



HAL
open science

Exemples d'approches pour la modélisation d'écoulements complexes : oscillations de poussée, jet synthétique par plasma et écoulements de paroi

François Chedevergne

► **To cite this version:**

François Chedevergne. Exemples d'approches pour la modélisation d'écoulements complexes : oscillations de poussée, jet synthétique par plasma et écoulements de paroi. Modélisation et simulation. UNIVERSITE TOULOUSE 3 PAUL SABATIER, 2017. tel-01686617

HAL Id: tel-01686617

<https://hal.science/tel-01686617>

Submitted on 17 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HDR

En vue de l'obtention de l'

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *30 janvier 2017* par :

François CHEDEVERGNE

Exemples d'approches pour la modélisation d'écoulements complexes : oscillations de poussée, jet synthétique par plasma et écoulements de paroi

JURY

AIRIAU CHRISTOPHE
CASALIS GREGOIRE
MEDALE MARC
MANCEAU REMI
MOREAU ERIC
SAGAUT PIERRE

Examineur
Parrain
Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Président du jury

École doctorale et spécialité :

MEGEP : Dynamique des fluides

Unité de Recherche :

ONERA

Parrain :

Grégoire CASALIS

Rapporteurs :

MEDALE Marc, MANCEAU Rémi et MOREAU Eric

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu aux membres du jury pour leurs participations à ma soutenance. Les discussions que nous avons eu ont été pour moi l'occasion d'échanges très enrichissants et stimulants. Je tiens à remercier tout particulièrement les trois rapporteurs de ce travail pour leurs implications. Comme je l'avais évoqué à l'issue de la soutenance, je garderai maintenant une place privilégiée pour tous les membres du jury dans le déroulement de ma carrière.

Je souhaite également remercier Pierre Millan, directeur du DMAE, pour m'avoir accordé sa confiance quant à l'orientation de mon parcours de recherche. De même, je remercie Jean-Luc Vérant, chef de l'unité TACT, pour m'avoir octroyer la liberté nécessaire à l'obtention de cette habilitation. L'environnement professionnel dans laquelle j'évolue à jouer un rôle très favorable dans la réussite de ce projet. Je souhaite continuer ainsi de longues années encore.

Comment ne pas redire une nouvelle fois toute ma reconnaissance à Grégoire Casalis. Il a été tour à tour mon professeur, mon directeur de thèse, mon collègue et mon parrain pour l'HDR. Je lui dois en grande partie ma réussite professionnelle. Son soutien a été déterminant dans mon évolution. C'est donc avec un profond respect et une sincère affection que je lui témoigne à nouveau toute ma gratitude.

Ces dernières années, j'ai eu le plaisir d'échanger avec Bertrand Aupoix dans l'optique d'une reprise de ses activités. Au delà des qualités scientifiques reconnues de Bertrand, j'ai beaucoup apprécié nos discussions, toujours mâtinées d'humour et de jeux de mots. Notre collaboration fut trop courte à mes yeux mais elle s'est déjà avérée très enrichissante. Son héritage est précieux mais lourd, car comme chacun sait, le savoir de Bertrand ne se mesure pas à la taille mais au poids.

Je profite de ces remerciements pour saluer l'ensemble de mes collègues. Mes amis, bien sûr, mais aussi toutes celles et ceux que je côtoie et qui participent à mon épanouissement au travail. Je mesure la chance qui m'est donné de travailler à l'ONERA et je souhaite à tous de partager ce sentiment.

Enfin, je remercie ma femme et mes enfants pour leur amour, ainsi que toute ma famille pour leur soutien. Ils sont le socle sur lequel repose mon évolution personnelle et professionnelle et sont indissociables de ma réussite.

Table des matières

Table des matières	5
I Parcours de recherche	9
1 Déroulement de carrière	11
2 Organisation du mémoire	13
3 Curriculum Vitae détaillé	15
4 Production scientifique	19
II Instabilités des moteurs à propergol solide	29
5 Les oscillations de poussée des moteurs à propergol solide	31
5.1 Problématique	31
5.2 Moteurs échelles réduites et écoulement en gaz froid	32
6 Analyse de stabilité linéaire	35
6.1 Principe	35
6.2 Résolution du système linéaire	37
6.3 Écoulement de base équivalent	37
6.3.1 Solution de Taylor-Culick	37
6.3.2 ETCE des moteurs à propergol solide	39
6.4 Caractéristiques des instabilités	41
6.5 Comparaison avec les mesures	41
7 Simulation numérique de l'interaction entre les modes de stabilité et un mode acoustique	47
7.1 Acoustique dans les conduits à paroi débitantes	47
7.2 Méthodologie de calcul	48
7.3 Scénario d'apparition des ODP	53

8	Caractérisation et prise en compte de la transition	55
8.1	Caractérisation expérimentale	55
8.2	Simulations numériques de la transition	59
9	Extension à une géométrie étoilée	65
9.1	Recherche d'un écoulement de base	65
9.2	Stabilité	68
9.2.1	Approche locale de la stabilité	69
9.2.2	Approche 2D	70
10	Bilan	75
 III Actionneur Jet Synthétique par Plasma		 81
11	L'actionneur Jet Synthétique par Plasma	83
11.1	Description	83
11.2	Fonctionnement de l'actionneur JSP	84
11.3	Les travaux antérieurs	87
12	Caractérisation expérimentale	89
12.1	JSP dans une atmosphère au repos	89
12.1.1	Mesures par strioscopie	89
12.1.2	Mesures PIV	91
12.2	JSP en interaction avec une couche limite	93
13	Simulations numériques	97
13.1	Modèle de dépôt d'énergie	97
13.1.1	Couplage par termes sources externes et solveur COPAIER	99
13.2	Méthodologie de calcul et validation basse-fréquence	101
13.3	Extension du modèle au cas haute fréquence	111
13.4	Utilisation pour l'analyse des mesures PIV	113
13.4.1	Dynamique des particules	113
13.4.2	Quantification de l'incertitude	115
13.5	Exploitation des données du projet ORINOCO	117
14	Bilan	125
 IV Modélisation de la turbulence en proche paroi		 129
15	Loi de paroi	131
15.1	Loi analytiques	131
15.2	Principales limitations	133
15.3	Développement d'une loi de paroi numérique	134

16 Rugosité	139
16.1 Grain de sable équivalent et modélisation	139
16.2 Extension aux lois de paroi	143
17 Fluctuations de pression à la paroi	149
17.1 Description de l'approche Lysak	149
17.2 Extensions et utilisation pour la vibro-acoustique	152
18 Bilan	159
V Conclusion et perspectives	163
19 Conclusion et Perspectives	165
19.1 Oscillations de pression	165
19.2 Actionneur plasma JSP	166
19.3 Modélisation de la turbulence	167
VI Recueil de publications	169

Première partie
Parcours de recherche

Chapitre 1

Déroulement de carrière

Après douze années passées à l'ONERA, ce mémoire est l'occasion de dresser un bilan de mes différentes activités scientifiques, de démontrer ma capacité à définir une stratégie de recherche et de la mettre en application au travers de l'encadrement de jeunes chercheurs. Suite à mon doctorat, effectué au DMAE (Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique) de 2004 à 2007, sous la direction de Grégoire Casalis, j'ai eu la chance d'obtenir un poste d'ingénieur de recherche à l'ONERA en île de France, à Châtillon, au sein du DEFA (Département d'Énergétique Fondamentale et Appliquée). Si mon sujet de thèse était consacré à l'étude des instabilités dans les moteurs à propergol solide, je me suis vu confié la thématique aérothermique au DEFA. Durant cinq années, je me suis notamment investi dans le développement du code CEDRE de l'ONERA, pour tout ce qui concerne la modélisation de la turbulence et des échanges en paroi. En 2012, j'ai profité de l'ouverture d'un poste pour revenir au DMAE. Le périmètre initial de ce poste concernait le développement d'un actionneur plasma à jets synthétiques pour des applications de contrôle d'écoulement. Aujourd'hui je m'oriente davantage vers la modélisation de la turbulence.

Ce rapide survol de ma carrière donne un aperçu des différentes thématiques que j'ai pu aborder. Force est de constater que les liens entre instabilités dans des conduits à parois débitantes, modélisation des décharges plasma pour un actionneur à jets synthétiques et turbulence de proche paroi ne semblent pas évidents¹. Cependant il existe quelques traceurs dans mon parcours professionnel, comme le code CEDRE qui m'a à la fois servi d'outil de démonstration pour certaines de mes activités comme la propulsion solide et qui, parallèlement, a été le réceptacle d'une partie important des développements que j'ai pu effectuer en particulier dans le domaine de la modélisation de la turbulence.

Par ailleurs, étant donné le statut d'ingénieur de recherche des personnels de l'ONERA, j'ai aussi eu l'occasion d'effectuer ponctuellement des travaux dans des domaines relativement éloignés (propulsion liquide, schéma de flux bas-Mach, convection naturelle dans un réservoir de kérosène liquide, ...) de ceux précédemment cités. Ces études m'ont malgré tout apporté des connaissances supplémentaires et une ouverture à des sujets connexes à mes préoccupations habituelles.

Pendant ces douze années, j'ai tenté de consacrer une part de mon temps à l'enseignement,

1. ou du moins ne les ai-je encore pas totalement perçus

d'abord en tant que vacataire et plus récemment en tant qu'enseignant. C'est un aspect de ma carrière qui m'est cher et dans lequel je compte continuer à m'investir à l'avenir.

Chapitre 2

Organisation du mémoire

L'organisation du mémoire s'articule autour des trois grands thèmes d'études que j'ai suivis le long de mon parcours à l'ONERA. Avant de rentrer dans le vif de ces sujets, une première partie est consacrée à la présentation détaillée de mon Curriculum Vitae, de la liste des thèses encadrées, des publications et rapports techniques produits, des responsabilités endossées dans le cadre de projets européens ainsi que de l'ensemble des enseignements prodigués.

La seconde partie du mémoire est dédiée à mes activités de recherche relatives aux instabilités dans les moteurs à propergol solide. Ce thème de recherche est celui de ma thèse, mais continue toujours de m'occuper au travers de l'encadrement de thèses. Après une synthèse de la démarche scientifique adoptée pour mes travaux, le mémoire présente un état des lieux des recherches menées en collaboration avec deux doctorants.

La troisième partie se concentre sur les développements réalisés autour de l'actionneur JSP (Jets Synthétiques par Plasma) de l'ONERA. Arrivé quelques années après la conception de l'actionneur et en m'appuyant sur les travaux déjà existants, une démarche originale a été proposée afin de mieux tirer profit des capacités de cet actionneur et de définir des stratégies de contrôle adaptées. Cette démarche a été mise en œuvre en grande partie au travers d'une thèse, ainsi qu'au cours de différents projets de recherche.

Dans un quatrième temps, on aborde plusieurs problématiques spécifiques regroupées dans la thématique modélisation de la turbulence en proche paroi. Ainsi, on traite successivement de la reconstruction des fluctuations de pression à la paroi à partir de données statistiques de couche limite, des effets des rugosités sur les transferts pariétaux et du développement d'une loi de paroi numérique.

Enfin, la dernière partie est consacrée à la conclusion et aux perspectives de recherche à court et moyen terme.

Chapitre 3

Curriculum Vitae détaillé

François CHEDEVERGNE

née le 24 janvier 1978

ingénieur de recherche à l'ONERA, département DMAE, unité TACT (Thermique, Aérothermodynamique, Contrôle et Turbulence)

Formation

- *2004-2007* : **Doctorat en mécanique des fluides** - délivré par l'Université de Toulouse / Supaéro, et effectué à l'ONERA sous la direction de Grégoire Casalis : « Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide »
- *2003-2004* : Diplôme d'Etudes Approfondies de dynamique des fluides (Mention TB)
- *2000-2002* : Coursus ingénieur **Supaéro**, approfondissement Propulsion et Aérodynamique
- *1998-2000* : Licence (Major, Mention B) et Maîtrise (Major, Mention B) de physique fondamentale à l'université d'Orléans

Expérience professionnelle

- *2012-présent* : **Ingénieur de recherche** - ONERA - Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique. Développement de l'actionneur Jet synthétique par Plasma - Modélisation de la turbulence - Aérothermique
- *2007-2012* : **Ingénieur de recherche** - ONERA - Département Energétique Fondamentale et Appliquée. Aérothermique
- *2004-2007* : **Doctorant** - ONERA - Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique
- *2004* : **Stage de fin d'étude** - ONERA - Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique. Analyse de stabilité linéaire d'un conduit à paroi débitante, sous la direction de Grégoire Casalis

Distinctions

- Prix de la meilleure thèse en 2007 de la fondation EADS « science de l'ingénieur »
- 2^{ème} prix Hermann Oberth « graduate student » du concours international étudiant de l'IAC 2005 au Japon
- AIAA Best Paper Award pour le papier intitulé « Detailed analysis of the thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors », F. Chedeveigne, G. Casalis, présenté lors de l'AIAA/ASME/SAE/ Joint Propulsion Conference
- 2^{ème} prix des journées CNES des jeunes chercheurs dans la catégorie « lanceurs et véhicules »
- prix AAAF en 2007 récompensant les équipes du CNES, de l'ONERA et de la SNPE pour leurs travaux portant sur le problème des oscillations de poussée dans les moteurs à propergol solide

Activités d'enseignement

Travaux dirigés à l'ISAE (Supaéro et ENSICA)

- Mécanique des fluides et Aérodynamique : travaux dirigés en première année de Supaéro, 20h par an de 2004 à 2007
- Mécanique des milieux continus : travaux dirigés en première année de Supaéro, 10h par an de 2005 à 2007 et de 2012 à 2014

Travaux dirigés à l'Ecole Centrale Paris

- Thermodynamique : travaux dirigés en première année, 10h en 2011-2012

Cours à l'ENSEEIH

- Création en 2013-2014 du cours de simulation numérique des turbomachines d'une durée de 20h en troisième année (option Mécanique des Fluides Numériques), reconduit depuis. Le cours se décompose en 10 séances de 2h et s'appuie sur un support composé d'environ 500 planches
- Création en 2015-2016 du cours de fluides compressibles d'une durée de 20h en deuxième année. Le cours est partagé avec O. Rouzaud. Ma partie comprend 5 séances de 2h accompagnée d'un support de cours d'environ 250 planches. La rédaction d'un polycopié commun aux deux parties de cours est prévue pour l'année 2017

Encadrement d'étudiants

Thèses co-encadrées

1. F. Guillou : « Modélisation et simulations numériques stationnaires de l'aérothermique des circuits internes d'aubes de turbines refroidies », thèse de l'université de Rouen, financement

- SAFRAN, effectuée à l'ONERA (30 mois) et à SAFRAN (6 mois), encadrement à 80%, directeur de thèse F. Dupoirieux, soutenue le 14 février 2013
2. B. Gszanion : « Transition laminaire-turbulent dans un conduit à paroi débitante », thèse de l'université de Toulouse, financement CNES/ONERA, effectuée à l'ONERA, encadrement à 50% directeur de thèse G. Casalis, soutenue le 16 décembre 2014
 3. F. Laurendeau : « Simulations numériques instationnaires d'un actionneur plasma de type jet synthétique », thèse de l'université de Toulouse, financement DGA, effectuée à l'ONERA, encadrement à 80%, directeur de thèse G. Casalis, début octobre 2013
 4. M. Bouyges : « Étude de la stabilité et de la transition dans un moteur à propergol solide en géométrie étoilée », thèse de l'université de Toulouse, financement CNES/ONERA, effectuée à l'ONERA, encadrement à 80%, directeur de thèse G. Casalis, début octobre 2014
 5. S. Morilhat : « Modélisation vibro-acoustique du bruit de couche limite turbulente sous gradient de pression », thèse de l'université de Toulouse, financement ONERA, effectuée à l'ONERA, encadrement à 50%, directeur de thèse F. Simon, début octobre 2015

Stages de master recherche

1. B. Belhassein : « Caractérisation expérience/simulation de coefficients d'échange de chaleur sur une configuration modèle d'aube de turbomachine refroidie », 2011
2. M. Oukacine : « Simulation aux grandes échelles d'un jet synthétique plasma », 2013
3. M. Bouyges : « Validation de l'approche ZDES sur un cas de marche descendante », co-encadré avec B. Aupoix, 2013
4. S. Costa : « Mesure optique, analyse et validation numérique d'un jet synthétique par plasma », co-encadré avec O. Léon, 2014

Projets Européens

- projet ERICKA (Engine Representative Internal Cooling Knowledge and Applications) : piloté par Rolls-Royce UK et comprenant 19 partenaires, le projet s'intéressait essentiellement aux dispositifs de refroidissements des écoulements internes de turbines pour les turbomachines. J'étais responsable du Workpackage WP5 (12 partenaires) portant sur la simulation numérique. L'objectif principal était d'établir des méthodologies de calcul pour ce type d'écoulements. Le projet a commencé en juillet 2009 et s'est terminé en juillet 2014.
- projet IMPACT (Integration and Modelling of Plasma Actuators for Control Techniques) : responsable du montage du projet pour le call H2020 MG1.2 2015. Le projet comprenait 8 partenaires et proposait deux axes de développements pour les actionneurs plasma de type DBD (Décharge à Barrière Diélectrique) et JSP (jet Synthétique par Plasma). Le premier concernait l'intégration sur avion de ces dispositifs et le second visait à établir des modèles réduits pour la définition de stratégies de contrôle adaptées. Le projet a passé avec succès le premier tour du call mais a été refusé au second tour

Activités de rayonnement scientifique

Actions de reviewing et d'expertise

- Revues d'articles dans les journaux scientifiques *Journal of Fluid Mechanics*, *Physics of Fluids*, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, *Propulsion and Power Research*, *Sensors and Actuators : A Physical*
- Participation au processus d'expertise pour des projets FRAE (2011)
- Expertise de plusieurs projets internes ONERA

Groupe OTAN AVT254

- Membre depuis 2014 du groupe OTAN AVT (Advanced Vehicle and Transportation) piloté par S. Roy (Univ. of Florida) concernant le développement des actionneurs plasma pour le contrôle des écoulements.

