



Travaux sur l'analyse de stabilité des écoulements et la propagation dans les conduits avec impédance acoustique en paroi

Estelle Piot

► To cite this version:

Estelle Piot. Travaux sur l'analyse de stabilité des écoulements et la propagation dans les conduits avec impédance acoustique en paroi. Acoustique [physics.class-ph]. UNIVERSITE TOULOUSE 3 PAUL SABATIER, 2017. tel-01686586

HAL Id: tel-01686586

<https://hal.science/tel-01686586>

Submitted on 17 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

HDR

En vue de l'obtention de l'

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *25 janvier 2017* par :

Estelle PIOT

**Travaux sur l'analyse de stabilité des écoulements et la
propagation dans les conduits avec impédance acoustique
en paroi**

JURY

YVES GERVAIS	Pr. Univ.	Président du jury
YVES AUREGAN	DR CNRS	Rapporteur du jury
EMMANUEL PERREY-DEBAIN	Pr. Univ.	Rapporteur du jury
JEAN-CHRISTOPHE ROBINET	Pr. Univ.	Rapporteur du jury
CHRISTOPHE AIRIAU	Pr. Univ.	Membre du jury
GRÉGOIRE CASALIS	Pr.	Membre du jury

École doctorale et spécialité :

MEGEP : Dynamique des fluides

Unité de Recherche :

ONERA

Parrain :

Grégoire CASALIS

Rapporteurs :

Yves AUREGAN, Emmanuel PERREY-DEBAIN et Jean-Christophe ROBINET

À Léa et Antoine,

*et à Jean-Baptiste, sans qui ni ce mémoire
ni la ligne précédente n'auraient vu le jour*

Table des matières

Table des matières	1
Introduction	3
I Études fondatrices	5
1 Méthodes d'analyse	6
1.1 Outils de stabilité	6
1.2 Mesures lasers appliquées aux ondes acoustiques	12
2 Mises en œuvre préliminaires	25
2.1 Analyse de stabilité et DNS	25
2.2 Mesures acoustiques en soufflerie	26
2.3 Mesures acoustiques pour liners	29
II Voies de recherche explorées	47
3 Modélisation de l'impédance	48
3.1 Champ proche et champ lointain	48
3.2 Homogénéisation	50
3.3 Conductivité de Rayleigh	54
3.4 Modélisation temporelle	60
4 Identification de l'impédance	66
4.1 Code d'identification de l'impédance acoustique	67
4.2 Limitations et améliorations	70
4.3 Exemples de mise en œuvre et perspectives	79
5 Analyse modale et propagation en conduit traité	83
5.1 Étude des modes acoustiques	83
5.2 Étude des modes hydrodynamiques instables	90
5.3 De l'analyse modale au design de liners	97

Perspectives	103
A Curriculum Vitae détaillé	109
B Liste des publications et communications	115
B.1 Journaux avec comité de lecture	115
B.2 Contributions à un numéro spécial de journal	116
B.3 Contributions à des ouvrages	116
B.4 Congrès internationaux avec actes et comité de lecture	117
B.5 Congrès français avec actes et comité de lecture	119
B.6 Autres congrès et conférences, sans actes	120
B.7 Rapports techniques ONERA	121
B.8 Manuscrit de thèse	124
B.9 Brevet	124
C Publications marquantes	125

Introduction

Ce mémoire, préparé en vue d'obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches, présente les travaux que je mène au sein du Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique (DMAE) de l'ONERA. J'y ai effectué un doctorat de 2005 à 2008 sur la simulation numérique et l'analyse de stabilité des écoulements de couche limite laminaire en présence de micro-rugosités. J'ai intégré dans la foulée le DMAE comme ingénieur de recherche, avec des activités à forte composante expérimentale dans le domaine de la réduction du bruit à l'aide de matériaux absorbants acoustiques, communément appelés *liners*. Pour éclairer le lien que j'ai créé entre ces deux domaines de recherche a priori fort distincts, je souhaite évoquer un événement qui a marqué la jeune doctorante que j'étais alors. Lors de la matinée du mercredi 9 janvier 2008, au cours du 46^e congrès aérospatial de l'AIAA, à Reno, Nevada, j'ai pu assister à un groupe de discussion ouverte sur la transition laminaire-turbulent. Ce fut l'occasion pour l'éminent Pr. E. Reshotko de dissenter sur l'importance pour la recherche scientifique de s'appuyer sur le triptyque "expériences/simulations numériques/théorie", avec comme partenaires de discussion les non-moins éminents professeurs W. Saric, H. Fasel et A. Tumin, c'est-à-dire à peu près tous les noms qui avaient baigné mes lectures depuis le début de ma thèse. Ces trois derniers, très bonnes incarnations dans le domaine de la transition laminaire/turbulent des trois piliers du triptyque, ont abondé dans le sens du Pr. Reshotko, tout en insistant sur la nécessité d'assurer le maintien d'une expertise poussée dans chaque type d'activité. Convaincue par leur discours, je n'ai pas hésité longtemps, lorsque j'ai eu la chance quelques mois plus tard d'obtenir un poste d'ingénieur expérimental en acoustique, avant de me lancer dans un domaine qui m'était grandement inconnu. Ce mémoire cherche à présenter comment j'ai essayé au fil de ces années, à mon bien plus humble niveau, de faire dialoguer les aspects expérimentaux, numériques et théoriques pour aider à la compréhension des phénomènes physiques rencontrés. N'ayant de complète expertise dans aucun de ces trois aspects, tout ce qui va être présenté ici n'a été rendu possible que grâce à des collaborations avec des spécialistes de chacun des domaines, au sein de l'ONERA ou d'autres laboratoires. Tous ces travaux n'auraient non plus pas être réalisés sans un partenariat avec de nombreux stagiaires et doctorants, qui seront mentionnés au fil du mémoire.

Le mémoire est décomposé en deux parties. La première présente les techniques et méthodes mises en place et développées au DMAE depuis de nombreuses années par mes collègues, et sur lesquelles j'ai pu m'appuyer pour les études que j'avais à mener. Le chapitre 1 présente tout d'abord les outils théoriques et numériques pour analyser les propriétés des ondes pouvant se propager au sein d'un écoulement, que les ondes soient de nature "acoustique" ou "hydrodynamique", en se restreignant à un cadre linéarisé. On explique ensuite les principes des techniques

expérimentales non-intrusives utilisées à l'ONERA pour mesurer les ondes acoustiques au sein d'un écoulement. Le chapitre 2, lui, illustre les activités que j'ai réalisées au cours de mes premières années en tant qu'ingénieur de recherche, en m'appuyant sur les outils théoriques et expérimentaux précédemment présentés. En particulier, ce chapitre introduit les travaux menés dans le domaine de l'impact acoustique des liners, notamment grâce à l'utilisation du banc Aéro-thermo-Acoustique (B2A) de l'ONERA.

La deuxième partie du mémoire est consacrée à l'exploration de trois thèmes de recherche qui se sont faits jour suite aux nombreux travaux expérimentaux réalisés au banc B2A. Ces thématiques étant encore largement ouvertes, je mentionnerai au fil de ces chapitres quelles sont les perspectives de recherche associées. Le chapitre 3 porte sur la modélisation dans le domaine fréquentiel de l'impédance acoustique d'un matériau à réaction localisée, sur le sens à donner à l'homogénéisation nécessaire à la définition d'une impédance de surface, et sur les problématiques spécifiques qui apparaissent lorsque l'on souhaite travailler dans le domaine temporel. Le chapitre 4 traite lui d'une problématique connexe à celle de la modélisation de l'impédance d'un liner, qui est l'identification de l'impédance acoustique à partir de données expérimentales, en particulier celles acquises au sein du banc B2A. Comme cela sera expliqué, les travaux menés sur ce thème ont grandement bénéficié d'une collaboration depuis plusieurs années avec l'équipe de la NASA spécialiste de ce thème. Enfin, le chapitre 5 présente comment les outils d'analyse modale couramment utilisés pour étudier les couches limites peuvent être employés pour analyser les modes propres d'un écoulement dans un conduit traité acoustiquement, c'est-à-dire équipé de parois réalisant une loi d'impédance. Ces modes propres peuvent être de nature acoustique ou hydrodynamique. On verra aussi comment ces outils théoriques peuvent servir de base pour concevoir des dispositifs réducteurs de bruit dans un contexte industriel, ce qui a été réalisé (ou est en cours de réalisation) au sein de projets européens que je coordonne.

Pour finir, ce mémoire contient en annexe un curriculum vitae détaillé (annexe A), une liste des travaux et publications (annexe B), et la copie de cinq publications jugées essentielles et illustrant notamment ce qui est expliqué dans chacun des cinq chapitres de ce document (annexe C).

Première partie

Études fondatrices : présentation d'outils et premiers exemples de leur mise en œuvre

Cette partie présente les travaux que j'ai effectués depuis la fin de ma thèse en m'appuyant sur des techniques et méthodes introduites au DMAE depuis plusieurs années, et qui m'ont notamment été présentées par Grégoire Casalis en ce qui concerne les analyses de stabilité, Frank Simon en ce qui concerne la métrologie acoustique et les applications sur les liners, et Francis Micheli pour les mesures par vélocimétrie laser et le traitement du signal associé.

Chapitre 1

Méthodes d'analyse des phénomènes physiques

Le fil rouge des travaux présentés dans ce mémoire est la notion d'onde, qu'elle soit acoustique ou hydrodynamique, et l'étude de sa propagation. Cette section donne un aperçu des outils que j'ai mis en œuvre dans ce but, à la fois par une approche théorique consistant à considérer ces ondes comme des modes propres d'un système dynamique, et, à l'autre bout du triptyque scientifique cher au Pr. Reshotko, par une approche expérimentale permettant d'accéder à ces ondes de manière non-intrusive.

1.1 Outils théoriques et numériques pour l'analyse de stabilité d'écoulements

Étudier la stabilité linéaire d'un écoulement consiste à étudier la manière dont se comporte une petite perturbation $\hat{q}$ d'un écoulement dit *de base*, noté $\bar{Q}$; ceci est fait en supposant qu'à la fois l'écoulement de base $\bar{Q}$ et l'écoulement perturbé $\bar{Q} + \hat{q}$ vérifient le jeu d'équations régissant la dynamique du système considéré. Par définition du terme *petite perturbation*, la norme de $\hat{q}$, quelle que soit sa définition, est supposée petite devant celle de $\bar{Q}$:

$$\|\hat{q}\| \ll \|\bar{Q}\|$$

On peut ainsi linéariser le jeu d'équations considéré vis-à-vis de la petite perturbation, en négligeant les termes d'ordre supérieur à $\|\hat{q}\|$, et obtenir un système du type :

$$\begin{cases} \mathcal{LE}(\bar{Q}).\hat{q} = 0 \\ \mathcal{BC}(\bar{Q}).\hat{q} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\mathcal{LE}$ représente les équations linéarisées de la dynamique de l'écoulement étudié et $\mathcal{BC}$ les conditions aux limites associées. Les deux opérateurs spatio-temporels $\mathcal{LE}$ et $\mathcal{BC}$ s'appliquent à la perturbation $\hat{q}$ et peuvent, selon la physique étudiée, dépendre de l'écoulement de base $\bar{Q}$.

Dans ce mémoire, nous allons travailler soit avec les équations de Navier-Stokes linéarisées (LNS) soit, pour les configurations où les termes visqueux peuvent être négligés, avec les équations

d'Euler linéarisées (LEE). Ce sera le cas notamment lorsqu'on s'intéressera à des problématiques d'acoustique : les petites perturbations traduiront alors les fluctuations de vitesse, pression, etc. liées aux ondes acoustiques. D'autre part, nous nous placerons toujours dans une configuration où l'écoulement de base est stationnaire, et nous utiliserons l'approche pragmatique consistant à assimiler l'écoulement de base à l'écoulement moyen (au sens de "moyenné en temps"), ce dernier étant généralement le seul champ accessible, à la fois dans des simulations numériques ou des expériences. Il faut noter que pour certaines applications aéroacoustiques (jets, conduits...), l'écoulement moyen est pleinement turbulent. Cependant, en utilisant la décomposition en $\bar{Q} + \hat{q}$, la turbulence n'est prise en compte que via son effet sur le champ moyen : l'approche est ainsi quasi-laminaire. Pour aller plus loin et prendre en compte l'influence de la turbulence sur la fluctuation cohérente $\hat{q}$, une solution est de suivre l'approche proposée par Reynolds et Hussain [41, 40] et d'effectuer une décomposition triple de l'écoulement sous la forme $\bar{Q} + \hat{q} + q'$. Ce dernier terme représente alors les fluctuations turbulentes de l'écoulement, qui, contrairement à la perturbation ondulatoire $\hat{q}$ supposée harmonique, sont incohérentes temporellement et peuvent donc être éliminées par une moyenne de phase. On obtient ainsi une version perturbée des équations de Navier-Stokes linéarisées (LNS), qui font intervenir une relation de fermeture sur les tensions de Reynolds à l'aide de l'introduction d'une viscosité turbulente¹. Cette approche écrite initialement pour les équations incompressibles a été récemment étendue aux équations compressibles par Gikady, Föller et Sattelmayer [14]. Pour tous les travaux présentés dans ce mémoire, nous nous sommes limités à l'approche quasi-laminaire ; l'approche faisant intervenir plus fortement la turbulence méritera certainement des investigations dans le futur.

Deux grands types d'approche existent pour étudier la stabilité de l'écoulement $\bar{Q}$. Si, en plus de l'homogénéité temporelle, il existe une direction privilégiée d'homogénéité spatiale, à la fois pour l'écoulement et les conditions aux limites, on utilise l'approche dite *locale*. Dans les configurations où ces simplifications ne sont pas justifiées, il faut mettre en œuvre une approche *globale*. Nous allons maintenant expliquer succinctement les spécificités de chacune de ces approches. Il faut prendre garde au fait que dans ce mémoire nous avons choisi d'utiliser la convention commune en acoustique d'une évolution temporelle harmonique en $\exp(j\omega t)$, au lieu de celle en $\exp(-i\omega t)$ utilisée communément en mécanique des fluides.

Analyse de stabilité locale

En notant x la direction d'homogénéité spatiale et $\mathbf{x}_T$ les directions orthogonales, on peut chercher les perturbations sous la forme de type "mode normal" :

$$\hat{q}(x, \mathbf{x}_T, t) = q(\mathbf{x}_T) e^{-j\alpha x + j\omega t} \quad (1.2)$$

où α est le nombre d'onde dans la direction x et ω la pulsation de l'onde, ces deux nombres étant *a priori* complexes. Le cas d'application le plus simple, ou en tout cas historique, de cette approche est celui où l'écoulement de base est dit "parallèle", cas du cisaillement pur lorsque le champ de vitesse prend la forme $(\bar{U}(y), 0, 0)$ avec y la direction du cisaillement. Même si un tel écoulement

1. la connaissance de la viscosité turbulente ne pose pas de problème si on utilise des simulations numériques pour calculer le champ moyen, par contre lorsqu'on travaille à partir de données expérimentales son obtention est bien plus délicate...

n'existe jamais dans la réalité, on peut se placer dans ce cadre dès lors que la longueur d'onde axiale du phénomène ondulatoire étudié est petite devant les variations en x de l'écoulement et des conditions aux limites. Les études sur les couches limites ne mentionnent généralement pas la notion d'homogénéité des conditions aux limites, car elle est vérifiée dans la majorité des cas. Néanmoins, cette question n'est pas à omettre dès lors qu'on est en présence par exemple d'une paroi poreuse ou compliant, ou bien, et c'est ce qui nous intéressera particulièrement dans ce mémoire, pour les applications d'acoustique en conduit traité, où une condition aux limites d'impédance acoustique est nécessaire à la paroi. Dans l'approche parallèle, l'utilisation d'une forme de mode normal $\hat{q}(x, y, z, t) = q(y) \exp(-j\alpha x - j\beta z + j\omega t)$ pour les problèmes cartésiens² permet de ramener la résolution des équations linéarisées (1.1) à la résolution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) en y , ce qui est très aisé numériquement de nos jours, et ce qui explique l'antériorité historique de l'approche.

Le problème de stabilité qui en découle peut alors être étudié de manière temporelle ou spatiale. Dans le premier cas, il s'écrit sous la forme du problème aux valeurs propres généralisé

$$\mathcal{A}.q(y) = \omega \mathcal{B}.q(y) \quad (1.3)$$

où les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dépendent de l'écoulement de base et du nombre d'onde α , considéré fixé à une valeur réelle. Cette approche temporelle permet ainsi d'étudier le comportement asymptotique aux temps longs des modes propres de valeur propre ω et de fonction propre q : ils sont amplifiés exponentiellement si $\text{Im}(\omega) < 0$ et amortis si $\text{Im}(\omega) > 0$. On peut aussi s'intéresser à l'évolution spatiale d'ondes se développant au sein d'un écoulement à une fréquence réelle donnée, éventuellement même nulle. C'est ce qui se produit par exemple dans les écoulements de couche limite, où des ondes vont être excitées par du bruit extérieur à la couche limite ou bien par des défauts de surface. On effectue alors une analyse de stabilité spatiale, pour laquelle on fixe la pulsation ω à une valeur réelle et on cherche les modes propres (α, q) solution du problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathcal{A}'.q'(y) = \alpha \mathcal{B}'.q'(y) \quad (1.4)$$

qui, pour être écrit sous forme linéaire dans le cas des équations LNS, nécessite d'introduire la fonction propre $q' = [q, \alpha q]$. Un mode propre se propageant dans la direction des x positifs est amplifié spatialement si $\text{Im}(\alpha) > 0$, alors qu'il est atténué si $\text{Im}(\alpha) < 0$. Dans le monde de l'acoustique des conduits, ce type de méthode est plutôt appelé "analyse modale". En effet, les écoulements considérés (généralement nuls ou uniformes) ne donnent pas lieu à l'apparition de modes instables, sauf comme nous le verrons en présence de certaines parois traitées. Ainsi, la résolution du problème aux valeurs propres revient simplement à trouver le nombre d'onde et la fonction propre des modes acoustiques du conduit, à la fréquence d'intérêt.

Lorsque l'écoulement et les conditions aux limites sont homogènes dans la direction x mais inhomogènes dans les directions y et z , on reste dans le cadre de l'approximation parallèle mais les perturbations ne peuvent plus être recherchées sous la forme de mode normal ; à la place, on cherche la perturbation sous la forme $\hat{q}(x, y, z, t) = q(y, z) \exp(-j\alpha x + j\omega t)$. La démarche d'analyse de stabilité reste ensuite la même, mais en travaillant sur des équations aux dérivées partielles (EDPs) à la place d'un système d'EDOs, ce qui complexifie la mise en œuvre numérique.

2. une forme similaire existe pour les problèmes à géométrie cylindrique (x, r, θ)

En suivant la terminologie introduite par V. Theofilis[48, 47], on parle alors d'analyse de stabilité *bi-globale*. Cependant, ce terme est sujet à discussion car il peut prêter à confusion avec les analyses globales effectuées sur les écoulements fortement non-parallèles comme les cavités ou les bulbes de décollement. Pour les configurations considérées ici d'écoulements homogènes dans la direction x , J.C. Loiseau et J.C. Robinet [26] ont récemment proposé d'utiliser le terme d'analyse de stabilité *bi-locale*. C'est une terminologie que je trouve très à-propos, et que j'utiliserai donc dans la suite de ce mémoire, même si le terme bi-global peut être trouvé à l'instar dans certaines de mes publications.

Dans les configurations où l'écoulement de base ne peut pas être considéré comme parallèle, mais où son évolution dans la direction x reste néanmoins faible, deux techniques d'analyse peuvent être utilisées. L'une est basée sur les équations de stabilité parabolisées (PSE) et l'autre sur la méthode WKB (qui dérive de la méthode des échelles multiples). L'analyse PSE a été développée par Herbert & Bertolotti [15, 16]. Elle consiste à remplacer la forme de mode normal pour les perturbations par $\hat{q}(x, y, z, t) = q(x, y) \exp\left(-j \int_{x_0}^x \alpha(\xi) d\xi - j\beta z + j\omega t\right)$, et à prendre en compte dans les équations les termes en $\partial \bar{Q}/\partial x$ et $\partial q/\partial x$. Le problème (1.1) se ramène alors à la résolution du système :

$$\mathcal{A}.q(x, y) = \mathcal{B}.\frac{\partial q}{\partial x}(x, y) \quad (1.5)$$

qui, étant parabolique, peut-être résolu aisément par une procédure de marche en x . La subtilité de l'approche repose sur le fait que les variations rapides selon x de la perturbation sont traitées par le terme d'onde en α , tandis que le terme d'amplitude q ne varie lui que lentement. La répartition de cette variation spatiale entre ces deux termes est assurée par une relation de normalisation, du type $\int_y q^* \partial q / \partial x dy = 0$ où $*$ représente la conjugaison complexe. L'introduction de cette normalisation a pour effet notable de faire perdre le caractère parfaitement parabolique au système d'équations. L'approche PSE a été initialement développée pour prendre en compte les effets du non-parallélisme de l'écoulement, elle permet par exemple d'incorporer dans l'analyse de stabilité les termes liés à la courbure de la paroi. On pourrait ainsi envisager de l'appliquer aux analyses modales acoustiques dans les configurations où la condition limite sur une paroi traitée évolue lentement. Dans ce mémoire, nous verrons que cette technique a été appliquée à l'analyse de stabilité des écoulements de jet modélisés par les équations d'Euler linéarisées, la prise en compte des termes faiblement non-parallèles permettant de s'affranchir des singularités apparaissant dans les équations lorsqu'on utilise l'approche de stabilité locale classique et nécessitant ainsi la mise en œuvre de prolongements analytiques délicats dans le plan complexe. La formulation des échelles multiples permet de traiter des équations différentielles ordinaires qui comportent des termes variant sur des échelles de longueur ou de temps distinctes. Elle a été largement utilisée dans le domaine de la mécanique des fluides, et notamment pour étudier la stabilité spatiale d'écoulements lentement variables (voir l'article historique [42] ou une explication détaillée dans le livre de Schmid & Henningson [44]). Dans ce cadre, elle repose sur l'introduction d'une échelle de longueur $x_1 = \varepsilon x$ caractéristique de cette évolution, où ε est un petit paramètre. L'écriture de la perturbation sous la forme de mode normal modifiée $\hat{q}(x, y, z, t) = q(x_1, y) \exp(j\theta(x, z, t))$ et la décomposition en série ε des différentes grandeurs permettent d'écrire le problème aux valeurs

propres sous la forme :

$$\text{ordre 0 : } \mathcal{L}_0.q_0 = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{ordre 1 : } \mathcal{L}_0.q_1 = i\alpha_1\mathcal{M}.q_0 + \mathcal{N}.q_0 + \mathcal{M}.\frac{\partial q_0}{\partial x_1} \quad (1.7)$$

sachant que $q(x_1, y) = q_0(x_1, y) + \varepsilon q_1(x_1, y)$ et que $\partial\theta/\partial t = -\omega$, $\partial\theta/\partial z = \beta$, $\partial\theta/\partial x = \alpha_0(x_1) + \varepsilon\alpha_1(x_1)$. L'équation à l'ordre 0 est un problème aux valeurs propres qui se résout classiquement. L'équation à l'ordre 1 est par contre un problème inhomogène dont la résolution se déroule en deux étapes. Cette équation n'a de solution que si le membre de droite appartient à l'image de $\mathcal{L}_0$ c'est-à-dire s'il est orthogonal au noyau de l'opérateur adjoint de $\mathcal{L}_0$. Cela se traduit par une condition dite de solvabilité, ou bien de compatibilité, qui conduit à l'évaluation de α_1 et des autres inconnues du membre de droite. La deuxième étape consiste ensuite à déterminer q_1 à l'aide du pseudo-inverse de l'opérateur $\mathcal{L}_0$.

Il est important de noter que la condition de compatibilité repose en fait sur la notion de base bi-orthogonale. En effet, l'opérateur $\mathcal{L}_0$ n'étant pas auto-adjoint, l'ensemble de ses fonctions propres ne forme pas une base orthogonale. Par contre, en faisant intervenir les fonctions propres de l'opérateur adjoint, on peut construire une base bi-orthogonale sur laquelle il est possible de décomposer tout champ q . Dans le cas où le problème aux valeurs propres considéré s'écrit sous la forme généralisée $\mathcal{A}_0.q_{\alpha_j} = \alpha_j\mathcal{B}_0.q_j$, en notant (α_j, q_j) les modes propres, la décomposition bi-orthogonale s'écrit :

$$q = \sum_j \frac{\langle \mathcal{B}_0.q | q_j^a \rangle}{\langle \mathcal{B}_0.q_j | q_j^a \rangle} q_j \quad (1.8)$$

avec q_j^a la fonction propre du mode adjoint associé à la valeur propre adjointe α_j^* obtenue en utilisant le même produit hermitien $\langle . | . \rangle$ que celui qui a servi à définir le problème adjoint. La notion de bi-orthogonalité a des applications bien plus étendues que l'élaboration de conditions de compatibilité pour l'approche WKB. Elle peut servir dans des études de réceptivité, tant sur des données numériques [13, 50] qu'expérimentales [35], ainsi que dans des études de sensibilité [27].

Tous ces outils (PSE, WKB, bi-orthogonalité) applicables aux configurations faiblement non-parallèles viennent d'être présentés dans une approche locale basée sur une forme de mode normal, mais ils sont immédiatement transposables à une approche bi-locale, nonobstant les difficultés numériques supplémentaires.

Il faut noter aussi que tout ce qui a été présenté ici concerne une approche *linéaire* de l'analyse de stabilité. Il est néanmoins possible d'étendre la méthode PSE pour prendre en compte les effets non-linéaires, c'est ce qui est fait dans de nombreuses applications traitant des couches limites (voir par exemple [39]), ainsi que récemment dans des applications liées aux instabilités hydrodynamiques des jets [21].

Analyse de stabilité globale

Lorsqu'un écoulement ou les conditions aux limites du problème ne présentent pas de directions d'homogénéité permettant de faire appel au formalisme local, on utilise alors une approche

de stabilité *globale*. C'est le cas en particulier lorsqu'on étudie des configurations d'écoulement complexes telles que des régions décollées [11], ou bien l'ensemble de l'écoulement autour d'un profil (couche limite et sillage de bord de fuite) [38]. On étudie alors la dynamique instationnaire de l'écoulement, en cherchant le comportement temporel des modes globaux $\hat{q}$, dont les fonctions propres ne présentent pas de dépendance spatiale qu'il est possible de préciser a priori. Il faut noter que dans ce cadre les discussions sur le choix de l'écoulement de base prennent tout leur sens, car, comme expliqué par exemple par Denis Sipp [45], la dynamique linéaire du champ moyen n'est pas toujours représentative des fréquences observables dans l'écoulement : le champ moyen est en effet possiblement très différent du champ de base du fait des phénomènes non-linéaires. Néanmoins, pour les écoulements étudiés dans ce mémoire, nous verrons que l'analyse de stabilité du champ moyen conduit à des fréquences concordantes avec les instationnarités observées physiquement.

L'analyse de stabilité *globale* s'effectue en écrivant le problème (1.1) sous la forme :

$$\partial_t \hat{q} = \mathcal{L} \cdot \hat{q} \quad (1.9)$$

les conditions aux limites étant incluses dans la formulation. Dans ce cas, comme expliqué par Huerre et Rossi [20], les instationnarités dans les écoulements (ouverts) suivent soit la dynamique instationnaire intrinsèque de l'écoulement (celui-ci se comporte en *oscillateur*), soit la dynamique extrinsèque imposée par du bruit déjà présent dans l'écoulement (l'écoulement est alors un *amplificateur de bruit*). Dans le contexte de l'analyse de stabilité globale, le premier type d'écoulement correspond à un opérateur $\mathcal{L}$ instable, le second à un opérateur stable. La notion de stabilité réfère ici au comportement aux temps longs de la norme spatiale du champ généré par des perturbations initiales. Cette étude est effectuée en cherchant des solutions particulières de (1.9) sous la forme $\hat{q} = qe^{j\omega t}$ avec ω la valeur propre complexe de l'opérateur $\mathcal{L}$ et q le mode global :

$$\mathcal{L} \cdot q = j\omega q \quad (1.10)$$

Dans les cas des amplificateurs de bruit où toutes les valeurs propres ont une partie imaginaire positive, et où donc toutes les perturbations décroissent aux temps longs, un phénomène de croissance transitoire peut néanmoins apparaître si l'opérateur $\mathcal{L}$ est non-normal, comme démontré par Trefethen et al. [49] pour l'opérateur linéarisé de Navier-Stokes. La recherche de la perturbation initiale produisant la croissance la plus élevée possible à un horizon temporel donné fini³ est appelée une recherche de perturbation optimale. Une revue des applications de ce type d'étude pour les écoulements hydrodynamiques est donnée par Schmid [43]. L'une des solutions les plus élégantes pour effectuer ce type d'étude consiste à faire intervenir les équations adjointes du problème (1.1), à l'aide d'une approche découlant des travaux précurseurs de Hill [17] sur la réceptivité. Une explication détaillée de l'utilisation de l'approche adjointe peut être trouvée dans le mémoire d'HDR de C. Airiau [3]. On retrouve ainsi des outils similaires à la décomposition bi-orthogonale précédemment citée, mais dans un formalisme lié aux problématiques d'optimisation. Dans notre mémoire, nous verrons plusieurs exemples d'utilisation des approches adjointes, en particulier sur des applications d'identification de conditions aux limites ainsi que de croissance transitoire.

3. et non le comportement asymptotique du système aux temps longs $t \rightarrow +\infty$

Pour les écoulements de type oscillateur, les travaux de Monkewitz et Huerre [34, 19] ont montré que le comportement globalement instable était relié à la présence locale d’une instabilité absolue⁴, c’est-à-dire à l’existence de régions où des paquets d’ondes de vitesse de groupe nulle croissent temporellement. Une excitation du système dans cette région conduit alors à la propagation de ces ondes dans tout l’espace, et donc à un comportement dynamique du système exponentiellement croissant à la pulsation de l’instabilité absolue, quelle que soit la fréquence à laquelle il a été excité. Briggs [9] a mis en place dans le cadre de l’approche de stabilité locale le formalisme mathématique permettant d’identifier des instabilités absolues. Ce formalisme a ensuite été popularisé par Bers [5], ce qui conduit au terme communément admis de Briggs-Bers pour ce type d’approche. Une de ses premières applications à la mécanique des fluides date de 1985, par Huerre et Monkewitz [18], alors qu’elle n’est utilisée que depuis peu dans le monde de l’acoustique des conduits [7]. On pourra se référer à ce dernier papier pour avoir une description détaillée de sa mise en application. Succinctement, on peut dire que cette approche consiste à étudier la stabilité du système (1.1) soumis à un forçage ponctuel harmonique. Une approche intégrale mettant en œuvre des transformées de Fourier dans le domaine spatial et une transformée de Laplace dans le domaine temporel permet d’obtenir une solution analytique à partir de laquelle est étudié le comportement aux temps longs du système. Cette méthode permet aussi d’avoir accès au sens de propagation des ondes convectivement instables, telles que les ondes de Tollmien-Schlichting dans les couches limites laminares ou les ondes hydrodynamiques de surface dans les conduits traités acoustiquement. Il faut noter que l’utilisation d’une transformation de Laplace (écrite ici en remplaçant la variable usuelle de Laplace s par $j\omega$) permet d’assurer la causalité de la solution, à partir du moment où l’on vérifie que la transformation de Laplace est bien posée mathématiquement, c’est-à-dire que l’intégrale associée converge.

1.2 Mesures lasers appliquées aux ondes acoustiques

Une des spécificités du DMAE est d’avoir développé, depuis le début des années 2000 et sous l’impulsion de Frank Simon [23, 31, 24, 29, 33, 32], une technique de mesure optique des ondes acoustiques, afin de s’affranchir des problèmes de perturbation de la mesure qui apparaissent avec l’utilisation intrusive de microphones, en particulier lorsque les ondes acoustiques à mesurer se propagent au sein d’écoulements aérodynamiques rapides (typiquement de nombre de Mach supérieur à 0.1). Cette technique optique repose sur trois étapes, présentées dans cette section : la mesure de la vitesse de l’air par vélocimétrie laser à franges, l’extraction à partir de ces données d’une information de vitesse relative aux ondes acoustiques, et enfin des post-traitements permettant de revenir aux grandeurs usuellement utilisées en acoustique que sont la pression, l’intensité et l’impédance.

Vélocimétrie laser à franges

La vélocimétrie laser est une technique de mesure de la vitesse d’un fluide, pour laquelle l’Onera dispose d’une forte expertise depuis plusieurs décennies. Un descriptif détaillé de sa

4. tout du moins dans la gamme d’écoulements étudiés, qui ne comprend pas ceux où une boucle de rétroaction acoustique est présente

théorie et de sa mise en œuvre peut être trouvé dans le livre rédigé sous la direction d'Alain Boutier, et en particulier dans le chapitre [6]. Le terme *vélocimétrie laser* couvre un large spectre de techniques consistant à fournir des mesures de vitesses locales et instantanées, en n'utilisant que de la lumière et un aérosol. Tous les travaux présentés dans ce mémoire reposent sur la méthode dite à *franges*, qui présente une grande souplesse d'utilisation et d'application. Dans la suite du mémoire l'acronyme anglais LDV⁵ sera couramment utilisé pour parler de cette méthode de vélocimétrie laser à frange, même si à proprement parler il n'est pas tout à fait adéquat. Toutes mes connaissances à ce sujet viennent de l'enseignement au long cours fourni par Francis Micheli, dont un aperçu peut être trouvé sur le [site web de vélocimétrie laser de l'Onera](#). Un résumé (très) succinct de la technique consiste à dire que la mesure de la vitesse de l'air est assimilée à celle de la mesure de la vitesse d'une particule suffisamment petite pour que son inertie soit négligeable. On accède à cette vitesse à partir de la cadence du scintillement qui se produit quand la particule traverse le réseau de franges d'interférence créé au sein du volume de mesure formé par l'intersection de deux faisceaux lasers cohérents, comme illustré sur l'animation 1.1. L'analyse du signal lumineux lié à un réseau de franges d'interférences conduit

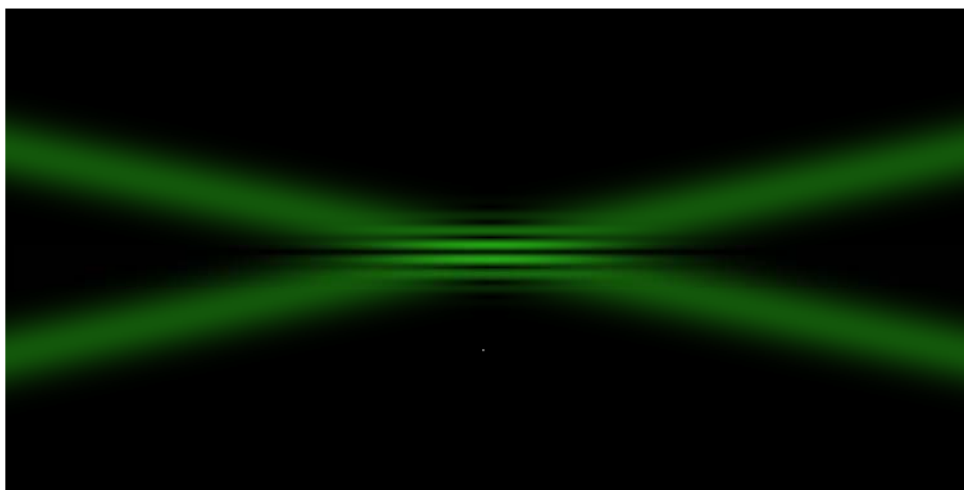


FIGURE 1.1 – Modulation du signal lumineux émis lors du passage d'une particule dans un réseau de franges d'interférences (cliquer sur la figure pour visualiser l'animation)

ainsi à la mesure de la vitesse de l'air dans la direction perpendiculaire aux franges. Pour obtenir des composantes supplémentaires du champ de vitesse, il faut donc faire s'intersecter des paires de faisceaux supplémentaires. Pour l'immense majorité des applications présentées dans ce mémoire, on a mesuré deux composantes du signal de vitesse (LDV 2C), à l'aide d'un volume de mesure constitué de l'intersection de faisceaux de lumière verte et bleue, émis par un laser à argon ionisé (le faisceau vert a une longueur d'onde de 514.5 nm ; le faisceau bleu de 488 nm ou bien 476.5 nm, selon l'état de santé du laser). Chaque couleur est préalablement divisée en deux faisceaux cohérents, l'un ayant une fréquence optique légèrement décalée de l'autre par la traversée d'une cellule de Bragg (modulateur acousto-optique qui permet de décaler la fréquence de 10 ou 40 MHz

5. pour Laser Doppler Velocimetry

typiquement, ce qui est une valeur très faible par rapport à la fréquence optique du faisceau laser). Ce décalage des fréquences optiques permet d’obtenir un défilement des franges d’interférence, et ainsi de pouvoir donner un signe à la vitesse finalement mesurée. Après avoir été collecté par un système optique, le signal lumineux est analysé par un dispositif électronique (systèmes IFA ou FSA de la gamme TSI), qui fournit des fichiers contenant une liste des vitesses de chaque particule ayant traversé le volume de mesure, associé à l’instant temporel de cette traversée. La *cadence d’acquisition* est définie comme le nombre de particules exploitées par seconde de mesure, c’est ainsi une grandeur en Hertz.

Le système de vélocimétrie laser que j’ai utilisé est un système modulaire dans lequel quasiment tous les éléments de la chaîne de mesure peuvent être modifiés, et donc personnalisés pour l’application voulue. Cette maîtrise de l’ensemble du système permet ainsi d’optimiser la mesure selon les contraintes et les objectifs propres à chaque campagne expérimentale. Ainsi, en changeant les pièces du système optique émetteur, on peut modifier la taille de la région d’intersection de l’ensemble des faisceaux. Celle-ci a la forme d’une ellipsoïde (voir figure 1.1), allongée sur environ 1 mm dans la direction des faisceaux ; sa section transversale, qui contient le jeu de franges d’interférences et correspond donc au volume de mesure, est classiquement dans nos utilisations de dimension 50 μm ou bien 100 μm . Le premier volume de mesure permet de faire des mesures en très proche paroi, le deuxième assure des cadences d’acquisition des signaux supérieures et donc une plus courte durée de la campagne de mesure, ou bien permet de mesurer des vitesses d’air plus élevées (supérieures à Mach 0.4 dans nos cas). Dans tous les cas, la petitesse du volume de mesure justifie le terme de *mesure ponctuelle* pour la vélocimétrie laser ; on doit cependant conserver en mémoire cette résolution spatiale limite, en particulier lorsque l’on souhaite faire des comparaisons avec des simulations numériques sur des champs de vitesse de très petite extension spatiale. L’autre point clef de la mesure est le choix de l’aérosol pour l’ensemencement de l’air, celui-ci devant à la fois présenter des particules de petit diamètre (inférieur au micron), avec une faible masse volumique et un fort pouvoir de réfraction de la lumière laser, tout en étant bénin pour la santé de l’expérimentateur et d’une mise en œuvre expérimentale aisée⁶. La silice amorphe et la fumée d’encens sont les deux aérosols que j’ai utilisés le plus couramment, le deuxième n’étant utilisé que pour des mesures à très faible vitesse d’écoulement (moins du m/s).

La dernière particularité remarquable de la vélocimétrie laser à franges vient de l’échantillonnage aléatoire du signal de mesure, ce qui est dû à la répartition statistique d’arrivée des particules dans le volume de mesure, selon une loi de probabilité poissonnienne. Des outils de post-traitement spécifiques doivent donc être utilisés, la longue expérience de l’Onera en la matière étant condensée dans le logiciel Assa [28]. Celui-ci permet classiquement d’accéder à une moyenne temporelle de la vitesse, mais aussi aux moments statistiques d’ordre supérieur nécessaires à la représentation des fluctuations turbulentes du fluide.

6. ceci contribuant aussi à la santé de l’expérimentateur, en ne mettant pas trop à rude épreuve sa patience et en assurant la faisabilité de la campagne de mesure dans une étendue horaire compatible avec le droit du travail...

Mesure conditionnée de vitesse acoustique

La mesure de vitesse par vélocimétrie laser doit subir un post-traitement spécifique pour obtenir les informations liées au contenu *acoustique* de la vitesse. L'utilisation du terme *vitesse acoustique* peut prêter à de mauvaises interprétations. Celui-ci est en effet souvent compris comme étant la vitesse particulière acoustique, définie classiquement pour les ondes acoustiques se propageant dans un milieu au repos, ce champ acoustique étant alors purement irrotationnel. Cette grandeur peut elle aussi être mesurée par des techniques laser : J.C. Valière en fait une revue dans son livre[51], mais en se focalisant sur des techniques de traitement du signal lumineux qui ne fonctionnent pas bien pour les configurations avec écoulement moyen qui nous intéressent. Ce que nous entendons ici par vitesse acoustique est moins restrictif : c'est la mesure de vitesse conditionnée par une grandeur acoustique, qui peut être le signal émis par un haut-parleur, ou bien une mesure microphonique à grande distance de la zone étudiée. Panda, Seasholtz et Elam [37] utilisent ainsi cette approche dans une configuration de bruit de jet, en conditionnant la mesure de vitesse dans le jet par une mesure de pression en champ lointain (donc par une mesure du champ acoustique rayonné) : ils séparent ainsi les composantes hydrodynamiques et acoustiques du champ de vitesse dans le jet. Lee et Ribner [25] ont montré que la relation de causalité reposant sur ce type de conditionnement procure une approximation de la solution intégrale des analogies acoustiques, et permet ainsi d'identifier ce qui, parmi toutes les fluctuations hydrodynamiques de cet écoulement, est source du bruit rayonné. On pourra se référer au cours de P. Jordan [22] pour plus de détails sur ces discussions.

La moyenne conditionnée s'obtient par une approche relevant de l'estimation stochastique linéaire [2, 1], et repose sur les fonctions de corrélations croisées qui, dans le domaine fréquentiel, reviennent à l'utilisation d'interspectres. Dans le domaine de la mesure acoustique microphonique, ce type d'approche a été mis en œuvre initialement par Chung [12], qui a développé la technique dite de *three-microphone signal enhancement*. Elle vise à extraire un signal noyé dans un signal parasite en utilisant la cohérence entre des paires de microphones. Cela suppose que le signal parasite en question (vu ici comme du "bruit" additif, et dû aux fluctuations turbulentes ou au bruit électronique) soit décorrélé du signal recherché. Les potentialités et limitations de cette technique ont notamment été étudiées par Nance et Ahuja [36] et Bahr et Cattafesta [4].

Pour les travaux présentés dans ce mémoire, et selon les applications, la vitesse mesurée par le laser est conditionnée par le signal électronique émis par un haut-parleur jouant le rôle de la source de bruit, ou bien par un microphone placé suffisamment loin de la zone de mesure laser, de telle manière que les fluctuations turbulentes qu'il perçoit soient décorrélées des fluctuations turbulentes au niveau du volume de mesure LDV. En notant l_s ce signal de référence et v le signal de vitesse, la procédure d'extraction de la vitesse acoustique⁷ repose sur le calcul de l'interspectre G_{v,l_s} . On définit alors la "vitesse acoustique" comme :

$$v'(\omega) = \frac{G_{v,l_s}(\omega)}{\sqrt{G_{l_s,l_s}(\omega)}} \quad (1.11)$$

en notant G_{l_s,l_s} l'autospectre du signal de référence. On obtient donc ainsi à la fois l'amplitude (en m/s) de la vitesse acoustique, et sa phase par rapport au signal de référence.

7. au sens de vitesse acoustique conditionnée, comme expliqué dans le premier paragraphe de la section

En pratique, cette approche est mise en œuvre pour des sources multi-sinus, et il est nécessaire que les raies du spectre de la mesure de référence ls soient distinctes et clairement émergentes. Lorsqu'on est dans ce cadre, la technique permet d'extraire la composante acoustique de manière très efficace. Ainsi, à titre d'illustration, on présente ici la procédure d'extraction sur des signaux de vitesse construits sous la forme :

$$v(t) = \bar{V} + \sum_{k=1}^{11} A_v^k \cos(2\pi f_k t + \varphi_v^k) + bn(t) \quad (1.12)$$

où t est une base de temps échantillonnée aléatoirement, avec une distribution représentative d'un processus poissonien tel que celui obtenu expérimentalement lors d'une mesure par vélocimétrie laser. Le terme $bn(t)$ représente un bruit blanc gaussien d'écart type b , qui simule le signal parasite que l'on cherche à éliminer, alors que $\bar{V}$ joue le rôle de la vitesse moyenne. Le signal acoustique que l'on cherche à extraire correspond au deuxième terme du membre de droite de l'équation (1.12), constitué de onze raies aux fréquences f_k , avec chacune une amplitude de sinusoïde A_v^k et une phase φ_v^k . Pour un signal de référence

$$ls(t) = \sum_{k=1}^{11} A_{ls}^k \cos(2\pi f_k t + \varphi_{ls}^k) \quad (1.13)$$

la vitesse acoustique v' recherchée a, dans le domaine fréquentiel et pour chaque fréquence considérée, une amplitude $A_{v_{eff}}^k = A_v^k / \sqrt{2}$ et une phase par rapport à la référence $\varphi_v^k - \varphi_{ls}^k$. En construisant la base de temps avec des propriétés caractéristiques de ce qui est réalisé expérimentalement (acquisition de 200 000 particules avec une cadence moyenne de l'ordre de 20 kHz), et en faisant varier le rapport signal sur bruit $snr = 20 \log(A_v^k/b)$, on obtient les courbes tracées sur la figure 1.2. Celles-ci montrent que la procédure d'extraction permet de récupérer le niveau correct d'amplitude (respectivement de la phase) dès que le rapport signal sur bruit est supérieur à -40 dB (respectivement -30 dB). Cela signifie que l'on peut extraire des amplitudes de vitesse acoustique 100 fois plus faibles que la valeur rms des fluctuations turbulentes, la capacité d'extraction étant un peu moins efficace concernant la phase.

Toute cette procédure de conditionnement de la vitesse et ainsi d'extraction des amplitudes et phases dans le domaine fréquentiel a été implantée dans une version interne Onera du logiciel Assa.

De la vitesse à l'intensité acoustique

A partir de la vitesse acoustique, on peut ensuite remonter à la pression et à l'intensité acoustique à partir d'une formulation mixte eulérienne-lagrangienne basée sur les équations de Galbrun. Tous les détails de cette méthode sont présentés dans l'article de J-Ph. Brazier [8], et celle-ci a été mise en œuvre sur des résultats expérimentaux dans les thèses d'A. Minotti [29]⁸ et M. Lavieille [23]. Nous n'en donnons donc ici que les résultats principaux. Le champ de déplacement acoustique lagrangien $\xi = (\xi_x, \xi_y)$ est déduit du champ de vitesse acoustique $v' =$

8. à noter que ce dernier a étendu cette formulation à l'acoustique non-linéaire dans l'article [30]

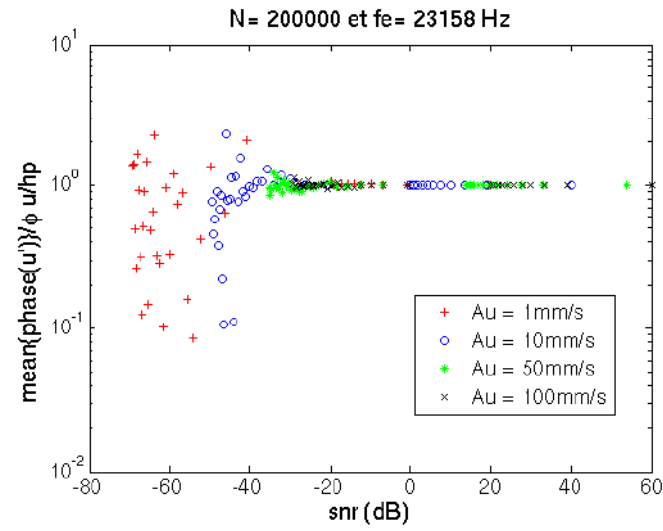
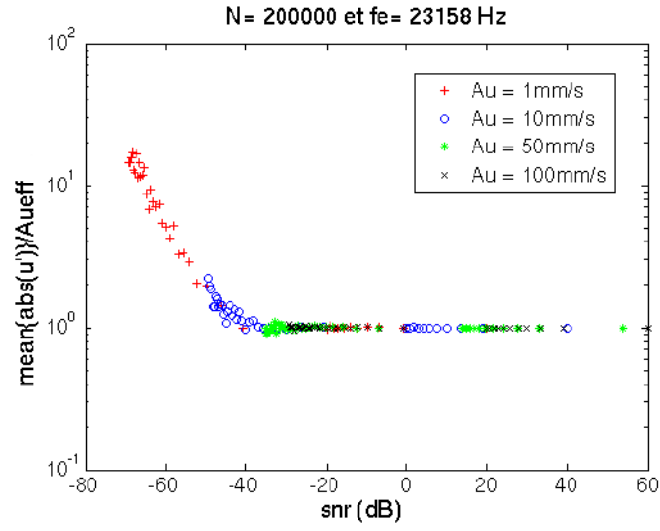
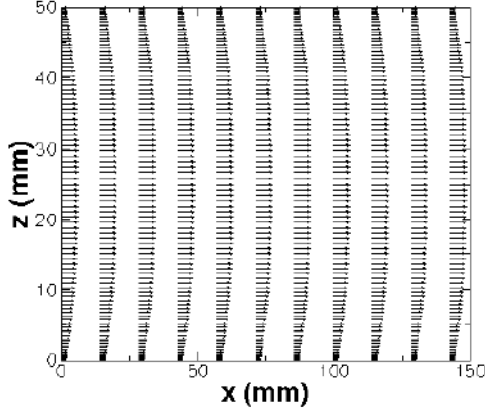
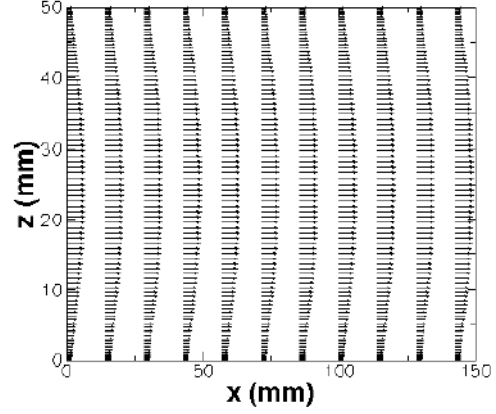


FIGURE 1.2 – Valeur moyenne pour les onze fréquences étudiées de l'amplitude (a) et de la phase (b) de la vitesse acoustique, rapportée à sa valeur théorique. Évolution en fonction du rapport signal sur bruit et pour différentes valeurs de A_v^k (notées A_u sur les deux figures).



(a) formulation de Cantrell & Hart



(b) formulation de Elias & Godin

FIGURE 1.3 – Champ d'intensité acoustique associé à la propagation d'une onde plane à 1 kHz dans un canal 2D infini de 50 mm de haut avec écoulement cisailé de Mach central égal à 0.5. Les deux parois du canal sont rigides.

(v'_x, v'_y) en résolvant par différences finies les équations suivantes :

$$U_0 \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + j\omega \xi_x = v'_x + \frac{\partial U_0}{\partial y} \xi_y \quad (1.14)$$

$$U_0 \frac{\partial \xi_y}{\partial x} + j\omega \xi_y = v'_y \quad (1.15)$$

où U_0 représente la composante selon la direction x de la vitesse moyenne (les autres composantes sont négligées). Ensuite, on obtient la pression acoustique comme [8] :

$$p' = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \xi - \frac{dp_0}{dx} \xi_x \quad (1.16)$$

où ρ_0 , p_0 et c_0 sont la masse volumique, la pression statique et la vitesse du son de l'écoulement moyen. Enfin, le champ d'intensité active, selon la formulation dite d'Elias & Godin, s'écrit [8] :

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [j\omega p' \xi + j\omega \rho_0 \xi \cdot (v' + \nabla U_0 \cdot \xi)^* U_0] \quad (1.17)$$

en notant Re la partie réelle et $*$ le conjugué complexe.

Contrairement à la formulation eulérienne classique conduisant à l'intensité de Cantrell & Hart [10], cette approche conduit à un bilan d'énergie acoustique exact, même en présence d'écoulement non-uniforme et de paroi absorbante.

Cette propriété est illustrée sur les figures 1.3 et 1.4. Celles-ci ont été obtenues avec le code d'analyse modale Mamout développé par J.-Ph. Brazier, dans la configuration d'un canal bi-dimensionnel infini au sein duquel se propage le mode acoustique à 1 kHz en présence d'un

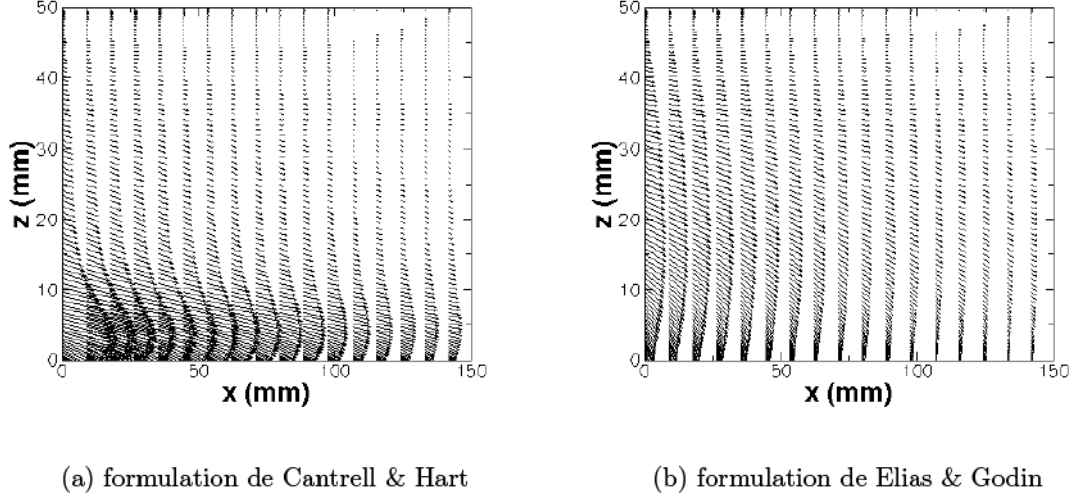


FIGURE 1.4 – Champ d'intensité acoustique associé à la propagation d'une onde plane à 1 kHz dans un canal 2D infini de 50 mm de haut avec écoulement cisailé de Mach central égal à 0.5. La paroi inférieure du canal a une impédance acoustique spécifique $Z = 0.27 - 0.22i$.

écoulement cisailé de type Poiseuille dont la valeur centrale du nombre de Mach est $M_0 = 0.5$. Lorsque les parois sont rigides (figure 1.3), les deux formulations de l'intensité donnent des résultats similaires, et en particulier on obtient ici dans les deux cas une conservation de la puissance acoustique au sein du canal. Au contraire, lorsqu'on considère une paroi inférieure absorbante acoustiquement (figure 1.3), le champ d'intensité de la formulation Cantrell & Hart est très différent de celui de la formulation Elias & Godin. On se rend compte ici que la première formulation n'est pas conservative : un bilan de la puissance acoustique sur une longueur arbitraire du canal donne, pour une puissance acoustique entrante normalisée à 1, une puissance sortante égale à 0.2 et une puissance absorbée par la paroi inférieure égale à 0.62. Au contraire, la formulation d'Elias & Godin conduit à une puissance sortante égale à 0.2 avec une puissance absorbée sur la paroi inférieure égale à 0.8.

Ce type de résultat justifie le choix fait par l'ONERA de l'approche eulérienne-lagrangienne pour post-traiter les mesures acoustiques dans les configurations où des caractérisations d'absorbants acoustiques sont en jeu. Le prochain chapitre présentera plus en détail ce type d'applications. Il est cependant important de noter une difficulté propre à cette application sur des résultats expérimentaux. Les illustrations des figures précédentes ont été effectuées à partir de résultats d'un code d'analyse modale qui calcule la valeur du déplacement lagrangien ξ et en déduit ensuite la vitesse acoustique grâce à (1.14) plus (1.15) et la pression acoustique grâce à (1.16), les éventuelles différenciations spatiales de grandeurs étant effectuées par une multiplication par le nombre d'onde axial ou bien par une méthode de collocation spectrale. Au contraire, dans les applications expérimentales, on dispose de la vitesse acoustique, en un nombre limité de points, et on doit en déduire ξ en résolvant (1.14) plus (1.15), en utilisant un schéma aux différences finies pour les dérivées spatiales. Or ceci est effectué sur un pas de maillage Δx très petit

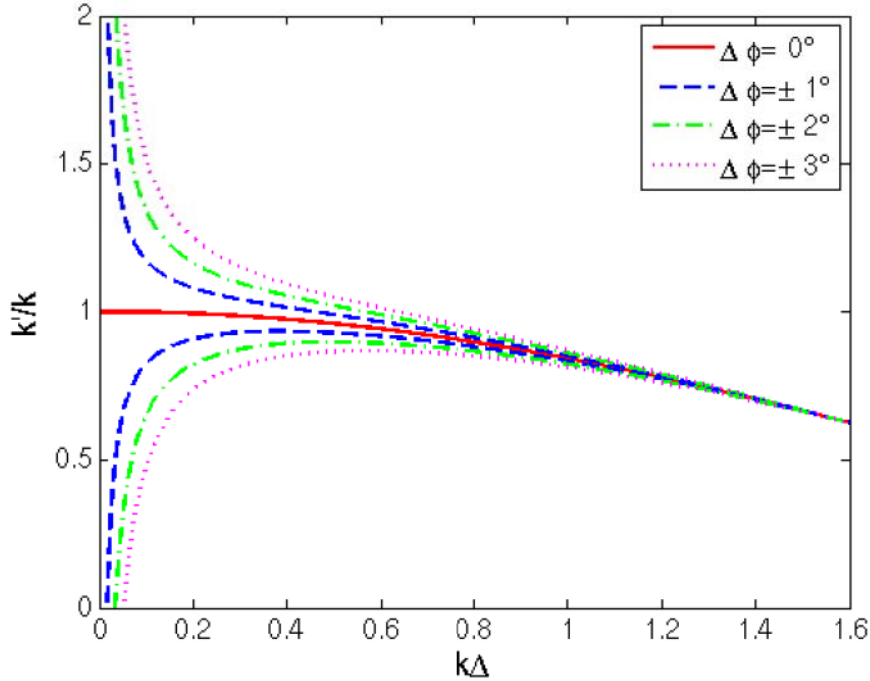


FIGURE 1.5 – Analyse en nombre d’onde d’un schéma aux différences finies centrées d’ordre 1 en présence de différences de phase $\Delta\phi$ entre les données.

par rapport aux longueurs d’ondes considérées. Cette propriété est classiquement favorable pour les propriétés de dispersion et de dissipation des schémas aux différences finies, sauf lorsque des erreurs de phase rentrent en jeu. Ceci apparaît lorsqu’on effectue une analyse en nombre d’onde du schéma (dont le principe est présenté par exemple dans Tam [46, chapitre 2]). En effet, comme illustré sur la figure 1.5 pour le schéma d’ordre 1 utilisé dans le post-traitement expérimental, le nombre d’onde effectif k' diverge du nombre d’onde réel k aux petites valeurs de $k\Delta x$, dès lors que des erreurs de phase, même faibles, existent sur les données. Dans les configurations rencontrées expérimentalement, l’espacement entre les points de mesure conduit à des valeurs de $k\Delta x$ généralement inférieures à 0.5 et la technique d’extraction des vitesses acoustiques de la mesure laser ne peut s’affranchir d’erreurs de phase de quelques degrés. Le calcul de la pression et de l’intensité acoustique peut donc rapidement être erroné si le maillage expérimental est trop fin.

Impédance acoustique

Une grandeur au cœur de tous les travaux acoustiques présentés dans ce mémoire est l’impédance acoustique d’une surface. Ce terme vient du latin *impedire* qui signifie “entraver”⁹. L’impédance mécanique est ainsi la mesure de la manière dont une surface “résiste” à un mou-

9. *to impede* en anglais signifie la même chose

vement induit par l'imposition d'une force donnée, et est égale au rapport entre cette force et la vitesse qui en résulte pour la surface. Dans le domaine acoustique, l'impédance est définie dans le domaine fréquentiel comme :

$$\tilde{Z} = \frac{p'}{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}} \quad (1.18)$$

avec $\mathbf{n}$ le vecteur normal à la surface. En particulier, lorsqu'il n'y a pas de surface (ou disons que celle-ci est uniquement constituée d'air), l'impédance acoustique est égale à $\tilde{Z} = \rho_0 c_0$: c'est le ratio entre la pression et la vitesse qu'on trouve pour une onde plane progressive ou bien pour une onde sphérique en champ lointain. On travaille donc de manière usuelle avec l'impédance acoustique spécifique Z :

$$Z = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{p'}{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}} \quad (1.19)$$

Nous reviendrons à plusieurs reprises dans ce mémoire sur cette notion d'impédance acoustique de surface, la façon de la mesurer, et les questions inhérentes à sa définition.

Références

- [1] R.J. Adrian. « Stochastic estimation of conditional structure : a review ». In : *Applied Scientific Research* 53 (1994), p. 291–303.
- [2] R.J. Adrian. *Stochastic estimation of the structure of turbulent fields*. Springer, 1996.
- [3] C. Airiau. *Stabilité, réceptivité et contrôle optimal d'écoulements cisailés : approches ad-jointes*. Université Paul Sabatier, Habilitation à diriger des recherches. 2004.
- [4] Chris Bahr et Louis N. Cattafesta. « Limits of coherence-based aeroacoustic analysis in the presence of distributed sources ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 129.6 (2011), EL248–EL253.
- [5] A. Bers. *Handbook of Plasma Physics, Chapter 3.2 : Space-time evolution of plasma instabilities - absolute and convective*. T. 1. North Holland, 1983.
- [6] A. Boutier et J.M. Most. « Vélométrie laser Doppler ». In : *Vélométrie laser pour la mécanique des fluides*. Sous la dir. d'A. Boutier. Mécanique et Ingénierie des matériaux, Lavoisier, 2012. Chap. 5.
- [7] E.J. Brambley. « Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings ». In : *J. Sound Vib.* 322 (2009), p. 1026–1037. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.11.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.021).
- [8] J.-Ph. Brazier. « Derivation of an exact energy balance for Galbrun equation in linear acoustics ». In : *J. Sound Vib.* 330 (2011), p. 2848–2868.
- [9] R.J Briggs. *Electron-stream interaction with plasmas*. Cambridge, Mass : MIT Press, 1964.
- [10] R.-H Cantrell et R.-W. Hart. « Interaction between sound and flow in acoustic cavities : mass, momentum and energy considerations ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 36 (1964).
- [11] S. Cherubini, J. C. Robinet et P. De Palma. « The effects of non-normality and nonlinearity of the Navier–Stokes operator on the dynamics of a large laminar separation bubble ». In : *Phys. Fluids* 22 (2010), p. 014102.

- [12] J. Y Chung. « Rejection of flow noise using a coherence function method ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 62.2 (1980), p. 388–395.
- [13] A. V. Fedorov, A. A Ryzhov, V. G. Soudakov et S. V. Utyuzhnikov. « Receptivity of a high-speed boundary layer to temperature spottiness ». In : *J. Fluid Mech.* 722 (2013), p. 533–553.
- [14] J. Gikady, S. Föller et T. Sattelmayer. « Impact of turbulence on the prediction of linear aeroacoustic interactions : Acoustic response of a turbulent shear layer ». In : *J. Sound Vib.* 333 (2014), p. 6548–6559.
- [15] Th. Herbert. « Parabolized stability equations ». In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 29 (1997), p. 245–283.
- [16] Th. Herbert et F.P. Bertolotti. « Stability analysis of non-parallel boundary layers ». In : *Bull. Am. Phys. Soc.* 32 (1987).
- [17] D.C Hill. « Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers ». In : *J. Fluid Mech.* 292 (1995), p. 183–204.
- [18] P. Huerre et P.A Monkewitz. « Absolute and convective instabilities in free shear layers ». In : *J. Fluid Mech.* 159 (1985), p. 151–168.
- [19] P. Huerre et P.A Monkewitz. « Local and global instabilities in spatially developing flows ». In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 22 (1990), p. 473–537.
- [20] P. Huerre et M. Rossi. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities; Chapter 2 : Hydrodynamic instabilities in open flows*. Cambridge University Press, 1998.
- [21] M. Itasse, J.-P. Brazier, O. Léon et G. Casalis. « PSE analysis of nonlinear interactions with forced eigenmodes to control subsonic jet instabilities ». In : 7 (2015). In Press.
- [22] P. Jordan. « Experimental aeroacoustics and noise source identification ». In : *Lecture notes from the CISM advanced school on NOISE SOURCES IN TURBULENT SHEAR FLOWS*. Udine, Italy, 2011.
- [23] M. Lavieille. « Développement d’une méthode de mesure acoustique en écoulement rapide et chaud par Vélocimétrie Laser Doppler. » Thèse de doct. Université de Toulouse (ISAE), jan. 2008.
- [24] M. Lavieille, F. Simon et F. Micheli. « Measurement of acoustic quantity fields in duct flow by Laser Doppler Velocimetry. » In : *Proceedings of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Cambridge, Massachusetts : AIAA-2006-2550, mai 2006.
- [25] H.K Lee et H.S Ribner. « Direct correlation of noise and flow of a jet ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 52 (1972), p. 1280–1290.
- [26] J.C. Loiseau. « Dynamics and global stability analysis of three-dimensional flows ». Thèse de doct. Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers - Spécialité Mécanique, 2014.
- [27] O. Marquet, M. Lombardi, J.M Chomaz, D. Sipp et L. Jacquin. « Direct and adjoint global modes of a recirculation bubble : lift-up and convective non-normalities ». In : *J. Fluid Mech.* 622 (2009), p. 1–21.

- [28] F. Micheli, M. Lavieille et P. Millan. « ASSA, un outil de référence pour le traitement du signal en vélocimétrie laser ». In : *Congrès Francophone de Techniques Laser*. Toulouse, 12–22 sept. 2006.
- [29] A. Minotti. « Contribution à la mesure aéroacoustique par vélocimétrie laser doppler ». Thèse de doct. ENSAE, 2004.
- [30] A. Minotti, J.-Ph. Brazier et F. Simon. « Extension of the Eulerian–Lagrangian description to nonlinear perturbations in an arbitrary inviscid flow ». In : *J. Sound Vib.* 331 (2012), p. 4537–4553.
- [31] A. Minotti, F. Simon et F. Gantié. « Characterization of an acoustic liner by means of Laser Doppler Velocimetry in a subsonic flow ». In : *Aerospace Science and Technology* 12.5 (2008), p. 398–407.
- [32] A. Minotti, F. Simon, J.F. Piet et P. Millan. « Signal processing for in-flow measurement of acoustic velocity by LDV ». In : *8th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference & Exhibit*. Breckenridge, Colorado, juin 2002.
- [33] A. Minotti, F. Simon, J.F. Piet et P. Millan. « In-Flow Acoustic Power and Intensity Fields Measurements with a '2D LDV' System ». In : *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*. AIAA 2003-3262. Hilton Head, South Carolina, déc. 2003.
- [34] P.A. Monkewitz, P. Huerre et J.M. Chomaz. « Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows ». In : *J. Fluid Mech.* 251 (1993), p. 1–20.
- [35] J.A. Monschke, M.S. Kuester et E.B. White. « Acoustic receptivity measurements using modal decomposition of a modified Orr-Sommerfeld equation ». In : *AIAA-2013-0669, 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition 2013*. Grapevine, Texas, jan. 2013.
- [36] D. Nance et K. K. Ahuja. « Limitations of the three-microphone signal enhancement technique ». In : *Proceedings of the 45th AIAA Aerospace Sciences Conference*. Reno, Nevada : AIAA-2007-441, jan. 2007.
- [37] J. Panda, R.G. Seasholtz et K.A. Elam. « Direct correlation of noise and flow of a jet ». In : *J. Fluid Mech.* 537 (2005), p. 349–385.
- [38] M. Fosas de Pando, P.J. Schmid et D. Sipp. « A global analysis of tonal noise in flows around aerofoils ». In : *J. Fluid Mech.* 754 (2014), p. 5–38.
- [39] Donghun Park et Seung O. Park. « Linear and non-linear stability analysis of incompressible boundary layer over a two-dimensional hump ». In : *Computers & Fluids* 73 (2013), p. 80–96. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.12.007>.
- [40] W.C. Reynolds et A.K.M.F. Hussain. « The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. » In : *J. Fluid Mech.* 41 (1970), p. 241–258.
- [41] W.C. Reynolds et A.K.M.F. Hussain. « The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments ». In : *J. Fluid Mech.* 54 (1972), p. 263–288.

- [42] W.S Saric et A.H Nayfeh. « Nonparallel stability of boundary-layer flows ». In : *Phys. Fluids* 18.8 (1975), p. 945–950.
- [43] P.J Schmid. « Nonmodal stability theory ». In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 39 (2007), p. 129–162.
- [44] P.J Schmid et D.S Henningson. *Stability and transition in shear flows*. Springer-Verlag, 2001.
- [45] D. Sipp. *Dynamique et contrôle des instationnarités en aérodynamique*. Université Pierre et Marie-Curie, Habilitation à diriger des recherches. 2009.
- [46] C. K. W. Tam. *Computational Aeroacoustics. A wave number approach*. Cambridge University Press, 2012. ISBN : 978-0-521-80678-7 Hardback.
- [47] V. Theofilis. « Global linear instability ». In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 43 (2011), p. 319–352.
- [48] V. Theofilis. « Global linear instability ». In : *VKI Lectures Series 2014-07 'Progress in flow instability analysis and Laminar-Turbulent Transition Modelling'*. VKI, Brussels, Belgium, juin 2014.
- [49] L. N Trefethen, A. E Trefethen, S. C Reddy et T. A Driscoll. « Hydrodynamic stability without eigenvalues ». In : *Science* 261.5121 (1993), p. 578–584.
- [50] A. Tumin et E. Reshotko. « Receptivity of a boundary-layer flow to a three-dimensional hump at finite Reynolds numbers ». In : *Phys. Fluids* 17.9 (sept. 2005), p. 094101.
- [51] J.C. Valière. *Acoustic Particle Velocity Measurements using Lasers*. Wiley-ISTE, 2014. ISBN : 978-1-84821-562-7.

Chapitre 2

Mises en œuvre préliminaires

Ayant à ma disposition les méthodes, à la fois théoriques et expérimentales, qui viennent d’être présentées, j’ai pu, à partir de mon embauche au DMAE en 2008 en tant qu’ingénieur de recherche, participer à leur application dans diverses études. Je vais donner ici une illustration concernant des travaux d’analyse de stabilité et des travaux expérimentaux en aéroacoustique.

2.1 L’analyse de stabilité comme outil d’exploitation de simulations numériques directes

Une partie de mes travaux de doctorat a consisté à effectuer des simulations numériques directes de l’écoulement sur un cylindre en flèche en présence de micro-rugosités de surface disposées périodiquement selon l’envergure au sein de la couche limite. Ceci visait à étudier le mécanisme de réceptivité des ondes d’instabilité transverses (dites *crossflow*) aux caractéristiques géométriques des rugosités. En effet, une des stratégies envisageable pour retarder la transition laminaire/turbulent sur une aile en flèche consiste à générer à l’aide de micro-rugosités des ondes *crossflow* “tueuses” qui, par interactions non-linéaires, vont atténuer l’amplification naturelle des ondes les plus instables et repousser ainsi l’apparition de la turbulence [32, 33]. La phénomène de réceptivité vis-à-vis des rugosités de surface est un des points clefs de ce scénario de transition, ce qui justifiait son étude au cours de la thèse, et ce qui justifie encore de nombreux travaux actuels (on peut citer le projet européen RECEPT de 2011 à 2015, ainsi que des publications récentes [7]).

Classiquement, une rangée de micro-rugosités génère des ondes *crossflow* stationnaires, dont le nombre d’onde transversal est lié à l’espacement selon l’envergure des rugosités, et c’est ce phénomène que nous cherchions à simuler durant ma thèse. Or, il s’est avéré que les simulations numériques directes donnaient lieu non seulement à des ondes *crossflow* stationnaires mais aussi à des ondes *crossflow* instationnaires, ayant une fréquence bien spécifique. A la fin de ma thèse, j’ai donc mis en œuvre des outils d’analyse de stabilité linéaire (tels que ceux décrits en section 1.1) pour comprendre quelle était l’origine des ces ondes *crossflow* inattendues. Ceci a fait l’objet d’un article paru en 2009 dans *Physics of Fluids* [18], et dont on trouvera une copie dans l’annexe C.

Une analyse de stabilité locale, effectuée sur l’écoulement obtenu sans rugosité de paroi en

tenant compte de la périodicité imposée en envergure, a permis de montrer que les ondes instationnaires obtenues dans les simulations étaient effectivement des ondes d'instabilité crossflow de l'écoulement : les longueurs d'ondes, taux d'amplification et fonctions propres sont concordants, pour une fréquence égale à celle de l'instationnarité numérique. Une étude plus poussée consistant à mettre en œuvre la méthode de Briggs-Bers a permis d'expliquer pourquoi ces ondes apparaissaient. L'écoulement autour du cylindre lisse présente en effet des modes crossflow de vitesse de groupe nulle, dont la fréquence absolue a une partie imaginaire négative (i.e. des modes temporellement amortis) : l'écoulement est donc absolument stable. Par contre, il existe une position le long de la corde du cylindre où la partie imaginaire de la fréquence absolue, bien que négative, est très proche de zéro. Or, lorsqu'on introduit à cette position une rugosité et qu'on initialise les simulations associées avec l'écoulement sur cylindre lisse, on engendre localement des perturbations transitoires importantes de l'écoulement, le temps que les structures du type tourbillon en fer à cheval se forment autour de la rugosité. Ce transitoire joue le rôle d'un forçage quasi-impulsionnel de l'écoulement, dont la réponse apparaît sous la forme du mode crossflow instationnaire dont la fréquence est égale à la fréquence absolue : la partie imaginaire de cette dernière étant proche de zéro, le mode crossflow instationnaire n'a pas le temps de s'amortir durant la durée de la simulation. Lorsque la rugosité se situe à une position où la fréquence absolue a une partie imaginaire plus fortement négative, on observe alors dans la simulation un amortissement temporel de l'onde crossflow instationnaire en accord avec la prévision théorique.

Cet exemple illustre ainsi comment la mise en œuvre d'outils théoriques (relativement) simples permet d'expliquer des phénomènes observés dans une expérimentation numérique telle que peut l'être une simulation numérique directe. C'est une démarche que je cherche, en suivant l'exemple de nombre de mes collègues, à employer dès que cela est possible.

2.2 Mesures acoustiques en soufflerie

Lorsque j'ai commencé à travailler comme ingénieur de recherche, j'ai rapidement été impliquée sur une étude portant sur la mise en œuvre d'une mesure non-intrusive de pression acoustique dans la soufflerie F2 du Fauga-Mauzac. Ce fut l'occasion d'appliquer à grande échelle, au côté de Francis Micheli et Frank Simon, et en relais de Maud Lavieille, la technique de mesure laser de vitesse acoustique présentée en section 1.2. La soufflerie F2 étant équipée d'un vélocimètre à 3 composantes, nous avons pu reconstruire directement la pression acoustique à partir de la connaissance dans l'espace des trois composantes de vitesse. En effet, les équations d'Euler linéarisées montrent que la pression est proportionnelle à une combinaison du champ de vitesse acoustique et de ses dérivées spatiales¹. Son calcul nécessite donc l'utilisation de différences finies spatiales, et fait ainsi apparaître, comme discuté à la fin de la section 1.2, une très grande sensibilité à basse fréquence aux erreurs de mesure sur la phase de la vitesse acoustique. La campagne expérimentale a montré qu'on pouvait minimiser cette sensibilité en moyennant les résultats sur plusieurs jeux de mesure consécutifs. Comme illustré sur la figure 2.1, on peut ainsi mesurer la pression acoustique de manière non-intrusive et avec une précision satisfaisante, cela impliquant cependant un temps d'acquisition long (de l'ordre de l'heure ou plus).

1. en particulier, lorsque l'écoulement est uniforme avec une direction prépondérante, la pression est principalement proportionnelle à la divergence du champ de vitesse acoustique

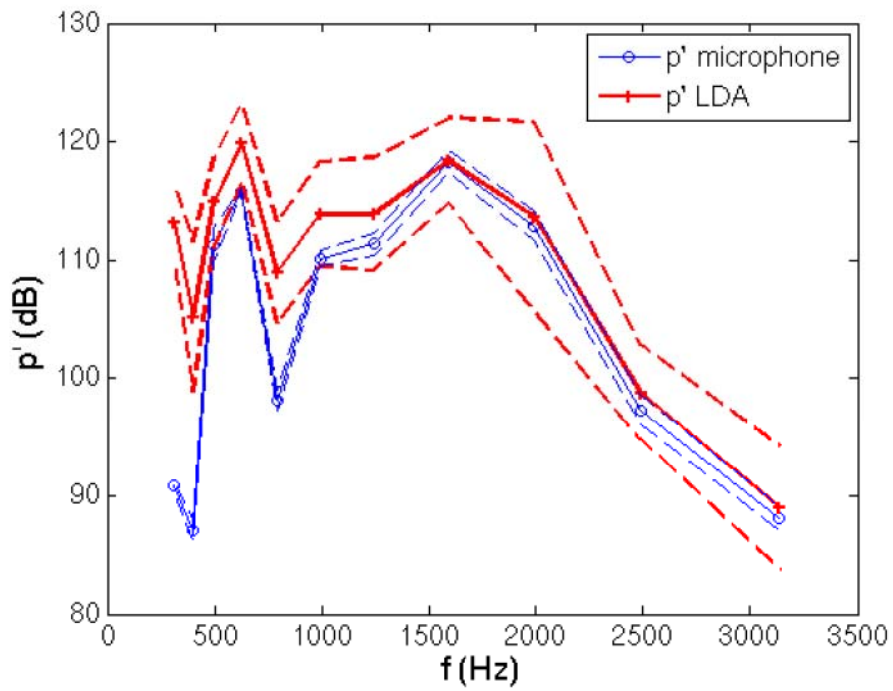


FIGURE 2.1 – Comparaison du spectre de pression mesuré par microphone avec ogive (bleu) et déduit des mesures laser (rouge). On trace à chaque fois la valeur moyenne (trait plein avec symbole) et l'erreur à un écart-type (traits pointillés) obtenue sur un jeu de dix mesures.

Il faut noter que ces mesures peuvent tout à fait être envisagées en supplément de mesures aérodynamiques classiques par vélocimétrie laser, car elles ne nécessitent pas de mise en œuvre expérimentale spécifique (mise à part une acquisition simultanée d'un signal de référence sur une voie analogique) : tout repose sur le post-traitement propre à l'extraction du contenu *acoustique*. Une piste d'amélioration serait de trouver un formalisme de différentiation spatiale qui serait moins sensible aux erreurs de phase que les différences finies, tout en ne nécessitant toujours qu'un nombre restreint de positions spatiales pour satisfaire les contraintes expérimentales. C'est un "graal" dont je n'ai pas connaissance pour l'instant...

Quoi qu'il en soit, les résultats de cette étude ont montré la faisabilité d'une mesure non-intrusive de pression acoustique en grande soufflerie, et ont conduit au dépôt par Frank Simon d'un brevet auquel j'ai été associée [35]. Ce fut donc l'occasion pour moi de découvrir les arcanes administratives propres à cette épopée au long cours qu'est le dépôt de brevet, et fut donc très formateur sur ce plan là aussi² ! Cette activité de développement métrologique pour les mesures acoustiques en soufflerie a continué ces dernières années sous l'impulsion de Frank Simon, avec une implication plus sporadique de mon côté, essentiellement par un soutien expérimental lors de la thèse d'Hélène Parisot-Dupuis [15]. Je me suis plutôt focalisée sur des applications à plus petite échelle, au sein du banc B2A, comme présenté dans la section suivante.

Néanmoins, depuis 2013, j'ai pu lancer des études prospectives sur des moyens de mesure alternatifs à la vélocimétrie laser : la diffusion Rayleigh et la PIV résolue en temps. L'étude sur la diffusion Rayleigh a été faite dans le cadre d'une Action de Recherche Exploratoire de l'ONERA, c'est-à-dire une étude prospective de 600 h sur une année, essentiellement sur papier, et regroupant un faible nombre d'intervenants. Elle m'a permis de collaborer avec Francis Micheli et avec Thibault Dartigalongue, ce dernier étant un ingénieur de recherche du département d'optique responsable d'un laser femto-secondes. L'idée sous-jacente était d'évaluer la faisabilité d'un capteur de pression acoustique non-intrusif par diffusion Rayleigh [19]. Cette technique permet de mesurer les fluctuations de masse volumique de l'air, qui sont, pour un milieu au repos ou bien en mouvement isentropique, directement proportionnelles aux fluctuations de pression créées par les ondes acoustiques. Elle utilise des lasers, comme la VLF, mais a l'avantage de ne pas nécessiter d'ensemencement du milieu. L'ordre de grandeur des fluctuations relatives de densité est de 10^{-4} pour une onde sonore de 120 dB, et jusqu'à 10^{-2} pour une onde de 160 dB, ce qui est un niveau sonore à la limite du domaine de l'acoustique linéaire. Le DLR a publié, au tout début de notre étude, des travaux montrant la faisabilité de cette mesure [29], en utilisant une technique de traitement du signal basée sur des autospectres, et donc a priori d'une capacité d'extraction moins efficace (de l'ordre d'un facteur 10 en amplitude) que la technique par conditionnement présentée en section 1.2. Nous nous sommes aussi intéressés spécifiquement durant cette étude prospective sur les moyens de s'affranchir d'une des difficultés majeure des mesures par diffusion Rayleigh dans une enceinte confinée, qui est la lumière parasite provenant de la diffusion par les hublots. L'utilisation d'un laser femtosecondes permettrait en effet d'effectuer un filtrage spatio-temporel, pour ne récupérer que la lumière diffusée par les molécules d'air présentes dans la zone ciblée pour la mesure. Des premiers tests sur table ont permis d'appréhender les potentialités apportées par ce filtrage optique, et de développer des

2. ainsi, comme illustration, on peut comparer la date d'un article de conférence [22] publié un an après le premier dépôt du projet de brevet, et la date effective de publication du brevet...

outils de dimensionnement des montages optiques associés. Au final, l'étude a permis de mettre en lumière (!) les pistes ouvrant le plus de perspectives d'applications. Pour aller à l'étape suivante consistant en une réalisation expérimentale en bonne et due forme, il faudra néanmoins réussir à dépasser les difficultés pratiques liées à la disponibilité des dispositifs lasers requis (qui sont actuellement soit trop coûteux à acheter, soit trop encombrants pour être transportés...).

La deuxième piste alternative, moins prospective que la précédente, concerne la mesure de vitesse acoustique à l'aide d'un système PIV résolu en temps. L'idée est là encore d'utiliser une technique de conditionnement pour extraire la composante acoustique d'un champ de vitesse, acquis cette fois par mesure PIV avec une cadence suffisante pour résoudre les phénomènes acoustiques auxquels on s'intéresse. L'avantage potentiel par rapport à la VLF serait de disposer d'une mesure dans un plan (voire dans le futur dans un volume grâce à la PIV 3D) au lieu d'une mesure ponctuelle, et ainsi de gagner en temps d'acquisition. On souhaite aussi tirer parti de la nature planaire de la mesure pour améliorer l'efficacité de la procédure d'extraction, en utilisant la cohérence spatiale inhérente aux ondes acoustiques. Cette étude est effectuée dans le cadre du Projet de Recherche 3DFlow (financement interne à l'ONERA), lancé en 2013 en coopération avec les équipes du DAFE, département de l'ONERA qui développe notamment l'outil de post-traitement Folki dédié aux mesures PIV. Du fait de ma seconde grossesse juste après le démarrage du projet, ainsi que de ma prise de fonction ensuite comme chef de l'unité ITAC, je n'ai pu que suivre cette étude de loin, et ai donc transmis le flambeau à Olivier Léon. Les résultats obtenus par ce dernier sont très prometteurs, et on peut espérer à moyen terme disposer ainsi d'une alternative crédible à la LDV, même si pour l'instant elle reste moins efficace sur les faibles niveaux sonores.

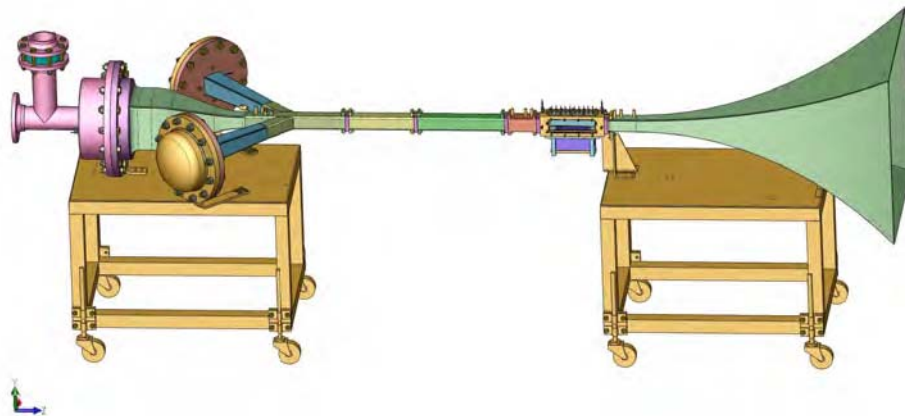
2.3 Mesures acoustiques appliquées aux traitements de conduit

Présentation du banc B2A

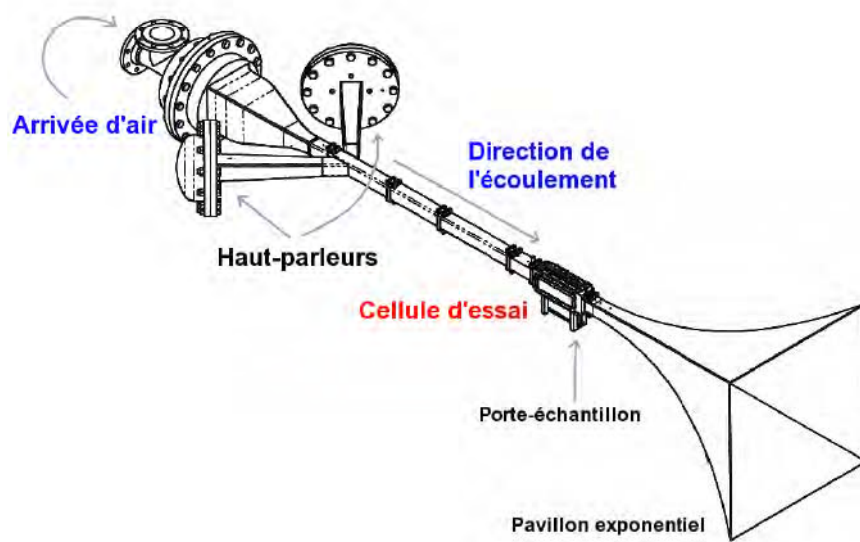
Depuis 2008, la majeure partie de mes activités expérimentales a eu lieu dans le banc B2A. Ce banc Aéro-thermo-Acoustique a été construit sous l'impulsion de Frank Simon lors de la thèse d'Angelot Minotti. Une visualisation en est donnée sur la figure 2.2.

C'est un banc d'environ 4 m de long, constitué d'un conduit en acier inoxydable de section carrée de 50 mm de côté. La cellule d'essai est équipée de deux hublots en silice, ce qui permet d'y effectuer des mesures de vélocimétrie laser, avec l'aide du dispositif présenté en section 1.2. Au niveau de la cellule d'essai, l'écoulement est turbulent et pleinement développé. Il est régulé en débit jusqu'à 600 g/s, ce qui permet, à température ambiante, d'atteindre des vitesses au centre veine proches de Mach 0.7, comme illustré sur la figure 2.3. Une régulation en température permet aussi, si cela est souhaité, d'obtenir des écoulements avec une température allant jusqu'à 300° C : comme cela n'apparaît pas sur les croquis de la figure 2.2, le conduit est calorifugé sur toute sa longueur.

Le banc est aussi équipé à l'amont de deux haut-parleurs, permettant d'émettre différents signaux acoustiques jusqu'à des niveaux proches de 150 dB. Du fait de la dimension transversale du conduit, la fréquence de coupure (sans écoulement et à température ambiante) du banc est égale à 3440 Hz : on travaille donc préférentiellement en deçà de cette fréquence pour n'avoir



(a) Visualisation CAO



(b) Croquis explicatif

FIGURE 2.2 – Schéma du banc B2A.

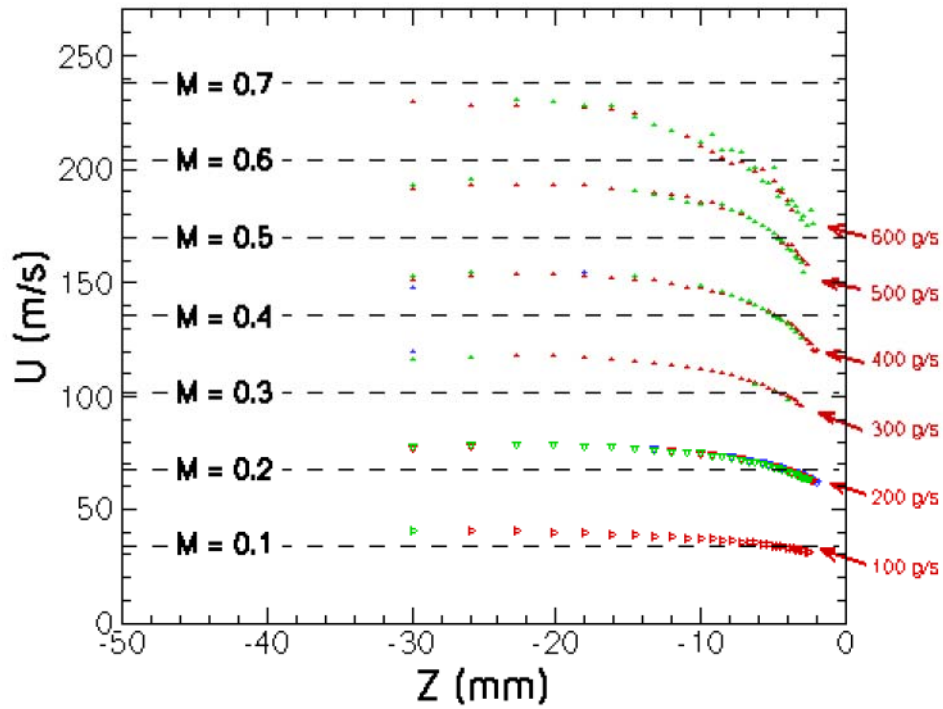


FIGURE 2.3 – Vitesse axiale mesurée par LDV sur une demi-hauteur de la veine B2A pour différentes consignes en débit, à température ambiante. Les lignes horizontales permettent de visualiser le nombre de Mach équivalent. L'axe Z est l'axe vertical, les parois sont situées en $Z = 0$ et $Z = -50$ mm. Le domaine de mesure est situé ici au centre de la veine dans la direction transverse Y .

que le mode acoustique plan qui se propage au sein du conduit. En complément des mesures LDV, on dispose de plusieurs prises pariétales pour la mesure de la pression statique ainsi que de la pression acoustique (par sondes microphoniques de type B&K 4182, adaptées à des niveaux sonores élevés et à la présence éventuelle de température). A l’aval du conduit, un pavillon exponentiel permet de limiter au minimum les réflexions acoustiques. Le module du coefficient de réflexion mesuré sans écoulement est tracé sur la figure 2.4.

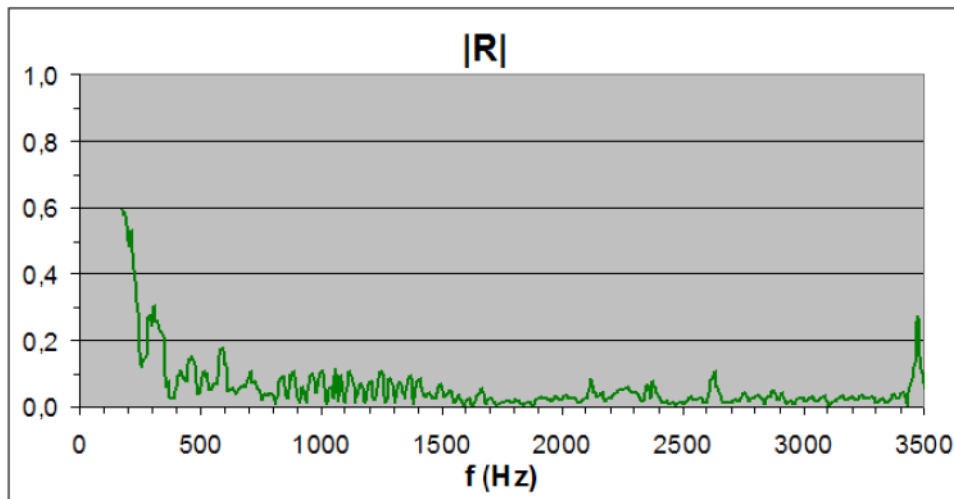
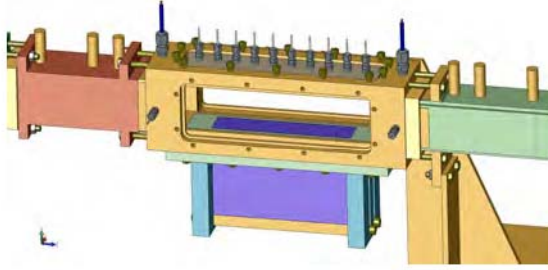


FIGURE 2.4 – Module du coefficient de réflexion de la sortie du banc, sans écoulement.

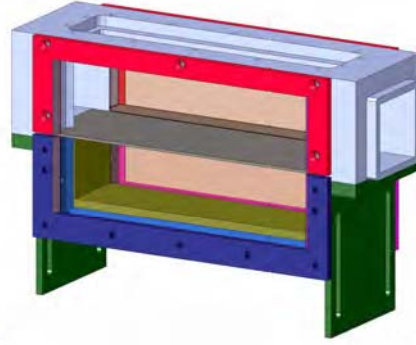
Deux types de cellule d’essai sont disponibles. La première (voir figure 2.5a) est dédiée à l’étude des matériaux absorbants acoustiques, aussi appelés liners. Ceux-ci sont alors placés sur la paroi inférieure du conduit B2A : les échantillons font classiquement 150 mm de long et 30 mm de large. Les hublots supérieurs permettent ainsi un accès optique au-dessus du liner, et sur toute sa longueur. Pour certaines applications sans écoulement porteur, on a démonté le pavillon exponentiel de manière à placer un liner en sortie de la cellule d’essai, ce qui met le banc dans une configuration de type tube à impédance. La deuxième cellule d’essai (voir figure 2.5b), conçue en 2009 dans le cadre du projet ANR APAM, est quant à elle équipée de deux hublots supplémentaires inférieurs, permettant d’effectuer des mesures LDV dans une cavité placée en deçà du conduit principal : elle est donc particulièrement adaptée à l’étude du comportement de plaques perforées. A noter que cette partie inférieure peut aussi être branchée sur un circuit secondaire d’alimentation en air, afin de générer un écoulement traversant la plaque.

Études réalisées au sein du banc

Entre 2008 et 2014, la majeure partie de mes activités a consisté en la réalisation d’essais de caractérisation de différents types de liners au sein du banc B2A, synthétisés essentiellement sous la forme de rapports techniques ONERA. Ceci a été fait principalement dans le cadres de contrats institutionnels, avec l’ANR [20, 24], la FRAE [36], la DGAC (projets en interaction avec Airbus [25, 26, 23] ou en interaction avec Dassault Aviation et SAFRAN [17]) ou l’Union Européenne



(a) Cellule d'essai standard. Le liner est représenté en violet.



(b) Cellule d'essai double.

FIGURE 2.5 – Schémas des cellules d'essai du banc B2A

(en interaction avec Alenia [37]). Certaines études ont aussi été menées en soutien à des travaux de thèse (thèses de Benjamin Betgen [3] et de Jean-Michel Roche [30]) ou en collaboration avec les instituts de recherche aéronautiques européens (projet GARTEUR [27, 16]). On peut classer les essais réalisés en deux grandes catégories, que l'on va illustrer ci-dessous.

Caractérisation d'atténuation acoustique

La première catégorie d'essai consiste à étudier la perte de puissance acoustique entre l'amont et l'aval du liner. Ceci peut être réalisé classiquement par des mesures microphoniques pariétales dans les sections rigides en amont et en aval de la zone traitée, mais l'approche par vélocimétrie laser permet d'obtenir des informations plus riches. On effectue en effet une mesure de la vitesse acoustique sur une région couvrant l'ensemble de la partie traitée, puis on en dérive une carte de l'intensité acoustique le long du liner, à l'aide des outils de post-traitement présentés en section 1.2. A partir de cette carte d'intensité, on peut bien sûr effectuer un bilan de puissance

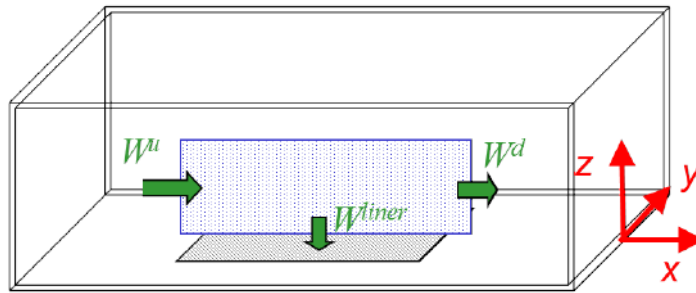


FIGURE 2.6 – Croquis illustrant le principe du bilan de perte acoustique entre l'amont et l'aval d'un liner inséré dans la veine du banc B2A. Le liner est représenté en gris, la zone de mesure LDV en bleu.

acoustique entre l'amont et l'aval du liner, comme illustré sur la figure 2.6. En supposant que

la zone de mesure est suffisamment étendue verticalement pour sortir de la région d'influence du liner, la perte de puissance acoustique engendrée par le liner est donnée par $10 \log W^{liner} = 10 \log W^u / W^d$. La puissance acoustique au niveau d'une surface S de normale $\mathbf{n}$ est calculée en intégrant l'intensité acoustique sortante : $W = \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS$. La mesure LDV n'étant effectuée que sur un plan centré transversalement dans la veine, on suppose que le champ d'intensité acoustique est homogène dans la direction y ; ceci est vérifié pour le régime d'ondes planes étudié, nonobstant les éventuels effets 3D engendrés par le fait que le liner ne couvre pas la largeur entière de la veine. L'intensité acoustique étant calculée avec l'approche d'Elias-Godine, le bilan de puissance acoustique est bien exact même, comme c'est le cas ici, en présence d'un écoulement moyen non-uniforme et d'une paroi absorbante acoustiquement.

