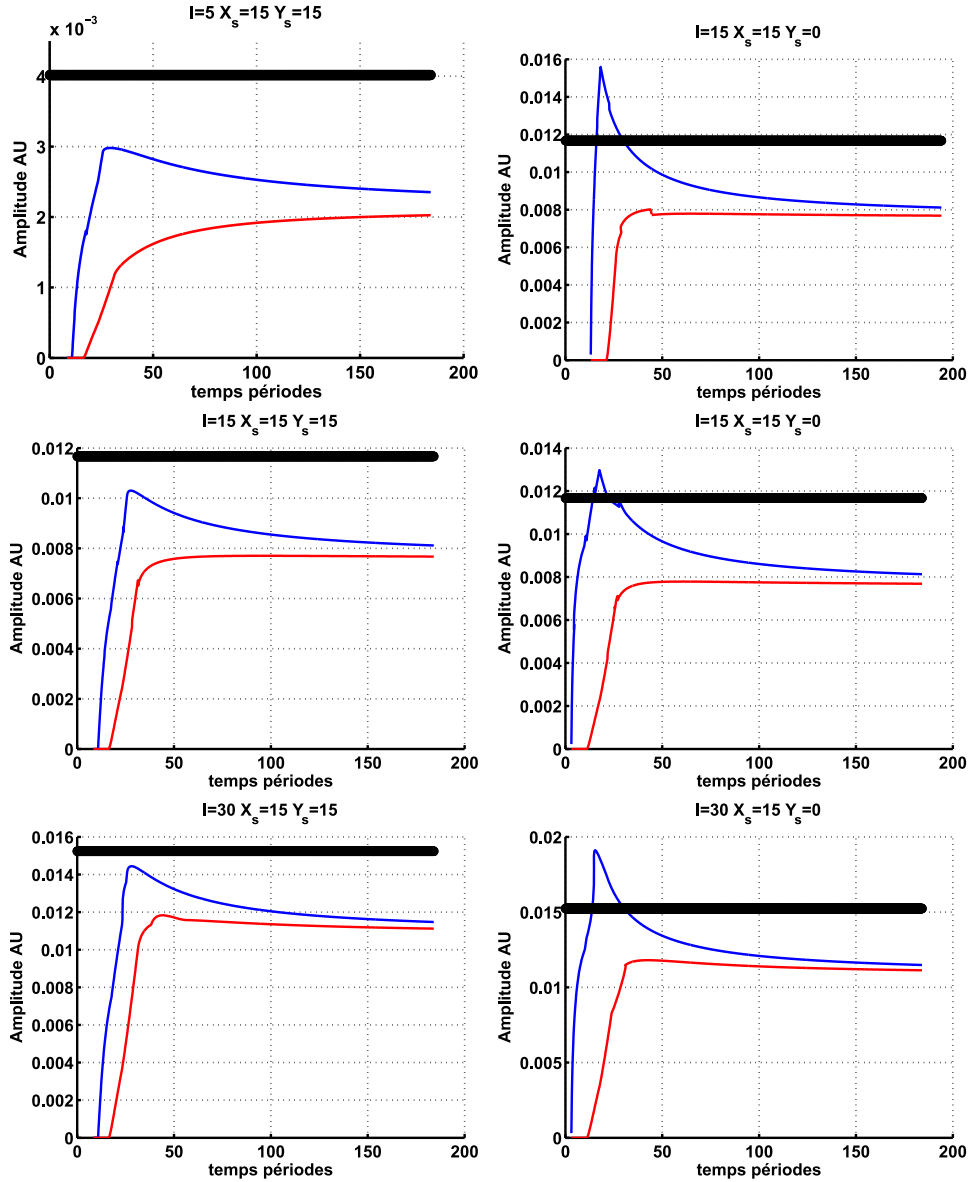


FIGURE 5.10: Evolution de l'amplitude de la reconstruction de l'onde balistique en fonction de temps pour la partie causale (rouge) et acausale (bleu) en fonction du temps (début de la fenêtre d'intégration) pour différents libres parcours moyen et positions de source. Le modèle utilisé ici pour le calcul de ces solutions est basé sur la diffusion de la chaleur. Le trait noir représente la valeur théorique de la fonction de Green moyenne entre les deux récepteurs pour un milieu de même libre parcours moyen.

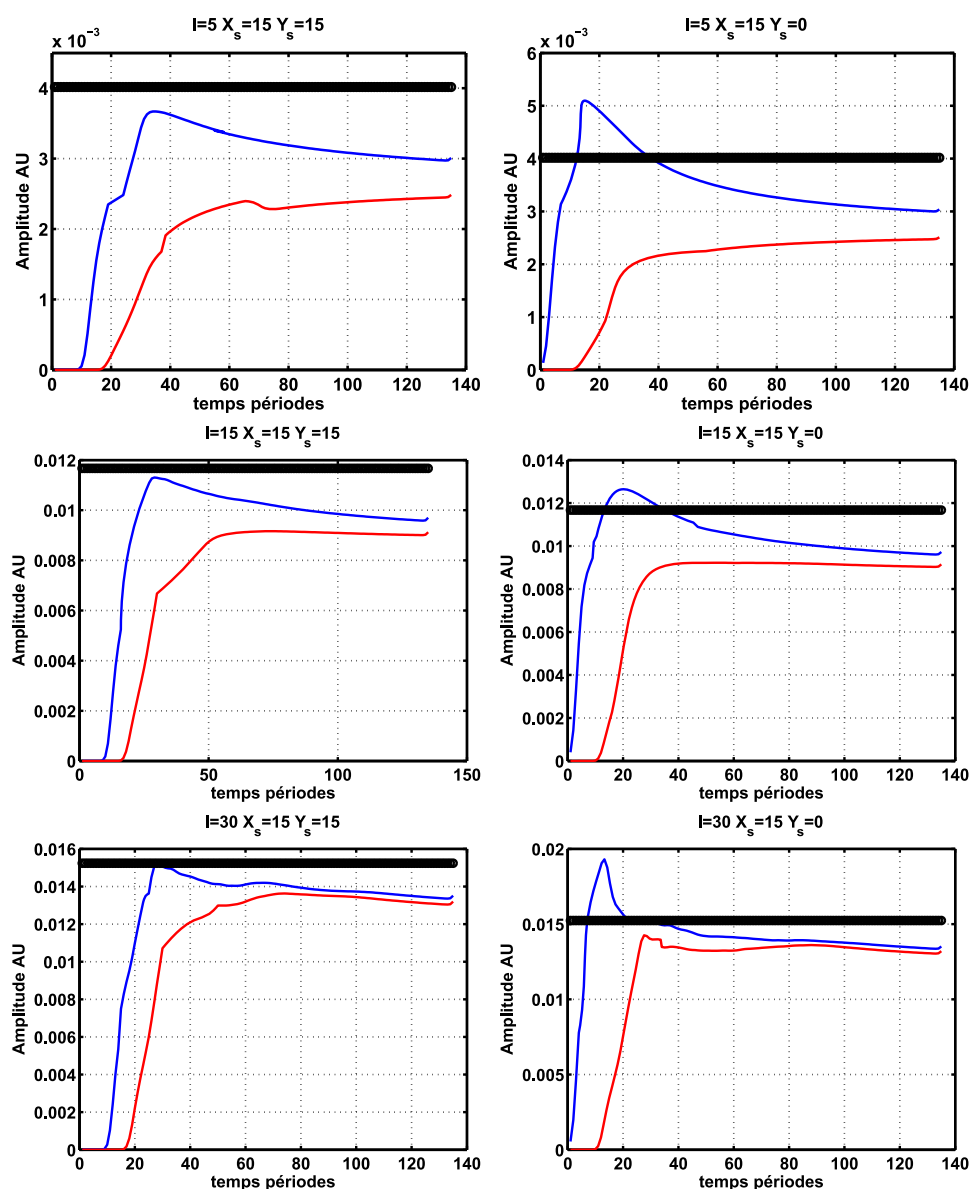


FIGURE 5.11: Evolution de l'amplitude de la reconstruction de l'onde balistique en fonction de temps pour la partie causale (rouge) et acausale (bleu) en fonction du temps (début de la fenêtre d'intégration) pour différents libres parcours moyen et positions de source. Le modèle utilisé ici pour le calcul de ces solutions est basé sur le transfert radiatif. Le trait noir représente la valeur théorique de la fonction de Green moyenne entre les deux récepteurs pour un milieu de même libre parcours moyen.

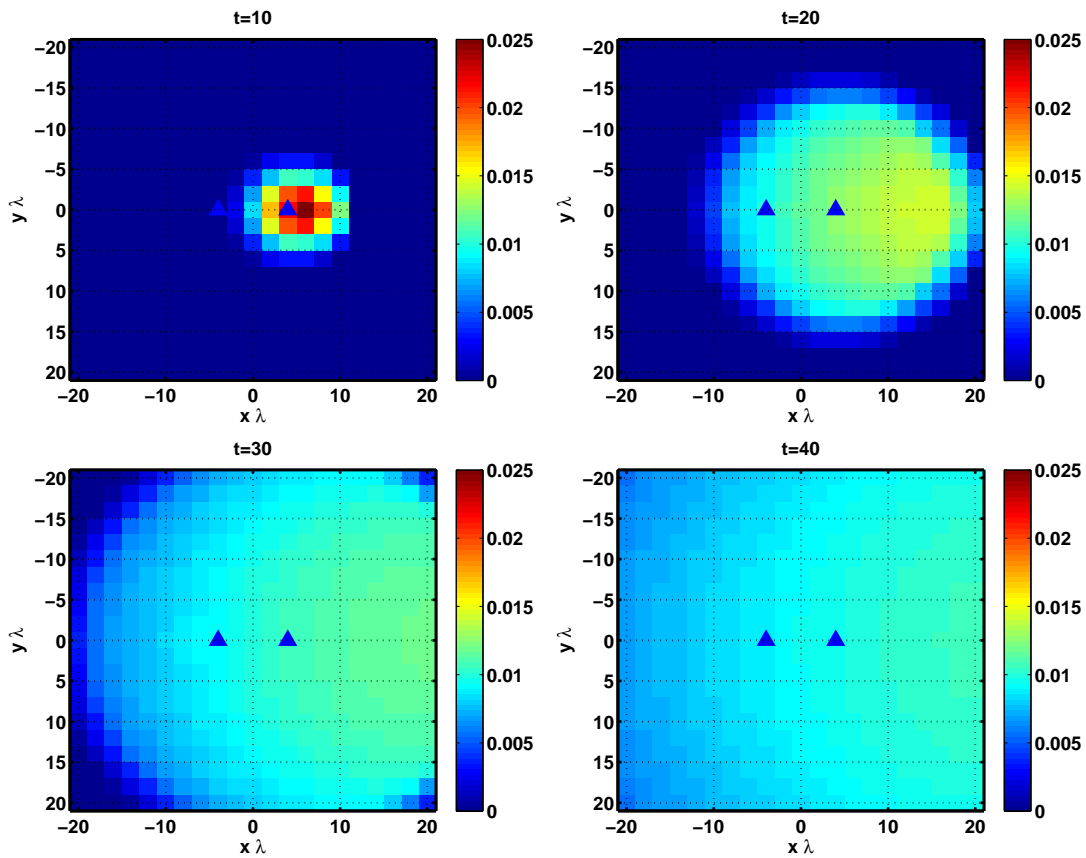


FIGURE 5.12: Carte représentant l'amplitude de la partie causale de la fonction de corrélation au temps de l'onde directe en fonction de la position de la source (les récepteurs sont figurés par les triangles bleus) pour quatre fenêtres de temps différentes dans la coda.