Chapitre 4

Production scientifique

Sont regroupés dans ce chapitre l'ensemble des publications, papiers et rapports techniques produits durant ma carrière.

Journaux avec comité de lecture

- [1] F. Chedeveigne, G. Casalis et Th. Feraille. « Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection ». Dans : *Physics of Fluids* 18 (2006).
- [2] F. Chedeveigne. « Advanced wall model for Aerothermodynamics ». Dans : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 31.5 (2010), p. 916–924.
- [3] B. Aupoix, D. Arnal, H. Bézard, B. Chaouat, F. Chedeveigne, S. Deck, V. Gleize, P. Grenard et E. Laroche. « Transition and Turbulence Modeling ». Dans : *Aerospace Lab 2* (2011), 1–28.
- [4] D. Scherrer, F. Chedeveigne, P. Grenard, J. Troyes, A. Murrone, E. Montreuil, F. Vuillot, N. Lupoglazoff, M. Huet, B. Sainte-Rose, P. Thorigny, N. Bertier, J.-M. Lamet, T. Le Pichon, E. Radenac, A. Nicole, L. Matuszewski et M. Errera. « Recent CEDRE applications ». Dans : *Aerospace Lab 2* (2011), 1–28.
- [5] F. Chedeveigne, G. Casalis et J. Majdalani. « Direct numerical simulation and biglobal stability investigations of the gaseous motion in solid rocket motors ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 706 (2012), p. 190–218.
- [6] B. Gazanion, F. Chedeveigne et G. Casalis. « On the laminar-turbulent transition in injection-driven porous chambers ». Dans : *Experiments in Fluids* 55.1 (2014).
- [7] F. Laurendeau, F. Chedeveigne et G. Casalis. « Transient ejection phase modeling of a Plasma Synthetic Jet actuator ». Dans : *Physics of Fluids* 26.12 (2014), p. 125101.
- [8] F. Chedeveigne, G. Casalis, O. Léon, M. Forte, F. Laurendeau, N. Szulga, O. Vermeersch et E. Piot. « Applications of Dielectric Barrier Discharges and Plasma Synthetic Jet Actuators at ONERA ». Dans : *AerospaceLab journal* 10.06 (2015).
- [9] F. Chedeveigne, O. Léon, D. Caruan et V. Bodoc. « Experimental and numerical response of a high-Reynolds-number $M = 0.6$ jet to a Plasma Synthetic Jet actuator ». Dans : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 56 (2015), p. 1–15.
- [10] G. Arroyo Callejo, E. Laroche, P. Millan, F. Leglaye et F. Chedeveigne. « Numerical Investigation of Compound Angle Effusion Cooling Using DRSM and ZDES Approaches ». Dans : *journal of turbomachinery* 138.101001 (2016).

Congrès internationaux avec actes

- [1] G. Casalis, F. Chedevergne et T. Feraille. « A new stability approach for the flow induced by wall injection ». Dans : *Symposium on Laminar-Turbulent Transition*. Bangalore, Inde : IUTAM, 2004.
- [2] F. Chedevergne et G. Casalis. « A theoretical approach of the thrust oscillations in solid rocket motors ». Dans : *International Astronautical Congress 2005*. Fukuoka, Japon : IAF, 2005.
- [3] F. Chedevergne et G. Casalis. « Thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors, part II : a theoretical approach ». Dans : *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. Tuscin, USA : AIAA, 2005.
- [4] F. Chedevergne et G. Casalis. « Detailed analysis of the thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors ». Dans : *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. Sacramento, USA : AIAA, 2006.
- [5] G. Casalis, E. Piot et F. Chedevergne. « Bi-global Linear Stability Analysis ». Dans : *Laminar-Turbulent Transition Mechanisms, Prediction and Control*. T. 74. Kleinwalsertal, Autriche : 6th SIG33 workshop published in ERCOFTAC Bulletin, 2007.
- [6] F. Chedevergne, G. Casalis et J. Majdalani. « DNS Investigation for the Taylor-Culick Flow Stability Analysis ». Dans : *43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. Cincinnati, USA : AIAA, 2007.
- [7] F. Chedevergne et G. Casalis. « DNS investigation of the flow induced by an unsteady wall injection ». Dans : Heraklion, Crète : Space Propulsion 2008, 2008.
- [8] F. Guillou et F. Chedevergne. « Internal Turbine Blade Cooling Simulation : The Smooth BATHIRE Rig Configuration ». Dans : Marseille, France : 8th International ERCOFTAC Symposium, 2010.
- [9] F. Guillou et F. Chedevergne. « Internal turbine blade cooling simulation : advanced models assesment on ribbed configurations ». Dans : *8th Thermal Engineering Joint Conference*. Honolulu, USA : ASME/JSME, 2011.
- [10] B. Gazanion, F. Chedevergne, X. de Saint Victor, J.-L. Estivalèzes et G. Casalis. « Laminar-Turbulent Transition Investigation in a Solid Rocket Motor Representative Cold Flow Setup ». Dans : *49th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. San Jose, USA : AIAA, 2013.

- [11] A. Ristori, I. Da Costa, F. Chedeveigne, P. roux et D. Carru. « P.I.V. Flow Characterization Inside a Large-Scale U-Shaped Smooth and Ribbed Rotating Channel ». Dans : *5TH EUROPEAN CONFERENCE FOR AERONAUTICS AND SPACE SCIENCES*. Munich, Allemagne : EUCASS, 2013.
- [12] B. Gazanion, F. Chedeveigne et G. Casalis. « Large Eddy Simulation of the Laminar-Turbulent Transition in the Flow Induced by Wall Injection ». Dans : *Symposium on Laminar Turbulent Transition*. Rio, Brésil : IUTAM, 2014.
- [13] B. Gazanion, F. Chedeveigne et G. Casalis. « URANS Simulation of Injection-Driven Flows with an Imposed-Transition Model ». Dans : *Space Propulsion 2014*. Cologne, Allemagne, 2014.
- [14] F. Chedeveigne et O. Léon. « Plasma Synthetic jet actuator interaction with a $M=0.6$ jet flow ». Dans : *50th 3AF International Conference on Applied Aerodynamics*. 3AF, 2015.
- [15] F. Laurendeau, F. Chedeveigne, O. Léon et G. Casalis. « Experimental Characterization of a Plasma Synthetic Jet ». Dans : *50th 3AF International Conference on Applied Aerodynamics*. 3AF, 2015.
- [16] F. Laurendeau, O. Léon, F. Chedeveigne et G. Casalis. « PIV and Electric Characterization of a Plasma Synthetic Jet Actuator ». Dans : *45th Fluid Dynamics Conference*. 2015-2465. AIAA, 2015.
- [17] M. Bouyges, F. Chedeveigne. et G. Casalis. « Local Linear Stability Analysis of Non-Circular Injection Driven Channel Flows ». Dans : *52th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. Salt Lake City : AIAA, 2016.
- [18] Z. Wang, R. Corral, F. Chedeveigne et L. Benet. « Experiment and numerical validation of heat transfer performance for an engine representative varying aspect ratio two-pass rotating internal cooling channel ». Dans : *Turbo Expo 2016*. GT2016-57419. GT2016 ASME, 2016.

Autres congrès et conférences, sans actes

- [1] F. Chedevergne et G. Casalis. « Front Wall boundary layer Influence on the Stability of the Flow induced by Wall Injection ». Dans : *7ème ONERA-DLR Aerospace Symposium*. Toulouse, France : ODAS, 2006.

Rapports techniques ONERA

- [1] F. Chedevergne. *Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide*. Rap. tech. RT 1/11516 DMAE. ONERA, 2006.
- [2] J. Perraud et F. Chedevergne. *Etude des oscillations de poussée. Calculs d'instabilités biglobales à partir de champs moyens de type RANS pour des maquettes de propulseurs LP6 et LP9*. Rap. tech. RT 6/10787 DMAE. ONERA, 2006.
- [3] F. Chedevergne. *Développement et validation de méthodologies de calcul NS3D CEDRE pour l'aérothermique interne des aubages refroidis : rapport d'avancement*. Rap. tech. RT 2/13204 DEFA. ONERA, 2007.
- [4] F. Chedevergne. *Développement et validation de méthodologies de calcul NS3D CEDRE pour l'aérothermique interne des aubages refroidis : étude bibliographique*. Rap. tech. RT 1/13204 DEFA. ONERA, 2007.
- [5] F. Chedevergne. *Développement et validation de méthodologies de calcul NS3D CEDRE pour l'aérothermique interne des aubages refroidis : audit (Lot 4)*. Rap. tech. RT 6/13204 DEFA. ONERA, 2008.
- [6] F. Chedevergne. *Développement et validation de méthodologies de calcul NS3D CEDRE pour l'aérothermique interne des aubages refroidis : audit (lot 4), seconde partie*. Rap. tech. RT 7/13204 DEFA. ONERA, 2008.
- [7] F. Chedevergne. *Développement et validation de méthodologies de calcul NS3D CEDRE pour l'aérothermique interne des aubages refroidis : méthodologies de calcul*. Rap. tech. RT 3/13204 DEFA. ONERA, 2008.
- [8] F. Chedevergne. *Simulation des transferts thermiques dans les foyers de moteurs fusées*. Rap. tech. RT 3/13989 DEFA. ONERA, 2008.
- [9] F. Chedevergne et A. Nicole. *Dossier de simulation : - simulation du cas Mascotte subcritique LOX/GH₂ (10 bar) en 3D, - simulation du cas Mascotte subcritique LOX/GH₂ (10 bar) en thermique, - calcul acoustique CRC*. Rap. tech. RT 1/13989DEFA. ONERA, 2008.
- [10] F. Chedevergne. *CONFIDENTIEL HF PROGRAMME. REST Program. Final report on the modeling of the bomb test*. Rap. tech. RT 1/16530 DEFA. ONERA, 2009.
- [11] F. Chedevergne. *Développement, intégration et validation de la loi de paroi SIBLE pour le code CEDRE*. Rap. tech. RT 1/14799 DEFA. ONERA, 2009.

- [12] F. Chedeveigne. *Exploitation des mesures du banc BATHIRE : comparaisons de résultats de simulation aux données PIV en configuration lisse*. Rap. tech. RT 2/14800 DEFA. ONERA, 2009.
- [13] F. Chedeveigne. *Intégration dans CEDRE et validation du modèle EARSM de Wallin et Johansson*. Rap. tech. RT 2/14799 DEFA. ONERA, 2009.
- [14] J. Dupays, E. Radenac, F. Cauty, F. Chedeveigne et Y. Fabignon. *DIFFUSION RESTREINTE-SPECIAL FRANCE. Etude par simulations numériques de l'allumage du chargement SA-CHA*. Rap. tech. RT 1/17120 DEFA. ONERA, 2009.
- [15] B. Aupoix et F. Chedeveigne. *Synthèse des activités de l'action JOS 15 Coordination Turbulence*. Rap. tech. RT 2/24607 DMAE. ONERA, 2010.
- [16] F. Chedeveigne. *Implantation d'une méthode de génération synthétique de turbulence dans CEDRE*. Rap. tech. RT 8/17454 DEFA. ONERA, 2010.
- [17] F. Chedeveigne. *Implantation d'un modèle DRSM dans CEDRE*. Rap. tech. RT 1/18449 DMAE/DEFA. ONERA, 2011.
- [18] F. Chedeveigne. *Schéma bas-Mach dans CEDRE*. Rap. tech. RT 2/18927 DEFA. ONERA, 2011.
- [19] F. Chedeveigne, I. Da Costa et P. Grenard. *CONFIDENTIEL DEFENSE-SPECIAL FRANCE. PEA 2 RMV ASMPA : Rapport des calculs CEDRE sur configuration ASMPA*. Rap. tech. RT 2/16636 DCPS/DEFA. ONERA, 2011.
- [20] Boniface J.C., F. Chedeveigne, F. Desbois-Lavergne, J. Peter, F. Renac et A. Roos. *CONFIDENTIEL ONERA-SNECMA-TURBOMECA. PRC OPTIM - Tranche 2 - Poste 4*. Rap. tech. RTS 9/12999 DAAP. ONERA, 2011.
- [21] B. Aupoix, F. Chedeveigne, V. Gleize, E. Laroche, E. Mayeur et J. Troyes. *Synthèse des activités de l'action JOS 15 Coordination Turbulence*. Rap. tech. RT 2/18449 DMAE. ONERA, 2012.
- [22] F. Chedeveigne. *Etude NS rotor TuBP : étanchéité labyrinthe*. Rap. tech. RT 1/20706 DEFA. ONERA, 2012.
- [23] F. Chedeveigne. *Implantation de la ZDES dans CEDRE*. Rap. tech. RT 1/17563 DAAP/DEFA. ONERA, 2012.
- [24] F. Chedeveigne et G. Casalis. *Bilan de l'encadrement de la thèse de Bertrand Gazanion en fin de première année*. Rap. tech. RT 1/20807 DMAE. ONERA, 2012.
- [25] D. Caruana, C. Gleyzes, M. Forte et F. Chedeveigne. *CONFIDENTIEL ONERA. Separation Delay by Plasma Synthetic jet Actuator - Development, flow interaction characterization and aerodynamic applications*. Rap. tech. RT 5/13933 DMAE. ONERA, 2013.
- [26] F. Chedeveigne. *Développement d'une interface RANS/LES dans CEDRE*. Rap. tech. RT 1/20074 DEFA/DMAE. ONERA, 2013.
- [27] F. Chedeveigne. *Simulations LES d'un Jet Synthétique Plasma*. Rap. tech. RT 1/21098 DMAE. ONERA, 2013.

- [28] F. Chedevergne et G. Casalis. *Bilan de l'encadrement de la thèse de Bertrand Gazanion en fin de deuxième année*. Rap. tech. RT 2/20807 DMAE. ONERA, 2013.
- [29] P. Reulet, F. Chedevergne et F. Micheli. *DIFFUSION RESTREINTE. EMOSA - Expertise de traitement infrarouge pour arrières-corps. Rapport technique de synthèse*. Rap. tech. RTS 2/16872 DCPS/DMAE. ONERA, 2013.
- [30] B. Aupoix, F. Chedevergne, V. Gleize, J. Mayeur et J. Troyes. *Synthèse des activités de l'action coordination turbulence*. Rap. tech. RF 1/21097 DMAE/DSNA. ONERA, 2014.
- [31] G. Casalis et F. Chedevergne. *Rapport d'encadrement de la thèse de Bertrand Gazanion*. Rap. tech. RF 3/20807 DMAE. ONERA, 2014.
- [32] F. Chedevergne. *Projet SINAPS Implantation d'un modèle JSP dans le solveur COPAIER de la plateforme CEDRE*. Rap. tech. RT 1/22047 DTIM/DMAE. ONERA, 2014.
- [33] F. Chedevergne et E. Laroche. *DIFFUSION RESTREINTE. Simulations thermohydrauliques d'un carburant dans un réservoir chauffé*. Rap. tech. RT 1/21955 DCPS/DMAE. ONERA, 2014.
- [34] F. Chedevergne et O. Léon. *Interaction JSP/écoulement dans une configuration de jet réacteur à $M = 0.6$* . Rap. tech. RT 1/22539 DMAE. ONERA, 2014.
- [35] J.M. Lamet, L. Tessé, P. Gilbank, C. Laurent, A. Murrone, F. Chedevergne et L. Matuszewski. *PR MIMOSA : Généralisation des couplages multiphysiques dans le code CEDRE. Point sur les activités 2013*. Rap. tech. RT 3/20074 DEFA. ONERA, 2014.
- [36] B. Aupoix, F. Chedevergne et S. Morilhat. *Prévision de la variance des fluctuations de pression par l'approche de Lysak - Couplage avec les modèles de Spalart et Allmaras et k - ω SST et amélioration de la réponse au gradient de pression*. Rap. tech. RT 2/24088 DMAE. ONERA, 2015.
- [37] D. Caruana et F. Chedevergne. *Comparaison des résultats du code CEDRE et du modèle de turbulence k - ω SST sur un cas test de marche descendante*. Rap. tech. RT 3/22618 DEFA/DMAE. ONERA, 2015.
- [38] G. Casalis et F. Chedevergne. *Avancement de la première année de thèse de M. Bouyges*. Rap. tech. RT 3/24420 DEFA/DMAE. ONERA, 2015.
- [39] H. Gaible, H. Berzard et F. Chedevergne. *DIFFUSION RESTREINTE. Implantation de corrections de rugosité dans les codes elsA et CEDRE T1.2*. Rap. tech. RT 1/21789 DMAE. ONERA, 2015.
- [40] E. Laroche et F. Chedevergne. *PRC AETHER C : Pondération elliptique. Rapport théorique sur le modèle*. Rap. tech. RT 1/24607 DMAE. ONERA, 2015.
- [41] F. Chedevergne. *Projet SINAPS Simulations numériques de l'interaction d'un jet synthétique par plasma avec un écoulement de couche limite laminaire*. Rap. tech. RT 4/22047 DTIM/DMAE. ONERA, 2016.
- [42] E. Laroche, F. Chedevergne, S. Deck, V. Gleize et P. Grenard. *Rapport d'avancement AETHER C*. Rap. tech. RT 3/17015 DMAE. ONERA, 2016.