La carte d'intensité acoustique permet aussi d'accéder à l'information sur le comportement du liner : le champ d'intensité a une structure différente selon que le liner est à réaction localisée ou non-localisée. Dans le premier cas, les ondes acoustiques au sein du matériau se propagent uniquement dans la direction de son épaisseur. Pour un matériau à réaction non-localisée, au contraire, une propagation au sein du matériau est possible dans toutes les directions. On observe alors sur les cartes d'intensité acoustique au-dessus du liner des phénomènes de "vagues" résultant de cette propagation interne. La connaissance de la nature de la réaction du liner est très importante sur le plan applicatif : en effet, stricto-sensu, seuls les liners à réaction localisée peuvent être représentés dans les simulations numériques par une surface homogénéisée d'impédance acoustique et eux seuls ont un comportement indépendant de l'angle d'incidence des ondes acoustiques.

Nous allons maintenant illustrer ce type de caractérisation acoustique sur deux matériaux étudiés dans le cadre du projet MBM. L'un est un liner acoustique conventionnel, de type SDOF³ : il est composé d'une plaque perforée surmontant des cellules de nid d'abeille, qui reposent elles-mêmes sur une plaque rigide (voir figure 2.7a). Il aura un comportement de réaction localisée. Le deuxième matériau est un bicouche de mousses métalliques, reposant sur une plaque rigide (voir figure 2.7b). Sa nature poreuse le conduit à être à réaction non-localisée.

Les cartes d'intensité acoustique obtenues au-dessus de chacun de ces liners sont tracées sur la figure 2.8, avec et sans écoulement, et à la fréquence correspondant à l'atténuation acoustique maximale du matériau. La longueur des vecteurs intensité, tracés en bleu par défaut, est proportionnelle à l'amplitude de l'intensité acoustique (intensité active). Parmi tous les vecteurs intensité, on trace en vert ceux qui se propagent dans le sens des x positifs et dont la prolongation directe intersecte le matériau. Les zones vertes sont donc les zones où les ondes acoustiques incidentes sont susceptibles d'être absorbées par le matériau. De la même manière, on a tracé en rouge les vecteurs qui se propagent dans le sens des x négatifs et dont la prolongation directe intersecte le matériau. Sur chaque figure on donne aussi le niveau minimal d'intensité L_{min} (en dB avec une référence de 1 pW/m^2) et l'écart entre les valeurs minimales et maximales de l'intensité (noté range). Il faut noter qu'en proche paroi le champ d'intensité est très souvent fortement chahuté. Cela provient notamment des difficultés numériques rencontrées dans les zones où le maillage est très raffiné, comme expliqué en fin de section 1.2.

Quoi qu'il en soit, l'exploitation de ces cartes d'intensité permet à la fois d'estimer l'atténuation acoustique engendrée par chaque matériau à la fréquence considérée, et d'identifier la

3. Single Degree Of Freedom



(a) Liner SDOF conventionnel



(b) Liner poreux à base de mousses métalliques

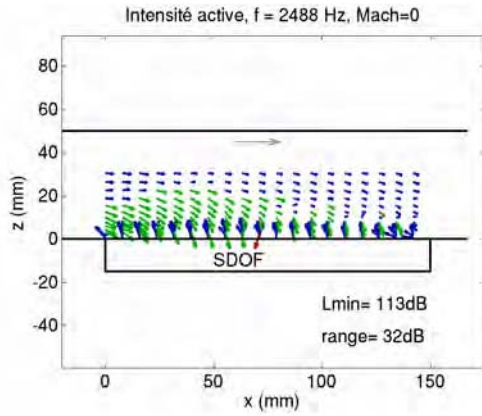
FIGURE 2.7 – Photos d'échantillons de liners utilisés au banc B2A

réaction non-localisée du matériau poreux, au contraire du liner SDOF qui est à réaction localisée.

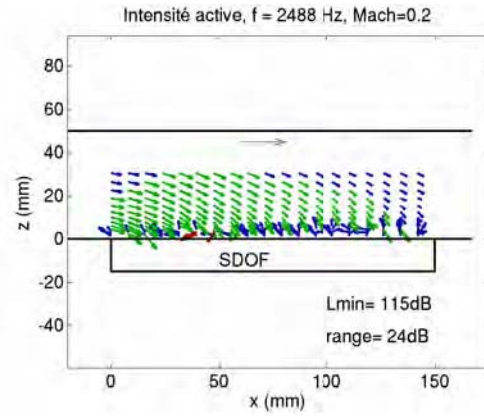
Cette approche de caractérisation acoustique a aussi été appliquée sur des liners actifs, afin d'identifier leur efficacité de fonctionnement, notamment en écoulement. Cela a été fait dans le cadre de la thèse de Benjamin Betgen, encadrée par Marie-Annick Galland de l'Ecole Centrale de Lyon, et Frank Simon. J'ai pour ma part effectué les essais au banc B2A sur les concepts développés par Benjamin. Ceux-ci étaient constitués de trois cavités juxtaposées, surmontées d'une couche résistive (feuille de tissu métallique). Au fond de chaque cellule, un haut-parleur permettait de contrôler la structure du champ acoustique dans la cavité. Ce champ était mesuré par un microphone situé en face arrière de la couche résistive, et selon le concept utilisé un deuxième microphone pouvait être installé en face avant (il était alors protégé de l'écoulement rasant par une deuxième couche résistive faite par une plaque perforée). Ainsi, à l'aide d'un algorithme de contrôle actif, l'impédance du liner hybride pouvait être modifiée, afin de soit réaliser une réactance nulle (mimant ainsi un résonateur quart d'onde, quelle que soit la fréquence visée), soit de réaliser une impédance cible donnée. Celle-ci était choisie pour maximiser l'atténuation acoustique du liner dans l'environnement dans lequel il devait être placé⁴. Tous les détails peuvent être trouvés dans la publication qui a découlé de cette étude [2] et dont on trouvera une copie dans l'annexe C, je me contenterai dans ce mémoire d'illustrer le type de comportement qui a été observé avec un exemple de cartes d'intensité acoustique, tracées sur la figure 2.9.

Lorsque l'algorithme de contrôle est inactif, le liner absorbe les ondes acoustiques du fait de la combinaison de la couche résistive et de la cavité sous-jacente, comme le fait un liner conventionnel SDOF. La carte d'intensité permet d'identifier très clairement le comportement découplé de chaque cellule, conduisant à une absorption peu importante à la fréquence proche de 1000 Hz étudiée : la profondeur des cavités (40 mm) est en effet deux fois plus petite que celle qui aurait conduit à un fonctionnement de résonateur quart d'onde. Au contraire, lorsque l'algorithme de contrôle est actif, le champ d'intensité acoustique est comme aspiré par le liner (la zone constituée de vecteurs tracés en vert est très étendue), les trois cellules travaillant de concert.

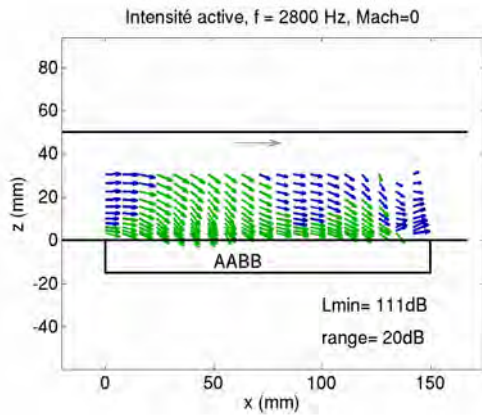
4. cette question du choix de cette impédance cible étant tout un problème en soi !



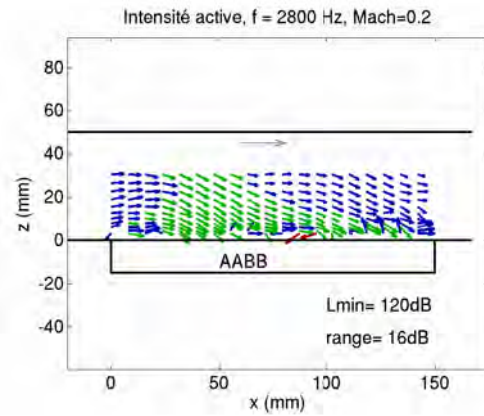
(a) Liner SDOF. Pas d'écoulement



(b) Liner SDOF. Mach égal à 0.2



(c) Liner poreux. Pas d'écoulement



(d) Liner poreux. Mach égal à 0.2

FIGURE 2.8 – Cartes d'intensité acoustique déduites des mesures LDV, pour un liner SDOF (haut) et pour un liner poreux (bas). Mesures sans écoulement (gauche) et avec un écoulement de Mach débitant égal à 0.2 (droite).

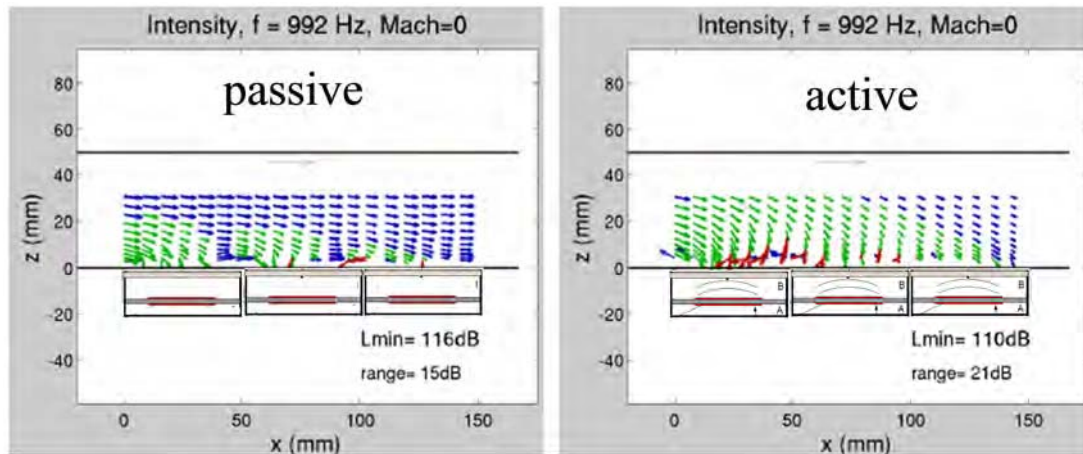


FIGURE 2.9 – Cartes d'intensité acoustique mesurées au-dessus du liner hybride de l'ECL, lorsque ce dernier est en mode passif (gauche) ou actif (droite).

La puissance acoustique est alors notablement plus faible à l'aval qu'à l'amont (voir la longueur respective des vecteurs intensité). La mesure LDV et le tracé des cartes d'intensité acoustique associées permettent donc une visualisation du fonctionnement du contrôle acoustique.

Il n'y a malheureusement pas encore eu de suite à ces études de caractérisation de liners actifs, malgré plusieurs tentatives en lien avec l'ECL (M-A. Galland), le laboratoire Femto (M. Collet) et l'EPFL (H. Lissek). Ainsi, en 2012, un projet ANR commun a été déposé, puis en 2013 une proposition de projet européen L0 et en 2015 une réponse à un call européen H2020. Ces propositions n'ont pas obtenu de financement, mais la volonté de travailler en commun avec les partenaires pré-cités persiste, et nous continuerons donc à persévérer...

Mesures de vitesse acoustique à proximité de la paroi du liner

Le deuxième type d'essai effectué dans le banc B2A sur cette problématique des liners consiste en des mesures de vitesse acoustique sur des zones millimétriques à proximité de la paroi du matériau. On exploite ainsi la haute résolution spatiale de la mesure LDV, en choisissant des réglages optiques de telle manière que la taille caractéristique du volume de mesure soit de l'ordre de $50 \mu m$. Les données acquises sont ensuite exploitées de diverses manières. On peut s'en servir pour améliorer la compréhension physique des phénomènes en jeu, ce qui a notamment été fait sur des configurations où un écoulement traversait la plaque perforée du liner (étude APAM [20], collaboration avec le DLR [5, 21]). A titre d'illustration, la figure 2.10 montre le film du champ de vitesse et de vorticité acoustique au-dessus d'un trou d'une plaque perforée traversée par un écoulement, ce qui crée un jet à travers les perforations. La plaque est placée sur la paroi inférieure de la veine principale du banc B2A, et est posée au-dessus d'une cavité (voir figure 2.5b). Lorsqu'un train d'ondes acoustiques planes est généré au sein du banc, l'interaction avec le jet débouchant d'une perforation se traduit par la création de vorticité "acoustique" (toujours au sens de *corrélé avec l'excitation acoustique*) au niveau de la frontière du jet. Ce mécanisme, prévu notamment par Howe [6], est clairement identifié sur les mesures réalisées par LDV "acoustique".

Ce type de mesure a aussi été mis en œuvre pour valider finement des simulations numériques :

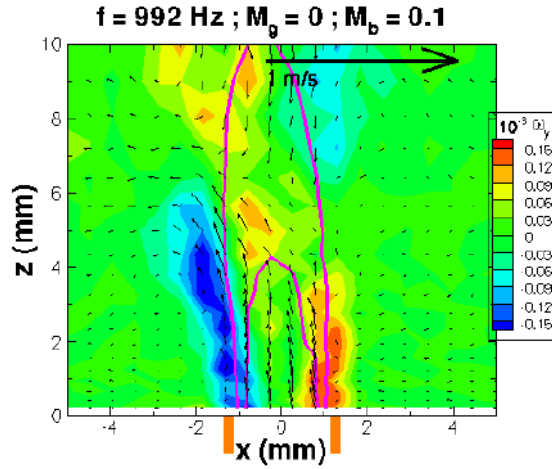


FIGURE 2.10 – Film (évolution sur une période, cliquer sur la figure pour visualiser l’animation) du champ de vortacité acoustique au-dessus d’une perforation traversée par un écoulement moyen $W_0 = 30$ m/s et soumise à une onde acoustique se propageant selon x à la fréquence $f = 992$ Hz. L’écoulement moyen atteint $0.5W_0$ et $0.9W_0$ au niveau des lignes roses. Les vecteurs montrent le champ de vitesse acoustique (v'_x, v'_z) , la flèche horizontale donne l’échelle correspondant à une amplitude de 1 m/s. Les lèvres de la perforation sont représentées en orange.

cela a été fait en support d’un doctorant Onera qui effectuait des calculs DNS autour d’un résonateur de Helmholtz soumis à un écoulement rasant et/ou à des forts niveaux sonores [31], ou bien au profit des équipes d’Airbus qui souhaitaient valider leur outil numérique développé pour prévoir l’impédance des liners conventionnels [8, 10]. Une vaste banque de données expérimentales a alors été réalisée dans le cadre d’un contrat DGAC, et une partie des comparaisons avec les simulations a été présentée dans le papier de conférence [9]. Cette étude a notamment permis de mettre en lumière un défaut de la version préliminaire du code d’Airbus, qui sous-estimait fortement le lâcher de “tourbillons acoustiques” au niveau des lèvres des perforations lorsque le liner est soumis à des niveaux sonores élevés (on parle alors de régime *non-linéaire* pour la réponse acoustique du liner). Il est prévu par Airbus d’inclure dans le futur les effets d’écoulement rasant dans leur code, une banque de données spécifique a donc été réalisée. L’écoulement rasant à la paroi perforée du liner modifie fondamentalement sa réponse acoustique, et en particulier les phénomènes de création de vortacité acoustique. Une illustration en est donnée sur les films de la figure 2.11, déduits de mesures réalisées au-dessus d’un liner SDOF soumis à une excitation acoustique de 130 dB en présence d’un écoulement rasant de Mach débitant égal à 0.05 (donc quasi-négligeable) ou 0.3.

Je souhaite ici faire un aparté sur la structure du champ aérodynamique moyen en proche paroi au-dessus de ces liners⁵. En effet, une conséquence intrigante de ces interactions fluide/acoustique en proche paroi est la modification de l’écoulement moyen lui-même en présence de l’exci-

5. la technique de mesure LDV mise en œuvre donne accès à la composante “acoustique” de l’écoulement, mais aussi bien sûr aux variables moyennes. On peut aussi extraire la composante turbulente du champ si cela est souhaité (i.e. la partie “incohérente” de la fluctuation).

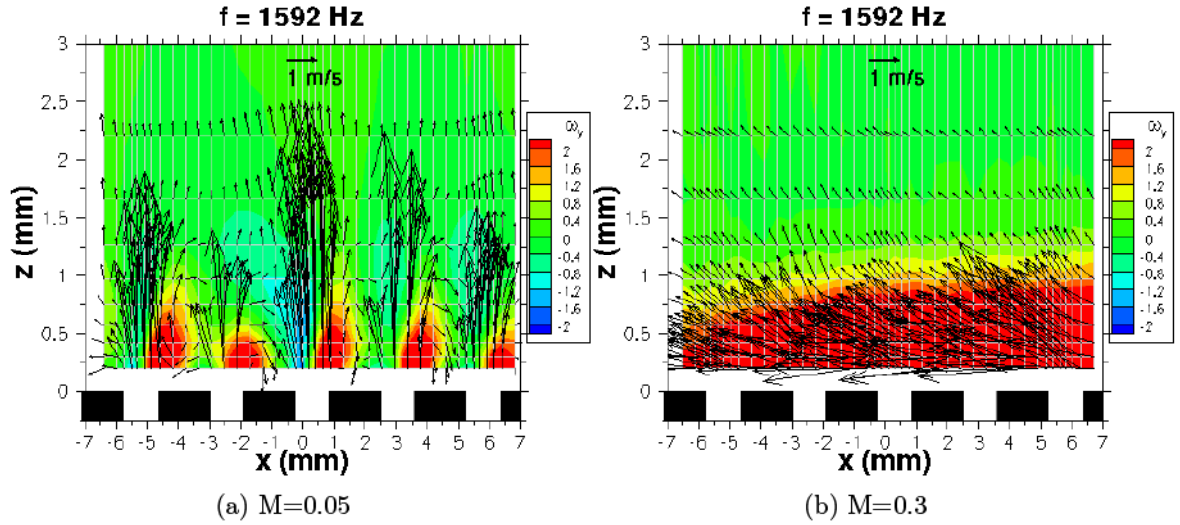
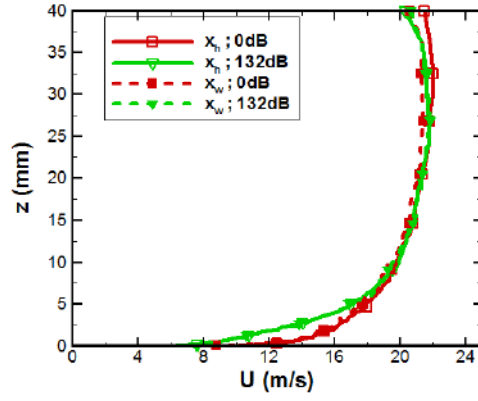


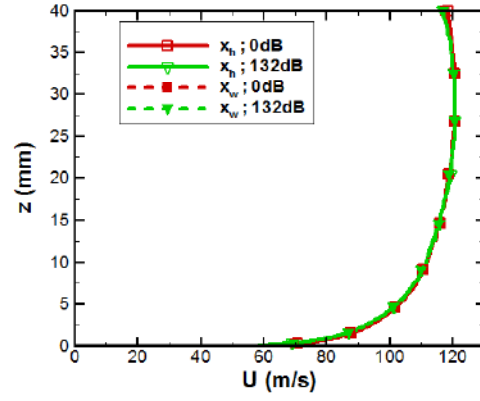
FIGURE 2.11 – Film (évolution sur une période, cliquer sur la figure pour visualiser l’animation) du champ de vorticité acoustique au-dessus d’une paroi perforée d’un liner en présence d’un écoulement rasant de nombre de Mach moyen $M = 0.05$ (gauche) ou $M = 0.3$ (droite). Le liner est soumis à une onde acoustique se propageant selon x   la fréquence $f = 1992$ Hz. Les vecteurs montrent le champ de vitesse acoustique (v'_x, v'_z) , la flèche horizontale donne l’échelle correspondant à une amplitude de 1 m/s. La paroi perforée est représentée en noir.

tation acoustique. Cette modification n’est observable qu’à faible vitesse d’écoulement moyen ($M = 0.05$), et est visible à la fois sur la composante longitudinale U_0 et la composante verticale W_0 . Une illustration en est donnée sur la figure 2.12. Pour la vitesse verticale, ce phénomène s’explique simplement par le détachement tourbillonnaire crée au niveau des trous du fait par l’excitation acoustique. En effet, des simulations numériques directes ont montré que sur la première demi-période acoustique le lâcher tourbillonnaire s’effectue à l’intérieur de la cavité du liner alors que sur la deuxième demi-période il se produit au-dessus de la paroi perforée. La procédure de post-traitement que nous appliquons aux mesures LDV ne permet pas de capter directement ce phénomène puisque nous décomposons le champ de vitesse en une composante stationnaire et en une fluctuation sinusoïdale dans le temps (celle représentée sur le film 2.11a par exemple). La non-sinuso dalit  du phénomène physique se traduit donc ici par un ajout de vitesse de l’ordre du m/s sur la composante stationnaire W_0 , qui n’est dans ce cas notable que sur le premier millimètre au-dessus de la paroi. Lorsque l’écoulement moyen est plus rapide, on observe une uniformisation spatiale de la vorticité acoustique induite par l’excitation (voir figure 2.11b), et ce phénomène disparaît.

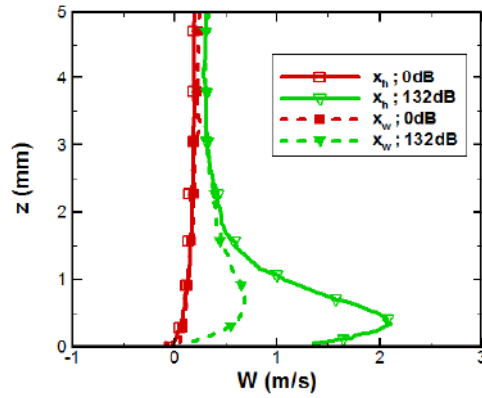
Ce qui se passe sur la composante longitudinale de la vitesse est plus complexe et je n’en ai pas encore d’explication complètement convaincante. La modification du champ de vitesse y est plus forte en amplitude, et se situe sur une distance à la paroi plus importante. Une représentation plus parlante est donnée sur la figure 2.13 où on a tracé le profil de vitesse selon les grandeurs adimensionnées de la convention couche limite : $U^+ = U_0/v^*$ et $y^+ = (zv^*)/\nu$ avec v^* la vitesse



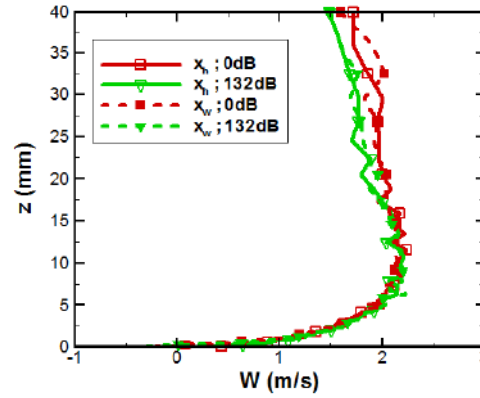
(a) U_0 fonction de la distance à la paroi pour $M = 0.05$



(b) U_0 fonction de la distance à la paroi pour $M = 0.3$



(c) W_0 fonction de la distance à la paroi pour $M = 0.05$



(d) W_0 fonction de la distance à la paroi pour $M = 0.3$

FIGURE 2.12 – Profils verticaux d'écoulement moyen au-dessus d'un trou (traits pleins) ou entre deux trous (traits pointillés) d'un liner SDOF, sans excitation acoustique (courbes rouges) et avec excitation acoustique à 130 dB (courbes vertes). Vitesse longitudinale (haut) et vitesse verticale (bas) pour des nombres de Mach débitants égaux à $M = 0.05$ (gauche) ou $M = 0.3$ (droit).

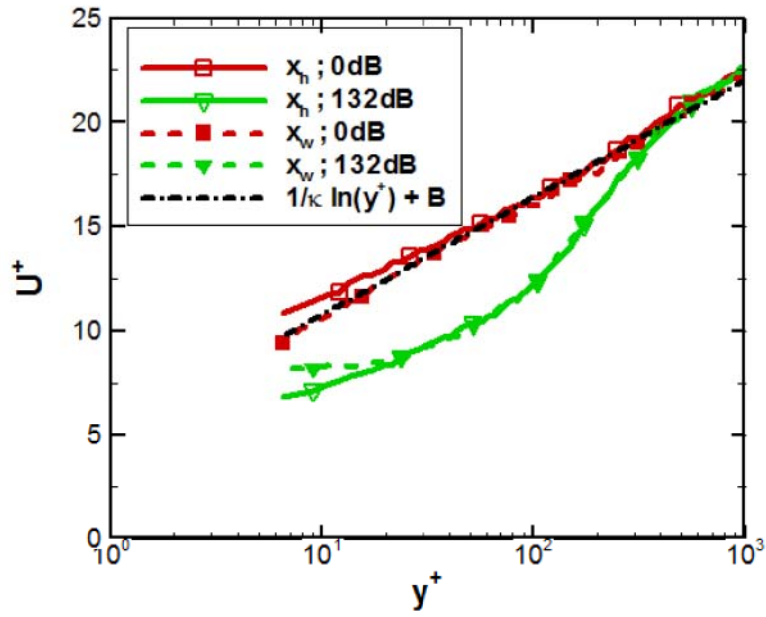


FIGURE 2.13 – Profils de vitesse longitudinal adimensionnés en variables de couche limite, pour une position au-dessus d'un trou (traits pleins) ou entre deux trous (traits pointillés) d'un liner SDOF, sans excitation acoustique (courbes rouges) et avec excitation acoustique à 130 dB (courbes vertes). La loi log est tracée en pointillés noir avec $\kappa = 0.41$, $B = 5.2$ et $v^* = 0.93$ m/s. Le nombre de Mach débitant de l'écoulement rasant est $M = 0.05$.

de frottement à la paroi, qui peut être évaluée soit par la mesure de perte de charge le long du conduit, soit par le tracé d'une loi log en proche paroi selon laquelle $U^+ = 1/\kappa \ln y^+ + B$ avec κ et B des constantes dont la valeur exacte reste sujet à discussion [13, 12]. Ici les deux méthodes conduisent à des valeurs très proches, autour de 0.9 m/s lorsque $M = 0.05$ et de 5 m/s lorsque $M = 0.3$. Par contre, on observe que pour $M = 0.05$ et en présence d'excitation acoustique, le profil de vitesse ne suit plus la loi logarithmique obtenue sans excitation ; les deltas de vitesse obtenus sont de l'ordre de plusieurs m/s, donc bien au-delà de ce qui est réalisé avec un phénomène du type *acoustic streaming* [38, 39, 28]. De plus, l'importance de la modification de l'écoulement moyen en proche paroi dépend des caractéristiques géométriques du liner, et donc est directement lié à sa réponse acoustique. Si l'on réussit un jour à effectuer des simulations numériques Navier-Stokes d'une configuration semblable, il serait intéressant de voir si ce phénomène est reproduit. Récemment, un calcul LES réalisé par Scalo *et al.* [34] et traitant le liner par une condition aux limites homogénéisée a peut-être capté un phénomène similaire : des échanges sur ce thème avec Julien Bodart de l'ISAE permettront sans doute d'en savoir plus dans le futur. Encore plus récemment, Zhang & Bodony [40] ont réalisé une simulation DNS reproduisant la complexité géométrique d'une seule cellule d'un liner SDOF, en présence d'un écoulement rasant laminaire ou turbulent de nombre de Mach proche de 0.6 et en faisant varier le niveau sonore de l'onde acoustique incidente jusqu'à des niveaux très élevés (160 dB). Ils ne montrent pas ce qui se passe sur le champ de vitesse moyenne mais ont calculé la traînée de frottement : celle-ci augmente significativement avec le niveau sonore, ce qui résulte vraisemblablement d'une distorsion de l'écoulement moyen à proximité de la paroi du fait de l'excitation acoustique. Pour les applications industrielles en nacelle, les nombres de Mach de l'écoulement sont suffisamment élevés par rapport aux niveaux sonores rencontrés pour que la question de l'impact du liner sur les performances aérodynamiques globales ne se pose sans doute pas ; par contre, c'est une problématique qui peut apparaître dans les systèmes de conditionnement d'air où l'écoulement est bien moins rapide alors que les niveaux sonores restent significatifs.

Pour finir sur les mesures de vitesse acoustique à proximité de la paroi des liners, elles ont été utilisées par Frank Simon et son doctorant Romain Pethieu, juste avant mon arrivée parmi eux, pour observer un phénomène à l'époque très mal compris : l'apparition au-dessus d'un certain type de liners de tourbillons cohérents de grande échelle spatiale, pour une gamme d'écoulement où le liner générerait du bruit au lieu d'en absorber. Ces tourbillons ont par la suite été mesurés par Marx *et al.* [11] et ont été reliés à la présence d'instabilités hydrodynamiques. On reviendra dans la suite du mémoire sur ces instabilités bien particulières.

Pour aller plus loin...

Tous les essais qui viennent d'être présentés apportent des éclairages précieux sur les phénomènes physiques en jeu dans le couplage acoustique/écoulement en présence de liners. Néanmoins, si on souhaite savoir comment ces liners vont se comporter dans un environnement autre que celui du banc B2A, c'est-à-dire ayant une géométrie et des sources sonores différentes, il faut pouvoir évaluer les grandeurs intrinsèques à leur réponse acoustique. Pour les matériaux à réaction localisée, il s'agit de leur impédance acoustique ; pour les matériaux à réaction non-localisée, comme les poreux, il s'agit des nombreux paramètres caractéristiques de la propagation vibroacoustique

des ondes au sein du matériau[1], ce qui complexifie d'autant plus le problème.

Dans toute la suite du mémoire, nous allons nous focaliser sur les matériaux à réaction localisée et sur leur impédance acoustique. En mettant en œuvre une approche initialement proposée au cours de la thèse de Maud Lavieille, une tentative de mesure directe de l'impédance acoustique d'un liner SDOF a été faite le cadre des projets COMATEC [14] et JTI-GRA [37]. Cela consiste à combiner une mesure LDV de vitesse acoustique normale à proximité de la paroi du liner, à une mesure de pression acoustique pariétale effectuée par sonde microphonique. On en déduit une impédance acoustique locale $Z = p'/v'_z$. Ici, la vitesse v'_z est moyennée sur une surface ayant la même porosité que l'échantillon, afin d'effectuer une forme d'homogénéisation représentative des propriétés de la paroi perforée. Cette technique nécessite cependant de percer un trou dans le matériau pour positionner la sonde microphonique, et est en cela aussi intrusive que la technique classique dite *in-situ*[4], tout en étant bien plus longue de mise en œuvre du fait de la grande quantité de mesures LDV à acquérir ! De plus, la validité de l'utilisation d'une mesure de vitesse en très proche paroi peut être questionnée, en particulier lorsque la réponse acoustique du liner est dans le domaine non-linéaire, du fait de l'écoulement rasant et/ou de forts niveaux sonores.

En parallèle de mes activités contractuelles, j'ai eu la chance de pouvoir creuser, essentiellement en interaction avec des stagiaires et des doctorants, les questions qui se faisaient jour suite à ces travaux expérimentaux :

- comment modéliser l'impédance des liners de type SDOF et quel sens donner à l'homogénéisation sous-jacente couramment effectuée ?
- comment identifier au mieux cette impédance homogénéisée à partir des jeux de mesures acquis au sein du banc B2A ?
- que représentent les instabilités hydrodynamiques apparaissant sur certains liners et comment mettre les outils d'analyse de stabilité rencontrés pendant ma thèse au service de l'analyse acoustique en conduit traité ?

La deuxième partie de ce mémoire va maintenant présenter chacune de ces trois problématiques, qui sont toujours en cours d'exploration et riches de perspectives.

Références

- [1] J. F Allard. *Propagation of Sound in Porous Media*. Elsevier Applied Sciences, 1993.
- [2] B. Betgen, M.A Galland, E. Piot et F. Simon. « Characterization of a Hybrid Active-Passive absorber by Means of Laser Doppler Velocimetry ». In : *Applied Acoustics* 73 (2012), p. 624–638.
- [3] Benjamin Betgen. « Comportement d'un absorbant actif en écoulement : étude théorique et expérimentale ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2010.
- [4] P. Dean. « An in-situ method of wall acoustic impedance measurement in flow ducts ». In : *J. Sound Vib.* 34.1 (1974), p. 97–130.

- [5] C. Heuwinkel, A. Fischer, I. Rohle, L. Enghardt, Friedrich Bake, E. Piot et F. Micheli. « Characterization of a Perforated Liner by Acoustic and Optical Measurements ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3765. 7–9 juin 2010.
- [6] M.S Howe. « On the theory of unsteady high Reynolds number flow through a circular aperture ». In : *Proc. R. Soc. Lond.* 366 (1979), p. 205–223.
- [7] H. B. E. Kurz et M. Kloker. « Receptivity of a swept-wing boundary layer to micron-sized discrete roughness elements ». In : *J. Fluid Mech.* 755 (2014), p. 62–82.
- [8] M. Lavieille, T. Abboud, A. Bennani et N. Balin. « Numerical simulations of perforate liners : Part I – Model description and impedance validation ». In : *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Berlin, Germany). AIAA-2013-2269. 27–29 mai 2013.
- [9] M. Lavieille, E. Piot et F. Micheli. « Numerical simulations of perforate liners : Part II – Local velocity fields validation ». In : *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Berlin, Germany). AIAA-2013-2270. 27–29 mai 2013.
- [10] Dr. Stéphane LIDOINE, Dr. Isabelle TERRASSE, Dr. Toufic ABOUD et Ahmed BEN-NANI. « Numerical prediction of SDOF-Perforated Plate Acoustic Treatment Impedance. Part 1 : Linear domain ». In : *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Rome, août 2007.
- [11] D. Marx, Y. Aurégan, H. Bailliet et J.-Ch. Valière. « PIV and LDV evidence of hydrodynamic instability over a liner in a duct with flow ». In : *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), p. 3798–3812. DOI : [10.1016/j.jsv.2010.03.025](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.03.025).
- [12] B. J. McKEON, J. LI, W. JIANG, J. F. MORRISON et A. J. SMITS. « Further observations on the mean velocity distribution in fully developed pipe flow ». In : *J. Fluid Mech.* 501 (2004), p. 135–147.
- [13] B. J. McKEON, M.V. Zagarola et A. J. SMITS. « A new friction factor relationship for fully developed pipe flow ». In : *J. Fluid Mech.* 538 (2005), p. 429–443.
- [14] B. Nennig, M. Ben Tahar, J-M. Ville, E. Piot, F. Simon et M. Taktak. « A Comparison Between Acoustic Liner Characterization Methods And Calculations ». In : *16th ICSV*. (Krakow, Poland). 5–9 juil. 2009.
- [15] H. Parisot-Dupuis, F. Simon, E. Piot et F. Micheli. « Non-intrusive planar velocity-based nearfield acoustic holography in moving fluid medium ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 133.6 (2013), p. 4087–4097.
- [16] E. Piot. *GARTEUR AG50 Deliverable 1.1c -Definition of a test plan for the B2A experiments*. Rapport Technique RT 1/17000 DMAE. ONERA, mai 2010.
- [17] E. Piot. *DTP MBM. Synthèse des travaux de la tâche 2.4.2 : étude des propriétés absorbantes des traitements acoustiques sous écoulement*. Rapport Technique RT 5/18749 DSN/DMAE. ONERA, déc. 2012.
- [18] E. Piot et G. Casalis. « Absolute stability mechanism of a swept cylinder laminar boundary layer with imposed spanwise periodic conditions ». In : *Phys. Fluids* 21.6 (2009).

- [19] E. Piot, T. Dartigalongue, F. Micheli et O. Léon. *Capteur de pression acoustique non-intrusif par diffusion Rayleigh*. Rapport Technique RF 1/21373 DMAE. ONERA, déc. 2013.
- [20] E. Piot, F. Micheli et J-F Breil. *Mesure de vitesse acoustique de part et d'autre d'une plaque multi-perforée, avec écoulement traversant. Essais pour l'ANR Acoustique et PAroi Multi-perforé*. Rapport Technique RF 2/13927 DMAE. ONERA, déc. 2011.
- [21] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. « LDA investigation of the acoustic field above a perforated liner with grazing and bias flow ». In : *Inter-Noise 2009*. (Ottawa, Canada). 23–26 sept. 2009.
- [22] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. « Optical Acoustic Pressure Measurements In A Large-Scale Test Facility with Mean Flow ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3752. 7–9 juin 2010.
- [23] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. *EFAPS2 Tranche Ferme - Synthèse des travaux du lot WP4.2 SANUMO2*. Rapport Technique RT 6/14992 DMAE/DAAP. ONERA, mar. 2011.
- [24] E. Piot, F. Micheli, F. Simon et J. F Breil. *Mesure de vitesse acoustique de part et d'autre d'une plaque multi-perforée, sans écoulement. Essais pour l'ANR Acoustique et PAroi Multi-perforée*. Rapport Technique RT 1/13927 DMAE. ONERA, juil. 2010.
- [25] E. Piot, J. Primus, D. Sebbane et F. Micheli. *EFAPS2 TC2 Synthèse des travaux du lot WP4.2.3.3 SANUMO2*. Rapport Technique RT 12/14992 DAAP/DMAE. ONERA, juil. 2013.
- [26] E. Piot, D. Sebbane, J-F Breil et F. Micheli. *EFAPS2 TC1 Synthèse des travaux du lot WP4.2.3.2 SANUMO2*. Rapport Technique RT 11/14992 DMAE/DAAP. ONERA, fév. 2012.
- [27] E. Piot, D. Sebbane et F. Micheli. *Test results and analysis for the B2A tests. GARTEUR AG50 Deliverable 1.2c and 1.3c*. Rapport Technique de Synthèse RTS 1/18423 DMAE. ONERA, sept. 2011.
- [28] Q. QI. « The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 94 (1993), p. 10901098.
- [29] A. Rausch, A. Fischer, N. Kings, F. Bake et I. Roehle. « Optical measurement of acoustic pressure amplitudes - at the sensitivity limits of Rayleigh scattering ». In : *Optics Letter* 37.13 (2012).
- [30] J.M. Roche. « Simulation numérique de l'absorption acoustique de matériaux résonants en présence d'écoulement ». Thèse de doct. Université du Maine, 2011.
- [31] J.M. Roche, F. Vuillot, L. Leylekian, G. Delattre, E. Piot et F. Simon. « Numerical and Experimental Study of Resonant Liners Aeroacoustic Absorption Under Grazing Flow ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3767. 7–9 juin 2010.
- [32] W.S Saric et H.L Reed. « Stability, transition, and control of three-dimensional boundary layers on swept wings ». In : *IUTAM Symposium on one hundred years of boundary layer research*. Springer, 2006, p. 177–188.

- [33] W.S Saric, H.L Reed et E.B White. « Stability and transition of three-dimensional boundary layers ». In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 35 (2003), p. 413–440.
- [34] C. Scalo, J. Bodart et S. K. Lele. « Compressible turbulent channel flow with impedance boundary conditions ». In : 27.3 (2015), p. 035107. DOI : <http://dx.doi.org/10.1063/1.4914099>.
- [35] F. Simon et E. Piot. « Procédé et dispositif d'estimation de la pression acoustique dans un fluide en mouvement et programme d'ordinateur ». Patent EP2488838, (France). 9 juil. 2014. URL : <https://www.google.fr/patents/EP2488838B1?cl=fr>.
- [36] F. Simon, E. Piot et F. Micheli. *Projet "COmportement acoustique de MATériaux sous ECoulement"*. Rapport Final RF 2/12135 DMAE. ONERA, déc. 2009.
- [37] F. Simon, E. Piot et L. Sentenac. *JTI GRA Test reporting and test results analysis of HLD acoustic liners experimental characterization : Part I*. Rapport Technique RT 1/16621 DMAE/DAAP. ONERA, déc. 2010.
- [38] Michael W. THOMPSON et Anthony A. ATCHLEY. « Simultaneous Measurement of Acoustic and Streaming Velocities in a Standing Wave Using Laser Doppler Anemometry ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 117.4 (2005), p. 1828–1838.
- [39] L.-C. Valdes et D. Santens. « Influence of permanent turbulent air flow on acoustic streaming ». In : *J. Sound Vib.* 230.1 (2000), p. 1–29.
- [40] Qi Zhang et Daniel J. Bodony. « Numerical investigation of a honeycomb liner grazed by laminar and turbulent boundary layers ». In : *J. Fluid Mech.* 792 (avr. 2016), p. 936–980.

Deuxième partie

Voies de recherche explorées

Cette partie présente les travaux menés sur les trois problématiques de recherche que j'ai approfondies ces dernières années, en s'appuyant sur les acquis discutés dans la partie précédente : la modélisation de l'impédance des liners, les techniques d'identification de cette impédance, et l'analyse modale dans les conduits traités acoustiquement. Ces études ont été principalement menées en encadrant des stagiaires de Master Recherche et en co-dirigeant des thèses, en collaboration avec des chercheurs plus expérimentés. Dans ce mémoire je ne présenterai que les lignes directrices de tous ces travaux et je renverrai aux différentes publications qui en sont issues pour plus de détails. Je présenterai aussi comment ces études m'ont conduit à proposer et coordonner un projet dans le cadre des financements européens CleanSky.

Chapitre 3

Modélisation de l'impédance acoustique d'un liner

Nous avons vu précédemment que l'impédance d'un liner classique, à réaction localisée, était définie par l'impédance de surface du matériau, c'est-à-dire par le rapport entre la pression et la vitesse normale acoustique à la paroi du liner. D'autre part, une partie des études expérimentales présentées en section 2.3 s'attachait à capter la complexité spatiale du champ de vitesse acoustique à proximité immédiate de la paroi du liner, au niveau des perforations de la plaque supérieure. La question qui se pose alors est de savoir comment relier ce champ acoustique en proche paroi, fortement inhomogène du fait de la structure géométrique du matériau, à la grandeur globale qu'est l'impédance de surface du liner. J'ai abordé ce questionnement lors d'une collaboration avec les mathématiciens appliqués de l'INSA (Abderrahmane Bendali, Sébastien Tordeux), lors du projet ANR APAM (2009-2011) qui portait sur la modélisation acoustique d'une plaque perforée en présence d'écoulement traversant, et durant lequel j'avais à mener une campagne expérimentale dédiée au sein du banc B2A. A la fin du projet, ces travaux ont été poursuivis sur des financements internes Onera, et au cours de la thèse de Vincent Popie, co-dirigée avec Sébastien Tordeux (alors à l'INRIA/Université de Pau) de 2012 à 2015.

3.1 Notions de champ proche et de champ lointain

La notion clef pour comprendre comment définir proprement l'impédance acoustique d'une surface est celle de champ proche et de champ lointain, et les techniques d'homogénéisation qui en découlent. Suffisamment loin de la surface, et nous verrons plus loin ce que représente ce "suffisamment", l'étude de la réponse acoustique d'une surface se ramène à un problème de diffraction d'ondes acoustiques planes. Nous nous plaçons ici dans un formalisme fréquentiel, c'est-à-dire que nous nous intéressons uniquement à des ondes harmoniques à la pulsation ω , leur dépendance temporelle étant de nouveau écrite suivant la convention $e^{j\omega t}$. Il faut faire attention au fait que selon les publications c'est cette convention ou bien l'opposée $e^{-i\omega t}$ qui est utilisée, ce qui a un impact sur le signe de la partie imaginaire de l'impédance par exemple. Nous restreignons notre étude au domaine de l'acoustique *linéaire*, pour lequel les formalismes temporels et harmoniques sont théoriquement équivalents, et donc toutes les équations écrites par la suite sont, sauf mention

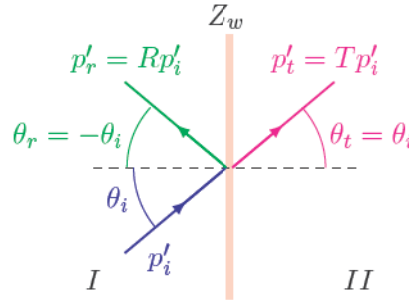
contraire, exprimées dans le domaine fréquentiel.

De manière classique, le problème de diffraction d'une onde acoustique à travers une paroi, en l'absence de tout écoulement porteur, se résume par la figure 3.1a : une onde incidente génère une onde réfléchie et une onde transmise. L'impédance de la paroi, vue ici comme une impédance de transmission, est définie comme :

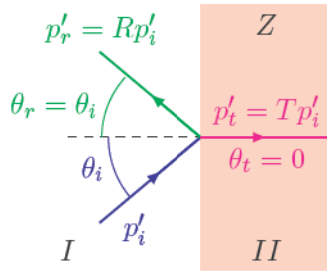
$$Z_w = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{p'^I - p'^{II}}{\mathbf{v}'^I \cdot \mathbf{n}} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{p'^I - p'^{II}}{\mathbf{v}'^{II} \cdot \mathbf{n}} \quad (3.1)$$

les variables acoustiques étant évaluées à la paroi. La conservation de l'intensité acoustique entre les deux milieux, la loi de Snell-Descartes et la définition de l'impédance conduisent à la relation suivante pour le coefficient de réflexion de la paroi :

$$R = \frac{Z_w \cos \theta_i}{Z_w \cos \theta_i + 2} \quad (3.2)$$



(a) Paroi d'impédance de transmission Z_w , située entre les milieux I et II



(b) Matériau à réaction localisée, d'impédance de surface Z

FIGURE 3.1 – Réflexion et transmission d'une onde acoustique plane entre deux milieux

Dans le cas d'un liner à réaction localisée, le deuxième milieu est tel que seule une propagation acoustique mono-dimensionnelle y est permise. C'est ce qui se passe au sein des cavités de nid d'abeille des liners de type SDOF ou DDOF, tant que la fréquence étudiée est en deçà de la fréquence de coupure du guide d'onde formé par la cavité. On se retrouve alors dans la

configuration représentée par le schéma 3.1b, qui met en jeu l'impédance de surface du liner :

$$Z = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{p^I}{v^I \cdot \mathbf{n}} \quad (3.3)$$

avec la pression et la vitesse acoustique évaluées à la paroi du liner. La relation entre cette impédance de surface et le coefficient de réflexion du liner est alors :

$$R = \frac{Z \cos \theta_i - 1}{Z \cos \theta_i + 1} \quad (3.4)$$

Les liners classiques étant constitués d'une paroi supérieure faite d'une plaque perforée, on relie classiquement l'impédance de transmission de la plaque Z_w à celle Z_h d'une perforation par la relation suivante :

$$Z_w = \frac{Z_h}{\sigma} \quad (3.5)$$

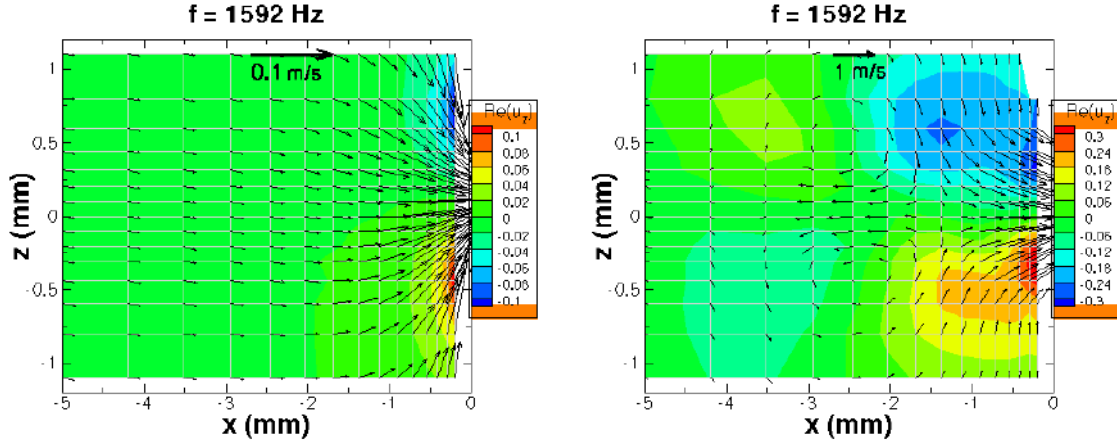
où σ est la porosité¹ de la plaque, c'est-à-dire le rapport entre la surface de l'ensemble des perforations et la surface de la plaque. Cette homogénéisation "heuristique" se justifie par une considération de conservation du débit acoustique à travers la plaque, conduisant à $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}|_{\text{plaque}} = \sigma \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}|_{\text{trou}}$. A noter que dans ce raisonnement, la forme géométrique du réseau de perforation n'est pas prise en compte.

Il est important d'insister sur le fait que dans tout ce raisonnement sur le problème de diffraction, on se place dans une approche *champ lointain* par rapport aux surfaces, pour pouvoir considérer que le mouvement est régi par les équations d'ondes de l'acoustique linéaire. En même temps, les définitions de l'impédance font intervenir des valeurs du champ acoustique *à la paroi*. Or, une mesure LDV de la vitesse acoustique à proximité des perforations d'un liner, et ce même sans écoulement porteur, comme cela a été fait dans une des phases du projet EFAPS2 et détaillé par exemple dans le papier de conférence [16], conduit à une structuration totalement inhomogène du champ acoustique, telle que montrée par la figure 3.2. Dès lors, quel sens donner aux valeurs en paroi apparaissant dans les définitions de l'impédance ? Nous allons voir dans les sections suivantes que le formalisme mathématique rigoureux de l'homogénéisation par développements asymptotiques raccordés (c'est-à-dire une approche multi-échelle) permet de répondre à cette question, tout du moins pour l'instant dans les configurations où il n'y a pas d'écoulement porteur en champ lointain. Cela va aussi nous permettre de relier l'impédance d'une plaque perforée (notion de type *champ lointain*) à la réponse acoustique au niveau de la perforation (notion de type *champ proche*), étape essentielle à l'obtention de modèles d'impédance basés sur les caractéristiques géométriques de la paroi.

3.2 Homogénéisation par approche asymptotique

Les travaux sur l'homogénéisation par développements asymptotiques raccordés ont été faits en collaboration avec Abderrahmane Bendali et Sébastien Tordeux, membres à l'époque du groupe de mathématiques appliquées de l'INSA Toulouse, et spécialistes des problèmes d'homogénéisation pour les ondes électromagnétiques. Ils travaillaient couramment avec M'Barek Fares

1. aussi appelée "taux de perforation"



(a) Niveau sonore de l'onde incidente égal à 110dB (b) Niveau sonore de l'onde incidente égal à 130dB

FIGURE 3.2 – Champ de vitesse acoustique (vecteurs), avec en couleur les niveaux de $\text{Re}(v'_z)$, pour une onde acoustique de différent niveau sonore se propageant à 1592Hz dans la direction x . La paroi du liner est placée en $x = 0$, et une perforation se trouve entre $z = -0.6$ et $z = 0.6$ mm.

au Cerfacs pour toutes les vérifications numériques, à l'aide du solveur par formulation intégrale CESC. L'application au problème de l'acoustique linéaire en présence d'une plaque perforée a conduit à la publication commune [2]. Je n'expliciterais ici que la démarche qui a été suivie, il faut se référer au papier pour tous les détails mathématiques.

L'approche suivie a consisté à étudier le problème de diffraction par une plaque présentant un réseau de perforations, problème ici supposé régi par l'équation de Helmholtz², à l'aide d'un développement asymptotique raccordé à deux échelles : δ , la dimension caractéristique d'une perforation et d , l'espacement caractéristique du réseau. On se limite ici aux plaques à faible porosité, de manière à pouvoir négliger les interactions entre les perforations. Par contre l'étude est faite de manière à pouvoir tenir compte de n'importe quel arrangement des perforations ainsi que de l'épaisseur de la plaque (sous condition qu'elle reste de l'ordre de grandeur de δ). Les travaux précurseurs de Leppington et Levine [17] se limitaient eux à une disposition rectangulaire des perforations dans une plaque infiniment mince. On a de plus montré que la contrainte classiquement admise $d \ll \lambda$ sur l'espacement entre les perforations par rapport à la longueur d'onde acoustique λ était trop restrictive, elle peut être relâchée en $d < \lambda/2$.

La mise en œuvre des développements asymptotiques fait apparaître au niveau du champ proche de la perforation la notion clef de *conductivité de Rayleigh*. Celle-ci est définie par :

$$K_R = \frac{j\omega\rho_0 Q}{P^{II} - P^I} \quad (3.6)$$

où Q est le flux acoustique volumique à travers la perforation $Q = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$, avec $\mathbf{n}$ défini de la zone I vers la zone II . Ici $\mathbf{v}$ est la vitesse locale au niveau du trou, et P^I et P^{II} sont les limites

2. on ne tient donc pas compte des phénomènes visqueux, non-linéaires ou liés à un écoulement porteur

à l'infini du champ de pression : à la fois la vitesse et la pression sont ici des grandeurs de *champ proche*.

Le raccord, via une région de champ intermédiaire, entre les développements asymptotiques en champ proche et champ lointain permet de relier le coefficient de réflexion de la plaque à la conductivité de Rayleigh d'une perforation, ce qui revient à construire une condition aux limites homogénéisée pour le problème de diffraction acoustique de la plaque. Celle-ci fait intervenir la compliance³ η de la plaque, définie comme :

$$\eta = \frac{-j\omega \cos \theta}{2c_0} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \quad (3.7)$$

On montre que l'approximation à l'ordre $O(\delta)$ de la compliance est :

$$\eta^{(1)} = \frac{K_R}{A} \quad (3.8)$$

en notant A l'aire d'une cellule unitaire du réseau de perforations. Cette expression est celle couramment retrouvée dans les papiers étudiant la compliance acoustique d'une plaque perforée, tels ceux largement cités de Hughes et Dowling [5, 10]. D'autre part, la relation (3.8) couplée à l'équation (3.2), permet de relier à l'ordre $O(\delta)$ la conductivité de Rayleigh, notion définie en champ proche, à l'impédance de transmission, notion définie en champ lointain :

$$Z_w = \frac{j\omega A}{c_0 K_R} \quad (3.9)$$

Les conditions de raccord conduisent ainsi à ce que les pressions P^I et P^{II} , limites à l'infini des pressions de champ proche, soient égales à la valeur à la paroi des pressions en champ lointain p^{II} et p^{III} , tandis que la valeur à la paroi de la vitesse acoustique champ lointain $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}$ est égale à Q/A . Tout cela permet finalement de justifier mathématiquement l'homogénéisation heuristique donnée par l'équation (3.5).

L'approche asymptotique permet aussi d'aller plus loin, en obtenant une expression à l'ordre $O(\delta^2)$ de la compliance, qui s'écrit sous la forme relativement simple :

$$\eta^{(2)} = \frac{K_R}{A} (1 - 4K_R \text{Re}(s_0)) \quad (3.10)$$

dès lors que les perforations sont axisymétriques ou bien que l'épaisseur de la plaque peut être négligée. Le coefficient $\text{Re}(s_0)$ introduit une correction qui dépend de la géométrie exacte du réseau, au lieu de faire une simple division par la surface de sa cellule unitaire. Les applications pratiques montrent néanmoins que cette correction est très faible : ainsi la figure 3.3 compare l'expression à l'ordre $O(\delta)$ et $O(\delta^2)$ du coefficient de réflexion d'une plaque standard : la différence entre les deux courbes est inférieure au pourcent. Cela justifie, pour la plupart des applications, de négliger l'influence de la forme du réseau.

3. terme anglais dont je n'ai pas trouvé de traduction française satisfaisante... Sachant qu'en mécanique des structures cette grandeur représente l'inverse d'une raideur, on pourrait par exemple proposer le terme de *souplesse* ou bien de *flexibilité*, apposé à l'adjectif *acoustique* ou *dynamique*.

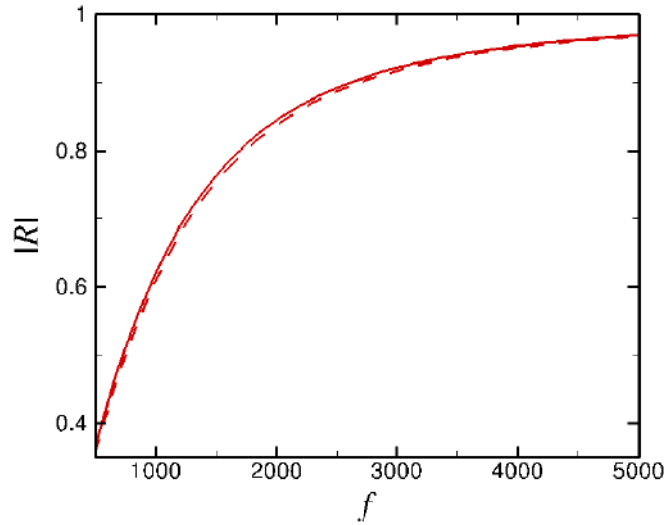


FIGURE 3.3 – Module du coefficient de réflexion d’une plaque perforée par des trous cylindriques agencés sur un réseau carré. Solutions à l’ordre 1 en trait plein, à l’ordre 2 en trait pointillé.

Il est important de rappeler que la validité de l’homogénéisation qui vient d’être présentée n’a été démontrée dans ces travaux que dans le cadre des équations de l’acoustique linéaire, pour des plaques à faible porosité. Dans les applications aéronautiques des phénomènes supplémentaires, non pris en compte par l’équation de Helmholtz, entrent en jeu :

- des effets visqueux au niveau des parois ;
- des effets non-linéaires liés à des niveaux sonores élevés ;
- la présence d’un écoulement moyen, soit à travers les perforations, soit rasant à la paroi supérieure du liner, soit une combinaison des deux.

De plus, lorsque la porosité de la plaque est élevée ou bien en présence d’écoulement rasant, des interactions entre les perforations peuvent apparaître. Leur influence a été partiellement étudiée dans les travaux de Fok [7].

L’importance relative de chacun de ces phénomènes dépend des configurations étudiées. Leur prise en compte complexifie notablement le problème mathématique d’homogénéisation associé : à ma connaissance, il n’existe une preuve de la démarche d’homogénéisation que dans le cas où seuls les effets visqueux sont considérés. Cela a été effectué par Sanchez *et al.* [9], en travaillant, dans les régions de champ proche, avec les équations de Stokes linéarisées instationnaires. La reprise de ces travaux dans le cadre de la thèse de Vincent Popie a permis de prouver que la relation (3.9) entre la grandeur de champ lointain qu’est l’impédance de transmission et la grandeur de champ proche qu’est la conductivité de Rayleigh était aussi valable dans le contexte de l’acoustique linéaire incluant les effets visqueux sur les parois. Intuitivement, je dirais qu’il doit être envisageable mathématiquement d’étendre ce type de relation aux configurations avec niveau sonore élevé ou bien avec écoulement traversant. En effet dans ces cas on réussit toujours,

en s'éloignant suffisamment de la plaque, à se retrouver dans une zone de champ lointain régie par les équations de Helmholtz ; de plus, au niveau de la plaque les phénomènes complexes en jeu se limitent à une zone restreinte autour des perforations, tout du moins tant que la porosité est assez faible. Dès lors qu'un écoulement rasant entre en jeu, la notion d'homogénéisation devient bien plus sujette à caution, et on entre dans le domaine controversé et très vivant actuellement des conditions d'impédance en écoulement (on peut citer, comme exemple de travaux emblématiques, les articles suivants : [13, 3, 1]).

3.3 Modélisation de la conductivité de Rayleigh des perforations

L'approche par homogénéisation multi-échelle a permis de comprendre que la grandeur la plus appropriée pour étudier la réponse acoustique à l'échelle d'une perforation était la conductivité de Rayleigh. On peut ensuite en dériver l'impédance de la plaque perforée par la relation (3.9). Lors de la collaboration avec le groupe de mathématiques appliquées de l'INSA, nous nous sommes tout d'abord limités aux cas d'acoustique linéaire pure, régis par l'équation de Helmholtz. Les analyses mathématiques ont été effectuées durant le post-doctorat de Sophie Laurens, dirigé par A. Bendali et S. Tordeux, et publiés dans une revue spécialisée du domaine [15]. Par la suite, j'ai travaillé avec eux à "vulgariser" ces résultats pour la communauté de la mécanique des fluides, de manière à mettre en avant ce qui dans ces travaux permettait de mieux comprendre ce qui était utilisé couramment dans les modèles d'impédance, et de traiter des configurations géométriques des perforations plus complexes. Ceci a conduit à la publication [14], dont on trouvera une copie dans l'annexe C et dont je vais ici résumer et illustrer les résultats.

Pour calculer la conductivité de Rayleigh d'une perforation, on va chercher des solutions au problème régissant le mouvement en champ proche. L'analyse asymptotique effectuée en [2] montre qu'on se ramène, sous une forme adimensionnée, à :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 p &= 0 && \text{dans } U \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= 0 && \text{sur les parois} \\ p^\pm &= \lim_{x_3 \rightarrow \pm\infty} p = \pm 1/2 && \text{sur } U_\pm \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

où le domaine étudié est représenté sur la figure 3.4.

Avec ces notations, la conductivité de Rayleigh s'écrit, là encore sous forme adimensionnée :

$$K_R = \int_{D_+} \frac{\partial p}{\partial x_3} d\mathbf{x}'. \quad (3.12)$$

On peut alors calculer cette conductivité de Rayleigh par une approche variationnelle appliquée au problème de Laplace (3.11). Les principes de Dirichlet et de Kelvin montrent que K_R

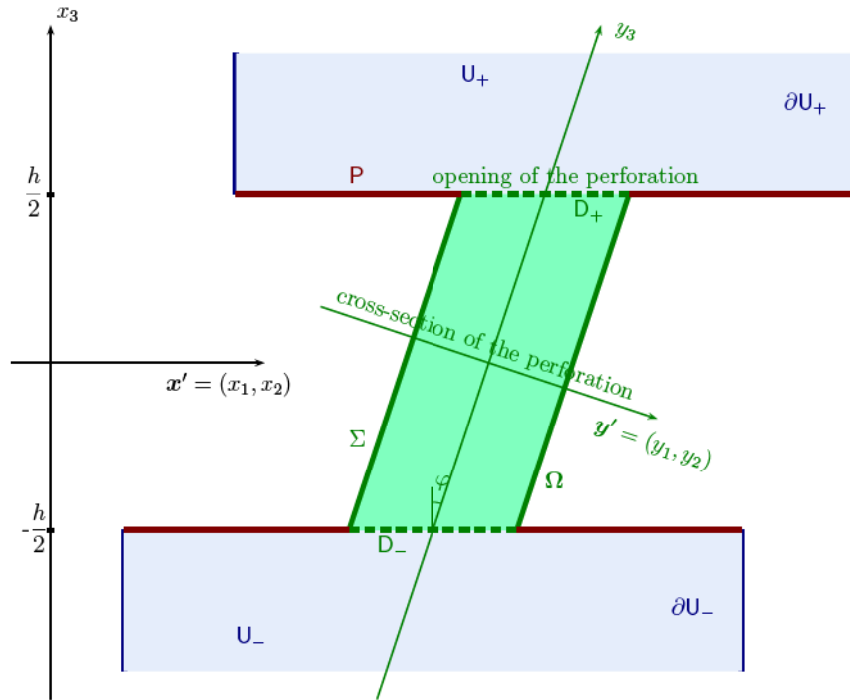


FIGURE 3.4 – Schéma d’une cellule du réseau. La perforation est en vert, la plaque en rouge et les frontières fictives en bleu. U^+ et U^- ont la même surface que $P \cup D^+$ or $P \cup D^-$, notée A .

est la solution des problèmes de minimisation et de maximisation suivants :

$$\left. \begin{array}{ll} \textbf{Principe de Dirichlet :} \\ K_R = \min_{\psi \in H_{1/2}} J_1(\psi) & \text{avec } J_1(\psi) = \int_U |\nabla \psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ \textbf{Principe de Kelvin :} \\ K_R = \max_{\mathbf{q} \in W} J_2(\mathbf{q}) & \text{avec } J_2(\mathbf{q}) = 2 \int_{D^+} q_3(\mathbf{x}) d\mathbf{x}' - \int_U |\mathbf{q}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

$H_{1/2}(U)$ est l'espace des fonctions ψ telles que $\nabla \psi$ est de carré intégrable dans U avec $\lim_{x_3 \rightarrow \pm\infty} \psi = \pm 1/2$, tandis que $W(U)$ est l'espace des fonctions vectorielles de carré intégrable $\mathbf{q}$ telles que $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ dans U et $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur la frontière de U .

Ceci montre que pour calculer la conductivité de Rayleigh d'une perforation de géométrie arbitraire, "il suffit" de trouver la fonction ψ ou $\mathbf{q}$ qui minimise, respectivement maximise, la fonctionnelle J_1 ou J_2 . En pratique on détermine ainsi une borne inférieure et supérieure à la conductivité de Rayleigh. C'est ce qui est fait dans les papiers [15] et [14] pour des perforations de diverses géométries. En particulier, on a ainsi trouvé une expression analytique des bornes de K_R dans le cadre d'une perforation à section elliptique (de petit axe a et de grand axe b), inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe perpendiculaire à la plaque, cette dernière étant d'épaisseur h (voir figure 3.4).

$$\frac{\pi ab}{\frac{h}{\cos^2 \varphi} + \frac{16b}{3\pi} \frac{K(\varepsilon)}{K(0)}} \leq K_R \leq \frac{\pi ab}{\frac{\pi b}{2} \frac{K(\varepsilon)}{K(0)} + \frac{h}{\cos^2 \varphi} \left/ \left(1 + \frac{16a^2}{3\pi b h} \frac{D(0)}{D(\varepsilon)} \sin^2 \varphi \right) \right.} \quad (3.14)$$

avec $K(\varepsilon)$ et $D(\varepsilon)$ des intégrales elliptiques dont l'expression est donnée dans l'article.

Dans le cas "dégénéré" où la perforation est cylindrique de rayon r et perpendiculaire à la plaque, on trouve :

$$\frac{\pi r^2}{h + 16r/3\pi} \leq K_R \leq \frac{\pi r^2}{h + \pi r/2}, \quad (3.15)$$

L'impédance de la plaque associée s'écrit alors, grâce à l'équation (3.9) :

$$\frac{j\omega}{\sigma c_0} \left(h + \frac{\pi r}{2} \right) \leq Z_w \leq \frac{j\omega}{\sigma c_0} \left(h + \frac{16r}{3\pi} \right) \quad (3.16)$$

en notant $\sigma = \pi r^2/A$ la porosité de la plaque. Cette expression fait apparaître que la conductivité de Rayleigh calculée dans ce cadre d'acoustique linéaire contient ce qui est lié à la réactance apportée par l'épaisseur h de la plaque, ainsi que ce qui est appelé couramment dans la littérature acoustique *corrections de col* sur l'impédance. Cela explique aussi pourquoi certains auteurs, tels Ingard [11], utilisent des corrections en $16r/3\pi$, tandis que d'autres comme Howe [8] font apparaître un terme en $\pi r/2$: leur raisonnement se base soit sur la borne inférieure, soit sur la borne supérieure de la conductivité de Rayleigh.

Ainsi, l'expression mathématique (3.14) permet de définir proprement les corrections de col adaptées à des perforations dont la géométrie est plus complexe que le simple cylindre droit, ce qui est le cas dans les applications réalistes. En particulier, dans le cas des parois de chambre de combustion, on utilise des perforations inclinées pour faire du film cooling en faisant traverser

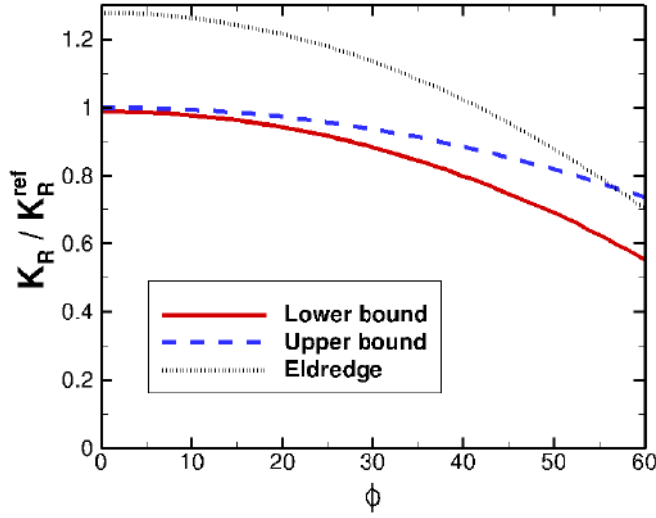


FIGURE 3.5 – Bornes pour la conductivité de Rayleigh d’une perforation inclinée, adimensionnée par la solution pour la perforation droite de même section transverse. L’angle d’inclinaison φ est en degrés. On trace en pointillés noirs l’expression empirique de Eldredge *et al.* .

un écoulement froid à travers la plaque : l’angle d’inclinaison est choisi de manière à optimiser le refroidissement de paroi, ce qui conduit à une valeur proche de 60° . Dans la littérature, pour traiter ces géométries, les auteurs utilisent une modification empirique du terme d’épaisseur : ainsi Eldredge *et al.* [6] proposent de considérer une épaisseur équivalente $\tilde{h} = 0.75h / \cos \varphi$, évaluée à partir de résultats de simulations numériques effectuées pour une géométrie où $\varphi = 60^\circ$. On a tracé sur la figure 3.5 la conductivité de Rayleigh associée à cette expression empirique, ainsi que les bornes données en (3.14), et ce sous une forme adimensionnée par la solution exacte à $\varphi = 0^\circ$. On voit que l’expression empirique correspond à peu près à la moyenne entre les bornes supérieures et inférieures lorsque l’inclinaison vaut 60° , mais qu’elle est par contre très fautive pour des angles différents, ce qui démontre l’intérêt de l’expression donnée par l’approche mathématique.

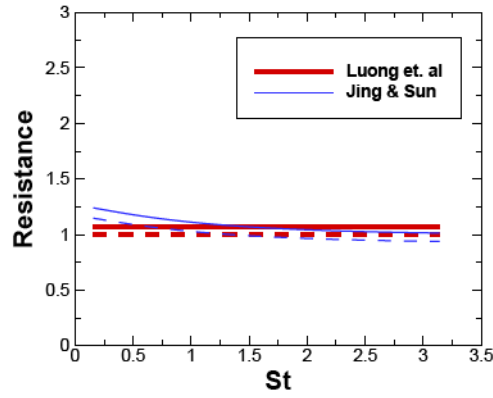
Laurens *et al.* [15] ont aussi donné une expression pour une perforation en tronc de cône, géométrie représentative de ce qui est obtenu lors d’un perçage laser. En comparant ces modélisations analytiques à des résultats obtenus par simulation numérique, ils ont de plus montré qu’une très bonne approximation de la conductivité de Rayleigh effectivement réalisée était donnée par la moyenne entre les bornes inférieures et supérieures. Il faut néanmoins garder en tête que pour la plupart des applications pratiques en aéroacoustique les deux valeurs des bornes restent très similaires, et que la correction de col représentée par cette approche purement "acoustique" est faible par rapport aux corrections apportées par les phénomènes visqueux ou aéroacoustiques. Par contre, l’identification claire de ces deux bornes permet de mieux comprendre ce qui est fait dans la multitude de modèles semi-empiriques disponibles dans la littérature, où les expressions rencontrées utilisent l’une ou l’autre des expression selon la communauté scientifique (la borne

supérieure pour les applications "liners", la borne inférieure pour les applications "parois perforées des chambres de combustion"). De plus, la conductivité de Rayleigh est à la base de tous les modèles d'impédance avec écoulement traversant, et une évaluation précise de sa valeur a alors son importance.

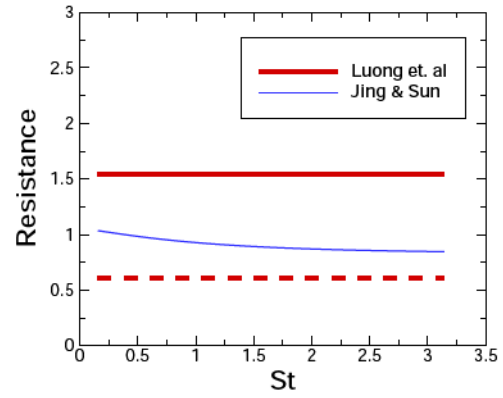
En effet, en présence d'écoulement traversant, Howe a proposé une conductivité de Rayleigh équivalente, obtenue par multiplication de la conductivité de Rayleigh d'une perforation circulaire infiniment mince par une fonction complexe dépendant de l'écoulement moyen [8], ou de manière équivalente du nombre de Strouhal basé sur cette vitesse et le rayon de la perforation. La conductivité de Rayleigh n'est donc plus un nombre réel, ce qui permet notamment de traduire les phénomènes dissipatifs ayant lieu au niveau de la frontière du jet, du fait de la création puis dissipation de tourbillons corrélés avec l'excitation acoustique. Ces dernières années, deux adaptations de ce modèle ont été proposées pour traiter le cas des plaques épaisses [19, 12], reposant toutes les deux sur l'expression de la conductivité de Rayleigh d'une perforation circulaire infiniment mince. Grâce aux résultats présentés précédemment, on peut étendre ce type de modélisation aux perforations plus complexes, telles les perforations inclinées à ouverture elliptique, en utilisant alors les expressions analytiques (3.14). A titre d'illustration, on présente sur la figure 3.6 les résultats obtenus pour l'impédance d'une plaque utilisée dans la littérature (plaque de 1% de porosité, 1 mm d'épaisseur, et perforations de 0.5 mm de rayon, voir [28]). Il faut noter que contrairement à ce qui est fait classiquement dans les modèles [19, 12], où la borne supérieure de la conductivité de Rayleigh est systématiquement employée (conduisant à la borne inférieure de l'impédance équivalente), on trace ici les résultats associés à chaque borne. Telle qu'est définie la fonction de Jing & Sun, on ne peut pas l'adapter pour la borne inférieure de l'ellipse inclinée, ce qui pousse à penser que la fonction de Luong *et al.* est mieux posée. Ceci n'est pas discuté dans la littérature car on voit que pour des perforations non-inclinées, les deux modélisations conduisent à des résultats très proches, pour lesquelles les bornes inférieures et supérieures sont quasi superposées. La figure 3.6 permet par contre de faire apparaître une divergence des deux bornes dès lors que la perforation est inclinée (à épaisseur de plaque gardée constante). S'il on se base sur ce qui a été obtenu sans écoulement par Laurens *et al.* et qu'on considère que la "vraie" valeur de la conductivité de Rayleigh est donnée par la moyenne entre les bornes inférieures et supérieures, on peut donc dériver aussi une telle moyenne pour l'impédance. La figure 3.7 montre les résultats obtenus (avec le modèle de Luong *et al.* uniquement); l'effet de l'inclinaison des perforations est faible mais peut être non-négligeable, en particulier sur la réactance aux plus hauts nombres de Strouhal (ce qui aura donc un impact la fréquence de résonance d'un système de résonateur de Helmholtz utilisant une telle plaque couplée à une cavité).

Dans le cadre de la thèse de Vincent Popie, ce type d'approche a aussi été appliqué aux configurations sans écoulement mais tenant compte des effets visqueux. Le but est là encore de calculer les corrections de col de l'impédance liées aux phénomènes visqueux. Pour cela, on utilise une relation établie par Vincent montrant que la résistance homogénéisée d'une plaque perforée due aux effets visqueux est liée à la puissance des efforts visqueux en champ proche des perforations. Dans le cas d'une perforation cylindrique, la résistance induite par l'intérieur de la perforation s'exprime, dans une approximation aux grands nombres de Stokes, comme :

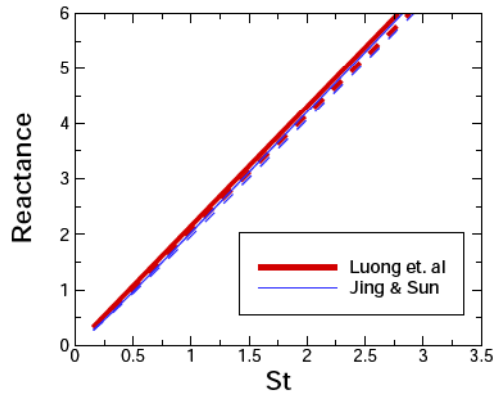
$$R_{int} = \frac{\sqrt{2\omega\rho\mu}h}{\sigma r} \quad (3.17)$$



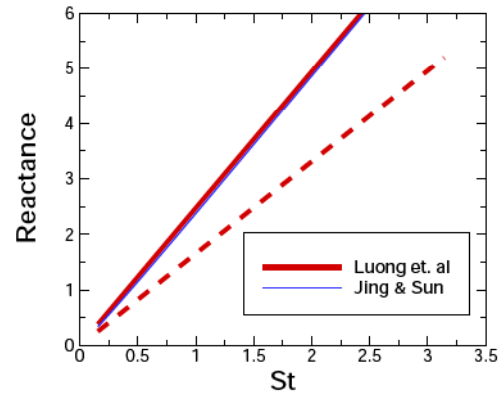
(a) Cylindre droit



(b) Ellipse inclinée



(c) Cylindre droit



(d) Ellipse inclinée

FIGURE 3.6 – Bornes de l'impédance équivalente de la plaque obtenues avec les expressions de Luong *et al.* [19] (lignes épaisses rouges) ou de Jing & Sun [12] (lignes fines bleues), obtenues soit pour une perforation cylindrique droite, soit pour une perforation inclinée à 45° à ouverture elliptique.

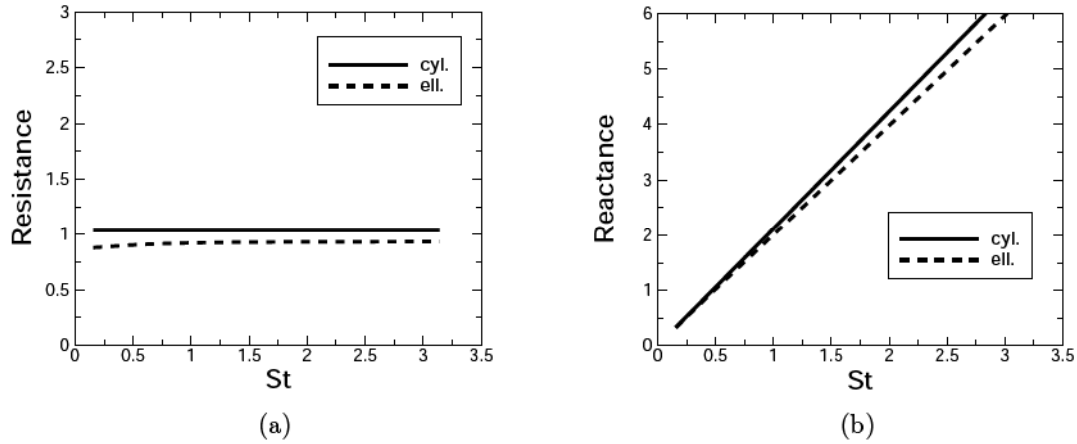


FIGURE 3.7 – Comparaison de l'impédance équivalente obtenue pour une plaque avec des perforations cylindriques droites (lignes pleines) ou inclinées à ouverture elliptique (lignes pointillées).

L'application des principes de Kevin et de Dirichlet pour calculer les corrections de col visqueuses conduit dans ce cas à une borne inférieure égale à $(1 - 4/\pi^2)r$ et une borne supérieure infinie, ce qui n'est pas très précis... Par contre, des simulations numériques avec le code d'équations intégrales du Cerfacs (CESC) ont été menées de manière à pouvoir estimer plus précisément la puissance des efforts visqueux. Un exemple de résultat obtenu est donné sur la figure 3.8, montrant que la correction de col visqueuse dépend de l'épaisseur de la plaque.

Cette méthodologie pourrait vraisemblablement être améliorée dans le futur pour mieux modéliser les effets de coin au niveau des perforations, et pour estimer la correction de col visqueuse pour des perforations de géométrie arbitraire. Il est important de remarquer qu'avec cette méthode on est uniquement capable de calculer une correction sur la résistance. Néanmoins, la condition nécessaire de réalité sur l'impédance dans le domaine temporel [26] impose à l'impédance en fréquentiel d'avoir une forme hermitienne : $Z^*(\omega) = Z(-\omega)$. Pour pouvoir l'assurer, on s'attend donc à avoir la même expression de correction de col sur la réactance que celle qui a été trouvée sur la résistance, ce qui revient à faire apparaître des termes visqueux dans l'expression fréquentielle de l'impédance sous la forme $\sqrt{j\omega}$. D'autre part, il faut mentionner que ce qui a été étudié dans la thèse de Vincent Popie porte uniquement sur les phénomènes de dissipation visqueuse, mais pourrait être étendu de manière similaire aux phénomènes de dissipation visco-thermiques.

3.4 Passage d'une modélisation fréquentielle à une modélisation temporelle de l'impédance

Dès lors qu'on connaît une modélisation de l'impédance dans le domaine fréquentiel, se pose la problématique de son utilisation dans des simulations numériques (CAA ou CFD), qui sont elles dans le domaine temporel. Actuellement, les conditions aux limites d'impédance en temporel

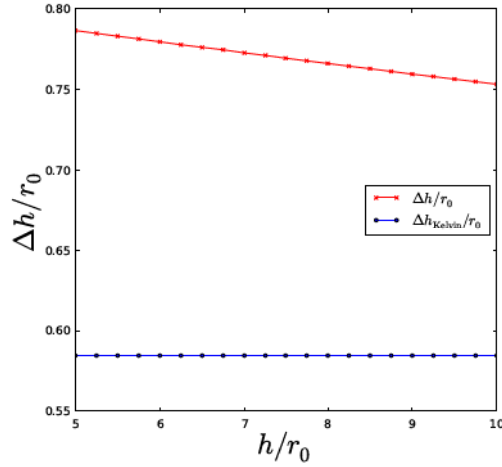


FIGURE 3.8 – Évolution de la correction de col visqueuse sur la résistance en fonction de l'épaisseur de la plaque

(Time Domain Impedance Boundary Condition, TDIBC) utilisées dans les codes d'aéroacoustique reposent sur la transposition en temporel de lois d'impédance $Z(\omega)$ dont la formulation s'exprime comme une somme de fractions rationnelles de la pulsation ω (modèle utilisé par Öyzörük [24], modèle dit « Tam and Auriault's » [29] ou récemment le modèle proposé par Li, Li & Tam [18] et appelé « improved multipole broadband impedance model »), ou bien repose sur le modèle EHR (Extended Helmholtz Resonator) proposé par Rienstra [26] et qui s'écrit :

$$Z(\omega) = R + j\omega m - j \cotan\left(\frac{1}{2}\omega T - j\frac{\epsilon}{2}\right) \quad (3.18)$$

Cependant, une limitation de ces approches est qu'elles nécessitent de choisir a priori les valeurs d'un grand nombre de paramètres (tels que les coefficients des polynômes des fractions rationnelles, plus ou moins nombreux selon les modèles, ou bien les paramètres du modèle EHR). Ceci est réalisé en approximant la réponse en fréquence de l'impédance, généralement mesurée expérimentalement pour le matériau considéré, ce qui peut être fait par différentes techniques, telle l'identification d'impédance qui sera présentée au chapitre 4. Or, les données expérimentales ne sont acquises que sur une bande de fréquence limitée, ce qui rend la détermination des paramètres des TDIBC délicate et parfois peu robuste. D'autre part, l'impédance acoustique d'un matériau dépend des conditions environnementales, telles que la valeur de l'écoulement et le niveau sonore : un balayage de toutes ces conditions implique donc l'acquisition et le post-traitement d'une vaste banque de données expérimentales, ce qui n'est disponible que pour un nombre restreint d'échantillons de liner. L'approche utilisée actuellement pour les TDIBC empêche donc la réalisation de simulations numériques avec des matériaux qui n'auraient pas été préalablement testés expérimentalement, et restreint donc fortement le champ d'applications possibles. Une alternative consisterait à baser les simulations numériques en temporel sur des modèles d'impédance de liners traduisant la physique des phénomènes rencontrés. C'est ce qui est fait classiquement dans

les simulations en domaine fréquentiel, ou l'impédance du liner est estimée à partir de modèles tels que ceux présentés par Cécile Malmay dans sa thèse [20]. Tous ces modèles se décomposent en une partie liée à la cavité, et une partie liée à la plaque perforée, qui peut s'écrire sous la forme suivante⁴ :

$$Z(\omega) = a_0 + a_{\frac{1}{2}}\sqrt{j\omega} + a_1j\omega \quad (3.19)$$

sachant que les paramètres réels a_k sont reliés explicitement aux paramètres géométriques du liner (caractéristiques des plaques perforées, résistance à l'écoulement des tissus, viscosité, niveau sonore, vitesse de frottement local de l'écoulement etc...). Comme expliqué dans la section précédente, le terme en $\sqrt{j\omega}$ traduit la dissipation visco-thermique au sein du liner. C'est la présence de ce terme qui a empêché jusqu'à présent l'implantation de ces modèles dans les codes CAA. Dans le bon cadre fonctionnel, il peut s'interpréter comme une « dérivée fractionnaire » dans le domaine temporel. La simulation temporelle de cet opérateur fractionnaire peut avantageusement se faire via sa représentation diffusive. Denis Matignon, enseignant-chercheur à l'ISAE-SUPAERO, est un spécialiste de ces questions. J'ai donc initié une collaboration avec lui sur ce thème dans la cadre du stage de Florian Monteghetti, collaboration qui s'est poursuivie par une thèse avec les mêmes personnes.

Notre objectif est de développer une TDIBC basée sur les opérateurs diffusifs, de manière à pouvoir reproduire la réponse acoustique des liners à partir de modèles physiques basés sur les caractéristiques géométriques des liners et les conditions environnementales. La phase d'identification expérimentale de la courbe en fréquence de l'impédance acoustique n'a alors besoin d'être utilisée que pour valider le modèle physique en question. Un changement d'un paramètre géométrique du liner, ou bien de la valeur de vitesse d'écoulement ou du niveau sonore auquel il est soumis, n'implique plus alors de devoir refaire toute la phase d'identification des paramètres de la TDIBC à partir de données expérimentales. L'autre avantage de l'approche proposée est que l'utilisation d'un modèle physique permet de reproduire a priori bien plus correctement la réponse acoustique dans une plage de fréquence autre que celle qui a été testée expérimentalement, notamment grâce à l'inclusion des effets de diffusion visco-thermiques.

La mise en place d'une TDIBC basée sur une modélisation physique, et donc mettant en œuvre des opérateurs diffusifs, revient au final à approximer la composante en $\sqrt{j\omega}$ du modèle d'impédance par une somme de termes du premier ordre du type :

$$\sum_k \frac{\mu_k}{j\omega + \xi_k} \quad (3.20)$$

Cette mise en œuvre d'une somme de premiers ordres est exactement ce qui est fait dans le « Improved Multipole Broadband Impedance Model », aussi appelé « modèle multipôles ». Mais le fait d'avoir compris que cela sert à reproduire la partie diffusive de la loi d'impédance permet de choisir de manière optimale les poids μ_k et les pôles ξ_k , et de le faire a priori, quel que soit le liner considéré, au contraire de ce qui doit être fait dans la mise en œuvre du modèle multipôles. La seule connaissance requise est celle de la bande de fréquences sur laquelle on veut approcher la fonction. De plus, on peut ainsi ramener la condition aux limites d'impédance en la résolution

4. tout du moins dans une approximation aux grands nombres de Stokes, sinon le terme en $\sqrt{j\omega}$ est remplacé par des fonctions de Bessel dépendant de $\sqrt{j\omega}$

d'équations différentielles ordinaires auxiliaires, à la manière de ce qui a été présenté récemment par Dragna [4]. Ce fonctionnement « off-line » et à base d'EDO du premier ordre est un atout majeur pour assurer l'efficacité numérique de l'implantation de la TDIBC, sans pénaliser le temps de calcul, au contraire de ce qui arrive avec les implantations des TDIBC plus classiques. On contourne de plus le désavantage en temps de calcul lié à l'utilisation des dérivées fractionnaires. Le traitement de l'impédance liée à la cavité peut lui aussi être fait dans un formalisme similaire, en tenant compte à la fois des pertes dans la cavité via un opérateur diffusif et des phénomènes oscillatoires retardés liés à la propagation aller-retour des ondes au sein de la cavité. Une autre alternative consiste à utiliser un modèle de type EHR intelligemment ajusté, sa mise en œuvre numérique pouvant être réalisée comme proposé avec Lucas Pascal [25], c'est-à-dire en résolvant au sein de la cavité les équations de la propagation acoustique monodimensionnelle avec pertes.

La perspective immédiate de ce travail est la présentation de l'approche diffusive pour traiter les termes en $\sqrt{j\omega}$ et le terme de cavité dans une communication au Congrès Français d'Acoustique [22], ainsi que dans un article récemment accepté au JASA [21] qui explicite en détail les formalismes utilisés pour une large gamme de matériaux à réaction localisée rencontrés dans les applications pratiques. On y montre que, contrairement à ce qui a été avancé par Rienstra [26], les modèles basés sur la physique ne violent pas les conditions de causalité, et on explique comment élaborer la TDIBC associée à chaque famille de matériaux. Il est important de mentionner que le fait de savoir traiter correctement les termes diffusifs permet également de traiter les lois d'impédance propres aux matériaux poreux, dont le comportement acoustique est largement gouverné par les phénomènes visco-thermiques. Néanmoins, on ne pourra facilement considérer ce type de matériaux que s'ils sont fabriqués de telle manière que la propagation vibro-acoustique interne se limite à une seule direction, afin de pouvoir garder le formalisme de condition d'impédance homogénéisée. La suite directe de ces travaux consistera à réaliser l'implantation de l'approche proposée dans un « grand » code de l'ONERA, que ce soit un code CAA comme `sabrinA.v0` ou CFD comme `elsA`. Dans ce dernier cas, il faut bien garder en tête que l'application d'une condition aux limites d'impédance sous la forme usuelle en CAA n'a pas de justification prouvée, car les fluctuations de pression et de vitesse ne se limitent pas à des grandeurs acoustiques. C'est ce qui est réalisé néanmoins dans la littérature, dans les rares codes CFD où cette fonctionnalité est présente [23, 27]. La deuxième piste à explorer dans la suite de ces travaux, et qui sera étudiée dans la thèse de Florian, sera la manière de prendre en compte la non-linéarité induite par les forts niveaux sonores.

Références

- [1] Y. Aurégan, R. Starobinski et V. Pagneux. « Influence of Grazing Flow and Dissipation Effects on the Acoustic Boundary Conditions at a Lined Wall ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 109.1 (2001), p. 59–64.
- [2] A. Bendali, MB. Fares, E. Piot et S. Tordeux. « Mathematical justification of the Rayleigh conductivity model for perforated plates in acoustics ». In : *SIAM Journal of Applied Mathematics* 73.1 (2013), p. 438–459.

- [3] E.J. Brambley. « Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings ». In : *J. Sound Vib.* 322 (2009), p. 1026–1037. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.11.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.021).
- [4] P. Blanc-Benon D. Dagna P. Pineau. « A generalized recursive convolution method for time-domain propagation in porous media ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 138.2 (2015), p. 1030–1042.
- [5] A. P Dowling et I. J Hughes. « Sound absorption by a screen with a regular array of slits ». In : *J. Sound Vib.* 156.3 (1992), p. 387–405.
- [6] J. D. Eldredge, D. J. Bodony et M. Schoeybi. « Numerical Investigation of the Acoustic Behavior of a Multi-perforated Liner ». In : *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA paper 2007-3683*. 2007.
- [7] V. A Fok. « Alternatively, see S. N. Rschevkin 1963 A Course of Lectures on the Theory of Sound. London : Pergamon Press. » In : *Doklady Akademii nauk SSSR* 31 (1941).
- [8] M.S Howe. « On the theory of unsteady high Reynolds number flow through a circular aperture ». In : *Proc. R. Soc. Lond.* 366 (1979), p. 205–223.
- [9] J. Sanchez Hubert et E. Sanchez Palencia. « Acoustic fluid flow through holes and permeability of perforated walls ». In : *J. Math. Anal. Appl.* 87 (1982), p. 427–453.
- [10] I.J Hughes et A.P Dowling. « The absorption of sound by perforated linings ». In : *J. Fluid Mech.* 218 (1990), p. 299–335.
- [11] U. Ingard. « On the theory and design of acoustic resonators ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 25 (1953), p. 1037–1061.
- [12] X. Jing et X. Sun. « Effect of plate thickness on impedance of perforated plates with bias flow ». In : *AIAA Journal* 38.9 (2000), p. 1573–1578.
- [13] D. Khamis et E.J. Brambley. « The Effective Impedance of a Finite-Thickness Viscothermal Boundary Layer Over an Acoustic Lining ». In : *21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. AIAA Paper 2015-2229. 2015.
- [14] S. Laurens, E. Piot, A. Bendali, M'B. Fares et S. Tordeux. « Effective conditions for the reflection of an acoustic wave by low-porosity perforated plates ». In : *J. Fluid Mech.* 1743 (2014), p. 448–480.
- [15] S. Laurens, S. Tordeux, A. Bendali, M. Fares et R. Kotiuga. « Lower and upper bounds for the Rayleigh conductivity of a perforated plate ». In : *ESAIM :Mathematical Modelling and Numerical Analysis* (2013).
- [16] M. Lavieille, E. Piot et F. Micheli. « Numerical simulations of perforate liners : Part II – Local velocity fields validation ». In : *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Berlin, Germany). AIAA-2013-2270. 27–29 mai 2013.
- [17] F. G Leppington et H. Levine. « Reflexion and transmission at a plane screen with periodically arranged circular or elliptical apertures ». In : *J. Fluid Mech.* 61 (1973), p. 109–127.
- [18] X. Y. Li, X. D. Li et C. K. W. Tam. « Improved Multipole Broadband Time-Domain Impedance Boundary Condition ». In : *AIAA Jour.* 50.4 (2012).

- [19] T. Luong, M.S Howe et R.S McGowan. « On the Rayleigh conductivity of a bias-flow aperture ». In : *Journal of Fluids and Structures* 21 (2005), p. 769–778.
- [20] C. Malmay. « Etude Théorique et Expérimentale de L'impédance Acoustique de Matériaux En Présence D'un Ecoulement D'air Tangentiel ». Thèse de doct. Université du Maine, 2000.
- [21] F. Monteghetti, D. Matignon, E. Piot et L. Pascal. « Design of broadband time-domain impedance boundary conditions using the oscillatory-diffusive representation of acoustical models ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 140.3 (sept. 2016), p. 1663–1674.
- [22] F. Monteghetti, D. Matignon, E. Piot et L. Pascal. « Simulation temporelle d'un modèle d'impédance de liner en utilisant la représentation diffusive d'opérateurs ». In : *13ème Congrès Français d'Acoustique*. (Le Mans, France). 11–15 avr. 2016.
- [23] S. Olivetti, R. D. Sandberg et B. J. Tester. « Compressible turbulent channel flow with impedance boundary conditions ». In : *J. Sound Vib.* (2015). DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2015.01.039i>.
- [24] Yusuf Özyörük, Lyle N. Long et Michael G. Jones. « Time-domain numerical simulation of a flow-impedance tube ». In : *J. Comput. Phys.* 146 (1998), p. 29–57.
- [25] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis. « A new implementation of the Extended Helmholtz Resonator acoustic liner impedance model in time domain CAA ». In : *Journal of Computational Acoustics* 23 (2015), p. 1550015.
- [26] S.W. Rienstra. « Impedance Models in Time Domain, including the Extended Helmholtz Resonator Model ». In : *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. AIAA Paper 2006-2686. 2006.
- [27] C. Scalo, J. Bodart et S. K. Lele. « Compressible turbulent channel flow with impedance boundary conditions ». In : 27.3 (2015), p. 035107. DOI : <http://dx.doi.org/10.1063/1.4914099>.
- [28] A. Scarpato, S. Ducruix et T. Schuller. « Optimal and off-design operations of acoustic dampers using perforated plates backed by a cavity ». In : *J. Sound Vib.* 332 (2013), p. 4856–4875.
- [29] C. K. W. Tam et L. Auriault. « Time Domain Impedance Boundary for Computational Aeroacoustics ». In : *AIAA Jour.* 34.5 (1996), p. 917–923.

Chapitre 4

Identification de l'impédance acoustique d'un liner

Pour caractériser la réponse acoustique d'un liner, une alternative à la modélisation analytique ou semi-empirique de son impédance est la mise en œuvre d'une procédure d'*identification*. Celle-ci repose sur trois outils :

- la mesure de grandeurs acoustiques dans une configuration expérimentale maîtrisée comportant le liner étudié ;
- la simulation numérique de la propagation acoustique dans la configuration expérimentale pré-citée, sachant que la présence du liner est traduite par une condition aux limites d'impédance homogénéisée ;
- un algorithme d'optimisation.

La procédure d'identification consiste à trouver la valeur de l'impédance acoustique qui permet de minimiser l'écart entre les résultats numériques et les mesures.