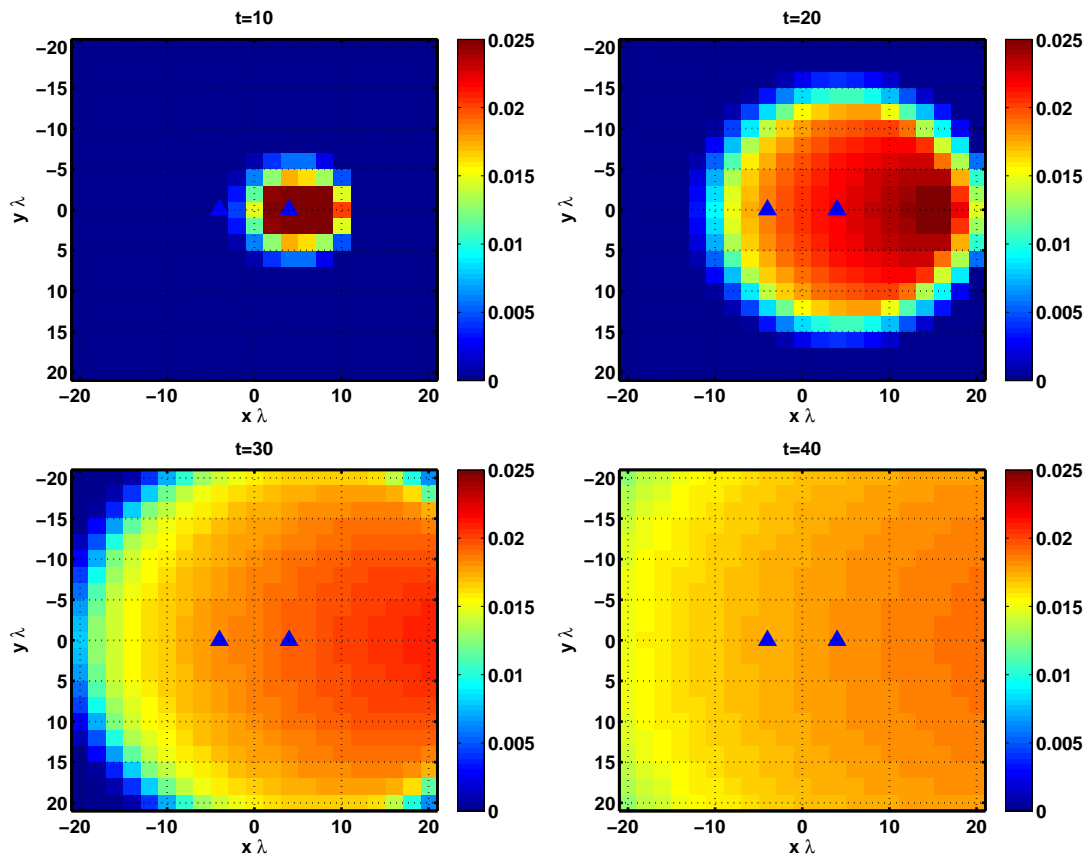


FIGURE 5.13: Carte représentant l'amplitude de la partie causale de la fonction de corrélation au temps de l'onde directe en fonction de la position de la source (les récepteurs sont figurés par les triangles bleus) pour quatre fenêtres de temps différentes dans la coda.

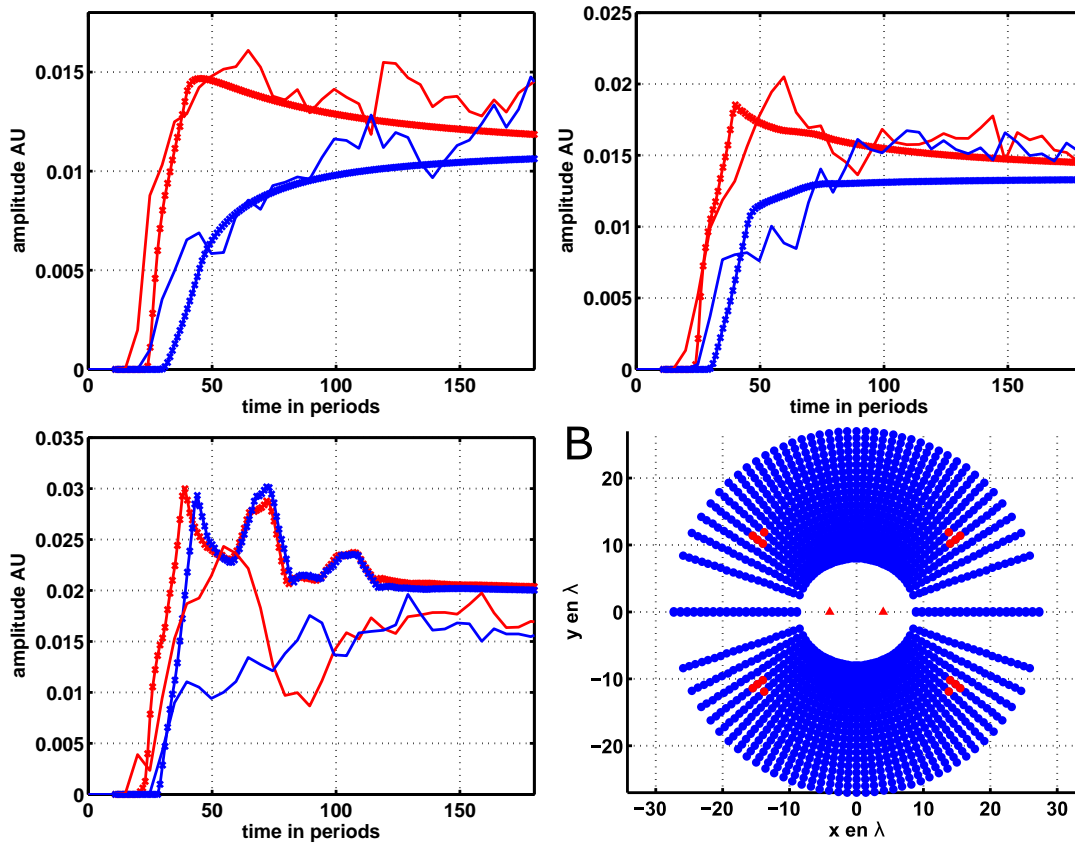


FIGURE 5.14: Présentation de l’ajustement du modèle de transfert radiatif aux données pour différentes densités d’hétérogénéités, dans la configuration présentée en D (les ronds rouges les sources utilisées pour obtenir une moyenne spatiale, et les triangles rouges représentent les récepteurs). On voit que le modèle peut relativement être ajusté aux données pour les milieux dans lesquels la densité d’hétérogénéités est élevée (A et B, respectivement 128 et 64 diffuseurs). Lorsque la densité d’hétérogénéité est plus faible (C), nous n’arrivons pas à avoir un ajustement correct du modèle aux données. Cela peut être dû à deux raisons. En premier lieu, la simulation numérique d’un milieu peu dense souffre plus d’effets de bords. La répartition des intensités dans le milieu semble pouvoir en être affectée. Deuxièmement, il est peut être nécessaire de réitérer l’expérience dans un milieu plus grand, afin que le libre parcours moyen du milieu de propagation soit très inférieur à la taille du milieu de propagation, ce qui peut également affecter les résultats. Dans les deux autres cas, l’ajustement est correct (et meilleur lorsque la densité d’hétérogénéités est plus élevée). On retrouve une évolution aux temps courts assez similaires dans le modèle et dans les données. La valeur du plateau (amplitude de la fonction de Green de l’onde directe) est relativement proche dans les simulations et dans le modèle. On peut cependant remarquer que le libre parcours moyen est bien inférieure à celle estimée avec la méthode décrite chapitre 3 du calcul du ration des énergies cohérente et incohérente.

Chapitre 6

Corrélations dans la coda : Application

6.1 Introduction

Nous avons montré comment exploiter des effets liés à la diffusion multiple afin de tirer des informations de l'évolution temporelle de la symétrie de la fonction de corrélation dans la coda. Cependant, jusqu'à maintenant, nous avons travaillé sur un modèle simple de simulation numérique 2D. Cette asymétrie de la fonction de corrélation a été observée dans des données sismologiques de terrain. L'objectif de ce chapitre est d'appliquer la théorie développée jusqu'ici afin de tirer de nouvelles informations sur le milieu de propagation.

Nous allons travailler sur un jeu de données sismologiques acquises lors d'une campagne sur le volcan Erebus, en Antarctique. Les volcans comme le mont Erebus sont des milieux très hétérogènes, dans lesquels la diffusion importante, rendant une étude fondée sur la théorie de la diffusion multiple particulièrement appropriée.

Nous allons tout d'abord présenter le jeu de données étudié, puis nous tenterons d'appliquer la méthode développée au cours de ce manuscrit, reposant sur l'évolution temporelle de la reconstruction de l'onde balistique dans la coda.

Nous présenterons ensuite une méthode d'optimisation, développée avec Julien Chaput (Chaput et al., 2016), permettant de reconstruire la fonction de Green à l'aide de corrélations dans la coda de manière optimale. L'intérêt de cette méthode, outre le fait d'améliorer drastiquement le rapport Signal/Bruit dans les corrélations, est de reposer sur le choix de la fenêtre temporelle optimale dans la coda. Ainsi, elle nous fournira quelques informations sur la convergence des parties causales et acausales de la fonction de Green reconstruite par corrélation dans la coda sismique.

6.2 Présentation du jeu de données étudié

Le mont Erebus est un stratovolcan actif situé sur l'île de Ross (77.32'S, 167.10'E) en Antarctique, qui tire son origine du système de rift Antarctique. Il s'élève à 3794 m au-dessus du niveau de la mer, et son âge est estimé à 1,3 millions d'années (Esser2004). Il est en éruption quasi permanente, tout du moins depuis sa découverte en 1841 par l'expédition de James Clark Ross à bord du HMS Erebus et du HMS Terror (qui donnera son nom à un autre volcan). Cette expédition avait pour but d'effectuer des relevés du magnétisme terrestre afin de confirmer la formule de Gauss.

Le volcan possède un cratère sommital dans lequel repose l'un des rares lacs de lave persistant de la planète. Ce lac est alimenté par un système complexe de conduits remplis de magma, et l'on assiste régulièrement à des éruptions stromboliennes de faible intensité. La partie supérieure du cratère est composée de matériaux très hétérogènes, que ce soit des coulées de lave, des dépôts pyroclastiques, des glaciers ou des couches de permafrost. L'expérience Tomo Erebus (réseau ETS) dont proviennent les données étudiées (voir figure 6.1, (Zandomeneghi et al., 2013) a été conçue dans le but d'obtenir un profil de vitesse en 2D pour les ondes P de l'île de Ross et une tomographie 3D des vitesses dans le sommet du volcan (Chaput et al., 2012), avec une résolution de l'ordre de la centaine de mètre. 80 sismomètres à 3 composantes ont été déployés, espacés de 300m à 500m, couvrant ainsi une zone carrée d'environ 4km de côté, comprenant le cratère sommital du mont Erebus ainsi que le lac de lave. Les rais reliant les stations couvrent bien le système magmatique souterrain et les structures environnantes. La distribution imparfaite des stations découle des contraintes topographiques telles que la présence de falaises, ou la présence de couverture neigeuse ou glaciaire.

Les stations sont équipées de capteurs trois composantes à courte période Sercel L28 (4.5Hz) et d'une horloge GPS. L'enregistrement continu est effectué à 200Hz.

Des données additionnelles provenant de 23 stations disposées sur les flancs du volcan (Réseau ETB) ont aussi été incorporées. Ces stations sont équipées de capteurs trois composantes de période intermédiaire (fréquence naturelle de 30s) enregistrées en continu à 100Hz.

Des données issues des stations à période intermédiaire du réseau permanent Mount Erebus Volcano Observatory (Aster et al., 2004) sont aussi utilisées.

L'ensemble des stations utilisables (sans problème d'enregistrement ou de synchronisation) provenant des trois réseaux additionnés forme un réseau final de 91 stations.