- [43] A. Refloch, E. Quemerais, N. Lupoglazoff, L.H. Dorey, J.M. Lamet, Y. Fabignon, J.M. Senoner, F. Chedevertne, G. Casalis, J. Ryan et F. Vuillot. *PRF HPCedre*. Rap. tech. RT 2/24280 DMFN. ONERA, 2016.

Deuxième partie

Instabilités des moteurs à propergol solide

Cette première partie présente les travaux que j'ai effectués durant ma thèse ainsi que ceux menés dans le cadre des thèses de B. Gazanion et M. Bouyges. Ces travaux mettent en œuvre des outils de stabilité, initialement développés par G. Casalis au DMAE, ainsi que des simulations numériques avec le code CEDRE de l'ONERA. Les développements théoriques et numériques sont confrontés aux mesures issues de la base de données du laboratoire de propulsion du DMAE, anciennement conduit par M. Prévost et aujourd'hui sous l'égide de J. Anthoine.

Chapitre 5

Les oscillations de poussée des moteurs à propergol solide

5.1 Problématique

Les moteurs à propergol solide, longs et segmentés, comme le moteur P230 qui équipe le lanceur Ariane 5 et illustré sur la figure 5.1, sont le siège d'instabilités de la poussée.



FIGURE 5.1 – Représentation schématique de la géométrie interne du P230. Chargement réparti en trois segments S1, S2 et S3.

Ce phénomène a été identifié très tôt mais il est longtemps resté un souci majeur encore incompris pour les opérateurs spatiaux tel que le CNES. En effet, les vibrations induites par ces oscillations peuvent endommager la charge utile du lanceur et compromettre la mission. Le phénomène d'ODP se caractérise dans le cas des moteurs d'Ariane 5 par l'apparition de glissements en fréquence dans la seconde moitié du tir. Comme le montre la figure 5.2, dans le plan temps-fréquence on note la présence de fréquences amplifiées après mi-tir. L'organisation de ces fréquences est telle que des glissements apparaissent. On remarque en outre une organisation autour de deux grandes lignes iso-fréquence, qui correspondent aux deux premiers modes acoustiques longitudinaux du moteur.

Différentes approches ont été menées au cours du vingtième siècle pour appréhender ce phénomène. D'importants travaux aux USA ont été entrepris notamment sur la base de méthodes de bilans acoustiques. Cependant, toutes les approches développées se sont révélées être dans l'incapacité

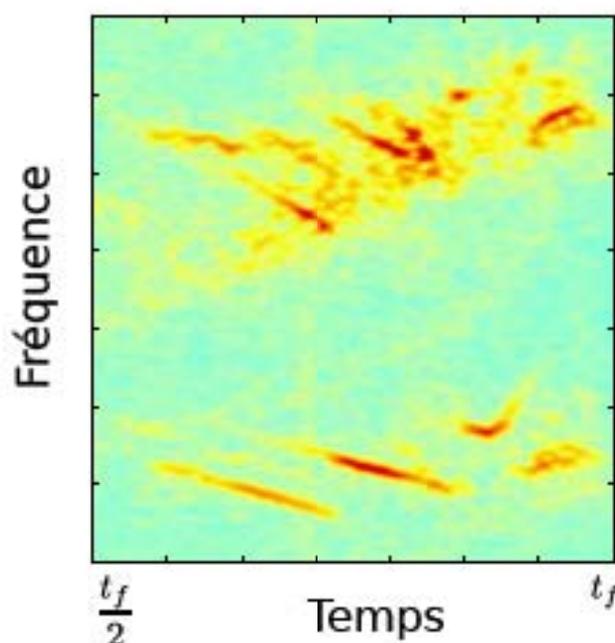


FIGURE 5.2 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante d'un accéléromètre placé sur un P230.

pacité de prévoir le comportement observé sur le P230, ce qui a conduit le CNES à conduire des programmes de recherche en collaboration avec l'ONERA sur la problématique des oscillations de poussée (ODP).

5.2 Moteurs échelles réduites et écoulement en gaz froid

Au cours des programmes de recherche ASSM, POP et ODP à l'initiative du CNES, de nombreux essais sur des moteurs à échelles réduites ont été effectués au centre du Fauga-Mauzac de l'ONERA. Les montages LP6 (échelle 1/15^{ème}) et LP10 (échelle 1/35^{ème}) ont ainsi montré que l'on pouvait reproduire le phénomène d'ODP à plus petite échelle. Seule l'effet d'échelle sur la granulométrie des particules d'aluminium contenues dans le propergol n'est pas reproductible dans ces essais par rapport au cas Ariane 5. Parallèlement, le montage LP9 a permis de mettre en place une démarche incrémentale afin d'identifier les phénomènes mis en jeu dans l'apparition des ODP. A partir d'une géométrie la plus simple possible (monobloc cylindrique de propergol) un nombre important d'essais sur le montage LP9 ont été effectués en ajoutant différents éléments comme des protections thermiques, des cavités non débitantes ou des découpes de blocs de propergol en partie aval. L'ensemble de ces tirs de moteurs échelles réduites forment ainsi une base de données très complète qui a permis de reproduire le phénomène d'ODP dans différentes situations. Pour compléter les mesures obtenues directement lors des essais, un outil de restitution des tirs nommé PERSE a été développé par J-C. Godon [28], permettant d'avoir accès à l'évolution de la géométrie interne des moteurs lors d'un tir.

Dans un souci de simplification des phénomènes, des expériences fondamentales, initiées par Varapaev et Yagodkin [32, 33] puis reprises ultérieurement par Brown et Dunlap [8, 19], ont permis de reproduire la physique des ODP dans des conduits à parois débitantes en gaz froid, c'est-à-dire sans combustion. On se focalise avec ces montages sur de possibles instabilités hydrodynamiques, en évitant d'éventuelles instabilités de combustion. Plus récemment, le montage gaz froid VALDO de l'ONERA DEFA a été utilisé par G. Avalon [1, 2] pour caractériser le plus finement possible les instabilités hydrodynamiques de ces conduits. Grâce à ces essais, on dispose de mesures internes dans la chambre qui donnent accès notamment aux composantes de la vitesse et à la pression. L'objectif de ces montages est de se mettre dans une situation simple, d'un écoulement dans un conduit cylindre avec injection constante sur la paroi latérale. La figure 5.3 montre la géométrie modèle pour ce type de montage. La base de données VALDO

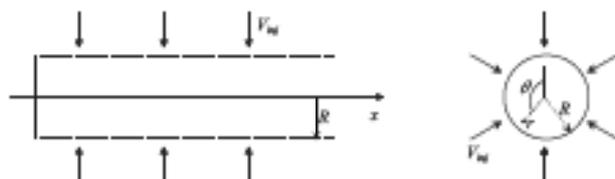


FIGURE 5.3 – Configuration modèle pour les montages gaz froids.

a été grandement exploitée durant ma thèse, ainsi que lors de la thèse de B. Gazanion.

Chapitre 6

Analyse de stabilité linéaire

6.1 Principe

Les analyses de stabilité ont pour but de déterminer si un écoulement est observable ou non. Une solution instable ne sera en pratique pas observable bien qu'elle puisse être solution du problème. La stabilité linéaire, sur la base de méthodes perturbatives, a pour principe la recherche de solutions additionnelles à un écoulement de base qui ne sont pas liées à des perturbations dans les conditions limites. On ne recherche pas la réponse forcée d'un écoulement mais plutôt l'ensemble des perturbations qui peuvent s'ajouter à l'écoulement de base et dont toute combinaison linéaire est solution du système d'équations de Navier-Stokes linéarisées. Dans la plupart des études de stabilité linéaire l'écoulement de base est stationnaire et laminaire. Le principe de l'analyse de stabilité linéaire repose sur une méthode perturbative. On note \bar{Q} les quantités moyennes relatives à l'écoulement de base, q une perturbation telle que q soit en $\mathcal{O}(1)$ et $\varepsilon \ll 1$ un petit paramètre. Pour un écoulement incompressible on écrit :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{\bar{U}} + \varepsilon \underline{u} \\ \underline{P} &= \underline{\bar{P}} + \varepsilon p \end{aligned} \quad (6.1)$$

\underline{U} désignant le vecteur vitesse. Cette décomposition est introduite dans les équations de Navier-Stokes incompressibles pour lesquelles on suppose que \bar{Q} est solution. En négligeant les termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, on aboutit à un système d'équations linéaire que doit satisfaire la perturbation q :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \underline{U} \cdot \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u} \cdot \underline{\bar{U}} &= -\underline{\nabla} p + \frac{1}{\text{Re}} \underline{\Delta} \underline{u} \end{aligned} \quad (6.2)$$

où Re désigne le nombre de Reynolds.

Comme il a été démontré que le phénomène d'ODP observé dans les grands moteurs à propergol solide peut être reproduit dans un conduit cylindrique à paroi débitante grâce aux expériences en gaz froid, on se place dans le cas de la configuration la plus simple possible. La géométrie est celle d'un cylindrique de section circulaire, fermé en $x = 0$. On considère une injection constante sur la paroi latérale. Si R est le rayon du cylindre et V_{inj} la vitesse d'injection le long de la paroi

débitante du cylindre alors le nombre de Reynolds Re s'écrit :

$$Re = \frac{RV_{inj}}{\nu} \quad (6.3)$$

Les longueurs étant adimensionnées par R , les vitesses par V_{inj} et la pression par ρV_{inj}^2 . En coordonnées cylindriques (x, r, θ) , on peut donc adjoindre au système précédent (6.2), les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x, \theta \quad u_z = 0 \quad , \quad u_r = 0 \quad , \quad u_\theta = 0 \quad \text{à la paroi } r = 1 \\ \forall x, \theta \quad u_z \quad , \quad u_r \quad , \quad u_\theta \quad \text{bornées sur l'axe } r = 0 \\ \forall r, \theta \quad u_x = u_r = u_\theta = 0 \quad \text{au fond avant } x = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

En ce qui concerne la condition limite aval pour q en sortie du domaine cylindrique, on impose un comportement linéaire [11]. Notons que G. Boyer [6, 7] a proposé une formulation plus étendue appelée condition de traction nulle. C'est une forme faible du problème où on écrit que la contrainte normale à la section de sortie est nulle.

Suivant une idée originale de G. Casalis [10], Pineau puis Griffond [26, 27] ont mis en place une analyse de stabilité dite locale sur la base de l'écoulement de Taylor-Culick [18, 31], voir la section 6.3. Il s'agit d'une approche modale, dans laquelle on recherche les perturbations solutions de (6.2) sous la forme de modes normaux :

$$q = \hat{q}(r)e^{-i(\alpha z + \omega t - m\theta)} \quad (6.5)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$ la longueur d'onde complexe et $\omega \in \mathbb{C}$ la pulsation complexe. L'entier m correspond à la périodicité azimutale. Cette approche locale de la stabilité linéaire suppose l'écoulement de base parallèle à une station x donnée. Cette approximation n'est jamais complètement vérifiée même pour des valeurs de x élevées. Ainsi, suivant les développements de Féraïlle [20], une approche de stabilité dite biglobale a été entreprise. On écrit la perturbation q sous la forme :

$$q = \hat{q}(x, r)e^{-i(\omega t - m\theta)} \quad (6.6)$$

avec une fonction d'amplitude \hat{q} qui dépend de x et de r à l'instar de l'écoulement de base. Une fois cette forme modale (6.6) de perturbation introduite dans les équations linéarisées (6.2), on aboutit à un système d'équations aux valeurs propres généralisé qui s'écrit :

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \omega\mathcal{B}\mathcal{X} \quad (6.7)$$

où \mathcal{X} est le vecteur propre construit à partir des composantes de \hat{u} et \hat{p} .

Selon la valeur de m les conditions limites sur l'axe prennent différentes formes. Pour les obtenir, on procède généralement à un développement en série de Taylor en $r = 0$ pour la fonction \hat{q} et après injection dans le système d'équation on en tire les conditions limites sur l'axe [13, 20]. Suivant les résultats de l'approche locale, pour laquelle les modes les plus amplifiés correspondent au cas $m = 0$, on ne s'intéresse qu'aux modes axisymétriques $m = 0$. Dans ce cas, on introduit la fonction de courant $\hat{\phi}$ telle que :

$$u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \quad , \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad (6.8)$$

Le système (6.2) de trois équations se réécrit simplement comme :

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \frac{\partial \mathcal{L}\hat{\phi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}\hat{\phi}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \frac{\partial \mathcal{L}\bar{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}\bar{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{\text{Re}} \mathcal{L}(\mathcal{L}\hat{\phi}) = i\omega \mathcal{L}\hat{\phi} \quad (6.9)$$

avec $\bar{\varphi}$ la fonction de courant de l'écoulement de base, $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ un opérateur tel que $\mathcal{L}\hat{\phi} = r\hat{\Omega}$ et $\mathcal{L}\bar{\varphi} = r\bar{\Omega}$, $\hat{\Omega}$ et $\bar{\Omega}$ désignant respectivement les rotationnels de la perturbation et de l'écoulement de base.

Associées à cette équation (6.9), on écrit les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = 0 \text{ à la paroi } r = 1 \\ \forall r \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = 0 \text{ au fond avant } x = 0 \\ \forall x, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} &= \frac{\partial^{2n-1} \hat{\phi}}{\partial r^{2n-1}} = 0 \text{ sur l'axe } r = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.2 Résolution du système linéaire

Afin de résoudre le problème aux valeurs propres généralisé (6.7), on utilise une méthode de collocation spectrale [9] s'appuyant sur les polynômes de Tchebychev pour discrétiser le domaine $(x, r) = [0, 1] \times [0, X_f]$, où X_f est l'abscisse de fin du domaine correspondant à la longueur du cylindre. Étant donné que pour l'approche biglobale de la stabilité linéaire on doit tenir compte des directions x et r , la taille des matrices du système aux valeurs propres discrétisé est grande. On ne peut utiliser d'algorithme de type QZ, prohibitif en ressources mémoire et en temps de calcul pour des systèmes de taille supérieure à 1000×1000 . Pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres associés on utilise la méthode d'Arnoldi [25]. C'est une méthode itérative qui consiste à projeter les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} sur un sous-espace de Krylov de dimension très inférieure à celle des matrices. On tire de ce processus une approximation des valeurs propres de plus grands modules du problème initial. La méthode a fait l'objet de longs développements au DMAE et a été validée notamment dans le cadre de la thèse de Féraille [20].

6.3 Écoulement de base équivalent

6.3.1 Solution de Taylor-Culick

La question de l'écoulement de base est au cœur de l'approche de stabilité linéaire. Si on se donne comme écoulement modèle la solution stationnaire existant dans un conduit cylindrique à

paroi débitante où R et V_{inj} sont des constantes, alors la solution vérifie l'équation de Berman [4] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi} = xF(r) \\ \left[\left(\frac{F}{r} \right) \left(\frac{F'}{r} \right)' - \left(\frac{F'}{r} \right)^2 \right]' + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \left(r \left(\frac{F'}{r} \right)' \right)' \right]' = 0 \\ \left(\frac{F'}{r} \right)'(0) = \frac{F}{r}(0) = F'(1) = 0 \quad , \quad F(1) = 1 \end{array} \right. \quad (6.11)$$

C'est une équation différentielle ordinaire d'ordre 4 simple à résoudre. Notons qu'en $x = 0$ $\overline{U}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{F}{r}$ ne peut satisfaire la condition d'adhérence. Ainsi l'équation de Berman correspond au cas d'une solution avec condition de glissement au fond avant.