A l'ONERA, ce type d'approche a été initié pour les liners par Yoann Ventribout et son encadrant de thèse Pierre Mazet [22], en collaboration avec Philippe Delorme et Christophe Peyret [6]. Cette thèse en mathématiques appliquées a montré la nature bien posée du problème d'identification d'une impédance acoustique de frontière, en se basant sur la résolution des équations d'Euler linéarisées temporelles par une méthode Galerkin Discontinue et en exprimant les gradients de la fonctionnelle coût à l'aide d'une formulation adjointe. Un outil numérique, basé sur le code SPACE de C. Peyret, a été développé, sans avoir pour autant été appliqué à des données réelles.

Frank Simon a ensuite initié une coopération avec ces collègues, ce qui a permis de lancer fin 2009 une thèse au DMAE sur le sujet, réalisée par Julien Primus. Venant juste à cette époque de commencer à travailler avec Frank sur ce sujet, il m'a donné l'opportunité de participer à l'encadrement de cette thèse, qui a abouti fin 2012 à la mise en place d'un code d'identification adapté aux mesures réalisées dans le banc B2A, et que Julien a dénommé *Elvin*. Dans ce chapitre, je vais présenter rapidement le principe de ce code, puis illustrer les travaux ayant permis son développement, en particulier via une coopération avec Mike Jones et Willie Watson à la NASA Langley, qui sont les précurseurs de l'identification d'impédance pour les liners acoustiques [27,

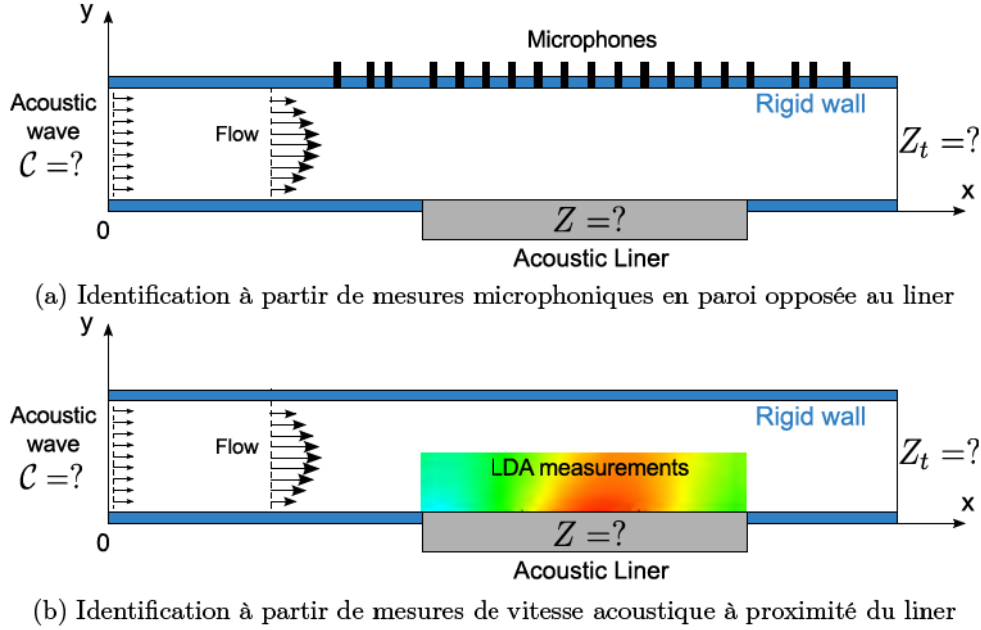


FIGURE 4.1 – Schéma de deux configurations possibles pour la procédure d'identification d'impédance

28].

4.1 Approche ONERA pour l'identification d'impédance acoustique de matériaux à réaction localisée

Durant la thèse de Julien Primus [17], le code développé par Y. Ventribout a été réécrit pour pouvoir être appliqué à la configuration expérimentale du banc B2A. Nous sommes passés notamment du domaine temporel au domaine fréquentiel, et nous avons adapté le jeu des fonctionnelles coûts aux grandeurs expérimentales mesurables dans le banc B2A : la pression acoustique (en amplitude et en phase) sur la paroi opposée au liner, ou bien la vitesse acoustique (en amplitude et en phase), mesurée au-dessus du liner par la technique de vélocimétrie laser conditionnée présentée en section 1.2. La figure 4.1 illustre les configurations que l'on étudie classiquement avec le code *Elvin*. Tous les détails de la procédure mise en œuvre par Julien Primus ont été publiés dans l'article [18], nous n'en donnons ici que les grandes lignes mais une copie de l'article est donnée en annexe C.

Le jeu d'équations considéré est celui des équations d'Euler linéarisées bidimensionnelles fréquentielles :

$$\mathcal{L}\varphi = 0 \quad (4.1)$$

avec

$$\mathcal{L}\varphi = j\omega\varphi + A_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + B\varphi \quad (4.2)$$

et $\varphi = (u, v, p/\rho_0 c_0)^\top$ le vecteur des perturbations acoustiques. On se place dans le cas où l'écoulement porteur est un écoulement cisailé. Cela permet d'utiliser l'expression standard de la condition aux limites d'impédance sur une paroi de normale $\mathbf{n}$:

$$p = \rho_0 c_0 Z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (4.3)$$

Dans le code, pour éviter la singularité liée aux parois rigides, la condition d'impédance s'écrit en faisant intervenir un coefficient de réflexion équivalent $\beta = (Z - 1)/(Z + 1)$. La source acoustique est imposée en entrée du domaine par $\mathcal{C}\varphi_0$ où $\mathcal{C}$ est une amplitude complexe et φ_0 est le mode acoustique plan normalisé : $\varphi_0(x, y) = \hat{\varphi}_0(y) \exp(-jkx)$. A la sortie du domaine on impose soit une condition d'impédance Z_t , soit une condition aux limites de type caractéristique sortante.

L'objectif de la procédure d'identification est de déterminer les valeurs de Z , Z_t et $\mathcal{C}$ (ou uniquement Z et $\mathcal{C}$) minimisant l'écart entre des mesures et la solution numérique, traduit sous la forme d'une fonction coût $\mathcal{J}(\varphi, Z, Z_t, \mathcal{C})$. Comme illustré sur la figure 4.1, le type et la zone de mesures peuvent varier. Dans la lignée des travaux de Y. Ventribout, la résolution de ce problème de minimisation se fait par une approche adjointe. Comme mentionné dans la section 1.1, une présentation très didactique de ce type de méthode peut être trouvée dans le mémoire d'HDR de C. Airiau [1]. Dans notre cas, on construit un Lagrangien à partir de la fonction coût et des contraintes que doit vérifier le vecteur d'état (équations (4.1), conditions aux limites sur les frontières du domaine), puis l'écriture de la stationnarité du Lagrangien vis-à-vis des différents multiplicateurs de Lagrange mis en jeu conduit à une expression analytique des gradients de la fonction coût par rapport aux paramètres Z , Z_t et $\mathcal{C}$ que l'on cherche à identifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial Z} &= -\left\langle \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial Z} \varphi, \varphi^* \right\rangle_{\Gamma_l} \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial Z_t} &= -\left\langle \frac{\partial M_{\beta_t}}{\partial \beta_t} \frac{\partial \beta_t}{\partial Z_t} \varphi, \varphi^* \right\rangle_{\Gamma_t} \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathcal{C}} &= \langle A^i n_i^- \varphi_0, \varphi^* \rangle_{\Gamma_s} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Je ne précise pas ici la signification de tous ces termes. Ce qu'il est important de retenir est que ces gradients s'expriment analytiquement à partir de la valeur de la solution du problème direct φ et à partir d'un vecteur φ^* qui est la solution d'un problème adjoint. La définition de celui-ci est elle aussi obtenue par la stationnarité du Lagrangien ; on montre que le problème adjoint s'écrit comme un problème linéaire en φ^* avec un terme de forçage qui dépend de la fonction coût ainsi que de la solution du problème direct :

$$\mathcal{L}^* \varphi^* = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varphi} \quad (4.5)$$

Ces équations sont bien entendu associées à un jeu de conditions aux limites spécifique.

Concrètement, la résolution du problème inverse d'identification se fait par un algorithme d'optimisation¹ nécessitant les gradients de la fonction coût par rapport aux différents paramètres intervenant dans le problème d'optimisation. La procédure d'identification suit donc le schéma illustré en figure 4.2. On résout le problème direct afin de connaître φ et de pouvoir exprimer $\partial\mathcal{J}/\partial\varphi$, ce qui permet de résoudre le problème adjoint et trouver φ^* . Ensuite, les gradients nécessaires à l'optimisation sont donnés par les équations (4.4). Le processus itératif est poursuivi jusqu'à atteindre un seuil de convergence défini par l'utilisateur.

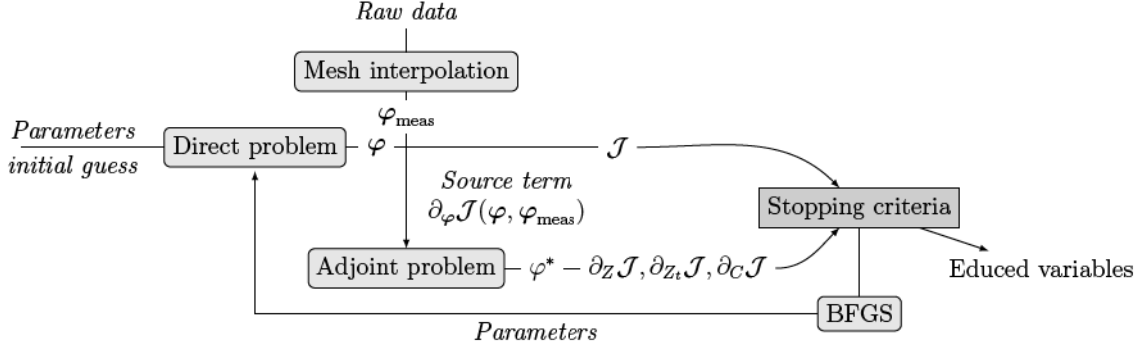


FIGURE 4.2 – Diagramme de la procédure d'identification du code Elvin

Les problèmes directs et adjoints sont résolus par une formulation Galerkin Discontinue, d'ordre 1 dans le code à la fin de la thèse de Julien. Là encore, tous les détails de cette méthode sont donnés dans l'article [18]. La mise en œuvre numérique a ensuite été améliorée par Lucas Pascal dans le cadre d'un Projet de Recherche interne, ce qui permet maintenant d'utiliser une formulation à l'ordre 2 tout en gagnant sur le temps de calcul grâce à l'utilisation de bibliothèques de calcul matriciel plus performantes [14].

L'approche Galerkin Discontinue a été choisie car les travaux de Y. Ventribout ont montré que la formulation discrète du problème adjoint coïncidait alors avec l'adjoint de la formulation discrète du problème direct. Cette propriété, qu'on appellera aussi *consistance de l'adjoint*, permet d'assurer que les gradients de la fonction coût sont correctement calculés, condition *sine qua non* pour la bonne convergence du processus de minimisation. Il faut noter cependant que Y. Ventribout n'a démontré ce résultat, ainsi que le caractère bien posé du problème d'identification, que pour sa formulation temporelle, alors que nous mettons en œuvre ici la formulation fréquentielle.

Les premières validations de cet outil ont été faites dans le cadre d'une coopération entre notre équipe et M. Jones et W. Watson à la NASA Langley². Cette coopération a été initiée par Frank Simon, puis je me suis occupée de son suivi au quotidien (définition des actions communes, réalisation des essais au banc B2A, identification de l'impédance en lien avec Julien

1. ici l'algorithme BFGS

2. A titre anecdotique, on peut mentionner que j'ai pu profiter des données acquises au cours de cette collaboration pour initier en 2012 des étudiants de troisième année de Supaéro aux joies de l'identification d'impédance, au cours d'un projet de 20 h co-encadré avec Julien Primus. Nous avons eu la chance d'attirer deux étudiants particulièrement brillants, Nicolas Renard et Quentin Bouvy, qui ont permis par leurs questions et actions de faire progresser notablement notre maîtrise d'Elvin.

Primus). Dans un premier temps nous avons validé la procédure d'identification en utilisant comme entrées au code des données microphoniques mesurées dans le banc GFIT de la NASA. Ainsi la figure 4.3 montre une concordance presque parfaite avec les résultats de notre code et de celui de la NASA, dès lors que le même jeu de données expérimentales est utilisé. Par contre les stratégies numériques des deux codes diffèrent complètement, puisque le code de la NASA résout l'équation d'Helmholtz convectée par un schéma numérique aux éléments finis.

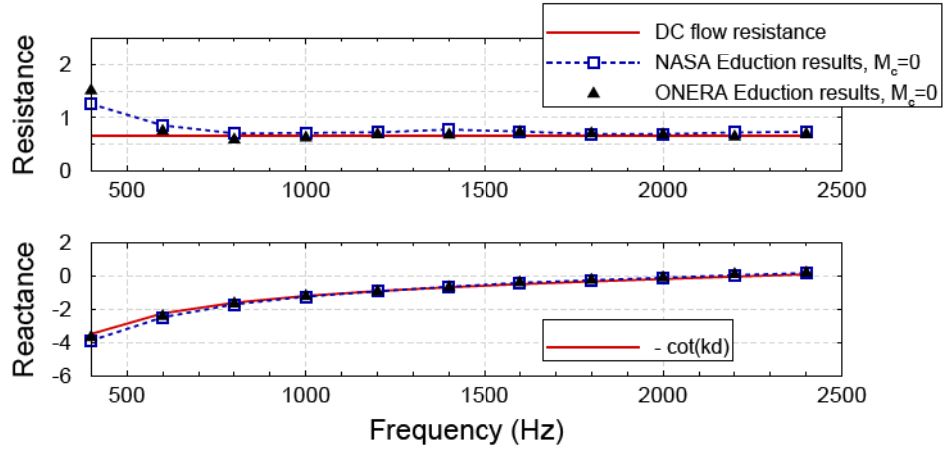
Ensuite, nous avons fait fabriquer un échantillon de liner "wiremesh + nid d'abeille" et de liner conventionnel "plaque perforée + nid d'abeille" aux dimensions de chaque banc, et nous avons réalisé en parallèle des campagnes de mesure suivies de l'application de nos outils d'identification d'impédance. Les résultats obtenus suite à cette première phase de collaboration ont été présentés dans une conférence AIAA [19]. Les écarts obtenus alors entre nos deux approches, et les réflexions qui en ont découlé, ont permis de mettre au jour un certain nombre de limitations de la procédure d'identification. Je vais les expliciter dans la section suivante et mentionner les améliorations mises en œuvre jusqu'à présent pour les dépasser, ainsi que celles à envisager dans le futur puisque ce sujet est toujours largement ouvert.

4.2 Limitations et améliorations de la procédure d'identification

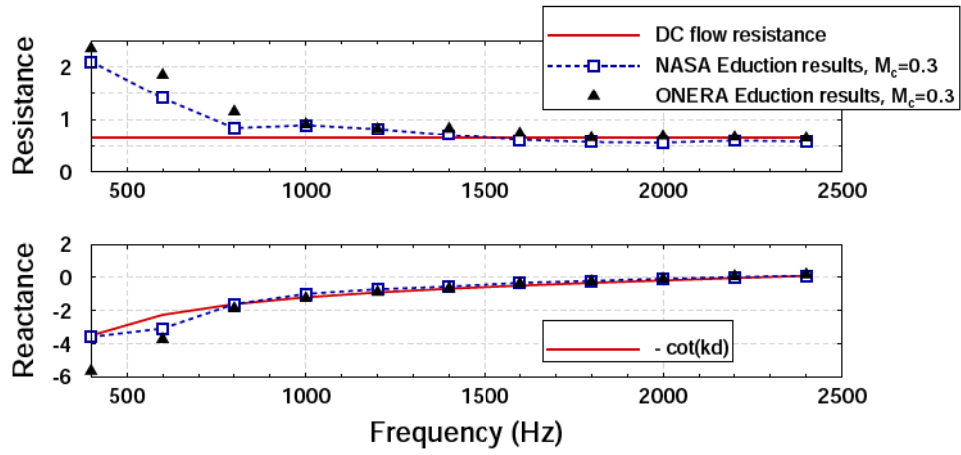
La limitation principale qui s'est fait jour lors de cette collaboration avec la NASA concerne l'influence plus significative qu'attendu des effets tridimensionnels au sein de la veine d'essai. Les autres questionnements, cette fois-ci inhérents à toutes les procédures d'identification, concernent l'influence du niveau sonore et du contenu fréquentiel du champ acoustique incident ainsi que la manière dont est pris en compte l'écoulement dans les simulations numériques associées aux expériences. Enfin, comme dans toute procédure d'optimisation, on est en droit de s'interroger sur la représentativité des résultats obtenus : comment peut-on quantifier le degré de confiance à accorder à la valeur identifiée, c'est-à-dire quelle est l'incertitude associée à cette procédure d'identification ?

Influence des effets tridimensionnels

Toutes les études d'identification menées au B2A sont faites dans une gamme de fréquence inférieure à la fréquence de coupure du mode acoustique d'ordre 1, ce qui veut dire que seul le mode acoustique plan se propage au sein du conduit. C'est aussi le cas pour les études menées dans les bancs GIT et GFIT de la NASA, cependant le banc CDTR permet là-bas de réaliser de l'identification d'impédance à partir de données acquises en présence de champs acoustiques contenant des modes d'ordre élevé [23, 8]. Pour les liners conventionnels, qui sont à réaction localisée et peuvent donc être représentés par une impédance homogénéisée, celle-ci est indépendante de la nature modale du champ acoustique incident. Travailler à partir de données acquises en présence du mode plan est donc suffisant dans la plupart des applications étudiées, ce qui explique les choix faits pour la source acoustique dans le banc B2A à sa conception. Du fait de cette restriction à une source acoustique plane, nous nous sommes limités à des simulations numériques bidimensionnelles lors de la création du code *Elvin*, en partant de l'hypothèse que



(a) Sans écoulement



(b) Avec un écoulement dont le nombre de Mach au centre de la veine vaut $M_c = 0.3$

FIGURE 4.3 – Impédance identifiée par *Elvin* à partir de données de la NASA, comparée aux résultats obtenus par la NASA. Le liner est constitué d'un tissu métallique au-dessus de cellules de nid d'abeille.

les effets d'inhomogénéité dans la direction transversale³ éventuellement présents lors des essais dans le banc B2A étaient négligeables. Ces effets peuvent être dûs à :

- la non-uniformité transversale du champ acoustique due à la présence de l'écoulement, lui-même présentant un cisaillement dans cette direction ;
- l'envergure réduite de l'échantillon du liner par rapport à l'envergure de la veine du B2A ; en effet, dans la veine "standard" du banc (voir la figure 2.5a), il existe deux bandes rigides de 1 cm de large de part et d'autre de l'échantillon (lui-même faisant 3 cm de large).

Une comparaison, dans un cas sans écoulement, entre nos résultats et ceux obtenus par la NASA, ont permis de mettre en évidence que le deuxième effet n'était en fait pas du tout négligeable : la rupture d'impédance dans la direction transversale modifie en fait significativement le champ acoustique au sein de la veine par rapport à une configuration réellement bidimensionnelle. Dès lors, en utilisant un champ expérimental mesuré dans la section centrale du B2A comme entrée du code `Elvin`, on obtient des résultats d'impédance fortement biaisés. Ainsi, la figure 4.4 montre que la résistance identifiée par notre approche est surestimée par rapport à celle obtenue par l'approche NASA (qui se base sur des données acquises dans le GFIT, où l'échantillon couvre bien toute l'envergure de la veine). Par contre, quand la NASA a "mimé" la configuration B2A en ajoutant des bandes rigides de part et d'autre de leur échantillon, ils retrouvent des résultats similaires aux nôtres. Une collaboration alors en cours avec Stéphane Redonnet, ingénieur au département parisien d'acoustique de l'ONERA et qui encadrera la thèse de Marie Escoufflaire [7], a permis de confirmer cet impact numériquement. Des simulations numériques menées par Marie avec le code `CAA sabrinA.v0` ont permis en effet de montrer que des simulations tridimensionnelles (prenant en compte la géométrie réelle de l'échantillon de liner dans le banc B2A) permettent de mieux reproduire les champs de vitesse acoustiques au-dessus du liner que des simulations bidimensionnelles.

Des études d'analyse modale, menées au même moment au cours des thèses de Lucas Pascal et Javier Sanchez-Rodriguez, et qui seront présentées dans le chapitre suivant, ont permis de mettre en avant elles aussi l'importance des effets tridimensionnels. Elles ont permis de montrer que l'effet dû à la non-uniformité transversale de l'écoulement avait lui un impact bien moins pénalisant que l'effet de rupture d'impédance.

Pour dépasser cette limitation géométrique, deux solutions étaient possibles :

1. développer une version tri-dimensionnelle du code `Elvin`, à l'instar de celle disponible à la NASA ;
2. modifier la veine du banc B2A pour lui permettre d'accueillir des échantillons recouvrant toute la largeur disponible.

La première piste a été explorée lors du stage de Master Recherche de Julien Deborde, en 2013, mais il n'a pas été possible d'aboutir à un code exploitable au terme du stage. En parallèle, nous avons donc fait fabriquer une nouvelle veine, en profitant de financements disponibles dans le projet européen ALIAS⁴. De manière pragmatique, il s'avère qu'il est plus simple et plus rapide de mener la procédure d'identification avec le code `Elvin` en 2D à partir de nouveaux jeux de données acquis dans la veine "full-width" du B2A que de développer une version 3D du

3. c'est-à-dire dans la direction de l'envergure du liner.

4. qui sera présenté au chapitre suivant

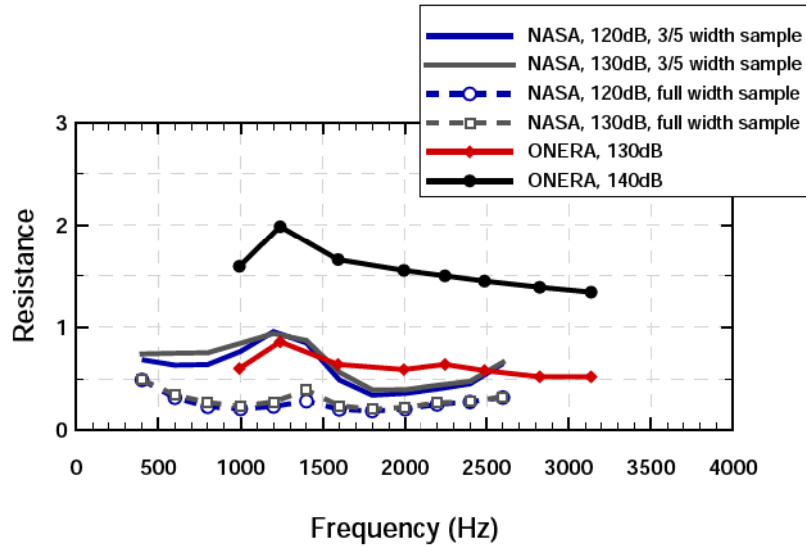
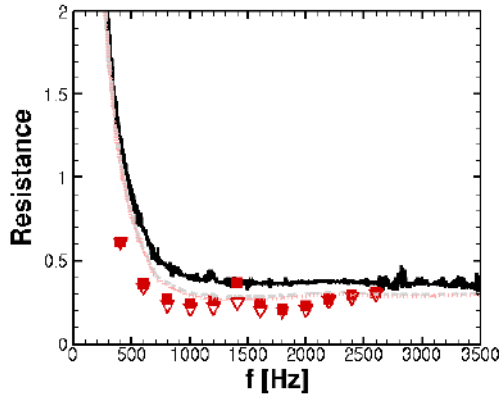


FIGURE 4.4 – Résistance identifiée par la NASA et par l’ONERA sur le liner conventionnel, dans des configurations sans écoulement.

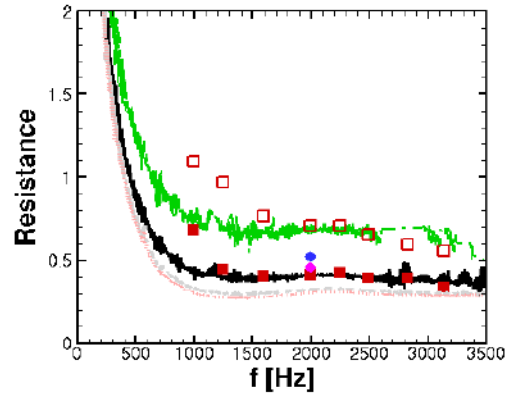
code pour pouvoir post-traiter des mesures faites avec la veine initiale. Nous poursuivons donc pour le moment avec cette approche basée sur du 2D. Néanmoins, il restera intéressant dans le futur de réussir à finaliser la version tridimensionnelle du code, notamment pour pouvoir traiter des configurations où l’excitation acoustique contiendrait des modes acoustiques non plans, par exemple si l’on s’intéresse à des matériaux à réaction non-localisée tels des matériaux poreux.

Pour illustrer la validité de la nouvelle procédure, on montre sur la figure 4.5 les résultats d’impédance obtenus sur le même matériau conventionnel, mais cette fois-ci testé dans la veine B2A avec un échantillon en couvrant toute la largeur. On compare là encore les résultats ONERA à ceux de la NASA, ainsi qu’à des mesures faites au tube à impédance. Cette fois-ci, et contrairement à ce qu’on voyait dans la figure 4.4, la procédure ONERA obtient des résultats très proches de ce qui est attendu pour ce type de matériau, ce qui montre que nous avons réussi à résoudre le problème rencontré initialement.

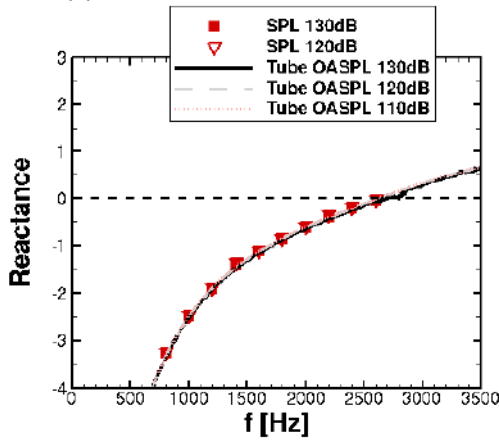
A noter que suite à ces réflexions communes, Willie Watson et Mike Jones ont étudié plus spécifiquement ces effets de modifications transversales d’impédance, à l’aide de leur code tridimensionnel [26]. D’autre part, après la présentation du papier de conférence [19], nous avons essayé fin 2014 d’en soumettre une version plus complète pour l’AIAA Journal. Il n’a pas été accepté, les rapporteurs ayant notamment relevé les difficultés d’interprétation des résultats liées aux différences sur les envergures des échantillons entre les bancs ONERA et NASA. Les changements apportés à la méthodologie ONERA, illustrés par exemple par les nouveaux résultats de la figure 4.4, devraient permettre d’améliorer significativement le papier, dont une nouvelle version est donc en cours de rédaction.



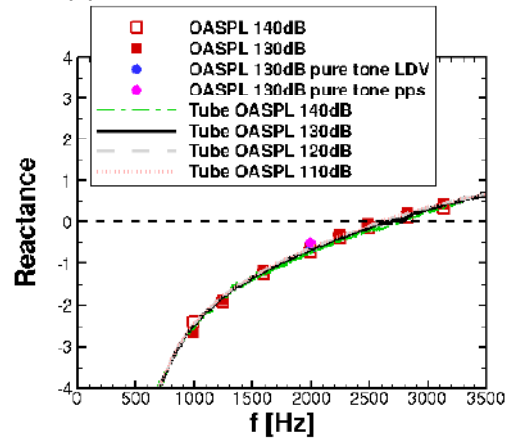
(a) Résistance obtenue par la NASA



(b) Résistance obtenue par l'ONERA



(c) Réactance obtenue par la NASA



(d) Réactance obtenue par l'ONERA

FIGURE 4.5 – Comparaison des impédances obtenues par la NASA et l'ONERA pour le matériau conventionnel (symboles) avec des mesures au tube à impédance (lignes). La procédure ONERA est basée sur des mesures dans la veine "full width" du B2A. Configuration sans écoulement.

Influence des conditions d'essai

Les résultats de la figure 4.4 montrent encore des différences entre les résultats NASA et ONERA. Nous pensons que cela provient des différences sur les sources d'excitation acoustique dans les deux bancs. La difficulté avec ce type de liner non-linéaire vis-à-vis du niveau sonore, est que son impédance varie en fonction du signal auquel il est soumis. De plus, aux forts niveaux, le contenu fréquentiel du signal a aussi son importance, comme montré par exemple par Boden [3] ou par les études croisées entre le KTH et le DLR [30]. Il est donc très délicat de réussir à faire une comparaison propre entre deux moyens d'essai différents. Dans le banc de la NASA, l'excitation est réalisée par un sinus pur, dont le niveau sonore (SPL) est mesuré par un microphone placé en paroi à une certaine distance à l'amont du liner. A l'ONERA, l'excitation est classiquement constituée d'une somme de sinus ; pour pouvoir correctement estimer l'amplitude sonore de chaque fréquence, on réalise un tri d'onde à partir de mesures microphoniques pariétales à l'amont de l'échantillon, de manière à séparer dans le SPL mesuré celui lié à l'onde incidente de celui lié à l'onde réfléchie. Les niveaux sonores affichés sont alors ceux de l'onde incidente (pour un signal mono-sinus), ou bien le niveau sonore équivalent (OASPL incident) sur toute la bande de fréquences du signal multi-ton. Les résultats des travaux récents montrent que pour comparer des résultats entre eux il faut *a minima* assurer que les niveaux d'OASPL soient similaires, mais cela peut ne pas être suffisant dans certains cas où des distorsions harmoniques peuvent aussi perturber les résultats. Ceci montre toute la complexité des phénomènes en jeu, et la difficulté qu'il peut y avoir en pratique pour appliquer dans une configuration industrielle avec une ambiance sonore complexe les résultats d'impédance acquis en laboratoire. Par contre, au moins pour les liners à réaction localisée, la forme modale du champ acoustique n'est pas censée avoir d'importance. Cela a été confirmé en tube à impédance par Schultz *et al.* [21] et en conduit par la NASA [23], au moins pour les premiers ordres propagatifs.

La prise en compte des effets d'écoulement est elle aussi délicate. Dans un premier temps, on peut s'interroger sur le choix de la modélisation de l'écoulement effectué dans les simulations numériques mises en œuvre dans la procédure d'identification. La méthode la plus simple, utilisée par la majorité des laboratoires, consiste à résoudre une équation de Helmholtz convectée (CHE), dans laquelle seul un profil uniforme de vitesse est utilisé. Mais deux difficultés apparaissent alors : la gestion de la condition aux limites d'impédance à la paroi, qui doit être écrite sous la forme proposée par Myers [13] mais dont la validité est actuellement sujette à controverse (voir par exemple [20] et [25]) ; le choix de la valeur uniforme de vitesse à considérer pour être le plus représentatif possible de l'expérience (voir par exemple une discussion sur ce point dans [9] ou [11]). Dans notre approche nous contournerons le problème en résolvant les équations d'Euler linéarisées (LEE) et en utilisant comme champ moyen le profil de vitesse expérimental, ou tout du moins une interpolation de celui-ci ⁵. On va chercher maintenant à mieux quantifier ce qui modifie l'impédance en présence d'un écoulement : l'épaisseur de couche limite, le taux de cisaillement, ou bien la vitesse de frottement à la paroi ? Intuitivement, au vu des mécanismes d'homogénéisation sous-jacents ainsi que des quelques résultats expérimentaux disponibles dans la littérature, je penche pour la dernière solution, mais cela reste à étudier. Il faut remarquer d'autre part que,

5. à noter que des mesures aérodynamiques réalisées dans toute une section de la veine permettent de quantifier la tri-dimensionnalité de l'écoulement porteur, dû à la présence de tourbillons aux quatre coins ; comme discuté auparavant on néglige pour l'instant cet impact sur la propagation acoustique

en travaillant avec les LEE, l'écoulement porteur ne vérifie pas le même jeu d'équations que les petites perturbations qui lui sont superposées, ce qui n'est pas parfaitement rigoureux. On peut noter notamment que cela pose des difficultés numériques au niveau de la condition aux limites de sortie du domaine. Une des pistes à suivre dans le futur serait la résolution non plus des LEE mais des équations de Navier-Stokes linéarisées (comme discuté en section 1.1), pour pouvoir mieux étudier l'impact de la turbulence sur l'impédance à identifier.

Incertitudes sur le résultat d'identification

Comme avec toute procédure d'optimisation, la mise en œuvre de l'identification d'impédance nécessite de s'interroger sur l'incertitude associée à la valeur identifiée. Ceci est d'autant plus important que les utilisateurs (numériciens ou industriels) des spectres d'impédance identifiés ne sont pas tous avertis des erreurs et limitations propres à ce type de procédure. Ce type de questionnement, longtemps laissé sous silence par les équipes travaillant sur le sujet, commence à émerger. Très récemment le KTH a publié une étude complète de propagation d'incertitudes, de la mesure jusqu'à l'impédance identifiée, permettant d'évaluer un intervalle de confiance [29]. Elle n'est par contre appliquée qu'à une procédure d'identification très simple, basée uniquement sur une mesure de matrice de transfert et une approche de propagation acoustique mono-mode, donc limitée à des configurations où le liner travaille en absorption pure, sans réflexion au niveau de ses frontières amont et aval. La NASA commence elle aussi à donner des intervalles de confiance sur ses courbes d'impédance [12], en évaluant l'incertitude liée à des erreurs de ± 0.5 dB et $\pm 1^\circ$ sur les mesures microphoniques utilisées en entrée de leur code. De manière générale, on observe que l'incertitude devient significative dans les bandes de fréquence où l'atténuation acoustique réalisée par le liner est la plus faible, ce qui est tout à fait logique : rien ne ressemble plus à un mur rigide d'impédance infinie qu'un liner hors de sa plage de fonctionnement et donc à la réponse quasi-rigide...

L'inconvénient de ces méthodes de propagation d'incertitude est qu'elles nécessitent la réalisation d'un grand nombre de runs d'identification pour arriver à donner un résultat statistiquement cohérent, ce qui est encore trop lourd à mettre en œuvre systématiquement. En pratique, on utilise donc des expédients et/ou on se base sur l'expérience de l'utilisateur. Ainsi, la NASA suit une pratique bien définie pour juger de la validité ou non des résultats trouvés [24] : quatre boucles d'identification sont menées en parallèle, avec des valeurs initiales pré-définies, de manière à éliminer les éventuels minima locaux.

En ce qui nous concerne, nous avons choisi une voie alternative. Il faut rappeler que notre procédure d'identification est de base à multi-paramètres, puisqu'en plus de l'impédance du liner on identifie systématiquement l'amplitude de l'onde acoustique incidente. L'expérience montre que selon les valeurs initiales on peut converger vers des couples $(\mathcal{C}, Z)$ relativement différents même si la valeur de la fonction coût $\mathcal{J}$ à la fin de la procédure d'identification est sensiblement la même. Pour quantifier cet effet, nous choisissons donc d'accompagner la valeur d'impédance identifiée de barres d'erreurs représentant la plage de variation de l'impédance pour laquelle la fonction coût ne varie que de, disons, 0.1%. Pour que cette démarche puisse être réalisée quel que soit le type de mesures utilisées (pression ou vitesse acoustique), on travaille avec une forme

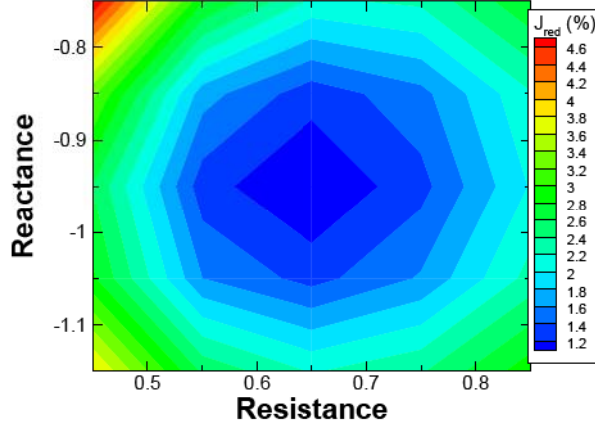


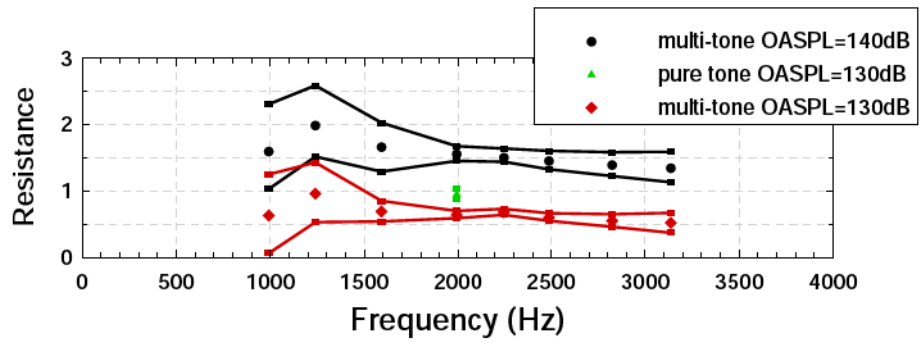
FIGURE 4.6 – Carte de fonction coût, adimensionnée.

réduite de la fonction coût :

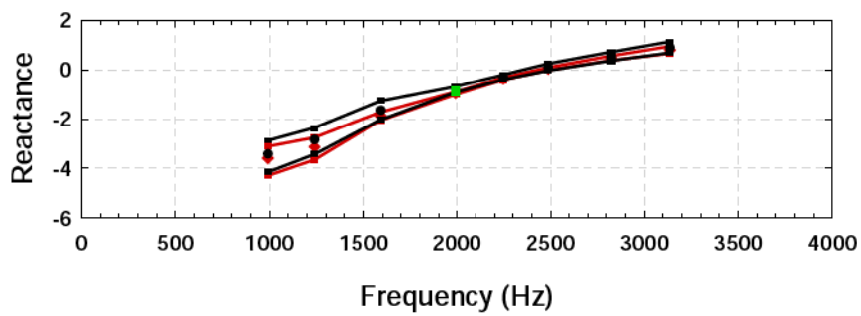
$$\mathcal{J}_{red}(Z, \mathcal{C}) = \frac{\mathcal{J}(Z, \mathcal{C})}{\int_{\Omega_{obs}} \|\varphi_{meas}\|^2 dx dy} \quad (4.6)$$

Un exemple de carte de fonction coût que l'on peut obtenir est tracé sur la figure 4.6. On l'obtient en calculant $\mathcal{J}_{red}$ pour différentes valeurs de la résistance et de la réactance, pour une valeur de $\mathcal{C}$ fixée à la valeur obtenue à convergence de l'algorithme d'identification. Ce qu'on va appeler "l'incertitude" sur la valeur d'impédance identifiée est alors la plage de résistance et de réactance pour laquelle on s'écarte de 0.1% de la valeur minimale de $\mathcal{J}_{red}$. Cette valeur $\mathcal{J}_{red}^{min}$ a aussi son importance : si elle est trop haute, typiquement supérieure à quelques pourcents, cela signifie que la convergence de la procédure d'identification est douteuse, au sens où la simulation numérique n'arrive pas à reproduire correctement ce qui a été observé expérimentalement. Cela peut venir de problèmes sur la condition aux limites de sortie, ou bien de la nature fortement bruitée du jeu de mesures considérées. Au final, le type de résultat qu'on peut obtenir est illustré sur la figure 4.7.

Là encore, on retrouve le résultat général qui est que la procédure d'identification est d'autant meilleure que l'on se trouve dans une plage de grande atténuation acoustique, donc dans le cas considéré en moyenne fréquence. Si l'on voulait obtenir une meilleure identification de la résistance en basse fréquence, une solution serait de changer la profondeur de cavité de l'échantillon de liner, de manière à augmenter la réactance dans la bande de fréquence d'intérêt, ce qui améliorerait automatiquement l'atténuation acoustique réalisée dans le B2A. On peut noter aussi que les études menées jusqu'à maintenant ne permettent pas de trancher de manière claire sur l'avantage qu'apporterait l'identification à partir de mesures de vitesse acoustique au lieu de mesures de pression acoustique sur la paroi opposée au liner, tout du moins dans la plage où l'atténuation acoustique est forte et l'identification "facile". Par contre, dès lors qu'on se trouve dans des gammes où l'atténuation est faible, on a clairement un avantage à utiliser les données



(a) Résistance



(b) Réactance

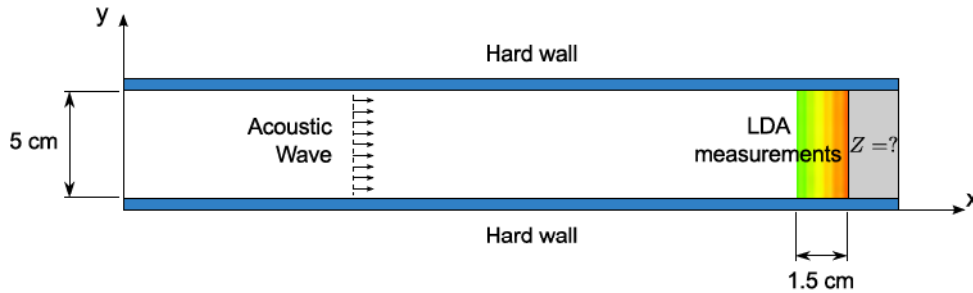
FIGURE 4.7 – Impédance identifiée sur le liner non-conventionnel (symboles), avec les limites d'incertitudes (lignes). Configuration sans écoulement, avec l'échantillon ne couvrant que 3/5ème de la veine, et pour différentes sources d'excitation.

en vitesse, du fait du plus grand nombre d'informations expérimentales qu'elles apportent en entrée de la procédure.

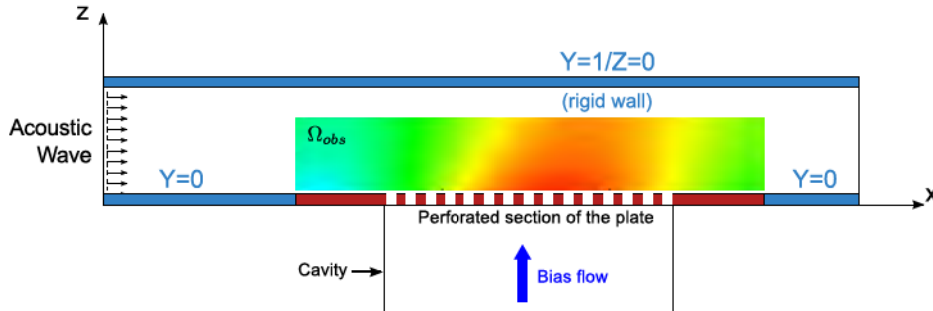
Pour conclure, il est clair qu'il nous faut systématiser l'apport d'une information d'incertitude, dans une définition statistique classique ou bien celle tirée de la fonction coût, pour les futures études mettant en œuvre la procédure d'identification d'impédance.

4.3 Exemples de mise en œuvre et perspectives

Au cours des dernières années, le code *Elvin* a été aussi appliqué sur des configurations légèrement différentes de la configuration standard représentée sur la figure 4.1 où un liner à réaction localisée est soumis à une combinaison d'écoulement et d'ondes acoustiques rasantes. Ainsi, on a réalisé des expériences où un liner était monté au bout du banc B2A, transformé ainsi en simili "tube à impédance" (voir Fig. 4.8a). Bien entendu dans ce cas il n'y avait aucun écoulement moyen dans le conduit. Cette application n'a servi qu'à valider la procédure d'identification basée sur les mesures de vitesse acoustique par LDV [15], car il est clair que sans écoulement un tube à impédance classique permet d'accéder de manière bien plus aisée à l'impédance du liner.



(a) Montage pour étudier l'impédance d'un liner sous incidence normale



(b) Montage pour étudier l'impédance d'une plaque perforée en présence d'un écoulement traversant

Une autre configuration étudiée, bien plus riche de perspectives, est celle schématisée sur la Figure 4.8b. Dans ce cas on place sur la paroi inférieure de la cellule d'essai du banc B2A une plaque perforée montée au-dessus d'une cavité. Des ouvertures sur les parois latérales de celle-ci permettent d'injecter un écoulement, qui va traverser la plaque perforée. La mesure de la vitesse-acoustique au-dessus de la plaque permet d'identifier l'impédance globale du système

"plaque+cavité". Dans la gamme de fréquence en deçà de la fréquence de coupure du mode acoustique transverse à la cavité, on peut revenir facilement à l'impédance de la plaque en soustrayant la réactance $j \cot \omega L_c / c_0$ apportée par la cavité. Ce montage a permis d'étudier l'impédance d'une plaque perforée dans une configuration représentative des parois des chambres de combustion [16], ce qui conduit en présence d'écoulement traversant à une très grande valeur de la résistance acoustique de la paroi et rend donc la procédure d'identification avec le code *Elvin* peu précise (la sensibilité de la fonction coût dans cette gamme est très faible). On compte dans le futur utiliser ce type de montage pour étudier des plaques perforées utilisées sur les dispositifs hypersustentateurs (notamment les volets). Dans ce cas on générerait un écoulement rasant en plus de l'écoulement traversant la plaque. En pratique, ces plaques perforées permettent, en créant une circulation d'air entre l'extrados et l'intrados du volet, d'amoindrir la force du tourbillon de bord de volet, et ainsi de diminuer le bruit associé. Les plaques ont donc une action sur la source de bruit plutôt qu'une action d'atténuation de la propagation acoustique comme c'est le cas dans les nacelles des turbofans. La grandeur qui gouverne le phénomène physique en jeu est alors la perméabilité visqueuse statique de la plaque, qui gouverne la perte de charge qui va avoir lieu entre l'extrados et l'intrados du volet. Or, cette perméabilité est un des termes intervenant dans les modèles d'impédance acoustique des plaques perforées que l'on dérive en suivant la démarche présentée dans la section 3. En identifiant l'impédance acoustique de la plaque, on pourra donc aussi avoir accès à cette information "statique".

Enfin, la perspective principale de ces travaux concerne l'application aux matériaux dits "poreux". L'idée est d'utiliser le banc B2A dans la configuration standard de la figure 4.1, mais en remplaçant le liner à réaction localisée par un matériau poro-élastique (par exemple de la fibre de verre, ou des mousses métalliques). Ce dernier ne peut pas être représenté par une impédance acoustique homogénéisée, car son excitation par une onde acoustique conduit à la propagation au sein du matériau de plusieurs ondes vibratoires. Celles-ci sont classiquement étudiées à l'aide du modèle de Biot-Allard [2], qui traduit la propagation simultanée de trois ondes : deux ondes de compression et une onde de cisaillement. Ce modèle a été revisité par différents auteurs (en particulier, Johnson, Champoux & Allard, voir [4, 10]) pour faire apparaître clairement le rôle des différents paramètres physiques rentrant en jeu. Le nombre de paramètres considérés peut monter jusqu'à huit dans le modèle le plus complet (dit JCA-PL pour Johnson-Champoux-Allard-Pride-Lafarge) qui tient compte à la fois des effets visqueux et thermiques au sein du solide. Ces paramètres concernant la porosité volumique du solide, sa tortuosité, sa perméabilité statique et une longueur caractéristique, avec à chaque fois une contribution visqueuse et thermique. Le processus d'identification à mettre en œuvre porterait donc sur chacun de ces paramètres, au lieu des seules résistance et réactance acoustique utilisées pour les liners à réaction localisée. Il faut noter que pour certains matériaux/configurations où le comportement vibro-acoustique est plus simple, on peut restreindre notablement le nombre de paramètres à rechercher, jusqu'à tomber à un seul pour le modèle simplifié de Delany-Bazley [5]. Cette mise en place d'une procédure d'identification des paramètres acoustiques des matériaux poreux fait actuellement l'objet de la thèse de Rémi Roncen, co-dirigée avec Frank Simon et qui a débuté à l'automne 2015. C'est une reprise de la thèse d'O. Berengue-Llonch, avortée au bout de six mois en 2014 du fait de contraintes familiales du doctorant qui l'ont poussé à abandonner sa thèse pour retourner en Espagne.

Références

- [1] C. Airiau. *Stabilité, réceptivité et contrôle optimal d'écoulements cisailés : approches adjointes*. Université Paul Sabatier, Habilitation à diriger des recherches. 2004.
- [2] J. F Allard. *Propagation of Sound in Porous Media*. Elsevier Applied Sciences, 1993.
- [3] H. Boden. « The effect of high level multi-tone excitation on the acoustic properties of perforates and liner samples ». In : *Proceedings of the 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Colorado Springs, Colorado, USA : AIAA 2012-2151, avr. 2012.
- [4] Y. Champoux et J.-F. Allard. « Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media ». In : *Journal of Applied Physics* 70.4 (1991).
- [5] M.E. Delany et E.N. Bazley. « Acoustical properties of fibrous materials ». In : *Applied Acoustics* 3 (1970), p. 105–116.
- [6] P. Delorme, P. Mazet, C. Peyret et Y. Ventribout. « Computational aeroacoustics applications based on a Discontinuous Galerkin method ». In : *C.R. Mecanique* 333 (2005), p. 676–682.
- [7] M. Escoufflaire. « Theoretical and numerical investigation of time-domain impedance models for computational aeroacoustics ». Thèse de doctorat en Acoustique. Université du Maine, Le Mans, 2014.
- [8] C. H. Gerhold, M. C. Brown, W. R. Watson et M. G. Jones. « Investigation of Liner Characteristics in the NASA Langley Curved Duct Test Rig ». In : *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. NASA Langley Research Center, Hampton, VA 23681-2199, USA, mai 2007.
- [9] X. Jing, S. Peng, L. Wang et X. Sun. « Investigation of straight forward impedance eduction in the presence of shear flow ». In : *J. Sound Vib.* 335 (2014), p. 89–104.
- [10] D. L. Johnson, J. Koplik et R. Dashen. « Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid saturated porous media ». In : *J. Fluid Mech.* 176 (1987).
- [11] M. G. Jones, W. R. Watson, B. M. Howerton et S. Busse-Gerstengarbe. « Effects of mean flow assumption and harmonic distortion on impedance eduction methods ». In : 53.6 (juin 2015).
- [12] M. G. Jones, W. R. Watson et J. C. June. « Optimization of microphone locations for acoustic liner impedance eduction ». In : *21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (AVIATION 2015)*. (Dallas, Texas, USA). AIAA-2015-3271. 22–26 juin 2015.
- [13] M. K Myers. « On the acoustic boundary condition in the presence of flow ». In : *J. Sound Vib.* 71.3 (1980), p. 429–434. DOI : [10.1016/0022-460X\(80\)90424-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(80)90424-1).
- [14] L. Pascal et E. Piot. *PR SMART Lot 1.2 : Identification d'impédance acoustique par approche inverse. Activités du DMAE en 2015*. Rapport Technique RT 3/24269 DAAC/DMAE. ONERA, déc. 2015.
- [15] E. Piot, J. Primus et F. Simon. « Liner impedance eduction technique based on velocity field ». In : *18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Colorado Springs, Colorado). AIAA-2012-2198. 4–7 juin 2012.

- [16] V. Popie, E. Piot, F. Simon et S. Tordeux. « Impedance eduction of perforated plates at low Strouhal numbers and high bias flow Mach number ». In : *21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (AVIATION 2015)*. (Dallas, Texas, USA). AIAA-2015-3275. 22–26 juin 2015.
- [17] J. Primus. « Détermination de l'impédance acoustique de matériaux absorbants en écoulement par méthode inverse et mesures LDV ». Thèse de doct. INSA Toulouse, 2012.
- [18] J. Primus, E. Piot et F. Simon. « An adjoint-based method for liner impedance eduction : Validation and numerical investigation ». In : *J. Sound Vib.* 332 (2013), p. 58–75.
- [19] J. Primus, E. Piot, F. Simon, M. G Jones et W. R Watson. « ONERA-NASA cooperative effort on liner impedance eduction ». In : *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Berlin, Germany). AIAA-2013-2273. 27–29 mai 2013.
- [20] Y. Renou et Y. Aurégan. « Failure of the Ingard-Myers boundary condition for a lined duct : An experimental investigation ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 130.1 (juil. 2011), p. 52–60.
- [21] T. Schultz, L. N. Cattafesta et M. Sheplak. « Modal decomposition method for acoustic impedance testing in square ducts ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 120.6 (2006), p. 3750–3758.
- [22] Y. Ventrubout. « Contrôle des perturbations aéroacoustiques par impédances de parois : application à un modèle de matériau poreux ». Thèse de doctorat en Mathématiques Appliquées. Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2006.
- [23] W. R. Watson et M. G. Jones. « Impedance Eduction in Ducts with Higher-Order Modes and Flow ». In : *Proceedings of the 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Miami, Florida : AIAA-2009-3236, mai 2009.
- [24] W. R. Watson et M. G. Jones. « Explanation of anomalous behavior observed in impedance eduction techniques using measured data ». In : *Proceedings of the 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. AIAA-2010-3766, juin 2010.
- [25] W. R. Watson et M. G. Jones. « Evaluation of Wall Boundary Conditions For Impedance Eduction Using a Dual-Source Method ». In : *Proceedings of the 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Colorado Springs, Colorado, USA : AIAA 2012-2199, avr. 2012.
- [26] W. R. Watson et M. G. Jones. « Impedance eduction in sound fields with peripherally varying liners and flow ». In : *Proceedings of the 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Dallas, Texas : AIAA-2015-2228, 2015.
- [27] W. R. Watson, M. G. Jones et T. L. Parrott. « Validation of an impedance eduction method in flow ». In : *AIAA Journal* 37.7 (1999), p. 818–824.
- [28] W. R. Watson, M. G. Jones, S. E. Tanner et T. L. Parrott. « Validation of a numerical method for extracting liner impedance. » In : *AIAA Journal* 34.3 (1996), p. 548–554.
- [29] L. Zhou et H. Boden. « A systematic uncertainty analysis for liner impedance eduction technology ». In : *J. Sound Vib.* 356 (2015).
- [30] L. Zhou, H. Boden, C. Lahiri, F. Bake, L. Enghardt, S. Busse-Gerstengarbe et T. El-nady. « Comparison of impedance eduction results using different methods and test rigs ». In : *20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (AVIATION 2014)*. (Atlanta, GA, USA). AIAA-2014-2955. 16–20 juin 2014.

Chapitre 5

Analyse modale et propagation acoustique dans un conduit traité acoustiquement en présence d'écoulement

Les deux chapitres précédents étaient dédiés au lien entre le matériau absorbant et son impédance. Pour les applications aéronautiques étudiées à l'ONERA, ces matériaux ont vocation à tapisser les parois de conduits, de manière à réduire le niveau du bruit qui s'y propage, et ce en présence d'un écoulement. La manière la plus directe de simuler ce type de configuration et donc d'évaluer l'efficacité d'un liner acoustique en tant que système de réduction de bruit, consiste à mettre en œuvre un code CAA ¹ équipé de conditions aux limites d'impédance acoustique. C'est ce que fait par exemple à l'ONERA Stéphane Redonnet avec le code `sabrinA` ou Christophe Peyret avec le code `SPACE`, mais se pose alors toute la difficulté de reproduire correctement l'impédance des matériaux dans le domaine temporel [11], comme discuté dans la section 3.4. Dans ce chapitre, nous allons voir comment l'utilisation de méthodes numériques plus simples, basées sur les outils de stabilité linéaire développés pour la mécanique des fluides et présentés en section 1.1, permettent de reproduire les mécanismes physiques en jeu, de mettre en avant des comportements singuliers, et de servir d'outils pour le design de technologies de réduction de bruit dans un contexte industriel.

5.1 Étude des modes acoustiques

Analyse locale

La manière la plus simple pour étudier la réponse propre d'un écoulement dans un conduit traité acoustiquement consiste à appliquer le formalisme d'une analyse de stabilité linéaire locale aux équations d'Euler (ou Navier-Stokes) linéarisées associées à des conditions d'impédance

1. Computational AeroAcoustics

acoustique sur les parois du conduit. Comme expliqué en section 1.1, cela revient donc à résoudre le problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathcal{A}' \cdot q'(y) = \alpha \mathcal{B}' \cdot q'(y) \quad (5.1)$$

où α est le nombre d'onde selon x , la direction principale du conduit, et $q' = [q, \alpha q]$ avec q la fonction propre de l'onde acoustique étudiée, de fréquence réelle ω , sur laquelle on impose la condition d'impédance aux parois. A l'ONERA, ceci est possible grâce au solveur **MAMOUT** développé par Jean-Philippe Brazier, et dans lequel nous avons intégré les conditions aux limites d'impédance en 2010, au cours du stage de master recherche de Germain Boyer. Pour cette analyse locale, on fait donc les hypothèses fortes d'un conduit infiniment long dans la direction x , donc sans aucune évolution dans cette direction ni de l'impédance de la paroi, ni de l'écoulement moyen. La géométrie du conduit est de plus restreinte à un formalisme 2D plan ou 2D axisymétrique.

Il faut mentionner que le choix de la façon d'imposer la condition d'impédance à la paroi n'a rien d'évident. Si on choisit de négliger tous les effets de viscosité et de résoudre les équations d'Euler linéarisées appliquées à un écoulement uniforme de nombre de Mach M_0 , on se ramène en fait à l'équation de Helmholtz convectée (CHE). Pour pouvoir traduire les effets de réfraction dus au cisaillement de l'écoulement à proximité de la paroi, non pris en compte par le jeu d'équation considéré, il faut écrire la condition d'impédance sous une forme modifiée $p(y_{wall}) = Z_{eff} \mathbf{v}(y_{wall}) \cdot \mathbf{n}$, en faisant intervenir une impédance effective qui diffère de l'impédance de surface du liner Z . Si par contre on prend en compte la nature cisailée du profil de vitesse dans les équations d'Euler linéarisées, on se retrouve à résoudre les équations de Pridmore-Brown (PB), et la condition d'impédance s'écrit simplement $p(y_{wall}) = Z \mathbf{v}(y_{wall}) \cdot \mathbf{n}$. Dans le cas simplifié de l'écoulement uniforme, toute la difficulté consiste à faire un choix pertinent de l'impédance effective Z_{eff} , de manière à trouver par cette approche simplifiée des modes représentatifs de ce qui est obtenu en résolvant l'équation de PB avec la "vraie" impédance de surface Z . Ceci est très bien expliqué dans les travaux récents menés par E. J. Brambley [16], qui montre ainsi que l'imposition de la célèbre condition d'Ingard-Myers [22, 13] revient à poser

$$Z_{eff} = \frac{\omega}{\omega - \alpha M_0} Z \quad (5.2)$$

et à ainsi traduire l'effet Doppler dû à la réfraction à travers une couche de vorticité via l'imposition de la continuité du déplacement acoustique normal à travers cette couche. Le formalisme "CHE + Ingard-Myers" est largement répandu dans la communauté du fait de sa simplicité de mise en   uvre² et la possibilité d'obtenir une relation explicite entre le nombre d'onde α et l'impédance Z , en faisant intervenir un nombre d'onde transversal k_y régissant la forme de la fonction propre, de manière similaire à ce qui est obtenu analytiquement dans le cas de la propagation en conduit rigide. On retrouve alors très facilement les mêmes notions qu'en propagation en conduit sans écoulement, avec l'existence pour une fréquence fixée d'un jeu de modes acoustiques propagatifs (*cut-on*) ou évanescents (*cut-off*), qui diff  rent par la complexité spatiale de leur fonction

2. Il faut mentionner cependant que le formalisme pose par contre un problème aux personnes voulant travailler dans le domaine temporel, avec l'apparition possible d'instabilités numériques liées notamment, comme démontré par Brambley [7], au caractère mal-posé mathématiquement de la condition d'Ingard-Myers pour certaines lois d'impédance.

propre et par la valeur de leur nombre d'onde axial α , ce dernier étant un nombre complexe dès lors qu'une impédance de paroi non-infinie est utilisée. Avec un outil tel que MAMOUT qui résout les équations d'Euler linéarisées complètes, sans simplification sur la forme du profil de vitesse, on retrouve bien entendu tous ces modes. On a ainsi accès aisément, pour une fréquence donnée, à l'ensemble des modes propres acoustiques ainsi qu'aux modes dits "de surface", qu'ils soient hydrodynamiques ou acoustiques selon la terminologie proposée notamment par Rienstra [31], et sur lesquels on reviendra dans la section 5.2. Il est intéressant de mentionner que, avec ou sans impédance de paroi, la prise en compte de la forme exacte du profil de vitesse moyenne peut conduire à des différences significatives sur la valeur du nombre d'onde, en comparaison avec ce qui est obtenu par l'approche simplifiée d'un écoulement uniforme. Cette différence est particulièrement notable pour les modes qui se propagent dans le sens contraire à l'écoulement. On peut donc se demander si toutes les controverses liées à la validité de la condition aux limites d'Ingard-Myers, notamment pour une propagation acoustique dans le sens contraire à l'écoulement (voir par exemple [30]), ne sont pas, au moins en partie, liées aux erreurs induites par les effets de réfraction mal pris en compte avec les formulations simplificatrices basées sur un écoulement uniforme. A titre d'exemple, les travaux récents de G. Gabard confirment toute l'importance de tenir compte correctement de l'effet de cisaillement du profil, en particulier sur les modes qui remontent l'écoulement [12].

L'application aux modes acoustiques de conduit de ce type d'analyse provenant du monde de la stabilité des écoulements de couche limite a fait l'objet de la thèse de Javier Rodriguez Sanchez, qui a été le premier doctorant pour lequel j'ai participé à la proposition du sujet de thèse, et qui a été co-dirigé avec Grégoire Casalis. Le type d'analyse modale effectué a permis notamment d'étudier le concept d'*impédance optimale*, défini au sens de Cremer[10] : pour un conduit infiniment long dont la paroi est entièrement tapissée d'un liner, c'est l'impédance de paroi qui va conduire à la meilleure atténuation possible de l'ensemble des modes acoustiques, considérés avec égale importance. On ne tient donc pas compte ici d'éventuelles ruptures d'impédance dans le sens de la propagation des ondes acoustiques qui pourraient réduire le bruit transmis du fait de phénomènes réflexifs ; ni de la nature de la source acoustique, qui peut dans les applications réelles favoriser l'émergence de certains modes acoustiques par rapport aux autres. L'impédance optimale étudiée ici se ramène donc uniquement à la valeur d'impédance Z telle que l'ensemble des modes acoustiques possibles aient le taux d'atténuation $\pm\alpha_i$ le plus élevé possible³. La formule de Cremer, et son extension aux cas avec écoulement par Tester [33, 34], n'a de plus été proposée que dans un formalisme CHE. Malgré ses limitations, elle présente néanmoins l'avantage de donner une expression analytique en fonction des seuls paramètres que sont la valeur de l'écoulement et la dimension du conduit ; elle a ainsi servi d'impédance cible aux équipes de l'ECL pour mettre en place des algorithmes de contrôle actif de l'impédance de paroi [4]. C'est suite aux travaux que nous avons mené avec eux sur ce thème [3] que l'intérêt nous est venu d'utiliser un outil comme MAMOUT pour étudier cette notion.

En effet, le tracé du spectre de valeurs propres, tel qu'illustré sur la figure 5.1, montre un comportement original des modes acoustiques dans le plan complexe (α_r, α_i) lorsqu'on fait varier la valeur de l'impédance de paroi. On voit ainsi que pour une valeur de résistance "élevée", un

3. le signe à considérer devant la partie imaginaire du nombre d'onde axial α dépend du sens de propagation du mode.

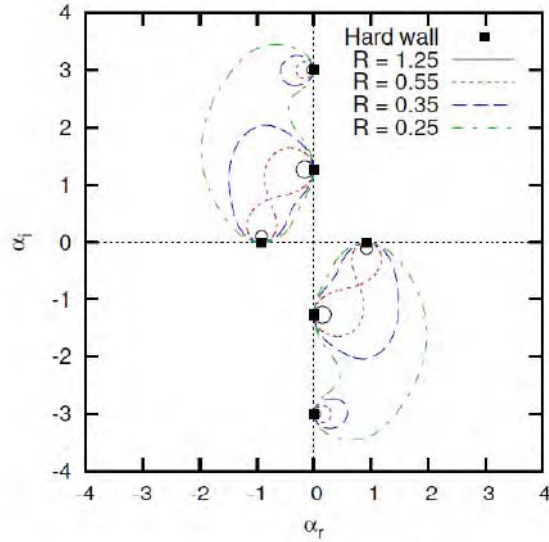


FIGURE 5.1 – Spectres des valeurs propres obtenus dans un conduit bidimensionnel, avec une valeur d'impédance $Z = R + jX$ imposée sur la paroi inférieure. Les boucles représentent le trajet dans le plan complexe effectué par les modes acoustiques lorsque la réactance X varie de $-\infty$ à $+\infty$, pour une valeur de résistance fixée.

balayage sur la réactance a simplement pour effet de faire tourner la valeur propre d'un mode autour de sa valeur obtenue en paroi rigide, traduisant l'effet atténuateur de l'impédance de paroi. Par contre, aux valeurs de résistance "faibles", la variation de réactance se traduit par des changements de position entre les modes, se traduisant par des boucles dans le spectre. Dans le cas présenté sur la figure, cela signifie par exemple que si l'on effectue un suivi de mode en balayant la réactance à partir de $X = -\infty$ à résistance fixée $R = 0.35$, le mode propagatif plan se transforme en le premier mode évanescent, tandis que ce dernier devient lui de moins en moins atténué, jusqu'à rejoindre la position du mode propagatif plan lorsque $X = +\infty$. Cela signifie en pratique que, dans cette gamme de résistance, en cherchant à atténuer un mode propagatif, on peut se retrouver dans la situation où un mode évanescent en paroi rigide se retrouve fortement amplifié. L'impédance optimale au sens de Cremer est donc la valeur permettant d'obtenir le meilleur compromis, ce qui se traduit visuellement dans le spectre par la présence d'un point de coïncidence entre les boucles (comme sur la courbe rouge de la figure). Comme on pouvait s'y attendre au vu d'un tel comportement pathologique dans le plan complexe, nous avons pu montrer que ce point de branchement correspondait à une valeur nulle de la vitesse de groupe des modes considérés [32]. Par contre, tout ceci se passant pour des valeurs réelles des fréquences, il n'y a pas lieu ici de parler d'instabilité absolue.

Il est néanmoins important de préciser que toutes les discussions précédentes ne concernent que la résolution des équations non-visqueuses. On peut donc se poser la question de la pertinence de choisir de résoudre les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen cisailé, qui ne vérifie donc pas la condition de non-glissement à la paroi sous-jacente à ce jeu d'équations.

La façon évidente de dépasser ce problème consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes linéarisées, ce qui est possible avec MAMOUT et a été notamment utilisé dans le cadre de la thèse de Javier Rodriguez Sanchez. Mais se posent alors de nouvelles difficultés :

- quel sens donner à une condition d'impédance de paroi dans un formalisme tenant compte des effets visqueux ?
- et quel écoulement de base doit-on alors considérer, sachant que les écoulements de conduit sont généralement très fortement turbulents ? Est-il justifié de ne considérer que l'écoulement moyenné en temps ? Mais alors quelle valeur doit-on prendre pour le terme de viscosité ?

Concernant la première question, des travaux théoriques ont été initiés par Aurégan [2], et un regain d'intérêt, mené par Brambley [17], a lieu actuellement à ce sujet. Ces études se concentrent à chaque fois sur la meilleure manière d'évaluer une impédance effective permettant de convertir dans un formalisme "propagation acoustique dans un milieu uniforme" l'impact des phénomènes visqueux dans l'écoulement de proche paroi. Par contre il n'y a, à ma connaissance, pas encore de justification rigoureuse de la procédure d'homogénéisation qui permet de dériver une impédance de surface à partir du comportement sous écoulement rasant d'un matériau de type "plaque perforée+ nid d'abeille", de manière analogue à ce qui a été présenté sans écoulement rasant dans le chapitre 3. Les progrès réalisés ces dernières années en simulation numérique directe de l'interaction d'un écoulement avec un liner permettront peut-être de faire avancer les réflexions sur ce sujet. La deuxième question posée précédemment est similaire à celle qui se pose pour toutes les études d'analyse de stabilité menées sur des écoulements turbulents. Là encore il n'existe pas de réponse ferme et tranchée, et la question est d'autant plus difficile que dans certains cas, comme cela a été présenté au chapitre 2.3, la présence des ondes acoustiques peut modifier la forme de l'écoulement moyen à proximité du liner. Quoi qu'il en soit, tout du moins en ce qui concerne les modes acoustiques, les travaux qui ont été menés avec MAMOUT au cours de la thèse de Javier Rodriguez Sanchez nous confortent dans l'idée que l'impact de la viscosité reste bien moindre que celui de toutes les simplifications usuellement faites pour étudier la propagation acoustique dans un conduit traité, notamment celles liées à la forme du profil de vitesse moyenne. Nous verrons en section 5.2 qu'inversement ce n'est pas du tout le cas pour les modes hydrodynamiques de surface.

Analyse bi-locale

Dans les configurations qui ne peuvent pas être simplifiées sous la forme d'un conduit 2D plan ou 2D axisymétrique, mais où on conserve néanmoins l'invariance dans la direction x , l'approche locale doit être remplacée par une approche bi-locale. On résout alors le problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathcal{A}' \cdot q'(y, z) = \alpha \mathcal{B}' \cdot q'(y, z) \quad (5.3)$$

Ceci a été mis en œuvre dans la thèse de Javier Rodriguez Sanchez pour étudier l'impact sur les modes acoustiques des variations transversales de l'écoulement moyen dans le conduit B2A (celui-ci ayant une section carrée). Cela a surtout été appliqué dans le cadre de la thèse de Lucas Pascal, que j'ai eu le plaisir de co-diriger avec Grégoire Casalis. A partir du solveur Galerkin discontinu Elvin mis en place dans le cadre de la thèse de Julien Primus, Lucas Pascal a en effet

développé le solveur **EMILE**, dont l'une des fonctionnalités permet de résoudre le problème aux valeurs propres bi-local dans une section de conduit, avec des conditions d'impédance à la paroi non-uniformément réparties. Cela nous a permis d'étudier ce que l'on appelle les "splices", c'est-à-dire les zones rigides dans une paroi traitée acoustiquement, comme ce qu'on peut trouver sur la paroi interne des nacelles d'avion lorsqu'il faut faire la jonction latérale entre deux panneaux de liners, ou bien lorsqu'une réparation impose la mise en place d'un patch qui va se comporter comme une paroi rigide acoustiquement. Ces "splices" ont un impact qui peut être significatif sur les propriétés des modes acoustiques dans le conduit. Les travaux menés dans la thèse de Lucas Pascal sur ce sujet sont synthétisés dans l'article qu'il a publié dans le Journal of Sound and Vibration [23]. En dehors des aspects de modélisation des phénomènes physiques en jeu dans cette situation, l'un des résultats importants de cette étude pour ce qui concerne les travaux que nous menons sur ce thème, est la mise en évidence du très bon comportement de la formulation numérique Galerkin Discontinue au niveau des ruptures d'impédance. Celles-ci entraînent des discontinuités et des singularités sur les composantes de la vitesse acoustique, qui sont très bien captées numériquement dès lors qu'on s'assure que les cellules du maillage présentent au niveau de la rupture d'impédance une face perpendiculaire à la paroi. Une illustration de la bonne reproduction numérique du saut qui apparaît sur la vitesse acoustique normale à la paroi au niveau de la frontière entre une paroi rigide et une paroi traitée est donnée sur la figure 5.2. On verra dans la section suivante tout l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer d'un outil numérique capable de capter correctement des phénomènes aussi violents.

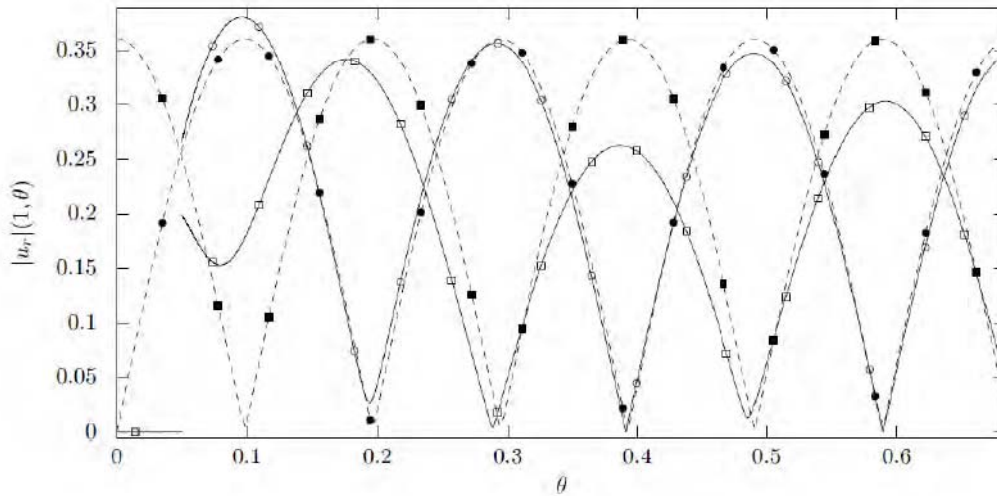


FIGURE 5.2 – Vitesse acoustique normale à la paroi d'un conduit à section circulaire traité acoustiquement, mais présentant une splice rigide entre $\theta = 0$ et $\theta = 0.05$ (donc sur laquelle $u_r = 0$). Les fonctions propres de deux modes propres sont tracées, avec en traits pointillés les solutions obtenues sans la splice, en trait pleins ceux avec la splice.

Le code **EMILE** a aussi été utilisé pour reproduire la géométrie originelle de la cellule d'essai

du banc B2A, dans laquelle la partie traitée acoustiquement ne couvre que $3/5^{\text{ème}}$ de la face inférieure, le reste étant des parois rigides (voir figure 5.3). Comme tous les essais menés au banc B2A étaient faits dans le régime d'ondes planes, nous pensions intuitivement que les deux bandes rigides situées de part et d'autre de l'échantillon (et disposées là pour des raisons de tenue mécanique du montage) n'allaient pas impacter significativement le champ acoustique. Or, comme expliqué en section 4.1, nous avons rencontré au cours de la thèse de Julien Primus des difficultés pour obtenir des valeurs d'impédances acoustiques correctes lors de la mise en œuvre du processus d'identification entre les simulations 2D plan et les mesures effectuées dans le plan central de la veine B2A (i.e. en $z = 0$). L'analyse bi-locale des modes acoustique du conduit dans la géométrie exacte du banc B2A a permis de montrer que la présence des bandes rigides latérales impactaient significativement la valeur du nombre d'onde α , et par là-même l'atténuation acoustique le long du conduit. L'utilisation de cet outil d'analyse modale a donc permis de mettre en lumière le biais intrinsèque à la stratégie d'identification que nous avions à l'époque, ce qui nous a conduit, comme expliqué précédemment, à changer la conception de la veine d'essai du B2A pour permettre aux échantillons de liner d'en recouvrir toute la largeur. Sans cela, nous aurions vraisemblablement mis beaucoup plus de temps à comprendre pourquoi les résultats d'identification que nous obtenions n'étaient pas corrects.

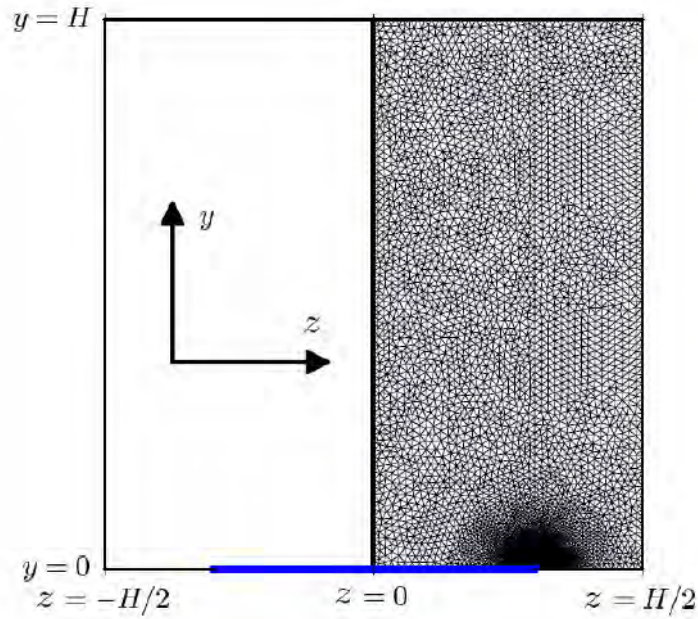


FIGURE 5.3 – Maillage de la section transverse du banc B2A pour l'analyse bi-locale avec EMILE. La portion de paroi traitée acoustiquement, en $y = 0$, est représentée en bleu. Le maillage est resserré à la discontinuité de la condition d'impédance.

5.2 Étude des modes hydrodynamiques instables

Les modes étudiés dans la section précédente sont des modes acoustiques "standards", qui sont soit évanescents, soit propagatifs dans le sens de ou contraire à l'écoulement. Mais le spectre des équations d'Euler linéarisées avec écoulement et une impédance de paroi présente aussi d'autres types de modes, mis en évidence notamment par Rienstra [31], dénommés *modes de surface* car l'essentiel de leur fonction propre est localisée à proximité de la paroi traitée. Certains de ces modes n'existent qu'avec écoulement, et sont donc appelés *modes de surface hydrodynamiques*. Il existe des configurations d'écoulement et d'impédance de paroi pour lesquelles un mode de surface hydrodynamique se retrouve dans le quadrant du spectre ($\alpha_r > 0, \alpha_i > 0$). Cela signifie que, si ce mode se propage effectivement dans le sens des x positifs, il est alors amplifié exponentiellement : Rienstra l'a alors appelé *mode hydrodynamique instable*, "HI" en anglais. Peu de temps après ces travaux théoriques, M. Leroux et Y. Aurégan ont mesuré un comportement "étrange" d'un liner céramique qui, en présence d'un écoulement suffisamment rapide, conduisait à la génération d'un bruit très violent au lieu de jouer son rôle habituel d'atténuateur [1]. Un phénomène similaire avait déjà été observé à l'université de Göttingen [8], et a fait l'objet de la thèse de M. Jüschke [14], mais la diffusion de ces travaux est restée bien plus limitée que l'article de Leroux & Aurégan. A la même période, des équipes cherchant à reproduire numériquement une expérience menée à la NASA sur un liner céramique rencontraient des difficultés avec leur solveur dans le domaine temporel, que ce soit via une résolution des équations d'Euler linéarisées [18] ou Navier-Stokes linéarisées [9]. Pour une certaine vitesse d'écoulement, apparaissent en effet dans les simulations des fluctuations à proximité immédiate du liner, qui s'amplifient exponentiellement dans la direction axiale. A l'époque, l'origine de cette "instabilité" n'était pas bien identifiée, certains auteurs donnant même des explications fantaisistes selon lesquelles cela était une onde de Tollmien-Schlichting, alors même qu'ils résolvaient des équations non-visqueuses... Il faut mentionner aussi que dans les premiers papiers de Tester sur la recherche de l'impédance optimale des conduits [34], celui-ci mentionne aussi avoir rencontré des modes au comportement "bizarre".

J'ai découvert tous ces travaux après mon embauche en tant qu'ingénieur de recherche, car Romain Pethieu, le doctorant d'alors de Frank Simon, effectuait des expériences au banc B2A sur le même type de liner que celui utilisé par M. Leroux et Y. Aurégan, et visualisait par LDV des structures cohérentes de vitesse s'amplifiant fortement le long du liner, uniquement pour une certaine gamme de vitesse d'écoulement et de fréquence d'excitation acoustique. Au vu de l'ensemble de ces résultats, j'ai eu envie d'appliquer les outils d'analyse de stabilité d'écoulement à ce type de configuration, ayant l'intuition que la présence d'un mode HI était sous-jacente aux résultats obtenus expérimentalement et numériquement. Cela a conduit au stage de master recherche de Germain Boyer, en 2009, encadré en partenariat avec Jean-Philippe Brazier, et au cours duquel les conditions d'impédance acoustique ont été introduites dans MAMOUT.

Analyse locale

Le code MAMOUT nous permet donc de réaliser une analyse de stabilité locale d'un écoulement de conduit, en tenant compte de l'impédance de paroi. Lorsque celle-ci présente une résistance faible, typiquement inférieure à 0.3, on voit apparaître un mode hydrodynamique instable, comme

illustré sur la figure 5.4. Il est important de mentionner que la présence d'un mode dans le quadrant supérieur droit du spectre ne garantit pas à elle seule que le mode en question soit instable. Pour s'assurer que cela est bien le cas, il faut évaluer la direction de propagation du mode (i.e. vérifier s'il se propage dans le sens des x positifs ou des x négatifs). Pour cela, il faut mettre en œuvre l'approche de Briggs-Bers, comme mentionné dans la section 1.1, qui permet aussi d'évaluer si l'instabilité a une nature convective ou absolue.

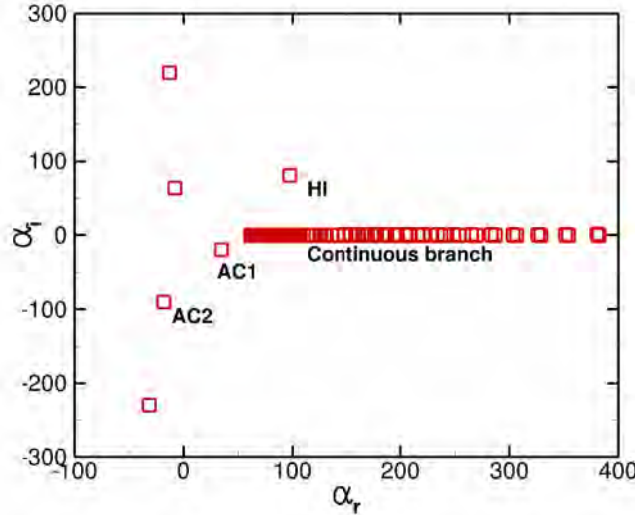


FIGURE 5.4 – Spectre des valeurs propres dans un conduit 2D avec écoulement cisailé, et dont la paroi inférieure est traitée avec une impédance $Z = 0.2 + 0.08j$

Ces outils de stabilité ont été appliqués dans le cadre du stage de Germain Boyer à deux configurations expérimentales dans lesquelles des "ondes de vortacité" avaient été mesurées au-dessus du liner par LDV et/ou PIV : les expériences menées au B2A par R. Pethieu [25], et celles réalisées à l'institut PPrime par Marx *et al.* [21, 20]. L'objectif dans chaque cas était de comparer les fonctions propres du mode HI calculé par analyse modale de l'écoulement expérimental, aux fluctuations cohérentes de vitesse mesurées au-dessus du liner. La première étude a conduit à une communication à une conférence AIAA d'aéroacoustique [5], la deuxième à un article dans le Journal of Sound and Vibration [6], dont on trouvera une copie dans l'annexe C. Les comparaisons théorie/expérience ne sont pas pleinement satisfaisantes dans la première étude, ce qui, a posteriori, peut venir d'effets tri-dimensionnels trop marqués dans les expériences du B2A menées à l'époque, et non prises en compte dans l'analyse modale. La deuxième étude, elle, a permis de montrer un accord très satisfaisant entre à la fois le nombre d'onde et la fonction propre du mode HI, et les fluctuations expérimentales. Le taux d'amplification du mode HI est cependant sur-estimé dans les résultats théoriques, ce qui, au vu des travaux récents menés par Brambley [15], provient vraisemblablement de la non-prise en compte des phénomènes visqueux. Quoi qu'il en soit, ces résultats confortent l'idée que les phénomènes observés expérimentalement proviennent en effet de l'existence d'un mode hydrodynamique qui s'amplifie exponentiellement

le long du liner, pour une certaine gamme de profil et vitesse d'écoulement, ainsi que d'impédance de paroi.

Au cours de sa thèse, Javier Rodriguez Sanchez s'est lui intéressé à la configuration expérimentale de la NASA, avec le liner céramique, qui conduit à l'observation dans les simulations numériques d'une instabilité autour de 1000 Hz. Il a pu montrer l'existence de deux modes hydrodynamiques, qui conduisent à une instabilité absolue autour de 1000 Hz lorsqu'on résout uniquement les équations d'Euler linéarisées. Ce comportement absolu peut être à l'origine des difficultés numériques rencontrées dans certaines simulations temporelles LEE menées sur cette configuration. Dès lors qu'on introduit de la viscosité dans les équations, le comportement des modes change, et on se retrouve uniquement confronté à un mode convectivement instable, toujours dans la même gamme de fréquence⁴. Ainsi, les personnes s'attaquant à cette configuration avec un code LEE basé sur des schémas assez dissipatifs, ou bien utilisant un code Navier-Stokes linéarisé, sont moins à même de rencontrer des difficultés numériques. Il faut noter que les travaux de Javier ont aussi montré que la valeur propre du mode HI (et notamment son taux d'amplification) était très sensible à la fois à la forme du profil de vitesse et à la forme de la loi d'impédance : il est vraisemblable que dans les expériences de la NASA le mode en question soit en effet stable, ou bien seulement très faiblement amplifié spatialement, ce qui expliquerait qu'il n'ait pas été observé expérimentalement, au contraire de ce qui s'est passé dans les expériences du LAUM ou de Pprime.

Interlude sur la mise en œuvre de l'alternative de Fredholm pour étudier la sensibilité des modes hydrodynamiques de surface à une petite modification de l'écoulement moyen

Nous présentons ici un complément aux travaux de Germain Boyer qui n'a pas pu être publié dans [6] pour des questions de lisibilité de l'article, mais qui mérite à mon avis d'être mentionné, car c'est une mise en application amusante de l'alternative de Fredholm, qui revient à écrire une condition de solvabilité (voir section 1.1). Dans cette interlude, on utilisera donc les notations de l'article [6] pour en faciliter la compréhension, en sachant que la principale différence par rapport aux notations du reste du manuscrit vient de l'utilisation de k pour le nombre d'onde à la place de α .

On note $\mathcal{L}(k)\mathcal{X} = 0$ le problème de stabilité locale étudié, avec $\mathcal{L}$ l'opérateur des équations d'Euler linéarisées et $\mathcal{X} = (P, U, V)$ les fonctions propres recherchées. On peut définir le produit scalaire hermitien suivant :

$$\forall \mathcal{X}, \mathcal{X}', (\mathcal{X} \cdot \mathcal{X}') = \int_0^1 (PP'^* + UU'^* + VV'^*) dy \quad (5.4)$$

Supposons qu'une modification soit effectuée sur l'écoulement de base $M_0(y)$, sous la forme d'une petite perturbation de celui-ci. Pour estimer quelle en est l'influence, la valeur propre k , la fonction propre $\mathcal{X} = (P, U, V)$, l'écoulement moyen M_0 et l'opérateur $\mathcal{L}$ sont tous recherchés sous la forme :

4. Il faut mentionner que ce changement de comportement d'une instabilité absolue vers une instabilité convective, du fait de la viscosité, a aussi été mis en évidence par Marx & Aurégan sur une autre configuration [19]

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \mathbf{o}(\varepsilon) \quad (5.5)$$

Le problème aux valeurs propres peut être linéarisé par rapport à la perturbation de l'écoulement moyen, en le décomposant selon des termes en $\mathbf{O}(1)$ et en $\mathbf{O}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{L}_0(k_0)\mathcal{X}_0 = 0 \quad (5.6a)$$

$$\mathcal{L}_0(k_0)\mathcal{X}_1 = -\mathcal{L}_1(k_0, k_1)\mathcal{X}_0 \quad (5.6b)$$

avec $\mathcal{L}_0$ l'opérateur des équations d'Euler linéarisées et

$$\mathcal{L}_1(k_0, k_1) = -i \begin{pmatrix} k_0 M_{01} & 0 & 0 \\ 0 & k_0 M_{01} & i M'_{01} \\ 0 & 0 & k_0 M_{01} \end{pmatrix} - i k_1 \begin{pmatrix} M_{00} & c_0 & 0 \\ c_0 & M_{00} & 0 \\ 0 & 0 & M_{00} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

L'équation (5.6a) a déjà été résolue à l'aide du code MAMOUT dans l'étude présentée dans l'article [6], et l'équation (5.6b) est utilisée pour calculer la partie perturbée k_1 de la valeur propre : cette équation a une solution si, et seulement si, le terme inhomogène $-\mathcal{L}_1\mathcal{X}_0$ est orthogonal à chaque solution $\mathcal{X}_0^a$ de l'opérateur adjoint homogène $\mathcal{L}_0^a(k_0)$ défini comme

$$\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \quad (\mathcal{L}_0\mathcal{X}|\mathcal{Y}) = (\mathcal{X}|\mathcal{L}_0^a\mathcal{Y}). \quad (5.8)$$

Ceci conduit à la condition de solvabilité (aussi appelée "alternative de Fredholm") :

$$(-\mathcal{L}_1(k_0, k_1)\mathcal{X}_0|\mathcal{X}_0^a) = 0. \quad (5.9)$$

où $\mathcal{X}_0^a = (P^a, U^a, V^a)$ est la fonction propre associée à la valeur propre k_0^* de l'opérateur adjoint homogène $\mathcal{L}_0^a$:

$$\mathcal{L}_0^a(k) = \begin{pmatrix} i(\omega - k^* M_0) & -i k^* & \frac{d}{dy} \\ -i k^* & i(\omega - k^* M_0) & 0 \\ \frac{d}{dy} & -M'_0 & i(\omega - k^* M_0) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Le problème adjoint des équations d'Euler linéarisées s'écrit $\mathcal{L}_0^a(k)\mathcal{X}_a = 0$ sur le domaine, avec comme condition sur les parois :

$$-\omega Z^* V^a(0) + (\omega - k^* M_0) P^a(0) = 0 \quad (5.11a)$$

$$V^a(1) = 0 \quad (5.11b)$$

La condition (5.9) donne ainsi directement la contribution perturbative de la valeur propre, qui s'écrit de manière analytique comme :

$$k_1 = \frac{-k_0 \int_0^1 M_{01} (PP^{a*} + UU^{a*} + VV^{a*}) dy - i \int_0^1 M'_{01} VU^{a*} dy}{\int_0^1 M_{00} (PP^{a*} + UU^{a*} + VV^{a*}) dy + c_0 \int_0^1 PU^{a*} + UP^{a*} dy} \quad (5.12)$$

TABLE 5.1 – Valeurs propres du mode hydrodynamique instable obtenues lorsqu’on effectue une petite modification de l’épaisseur de couche limite δ de l’écoulement moyen. Comparaison entre les calculs directs et les résultats obtenus par l’alternative de Fredholm.

	$\delta = 0.0019$	$\delta = 0.0021$
Calcul direct	$127.1 + 24.14 i$	$121.7 + 20.01 i$
Approche par alternative de Fredholm	$127.3 + 24.08 i$	$121.8 + 19.97 i$

Comme le code MAMOUT permet aussi de résoudre le problème adjoint, on peut facilement mettre en œuvre cette approche. Nous l’avons appliquée au cas $\omega = 10$, $M_{\max} = 0.5$, $\delta = 0.002$, $Z = 3.0 + 1.39i$, en s’intéressant uniquement au mode hydrodynamique instable. L’écoulement de base est modifié comme suit :

$$M_{00}(y) + M_{01} = M_{\max}g(y, \delta_0 + \delta_1) \quad (5.13)$$

avec $\delta_0 = 0.002$ et $\delta_1 = \pm 0.0001$, et g la fonction donnée dans l’article gouvernant la forme cisailée du profil de vitesse moyenne. Cela revient donc à imposer une perturbation de $\pm 5\%$ sur l’épaisseur de couche limite. Pour évaluer l’efficacité de l’approche par alternative de Fredholm, on va comparer ses résultats à une analyse modale standard effectuée sur l’écoulement de base modifié. Les résultats sont présentés dans le Tableau 5.1, pour le mode hydrodynamique instable, montrant toute l’efficacité de la méthode utilisant la condition de solvabilité. Ce type de calcul montre aussi que la partie imaginaire de k (i.e. le taux d’amplification de l’onde) est bien plus sensible à une variation du profil de l’écoulement moyen que sa partie réelle. Ceci est à mettre en regard avec les commentaires faits précédemment sur la difficulté à estimer la nature amplifiée ou non du mode HI, dès lors qu’on n’a pas une connaissance très précise de l’écoulement moyen.

Analyse globale et croissance transitoire

Tous les travaux présentés dans la section précédente ont été faits dans le formalisme *local*, donc notamment sans considérer la présence d’une rupture d’impédance aux frontières amont et aval du liner, celui-ci étant bien entendu de longueur finie dans les applications réelles. La présence d’instabilités convectives ou absolues, connues dans le monde des instabilités des écoulements pour être des marqueurs possibles d’un comportement "amplificateur de bruit" ou "oscillateur" (voir la discussion en section 1.1), ainsi que l’envie de savoir quel était l’impact que pouvaient avoir ces ruptures d’impédance, nous ont conduit à mettre en œuvre dans le cadre de la thèse de Lucas Pascal une analyse globale et une étude de croissance transitoire. Ceci a été réalisé à l’aide du code EMILE basé sur les équations d’Euler linéarisées et un formalisme Galerkin Discontinu. La géométrie considérée est un conduit 2D plan, avec le liner recouvrant une portion de la paroi inférieure. Des conditions PML sont utilisées sur les frontières amont et aval du domaine. Le code est utilisé soit pour faire une analyse de stabilité globale et trouver ainsi les modes propres globaux avec les pulsations propres complexes associées ; soit pour réaliser un étude de

croissance transitoire et rechercher la perturbation initiale qui maximise la croissance temporelle d'une énergie donnée. Dans ce dernier cas, l'étude de perturbation optimale est réalisée par une approche directe/adjointe, en profitant de la propriété de la discrétisation Galerkin Discontinue qui assure que l'adjoint du problème discrétisé est égal au discrétisé du problème adjoint.

Ces travaux ont donné lieu notamment à une communication à un symposium IUTAM [24], dans laquelle on a étudié une configuration simplifiée où l'écoulement a un profil de Poiseuille et où l'impédance de paroi est une résistance pure égale à 0.01⁵. Pour le cas où le liner a une longueur axiale égale à 4 fois la hauteur du conduit, on observe un phénomène de croissance transitoire produisant des gains très élevés. A l'horizon optimal (i.e. au temps où le gain est le plus grand), le champ de pression obtenu présente une croissance spatiale très violente le long du liner puis, à l'aval de la rupture d'impédance, on observe un mode acoustique plan de très grande amplitude (voir figure 5.5). A la fois la fréquence de ces fluctuations et leur comportement spatial sont en très bon accord avec les propriétés des modes HI et acoustiques donnés par une analyse locale. On se trouve donc en présence d'un phénomène proche de celui observé dans les expériences, avec la présence d'une fluctuation à la surface du liner s'amplifiant exponentiellement dans le direction axiale, couplée à un rayonnement sonore très important à l'aval du liner.

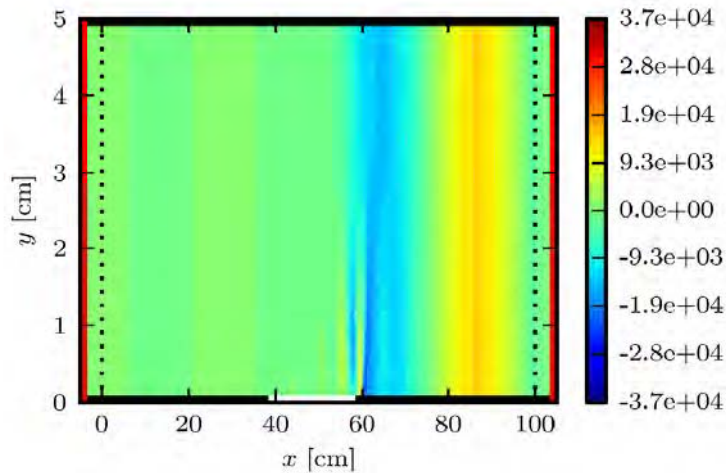


FIGURE 5.5 – Champ de pression obtenu par propagation de la perturbation optimale jusqu'à l'horizon de temps optimal. Le liner est situé sur la paroi inférieure, entre 40 et 60 cm. Il faut noter la différence d'échelle entre les coordonnées axiales et verticales.

Il est intéressant de noter qu'après cette phase de croissance transitoire, le système présente une dynamique quasi-oscillante : l'énergie diminue au fur et à mesure du temps, mais avec des oscillations dont la durée semble être reliée à un phénomène de rétroaction entre l'onde hydrodynamique instable se propageant vers la droite et le mode acoustique évanescent se propageant vers la gauche, qui est excité au niveau de la rupture d'impédance aval par la diffraction de

5. étant donné la forme peu cisailée d'un écoulement de Poiseuille, il faut en effet descendre à des valeurs de résistance très faibles pour obtenir un mode hydrodynamique convectivement instable dans l'analyse de stabilité locale

l'onde hydrodynamique. Lucas Pascal a aussi montré dans ses travaux de thèse que, à même propriété d'écoulement et d'impédance, lorsqu'on augmentait la longueur du liner on basculait vers une dynamique de type "oscillateur", avec une amplification temporelle exponentiellement croissante de l'énergie. Le scénario envisagé est que du fait de la plus grande longueur du liner, l'onde hydrodynamique réalise une amplification spatiale plus importante que la décroissance du mode acoustique évanescent, ce qui auto-entretient la génération du mode hydrodynamique par la diffraction au niveau de la rupture d'impédance amont du liner. Lucas Pascal ayant été embauché à l'ONERA/DMAE après sa thèse, il poursuit occasionnellement l'étude de ce phénomène, et a notamment montré que l'analyse de stabilité globale conduit selon la longueur du liner à des modes propres temporellement stables ou instables [29]. Je lui souhaite de réussir dans les années qui viennent à finaliser l'article présentant l'ensemble de ces résultats⁶.