On peut observer un exemple du signal enregistré après un événement sismique typique de notre jeu de données figure 6.2.

De plus, on voit sur la figure 6.3 que les distances inter stations ne sont pas uniformément réparties. Il est donc plus judicieux de s'intéresser aux couples de stations séparés d'environ 2000m afin de pouvoir effectuer les moyennes les plus pertinentes. On s'intéresse particulièrement à ce volcan car l'hétérogénéité de ce milieu garantit que la diffusion

multiple est importante. En effet, Yamamoto and Sato (2010) ont montré que dans ce type de volcan, l'équipartition des ondes sismiques issues d'une source impulsionnelle est localement atteinte au bout d'environ 5 secondes. D'après Weaver and Lobkis (2004), une fois cet état d'équipartition atteint, il est possible d'appliquer les méthodes de corrélation de bruit.

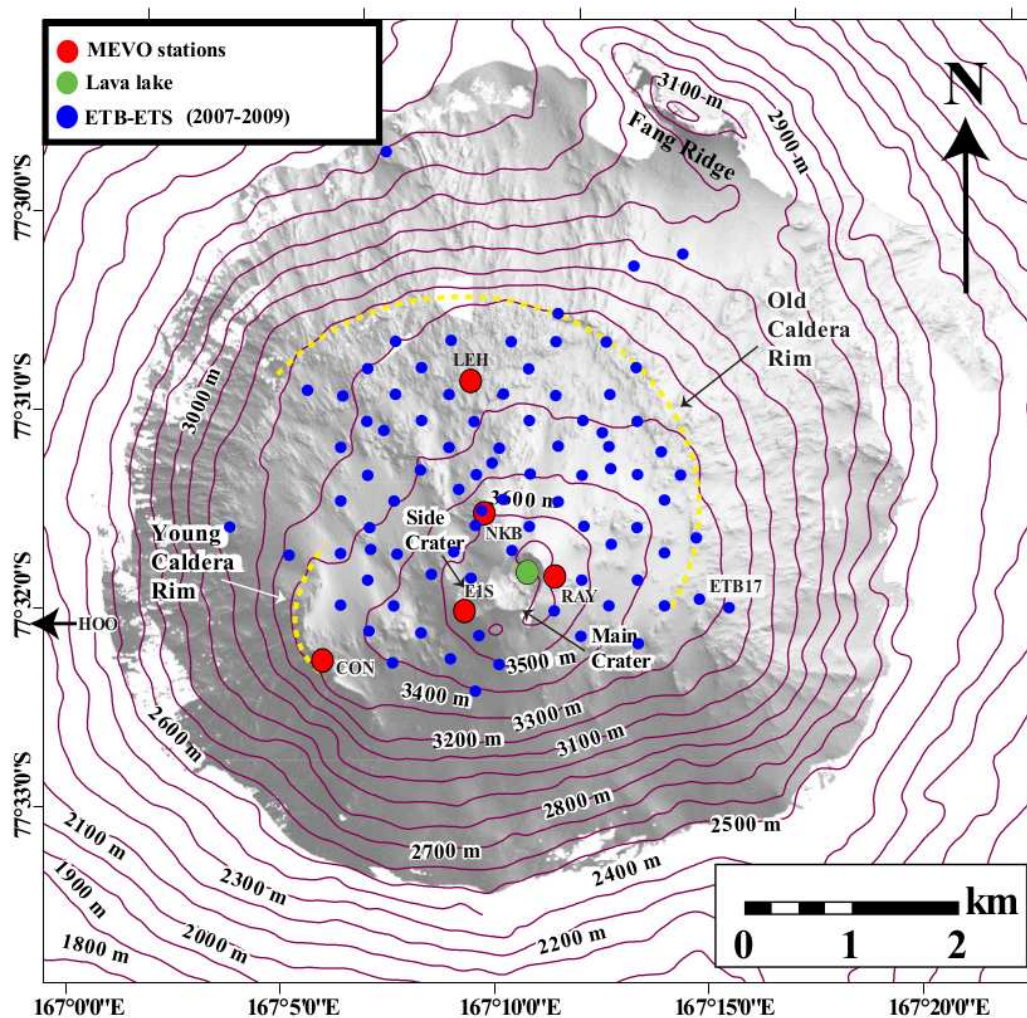


FIGURE 6.1: Représentation de la configuration spatiale des données acquises sur le mont Erebus et utilisées dans ce chapitre. On voit nettement le cratère, représenté par des isolines. Le lac de lave permanent est figuré par un point vert. Les stations issues des deux réseaux différents MEVO et ETB sont représentées en rouge et en bleu, respectivement. On voit que cette configuration présente une hétérogénéité spatiale, tant dans la répartition des sources que dans celle des récepteurs.

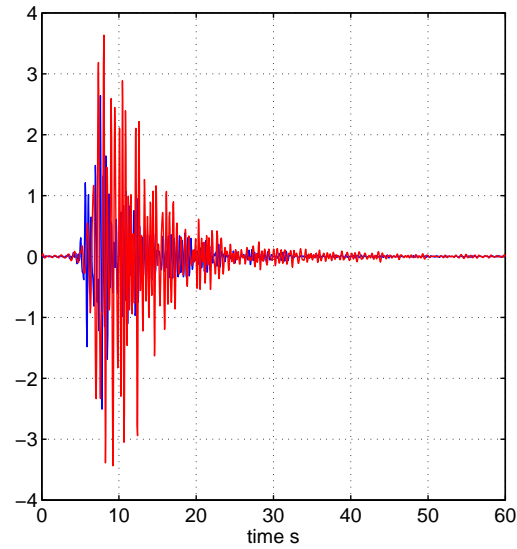


FIGURE 6.2: Exemple d'un signal issu d'un événement sismique enregistré à deux stations différentes. L'amplitude moyenne du signal avant l'événement nous donne une référence quant au niveau de bruit. On voit la coda présente au moins jusqu'à environ 40s.

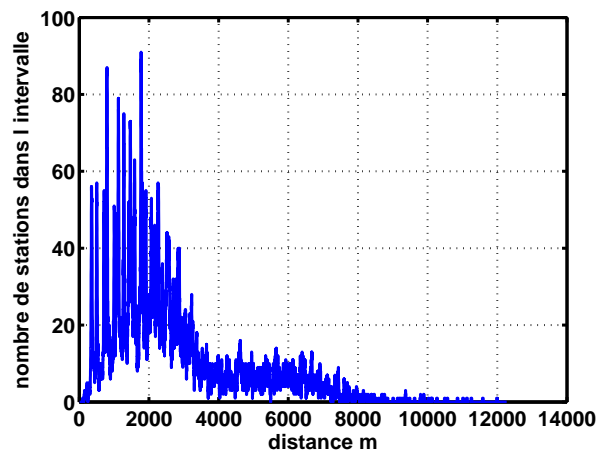


FIGURE 6.3: Représentation du nombre de paires de stations en fonction de la distance inter station de cette paire de stations. On voit que les nombres de couples les plus importants se situent aux alentours de 2000m de distance inter-stations. Cela implique que si l'on veut améliorer la reconstruction de la fonction de Green en effectuant des moyennes spatiales, il sera possible de le faire de manière plus pertinente pour cette gamme de distances inter stations.

6.3 Evolution temporelle de la reconstruction de l'onde balistique dans la coda

Le but premier de cette section est de confirmer avec des données expérimentales les résultats obtenus avec les simulations numériques.

En premier lieu, il est nécessaire de confirmer la validité de cette approche en effectuant des corrélations apportant le plus d'information possible. Pour cela, on sélectionne arbitrairement une fenêtre de temps dans la coda. On effectue ensuite pour chaque paire de stations la corrélation entre les signaux reçus en ces deux stations, pour chaque événement enregistré. On effectue ensuite une moyenne sur les événements, afin d'obtenir une corrélation moyenne par paire de stations. On représente ensuite cette fonction de corrélation moyenne en fonction de la distance inter-stations (figure 6.4) à l'instar de ???. On peut voir les ondes de surface apparaître dans cette représentation. Cependant, le fait d'effectuer une moyenne sur tous les événements ainsi qu'une représentation en fonction de la distance inter station rend l'énergie artificiellement équirépartie dans le milieu. Il est donc nécessaire de choisir un sous ensemble de stations/événements si l'on veut observer l'asymétrie du flux d'énergie dans les corrélations. Pour cela, on reprend la géométrie hyperbolique décrite plus tôt. On définit deux stations comme les foyers de notre repère hyperbolique, puis l'on sélectionne uniquement les événements situés entre deux hyperboles de ce repère, comme décrit figure 6.5.

On peut ensuite calculer les corrélations sur différentes fenêtres de temps, afin de suivre l'évolution de leurs amplitudes. Malheureusement, les résultats, typiques de cette approche, présentés figure 6.6, ne sont pas très probants. En effet, le rapport signal/ bruit ne permet pas de distinguer les variations d'amplitude dues au processus de corrélation de celles dues à l'asymétrie du flux d'énergie. Il est possible d'obtenir des résultats dans lesquels l'évolution de la symétrie semble plus marquée, mais aux prix d'une sélection d'événements moins drastique. La méthode développée dans ce manuscrit perd donc une grande partie de son intérêt dans ce cas, car on perd ainsi des informations sur la localisation de la source. Nous allons donc présenter une nouvelle méthode, afin de continuer l'étude des corrélations dans la coda dans un milieu réel.

6.4 Approche probabiliste MCMC

Nous allons décrire ici un processus d'optimisation (Strens, 2003)(Mahendran et al., 2012) permettant d'améliorer la reconstruction des fonctions de Green à l'aide de corrélations dans la coda sismique. Cet algorithme entraîne un meilleur suivi temporel de l'évolution des fonctions de Green à l'aide de la coda sismique. Il permet aussi d'obtenir des informations sur l'évolution temporelle des fonctions de Green. De plus, il apporte des

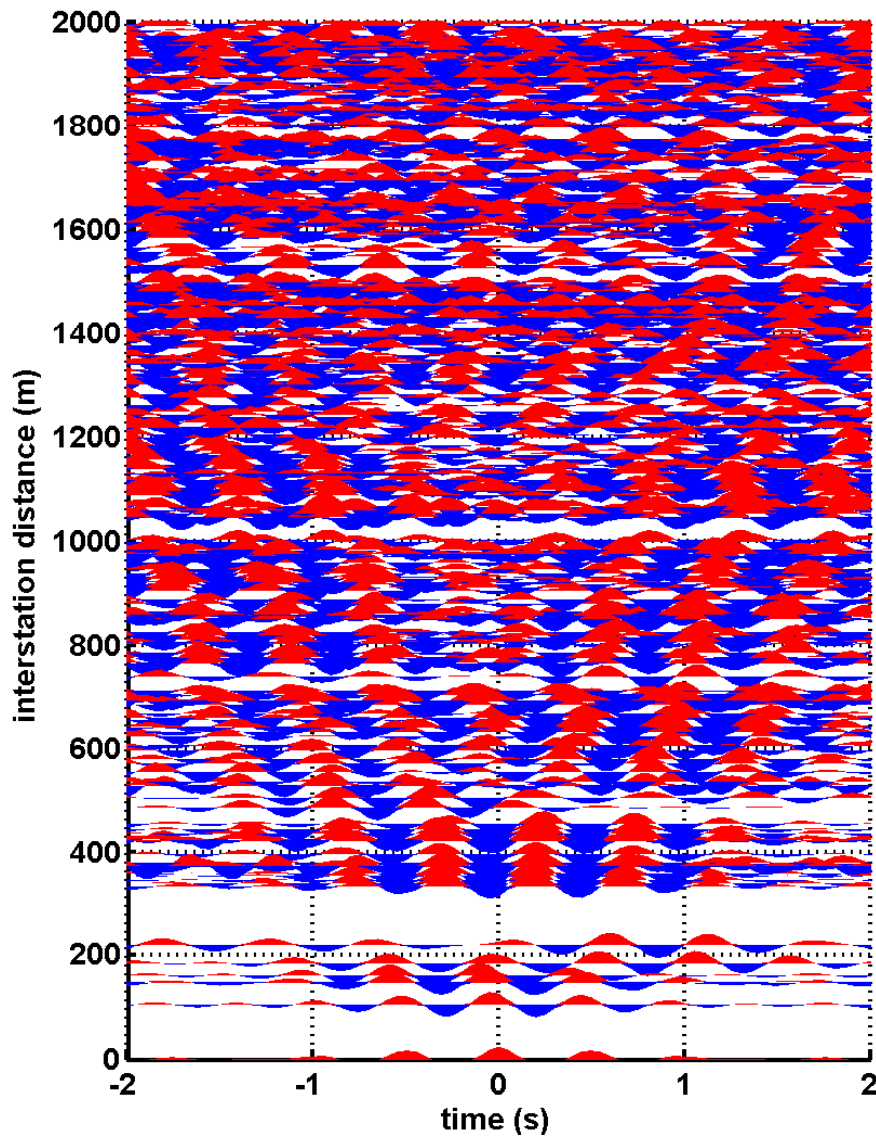


FIGURE 6.4: Représentation de la fonction de corrélation en fonction du temps (abscisses) et de la distance inter-stations (ordonnées) pour un grand nombre d'événements sismiques. Afin de faciliter la visualisation des ondes, on représente les valeurs négatives en bleu et les valeurs positives en rouge. On voit très nettement apparaître les parties causales et acausales des ondes de surface se propageant dans le milieu.