En considérant le problème non-visqueux, soit pour $\text{Re} \rightarrow \infty$ il existe une solution analytique à l'équation de Berman, trouvée indépendamment par Taylor [31] et Culick [18]. Il existe différentes manières d'aboutir à cette solution, la plus rapide étant le recours à l'équation pour le rotationnel $\overline{\Omega}$ pour laquelle on montre que les solutions sont de la forme :

$$\overline{\Omega} = C^2 r \bar{\varphi} \quad (6.12)$$

où C est une constante. Avec les conditions limites posées par Berman (6.11) et réécrite sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \text{ en } r = 0 \\ \forall x \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = 0 \text{ en } r = 1 \\ \forall x \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 1 \text{ en } r = 1 \\ \forall r \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = 0 \text{ en } x = 0 \end{array} \right. \quad (6.13)$$

on trouve la solution que l'on appellera par la suite solution de Taylor-Culick :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= x \sin \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right) \\ \overline{U}_x &= \pi x \cos \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right) \\ \overline{U}_r &= -\frac{1}{r} \sin \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right) \\ \overline{P} &= P_0 - \frac{\pi^2}{2} x^2 - \frac{1}{2r^2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

L'absence de couche limite sur la paroi latérale en raison de l'injection fait que la solution de Taylor-Culick (6.14), pourtant solution d'un problème non visqueux, vérifie les quatre conditions limites (6.13) issues de l'équation de Berman (6.11) alors que seulement trois sont nécessaires quand $\text{Re} \rightarrow \infty$.

Un des grands points forts de cette solution est sa robustesse vis-à-vis des conditions géométriques

et aux limites. En effet, on retrouve des écoulements moyens très proches de la solution de Taylor-Culick pour $Re > 1000$ et dans les montages gaz froids où les conditions d'injection ne sont pas strictement $V_{inj} = c^{*e}$ le long de la paroi latérale et où un fort bruit ambiant existe. Les figures 6.1(a), 6.1(b) et 6.1(c) montrent les profils de vitesses longitudinales \overline{U}_x pour trois positions axiales x/R distinctes obtenus par Dunlap [19] et comparés à la solution de Taylor-Culick (6.14).

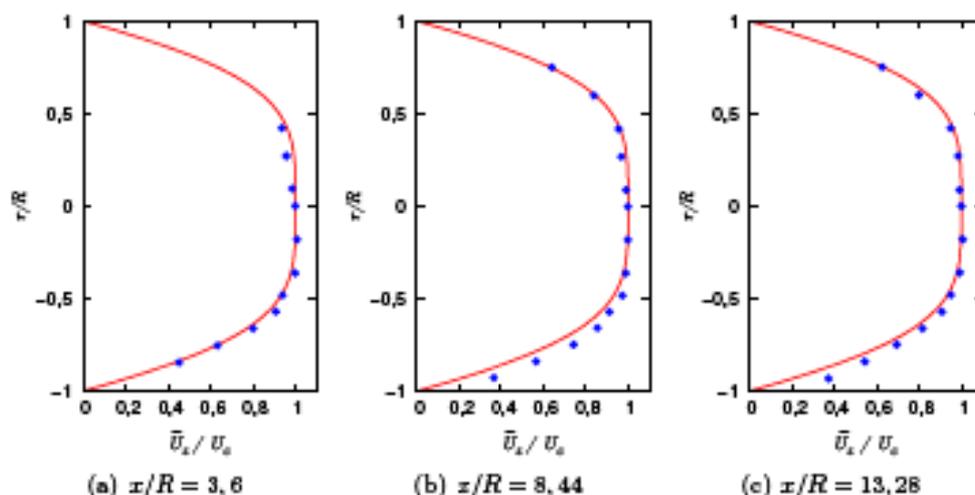


FIGURE 6.1 – Profils radiaux de la vitesse moyenne axiale normalisée par la vitesse au centre (U_c), pour plusieurs positions axiales, mesurés par Dunlap [19]. Le nombre de Mach d'injection, basé sur la vitesse d'injection, est $1,8 \cdot 10^{-3}$. En trait plein : la solution analytique de Taylor-Culick. Extrait de la thèse de B. Gazanion [22]

De même la figure 6.2 montre différents profils de \overline{U}_x obtenus sur le montage VALDO [3].

6.3.2 ETCE des moteurs à propergol solide

S'il est assez simple d'effectuer une analyse de stabilité linéaire sur la base de l'écoulement de Taylor-Culick, il n'en va pas de même dès lors que l'on s'intéresse à un moteur réel. En effet, lors, d'un tir, la géométrie des blocs de propergol évolue en raison de leur combustion. Par ailleurs, à un instant donné du tir, la géométrie des blocs n'est pas forcément cylindrique (plutôt légèrement conique) et la vitesse d'injection n'est pas constante en espace.

Pour arriver à nos fins, on s'est appuyé sur la base de données des moteurs échelles réduites dont on dispose à l'ONERA. Étant donné les vitesses de régression des blocs de propergols, typiquement de l'ordre de la dizaine de centimètres par seconde, et les fréquences des instabilités mesurées dans ces moteurs, plusieurs centaines de Hertz, on peut décrire l'évolution en temps de la solution moyenne comme la superposition d'écoulements stationnaires. Partant de ce constat, l'idée est donc de ramener à un instant donné t l'écoulement interne d'un moteur à propergol solide à un écoulement de Taylor-Culick équivalent. La difficulté est de trouver une vitesse V_{inj}

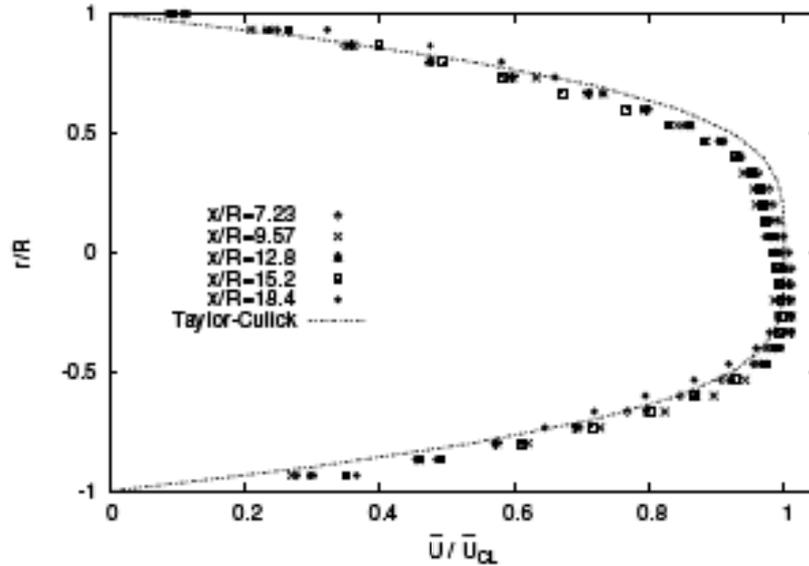


FIGURE 6.2 – Profils radiaux de vitesse axiale normalisée par la vitesse sur l'axe (U_c), pour plusieurs positions axiales, mesurés par Avalon [3]. La vitesse d'injection est $V_{inj} = 1.05$ m/s. En trait pointillé la solution de Taylor-Culick. Extrait de la thèse de B. Gazanion [23]

et un rayon R équivalents, constants en x , à chaque instant t à partir d'une géométrie initiale complexe. On dit que l'on cherche l'ETCE (Écoulement de Taylor-Culick Équivalent) à l'écoulement considéré à chaque instant.

En s'appuyant sur les données du code PERSE [28] qui fournit, pour chaque instant d'un tir, des distributions monodimensionnelles (axiales) de grandeurs comme le diamètre interne $D(x)$, la vitesse d'injection moyenne $V_{inj}(x)$, le débit surfacique $\dot{m}(x)$, la vitesse moyenne $u(x)$ ou encore la pression estimée $P(x)$, une procédure de détermination d'un rayon équivalent et d'une vitesse d'injection équivalente, a été développée [12]. Après une analyse détaillée de l'ensemble des tirs disponibles [14], différentes solutions ont été testé afin de rendre compte de la meilleure manière qui soit de l'effet des cavités non débitantes, de la conicité des blocs de propergols ou encore des intersegments. On a retenu finalement les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{D(x)}{2} dx \\
 V_{inj} &= \frac{u(x)R}{2x}
 \end{aligned}
 \tag{6.15}$$

où L est la longueur totale du moteur hors cavités amont non débitantes. On voit que R correspond au rayon moyen du volume fluide généré par les parties débitantes de la chambre. La formulation retenue pour V_{inj} tire profit de la conservation du débit injecté à travers toute section $x = c^{te}$. Le débit croît linéairement suivant x et donc le rapport $u(x)/x$ est constant, puisque $u(x)$ est la vitesse moyenne. Ce choix pour V_{inj} justifie celui fait pour R de ne tenir compte que

des parties débitantes.

La démarche a été appliquée à l'ensemble des tirs de moteurs échelles réduites disponibles ainsi qu'au tir 510 d'Ariane 5 pour lequel on dispose d'une restitution PERSE. Notons tout de même que dans le cas du booster d'Ariane 5, l'hypothèse initiale de séparation des temps caractéristiques de la régression des blocs de propergols et de la propagation des instabilités devient sujette à caution.

Finalement ce qu'il faut retenir, c'est que, pour un moteur donné, à partir des valeurs de R et V_{inj} de l'ETCE connues à chaque instant t , on connaît l'évolution du nombre de Reynolds Re (6.3) au cours du tir. Comme la solution du problème de stabilité sur la base d'un écoulement de Taylor-Culick ne dépend que de Re et de $X_f = L$, on peut connaître l'évolution des modes de stabilité de ce moteur.

6.4 Caractéristiques des instabilités

L'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres associés au problème de stabilité comprend quelques caractéristiques bien spécifiques qui sont à l'origine des constatations faites sur les signaux de pressions fluctuantes des moteurs. Tout d'abord, le spectre est discret¹, il n'existe pas de branche continue. On constate en outre que les modes dépendent assez peu du nombre de Reynolds Re dès lors que ce dernier est supérieur à 1000. Rien d'étonnant car comme on l'a précisé avant l'écoulement de base est pratiquement indépendant de Re . Par ailleurs, les parties réelles des valeurs propres ω_r évoluent peu avec X_f , l'écart entre modes restant pratiquement inchangé. Cela signifie que l'écart fréquentiel entre les modes est indépendant de X_f . Enfin, l'ensemble du spectre donne des valeurs propres dont la partie imaginaire est négative, ce qui signifie que les modes sont temporellement amortis. Un exemple typique de spectre est donné sur la figure 6.3. Les modes trouvés sont temporellement stables mais lorsque l'on se penche sur les vecteurs propres associés, on constate une très forte amplification spatiale. On présente sur la figure 6.4(a) et 6.4(b) les fonctions propres d'un mode de stabilité. On remarque tout de suite que les deux fonctions propres \hat{u}_x et \hat{u}_r sont fortement amplifiées dans la direction axiale. On montre que cette amplification est supérieure à e^x pour \hat{u}_x , puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\|\hat{u}_x\|} = 0$. On note que l'amplitude \hat{u}_x est environ 10 fois supérieure à celle de \hat{u}_r . En outre, on constate que l'amplitude de la perturbation \hat{p} est très faible. Seules les composantes de vitesse \hat{u}_x et \hat{u}_r sont significatives pour ces modes.

On a donc à faire à des modes temporellement stables mais fortement amplifiés dans la direction x .

6.5 Comparaison avec les mesures

Afin de comparer les résultats obtenus par l'analyse de stabilité globale aux mesures effectuées sur les différents montages en gaz froid et gaz chaud, il convient de re-dimensionner les

1. Parmi les modes les moins amortis auxquels nous nous sommes intéressés, nous n'avons jamais identifié de branche continue

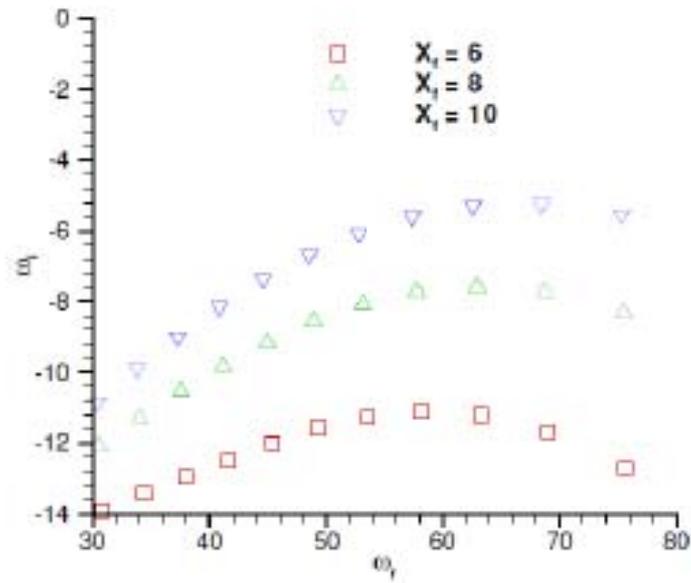


FIGURE 6.3 – Spectre des valeurs propres ω sur la base de l'écoulement de Taylor-Culick pour $Re = 2100$, tiré de [13]

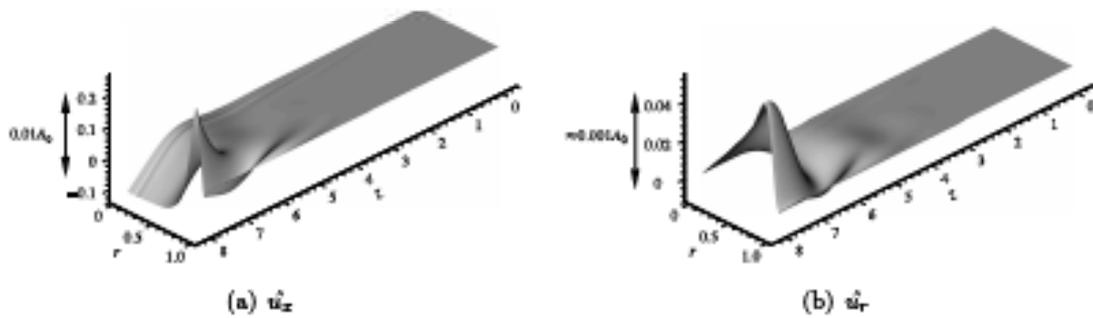


FIGURE 6.4 – Fonctions propres associées au mode $\omega = 40,409 - 9,164i$, tiré de [16]

grandeurs théoriques et notamment la pulsation complexe ω . En notant f la fréquence et ν le taux d'amortissement on obtient les relations fondamentales suivantes :

$$\begin{cases} f = \frac{V_{inj}}{2\pi R} \omega_r \\ \nu = \frac{V_{inj}}{R} \omega_i \end{cases} \quad (6.16)$$

Avec ces relations (6.16), les perturbations q peuvent s'écrire :

$$q = \hat{q} e^{-\lambda t} = [\hat{q}_r \cos(2\pi f t) + \hat{q}_i \sin(2\pi f t)] e^{\nu t} \quad (6.17)$$

Dans un premier temps, si on s'intéresse au montage VALDO, où R et V_{inj} sont fixés, alors en effectuant une transformée de Fourier du signal provenant d'une sonde fil chaud placé dans l'écoulement, on obtient la figure 6.5. Sur cette figure sont représentées les valeurs des fréquences

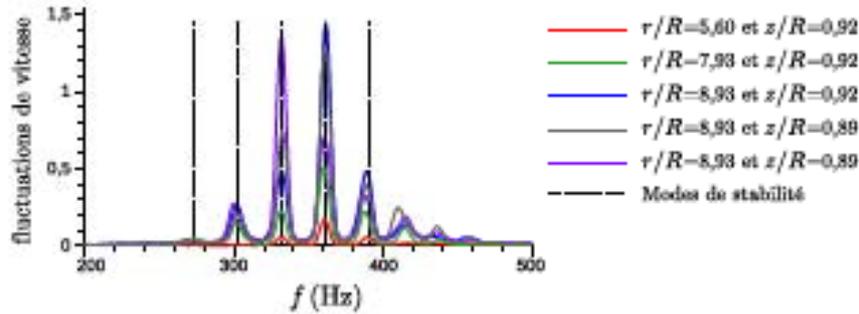


FIGURE 6.5 – Spectres de vitesse obtenus en plusieurs positions du montage VALDO et comparés aux valeurs théoriques issues de la stabilité linéaire pour $Re = 2000$, tiré de [13]

obtenues par la théorie de stabilité linéaire pour le nombre de Reynolds considéré. On voit que certaines fréquences discrètes sont amplifiées et qu'elles correspondent bien aux fréquences propres des modes de stabilité. Pour une fréquence donnée, on peut extraire des spectres de vitesse, l'allure des profils axial et radial des fluctuations de vitesses. Notons que la sonde fil chaud utilisée dans le montage VALDO donne accès à $\hat{u}_{rms} = \sqrt{\hat{u}_z^2 + \hat{u}_r^2}$. On trace sur les figures 6.6(a) et 6.6(b) les évolutions axiales et radiales de \hat{u}_{rms} pour $f = 360$ Hz. Les résultats de stabilité linéaire étant définis à une constante près, un calage de l'amplitude est nécessaire. Bien que peu de points soient disponibles dans la direction radiale r , on note que le maximum d'amplitude observé en proche paroi est bien reproduit par la théorie de stabilité linéaire. Ensuite, La croissance axiale des modes correspond très bien aux mesures. On a donc pour ces modes une compétition entre une croissance axiale très forte et un amortissement temporel.