Une perspective à ce travail serait aussi bien sûr de mettre en œuvre le même type d'analyse globale et de croissance transitoire à partir d'un solveur prenant en compte les effets visqueux et les effets non-linéaires, notamment car on a vu dans les analyses locales toute l'importance que pouvait avoir la viscosité sur le comportement du mode hydrodynamique instable, et car les niveaux de gain obtenus avec le solveur LEE indiquent clairement que l'on sort du cadre de l'approximation linéaire.

De manière plus générale, il serait intéressant d'étudier, que ce soit via une analyse locale ou globale, l'impact qu'aurait une impédance de surface sur les modes propres d'une couche limite. Des travaux récents ont en effet montré que la prise en compte de la perméabilité de la paroi via une condition de type "impédance statique" pouvait significativement changer les propriétés de stabilité des ondes de Tollmien-Schlichting dans une couche limite incompressible [28]. De manière similaire, de nombreuses études sont menées ces dernières années sur les couches limites en régime hypersonique au-dessus de parois structurées ou de matériaux poreux ; il est montré que l'impédance de surface créée par ces parois conduit à une stabilisation du mode dominant dans la couche limite, qui est ici le mode 2 (voir par exemple l'article [35]). Le code MAMOUT dispose déjà, grâce au travail au long cours de Jean-Philippe Brazier, des fonctionnalités d'analyse des équations de Navier-Stokes sur toute la gamme des écoulements d'air, de l'incompressible à l'hypersonique en gaz réel : on a donc tous les outils nécessaires à la mise en place d'études similaires à celles pré-citées. Les connaissances accumulées sur les applications acoustiques pourraient être mises en œuvre pour répondre aux questions sous-jacentes à toutes ces types d'étude, et rarement explicitées : est-il judicieux de modéliser sous la forme d'une impédance de surface le comportement à la paroi des fluctuations de vitesse et de pression des ondes se développant dans les couches limites ? Les lois d'impédance utilisées représentent-elles bien le comportement des matériaux considérés ? Je pense qu'il y a dans cette thématique un vaste champ d'études à explorer.

6. Étant maintenant responsable de l'unité de recherche dans laquelle il travaille, je sais bien évidemment quelles sont toutes les contraintes avec lesquelles il a à composer avant de pouvoir aller plus loin sur ces travaux ; une possibilité envisageable serait d'intégrer ces développements dans un stage.

5.3 De l'analyse modale au design de liners

Pour revenir aux applications acoustiques, les outils et concepts qui viennent d'être présentés dans toute cette deuxième partie du mémoire permettent à la fois d'évaluer l'impédance effective d'un liner acoustique, que ce soit par la modélisation ou par une identification à partir d'expériences dédiées, mais aussi l'impact d'une impédance de paroi sur le comportement du champ acoustique dans un conduit. On a donc à notre disposition les briques nécessaires pour s'attaquer à une des problématiques rencontrées dans les applications industrielles, que ce soit dans les nacelles de turboréacteurs, dans les systèmes d'échappement automobiles ou dans les systèmes de conditionnement d'air : en présence d'une source acoustique en amont d'un conduit, comment choisir au mieux un liner à placer sur une portion de la paroi interne pour minimiser le bruit transmis à l'aval du conduit ?

Il se trouve qu'en 2012 un appel à projet a été lancé dans le cadre de la plateforme SGO de l'initiative européenne CleanSky⁷ sur le thème "Design and optimisation of locally reacting acoustic material", pour une application à un système de conditionnement d'air. Avec Valia Fascio, de la société ATECA spécialisée, entre autres, dans la fabrication de liners acoustiques, nous avons proposé une réponse sous la forme du projet ALIAS, qui a été sélectionné par la commission européenne dans le cadre du Call for Partners (CfP) JTI-CS-2012-2-SGO-02-036. Ce projet, dont j'étais la coordinatrice, a duré de janvier 2013 à mi-2015 ; il représentait une activité correspondant à un financement de 300 k€ par l'union européenne, répartie en 2/3 pour l'ONERA, 1/3 pour ATECA. Il s'est avéré que l'industriel qui avait lancé ce CfP était Liebherr Aerospace, nous avons donc eu à concevoir un liner acoustique adapté à leur problématique industrielle. Les futurs systèmes de conditionnement d'air ont en effet vocation à s'affranchir au maximum des dispositifs hydrauliques et mécaniques pour devenir "tout électrique". Concernant le bruit rayonné, cela a pour conséquence de changer la nature de la source sonore : au lieu d'être un ventilateur, ce sera une trompe à air. Celle-ci rayonne dans les moyennes fréquences (typiquement dans la bande [500-3500] Hz) au contraire des ventilateurs "classiques" qui génèrent eux un bruit haute fréquence, atténué dans le système existant par une couche de quelques centimètres de matériaux poreux (de type fibres ou laines). Les contraintes d'encombrement et de masse empêchent de conserver ce type de traitement acoustique pour réduire le bruit en moyenne fréquence. La proposition du projet ALIAS était donc d'adapter à la problématique des systèmes de conditionnement d'air les solutions technologiques utilisées couramment dans les nacelles de turboréacteurs, qui sont donc des liners SDOF ou DDOF de type plaque résistive sur cavités de nid d'abeilles.

Cela a été effectué par un processus en plusieurs étapes mettant en œuvre les outils de modélisation d'impédance, de mesure d'impédance et d'analyse modale dont nous disposions, complétés par un code de résolution des équations d'Euler linéarisées en géométrie complexe (le code **SPACE** de C. Peyret [26], au département DSNA de l'ONERA Châtillon) et les capacités ATECA de fabrication de solutions industrielles. Voici de manière synthétique le processus qui a été suivi :

1. Evaluation de l'impédance de paroi conduisant à la meilleure atténuation dans la géométrie et les conditions de fonctionnement du système de conditionnement d'air de Liebherr

7. <http://www.cleansky.eu/content/project/system-green-operations>

Aerospace. Pour cela on a commencé par étudier grâce à **MAMOUT** l'atténuation attendue sur une large gamme d'impédance pour tous les modes propagatifs existant. Le code **SPACE** a permis d'affiner ces prévisions en tenant compte de toute la complexité de la géométrie du conduit industriel visé. En parallèle, l'impédance attendue pour différents types de géométries de liners était évaluée à l'aide des modèles semi-empiriques les plus adaptés aux conditions de fonctionnement industrielles. Cela a permis de trouver des concepts de liners assurant a priori le meilleur compromis entre l'atténuation réalisée, la faisabilité de fabrication, et la robustesse vis-à-vis des incertitudes sur les conditions de fonctionnement et de réalisation.

2. Vérification en laboratoire des performances des concepts de liners pré-sélectionnés. ATECA a fabriqué des échantillons pour le tube à impédance et le banc B2A, et nous avons pu mesurer l'impédance réalisée par les liners sous un environnement aussi proche que possible des applications industrielles, en terme de niveau sonore et de vitesse d'écoulement rasant.
3. Sélection des deux meilleurs concepts, réalisée au vu de simulations numériques complémentaires menées avec **SPACE**, combinant la géométrie et les conditions de fonctionnement de l'application industrielle aux lois d'impédance mesurées au banc B2A. Là encore on s'est orienté vers les solutions présentant la meilleure robustesse par rapport à toutes les incertitudes en jeu, tout en satisfaisant au mieux les contraintes industrielles sur la masse, l'encombrement et le coût de fabrication.
4. Fabrication de prototypes à l'échelle industrielle et évaluation des performances dans un banc d'essai de Liebherr Aerospace, en présence de la vraie source de bruit.

Les résultats d'atténuation acoustique ont été à la hauteur des attentes, validant la stratégie de conception qui avait été mise en œuvre. Toute cette démarche a été présentée dans une conférence AIAA [27], à titre d'illustration la figure 5.6 montre une photographie des deux prototypes réalisés à la fin du projet.

Malgré la lourdeur administrative de la mise en place et du suivi de ce type de projet CleanSky, je tire un bilan très positif de cette expérience. Cela est en effet très enthousiasmant de pouvoir mettre au service d'une application très concrète des concepts a priori assez académiques comme l'analyse spectrale ou la mesure d'impédance en laboratoire.

Fin 2015 un nouvel appel à projet a été ouvert sur ce type de thématique, cette fois dans le cadre de la plateforme Systems de CleanSky2. La problématique concernait en particulier la réduction du bruit en basse fréquence sous des contraintes d'encombrement très sévères, ainsi que la caractérisation par antennerie acoustique des sources sonores dans les systèmes de conditionnement d'air. J'ai de nouveau monté un projet pour y répondre, en s'associant cette fois, en plus d'ATECA, à une PME spécialisée en fabrication additive (Poly-Shape), et en faisant intervenir au sein de l'ONERA l'équipe de Châtillon spécialiste d'antennerie en conduit. En ce qui concerne les solutions de liners acoustique, le cœur du projet repose sur un concept innovant proposé par Frank Simon et dédié aux basses fréquences, qu'il est en train de breveter. Le projet IDEAS a été sélectionné par la commission européenne début 2016, pour un début le 1er août 2016, une durée de 3 ans et un financement européen de 600 k€. Le défi d'en assurer sa correcte coordination sera sans doute un peu plus dur à relever que pour le projet ALIAS, mais j'espère néanmoins que ce sera un cadre qui nous permettra de continuer à avancer sur cette thématique de conception de



FIGURE 5.6 – Prototypes à l'échelle 1 des deux concepts de liners fabriqués par ATECA, qui ont été testés dans l'installation de Liebherr Aerospace

liners acoustiques, et par là-même à continuer à améliorer les outils expérimentaux et théoriques dont nous disposons. Si tout se passe bien, il devrait aussi être possible de valoriser le type de solutions étudiées dans le domaine des turboréacteurs. La nouvelle génération de moteurs, dite "UHPE"⁸, conduit en effet à générer du bruit à plus basse fréquence qu'actuellement, tout en travaillant avec des nacelles plus courtes et donc des surfaces disponibles pour les traitements acoustiques significativement plus faibles : cela fait deux bonnes raisons de chercher à concevoir et optimiser des concepts alliant efficacité sur un large spectre de fréquence et compacité.

Références

- [1] Y. Aurégan et M. Leroux. « Experimental evidence of an instability over an impedance wall in a duct with flow ». In : *Journal of Sound and Vibration* 317 (2008), p. 432–439. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.04.020](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.020).
- [2] Y. Aurégan, R. Starobinski et V. Pagneux. « Influence of Grazing Flow and Dissipation Effects on the Acoustic Boundary Conditions at a Lined Wall ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 109.1 (2001), p. 59–64.
- [3] B. Betgen, M.A. Galland, E. Piot et F. Simon. « Implementation and non-intrusive characterization of a hybrid active-passive liner with grazing flow ». In : *Applied Acoustics* 73 (2012), p. 624–638.

8. Ultra High Propulsion Efficiency

- [4] Benjamin Betgen. « Comportement d'un absorbant actif en écoulement : étude théorique et expérimentale ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2010.
- [5] G. Boyer, E. Piot et J.P. Brazier. « Stability Analysis and Experimental Study of Ducted Shear Flow with Wall Lining ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3943. 7–9 juin 2010.
- [6] G. Boyer, E. Piot et J.Ph Brazier. « Theoretical investigation of hydrodynamic surface mode in a lined duct with sheared flow and comparison with experiment ». In : *J. Sound Vib.* 330 (2011), p. 1793–1809.
- [7] E.J. Brambley. « Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings ». In : *J. Sound Vib.* 322 (2009), p. 1026–1037. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.11.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.021).
- [8] M. Brandes et D. Ronneberger. « Sound amplification in flow ducts lined with a periodic sequence of resonators ». In : *1st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. AIAA-95-126. 1995, p. 893–901.
- [9] M. O. Burak, M. Billson, L.-E. Eriksson et S. Baralon. « Validation of a Time- and Frequency-Domain Grazing Flow Acoustic Liner Model ». In : *AIAA Journal* 47 (2009), p. 1841–1848.
- [10] L. Cremer. « Theorie der Luftschall-dämpfung im rechteckkanal mit schluckender Wand und das sich dabei ergebende höchste Dämpfungsmass ». In : *Acustica* 3 (1953), p. 249–263.
- [11] M. Escoufflaire, S. Redonnet et Y. Aurégan. « Numerical Prediction Of Absorbing Materials Via Computational AeroAcoustics ». In : *Proceedings of InterNoise 2012*. New York City, USA, 19-22 August 2012.
- [12] G. Gabard. « Boundary layer effects on liners for aircraft engines ». In : *Journal of Sound And Vibration* 381 (2016), p. 30–47.
- [13] U. Ingard. « Influence of fluid motion past a plane boundary on sound reflection, absorption, and transmission ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 31 (1959), p. 1035.
- [14] M. Jüschke. « Akustische Beeinflussung einer Instabilität in Kanälen mit überströmten Resonatoren ». Thèse de doct. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, 2006.
- [15] D. Khamis et E. J. Brambley. « Viscous effects on the acoustics and stability of a shear layer over a non-rigid wall ». In : *Under consideration for publication in J. Fluid Mech.* (). DOI : [arXiv:1606.03384\[physics.flu-dyn\]](https://arxiv.org/abs/1606.03384).
- [16] D. Khamis et E. J. Brambley. « Acoustic boundary conditions at an impedance lining in inviscid shear flow ». In : *J. Fluid Mech.* 796 (juin 2016), p. 386–416. ISSN : 1469-7645.
- [17] D. Khamis et E.J. Brambley. « The Effective Impedance of a Finite-Thickness Viscothermal Boundary Layer Over an Acoustic Lining ». In : *21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. AIAA Paper 2015-2229. 2015.
- [18] X. D Li, C. Richter et F. Thiele. « Time-domain impedance boundary conditions for surfaces with subsonic mean flow ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 119 (2006), p. 2665–2676.

- [19] D. Marx et Y. Aurégan. « Effect of turbulent eddy viscosity on the unstable surface mode above an acoustic liner ». In : *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), p. 3803–3820.
- [20] D. Marx, Y. Aurégan, H. Baillet et J.-Ch. Valière. « Evidence of Hydrodynamic Instability over a Liner in a Duct with Flow ». In : *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. AIAA Paper 2009-3170. 2009.
- [21] D. Marx, Y. Aurégan, H. Baillet et J.-Ch. Valière. « PIV and LDV evidence of hydrodynamic instability over a liner in a duct with flow ». In : *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), p. 3798–3812. DOI : [10.1016/j.jsv.2010.03.025](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.03.025).
- [22] M. K Myers. « On the acoustic boundary condition in the presence of flow ». In : *J. Sound Vib.* 71.3 (1980), p. 429–434. DOI : [10.1016/0022-460X\(80\)90424-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(80)90424-1).
- [23] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis. « Discontinuous Galerkin Method for the computation of acoustic modes in lined flow ducts with rigid splices ». In : *J. Sound Vib.* 332 (2013), p. 3270–3288.
- [24] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis. « Optimal disturbance in a flow duct with a lined wall ». In : *Proceedings of the Eighth IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Rio de Janeiro, Brazil*. T. 14. IUTAM Bookseries, 2015, p. 256–263.
- [25] R. Pethieu, F. Simon et F. Micheli. « Characterization of an acoustic ceramic liner in a subsonic flow by mean of Laser Doppler Velocimetry ». In : *Acoustics'08*. Paris, France, 2008.
- [26] C. Peyret et P. Delorme. « HP Discontinuous Galerkin method for Computational Aeroacoustics ». In : *Proceedings of the 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. AIAA-2007-3475, 2007.
- [27] E. Piot, J-Ph. Brazier, F. Simon, V. Fascio, C. Peyret et J. Ingenito. « Design, manufacturing and demonstration of acoustic liners for air conditioning systems ». In : *22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Lyon, France). AIAA-2016-2788. 30 mai–1^{er} juin 2016.
- [28] F. Pluvinaud, A. Kourta et A. Bottaro. « Instabilities in the asymptotic suction boundary layer over a permeable, compliant wall ». In : *Phys. Fluids* 27 (2015), p. 0541011–054101111.
- [29] S. Redonnet et al. *Projet de Recherche SMART - Rapport des activités d'année 1*. Rapport Technique RT 4/24269 DAAC. ONERA, fév. 2016.
- [30] Y. Renou et Y. Aurégan. « Failure of the Ingard-Myers boundary condition for a lined duct : An experimental investigation ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 130.1 (juil. 2011), p. 52–60.
- [31] S.W. Rienstra. « A classification of duct modes based on surface waves ». In : *Wave Motion* 37 (2003), p. 119–135. DOI : [10.1016/S0165-2125\(02\)00052-5](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(02)00052-5).
- [32] J. Rodriguez-Sanchez, E. Piot et G. Casalis. « Theoretical and numerical investigation of optimal impedance in lined ducts with flow ». In : *Acoustics 2012*. (Nantes, France). 23–27 avr. 2012.

- [33] B.J. Tester. « The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow ». In : *J. Sound Vib.* 27.4 (1973), p. 477–513.
- [34] B.J. Tester. « The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform or "plug" flow ». In : *J. Sound Vib.* 28.2 (1973), p. 151–203.
- [35] R. C. Tritarelli, S. K. Lele et A. Fedorov. « Stabilization of a hypersonic boundary layer using a felt-metal porous coating ». In : *J. Fluid Mech.* 769 (2015), p. 729–739.

Perspectives

J'ai mentionné un certain nombre de perspectives à mes travaux de recherche au fil de leur présentation dans les différents chapitres de ce mémoire, en particulier pour les travaux en lien avec les thèses que je suis en train de co-encadrer. En guise de conclusion à ce mémoire, je vais reprendre et détailler quelque peu tous ces éléments centrés sur le domaine des liners acoustiques. Je donnerai ensuite quelques perspectives hors du domaine des liners acoustiques stricto-sensu. J'exerce en effet depuis début 2014 la fonction de responsable de l'unité de recherche ITAC (Instabilités, Transition, ACoustique) du DMAE, dans laquelle sont notamment menées des études sur les couches limites laminares et leur transition vers la turbulence : certains concepts et outils issus des études sur les liners pourraient vraisemblablement s'appliquer de manière fructueuse sur cet autre problème de propagation d'ondes dans un écoulement.

Une perspective que j'envisage à court terme pour mes travaux de recherche concerne l'étude des interactions entre l'écoulement rasant et les liners acoustiques "classiques", c'est-à-dire à réaction localisée et avec une plaque perforée en paroi supérieure. Comme cela a été expliqué à de nombreuses reprises dans ce manuscrit, on se trouve confronté à plusieurs phénomènes physiques interdépendants : l'écoulement moyen a un impact sur l'impédance homogénéisée du liner, notamment du fait des interactions à l'échelle millimétrique entre le fluide, les ondes acoustiques et les perforations de la plaque supérieure ; le liner et son fonctionnement de type résonateur acoustique a lui-même, dans certaines conditions, un impact sur le profil d'écoulement moyen et le champ de fluctuations turbulentes à proximité de la paroi ; enfin, la présence à la fois du liner (réalisant une certaine loi d'impédance fréquentielle) et de l'écoulement cisailé a un impact sur la propagation des ondes acoustiques dans le conduit, cet impact étant propre à chaque mode (il dépend donc de l'ordre du mode et de son sens de propagation), et pouvant donc être mal capté par les approches simplifiées basées sur les équations de Helmholtz convectées et une condition aux limites d'impédance d'Ingard-Myers qui sont la base de l'immense majorité des travaux existants sur cette problématique. Il serait donc très intéressant de chercher à revisiter les modèles d'impédance sous écoulement rasant existants, en s'appuyant sur les outils de caractérisation expérimentale, d'identification d'impédance et d'analyse modale dont on dispose au DMAE. Ainsi, la mise en œuvre de mesures LDV trois composantes et/ou de mesures PIV résolues en temps (idéalement tomographique), suivies d'un post-traitement par analyse conditionnelle systématisant l'évaluation des incertitudes (par exemple avec une approche bootstrap), permettrait une caractérisation expérimentale poussée des interactions entre le liner et l'écoulement de conduit pleinement développé qui existe au sein du banc B2A. Ces informations pourraient aussi servir à caractériser l'impact des liners sur la traînée de frottement, qui peut devenir dans le futur un des

critères de sélection entre concepts de liners, et à améliorer les modélisations RANS à proximité de ce type de paroi. On a vu en effet qu'en présence d'ondes acoustiques de niveau suffisamment élevées, une modification du profil de vitesse moyenne pouvait apparaître dans la région en loi log qui est au cœur des modèles RANS des écoulements turbulents. Il y a dans les autres unités du DMAE toutes les compétences nécessaires pour avancer ensemble sur ces sujets. Ces investigations expérimentales pourraient aussi aider à répondre à la question à laquelle je n'ai pour l'instant trouvé nulle part de réponse : cela a-t-il un sens d'imposer une condition d'impédance de paroi sur l'ensemble des fluctuations de l'écoulement, c'est-à-dire à la fois sur celles de nature "acoustique" et sur celles de nature "turbulente" ? Avec un peu de chance, les différences d'échelle de cohérence spatio-temporelle entre les deux types de fluctuation font que l'imposition d'une condition d'impédance acoustique en paroi ne biaise pas la structure de la turbulence. On peut néanmoins s'attendre à ce que la validité de cette approche soit restreinte à un certain ratio entre l'amplitude des fluctuations acoustiques et celle des fluctuations turbulentes. Le meilleur moyen de répondre à cette question serait de comparer une étude expérimentale fine (à base de LDV ou de PIV-TR en proche paroi) avec des simulations DNS ou LES dans laquelle l'impédance de paroi est appliquée sur le champ fluctuant. Une collaboration avec l'ISAE et Pprime a été récemment tentée sur ce thème, sans réussite sur la recherche de financement, mais j'espère que nous trouverons dans le futur un cadre pour avancer. Pour améliorer les modèles d'impédance sous écoulement rasant, il faudra s'appuyer sur les outils d'identification dont nous disposons : le fait que le code *Elvin* permette de tenir compte du vrai profil d'écoulement moyen devrait permettre de s'affranchir du biais lié à l'impact croisé de l'impédance et de la forme du profil de vitesse sur la propagation des modes acoustiques. Il est prévu de poursuivre la coopération avec la NASA sur cette thématique : ils disposent d'un large panel d'outils d'identification, et d'une banque de données expérimentales énorme, ce qui devrait aider à la compréhension des phénomènes en jeu. Il faut noter que le banc B2A ne permet actuellement de générer que des ondes acoustiques se propageant dans le sens de l'écoulement, qui sont justement celles les moins sensibles à cet impact impédance/profil de vitesse. La NASA dispose elle de bancs permettant aussi d'étudier des modes acoustiques se propageant contre l'écoulement : c'est sur ce type de données qu'on s'attend à obtenir un biais sur l'identification d'impédance avec un code utilisant l'approximation d'écoulement uniforme et la condition d'Ingard-Myers. Pouvoir comparer, sur le même jeu de données expérimentales, les résultats de leur approche avec ceux obtenus par *Elvin* permettrait de trancher cette question. Surtout si on dispose aussi de résultats obtenus avec le même liner mais pour une excitation acoustique se propageant dans le sens de l'écoulement : sauf s'il s'avère que la structure de l'interaction écoulement/acoustique en proche paroi diffère selon le sens de propagation des ondes, on s'attend à devoir obtenir exactement la même impédance sous écoulement dans les deux cas d'excitation. Idéalement, il faudrait aussi pouvoir étudier tous ces phénomènes lorsque l'écoulement n'est pas un écoulement de conduite mais un écoulement de couche limite, comme dans l'entrée d'air des nacelles de turboréacteurs. Pour étudier cette configuration au banc B2A, une possibilité serait d'insérer un piège à couche limite en amont du porte-échantillon pour le liner ; réussir à donner cette fonctionnalité supplémentaire au banc serait une avancée très significative ! Au vu des indices sur ce sujet dans la littérature, il semble que le paramètre clef pour caractériser l'impact de l'écoulement sur l'impédance réalisée par le liner soit alors l'épaisseur de déplacement, au lieu de la vitesse de frottement pariétal dans

les écoulements de conduit. On ne trouve malheureusement que peu de données dans la littérature liées à ce cas, ou bien alors les propriétés du profil d'écoulement ne sont pas précisément connues.

Une autre perspective liée à l'interaction écoulement/liner concerne les configurations plus spécifiques aux parois des chambres de combustion, où on trouve une plaque perforée soumise à la fois à un écoulement traversant et à un écoulement rasant. La procédure d'identification d'impédance et de dérivation d'un modèle d'impédance spécifique à cette application a été initiée lors de la thèse de V. Popie et la collaboration avec S. Tordeux et A. Bendali, mais il y aurait matière à poursuivre sur ce thème. Le banc B2A est en effet un des rares moyens d'essai permettant de réaliser la combinaison des deux types d'écoulement et disposant de fonctionnalités d'identification d'impédance. Il serait aussi intéressant de poursuivre sur cette thématique avec des simulations directes des phénomènes à proximité des perforations, afin de s'en servir comme base pour des approches d'homogénéisation. J'espère trouver l'occasion à moyen terme d'évaluer la potentialité d'une approche Lattice-Boltzmann pour réaliser ce type de simulations : une collaboration est en cours de construction avec l'équipe de la société Matelys qui développe le module "matériaux poreux/ plaque perforées" dans le code LaBS, cela pourrait être une bonne opportunité.

Une autre problématique riche à la fois de perspectives scientifiques et d'applications industrielles concerne l'étude de l'impact du niveau sonore et de son contenu fréquentiel sur l'impédance réalisée par les liners. Dans la gamme de niveaux sonores des applications industrielles, on se rend compte en effet de la fragilité de l'approche consistant à identifier l'impédance à partir d'une campagne expérimentale menée avec une excitation sonore dont le contenu fréquentiel ne peut que différer de celui auquel sera soumis le liner dans les applications industrielles. Un moyen de contourner le problème consiste à considérer que le paramètre gouvernant l'effet sur l'impédance est le niveau sonore global sur toute la bande de fréquence étudiée. Néanmoins, pour essayer de capter plus proprement ce qui se passe et les effets d'interaction entre raies de différentes fréquences, il serait intéressant de mettre en place une procédure d'identification d'impédance à partir de simulations temporelles. D. Dragna à Lyon vient de le faire dans le but de pouvoir reproduire des configurations expérimentales où plusieurs ordres de modes acoustiques sont propagatifs, il s'agirait dans notre cas de rester sur la configuration du banc B2A, avec uniquement des modes acoustiques plans mais la possibilité d'interactions entre les fréquences. Le pré-requis pour y arriver, et c'est un travail de recherche en soi, consiste à trouver comment modéliser correctement dans le domaine temporel des effets de la non-linéarité liée au niveau sonore sur la condition d'impédance. Cela fait partie des thèmes que nous souhaitons aborder d'ici la fin de la thèse de F. Monteghetti.

Pour poursuivre sur les perspectives impliquant des non-linéarités, il faut mentionner la problématique des ruptures d'impédance et les possibles phénomènes de rétroaction entre les modes hydrodynamiques de surface et la "diffraction" des modes acoustiques aux frontières amont et aval du liner. Les travaux menés par Lucas Pascal on en effet montré que les mécanismes qui apparaissaient alors nécessitaient de sortir du cadre de l'analyse de stabilité globale linéaire : il faudrait pour aller plus loin appliquer des outils tenant compte des non-linéarités, ainsi que des phénomènes visqueux. Comme ce type d'outils existe déjà pour d'autres types d'applications dans la communauté scientifique de l'analyse des perturbations d'écoulement, il serait judicieux

de s'appuyer sur des collaborations pour mettre en place un outil adapté à notre problématique. Il serait aussi très intéressant de mener une campagne expérimentale poussée sur ce problème, en exploitant toute la précision spatiale de la mesure LDV pour étudier les phénomènes apparaissant au niveau des ruptures d'impédance.

Les perspectives d'études présentées jusqu'à présent portaient sur les liners "classiques", à réaction localisée. Elles sont tout aussi pertinentes appliquées à des matériaux poreux, à réaction non-localisée. Les travaux qui sont en train d'être menés dans la thèse de R. Roncen vont permettre d'avancer sur la problématique d'identification des paramètres caractéristiques de la réponse acoustique de poreux. C'est vaste un champ d'étude qui existe ici, et sur lequel il y a une expertise forte dans plusieurs équipes en France (on peut citer notamment le LAUM, l'UTC, Supmeca, Matelys). Le positionnement que nous avons au DMAE, porté par Frank Simon, consiste à exploiter les capacités propres au banc B2A liées à l'écoulement rasant, à la possible prise en compte de gradients thermiques, et à l'appui des procédures d'identification sur des données en proche paroi. Cela ouvre notamment la voie à la conception de liners innovants permettant, grâce à un choix judicieux de leur structuration géométrique et des matériaux les constituant, de réaliser une atténuation acoustique dans des domaines fréquentiels ou dans des modalités d'application inaccessibles aux solutions disponibles jusqu'à présent.

Enfin, pour clore les perspectives liées au domaine des liners acoustiques et faire la transition vers d'autres types d'applications, je peux maintenant mentionner la question de l'intégration dans un code CFD comme **elsA** des conditions aux limites d'impédance en temporel. Étant totalement incompetente sur ce type d'activité de développement numérique dans un code de cette envergure, cette action prévue à court terme se fera grâce à H. Deniau, en parallèle des travaux de thèse de F. Monteghetti. Ce dernier est en effet en train de mettre en place le cadre mathématique permettant d'exprimer la condition d'impédance de paroi sous la forme d'une équation différentielle ordinaire auxiliaire au système d'équations différentielles partielles principal, tout en tenant compte correctement des mécanismes diffusifs et retardés en jeu au sein de la structure des liners⁹. Ce type de condition d'impédance en temporel a en soi déjà un intérêt significatif pour les applications de type "CAA", dans lequel on cherche à simuler la propagation des ondes acoustiques dans un milieu complexe, tout en tenant compte de la présence de liners acoustiques sur certaines parois. Pour ce type d'application, comme c'est un domaine sur lequel de nombreux travaux sont menés depuis bientôt deux décennies, il existe néanmoins déjà un grand nombre de solutions numériques¹⁰, spécifiquement développées pour les schémas d'intégration temporelle d'ordre élevé nécessaires à ce type de calcul de propagation d'ondes. L'intérêt d'implanter une condition d'impédance dans un code CFD serait de pouvoir étudier des configurations où des liners sont situés à proximité immédiate des sources de bruit, comme par exemple sur les étages de stators du fan d'un turboréacteur, ou bien au niveau des bords de fuite ou des bords d'attaque des systèmes hypersustentateurs. Or, pour réaliser ce type de calcul où il faut calculer toute la complexité de l'écoulement, seuls des calculs avec des schémas temporels implicites sont viables en pratique. Sur le papier, la formulation à base

9. le mécanisme diffusif étant d'autant plus significatif dans les concepts de liners faisant intervenir des couches de matériaux poreux, ou bien dans les concepts innovants adaptés à l'absorption basse fréquence proposés par F. Simon

10. non adaptées par contre au traitement des mécanismes diffusifs dans les liners

d'une équation différentielle ordinaire auxiliaire est adaptée sans difficulté à une implication en temps, nous verrons dans la pratique si cela fonctionne aussi bien qu'espéré. Il est important de mentionner qu'on se trouvera ici encore confronté à la question de la pertinence d'appliquer une telle loi d'impédance sur l'ensemble des fluctuations de l'écoulement, et non uniquement sur leur composante acoustique.

Des perspectives hors du domaine des liners acoustiques à proprement dits, plutôt liées à la partie "couche limite" des activités de l'unité ITAC, peuvent aussi être identifiées. Pour contrôler l'amplification des instabilités des couches limites laminares près du bord d'attaque des voilures d'avion, ou pour empêcher la contamination de la voilure par turbulence provenant du fuselage, une des solutions consiste à aspirer la couche limite à l'aide de plaques microperforées (typiquement le diamètre des trous est de l'ordre de la centaine de microns, avec un taux de porosité de l'ordre du pourcent). L'optimisation de cette technique nécessite de bien dimensionner la perméabilité statique de la plaque. Celle-ci est classiquement mesurée dans un banc de perméabilité, où on mesure le saut de pression statique de part et d'autre de la plaque en fonction du débit qui la traverse. Cela est donc réalisé sans tenir compte de l'écoulement rasant vu par la paroi dans les applications réelles, et cela a pour l'instant donné satisfaction. Il serait intéressant à mon sens d'appliquer sur ce type de parois les techniques de caractérisation acoustique qui ont été développées pour les liners, en particulier celles pour les matériaux poreux car la perméabilité statique est un des paramètres gouvernant leur réponse acoustique. Une autre piste d'étude, possiblement très riche, concerne l'étude de l'impact d'une loi d'impédance de paroi sur l'amplification des ondes de couches limites, telles les ondes de Tollmien-Schlichting, les modes instables spécifiques aux couches limites supersoniques ou hypersoniques, ou bien les ondes crossflow. On s'attend néanmoins pour ces dernières à un effet moins significatif, car elles sont gouvernées par la nature inflexionnelle du profil de vitesse transversale et sont donc moins sensibles aux effets en très proche paroi. La piste la plus prometteuse est vraisemblablement celle des modes des couches limites supersoniques ou hypersoniques. En effet dans ce régime, contrairement à ce qui se passe pour la réceptivité des couches limites à basse vitesse, on a aisément une concordance entre les longueurs d'ondes acoustiques et les longueurs d'ondes des modes instables de la couche limite, rendant ainsi le phénomène de réceptivité pleinement efficace. Les connaissances acquises sur les liners acoustiques devraient permettre d'aider à la définition de la loi d'impédance la plus pertinente pour représenter le type de matériau utilisé pour former la paroi. Enfin, sur le plan expérimental, il serait sans aucun doute très utile de systématiser les mesures non-intrusives à base de laser et le post-traitement du signal basé sur le principe du conditionnement lors des investigations du développement des instabilités dans les couches limites laminares. Cela aurait un intérêt particulièrement marqué dans les configurations où les techniques plus classiques à base de fil chaud ne fonctionnent pas (en présence par exemple d'un actionneur plasma générant des perturbations électromagnétiques dommageables à ce type de capteur), ou bien pour extraire plus efficacement les composantes cohérentes du signal mesuré liées au développement des instabilités.

Je finis maintenant ce mémoire en rappelant la démarche que j'ai essayée de suivre tout au long de ces années, centrée sur l'ouverture vers d'autres domaines scientifiques grâce à des collaborations avec des chercheurs d'horizons divers et variés, spécialistes de mécanique des fluides ou de mathématiques appliquées, venant de l'ONERA ou d'autres laboratoires. L'encadrement

partagé de thèses est un des moyens les plus efficaces pour réussir ces collaborations, et le travail en partenariat avec les doctorants est pour moi la meilleure source pour faire avancer les questionnements scientifiques. Je compte ainsi dans les années qui viennent pouvoir continuer à apprendre sur mes sujets de prédilection et, selon les opportunités, découvrir d'autres domaines, en continuant à mettre en avant les aspects modélisation, toujours en appui sur des activités expérimentales et de simulation numérique.

Annexe A

Curriculum Vitae détaillé

Estelle PIOT

née le 29 juin 1982 à St Martin d'Hères (Isère, France)

ingénieur de recherche à l'ONERA, département DMAE

chef de l'unité de recherche ITAC (Instabilités, Transition et ACoustique)

Formation

- *2005-2008* : **Doctorat en mécanique des fluides** - délivré par l'Université de Toulouse / Supaéro, et effectué à l'ONERA sous la direction de Grégoire Casalis : "Simulation numérique directe et analyse de stabilité de couches limites laminares en présence de micro-rugosités"
- *2004-2005* : Coursus ingénieur **Supaéro**, avec en parallèle le **Master Recherche** de dynamique des fluides
- *2001-2004* : Coursus ingénieur **Ecole Polytechnique**

Expérience professionnelle

- *2014-actuellement* : **Chef d'unité de recherche** - ONERA - Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique - Unité ITAC (instabilités, transition et acoustique), composée de 9 permanents et environ 8 doctorants
- *2008-2013* : **Ingénieur de recherche** - ONERA - Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique. Aéroacoustique expérimentale et numérique - Travaux sur les matériaux absorbants acoustiques
- *2005-2008* : **Doctorante** - ONERA - Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique. Impact des rugosités de surface sur la transition vers la turbulence des écoulements d'ailerons. *Lauréate en 2008 du prix EADS de la meilleur thèse en Sciences de l'Ingénieur. Lauréate en 2007 d'une bourse l'Oréal - Unesco "Pour les femmes et la science"*

- **2005 : Stage de fin d'étude** - ONERA - Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique. Bruit rayonné par les instabilités de jets subsoniques et supersoniques, sous la direction de Grégoire Casalis
- **2004 : Stage d'option scientifique** - Université d'Ottawa - Ontario, Canada. Instabilité hydrodynamique laminaire dans un canal annulaire excentrique, sous la direction de Stavros Tavoularis

Activités de recherche

La liste de toutes les publications, communications, brevets est donnée en annexe. On rappelle ici leur nombre, par rubrique.

- Publications dans des journaux avec comité de lecture : 13
- Contributions à un numéro spécial de journal : 5
- Contributions à des ouvrages : 5
- Proceedings dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture : 28
- Proceedings dans des congrès français avec actes et comité de lecture : 6
- Communications orales, sans actes, dans des conférences et des séminaires : 11
- Rapports techniques ONERA : 39
- Brevets : 1

Parmi toutes les publications dans des journaux, voici la liste de cinq publications marquantes :

1. E. Piot et G. Casalis. « Absolute stability mechanism of a swept cylinder laminar boundary layer with imposed spanwise periodic conditions ». In : *Phys. Fluids* 21.6 (2009) ;
2. B. Betgen et al. « Characterization of a Hybrid Active-Passive absorber by Means of Laser Doppler Velocimetry ». In : *Applied Acoustics* 73 (2012), p. 624–638 ;
3. S. Laurens et al. « Effective conditions for the reflection of an acoustic wave by low-porosity perforated plates ». In : *J. Fluid Mech.* 1743 (2014), p. 448–480 ;
4. J. Primus, E. Piot et F. Simon. « An adjoint-based method for liner impedance eduction : Validation and numerical investigation ». In : *J. Sound Vib.* 332 (2013), p. 58–75 ;
5. G. Boyer, E. Piot et J.Ph Brazier. « Theoretical investigation of hydrodynamic surface mode in a lined duct with sheared flow and comparison with experiment ». In : *J. Sound Vib.* 330 (2011), p. 1793–1809.

Activités d'enseignement

Cours et travaux dirigés à l'ISAE (Supaéro et ENSICA)

- Mécanique des fluides : travaux dirigés en première année de Supaéro, 20h par an de 2006 à 2008

- Mécanique des milieux continus : travaux dirigés en première année de Supaéro, 10h par an de 2006 à 2007
- Elasticité linéaire : travaux dirigés en première année de Supaéro, 10h par an de 2006 à 2007
- Efforts aérodynamiques sur une structure : travaux dirigés en master ISAE-Supaéro, 10h par an de 2008 à 2009
- Acoustique : travaux dirigés en deuxième année de Supaéro, 5h par an de 2009 à 2011
- Acoustique : travaux dirigés en troisième année de l'ENSICA, 2h30 par an en 2009
- Aérodynamique des turbomachines : travaux dirigés en troisième année de Supaéro, 10h par an depuis 2011
- Aéroacoustique des machines tournantes : travaux dirigés en troisième année de Supaéro, 2h30 par an depuis 2010
- Simulations des systèmes complexes : cours en troisième année de Supaéro, 2h30 par an depuis 2012

Cours et travaux dirigés à l'ENSEEIH

Création en 2013-2014 du cours d'aéroacoustique numérique en troisième année de l'ENSEEIH (option Mécanique des Fluides Numériques), reconduit depuis.

Durée de 20h, réparties en 6 sessions de cours et 4 sessions de travaux dirigés (les sessions durent 2h). Je m'occupe d'une session de cours, des 4 sessions de TDs et de l'examen ; je fais intervenir Jean-François Boussuge (CERFACS/Toulouse) et Stéphane Redonnet (ONERA/Châtillon) pour les 5 autres sessions de cours.

Cours lors de stages de formation continue EuroSAE

- Stage FMA017, "Acoustique appliquée pour l'ingénieur" : 5h de cours, participation en 2009 et depuis 2012
- Stage ARF006, "Capteurs et instrumentation en mécanique des fluides" : 3h de cours, participation depuis 2013

Mini-projets ISAE-Supaéro

Ces mini-projets consistent en l'encadrement d'étudiants de troisième année de Supaéro sur des projets de 20h, sur un sujet proposé par l'encadrant. Les séances sont réparties sur trois mois environ.

- Projets de synthèse en aérodynamique :
 - ✓ 2014 : projet de Mélanie Frago et Paul-Louis Cogniet sur l'analyse de structures cohérents par Décomposition en Modes Dynamiques, co-encadré (10%) avec Olivier Léon

- ✓ 2013 : projet de Oleguer Berengué-Llonch sur la propagation acoustique en conduit traité en présence d'instabilité hydrodynamique, co-encadré (10%) avec Julien Primus et Lucas Pascal
- ✓ 2012 : projets de Nicolas Renard et Quentin Bouvy sur la caractérisation de l'impédance acoustique de matériaux, co-encadrés (50%) avec Julien Primus
- Projets de synthèse en simulations des systèmes complexes :
 - ✓ 2013 : projet de Pierre Grenson, Fernando Garcia-Lubio, Stefano Chiazza, Pierre Cantin et Atoussa Barzine sur l'amélioration d'un code d'identification de l'impédance acoustique, co-encadré (25%) avec Lucas Pascal

Encadrement d'étudiants

Thèses co-encadrées

1. R. Roncen. *Identification par méthode inverse des paramètres représentatifs de l'absorption acoustique de matériaux poreux sous écoulement*. Thèse de l'Université de Toulouse, débutée en octobre 2015 (thèse effectuée à l'Onera, encadrement 50%, directeur de thèse F. Simon, ONERA).
2. F. Monteghetti. *Modélisation dans le domaine temporel de la condition d'impédance de paroi*. Thèse de l'Université de Toulouse, débutée en octobre 2015 (thèse effectuée à l'Onera, encadrement 33%, directeur de thèse D. Matignon, ISAE-Supaéro)
3. O. Berengue-Llonch. *Identification des paramètres représentatifs de l'absorption acoustique de matériaux poreux*. Thèse de l'Université de Toulouse, débutée en octobre 2013 (thèse effectuée à l'Onera, encadrement 50%, directeur de thèse F. Simon, ONERA). Thèse **stoppée en mars 2014** du fait d'un retour en Espagne pour raisons familiales
4. V. Popie. *Modélisation asymptotique de la réponse acoustique de plaques perforées dans un cadre linéaire avec étude des effets visqueux*. Thèse de l'Université de Toulouse, **soutenue le 14 janvier 2016** (thèse effectuée à l'Onera, encadrement 50%, directeur de thèse S. Tordeaux, INRIA Bordeaux Sud-Ouest)
5. L. Pascal. *Acoustique modale et stabilité linéaire par une méthode numérique avancée. Cas d'un conduit traité acoustiquement en présence d'un écoulement*. Thèse de l'Université de Toulouse, **soutenue le 6 novembre 2013** (thèse effectuée à l'Onera, encadrement 50%, directeur de thèse G. Casalis, ONERA)
6. J. Rodriguez-Sanchez. *Modes propres acoustiques en conduit avec parois traitées acoustiquement*. Thèse de l'Université de Toulouse, débutée en octobre 2010 (thèse effectuée à l'Onera, encadrement 50%, directeur de thèse G. Casalis, ONERA). Thèse de l'Université de Toulouse, **soutenue le 4 mai 2016** (retard lié à un retour au Mexique au bout des trois années de thèse, pour raisons familiales).
7. H. Parisot-Dupuis. *Application de l'holographie acoustique en soufflerie par mesures LDV*. Thèse de l'Université de Toulouse, **soutenue le 5 décembre 2012** (thèse effectuée à l'Onera, encadrement 50%, directeur de thèse F. Simon, ONERA)

8. J. Primus. *Détermination de l'impédance acoustique de matériaux absorbants en écoulement par méthode inverse et mesures LDV*. Thèse de l'Université de Toulouse, **soutenue le 6 décembre 2012** (thèse effectuée à l'Onera, encadrement 50%, directeur de thèse F. Simon, ONERA)

Stages de fin d'étude et de master recherche

1. F. Monteghetti. *Modélisation temporelle du comportement acoustique de matériaux absorbants aéronautiques*. Stage de fin d'étude/M2R de l'ISAE-Supaéro, 2015 (co-encadrement 25% avec L. Pascal - ONERA - et D. Matignon - ISAE -)
2. B. Joseph. *Liner acoustique avec système anti-givrage*. Stage de fin d'étude de l'ENSEEIH, 2014 (co-encadrement 50% avec P. Trontin)
3. J. Deborde. *Etude de faisabilité de mise en oeuvre d'une méthode inverse d'obtention de l'impédance acoustique de liner par approche couplée 2D/3D*. Stage de M2R de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2013 (co-encadrement 50% avec F. Simon)
4. V. Popie. *Identification de l'impédance acoustique d'une plaque multi-perforée*. Stage de fin d'étude/M2R de l'INSA Toulouse, 2012. (encadrement 100%)
5. F. Henning. *Three-dimensional effects on the propagation of acoustical waves in presence of a mean flow in a rectangular duct with an absorbing surface wall*. Stage de fin d'étude de l'université de Stuttgart / Supaéro, 2010 (co-encadrement 50% avec J-Ph. Brazier)
6. G. Boyer. *Étude numérique du comportement des matériaux acoustiques absorbants en présence d'un écoulement rasant*. Stage de fin d'étude/M2R de Supaéro, 2009 (co-encadrement 50% avec J-Ph. Brazier)
7. C. Content. *Etude de l'influence de microrugosités sur l'écoulement autour d'une aile en flèche à bord d'attaque circulaire*. Stage de fin d'étude/M2R de l'INSA Rouen, 2007 (co-encadrement 50% avec G. Casalis)

Activités de rayonnement scientifique

Actions de reviewing et d'expertise

Revue d'articles dans les journaux scientifiques *Journal of Sound and Vibration* et *Journal of the Acoustical Society of America*. Participation au processus d'expertise pour des projets ANR (2012) et de sélection pour le congrès AIAA/CEAS d'aéroacoustique (2016). Chairwoman d'une session "duct acoustics" lors du congrès AIAA/CEAS d'aéroacoustique en 2016.

Participation à des jurys de thèse

1. : 27 novembre 2014 : membre invité au jury de soutenance de Romain Montheard, doctorant LAAS-CNRS sur la "Récupération d'énergie aéroacoustique et thermique pour capteurs sans fil embarqués sur avion"

Coordination de projets de recherche

1. ALIAS : réponse à appel à projet dans l'initiative européenne de recherche en aéronautique JTI CleanSky (plateforme SGO) puis coordination du projet (2013-2015, financement de 300k€ par l'union européenne réparti en 2/3 pour l'ONERA, 1/3 pour la PME ATECA).
2. IDEAS : réponse à appel à projet dans l'initiative européenne de recherche en aéronautique CleanSky2 (plateforme Systems) puis coordination du projet (2016-2019, financement de 600k€ par l'union européenne réparti en 2/3 pour l'ONERA, 1/6 pour la PME ATECA, 1/6 pour la PME Poly-Shape).

Annexe B

Liste des publications et communications

B.1 Journaux avec comité de lecture

- [1] F. Monteghetti, D. Matignon, E. Piot et L. Pascal. « Design of broadband time-domain impedance boundary conditions using the oscillatory-diffusive representation of acoustical models ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 140.3 (sept. 2016), p. 1663–1674.
- [2] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis. « A new implementation of the Extended Helmholtz Resonator acoustic liner impedance model in time domain CAA ». In : *Journal of Computational Acoustics* 23 (2015), p. 1550015.
- [3] S. Laurens, E. Piot, A. Bendali, M'B. Fares et S. Tordeux. « Effective conditions for the reflection of an acoustic wave by low-porosity perforated plates ». In : *J. Fluid Mech.* 1743 (2014), p. 448–480.
- [4] A. Bendali, MB. Fares, E. Piot et S. Tordeux. « Mathematical justification of the Rayleigh conductivity model for perforated plates in acoustics ». In : *SIAM Journal of Applied Mathematics* 73.1 (2013), p. 438–459.
- [5] H. Parisot-Dupuis, F. Simon, E. Piot et F. Micheli. « Non-intrusive planar velocity-based nearfield acoustic holography in moving fluid medium ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 133.6 (2013), p. 4087–4097.
- [6] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis. « Discontinuous Galerkin Method for the computation of acoustic modes in lined flow ducts with rigid splices ». In : *J. Sound Vib.* 332 (2013), p. 3270–3288.
- [7] J. Primus, E. Piot et F. Simon. « An adjoint-based method for liner impedance eduction : Validation and numerical investigation ». In : *J. Sound Vib.* 332 (2013), p. 58–75.
- [8] B. Betgen, M.A Galland, E. Piot et F. Simon. « Characterization of a Hybrid Active-Passive absorber by Means of Laser Doppler Velocimetry ». In : *Applied Acoustics* 73 (2012), p. 624–638.

- [9] G. Boyer, E. Piot et J.Ph Brazier. « Theoretical investigation of hydrodynamic surface mode in a lined duct with sheared flow and comparison with experiment ». In : *J. Sound Vib.* 330 (2011), p. 1793–1809.
- [10] E. Piot et S. Tavoularis. « Gap instability of laminar flows in eccentric annular channels ». In : *Nuclear Engineering and Design* 241 (2010), p. 4615–4620.
- [11] E. Piot et G. Casalis. « Absolute stability mechanism of a swept cylinder laminar boundary layer with imposed spanwise periodic conditions ». In : *Phys. Fluids* 21.6 (2009).
- [12] E. Piot, G. Casalis et U. Rist. « Stability of the laminar boundary layer flow encountering a row of roughness elements : Biglobal stability approach and DNS ». In : *Eur. Jour. of Mech. B/Fluids* 27.6 (2008), p. 684–706.
- [13] E. Piot, G. Casalis, F. Muller et C. Bailly. « Investigation of the PSE approach for subsonic and supersonic hot jets. Detailed comparisons with LES and Linearized Euler Equations results ». In : *International Journal of Aeroacoustics* 5.4 (2006), p. 361–393.

B.2 Contributions à un numéro spécial de journal

- [1] F. Chedeveigne, G. Casalis, O. Léon, M. Forte, F. Laurendeau, N. Szulga, O. Vermeersch et E. Piot. « Applications of dielectric barrier discharges and plasma synthetic jet actuators at ONERA ». In : *Aerospace Lab* 10.6 (2015).
- [2] R. Montheard, C. Airiau, M. Baffleur, V. Boitier, J-M Dilhac, X. Dollat, N. Nolhier et E. Piot. « Powering a Commercial Datalogger by Energy Harvesting from Generated Aeroacoustic Noise ». In : *Journal of Physics : Conference Series*. 557.1 (2014), p. 012025. DOI : [10.1088/1742-6596/557/1/012025](https://doi.org/10.1088/1742-6596/557/1/012025).
- [3] H. Parisot-Dupuis, F. Simon, E. Piot et F. Micheli. « Nearfield acoustic holography in wind tunnel with LDV measurements ». In : *J. Sound Vib.* 332.25 (2013) : *Review : Aeroacoustics research in Europe : The CEAS-ASC report on 2012 highlights*. Sous la dir. de H. Boden et G. Efraimsson, p. 6617–6636.
- [4] J. Primus, E. Piot et F. Simon. « Impedance eduction technique based on LDV fields above aircraft liners ». In : *J. Sound Vib.* 332.25 (2013) : *Review : Aeroacoustics research in Europe : The CEAS-ASC report on 2012 highlights*. Sous la dir. de H. Boden et G. Efraimsson, p. 6617–6636.
- [5] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. « Optical acoustic pressure measurements in a large-scale test facility with mean flow ». In : *J. Sound Vib.* 331 (2012) : *Review : Aeroacoustics research in Europe : The CEAS-ASC report on 2011 highlights*. Sous la dir. d’A. McAlpine et R.J Astley, p. 4609–4628.

B.3 Contributions à des ouvrages

- [1] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis. « Optimal disturbance in a flow duct with a lined wall ». In : *Proceedings of the Eighth IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Rio de Janeiro, Brazil*. T. 14. IUTAM Bookseries, 2015, p. 256–263.

- [2] E. Piot et G. Casalis. « DNS investigations of steady receptivity mechanisms on a swept cylinder ». In : *Proceedings of the Seventh IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Stockholm, Sweden, 2009*. Sous la dir. de P. Schlatter et Dan S. Henningson. T. 18. IUTAM Bookseries, 2010.
- [3] E. Piot, G. Casalis, F. Muller et C. Bailly. « Investigation of the PSE approach for subsonic and supersonic hot jets. Detailed comparisons with LES and Linearized Euler Equations results ». In : *Jet Aeroacoustics*. Sous la dir. de G. Raman. MULTI-SCIENCE PUBLISHING CO. LTD., 2008, p. 251–286.
- [4] G. Casalis, E. Piot et F. Chedevergne. « Bi-Global linear stability analysis ». In : *ERCOTAC Bulletin*. T. 74. Sept. 2007, p. 20–22.
- [5] E. Piot et L.U Schrader. « Receptivity of three-dimensional boundary layers to surface roughness ». In : *ERCOTAC Bulletin*. T. 74. Sept. 2007, p. 13–19.

B.4 Congrès internationaux avec actes et comité de lecture

- [1] E. Piot, J-Ph. Brazier, F. Simon, V. Fascio, C. Peyret et J. Ingenito. « Design, manufacturing and demonstration of acoustic liners for air conditioning systems ». In : *22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Lyon, France). AIAA-2016-2788. 30 mai–1^{er} juin 2016.
- [2] O. Berengue Llonch, F. Simon et E. Piot. « Inverse method to characterize "local" and "non-local" absorbing materials submitted to a shear grazing flow ». In : *EuroNoise 2015*. (Maastricht, Netherlands). 31 mai–3 juin 2015.
- [3] V. Popie, E. Piot, F. Simon et S. Tordeux. « Impedance eduction of perforated plates at low Strouhal numbers and high bias flow Mach number ». In : *21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (AVIATION 2015)*. (Dallas, Texas, USA). AIAA-2015-3275. 22–26 juin 2015.
- [4] V. Popie, E. Piot, S. Tordeux et F. Vuillot. « Theoretical and numerical investigations of acoustic response of a multiperforated plate for combustor liners ». In : *ASME Turbo Expo 2015 : Turbine Technical Conference and Exposition*. (Montreal, Canada). GT2015-42922. 15–19 juin 2015.
- [5] M. Lavieille, E. Piot et F. Micheli. « Numerical simulations of perforate liners : Part II – Local velocity fields validation ». In : *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Berlin, Germany). AIAA-2013-2270. 27–29 mai 2013.
- [6] J. Primus, E. Piot, F. Simon, M. G Jones et W. R Watson. « ONERA-NASA cooperative effort on liner impedance eduction ». In : *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Berlin, Germany). AIAA-2013-2273. 27–29 mai 2013.
- [7] R. Montheard, S. Carbonne, M. Bafleur, V. Boitier, J-M Dilhac, X. Dollat, N. Nollhier, E. Piot et C. Airiau. « Proof of concept of energy harvesting from aero acoustic noise ». In : *PowerMEMS 2012*. (Atlanta, USA). 2–5 déc. 2012.

- [8] H. Parisot-Dupuis, F. Simon et E. Piot. « Nearfield acoustic holography in wind tunnel by means of velocity LDV measurements ». In : *Acoustics 2012*. (Nantes, France). 23–27 avr. 2012.
- [9] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis. « Discontinuous Galerkin Method for acoustic modes computation in lined ducts ». In : *18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Colorado Springs, Colorado). AIAA-2012-2153. 4–7 juin 2012.
- [10] E. Piot, J. Primus et F. Simon. « Liner impedance eduction technique based on velocity field ». In : *18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Colorado Springs, Colorado). AIAA-2012-2198. 4–7 juin 2012.
- [11] J. Primus, E. Piot et F. Simon. « Evaluation of an adjoint-based liner impedance eduction technique ». In : *Acoustics 2012*. (Nantes, France). 23–27 avr. 2012.
- [12] J. Rodriguez-Sanchez, E. Piot et G. Casalis. « Theoretical and numerical investigation of optimal impedance in lined ducts with flow ». In : *Acoustics 2012*. (Nantes, France). 23–27 avr. 2012.
- [13] H. Parisot-Dupuis, F. Simon et E. Piot. « Aeroacoustic sources localization by means of nearfield acoustic holography adapted to wind tunnel conditions ». In : *Inter-Noise 2011*. (Osaka, Japan). 4–7 sept. 2011.
- [14] J. Primus, F. Simon et E. Piot. « Validation of a direct propagation model for liner impedance eduction ». In : *17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Portland, Oregon). AIAA-2011-2869. 5–8 juin 2011.
- [15] B. Betgen, M.A Galland, E. Piot et F. Simon. « Characterization of a Hybrid Active-Passive absorber by Means of Laser Doppler Velocimetry ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3808. 7–9 juin 2010.
- [16] G. Boyer, E. Piot et J.P. Brazier. « Stability Analysis and Experimental Study of Ducted Shear Flow with Wall Lining ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3943. 7–9 juin 2010.
- [17] C. Heuwinkel, A. Fischer, I. Rohle, L. Enghardt, Friedrich Bake, E. Piot et F. Micheli. « Characterization of a Perforated Liner by Acoustic and Optical Measurements ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3765. 7–9 juin 2010.
- [18] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. « Optical Acoustic Pressure Measurements In A Large-Scale Test Facility with Mean Flow ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3752. 7–9 juin 2010.
- [19] J.M. Roche, F. Vuillot, L. Leylekian, G. Delattre, E. Piot et F. Simon. « Numerical and Experimental Study of Resonant Liners Aeroacoustic Absorption Under Grazing Flow ». In : *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. (Stockholm, Sweden). AIAA-2010-3767. 7–9 juin 2010.
- [20] G. Casalis et E. Piot. « Multimode decomposition of a DNS signal into 3D Tollmien-Schlichting-like waves ». In : *7th Euromech Fluid Mechanics Conference*. (Manchester, UK). 14 sept. 2009–18 sept. 2008.

- [21] B. Nennig, M. Ben Tahar, J-M. Ville, E. Piot, F. Simon et M. Taktak. « A Comparison Between Acoustic Liner Characterization Methods And Calculations ». In : *16th ICSV*. (Krakow, Poland). 5–9 juil. 2009.
- [22] E. Piot et G. Casalis. « Unexpected unsteady instability in DNS computations dedicated to 3D localized receptivity ». In : *7th Euromech Fluid Mechanics Conference*. (Manchester, UK). 14 sept. 2009–18 sept. 2008.
- [23] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. « LDA investigation of the acoustic field above a perforated liner with grazing and bias flow ». In : *Inter-Noise 2009*. (Ottawa, Canada). 23–26 sept. 2009.
- [24] S. Tavoularis, D. Chang, E. Piot et T. Rennie. « Flow instability and coherent structures in rod-bundle-like channels ». In : *13th International topical meeting on nuclear reactor thermal hydraulics*. (Kanazawa City, Japan). 27 sept.–2 oct. 2009.
- [25] E. Piot, C. Content et G. Casalis. « Receptivity of the crossflow instabilities to a periodic roughness array on a swept cylinder : investigation of the roughness size influence ». In : *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. (Reno, NV). AIAA-2008-502. 7–10 jan. 2008.
- [26] E. Piot, G. Casalis et M. Terracol. « Direct Numerical Simulation of the crossflow instabilities induced by a periodic roughness array on a swept cylinder : receptivity and stability investigations ». In : *37th Fluid Dynamics Conference*. (Miami, FL). AIAA-2007-3976. 25–28 juin 2007.
- [27] F. Muller, F. Vuillot, G. Rahier, G. Casalis et E. Piot. « Experimental and Numerical Investigation of Near Field Pressure of a High Subsonic Hot Jet ». In : *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*. (Cambridge, Massachusetts, USA). AIAA-2006-2535. 8–10 mai 2006.
- [28] E. Piot, G. Casalis et F. Muller. « A Comparative Use of the PSE and LES Approaches for Jet Noise Predictions ». In : *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*. (Cambridge, Massachusetts, USA). AIAA-2006-2441. 8–10 mai 2006.

B.5 Congrès français avec actes et comité de lecture

- [1] F. Monteghetti, D. Matignon, E. Piot et L. Pascal. « Simulation temporelle d’un modèle d’impédance de liner en utilisant la représentation diffusive d’opérateurs ». In : *13ème Congrès Français d’Acoustique*. (Le Mans, France). 11–15 avr. 2016.
- [2] O. Berengue Llonch, E. Piot et F. Simon. « Méthode inverse pour la recherche multiparamètres de l’impédance acoustique d’un conduit à parois traitées ». In : *12ème Congrès Français d’Acoustique*. (Poitiers, France). 22–25 avr. 2014.
- [3] L. Pascal, E. Piot et G. Casalis. « Analyse de stabilité globale et instabilité hydrodynamique dans un conduit traité acoustiquement ». In : *12ème Congrès Français d’Acoustique*. (Poitiers, France). 22–25 avr. 2014.

- [4] B. Betgen, M.A Galland, E. Piot et F. Simon. « Characterization of a Hybrid Active-Passive absorber by Means of Laser Doppler Velocimetry ». In : *10ème Congrès Français d'Acoustique*. (Lyon, France). 12–16 avr. 2010.
- [5] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. « Méthodes de mesure optique appliquées à la caractérisation d'absorbants acoustiques en écoulement ». In : *10ème Congrès Français d'Acoustique*. (Lyon, France). 12–16 avr. 2010.
- [6] E. Piot et G. Casalis. « Stabilité des stries générées par une allée de micro rugosités au sein d'une couche limite laminaire de plaque plane : approches locales et biglobales confrontées à une simulation numérique directe ». In : *18ème Congrès Français de Mécanique*, (Grenoble, France). 27–31 août 2007.

B.6 Autres congrès et conférences, sans actes

- [1] R. Montheard, M. Bafleur, V. Boitier, J-M Dilhac, N. Nolhier, E. Piot et C. Airiau. « An aeroacoustic energy harvester for supplying power to embedded sensors in aircrafts ». In : *4èmes Journées Nationales sur la Récupération et le Stockage d'Energie pour l'Alimentation des Microsystèmes Autonomes*. (SYMME – Université de Savoie). Avr. 2014.
- [2] E. Piot et F. Micheli. « LDA investigation of the acoustic velocity above a perforated liner with grazing and bias flow ». In : *ONERA-DLR MOTAR meeting*. (Toulouse, France). 30–31 mar. 2009.
- [3] F. Simon, O. Brodin et E. Piot. « Determination of acoustic pressure fields radiated in a generic helicopter cabin by modified beamforming ». In : *ONERA-DLR Aerospace Symposium*. (Berlin, Germany). 6–8 oct. 2009.
- [4] D. Arnal, G. Casalis et E. Piot. « Laminar-Turbulent transition control on a swept wing by micron-sized roughness elements ». In : *43ème Colloque d'Aérodynamique appliquée de l'AAAF*. (Poitiers). 10–12 mar. 2008.
- [5] E. Piot. « Exemple d'extraction de vitesses acoustiques à partir de mesures par LDV ». In : *24ème Journée thématique AFVL*. (Meudon, France). 20 nov. 2008.
- [6] G. Casalis, E. Piot et U. Rist. « Pre-streaky flow instability : DNS and LST ». In : *SIG 33 Ercoftac meeting*, (Kleinwalsertal, Österreich). 17–20 juin 2007.
- [7] E. Piot et G. Casalis. « Numerical investigation of the crossflow instabilities induced by a periodic roughness array on a swept cylinder : receptivity and stability study ». In : *SIG 33 Ercoftac meeting*, (Kleinwalsertal, Österreich). 17–20 juin 2007.
- [8] G. Casalis et E. Piot. « Use of the PSE approach for the inviscid jet flow instability and noise prediction. Comparison with Linearized Euler Equations predictions ». In : *5th ERCOFTAC SIG 33 workshop, Laminar-Turbulent Transition Mechanisms, Prediction and Control*. (Nässlingen, Stockholm, Sweden). 31 mai–2 juin 2006.
- [9] E. Piot et G. Casalis. « Stability of the streaks induced by a small roughness placed in a laminar boundary layer : Local, Biglobal stability approaches and DNS ». In : *7th ONERA-DLR Aerospace Symposium*. (Toulouse, France). 4–6 oct. 2006.

- [10] E. Piot, C. Audoin et S. Tavoularis. « Flow instability in eccentric annular channels ». In : *Thousand Islands Fluid Dynamics Meeting*. (Gananouque, Canada). 2004.
- [11] S. Tavoularis, A. Gosset et E. Piot. « Instability of axial flow in circular and rectangular channels with a cylindrical core ». In : *57th Ann. Meet. Amer. Phys. Soc.* (Seattle, USA). Bull. Amer. Phys. Soc. 49, 232. 2004.

B.7 Rapports techniques ONERA

- [1] O. Léon, E. Piot, D. Sebbane et F. Simon. *Analyse de faisabilité d'extraction de vitesse acoustique à partir de mesures TR-PIV*. Rapport Technique RT 1/21175 DAFE/DMAE. ONERA, juin 2016.
- [2] E. Piot, D. Sebbane, R. Roncen et F. Simon. *Résultats des essais de caractérisation au banc B2A de l'absorption acoustique des matériaux relatifs au projet ECCAS*. Rapport Technique RT 1/22034 DMAE. ONERA, juil. 2016.
- [3] S. Redonnet et al. *Projet de Recherche SMART - Rapport des activités d'année 1*. Rapport Technique RT 4/24269 DAAC. ONERA, fév. 2016.
- [4] F. Monteghetti, E. Piot, L. Pascal et D. Matignon. *PR SMART Lot 3.1 : Conditions aux limites d'impédance en temporel. Activités du DMAE en 2015*. Rapport Technique RT 1/24269 DAAC/DMAE. ONERA, déc. 2015.
- [5] L. Pascal et E. Piot. *PR SMART Lot 1.2 : Identification d'impédance acoustique par approche inverse. Activités du DMAE en 2015*. Rapport Technique RT 3/24269 DAAC/DMAE. ONERA, déc. 2015.
- [6] E. Piot. *ALIAS project. WP4 : Final assessment report. Deliverable D4.2*. Rapport Technique RF 6/20959 DMAE. ONERA, mai 2015.
- [7] E. Piot, D. Sebbane et F. Simon. *PR SMART Lot 1.1 : Mesure de l'atténuation acoustique induite par des matériaux absorbants. Activités du DMAE en 2015*. Rapport Technique RT 2/24269 DAAC/DMAE. ONERA, déc. 2015.
- [8] J. Primus, E. Piot, F. Simon, M. G. Jones et W. R. Watson. *Coopération ONERA-NASA sur les liners acoustiques : travaux sur l'identification d'impédance*. Rapport Technique RT 2/24076 DMAE. ONERA, déc. 2015.
- [9] F. Cléro, F. David, R. Davy, C. Davoine, V. Fleury et E. Piot. *Rapport de synthèse du DTP MBM*. Rapport Technique de Synthèse RTS 10/18749 DSNA/DMAE/DMSM/DSFM. ONERA, juil. 2014.
- [10] E. Coustols et al. *JTI Clean Sky SFWA-ITD - Synthesis of Onera 2013 Contributions to SFWA-ITD Project "Smart Fixed Wing Aircraft - Integrated Technology Demonstrator"*. Rapport Technique de Synthèse RTS 10/20894 DMAE/DAAP. ONERA, mar. 2014.
- [11] E. Piot. *Management report of the ALIAS project. First period 01/2013-03/2014*. Rapport Technique RT 3/20959 DMAE. ONERA, mai 2014.
- [12] E. Piot. *Procès-verbal d'essais complémentaires de validation de récupérateurs d'énergie acoustique dans la soufflerie B2A*. PV d'essai PV 1/23498 DMAE. ONERA, juin 2014.

- [13] D. Sebbane, F. Simon, E. Piot et J-Ph. Brazier. *Projet ALIAS WP2.2 : Détermination expérimentale des impédances*. Rapport Technique RT 4/20959 DMAE. ONERA, juil. 2014.
- [14] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, O. Atinault et J. Primus. *EFAPS2 Tranche Conditionnelle 2 - Rapport de synthèse couvrant la période T2 à T2+26 - RA 35*. Rapport Technique de Synthèse RA 3/16644 DAAP. ONERA, juin 2013.
- [15] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, O. Atinault et J. Primus. *EFAPS2 Tranche Conditionnelle 2 - Rapport de synthèse couvrant la période T2+14 à T2+20 - RA 35.3*. Rapport d'Avancement RA 2/16644 DAAP. ONERA, fév. 2013.
- [16] E. Piot. *Procès-verbal d'essai pour l'étude "Essais B2A pour le LAAS"*. PV d'essai PV 1/21900 DMAE. ONERA, oct. 2013.
- [17] E. Piot, T. Dartigalongue, F. Micheli et O. Léon. *Capteur de pression acoustique non-intrusif par diffusion Rayleigh*. Rapport Technique RF 1/21373 DMAE. ONERA, déc. 2013.
- [18] E. Piot, J. Primus, D. Sebbane et F. Micheli. *EFAPS2 TC2 Synthèse des travaux du lot WP4.2.3.3 SANUMO2*. Rapport Technique RT 12/14992 DAAP/DMAE. ONERA, juil. 2013.
- [19] V. Brunet, H. Bezard et E. Piot. *EFAPS2 Tranche Conditionnelle 2 - Rapport de synthèse couvrant la période T2 à T2+14 - RA 35.1 et RA 35.2*. Rapport d'Avancement RA 1/16644 DAAP. ONERA, 2012.
- [20] E. Piot. *DTP MBM. Synthèse des travaux de la tâche 2.4.2 : étude des propriétés absorbantes des traitements acoustiques sous écoulement*. Rapport Technique RT 5/18749 DSNA/DMAE. ONERA, déc. 2012.
- [21] E. Piot, D. Sebbane, J-F Breil et F. Micheli. *EFAPS2 TC1 Synthèse des travaux du lot WP4.2.3.2 SANUMO2*. Rapport Technique RT 11/14992 DMAE/DAAP. ONERA, fév. 2012.
- [22] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, J. Perraud, O. Atinault, P. Molton et M. Meunier. *EFAPS2 Tranche 1 - rapport de synthèse couvrant les périodes T0 à T0+21 (T0 = 17 avril 2009)*. Rapport Technique de Synthèse RTS 3/14992 DAAP. ONERA, mar. 2011.
- [23] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, J. Perraud, O. Atinault, P. Molton et M. Meunier. *EFAPS2 Tranche Conditionnelle 1 - rapport d'avancement couvrant les périodes T1+12 à T1+17 (T1 = 04 janvier 2010)*. Rapport d'Avancement RA 3/16643 DAAP. ONERA, 2011.
- [24] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, J. Perraud, O. Atinault, P. Molton et M. Meunier. *EFAPS2 Tranche Conditionnelle 1 - rapport d'avancement couvrant les périodes T1+9 à T1+15 (T1 = 04 janvier 2010)*. Rapport d'Avancement RA 2/16643 DAAP. ONERA, 2011.
- [25] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, J. Perraud, O. Atinault, P. Molton et M. Meunier. *EFAPS2 Tranche Conditionnelle 1 - rapport technique de synthèse couvrant les périodes T1 à T1+24 (T1 = 04 janvier 2010)*. Rapport Technique de Synthèse RTS 4/16643 DAAP. ONERA, 2011.
- [26] E. Piot. *Données expérimentales et numériques pour validation de la condition d'impédance dans Sabrina-V0 et Bemuse*. Rapport Technique RF 1/18421 DMAE. ONERA, déc. 2011.

- [27] E. Piot, F. Micheli et J-F Breil. *Mesure de vitesse acoustique de part et d'autre d'une plaque multi-perforée, avec écoulement traversant. Essais pour l'ANR Acoustique et PAroï Multi-perforé*. Rapport Technique RF 2/13927 DMAE. ONERA, déc. 2011.
- [28] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. *EFAPS2 Tranche Ferme - Synthèse des travaux du lot WP4.2 SANUMO2*. Rapport Technique RT 6/14992 DMAE/DAAP. ONERA, mar. 2011.
- [29] E. Piot, D. Sebbane et F. Micheli. *Test results and analysis for the B2A tests. GARTEUR AG50 Deliverable 1.2c and 1.3c*. Rapport Technique de Synthèse RTS 1/18423 DMAE. ONERA, sept. 2011.
- [30] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, J. Perraud, O. Atinault, P. Molton et M. Meunier. *EFAPS2 Tranche 1 - rapport programmatique couvrant les périodes T0+12 à T0+18 (T0 = 17 avril 2009)*. Rapport d'Avancement RA 2/14992 DAAP. ONERA, oct. 2010.
- [31] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, J. Perraud, O. Atinault, P. Molton et M. Meunier. *EFAPS2 Tranche 1 - rapport programmatique couvrant les périodes T0-T0+6 et T0+6 à T0+12 (T0 = 17 avril 2009)*. Rapport d'Avancement RA 1/14992 DAAP. ONERA, avr. 2010.
- [32] V. Brunet, H. Bezard, E. Piot, J. Perraud, O. Atinault, P. Molton et M. Meunier. *EFAPS2 Tranche 2 - rapport programmatique couvrant les périodes T1 à T1+9 (T1 = 04 janvier 2010)*. Rapport d'Avancement RA 1/16643 DAAP. ONERA, oct. 2010.
- [33] E. Piot. *Adaptation du code SPACE/DTIM à la configuration B2A*. Rapport Technique RT 1/14871 DMAE. ONERA, mar. 2010.
- [34] E. Piot. *GARTEUR AG50 Deliverable 1.1c -Definition of a test plan for the B2A experiments*. Rapport Technique RT 1/17000 DMAE. ONERA, mai 2010.
- [35] E. Piot, F. Micheli, F. Simon et J. F Breil. *Mesure de vitesse acoustique de part et d'autre d'une plaque multi-perforée, sans écoulement. Essais pour l'ANR Acoustique et PAroï Multi-perforée*. Rapport Technique RT 1/13927 DMAE. ONERA, juil. 2010.
- [36] F. Simon, E. Piot et L. Sentenac. *JTI GRA Test reporting and test results analysis of HLD acoustic liners experimental characterization : Part I*. Rapport Technique RT 1/16621 DMAE/DAAP. ONERA, déc. 2010.
- [37] F. Simon et E. Piot. *Evaluation d'algorithmes pour contrôle actif de bruit hélico dans la bande 0-500Hz*. Rapport Technique RT 1/13837 DMAE. ONERA, mai 2009.
- [38] F. Simon, E. Piot et F. Micheli. *Projet "COmportement acoustique de MATériaux sous ECoulement"*. Rapport Final RF 2/12135 DMAE. ONERA, déc. 2009.
- [39] E. Piot, F. Micheli et F. Simon. *Faisabilité d'une technique de mesure innovante de la pression acoustique par vélocimétrie laser doppler*. Rapport Technique RT 1/13722 DMAE. ONERA, déc. 2008.
- [40] D. Arnal, E. Piot, J-P. Archambaud, G. Casalis, C. Content, J. Dandois et S. Colamartino. *TRACMIR : Transition Control by Micron-sized Roughness elements*. Rapport Technique RT 2/12136 DMAE. ONERA, nov. 2007.

B.8 Manuscrit de thèse

- [1] E. Piot. « Simulation numérique directe et analyse de stabilité de couches limites laminares en présence de micro-rugosités ». Thèse de doct. Institut National Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2008.

B.9 Brevet

- [1] F. Simon et E. Piot. « Procédé et dispositif d'estimation de la pression acoustique dans un fluide en mouvement et programme d'ordinateur ». Patent EP2488838, (France). 9 juil. 2014. URL : <https://www.google.fr/patents/EP2488838B1?cl=fr>.

Annexe C

Copie de cinq publications marquantes

Cette annexe compile une copie de cinq de mes publications, couvrant toute la gamme des travaux présentés dans ce mémoire ; chaque publication peut être vue comme une illustration de ce qui est expliqué dans les cinq chapitres de ce document, selon l'ordre suivant :

1. la mise en œuvre d'outils d'analyse de stabilité, suite aux travaux que j'ai menés au cours de ma thèse de doctorat [1] ;
2. la mise en application sur des concepts de liners innovants de la métrologie acoustique avancée du banc B2A [2] ;
3. la modélisation de l'impédance acoustique des liners [3] ;
4. l'identification de l'impédance acoustique de liners, à partir de mesures au banc B2A [4] ;
5. l'analyse des modes propres d'un écoulement dans un conduit traité acoustiquement [5].

Références

- [1] E. Piot et G. Casalis. « Absolute stability mechanism of a swept cylinder laminar boundary layer with imposed spanwise periodic conditions ». In : *Phys. Fluids* 21.6 (2009).
- [2] B. Betgen, M.A Galland, E. Piot et F. Simon. « Characterization of a Hybrid Active-Passive absorber by Means of Laser Doppler Velocimetry ». In : *Applied Acoustics* 73 (2012), p. 624–638.
- [3] S. Laurens, E. Piot, A. Bendali, M'B. Fares et S. Tordeux. « Effective conditions for the reflection of an acoustic wave by low-porosity perforated plates ». In : *J. Fluid Mech.* 1743 (2014), p. 448–480.
- [4] J. Primus, E. Piot et F. Simon. « An adjoint-based method for liner impedance eduction : Validation and numerical investigation ». In : *J. Sound Vib.* 332 (2013), p. 58–75.
- [5] G. Boyer, E. Piot et J.Ph Brazier. « Theoretical investigation of hydrodynamic surface mode in a lined duct with sheared flow and comparison with experiment ». In : *J. Sound Vib.* 330 (2011), p. 1793–1809.

Absolute stability mechanism of a swept cylinder laminar boundary layer with imposed spanwise periodic conditions

E. Piot^{a)} and G. Casalis^{b)}

ONERA DMAE, 2 av. Ed. Belin, BP 4025, 31 055 Toulouse Cedex, France

(Received 8 October 2008; accepted 2 May 2009; published online 9 June 2009)

The linear impulse response of a laminar three-dimensional boundary layer with imposed spanwise periodic conditions is theoretically analyzed. Because of the imposed spanwise periodicity, a unidirectional absolute instability is physically significant. The base flow is obtained through a direct numerical simulation of the flow along a swept cylinder, with periodic boundary conditions enforced at the spanwise boundaries. It is shown that this flow is absolutely stable. However, it exhibits crossflow modes of zero group velocity whose damping rate in time is quite slow. Moreover, these crossflow modes are spatially amplified. A direct numerical simulation of the same configuration but in the presence of surface roughness has enabled the observation of these traveling crossflow waves. The introduction of the roughness element in the computation creates initial transients that play the role of an impulselike forcing, which generates the traveling crossflow waves as predicted by the theoretical analysis. Depending on the roughness chordwise location, the frequency and damping rate in time of the crossflow waves change in agreement with the theoretical results. © 2009 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.3147933]

I. INTRODUCTION

In a low-disturbance environment and on a smooth body, boundary layer transition to turbulence is generally due to the growth of instability waves within the laminar boundary layer. In the case of a swept boundary layer, these instability waves are the so-called crossflow waves, which develop in the negative pressure gradient region, close to the leading edge. The transition to turbulence can be decomposed into four steps. First, the crossflow waves are generated within the boundary layer through receptivity to various disturbances, such as free-stream turbulence or surface roughness. Next, the crossflow waves are linearly spatially amplified, until they reach a large enough amplitude to become subject to nonlinear evolution. This results in saturation of the primary waves and growth of harmonics. Finally, transition to turbulence is triggered by a powerful secondary instability of the saturated vortices. Comprehensive reviews for this transition scenario are given by Arnal¹ and Saric *et al.*,^{2,3} among others. The three last stages of this transition are now quite well understood. Especially, calculations based on the nonlinear parabolized stability equations are successful in describing the crossflow wave growth, as demonstrated by Haynes and Reed⁴ and direct numerical simulations (DNSs) are now able to capture the secondary instability mechanism, as described, for instance, by Bonfigli and Kloker.⁵

An alternative mechanism to saturation and secondary instability growth that could trigger the transition to turbulence is absolute instability. A flow is said to be absolutely unstable if initially localized disturbances spread upstream and downstream, thereby invading the entire physical domain of interest (see Ref. 6, for instance). For the rotating

disk problem, which has often been used as a model problem for swept wing flows, previous researchers have found that both a secondary instability (see Ref. 7) and an absolute instability (see Ref. 8) are possible. However, the rotating disk flow possesses an axial symmetry that is not present in swept wing boundary layers. Consequently, the criteria for the existence of absolute instability is more stringent in swept wing flows than in rotating disk flows: Lingwood⁹ and Taylor and Peake¹⁰ studied Falkner–Skan–Cooke and true swept wing boundary layers, and showed that these flows do not support an absolute instability, but do exhibit unidirectional absolute instability.

The present paper is focused on the first stage of the route to turbulence in a swept wing flow, i.e., the generation of the crossflow vortices. Over the past decades, many investigations have been carried out on this subject, mainly based on experiments or on theoretical approaches. Four main experimental programs have been performed, by Saric *et al.* on a swept wing (see Ref. 11), Kachanov *et al.* on a swept flat plate (see Ref. 12), Bippes *et al.* on various models with flat, concave and convex surfaces (see Ref. 13) and Takagi *et al.* on a swept cylinder (see Ref. 14). These experiments show that, even if unsteady crossflow waves can be observed, stationary crossflow waves dominate the transition process in low-disturbance environments, such as flight conditions. Moreover, it is shown that the primary cause of stationary crossflow vortices is surface roughness. Such a property has been checked by theoretical studies of receptivity in three-dimensional boundary layers. Especially, Crouch¹⁵ and Choudhari¹⁶ independently worked out the technique of finite Reynolds number theory (FRNT), which is in the same framework of the classical asymptotic receptivity theory of Goldstein¹⁷ or Kerschen.¹⁸ However, FRNT is based on parallel linearized stability equations in the vicinity of surface

^{a)}Electronic mail: estelle.piot@onera.fr.

^{b)}Electronic mail: gregoire.casalis@onera.fr.

disturbance rather than on triple-deck equations. Therefore, FRNT allows prediction of receptivity solutions at moderate Reynolds number in the vicinity of the surface disturbance. Bertolotti¹⁹ recently extended this theory to take into account the mean-flow nonparallelism, by using an equivalent forcing method based on Fourier transforms. All these approaches demonstrate that the amplitude of stationary crossflow modes generated by the scattering of the mean flow by surface roughness is much higher than that of traveling waves due to the interaction of free-stream acoustic waves with the roughness, which explains the experimental observations.

Consequently, a numerical simulation dedicated to the study of surface roughness receptivity in a swept boundary layer is expected to exhibit only stationary crossflow waves, as far as no free-stream turbulence is imposed. Very few papers exist on this subject, as far as the authors are aware. Collis and Lele²⁰ computed the linearized Navier–Stokes solution in the vicinity of a small surface roughness on a swept leading edge, and compared it to FRNT results. More recently Schrader *et al.*^{21,22} performed a DNS of the Falkner–Scan–Cooke flow on a swept flat plate in the presence of a small surface roughness that is sinusoidal in the spanwise direction. They compared their results to that obtained by the Bertolotti’s method. In both papers, only stationary crossflow waves can be observed. In a previous work,²³ we performed a DNS of the flow around a spanwise periodic roughness array on a swept cylinder. Even if all the boundary conditions were steady, an unsteadiness was observed in the flow. The present paper is thus dedicated to new direct numerical simulations of this configuration, and aims at explaining what is this unsteadiness and where it comes from.

This paper is organized as follows. First of all, the geometrical configuration and the numerical procedure are described (Sec. II). Then, the unsteadiness is presented and its nature is investigated with the help of a linear stability analysis of the flow without roughness (Sec. III). Next, we address the origin of the unsteadiness, and propose a scenario for its generation (Sec. IV). Finally, the major findings and conclusions of this study are summarized (Sec. V).

II. FORMULATION

This section describes the geometry and the numerical tools used to obtain a DNS of the flow. The section ends with an explanation of the numerical procedure.

A. Problem description

The flow over a swept cylinder is considered. This cylinder, shown in Fig. 1, and the flow conditions are similar to those chosen by Poll:²⁴ the cylinder radius is (dimensional quantities are indicated by an asterisk) $R_c^*=0.1$ m, the sweep angle is $\varphi=60^\circ$ and the incoming flow velocity is $Q_\infty^*=50$ m s⁻¹. The cylinder is idealized as having infinite span. This design is suited to study crossflow instability in the presence of considerable surface curvature. Two coordinate systems are shown in Fig. 1. Velocity components in the global coordinates are denoted by u in the vertical (x) direction, v in the horizontal (y) direction, and w in the spanwise

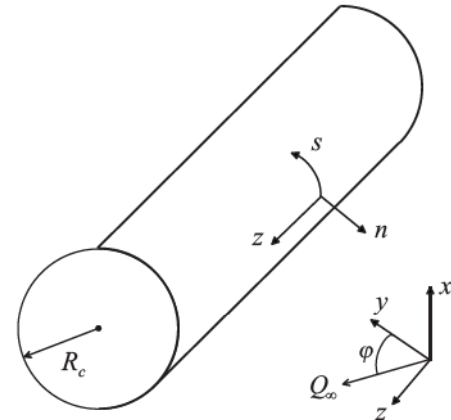


FIG. 1. Swept cylinder geometry.

(z) direction. The incoming velocity is given by $[0, Q_\infty^* \cos(\varphi), Q_\infty^* \sin(\varphi)]$. In the body-fixed coordinate system, the chordwise distance to the attachment line is denoted as s , the distance normal to the surface is n , and z is again the spanwise direction. Velocity components in the (s, n, z) -coordinate system are denoted by (v_s, v_n, w) . Infinite conditions are given by the static pressure $P_\infty^*=101\,325$ Pa and the density $\rho_\infty^*=1.18$ kg m⁻³. The free-stream incompressible flow over an infinite-span cylinder is given by an exact potential flow solution, which allows the computation of the expected laminar boundary layer with an in-house code. The boundary layer thickness along the attachment line, defined as the wall-normal distance for which both V_s^* and W^* reach 99.9% of their maximal value, is $\delta_0^*=6.910^{-4}$ m. In the following, the lengths in the wall-normal and spanwise directions are nondimensionalized by this reference length while the lengths in the chordwise direction are nondimensionalized by the cylinder radius R_c^* and expressed in degrees. The velocity components are nondimensionalized by the chordwise free-stream velocity $U_\infty^*=Q_\infty^* \cos(\varphi)=25$ m s⁻¹, and the pressure by $\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$. The reference time scale is the free-stream convective scale R_c^*/U_∞^* .

It must be pointed out that the considered boundary layer is unstable to crossflow instability since the flow is strongly accelerated with a rather large unit Reynolds number, but is stable to attachment line instability since the spanwise momentum-thickness Reynolds number is $R_\theta=202$, which is below the critical value of 230 given by the linear stability theory and observed in many experimental studies, as explained for instance by Arnal.¹

The aim of the present paper is to study the stability properties of the boundary layer in the presence of a spanwise array of roughness elements. These ones have a parallelepipedic shape and are distributed along a line parallel to the attachment line. Two spatial configurations are studied: in case A, the chordwise center of the roughness array is located at $s_R=7.6^\circ$, while in case B it is located at $s_R=13.8^\circ$. The exact locations of the upstream and downstream wall of each roughness element (s_u and s_d respectively) are given in Table I. The spanwise spacing between the roughness elements is $\lambda_z=13$. The choice of these specific values comes

TABLE I. Spatial characteristics of the roughness array in each studied configuration. s_u , s_d and s_R denote the upstream, downstream and central chordwise locations of the roughness element.

	s_u	s_d	s_R	λ_z	l_z/λ_z	h	Re_h
Case A_1						0.1	43.7
Case A_2	7.3°	7.9°	7.6°	13	1/8	0.075	24.6
Case A_3						0.05	11
Case B_1					1/8	0.1	44.2
Case B_2	13.5°	14.1°	13.8°	13	1/8	0.075	25.1
Case B_3					3/8	0.1	44.2

from a previous study,^{23,25} in which the roughness array had been designed to generate the stationary crossflow instabilities whose neutral stability line was the closest to the attachment line. [The neutral line for the steady $\lambda_z=13$ crossflow wave is located at $s=10.4^\circ$, the neutral line for its first harmonic ($\lambda_z/2$ spanwise wavelength) is located at $s=14.3^\circ$.] In the following, the roughness elements size will be varied, in both cases A and B. The corresponding height h and spanwise extent l_z are given in Table I, as well as the roughness Reynolds number Re_h , which is based on the roughness height and on the local velocity and kinematic viscosity at this height in the undisturbed boundary layer. It must be emphasized that the highest roughness elements are small enough not to trigger the transition to turbulence.

B. Numerical methods

DNSs are performed to compute the flow around the cylinder, in both configurations: either the cylinder is smooth or there is a roughness array on its surface. The system of the compressible Navier–Stokes equations is solved numerically using the multipurpose in-house solver SABRINA.²⁶

The Navier–Stokes equations are discretized using high-order numerical schemes and structured multiblock meshes. The spatial scheme is a classical fourth-order accurate centered explicit finite difference discretization, while a compact explicit third-order accurate Runge–Kutta algorithm is used for time advancement. Since such a centered scheme is not dissipative, it does not prevent the growth of spurious high-frequency numerical errors, and therefore requires a stabilization step. For that purpose, a tenth-order accurate symmetric linear filter is applied to the flow variables at each time step. The curvilinear extension strategy proposed by Visbal and Gaitonde²⁷ has been retained to handle complex geometries. The resulting scheme is quite classical in aeroacoustics, and has been extensively used for both aerodynamic and acoustic computations. Among other examples, this method has been used for direct numerical simulations of nonlinear global modes in hot jets, in Lesshafft *et al.*²⁸ The flow over the swept cylinder is modeled using an ideal gas where both the specific heat at constant pressure and the specific heat at constant volume are constant. The ratio of specific heat is 1.4, the Prandtl number is $Pr^*=0.72$. The dynamic viscosity is computed thanks to Sutherland's law.

To simulate the effects of the periodic roughness array,

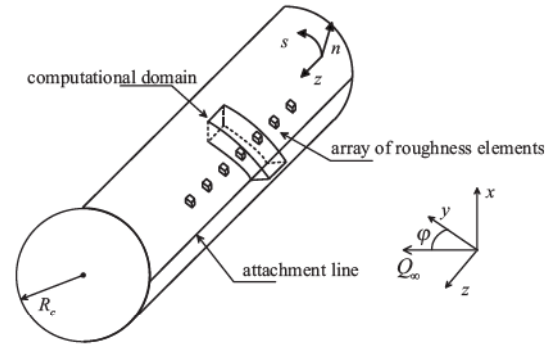


FIG. 2. Roughness array on the swept cylinder.

the computational domain contains a single roughness element centered at $z=0$, as shown in Fig. 2, and periodic boundary conditions are imposed in the spanwise direction at $z=\pm\lambda_z/2$. The same computational domain is used to compute the flow about the smooth cylinder.

Therefore, the three-dimensional curvilinear structured grid is made of eight subdomains, the eighth one representing the roughness element. In every case given in Table I, this subdomain is made of five points in the chordwise direction, seven points in the wall-normal direction; in cases A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , and B_2 , nine points are used in the spanwise direction, while 27 points are used in case B_3 . Depending on whether the flow with or without roughness is computed, different conditions are enforced at the boundaries of this subdomain. In the case of the no-roughness computation, the subdomain No. 8 is connected to the other ones, and the flow is computed inside it. On the contrary, in the roughness case, adiabatic, no-slip conditions are enforced at the boundaries of this subdomain, and the flow is only computed on the seven other subdomains.

The computational domain is limited to the upper half of the flow field since the $x=0$ plane is a plane of symmetry. An adiabatic, no-slip condition is imposed at the wall surface. Nonreflecting characteristic boundary conditions²⁹ are applied for the inflow boundary, which is located at $n=20$. The outflow condition is treated thanks to the use of a “sponge region” (progressive stretching of the computational grid in the chordwise direction) starting at $s=23.7^\circ$, which aims at damping the flow fluctuations. Finally, the whole mesh is made of about 3.5 millions points, with at least 61 points in the (n) direction within the boundary layer at $s=0^\circ$. In previous studies,^{23,25} the boundary layer computed around the smooth cylinder has been compared to the boundary layer predicted by a boundary layer code. It was shown that 61 points in the (n) direction were enough to resolve correctly the boundary layer.

C. Numerical procedure

To obtain the flow in the presence of the roughness array, a two-phases procedure is used, each phase being decomposed into an initialization step followed by the computation step:

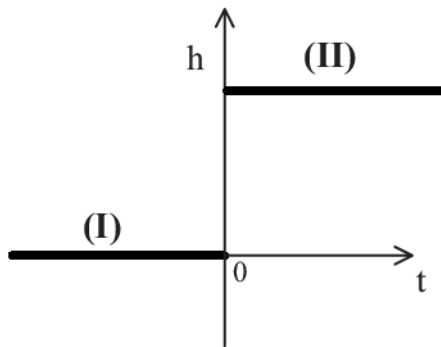


FIG. 3. Roughness height vs time. (I) corresponds to the no-roughness computation, (II) to the with-roughness computation.

- (I.1) The flow is initialized in the whole computational domain with the exact potential flow solution. This solution is valid for an incompressible flow, but for the considered incoming flow velocity of 50 m s^{-1} , the compressibility effects are weak and are not expected to influence significantly the properties of the studied flow.
- (I.2) Next, the Navier–Stokes equations are solved in the no-roughness configuration until a stationary solution is reached in the whole domain. This solution will be denoted as the base flow solution $(V_s^{cyl}, V_n^{cyl}, W^{cyl})$ in the following sections. It depends only on the s and n locations.
- (II.1) In the second phase the roughness element is taken into account, i.e., no-slip conditions are imposed at the boundaries of the roughness subdomain. The previous base flow is used as an initial flow field. It must be noted that this initial flow field does not match the boundary conditions at the roughness wall.
- (II.2) The Navier–Stokes equations are solved in the with-roughness configuration. The obtained flow field is fully tridimensional.

The introduction of the roughness element in the computation can be summarized by the sketch in Fig. 3. The

computation without roughness [phase (I)] corresponds to $t < 0$, while the computation with roughness [phase (II)] corresponds to $t > 0$. The flow field at $t=0^-$ is used to initialize the with-roughness computation.

Each q component of the flow (velocity, pressure, etc.) obtained in the with-roughness computation can be decomposed into a steady and an unsteady part:

$$q(s, n, z, t) = \langle q \rangle_0(s, n, z) + \tilde{q}(s, n, z, t), \quad (1)$$

where the steady part $\langle q \rangle_0$ contains the base flow solution Q^{cyl} .

This paper focuses on the unsteady solution $\tilde{q}$ only; Secs. III and IV will investigate the nature of this unsteadiness and its origin.

III. NATURE OF THE UNSTEADINESS

A. Temporal and spatial structure

Figure 4 displays the time evolution of the v velocity component (each flow component has a similar time evolution) at various chordwise locations, from the starting ($t=0$) of the with-roughness computation (see Fig. 3). Figure 4(a) corresponds to the case A_1 , where the roughness element is centered at $s=7.6^\circ$, while Fig. 4(b) corresponds to the case B_1 , where the roughness element is centered at $s=13.8^\circ$. The roughness size is the same in each case, as given in Table I.

In both cases, the flow is steady upstream of the roughness location [line $s=0.1^\circ$ in Fig. 4(a) and lines $s=0.1^\circ$ and $s=10^\circ$ in Fig. 4(b)] and unsteady downstream of the roughness location [line $s=10^\circ, 20^\circ$, and 23.5° in Fig. 4(a) and lines $s=15.6^\circ, 20^\circ$, and 23.5° in Fig. 4(b)]. This unsteadiness propagates in the chordwise direction, and its amplitude increases with s . In case B_1 , the unsteadiness is damped in time and at the end of the computation ($t=2.4$), the flow is steady almost everywhere. On the contrary, in case A_1 the damping rate is almost zero and the unsteadiness oscillation looks self-sustained.

Consequently, we focus on case A_1 to investigate the spatial structure of the unsteadiness. The steady flow field $\langle q \rangle_0$ [see Eq. (1)] is defined as the mean value in time of the

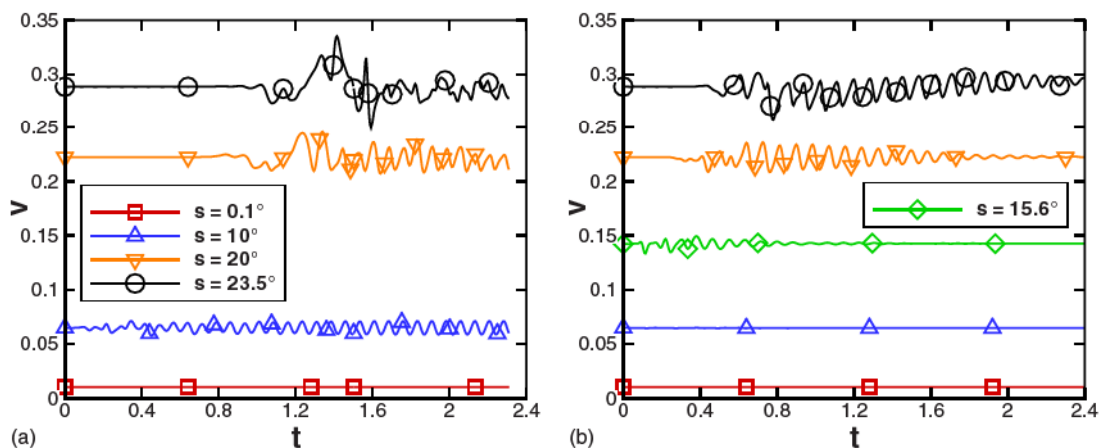


FIG. 4. (Color online) v velocity vs time, evaluated at $n=1, z=0$, and at various chordwise locations. The symbols correspond to the same s values in (a) and (b), except that an additional chordwise location is plotted in (b). (a) Case A_1 ; $s_R=7.6^\circ$. (b) Case B_1 ; $s_R=13.8^\circ$.