éléments de réponse à une question fondamentale de ce manuscrit : y-a-t' il une fenêtre temporelle optimale dans la coda pour la reconstruction de la fonction de Green ?

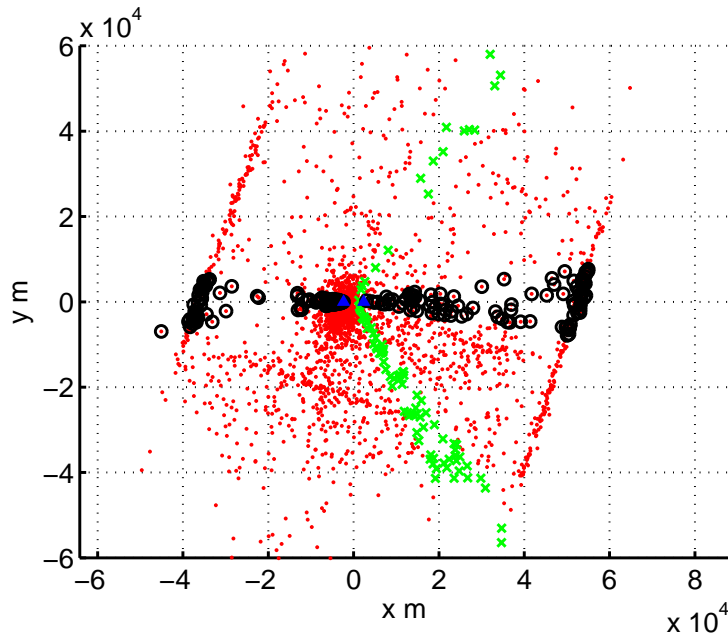


FIGURE 6.5: Représentation de la sélection des événements utilisés pour la reconstruction de la fonction de Green. En bleu, on représente le couple de stations de référence. Les points rouges représentent l'ensemble des localisations des événements enregistrés. On peut ensuite choisir différents sous-ensembles d'événements (ici représentés en rouge et en vert) en fonction de la géométrie du milieu. Comme lors des chapitres précédents, la disposition des sources sur un hyperbole (plus précisément, cette fois, une zone comprise entre deux hyperboles) permet de connaître le temps de contribution attendu de l'onde directe. Pour effectuer une moyenne supplémentaire, on pourra sélectionner un couple de stations dont la distance inter station est similaire à celle-ci, puis calculer les corrélations issus des événements situés sur la même hyperbole (dans le nouveau repère défini par le nouveau couple de stations). Cette méthode semble améliorer le rapport signal/bruit mais aux prix de la perte de la spécificité de la fonction de Green reconstruite. En effet, cette fois, on n'observera plus une fonction de Green représentative du trajet entre un couple de station mais une fonction de Green moyenne représentative d'un trajet moyen entre deux stations dans la zone étudiée.

6.4.1 Enjeux

Depuis quelques années, les méthodes d'inversion fondées sur l'inférence bayésienne sont de plus en plus utilisées (Andrieu et al., 2003). Ceci est dû en partie à leur simplicité

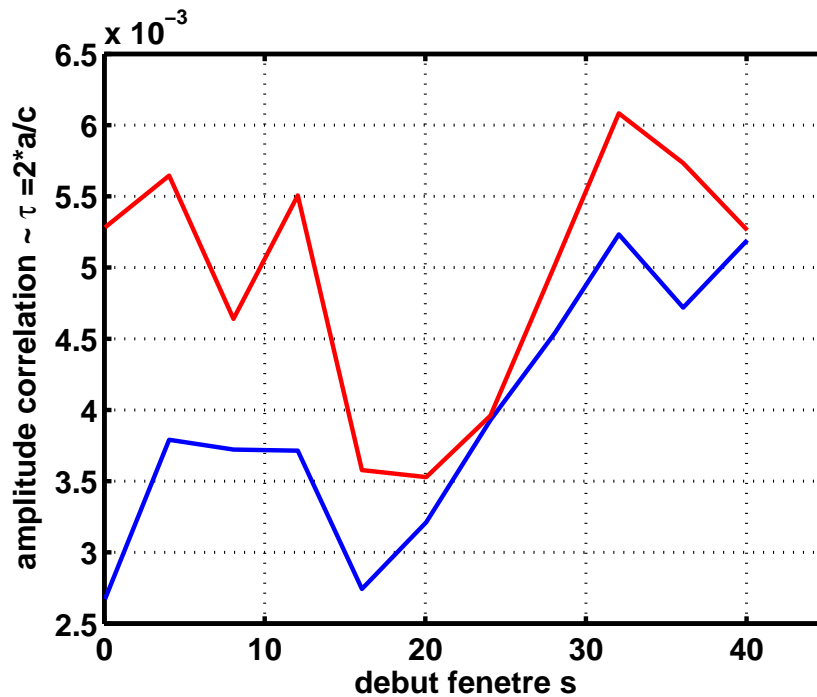


FIGURE 6.6: Evolution temporelle de l'amplitude de la fonction de corrélation à $\tau = 2a/c$ en fonction du début de la fenêtre d'intégration. On représente en rouge l'amplitude de la partie causale de la fonction de corrélation, et en bleu l'amplitude sa partie acausale. On voit clairement qu'à cause du niveau de bruit dans les corrélations, il est impossible d'en faire un indicateur de la diffusion multiple dans l'état actuel des choses. Il va être nécessaire de développer une méthode permettant de reconstruire les fonctions de Green plus efficacement, afin d'éventuellement pouvoir étudier la diffusion multiple dans ce type de milieu.

d'utilisation et d'implémentation, à leurs très bonnes performances grâce aux outils de calcul actuel ainsi qu'à la garantie de trouver le minimum global de la fonction coût plutôt que de retrouver qu'un minimum local (Plummer et al., 2006) (Geyer, 1996). Elles sont utilisées dans de nombreux domaines, que ce soit pour des applications de compression de données, de détection de phénomènes ou d'optimisation. Dans notre cas, nous voulons améliorer la reconstruction de la fonction de Green entre deux récepteurs à l'aide d'un jeu de données constitué d'un nombre fini d'événements sismiques, dans lesquels on peut sélectionner des fenêtres de temps. Pour cela, nous allons implémenter une méthode d'optimisation de type Monte-Carlo par chaînes de Markov, qui est relativement simple à mettre en place. L'optimisation sera dépendante des propriétés physiques des fonctions de Green.

6.4.2 Méthode

Le but de la méthode d'optimisation de type Monte Carlo par chaîne de Markov, est, dans notre cas, de sélectionner pour chaque événement la fenêtre temporelle permettant la meilleure reconstruction possible de la fonction de Green. Pour définir la meilleure fonction de Green reconstituée, on utilisera deux indicateurs de qualité. Le premier est la symétrie entre les parties causales et acausales de la fonction de Green théorique. En effet, dans un cas parfait, la fonction de Green est parfaitement symétrique (dans le cadre de notre étude). Toutes les fluctuations détériorant cette symétrie peuvent être considérées comme nuisant à la qualité de la reconstruction. L'autre hypothèse quant à la reconstruction des fonctions de Green est basée sur leur faible variation temporelle (leur cohérence temporelle). En effet, dans le type de milieu géophysique observé, la variation de la fonction de Green entre deux points est un processus lent. On peut donc faire l'hypothèse que la cohérence entre deux événements proches dans le temps doit être relativement élevée. Une étude précédemment réalisée sur ces mêmes données a montré que la reconstruction des ondes de Rayleigh à partir de la coda de ces événements variait relativement peu selon le début de la fenêtre observée, mais que la coda des corrélations comportait de plus importantes fluctuations. De plus (et comme montré précédemment par Larose et al. (2006), à partir d'un certain nombre d'événements (entre 300 et 500), l'ajout de nouvelles données pour le calcul de la moyenne n'améliore plus le ratio signal/bruit.

Nous allons procéder au réajustement des temps t_i pour un certain nombre d'événements pendant un grand nombre d'itérations, avec l'intention d'améliorer à chaque fois le rapport signal/bruit. Nous allons obtenir une distribution de la densité de probabilité à posteriori des t_i pour chaque événement. La figure 6.7 présente de manière schématique l'algorithme utilisé, ainsi que ses différences avec un algorithme plus classique.

A chaque itération de l'algorithme, on perturbe de manière aléatoire la distribution des temps de début de fenêtre t_i . On calcule les corrélations qui doivent être modifiées, puis l'on effectue les moyennes des sous ensembles. On recalcule alors les deux paramètres COH et SYM. Les deux indicateurs COH et SYM (représentant la cohérence temporelle et la symétrie entre les parties causales et acausales de la fonction de Green) sont utilisés pour le calcul d'une fonction d'ajustement. On définit cette fonction d'ajustement telle que COH et SYM soit maximisées, c'est à dire :

$$MSF = A\left(1 - \frac{2}{(N^2 - N)} \sum_{i>j} COH(i, j)\right) + B\left(1 - \frac{1}{(N)} \sum_i SYM(i)\right) \quad (6.1)$$

avec i et j les indices de colonne et de ligne de la matrice COH ou du vecteur SYM, N le nombre d'éléments dans une ligne ou colonne de COH et SYM, et A et B des coefficients arbitraires permettant d'équilibrer (ou de déséquilibrer) la contribution des deux paramètres à la construction de la fonction cout. Une fois les paramètres COH et SYM

définis, on accepte ou l'on rejette la nouvelle distribution de temps en utilisant un critère défini par l'équation d'ajustement 6.1. On réitère la perturbation sur la distribution de temps jusqu'à obtenir un bon ajustement. On définit ensuite une densité de probabilité à posteriori à l'aide du théorème de Bayes :

$$P(m||d) = \frac{P(d||m)}{P(d)} = \frac{P(d||m)}{\int_M P(m_i)P(d||m_i)d'_i} \quad (6.2)$$