D'autres essais VALDO ont été réalisés avec une vitesse d'injection V_{inj} lentement variable dans le temps. Ainsi, d'après (6.16), les fréquences des modes doivent évoluer linéairement vis-à-vis de V_{inj} . Sur la figure 6.7, on présente les résultats obtenus dans le cas d'un accroissement de la vitesse d'injection V_{inj} . On remarque que les fréquences amplifiées se répartissent le long de droites qui correspondent aux évolutions théoriques des modes de stabilité. Bien que la théorie de stabilité linéaire prévoit la présence des modes tout au long de l'évolution en temps, les mesures montrent que seules certaines fréquences sont amplifiées.

Enfin, pour compléter l'analyse on s'est intéressé aux moteurs échelles réduites et au tir 510 d'Ariane 5. Les figures 6.8(a) et 6.8(b) montrent les comparaisons obtenues respectivement pour le tir n°24 du moteur échelle 1/35^{ème} du P230 appelé LP9, et pour le P230 d'Ariane 5. Pour ces deux moteurs, le calcul de l'ETCE donne accès aux variations de fréquence par l'intermédiaire

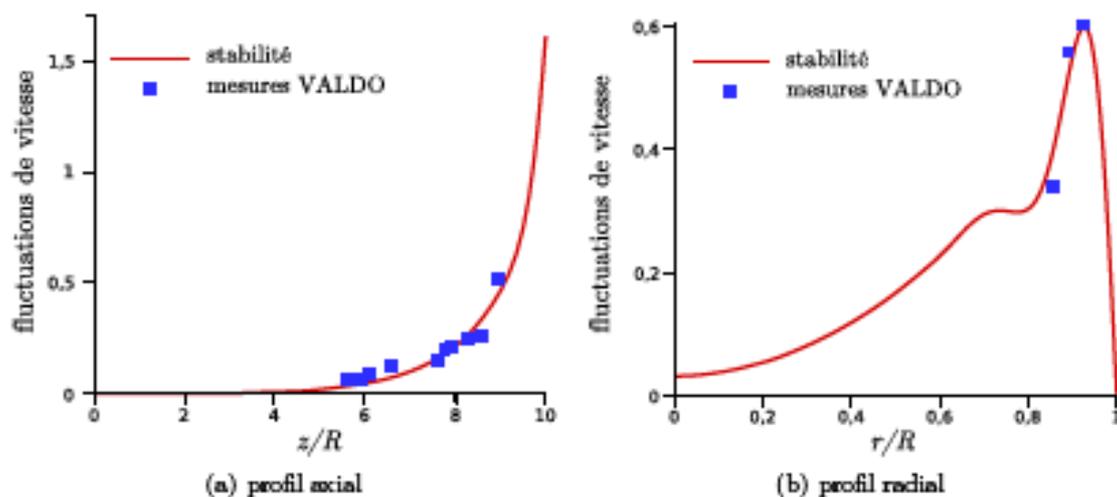


FIGURE 6.6 – Profils axial et radial de vitesse \hat{u}_{rms} mesurés dans VALDO et comparés aux résultats de stabilité linéaire, tiré de [16]

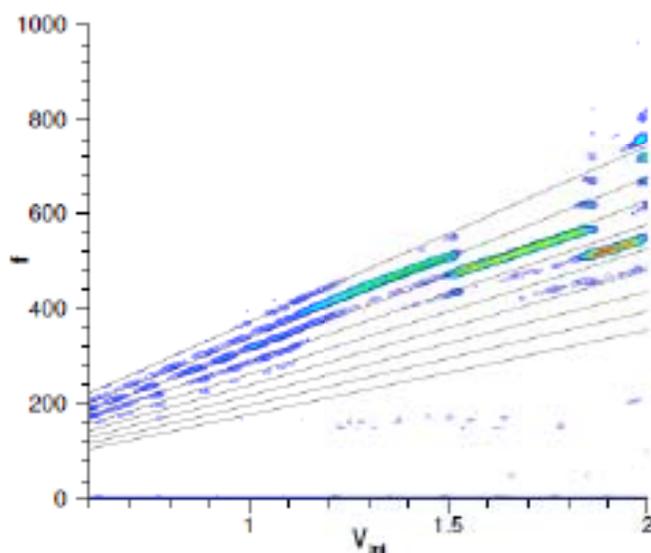


FIGURE 6.7 – Évolution de l'amplitude des fréquences mesurées dans VALDO en fonction de la vitesse d'injection V_{inj} , tiré de [13]

du rapport $\frac{V_{inj}}{R}$. En effet, les variations du nombre de Reynolds au cours d'un tir étant relativement faible et les résultats de stabilité étant pratiquement indépendants du nombre de Reynolds,

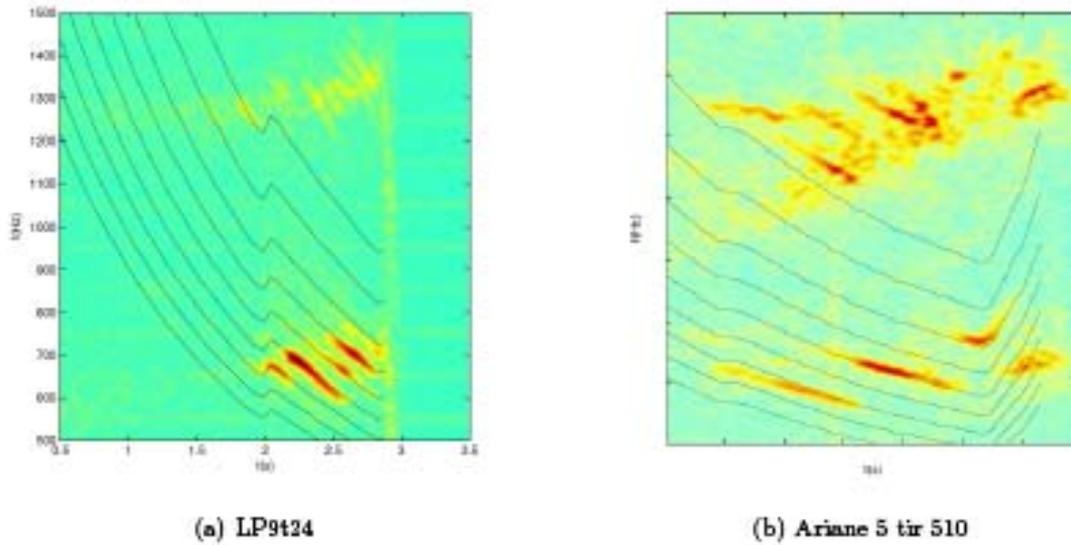


FIGURE 6.8 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante pour le LP9 tir 24 et le tir 510 d'Ariane 5. L'évolution des modes de stabilité est indiquée en traits continus. Tiré de [17]

les fréquences des modes de stabilité sont directement proportionnelles au rapport $\frac{V_{inj}}{R}$ comme l'indique l'équation (6.16). Ces figures montrent très clairement que le calcul de l'ETCE permet de retrouver l'allure des glissements en fréquence², même si, une fois de plus, on n'observe des fréquences amplifiées que dans certaines zones du plan temps-fréquence. Une comparaison plus exhaustive avec l'ensemble des essais disponibles est donnée dans [14, 17].

Ce qu'il faut retenir de ces comparaisons peut se résumer ainsi. Les glissements en fréquence observés expérimentalement sont la trace de modes d'instabilité dont la pulsation est donnée par l'analyse de stabilité linéaire. Ce qui est remarquable, c'est que les écarts fréquentiels observés correspondent tout à fait aux écarts entre modes calculés théoriquement. Ces modes sont temporellement stables ce qui peut expliquer que l'on ne les observe pas tout le long du tir. En revanche ils sont fortement amplifiés spatialement ce qui suggère que, s'ils sont excités, ces modes peuvent émerger, ayant des amplitudes suffisamment grandes pour être mesurés. Ainsi, s'il semble assez clair que ces modes sont responsables des oscillations de poussée, il faut encore expliquer comment ces modes émergent dans l'écoulement, et à quel moment. La réponse à la première question paraît assez évidente puisque les glissements en fréquences mesurés interviennent toujours autour des modes acoustiques des moteurs. Il doit certainement exister un couplage entre les modes acoustiques et ces modes de stabilité. Le chapitre 7 détaille ce point précis. La réponse à la seconde question est plus délicate et a fait l'objet de la thèse de B. Gazanion. Le chapitre 8

2. Les évolutions parfois complexes des fréquences sont liées à la régression des blocs de propergols. La cassure à $t = 2$ s dans le cas du moteur LP9 est directement liée à la fin de la combustion du premier bloc de propergol. Lorsque les blocs sont pratiquement consommés, la vitesse de régression augmente brusquement, ce qui entraîne une augmentation rapide du débit et donc une augmentation de la vitesse d'injection équivalente de l'ETCE.

présente les éléments qui nous conduisent à incriminer la transition laminaire-turbulent quant à la survenue de l'émergence des modes de stabilité au cours d'un tir.

Chapitre 7

Simulation numérique de l'interaction entre les modes de stabilité et un mode acoustique

A l'aide du code CEDRE de l'ONERA, on a tenté de reproduire l'interaction entre un mode de stabilité et un mode acoustique. Plusieurs étapes ont été nécessaires. Tout d'abord, on s'est assuré que l'on dispose d'un outil numérique susceptible de capturer les modes trouvés par l'analyse de stabilité. Dans un second temps, on a mis en place une stratégie de calcul nous permettant de reproduire le couplage entre ces deux types de modes.

7.1 Acoustique dans les conduits à paroi débitantes

Pour caractériser l'acoustique d'un conduit à paroi débitante, on s'est appuyé sur un modèle développé par Flandro et Majdalani [21] qui propose une solution analytique au problème de couche limite acoustique.

Toute grandeur physique Q est décomposée en une partie moyenne \bar{Q} , qui correspond à la solution de Taylor-Culick en pratique, à laquelle on ajoute deux contributions fluctuantes \check{q} et \tilde{q} . La première \check{q} est une contribution irrotationnelle et compressible qui correspond en fait aux solutions d'ondes planes dans un conduit axisymétrique. Les ondes planes acoustiques \check{q} peuvent être exprimées selon la formulation suivante :

$$\begin{cases} \check{p}(x, t^*) = \cos(\omega_m x) e^{-i\omega_m t^*} \\ \check{u}(x, t^*) = i \sin(\omega_m x) e^{-i\omega_m t^*} e_x \end{cases} \quad (7.1)$$

où \check{p} et \check{u} sont les pression et vitesse fluctuantes de l'onde plane longitudinale. Le temps $t^* = ta_0/R$ est un temps caractéristique d'évolution des fluctuations acoustiques, où a_0 est la vitesse du son. La pulsation ω_m est donnée par la relation :

$$\omega_m = (m - \frac{1}{2})\pi/X_f \quad (7.2)$$

où $m \in \mathbb{N}^*$.

La seconde partie fluctuante \tilde{q} est une contribution rotationnelle et incompressible. C'est en

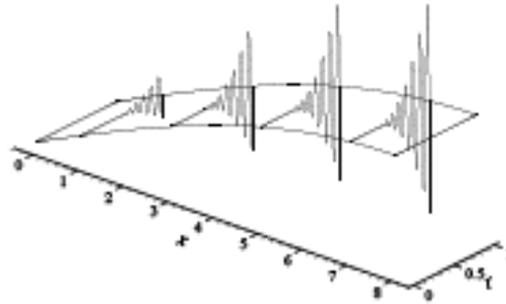


FIGURE 7.1 – Profils radiaux de la vitesse longitudinale pour le premier mode acoustique $\omega_1 = 6.545$, tiré de [16]

fait une correction à la solution en ondes planes qui permet de rendre compte de la présence d'un écoulement, notamment au niveau de l'injection par la paroi latérale. Comme l'ont montré Majdalani et Flandro [29], l'onde de vorticité \tilde{q} peut s'exprimer analytiquement en fonction de la fonction de courant moyenne $\bar{\psi} = xF(r)$, voir (6.12). La figure 7.1 donne une illustration de la solution composite $\tilde{u}_z + \tilde{u}_z$ pour le mode $\omega_1 = 6,545$. Les solutions analytiques pour les perturbations \tilde{q} et \tilde{q} constituent un cadre pratique d'approximation analytique des modes acoustiques.

Notons, et c'est très important, que les modes acoustiques ont des composantes $\tilde{v}_z + \tilde{v}_z$ et $\tilde{p} + \tilde{p}$ mais qu'elle ne possèdent pas de fluctuations de vitesse radiale. A l'inverse, les modes de stabilité ont des composantes \tilde{u}_z et \tilde{u}_r mais une composante \tilde{p} d'amplitude négligeable. Ainsi, par la suite, lorsque dans un écoulement il y a superposition de modes acoustiques et de modes de stabilité, en se penchant sur les fluctuations de pression, on aura accès directement aux modes acoustiques, alors qu'en se focalisant sur les fluctuations de vitesse radiale on ne verra que les contributions des modes de stabilité. On mettra largement à profit ce constat dans les simulations numériques.

7.2 Méthodologie de calcul

On commence d'abord par vérifier que le code CEDRE est à même de capter les modes de stabilité. On considère un domaine cylindrique de longueur $X_f = 8R$ avec $R = 0,03 \text{ m}$ ¹ et une vitesse d'injection $V_{inj} = 1 \text{ m/s}$. On effectue un premier calcul laminaire 2D sur une grille fine $n_x \times n_r = 161 \times 301$. Comme on utilise une condition d'adhérence au fond avant, la solution diffère légèrement de celle de Taylor-Culick pour laquelle il y a glissement au fond avant. On tient compte de cette modification de l'écoulement de base pour le calcul de stabilité. On sélectionne

1. En référence au rayon du montage VALDO.

un mode, $\omega = 40,409 - 9,164i$, dont on extrait la partie réelle des fonctions propres associées. Notons que la fréquence de ce mode est relativement éloignée de celle du mode acoustique pour lequel on a $\omega_r \approx 68$. On ajoute à l'écoulement moyen les parties réelles des contributions \hat{u}_z et \hat{u}_r de ce mode avec une amplitude initiale A_0 telle qu'en sortie le maximum de fluctuation longitudinale vaut $\hat{u}_z = 0.01\bar{U}_z$. L'amplitude initiale est choisie faible afin de rester dans le domaine linéaire. A l'instant initial du calcul on se trouve donc avec la solution :

$$U_z = \bar{U}_z + A_0\mathcal{R}(\hat{u}_z) \quad \text{et} \quad U_r = \bar{U}_r + A_0\mathcal{R}(\hat{u}_r) \quad (7.3)$$

On lance alors la simulation instationnaire. Les signaux de différents capteurs placés dans le domaine de calcul sont ensuite exploités. Les figures 7.2(a) et 7.2(b) montrent l'évolution des signaux fluctuants $U_z - \bar{U}_z$ et $U_r - \bar{U}_r$ au point $(x; r) = (7, 333; 0, 342)R$. Le premier constat

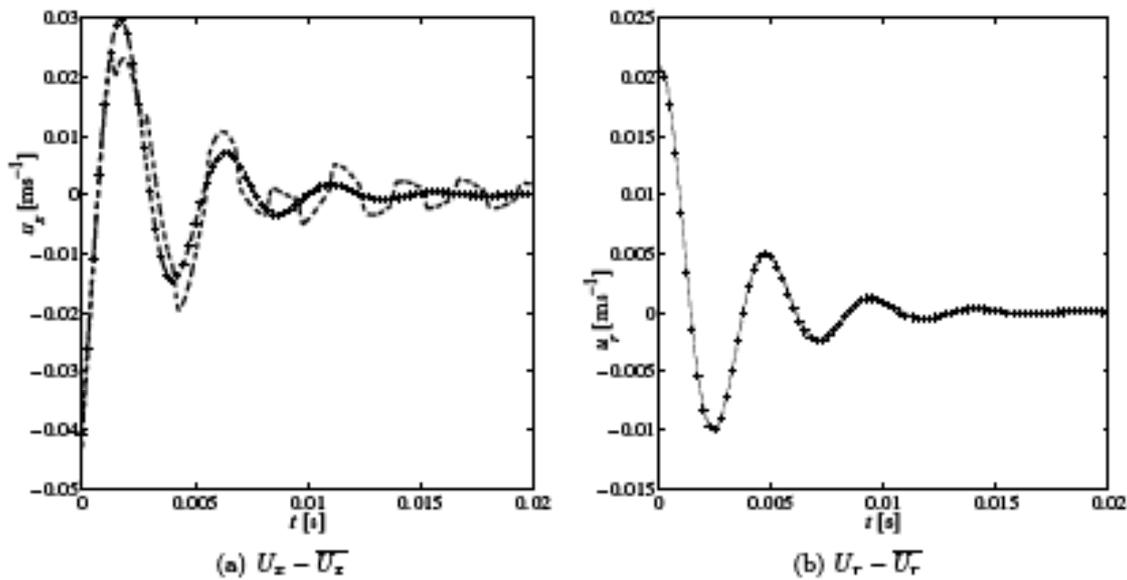


FIGURE 7.2 – Évolutions des parties fluctuantes des signaux de vitesse longitudinale et radiale acquis lors de la simulation au point $(x; r) = (7, 333; 0, 342)R$ (pointillés). Les évolutions théoriques sont représentées en trait continu avec les symboles +. Extrait de [16]

est que sur la figure 7.2(b), la fréquence et l'amortissement (6.16) donnés par la simulation correspondent exactement aux données de stabilité. Il y a superposition des courbes. Ceci est vrai pour l'ensemble des capteurs placés dans le domaine de calcul. En revanche sur le signal de vitesse longitudinale on constate des écarts avec la théorie. Comme indiqué précédemment, les fluctuations de vitesses acoustiques dans la direction radiale sont nulles. Donc il est logique de ne retrouver que la contribution du mode de stabilité initialement introduit dans la simulation sur la composante radiale de la vitesse. Pour la vitesse longitudinale au contraire, les fluctuations de vitesse acoustiques sont non nulles. Le fait d'avoir ajouté à l'écoulement moyen un mode de stabilité à $t = 0$ s, a entraîné le développement d'une réponse acoustique. Pour caractériser cette

réponse acoustique on va tirer profit du fait que le signal de pression comporte uniquement la réponse acoustique.