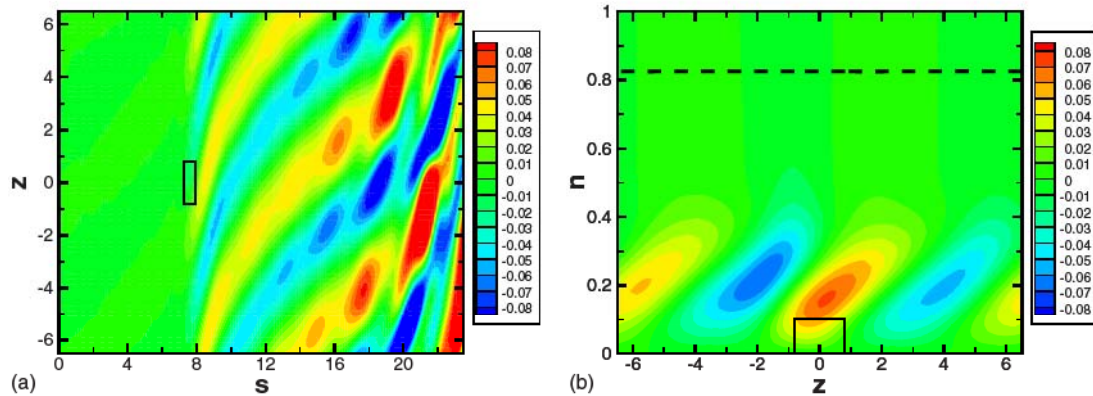


FIG. 5. (Color online) Fluctuating chordwise velocity $\bar{v}_s$ in the case A_1 . The roughness top is at $n=0.1$. The location of the roughness element is represented by the black rectangle. The dashed line displays the local boundary layer thickness. (a) $n=0.25$. (b) $s=15.6^\circ$.

instantaneous flow field q . The computation is carried out until this steady flow field is spatially converged in the whole domain. A discrete Fourier transform of the fluctuating flow field $\tilde{q} = q - \langle q \rangle_0$ shows that it is harmonic in time with a frequency $f_{A_1} = 13.6 \pm 0.2$ (a more accurate value is unreachable with this method because of the Fourier resolution limit associated to such a short signal length):

$$\tilde{q}(s, n, z, t) = g(s, n, z) \cos[2\pi f_{A_1} t + \phi(s, n, z)].$$

Figure 5 displays the fluctuating chordwise velocity component in a plane (s, z) above the roughness top and in a plane (z, n) downstream of the roughness element. (The local boundary layer thickness is defined as the wall-normal distance for which both V_s^{cyl} and W^{cyl} reach 99% of their maximal value. This definition differs from that chosen to evaluate the reference length δ_0^* .) Similar figures are obtained for the other velocity components. The fluctuating velocity can only be seen downstream of the roughness location. Moreover, the velocity oscillates in both s and z directions, and is amplified in the s direction. A spatial discrete Fourier transform has been performed in the z direction, which shows that, up to $s=16.5^\circ$, the fluctuating flow field is harmonic in z with a spanwise wavenumber equals to $2\beta_z$, where β_z stands for $2\pi/\lambda_z$. Further downstream, the spatial Fourier spectrum contains more wavenumbers, which is in agreement with the spatial evolution displayed in Fig. 5(a).

Finally, between $s=s_R$ and $s=16.5^\circ$ and after the transients, the fluctuating flow field evolves like a wave, and reads as

$$\tilde{q}(s, n, z, t) = \Re[\hat{q}(n) e^{i(k s + 2\beta_z z - \omega t)}], \quad (2)$$

where $\Re$ stands for the real part, k is a complex chordwise wavenumber, which depends on s , and $\omega = \omega_{A_1} = 2\pi f_{A_1}$. A similar wavelike evolution is found in cases A_2 and A_3 : there is a change in the amplitude of the fluctuation (the smaller the roughness height, the smaller the amplitude), but the spanwise wavenumber is the same and there is almost no change in the frequency, as displayed in Table II. In cases B_1 , B_2 , and B_3 , the fluctuating flow field can be modeled in the same way, except that the circular frequency ω has to be a complex number to take into account the damping in time.

The corresponding frequencies are given in Table II. Figure 6 displays the flow field obtained after the unsteadiness has been damped. It is shown in Ref. 25 that it corresponds to the steady crossflow wave with spanwise wavenumber β_z .

B. Comparison to the linear stability theory

In order to find out the exact nature of the fluctuating flow field, a spatial linear stability analysis is performed on the base flow. The classical linear stability theory of parallel flows is used [the nonparallel effects do not influence significantly the comparison between the DNS results and the results of the linear stability analysis (see Ref. 25)]; this means that the base flow ($V_s^{\text{cyl}}, W^{\text{cyl}}$) is assumed to be independent of s and that the wall-normal velocity V_n^{cyl} is neglected. At each chordwise location small fluctuations are decomposed into elementary instability waves

$$q^{lw}(s, n, z, t) = \tilde{q}(n) e^{i(\alpha s + \beta z - \omega t)} \quad (3)$$

of complex chordwise wavenumber α , real spanwise wavenumber β , and real circular frequency ω . The perturbation $\tilde{q}$ satisfies the Orr–Sommerfeld equation for three-dimensional flows, which is solved after enforcement of appropriate boundary conditions at $n=0$ and $n=n_{\text{max}}$.

The traveling crossflow waves q^{lw} associated with the spanwise wavenumber $\beta=2\beta_z$ are computed for three frequencies in the range of the DNS frequency f_{A_1} . The chordwise evolution of the obtained chordwise wavenumber α is plotted in Fig. 7. Both their real and imaginary parts are quite sensitive to the frequency. However, whatever the chosen frequency, the traveling crossflow wave is spatially amplified (i.e., $\alpha_i < 0$) for almost every chordwise location downstream of the roughness location in case A_1 ($s_R \approx 8^\circ$).

TABLE II. Frequency of the fluctuating flow field in each studied configuration. In the B cases the frequency has an imaginary part.

	Case A_1	Case A_2	Case A_3	Case B_1	Case B_2	Case B_3
f	13.6	13.7	13.9	$12-0.48i$	$12-0.55i$	$12-0.40i$

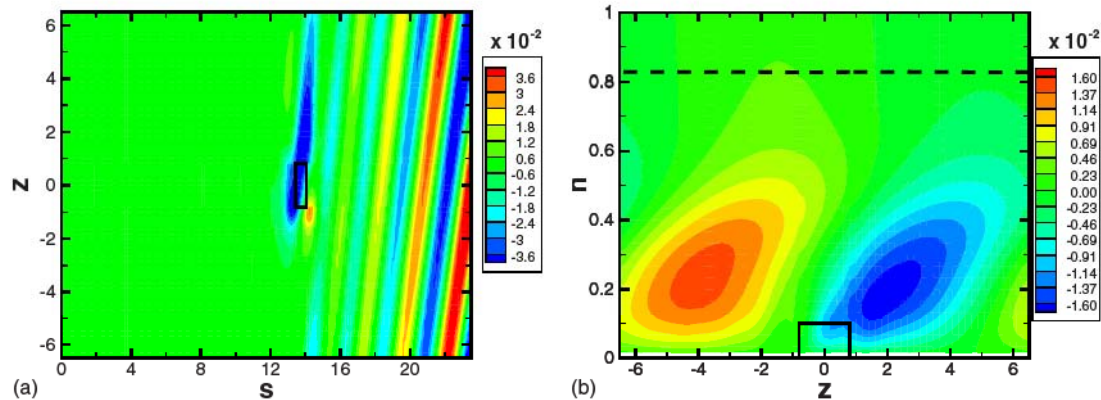


FIG. 6. (Color online) Steady chordwise velocity $(v_s)_0 - V_s^{\text{ref}}$ in the case B_1 . The roughness top is at $n=0.1$. The location of the roughness element is represented by the black rectangle. The dashed line displays the local boundary layer thickness. (a) $n=0.25$. (b) $s=15.6^\circ$.

As shown in Sec. III A, the DNS fluctuating flow field in case A_1 behaves like a wave. Therefore, its spatial evolution is compared to that which is obtained by the Orr–Sommerfeld analysis. Figure 8 displays the amplitude and real part of the DNS chordwise velocity fluctuation, denoted as $\hat{v}_s(n)\exp(iks)$ in Eq. (2). The results of the Orr–Sommerfeld analysis are also plotted; the s -dependency of the computed chordwise wavenumber α is taken into account by plotting $|\hat{v}_s(n)|\exp[-\int_{s_0}^s \alpha_r(\xi)d\xi]$ in Fig. 8(a) and $\Re(\hat{v}_s(n)\cos[\int_{s_0}^s \alpha_i(\xi)d\xi])$ in Fig. 8(b). The traveling crossflow wave which is in best agreement with the DNS fluctuation is the one of frequency $f=13.8$ concerning the chordwise amplification and the one of frequency $f=13.6$ concerning the chordwise oscillation [that is why only this frequency is plotted in Fig. 8(b)]. Regardless of this slight uncertainty on the frequency, the comparison between the DNS and Orr–Sommerfeld results is very satisfactory. This means that the DNS fluctuation is a traveling crossflow wave, at least until $s \approx 16.5^\circ$. It is not true anymore downstream of this chordwise location, which agrees with the previous observation that then the DNS fluctuating flow field is not constituted by the $2\beta_z$ spanwise harmonic only.

In order to confirm that the DNS fluctuation is indeed a traveling crossflow wave, the wall-normal evolution of $\hat{q}$ is

compared in Fig. 9 to that of the eigenmode $\tilde{q}$ computed for $f=13.8$. The agreement is very good for each velocity component. The plots in Fig. 9 correspond to the chordwise location $s=14^\circ$, but a similar agreement is found at every chordwise location, up to $s \approx 16.5^\circ$.

Finally, all these results prove that the fluctuating flow field obtained in the case A_1 of the DNS computations is a traveling crossflow wave of spanwise wavenumber $2\beta_z$ and of frequency $f \approx 13.8$. It must also be noted that for cases A_2 and A_3 , the amplitude of the fluctuation differs from that obtained in case A_1 , but not the wall-normal shape: it is always the same as the one of the crossflow eigenmode. In Sec. IV, we will investigate the origin of the unsteady wave obtained in the DNS.

IV. ORIGIN OF THE UNSTEADINESS

Two main hypotheses arise to explain the origin of the unsteadiness:

- (1) an instability of the recirculation zone around the roughness element and
- (2) an absolutelike instability mechanism of the base flow.

In this section each hypothesis is investigated.

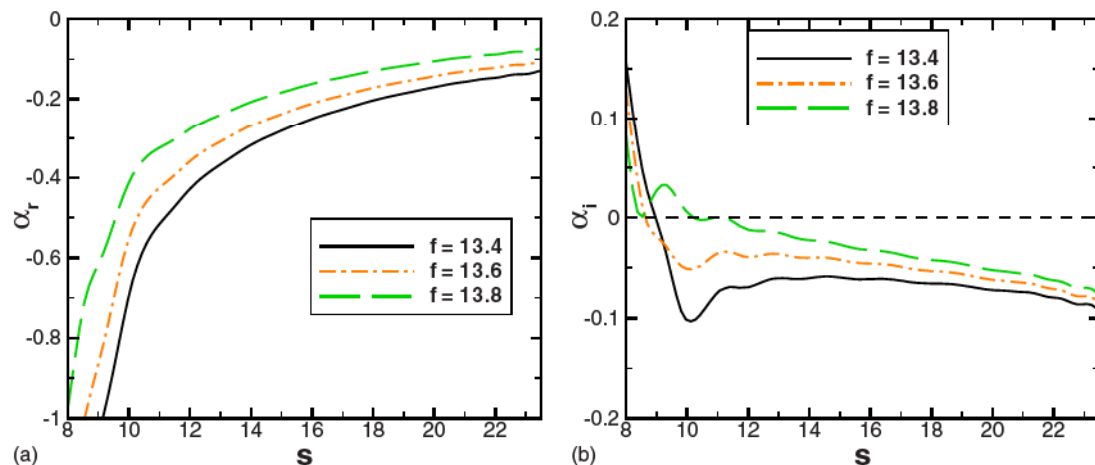


FIG. 7. (Color online) Real and imaginary parts of the chordwise wavenumber given by the Orr–Sommerfeld analysis, for three values of the frequency. The spanwise wavenumber is $2\beta_z$. (a) Real part of α . (b) Imaginary part of α .

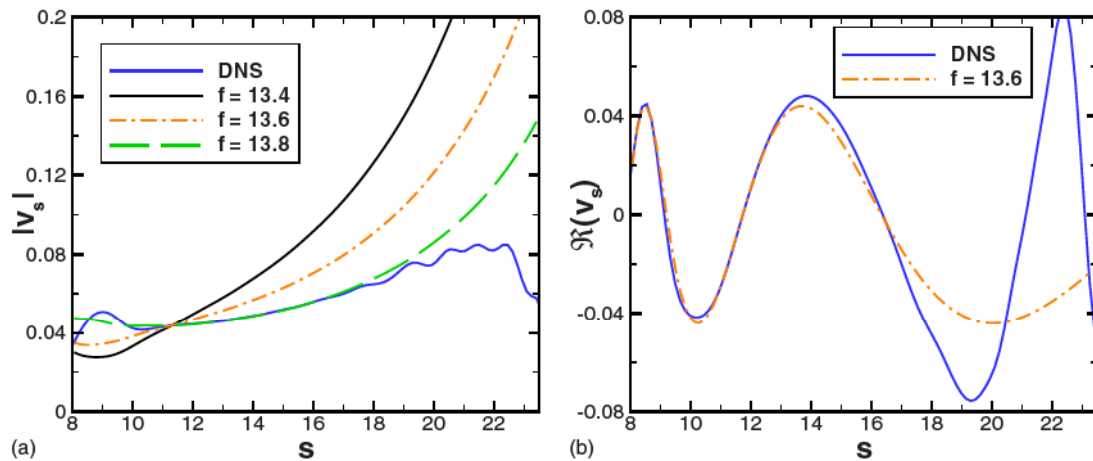


FIG. 8. (Color online) Comparison of the chordwise evolution between the A_1 -DNS fluctuation and the traveling crossflow wave predicted by the Orr-Sommerfeld analysis. The wall-normal distance is $n=0.25$. (a) Chordwise amplification. (b) Chordwise oscillation.

A. Instability of the recirculation zone?

Because of the grid topology, the roughness shape has a strong forward facing kink that can trap a recirculation zone under it. Many papers have studied the separation zones created by a two-dimensional (i.e., independent of z) forward or backward facing step in a channel, but the studies in boundary layers are much more scarce, especially for three-dimensional roughness elements. To the authors' knowledge, only Smith and Walton³⁰ gave detailed information on the flow past a three-dimensional steep-edged roughness. Their study is based on the triple-deck formulation. They show that the length of the upstream separation region is about $Re_h^{1/4}$, but they do not give such a precise criterion for the downstream separation zone. They show moreover that the three-dimensional effects are only significant at the spanwise tips of the roughness element. The size of the separation regions can therefore be roughly estimated by the results on two-dimensional roughness elements. Such an experiment has been performed by Saric, Krutckoff, and Radeztsky at the Arizona State University (private communication with Dr. Saric). They obtained a length of the downstream separation region that was about one to four times the roughness height

for roughness elements whose Re_h value was between 1 and 40. The length of the upstream separation region was about ten times smaller.

All these results show that in the present configuration, the length of the downstream separation region would be about a few h . However, the size of the computational cells around the roughness element is about $16h$ in both s and z directions. The present mesh is therefore too coarse to capture the separated zone around the roughness element and any associated Kelvin-Helmholtz instability mechanism.

B. Absolutelike instability of the base flow

As explained in Sec. III A, the spatiotemporal characteristics of the DNS unsteadiness do not depend on the roughness height, and the time evolution of the DNS fluctuation in case *A* looks like self-sustained oscillations, while in case *B* there is an exponential damping in time. These results make us study the linear response of the base flow to an initial forcing, which is at the source of the concept of absolute and convective instability.³¹ For absolutely unstable flows the behavior of the response induced by an impulse forcing at a

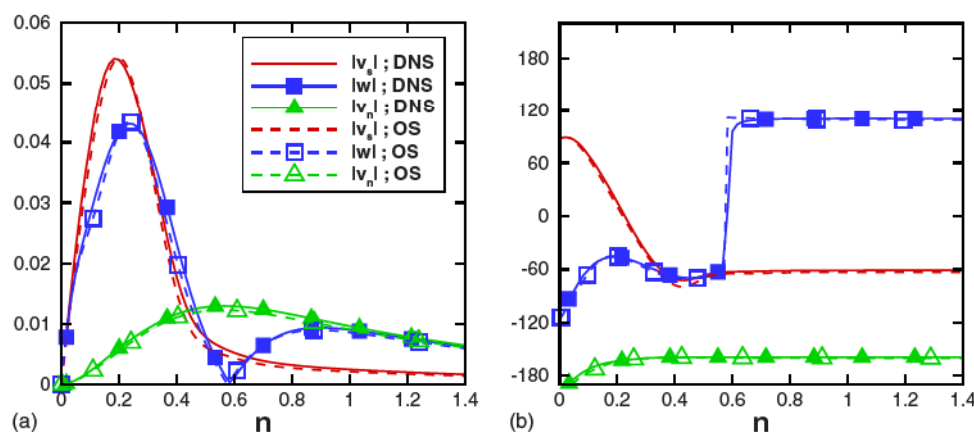


FIG. 9. (Color online) Comparison between the A_1 -DNS fluctuating flow (solid lines) and the eigenfunction predicted by the linear stability theory (dashed lines) for a spanwise wavenumber of $2\beta_z$ and a frequency of 13.8. The chordwise location is $s=14^\circ$. (a) Amplitudes, dimensionless. (b) Phases, in degrees.

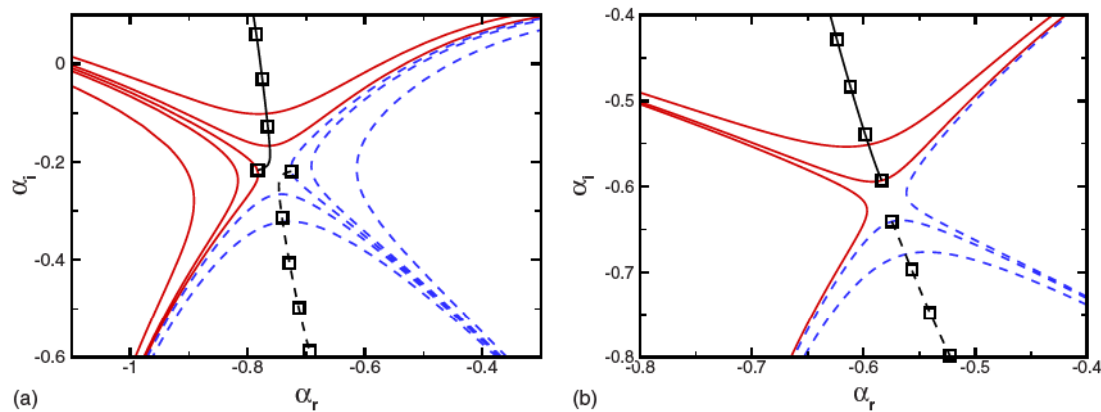


FIG. 10. (Color online) Mapping of the complex ω -plane into the complex α -plane. Results from the dispersion relation of the Orr–Sommerfeld equation, applied to the DNS-computed base flow. The spanwise wavenumber is $\beta = 2\beta_z$. (a) $s = 7.6^\circ$. (b) $s = 13.8^\circ$.

fixed spatial location is dominated by the absolute wavenumber corresponding to a zero group velocity. If the imaginary part of the associated *absolute frequency* ω_0 is negative, the flow is convectively unstable, while it is absolutely unstable if the imaginary part of ω_0 is positive. The absolute wavenumber and frequency correspond to a singularity of the dispersion relation that must fulfill a pinching requirement; such pinching points can be found by using the Briggs–Bers criterion.^{32,33}

As mentioned in Sec. I, Lingwood⁹ and Taylor and Peake¹⁰ analyzed the linear impulse response of both Falkner–Skan–Cooke and true swept wing boundary layers. Because of the three-dimensional nature of the base flow, they searched for pinching points in both spanwise and chordwise wavenumber planes. Each wavenumber plane exhibits pinching points, but no simultaneous pinching was observed. That means that a true absolute instability does not exist for these boundary layers: the disturbance group velocity can go to zero in one direction but the disturbance will still convect in the other direction and therefore will leave the initial position free.

The absence of absolute instability in swept wing boundary layers was also experimentally investigated by White.³⁴ He considered a spanwise array of variable-amplitude leading-edge roughness and, during a single, continuous wind-tunnel run, increased the roughness amplitude from a flush configuration to an active roughness state and then came back to the initial inactive state where the roughness is flush with the wing surface. White checked that the flow was laminar in the initial inactive configuration, then became turbulent when the roughness were activated, and finally reverted to a laminar state when the roughness amplitude was decreased to the original inactive amplitude. The absence of a hysteresis effect proved that the flow was absolutely stable.

In White’s configuration the roughness is spanwise periodic, as in the present study, but the roughness elements have a finite spanwise extent. The forcing with the variable-amplitude roughness bears a resemblance with that obtained in the present DNS (see the sketch in Fig. 3), except that the step-function-type forcing is necessarily smoother in an experiment than in a numerical simulation. On the other hand,

White was looking for an absolute instability of a basic flow which had been nonlinearly modified by the roughness-induced stationary crossflow waves. Therefore, the spanwise spacing between the roughness elements was chosen in order to force the most amplified stationary mode, which is not the case in the present simulation: the obtained crossflow waves are only weakly amplified. Our DNS thus represents a subtly different situation than White’s experiments.

The present configuration is also different from that studied by Lingwood or Taylor and Peake: as periodicity is enforced in the spanwise direction, the spanwise wavenumber is fixed to a real multiple of β_z and an impulse response analysis in the spanwise wavenumber plane is meaningless. Indeed, our configuration behaves as if there was a spanwise-infinite system of excitation: any disturbance will build on itself along the span. Consequently, the studied configuration is much more like that of a rotating flow, for which only the chordwise wavenumber plane has to be studied because the axial symmetry forces β to be a real number (see Ref. 8).

The response of the DNS-computed base flow ($V_s^{cy1}, 0, W_s^{cy1}$) to an initial forcing is thus studied by using the Briggs–Bers criterion in the complex chordwise wavenumber plane only, for the fixed spanwise wavenumber $2\beta_z$. The dispersion relation of the three-dimensional Orr–Sommerfeld equation is used. This analysis is performed at two chordwise locations: $s = 7.6^\circ$ and $s = 13.8^\circ$. The map of the ω plane into the α plane under the dispersion relation is shown in Fig. 10, for both chordwise locations. The lines without symbols correspond to the spatial branches obtained by varying ω along straight lines parallel to the real ω -axis, while for the lines with symbols ω_r is kept constant and ω_i is increased. Solid lines correspond to the crossflow mode and dashed lines to another mode of the spectrum. Figure 10 shows that a saddle point forms in the complex α plane. Moreover, its branches originate from distinct halves of the α plane, as clearly shown by the lines with symbols. According to the Brigg–Bers method, this ensures that this pinch point α_0 is the absolute wavenumber associated to the long-time behavior of the impulse response. The corresponding branch point is $\omega_0 = 88 - 0.56i$ ($f_0 = 14 - 0.09i$) for $s = 7.6^\circ$ and $\omega_0 = 78.5 - 3.89i$ ($f_0 = 12.5 - 0.62i$) for $s = 13.8^\circ$. As the imagi-

nary part of ω_0 is negative, the flow is convectively unstable at both chordwise locations. However, at $s=7.6^\circ$ the imaginary part of the absolute frequency is very low, which means that the damping in time of the impulse response will be weak.

All these results match with the time characteristics of the DNS unsteadiness: $s=7.6^\circ$ corresponds to the roughness location in case *A*, i.e., to the location where perturbations are introduced at the beginning of the with-roughness computation. Indeed, as explained in Sec. II C, the with-roughness computation is initialized with the no-roughness flow field, i.e., $(V_s^{cy1}, V_n^{cy1}, W^{cy1})$, which is nonzero at the roughness wall. Consequently, strong initial transients arise because of the necessary development of the complex flow pattern that allows the flow to wrap around the roughness element. These transients play the role of a causal forcing, which is not strictly speaking impulsive since these transients do not disappear instantaneously, but is almost impulsive since the flow structure around the roughness element is fully established long before the end of the simulation. It has been shown that the absolute frequency predicted by the impulse response analysis is $f_0=14-0.09i$. This value differs from the f_{A1} , f_{A2} , or f_{A3} values (given in Table II) by less than 3%. On the other hand, $s=13.8^\circ$ corresponds to the roughness location in case *B*. The absolute frequency predicted by the impulse response analysis is $f_0=12.5-0.62i$, which differs from the f_{B1} , f_{B2} , or f_{B3} values (see Table II) by less than 4%. These slight differences may be due to the nonparallel and surface curvature effects, which are taken into account in the DNS computations, but not in the linear impulse response analysis.

Moreover, it has been seen that the DNS unsteadiness is the same traveling crossflow wave in each case A_1 , A_2 , and A_3 , but with a different amplitude (this is also true for cases B_1 , B_2 , and B_3). This behavior is in agreement with a linear impulse response of various level, associated with the various strengths of the transients due to the initialization process: the smaller the roughness element, the weaker the adjustments needed to fulfill the no-slip boundary condition.

All these results let us think that the origin of the traveling crossflow wave observed in the DNS computations is a “quasi-absolute” instability mechanism of the no-roughness flow field: these instability waves are convectively unstable and absolutely stable, but with an imaginary part of the absolute frequency (i.e., their damping rate in time) which is small enough to make them visible in the DNS computations.

Finally, a discussion can be made on an eventual instability of the numerical computation. Buell and Huerre³⁵ showed that global self-sustained oscillations can be observed in numerical simulations of flows that are convectively unstable everywhere. This spurious global behavior is due to the outflow numerical boundary conditions that create destabilizing pressure feedback loops. Cossu and Loiseleux³⁶ studied the influence of finite difference numerical schemes on the capture of absolute or convective instabilities in open flows. They showed that sometimes the choice of the scheme can make a convective instability looks absolute, and vice versa. We do not think that such an issue is in stake in the

present computations, because of the very good agreement obtained between the observations in the DNS and the predictions of the linear impulse theory.

V. CONCLUSIONS

The stability of the laminar boundary layer along a swept cylinder has been investigated both numerically and theoretically, in the situation where the boundary conditions impose a spanwise periodicity. The boundary layer flow has been computed through a DNS of the Navier–Stokes equations, which has been validated by comparing its result with that of a boundary layer code. A second computation has been performed to obtain the flow in the presence of a surface roughness element. Periodic boundary conditions are enforced at the spanwise boundaries of the computational domain to model a spanwise roughness array. The roughness element has a parallelepipedic shape and is small enough not to trigger the transition to turbulence. Downstream of the roughness element the flow exhibits unsteady waves, which are self-sustained or quickly damped in time depending on the roughness chordwise location. A spatial linear stability analysis of the boundary layer flow (i.e., the flow around the smooth cylinder) has proved that these unsteady waves are traveling crossflow waves with a spanwise wavelength half as large as the spanwise size of the computational domain.

The origin of these traveling crossflow waves has been investigated theoretically. The linear impulse response of the flow around the smooth cylinder has been analyzed, by taking into account the imposed spanwise periodicity. Therefore, the spanwise wavenumber must be an integer multiple of the wavenumber associated with the spanwise extent of the computational domain. A unidirectional absolute instability analysis is thus significant, since a forcing-induced disturbance that convects in the spanwise direction while growing in time at a fixed chordwise position, will build on itself when reaching one of the spanwise boundary of the computational domain. It has been showed that the flow around the smooth cylinder exhibits crossflow modes of zero group velocity, whose associated absolute frequency has a negative imaginary part; consequently, this flow is absolutely stable. However, there is a chordwise location where the imaginary part of the absolute frequency is very close to zero. This location is precisely the one where the presence of a roughness element generates self-sustained crossflow waves in the DNS computations. Moreover, the frequency of these traveling crossflow waves matches the real part of the absolute frequency obtained from the linear impulse response analysis of the flow around the smooth cylinder. A similar agreement is found between the frequency and damping rate in time of the crossflow waves generated by a roughness located more downstream, and the absolute frequency obtained at the corresponding chordwise location. Additional DNS computations have shown that a change in the roughness height or spanwise extent had an impact on the amplitude of the generated crossflow waves, but not on their spatiotemporal behavior. In fact, when the DNS computation is initialized with the smooth cylinder flow, strong initial transients arise

because of the necessary development of the complex flow pattern that allows the flow to wrap around the roughness element. These transients are causal (they appear at the beginning of the simulation with the roughness element), and are almost impulsive since they disappear as soon as the flow structure around the roughness surface is established. Our guess is that such transients play the role of an impulse forcing, which generates the traveling crossflow modes through the linear impulse response mechanism found out for the studied boundary layer flow.

Up until now, such an absolutelike instability mechanism has not been observed in experiments. However, it must be noted that the present configuration possesses distinctive features that are inherent to a numerical simulation and could hardly be obtained in experiments. First, the roughness elements appear instantaneously in the boundary layer, while in most experiments roughness elements are static. A near-impulsive forcing can be attempted in experiments by implementing variable-amplitude roughness, but such an introduction of the roughness element would never be as abrupt as in the simulation. Second, perfectly periodic spanwise boundary conditions are imposed in the numerical simulation, which is unachievable in practice. Moreover, such a condition implies that the forcing induced by the transients is exactly the same all along the infinite span. Finally, the physical conditions used in the present simulation (pressure gradient, N factor of the crossflow modes) do not correspond to the most amplified crossflow modes and are consequently less easily observable in experiments, and the absolute mode supported by the studied flow is not unstable but only marginally stable.

ACKNOWLEDGMENTS

The assistance of Marc Terracol in the use of the DNS code is gratefully acknowledged.

- ¹D. Arnal, "Boundary layer transition: Predictions based on linear theory," AGARD FDP/VKI Special Course on "Progress in Transition Modelling," AGARD Report No. R-793, VKI, Brussels, Belgium, 1993, pp. 2.1–2.63.
- ²W. S. Saric, H. L. Reed, and E. B. White, "Stability and transition of three-dimensional boundary layers," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **35**, 413 (2003).
- ³W. S. Saric and H. L. Reed, "Crossflow instabilities-theory and technology," 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, 2003, Paper No. AIAA-2003-771.
- ⁴T. S. Haynes and H. L. Reed, "Simulation of swept-wing vortices using nonlinear parabolized stability equations," *J. Fluid Mech.* **405**, 325 (2000).
- ⁵G. Bonfigli and M. Kloker, "Secondary instability of crossflow vortices: validation of the stability theory by direct numerical simulation," *J. Fluid Mech.* **583**, 229 (2007).
- ⁶P. Huerre and M. Rossi, *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998), Chap. 2.
- ⁷Y. Kohama, "Study on boundary layer transition of a rotating disk," *Acta Mech.* **50**, 193 (1984).
- ⁸R. J. Lingwood, "Absolute instability of the boundary layer on a rotating disk," *J. Fluid Mech.* **299**, 17 (1995).
- ⁹R. J. Lingwood, "On the impulse response for swept boundary-layer flows," *J. Fluid Mech.* **344**, 317 (1997).
- ¹⁰M. J. Taylor and N. Peake, "The long-time behaviour of incompressible swept-wing boundary layers subject to impulsive forcing," *J. Fluid Mech.* **355**, 359 (1998).
- ¹¹M. S. Reibert and W. S. Saric, "Review of swept-wing transition," 28th Fluid Dynamics Conference, Snowmass Village, CO, 1997, Paper No. AIAA-97-1816.
- ¹²Y. S. Kachanov, "Three-dimensional receptivity of boundary layers," *Eur. J. Mech. B/Fluids* **19**, 723 (2000).
- ¹³H. Bippes, "Basic experiments on transition in three-dimensional boundary layers dominated by crossflow instabilities," *Prog. Aerosp. Sci.* **35**, 363 (1999).
- ¹⁴S. Takagi and N. Itoh, "Observation of traveling waves in the three-dimensional boundary layer along a yawed cylinder," *Fluid Dyn. Res.* **14**, 167 (1994).
- ¹⁵J. D. Crouch, "Receptivity of three-dimensional boundary layers," 31st Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno, NV, 11–14 January 1993, Paper No. AIAA-93-0074.
- ¹⁶M. Choudhary, "Roughness-induced generation of crossflow vortices in three-dimensional boundary layers," *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **6**, 1 (1994).
- ¹⁷M. E. Goldstein, "Scattering of acoustic waves into Tollmien-Schlichting waves by small streamwise variations in surface geometry," *J. Fluid Mech.* **154**, 509 (1985).
- ¹⁸E. Kerschen, "Boundary layer receptivity," AIAA 12th Aeroacoustics Conference, San Antonio, TX, 1989, Paper No. AIAA-89-1109.
- ¹⁹F. P. Bertolotti, "Receptivity of three-dimensional boundary-layers to localized wall roughness and suction," *Phys. Fluids* **12**, 1799 (2000).
- ²⁰S. S. Collis and S. K. Lele, "Receptivity to surface roughness near a swept leading edge," *J. Fluid Mech.* **380**, 141 (1999).
- ²¹E. Piot and L. U. Schrader, "Receptivity of three-dimensional boundary layers to surface roughness," ERCOFTAC Bulletin No. 74, 2007.
- ²²L. U. Schrader, L. Brandt, and D. S. Henningson, "Receptivity mechanisms in three-dimensional boundary-layer flows," *J. Fluid Mech.* **618**, 209 (2009).
- ²³E. Piot, G. Casalis, and M. Terracol, "Direct numerical simulation of the crossflow instabilities induced by a periodic roughness array on a swept cylinder: Receptivity and stability investigations," 37th Fluid Dynamics Conference, Miami, FL, 2007, Paper No. AIAA-2007-3976.
- ²⁴D. I. A. Poll, "Some observations of the transition process on the windward face of a long yawed cylinder," *J. Fluid Mech.* **150**, 329 (1985).
- ²⁵E. Piot, "Simulation numérique directe et analyse de stabilité de couches limites laminares en présence de micro-rugosités," Ph.D. thesis, Institut National Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2008.
- ²⁶M. Terracol, "Développement d'un solveur pour l'aéroacoustique numérique: sAbrinA," Rapport technique ONERA Technical Report No. RT 5/07383 DSNA, 2003.
- ²⁷M. R. Visbal and D. V. Gaitonde, "On use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes," *J. Comput. Phys.* **181**, 155 (2002).
- ²⁸L. Lesshafft, P. Huerre, P. Sagaut, and M. Terracol, "Nonlinear global modes in hot jets," *J. Fluid Mech.* **554**, 393 (2006).
- ²⁹K. W. Thompson, "Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems," *J. Comput. Phys.* **68**, 1 (1987).
- ³⁰F. T. Smith and A. G. Walton, "Flow past a two- or three-dimensional steep-edged roughness," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **454**, 31 (1998).
- ³¹P. Huerre and P. A. Monkewitz, "Local and global instabilities in spatially developing flows," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473 (1990).
- ³²R. J. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasmas* (MIT Press, Cambridge, MA, 1964).
- ³³A. Bers, *Handbook of Plasma Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1983), Chap. 3.2, Vol. 1.
- ³⁴E. B. White, "Breakdown of crossflow vortices," Ph.D. thesis, Arizona State University, 2000.
- ³⁵J. C. Buell and P. Huerre, "Inflow/outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layers," Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases, 2. Proceedings of the 1988 Summer Program, pp. 19–27, Center for Turbulence Research Technical Report No. CTR-S88, 1988.
- ³⁶C. Cossu and T. Loiseleux, "On the convective and absolute nature of instabilities in finite difference numerical simulations of open flows," *J. Comput. Phys.* **144**, 98 (1998).



Implementation and non-intrusive characterization of a hybrid active–passive liner with grazing flow

Benjamin Betgen^{a,1}, Marie-Annick Galland^a, Estelle Piot^{b,*}, Frank Simon^b

^a Centre Acoustique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA), Ecole Centrale de Lyon, 69134 Ecully Cedex, France

^b Onera – The French Aerospace Lab, F31055 Toulouse, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 17 June 2011

Received in revised form 19 January 2012

Accepted 31 January 2012

Available online 25 February 2012

Keywords:

Duct acoustic

Flow

Acoustic liner

Impedance control

LDV

ABSTRACT

Different hybrid active–passive absorbers have been developed at the LMFA that seem well suited for the use as turboengine nacelle liners. The basic version is made of a resistive screen backed by cells that contain one microphone and one secondary source each. At low frequencies, acoustic pressure behind the screen is cancelled actively in order to obtain a purely real and constant surface impedance. At higher frequencies, active control is turned off and the liner acts as a classical SDOF resonator. An advanced version (the complex hybrid absorber) has been developed recently, featuring two microphones per cell. With the new system, the surface impedance of the cell can be measured and adjusted to a given (possibly complex and frequency dependent) target impedance. The present paper reports on two measurement campaigns that aimed at a characterization of these absorbers by the use of Laser Doppler Velocimetry (LDV). LDV allows the assessment of acoustic velocity in vicinity of the absorber in a non intrusive way. The measurements confirm the good performance of both absorbers without flow. In particular, one observes that in active mode the different hybrid cells appear as a homogeneous liner with a global influence on the duct. In presence of grazing flow, the influence of the absorber on the duct is limited to the immediate vicinity of each hybrid cell, which explains the reduced performance.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Passive acoustic treatments like single-degree-of-freedom (SDOF) liners are widely used in aeroengine nacelle inlets and outlets for the reduction of turbofan noise. They are typically made of a thin resistive sheet above a honeycomb layer, and are designed to behave as 1/4-wavelength resonators [1]. Then, the thicker the liner, the lower the frequency range of sound attenuation. However, as available space inside nacelles is limited, it is generally impossible to tune such SDOF resonators to the low blade-passing-frequencies (BPF) of modern high-bypass-ratio engines, or to adapt them to different flight conditions. Purely active noise control techniques on the other hand are limited to the low frequency range. Hybrid active–passive liners allow these limitations to be overcome and assure good performance over a broad frequency range [2]. The general design of a hybrid cell is depicted in Fig. 1. It is made of a resistive screen above a cavity backed by a secondary source. At high frequencies, this source is turned off and the hybrid liner acts as classical SDOF resonators. At low frequencies, active noise control techniques are used in order to adapt the surface impedance of the liner. In this paper two control

techniques are presented. The first one can be summarized as “impedance control through pressure control”. Indeed, pressure is cancelled on the rear side of the resistive screen, which results in a purely real surface impedance, given by the resistance of the used screen [3,4]. This kind of hybrid liner is herein denoted as *basic hybrid absorber*. However the optimal impedance (i.e. the one that produces the highest noise reduction) of an absorber for flow duct applications is generally a frequency-dependent complex number, that is why a second control technique is proposed: it consists in performing a full impedance control by using one microphone on each side of the screen. Such a liner is denoted as *complex hybrid absorber*. The first concept has been introduced in 1953 by Olson and May [5], who suggested performing a pressure reduction at the rear face of a porous layer in order to enhance absorption at low frequencies. Many other devices have then been proposed to realize active systems able to control, partially or totally, the impedance. Among recent publications, electrical circuits have been designed to directly control the impedance of the secondary source: Kanev and Mironov [6] present a device able to adapt the impedance of a mechanical resonator, with a unique microphone, in order to enhance absorption for a plane wave under normal incidence. Lissek et al. [7] propose a theory unifying all the passive and active acoustic impedance control strategies, introducing the concept of electroacoustic absorbers. A potential application is the design of active devices without any external

* Corresponding author. Tel.: +33 5 62 25 28 12; fax: +33 5 62 25 25 83.

E-mail address: estelle.piot@onera.fr (E. Piot).

¹ Present address: VibraTec, 28 chemin du petit bois, 69131 Ecully Cedex, France.

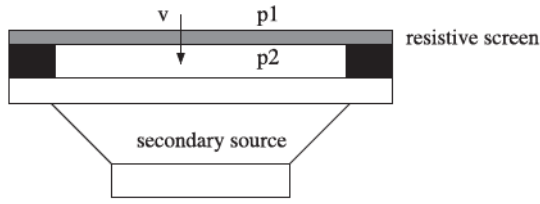


Fig. 1. Principal setup of a hybrid cell.

sensor. The control techniques used in the present paper are detailed in Section 2.

These hybrid liners, and especially the complex hybrid absorber, have been shown to be very efficient noise attenuators since transmission loss values up to 20 dB can be obtained in a duct without flow [8].

But the application as aeroengine nacelle liner would implicate grazing flow of relatively high Mach number. Due to a more complex control algorithm and the added front face microphone, flow induced noise can be critical for the complex hybrid absorber. In contrast, the error microphones of the basic hybrid absorber are well protected against grazing flow behind the resistive layer; fast convergence and excellent stability have been observed [9], even in the presence of high flow-induced noise levels. However, for both kind of active control, the measured transmission loss decreases clearly with increasing flow speed [8].

In order to better understand this loss of performance with flow, the present study aims at a local observation of the sound field in vicinity of the absorber. Laser Doppler Velocimetry (LDV) offers the opportunity of such a local and non-intrusive determination of acoustic parameters. The measurements that are presented in this paper have been conducted at the French Aerospace Lab ONERA at Toulouse, and some of this work has been presented in [10]. The LDV measurement technique developed at ONERA and the corresponding aeroacoustic test bench are briefly described in Section 4.

The results of a first measurement campaign devoted to the basic hybrid absorber are given in Section 5.1. The complex hybrid absorber has been tested during a second campaign that is discussed in Section 5.2.

2. The hybrid liner

2.1. Impedance control through pressure control: the basic hybrid absorber

At low frequencies, viscous forces in a porous material predominate over inertial ones and the acoustic velocity across a resistive layer can be approximated using Darcy's law. This means that acoustic velocity is proportional to the pressure difference between both sides of the resistive layer and inversely proportional to its flow resistance R , as given by Eq. (1).

$$v = \frac{p_1 - p_2}{R} \quad (1)$$

Hence, when acoustic pressure on the rear side of the layer is cancelled ($p_2 = 0$), the surface impedance is given by the flow resistance R according to Eq. (2).

$$Z = \frac{p_1}{v} = R \quad (2)$$

Pressure cancellation can be obtained by backing the resistive layer with a cavity of depth $\lambda/4$. The use of active control allows the realization of the same boundary condition at low frequencies without the need of a deep cavity. In addition, the $p_2 = 0$ condition can then be obtained over a broad frequency range. This is the

principle of what is qualified as hybrid absorber in previous publications [3,9,4]. Throughout the present paper it will be labeled *basic hybrid absorber* in order to distinguish this absorber from the newly developed version.

Fig. 3a displays the basic hybrid absorber used during the first measurement campaign. A surface of 30 mm × 150 mm is imposed by the sample holder of the ONERA test bench. Miniature loudspeakers (Monacor SP-5) have been selected as secondary sources. Those exceed the width of the liner sample holder, therefore the cavities of the hybrid cells are chosen deep enough (40 mm) to fix the loudspeakers outside the sample holder.

The control system that performs the pressure minimization is a digital feedback controller. Indeed, for industrial applications it is necessary to consider a liner made of a large number of hybrid cells. However, with a classical Multiple Input Multiple Output

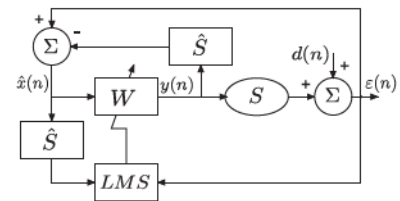
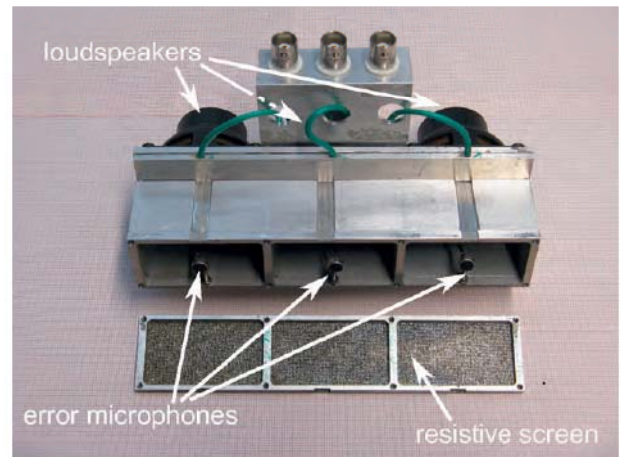
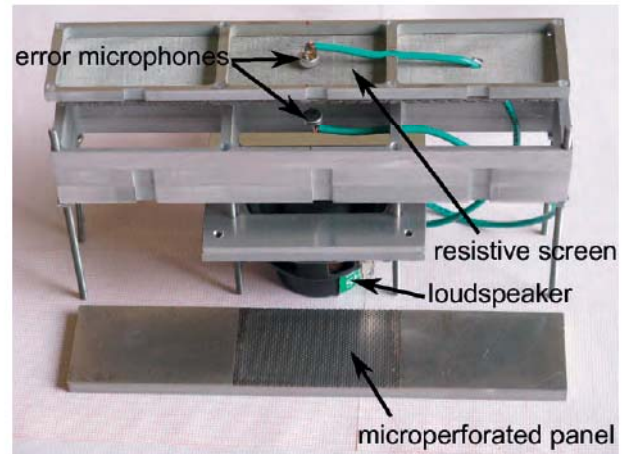


Fig. 2. Block diagram of the IMC-FXLMS algorithm.



(a) 3-cell basic hybrid absorber



(b) 1-cell complex hybrid absorber

Fig. 3. Hybrid absorber prototypes.

(MIMO) feedforward system based on a unique reference signal, memory and calculation costs significantly increase with the number of channels. Moreover, in flow duct applications, an upstream reference signal may be insufficiently correlated with the sound to be cancelled downstream, and could then prevent from achieving an efficient active control. Thus, a digital adaptive feedback control system has been developed [4], which operates independently cell by cell. The SISO (Single Input Single Output) version

of the algorithm consists in removing the feedback contribution coming from the secondary source, from the signal obtained at the control microphone. The primary contribution only remains and is then used as a reference signal in the classical FXLMS algorithm. The corresponding block diagram of this algorithm called IMC-FXLMS algorithm for Internal Model Control is shown in Fig. 2. S represents the secondary path, between the secondary source and the control microphone. $\hat{S}$ is a estimate of S realized

Table 1

Optimal impedances predicted by the numerical model for a liner of 50 mm width and 150 mm length in a tube of cross-section 50 mm × 50 mm (Z_{num}), compared to Cremer impedance (Z_{Cremer}).

Frequency (Hz)		496	992	1592
$M = 0$	$Z_{num}/\rho c_0$	$0.1 - 0.11i$	$0.21 - 0.21i$	$0.34 - 0.37i$
	$Z_{Cremer}/\rho c_0$	$0.13 - 0.01i$	$0.27 - 0.02i$	$0.42 - 0.04i$
$M = 0.1$	$Z_{num}/\rho c_0$	$0.1 + 0.03i$	$0.2 - 0.07i$	$0.33 - 0.23i$
	$Z_{Cremer}/\rho c_0$	$0.11 - 0.01i$	$0.22 - 0.02i$	$0.35 - 0.03i$

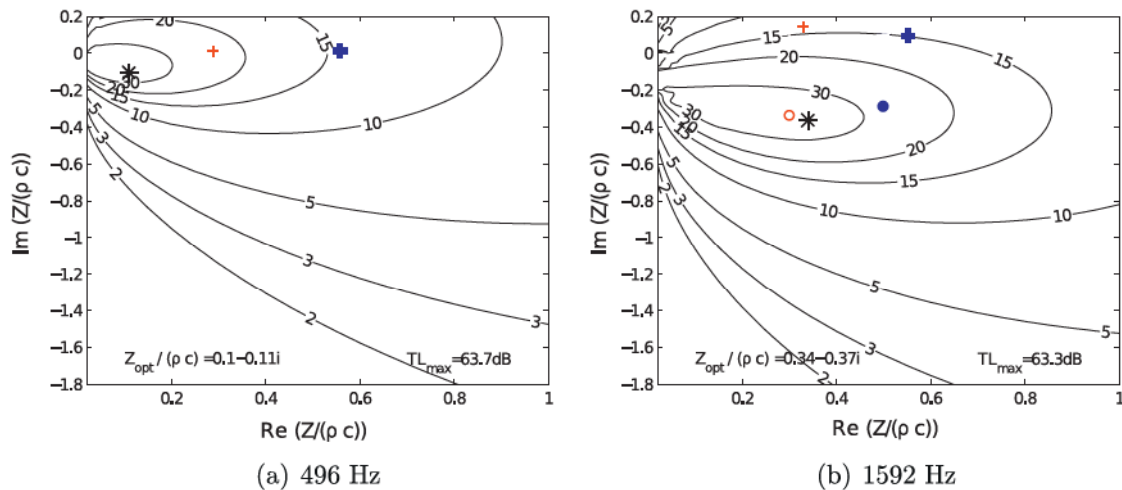


Fig. 4. Transmission loss as a function of complex impedance of a liner of 50 mm width and 150 mm length in a tube of cross-section 50 mm × 50 mm. No flow. Comparison between $f = 496 \text{ Hz}$ and $f = 1592 \text{ Hz}$. The optimal impedance is marked with a star. Impedances realized with two different resistive screens of the basic hybrid absorber are given by crosses in the basic active mode and circles in the passive mode (thin, open: feltmetal sheet; thick, closed: wiremesh sheet). At 496 Hz the passive mode impedance is outside the figure.

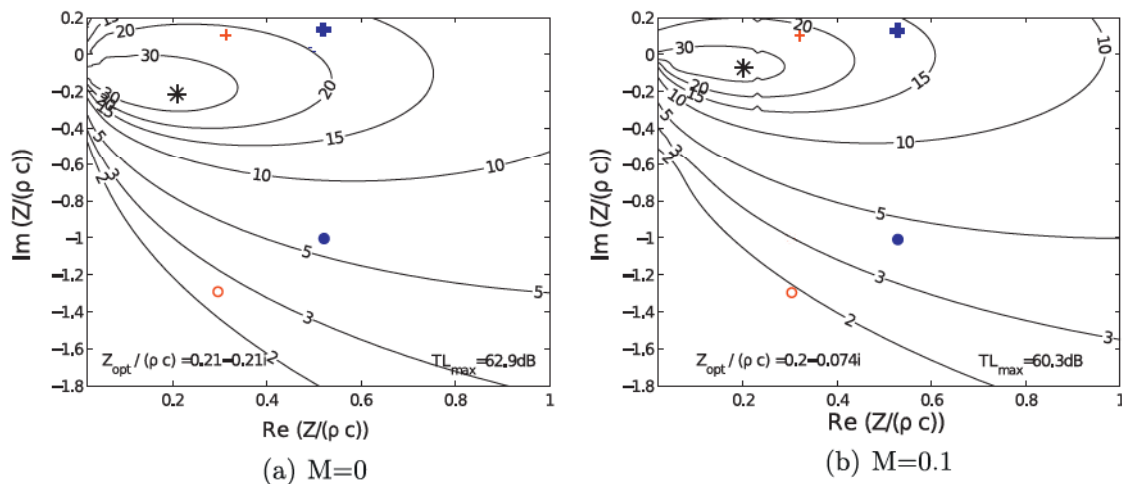


Fig. 5. Transmission loss as a function of complex impedance of a liner of 50 mm width and 150 mm length in a tube of cross-section 50 mm × 50 mm. Frequency $f = 992 \text{ Hz}$. Comparison between $M = 0$ and $M = 0.1$. The optimal impedance is marked with a star. Impedances realized with two different resistive screens of the basic hybrid absorber are given by crosses in the basic active mode and circles in the passive mode (thin, open: feltmetal sheet; thick, closed: wiremesh sheet).

by a numerical FIR filter, predetermined before control. W is the adaptive control filter. $d(n)$ is the primary disturbance, $\hat{x}(n)$ its estimate and thus the synthesized reference for the FXLMS algorithm. $y(n)$ is the controller output, and $e(n)$ is the error signal, measured at the control microphone. More information about this algorithm can be found in Refs. [3,11].

Error microphones are electret condenser microphones Panasonic WM65. Two different resistive screens are used: a feltmetal sheet of resistance $R/\rho c_0 = 0.3$ and a wiremesh glued on a perforated panel of $R/\rho c_0 = 0.5$. Both materials are thin layers (around 1 mm) that are suitable for use under harsh environmental conditions.

2.2. Full impedance control: the complex hybrid absorber

Making use of Eq. (1), the surface impedance of the hybrid absorber can be written as

$$Z = \frac{p_1}{v} = R \frac{p_1}{p_1 - p_2} \quad (3)$$

It becomes clear that arbitrary surface impedances can be obtained by rearranging p_1 and p_2 instead of only cancelling p_2 . The velocity measurement according to Eq. (1) has the advantage of being frequency independent (in the low frequency range).

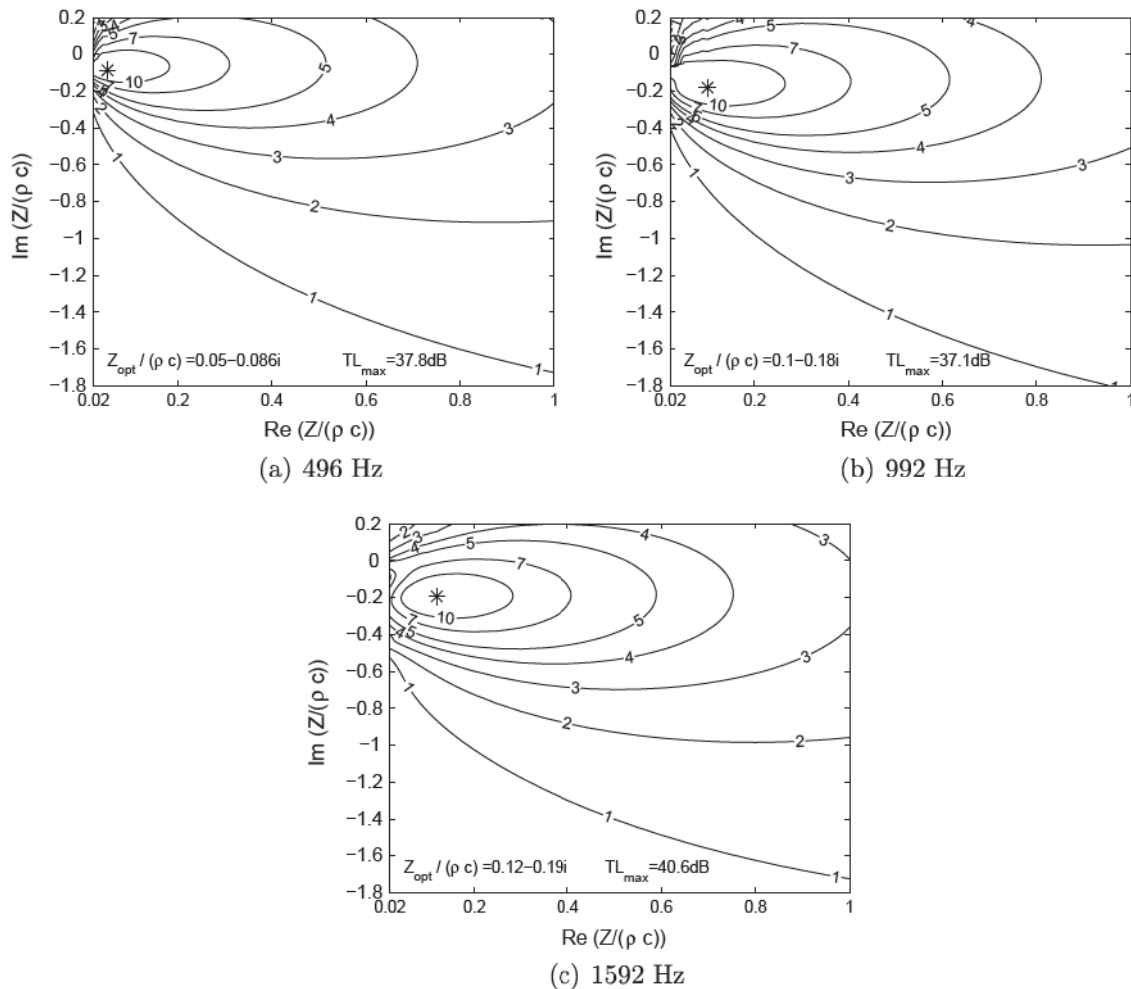


Fig. 6. Transmission loss as a function of complex impedance of a liner of 50 mm width and 50 mm length in a tube of cross-section 50 mm × 50 mm. $M = 0$.

Table 2

Numerical optimum and measured values of impedances and associated TL for different modes of operation of the complex hybrid absorber, without flow.

Frequency (Hz)		496	992	1592
Numerical optimum	$Z/\rho c_0$	0.05 – 0.086i	0.1 – 0.18i	0.12 – 0.19i
	TL (dB)	37.8	37.1	40.6
Passive mode	$Z/\rho c_0$	0.40 – 2.00i	0.43 – 0.77i	0.49 – 0.13i
	TL (dB)	0.0	1.5	4.3
Basic active mode	$Z/\rho c_0$	0.56 + 0.11i	0.58 + 0.22i	0.62 + 0.35i
	TL (dB)	2.6	2.1	3.0
Active impedance ctrl. mode	$Z/\rho c_0$	0.01 – 0.14i	0.11 – 0.18i	0.27 – 0.15i
	TL (dB)	22.3	14.0	7.2

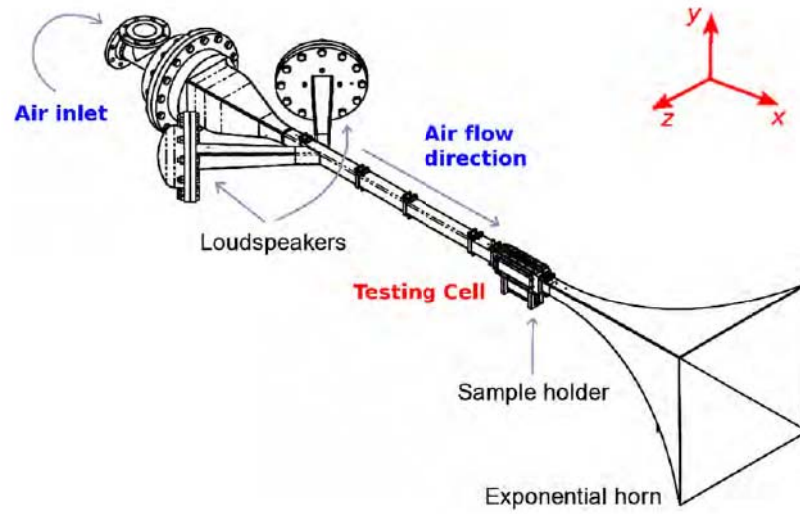


Fig. 7. Sketch of the Aero-Thermo-Acoustic test bench.

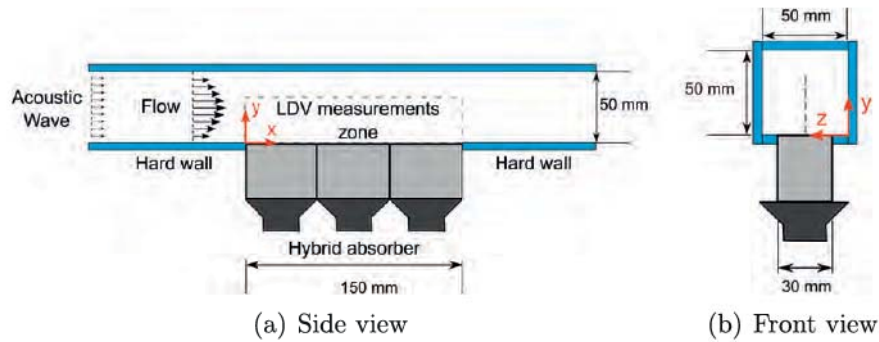


Fig. 8. Sketch of the test section equipped with the hybrid liner. For the complex hybrid absorber, only the central cell is used.

Additionally, no large distance between the microphones is needed because the pressure gradient is provided by the resistive screen. Surprisingly, this apparently self-evident expression has – to our knowledge – never been used for impedance control applications. Introducing a target impedance Z_b , Eq. (3) can directly be rewritten as an error signal.

$$\epsilon = Z_t(p_1 - p_2) - R p_1 \quad (4)$$

As complex impedances can be realized by the use of this error signal, the new hybrid absorber is qualified as *complex hybrid absorber*. The error signal is integrated in a digital feedback control structure similar to the one mentioned above. Therefore, the target impedance, usually defined in the frequency domain has to be expressed in the time domain to build a numerical error signal; details can be found in Ref. [8]. At this stage, only a one channel version of the complex hybrid absorber has been realized as displayed in Fig. 3b. A Monacor SP-5 speaker is again used as secondary source, the resistive layer is the wiremesh screen of $R/\rho c_0 = 0.5$. The pair of Panasonic WM65 microphones has been verified to respect maximum errors in magnitude and phase of 1 dB and 12° respectively. Fig. 3b also shows a microperforated panel at the front face of the device: it is used in order to protect the front face microphone measuring the p_1 pressure from flow. Of course, the impedance modification due to the layer and the added distance has to be taken into account when defining the target impedance.

3. Optimal impedance

This section aims at illustrating the benefit of impedance control in contrast to conventional absorbers.

3.1. Theory

It is well known that the optimal impedance for absorption of a normal incident plane wave would be $Z_0 = \rho c_0$. This is not the case for grazing incidence. Cremer [12] found an analytic expression for the optimal impedance of a treatment covering one face of an infinitely long rectangular duct. This optimal impedance given by $Z_{\text{Cremer}} = Z_0(0.91 - 0.76j)kh/\pi$ only depends on frequency and the height of the duct (perpendicular to the liner). Tester [13] gives a correctional factor of $1/(1+M)^2$ to account for the presence of uniform flow of Mach number M in the direction of sound propagation.

In the case of an infinitely long liner the optimal impedance is simply the one that produces the highest absorption. For a liner of finite length, optimal impedance is better defined as the one producing the highest transmission loss² (TL), since noise attenuation can be produced by both reflection of the incoming acoustic wave and absorption of it. An analytical expression of the optimal

² The classical definition of the best liner is the one that produces the highest insertion loss. However, in the duct configuration considered here, the insertion loss is equal to the transmission loss.

impedance may be difficult to find, but its value can easily be determined numerically. However, the qualitative behavior of optimal impedance is common to the infinite as well as to the finite liner: the real part is positive and increasing with frequency, the imaginary part is negative and decreasing. Transmission loss produced by a very short liner can to a great extent be due to reflection, this is the reason why the optimal impedance of a short liner is generally much lower in modulus than the Cremer impedance. Furthermore, mean flow in the direction of sound propagation also lowers the optimal impedance; in the opposite direction optimal impedance is increased. In this context it must be pointed out that the presented experiments always deal with flow in the direction of sound propagation. A setup with flow in the opposite direction would be advantageous for absorption but is not available in the present work.

Transmission loss of a finite length liner is determined numerically. As all considered frequencies remain below the cut-off frequency of the duct, a harmonic plane wave source and an anechoic termination are assumed. The acoustic pressure field within the duct is estimated by a multimodal expansion model, similar to that used in [14–16] and validated against literature results [17]. The simulated duct is divided into three zones with diverse boundary conditions along their walls. The first zone corresponds to the incident region; the duct walls are entirely rigid, and the source is modeled as an incident plane wave. The second zone is the treated region. A uniform impedance boundary condition is imposed on one

of the walls, and the classical displacement continuity relation [18] is used when a uniform mean flow is taken into account. The complex modes in this section are determined by using an iterative algorithm. The last zone corresponds to a rigid wall duct with an anechoic termination. The respective modal amplitudes are determined in each region by applying pressure and velocity continuity relations at each interface. All details can be found in Ref. [19]. Transmission loss is defined as the logarithmic ratio between the power incident towards the treated region and the power transmitted through the treated region. As only plane waves are considered and as a reflection free termination assumption is made, the TL equals to the logarithmic ratio between the amplitude of the incident pressure wave in the first zone and the amplitude of the transmitted pressure wave in the last zone. This TL is calculated by varying both real part and imaginary part of the impedance, leading to the determination of the optimal impedance.

3.2. Results in the configuration of the basic hybrid absorber

Let us now consider the example of calculated optimal impedances for a liner of 50 mm width and 150 mm length in a tube of section 50 mm × 50 mm. While the dimensions of the tube correspond to the ONERA test duct, the dimensions of the liner do not exactly equal the basic hybrid liner (which is 30 mm wide and 150 mm long). In fact, the consideration of a liner that does not cover the entire duct width would substantially complicate

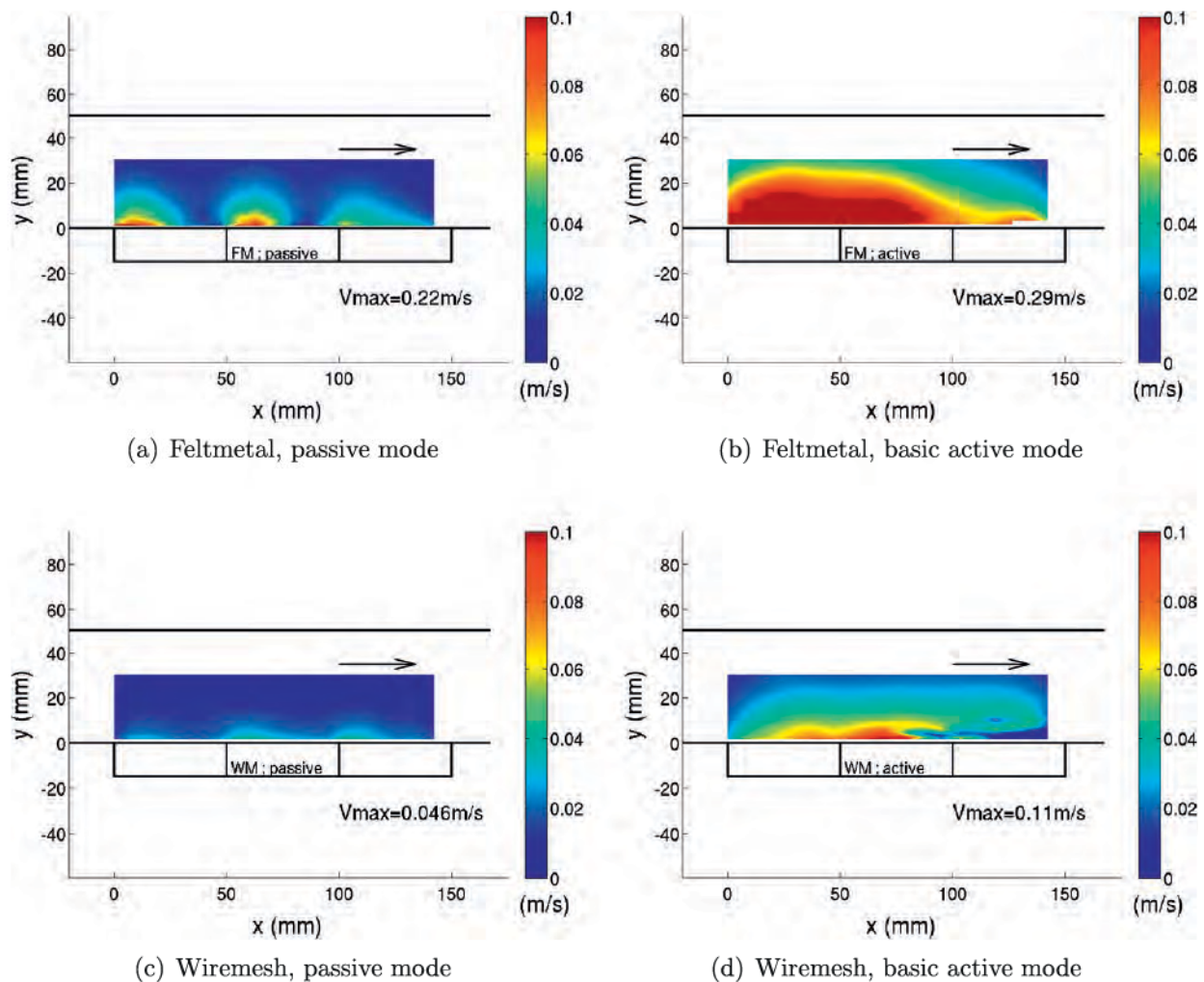


Fig. 9. Acoustic velocity in y-direction at 496 Hz, hybrid cell, $M = 0$.

the determination of its optimal impedance. The calculations presented here will therefore only serve as a qualitative comparison between the feltmetal and the wiremesh screen. Different results are summed up in Table 1, and compared to Cremer impedance of the same tube. In the case with a uniform flow, the Cremer impedance is modified according to Tester [13].

Fig. 4 represents curves of equal TL in the complex impedance plane at two different frequencies. In the case of the basic hybrid absorber, the real part of the surface impedance is independent of frequency and is given by the resistance of the layer, its choice is therefore of high importance. The imaginary part of the surface impedance is controlled by the pressure cancellation on the rear side of the layer in basic active mode, while it is fixed by the geometrical features of the absorber in passive mode. Four impedances are marked in particular, representing the two different resistive screens in basic active and passive mode. These impedances have been measured in a standing wave tube, without flow. Basic active control mainly changes the reactance, which becomes approximately zero at low frequencies. At higher frequencies, Eq. (1) is not valid anymore and the reactance is slightly positive. In passive mode, the reactance is essentially that of the cavity, which can be expressed as $-1/\tan kL$, where k is the frequency-dependent wavenumber and L the depth of the cavity. As the cavity is about 40 mm deep, the reactance is around -2.6 at 496 Hz, this value being outside of the figure.

Fig. 4a makes clear that at low frequencies basic active control leads to an impedance close to the optimal one. At the same time, the resistive layer of lower resistance outperforms the one with higher resistance. At higher frequency (see Fig. 4b at 1592 Hz), the close-to-zero reactance obtained in the basic active mode is far from the optimal one, and consequently the passive mode is supposed to produce a higher transmission loss than the basic active mode.

Fig. 5 gives the curves of equal TL at 992 Hz for the cases without flow and for a uniform mean flow of $M = 0.1$. The impedances of the basic hybrid liner measured in the standing wave tube for the two different resistive screens in basic active and passive mode are also plotted. The same value of impedances are used with and without flow. The presence of uniform flow slightly moves the position of the optimal impedance. The expected performance of both materials, however, is not dramatically changed. For instance, the predicted TL value for the basic hybrid absorber with a wiremesh sheet in basic active mode is of 17.1 dB without flow and 15.8 dB with a $M = 0.1$ flow.

In summary, the presented predictions show that the fixed resistance of the basic hybrid absorber represents a tradeoff between low and high frequency performance. The utility of an absorber which is capable of realizing arbitrary complex impedances at different frequencies is therefore evident, that is why the complex hybrid absorber is considered.

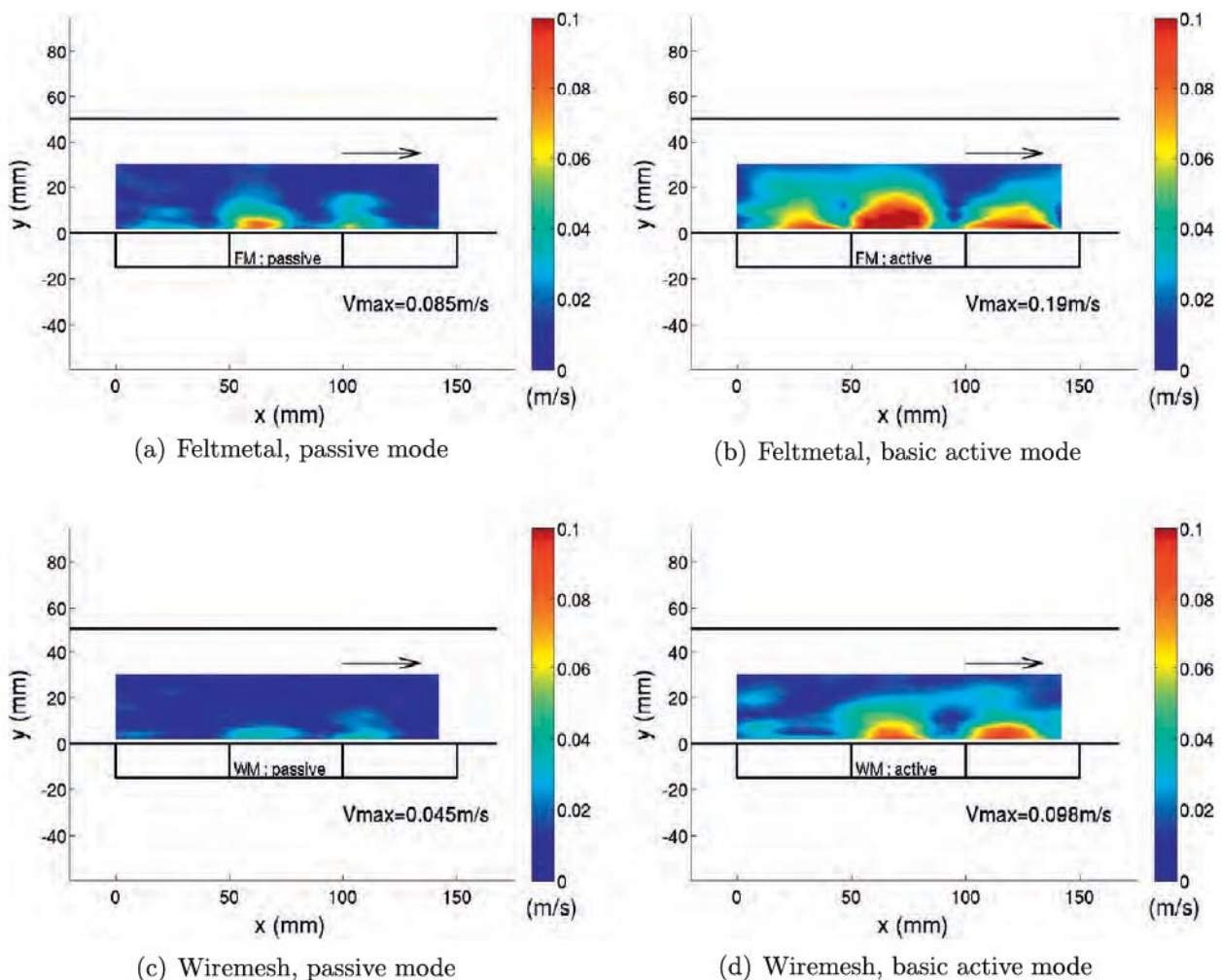


Fig. 10. Acoustic velocity in y-direction at 496 Hz, hybrid cell, $M = 0.1$.

3.3. Results in the configuration of the complex hybrid absorber

As the developed complex hybrid absorber is shorter than the basic hybrid absorber, Figs. 4 and 5 cannot be used for the prediction of TL. Fig. 6 gives the TL-charts corresponding to this shorter absorber (length of 50 mm instead of 150 mm), the width of the absorber being still fixed at 50 mm. As the regions around the optimal impedances show extremely steep gradients, the target impedances have to be determined accurately. In order to overcome the inaccuracy of the numerical prediction due to the simplified geometry, the optimal target impedance has been determined experimentally. Table 2 indicates the numerical optimum impedance and the corresponding TL, as well as the experimental impedances measured in a standing wave tube and the corresponding TL measured in the ONERA bench. All impedances are obtained using the complex hybrid absorber in different modes of operation, i.e. passive, “basic active” (i.e. $p_2 = 0$) and “active impedance control”. In respect to the basic hybrid absorber, the impedances in “passive” and “basic active mode” are altered due to the presence of the microperforated panel above the upper microphone and the change in the distance between the top layer and the secondary source, which slightly decreases the realized resistance and increases the realized reactance. The settings in “active impedance control mode” are determined empirically by successively maximizing the measured TL. Comparison with the numerical optimum shows that they represent an impedance close to the best value, on contrary to what is obtained in the “basic active mode”.

4. LDV measurements

In order to investigate the impact of the hybrid liners on the acoustic field, Laser Doppler Velocimetry measurements have been performed. They allow a non-intrusive assessment of the acoustic field above the hybrid liner whatever the testing conditions. Some basics about the measurement of acoustic parameters by means of LDV are given in this section. More details about the used technique and the test bench at ONERA can be found in Ref. [20].

4.1. Aeroacoustic test bench at ONERA

The aeroacoustic test bench at ONERA Toulouse is made of a stainless steel tube of Section 50 mm × 50 mm; its total length is of about 4 m (see Fig. 7). The termination is equipped with an anechoic outlet. Excitation is provided by two loudspeakers installed in pressurized cabinets. Temperature can be adjusted up to 300 °C, however, the present tests are conducted at ambient temperature. Experiments are effected without grazing flow and with a grazing flow of bulk Mach number 0.1. This corresponds to a maximum speed in the center of the duct of about $M = 0.16$.

Let us define x as the axial coordinate and (y, z) as the coordinates normal to the axis. The test section shown in Fig. 8 has a silica window of 200 mm × 60 mm on each side (i.e. at $z = 0$ mm and $z = 50$ mm), the lower (i.e. $y = 0$) part is equipped with the hybrid liner. The dimension of the sample is limited to 30 mm × 150 mm, which does not cover the entire width of the duct as it has already

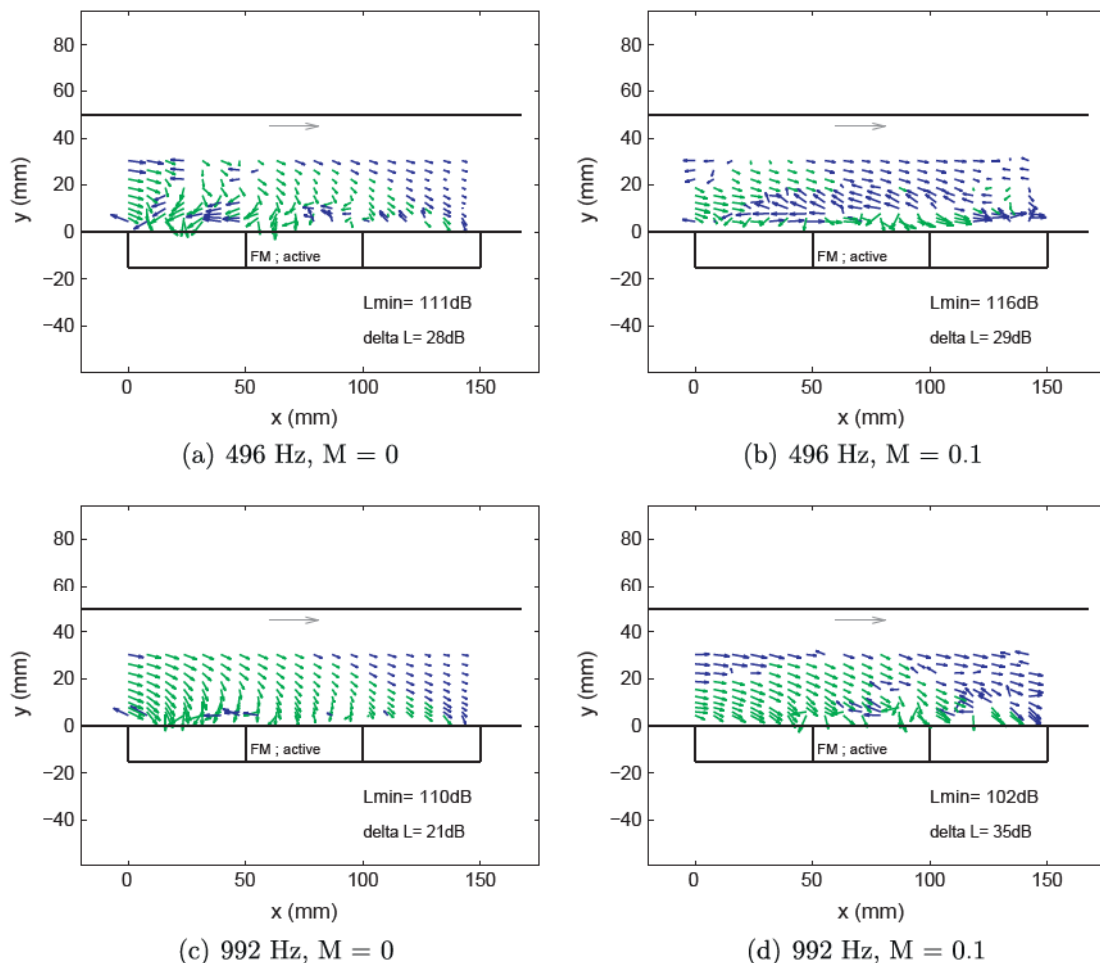


Fig. 11. Acoustic intensity at 496 Hz and 992 Hz for the feltmetal-case without and with flow, hybrid cell in basic active mode.

been mentioned. For the characterization of passive liners, the excitation signal is made of thirteen pure tones, at third octave frequencies between 312 Hz and 3136 Hz, with an overall sound pressure level of 140 dB. In active mode, the excitation is limited to three pure tones of 496 Hz, 992 Hz, and 1592 Hz. SPL of each peak is about 120 dB. At this level, the error microphones in the hybrid liner begin to saturate, which is actually unproblematic for pressure minimization. Active impedance control, however, requires a linear behavior, therefore the excitation level is decreased to about 110 dB per peak.

4.2. Data extraction and data processing

A two-components fringe mode Laser Doppler Velocimeter allows the measurement of the longitudinal (x) and normal (y) velocity components in almost the entire volume of the test section. For the present tests, only the plane $z = 25$ mm has been scanned. In order to quicken the measurements, not the entire plane is scanned but only till $y = 30$ mm. A LDV system has the particularity to provide an unevenly sampled signal due to the random arrival of particles (incense smoke) in the measurement volume. A reconstruction method is used to re-sample the raw data at a constant rate. Data processing is performed by a TSI IFA 755 system. The emitting optics produces a $100\text{ }\mu\text{m}$ -diameter measurement volume. A minimum sampling data rate of $f_m = 13,000$ measurements per second is generally ensured, for each velocity component. Each

velocity component v_x and v_y is measured by the LDV system at a given spatial location. The acoustic velocity (defined here as the component of the signal that is correlated with the excitation signal) can be deduced from the extraneous noise by a technique similar to the three-microphone signal enhancement technique [21,22]. It consists in calculating the cross-spectral density function $G_{v_i,ls}$ between the velocity signal v_i and the loudspeaker signal ls . The auto-spectral density function of the acoustic velocity reads as

$$G_{v_i'} = \frac{|G_{v_i,ls}|^2}{G_{ls}} \quad (5)$$

where G_{ls} is the auto-spectral density function of the excitation signal. The acoustic velocity in the frequency domain is then given by Minotti and co-workers [23,24]

$$v_i' = \sqrt{G_{v_i'}} \exp[i\Phi(v_i/ls)] \quad (6)$$

where the phase of the acoustic velocity, referenced by the excitation, is defined as

$$\Phi(v_i/ls) = \arctan \frac{\Im(G_{v_i,ls})}{\Re(G_{v_i,ls})} \quad (7)$$

Finally, acoustic pressure and acoustic intensity are deduced from the acoustic velocity field thanks to a mixed Eulerian–Lagrangian propagation model [25]. The lagrangian acoustic

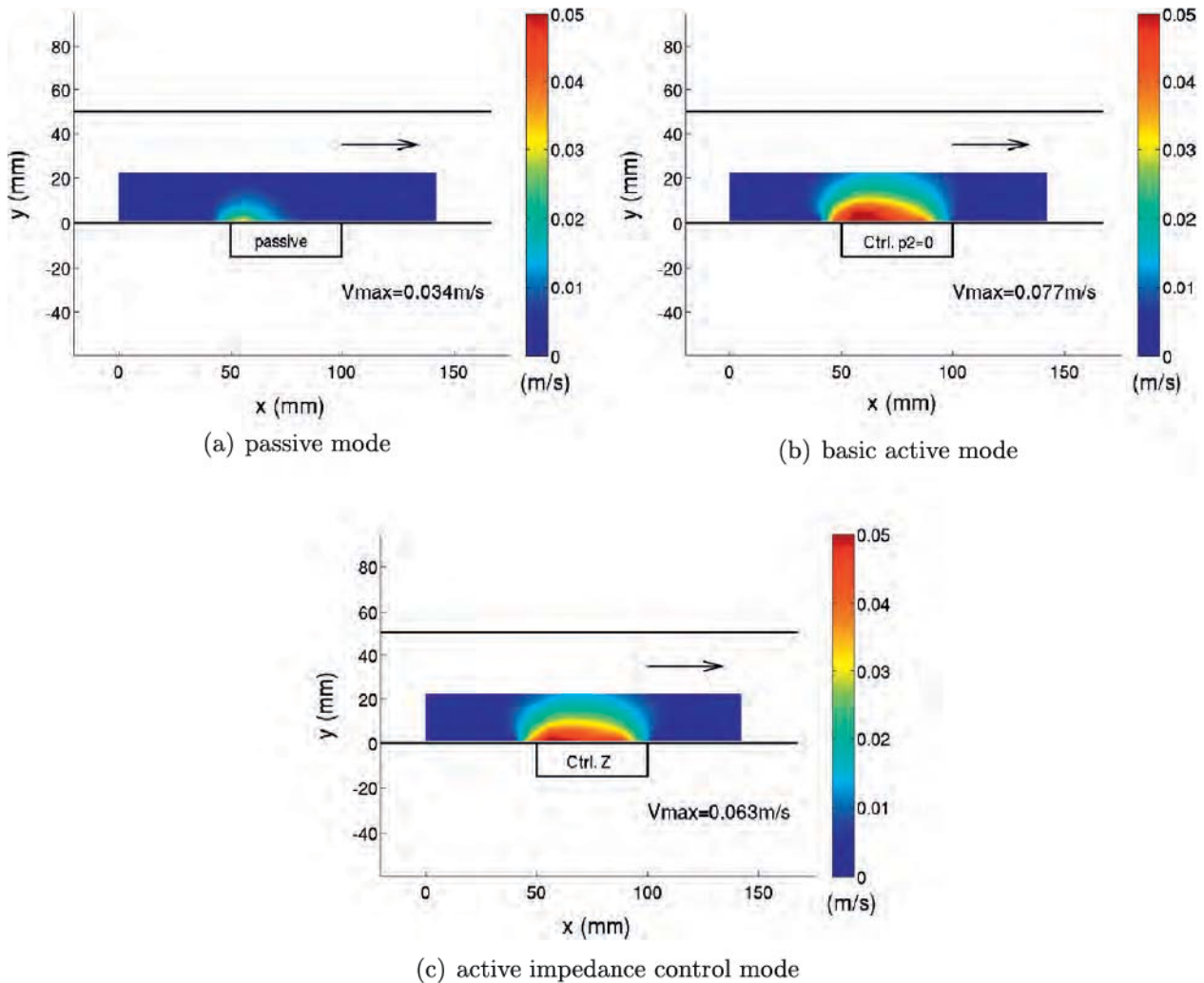


Fig. 12. Acoustic velocity in y -direction at 496 Hz, complex hybrid cell, $M = 0$.

displacement field $\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_y)$ is obtained from the acoustic velocity field $\vec{v} = (v'_x, v'_y)$ by solving with a finite difference method the following equations:

$$U_0 \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + i\omega \xi_x = v'_x + \frac{\partial U_0}{\partial y} \xi_y \quad (8)$$

$$U_0 \frac{\partial \xi_y}{\partial x} + i\omega \xi_y = v'_y \quad (9)$$

where U_0 denotes the mean (i.e. stationary) velocity component in the x direction (the other components are neglected). Then, the acoustic pressure reads [25]:

$$p' = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \vec{v} - \frac{dp_0}{dx} \xi_x \quad (10)$$

where ρ_0 , p_0 and c_0 are the density, static pressure and speed of sound of the mean flow. Finally, the active part of the acoustic intensity vector is expressed from the acoustic velocity, pressure and displacement [25]:

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[i\omega p' \vec{\xi} + i\omega \rho_0 \vec{\xi} \cdot \left(\vec{v} + \nabla \vec{U}_0 \cdot \vec{\xi} \right)^* \vec{U}_0 \right] \quad (11)$$

where Re stands for the real part and $*$ is the complex conjugate. On contrary to the classical Euler formulation and the associated Cantrell and Hart intensity [26], this model yields an exact acoustic energy balance even in the presence of flow.

In comparison to pressure measurements using microphones, this approach has the advantage of being entirely non-intrusive

and of providing a complete description of the sound field in the whole measurement domain.

5. Experimental results

Both absorbers have been tested in the ONERA bench, with or without grazing flow, in order to assess their influence on the acoustic field and to understand why their efficiency is greatly reduced with flow.

5.1. The basic hybrid absorber

A first evaluation of the liner performance can be obtained on the basis of the velocity v_y normal to the liner. In a hard walled duct without flow, normal velocity would be zero in the whole duct section since only plane waves have been excited. A soft wall involves non-zero normal velocity, which leads to dissipation of energy inside the liner. Figs. 9 and 10 represent this normal velocity at 496 Hz in the $z = 25$ mm plane without flow and at $M = 0.1$ respectively. Acoustic propagation and mean flow go from the left to the right. The lowest frequency is chosen because the difference between passive and active mode is maximum here. In fact, the behavior for increasing frequencies is very much as predicted, i.e. increasing performance in passive mode and decreasing performance in basic active mode. We therefore focus on the comparison between the two different resistive layers on the one hand and on the influence of flow on the other hand for a fixed frequency.

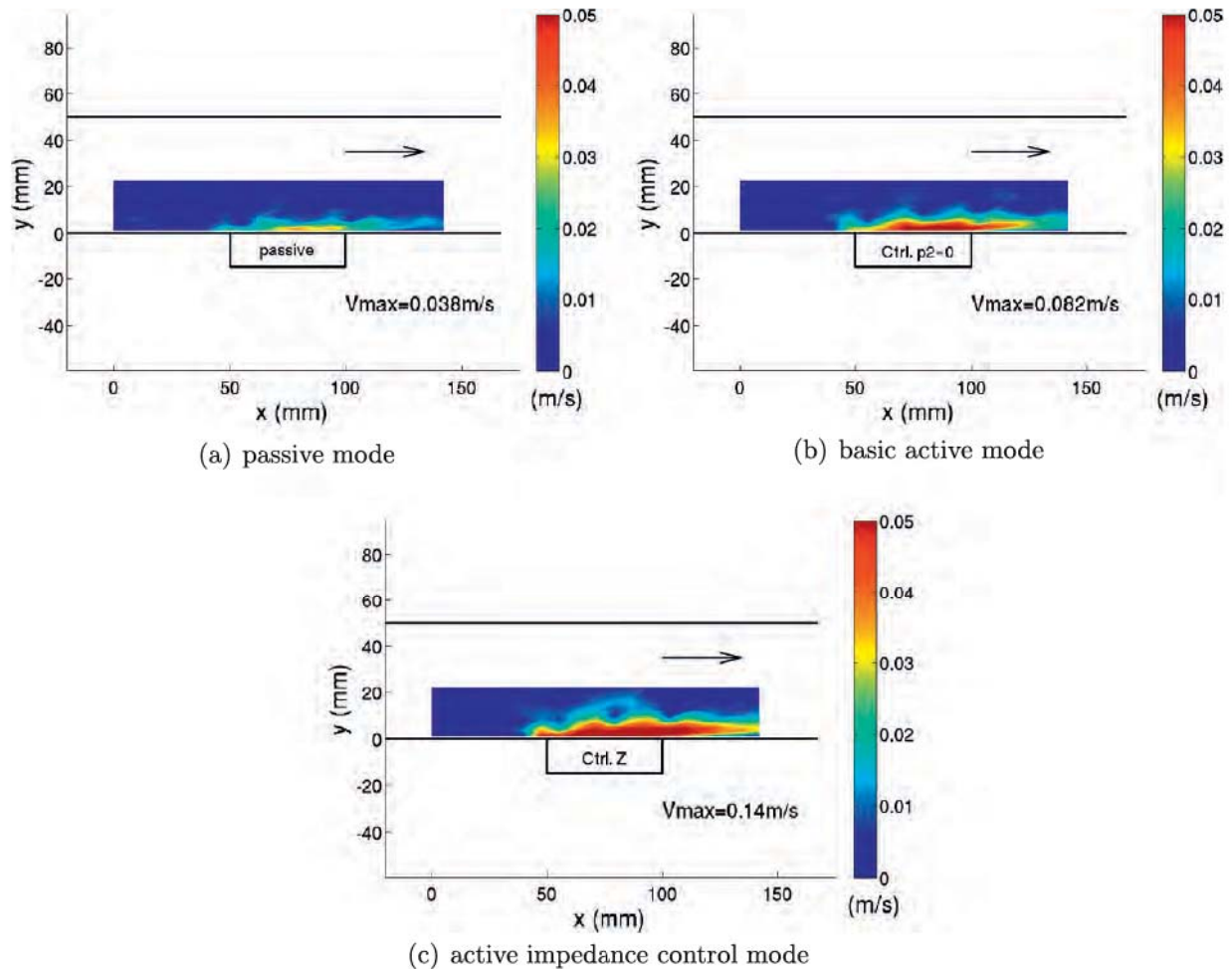


Fig. 13. Acoustic velocity in y -direction at 496 Hz, complex hybrid cell, $M = 0.1$.

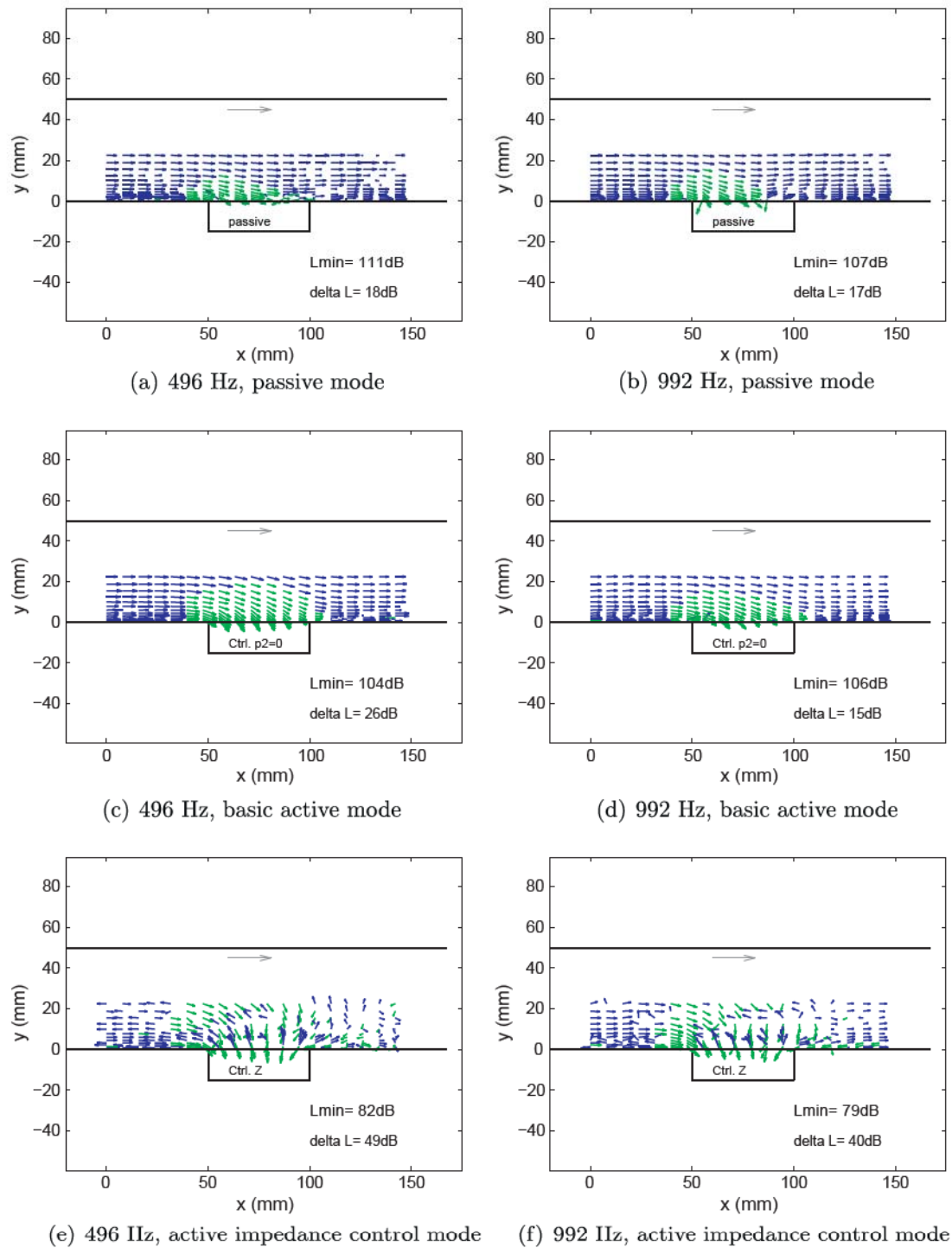


Fig. 14. Acoustic intensity, complex hybrid cell, $M = 0$.