La description classique de cette équation considère que le terme de gauche est la densité de probabilité a posteriori. Le terme $P(d||m)$ représente la vraisemblance (notée L, likelihood) d'une donnée d , et $P(m)$ est l'information a priori sur le modèle. $P(d)$ est la probabilité d'une donnée indépendante de m , que l'on représente aussi comme une intégrale dans tout l'espace des modèles M . L'algorithme le plus utilisé pour ce type de problème (et que l'on utilise dans ce manuscrit) est l'algorithme de Metropolis-Hastings défini comme :

$$A(m||m') = \min \left[1, \frac{Q(m||m')}{Q(m'||m)} \frac{P(m')}{P(m)} \frac{L(m')}{L(m)} \right] \quad (6.3)$$

avec $Q(m|m')$ défini comme la distribution de laquelle les paramètres de perturbation sont tirés afin de passer du modèle initial m au modèle actualisé m' . La qualité du nouveau modèle est évaluée par un tirage aléatoire d'une valeur comprise entre 0 et 1 suivant une distribution uniforme, et à accepter ce nouveau modèle si le nombre tiré est plus petit que $A(m|m')$. Pour s'assurer de la convergence du modèle, on utilise une étape de "<burn-in>" permettant de définir un point suffisamment proche du résultat pour obtenir la convergence de la chaîne de Markov. Dans notre cas, la connaissance du nombre d'événements, et les propriétés physiques du problème permettent de simplifier l'équation de Metropolis-Hastings en :

$$A(m|m') = \min \left[1, \frac{L(m')}{L(m)} \right] \quad (6.4)$$

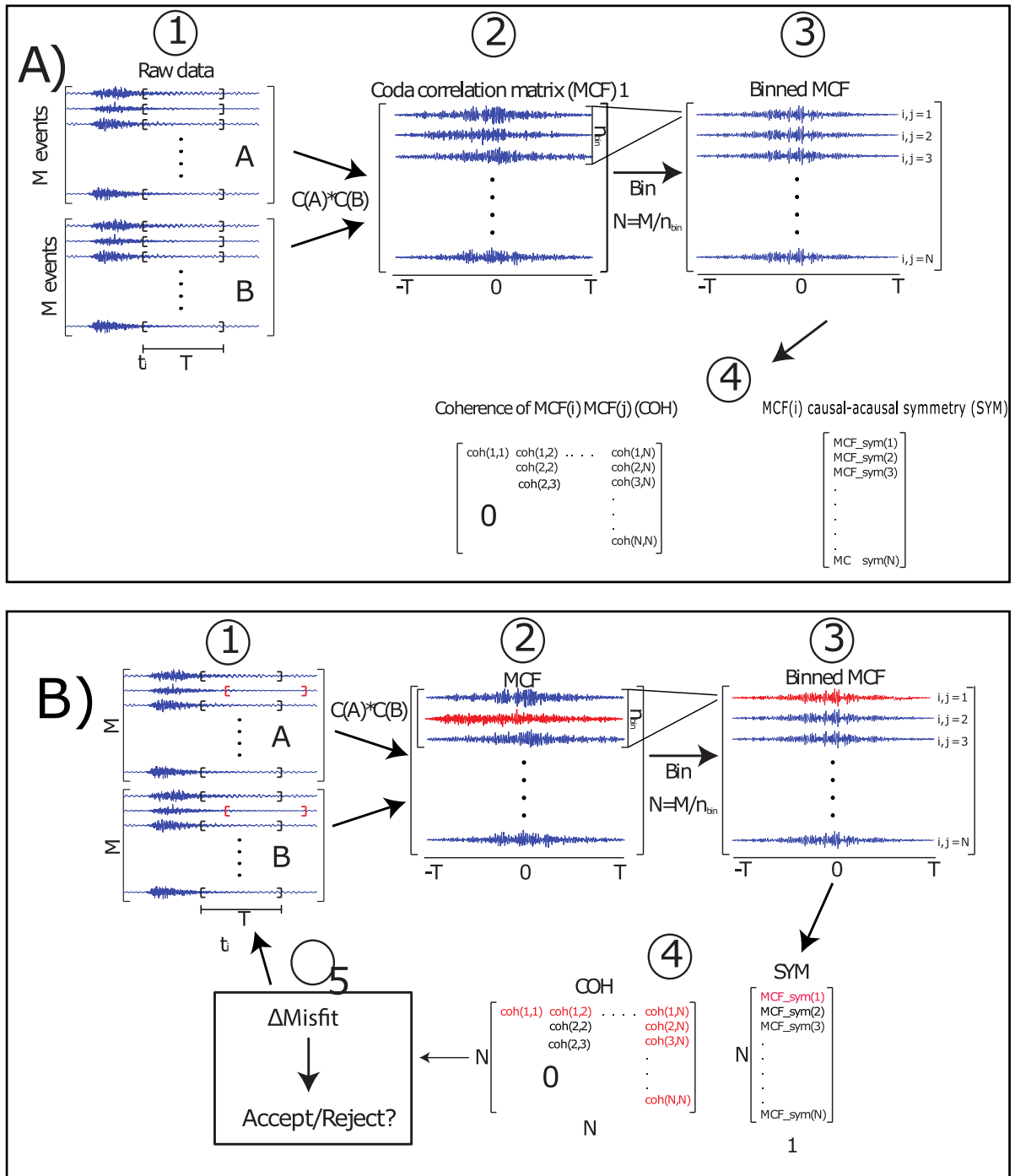


FIGURE 6.7: Légende page suivante

6.4.3 Résultats

Nous allons maintenant appliquer la méthode d'optimisation présentée précédemment à des données réelles. Pour évaluer la puissance de cette méthode, nous allons d'abord

FIGURE 6.7: Représentation schématique de l'algorithme d'optimisation utilisé pour la reconstruction des fonctions de Green. En A, on présente la procédure non optimisée, qui servira de référence pour le travail d'optimisation. On enregistre tout d'abord M événements sur deux récepteurs A et B. En A1, on présente ces M événements enregistrés en A et B. on choisit, arbitrairement, une fenêtre de temps d'une durée T démarrant au temps t_i . Pour chaque événement, on effectue la corrélation entre les deux récepteurs de la portion de signal choisie. On obtient la figure A2, qui représente les M corrélations obtenues. On constitue ensuite N sous-ensembles d'événements corrélés, et l'on garde la moyenne de chacun de ces sous-ensembles (A3). A4 On calcule ensuite la cohérence de chaque corrélation moyenne avec chaque corrélation. On obtient une matrice symétrique $N \times N$ nommée COH, dont le maximum se situe sur la diagonale (autocorrélations), et un vecteur SYM représentant la cohérence entre les parties causales et acausales de chaque corrélation (si l'on se place dans le cadre d'application du théorème des corrélations, la valeur absolue de cet indicateur devrait être de 1, représentant ainsi la symétrie parfaite de la fonction de Green et des corrélations associées). Ces deux paramètres COH et SYM seront nos estimateurs pour la qualité de la reconstruction de la fonction de Green à l'aide des corrélations. En B, on décrit le processus d'optimisation proposé. La différence par rapport à l'algorithme décrit précédemment réside dans le choix des fenêtres. Cette fois, le temps t_i de début de la fenêtre n'est plus le même pour tous les événements, mais varie arbitrairement selon les événements (B1). Les autres étapes sont similaires au cas précédent. Cette fois, les indicateurs COH et SYM nous permettront de calculer une fonction coût. Cette fonction coût permettra d'évaluer si le décalage d'un certain nombre de fenêtres améliore la reconstruction de la fonction de Green. Si c'est le cas, on conserve cette distribution de t_i . Lors de l'itération suivante, on décalera arbitrairement des fenêtres de temps à partir de cette distribution de t_i .

l'appliquer aux données issues des simulations numériques étudiées lors du chapitre 2. Nous allons ainsi pouvoir tester la convergence de la méthode vers une solution optimale, et conclure sur le choix de la meilleure fenêtre temporelle dans la coda. Nous allons ensuite appliquer cet algorithme aux données du Mont Erebus. Nous montrerons que cette méthode permet d'améliorer drastiquement la reconstruction des fonctions de Green à partir de corrélations dans la coda, et peut donc être d'une aide cruciale pour certaines applications de suivi temporel (monitoring).

6.4.3.1 Simulations numériques et test de la méthode

On présente en figure 6.8 la disposition utilisée pour cette expérience. La figure 6.10 présente les premiers résultats de notre approche et démontre son efficacité. On voit que la qualité de la fonction de Green reconstruite est bien meilleure que celle reconstruite par une approche classique. La fonction de Green reconstruite est la moyenne du modèle

a posteriori (issu de la densité de probabilité a posteriori, PPD). On voit qu'en plus de reconstruire l'onde directe avec un bon rapport signal/bruit, la coda des corrélations devient suffisamment définie pour avoir un sens physique. Cette méthode est donc une amélioration drastique par rapport au processus classique présenté plus haut. On voit aussi que la méthode converge bien quel que soit l'a priori choisi, avec une amélioration très rapide de l'ajustement. La figure 6.10 présente les résultats de notre méthode en terme de position optimale de fenêtre. On voit sur la figure A la distribution de probabilité des temps de début de fenêtre t_i en pour chaque événement. Cette distribution étant relativement homogène, on peut en déduire qu'un début de fenêtre optimal existe bien dans notre milieu, aux environs de 90s. On représente la densité de probabilité moyenne sur tous les événements. On voit que cette distribution varie légèrement selon le paramètre favorisé (COH ou SYM). Cependant, il est très intéressant de noter que le début de fenêtre optimal semble être identique dans un milieu à 64 diffuseurs et un milieu à 128 diffuseurs. Cela confirme nos observations sur les simulations numériques montrées précédemment.

6.4.3.2 Données Erebus

Nous allons maintenant montrer l'efficacité de cette méthode sur les données du mont Erebus. La figure 6.11 représente une application de suivi temporel par la méthode classique et par notre méthode. La comparaison entre les figures A et B permet de voir que la méthode MCMC améliore drastiquement le rapport signal/bruit des corrélations. La figure C présente la somme de ces corrélations, et fait apparaître l'apport de la méthode MCMC en termes de symétrie de la fonction de Green. Cette symétrie est quantifiée en CC en représentant la cohérence entre les parties causales et acausales des corrélations pour les deux méthodes. On voit que la cohérence est très bonne pour la méthode MCMC, pour la très grande majorité des ensembles d'événements. Nous pouvons non seulement utiliser les fonctions de Green obtenues pour suivre les variations temporelles du milieu, mais nous pouvons aussi les utiliser afin d'obtenir une image de la diffusion des ondes de surface dans le milieu. En effet, on peut repropager les fonctions de Green ainsi obtenues en formant une ellipse autour des deux récepteurs concernés. En effectuant ceci pour un grand nombre de paires de récepteurs, on obtient les images représentées figure 6.12. On quantifie de cette manière l'intensité régionale de la diffusion multiple. La méthode MCMC améliore de façon très nette la résolution des images ainsi obtenues. Cette image semble apporter un résultat pertinent, en cela que les zones de diffusion forte recourent bien la topographie du volcan, sans que ce paramètre ne soit entré en compte dans la reconstruction.