A l'aide des solutions analytiques données Majdalani et Flandro [29], on effectue une décomposition du signal de pression fluctuante issu d'un capteur sur la base des $M = 100$ premiers modes acoustiques. En utilisant une minimisation par moindres carrés, on trouve les amplitudes A_m des M modes considérés. L'amortissement en temps de ces modes dans la simulation résultant de la diffusion visqueuse (et probablement aussi numérique), et ne possédant pas de modèle pour le prendre en compte, une fonction d'amortissement F_ν *ad-hoc* est introduite pour reproduire cet effet. La figure 7.3(a) montre le signal issu du capteur positionné en $(x; r) = (6, 666; 0, 2)R$ ainsi que la combinaison linéaire des 100 premiers modes acoustiques tandis que la figure 7.3(b) présente les amplitudes A_m des vingt premiers modes. La combinaison linéaire des 100 premiers

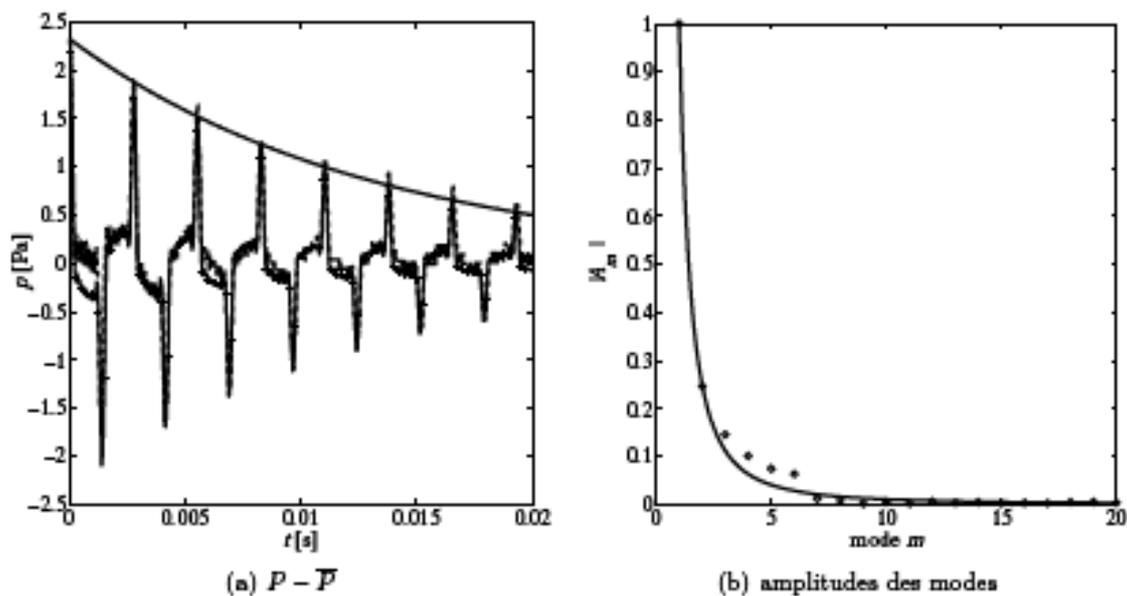


FIGURE 7.3 – Signal de pression (pointillés) et combinaison linéaire de modes acoustiques (trait plein et symbol +) d'amplitude A_m . La fonction d'amortissement F_ν est représentée en trait plein. Extrait de [16]

modes permet de bien reproduire le signal de pression du capteur situé en $(x; r) = (6, 666; 0, 03)R$. En fait, comme $\dot{p} + \bar{p}$ ne dépend pas de r , on peut prendre tout autre capteur en $x = 6, 666R$ et obtenir un résultat identique. On montre que la combinaison trouvée permet de reproduire l'ensemble des évolutions des signaux de pression enregistrés par les différents capteurs placés dans la simulation. En outre, la figure 7.3(b) indique que les amplitudes des modes acoustiques se comportent comme $\frac{1}{m^2}$ ce qui suggère que la distribution est harmonique.

Avec les amplitudes A_m des 100 premiers modes acoustiques et la fonction F_ν , on peut reconstruire l'évolution en temps de vitesse acoustique longitudinale $\dot{u}_x + \bar{u}_x$. Cette évolution est comparée à l'évolution du signal de vitesse fluctuante $U_x - \bar{U}_x$ à laquelle on retranche

l'évolution théorique \hat{u}_x du mode de stabilité introduit à $t = 0$. Les figures 7.4(b) et 7.4(a) donnent un aperçu des résultats obtenus pour les capteurs situés en $(x; r) = (6,666; 0,03)R$ et en $(x; r) = (7,333; 0,342)R$. Il apparaît que l'on est donc capable de reproduire la réponse

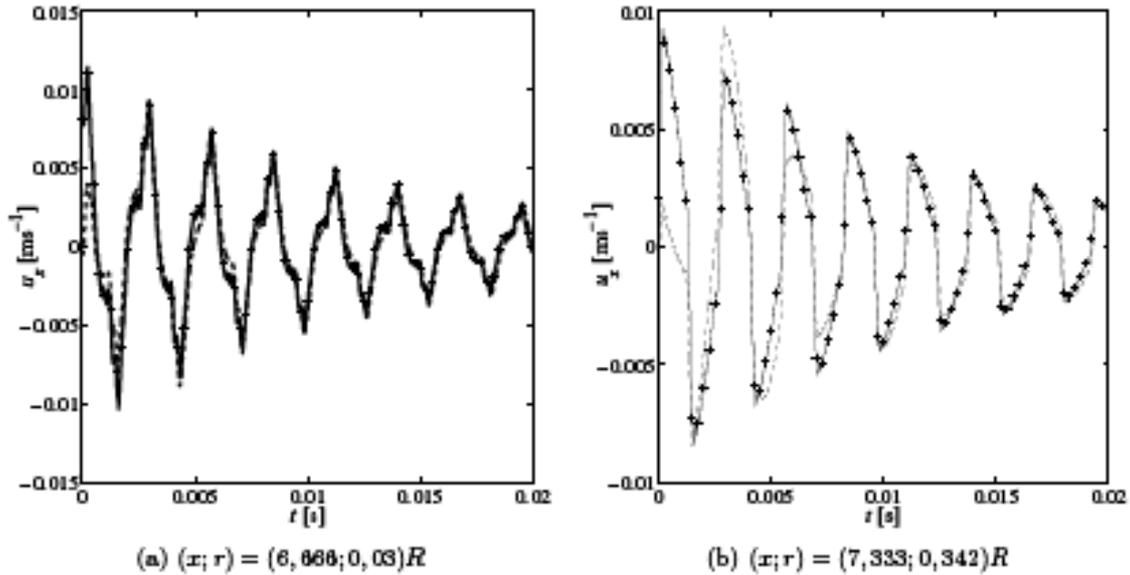


FIGURE 7.4 – Partie fluctuante acoustique de la vitesse longitudinale $\hat{u}_x + \tilde{u}_x$ comparée à $U_x = \bar{U}_x - A_0 \mathcal{R}(\hat{u}_x e^{-i\omega t})$. Extrait de [16]

acoustique observée dans la simulation à partir de la combinaison linéaire de modes acoustiques Majdalani et Flandro [29]. En corollaire, la simulation donne bien l'évolution théorique attendue du mode de stabilité, ce qui signifie que, tant que l'on reste dans le domaine linéaire, le code CEDRE peut capturer finement l'évolution de modes de stabilité. D'autres tests ont été effectués avec d'autres modes, l'ensemble étant présenté dans [16].

Maintenant que l'on dispose des outils nécessaires, une simulation de l'interaction entre des modes acoustiques et de stabilité est entreprise. La longueur du domaine étant fixée, la fréquence acoustique est constante dans la simulation. En faisant évoluer la vitesse d'injection V_{inj} on peut en revanche piloter la fréquence d'un mode de stabilité. L'objectif étant de montrer l'émergence d'un mode de stabilité lorsque sa fréquence approche celle d'un mode acoustique, on ne peut pas introduire artificiellement de modes dans la simulation. Les modes de stabilité étant temporellement stable, on décide d'ajouter du bruit dans la simulation afin de provoquer l'excitation de ces modes. Pour cela, on perturbe légèrement le maillage sur la paroi d'injection avec un bruit blanc tel que le rayon R devient $R = 0,03 + 10^{-4}b(x)$, où $b(x)$ est un bruit blanc gaussien de 3 dB. La déformation est propagée radialement à l'aide de la fonction $\sin\left(\frac{\pi r}{2R}\right)$.

On fait varier linéairement la vitesse d'injection de 0,98 m/s à $t = 0$ s jusqu'à 1,01 m/s pour $t = 0,06$ s. D'après les résultats de l'analyse de stabilité linéaire, seul le mode $\omega = 68,442 - 5.501i$

doit voir sa fréquence croiser la fréquence du premier mode acoustique à $t = 0,04$ s. On espère donc voir émerger ce mode à cet instant là dans la simulation. Pour s'assurer de la présence de modes acoustiques dans la simulation, on introduit à $t = 0$ s une distribution harmonique $A_m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ des 10 premiers modes acoustiques. L'amplitude de la distribution est ensuite normalisée de sorte qu'elle vaille $0,01P_{atm}$, où P_{atm} est la pression atmosphérique imposée en sortie de domaine. Une fois la simulation terminée, on trace sur les figures 7.5(a) et 7.5(b) les signaux² fluctuants des vitesses radiale et longitudinale ainsi que les spectres associés. Sur la partie infé-

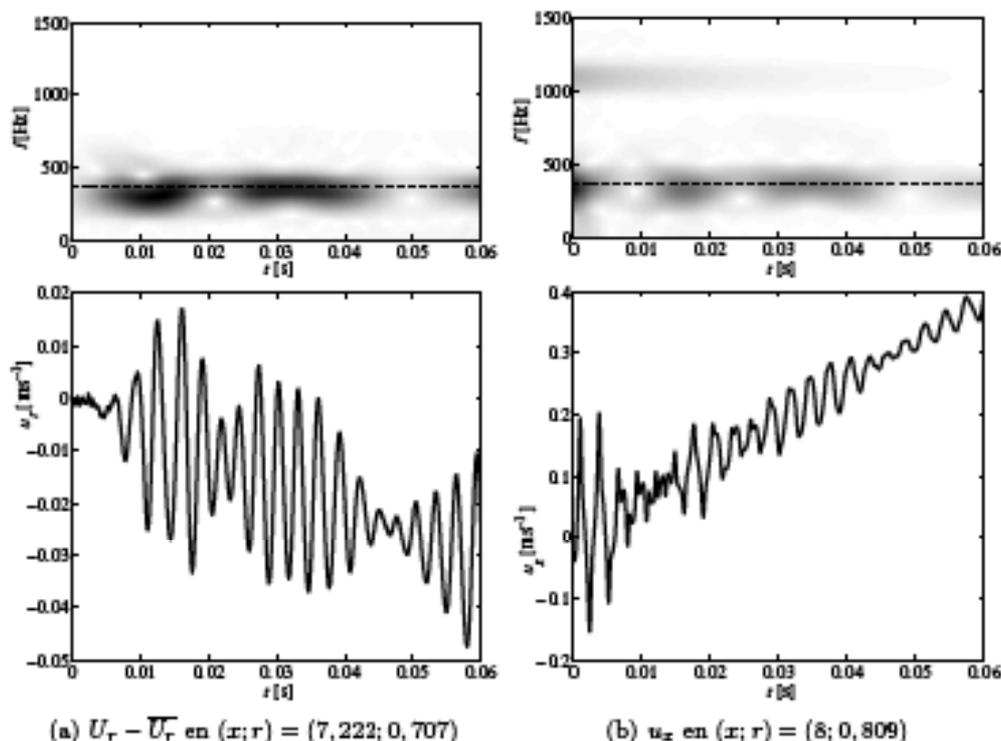


FIGURE 7.5 – Signaux fluctuants et transformée de Fourier à fenêtre glissante de ces signaux. Les lignes horizontales correspondent aux premier mode acoustique de fréquence $f = 363$ Hz.

rieure des figures 7.5(a) et 7.5(b) on distingue deux événements autour des instants $t = 0,015$ s et $t = 0,03$ s. On constate l'apparition d'oscillations de type sinusoïdale avec une phase d'amplification et d'amortissement. Les fréquences associées sont proches de la fréquence du premier mode acoustique $f = 363$ Hz. Les fréquences associées aux deux événements correspondent respectivement aux fréquences des modes $\omega = 62,288 - 5,328i$ et $\omega = 68,442 - 5,501i$. Les figures 7.6(a) et 7.6(b) permettent de mettre en évidence l'amplification successive de ces deux modes aux instants $t = 0,015$ s et $t = 0,03$ s. Sur les figures 7.6(a) et 7.6(b) sont représentées

2. Les signaux sont filtrés à l'aide un filtre de Butterworth d'ordre 5 et de fréquence de coupure $f_c = 2000$ Hz afin de supprimer une très forte amplification autour de la fréquence 8050 Hz qui perturbe l'analyse.

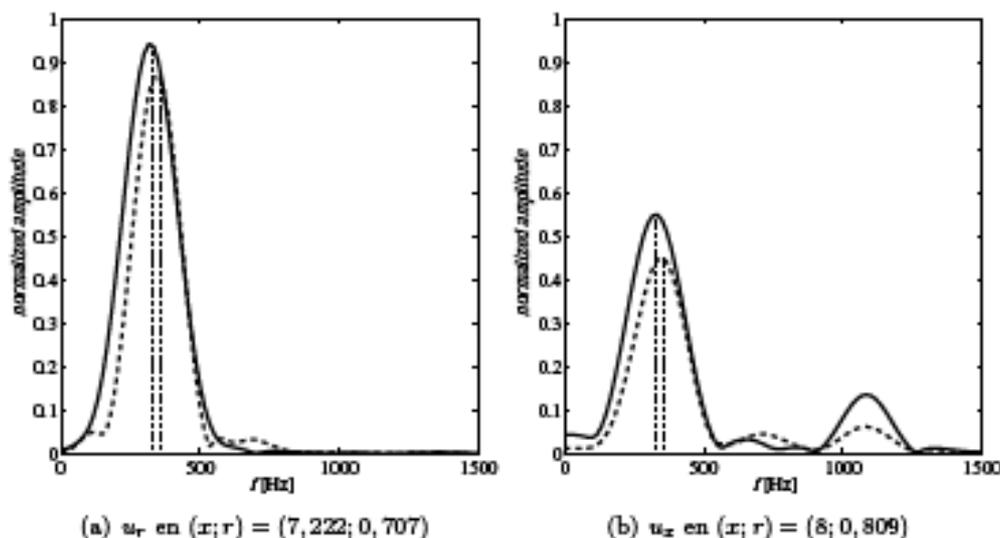


FIGURE 7.6 – Spectre extrait des transformées de Fourier des figures 7.5(a) et 7.5(b) à $t = 0.015$ s (traits pleins) et $t = 0.03$ s (traits pointillés). $t = 0.015$ s. Les lignes verticales représentent les fréquences des modes $\omega = 62,288 - 5,328i$ et $\omega = 68,442 - 5,501$

des coupes des spectres des figures 7.5(a) et 7.5(b) aux deux instants d'intérêt. On s'attendait à l'émergence du mode $\omega = 68,442 - 5,501$ à $t = 0,04$ s autour de la fréquence du premier mode acoustique, et finalement la simulation met en évidence l'amplification successive des deux modes $\omega = 62,288 - 5,328i$ et $\omega = 68,442 - 5,501$ autour du premier mode acoustique entre les instants $t = 0,015$ s et $t = 0,03$ s. Notons tout de même que, compte tenu des contraintes de simulations, la vitesse de croisement des modes de stabilité et acoustique est de 182 Hz/s. Dans le cas du montage VALDO, des expériences avec vitesse d'injection variable et pour un même nombre de Reynolds moyen, voir la figure 6.7, la vitesse de croisement est de 34 Hz/s.