Results without flow are showed in Fig. 9. In passive mode, normal velocity is small for both resistive screens. The screen of smaller resistance (the feltmetal sheet, Fig. 9a) results in slightly higher velocity than the screen of higher resistance (the wiremesh, Fig. 9c). Splices between the cells can be recognized, regions of non-zero normal velocity are limited to the vicinity of the three cells. Basic active control seems to enhance normal velocity,³ espe-

³ Primary excitation remains unchanged in respect to the passive case and the measured velocity in x direction is very similar.

cially in the case of the feltmetal sheet (Fig. 9b). Considering Fig. 4a, we notice that this is indeed the layer producing an impedance closer to the predicted optimal impedance. The colorscale has been chosen to a range from 0 to 0.1 m/s, maximum values in Fig. 9b reach about 0.2 m/s though. The third cell is fairly inactive; it appears as if most of the sound power was absorbed before reaching the last cell. Fig. 9d is disturbed in vicinity of the third cell. In fact, the incense smoke did not sufficiently reach this region and measurements are inaccurate. To sum up, one observes a quite global influence on the duct in basic active mode and the splices between the three hybrid cells become invisible. The choice of the resistance

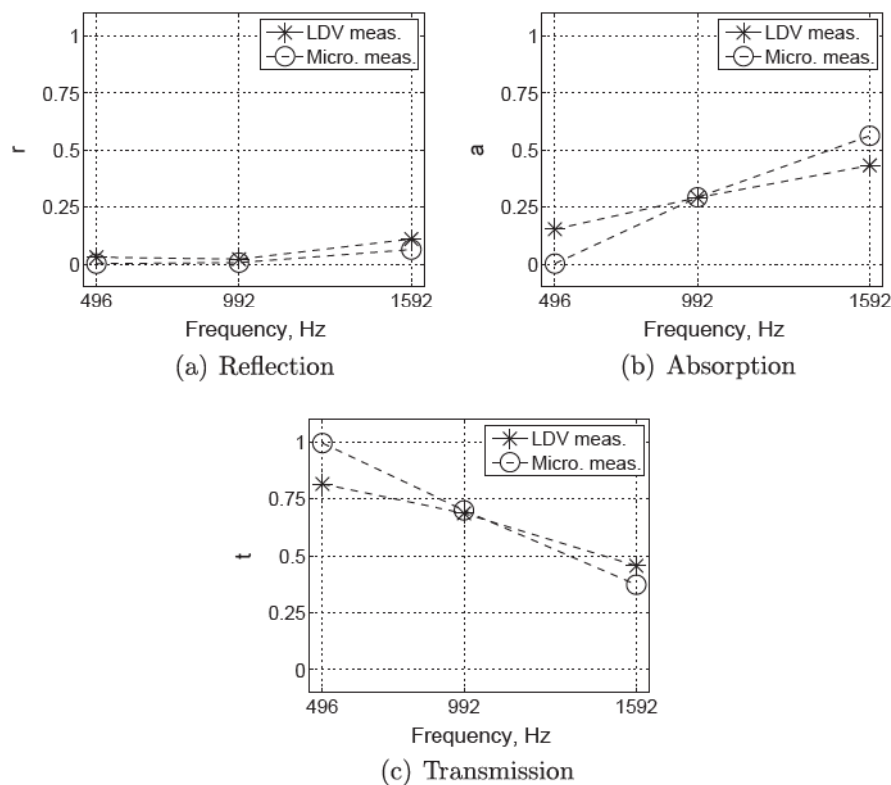


Fig. 15. Reflection, absorption, and transmission coefficients measured in the ONERA duct for the complex hybrid absorber in passive mode, $M = 0$.

of the resistive sheet has an important influence on the liner performance.

Let us now consider the situation with flow depicted in Fig. 10. In passive mode, the situation appears rather similar to the no flow case, however, due to the flow the colormap is less regular. In basic active mode, normal velocity is increased for both materials but zones of high normal velocity remain close to the three cells. The influence on the duct is less global than without flow. This is consistent with the experimental observation that transmission loss decreases in presence of flow. By contrast, the numerical calculation does not predict any significant drop of TL (see discussion in Section 3 about results of Fig. 5). Apparently, more realistic flow profiles had to be taken into account to predict these phenomena.

It has been mentioned that the amplification of acoustic velocity normal to the absorber enhances absorption. However, the presented figures do not visualize the energy flow. In order to clarify the influence of the absorber on the duct, intensity fields obtained with the feltmetal screen are given in Fig. 11. Intensity vectors whose continuation would impact the absorber are traced in green color, the others are in blue,⁴ and in all cases lengths are proportional to the intensity level. Evidently, acoustic power downstream the absorber has decreased in respect to the incident power. In agreement with the velocity measurements presented above, absorption is less pronounced in presence of flow. As brought up before (see Section 4.2), determination of intensity requires the estimation of acoustic pressure from the acoustic displacement field. This estimation is subject to larger phase errors at low frequencies, therefore the intensity fields at 992 Hz are cleaner than those at 496 Hz. At both frequencies, the reduced influence of the absorber in presence of flow can be observed.

5.2. The complex hybrid absorber

The complex hybrid absorber has been tested in three different modes of operation, i.e. passive mode, basic active mode (pressure cancellation $p_2 = 0$), and active impedance control mode. Corresponding surface impedances are summed-up in Table 2. As before, the analysis concentrates on the normal velocity component v_y at 496 Hz in a first time. Results are given in Fig. 12 for the no-flow case. Primary excitation is slightly lower in active impedance control mode than in passive mode and basic active mode. The basic active mode yields the expected result, i.e. an increase of velocity in respect to the passive mode. Keeping in mind the reduction of primary excitation in the active impedance control mode, the increase of normal velocity in this case is even larger than in the basic active mode. In presence of grazing flow, the influence of the absorber is again clearly reduced, as shown in Fig. 13. Active impedance control results in a slightly extended region of influence.

In contrast to the velocity measurements, the visualization of intensity in Fig. 14 reveals the difference between basic active mode (pressure cancellation) and active impedance control mode, without grazing flow and at 496 Hz and 992 Hz. Most intensity vectors point towards the impedance controlled absorber and the resulting downstream intensity amplitude is clearly reduced. Intensity charts in the grazing flow case are not available. Indeed, as mentioned in Section 4.1, the primary excitation had to be decreased due to saturation of the error microphones. Even though acoustic velocities that are significantly lower than the mean flow velocity can be measured, the primary excitation turned out to be too low to perform a proper calculation of acoustic pressure and acoustic intensity here.

Finally, LDV results and microphonic measurements are compared in terms of reflection (r), transmission (t), and absorption coefficients (a), defined in the following equations:

⁴ For interpretation of color in Figs. 3–5 and 7–14, the reader is referred to the web version of this article.

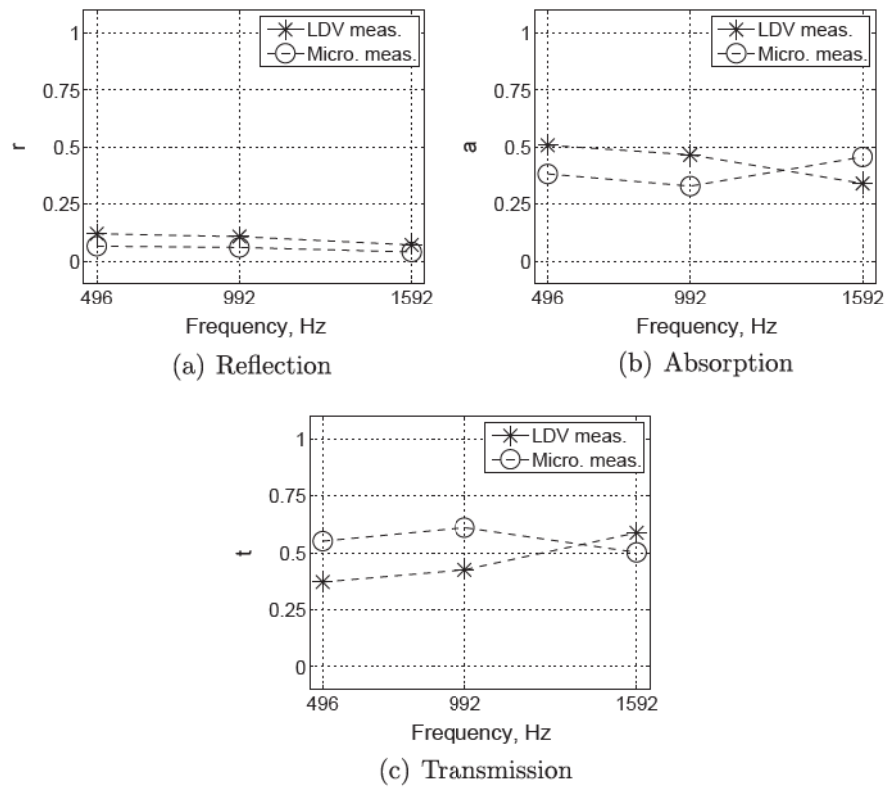


Fig. 16. Reflection, absorption, and transmission coefficients measured in the ONERA duct for the complex hybrid absorber in basic active mode ($p_2 = 0$), $M = 0$.

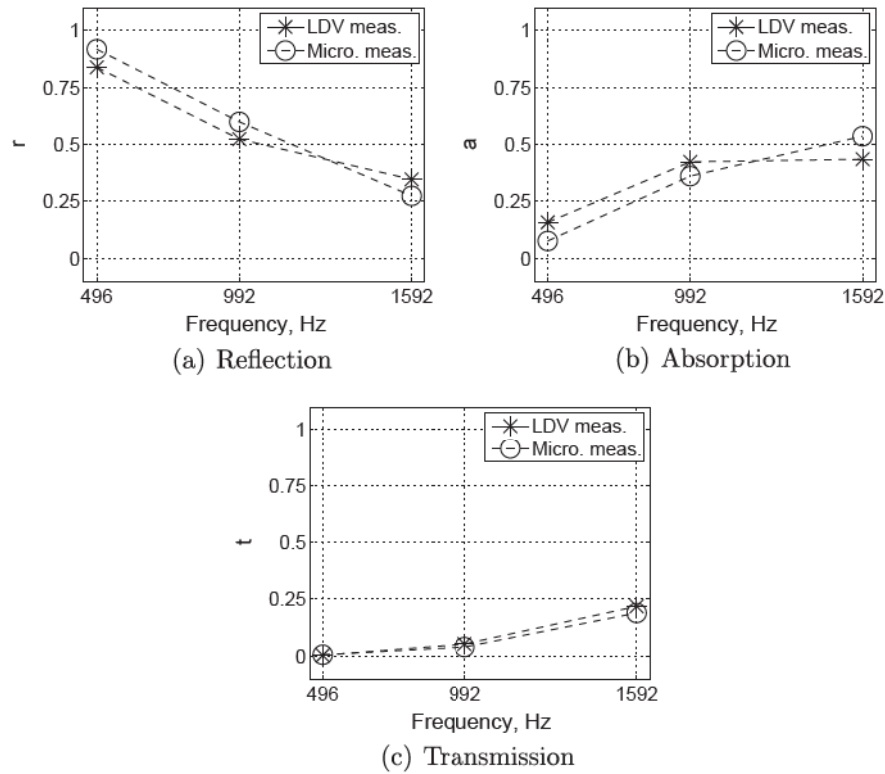


Fig. 17. Reflection, absorption, and transmission coefficients measured in the ONERA duct for the complex hybrid absorber in active impedance control mode, $M = 0$.

$$r = \frac{|A_R|^2}{|A_I|^2} \quad (12)$$

$$t = \frac{|A_T|^2}{|A_I|^2} \quad (13)$$

$$a = 1 - r - t \quad (14)$$

As we consider energetic coefficients, absorption can directly be deduced from reflection and transmission. The determination of these coefficients requires the detection of incident wave amplitudes A_I and reflected wave amplitudes A_R upstream the absorber using two microphones. Thanks to the anechoic outlet, the transmitted wave amplitude A_T is identified by a single microphone. Microphone measurements are performed upstream (at $x = -102$ mm, $x = -130$ mm or $x = -187$ mm) and downstream of the liner border (at $x = 252$ mm), and the spacing between the two upstream microphones is chosen to be part of the $[0.1\lambda/2, 0.8\lambda/2]$ interval given by Boden and Abom [27].

Reflection and transmission coefficients can also be obtained using the LDV measurements, provided a zone upstream and downstream the absorber is scanned. This is the case for the complex hybrid cell which only occupies 50 mm in the center of the measurement zone. For a reliable measurement, the distance between the upstream points has to be long enough. At the same time, we need to be as far as possible from the absorber in order to minimize the effect of evanescent waves. Two sections at $x = 0$ mm and $x = 32$ mm are chosen in order to perform the separation of upstream and downstream running waves. The transmitted wave is detected at $x = 142$ mm. The obtained reflection and transmission coefficients are quite constant in y -direction, i.e. waves are reasonably plane at the chosen distances. This is not the case for measurements closer to the absorber. The reflection and transmission coefficients obtained at different heights y are finally averaged and the associated absorption coefficient is computed. These values are summed up in Figs. 15–17 for the three modes of the hybrid cell (passive, basic control and active impedance control). Agreement between microphone measurements and LDV measurements is globally satisfying, even if LDV measurements are likely to be affected by evanescent waves. We observe that the basic active mode clearly increases absorption, while reflection remains small. On contrary, the active impedance control mode mainly increases reflection, especially at low frequencies. The absorption is in the same order of magnitude as in the basic active mode. Consequently, the transmission is greatly reduced in the active impedance control mode, which was expected since settings of this control mode were determined by maximizing TL.

6. Conclusion

Two kinds of hybrid active–passive liners have been developed at the LMFA. The basic hybrid absorber is made of a resistive screen backed by a cavity containing an acoustic source, which allows to mimic a $1/4$ -wavelength resonator by cancelling the pressure at the back of the screen. Consequently the impedance of the basic hybrid absorber can be considered as purely real and equal to the resistance of the resistive screen. The second liner, denoted as complex hybrid absorber, uses a more elaborated control strategy since it is directly the surface impedance of the liner that is fixed to a target value, with the help of two error microphones placed on each side of the resistive screen. However, when subject to grazing flow in the direction of sound propagation, these hybrid absorbers suffer from a loss of performance in respect to the no-flow case. Consequently, the local sound field around these liners has been investigated by means of non-intrusive LDV measurements, in order to throw some light on the origin of this change of efficiency.

Without flow, active control allows the velocity normal to the liner to be increased in a quite global way. This means that the different cells of the hybrid absorber cannot be distinguished anymore. The liner appears as a homogeneous and locally reacting liner. In the presence of grazing flow, this is not the case anymore. Normal velocity is only increased in the vicinity of the cells. The splices separating the cells of the liner become visible again, the influence on the duct remains local and absorption remains small.

The complex hybrid liner shows exceptional performance without flow. The tested (very short) absorber operates much like a reactive silencer, however, the absorber can also be tuned in a way to maximize absorption. In the presence of flow, the absorber behaves similarly as the basic hybrid absorber. In fact, the loss of performance seems to be global, i.e. not only due to the variation of optimal impedance induced by the presence of the flow. In this sense, a finer calculation of optimal impedance, taking into account the splices and more realistic flow profiles, should be done. The performed measurements are a basis for the validation of such a code.

Concerning future tests, the complex hybrid absorber will have to be equipped with microphones that support higher SPL, to get rid from saturation issues observed in the present LDV campaign. Moreover, a more compact absorber could be designed, for instance by replacing loudspeakers by piezo-actuators. However, this would not be immediate, since piezo-actuators usually work in a thinner frequency range than loudspeakers. The control strategy could also be slightly changed. Indeed, from now on, the passive resistance of the resistive layer is used as a predetermine input in the control loop (see Eq. (4)), and has to be measured in a standing wave tube without flow. However, depending on the choice of resistive sheet, the change in impedance because of the presence of grazing flow cannot always be neglected. So, the performance of complex hybrid liner could be improved by measuring this resistance, before active control, thanks to the standard “two-microphones” technique [28] with pressure signals p_1 and p_2 . The reactance could also be introduced in the cost function. Measurements in the presence of flow opposite to sound propagation would also represent an interesting completion, insofar as the performance of the liner is likely to be enhanced compared to the no flow case.

Compared to a classical ANC algorithm, based on an “anti-noise” concept, imposing a “target” impedance appears more stable and robust. The coherency between actuator and sensors signals is naturally high due to their closeness. As less voltage is required for the actuator, its saturation and the associated non-linear effects are less likely to happen. Then, there is no parasite feedback effect on the reference sensor that could prevent the adaptive algorithm from converging. Moreover, in cases where many acoustic modes can propagate within the duct, the impedance control does not require any knowledge of a modal model to ensure the correct position of the error sensor and does not produce any phenomena of spillover if modal coupling arises.

Finally for industrial applications, as the impedance is intrinsic to the liner, a target value can be chosen by the manufacturer and, so on, satisfied by the active control process without taking into account the global environment. However, the assumption of localized reaction of the active liner that is used in the present control strategy (i.e. the impedance of the hybrid liner is assumed to be independent of the acoustic waves incidence) requires that the width of the liner is small compared to the noise wavelength. Thus, reducing the sound field of high order modes in a turboengine nacelle with the whole section covered by elementary hybrid absorbers is obviously not realistic. Nevertheless, controlling the impedance on a limited surface can have a significant effect on the global radiated pressure field. Numerical computations with CAA solvers could help to optimize the surface of treatment.

References

- [1] Jones M, Tracy M, Watson W, Parrott T. Effects of liner geometry on acoustic impedance. In: 8th AIAA/CEAS conference, Breckenridge, Colorado, USA, 2002 [AIAA 2002-2446].
- [2] Dupont J-B, Galland M-A. Active absorption to reduce the noise transmitted out of an enclosure. *Appl Acoust* 2009;70(1):142–52.
- [3] Mazeaud B, Galland M-A, Sellen N. Design of an adaptive hybrid liner for flow duct applications. In: 10th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, Manchester, Great Britain, 2004 [AIAA-2004-2852].
- [4] Galland M-A, Sellen N, Cuesta M. Noise reduction in a flow duct: Implementation of a hybrid passive/active solution. *J Sound Vib* 2006;297:492–511.
- [5] Olson H, May E. Electronic sound absorber. *J Acoust Soc Am* 1953;25(6):1130–6.
- [6] Kanev N, Mironov M. Active resonators for sound control in narrow pipes. *Acoust Phys* 2008;54(3):437–43.
- [7] Lissek H, Boulandet R, Fleury R. Electroacoustic absorbers: bridging the gap between shunt loudspeakers and active sound absorption. *J Acoust Soc Am* 2011;129(5):2968–78.
- [8] Betgen B, Galland M-A. A new hybrid active/passive sound absorber with variable surface impedance. *Mech Syst Sig Process* 2011;25(11):1715–26.
- [9] Galland M-A, Mazeaud B, Sellen N. Hybrid passive/active absorbers for flow ducts. *Appl Acoust* 2005;66(6):691–708.
- [10] Betgen B, Galland M-A, Piot E, Simon F. Characterization of a hybrid active-passive liner by means of Laser Doppler Velocimetry. In: 16th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, Stockholm, Sweden, 2010 [AIAA-2010-3808].
- [11] Mazeaud B, Galland M-A. A multi-channel feedback algorithm for the development of active liners to reduce noise in flow duct applications. *Mech Syst Sig Process* 2007;21(7):2880–99.
- [12] Cremer L. Theorie der Luftschall-Dämpfung im Rechteckkanal mit schluckender Wand und das sich dabei ergebende hoechste Daempfungsmass. *Acustica* 1953;3:249–63.
- [13] Tester B. The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform or “plug” flow. *J Sound Vib* 1973;28(2):151–203.
- [14] Elnady T, Boden H. An inverse analytical method for extracting liner impedance from pressure measurements. In: 10th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, Manchester, Great Britain, 2004 [AIAA-2004-2836].
- [15] Auregan Y, Leroux M, Pagneux V. Measurement of liner impedance with flow by an inverse method. In: 10th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, Manchester, Great Britain, 2004 [AIAA-2004-2838].
- [16] Jing X, Peng S, Sun X. A straightforward method for wall impedance eduction in a flow duct. *J Acoust Soc Am* 1953;124(1):227–34.
- [17] Rienstra S. A classification of duct modes based on surface waves. *Wave Mot* 2003;37:119–35.
- [18] Myers M. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *J Sound Vib* 1980;71(3):429–34.
- [19] Betgen B. Comportement d'un absorbant actif en coulement: tude thorique et exprimentale, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Lyon; 2010.
- [20] Minotti A, Simon F, Ganti F. Characterization of an acoustic liner by means of Laser Doppler Velocimetry in a subsonic flow. *Aerospace Sci Technol* 2008;12(5):398–407.
- [21] Chung JY. Rejection of flow noise using a coherence function method. *J Acoust Soc Am* 1980;62(2):388–95.
- [22] Nance D, Ahuja KK. Limitations of the three-microphone signal enhancement technique. In: 45th AIAA aerospace sciences conference, Reno, NV, 2007 [AIAA 2007-441].
- [23] Minotti A, Simon F, Piet JF, Millan P. Signal processing for in-flow measurement of acoustic velocity by LDV. In: 8th AIAA/CEAS aeroacoustic conference & exhibit, Breckenridge, Colorado, 2002.
- [24] Lavieille M, Simon F, Micheli F. Measurement of acoustic quantity fields in duct flow by Laser Doppler Velocimetry. In 12th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, Cambridge, Massachusetts; 2006 [AIAA 2006-2550].
- [25] Brazier JP. Derivation of an exact energy balance for Galbrun equation in linear acoustics. *J Sound Vib* 2011;330(12):2848–68.
- [26] Cantrell R, Hart R. Interaction between sound and flow in acoustic cavities: mass, momentum and energy considerations. *J Acoust Soc Am* 1964;36(4):697–706.
- [27] Boden H, Abom M. Influence of errors on the two microphones method for measuring acoustics properties in ducts. *J Acoust Soc Am* 1986;79(2):541–9.
- [28] Dean P. An in situ method of wall acoustic impedance measurement in flow ducts. *J Sound Vib* 1974;34(1):97–130.

Effective conditions for the reflection of an acoustic wave by low-porosity perforated plates

S. Laurens^{1,3,†}, E. Piot², A. Bendali^{1,3}, M'B. Fares³ and S. Tordeux⁴

¹IMT, University of Toulouse, INSA, 135 avenue de Rangueil, F-31077, Toulouse, France

²ONERA – The French Aerospace Lab, F-31055, Toulouse, France

³CERFACS, 42 avenue Gaspard Coriolis, F-31100, Toulouse, France

⁴INRIA and University of Pau, LMA, avenue de l'Université, F-64000, Pau, France

(Received 31 December 2012; revised 19 December 2013; accepted 18 January 2014)

This paper describes an investigation of the acoustic properties of a rigid plate with a periodic pattern of holes, in a compressible, ideal, inviscid fluid in the absence of mean flow. Leppington & Levine (*J. Fluid Mech.*, vol. 61, 1973, pp. 109–127) obtained an approximation of the reflection and transmission coefficients of a plane wave incident on an infinitely thin plate with a rectangular array of perforations, assuming that a characteristic size of the perforations is negligible relative to that of the unit cell of the grating, itself assumed to be negligible relative to the wavelength. One part of the present study is of methodological interest. It establishes that it is possible to extend their approach to thick plates with a skew grating of perforations, thus confirming recent results of Bendali *et al.* (*SIAM J. Appl. Math.*, vol. 73 (1), 2013, pp. 438–459), but in a much simpler way without using complex matched asymptotic expansions of the full wave or to a grating of multipoles. As is well-known, effective compliances for the plate can then be derived from the corresponding approximations of the reflection and transmission coefficients. These compliances are expressed in terms of the Rayleigh conductivity of an isolated perforation. Consequently, in one other part of the present study, the methodology recently introduced by Laurens *et al.* (*ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 47 (6), 2013, pp. 1691–1712) to obtain sharp bounds for the Rayleigh conductivity has been extended to include the case for which the openings of the perforations on the upper and lower sides of the plate are elliptical in shape. This not only enables the determination of these bounds and of the associated reflection and transmission coefficients for actual plates with tilted perforations but also yields single expressions covering all usual cases of perforations: straight or tilted with a circular or an elliptical cross-section.

Key words: acoustics, mathematical foundations, wave scattering

[†] Email address for correspondence: sophie.laurens@cerfacs.fr

1. Introduction

Perforated plates and screens are widely used in engineering systems due to their ability to absorb sound or to reduce sound transmission, in a variety of applications including room acoustics and aeroacoustics (Beranek 1992; Ingard 1994). They can be used as protective layers of porous materials (Allard 1993) to form sandwich structures in aircraft fuselages (Abrahams 1999) or as facing layers of liners. In this case, the perforated plates are either backed by honeycomb cells which are mounted on a rigid backplate (Maa 1998) or by a plenum acting as a resonant cavity in gas turbine combustion chambers (Lefebvre 1999).

The reflection and transmission properties of such panels perforated with a periodic array of holes can be modeled directly, as was done by Leppington & Levine (1973) by means of an integral equation or later by the method of matched asymptotic expansions (see Bendali *et al.* (2013) and Leppington (1990) for the case of elastic plates). The acoustic effect of perforated plates is usually addressed by studying the acoustic behaviour of a single aperture in an infinite wall and by designing a homogeneous model for the whole plate, mainly by means of an averaging procedure. In this way, the Leppington and Levine approach was later extended by Howe (1980) and Dowling & Hughes (1992) to include a mean tangential or bias flow to the perforated screen. In these papers, the asymptotic solution was sought for the long-wavelength limit and under the low-porosity assumption, i.e. the size of each perforation is assumed to be small in comparison with the distance between two neighbouring apertures of the periodic array, viewed in turn as being much smaller than the wavelength of the impinging sound waves. In the work of Bendali *et al.* (2013), it is the whole wave which is expanded by means of the method of matched asymptotic expansions. As a result, the procedure for determining the two top-order terms of the asymptotic expansions of the reflection and transmission coefficients relative to the small parameter, characterizing the ratio of a characteristic size of the perforation to the spacing between two successive perforations, is particularly complex.

All of these homogenization processes rely on a model of the acoustic behaviour of the apertures, which depends on the actual problem being considered. In the studies for aeronautical turbofan engines (see for example Tam, Ju & Walker 2008, for a recent review), acoustic impedance is the relevant parameter, more precisely, the ratio of the fluctuating pressure across the hole to the normal fluctuating velocity through it. The real part of the impedance is denoted as a resistance and its imaginary part as a reactance. In contrast, with respect to gas turbines (see Andreini *et al.* 2011; Scarpato *et al.* 2012, for instance), the acoustic behaviour of the aperture is described in terms of its compliance, termed in this context ‘Rayleigh conductivity’, which characterizes the fluctuating volume flow rate through the hole as a function of the difference in unsteady pressure between each side of the plate.

The physical phenomenon involved in the acoustic behaviour of an aperture can be broken down into three mechanisms. The first is purely inviscid and is associated with the sound radiation of the perforation and the distortion of the acoustic flow at the plate surface. This flow can be assumed to be potential and governed by the Helmholtz equation, under the assumption that a characteristic size of the hole is small in comparison with the acoustic wavelength. Consequently, no acoustic damping can be predicted by this approach, which means that the impedance Z of the aperture is purely imaginary, while its Rayleigh conductivity K_R is purely real. This mechanism is generally explained by considering that the flow within the hole behaves as a small piston of air, whose length is greater than the depth of the hole

because of inertial effects. This amounts to increasing the mass of the vibrating air and is accounted for by using correction lengths, which need to be added to the plate thickness. For a circular aperture of radius r , Rayleigh (1945) gave a lower and an upper bound for this end correction: $\pi r/2 \approx 1.57r$ and $16r/3\pi \approx 1.70r$. Later, Morfey (1969) derived approximated expressions for openings of arbitrary shape at low sound frequencies. The second mechanism is linked to viscous effects occurring within the boundary layers which develop at the perforation's inner walls, and around the perforation edges at the plate surface. This induces a real part for the acoustic impedance (i.e. an imaginary part of the Rayleigh conductivity), which is linked to an absorption of acoustic energy. Viscous effects also modify the imaginary part of the impedance, which is usually modelled by viscous end corrections (Melling 1973; Maa 1998). Finally, the third mechanism consists of vortex shedding, which converts acoustical into mechanical energy, subsequently dissipated into heat. This may be due to nonlinear effects, when high-amplitude sound waves impinge on the aperture in the absence of mean flow (Cummings 1984), or to the effect of mean flow. In the presence of a grazing mean flow, empirical (Guess 1975; Kirby & Cummings 1998), semi-empirical (Cummings 1986, 1987) or analytical (Howe 1996) models are used to find the impedance or the Rayleigh conductivity of the aperture. It is shown that the resistance induced by a high-speed grazing flow is much larger than the viscous resistance obtained without flow, consequently an increased loss of acoustic power is generally observed. However, the phenomena involved are quite complex and have not been accurately and comprehensively modelled. In contrast, Howe (1979) developed an analytical model for the aperture Rayleigh conductivity which proved to be quite reliable (Hughes & Dowling 1990; Jing & Sun 1999; Eldredge & Dowling 2003; Bellucci, Flohr & Paschereit 2004; Mendez & Eldredge 2009; Scarpato *et al.* 2012) for cases in which the fluid flows through the perforation (i.e. a bias flow), even when mechanisms similar to the grazing case are involved. It consists of multiplying the no-flow Rayleigh conductivity of a circular aperture in a zero-thickness plate (taken as $K_R = 2r$, i.e. an inertial end correction of $\pi r/2$) by a complex function of the mean bias flow Mach number. The Reynolds number within the perforation is assumed to be large enough so that viscous effects can be neglected except near the edges, where flow separation takes place. Later, this model was improved to take into account the plate thickness, by adding it to the inertial end correction (Jing & Sun 2000) or by modifying the flow-dependent function (Luong, Howe & McGowan 2005). However, these expressions only deal with the simplified geometry of a non-tilted circular aperture, while in actual combustors the apertures are tilted downstream and their cross-section in the plate plane is elliptical in shape. Recent papers have numerically (Eldredge, Bodony & Schoeybi 2007) or experimentally (Andreini *et al.* 2011) investigated such a realistic geometry, by using Howe's model with a modified thickness and by neglecting some other geometric effects. Finally, only a few studies have addressed the acoustic response of a perforation in the complex configuration in which an exiting bias flow interacts with a grazing flow, with the exception of Sun *et al.* (2002), who attempted to correlate experimental results with an empirical model.

If the low-porosity assumption (aperture dimension $\ll$ spacing of the array) is verified and the long-wavelength limit is considered (spacing of the array $\ll$ wavelength), the device behaves acoustically as though each perforation were isolated. In this case, the Rayleigh conductivity (or impedance) of a single aperture, as defined above, is used to define an expression for the compliance (or impedance) of a homogeneous screen of such apertures, by assuming that the fluctuating volume flux

through each hole is uniformly distributed over each cell of the array of perforations (see Melling 1973; Hughes & Dowling 1990; Maa 1998; Eldredge & Dowling 2003; Atalla & Sgard 2007). The layout of the array of holes is not involved in any way. When the porosity σ of the perforated plate is greater than about 4 %, interaction between the apertures can no longer be neglected. The problem of acoustic interaction was solved by Fok (1941) for the case of an infinitely thin plate with circular perforations (alternatively, see Rsc hevkin (1963)). He introduced a porosity-depending interaction function ψ and he derived a modified Rayleigh conductivity defined as $K'_R = 2r\psi(\sqrt{\sigma})$. Melling (1973) used Fok's function ψ for modifying the inertial end correction (taken equal to $16r/3\pi$ in his model) while other authors (Guess 1975; Beranek 1992; Allard 1993) preferred to use empirical expressions. Recently, interaction effects were studied numerically and experimentally by Lee, Ih & Peat (2007) for the case of perforated plates with a bias flow.

In this paper, we focus on a few questions arising from the previous discussion, which showed that all of the impedance or conductivity models are based on the inertial end corrections given by Rayleigh (1945) for a single circular aperture in an infinitely thin plate. It should be noted that in room acoustics and liner applications, it is the $16r/3\pi$ bound which is used, probably introduced by Ingard (1953). In contrast, Howe's model (Howe 1979) with an end correction of $\pi r/2$ seems to be the one most widely used in papers dealing with gas turbines. Recently, Laurens *et al.* (2013) developed a rigorous mathematical framework in order to derive accurate bounds of the Rayleigh conductivity for various hole geometries, but these results do not cover the case of perforated plates whose perforations have circular cross-sections and are tilted, that are in common use in gas turbines. The additional difficulty comes from the openings of the perforations which are then elliptical in shape. Therefore, in the first sections of the present paper, we derive an analytical formula expressing the bounds of the Rayleigh conductivity for almost all of the situations which can be encountered in practice: straight or tilted perforation, with either circular or elliptical cross-sections. The associated end corrections are also given. Then, in § 5, we show that the two expansions of first and second order of the reflection and transmission coefficients, derived in a fairly complex way by Bendali *et al.* (2013), can be obtained in a much simpler manner by an extension of the Leppington & Levine (1973) approach. This method is, in the opinion of the authors, more suitable for a fluid mechanics context and it can be easily adapted to other models of flows at the level of the perforations. Moreover, as these coefficients are expressed in terms of the Rayleigh conductivity of a single perforation, the effective reflection coefficient of perforated plates commonly used in aeronautics can thus be derived.

2. Description of the perforated plate and governing equations

Consider the situation shown in figure 1 of a perforated screen in a compressible ideal inviscid fluid in the absence of mean flow. A time-periodic acoustic plane wave is obliquely incident to an infinitely rigid plate of thickness h that lies in the plane $x_3 = 0$ (see figure 1a) at an angle Φ to the normal direction to the plate, with $-\pi/2 < \Phi < \pi/2$. Throughout the paper, the coordinate system $\mathbf{x}$ is decomposed into the two-dimensional variable $\mathbf{x}' = (x_1, x_2)$ and the coordinate x_3 along the normal to the plate. The pressure variation of the incident wave is given by

$$p_i = \exp(i\kappa(\boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{x}' - x_3 \cos \Phi) - i\omega t) \quad (2.1)$$

with $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}', -\cos \Phi)$ the cosine directors of the direction of propagation. The wavenumber $\kappa = \omega/c_0$ expresses the ratio of the angular frequency ω to the speed of

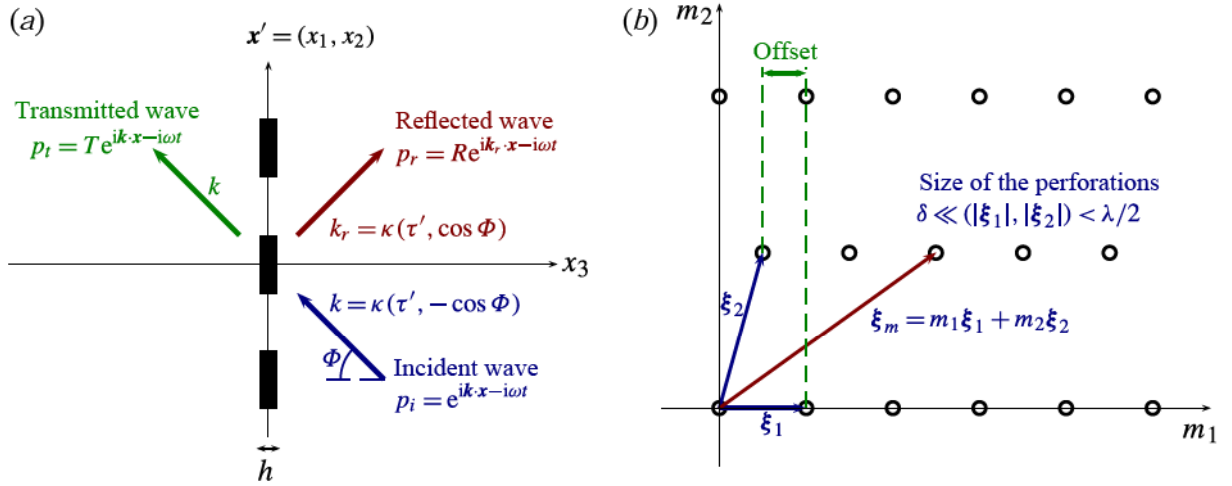


FIGURE 1. (Colour online) The geometry of the perforated screen: (a) incident and scattered acoustic waves; (b) sketch showing layout of the holes in the lattice.

sound c_0 . At a great enough distance from the perforated plate, the scattered pressure field can be decomposed into a reflected wave

$$p_r = R \exp(i\kappa(\tau' \cdot \mathbf{x}' + x_3 \cos \Phi) - i\omega t) \quad (2.2)$$

and a transmitted one

$$p_t = T \exp(i\kappa(\tau' \cdot \mathbf{x}' - x_3 \cos \Phi) - i\omega t) \quad (2.3)$$

where R and T are complex constants, which depend on the acoustic properties of the perforated plate. The time multiplicative factor $e^{-i\omega t}$ is hereafter suppressed by linearity.

In the fluid domain, the pressure field satisfies the homogeneous Helmholtz equation and the cancellation of normal velocity on the rigid walls, equivalently expressed from the linearized momentum equation, by cancelling the pressure normal derivative. Thus, the acoustic wave is governed by the following boundary-value problem:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 p + \kappa^2 p &= 0, & \text{in the fluid domain,} \\ \partial_n p &= 0, & \text{on the rigid walls,} \\ p &= p_i + p_r, & \text{as } x_3 \rightarrow +\infty, \\ p &= p_t, & \text{as } x_3 \rightarrow -\infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

The perforated plate contains a two-dimensional doubly-periodic lattice of apertures

$$\xi_m = m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2, \quad (2.5)$$

where $m = (m_1, m_2)$ is a pairing of two integers and ξ_i are the periodicity vectors of the lattice (see figure 1b). The low-porosity assumption reduces the characterization of the acoustic behaviour of each perforation as if it were isolated. As a result, the periodicity of the plate will not be used until §5. The surface of the unit lattice cell is $A = |\xi_1 \times \xi_2|$ and the spacing between two successive perforations is denoted by $L = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$. All apertures have the same shape: they can be tilted, or untilted, their openings are elliptical while their cross-section can be elliptical or circular (see figures 2 and 3). This configuration is used for most industrial problems. In cooling

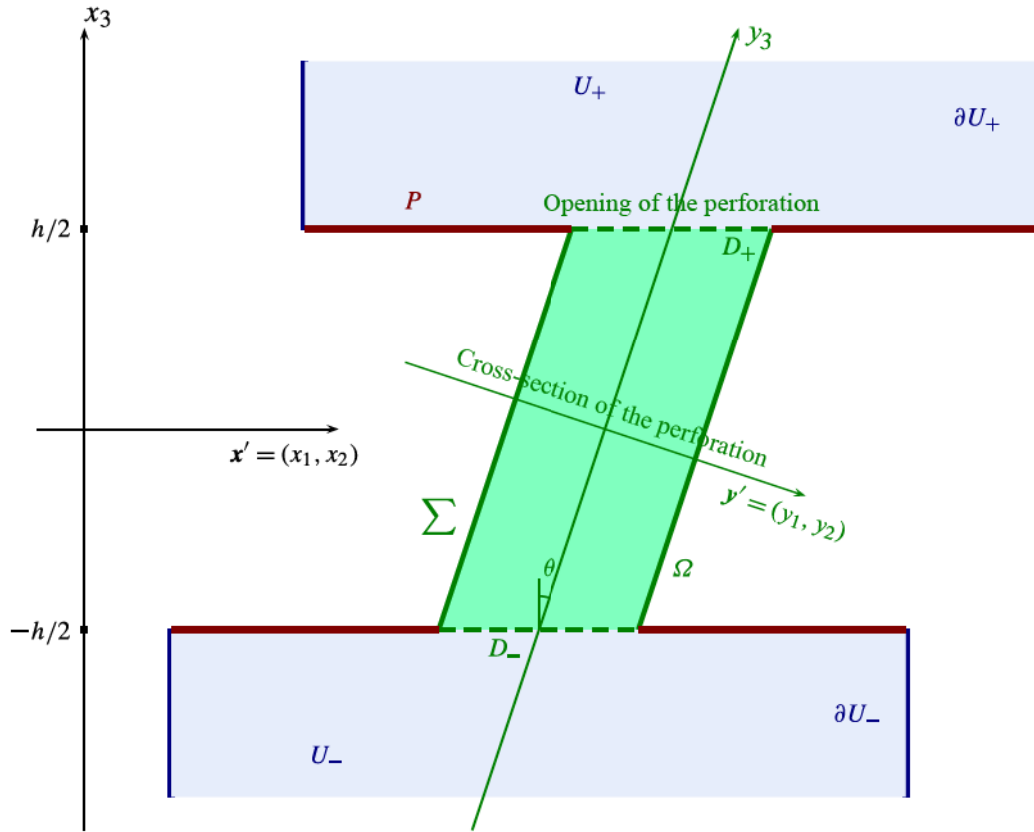


FIGURE 2. (Colour online) Schematic view of the lattice unit cell. The perforation is shown in green, the plate in red and the fictitious boundaries in blue.

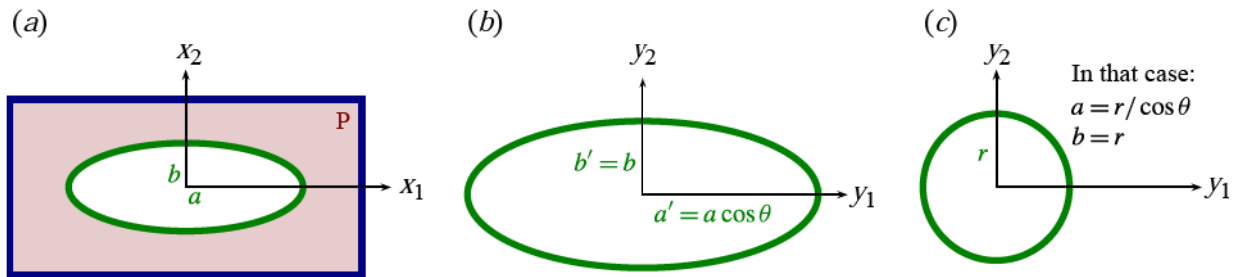


FIGURE 3. (Colour online) Opening and cross-section of the perforation: (a) opening (elliptical); (b) elliptical cross-section; and (c) circular cross-section.

liners used in combustion chambers, perforations are not perpendicular to the plate, but are tilted at an angle to the x_3 axis that is often around 60° (see Eldredge *et al.* 2007; Andreini *et al.* 2011). The general case of a tilted perforation with an elliptical opening and an elliptical cross-section (see figure 3a,b) is addressed in this paper. This case is representative of actual perforations. In particular, when a drill bit of radius r is used for boring holes tilted by θ degrees from the vertical, it results in a perforation which cuts any parallel plane to the plate along an ellipse of major axis (in the tilt direction) $2a = 2r / \cos \theta$ and minor axis (in the transversal direction) $2b = 2r$ (see figure 3a,c).

The acoustic wavelength $\lambda = 2\pi/\kappa$ is assumed to be large in comparison with the aperture size, however the spacing parameters $|\xi_1|$ and $|\xi_2|$ are only required to be less

than half a wavelength (see Bendali *et al.* 2013):

$$L < \lambda/2. \quad (2.6)$$

This ensures that only the fundamental mode, corresponding to $m_1 = m_2 = 0$, is propagating for any incident wave. All of the short-range interaction effects between the perforations can be neglected. For shorter wavelengths such that $L > \lambda/2$, the plate can no longer be assumed to react as an homogenized surface, whose reflecting properties are characterized by an effective impedance.

As shown in figure 2, each aperture of the perforated plate consists of a bounded domain Ω located between the two planes $x_3 = -h/2$ and $x_3 = h/2$. The tilting angle of the perforation is denoted by θ .

The lower and upper openings of the perforation are denoted by D_- and D_+ and its lateral part by Σ . It is convenient to consider the decomposition of domain U within the unit cell into non-overlapping domains, filled by the fluid consisting of, respectively, the lower and upper semi-infinite tubes U_- and U_+ and the hole Ω . The lateral parts of the boundaries of, respectively, U_- , U_+ and Ω will be denoted as ∂U_- , ∂U_+ and $\partial \Omega$. Finally, in figure 3, P stands for the part of the upper and lower surfaces of the plate within the unit cell. One can thus notice that the horizontal boundaries of U^+ and U^- consist of the corresponding part of P and D^+ and D^- , respectively.

Because the acoustic wavelength is large as compared with the aperture size, each aperture can be considered as acoustically compact. This means that the local motion through an aperture can be assumed incompressible:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.7)$$

where $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ is the acoustic velocity field. As a result, the governing equations (2.4) can be expressed in terms of a potential:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 p &= 0 && \text{in } U \\ \partial_n p &= 0 && \text{on the rigid walls} \\ \lim_{|x| \rightarrow \pm\infty} p &= P^\pm, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

where P^+ and P^- are limiting values of pressure at big distance from the aperture. By identification with (2.1)–(2.3), we have $P^+ = p_i + p_r$ and $P^- = p_t$. Under this assumption, the Rayleigh conductivity of the aperture is defined as (Howe 1998):

$$K_R = \frac{i\omega\rho_0 Q}{P^+ - P^-}, \quad (2.9)$$

where ρ_0 denotes the mean density of the fluid and Q is the volume flux through the aperture in the x_3 direction: $Q = \int_{D_+} v_3 dx_1 dx_2 = \int_{D_-} v_3 dx_1 dx_2$. Using the linearized momentum equation, the Rayleigh conductivity can be expressed as a function of pressure only:

$$K_R = \frac{1}{P^+ - P^-} \int_{D_+} \partial_{x_3} p \, d\mathbf{x}'. \quad (2.10)$$

3. Rayleigh conductivities of tilted elliptical perforations

In this section, we propose a rigorous method for estimating the Rayleigh conductivity of thick plates with elliptical tilted perforations. As in the methods of Rayleigh (1945) and Howe (1998), the main ingredient is a variational theory linked to minimization of kinetic energy, but here both the dual Dirichlet and Kelvin variational principles come into play. This theory is found in Lagrangian and Hamiltonian mechanics and is of great importance in several fields, especially in mathematical modelling (Courant & Hilbert 1953, Chap. 4, Sect. 9) to obtain lower and upper bounds for potential and kinetic energies, in optimization (Luenberger 1997) to derive the dual formulations, and in numerical analysis (Roberts & Thomas 1991, Chap. 1) for assessing the validity or the accuracy of a numerical solution.

The estimates obtained by this method match those of Howe (1998) for cylindrical and conical untilted perforations, but it can also be extended for other geometries. Laurens *et al.* (2013) applied it to thick plates with perforations of circular openings, with or without a tilting angle, and to untilted conical perforations. In this paper, we focus on tilted perforations with elliptical openings, which were not covered by Laurens *et al.* (2013) but are more relevant since they are representative of actual perforations obtained by conventional drilling. Since the openings are no longer circular in shape, the computation of the integral of the source density of an elliptical disc (which is mandatory for applying Kelvin and Dirichlet principles and obtaining estimates of the Rayleigh conductivity) is a new issue addressed here. In § 3.1, we summarize some key points of Laurens *et al.* (2013). Then, in § 3.2, we focus on the case of tilted elliptical configurations, and describe a new technique for establishing bounds of the Rayleigh conductivity and of end corrections. Finally, in § 3.3, it is shown that the estimates obtained for simpler geometries (in, for example, Howe 1998; Laurens *et al.* 2013), can easily be considered as specific instances of the general case dealt with here.

3.1. A brief description of the theory

In the following section, the computations are done for elliptical openings, and require new and more complex tools than those of Laurens *et al.* (2013). Technical details of the calculus are provided in appendix A. First of all, the boundary-value problem (2.8) is converted into a more condensed form through the change of variable $p' = (p - (P^+ + P^-)/2)/(P^+ - P^-)$. For simplicity, in what follows the prime will be removed. This yields

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 p &= 0 && \text{in } U \\ \partial_n p &= 0 && \text{on the walls} \\ p^\pm &= \lim_{x_3 \rightarrow \pm\infty} p = \pm 1/2 && \text{on } U_\pm. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

The Rayleigh conductivity (2.10) can now be defined as

$$K_R = \int_{D_+} \partial_{x_3} p \, d\mathbf{x}'. \quad (3.2)$$

Consider the functional

$$J(\psi, \mathbf{q}) = \int_U |\mathbf{q}(\mathbf{x}) - \nabla \psi(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}, \quad (3.3)$$

where $(\psi, \mathbf{q})$ run over the spaces of functions $H_{1/2}(U)$ and $W(U)$, $H_{1/2}(U)$ being the space of functions ψ so that $\nabla \psi$ is square integrable in U with $\lim_{x_3 \rightarrow \pm\infty} \psi = \pm 1/2$ and $W(U)$ the space of square integrable vectorial functions $\mathbf{q}$ so that $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ in U and $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ on the boundary of U . The functional $J(\psi, \mathbf{q})$ can also be written in the form

$$J(\psi, \mathbf{q}) = \int_U |\mathbf{q}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_U |\nabla \psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - 2 \int_U \nabla \psi \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

Laurens *et al.* (2013) proved that the following relation holds, thanks to the properties of the spaces of functions $H_{1/2}(U)$ and $W(U)$:

$$\int_U \nabla \psi \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{D^+} q_3 d\mathbf{x}' = \int_{D^-} q_3 d\mathbf{x}'. \quad (3.5)$$

Thus, J can be decomposed into $J(\psi, \mathbf{q}) = J_1(\psi) - J_2(\mathbf{q})$ with

$$J_1(\psi) = \int_U |\nabla \psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad \text{and} \quad J_2(\mathbf{q}) = 2 \int_{D^+} q_3(\mathbf{x}) d\mathbf{x}' - \int_U |\mathbf{q}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.6)$$

The Kelvin and Dirichlet principles are based on performing this decomposition and considering the dual expressions for the energy $J_1(\psi)$ and $J_2(\mathbf{q})$.

Obviously, as p is the solution to system (3.1), it belongs to $H_{1/2}(U)$, ∇p belongs to $W(U)$ and $J(p, \nabla p) = 0$.

Moreover, it is easy to see from (3.2) and (3.5) that $J_1(p) = K_R$, which directly leads to $K_R = J_1(p) = J_2(\nabla p)$. It can then be established that J_1 reaches its unique minimum at p and J_2 its unique maximum at ∇p , which leads to the following lemma (see Laurens *et al.* 2013, Prop. (3.1)).

LEMMA 1. *The same Rayleigh conductivity K_R can be obtained from one of the following expressions:*

$$\left. \begin{aligned} &\textbf{Dirichlet principle:} \\ &K_R = \min_{\psi \in H_{1/2}} J_1(\psi) \quad \text{with } J_1(\psi) = \int_U |\nabla \psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\textbf{Kelvin principle:} \\ &K_R = \max_{\mathbf{q} \in W} J_2(\mathbf{q}) \quad \text{with } J_2(\mathbf{q}) = 2 \int_{D^+} q_3(\mathbf{x}) d\mathbf{x}' - \int_U |\mathbf{q}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

This lemma shows that lower and upper bounds for Rayleigh conductivity can be obtained for any arbitrary geometry of the perforation, provided that the functionals $J_1(\psi)$ and $J_2(\mathbf{q})$ can be evaluated explicitly.

Laurens *et al.* (2013) calculated the Rayleigh conductivity for untilted cylindrical and conical perforations, as well as for a tilted perforation with circular openings. However, in an industrial context, the opening of the tilted perforation is elliptical since the perforation is bored with a cylindrical drill bit. In this paper, we thus consider the most typical case of tilted perforations with elliptical openings and give results both for the Rayleigh conductivity bounds and the end corrections, which are the commonly used parameters in the acoustics and fluid mechanics context.

3.2. Application to tilted elliptical configurations

Bounds for the Rayleigh conductivity can be derived from Lemma 1 by a suitable use of test functions ψ and $\mathbf{q}$ minimizing (respectively, maximizing) the functional J_1 (respectively, J_2) of (3.7). To do so, auxiliary problems arising from the elliptical tilted aperture have to be solved.

The perforation Ω with a $0 \leq \theta < \pi/2$ tilting angle (see figure 2)

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_2) \in A \quad \text{and} \quad -h/2 < x_3 < h/2\}, \quad (3.8)$$

intersects any plane parallel to the plate of thickness h along an ellipse A (see figure 3a) of semi-major axis a and semi-minor axis b , described for a fixed value of x_3 by

$$A = \left\{ \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2 \left| \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1 \quad \text{with} \quad a > b \right. \right\}. \quad (3.9)$$

The eccentricity of the ellipse is denoted by $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ in which are expressed the complete elliptic integral of the first kind $K(\varepsilon)$ and second kind $E(\varepsilon)$:

$$K(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi \quad \text{and} \quad E(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi. \quad (3.10)$$

Noting that $K(0) = \pi/2$, we also consider the integral $D(\varepsilon)$

$$D(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}} d\phi = \frac{K(\varepsilon) - E(\varepsilon)}{\varepsilon^2}, \quad (3.11)$$

satisfying $D(0) = \pi/4$. To find the suitable test functions ψ and $\mathbf{q}$, we compute the potential f_ε generated by a source density function ρ_{f_ε} defined on the elliptical hole A :

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}', x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{\rho_{f_\varepsilon}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}' \in A. \quad (3.12)$$

Conveniently, we consider the following local coordinate systems of $U^\pm$:

$$\mathbf{x}_\pm = (\mathbf{x}'_\pm, x_3^\pm) \quad \text{with} \quad x_3^+ \geq 0 \quad \text{and} \quad x_3^- \leq 0. \quad (3.13)$$

This potential is the solution of:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 f_\varepsilon(\mathbf{x}_\pm) &= 0, \quad \text{for } x_3^\pm \neq 0, \\ \partial_{x_3^\pm} f_\varepsilon(\mathbf{x}'_\pm, 0) &= 0, \quad \text{for } \mathbf{x}'_\pm \notin A. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Depending on the choice of boundary condition on the elliptical hole A , i.e. the choice of the source density function, various expressions for the potential can be obtained.

First, we consider the case for which the potential verifies a Dirichlet condition on the elliptical hole. As the aperture is tilted with an angle θ , the projection of the potential on A is a polynomial of degree one. We separate it into two components, w_ε and t_ε , solutions of (3.14) with the following boundary conditions:

$$w_\varepsilon(\mathbf{x}', 0) = 1 \quad \text{and} \quad t_\varepsilon(\mathbf{x}', 0) = x_1 \quad \text{for } \hat{\mathbf{x}} \in A. \quad (3.15)$$

For $\alpha \in \mathbb{R}$, the test function ψ to use in Lemma 1 is defined as

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} \mp (1 - 2\alpha)w_\varepsilon(\mathbf{x}_\pm) + (\mu_\alpha \sin \theta/h)t_\varepsilon(\mathbf{x}_\pm), & \text{for } \pm x_3^\pm > 0, \\ -\alpha + (\mu_\alpha/h)((x_3 + h/2) \cos \theta + x_1 \sin \theta), & \text{for } x_3^+ x_3^- < 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

with $\mu_\alpha = 2\alpha \cos \theta$. The functional J_1 involved in the Dirichlet principle of Lemma 1 is thus

$$\begin{aligned} J_1(\psi) = & 2(1 - 2\alpha)^2 \int_{\pm x_3^\pm > 0} |\nabla w_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ & + 2 \frac{\mu_\alpha^2 \sin^2 \theta}{h^2} \int_{\pm x_3^\pm > 0} |\nabla t_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{\mu_\alpha^2}{h^2} (\pi abh). \end{aligned} \quad (3.17)$$

By using the chosen expressions (A 17) of the integrals (see appendix A), we then get

$$\begin{aligned} J_1(\psi) = & 4a \frac{K(0)}{K(\varepsilon)} - \left(16a \frac{K(0)}{K(\varepsilon)} \right) \alpha \\ & + \left(16a \frac{K(0)}{K(\varepsilon)} + \frac{64a^3}{3h^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{D(0)}{D(\varepsilon)} + \frac{4\pi ab}{h} \cos^2 \theta \right) \alpha^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

The minimal value for this function $J_1(\psi)$ is reached for

$$\alpha = 8a \frac{K(0)}{K(\varepsilon)} \left/ \left(16a \frac{K(0)}{K(\varepsilon)} + \frac{64a^3}{3h^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{D(0)}{D(\varepsilon)} + \frac{4\pi ab}{h} \cos^2 \theta \right) \right., \quad (3.19)$$

which leads to the upper bound for the Rayleigh conductivity.

For finding the lower bound, we have to consider the potential z_ε solution of (3.14) with a Neumann boundary condition on the elliptical hole:

$$\partial_{x_3^\pm} z_\varepsilon(\mathbf{x}', x_3^\pm = 0) = \pm 1/2 \quad \text{for } \hat{\mathbf{x}} \in A. \quad (3.20)$$

The suitable test function for J_2 is

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \pm (\beta/\pi ab) \nabla z_\varepsilon(\mathbf{x}_\pm) & \text{for } \pm x_3^\pm > 0, \\ (\beta/\pi ab)(\mathbf{e}_3 + \tan \theta \mathbf{e}_1) & \text{for } x_3^+ x_3^- < 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

depending on a real constant β .

The functional involved in the Kelvin principle of Lemma 1 is then

$$J_2(\mathbf{q}) = 2\beta - \frac{\beta^2}{\pi^2 a^2 b^2} \left(2 \int_{\pm x_3^\pm > 0} |\nabla z_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + (1 + \tan^2 \theta) \pi abh \right). \quad (3.22)$$

The analytical expression of the integral term is calculated in the appendix A, equation (A 18), which leads to

$$J_2(\mathbf{q}) = 2\beta - \frac{\beta^2}{\pi^2 a^2 b^2} \left(\frac{16}{3} ab^2 \frac{K(\varepsilon)}{K(0)} + (1 + \tan^2 \theta) \pi abh \right). \quad (3.23)$$

The maximal value of this function is reached for

$$\beta = \pi ab \left/ \left(\frac{16b}{3\pi} \frac{K(\varepsilon)}{K(0)} + (1 + \tan^2 \theta)h \right) \right. . \quad (3.24)$$

Finally, the bounds of the Rayleigh conductivity are

$$\begin{aligned} \frac{\pi ab}{h/\cos^2 \theta + (16b/3\pi)(K(\varepsilon)/K(0))} &\leq K_R \\ &\leq \frac{\pi ab}{(\pi b/2)(K(\varepsilon)/K(0)) + (h/\cos^2 \theta)/(1 + (16a^2/3\pi bh)(D(0)/D(\varepsilon)) \sin^2 \theta)} . \end{aligned} \quad (3.25)$$

It is instructive to express these bounds in terms of the effective length of the perforation, meaning the length $l = s/K_R$, where s is the area of the aperture. This length can be interpreted as the effective length of a ‘piston’ of fluid of cross-section s involved in the motion through the aperture.

For example, for a cylindrical untilted aperture of radius r , the conductivity of the channel alone is $\pi r^2/h$, for which l would be h . Thus, the Rayleigh conductivity can be expressed in terms of an end correction l' , defined by

$$l = h + l', \quad (3.26)$$

so that l' is the amount by which h has to be increased to account for the contributions of the openings.

It should be noted that this end correction can be directly linked to the specific acoustic impedance of the perforation, defined in § 2 as

$$z = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{P^+ - P^-}{-v_3}. \quad (3.27)$$

As proposed by Jing & Sun (2000), the impedance can indeed be decomposed into the impedance induced by the end correction $z_e = -i\kappa l'$ and the added thickness term $-i\kappa h$:

$$z = z_e - i\kappa h = -i\kappa(l' + h). \quad (3.28)$$

However, for tilted perforations, the end correction analogy is not as straightforward as for untilted configurations. Indeed, the end correction is related to the choice of the reference area s so that $z = -i\kappa s/K_R$. Because of the definition of the volume flux involved in the Rayleigh conductivity (see (2.9)), s should be the surface area of the opening. But, in the literature (Eldredge *et al.* 2007; Mendez & Eldredge 2009; Andreini *et al.* 2011), the cross-section area is used instead, with a modified perforation length $h/\cos \theta$. Strictly speaking, it is a not justified choice. Equation (3.25) allows a rigorous definition of the end correction for a tilted perforation.

Since the opening is elliptical, the effective section is $s = \pi ab$ and the bounds for the effective length are

$$\frac{\pi b}{2} \frac{K(\varepsilon)}{K(0)} + \frac{h}{\cos^2 \theta} \left/ \left(1 + \frac{16a^2}{3\pi bh} \frac{D(0)}{D(\varepsilon)} \sin^2 \theta \right) \right. \leq l \leq \frac{16b}{3\pi} \frac{K(\varepsilon)}{K(0)} + \frac{h}{\cos^2 \theta}. \quad (3.29)$$

To define the end correction l' similarly as in (3.26), we thus introduce the modified effective height $\tilde{h} = h / \cos^2 \theta$, so that

$$l = \tilde{h} + l' \quad (3.30)$$

and

$$\frac{\pi b K(\varepsilon)}{2 K(0)} + g(h) \leq l' \leq \frac{16b K(\varepsilon)}{3\pi K(0)}, \quad (3.31)$$

with $g(h) = -(16a^2/(3\pi b))(D(0)/D(\varepsilon)) \tan^2 \theta / (1 + (16a^2/(3\pi b h))(D(0)/D(\varepsilon)) \sin^2 \theta) \leq 0$.

It is worth noting that the effective height $\tilde{h}$ is hence quite different from the intuitive effective thickness of the perforation $h / \cos \theta$ commonly used in the literature.

However, in the specific case of a circular cross-section of radius r (see figure 3c), the opening is elliptical with semi-major axis $a = r / \cos \theta$ and semi-minor axis $b = r$ (see figure 3a). Thus, the eccentricity of the opening is $\varepsilon = \sin \theta$. The opening area s is $\pi ab = \pi r^2 / \cos \theta$ and the bounds (3.25) for the Rayleigh conductivity can be set as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\pi r^2}{h / \cos \theta + (16r/3\pi)(K(\sin \theta)/K(0)) \cos \theta} &\leq K_R \\ &\leq \frac{\pi r^2}{((\pi r/2)(K(\sin \theta)/K(0)) \cos \theta + h / \cos \theta) / (1 + (16r/3\pi h)(D(0)/D(\sin \theta)) \tan^2 \theta)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

This means that if the cross-section πr^2 is considered as the reference section instead of the effective section $\pi ab = \pi r^2 / \cos \theta$, the effective height, which then has to be considered in the definition of the end correction, is indeed the intuitive value $h / \cos \theta$ instead of $h / \cos^2 \theta$.

3.3. Derivate geometrical configurations

In this subsection, we show that classical results for the Rayleigh conductivity and the end correction of simple geometries, as well as the results of Laurens *et al.* (2013) for tilted perforations with circular openings are contained in the general expressions (3.25) and (3.31). However, tapered holes (see Yu *et al.* 1999, chapter 4, for instance), which may be obtained when perforated plates are manufactured by laser drilling, cannot be obtained from (3.32) valid only for cylindrical perforations characterized by identical openings on each side of the plate. However, these bounds for a conical untilted perforation with circular opening can be found in Laurens *et al.* (2013).

3.3.1. Untilted perforation with an elliptical opening

We set $\theta = 0$ in (3.25) to obtain

$$\frac{\pi ab}{h + (16b/3\pi)(K(\varepsilon)/K(0))} \leq K_R \leq \frac{\pi ab}{h + (\pi b/2)(K(\varepsilon)/K(0))}. \quad (3.33)$$

As explained by Morfey (1969), the upper bound of (3.33) was found by Lord Rayleigh (Rayleigh 1945, Chap. 1, § 306) for an infinitely thin plate ($h = 0$). The lower bound expression and the taking into account of the plate thickness is, to the best of the authors' knowledge, entirely new.

This result can once again be expressed in terms of an end correction. Using the effective section of the elliptical opening $s = \pi ab$, the bounds for this end correction are

$$\frac{\pi b K(\varepsilon)}{2 K(0)} \leq l' \leq \frac{16b K(\varepsilon)}{3\pi K(0)}. \quad (3.34)$$

3.3.2. Tilted perforation with a circular opening

This case was considered by Laurens *et al.* (2013, Theorem 4.3), but is not the most useful for actual applications, since the manufacturing of such perforations would require an elliptical drill bit. The Rayleigh conductivity can be deduced from (3.25) in a straightforward way by taking $\varepsilon = 0$ (which avoids elliptic integrals):

$$\frac{\pi r^2}{h/\cos^2 \theta + 16r/3\pi} \leq K_R \leq \frac{\pi r^2}{(h/\cos^2 \theta)/(1 + (16r/3\pi h) \sin^2 \theta) + \pi r/2}. \quad (3.35)$$

Once again, this result shows that the tilting angle has a non-intuitive influence on the Rayleigh conductivity of the perforation, since the effective height to be considered in the end correction definition (3.30) is $\tilde{h} = h/\cos^2 \theta$. The bounds for the end correction are given by:

$$f(h) + \frac{\pi r}{2} \leq l' \leq \frac{16r}{3\pi}, \quad (3.36)$$

with $f(h) = -(16r/3\pi) \tan^2 \theta / (1 + (16r/3\pi h) \sin^2 \theta)$.

3.3.3. Untilted perforation with a circular opening

The case of an untilted cylindrical perforation has already been addressed by Howe (1998). He established the following bounds for the Rayleigh conductivity:

$$\frac{\pi r^2}{h + 16r/3\pi} \leq K_R \leq \frac{\pi r^2}{h + \pi r/2}, \quad (3.37)$$

or, in terms of an end correction,

$$\frac{\pi r}{2} \leq l' \leq \frac{16r}{3\pi}. \quad (3.38)$$

Identical values to those of Howe are obtained using (3.25) with $\cos \theta = 1$ since the aperture is untilted and $K(\varepsilon) = K(0)$ since the eccentricity of a disc is $\varepsilon = 0$.

3.3.4. Infinitely thin plate with elliptical or circular apertures

This configuration has already been studied by Rayleigh (1945, formula (5), § 306) and Leppington & Levine (1973, formula (2.32), § 2). They established $K_R = \pi a/K(\varepsilon)$, which, in the limit case $\varepsilon = 0$ ($a = r$ and $K(0) = \pi/2$), gives $K_R = 2r$; the same result was found by Copson (1947) by a direct computation of the flux integral on a circle.

Taking $h = 0$ in (3.33) (untilted perforation with an elliptical opening, derived from (3.25) by setting $\theta = 0$) then gives

$$\frac{3\pi^2 a}{32K(\varepsilon)} \leq K_R \leq \frac{\pi a}{K(\varepsilon)} \quad (3.39)$$

and our upper bound matches Rayleigh's formula exactly. For a circular aperture, doing the same with (3.37) leads to

$$\frac{3\pi^2 r}{16} \leq K_R \leq 2r. \quad (3.40)$$

Once again, the upper bound is the analytical value of the Rayleigh conductivity of a circular perforation in an infinitely thin plate given by Rayleigh (1945) and Copson (1947).

4. Numerical results

In this section, the influence of the tilting angle and opening eccentricity on the Rayleigh conductivities and end corrections is illustrated for some configurations representative of perforated plates in combustors.

4.1. Typical perforated plate

The multiperforated plate under consideration is among those typically involved in combustion chambers (see Andreini *et al.* 2011, 2012, for instance). Such plates have quite a low porosity ($\approx 2\%$). Consequently the individual apertures can be assumed to be coupled only through long-range interactions which means that the results of previous sections apply. The plate thickness is $h = 2$ mm and the characteristic size of the perforations is $r = 0.225$ mm. This length will be the semi-minor axis b of the elliptical opening of the perforation (see figure 3a). In the specific case of a hole bored with a drill bit of radius r , the cross-section of the tilted perforation is circular with the same radius, and the elliptical opening is characterized by $b = r$, $a = b/\cos\theta$ and $\varepsilon = \sin\theta$ (see figure 3c).

The reference values for the Rayleigh conductivity and the end correction will be respectively the upper and lower bounds of these parameters, corresponding to an untilted cylindrical hole (see § 3.3.3):

$$K_R^{\text{ref}} = \frac{\pi r^2}{h + \pi r/2}, \quad l_{\text{ref}} = \pi r/2. \quad (4.1)$$

In particular, we have $h = 5.66 l_{\text{ref}}$.

First, the influence of the tilting angle is illustrated for the specific case of the tilted perforation with a circular cross-section. Bounds for the Rayleigh conductivity are given by (3.32) and plotted in figure 4, for a tilting angle varying from 0 to the conventional 60° value.

A significant deviation from the untilted cylindrical case is observed at the largest tilting angles, which shows the importance of correctly taking the tilting effect into account. The effective length of the perforation is plotted in figure 5, as well as its decomposition into effective thickness and end correction (it should be remembered that $l = \tilde{h} + l'$, see (3.30)). A divergence between lower and upper bounds of the end correction is observed for large values of the tilting angle. However, this is not that significant for the effective length, because of the prominent role of the effective thickness $\tilde{h}$ in this range of tilting angles.

Then, the influence of the eccentricity of the elliptical opening is illustrated for a perforation with a $\theta = 60^\circ$ tilting angle, and a semi-minor axis kept constant to $b = r$. Bounds for the scaled Rayleigh conductivity given in (3.25) are plotted in figure 6.

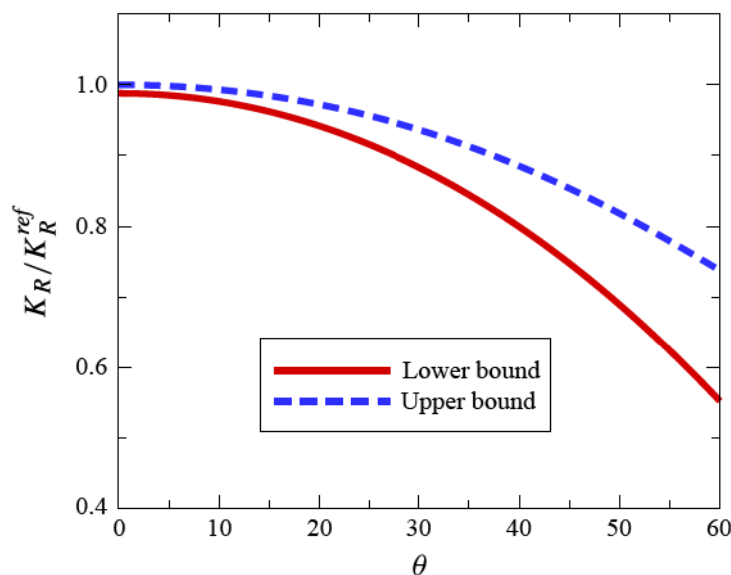


FIGURE 4. (Colour online) Scaled Rayleigh conductivities for the tilted perforation with an elliptical opening and a circular cross-section. The tilting angle θ is in degrees.

The eccentricity corresponding to the specific case of a circular cross-section (i.e. $\varepsilon = \sin \theta = \sqrt{3}/2$) is denoted by the dotted vertical line.

The eccentricity of the opening strongly affects the Rayleigh conductivity when compared with the circular case corresponding to $\varepsilon = 0$. As the eccentricity tends towards 1, in other words the perforation is changed into a slit of finite width $2b$ but infinite length $2a$, the Rayleigh conductivity tends to infinity and a divergence between lower and upper bounds can be observed. This divergence is all the more visible on the effective length and end correction plots (see figure 7).

However, it is worth noting that in the opposite case where the perforation is changed into a slit of zero width and finite length (i.e. a is kept constant and b tends to zero), then the Rayleigh conductivity tends to zero and the lower and upper bounds converge.

All of these results show that geometrical features greatly affect the Rayleigh conductivities or end corrections of perforations, and thus cannot be discarded if the effects of this parameter on the acoustic properties of the plate are to be taken into account accurately. Of course, this is only true if the potential component of the plate impedance (i.e. the impedance due to potential flow within the perforations, as modelled in the present study) is significant, which is not the case for liners in grazing flow ducts, for instance. However, the potential form of the Rayleigh conductivity is the basis for models used in bias flow configurations, and an accurate description of it can be of great help, as will be shown in the next section.

4.1.1. Eldredge *et al.* numerical simulations

The influence of the geometrical features can also be illustrated from the numerical simulations of Eldredge *et al.* (2007) who performed incompressible large-eddy simulations of the acoustic response of a turbulent flow through a multiperforated liner. The perforations had a circular bore of diameter $2r = 5$ mm, a tilting angle $\theta = 60^\circ$, and a thickness of $h = 10$ mm. Thus, at the bottom and top of the plate, the openings of the perforations were elliptical with a major axis of 10 mm and a minor axis of 5 mm. However, the cross-section along the tilted axis was circular with a

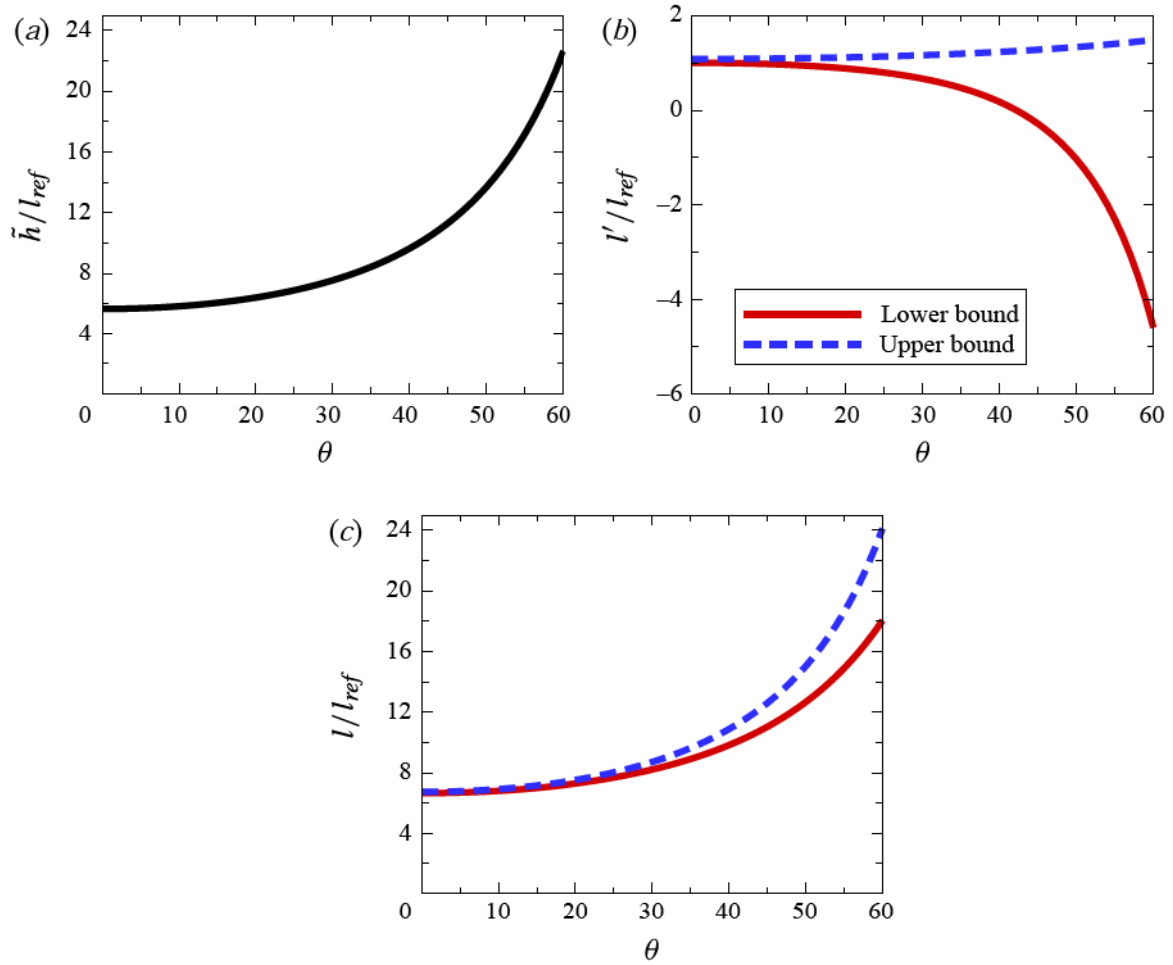


FIGURE 5. (Colour online) Scaled effective lengths and end correction for the tilted perforation with an elliptical opening and a circular cross-section: (a) scaled effective thickness; (b) scaled end correction; and (c) scaled effective length. The tilting angle θ is in degrees.

cross-section of πr^2 . This case corresponds exactly to the configuration considered in (3.32).

We recall that for this configuration, if the reference section is chosen to be πr^2 , the effective height to be considered is $\tilde{h} = h/\cos\theta$. This is the value used by Eldredge *et al.* for calculating the Rayleigh conductivity of the hole, but they applied it with a modified version of Howe's model in which the no-flow Rayleigh conductivity was in fact the upper bound of the untilted cylinder bounds (3.37):

$$K_R^{\text{Eld}} = \frac{\pi r^2}{\tilde{h} + \pi r/2}. \quad (4.2)$$

Their model's results are similar to those of their simulation, but they obtained a better agreement by taking the effective height to be $0.75h/\cos\theta$. They explained that this decrease of the effective height may be due to the fact that the radius of the aperture is effectively larger than r because of the elliptical intersection of the aperture with the top and bottom of the plate.

Table 1 summarizes the values of the no-flow Rayleigh conductivity proposed by Eldredge *et al.* and the analytical bounds obtained using the expressions established

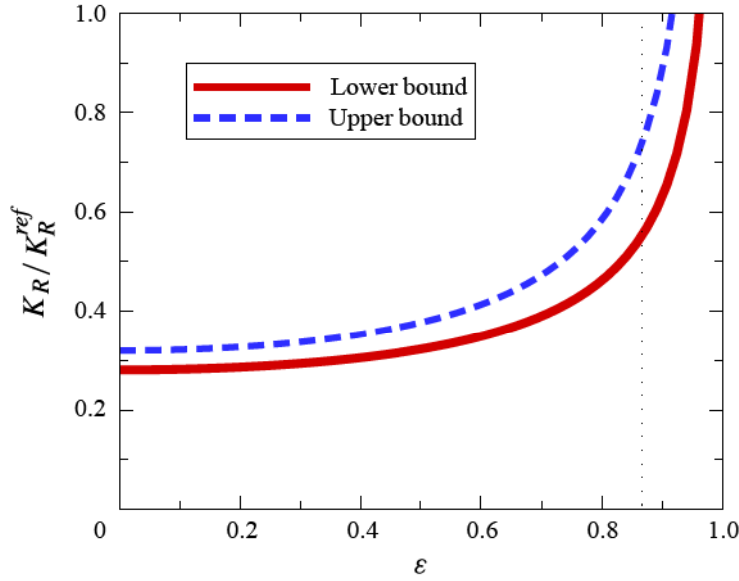


FIGURE 6. (Colour online) Scaled Rayleigh conductivities for an elliptical perforation with a $\theta = 60^\circ$ tilting angle. Here ε is the eccentricity of the elliptical opening. The dotted vertical line corresponds to the eccentricity for which the cross-section of the perforation is circular.

	Tilted perforation, circular opening	Tilted perforation, elliptical opening	Expression (4.2) with $\tilde{h} = h/\cos\theta$	Expression (4.2) with $\tilde{h} = 0.75h/\cos\theta$
K_R^-	4.44×10^{-4}	8.57×10^{-4}	8.21×10^{-4}	10.0×10^{-4}
K_R^+	5.73×10^{-4}	14.18×10^{-4}		

TABLE 1. Bounds of the Rayleigh conductivity obtained from expressions established in § 3, compared with the values used in the paper by Eldredge *et al.*

in § 3. The Eldredge *et al.* value obtained with $\tilde{h} = 0.75h/\cos\theta$ is within the bounds for the tilted perforation with an elliptical opening given by (3.32), and is quite close to the mean value of the bounds $K_R = (K_R^- + K_R^+)/2 = 11.375 \times 10^{-4}$. In contrast, their first value obtained with $\tilde{h} = h/\cos\theta$, is lower than the lower bound for a tilted perforation with an elliptical opening and greater than the upper bound for a tilted perforation with a circular opening of radius r given by (3.35). This points out the importance of the tilted angle in the computation of the Rayleigh conductivity.

The coefficient $0.75/\cos\theta$ introduced by Eldredge *et al.* corrects empirically the difference between the bounds for an untilted cylinder (3.37) and for a tilted perforation with elliptical opening (3.32). The bounds (in (3.32)) therefore improve the accuracy of the Rayleigh conductivity approximation, by taking into account the dependency on the parameters a and b of the ellipse, as well as on the tilted angle θ .

These results confirm that there is an advantage in taking the geometry of the aperture into account correctly. Of course, the question of the modification of the no-flow Rayleigh conductivity in the presence of a bias flow is still open. Strategies used until now, which consist in modifying this value by a flow-dependent function (either as done by Jing & Sun (2000) or in a slightly different way by Luong *et al.* (2005)) may still be relevant.

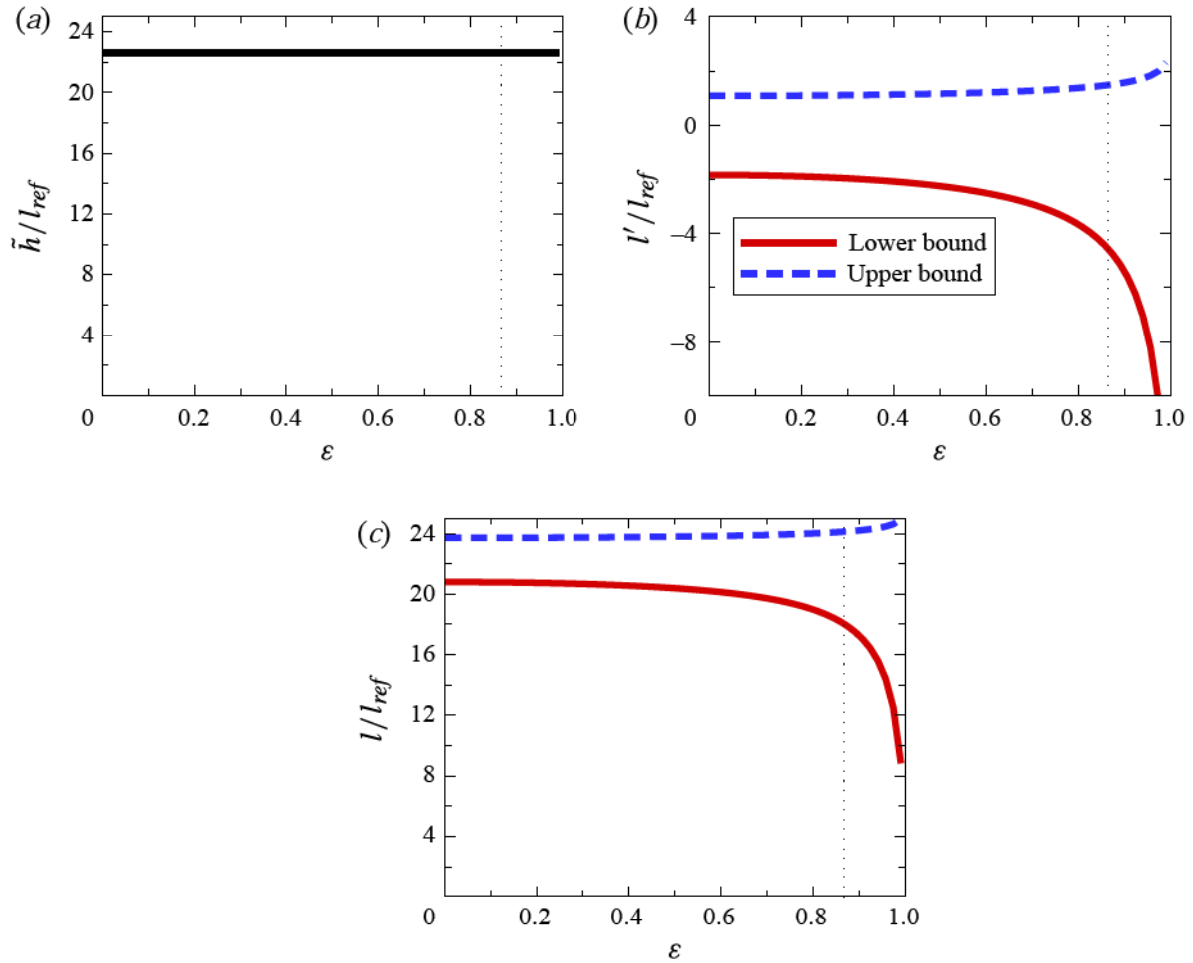


FIGURE 7. (Colour online) Scaled effective lengths and end correction for an elliptical perforation with a $\theta = 60^\circ$ tilting angle: (a) scaled effective thickness; (b) scaled end correction; and (c) scaled effective length. Here ε is the eccentricity of the elliptical opening. The dotted vertical line corresponds to the eccentricity for which the cross-section of the perforation is circular.

5. Effective acoustic compliance of a low-porosity perforated plate

In this section, we focus on a method for determining the asymptotic expansion of the reflection and transmission coefficients of the aforementioned low-porosity perforated plate up to order 2 relative to the small parameter characterizing the ratio of a characteristic size d of the perforation to the spacing L between two neighbouring perforations. This expansion has been recently given in Bendali *et al.* (2013). However, contrary to the approach in this reference, which was based on complex two-scale matched asymptotic expansions and the consideration of a grating of multipoles, the present one deals with these coefficients in a direct way without resorting to the expansion of the whole wave. Moreover it makes it possible to elucidate the role played by some relevant physical parameters as a weighted flux in which these coefficients are expressed. These new features are certainly more compatible for use in a fluid mechanics context.

The method is an adaptation of an approach previously used by Leppington & Levine (1973) for dealing with infinitely thin perforated plates. Actually, the method devised by Leppington and Levine is extended here in several directions. The plate is no longer assumed to be infinitely thin and the perforations can be of a rather

arbitrary shape. As mentioned above, it is worth recalling that the perforated plates under consideration in this study are assumed to be of low-porosity, i.e. such that $\delta = d/L \ll 1$, and to behave relative to the incident acoustic wave as a homogeneous surface, i.e. such that the spacing L is less than a half-wavelength, $L < \lambda/2$.

The main mathematical tools are asymptotic expansions, integral equations, and the lattice sum theory for the Helmholtz equation (Linton 2010). We end this section by briefly recalling results from Bendali *et al.* (2013) on the derivation of effective compliances for the plate from the asymptotic expansion of the reflection and transmission coefficients.

5.1. Scattering problem and Floquet's modes

Consider the configuration shown in figure 1(b) of an acoustic plane wave incident upon a perforated plate. As is well-known in lattice theory (Nedelec & Starling 1991; Linton 2010), the total wave satisfies the following quasi-periodic conditions resulting from the periodicity properties of the array and the fact that translating the incident wave by a vector ξ_m , linked to the periodicity properties of the lattice (see (2.5)), simply shifts the phase according to the following formula

$$p(\mathbf{x} + \xi_m) = e^{i\beta \cdot \xi_m} p(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

where $\beta \cdot \xi_m$ is the scalar product of the Bloch vector $\beta = \kappa \tau'$ and ξ_m . In the following, when saying that p satisfies periodic boundary conditions, we mean that p fulfils condition (5.1). This of course induces the same property on any derivative of p . It is therefore sufficient to restrict the determination of the wave p to the unit cell displayed in figure 2.

This determination requires a radiation condition on the reflected wave $(p - p_i)|_{U_+}$ and the transmitted one $p|_{U_-}$, which can be set in terms of a series of Floquet modes (see, for instance, Nedelec & Starling 1991; Linton 2010; Bendali *et al.* 2013).

As a result, the wave reflected and transmitted by the multiperforated plate can be specified in the unit cell by solving the following boundary-value problem:

$$\begin{cases} \nabla^2 p + \kappa^2 p = 0 & \text{in } U \\ \partial_n p = 0 & \text{on the plate,} \end{cases} \quad (5.2)$$

together with outgoing radiation conditions and periodicity properties (5.1) on the fictitious boundaries $\partial U_{\pm}$, for p and its derivatives up to order 1.

5.2. A domain decomposition approach

A boundary integral equation formulation is used on $U_{\pm}$. It should be noted that the plate is assumed to be located between $x_3 = -h/2$ and $x_3 = h/2$ and that a local coordinate system $x_3^{\pm} = x_3 \pm h/2$ is used on $U_{\pm}$ so that $x_3^+ = 0$ and $x_3^- = 0$ correspond to the upper and lower side of the plate, respectively.

In Leppington & Levine (1973), the main tool for dealing with the wave outside the perforations is the quasi-periodic Green's kernel for the Helmholtz equation G_A :

$$G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_m e^{i\beta \cdot \xi_m} G((\mathbf{x}' - \mathbf{y}', |x_3|), \xi_m), \quad (5.3)$$

with $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_3)$, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', 0)$. The underlying kernel

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{e^{i\kappa|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}, \quad (5.4)$$

is the standard Green's function yielding the outgoing solution to the Helmholtz equation. The solution of the scattering problem when the plate is considered as perfectly reflecting can be explicitly written as

$$\left. \begin{aligned} p_0(\mathbf{x}_+) &= p_i(\mathbf{x}'_+, x_3^+) + p_i(\mathbf{x}'_+, -x_3^+) \\ p_0(\mathbf{x}_-) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Then, the solution to boundary-value problem (2.4) can be expressed, outside the perforation, in terms of a single integral equation written in local coordinates:

$$p_{\pm}(\mathbf{x}_{\pm}) = p_0(\mathbf{x}_{\pm}) \mp \int_{D_{\pm}} 2G_{\Lambda}(\mathbf{x}_{\pm}, \mathbf{y}') \partial_{x_3} p_{\pm}(\mathbf{y}', 0) d\mathbf{y}' \quad (5.6)$$

Indeed, the quasi-periodic Green kernel G_{Λ} takes into account all of the following features: the Helmholtz equation, the quasi-periodic conditions and the outgoing radiation conditions. Moreover, the actual kernel here is $2G_{\Lambda}$ which, from the method of images, ensures that $\partial_{x_3} p_{\pm}$ obtained as limiting value from the integral representation formula is 0 outside the openings of the perforation and equal to their value assigned under the integral inside them. As a result, the acoustic pressure within the hole can hence be obtained by solving the following system:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 p + \kappa^2 p &= 0 \quad \text{on } \Omega \\ \partial_n p &= 0 \quad \text{on } \Sigma \\ p_{\pm}(\mathbf{x}_{\pm}) &= p_0(\mathbf{x}_{\pm}) \mp \int_{D_{\pm}} 2G_{\Lambda}(\mathbf{x}_{\pm}, \mathbf{y}) \partial_{x_3} p_{\pm}(\mathbf{y}', 0) d\mathbf{y}'. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

combined with transmission conditions between the hole and the integral formulation within the upper and lower parts of the unit cell:

$$\left\{ \begin{aligned} p &= p_+ \quad \text{on } D_+, \\ p &= p_- \quad \text{on } D_-, \end{aligned} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_{x_3} p &= \partial_{x_3} p_+ \quad \text{on } D_+, \\ \partial_{x_3} p &= \partial_{x_3} p_- \quad \text{on } D_-. \end{aligned} \right. \quad (5.8)$$

It is worth noting that the above transmission conditions are expressed in terms of functions defined on the same sets instead of functions depending on the same variables. It is in this context that the domain decomposition approach can handle efficiently the incident and reflected waves on the one hand and the transmitted wave on the other hand.

5.3. Second-order asymptotic expansions

Since $L < \lambda/2$, dual, or spectral, representations of the Green's kernel G_{Λ} for $|x_3| \gg 1$ (see, e.g., Linton 2010, formula (2.9)) make it possible to obtain the reflection and the transmission coefficients, respectively denoted by R_{δ} and T_{δ} to underline their dependence on $\delta = d/L$, through the following decomposition of the wave into a propagative and an evanescent part:

$$\left. \begin{aligned} p(\mathbf{x}'_+, x_3^+) &= e^{i\kappa \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{x}'_+} \left(e^{-i\kappa \cos \Phi x_3^+} + R_{\delta} e^{i\kappa \cos \Phi x_3^+} \right) + \text{evanescent modes} & \text{for } x_3^+ > 0, \\ p(\mathbf{x}'_-, x_3^-) &= e^{i\kappa \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{x}'_-} T_{\delta} e^{-i\kappa \cos \Phi x_3^-} + \text{evanescent modes} & \text{for } x_3^- < 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

These decompositions are obtained as follows. A Poisson summation formula is used to express the quasi-periodic Green's kernel in terms of propagative and evanescent modes (Linton 2010):

$$G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{2A} \sum_m \frac{1}{\gamma_m} e^{\pm i\gamma_m x_3} e^{i\beta_m \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{y}')}, \quad (5.10)$$

where $\gamma_m = \sqrt{\kappa^2 - |\beta_m|^2}$ and $\beta_m = \beta + 2\pi(m_1 \xi_1^* + m_2 \xi_2^*)$, with (ξ_1^*, ξ_2^*) the dual basis of (ξ_1, ξ_2) . Under condition (2.6) on the lattice, only the fundamental mode is propagating, so that

$$G_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{2\kappa A \cos \Phi} e^{i\kappa \tau' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{y}')} + \text{evanescent modes}. \quad (5.11)$$

The reflection and transmission coefficients are hence

$$R_\delta = 1 - \frac{iQ_\delta^+}{\kappa A \cos \Phi} \quad \text{and} \quad T_\delta = \frac{iQ_\delta^-}{\kappa A \cos \Phi}, \quad (5.12)$$

where $Q_\delta^\pm$ are the following weighted fluxes:

$$Q_\delta^\pm = \int_{D_\pm} e^{-i\kappa \tau' \cdot \mathbf{y}'} \partial_{x_3} p_\pm(\mathbf{y}', 0) d\mathbf{y}'. \quad (5.13)$$

The objective in this section is to adapt the approach used by Leppington & Levine (1973) to get a second-order asymptotic expansion for R_δ and T_δ in powers of δ for general perforations and plates.

Equations (5.7) and (5.8) make it clear that the determination of p , p_+ and p_- only requires solving a problem set solely on the hole Ω . To suppress the dependence of the geometry on δ , it is convenient to introduce the scaled variable

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}/\delta, \quad (5.14)$$

also called a fast (or inner) variable in asymptotic expansions theory. In this way, Ω , Σ and $D_\pm$ are parameterized by fixed sets denoted by $\hat{\Omega}$, $\hat{\Sigma}$ and $\hat{D}_\pm$, respectively, meaning that they are independent of δ . Domain $\hat{\Omega}$ can hence be viewed as an isolated perforation in a plate extending to infinity, see Tuck (1975), Howe (1998) (where this feature is introduced in a quite implicit way) and Bendali *et al.* (2013) where it is dealt with by means of a matched asymptotic expansion technique.

The expansion of R_δ and T_δ will be obtained through the second-order asymptotic expansion of the function Π_δ defined on $\hat{\Omega}$ through the scaling (5.14)

$$p(\delta \mathbf{X}) = \Pi_\delta(\mathbf{X}) = \Pi^{(0)}(\mathbf{X}) + \delta \Pi^{(1)}(\mathbf{X}) + o(\delta). \quad (5.15)$$

Clearly, introducing expansion (5.15) into the Helmholtz equation and the boundary condition on Σ yields

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}^2 \Pi^{(j)} &= 0 & \text{in } \hat{\Omega} \\ \partial_n \Pi^{(j)} &= 0 & \text{on } \hat{\Sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

for $j=0, 1$, with $\mathbf{n}$ the unit normal to $\widehat{\Sigma}$ directed outwards $\widehat{\Omega}$. The expansion of the integral equations set on respectively D_+ and D_- requires using the theory of lattice sums for the Helmholtz equation, which gives (Linton 2010, p. 653)

$$G_A(\delta X, \delta Y) = \frac{1}{4\pi\delta|\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'|} + s_0 + o(\delta), \quad (5.17)$$

where s_0 has an explicit expression in terms of a Schlömilch series, see Linton & Thompson (2009). As a result, expanding

$$p_0(\delta X'_+, 0) = 2e^{ik\tau' \cdot X'_+} = 2 + 2\delta ik\tau' \cdot X'_+ + o(\delta), \quad (5.18)$$

and expressing the integral equations of (5.7) in terms of the fast variables, gives

$$\left. \begin{aligned} \Pi_+^{(0)}(X'_+) + \int_{\widehat{D}_+} \frac{\partial_{X_3} \Pi_+^{(0)}(Y')}{2\pi|X'_+ - Y'|} dY' &= 2, \\ \Pi_-^{(0)}(X'_-) - \int_{\widehat{D}_-} \frac{\partial_{X_3} \Pi_-^{(0)}(Y')}{2\pi|X'_- - Y'|} dY' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \Pi_+^{(1)}(X'_+) + \int_{\widehat{D}_+} \frac{\partial_{X_3} \Pi_+^{(1)}(Y')}{2\pi|X'_+ - Y'|} dY' &= -2s_0 \int_{\widehat{D}_\pm} \partial_{X_3} \Pi^{(0)} dY' + 2ik\tau' \cdot X'_+, \\ \Pi_-^{(1)}(X'_-) - \int_{\widehat{D}_-} \frac{\partial_{X_3} \Pi_-^{(1)}(Y')}{2\pi|X'_- - Y'|} dY' &= -2s_0 \int_{\widehat{D}_\pm} \partial_{X_3} \Pi^{(0)} dY', \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

where $\Pi_\pm^{(j)}$ stand for the respective expressions of $\Pi^{(j)}$ on $\widehat{D}_\pm$ in terms of the variables $X'_\pm = \mathbf{x}'_\pm/\delta$. Define $\Pi^{(0)}$ in $\widehat{\Omega}$ so that it can be extended by

$$\Pi_+^{(0)}(X'_+) = 2 - \int_{\widehat{D}_+} \frac{\partial_{X_3} \Pi_+^{(0)}(Y')}{2\pi|X'_+ - Y'|} dY' \quad \text{and} \quad \Pi_-^{(0)}(X'_-) = \int_{\widehat{D}_-} \frac{\partial_{X_3} \Pi_-^{(0)}(Y')}{2\pi|X'_- - Y'|} dY', \quad (5.21)$$

for $\pm X_3^\pm > 0$, where $X_3^\pm$ are the component normal to the plate relatively to the coordinates $X_\pm$, respectively. Actually, (5.16) and (5.19) mean that $\Pi^{(0)}$ is the solution of the following boundary-value problem

$$\left. \begin{aligned} \nabla_X^2 \Pi^{(0)} &= 0 \quad \text{in } \widehat{\Omega}, \\ \partial_n \Pi^{(0)} &= 0 \quad \text{on } \widehat{\Sigma}, \\ \lim_{X_3 \rightarrow +\infty} \Pi_+^{(0)} &= 2, \\ \lim_{X_3 \rightarrow -\infty} \Pi_-^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

This shows that

$$\widehat{K}_R = \frac{1}{2} \int_{\widehat{D}_\pm} \partial_{X_3} \Pi^{(0)} dY'. \quad (5.23)$$

is nothing else than the Rayleigh conductivity of the isolated perforation in the scaled variables (5.14). Coming back to the initial variables, we can express $\widehat{K}_R$ by means of the usual Rayleigh conductivity defined in (3.2)

$$\widehat{K}_R = K_R/\delta. \quad (5.24)$$

In a similar way, $\Pi^{(1)}$ can be expressed from the solution of the following problem

$$\left. \begin{aligned} \nabla_X^2 \Pi_l^X &= 0 \quad \text{in } \widehat{\Omega} \\ \partial_n \Pi_l^X &= 0 \quad \text{on } \widehat{\Sigma}, \\ \lim_{X_3 \rightarrow +\infty} (\Pi_l^X(X) - X'_l) &= 2, \\ \lim_{X_3 \rightarrow -\infty} \Pi_l^X(X) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

for $l = 1, 2$ and the previous function $\Pi^{(0)}$ through

$$\Pi^{(1)}(X) = -4s_0 \widehat{K}_R \Pi^{(0)}(X) + 2i\kappa \boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\Pi}^X(X), \quad (5.26)$$

where $\boldsymbol{\Pi}^X$ is the vector function whose components are Π_1^X , Π_2^X and 0, respectively.