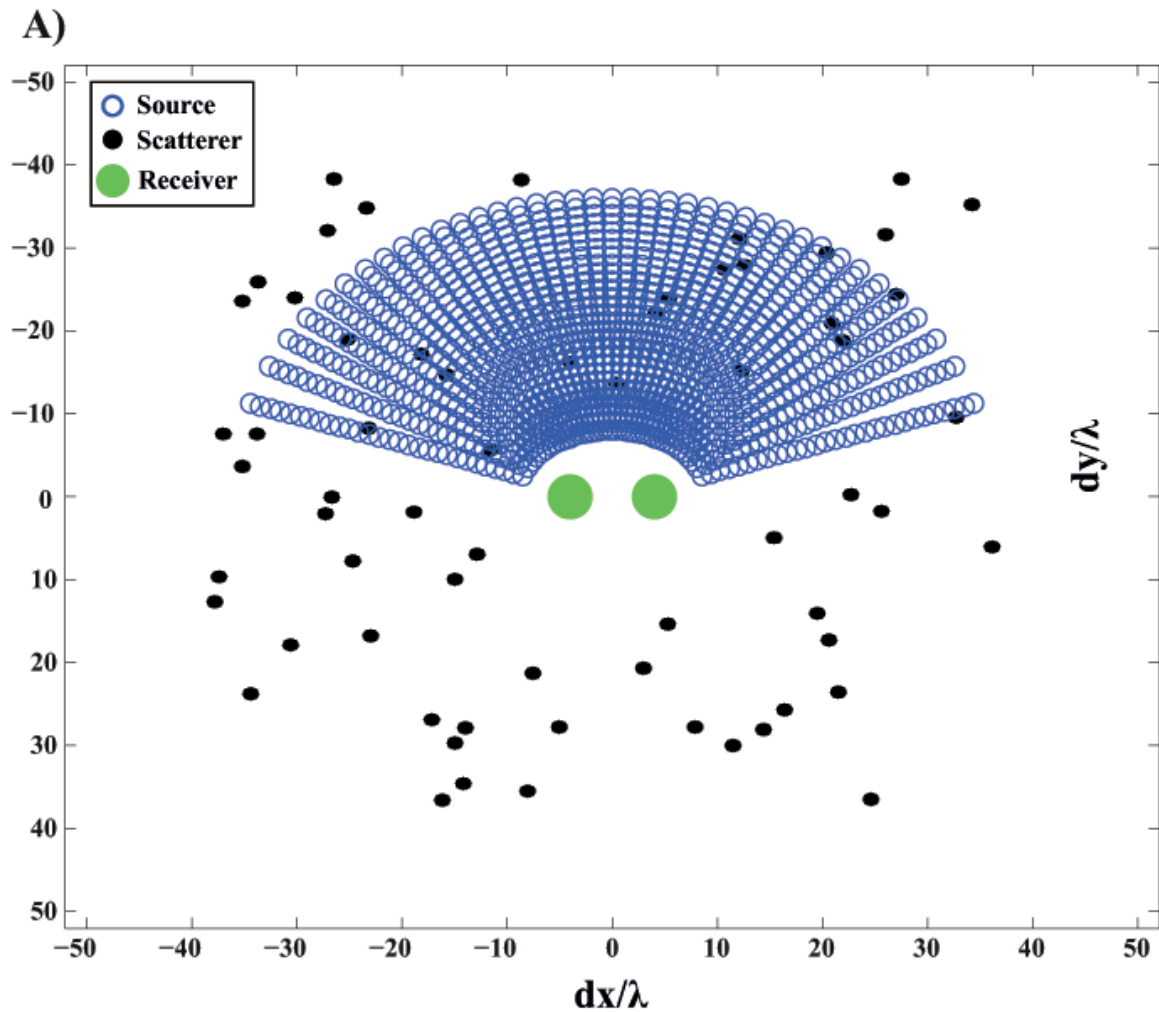


FIGURE 6.8: Schéma représentant les géométries considérées dans ce chapitre pour l'utilisation de la méthode MCMC. En A, les données résultent des simulations numériques décrites lors des chapitres précédents. Ces données permettront de confirmer l'intérêt de la méthode développée. Le milieu présenté ici comporte 64 diffuseurs, deux récepteurs et 1130 sources. On choisit cette disposition de sources pour ne pas se placer dans le cas le plus favorable à la reconstruction de la fonction de Green entre les deux récepteurs.

6.4.4 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que des méthodes classiques ne permettent pas, dans le cadre de notre étude, de suivre de manière pertinente l'évolution temporelle de la fonction de Green à partir de corrélation dans la coda. Bien que l'évolution temporelle soit pour l'instant inutilisable, nous avons optimisé la reconstruction de fonction de Green à l'aide d'une méthode probabiliste. Il n'est donc pour l'instant pas possible d'utiliser

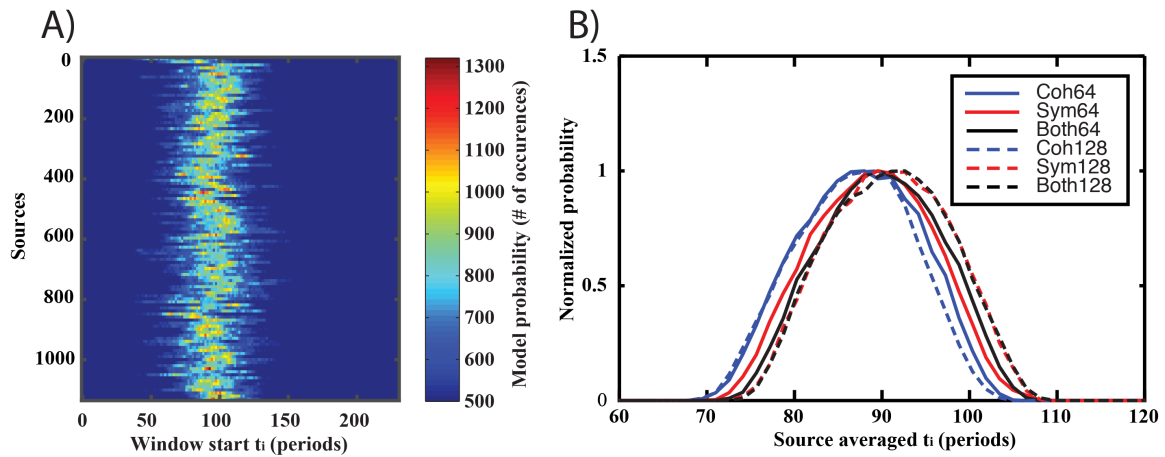


FIGURE 6.9: Résultats de l’algorithme MCMC dans le milieu synthétique pour une seule réalisation du milieu. En A, on représente la distribution probable du début des fenêtres de temps pour chaque événement (chaque source). L’échelle de couleur représente la densité de probabilité obtenue pour chaque événement. On voit que la fenêtre de temps optimale se situe toujours aux environs de 90 périodes, bien que l’on puisse observer une variation relativement importante de cette valeur optimale en fonction de l’événement observé. En B, on représente la densité de probabilité normalisée pour le début de la fenêtre d’intégration, pour différents paramètres (cohérence ou symétrie) favorisés par l’algorithme MCMC.

toute l’information contenue dans la coda, mais il est possible d’utiliser la coda là où elle porte le plus d’information, à des fins aussi diverses que du suivi temporel ou de l’imagerie.

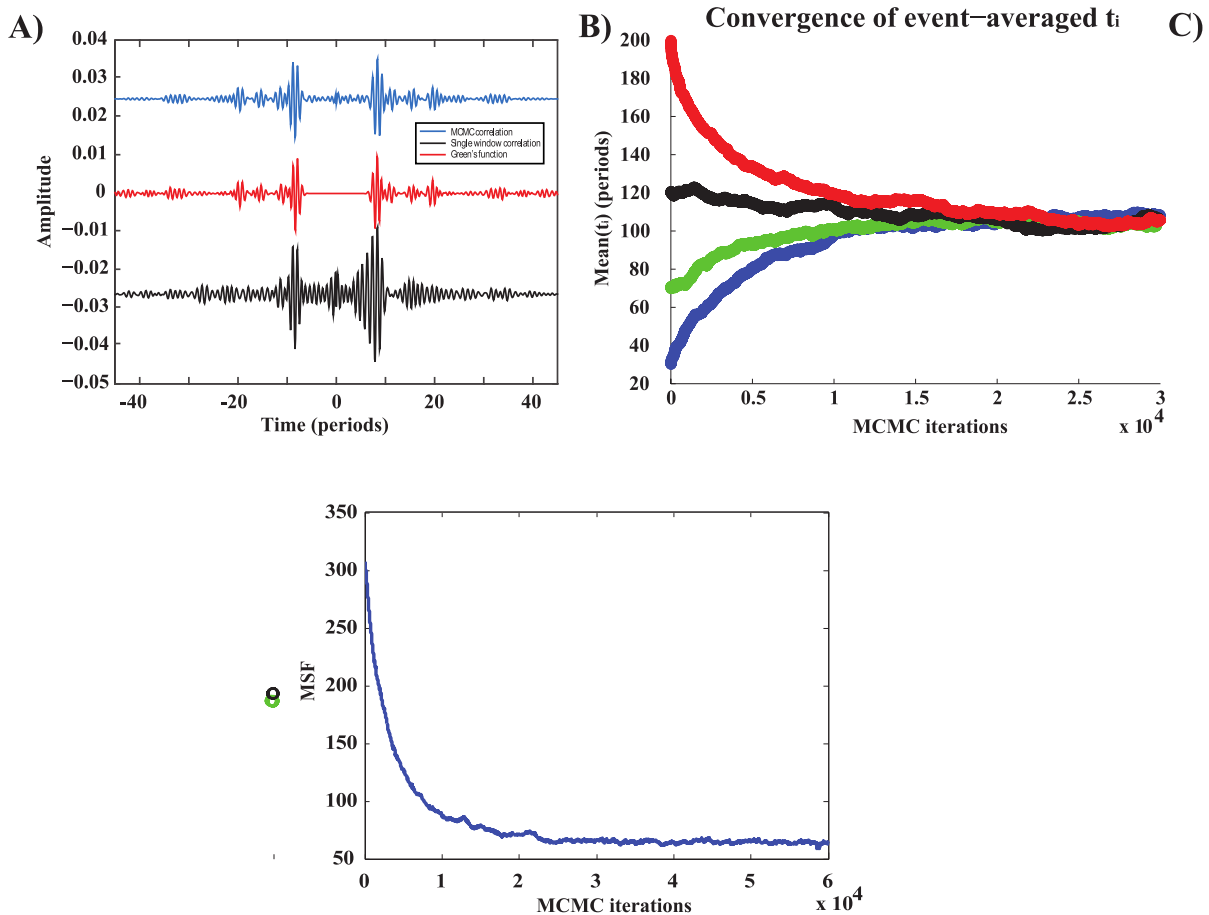


FIGURE 6.10: Résultats de l'algorithme développé pour la reconstruction de la fonction de Green dans le cas des simulations numériques. En A, On compare la fonction de Green réelle du milieu (en rouge) et les fonctions de corrélations obtenues après moyenne sur tous les événements des corrélations entre les deux récepteurs pour une fenêtre de temps donnée. Il est important de noter que l'on effectue d'abord une moyenne sur 90 réalisations du milieu avant d'effectuer une moyenne spatiale. En bleu, on présente les résultats obtenus à l'aide de l'algorithme d'optimisation MCMC développé. En noir, la fonction de corrélation est obtenue sans optimisation particulière, les fenêtres temporelles ayant toutes le même temps t_i de départ. On voit que la fonction de corrélation obtenue par la méthode MCMC est beaucoup moins bruitée que celle obtenue sans optimisation (elle est plus proche de la fonction de Green réelle). De plus sa symétrie est bonne alors que la corrélation obtenue sans optimisation présentait une forte asymétrie. La méthode MCMC permet donc en partie de pallier la disposition spatiale hétérogène des sources, ainsi que de réduire le bruit lié aux imperfections du processus de corrélation. En B, on représente le nombre d'itérations nécessaires à la convergence vers une solution stable lors du processus d'optimisation. On voit que l'on converge vers la même solution indépendamment du temps t_i initialement choisi. En C, on représente la valeur de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations effectuées. On voit que l'on converge vers la solution relativement rapidement.