Bien que la simulation permette de reproduire l'amplification d'un mode de stabilité lorsque sa fréquence s'approche de celle d'un mode acoustique, les mécanismes qui conduisent à cette amplification restent encore inconnus. Finalement, à partir de tous ces éléments on peut construire un scénario d'apparition des ODP.

7.3 Scénario d'apparition des ODP

Les glissements en fréquences que l'on observe dans les montages gaz froid et pour les moteurs à échelles réduites ou encore les grands moteurs comme le P230, sont la trace d'instabilités intrinsèques à l'écoulement interne. Ces instabilités sont temporellement stables, elles ne peuvent donc émerger que si elles sont excitées. Leur forte amplification axiale fournit l'amplitude nécessaire pour pouvoir les distinguer dans l'écoulement. L'environnement bruité des montages (injection, combustion, ...) ainsi que les interruptions de débit (découpages en plusieurs blocs de proper-

gols, raccord entre segments de poral dans les montages gaz froid) fournissent une excitation qui permet l'existence des ces instabilités. Ces instabilités sont convectées et lors de leur passage par le col sonique de la tuyère d'un moteur, une onde de pression rétrograde est générée à la fréquence du mode sortant. C'est ainsi qu'on mesure au fond avant des fluctuations de pression dans les moteurs à propergol solide alors que les instabilités y ont une amplitude nulle. Dans le cas des montages gaz froids sans col sonique, on suppose que la section de sortie est partiellement réfléchissante ce qui permet l'émission d'une onde de pression rétrograde jusqu'au fond avant. Cependant l'amplitude des fluctuations de pression est plus faible dans ces cas là, une partie de l'énergie incidente étant évacuée en section de sortie.

Les modes de stabilité peuvent s'amplifier lorsque leurs fréquences s'approchent de celles des modes acoustiques et notamment du premier mode acoustique d'un moteur. Les simulations numériques [16] ont permis de reproduire ce phénomène. L'évolution en temps du rapport $\frac{V_{inj}}{R}$ conduit dans un premier temps un mode à s'approcher d'un mode acoustique, provoquant son amplification. Ensuite, toujours sous l'effet du rapport $\frac{V_{inj}}{R}$, la fréquence du mode de stabilité s'éloigne de celle du mode acoustique et conduit à l'amortissement du mode instable. Dans le même temps, le mode voisin a vu sa fréquence se rapprocher de celle du mode acoustique et il s'amplifie à son tour. C'est ainsi qu'apparaissent les glissements en fréquences sur les figures 6.8(a) et 6.8(b).

Une question reste cependant encore ouverte. Pourquoi les glissements en fréquence n'interviennent que dans la seconde moitié des tirs et jamais en début de tir ? On suppose que cela est lié à l'évolution du rapport d'aspect des moteurs et à la nature de l'écoulement. Au début d'un tir, le rapport d'aspect $\frac{L}{R}$ est grand. Dans la partie amont du moteur l'écoulement est proche de la solution de Taylor-Culick et on pense que les modes de stabilité sont présents et qu'ils s'amplifient mais que cette amplification conduit à l'apparition d'une zone turbulente dans la partie aval du moteur. La turbulence amortie et disperse les fréquences des modes si bien qu'il ne subsiste plus de perturbations cohérentes au niveau du col de la tuyère. Les glissements en fréquence ne se produisent pas. Ensuite, en raison de la régression des blocs de propergols, le rapport d'aspect $\frac{L}{R}$ diminue et la zone laminaire s'étend en aval. La zone turbulente devenant de plus en plus petite, des structures cohérentes passent au niveau du col et provoquent l'apparition des premiers glissements en fréquence. Ce scénario, si séduisant soit-il, ne s'appuie que sur très peu d'éléments, notamment en ce qui concerne l'existence d'une transition laminaire-turbulent au sein des moteurs. Comme il n'existe à l'heure actuelle aucun moyen de mesure permettant une telle caractérisation dans un moteur réel, seules les données des montages en gaz froid peuvent être exploitées. C'est ainsi que la thèse de B. Gazanion a été lancée avec pour objectif de tenter d'identifier et de caractériser la transition laminaire-turbulent supposée.

Chapitre 8

Caractérisation et prise en compte de la transition

L'ensemble des travaux présentés dans ce chapitre sont extraits de la thèse de B. Gazanion, que j'ai co-encadrée avec G. Casalis. Dans toute ce chapitre, on parlera simplement de transition pour désigner la transition laminaire-turbulent.

8.1 Caractérisation expérimentale

Pour cette thèse, des campagnes d'essais spécifiques sur le montage VALDO permettant de caractériser la transition n'ont pas pu être financées. Il a donc fallu s'appuyer sur les campagnes d'essais déjà existantes. Après un examen approfondi des données disponibles, il s'est avéré que la campagne d'essais de 2000-2001 [3] était la plus adaptée à l'étude de la transition.

Le montage VALDO pour cette campagne est composé de quatre segments identiques, voir la figure 8.1(a), dont un est équipé d'une sonde fil chaud notamment, comme le montre la figure 8.1(b). En changeant cet élément de place, on dispose de 8 stations de mesures longitudinales. Sur chacune de ces sections, 30 positions radiales ont été explorées soit au final 240 positions de mesures. Le rayon du montage est $R = 0,03$ m et la longueur totale est $L = 22,4R = 0,672$ m. Par la suite on adoptera la convention $r/R \in [-1, 1]$ avec les valeurs négatives de r qui correspondent aux mesures faites dans le demi-cylindre inférieur du montage. La sonde fil chaud donne accès à la mesure de la norme de la vitesse dans le plan (x, r) , i.e. $U = \sqrt{U_x^2 + U_r^2}$. Comme il a été illustré sur la figure 6.2, l'écoulement moyen mesuré dans le montage VALDO est proche de la solution de Taylor-Culick (6.14). Si on représente l'évolution longitudinale des fluctuations de vitesse $u_{rms} = \sqrt{u^2}$ où $u = U - \bar{U}$, on obtient des amplifications comme l'illustre sur la figure 8.2. On reporte sur cette même figure les mesures obtenues par Dunlap [19]. La figure 8.2 met en évidence une forte amplification des fluctuations de vitesse u_{rms} pour $7 < x/R < 13$ puis une phase de saturation. L'amplification résulte de la croissance des modes de stabilité et la phase de saturation est caractéristique de la perte de linéarité. La conclusion de Dunlap [19] à propos de ces mesures est que l'écoulement devient turbulent pour $x > 15R$ et qu'il existe une région de transition entre $x = 11R$ et $x = 15R$. Étant donné que dans les années 90, l'instabilité

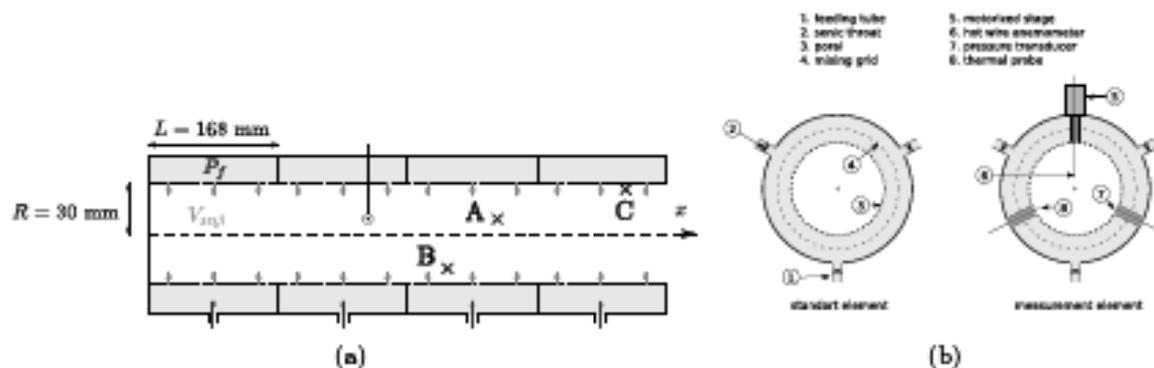


FIGURE 8.1 – Schémas représentant la configuration du montage VALDO, extrait de [23]

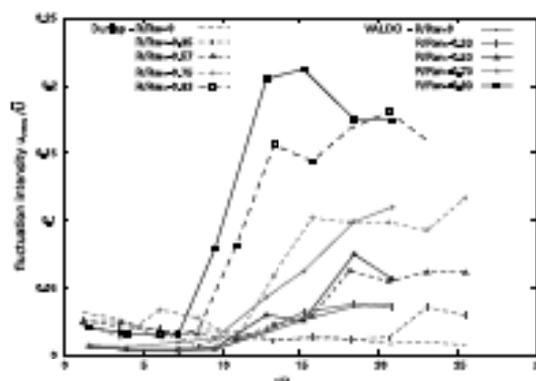


FIGURE 8.2 – Évolution longitudinale des fluctuations de vitesse u_{rms} dans le montage VALDO et dans le montage gaz froid opéré par Dunlap [19]. Extrait de [23].

décrite dans le chapitre 6 n'était pas connue, ces auteurs n'ont pu aller au-delà de ces simples constats. Fort de nos nouvelles connaissances, on a entrepris une analyse détaillée de l'ensemble des signaux disponibles pour le montage VALDO afin de caractériser le plus finement possible la transition supposée se produire dans ces montages gaz froids. Ainsi les 240 signaux de vitesses fluctuantes u_{rms} ont fait l'objet de traitements spécifiques.

Un coup d'œil rapide aux mesures permet d'identifier trois types de signaux distincts. Ils sont donnés sur les figures 8.3(a), 8.3(b) et 8.3(c). Le signal A est une combinaison de plusieurs fréquences harmoniques, le signal B semble être le résultat d'interactions non-linéaires entre différentes fréquences alors que le signal C n'a pas de structuration remarquable. Pour connaître la nature locale de l'écoulement incident qui porte ces signaux, on procède à une analyse du contenu spectral des signaux. Les figures 8.4(a) à 8.4(f) donnent les densités spectrales de puissance, notée p , pour les trois signaux types A, B et C. On retrouve sur ces figures les caractéristiques évoquées précédemment, à savoir que le signal A est une combinaison linéaire de plusieurs fréquences distinctes, que le signal B montrent des harmoniques non-linéaires alors que le signal C est repré-

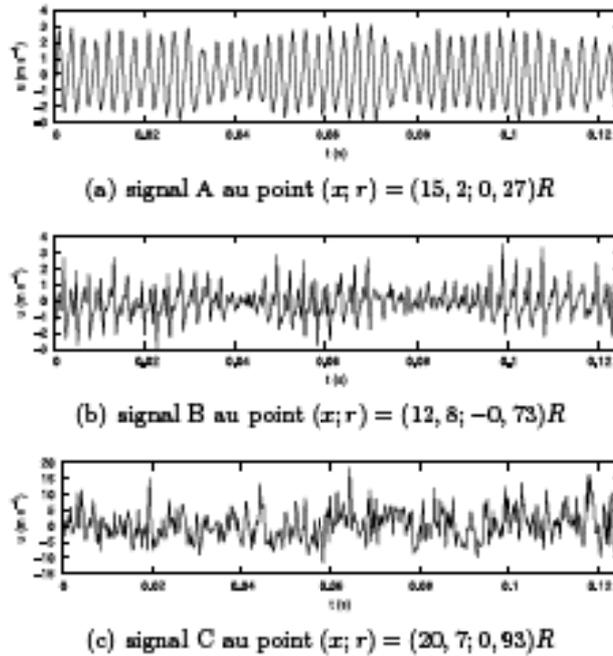


FIGURE 8.3 – Exemples de trois signaux typiquement obtenus dans le montage VALDO, extrait de [23]

sentatif d'un signal turbulent. On remarque sur les figures 8.4(a) et 8.4(c), que les signaux A et B possèdent des fréquences amplifiées caractéristiques des modes de stabilité, dans une gamme de fréquences allant de 280 Hz à 480 Hz et encadrant la fréquence du second mode longitudinal $f = 380$ Hz. Le fait que ces fréquences portent une grande partie de l'énergie indiquent que l'écoulement porteur est au moins en partie laminaire. A l'inverse, si l'écoulement est turbulent les instabilités sont dissipées et les fréquences associées disparaissent des spectres de puissance. Ainsi en calculant pour chaque signal le rapport entre l'énergie portée par ces fréquences et l'énergie totale, on peut définir un critère local qui caractérise la nature de l'écoulement. Ainsi on définit E comme :

$$E = \frac{\int_{\Delta f} p df}{\int p df} \quad (8.1)$$

où Δf est la gamme de fréquence où apparaissent les instabilités soit $\Delta f = [280, 420]$ Hz. Les fortes valeurs de E sont caractéristiques d'un écoulement laminaire alors que les faibles valeurs rendent compte de la nature turbulente de l'écoulement. Gazanion [23] a aussi défini d'autres critères pour caractériser la nature de l'écoulement en s'appuyant sur le temps d'autocorrélation et les statistiques d'ordre élevé comme le "skewness" $S = \frac{\overline{u^3}}{\overline{u^2}^{3/2}}$ et le "flatness" $F = \frac{\overline{u^4}}{\overline{u^2}^2}$. Tous les critères conduisent à un résultat identique. Ce dernier est illustré sur la figure 8.5 sur laquelle l'ensemble des valeurs de E ont été reportées et interpolées afin de fournir un champ dans le plan (x, r) . Ce qu'indique le champ de E , c'est qu'il existe toujours une zone laminaire au centre du

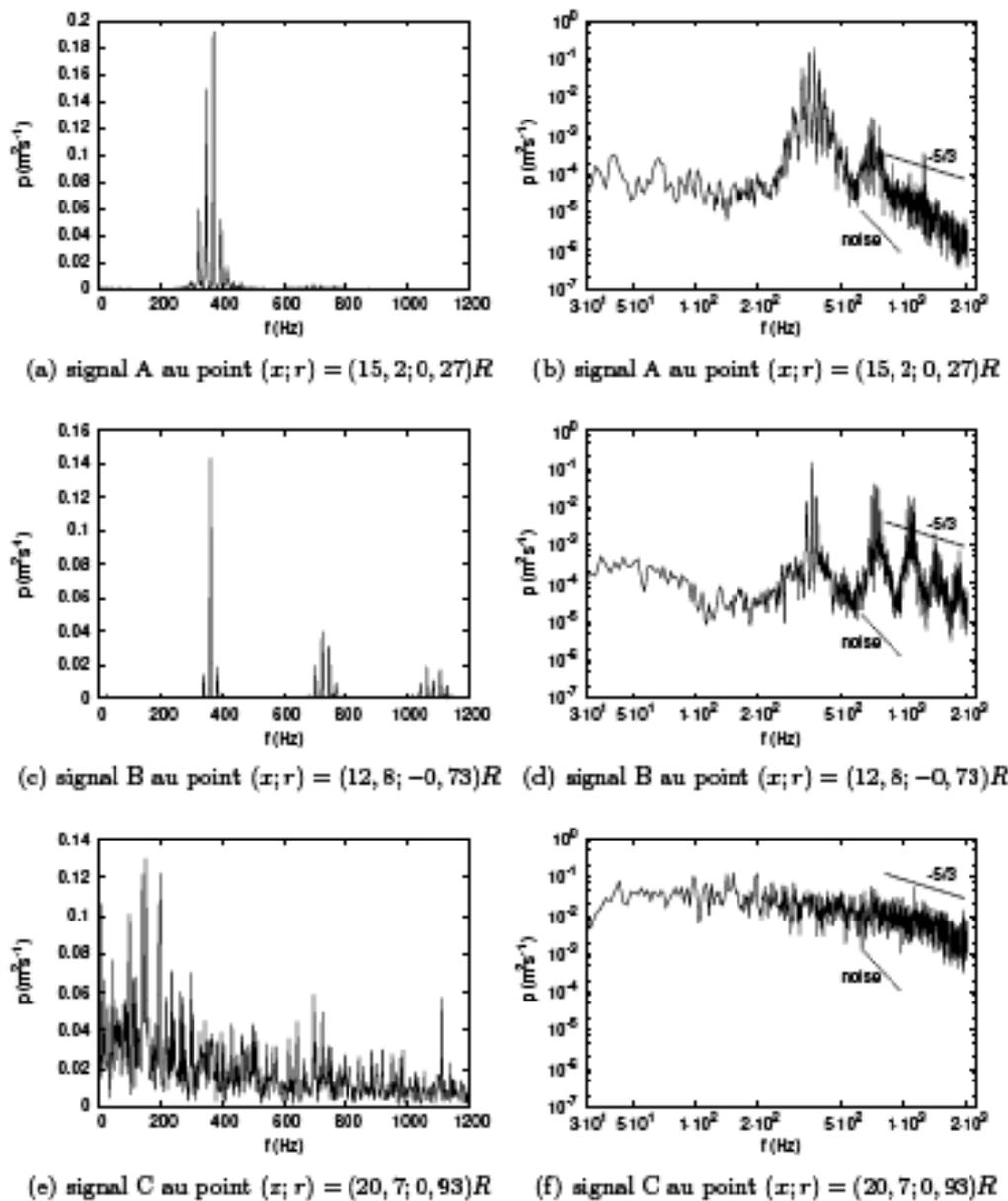


FIGURE 8.4 – Densité spectrale de puissance des signaux A,B et C. Deux représentations sont proposées, une en échelle linéaire, l'autre en échelle logarithmique, extrait de [23]

montage pour $|r| < 0,5$. Il se développe une zone transitionnelle, voire turbulente, lorsque l'on se rapproche de la paroi latérale et s'éloigne du fond avant. Cela est cohérent avec le fait que les modes instables ont des fonctions propres ψ_x et ψ_r , voir les figures 6.4(a) et 6.4(b), dont les maxima sont situés proches de la paroi. La question de la dissymétrie visible sur la figure 8.5 est

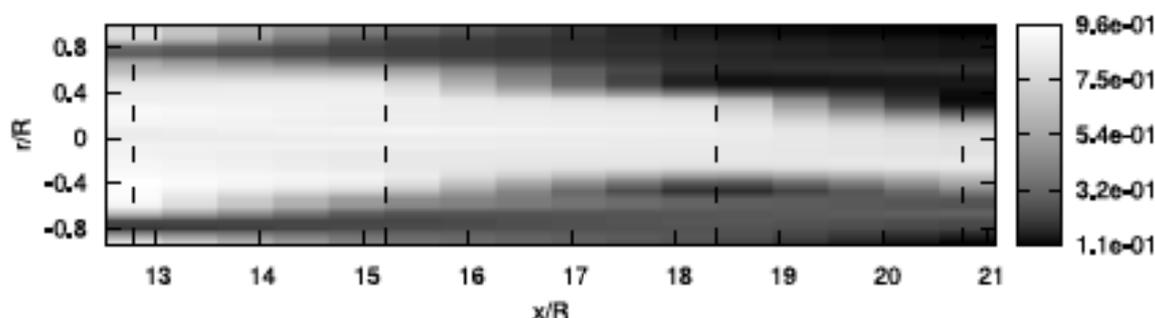


FIGURE 8.5 – Champ du critère E dans le plan (x, r) obtenus à partir des mesures VALDO. Extrait de [23].

abordée dans [23]. On pense que cette dissymétrie est propre aux mesures puisqu'elle se retrouve aussi sur l'écoulement moyen.