The fluxes $Q_\delta^\pm$ defined in (5.13) now become, up to some $o(\delta^2)$ terms,

$$\begin{aligned} Q_\delta^\pm &= \delta \int_{\widehat{D}_\pm} \exp(-i\kappa \delta \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{Y}') (\partial_{X_3} \Pi_\pm^{(0)} + \delta \partial_{X_3} \Pi_\pm^{(1)})(\mathbf{Y}'_\pm, 0) d\mathbf{Y}' + o(\delta^2) \\ &= 2\delta \widehat{K}_R + \delta^2 \int_{\widehat{D}_\pm} (\partial_{X_3} \Pi_\pm^{(1)} - i\kappa \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{Y}' \partial_{X_3} \Pi_\pm^{(0)}) d\mathbf{Y}', \end{aligned} \quad (5.27)$$

which, thanks to (5.26), gives

$$Q_\delta^\pm = 2\delta \widehat{K}_R + \delta^2 \left(2i\kappa \boldsymbol{\tau}' \cdot \int_{\widehat{D}_\pm} \left(\partial_{X_3} \boldsymbol{\Pi}_\pm^X - \frac{1}{2} \mathbf{Y}' \partial_{X_3} \Pi_\pm^{(0)} \right) d\mathbf{Y}' - 8s_0 \widehat{K}_R^2 \right). \quad (5.28)$$

A reciprocity property (see Bendali *et al.* 2013, page 16) yields

$$\left. \begin{aligned} \int_{\widehat{D}_+} (\partial_{X_3} \boldsymbol{\Pi}_+^X - \frac{1}{2} \mathbf{Y}' + \partial_{X_3} \Pi_+^{(0)}) d\mathbf{Y}'_+ &= 0 \\ \int_{\widehat{D}_-} (\partial_{X_3} \boldsymbol{\Pi}_-^X - \frac{1}{2} \mathbf{Y}' - \partial_{X_3} \Pi_-^{(0)}) d\mathbf{Y}'_- &= -\widehat{\boldsymbol{\mu}}_n, \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

with

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_n = (\mathbf{c}_+ - \mathbf{c}_-) \widehat{K}_R - \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Sigma}} \Pi^{(0)} \mathbf{n}' ds, \quad (5.30)$$

where $\mathbf{c}_\pm = \mathbf{X} - \mathbf{X}_\pm$ take into account the difference of the centres of phases chosen for the reflected and transmitted waves and $\mathbf{n}'$ is the projection of the unit normal $\mathbf{n}$ to $\widehat{\Sigma}$ on the plane of the plate. For an axisymmetric perforation, $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_n$ reduces to

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_n = \frac{h}{\delta} \widehat{K}_R \mathbf{e}_3 = \frac{hK_R}{\delta^2} \mathbf{e}_3, \quad (5.31)$$

where $\mathbf{e}_3$ is the unit vector along the x_3 -axis.

As a result, the reflection and the transmission coefficients have the following asymptotic expansions, as obtained by Bendali *et al.* (2013) through a more involved procedure expansions

$$\left. \begin{aligned} R_\delta &= 1 + \frac{\delta \widehat{K}_R}{A} \frac{2}{i\kappa \cos \Phi} - \frac{\delta^2 4 \widehat{K}_R^2 s_0}{A} \frac{2}{i\kappa \cos \Phi} + o(\delta^2) \\ T_\delta &= -\frac{\delta \widehat{K}_R}{A} \frac{2}{i\kappa \cos \Phi} + \frac{\delta^2 (4 \widehat{K}_R^2 s_0 + i\kappa \boldsymbol{\tau}' \cdot \widehat{\boldsymbol{\mu}}_n)}{A} \frac{2}{i\kappa \cos \Phi} + o(\delta^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

It is worth mentioning that the term $\boldsymbol{\tau}' \cdot \widehat{\boldsymbol{\mu}}_n$ is equal to zero for an axisymmetric perforation since then $\boldsymbol{\tau}'$ has no component along the x_3 -axis.

Finally, in terms of the Rayleigh conductivity in the initial variables, we get

$$\left. \begin{aligned} R_\delta &= 1 - \frac{2i}{\kappa A \cos \Phi} K_R + \frac{8is_0}{\kappa A \cos \Phi} K_R^2 + o(\delta^2) \\ T_\delta &= \frac{2i}{\kappa A \cos \Phi} K_R - \frac{2is_0}{\kappa A \cos \Phi} (4K_R^2 + i\kappa \boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\mu}_n) + o(\delta^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

5.4. Effective compliance of the perforated plate

The effective compliance K of the plate can hence be defined through the following relationships

$$\partial_{x_3} p_+ = \partial_{x_3} p_- = K(p_+ - p_-). \quad (5.34)$$

The reflection and transmission coefficients and the compliance are then linked by

$$R + T = 1, \quad K = \frac{i\kappa \cos \Phi}{2} \left(1 - \frac{1}{R} \right), \quad R = 1 / \left(1 - \frac{2K}{i\kappa \cos \Phi} \right) \quad (5.35)$$

Moreover, if, as here, the governing equations are those of linear acoustics, which means that no damping mechanism is involved and that there is no acoustic absorption by the perforated plate, the imaginary part $\text{Im}(K)$ of the effective compliance is zero and the conservation of energy is expressed through the following relation

$$1 - |R|^2 - |T|^2 = 0. \quad (5.36)$$

Following a general procedure given in Bendali *et al.* (2013), it is then possible from expansion (5.33) to design a compliance which is both consistent with the approximation of the effective reflection and transmission coefficients at leading order $O(\delta)$, and ensures the conservation of acoustic energy:

$$K_\delta^{(1)} = \frac{K_R}{A}. \quad (5.37)$$

This is the classical expression of the effective compliance of the perforated plate (Hughes & Dowling 1990; Eldredge & Dowling 2003). The reflection coefficient corresponding to this compliance condition

$$R_\delta^{(1)} = \frac{1}{1 - (2/i\kappa \cos \Phi)(K_R/A)} \quad (5.38)$$

does not lead to an amplified reflected wave while approximating the actual reflection coefficient up to a term in $o(\delta)$.

In general, the same procedure cannot be repeated to get a second-order compliance condition since the term $\boldsymbol{\tau}' \cdot \widehat{\boldsymbol{\mu}}_n$ in (5.32) or (5.33) prevents the condition $R + T = 1$ from being satisfied. However, this can be done when $\boldsymbol{\tau}' \cdot \widehat{\boldsymbol{\mu}}_n = 0$, for instance when the perforation is axisymmetric or when the thickness of the plate can be neglected.

A very far-reaching, by no means obvious, property of the lattice sums for the Helmholtz equation (see Linton 2010, p. 656) ensures that

$$\text{Im}(2s_0) = \frac{1}{\kappa \cos \Phi}, \quad (5.39)$$

and then makes it possible to design a compliance at leading order $O(\delta^2)$

$$K_\delta^{(2)} = \frac{K_R}{A} (1 - 4K_R \operatorname{Re}(s_0)), \quad (5.40)$$

(cf. Bendali *et al.* 2013). The coefficient $\operatorname{Re}(s_0)$ adds a correction depending on the shape of the array of the perforations rather than just averaging by the area A of the lattice unit cell. The corresponding reflection coefficient

$$R_\delta^{(2)} = \left(1 + \frac{2i}{\kappa \cos \Phi} \frac{K_R}{A} (1 - 4K_R \operatorname{Re}(s_0)) \right)^{-1} \quad (5.41)$$

does not exhibit any unrealistic behaviour. Leppington & Levine (1973) gave a similar expression for a rectangular lattice of elliptical holes (see their equation (2.27)). Our approximation (5.41) of the reflection coefficient is an extension of this formula to an arbitrary shape of the lattice and to any geometry of the perforations, if either the plate is infinitely thin or the perforations are axisymmetric. Otherwise, second-order terms in $O(\delta^2)$ are missed.

5.5. Numerical results for a typical plate

Some numerical experiments can now be conducted to illustrate the influence of the geometry of the perforations and the shape of the lattice for a realistic configuration of the perforated plate. A 2 mm perforated plate of 1.96 % porosity is considered, with either a rectangular or staggered lattice of holes. As in §4.1, the characteristic size of the holes is $r = 0.225$ mm. The incidence of the incoming acoustic wave is $\Phi = 45^\circ$. The dimensions of the lattice are $|\xi_1| = 3$ mm and $|\xi_2| = 2.7$ mm in the rectangular configuration, $|\xi_1| = 3$ mm and $|\xi_2| = \sqrt{(1.5)^2 + (2.7)^2} \approx 3.1$ mm in the staggered one. Thus, the surface of the lattice cell is the same in both configurations, i.e. $A = 8.1$ mm². The assumption that $\delta = r/L$ is a small parameter is satisfied.

Here, we focus on two kinds of geometries for the holes: the untilted cylinder of radius r and the tilted perforation of elliptical opening with circular cross-section of radius r and a 60° tilt angle. The mean value of the bounds (3.37) and (3.32) are taken as the respective Rayleigh conductivities of these perforations. As discussed in §5.4, the reflection coefficient can be computed at first and second order in δ by (5.38) and (5.41), respectively.

Results in the frequency range [500, 5000] Hz are plotted in figure 8, for the rectangular lattice. The geometry of the perforations has a strong effect on the reflection coefficient, which confirms the importance of using the expressions for the Rayleigh conductivity obtained in §3. In contrast, first- and second-order approximations are almost indistinguishable, which shows that the usual way of calculating the effective compliance of the plate (i.e. by averaging the Rayleigh conductivity of the isolated hole by the area of the lattice unit cell) is quite accurate in this case.

Consequently, it seems obvious that changing the shape of the lattice will not affect the reflection coefficient significantly. This is shown in figure 9, which depicts the deviation of the staggered array from the rectangular one expressed as a percentage of the latter.

For both geometries of the perforations and whatever the frequency, the reflection coefficients differ from each other by less than 0.02 %. This means that the shape of the lattice can be neglected without reducing the quality of the models, and that considering first-order usual approximations for the reflection and the transmission coefficients is sufficient.

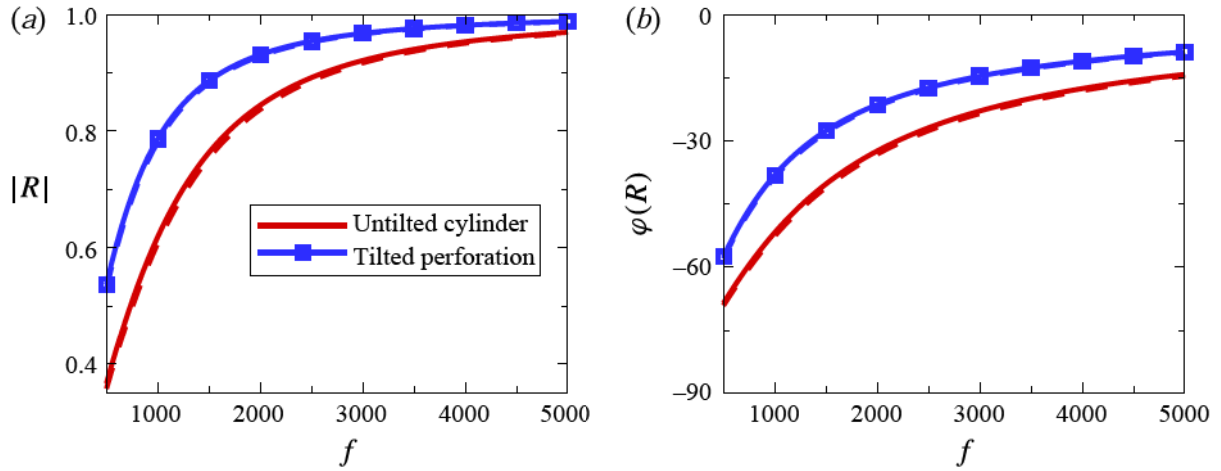


FIGURE 8. (Colour online) Reflection coefficient of the perforated plate with a rectangular lattice of untitled cylindrical perforations (lines without symbols, shown in red online) or tilted perforations with an elliptical opening and circular cross-section (lines with symbols, shown in blue online): (a) amplitude and (b) phase (in degrees). First-order approximations are plotted in solid lines, second order approximations are plotted in dashed lines.

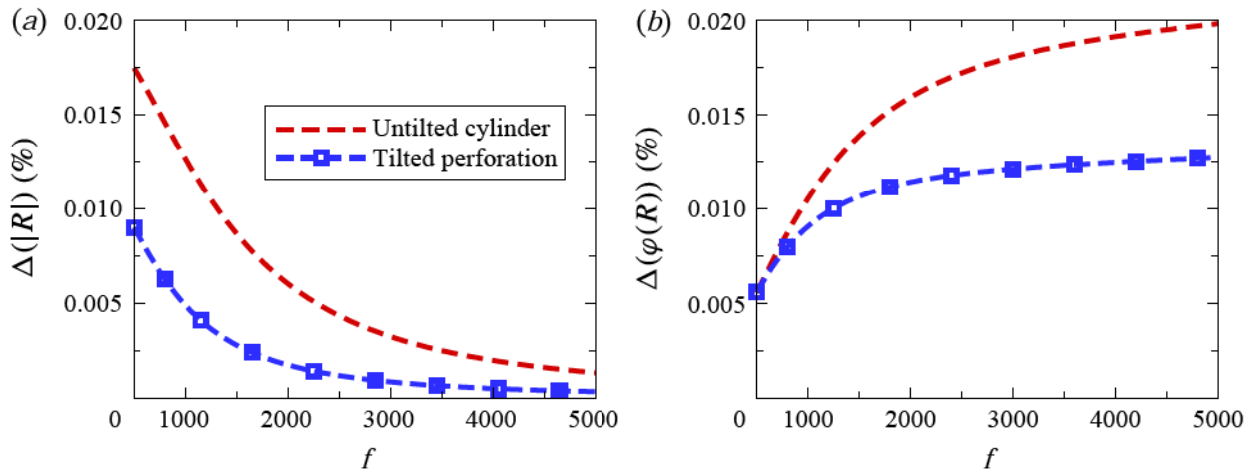


FIGURE 9. (Colour online) Difference between the second-order reflection coefficient in the staggered and rectangular arrangement of the holes, normalized by the rectangular arrangement value: (a) amplitude and (b) phase (in degrees).

6. Conclusion

The acoustic properties of a low-porosity perforated plate in a compressible ideal inviscid fluid have been investigated in the absence of mean flow. This generalizes previous results done by Leppington & Levine (1973) to account for thick plates with perforations of arbitrary periodic patterns and various geometries. The study was conducted in two stages. As a first step, the mathematical framework developed by Laurens *et al.* (2013) for obtaining accurate bounds of the Rayleigh conductivity for various geometric configurations, was explained in a fluid mechanics context and extended to cover tilted perforations with elliptical openings. Then asymptotic expansions of the effective reflection and transmission coefficients of a thick plate with a skew grating of perforations have been derived by extending the Leppington & Levine (1973) method. These results match those established by Bendali *et al.* (2013) by means of a matched asymptotic expansion of the full wave, but the methodology

to obtain them is much less complex and more suitable for a fluid mechanics context since it can be easily adapted to deal with other models of flow at the level of the perforations.

In § 3, we focused on the Rayleigh conductivity of a single perforation, which can be related to the inertial end correction used in impedance models. Lord Rayleigh (1945) gave two bounds for the conductivity of a circular aperture of zero thickness, and his work was extended to thick cylindrical perforations by Howe (1998). These expressions are nowadays widely used in impedance and conductivity models, even when perforations of other geometries are considered. We have focused on tilted perforations of elliptical sections, which are of primary interest in industrial applications, especially in the domain of engine combustors where walls are perforated by submillimetre tilted perforations for cooling purposes.

In related theoretical or numerical studies, some researchers use the Rayleigh conductivity (or end correction) of an untilted cylindrical aperture with a modified plate thickness which corresponds to the length of the centreline of the tilted aperture. We have shown that exact lower and upper bounds for the Rayleigh conductivity and end correction can be obtained by applying the Dirichlet and Kelvin variational principles. Our analysis has shown that these quantities were quite sensitive to the tilt angle and that the thickness effect requires a more precise calculation than just considering the intuitive effective value.

Moreover, we showed that all of the expressions obtained by Lord Rayleigh and Howe for more conventional geometries can be easily derived from the present result, by considering limiting values of the tilt angle or of the aperture eccentricity. It should be noted that though we have only considered the Rayleigh conductivity in the framework of the purely acoustic problem, i.e. without any flow or nonlinear effects, this solution can be used as the groundwork for deriving Rayleigh conductivity in the presence of a bias flow through the aperture, as was done by Howe (1979) from the Rayleigh conductivity of a thin circular aperture. We have thus shown that in the study of a bias flow through a tilted perforation carried out by Eldredge *et al.* (2007), a better match between the theoretical model and the numerical simulations could have been obtained if the exact expression of the Rayleigh conductivity had been used. This kind of methodology could also possibly be applied to the issue of surface waves' attenuation in ice-covered ocean, since it seems clear that the usual method of determining it (linear scattering theory) underestimates the attenuation of longer waves (Bennetts & Squire 2012), requiring the addition of a somewhat artificial viscosity to the model (Wang & Shen 2006; Bennetts & Squire 2012). It might be interesting to try a simple model of a floating elastic plate with periodic holes for brine drainage (perhaps with some internal friction) to see how much attenuation this produces.

Then, in § 5, we performed an asymptotic expansion on the scattering problem with respect to the small ratio δ between the characteristic sizes of the perforation and of the lattice cell. We derived accurate first- and second-order expansions of the reflection and transmission coefficients, which are expressed in terms of the Rayleigh conductivity of the perforation. These expressions extend those previously given by Leppington & Levine (1973) and retrieve those obtained by matched asymptotic expansions by Bendali *et al.* (2013): they are valid for thick plates with an arbitrary grating of perforations with various geometries. It should be noted that the only constraint required on the size of the lattice cell is that it has to be smaller than half of the acoustic wavelength, contrary to the conventional long-wavelength assumption.

Moreover, we have shown that it is necessary to modify the $O(\delta)$ and $O(\delta^2)$ expansions of the reflection and transmission coefficients to ensure the conservation

of acoustic energy. Thus, the asymptotics provide a first- and second-order expression of the effective compliance of the perforated plate. The first-order-accurate compliance is the same as the classical expression, i.e. the averaging of the Rayleigh conductivity of a single perforation by the area of the lattice unit cell. The accurate second-order compliance involves corrections by a coefficient that depends on the shape of the lattice. Finally, numerical calculations on a typical plate have shown that the second-order corrections, and therefore the effects of the lattice shape, can be neglected without any significant loss of accuracy.

Acknowledgement

Part of this work was funded by the French National Research Agency (ANR) under grant no. ANR-08-SYSC-001.

Appendix. Details for computation of the functions involved in the Dirichlet and Kelvin principles when the opening is elliptical in shape

This appendix discusses the calculations described in § 3.2, and especially the solutions of problem (3.14) with either a Dirichlet or a Neumann boundary condition on the elliptical hole. The elliptical opening is completely outside the scope of the results reported by Laurens *et al.* (2013). Actually, the method of Copson (1947) used by Laurens *et al.* (2013) can no longer be applied. To overcome this difficulty, we use an approach similar to that introduced by Leppington & Levine (1973) and reused by Laurens & Tordeux (2013). This requires the use of a spheroidal coordinate system and the decomposition of functions into even Legendre functions. Laurens & Tordeux (2013) computed the energy for a specific polynomial of degree-one source density, while in this work, we determine the source density from the potential it generates. In this section, we thus present new results concerning the determination of the source density generating a linear potential on a thin disc.

A.1. Solution of problem (3.14) with a Dirichlet boundary condition on the elliptical hole

We are solving the problem (3.14) applied to the potentials w_ε and t_ε , which verify the boundary conditions (3.15). The integrals

$$I_{f_\varepsilon} = \int_{\pm x_3 > h/2} |\nabla f_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_A \rho_{f_\varepsilon}(\mathbf{x}) \cdot f_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x}', \quad (\text{A } 1)$$

with either $f_\varepsilon = w_\varepsilon$ or $f_\varepsilon = t_\varepsilon$, solution to (3.14) and boundary condition (3.15), give the upper bound of the Rayleigh conductivity. This problem can be solved using the method of Copson (1947) for a circular opening. But if the opening is elliptical, this method can no longer be applied. To determine ρ_{w_ε} and ρ_{t_ε} , we use the same mathematical approach as in Laurens & Tordeux (2013). We consider the spheroidal coordinate system:

$$x_1 = a \sin \theta' \cos \varphi' \quad \text{and} \quad x_2 = b \sin \theta' \sin \varphi', \quad \text{with } \theta' \in [0, \pi/2], \varphi' \in [0, 2\pi], \quad (\text{A } 2)$$

to obtain a parameterization of A in terms of the unit half-sphere. In that case, there is a block diagonalization of $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ on a well-chosen spectral basis for the half-sphere involving the even Legendre functions Q_n^m , meaning that any function τ can be

decomposed under the following form:

$$\tau(\theta', \varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{|m| \leq n \\ n-m \text{ even}}} \tau_n^m Q_n^m(\cos \theta') e^{im\varphi'}. \quad (\text{A } 3)$$

We denote by $g_\varepsilon(\theta', \varphi') = \cos \theta' \rho_{f_\varepsilon}(\theta', \varphi')$ the modified source density function. Formula (9) of Laurens & Tordeux (2013) states that the coefficients f_n^m and g_n^m of the spheroidal expansions (A 3) of f_ε and g_ε are related through

$$f_n^m = \frac{\sqrt{ab}}{2} \sum_{\substack{|m'| \leq n \\ n-m' \text{ even}}} d_{mm'}^n g_n^{m'}, \quad (\text{A } 4)$$

with the coefficients $d_{mm'}^n$ given by formula (6) of Laurens & Tordeux (2013), or equivalently by

$$d_{mm'}^n = 4 \frac{Q_n^m(0) Q_n^{m'}(0)}{2n+1} \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i(m-m')\varphi}}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (\text{A } 5)$$

It is worth noting that coefficient f_n^m in formula (9) of Laurens & Tordeux (2013) is half of that given above mainly because the kernel of the Laplace equation considered there and the current one are in the same ratio. In this paper, we have used the same convention as in (Leppington & Levine 1973, formula (2.22)) (see (3.12)).

But unlike in Laurens & Tordeux (2013), we need to compute the source density functions ρ_{w_ε} and ρ_{t_ε} . To do so, first, we fully expand the potential w_ε on A . Since w_ε is constant on A , its spheroidal expansion (A 3) is

$$w_\varepsilon(\theta', \varphi') = f_0^0 Q_0^0(\cos \theta'). \quad (\text{A } 6)$$

Second, we develop (A 4) by considering only the zero-order Legendre functions

$$f_0^0 = (\sqrt{ab}/2) d_{00}^0 g_0^0. \quad (\text{A } 7)$$

Then we solve

$$w_\varepsilon(\theta', \varphi') = (\sqrt{ab}/2) d_{00}^0 g_0^0 Q_0^0(\cos \theta'). \quad (\text{A } 8)$$

Since $Q_0^0(\cos \theta') = 1/\sqrt{2}$, $w_\varepsilon(\theta', \varphi') = 1$ and $d_{00}^0 = 2\sqrt{b/a}K(\varepsilon)$, we have

$$g_0^0 = \sqrt{2}/(bK(\varepsilon)). \quad (\text{A } 9)$$

Given that $\cos \theta' = \sqrt{1 - \sin^2 \theta'} = \sqrt{1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2}$, it follows that the source density function is

$$\rho_{w_\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{g_\varepsilon(\theta', \varphi')}{\cos \theta'} = \frac{g_0^0 Q_0^0(\cos \theta')}{\cos \theta'} = \frac{1}{bK(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2}}. \quad (\text{A } 10)$$

To compute the source density ρ_{t_ε} that generates a degree-one polynomial potential t_ε , we expand the potential thanks to (A 3), meaning

$$t_\varepsilon(\theta', \varphi') = f_1^1 Q_1^1(\cos \theta') e^{i\varphi'} + f_1^{-1} Q_1^{-1}(\cos \theta') e^{-i\varphi'}. \quad (\text{A } 11)$$

Then, keeping all of the zeroth- and first-order Legendre functions in the expansion (A 4) yields

$$\left. \begin{aligned} f_1^1 &= (\sqrt{ab}/2)(d_{11}^1 g_1^1 + d_{1,-1}^1 g_1^1), \\ f_1^{-1} &= (\sqrt{ab}/2)(d_{-1,1}^1 g_1^1 + d_{1,-1}^1 g_1^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 12)$$

The coefficients $d_{mm'}^m$ are given by (A 4):

$$d_{11}^1 = 2\sqrt{b/a}K(\varepsilon) \quad \text{and} \quad d_{1,-1}^1 = d_{-1,1}^1 = 2\sqrt{b/a}(K(\varepsilon) - 2D(\varepsilon)). \quad (\text{A } 13)$$

Since $t_\varepsilon(\theta', \varphi') = x_1 = a \sin \varphi' \cos \theta'$ and $Q_1^{-1}(\cos \theta') = -Q_1(\cos \theta') = \sqrt{3} \sin \theta'/2$, we find that

$$\left. \begin{aligned} f_1^{-1} &= -f_1^1 = a/\sqrt{3}, \\ f_1^1 &= (b/4)[K(\varepsilon)g_1^1 + (K(\varepsilon) - 2D(\varepsilon))g_1^{-1}], \\ f_1^{-1} &= (b/4)[(K(\varepsilon) - 2D(\varepsilon))g_1^1 + K(\varepsilon)g_1^{-1}]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 14)$$

As $f_1^{-1} + f_1^1 = 0$, it comes that $g_1^{-1} + g_1^1 = 0$ and

$$g_1^{-1} = -g_1^1 = -a/(\sqrt{3}bD(\varepsilon)). \quad (\text{A } 15)$$

Therefore, the source density function ρ_{t_ε} that generated a potential which is a multiple of x_1 on an elliptic disc is

$$\rho_{t_\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{bD(\varepsilon)} \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2}}. \quad (\text{A } 16)$$

The limiting case $\varepsilon = 0$, with then $a = b = r$, is in agreement with the results obtained by Copson (1947) for a circle.

With the analytical expressions of the source density ρ_{w_ε} and ρ_{t_ε} , we can compute the following integrals from (A 1) that have to be applied for the Kelvin and Dirichlet principles:

$$\int_{\pm x_3 > h/2} |\nabla w_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \pi a \frac{K(0)}{K(\varepsilon)} \quad \text{and} \quad \int_{\pm x_3 > h/2} |\nabla t_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{8}{3} a^3 \frac{D(0)}{D(\varepsilon)}. \quad (\text{A } 17)$$

A.2. Solution of problem (3.14) with a Neumann boundary condition on the elliptical hole

We consider the problem (3.14) with boundary conditions (3.20). The corresponding potential z_ε is associated to a constant source density function $\rho_{z_\varepsilon} = 1/2$ (see § 3.4.1.3, p. 144 of Sauter & Schwab 2010). In this case, it has been shown by Laurens & Tordeux (2013) that

$$\int_{\pm x_3 > h/2} |\nabla z_\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{8}{3} ab^2 \frac{K(\varepsilon)}{K(0)}. \quad (\text{A } 18)$$

This result is obtained by using Laurens & Tordeux's (2013) Theorem 1.1 with $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ and the potential defined by (3.12). As already mentioned, the potential formula differs from that used by Laurens & Tordeux (2013) and thus there

is a factor of two of difference between expression (A 18) and that given by Laurens & Tordeux (2013).

REFERENCES

- ABRAHAM, I. D. 1999 Sound radiation from a line forced perforated elastic sandwich panel. *J. Acoust. Soc. Am.* **105** (6), 3009–3020.
- ALLARD, J. F. 1993 *Propagation of Sound in Porous Media*. Elsevier Applied Sciences.
- ANDREINI, A., BIANCHINI, C., FACCHINI, B. & SIMONETTI, F. 2011 Assessment of numerical tools for the evaluation of the acoustic impedance of multi-perforated plates. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2011, Vancouver, British Columbia, Canada*.
- ANDREINI, A., FACCHINI, B., FERRARI, L., LENZI, G. & SIMONETTI, F. 2012 Experimental investigation on effusion liner geometries for aero-engine combustors: evaluation of global acoustic parameters. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2012, Copenhagen, Denmark*.
- ATALLA, N. & SGARD, F. 2007 Modeling of perforated plates and screens using rigid frame porous models. *J. Sound Vib.* **303**, 195–208.
- BELLUCCI, V., FLOHR, P. & PASCHEREIT, C. O. 2004 Numerical and experimental study of acoustic damping generated by perforated screens. *AIAA J.* **42** (8), 1543–1549.
- BENDALI, A., FARES, M. B., PIOT, E. & TORDEUX, S. 2013 Mathematical justification of the Rayleigh conductivity model for perforated plates in acoustics. *SIAM J. Appl. Math.* **73** (1), 438–459.
- BENNETTS, L. G. & SQUIRE, V. A. 2012 On the calculation of an attenuation coefficient for transects of ice-covered ocean. *Proc. R. Soc. Lond. A* **468** (2137), 136–162.
- BERANEK, L. L. 1992 *Noise and Vibration Control Engineering*. Wiley.
- COPSON, E. T. 1947 On the problem of the electrified disc. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **2** **8** (01), 14–19.
- COURANT, R. & HILBERT, D. 1953 *Methods of Mathematical Physics*. vol. I. Interscience Publishers, Inc..
- CUMMINGS, A. 1984 Acoustic nonlinearities and power losses at orifices. *AIAA J.* **22**, 786–792.
- CUMMINGS, A. 1986 The effects of grazing turbulent pipe-flow on the impedance of an orifice. *Acoustica* **61**, 233–242.
- CUMMINGS, A. 1987 The response of a resonator under a turbulent boundary layer to a high amplitude non-harmonic sound field. *J. Sound Vib.* **115** (2), 321–328.
- DOWLING, A. P. & HUGHES, I. J. 1992 Sound absorption by a screen with a regular array of slits. *J. Sound Vib.* **156** (3), 387–405.
- ELDREDGE, J. D., BODONY, D. J. & SCHOEYBI, M. 2007 Numerical investigation of the acoustic behavior of a multi-perforated liner. In *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA paper 2007-3683*.
- ELDREDGE, J. D. & DOWLING, A. P. 2003 The absorption of axial acoustic waves by a perforated liner with bias flow. *J. Fluid Mech.* **485**, 307–335.
- FOK, V. A. 1941 Teoreticheskoe issledovanie provodimosti kruglogo otverstiya v peregorodke, postavlennoi poperek truby. *Doklady Akademii nauk SSSR* **31**, 875–878.
- GUESS, A. W. 1975 Calculation of perforated plate liner parameters from specified acoustic resistance and reactance. *J. Sound Vib.* **40** (1), 119–137.
- HOWE, M. S. 1998 *Acoustics of Fluid-Structure Interactions*. Cambridge University Press.
- HOWE, M. S. 1979 On the theory of unsteady high Reynolds number flow through a circular aperture. *Proc. R. Soc. Lond.* **366**, 205–223.
- HOWE, M. S. 1980 The influence of vortex shedding on the diffraction of sound by a perforated screen. *J. Fluid Mech.* **97**, 641–653.
- HOWE, M. S. 1996 The influence of tangential mean flow on the Rayleigh conductivity of an aperture. *Proc. R. Soc. Lond.* **452**, 2303–2317.
- HUGHES, I. J. & DOWLING, A. P. 1990 The absorption of sound by perforated linings. *J. Fluid Mech.* **218**, 299–335.
- INGARD, K. U. 1994 Notes on Sound Absorption Technology. Noise Control Foundation.

- INGARD, U. 1953 On the theory and design of acoustic resonators. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 1037–1061.
- JING, X. & SUN, X. 1999 Experimental investigations of perforated liners with bias flow. *J. Acoust. Soc. Am.* **106** (5), 2436–2441.
- JING, X. & SUN, X. 2000 Effect of plate thickness on impedance of perforated plates with bias flow. *AIAA J.* **38** (9), 1573–1578.
- KIRBY, R. & CUMMINGS, A. 1998 The impedance of perforated plates subjected to grazing gas flow and backed by porous media. *J. Sound Vib.* **217** (4), 619–636.
- LAURENS, S. & TORDEUX, S. 2013 Explicit computation of the electrostatic energy for an elliptical charged disc. *Appl. Maths Lett.* **26** (2), 301–305.
- LAURENS, S., TORDEUX, S., BENDALI, A., FARES, M. & KOTIUGA, R. 2013 Lower and upper bounds for the Rayleigh conductivity of a perforated plate. *ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.* **47** (6), 1691–1712.
- LEE, S. H., IH, J. G. & PEAT, K. S. 2007 A model of the acoustic impedance of perforated plates with bias flow considering the interaction effect. *J. Sound Vib.* **303**, 741–752.
- LEFEBVRE, A. H. 1999 *Gas Turbines Combustion*. Taylor and Francis.
- LEPPINGTON, F. G. 1990 The effective boundary conditions for a perforated elastic sandwich panel in a compressible fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A* **427**, 385–399.
- LEPPINGTON, F. G. & LEVINE, H. 1973 Reflexion and transmission at a plane screen with periodically arranged circular or elliptical apertures. *J. Fluid Mech.* **61**, 109–127.
- LINTON, C. M. 2010 Lattice sums for the Helmholtz equation. *SIAM Rev.* **52** (4), 630–674.
- LINTON, C. M. & THOMPSON, I. 2009 One-and two-dimensional lattice sums for the three-dimensional helmholtz equation. *J. Comput. Phys.* **228** (6), 1815–1829.
- LUENBERGER, D. G. 1997 *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley-Interscience.
- LUONG, T., HOWE, M. S. & MCGOWAN, R. S. 2005 On the Rayleigh conductivity of a bias-flow aperture. *J. Fluids Struct.* **21**, 769–778.
- MAA, D. Y. 1998 Potential of microperforated panel absorber. *J. Acoust. Soc. Am.* **104** (5), 2861–2866.
- MELLING, T. H. 1973 The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels. *J. Sound Vib.* **29** (1), 1–65.
- MENDEZ, S. & ELDREDGE, J. D. 2009 Acoustic modeling of perforated plates with bias flow for large-eddy simulations. *J. Comput. Phys.* **228**, 4757–4772.
- MORFEY, C. L. 1969 Acoustic properties of openings at low frequencies. *J. Sound Vib.* **9**, 357–366.
- NEDELEC, J. C. & STARLING, F. 1991 Integral equation methods in a quasi-periodic diffraction problem for the time-harmonic Maxwell's equations. *SIAM J. Math. Anal.* **6**, 1679–1701.
- RAYLEIGH, J. W. S. 1945 *The Theory of Sound*. vol. 2. Dover publications.
- ROBERTS, J. E. & THOMAS, J.-M. 1991 Mixed and hybrid methods. In *Handbook of Numerical Analysis* vol. 2, Elsevier Science Publishers.
- RSCHEVKIN, S. N. 1963 *A Course of Lectures on the Theory of Sound*. vol. 31. Pergamon.
- SAUTER, S. & SCHWAB, C. 2010 In *Boundary Element Methods Computational Mathematics*, vol. 39, Springer.
- SCARPATO, A., TRAN, N., DUCRUIX, S. & SCHULLER, T. 2012 Modeling the damping properties of perforated screens traversed by a bias flow and backed by a cavity at low Strouhal number. *J. Sound Vib.* **331** (2), 276–290.
- SUN, X., JING, X., ZHANG, H. & SHI, Y. 2002 Effect of grazing-bias flow interaction on acoustic impedance of perforated plates. *J. Sound Vib.* **254** (3), 557–573.
- TAM, C. K. W., JU, H. & WALKER, B. E. 2008 Numerical simulation of a slit resonator in a grazing flow under acoustic excitation. *J. Sound Vib.* **313**, 449–471.
- TUCK, E. O. 1975 Matching problems involving flow through small holes. *Adv. Appl. Mech.* **15**, 89–158.
- WANG, R. & SHEN, H. H. 2006 Gravity waves propagating into an ice-covered ocean: A viscoelastic model. *J. Geophys. Res.: Oceans* **115**, C06024.
- YU, J., KWAN, H. W., ECHTERNACH, D. K., KRAFT, R. E. & SYED, A. A. 1999 Acoustic treatment design scaling method. *Tech. Rep.*. NASA/CR-1999-209120/Vol3.



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Journal of Sound and Vibration

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jsvi

An adjoint-based method for liner impedance eduction: Validation and numerical investigation

Julien Primus*, Estelle Piot, Frank Simon

Onera—The French Aerospace Lab, F-31055 Toulouse, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 2 March 2012

Received in revised form

26 June 2012

Accepted 16 July 2012

Handling Editor: Y. Auregan

Available online 5 September 2012

ABSTRACT

An inverse method for liner acoustic impedance eduction in a duct is presented. The determination of adjoint equations allows to make explicit the directional derivatives of the objective function, needed by the search algorithm. Direct and adjoint system of equations are spatially discretized by a discontinuous Galerkin scheme. The propagation model and the eduction process are successfully validated on NASA benchmark data extracted from literature, in a no-flow configuration. Objective functions written in terms of acoustic pressure and acoustic velocity are considered successively. Special attention is given to the possibilities offered by the method, such as multiparameter identification, with the study of a non-homogeneous liner. Convergence history of the process is also examined, revealing interesting properties for the velocity-based objective function compared to the pressure-based objective function. In further developments, the method is planned to be used with acoustic velocity fields obtained by laser doppler velocimetry.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Reduction of the noise generated by aircraft turbofans can be achieved by lining the nacelle with passive acoustic treatments, typically made of partitioned air cavities topped by a perforated sheet. Optimization of these liners efficiency (see for instance [1]) requires an accurate knowledge of their absorbing properties in the conditions of use, namely the presence of a grazing flow. These properties are represented by the acoustic impedance, an homogenized quantity defined locally as the ratio of the acoustic pressure at the surface over the normal acoustic velocity. This parameter, which is independent of the incidence angle for the so-called “locally reacting” liners, embraces the nonlinear phenomena occurring around the perforations, and due to the complex sound environment in the duct [2].

Alongside with the large variety of semi-empirical models available [3–5], various ways exist to measure the acoustic impedance in this context. The early work of Dean in 1974 [6] led to an *in situ* “two microphones” technique, widely used when it comes to characterizing single-layer liners. At Onera, liner impedance is deduced from velocity measurements acquired by laser doppler velocimetry (LDV) in an aero-thermo-acoustic bench [7]. Nevertheless the general trend is to favor indirect techniques, where the liner impedance is the parameter minimizing the difference between a given theoretical model and the measurements. The liner sample is then let undamaged by the introduction of any probe. Since the mid-1990s NASA has made considerable work in this field [8,9], developing and enhancing an impedance eduction method using finite element modeling and pressure measurements on the rigid walls or, lately, pressure gradient evaluation at the source and termination planes [10].

* Corresponding author.

E-mail addresses: julien.primus@onera.fr (J. Primus), estelle.piot@onera.fr (E. Piot), frank.simon@onera.fr (F. Simon).

Other examples of indirect approaches include the work of Aurégan et al. [11] or Elnady et al. [12] where the acoustic field in a three-zone duct (unlined-lined-unlined) is expanded in terms of the unlined duct eigenmodes and treated by a mode matching method. The minimization process relies on pressure measurements upstream and downstream of the lined section, the objective function being expressed either directly from pressure [12] or through the coefficients of the scattering matrix [11].

The mode matching methods cited above offer the advantage of taking high-order modes into account, but are derived from the Helmholtz equation and thus assume uniform flow. Richter [13] developed a time-domain eduction method based on the linearized Euler equations (LEE) and involving a five parameters extended Helmholtz resonator model. He showed the improvements brought by a better estimation of the measured flow profile. This prompted Eversman and Gallman [14] to include an effective mean flow Mach number in their eduction process. This one also involves the exit impedance as a search parameter, and the inverse method is performed with a finite element model. Inclusion of the effective Mach number and of the termination impedance contributes to a better data fit with measurements.

The eduction procedure displayed and benchmarked in the present paper is based on the 2D linearized Euler equations in the frequency domain, in order to account for sheared flow in further developments. These equations are solved on an unstructured mesh thanks to a discontinuous Galerkin formulation, which presents advantageous properties. First, it is weakly dispersive and dissipative, as demonstrated for example by Hu and Atkins for 2D propagating waves [15]. In addition, boundary conditions are imposed through fluxes, which is particularly robust and straightforward [16]. The computational cost, which is the main drawback of discontinuous Galerkin methods, is not of the utmost importance as we are concerned with small-sized meshes. The minimization of the objective function is achieved by the resolution, at each iteration on the liner impedance, of the direct and adjoint equations. Contrary to other methods such as finite differences, the use of the adjoint state leads to an analytic expression of the derivatives of interest, at a cost which remains independent of the number of search parameters [17].

Section 2 states the discontinuous Galerkin formulation of the direct problem, and gives a complete review of the boundary conditions used. It also shows how the use of a Lagrangian function allows to write the adjoint system, and the gradient needed for the identification process is formulated analytically from both direct and adjoint states. The consideration of other search parameters, such as source amplitude or exit reflection coefficient, is then made easy. In Section 3 the propagation model is first validated with experimental data from literature in a no-flow configuration, and the eduction process is benchmarked as well. Influence of the exit impedance and sensitivity of the objective function are analyzed. An objective function written in terms of acoustic pressure is used. Since the process will in further developments be based on acoustic velocity fields obtained from LDV at Onera, a velocity objective function is studied likewise. Finally, an illustration of the first-order condition for optimality with the adjoint state is given.

2. Direct and adjoint aeroacoustic formulations

2.1. Propagation model in lined ducts

2.1.1. Variational formulation

The computational model relies on the linearized Euler equations written under a non-conservative form, for an $e^{j\omega t}$ time dependence (ω is the angular frequency). In the no-flow configurations considered in this paper, the LEE could reduce to a convected wave equation, thus decreasing the number of variables. Nevertheless, the use of the LEE opens the possibility to consider a non-uniform flow profile in further studies, thus allowing the inclusion of refraction effects due to the shear layer.

Consider a subsonic steady mean flow propagating in a 2D duct (Fig. 1), with velocity U_0 along the streamwise coordinate x_1 and V_0 along the transversal coordinate x_2 , and submitted to an acoustic perturbation $\varphi = (u, v, p)^T$, where T stands for the transpose. The vector $\mathbf{u} = (u, v)^T$ represents the acoustic velocity, and p is the acoustic pressure. Let c_0 be the speed of sound and ρ_0 the density of the mean flow. Velocities are made dimensionless by c_0 , pressure by $\rho_0 c_0^2$, lengths by the duct height H and time by H/c_0 . In this paper, the density and speed of sound of the flow are assumed uniform. Although the numerical results presented in this paper deal with a no-flow configuration, governing equations are treated in a more general way and include the influence of an incompressible flow. The local form of the incompressibility equation is written

$$\partial_1 U_0 + \partial_2 V_0 = 0 \quad (1)$$

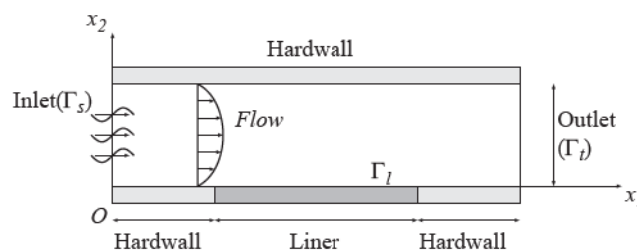


Fig. 1. Generic geometry of the studied system.

where ∂_i denotes the partial derivative with respect to the coordinate x_i .

The matrix system of governing equations then reads

$$j\omega\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{A}^i\partial_i\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (2)$$

also noted $\mathbf{L}\boldsymbol{\varphi} = 0$. The repeated index indicates a sum over the possible values of i , following Einstein summation convention. Matrices $\mathbf{A}^i$ and $\mathbf{B}$ are defined by

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} U_0 & 0 & 1 \\ 0 & U_0 & 0 \\ 1 & 0 & U_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} V_0 & 0 & 0 \\ 0 & V_0 & 1 \\ 0 & 1 & V_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

and

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_1 U_0 & \partial_2 U_0 & 0 \\ \partial_1 V_0 & -\partial_1 U_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Matrix $\mathbf{B}$ contains terms relative to the mean flow profile, and cancels out for a uniform mean flow. In these matrices the mean flow velocities U_0 and V_0 are dimensionless.

The physical domain Ω is now approximated by a computational domain Ω_h obtained by triangulation into non-overlapping elements Ω_e

$$\Omega \simeq \Omega_h = \bigcup_e \Omega_e \quad (5)$$

In order to state a discontinuous Galerkin (DG) formulation of the system, we consider a piecewise polynomial approximate solution $\boldsymbol{\varphi}_h$ of Eq. (2) on the computational domain Ω_h . First-order Lagrange elements are used. Due to the possible discontinuities across the elements boundaries, we are first interested in the restriction $\boldsymbol{\varphi}_h^e = \boldsymbol{\varphi}_h|_{\Omega_e}$ of $\boldsymbol{\varphi}_h$ to the element Ω_e (see Fig. 2). Multiplying Eq. (2) by a test function $\boldsymbol{\psi}_h^e$ and integrating over the element yields

$$\int_{\Omega_e} (j\omega\boldsymbol{\varphi}_h^e + \mathbf{A}^i\partial_i\boldsymbol{\varphi}_h^e + \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}_h^e) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^e \, d\Omega_e = 0 \quad (6)$$

Let $\mathbf{n} = n_i x_i$ be the outward unit normal on the boundary $\partial\Omega_e$. A first integration by parts leads to

$$\int_{\Omega_e} (j\omega\boldsymbol{\varphi}_h^e + \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}_h^e) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^e \, d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \mathbf{A}^i\partial_i\boldsymbol{\psi}_h^e \cdot \boldsymbol{\varphi}_h^e \, d\Omega_e + \sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Omega_{e,k}} \mathbf{A}^i n_i \boldsymbol{\varphi}_h^e \cdot \boldsymbol{\psi}_h^e \, d\Gamma = 0 \quad (7)$$

Discontinuities being allowed at interfaces, the integrand on each edge $\partial\Omega_{e,k}$ ($k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$) of the triangle is multivalued and its meaning needs to be precised. To do that, let us define the interior and exterior traces $\boldsymbol{\varphi}_h^{e-}$ and $\boldsymbol{\varphi}_h^{e+}$ of $\boldsymbol{\varphi}_h^e$ at $\mathbf{x} \in \partial\Omega_e$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_h^{e-}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \boldsymbol{\varphi}_h^e(\mathbf{x}') \\ \boldsymbol{\varphi}_h^{e+}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \boldsymbol{\varphi}_h^e(\mathbf{x}') \end{cases} \quad (8)$$

We then introduce a numerical flux $\widehat{\mathbf{F}}_e(\boldsymbol{\varphi}_h^{e-}, \boldsymbol{\varphi}_h^{e+})$ which will ensure the connection between elements and is therefore a function of the interior and exterior traces. At this point, the variational formulation (7) can be written

$$\int_{\Omega_e} (j\omega\boldsymbol{\varphi}_h^e + \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}_h^e) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^e \, d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \mathbf{A}^i\partial_i\boldsymbol{\psi}_h^e \cdot \boldsymbol{\varphi}_h^e \, d\Omega_e + \sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Omega_{e,k}} \widehat{\mathbf{F}}_e(\boldsymbol{\varphi}_h^{e-}, \boldsymbol{\varphi}_h^{e+}) \cdot \boldsymbol{\psi}_h^{e-} \, d\Gamma = 0 \quad (9)$$

The numerical flux will be built explicitly further, but we can already note that it must satisfy the consistency and conservativity properties, that is

$$\widehat{\mathbf{F}}_e(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{A}^i n_i \boldsymbol{\varphi} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{F}}_e(\boldsymbol{\varphi}_h^{e-}, \boldsymbol{\varphi}_h^{e+}) + \widehat{\mathbf{F}}_{e'}(\boldsymbol{\varphi}_h^{e'-}, \boldsymbol{\varphi}_h^{e'+}) = 0 \quad (10)$$

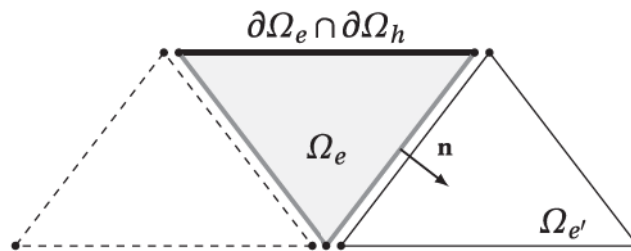


Fig. 2. An element Ω_e adjacent to the computation domain boundary.

From there we can integrate (9) by parts once again, but now that the link between elements is ensured we consider that $\varphi_h^e|_{\partial\Omega_{e,k}} = \varphi_h^{e-}$. This yields

$$\int_{\Omega_e} (j\omega\varphi_h^e + \mathbf{A}^i\partial_i\varphi_h^e + \mathbf{B}\varphi_h^e) \cdot \psi_h^e d\Omega_e + \sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Omega_{e,k}} [\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+}) - \mathbf{A}^i n_i \varphi_h^{e-}] \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma = 0 \quad (11)$$

Of course, comparison of Eqs. (6) and (11) indicates that the summation term in (11) is equal to zero for the solution, which is correlated to the consistency property of the numerical flux stated in Eq. (10).

This formulation has to be completed with an explicit expression of the numerical flux and with the specification of imposed boundary conditions. To obtain the final variational formulation, Eq. (11) is summed over all the elements Ω_e .

2.1.2. Numerical flux and boundary conditions

As it links neighboring elements together and allows the application of the boundary conditions, the choice of numerical flux is a crucial step in the construction of the DG scheme. Different cases arise for the construction of $\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+})$ and the calculation of the corresponding integral in Eq. (11), depending on whether the edge $\partial\Omega_{e,k}$ is in contact with the boundary or not, and on the kind of boundary condition possibly involved. The types of numerical flux chosen hereafter guarantee that the scheme built in this way for the unsteady problem obtained by inverse Fourier transform of Eq. (2) is stable and convergent [18]. Even though the well-posedness of the scheme developed here for the harmonic problem (2) could not be proven, it has been shown in previous works that for no-flow, uniform flow and sheared flow configurations no particular difficulty should be encountered [19].

- If $\partial\Omega_{e,k}$ is an internal edge, an upwind numerical flux is used. To establish a one-sided scheme stable for the unsteady problem, several upstream-differencing techniques are available. One can refer to the review of Harten et al. [20] where the authors pay special attention to the Godunov-type schemes, but also to the flux-vector splitting method (FVS) introduced by Steger and Warming [21] for the conservation-law form of the gas dynamics equations, and later applied for example by Gabard [22]. In the case of Eq. (2), where the Euler equations are linearized and in non-conservative form, these techniques are equivalent [23]. The key idea of flux-splitting is to use the hyperbolicity of the system, which allows to decompose the solution on the boundary $\partial\Omega_{e,k}$ into incoming and outgoing waves, the so-called characteristics. Mathematically, this is linked to the fact that the matrix $\mathbf{A}^i n_i$ is real symmetric and can be split into matrices $\mathbf{A}^i n_i^+$ and $\mathbf{A}^i n_i^-$, respectively, associated to the positive and negative eigenvalues such as

$$\mathbf{A}^i n_i = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^- \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}^i n_i^+ + \mathbf{A}^i n_i^- \quad (12)$$

where $\mathbf{P}$ is the matrix of the eigenvectors of $\mathbf{A}^i n_i$, and $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-$ the diagonal matrix formed by the eigenvalues of $\mathbf{A}^i n_i$, which are the phase speed of the characteristics. Matrices $\mathbf{\Lambda}^+$ and $\mathbf{\Lambda}^-$ are diagonal and contain the positive and negative eigenvalues, respectively. These eigenvalues being $U^i n_i$, $(U^i n_i + 1)$ and $(U^i n_i - 1)$, the expression of $\mathbf{A}^i n_i^+$ and $\mathbf{A}^i n_i^-$ will be function of the sign of the local normal flow velocity $U_n = U^i n_i$. Calculations give the following general formula for $\mathbf{A}^i n_i^-$:

$$\mathbf{A}^i n_i^- = \inf(0, U_n) \begin{pmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 & 0 \\ -n_1 n_2 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{U_n - 1}{2} \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & -n_1 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & -n_2 \\ -n_1 & -n_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

From there, an upwind numerical flux is achieved by associating the interior trace to outgoing waves (i.e. positive eigenvalues), and the exterior trace to ingoing waves (negative eigenvalues), as indicated by Fig. 3. Formally,

$$\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+}) = \mathbf{A}^i n_i^+ \varphi_h^{e-} + \mathbf{A}^i n_i^- \varphi_h^{e+} \quad (14)$$

Such a scheme ensures low dispersion errors [19]. The corresponding integral in Eq. (11) for an internal edge $\partial\Omega_{e,k}$ then reads, given the splitting (12):

$$\int_{\partial\Omega_{e,k} \cap \Gamma_i} [\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+}) - \mathbf{A}^i n_i \varphi_h^{e-}] \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma = \int_{\partial\Omega_{e,k} \cap \Gamma_i} \mathbf{A}^i n_i^- (\varphi_h^{e+} - \varphi_h^{e-}) \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma \quad (15)$$

where Γ_i is the set of internal edges of the element Ω_e . This expression combined with the conservativity property (10) can be seen as a Rankine–Hugoniot condition across a fixed discontinuity.

- If $\partial\Omega_{e,k}$ is a boundary edge, three different boundary conditions are to be taken into account. In the generic flow duct configuration considered (Fig. 1), a source condition (typically a plane wave) is applied at the inlet on the ID boundary Γ_s . The presence of the liner and of rigid walls (equivalent to a liner with infinite impedance) is modeled by the

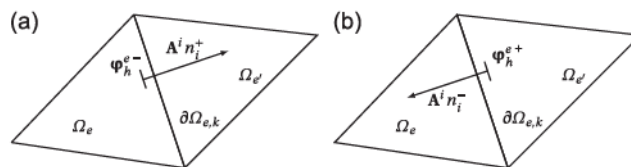


Fig. 3. Upwind numerical flux: (a) outgoing and (b) ingoing characteristics of the element Ω_e .

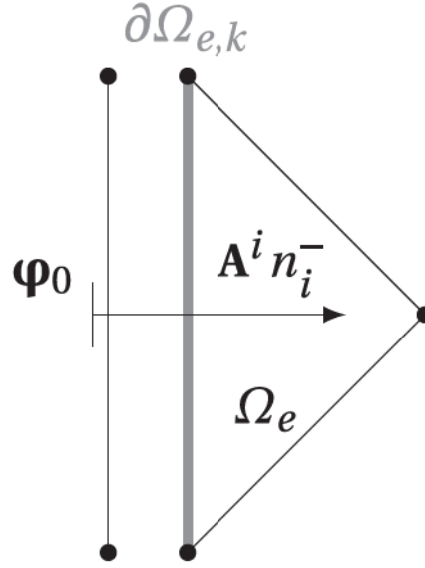


Fig. 4. Source boundary condition.

implementation of an impedance boundary condition. The outlet Γ_t can either be submitted to a non-reflective boundary condition or an exit impedance boundary condition.

○ *Source boundary condition*

A source boundary condition expressed physically as $\varphi = \varphi_0$ is imposed through the introduction of 1D fictitious cells, for which the state vector is φ_0 and constitutes the exterior trace for the element Ω_e (see Fig. 4). The edge between the fictitious cell and the current element is then considered as an internal edge, which yields

$$\int_{\partial\Omega_{e,k} \cap \Gamma_s} [\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+}) - \mathbf{A}^i n_i \varphi_h^{e-}] \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma = \int_{\partial\Omega_{e,k} \cap \Gamma_s} \mathbf{A}^i n_i^- (\varphi_0 - \varphi_h^{e-}) \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma \quad (16)$$

○ *Non-reflecting boundary condition*

To avoid reflections at open boundaries of the computational domain, characteristic boundary conditions derived from the upwind flux splitting (12) are used [24]. The incoming waves related to matrix $\mathbf{A}^i n_i^-$ are suppressed, leading to

$$\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+}) = \mathbf{A}^i n_i^+ \varphi_h^{e-} \quad (17)$$

and the boundary integral term for transparent conditions is

$$\int_{\partial\Omega_{e,k} \cap \Gamma_t} [\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+}) - \mathbf{A}^i n_i \varphi_h^{e-}] \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma = \int_{\partial\Omega_{e,k} \cap \Gamma_t} -\mathbf{A}^i n_i^- \varphi_h^{e-} \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma \quad (18)$$

○ *Impedance boundary condition*

Similar works [9,11,12] often assume a uniform flow profile, the inverse method being built on the Helmholtz equation. Therefore such approaches require a lined wall boundary condition established from the continuity of transverse acoustical displacement at the surface, the so-called Ingard–Myers boundary condition [25]. More recent works investigate the effect of shear flow, still with this boundary condition. Moreover Renou and Aurégan [26] lately highlighted limits of this formulation and proposed a modified Ingard–Myers boundary condition which holds whether the acoustic propagation in the flow duct is downstream or upstream. As regards our process, the choice of a standard impedance condition has been made since final applications will aim at acquiring the sheared flow properties with laser Doppler velocimetry measurements. The implementation of the impedance boundary condition thus relies on the classical normalized specific impedance z , that is

$$z = \frac{p}{v^i n_i} = \frac{p}{v_n} \quad (19)$$

with $v_n = v^i n_i$ the normal acoustic velocity.

Here again a fictitious 1D cell is used to represent the exterior trace for Ω_e . The chosen numerical scheme is centered and involves the average of φ on the boundary, defined as $\llbracket \varphi \rrbracket = (\varphi_h^{e-} + \varphi_h^{e+})/2$. The numerical flux is then $\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+}) = \mathbf{A}^i n_i \llbracket \varphi \rrbracket$ and

$$\int_{\partial\Omega_{e,k} \cap \Gamma_l} [\widehat{\mathbf{F}}_e(\varphi_h^{e-}, \varphi_h^{e+}) - \mathbf{A}^i n_i \varphi_h^{e-}] \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma = \int_{\partial\Omega_{e,k} \cap \Gamma_l} \mathbf{A}^i n_i \frac{\varphi_h^{e+} - \varphi_h^{e-}}{2} \cdot \psi_h^{e-} d\Gamma \quad (20)$$

The exterior trace is imposed in such a way that the impedance boundary condition (19) is accounted for with respect to the interior trace

$$\begin{cases} v_n^+ = \frac{1}{z} p^- \\ p^+ = z v_n^- \end{cases} \quad (21)$$

where the + and – superscripts still stand for the exterior and interior trace of the quantity. Quick calculations give

$$\int_{\partial\Omega_{ek}\cap\Gamma_I} [\widehat{\mathbf{F}}_e(\boldsymbol{\varphi}_h^{e-}, \boldsymbol{\varphi}_h^{e+}) - \mathbf{A}^i n_i \boldsymbol{\varphi}_h^{e-}] \cdot \boldsymbol{\psi}_h^{e-} d\Gamma = \int_{\partial\Omega_{ek}\cap\Gamma_I} \mathbf{M}_z \boldsymbol{\varphi}_h^{e-} \cdot \boldsymbol{\psi}_h^{e-} d\Gamma \quad (22)$$

The matrix $\mathbf{M}_z$ is defined as

$$\mathbf{M}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} zn_1^2 & zn_1 n_2 & -n_1 \\ zn_1 n_2 & zn_2^2 & -n_2 \\ -n_1 & -n_2 & 1/z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{z}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} & -\mathbf{n} \\ -\mathbf{n}^\top & 1/z \end{pmatrix} \quad (23)$$

Previous studies [19] attested that a formulation bringing into play the reflection coefficient $\beta = (z-1)/(z+1)$ is equivalent but numerically preferable, resulting in

$$\int_{\partial\Omega_{ek}\cap\Gamma_I} [\widehat{\mathbf{F}}_e(\boldsymbol{\varphi}_h^{e-}, \boldsymbol{\varphi}_h^{e+}) - \mathbf{A}^i n_i \boldsymbol{\varphi}_h^{e-}] \cdot \boldsymbol{\psi}_h^{e-} d\Gamma = \int_{\partial\Omega_{ek}\cap\Gamma_I} \mathbf{M}_\beta \boldsymbol{\varphi}_h^{e-} \cdot \boldsymbol{\psi}_h^{e-} d\Gamma \quad (24)$$

with

$$\mathbf{M}_\beta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\beta+1)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} & -(1-\beta)\mathbf{n} \\ -(1+\beta)\mathbf{n}^\top & (1-\beta) \end{pmatrix} \quad (25)$$

Writing $\mathbf{M}_\beta$ in this way allows to write the strong form of the boundary condition $\mathbf{M}_\beta \boldsymbol{\varphi} = 0$ either for a liner or for a rigid wall (by taking $\beta = 1$) without singularity issues.

The boundary conditions can also be written under a strong form. The complete system then reads

$$\begin{cases} \mathbf{L}\boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{on } \Omega \\ \mathbf{M}_\beta \boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{on } \Gamma_I \\ \mathbf{A}^i n_i^- \boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{A}^i n_i^- \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}^i n_i^- \boldsymbol{\varphi}_0 & \text{on } \Gamma_s \end{cases} \quad (26)$$

2.2. Adjoint problem and objective function derivation

The impedance eduction process consists in solving an inverse problem of parameters identification, by minimizing an objective function $\mathcal{J}$ representative of the distance between the DG numerical simulation and the measurement data. This objective function can be written under a general form

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varphi}_{\text{calc}} - \boldsymbol{\varphi}_{\text{meas}}\|^2 I_{\Omega_{\text{obs}}}(\mathbf{x}) \quad (27)$$

where $I_{\Omega_{\text{obs}}}(\mathbf{x})$ is the indicator function of Ω_{obs} , equal to unity if $\mathbf{x} \in \Omega_{\text{obs}}$ and to zero otherwise. Depending on the case dealt with, only some components of $\boldsymbol{\varphi}$ will be included. The observation region Ω_{obs} can be discrete (for example a given set of microphone positions) or continuous.

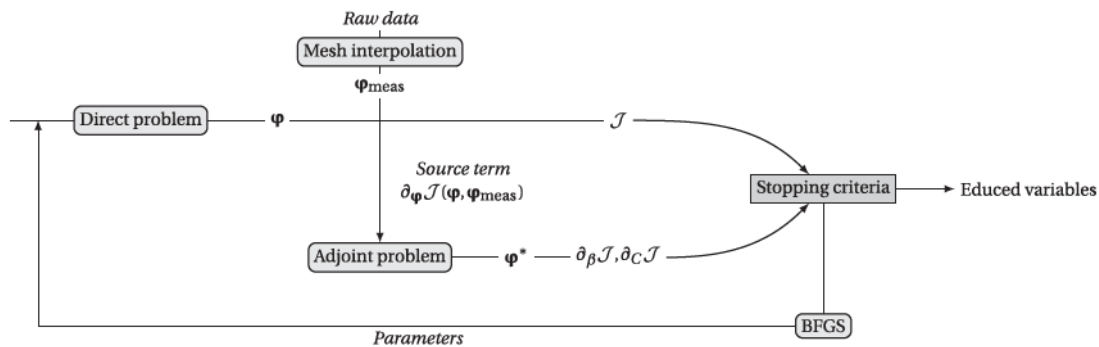


Fig. 5. Summary scheme of the eduction loop.

During the iterative search process (Fig. 5) the value, gradient and approximated Hessian matrix of the objective function at the current step are used to determine a new set of parameters which should lead to a smaller objective function, that is a better fit of the numerical results to the experimental data.

Even though we are primarily interested in the liner impedance, other parameters can be included in the search process to improve the reliability of the process. First, even when the duct is equipped with a quasi-anechoic termination, reflecting exit impedances can be measured [27]. This suggests to allow the introduction of an exit impedance as a search parameter instead of the non-reflecting boundary condition presented in Section 2.1.2. Furthermore, the source term having an arbitrary unit amplitude in the DG code, a complex calibration coefficient is also considered.

The gradient of the objective function can be calculated by various means amongst which the finite difference method seems the most natural approach. However, it results in an approximate assessment of the gradient, and the cost of the evaluation increases with the number of search parameters. We opt for an adjoint-based calculation of the gradient because it leads to an analytical expression of the directional derivatives, and allows to test non-homogeneous liners represented by several impedances without additional computational cost. Indeed, whatever the number of search parameters, the computation of directional derivatives only requires the computation of the direct and adjoint solutions. This property makes the use of adjoint equations popular in the field of shape optimization [28]. The use of the adjoint equations is also widely found in the study of diverse problems such as sensitivity [28,29], boundary layer receptivity [29,30], or jet noise control [31,32].

Two options turn up to obtain a discretized adjoint formulation: one can choose the “differentiate-then-discretize” possibility or the “discretize-then-differentiate” one [33]. In the first one, the adjoint equations and the objective function derivatives with respect to the parameters are obtained from the direct continuous problem, and the adjoint equations are discretized subsequently with the DG scheme. In the second one on the contrary, the first step is to discretize the continuous direct equations and to differentiate afterwards to get the discretized adjoint system and the objective function derivatives. Since the “differentiate” and “discretize” operations do not commute in most cases, these approaches are usually not equivalent. However, it has been proven [34] that with the DG formulation presented previously, they do commute and the two techniques can be used equally. The choice has thus been made to use the “differentiate-then-discretize” approach.

To find the adjoint system of equations and the directional derivatives of $\mathcal{J}$, the method of Lagrange multipliers is used. A Lagrangian function is thus built from the original objective function, considering the direct equations and the associated boundary conditions as constraints. The objective function $\mathcal{J}$ is usually expressed as a function of the state vector φ , and is indirectly dependent of the search parameters, namely the impedance (denoted z in the general case) and the calibration coefficient C ($C \in \mathbb{C}$) mentioned above. This dependence is noted $\mathcal{J}(\varphi, z, C)$. The Lagrangian will be a function of the same variables, but also of the Lagrange multiplier φ^* which will further be defined as the solution of the adjoint equations.

Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be the complex inner product. The Lagrangian function is expressed in the following way (the e superscript and h subscript are dropped for clarity of notation):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, z, C, \varphi^*) = & \mathcal{J}(\varphi, z, C) - [\langle \mathbf{L}\varphi, \varphi^* \rangle_{\Omega} + \langle \mathbf{A}^i n_i^-(\varphi^+ - \varphi^-), \varphi^* \rangle_{\Gamma_i} \\ & + \langle \mathbf{A}^i n_i^-(C\varphi_0 - \varphi^-), \varphi^* \rangle_{\Gamma_s} + \langle \mathbf{M}_\beta \varphi^-, \varphi^* \rangle_{\Gamma_t} + \langle -\mathbf{A}^i n_i^- \varphi^-, \varphi^* \rangle_{\Gamma_t}] \end{aligned} \quad (28)$$

Note that the complex conjugate should be added to ensure that the Lagrangian is real-valued, but has been omitted for the sake of clarity. The Lagrangian is constructed in such a way that it is equal to the objective function when the direct equations are fulfilled. A small variation of $\mathcal{L}(\varphi, z, C, \varphi^*)$ can be written

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\varphi, z, C, \varphi^*) = & \delta \mathcal{J}(\varphi, z, C) - [\langle \delta(\mathbf{L}\varphi), \varphi^* \rangle_{\Omega} + \langle \delta(\mathbf{A}^i n_i^-(\varphi^+ - \varphi^-)), \varphi^* \rangle_{\Gamma_i} \\ & + \langle \delta(\mathbf{A}^i n_i^-(C\varphi_0 - \varphi^-)), \varphi^* \rangle_{\Gamma_s} + \langle \delta(\mathbf{M}_\beta \varphi^-), \varphi^* \rangle_{\Gamma_t} + \langle \delta(-\mathbf{A}^i n_i^- \varphi^-), \varphi^* \rangle_{\Gamma_t}] \end{aligned} \quad (29)$$

The term related to the variation $\delta \varphi^*$ of the Lagrange multiplier has been omitted, as it cancels out when the direct system of equations is satisfied. From there, solving the initial inverse problem on $\mathcal{J}$ comes down to searching a critical point for $\mathcal{L}$. The key idea is to factorize Eq. (29) by means of integrations by parts, so as to write this variation under the form

$$\delta \mathcal{L}(\varphi, z, C, \varphi^*) = \langle \partial_\varphi \mathcal{L}, \delta \varphi \rangle + \langle \partial_{\varphi^*} \mathcal{L}, \delta \varphi^* \rangle + \langle \partial_z \mathcal{L}, \delta z \rangle + \langle \partial_C \mathcal{L}, \delta C \rangle \quad (30)$$

and to cancel each directional derivative, assuming that the variables vary independently.

It has already been mentioned that the derivative with respect to the Lagrange multiplier is zero when the direct LEE and the associated boundary conditions are respected. The cancelation of the φ -derivative $\partial_\varphi \mathcal{L}$ helps to state the system of adjoint equations, which in turn allows to express $\partial_z \mathcal{L}$ and $\partial_C \mathcal{L}$.

2.2.1. Derivation of the adjoint system

By integrating Eq. (28) by parts, it is found that the derivative with respect to the state vector is zero when the Lagrange multiplier φ^* satisfies the system

$$\begin{cases} \mathbf{L}^* \varphi^* = \partial_\varphi \mathcal{J} & \text{on } \Omega \\ \mathbf{M}_\beta^* \varphi^* = 0 & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{A}^i n_i^+ \varphi^* = 0 & \text{on } \Gamma_t \cup \Gamma_s \end{cases} \quad (31)$$

where the operator $\mathbf{L}^* \cdot = -j\omega \cdot -\partial_i(\mathbf{A}^{i\dagger} \cdot) + \mathbf{B}^\dagger \cdot$ is the adjoint operator of the linearized Euler equations ($\dagger$ denotes the Hermitian conjugate). The Lagrange multiplier $\boldsymbol{\varphi}^*$ is called the *adjoint vector* or *adjoint state*. Matrix $\mathbf{M}_\beta^* = \mathbf{A}^i n_i + \mathbf{M}_\beta^\dagger$ is the adjoint impedance matrix, translating the adjoint impedance condition $p^* = -\bar{z} v^{*i} n_i$ with $\bar{z}$ the complex conjugate of z . It is worth noting that the minus sign in the multiplicative term $-j\omega$ accounts to an integration run backward in time in the temporal domain. As the source term $\partial_\varphi \mathcal{J}$ involves $\boldsymbol{\varphi}$, the direct system has to be solved before considering the adjoint system. The support of $\mathcal{J}$ being Ω_{obs} , this region will constitute the source localization for the adjoint problem.

2.2.2. Sensitivity to the search parameters

The stationarity of $\mathcal{L}$ with respect to the search parameters leads to the following expressions for the derivatives of the objective function:

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\boldsymbol{\varphi}, z, C)}{\partial z_l} = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{M}_\beta}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial z_l} \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^* \right\rangle_{\Gamma_l} \quad (32)$$

and

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\boldsymbol{\varphi}, z, C)}{\partial C} = \langle \mathbf{A}^i n_i^- \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}^* \rangle_{\Gamma_s} \quad (33)$$

Vector $\boldsymbol{\varphi}_0$ is the source vector for the direct problem defined in Section 2.1.2.

As Eq. (32) remains general, this formula can be applied to any impedance and is not restricted to the liner impedance z_l . This namely allows to educe the exit impedance z_t (leading to a scalar product over Γ_t instead of Γ_l), as well as to split the liner into several parts with different impedances to check the homogeneity property of the material.

2.2.3. Eduction loop

Finally, each iteration of the search process is made of the following steps:

1. The direct problem is solved with input z and C initial values.
2. The raw data from measurements are treated to get $\boldsymbol{\varphi}_{\text{meas}}$ on the computational domain. $\mathcal{J}$ is computed thanks to Eq. (27).
3. Combined to the state vector $\boldsymbol{\varphi}$ obtained at the first step, $\boldsymbol{\varphi}_{\text{meas}}$ enables the construction of the adjoint source term $\partial_\varphi \mathcal{J}$ by differentiating Eq. (27).
4. The adjoint problem is solved, for a computational cost equivalent to the direct problem.
5. Formula (32) and (33) are applied to calculate the gradient of the objective function.
6. The value of $\mathcal{J}$ and its gradient are submitted to the termination criteria. The first one stops the run if a change of the objective function between two loops k and $k+1$ is sufficiently small, that is [35]

$$\frac{\mathcal{J}_k - \mathcal{J}_{k+1}}{\max(|\mathcal{J}_{k+1}|, |\mathcal{J}_k|, 1)} \leq T_{\mathcal{J}} * \epsilon \quad (34)$$

where $T_{\mathcal{J}}$ is a parameter controlled by the user and ϵ is the machine precision, generated by the routine. The second stopping criterion terminates the run when the gradient projection has a sufficiently small infinity norm

$$\|\text{proj}(\nabla \mathcal{J})\|_\infty \leq T_\nabla \quad (35)$$

with T_∇ a parameter controlled by the user. The choice of $T_{\mathcal{J}}$ and T_∇ allows to adjust the precision of the final result. If one of the criteria (34) or (35) is satisfied, the current set of parameters is retained as the educed one. Otherwise $\mathcal{J}$ and the gradient are used as input of a BFGS-B algorithm (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno for bounded variables [36]) to get a new set of parameters z and C and loop to step 1.

3. Benchmark of the impedance eduction process

3.1. Validation of the direct propagation model

Before validating the eduction process, the reliability of the direct model needs to be confirmed. Although not presented here, results on academic test cases such as rigid walls or impedance tube configurations perfectly match the corresponding analytic solution. Besides, a previous paper [37] already compared favorably to results published by Özyörük et al. [38].

Here is presented the comparison of results obtained with our propagation code to benchmark data given by Jones et al. [27], in the no-flow configuration which will also be used in Section 3.2 to assess the robustness of the impedance eduction process. A scheme of the test section of the NASA grazing incidence tube (GIT) is given in Fig. 6. In the following sections, results will be presented dimensionalized.

Sound pressure levels (SPLs) and phases at the upper rigid wall are measured in [27] by 31 microphone probes. The liner and exit impedance used as input of our DG code are the one educed in the reference paper. The triangular mesh consists of Lagrange $\mathbb{P}_1$ elements. The frequencies considered are taken in the 0.5 to 3 kHz frequency range, with a

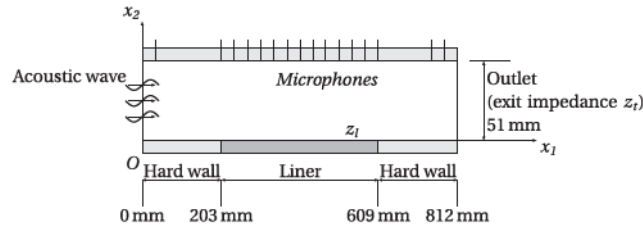


Fig. 6. 2D scheme of the test section of the NASA grazing incidence tube.

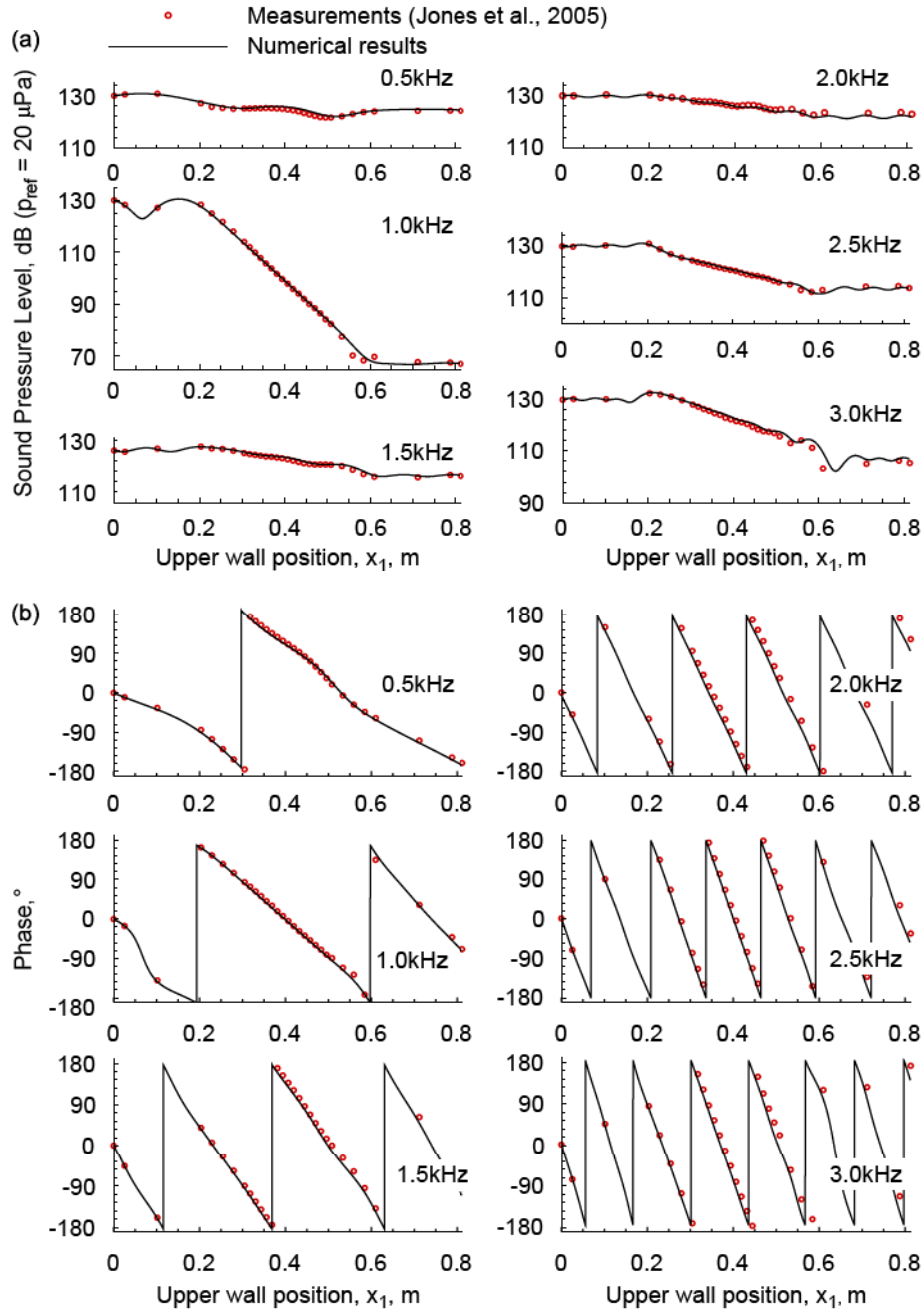


Fig. 7. (a) SPL and (b) phase on the upper wall of the NASA GIT. Measured values from Ref. [27] and simulation with the DG code.

500 Hz step. Mesh resolution has been chosen to reach 20 elements per wavelength at 3 kHz, which has been found sufficient to avoid numerical dissipation. Since arbitrary amplitude and phase are taken at the source plane in the DG code, simulated values are calibrated to match the measured ones at $x_1 = 0$ mm. As can be seen in Fig. 7, measured SPLs and phases are well captured by the DG propagation model.

3.2. Validation of the adjoint-based eduction method

3.2.1. Impedance eduction from wall pressure measurement

Benchmarking of the eduction process has been done on the data described above, taken from Ref. [27], where the liner impedance has been educed from a finite element model of the convected Helmholtz equation, the exit impedance being measured by a two-microphone method. To make a pertinent comparison, the same kind of objective function has been taken as the one used in [27], expressed as the squared error between the measured acoustic pressure p_{meas}^m and the simulated acoustic pressure p_{calc}^m , summed over the $N=31$ microphones

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\varphi}, z, C) = \sum_{m=1}^N \|p_{\text{calc}}^m - p_{\text{meas}}^m\|^2 \quad (36)$$

The eduction process has been performed in two distinct configurations.

- The “NRp case” (for “non-reflective case” from pressure measurements) excludes the exit impedance of the search process. The non-reflective boundary condition (18) is applied at the termination plane, which boils down to a termination impedance $z_t = 1.0 + 0.0j$.
- The “Elp case” (for “exit impedance case” from pressure measurements) includes the exit impedance at the termination plane as a search parameter. The educed exit impedance is expected to be close to $z_t = 1.0 + 0.0j$, and this value is consequently taken as initial value for the search process. Results for the educed exit impedance are shown in Fig. 8, and agree very well with NASA measurements.

Searched impedances have been bounded such as

$$\begin{cases} 0.0 \leq r \leq 5.0 & \text{and } -5.0 \leq \chi \leq 5.0 & \text{for the liner} \\ 0.5 \leq r \leq 1.5 & \text{and } -0.5 \leq \chi \leq 0.5 & \text{for the exit impedance (“Elp case”)} \end{cases} \quad (37)$$

The calibration coefficient C is not bounded. The initial values are $z_{\text{init}} = 1.0 + 1.0j$ for the liner impedances and $C_{\text{init}} = 10.0 + 0.0j$ for the calibration coefficient.

Educed liner impedances are presented in Fig. 9 and provided in Appendix A (Tables A1 and A2). Taking the exit impedance into account (“Elp” case) gives a better agreement with the impedances from NASA, as already noticed by Eversman and Gallman [14]. There is hardly any difference between the impedances educed with our DG code and the reference impedances by Jones et al., except maybe at 2 kHz where a disagreement appears. A look at the reconstructed pressure at the upper wall (Fig. 10) reveals that there is only little difference between fields calculated by the DG code with the liner impedance value educed in the “Elp” or “NRp” case, and with the impedance educed by NASA. Jones et al. [27] have already noticed this kind of behavior near the anti-resonance frequency, namely between their classic 2D-FEM code and a quasi-3D FEM approach. A detailed investigation [39] revealed that these anomalies are not due to the grid refinement or to the choice of optimization algorithm, and that they are present whether the Helmholtz equation or linearized Euler equations are used. Recent work at the NASA Langley Research Center intends to increase confidence in the educed acoustic resistance, by making the anti-resonance frequency vary thanks to different cavity depths [40]. However, at the anti-resonance frequency the liner has very poor attenuation properties and tends to behave as a rigid wall. Consequently the differences in the educed impedances are of little importance, the most interesting behavior occurring around the resonance frequency.

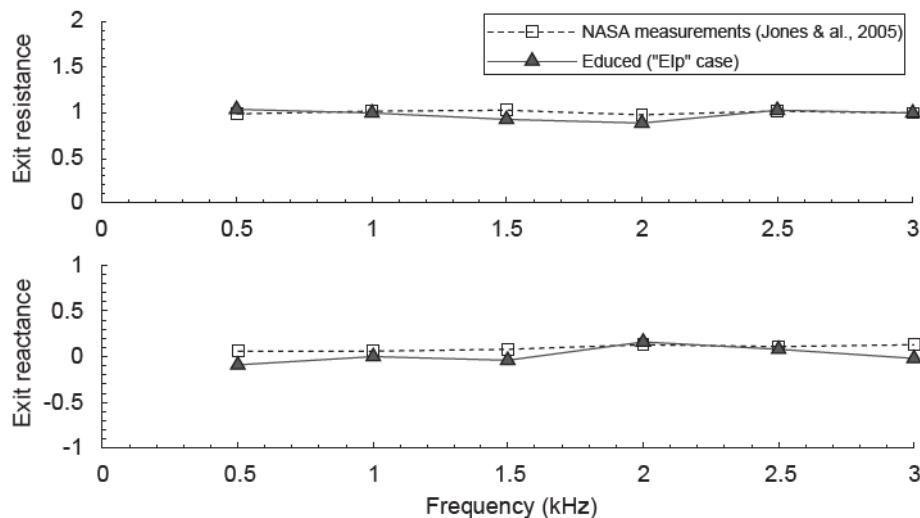


Fig. 8. Exit impedance educed from upper wall pressure measurements on the NASA GIT for the “Elp case”.

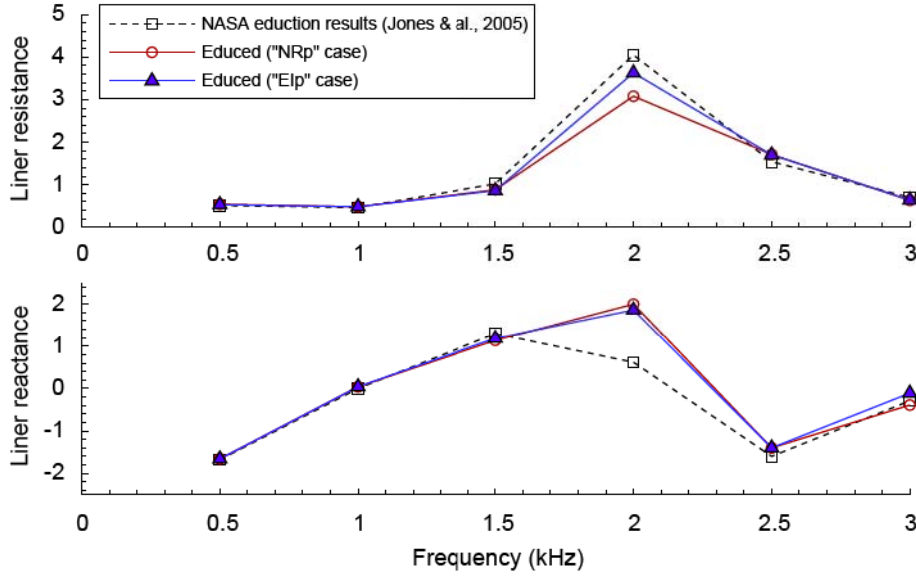


Fig. 9. Liner impedance educed from upper wall pressure measurements on the NASA GIT.

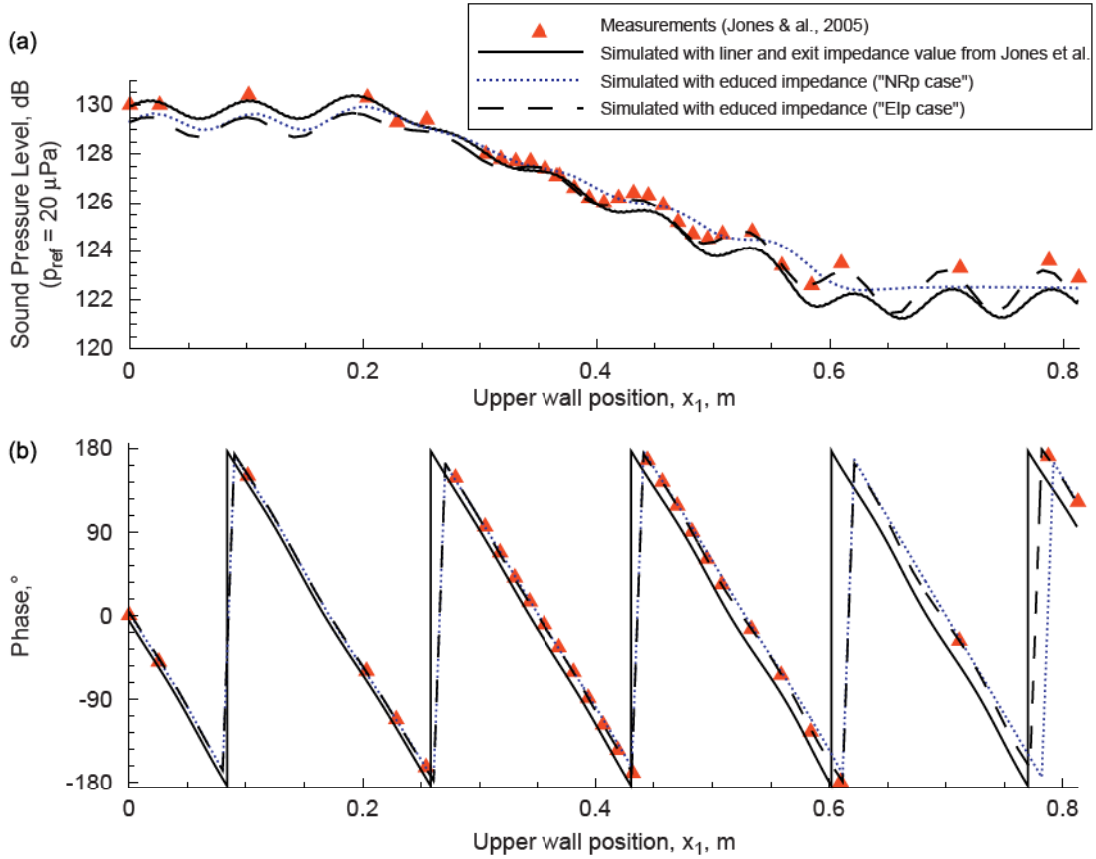


Fig. 10. (a) SPL and (b) phase on the upper wall of the NASA GIT at 2 kHz. Measured values from Ref. [27] (triangular symbols), DG simulation with liner and exit impedance from the reference paper [27] (solid lines), and DG simulation with the impedance educed from the “NRp” case (dotted lines) and from the “Elp” case (dashed lines).

Sensitivity of the results to the liner impedance can be investigated by plotting the map of the objective function $\mathcal{J}$ in the impedance plane (r, χ) , normalized by the target value. This quantity will be called “reduced objective function” and denoted by $\mathcal{J}_{\text{red}}$, such as

$$\mathcal{J}_{\text{red}} = \frac{\sum_{m=1}^N \|p_{\text{calc}}^m - p_{\text{meas}}^m\|^2}{\sum_{m=1}^N \|p_{\text{meas}}^m\|^2} \quad (38)$$

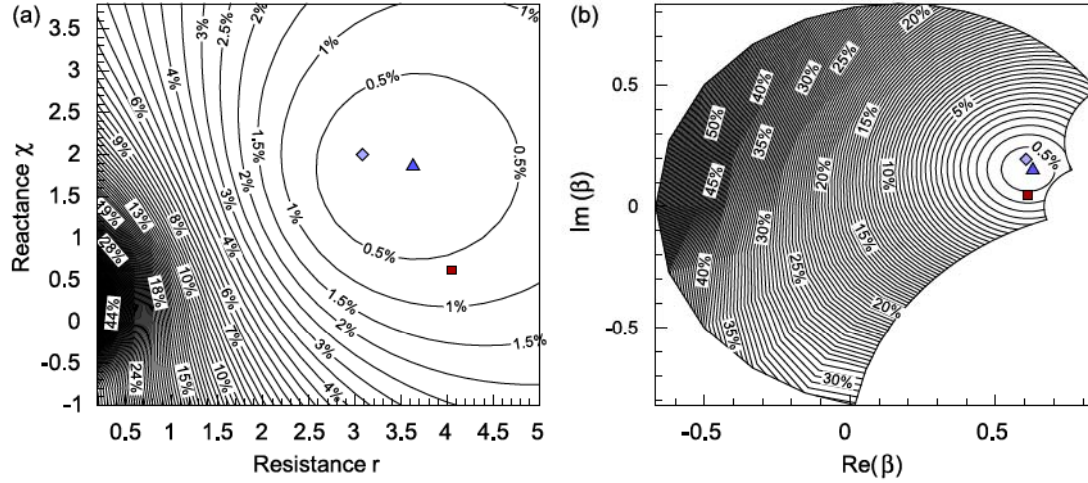


Fig. 11. Objective function based on the acoustic pressure, represented at 2 kHz (a) in the impedance plane (r, χ) and (b) in the reflection coefficient plane ($\text{Re}(\beta), \text{Im}(\beta)$). The exit impedance and calibration coefficient are fixed to their educed values. Symbols locate the educed impedances for the “NRp” case (♦), “Elp” case (▲) and NASA value (■).

The regular mesh chosen here uses steps of $\Delta r = \Delta \chi = 0.2$. The shape of the reduced objective function at 2 kHz (see Fig. 11(a)) shows a relatively shallow region around the minimum, which confirms that a large set of educed impedance values can lead to slightly identical acoustic pressure at the opposite rigid wall. Recall that this plot has been built with our DG code, which places our educed values at the minimum of $\mathcal{J}_{\text{red}}$. Of course, the same figure plot with the NASA FEM code shows the value educed by NASA at the minimum [41]. Our point here is to show the small sensitivity of the objective function to the impedance in this region. For example, for a fixed reactance $\chi = 1.8$, changing the resistance value from $r = 2.6$ to $r = 4.8$ hardly affects the error of $\mathcal{J}$ to the target value, as it remains within the 0.5 percent circle.

This plot has been realized by fixing the exit impedance and the calibration coefficient to their final educed values, which means that only the liner impedance z_l is considered as a parameter. Therefore, the fact that only one, global minimum appears in the objective function must be considered cautiously, as local minima may arise in the complete multiparameter search procedure with z_b , C and z_l .

The same reduced objective function may be displayed in the ($\text{Re}(\beta), \text{Im}(\beta)$) plane (Fig. 11(b)). The same contours levels have been used (0.5 percent between each isocontour ligne), and pictured for the same admissible domain of impedance. It brings to light sharper gradient, which is of particular interest for a fast convergence of the inverse problem. Even though the boundary condition is implemented through a β -formulation (Eq. (24)), the current version of the code is established by considering directly the impedance as a search parameter to ensure positivity of the resistance. However, Fig. 11(b) reveals that it could be particularly advantageous in further developments to treat the reflection coefficient as parameter.

3.2.2. Numerical investigation on eduction from acoustic velocity

The parameter identification method currently being developed is planned to be used with measurement obtained by laser Doppler velocimetry (LDV), and behavior of the eduction process with objective function written in terms of acoustic velocity is worth being explored. The use of adjoint equations makes easy a change of objective function, as it only impacts the second member of the adjoint state equation (31).

As acoustic velocity data on the NASA GIT are not available, a numerical experiment was made. Simulations are performed with the DG code, with input liner and exit impedance values taken from [27]. The synthetic velocity obtained is modified by addition of artificial noise. When dealing with LDV measurements without flow, the main noise contribution lies in the electronic shot noise. To simulate this kind of noise, a normal distribution has been chosen for the streamwise and transversal acoustic velocity, in terms of amplitude and phase. These laws are characterized by their mean values (chosen as the amplitude and phase of the synthetic velocity) and the standard deviation σ_u , σ_v on the amplitudes and ϕ_u , ϕ_v on the phase. These quantities are chosen such as

$$\begin{cases} \sigma_u = \sigma_v = 5 \text{ percent } u_{\max} \\ \phi_u = \phi_v = 5^\circ \end{cases} \quad (39)$$

with $u_{\max}$ the maximum amplitude value. At this source level and without flow, the orders of magnitudes taken for the standard deviation on the amplitude and phase are representative of the actual noise in the LDV test-bench of Onera.

The resulting synthesized velocity with added noise is then considered as the “measured” one, $\mathbf{u}_{\text{meas}}$, and is used to calculate the velocity objective function

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\varphi}, z, C) = \int_{\Omega} \|\mathbf{u}_{\text{meas}} - \mathbf{u}_{\text{calc}}\|^2 I_{\Omega_{\text{obs}}}(\mathbf{x}) \quad (40)$$

This case will be denoted “Elvn” case (for “exit impedance case” from simulated velocity with added noise). Note that contrary to Eq. (36), the squared error is assessed from a vector and integrated on the observation region Ω_{obs} . This one is a 2D area of dimensions 406 mm $\times$ 25 mm just above the liner, as pictured in Fig. 12. It has been chosen to fit the typical zone in which the acoustic velocity is acquired by LDV at Onera.

Figs. 13 and 14 show the educed liner and exit impedances, which compare very well with the input impedances in spite of the added noise. Educed impedances are given in Appendix A (Table A3). They are very close from the impedances

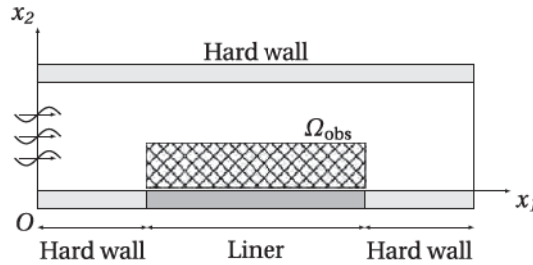


Fig. 12. Observation region for the “Elvn” case.