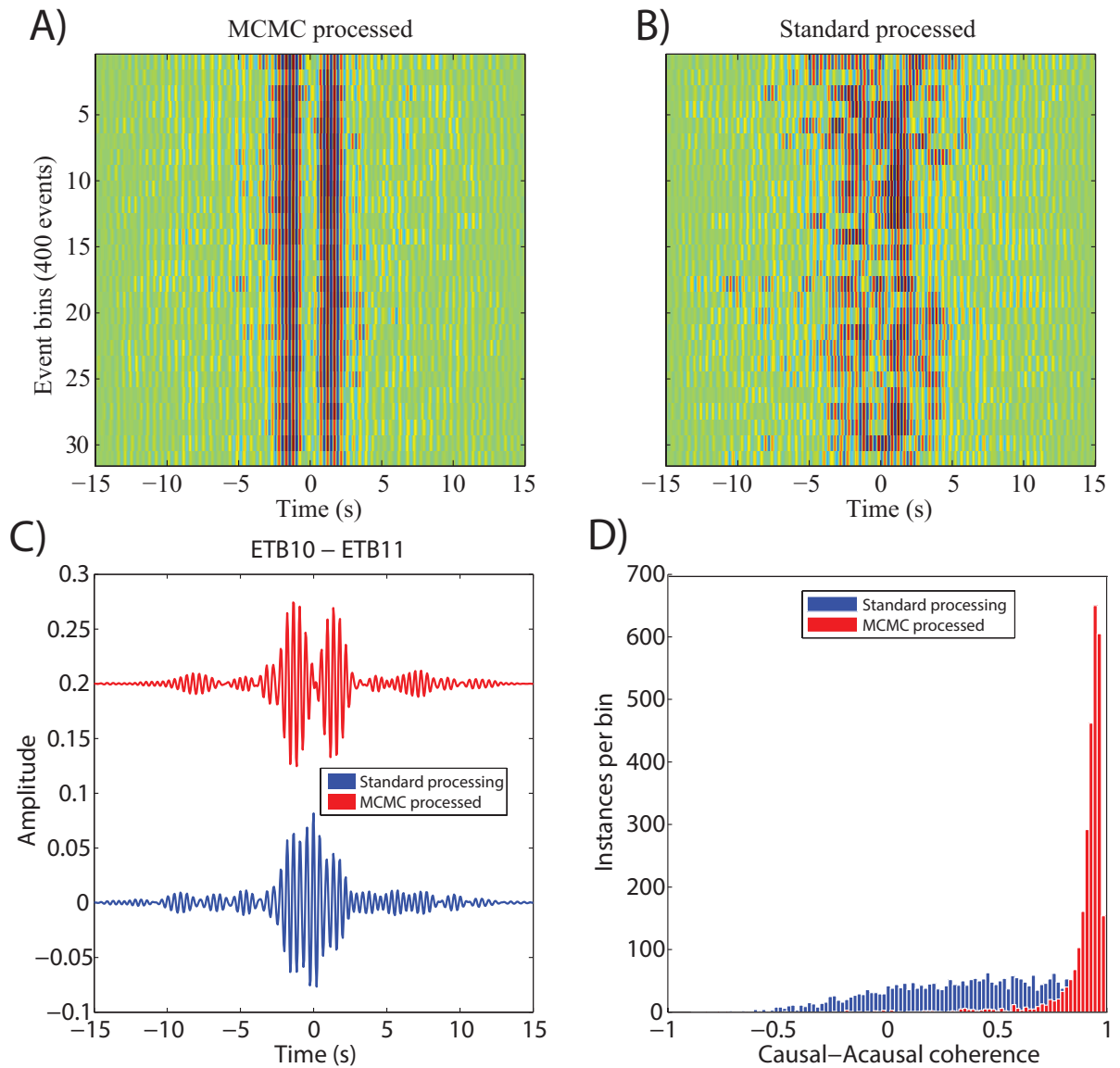


FIGURE 6.11: Résultats du suivi temporel des fonctions de Green par méthode MCMC et par méthode classique. En A et B, on représente la fonction de corrélation obtenue pour un ensemble d'événements en fonction du temps de la corrélation, pour différents sous-ensembles d'événements. On voit que la méthode MCMC améliore le rapport signal/bruit des corrélations. En C, on présente la corrélation moyenne sur tous les sous-ensembles d'événements pour les deux méthodes. On voit que la méthode MCMC permet une nette amélioration de la symétrie de la fonction de Green. En D, on représente la cohérence entre les parties causales et acausales des corrélations pour les deux méthodes. On voit que la cohérence est très bonne pour la méthode MCMC, tandis qu'elle n'est très bonne que pour un faible nombre d'événements avec la méthode classique.

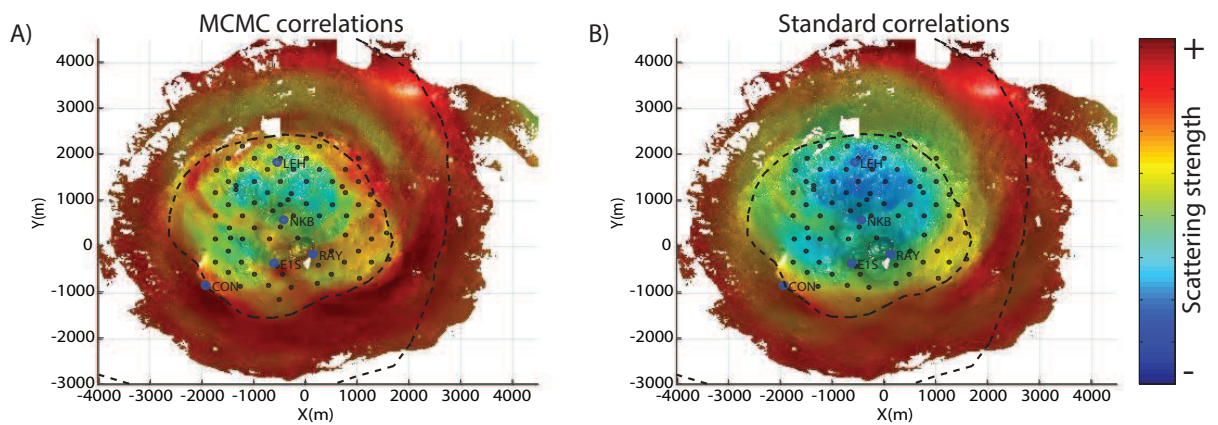


FIGURE 6.12: Représentation de l'amplitude de la diffusion dans l'espace, obtenue après repropagation elliptique des fonctions de Green. On voit que la carte obtenue avec la méthode MCMC présente une meilleure résolution. En effet, si l'on compare cette carte à la carte de la topographie présentée figure 6.1, on voit que la concordance obtenue est meilleure, ce qui laisse entendre que la méthode MCMC permet de retrouver des caractéristiques physiques réelles du milieu.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Nous allons ici rappeler les points principaux abordés dans ce manuscrit, et ses apports les plus importants à la problématique étudiée. Nous allons ensuite envisager des suites possibles à ce travail, tant au niveau théorique qu'expérimental.

7.1 Conclusion

La problématique principale de ce manuscrit consiste en l'utilisation de techniques issues de la corrélation de bruit ambiant afin d'étudier la diffusion multiple. Pour cela, nous avons décidé de nous intéresser à la coda, qu'elle soit sismique ou acoustique. Par définition, cette coda porte des informations essentielles sur la propagation des ondes dans le milieu, puisqu'elle est issue de l'interaction entre les ondes se propageant et un grand nombre d'hétérogénéités.

Nous avons tout d'abord créé une expérience numérique simple et contrôlable. Nous avons donc élaboré un dispositif expérimental dans lequel une onde issue d'une source unique se propage dans un milieu multiplement diffusant. Le champ est enregistré en de nombreux points, et permet d'étudier la coda enregistrée. Afin de nous placer dans les conditions les plus favorables possibles, nous avons étudié l'effet des différentes moyennes sur la construction de corrélations à partir de la coda. Une fois ces paramètres mieux connus, nous avons pu étudier la dynamique temporelle de la fonction de corrélation dans la coda. Pour cela, nous avons décidé de n'effectuer les corrélations entraînant la reconstruction de la fonction de Green que sur une fenêtre de temps donnée, puis de déplacer cette fenêtre de temps dans la coda. Nous avons ainsi observé l'évolution de la fonction de corrélation en fonction du temps. Il est apparu que la symétrie entre les parties causales et acausales de la fonction de Green reconstruite varie fortement en fonction du temps.

Afin de suivre au mieux cette variation de symétrie, nous avons décidé d'utiliser l'am-

plitude de l'onde directe au temps balistique comme indicateur de symétrie. Nous avons montré que cet indicateur évolue différemment en fonction de l'intensité de la diffusion multiple dans le milieu. Nous avons aussi montré que l'amplitude de la fonction de Green reconstruite à partir des corrélations (plus exactement, l'amplitude de notre proxy), converge vers l'amplitude de la fonction de Green du milieu.

Nous avons ensuite établi une théorie fondée sur l'étude de la diffusion multiple, en particulier le transfert radiatif. Cette théorie démontre que l'asymétrie du flux d'énergie provenant d'une source unique entraîne l'asymétrie des parties causales et acausales des corrélations jusqu'à l'équipartition de l'énergie dans le milieu grâce à l'action des diffuseurs.

La comparaison du modèle théorique avec les données expérimentales montre un bon accord. Nous pouvons donc relier l'évolution temporelle des corrélations dans la coda en présence d'une source et de deux récepteurs au libre parcours moyen du milieu.

Nous avons ensuite tenté d'appliquer cette approche à des données acquises sur le mont Erebus, en Antarctique. Cette approche s'est montrée infructueuse, en raison du caractère trop bruité du signal. Nous avons donc développé une méthode permettant non plus cette fois d'utiliser l'information contenue dans la dynamique temporelle des codas dans la corrélations, mais d'utiliser au mieux cette coda et de choisir l'instant durant lequel l'information qu'elle peut nous apporter est maximale. Cette méthode, fondée sur l'utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings est une méthode bayésienne de Monte-Carlo par chaînes de Markov. Elle consiste en la perturbation aléatoire d'un modèle, puis en l'évaluation d'une loi de probabilité pour l'acceptation de ce modèle. Dans notre cas, l'optimisation se fait en fonction des propriétés physiques de la fonction de Green à évaluer que sont sa symétrie entre les parties causales et acausales et sa cohérence temporelle.

Nous avons montré que cette méthode est très efficace aussi bien dans le cas de simulations numériques appliquées aux données du mont Erebus. Elle permet de sélectionner la fenêtre optimale dans la coda pour la reconstruction de la fonction de Green. Ainsi, on obtient des fonctions de Green présentant un rapport signal/bruit permettant une bien meilleure résolution qu'auparavant dans des applications de suivi temporel ou d'imagerie. Nous montrons une application de suivi temporel, puis la réalisation d'une carte de la diffusion des ondes de surface dans le mont Erebus obtenue par reprojexion elliptique des fonctions de Green. Ces résultats variés montrent l'intérêt de l'étude de la coda, et constituent une base pour de nombreuses autres études.

7.2 Perspectives

Plusieurs pistes de travail peuvent être proposées pour compléter ce manuscrit. En premier lieu, il serait intéressant d'effectuer une étude plus exhaustive sur les simulations

numériques. Il est en effet possible d'envisager d'infinies variations du dispositif expérimental afin de mieux comprendre les phénomènes physiques à l'œuvre. Sans pouvoir décrire toutes les approches qui mériteraient d'être étudiées, il serait intéressant de varier la taille, ainsi que le pouvoir de diffusion des diffuseurs dans le milieu. On pourrait envisager un milieu avec un grand nombre de diffuseurs de forme et de tailles différentes, afin d'étudier l'influence de ces variations sur les fonctions de Green reconstruites. Il serait aussi intéressant de faire varier localement la densité d'hétérogénéités dans le milieu, dans le but de retrouver ces variations locales dans l'amplitude des corrélations. De plus, nous avons évoqué lors du chapitre traitant des simulations numériques la résolution du problème inverse. Nous pourrions envisager de pouvoir retrouver le libre parcours moyen du milieu ou la position de la source grâce au cadre théorique développé.