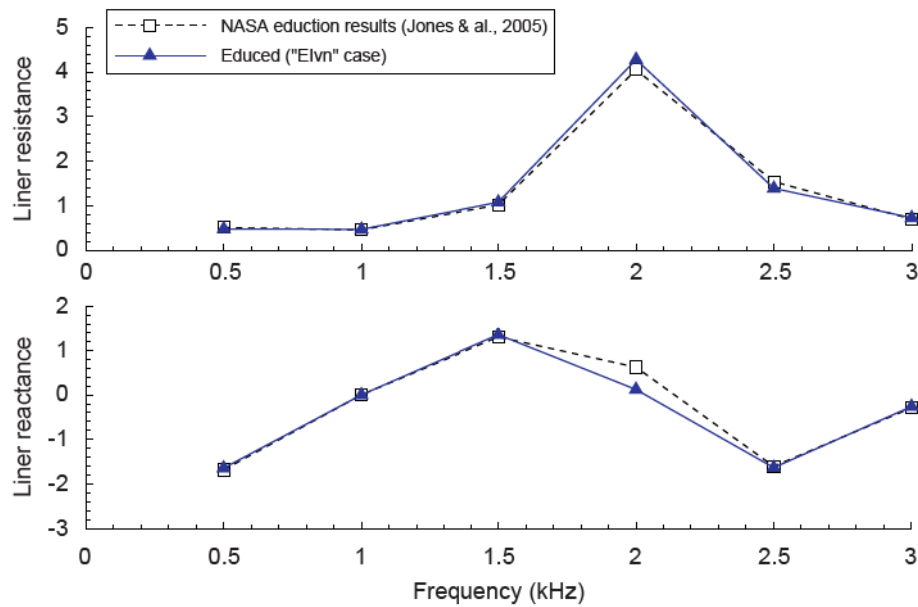


Fig. 13. Liner impedance educed from simulated velocity (“Elvn” case) on the NASA GIT.

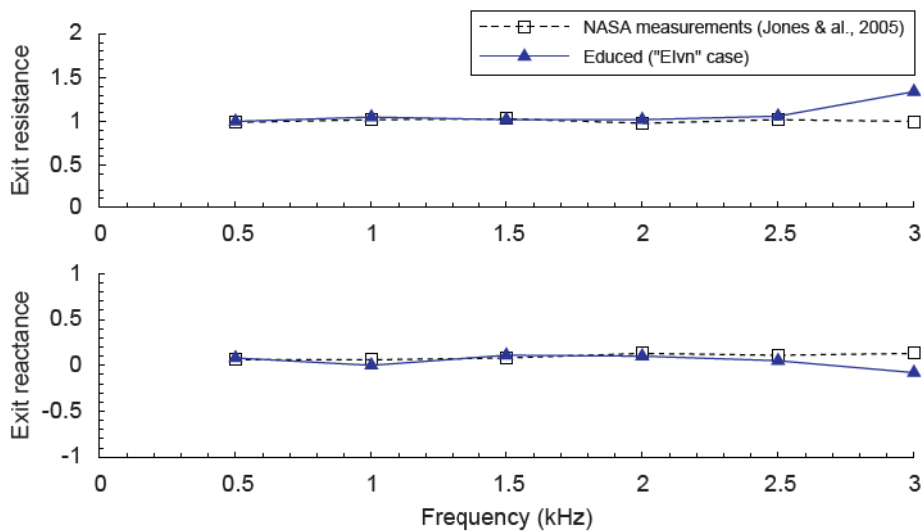


Fig. 14. Exit impedance educed from simulated velocity (“Elvn” case) on the NASA GIT.

of [27], as these latest have been used as input of the code. Only a slight difference is observed on the liner reactance at the anti-resonance frequency (2 kHz), and on the exit resistance and reactance at 3 kHz. This numerical investigation is interesting as it shows that impedance eduction based on 2D acoustic velocity fields above the liner is not only possible, but also show little sensitivity to noise as well as attractive convergence properties as highlighted in the next paragraph.

3.2.3. Influence of the objective function

The eduction method allows effortless evaluation of the impact that can have the choice of objective function. Convergence properties has been compared for pressure and velocity-based objective functions. For the velocity, the “Elv” case is considered without noise and referenced “Elv”. To remain coherent and avoid any effect of measurement noise, the same approach as in the “Elv” case is applied to pressure. This means that acoustic pressure synthesized by the DG code with impedance values from NASA is used as the target measurement. This case will be denoted “Elp_syn”. The observation region is still the 2D area for “Elv” and the upper wall microphone locations for “Elp_syn”. To allow easy comparison, we chose to represent the reduced objective function as written in (38). In terms of acoustic velocity, this reads

$$\mathcal{J}_{\text{red}} = \frac{\int_{\Omega} \|\mathbf{u}_{\text{meas}} - \mathbf{u}_{\text{calc}}\|^2 I_{\Omega_{\text{obs}}}(\mathbf{x})}{\int_{\Omega} \|\mathbf{u}_{\text{meas}}\|^2 I_{\Omega_{\text{obs}}}(\mathbf{x})} \quad (41)$$

Termination criteria (34) and (35) are ruled by $T_{\mathcal{J}} = 10^8$ and $T_{\nabla} = 10^{-3}$.

The convergence rate of each case is plotted in Fig. 15. Note that the “Elp” case genuinely requires 34 iterations to converge, even if the scale of the graph does not allow to see any change in $\mathcal{J}_{\text{red}}$ after 20 iterations. The search procedure converges more rapidly to the expected value with the velocity-based objective function (40) than with the pressure-based objective function (36). This behavior can be understood as the two components of acoustic velocity are considered on over 250 triangular elements, which represents far more information than the single acoustic pressure on the 31 microphone probes. This clearly appears when the objective function is displayed in the impedance plane (r, χ), as can be seen in Fig. 16 where it has been plotted for the “Elv” and “Elp_syn” cases. Steps of $\Delta r = \Delta \chi = 0.08$ have been taken. Symbols locate the educed impedances which are identical, and therefore superimpose. The velocity-based objective function reveals sharper gradient and a less

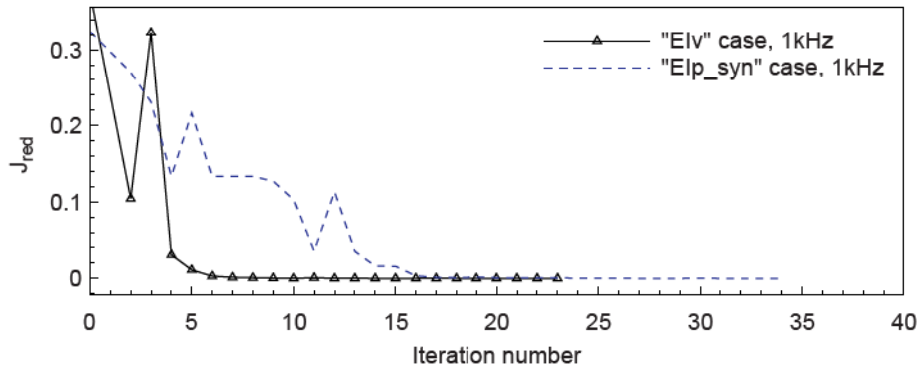


Fig. 15. Evolution of the reduced objective function during the search process at 1 kHz.

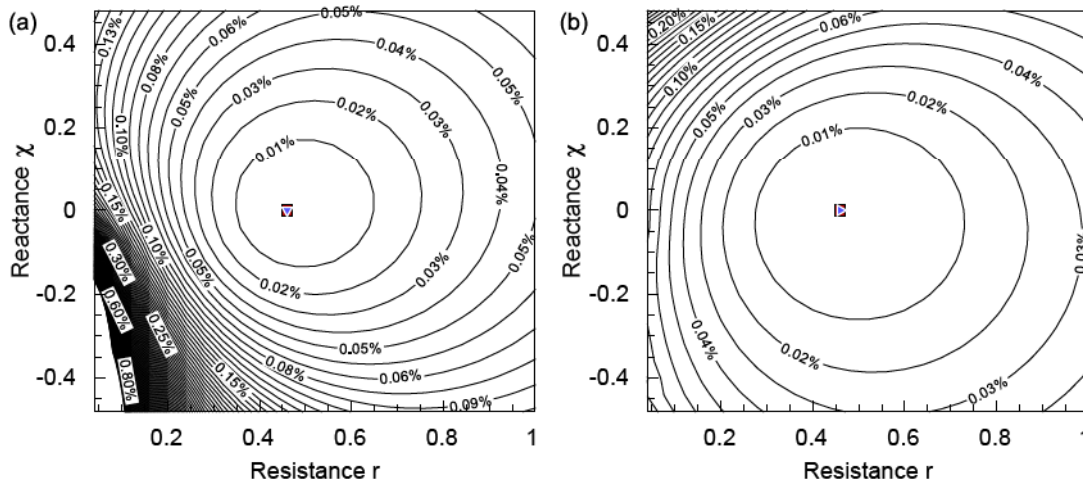


Fig. 16. Objective function at 1 kHz (a) for the “Elv” case and (b) for the “Elp_syn” case. The exit impedance and calibration coefficient are fixed to their educed values. Symbols locate the educed impedances for the “Elv” case (▼), “Elp_syn” case (►) and NASA value (■).

shallow region around the minimum. This explains the faster convergence in the “Elv” case, but also shows that the uncertainty is less important than with the pressure-based objective function.

3.3. Impedance eduction with liner partitioning

As mentioned earlier (see Section 2.2), a search procedure with several impedances can easily be treated. This allows to go beyond the hypothesis of a liner modeled by a single, homogeneous impedance. It has been done by partitioning the liner in two parts of equal length, with impedances denoted z_{l1} and z_{l2} . The first (complex) search parameter is z_{l1} ; as we expect the two impedances to be quite close from each other, the second search parameter is not directly z_{l2} but the difference $\Delta z_l = z_{l1} - z_{l2}$, which is expected to be small and is thus constrained in $[-0.5; 0.5] + [-1; 1]j$. The configuration is similar to the “NRp” case.

Results on SPL are shown at 0.5 kHz (Fig. 17), where the benefit on the reconstructed pressure is the most visible. No amelioration could be seen on the phase. The educed impedances are $z_{l1} = 0.68 - 1.57j$ and $z_{l2} = 0.38 - 1.88j$, which have to be compared to the impedance educed in the “NRp” case, $z_l = 0.54 - 1.66j$, not far from an average value between z_{l1} and z_{l2} . An increase in the number of parameters thus leads to improvement in the eduction results. Even though further investigation has to be carried out, this result suggests that partitioning can lead to a gain in the accuracy of the educed values.

3.4. Illustration by the adjoint state of the first-order necessary condition for optimality

In most cases of the literature, the adjoint state can directly be interpreted as a sensitivity or receptivity function. Amongst others, Barone and Lele [30] stated that it represents the sensitivity to external forcing of a free mixing-layer flow created downstream of a splitter plate termination. Airiau et al. [29] used it to study the receptivity and sensitivity of an incompressible boundary layer over a flat plate. In the present case, the form of the directional derivative (32) makes difficult an interpretation of the whole adjoint field. Nevertheless, it is interesting to consider the first-order necessary condition for optimality

$$\partial_z \mathcal{J}(\boldsymbol{\varphi}, z, C) = 0 \quad (42)$$

Developing expression (32) in the case of a horizontal liner ($n_1 = 0$ and $n_2 = -1$) leads to

$$-2\beta_l^2 \int_{\Gamma_l} v \bar{v}^* d\Gamma_l = 0 \quad (43)$$

The $\bar{\cdot}$ denotes the complex conjugate. Assuming a liner with a reflection coefficient β_l different from 0 ($z_l \neq 1$), the integral of the product $v \bar{v}^*$ over the liner should be zero. It actually occurs that this is due to the cancelation of the adjoint velocity normal to the liner, i.e. $v^* = 0$ over the lining sample. Once again, this happens only when the first-order necessary

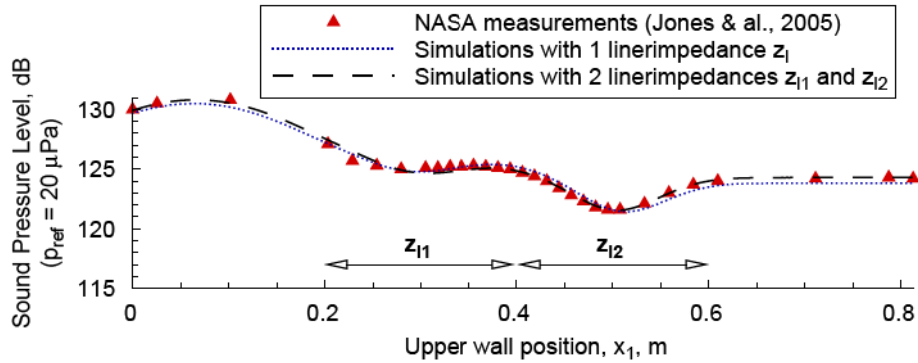


Fig. 17. Reconstructed SPL at 0.5 kHz, with a partitioned liner.

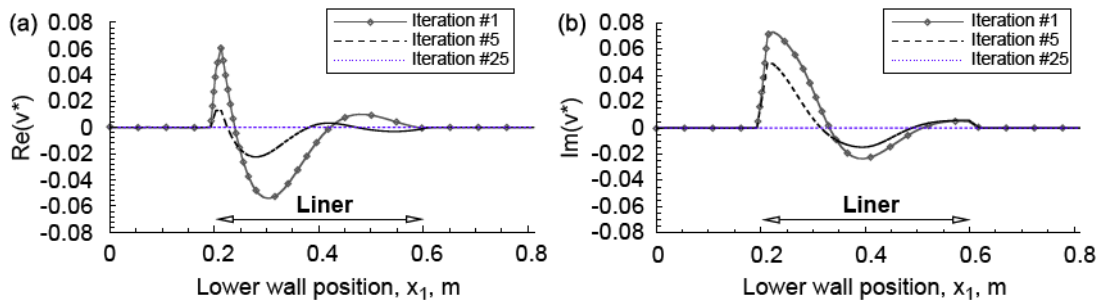


Fig. 18. (a) Real and (b) imaginary part of the transversal adjoint velocity on the lower wall (rigid and lined parts).

condition is satisfied, namely when the eduction process has converged to a suitable value. The evolution of the adjoint velocity at the surface of the liner during the eduction process is shown in Fig. 18, illustrating the fact that v^* tends to zero while the eduction loop progresses. It also allows to check that upstream and downstream of the liner, the rigid wall adjoint condition ($v^* = 0$) is satisfied.

4. Conclusions

A new method for liner impedance eduction has been presented and validated. It seemed important to the authors to describe thoroughly the obtention of the discontinuous Galerkin formulation and adjoint equations, since they differ from the methods usually found in the impedance eduction community. The discontinuous Galerkin scheme is particularly adapted to the adjoint formulation, as the “differentiate-then-discretize” and “discretize-then-differentiate” approaches are equivalent. The main results of validation presented here rely on data published in 2005, directly available in the literature [27]. Simulation results compare very favorably to these measured data, with the possibility to educe exit impedance as well, without need to measure it. Benchmarking with more recent and more complete measurement data [40] is currently being treated.

In particular, it has already been highlighted that the current study is limited to a no-flow configuration, cases in the presence of a grazing flow being planned for publication in a forthcoming paper. A first step has been made in this direction [42], but it still has to be comforted.

Although the results obtained so far concern a configuration without flow, they indicate the powerful resources brought by the process. The analytical expressions of the objective function directional derivatives, obtained through the solution of the adjoint equations, make easy a multiparameter study without additional computational cost. It can be useful for the test of non-homogeneous liners as presented here, or when impedance models such as Biot's, or the extended Helmholtz resonator model in time domain, are employed. Whereas no physical interpretation of the global adjoint field could be found, its behavior during the sequence of process iterations has been exposed. Further calculation may consist in considering the problem as an optimal control problem, in order to get sensitivity of the acoustic field to the liner impedance and thus give information on the best localization of the observation region. The opportunity to displace the observation region towards the lining sample should contribute to get impedances more representative of the actual behavior of the liner. The numerical experiments based on acoustic velocity objective function are promising, and let hope that further benchmarking on LDV measurements will be successful, with a 2D observation region situated above the liner. Another important result is that it could be advantageous, for accuracy as well as for convergence speed, to use the reflection coefficient as a search parameter rather than the impedance, still taking care that the resistance remains positive.

Appendix A. Educed impedances

See (Tables A1–A3).

Table A1

Liner resistance and reactance from the reference paper and educed for the “NRp” case.

Frequency (kHz)	r [27]	χ [27]	r , “NRp” case	χ , “NRp” case
0.5	0.51	−1.68	0.54	−1.66
1.0	0.46	0.00	0.48	0.04
1.5	1.02	1.30	0.88	1.14
2.0	4.05	0.62	3.08	2.00
2.5	1.54	−1.60	1.71	−1.40
3.0	0.70	−0.29	0.63	−0.39

Table A2

Liner resistance and reactance from the reference paper and educed for the “Elp” case.

Frequency (kHz)	r [27]	χ [27]	r , “Elp” case	χ , “Elp” case
0.5	0.51	−1.68	0.53	−1.66
1.0	0.46	0.00	0.48	0.04
1.5	1.02	1.30	0.86	1.19
2.0	4.05	0.62	3.63	1.86
2.5	1.54	−1.60	1.70	−1.40
3.0	0.70	−0.29	0.64	−0.11

Table A3

Liner resistance and reactance from the reference paper and educed for the “Elvn” case.

Frequency (kHz)	r [27]	χ [27]	r , “Elvn” case	χ , “Elvn” case
0.5	0.51	– 1.68	0.48	– 1.64
1.0	0.46	0.00	0.47	0.00
1.5	1.02	1.30	1.08	1.35
2.0	4.05	0.62	4.28	0.12
2.5	1.54	– 1.60	1.39	– 1.63
3.0	0.70	– 0.29	0.73	– 0.26

References

- [1] R.J. Astley, R. Sugimoto, P. Mustafi, Computational aero-acoustics for fan duct propagation and radiation current status and application to turbofan liner optimisation, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 3832–3845.
- [2] C. Malmay, S. Carbone, Y. Aurégan, V. Pagneux, Acoustic impedance measurement with grazing flow, *Proceedings of the Seventh AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2001-2193, AIAA, 2001.
- [3] U. Ingard, On the theory and design of acoustic resonators, *Journal of the Acoustical Society of America* 25 (1953) 1037–1061.
- [4] T.H. Melling, The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels, *Journal of Sound and Vibration* 29 (1973) 1–65.
- [5] T. Elnady, H. Bodén, On semi-empirical liner impedance modeling with grazing flow, *Proceedings of the Ninth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2003-3304, AIAA, 2003.
- [6] P.D. Dean, An in situ method of wall acoustic impedance measurement in flow ducts, *Journal of Sound and Vibration* 34 (1974) 97–130.
- [7] M. Lavieille, F. Simon, F. Micheli, Measurement of liner acoustic impedance in a shear layer of a subsonic flow by Laser Doppler Velocimetry, *SAPEM*, 2005.
- [8] W.R. Watson, M.G. Jones, S.E. Tanner, T.L. Parrott, Validation of a numerical method for extracting liner impedance, *AIAA Journal* 34 (1996) 548–554.
- [9] W.R. Watson, M.G. Jones, Validation of a new procedure for impedance eduction in flow, *Proceedings of the 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2010-3764, AIAA, 2010.
- [10] W.R. Watson, M.G. Jones, C.H. Gerhold, Implementation and validation of an impedance eduction technique, *Proceedings of the 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2011-2867, AIAA, 2011.
- [11] Y. Aurégan, M. Leroux, V. Pagneux, Measurement of liner impedance with flow by an inverse method, *Proceedings of the 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2004-2838, AIAA, 2004.
- [12] T. Elnady, H. Bodén, B. Elhadidi, Validation of an inverse semi-analytical technique to educe liner impedance, *AIAA Journal* 47 (2009) 2836–2844.
- [13] C. Richter, Liner Impedance Modeling in the Time Domain with Flow, Ph.D. Thesis, Technische Universität Berlin, 2009.
- [14] W. Eversman, J.M. Gallman, Impedance eduction with an extended search procedure, *AIAA Journal* 49 (2011) 1960–1970.
- [15] F.Q. Hu, H.L. Atkins, Two-dimensional wave analysis of the discontinuous Galerkin method with non-uniform grids and boundary conditions, *Proceedings of the Eighth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2002-2514, AIAA, 2002.
- [16] H.L. Atkins, Continued development of the discontinuous Galerkin method for computational aeroacoustic applications, *Proceedings of the Third AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 1997-1581, AIAA, 1997.
- [17] C.R. Vogel, *Computational Methods for Inverse Problems*, SIAM, 2002.
- [18] A. Harten, J.M. Hyman, P.D. Lax, On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks, *Communications on Pure and Applied Mathematics* XXIX (1976) 297–322.
- [19] P. Delorme, P. Mazet, C. Peyret, Y. Ventribout, Computational aeroacoustics applications based on a discontinuous Galerkin method, *C.R. Mecanique* 333 (2005) 676–682.
- [20] A. Harten, P.D. Lax, B. van Leer, On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Review* 25 (1983) 35–61.
- [21] J.L. Steger, R.F. Warming, Flux vector splitting of the inviscid gas dynamics equations with application to finite-difference methods, *Journal of Computational Physics* 40 (1981) 263–293.
- [22] G. Gabard, Discontinuous Galerkin methods with plane waves for time-harmonic problems, *Journal of Computational Physics* 225 (2007) 1961–1984.
- [23] E.F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, second ed. Springer-Verlag, 1999.
- [24] K.W. Thompson, Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, *Journal of Computational Physics* 68 (1987) 1–24.
- [25] M.K. Myers, On the acoustic boundary condition in the presence of flow, *Journal of Sound and Vibration* 71 (1980) 429–434.
- [26] Y. Renou, Y. Aurégan, Failure of the Ingard–Myers boundary condition for a lined duct: an experimental investigation, *Journal of the Acoustical Society of America* 130 (2011) 52–60.
- [27] M.G. Jones, W.R. Watson, T.L. Parrott, Benchmark data for evaluation of aeroacoustic propagation codes with grazing flow, *Proceedings of the 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2005-2853, AIAA, 2005.
- [28] L. Wang, D.J. Mavriplis, W.K. Anderson, Adjoint sensitivity formulation for discontinuous Galerkin discretizations in unsteady inviscid flow problems, *AIAA Journal* 48 (2010) 2867–2883.
- [29] C. Airiau, S. Walther, A. Bottaro, Boundary layer sensitivity and receptivity, *C.R. Mecanique* 330 (2002) 259–265.
- [30] M.F. Barone, S.K. Lele, Receptivity of the compressible mixing layer, *Journal of Fluid Mechanics* 540 (2005) 301–335.
- [31] J.B. Freund, Adjoint-based optimization for understanding and suppressing jet noise, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 4114–4122.
- [32] M. Wei, J.B. Freund, A noise-controlled free shear flow, *Journal of Fluid Mechanics* 546 (2006) 123–152.
- [33] M.D. Gunzburger, *Perspectives in Flow Control and Optimization*, SIAM, 2003.
- [34] Y. Ventribout, Contrôle des perturbations aéroacoustiques par impédances de parois: application à un modèle de matériaux poreux [Wall Impedance Control of Aeroacoustic Perturbations: Application to a Porous Material], Ph.D. Thesis, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 2006.
- [35] C. Zhu, R.H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, L-BFGS-B: Algorithm 778: L-BFGS-B, FORTRAN routines for large scale bound constrained optimization, *ACM Transactions on Mathematical Software* 23 (1997) 550–560.
- [36] R.H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, A limited memory algorithm for bound constrained optimization, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 16 (1995) 1190–1208.
- [37] J. Primus, F. Simon, E. Piot, Validation of a direct propagation model for liner impedance eduction, *Proceedings of the 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2011-2869, AIAA, 2011.
- [38] Y. Özyörük, L.N. Long, M.G. Jones, Time-domain numerical simulation of a flow-impedance tube, *Journal of Computational Physics* 146 (1998) 29–57.
- [39] W.R. Watson, M.G. Jones, T.L. Parrott, Investigation of an anomaly observed in impedance eduction techniques, *Proceedings of the 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2008-3013, AIAA, 2008.

- [40] M.G. Jones, W.R. Watson, On the use of experimental methods to improve confidence in reduced impedance, *Proceedings of the 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2011-2865, AIAA, 2011.
- [41] W.R. Watson, M.G. Jones, Explanation of anomalous behavior observed in impedance reduction techniques using measured data, *Proceedings of the 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2010-3766, AIAA, 2010.
- [42] E. Piot, J. Primus, F. Simon, Liner impedance reduction technique based on velocity fields, *Proceedings of the 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, No. 2012-2198, AIAA, 2012.



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Sound and Vibration

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jsvi

Theoretical investigation of hydrodynamic surface mode in a lined duct with sheared flow and comparison with experiment

Germain Boyer^{*}, Estelle Piot, Jean-Philippe Brazier

ONERA DMAE, 2 avenue Édouard Belin, B.P. 74025, 31055 Toulouse Cedex 4, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 11 January 2010

Received in revised form

21 October 2010

Accepted 26 October 2010

Handling Editor: R.E. Musafir

Available online 19 November 2010

ABSTRACT

A spectral collocation method is used to solve the linearized Euler equations in a duct with shear flow and lined walls in order to identify a possible hydrodynamic instability observed in published experiments. This method is first checked against a reference test case in a cylindrical duct. Then a theoretical test case in a plane bi-dimensional duct with no-slip flow is considered: the Briggs–Bers stability criterion is proved to be valid and it shows that the hydrodynamic instability does correspond to a right-running amplified wave. Eigenmode analyses are then performed on the experimental configuration. An unstable hydrodynamic surface mode is found, with an axial wavenumber and velocity eigenfunctions which are in good agreement with the experimental ones. Acoustic energy calculations show that the hydrodynamic instability paradoxically carries noticeable levels of acoustic energy in the upstream direction. Finally, the influence of Mach number and frequency is investigated.

© 2010 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Nowadays, wall liners are widely used in aeronautics to reduce engine noise by damping the acoustic modes propagating within air intakes or nozzles. Recently, Aurégan and Leroux [1] studied a ceramic liner which is very efficient in the absence of flow, but has a totally different behaviour when exposed to a grazing flow: an increase in the acoustic transmission coefficient is observed at the resonance frequency of the liner. The authors, referring to the experiments of Brandes and Ronneberger [2], explain that this behaviour may be caused by the appearance of an hydrodynamic instability above the liner. Such a liner was then further investigated in an experimental work: Marx et al. [3,4] performed PIV and LDV measurements and they brought into evidence large coherent flow structures above the liner as soon as the duct mean flow is fast enough. These flow structures are assumed to be due to an hydrodynamic unstable mode convected above the liner.

A few years earlier, hydrodynamic instabilities in lined ducts have been identified by Rienstra [5]. He performed a linear stability analysis of the Euler equations in a cylindrical duct with a lined wall and uniform flow. In this way, he showed that for an infinite impedance of the duct wall, the well-known acoustic modes could be recovered, whereas for finite impedance and high frequencies, four kinds of surface modes could appear; one of them was potentially unstable and appeared only with non-zero base flow and it was tentatively called hydrodynamic instability (HI). More precisely, it denotes an amplified mode propagating downstream, whose phase speed is lower than the base flow velocity. Rienstra performed a stability analysis to prove its instability, using a criterion derived from the work of Crighton and Leppington [6]. However, Brambley [7,8] recently showed that this method was not mathematically correct. He also pointed out that the more general Briggs–Bers stability

^{*} Corresponding author. Fax: +33 5 62 25 25 83.

E-mail addresses: Germain.Boyer@onera.fr (G. Boyer), Estelle.Piot@onera.fr (E. Piot), Jean-Philippe.Brazier@onera.fr (J.-P. Brazier).

criterion [9,10] could not be applied when a locally reacting linear impedance model is used with a uniform mean flow and the Ingard–Myers impedance condition [11,12], because such a system permits arbitrarily large temporal growth rates for real wavenumbers.

However, Vilenski and Rienstra [13–15] obtained similar results when they extended this analysis to sheared duct flows. They showed that impedance-related hydrodynamic surface waves can also occur in the presence of a boundary-layer type mean flow. Their stability properties are governed by the mean flow properties (Mach number, boundary layer thickness) and by the liner impedance. These results are obtained using the classical impedance definition at a wall with no-slip mean flow, which should not lead to an ill-posed problem.

The present paper aims at confirming whether this theoretical instability is responsible for the flow structures that are observed in experiments. A spectral collocation technique, based on the Chebychev polynomial basis decomposition [16], is implemented to solve the linearized Euler equations for a sheared duct flow over an impedance wall with no-slip condition. It is first validated in a cylindrical geometry configuration on Rienstra's test cases [15]. Then, a similar test case in plane two-dimensional geometry is studied: since a maximum temporal growth rate is found for any real wavenumber, the Briggs–Bers stability criterion [10] can be applied to show that the so-called (HI)-mode is indeed unstable. Finally, simulations fitting to Marx et al. conditions in [3,4] are carried out: the theoretical existence of the (HI)-mode is confirmed, and experimental and numerical wavenumbers, growth rates and acoustic fluctuations are compared. Moreover, the acoustic energy flux characteristics, according to the definitions given by Élias [17,18] and Godin [19], are investigated.

2. Eigenmodes in a cylindrical duct

2.1. Governing equations

Consider an inviscid perfect gas flowing along an infinitely long cylindrical duct of radius a (see Fig. 1). Let t be the time, x, r and θ the axial, radial and azimuthal coordinates, u, v and w the axial, radial and azimuthal components of the velocity $\mathbf{V}$, p the pressure, ρ the density and s the entropy per unit mass. $\gamma = c_p/c_v$ represents the ratio of specific heat capacities at constant pressure and constant volume respectively. The pressure, the density and the absolute temperature T satisfy the equation of state $p = \rho RT$, with $R = c_p - c_v$. Then, if D/Dt stands for the convective derivation $\partial/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$, the Euler equations read

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla p = 0, \quad \frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (1)$$

The flow field is written as the sum of a steady base flow and a small-amplitude unsteady perturbation:

$$(\mathbf{V}, p, \rho) = (\mathbf{V}_0, p_0/\gamma, \rho_0) + (\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{p}, \tilde{\rho}) \quad (2)$$

The base flow is supposed to be parallel and is sought for as

$$u_0 = u_0(r), \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad p_0, \rho_0 \text{ constant} \quad (3)$$

The following reference quantities are introduced to define dimensionless variables: radius a as reference length, base flow sound speed $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ as reference velocity, $t_0 = a/c_0$ as reference duration, ρ_0 as reference density and $p_{\text{ref}} = \rho_0 c_0^2$ as reference pressure. From now on, only dimensionless quantities $x \rightarrow x/a, y \rightarrow y/a, t \rightarrow t/t_0, \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}/c_0, \rho \rightarrow \rho/\rho_0, p \rightarrow p/p_{\text{ref}}$ will be considered. In order to obtain the linearized Euler equations, the small-amplitude disturbance field is sought for under the harmonic form

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\rho}) = (U, V, W, P, Y) e^{i\omega t - ikx - im\theta} \quad (4)$$

where ω is the dimensionless excitation frequency, k the dimensionless complex wavenumber and m the azimuthal wavenumber. The dimensionless velocity, pressure and density disturbance amplitudes U, V, W, P and Y are unknown functions of r . Since the entropy equation yields $P = Y$, the linearized Euler equations for mass and momentum can be written as follows:

$$\mathcal{L}(k, \omega) \cdot \mathcal{X} = 0 \quad (5)$$

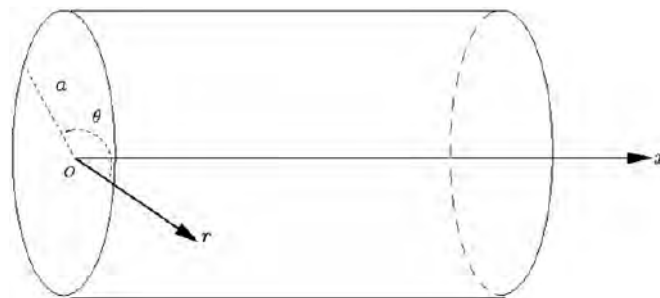


Fig. 1. Duct geometry.

where $\mathcal{L}$ is the linear operator with respect to k and ω

$$\mathcal{L}(k, \omega) = \begin{pmatrix} i(\omega - kM_0) & -ik & d/dr + 1/r & -im/r \\ -ik & i(\omega - kM_0) & M_0 & 0 \\ d/dr & 0 & i(\omega - kM_0) & 0 \\ -im/r & 0 & 0 & i(\omega - kM_0) \end{pmatrix} \quad (6)$$

applied to the vector $\mathcal{X} = (P, U, V, W)^T$. d/dr and primes ' stand for the derivative with respect to r , and M_0 is the dimensionless base flow velocity or Mach number. m is fixed, and either ω or k must be fixed to consider a spatial or temporal eigenvalue problem. Concerning the boundary conditions, the duct wall is constituted of a locally reacting liner of complex specific impedance Z . According to Ingard [11] and Myers [12], if $\mathbf{n}$ represents the outward normal vector to the fluid domain (that points into the wall), the relation $\partial(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n})/\partial t = D(\tilde{p}/Z)/Dt$ must be satisfied at the wall to take into account the effect of a vortex sheet, yielding the following expression:

$$\omega ZV(1) - (\omega - kM_0(1))P(1) = 0 \quad (7)$$

When the mean velocity cancels at the wall, the classical expression $P(1) = ZV(1)$ is recovered. The locally reacting liner can be modelled by an array of Helmholtz resonators with face-sheet (see [20]), whose impedance Z verifies

$$Z(\omega) = R + i\eta\omega - i\cot(\omega L) \quad (8)$$

R and $\eta\omega$ stand for the face-sheet resistance and mass reactance and L is the reduced lining depth (i.e. lining cavity height over duct radius ratio). Referring to a common approximation [1,4], η is set equal to 0. As a conclusion, solving the linear problem (5) with the boundary condition (7) for a fixed azimuthal wavenumber m , and known mean velocity profile M_0 and impedance Z , implies solving a dispersion relation

$$D(k, \omega) = 0. \quad (9)$$

Here, this relation is implicit, and has to be solved numerically by discretizing problem (5) and fixing either ω or k . When the spatial wave evolution is considered (as it is in most of this paper), ω is a fixed real number and the complex eigenvalue k and eigenfunctions (P, U, V, W) are sought for. However, so as to use the Briggs–Bers stability criterion, simulations with a real fixed k and unknown complex ω , or with a fixed complex frequency $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$ will also be carried out.

2.2. Numerical scheme

2.2.1. Principle

The eigenvalue problem (5)–(7) is decomposed onto a Chebychev polynomial basis $(T_k)_{k \in [0, N]}$ of order N [16]. First, the relation between the physical reduced variable $r \in [0, 1]$ and the Chebychev variable $\zeta \in [-1, 1]$ is defined as

$$r(\zeta) = \frac{\lambda(1-\zeta)}{1+2\lambda+\zeta} \quad (10)$$

where λ is a fixed parameter. The collocation points ζ_j are then defined as

$$\zeta_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j \in [0, N] \quad (11)$$

Even if the variable change (10) is quasi-linear (for instance with $\lambda = 3$), the points distribution (11) naturally clusters the points near $\zeta = 1$ and -1 , and consequently near the boundaries of the integration domain $r = 0$ and 1 . However, the resolution near the wall can be reinforced by choosing $\lambda = -(1 + \varepsilon)$, with $0 < \varepsilon \ll 1$. Moreover, there exists a derivation matrix $\mathbf{A}$ such as, for any linear combination of Chebychev polynomials F and any collocation point ζ_i , the derivative of F with respect to ζ can be expressed as follows:

$$\frac{dF}{d\zeta}(\zeta_i) = \sum_{j=0}^N \mathbf{A}_{ij} F(\zeta_j) \quad (12)$$

The eigenfunction $\mathcal{X} = (P, U, V, W)^T$ can be decomposed onto the Chebychev polynomial basis, and expressed on the $(r_j)_{j \in [0, N]}$ points distribution, with $r_j = r(\zeta_j)$. Thus the discrete eigenvector $\mathbf{X}$ is defined by

$$\mathbf{X} = [P(r_0), U(r_0), V(r_0), W(r_0), \dots, P(r_N), U(r_N), V(r_N), W(r_N)] \quad (13)$$

Yet, thanks to property (12), any element of $d\mathbf{X}/dr$ can be expressed as a linear combination of the elements of $\mathbf{X}$, yielding problem (5)–(7) to be reformulated as a matrix eigenvalue problem:

$$[\mathbf{D} + k\mathbf{Q}] \cdot \mathbf{X} = 0 \quad (14)$$

where $\mathbf{D}$ and $\mathbf{Q}$ are $4N$ -square matrices.

2.2.2. Mesh convergence and validation

So as to validate this method, several test cases found in Rienstra's articles are performed with uniform [5] and sheared [15] base flows written as

$$M_0(r) = M_{\max} f(r, \delta) \quad (15)$$

where $M_{\max}$ is the maximum Mach number on the centreline, δ a pseudo-boundary layer thickness, and f a two-variable function defined as

$$f(r, \delta) = \tanh\left(\frac{1-r}{\delta}\right) + (1-r)(1 - \tanh(\delta^{-1})) \left(\frac{1 + \tanh(\delta^{-1})}{\delta} r + r + 1 \right) \quad (16)$$

As long as δ is small enough, say lower than 0.1, one has $f(1-\delta, \delta) \approx 0.76$ and $f(1-3\delta, \delta) \approx 0.995$.

Rienstra's eigenvalues are recovered for uniform base flows: in this case, no more than $N = 150$ points are necessary to reach mesh convergence with $\lambda = 3$. Concerning the sheared base flows, a discrepancy appears, particularly for the highest shear levels. A particularly critical case is presented here: the disturbance frequency ω is set equal to 10, the angular wavenumber is $m = 0$, the base flow parameters are $M_{\max} = 0.5$ and $\delta = 0.002$, and the wall specific impedance is $Z = 3.0 + 1.39i$. A part of the spectrum, calculated with $N = 150$ and $\lambda = -1.1$, is presented in Fig. 2: the eigenvalues k are plotted in the complex plane ($k_{\text{Re}}, k_{\text{Im}}$). The eight discrete modes near the real axis and close to the origin represent the acoustic modes propagating in both directions. All these modes are slightly damped due to the lined wall. On the axis $k \approx -7 + ik_{\text{Im}}$ are located in the evanescent acoustic modes. The modes situated on the continuous semi-infinite real branch $k_{\text{Re}} > 20$ are such that the coefficient $\omega - kM_0(r)$ cancels at a particular point of the duct section. In other words, at this critical point, the phase speed equals the local base flow velocity. This fact induces a singularity in the matrix of $\mathcal{L}$ operator (6). Finally, an isolated mode appears in the upper right quarter of the spectrum. It was tentatively called hydrodynamic instability (HI) by Rienstra [5], because it only appears with flow, and since $k_{\text{Im}} > 0$, it potentially propagates and is amplified in the same (downstream) direction. Further stability analysis will show that it does denote a convective instability.

It can be seen that the agreement is good for both propagative and evanescent acoustic modes and for the first mode of the continuous branch—the only one shown by Rienstra. However, a big gap exists for the (HI)-mode between Rienstra's eigenvalue ($k_R \approx 125 + 59i$) [15] and the present one ($k \approx 124 + 22i$), even when the resolution N and the wall refinement parameter λ are varied (Table 1): the convergence is reached for $N = 150$ and $\lambda = -1.05$ or $N = 190$ and $\lambda = -1.1$ if the value $k = 124 + 22.1i$ is considered as a good approximation; in both cases, 18 points are clustered in the “boundary layer zone” $r \in [1-\delta, 1]$. In Fig. 3 are plotted the (HI)-mode axial and radial velocity component amplitudes, normalized by the maximum value of $|V|$: they are lower than 10^{-3} for r in $[0, 0.92]$, which justifies the “surface mode” denomination. Such a property may entail issues for a step-by-step integration coupled to a shooting method, as used by Rienstra [13] to solve the eigenvalue problem, which could explain the noticed discrepancy. The collocation method appears to be well suited to cope with this kind of problem.

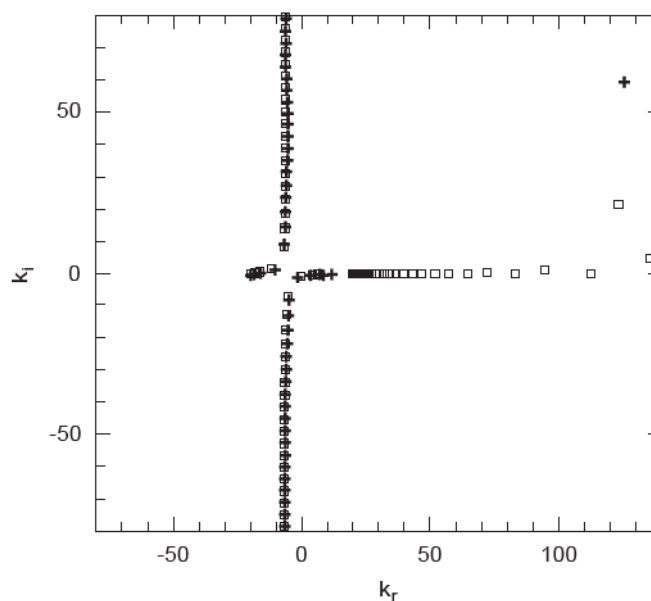


Fig. 2. Spectrum for a cylindrical duct, $\omega = 10$, $M_{\max} = 0.5$, $\delta = 0.002$, $Z = 3.0 + 1.39i$. □: eigenvalues calculated with spectral collocation method, $N = 150$, $\lambda = -1.1$; ○: eigenvalues calculated by Rienstra.

Table 1

Eigenvalues calculated for the HI-mode with different values of the number of points N and the mesh refinement parameter λ —test case $\omega = 10$, $M_{\max} = 0.5$, $\delta = 0.002$, $Z = 3.0 + 1.39i$.

λ	$N = 100$	$N = 150$	$N = 190$
3	125.2 + 29.35i	110.7 + 15.83i	121.6 + 26.00i
−1.5	123.3 + 26.27i	123.3 + 24.71i	121.8 + 22.45i
−1.1	121.9 + 22.71i	123.2 + 21.54i	124.2 + 22.27i
−1.05	124.8 + 22.58i	123.6 + 22.08i	123.8 + 22.08i

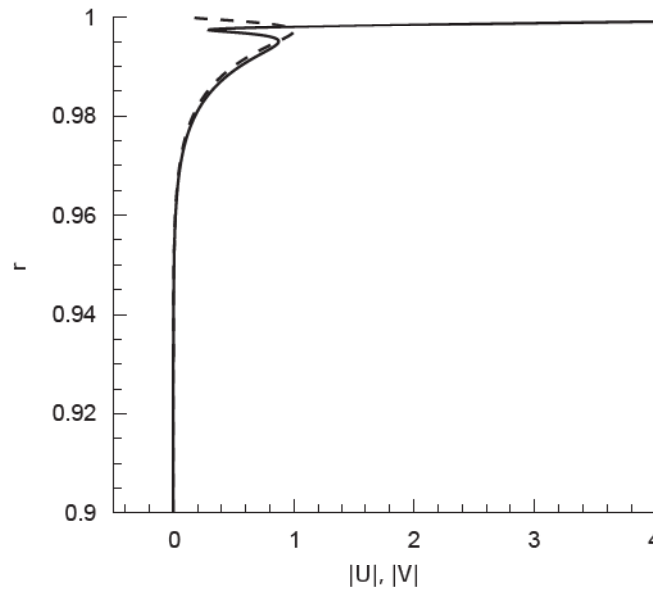


Fig. 3. HI-mode axial and radial velocity component moduli $|U|$ and $|V|$, normalized by the maximum value of $|V|$, for test case $\omega = 10$, $M_{\max} = 0.5$, $\delta = 0.002$, $Z = 3.0 + 1.39i$, in a cylindrical duct. Computation carried out with $N = 190$ points, $\lambda = -1.1$. (—): $|U|$; (---): $|V|$.

3. Eigenmodes in a plane duct

3.1. Governing equations

An equivalent study is performed in a plane two-dimensional duct of height h (Fig. 4), whose lower wall is constituted by a locally reacting liner of specific impedance Z described by Eq. (8). The upper wall is supposed to be rigid, i.e. of infinite impedance. Once again, all the physical quantities are made dimensionless with reference length, velocity, duration, density and pressure h , c_0 , $t_0 = h/c_0$, ρ_0 and $p_{\text{ref}} = \rho_0 c_0^2$ respectively. The same flow and solution hypotheses as mentioned in Section 2.1 are used here. Now, the eigenfunction $\mathcal{X} = (P, U, V)$ is considered, where U and V are the axial and transverse components of the velocity fluctuation, and the linearized Euler equations are represented by the operator $\mathcal{L}$ such as $\mathcal{L}(k, \omega) \cdot \mathcal{X} = 0$:

$$\mathcal{L}(k, \omega) = \begin{pmatrix} i(\omega - kM_0) & -ik & \frac{d}{dy} \\ -ik & i(\omega - kM_0) & M_0 \\ \frac{d}{dy} & 0 & i(\omega - kM_0) \end{pmatrix} \quad (17)$$

The Ingard–Myers condition is also used to derive the boundary conditions, i.e.:

$$\omega Z V(0) + (\omega - kM_0(0))P(0) = 0 \quad \text{at the lower wall} \quad (18a)$$

$$V(1) = 0 \quad \text{at the upper wall} \quad (18b)$$

As in the cylindrical geometry, sheared base flows $M_0(y) = M_{\max} f(r(y), \delta)$ are used, where f is the function defined by Eq. (16), and the variable change

$$r(y) = |1 - 2y| \quad (19)$$

is introduced. In particular, with this formulation, $M_{\max}$ is the Mach number value on the duct centreline and the profile is symmetric with respect to $y = \frac{1}{2}$.

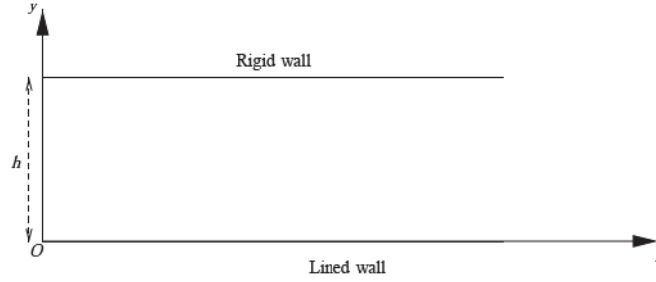


Fig. 4. Plane duct geometry.

3.2. Acoustic energy density and flux

The expressions used in this article for acoustic energy density and flux were found independently by Élias [17,18] and Godin [19] following distinct methods. In particular, contrary to Cantrell and Hart energy definition, Élias–Godin energy density and flux are rigorously conservative, even for a sheared mean flow. Examples of applications can be found in [21]. The perturbed displacement vector ξ , related to the perturbed velocity $\mathbf{V}$ in Eulerian coordinates, is defined by

$$\frac{D\xi}{Dt} = \tilde{\mathbf{V}} + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \xi \quad (20)$$

For constant mean pressure p_0 , the Élias–Godin energy density E and flux ϕ in dimensionless form reduce to

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{D\xi}{Dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \tilde{p}^2 - \frac{D\xi}{Dt} \cdot \nabla \xi \cdot \mathbf{v}_0 \quad (21a)$$

$$\phi = \tilde{p} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{D\xi}{Dt} \right) \mathbf{v}_0 \quad (21b)$$

which yields in temporal average [17]:

$$E = \frac{1}{4} [(\omega^2 - k k^* M_0^2) \|\xi\|^2 + |P|^2] \quad (22a)$$

$$\phi = \frac{\omega}{2} \text{Re}[i P^* \xi + M_0(\omega - k M_0) \|\xi\|^2 \mathbf{e}_x] \quad (22b)$$

where the superscript $*$ represents the complex conjugate. In particular, using (17) and (20), ξ can be expressed as a function of the eigenfunctions:

$$\xi_x = \frac{-ikP}{(\omega - k M_0)^2} \quad (23a)$$

$$\xi_y = \frac{-iV}{\omega - k M_0} \quad (23b)$$

Thus both energy density and flux amplitudes grow as the squared amplitude of the eigenfunction. Considering the fluid domain between two cross-sections $x = x_{\text{in}}$ and $x = x_{\text{out}}$, the following quantities can be introduced: the power φ_{in} entering the fluid domain at x_{in} , the power φ_{out} outgoing the fluid domain at x_{out} and the power φ_a entering the lined lower wall from x_{in} to x_{out} :

$$\varphi_{\text{in}} = \int_0^1 \phi(x = x_{\text{in}}) \cdot \mathbf{e}_x dy \quad (24a)$$

$$\varphi_{\text{out}} = \int_0^1 \phi(x = x_{\text{out}}) \cdot \mathbf{e}_x dy \quad (24b)$$

$$\varphi_a = \int_{x_{\text{in}}}^{x_{\text{out}}} \phi(y = 0) \cdot (-\mathbf{e}_y) dx \quad (24c)$$

The flux at the upper wall does not need to be considered, since it can be shown that it cancels for a rigid wall (see Appendix A).

3.3. Numerical scheme and validation

The spectral collocation method presented in Section 2.2 can be transposed to the plane two-dimensional geometry. The variable change between the physical transverse coordinate y and the Chebychev variable ζ now reads

$$y(\zeta) = \frac{1 - \tanh(\lambda \zeta) / \tanh(\lambda)}{2}, \quad (25)$$

where the parameter λ is used to change the mesh points repartition: $\lambda \ll 1$ leads to a quasi-linear variable change, whereas for $\lambda > 1$ the wall side resolution is enhanced. Mesh convergence is carried out in this configuration, considering a test case similar to that presented in Section 2.2.2: $\omega = 10$, $M_{\max} = 0.5$, $\delta = 0.002$, $Z = 3.0 + 1.39i$. A particular attention is paid to the hydrodynamic instability mode, whose converged eigenvalue is approximately $k = 124.3 + 21.97i$. As it can be seen in Table 2, mesh convergence is easily reached with $\lambda = 3$ —no more than 200 points are needed—whereas choosing $\lambda = 1$ requires twice as many points: for this mode, a fine mesh refinement near the walls is requested to reach convergence. Then, the calculations performed in two-dimensional plane configuration can be compared to those obtained in cylindrical geometry: the eigenvalues are very close ($k \approx 124 + 22i$), and the shapes of the eigenfunctions near the absorbing wall look similar (see Fig. 5 with regard to Fig. 3). This shows that the HI mode behaviour mainly depends on local parameters such as the base flow profile above the wall and the material impedance; the impact of the duct geometry is of very small importance.

3.4. Stability criterion

So far the only eigenvalue of the quarter right upper part of the spectrum has been called “hydrodynamic instability” because it corresponds to a mode that grows exponentially in the downstream direction and has a downstream phase speed. However, determining whether this mode is upstream or downstream propagating requires to perform a stability analysis. According to Bers [10] and Huerre [22], the stability analysis of the system related to the dispersion relation $D(k, \omega)$ consists in evaluating its long-time limit response to a perturbation. Such an evaluation leads to the Briggs–Bers stability criterion [10], also depicted by Brambley [8] in the case of duct flows over wall liners. The formalism adopted in this last paper will be used hereafter.

The response of the system to an harmonic perturbation of frequency ω_f (typically $\omega_f = 10$ here) is given by integrating Green's function

$$G(x, t) = \int_{C_\omega} \int_{C_k} \frac{1}{4\pi^2} \frac{-ie^{i(\omega t - kx)}}{(\omega - \omega_f)D(k, \omega)} dk d\omega. \quad (26)$$

The constraints of causality of G and of absolute convergence of the integrals above imply that the spatial contour C_k is necessarily along the real k -axis, and therefore the temporal contour C_ω must lie below all the solutions of $D(\omega, k) = 0$ for a fixed $k \in \mathbb{R}$. However, Brambley showed that, when the Myers boundary condition is used together with a uniform mean flow, the imaginary part of the

Table 2

Eigenvalues calculated for the HI-mode for different values of the number of points N and the wall side refinement parameter λ .

λ	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$	$N = 400$
1	113.4 + 18.70i	125.0 + 24.60i	123.1 + 20.61i	124.6 + 22.49i
3	124.8 + 21.45i	124.3 + 21.97i	124.3 + 21.97i	124.3 + 21.97i

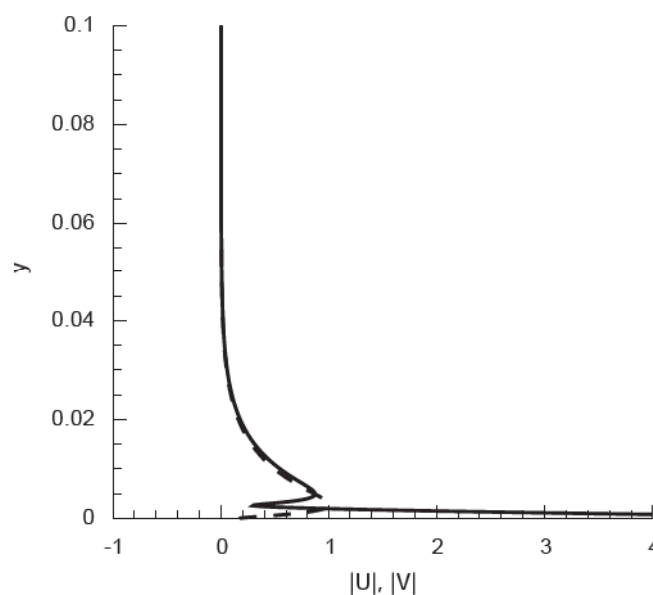


Fig. 5. HI-mode axial and transverse velocity component moduli $|U|$ and $|V|$, normalized by the maximum value of $|V|$, for test case $\omega = 10$, $M_{\max} = 0.5$, $\delta = 0.002$, $Z = 3.0 + 1.39i$, in a plane duct. Computation carried out with $N = 200$ points, $\lambda = 3$. (—): $|U|$; (---): $|V|$.

(HI)-mode temporal eigenvalue can reach arbitrarily low values, and the problem is mathematically ill-posed. Here, the spatial (HI)-eigenvalue is calculated for a decreasing imaginary part of ω until the real k -axis is reached; then, this complex frequency is used as a starting point to investigate the evolution of the temporal eigenvalue for $k \in \mathbb{R}$: as shown in Fig. 6(b), its trajectory admits a minimum $\omega_{\text{Im}} \approx \eta = -2.68$ at $k = 7.17$. Therefore, any contour $\mathcal{C}_\omega = \{\mathbb{R} + i\omega_{\text{Im}}, \omega_{\text{Im}} \in]-\infty, \eta]\}$ can be chosen so that the forward-transform integral in (26) converges. So the Briggs–Bers stability criterion is valid.

At this stage, it can be shown that the trajectories of the spatial modes calculated for $\omega \in \mathcal{C}_\omega$ are split into upper branches $k_u(\mathcal{C}_\omega)$ and lower branches $k_l(\mathcal{C}_\omega)$ (amongst them is the (HI)-mode trajectory plotted in Fig. 6(a)), that do not cross the real k -axis. Then, the long-time limit of the system responding to the harmonic disturbance of frequency ω_f is investigated by slowly translating the $\mathcal{C}_\omega$ -contour into a $\tilde{\mathcal{C}}_\omega$ contour up to the real ω -axis, and deforming it near $\omega = \omega_f$ to avoid this pole of the integrand. In the same time, the $\mathcal{C}_k$ -contour is also deformed if necessary into a $\tilde{\mathcal{C}}_k$ -contour that stays between the deformed upper and lower spatial branches $k_l(\tilde{\mathcal{C}}_\omega)$ and $k_u(\tilde{\mathcal{C}}_\omega)$. According to Brambley, three cases can occur:

- If no branch crosses the real k -axis, the $\tilde{\mathcal{C}}_k$ -contour does not need to be deformed, so the system is stable.
- If one or more branches eventually cross the real k -axis, the $\tilde{\mathcal{C}}_k$ -contour must stay between them anyway, and therefore must be deformed into a $\tilde{\mathcal{C}}_k$ -contour. Here, the (HI)-eigenvalue trajectory obviously crosses the real k -axis (see Fig. 6(a)), thus such a deformation is necessary. In that case, Jordan's lemma implies that the dominating term of Green's function is

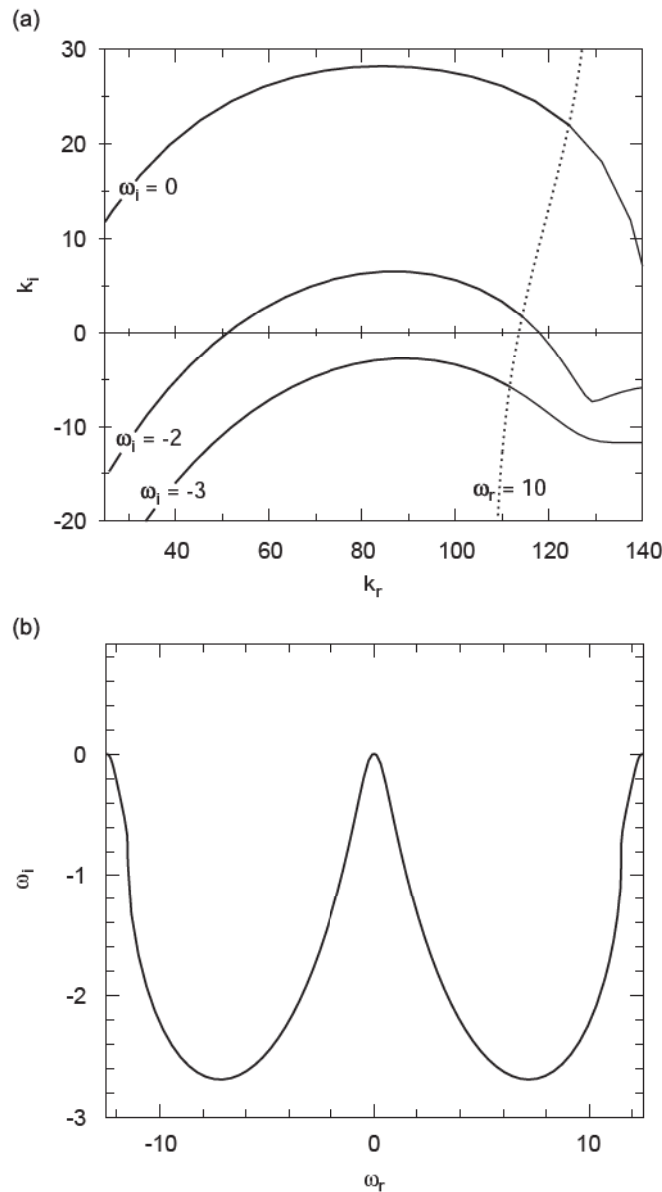


Fig. 6. Spatial and temporal trajectories of the (HI)-eigenvalue, for test case $M_{\text{max}} = 0.5$, $\delta = 0.002$, in a plane duct; Helmholtz resonator parameters: $R = 3.0$, $\eta = 0$, $L = 0.25$. Computation carried out with $N = 200$ points, $\lambda = 3$. (a) Spatial trajectories of the (HI)-eigenvalue in the complex k -plane. (—): ω_{Im} fixed, $\omega_{\text{Re}} \in [0, 30]$; (···): $\omega_{\text{Re}} = 10$, $\omega_{\text{Im}} \in [-4, 1]$. (b) Temporal trajectory of the (HI)-eigenvalue in the complex ω -plane; $k \in [-200, 200]$.

proportional to

$$G(x, t) \equiv Y^+(x) \frac{e^{i(\omega_f t - k_{HI}(\omega_f) x)}}{(\partial D / \partial k)_{k_{HI}}} \quad (27)$$

where Y^+ is the Heaviside function. Since k_{HI} has a positive imaginary part, this term denotes the existence of a right-running amplified wave: the (HI)-mode does represent a convective instability. Then its propagation direction is no longer given by its group velocity, but by Eq. (27).

- This process could have been interrupted if the $\tilde{C}_k$ -contour had been pinched between the (HI)-branch and another upper branch in the upper k -plane, with $\omega_{Im} < 0$, denoting a probable absolute instability. This case has not been observed here, since the upper acoustic cut-on and cut-off modes stay in the quarter upper left k -plane.

As a conclusion, applying the Briggs–Bers stability criterion shows that in the present case, the (HI)-mode is really an amplified right-running mode, and thus it represents a convective instability of the system. In some other cases with a thinner boundary layer, Rienstra and Darau [23] showed that an absolute instability can occur.

4. Link between HI mode and experimental instability

4.1. Experimental configuration

This section shows a comparison between the experiments carried out by Marx et al. [3,4] and an eigenmode analysis of this configuration. Marx et al. measured axial and transverse velocity along a 7.5 cm-long, 8 cm-wide and 2 cm-high rectangular duct with lined lower wall and rigid upper wall. The aspect ratio “width over height” is large, which should minimize three-dimensional effects. However, the existence of an impedance discontinuity at the beginning of the duct must be noticed. An acoustic wave of frequency $f = 1060$ Hz and amplitude $L_i = 133$ or 139 dB is superimposed to a base flow of mean Mach number $M = 0.27$ and centreline Mach number $M_{max} = 0.3$. Velocity measurements were split into two parts: a quasi-parallel mean velocity, similar to the simulated base flow M_0 , and a fluctuation, divided into a coherent—acoustic—part and an incoherent—turbulent—part. Periodic growing structures of the global fluctuation were brought into evidence in the axial direction, and a further analysis of the amplitudes of the coherent and incoherent parts showed that this instability was of acoustic nature: the amplitude of the turbulent part was small and it did not much depend on the excitation level compared to the acoustic one. Then, the axial evolution of the coherent fluctuation amplitude was interpolated by an exponential so as to evaluate an experimental growth rate $k_{e,Im}$. Similarly, the linear regression of the axial evolution of the phase provided the instability wavenumber $k_{e,Re}$. To this respect, the “experimental eigenvalue” denomination for the quantity $k_e = k_{e,Re} + ik_{e,Im}$ will be later employed by comparison with the so-far considered numerical eigenvalue k . In the same way, the velocity transverse profiles will be compared to the computed eigenfunctions.

Some input parameters can be straightforwardly obtained from Marx et al. data: considering a unit-height duct, the lining resistance and the reduced thickness are set equal to $R = 0.2$ and $L = 4$, respectively. The frequency ω is set equal to 0.3918, which is very close to the resonance frequency $\omega_c = \pi/(2L) = 0.3927$. One can also introduce the dimensionless duct length $l = 3.75$. Mean velocity measurements are not directly used, but interpolated with a parametric analytical profile defined by $M_0(y) = M_{max}f(r(y), \delta)$. The function f is still defined by relation (16), but the parameter δ now depends on the transverse coordinate y via the variable change (19) and an n th-degree polynomial function Q :

$$\delta = \delta_0 Q(r(y)). \quad (28)$$

Analytic profiles differing from the experimental ones by less than 1 percent can be obtained by adjusting the coefficients of Q with $n = 7$. Ref. [4] presented three of them, measured at physical locations $x = 0.015, 0.05$ and 0.072 m. The corresponding shapes, labelled “Case 1”, “Case 2” and “Case 3”, are plotted in Fig. 7 and the calculated polynomial coefficients are given in (Appendix B).

4.2. Spectrum

After a mesh convergence study, the spectrum is computed for the three previous base flows. A mesh convergence study has shown that the mesh parameters $\lambda = 1.0$ and $N = 200$ points are sufficient in these cases, mostly because the considered mean base flow shear is not as critical as in Rienstra’s test case of the previous sections. The spectra are plotted in Fig. 8: labels (ACast) denote the acoustic modes, (C) represents the continuous branch of the spectrum, and (HI) the hydrodynamic instability. The differences between the considered base flows consist in a slow decrease of shear and an increase of maximum Mach number. This change about 17 percent on the base flow between cases 1 and 2 induce a 16 percent variation of the computed eigenvalue for the hydrodynamic instability. Special care is taken about the (HI)-mode. On the one hand, it can be identified to the mode that has been proved to be a right-running unstable mode in Section 3.4, and that potentially explains the observed growing behaviour of the velocity measurements. On the other hand, as shown in Table 3, the experimental wavenumber estimated by Marx et al. stands in the range of those obtained by the eigenmode analysis, i.e. $k_{Re} \approx 2.5$, which tends to confirm that theoretical and experimental instabilities are connected.

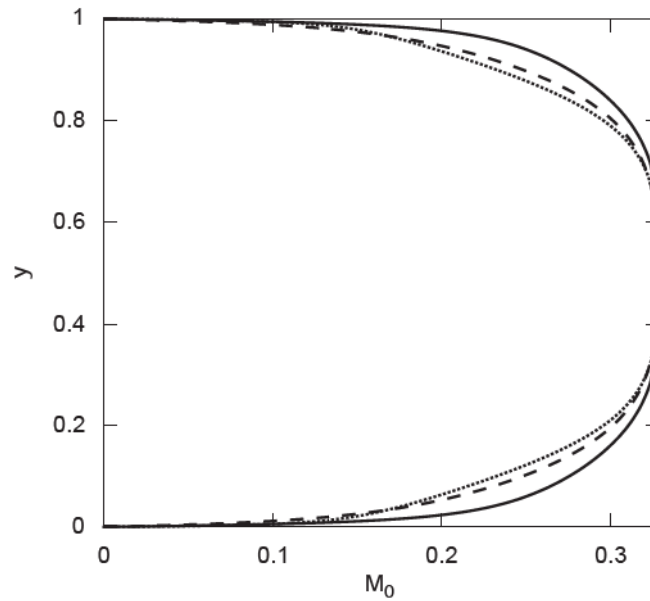


Fig. 7. Interpolated mean velocity profiles from the measurements by Marx et al. [4,3]. Interpolation parameters are reported in Table B1. (—): case 1; (---): case 2; (···): case 3.

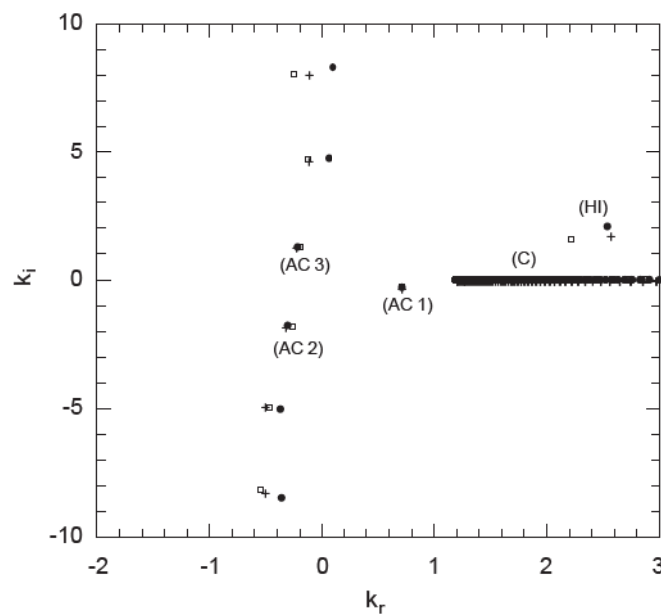


Fig. 8. Spectra calculated for the conditions of Marx et al. experiments. $\omega = 0.3918$, $R = 0.2$, $L = 4$; base flow profiles are presented in Appendix B. $\square$: case 1; $+$: case 2; $\bullet$: case 3.

Table 3

Calculated eigenvalues of the HI-mode for several base flows.

	Case 1	Case 2	Case 3	Experimental estimations
k_{Re}	2.28	2.67	2.66	2.44
k_{Im}	1.56	1.73	2.16	0.60

The growth rate comparison is less favourable. Considering the numerical values reached in the simulations, $k_{Im} = 2.16$ (third case) means that the wave amplitude is increased by a factor 10 when $x/l = 0.284$, i.e. at a location where the effects of the initial impedance breakdown may not have vanished yet, and by a factor 3300 when $x/l = 1$, which is clearly outside of the linear domain. Thus a local eigenmode analysis is unable to predict the instability behaviour all along the duct, but it can only describe the early stages of its development. Note also that the present analysis relies on strong hypotheses: the liner extent is

assumed to be infinite along the x -direction, the three-dimensionality of the problem is not taken into account and the streamwise evolution of the mean flow is supposed to be slow enough to justify the local assumption of parallel flow. However, as explained by Herbert, who investigated the non-parallel effects in boundary layers thanks to parallelized stability equations [24], the growth rate value is likely to be more sensitive to three-dimensional and non-parallel effects than the wavenumber and the eigenfunctions, which could explain the observed discrepancies.

4.3. Eigenfunctions

The eigenfunctions have also been calculated using the previous base flows and compared to the acoustic (i.e. coherent) fluctuations measured on the lower half duct at the streamwise position corresponding to Case 3. Measurements were performed by Marx et al. for the two levels of upstream excitation ($L_i = 133$ and 139 dB). All these profiles are presented in Fig. 9. Axial and transverse velocity amplitudes are normalized by the maximum value of the transverse fluctuation. In the experiments, these dimensionless maximum values with respect to the mean sound speed are 0.01 and 0.017, respectively, with axial fluctuations about 4 times larger. The ratio between the maximum axial fluctuation and the maximum mean velocity is thus about 10 percent: it might be too large for a linear analysis, but this cannot be clearly shown unless a nonlinear analysis is performed for comparison.

The numerical $|U|$ and $|V|$ profiles present similar shapes: the maximum axial amplitude is 10 times as large as the transverse one; $|U|$ rapidly decreases down to 0 away from the lower wall; $|V|$ reaches a local minimum at $y \approx 0.02$, increases up to a maximum at $y \approx 0.15$ and then slowly decreases. Slight differences exist between the various simulated eigenfunctions, concerning the place where the local maximum of $|V|$ is reached for instance. But more interestingly, both experimental measurements ($L_i = 133$ and 139 dB) reasonably fit to them, as regards with their relative amplitude and their shape: same decay of $|U|$ away from the wall, and same consecutive local minimum and maximum of $|V|$ before decreasing down to 0 when y increases. Such an agreement tends to confirm that the observed amplified fluctuations are connected with this theoretical instability.

4.4. Energy flux

Considering the initial observations of Leroux [1] who measured huge levels of acoustic energy transmission when the so-called hydrodynamic instability appeared over the wall lining, it can be interesting to calculate the acoustic energy density

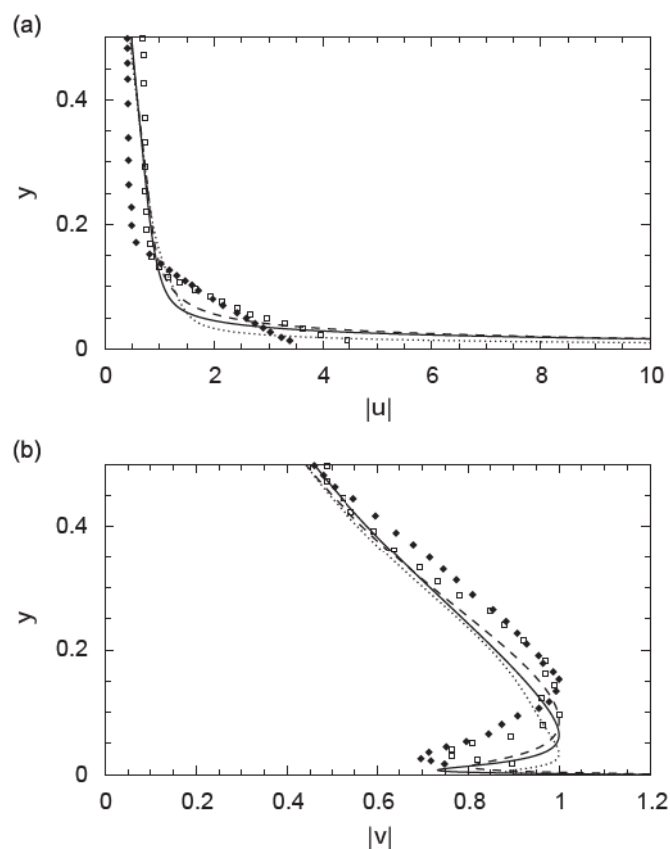


Fig. 9. Axial (a) and transverse (b) acoustic velocity fluctuations—comparison between numerical simulation and the measurements by Marx et al. The maximum value of the transverse component is used for normalization. (—): case 1; (---): case 2; (···): case 3. Experimental measurements from [4]; □: $L_i = 133$ dB; ◇: $L_i = 139$ dB.

and flux of Élias and Godin presented in Section 3.2. To get rid of eigenfunction shape differences between the various modes, all the energy quantities are scaled with respect to the squared average pressure fluctuation:

$$\langle P^2 \rangle = \int_0^1 P(y)P^*(y) dy \quad (29)$$

Since the previous calculations based on slightly differing mean flows led to close results, only Case 3 will be presented here. Only the various acoustic modes denoted (AC1) to (AC3) in Fig. 8 and the hydrodynamic instability (HI) will be considered. The corresponding eigenvalues and energetic quantities, calculated from $x_{\text{in}} = 0$ to $x_{\text{out}} = l$, are reported in Table 4. First note that all the streamlines plotted in Figs. 10 and 11(a) are parallel to the upper rigid wall and point towards the lower treated wall, which is coherent with the flux properties presented in Appendix A. Furthermore, the power values given in Table 4 verify a conservative balance, since for each mode, the difference $\varphi_{\text{in}} - \varphi_{\text{out}}$ is equal to the power absorbed by the treated wall φ_a with a relative error lower than 0.1 percent—no power is emitted nor absorbed by the upper wall. Then, it appears that for the propagative acoustic mode (AC1), the power entering through the duct cross-section at $x = x_{\text{in}}$ is at least 40 times higher than for the evanescent modes (AC2) and (AC3), which are seen to

Table 4

Acoustic power crossing the duct sections $x = 0$ (φ_{in}) and $x = l$ (φ_{out}), and power absorbed at the lower wall (φ_a), for various calculated modes—Case 3 base flow profile.

Mode	Eigenvalue	φ_{in}	φ_{out}	φ_a
HI	$2.66 + 2.16i$	−1.81	-2.23×10^7	2.23×10^7
AC 1	$0.716 - 0.285i$	5.53	6.52×10^{-1}	4.88
AC 2	$-0.309 - 1.77i$	9.84×10^{-2}	1.69×10^{-7}	9.84×10^{-2}
AC 3	$-0.228 + 1.27i$	-1.30×10^{-2}	1.85×10^3	1.85×10^3

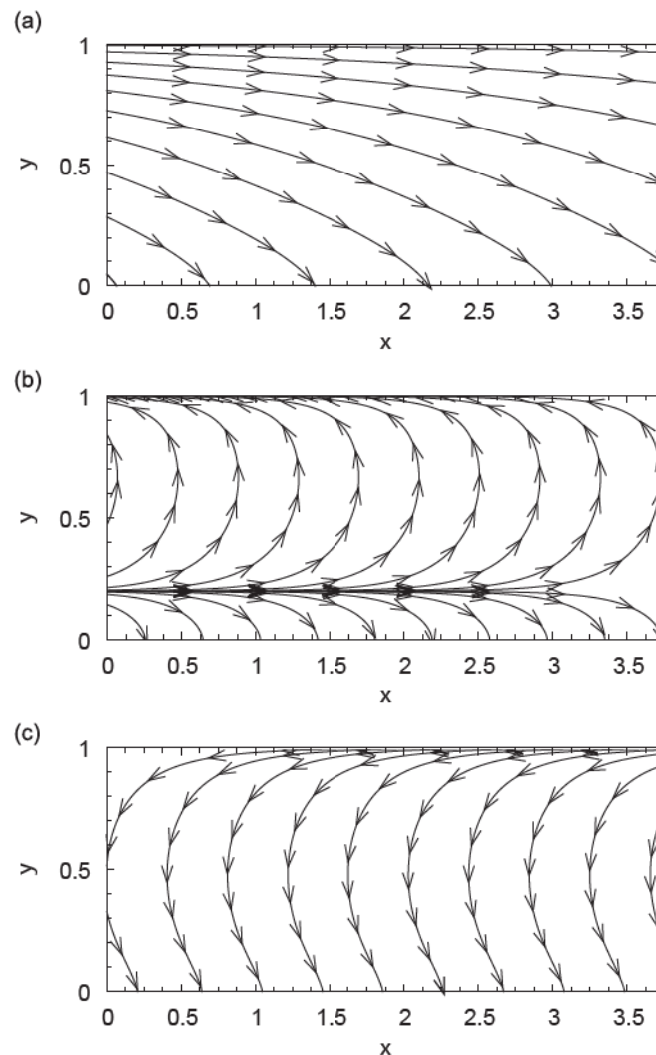


Fig. 10. Acoustic energy flux streamlines for several acoustic modes—simulations related to the experiments by Marx et al. (a) (AC1), (b) (AC2) and (c) (AC3).

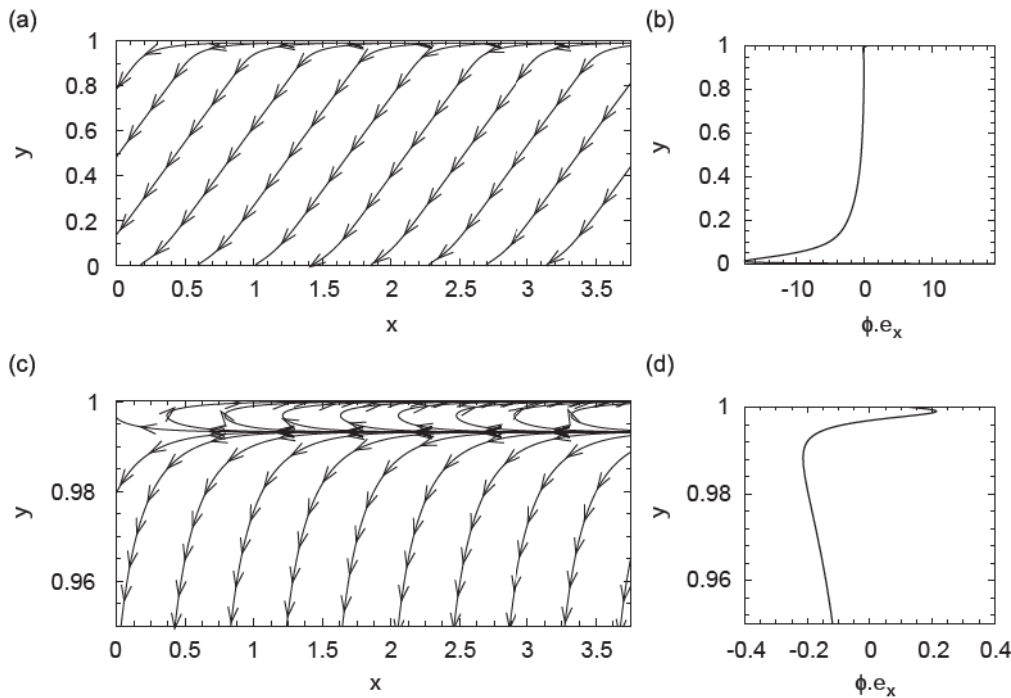


Fig. 11. Acoustic energy flux streamlines and axial flux profile $\phi \cdot \mathbf{e}_x$ for the hydrodynamic instability (HI)—case 3 mean flow profile. (a) Streamlines on the whole domain, (b) axial flux for $y \in [0, 1]$, (c) streamlines for $y \in [0.95, 1]$ and (d) axial flux for $y \in [0.95, 1]$.

carry negligible acoustic energy here. This is confirmed by the flux streamlines patterns shown in Fig. 10: they go downstream and are finally directed towards the lower wall for the propagative (AC1)-mode; they go downstream on line $y = 0.2$ and then go back upstream or down to the lower wall for the evanescent (AC2)-mode, and they go from the upper to the lower wall for the evanescent (AC3)-mode, so that the x -component of the energy flux vector is almost zero. It must be pointed out that the values of the power crossing the section $x = x_{\text{out}}$ are meaningless for the evanescent modes, since they directly depend upon the sign of the growth rate k_{Im} . Paradoxically, the hydrodynamic instability carries a noticeable amount of acoustic energy (same order as the propagative acoustic mode), but in the upstream direction, as shown by the ϕ_{in} and ϕ_{out} -values, the negative sign of the axial flux (Fig. 11(b)) and the mean direction of the streamlines (Fig. 11(a)); just note their singular behaviour at $y \approx 0.993$ (see zoom in Fig. 11(d)), due to the sign change of the axial flux which is positive very close to the rigid upper wall (Fig. 11(d)). Finally, the power delivered to the lower wall is higher than for the (AC1)-mode; on the contrary, referring to the experiments, the liner would have been expected to emit energy.

These results must be considered carefully. On the one hand, such a kind of “negative energy wave” has already been exhibited by Crighton and Oswell [25] in a more general study about the stability of the duct flows along elastic plates. On the other hand, only considering the Élias–Godin acoustic energy balance might be insufficient: for instance, it could be compared to the slightly differing energy definition derived by Brazier in [21]; and more generally, it constitutes only a part of the total energy: a complete study should also include hydrodynamic energy to conclude whether the energy propagation related to this mode is coherent with its unstable mode behaviour.

5. Parametric study

In this section, the influence of the frequency and the base flow velocity on the hydrodynamic instability is analyzed. Starting from the previous configuration, only the maximum Mach number M_{max} and the frequency ω will be varied. The lining impedance is still given by Eq. (8). Thus, the trajectories of k for a fixed M_{max} and $\omega \in [0.2, 0.5]$, and for a fixed ω and $M_{\text{max}} \in [0.2, 0.5]$, are plotted in Fig. 12.

First, let us consider the trajectories at a given frequency $\omega \in \{0.26, 0.3, 0.32, 0.36, 0.4\}$ for a varying maximum Mach number starting from, say, 0.35: if M_{max} increases, both wavenumber and growth rate decrease, and the (HI)-mode reaches a marginal stability. On the contrary, for a vanishing mean flow velocity, the (HI)-mode decays into a cut-off acoustic mode if the frequency is larger than a critical value ω_{cr} (approximately equal to 0.37), as can be seen on the trajectory plotted for $\omega = 0.4$. When $\omega < \omega_{\text{cr}}$, the wavenumber increases and the maximum growth rate reaches a maximum value, given in Table 5 for each case; then the (HI)-mode decays into a marginally stable mode of the continuous branch.

For a given maximum Mach number $M_{\text{max}} \in \{0.22, 0.25, 0.30, 0.35\}$, the (HI)-mode invariably decays into an evanescent acoustic mode at high frequencies, reaches a maximum amplification at the frequency ω_{max} that is close to ω_{cr} as shown in Table 6, and then decays into a mode of the continuous branch at low frequencies. In particular, the energy flux streamlines at $M_{\text{max}} = 0.35$ and for several frequencies $\omega \in \{0.26, 0.32, 0.36, 0.40, 0.44, 0.48\}$ are depicted in Fig. 13. The (HI)-mode

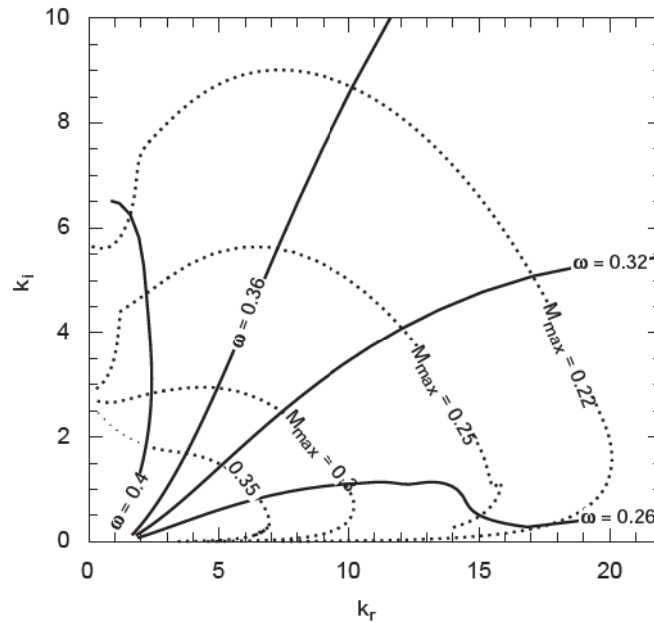


Fig. 12. HI eigenvalue trajectories for various maximum Mach numbers $M_{\max} \in \{0.22, 0.25, 0.3, 0.35\}$ and frequencies $\omega \in \{0.26, 0.3, 0.32, 0.36, 0.4\}$ —base flow profile shape coefficients detailed in Table B1, “case 3”; Helmholtz resonator parameters: $R = 0.2$, $L = 4$. (—): fixed ω and $M_{\max} \in [0.2, 0.5]$; (---): fixed $M_{\max}$ and $\omega \in [0.2, 0.5]$.

Table 5

Maximum HI mode growth rate and associated maximum Mach numbers as the frequency increases.

ω	$k_{i,\max}$	$M_{\max}$
0.26	1.12	0.266
0.32	5.44	0.197
0.36	18.9	0.150

Table 6

Maximum HI mode growth rate and associated frequency for various maximum Mach numbers.

$M_{\max}$	$k_{i,\max}$	ω
0.22	9.00	0.371
0.25	5.63	0.361
0.3	2.94	0.362

streamlines are tangent to the hard upper wall, and go upstream down to the lower treated one; their downward trend is stronger for lower frequencies, i.e. for higher wavenumbers, but when the wavenumber goes down to 0 at high frequencies they tend to be vertical: compared to those of the (AC3)-mode in Fig. 10(c) for instance, they confirm that the (HI)-mode possibly decays into a cut-off acoustic mode as the frequency increases.

As a conclusion, a critical frequency has been found, such that the hydrodynamic instability can reach an arbitrarily high growth rate when the mean flow velocity decreases. However, this statement must be considered cautiously, because such levels of instability have not yet been observed experimentally. Further investigations are necessary to explore this phenomenon, and in particular the possible outbreak of an absolute instability. At a higher given frequency, the (HI)-mode decays into a cut-off acoustic mode; at a lower given frequency, its wavenumber increases and its growth rate reaches a maximum before vanishing. In all the considered cases, the acoustic energy streamlines still point upstream and towards the lined wall.

6. Conclusions

A spectral collocation technique has been used to perform an eigenmode analysis of sheared duct flows with a lined wall. The technique has been first checked against existing reference numerical data in a cylindrical duct: the agreement over the acoustic modes is correct, but a discrepancy between the reference and the computed Hydrodynamic Instability (HI) mode

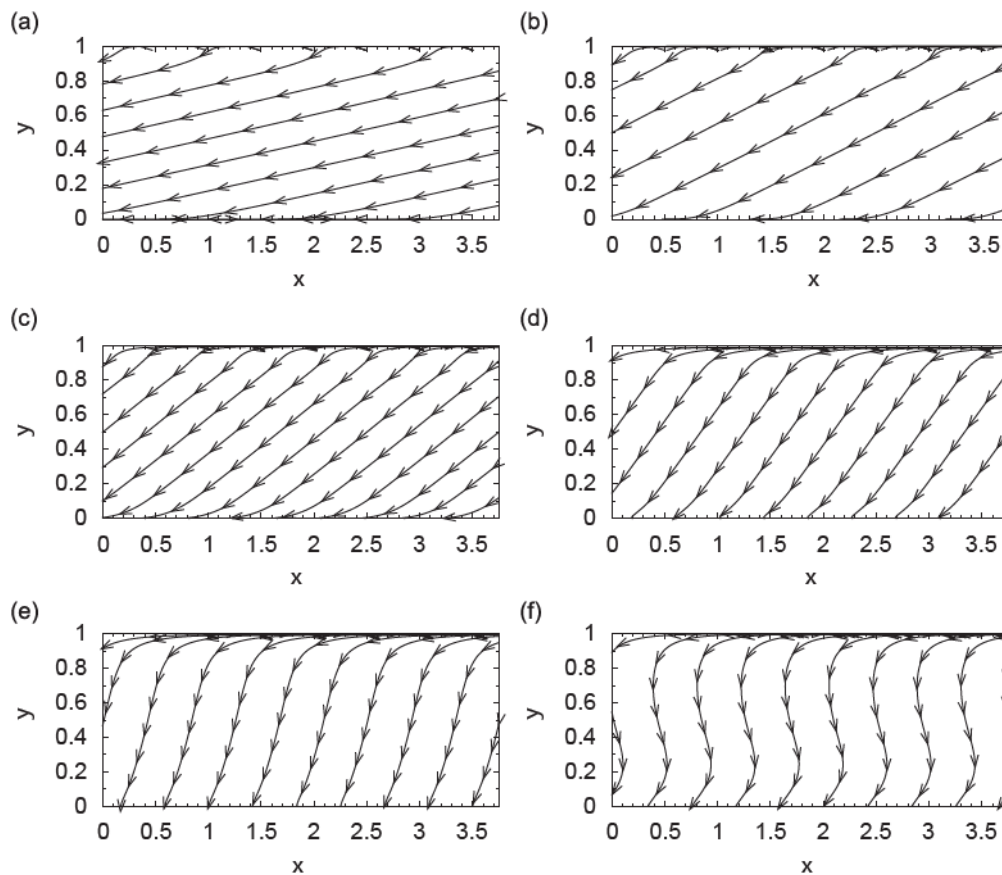


Fig. 13. Acoustic energy flux streamlines of the hydrodynamic instability mode for various frequencies ω —base flow profile defined by $M_{\max} = 0.35$, and shape coefficients detailed in Table B1, “case 3”; Helmholtz resonator parameters of the lower treated wall: $R = 0.2$, $L = 4$. (a) $\omega = 0.26$, (b) $\omega = 0.32$, (c) $\omega = 0.36$, (d) $\omega = 0.40$, (e) $\omega = 0.44$, (f) $\omega = 0.48$.

has been found, and it has been shown that the mesh convergence must be ensured to obtain reliable results over the (HI)-eigenvalue for sheared flows with a thin boundary layer. Then this analysis has been applied to a plane two-dimensional duct: mesh convergence for the HI mode eigenvalue has been carried out on a test case similar to the cylindrical one (same liner and mean flow parameters, and same frequency): similar eigenvalues and eigenfunctions (rapidly decaying away from the liner) have been obtained whatever the duct geometry, indicating that it concerns a “surface mode”, mostly driven by the lined wall features. Finally, the application on this case of the Briggs–Bers stability criterion has proved to be relevant, particularly because the no-slip condition at the walls has been applied to the mean velocity profiles: all the temporal eigenvalues (including the one related to the (HI)-mode) exhibit a minimum imaginary part. Conclusively this criterion has shown that the (HI)-mode definitely represents a convective instability.

Then, simulations have been performed in a configuration as representative as possible of the experiments by Marx et al. The same frequency, lining impedance and mean flow profiles have been used, but the finite extent of the liner as well as three-dimensional effects of the geometry and of the mean flow have not been taken into account. The computed HI mode exhibits a wavenumber and eigenfunction profiles that are similar to those of the experimental instability. However, the calculated growth rate is larger than in the experiments, and too high to comply with the linearity hypothesis all along the duct. This discrepancy may be due to the simplifying hypotheses used in the stability analysis. Anyway, this overall good comparison suggests that the experimental bursts of acoustic velocity above the liner could be due to the surface hydrodynamic mode.

The acoustic energy flux has also been investigated. Flux streamline patterns showed that the so-called propagative acoustic modes carry noticeable amounts of acoustic energy downstream. On the opposite, negligible acoustic power crosses the duct section with the evanescent modes and their flux streamlines are almost perpendicular to the duct. Paradoxically, the hydrodynamic instability carries noticeable levels of acoustic energy in the upstream direction, although it propagates downstream. But due to the hydrodynamic nature of such a mode, considering the acoustic energy only may be misleading, since the total energy flux (which also includes hydrodynamic energy) may evolve in a different way.

Finally, trajectories of the HI eigenvalue have been obtained for varying centreline Mach numbers and frequencies, while other parameters were kept constant. For a fixed frequency and an increasing Mach number, the HI mode can reach marginal stability, or on the contrary degenerate into an evanescent acoustic mode, depending on whether the frequency is larger or lower than a critical value close to the liner resonance frequency. For a fixed Mach number, the HI mode is turned into an evanescent mode when the frequency increases whereas it becomes stable when the frequency decreases.

Table B1

Parameters used for the interpolation of the mean flow profiles measured by Marx et al.

	Case 1 $x = 0.015$ m	Case 2 $x = 0.05$ m	Case 3 $x = 0.072$ m
$M_{\max}$	0.3194	0.3235	0.3293
δ_0	0.1	0.1	0.1
n	7	7	7
q_0	1.0855	1.4969	1.4125
q_1	0.5711	−0.1300	0.0018
q_2	−0.4219	−0.1413	0.0014
q_3	−0.3344	−0.3438	−0.0003
q_4	−0.2850	0.0656	−0.0001
q_5	−0.2684	0.0519	0.0032
q_6	−0.4853	0.1604	−0.0002
q_7	0.2587	−0.9307	−1.3387

Appendix A. Flux absorbed by an impedance wall

Let $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_y$ be the outward unit vector normal to the fluid domain, directed *towards* the wall. Referring to Eqs. (22) and (23), the flux entering the wall ϕ_a reads

$$\phi_a = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{P^*(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}{\omega - kM_0} \right) \quad (\text{A.1})$$

For a hard wall, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ and therefore $\phi_a = 0$.

Consider now a lined wall of specific impedance $Z = R + iX$. The Ingard–Myers condition can be expressed as $(\omega - kM_0)P + Z\omega(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = 0$, which yields

$$\phi_a = \frac{\omega^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{Z^* V V^*}{(\omega - kM_0)(\omega - k^* M_0)} \right) \quad (\text{A.2})$$

where $V = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_y$. Since ω is real, the expression above can be written as

$$\phi_a = \frac{\omega^2}{2} R \left| \frac{V}{\omega - kM_0} \right|^2 \quad (\text{A.3})$$

As a consequence, for an absorbing wall ($R > 0$) the absorbed flux is always positive. In the case of a no-slip mean flow ($M_0 = 0$ at the wall), the absorbed flux reduces to

$$\phi_a = \frac{R V V^*}{2} \quad (\text{A.4})$$

Appendix B. Interpolated analytic base flow profiles

The mean velocities measured by Marx et al. [3,4] have been interpolated by analytical functions whose general form is $M_0(y) = M_{\max} f(r(y), \delta_0 Q(r(y)))$, with function f defined in Eq. (16) and variable change $r(y)$ defined in Eq. (19). δ_0 is a fixed parameter, and Q is a polynomial function of degree n : $Q = q_n X^n + \dots + q_1 X + q_0$. The related coefficients are given in Table B1.

References

- [1] Y. Aurégan, M. Leroux, Experimental evidence of an instability over an impedance wall in a duct flow, *J. Sound Vib.* 317 (2008) 432–439.
- [2] M. Brandes, D. Ronneberger, Sound amplification in flow ducts with a periodic sequence of resonators. *1st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA Paper 95-126, 1995.
- [3] D. Marx, Y. Aurégan, H. Baillet, J.-C. Valière, PIV and LDV evidence of hydrodynamic instability over a liner in a duct with flow, *J. Sound Vib.* 329 (2010) 3798–3812.
- [4] D. Marx, Y. Aurégan, H. Baillet, J.-C. Valière, Evidence of hydrodynamic instability over a liner in a duct with flow, *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2009.
- [5] S. Rienstra, A classification of duct modes based on surface waves, *Wave Motion* 37 (2003) 119–135.
- [6] D. Crighton, F. Leppington, Radiation properties of the semi-infinite vortex sheet: the initial value problem, *J. Fluid Mech.* 64 (part 2) (1974) 393–414.
- [7] E. Brambley, N. Peake, Surface-waves, stability, and scattering for a lined duct with flow, *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA Paper 2006-2688, 2006.
- [8] E. Brambley, Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings, *J. Sound Vib.* 322 (2009) 1026–1037.
- [9] R. Briggs, *Electron–Stream Interaction with Plasmas*, MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- [10] A. Bers, Space-time evolution of plasma instabilities—absolute and convective, in: A. Galeev, R. Sudan (Eds.), *Handbook of Plasma Physics*, North Holland Publishing Company, 1983, pp. 451–517.
- [11] K. Ingard, Influence of fluid motion past a plane boundary on sound reflexion, absorption and transmission, *J. Acoust. Soc. Am.* 31 (1959) 1035–1036.
- [12] M. Myers, On the acoustic boundary condition in the presence of flow, *J. Sound Vib.* 71 (1980) 429–434.
- [13] G. Vilenski, S. Rienstra, Numerical study of acoustic modes in ducted shear flow, *J. Sound Vib.* 307 (2007) 610–626.
- [14] G. Vilenski, S. Rienstra, On hydrodynamic and acoustic modes in a ducted shear flow with wall lining, *J. Fluid Mech.* 583 (2007) 45–70.

- [15] S. Rienstra, G. Vilenski, Spatial instability of boundary layer along impedance wall, *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA Paper 2008-2932, 2008.
- [16] C. Canuto, Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, New York, 1988.
- [17] G. Élias, Nouvelles expressions pour l'énergie et l'intensité acoustique dans un écoulement non-uniforme, Technical Report RT 22/3641 PY, ONERA, 1996.
- [18] C. Peyret, G. Élias, Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems, *J. Acoust. Soc. Am.* 110 (2) (2001) 661–668.
- [19] O. Godin, Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogenous moving fluid, *Wave Motion* 25 (1997) 143–167.
- [20] S. Rienstra, Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model, *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA Paper 2006-2686, 2006.
- [21] J.-P. Brazier, Acoustic energy for sheared flows, *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Stockholm, Sweden, AIAA Paper 2010-3862, 2010.
- [22] P. Huerre, P. Monkewitz, Local and global instabilities in spatially developing flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 22 (1990) 473–537.
- [23] S. Rienstra, M. Darau, Mean flow boundary layer effects of hydrodynamic instability of impedance wall, *IUTAM Symposium on Computational Aero-Acoustics for Aircraft Noise Prediction*, Southampton, UK, 29–31 March 2010.
- [24] T. Herbert, Parabolized stability equations., Technical Report AGARD Rep. No. 793, Von Karman Institute, Rhode-St.-Genese, Belgium, 1993.
- [25] D. Crighton, J. Oswell, Fluid loading with mean flow. I. Response of an elastic plate to localized excitation, *Philos. Trans. R. Soc. London* 335 (1991) 557–592.