Dans le cas des données réelles, il serait intéressant de tester notre approche théorique sur d'autres types de données expérimentales (acoustique par exemple). Il est aussi possible d'appliquer la méthode MCMC développée à de nombreux types de données en modifiant les paramètres physique recherchés. Plus généralement, les méthodes fondées sur l'inférence bayésienne sont très intéressantes dans de nombreux problèmes d'optimisation ou d'inversion rencontrés en sismologie et en acoustique, que ce soit pour de l'optimisation de traitement de réseau, de l'acquisition compressée ou des mélanges de modèles par exemple.

Il serait aussi possible d'étudier la coda grâce à d'autres outils méthodologiques. Par exemple, on peut envisager l'application de méthodes de formation de voie à la coda, en envisageant les diffuseurs comme des sources secondaires afin de suivre temporellement la répartition spatiale de l'importance de la contribution d'un diffuseur cet instant de la coda. Cela pourrait mener à terme à une méthode d'imagerie de la diffusion dans le milieu.

La diffusion multiple des ondes étant un domaine très large de la physique, il est nécessaire de bénéficier de la porosité entre les champs disciplinaires touchés afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu, et ce manuscrit a l'ambition d'apporter une pierre à cet édifice.

Bibliographie

- Aki, K. (1969). Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *Journal of geophysical research*, 74(2) :615–631.
- Aki, K. and Chouet, B. (1975). Origin of coda waves : source, attenuation, and scattering effects. *Journal of geophysical research*, 80(23) :3322–3342.
- Aki, K. and Richards, P. G. (2002). *Quantitative seismology*, volume 1.
- Akkermans, E. and Maynard, R. (1985). Weak localization of waves. *Journal de Physique Lettres*, 46(22) :1045–1053.
- Akkermans, E. and Montambaux, G. (2007). *Mesoscopic physics of electrons and photons*. Cambridge University Press.
- Anderson, P. W. (1958). Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 109(5) :1492.
- Andrieu, C., De Freitas, N., Doucet, A., and Jordan, M. I. (2003). An introduction to mcmc for machine learning. *Machine learning*, 50(1-2) :5–43.
- Aster, R., MacIntosh, W., Kyle, P., Esser, R., Bartel, B., Dunbar, N., Johnson, J., Kars-
tens, R., Kurnik, C., McGowan, M., et al. (2004). Real-time data received from
mount erebus volcano, antarctica. *Eos, Transactions American Geophysical Union*,
85(10) :97–101.
- Barton, G. (1989). *Elements of Green's functions and propagation : potentials, diffusion,
and waves*. Oxford University Press.
- Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic
waves. *Journal of computational physics*, 114(2) :185–200.
- Brenguier, F., Shapiro, N. M., Campillo, M., Ferrazzini, V., Duputel, Z., Coutant, O.,
and Nercessian, A. (2008). Towards forecasting volcanic eruptions using seismic noise.
Nature Geoscience, 1(2) :126–130.

BIBLIOGRAPHIE

- Campillo, M. and Paul, A. (2003). Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science*, 299(5606) :547–549.
- Chaput, J., Clerc, V., Campillo, M., Roux, P., and Knox, H. (2016). On the practical convergence of coda-based correlations : a window optimization approach. *Geophysical Journal International*, 204(2) :736–747.
- Chaput, J., Zandomenighi, D., Aster, R., Knox, H., and Kyle, P. (2012). Imaging of erebus volcano using body wave seismic interferometry of strombolian eruption coda. *Geophysical Research Letters*, 39(7).
- De Rosny, J. and Davy, M. (2014). Green’s function retrieval and fluctuations of cross density of states in multiple-scattering media. *EPL (Europhysics Letters)*, 106(5) :54004.
- De Rosny, J. and Roux, P. (2001). Multiple scattering in a reflecting cavity : Application to fish counting in a tank. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109 :2587.
- Derode, A., Larose, E., Campillo, M., and Fink, M. (2003a). How to estimate the greens function of a heterogeneous medium between two passive sensors ? application to acoustic waves. *Applied Physics Letters*, 83(15) :3054–3056.
- Derode, A., Larose, E., Tanter, M., De Rosny, J., Tourin, A., Campillo, M., and Fink, M. (2003b). Recovering the greens function from field-field correlations in an open scattering medium (1). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113 :2973.
- Derode, A., Tourin, A., and Fink, M. (2001). Random multiple scattering of ultrasound. ii. is time reversal a self-averaging process ? *Physical Review E*, 64(3) :036606.
- Dziewonski, A. M. and Anderson, D. L. (1981). Preliminary reference earth model. *Physics of the earth and planetary interiors*, 25(4) :297–356.
- Fehler, M., Roberts, P., and Fairbanks, T. (1988). A temporal change in coda wave attenuation observed during an eruption of mount st. helens. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 93(B5) :4367–4373.
- Fink, M. (1992). Time reversal of ultrasonic fields. i. basic principles. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 39(5) :555–566.
- Froment, B., Campillo, M., Roux, P., Gouédard, P., Verdel, A., and Weaver, R. (2010). Estimation of the effect of nonisotropically distributed energy on the apparent arrival time in correlations. *Geophysics*, 75(5) :SA85–SA93.
- Geyer, C. J. (1996). Estimation and optimization of functions. *Markov chain Monte Carlo in practice*, pages 241–258.

- Gouedard, P., Stehly, L., Brenguier, F., Campillo, M., Colin de Verdiere, Y., Larose, E., Margerin, L., Roux, P., Sánchez-Sesma, F. J., Shapiro, N., et al. (2008). Cross-correlation of random fields : Mathematical approach and applications. *Geophysical prospecting*, 56(3) :375–393.
- Lacoss, R. T., Kelly, E. J., and Toksöz, M. N. (1969). Estimation of seismic noise structure using arrays. *Geophysics*, 34(1) :21–38.
- Larose, E., Margerin, L., Derode, A., van Tiggelen, B., Campillo, M., Shapiro, N., Paul, A., Stehly, L., and Tanter, M. (2006). Correlation of random wavefields : An interdisciplinary review. *Geophysics*, 71(4) :SI11–SI21.
- Larose, E., Roux, P., Campillo, M., and Derode, A. (2008). Fluctuations of correlations and green s function reconstruction : role of scattering. *Journal of Applied Physics*, 103(11) :114907.
- Liu, Q.-H. and Tao, J. (1997). The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4) :2072–2082.
- Lobkis, O. I. and Weaver, R. L. (2001). On the emergence of the greens function in the correlations of a diffuse field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(6) :3011–3017.
- Mahendran, N., Wang, Z., Hamze, F., and De Freitas, N. (2012). Adaptive mcmc with bayesian optimization. In *AISTATS*, volume 22, pages 751–760.
- Malcolm, A. E., Scales, J. A., and van Tiggelen, B. A. (2004). Extracting the green function from diffuse, equipartitioned waves. *Physical Review E*, 70(1) :015601.
- Margerin, L., Campillo, M., and Tiggelen, B. (1998). Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium : new insight into coda q. *Geophysical journal international*, 134(2) :596–612.
- Margerin, L., Campillo, M., and Van Tiggelen, B. (2001). Coherent backscattering of acoustic waves in the near field. *Geophysical Journal International*, 145(3) :593–603.
- Nishigami, K. (1997). Spatial distribution of coda scatterers in the crust around two active volcanoes and one active fault system in central japan : Inversion analysis of coda envelope. *Physics of the earth and planetary interiors*, 104(1) :75–89.
- Paasschens, J. (1997). Solution of the time-dependent boltzmann equation. *Physical Review E*, 56(1) :1135.
- Pacheco, C. and Snieder, R. (2005). Time-lapse travel time change of multiply scattered acoustic waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(3) :1300–1310.

BIBLIOGRAPHIE

- Paul, A., Campillo, M., Margerin, L., Larose, E., and Derode, A. (2005). Empirical synthesis of time-asymmetrical green functions from the correlation of coda waves. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 110(B8).
- Planès, T. (2013). *Imagerie de chargements locaux en régime de diffusion multiple*. PhD thesis, Grenoble.
- Plummer, M., Best, N., Cowles, K., and Vines, K. (2006). Coda : Convergence diagnosis and output analysis for mcmc. *R news*, 6(1) :7–11.
- Roux, P., Sabra, K., Kuperman, W., and Roux, A. (2005). Ambient noise cross correlation in free space : Theoretical approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117 :79.
- Ryzhik, L., Papanicolaou, G., and Keller, J. (1996). Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave motion*, 24(4) :327–370.
- Sato, H. (1993). Energy transportation in one-and two-dimensional scattering media : analytic solutions of the multiple isotropic scattering model. *Geophysical Journal International*, 112(1) :141–146.
- Sato, H., Fehler, M., and Maeda, T. (2012). *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*. Springer.
- Shapiro, N. M. and Campillo, M. (2004). Emergence of broadband rayleigh waves from correlations of the ambient seismic noise. *Geophysical Research Letters*, 31(7).
- Shearer, P. M. (2009). *Introduction to seismology*. Cambridge University Press.
- Snieder, R. (2006). The theory of coda wave interferometry. *Pure and Applied Geophysics*, 163(2) :455–473.
- Snieder, R., Grêt, A., Douma, H., and Scales, J. (2002). Coda wave interferometry for estimating nonlinear behavior in seismic velocity. *Science*, 295(5563) :2253–2255.
- Stehly, L., Campillo, M., and Shapiro, N. (2007). Traveltime measurements from noise correlation : stability and detection of instrumental time-shifts. *Geophysical Journal International*, 171(1) :223–230.
- Stein, S. and Wysession, M. (2009). *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. Wiley-Blackwell.
- Strens, M. J. (2003). Evolutionary mcmc sampling and optimization in discrete spaces. In *ICML*, pages 736–743.

- Taylor, F. (1973). Spectral data for the ν_2 bands of ammonia with applications to radiative transfer in the atmosphere of jupiter. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 13(11) :1181–1217.
- Tielang, S. and Longsheng, G. (1988). Transportation theory of multiple scattering and its application to seismic coda waves of impulse source. *Scientia sinica. Series B. Chemical, biological, agricultural, medical and earth sciences*, 31(12) :1503–1514.
- Tourin, A., Derode, A., Roux, P., van Tiggelen, B. A., and Fink, M. (1997). Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Physical review letters*, 79(19) :3637.
- Van Tiggelen, B. (2003). Green function retrieval and time reversal in a disordered world. *Physical Review Letters*, 91(24) :243904.
- Van Tiggelen, B., Margerin, L., and Campillo, M. (2001). Coherent backscattering of elastic waves : Specific role of source, polarization, and near field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(3) :1291–1298.
- Wapenaar, K., Fokkema, J., and Snieder, R. (2005). Retrieving the greens function in an open system by cross correlation : A comparison of approaches (1). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(5) :2783–2786.
- Weaver, R. L. and Lobkis, O. I. (2001). Ultrasonics without a source : Thermal fluctuation correlations at mhz frequencies. *Physical Review Letters*, 87(13) :134301.
- Weaver, R. L. and Lobkis, O. I. (2004). Diffuse fields in open systems and the emergence of the green s function (1). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(5) :2731–2734.
- Wolf, P., Maret, G., Akkermans, E., and Maynard, R. (1988). Optical coherent backscattering by random media : an experimental study. *Journal de Physique*, 49(1) :63–75.
- Yamamoto, M. and Sato, H. (2010). Multiple scattering and mode conversion revealed by an active seismic experiment at asama volcano, japan. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 115(B7).
- Zandomenighi, D., Aster, R., Kyle, P., Barclay, A., Chaput, J., and Knox, H. (2013). Internal structure of erebus volcano, antarctica imaged by high-resolution active-source seismic tomography and coda interferometry. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 118(3) :1067–1078.
- Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K., et al. (1996). *Robust and optimal control*, volume 40. Prentice hall New Jersey.