Ce qu'apporte cette étude, c'est donc d'une part qu'il existe bel et bien une transition dans les mesures VALDO et, par extension, dans les autres montages en gaz froid. On peut supposer qu'une telle transition intervienne aussi dans les moteurs avec combustion sans qu'aucune preuve directe ne soit disponible à ce jour. Enfin un autre point important mis en évidence par cette étude est le fait que, à une station x donnée, il peut co-exister des zones laminaires et des zones turbulentes. En effet, la transition illustrée par la figure 8.5 montre une dépendance à la fois axiale et radiale de cette ligne de transition.

Avec ces travaux, on a pu caractériser la transition dans une configuration représentative des écoulements internes des moteurs à propergol solide. Si une ligne de transition a pu être définie, aucune information n'existe sur la quantification du niveau de turbulence dans les différentes zones de l'écoulement. Pour faire un parallèle avec les écoulements de couches limites, pour lesquelles la transition est un phénomène mieux compris, on ne dispose pas d'une description de l'intermittence pour ce type d'écoulement. C'est une question importante qui reste encore ouverte.

8.2 Simulations numériques de la transition

Le résultat de l'étude de transition sur la base des mesures VALDO étant acquis, deux pistes ont été explorées à l'aide de l'outil de simulation numérique CEDRE. La première a consisté à définir, pour des calculs RANS, une ligne de transition que l'on va imposer au modèle de turbulence du code CEDRE afin de reproduire l'effet de la transition sur la croissance des instabilités. En pratique, on modifie la viscosité turbulente $\mu_t = \gamma \mu_t^{RANS}$ ¹ avec γ une fonction d'intermittence dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. Un exemple de l'effet de la prise en compte de la transition sur la croissance des instabilités internes est visible sur la figure 8.6(a). On identifie clairement dans la partie amont du domaine, la couche limite acoustique puis l'amplification de

1. La modification de μ_t s'accompagne d'une modification du calcul du terme de production pour l'équation de la dissipation spécifique (modèle $k - \omega$ BSL de Menter [30]) pour lequel il convient de garder $\mu_t = \mu_t^{RANS}$.

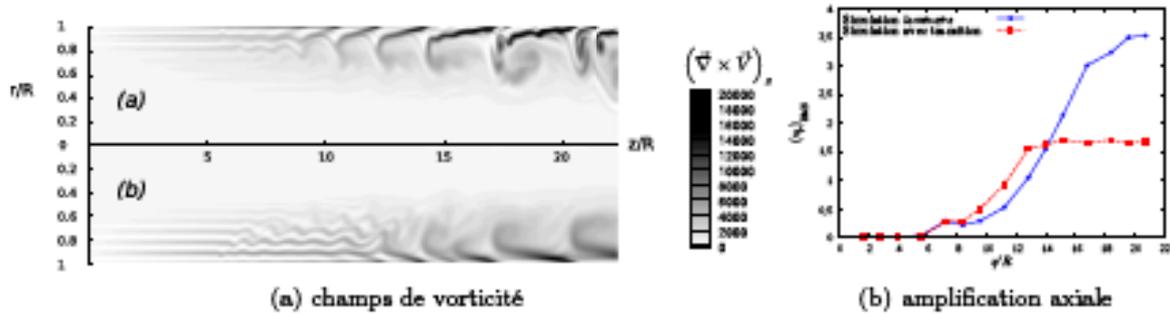


FIGURE 8.6 – Champ instantané de vorticité (a) simulation laminaire (b) simulation avec transition et amplification axiale de la vitesse radiale $(u_r)_{rms}$

modes d'instabilité. La présence de la fonction d'intermittence γ limite l'amplification des modes comme l'indique la figure 8.6(b). On ne détaille pas plus ici ces travaux, une étude paramétrique ayant cependant été entreprise afin de déterminer l'influence de l'étendue de la zone de transition notamment. Une synthèse est disponible dans [24].

La seconde piste suivie a consisté à tenter de reproduire la transition observée dans VALDO afin de comprendre les mécanismes qui conduisent à son apparition. Pour cela, des simulations LES ont été menées à l'aide du code CEDRE. Un domaine de calcul cylindrique de longueur $L = 22,4R$ avec $R = 0,03$ m a été discrétisé avec un maillage comportant 17M de cellules. Il est important de noter que compte tenu du fait qu'il n'y a pas de couches limites dans l'écoulement de Taylor-Culick et que les structures liées aux instabilités sont de grandes tailles, les contraintes de maillage pour être en mesure de capter la transition sont relativement faibles, ce qui justifie l'emploi d'un maillage peu dense.

Afin d'exciter les instabilités, des perturbations ont été ajoutées à la condition limite d'injection, en tentant de reproduire le bruit d'injection existant dans le montage VALDO ainsi que l'effet des raccords entre les quatre segments du montage, voir la figure 8.1(a). On a fait le choix d'introduire des perturbations stationnaires afin de ne pas alourdir le calcul, bien que le bruit d'injection dans le montage VALDO soit instationnaire. Les perturbations ajoutées à la paroi latérales sont donc :

- un bruit blanc gaussien dans la direction tangentielle et d'amplitude $0,5V_{inj}$
- des perturbations de vitesse radiale et azimutale au niveau des inter-segments, respectivement d'amplitude $0,3V_{inj}$ et $0,5V_{inj}$, et donnés sur la figure 8.7

La simulation est menée avec un pas de temps $dt = 2,35 \cdot 10^{-7}$ s et dure 0,28 s. Des capteurs situés aux mêmes positions que ceux du montage VALDO, ainsi que de nombreux autres, ont ensuite été exploités afin de voir si la transition est bien reproduite. Enfin, il est important de signaler que le domaine de calcul s'arrête au niveau de la sortie du montage VALDO, et qu'en conséquence on ne prend pas en compte le jet qui se développe en aval dans une atmosphère au repos. On impose en sortie du domaine une condition à pression imposée, la condition est réfléchissante. Cette condition n'est pas représentative de l'impédance acoustique vue par l'écoulement interne dans le montage VALDO. On s'attend donc à ce que les niveaux acoustiques ne

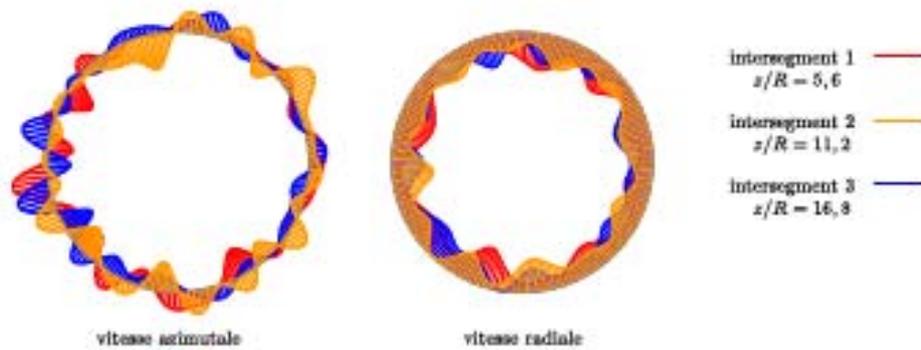


FIGURE 8.7 – Distribution de vitesse sur les intersegments pour la simulation LES

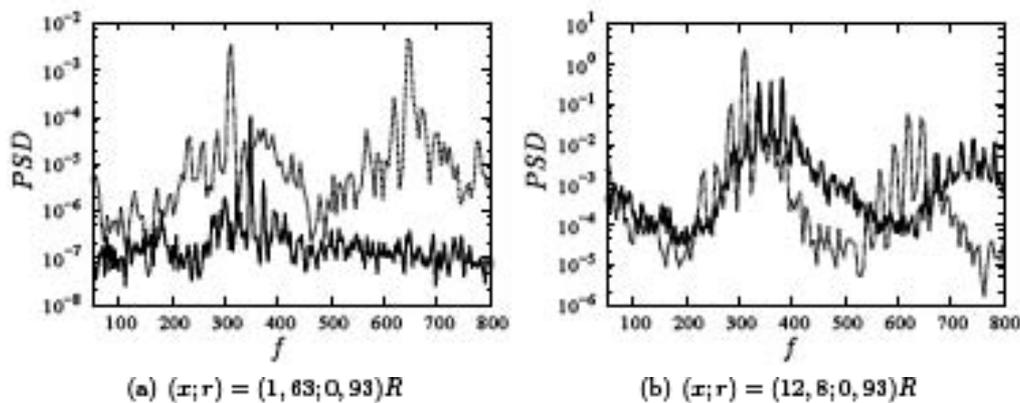


FIGURE 8.8 – Spectres de pression obtenus dans la simulation LES et comparés aux mesures VALDO.

soient pas tout à fait comparables à ceux obtenus expérimentalement. Ils doivent être plus élevés que ceux mesurés.

On commence tout d'abord par vérifier que l'écoulement moyen correspond bien à la solution de Taylor-Culick, voir [22]. Ensuite, en analysant les signaux de capteurs situés au fond avant, on vérifie que l'on obtient bien le comportement attendu, à savoir la présence de pics sur les spectres de pression marquant la trace des instabilités internes. De même, plus en aval, on s'attend à retrouver ces mêmes fréquences mais avec des niveaux d'amplitude plus importants. On présente sur les figures 8.8(a) et 8.8(b) les densités spectrales de puissances obtenues à partir des signaux de pression en question. Les mesures VALDO sont reportées sur ces figures. On constate tout d'abord que l'allure générale des spectres est conforme aux mesures VALDO. Cependant on note, un décalage d'amplitude au fond avant qui est la conséquence de la condition de sortie, vraisemblablement trop réfléchissante et qui conduit à la génération d'ondes de pression rétrogrades trop intenses. Malgré ce défaut, le calcul est somme toute assez fidèle aux mesures puisque la présence des instabilités est bien marquée. On remarque aussi un décalage des fréquences amplifiées d'en-

viron 40 Hz. Une fois encore la condition de sortie est mise en cause, on pense que la longueur de conduit vue par l'écoulement est modifiée par la présence du jet en sortie de montage et que par conséquent les fréquences acoustiques sont légèrement décalées.

Si on filtre l'ensemble des capteurs autour du pic de fréquence le plus amplifié dans la simulation, *i.e.* $f = 312$ Hz et que l'on représente une coupe radiale à x/R fixé, on peut comparer les profils de vitesse obtenus à ceux d'un calcul de stabilité. C'est ce qui est fait sur la figure 8.9, où les profils de vitesse $(v_x)_{RMS}$ et $(v_r)_{RMS}$ sont confrontés à ceux d'un mode de stabilité de même fréquence. Le très bon accord entre simulation et théorie de stabilité linéaire sur les profils de la

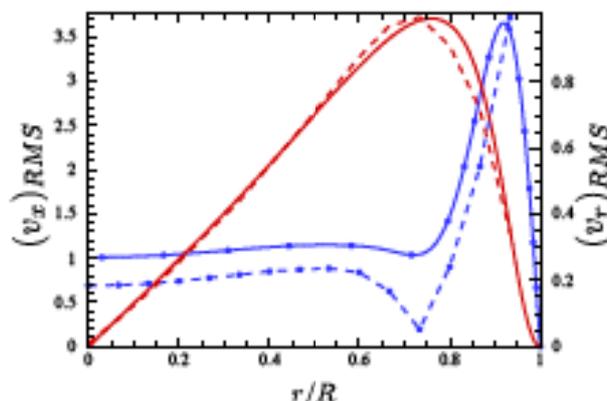


FIGURE 8.9 – Profils de vitesse radiaux en $x = 12,8R$ pour la fréquence $f = 312$ Hz et comparés aux résultats de stabilité.

figure 8.9 confirme la présence des modes internes à l'écoulement. Ces modes sont amplifiés dans la direction axiale. On trace sur les figures 8.10(a) et 8.10(b) les amplifications longitudinales des trois composantes de la vitesse fluctuante, avec et sans filtrage autour du mode dominant à $f = 312$ Hz. Une représentation en coupe du domaine de calcul montre sur la figure 8.11 la tridimensionnalisation de l'écoulement dans la seconde moitié du domaine, déjà visible sur les figures 8.10(a) et 8.10(b). La croissance des modes de stabilité, avec un régime linéaire puis une saturation est bien visible sur la figure 8.11.

Maintenant que l'on sait que la simulation est en partie représentative des mesures VALDO, notamment en ce qui concerne l'amplification de modes de stabilité et la tridimensionnalisation de l'écoulement potentiellement révélatrice de la transition laminaire-turbulent, on applique la méthodologie développée sur la base des mesures VALDO pour la caractérisation de la transition (8.1). Les figures 8.12(a), 8.12(b) et 8.12(c) montrent les champs du critère E^2 obtenus pour la simulation LES et à partir des données VALDO. En raison de la dissymétrie observée dans le montage VALDO, on a reporté sur les figures 8.12(b) et 8.12(c) les résultats obtenus dans les parties haute $r > 0$ et basse du montage $r < 0$. Bien qu'imparfaite, la simulation, montre que l'on arrive à reproduire la transition observée expérimentalement. La croissance des instabili-

2. Comme expliqué dans [22], le critère E est calculé à partir des signaux de vitesse radiale et non à partir de la norme de la vitesse dans le plan (x, r) , pour compenser un défaut du rapport d'amplitude entre u_x et u_r .

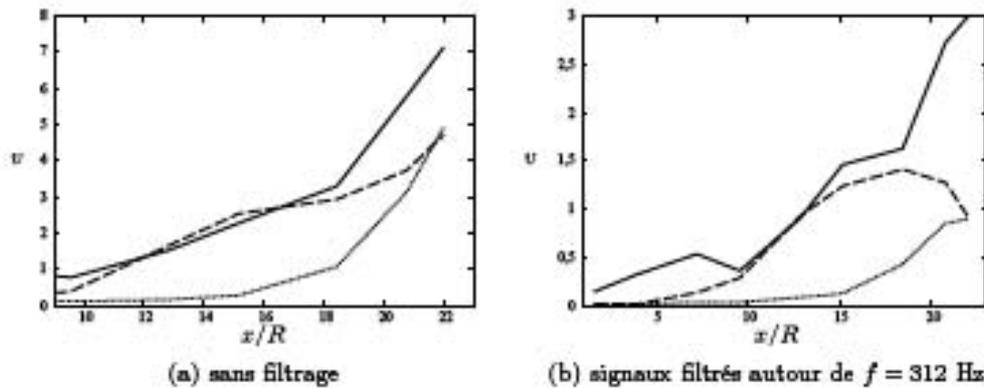


FIGURE 8.10 – Amplifications longitudinales des fluctuations de vitesses $(u_x)_{rms}$ (traits pleins), $(u_r)_{rms}$ (tirets) et $(u_\theta)_{rms}$ (pointillés).

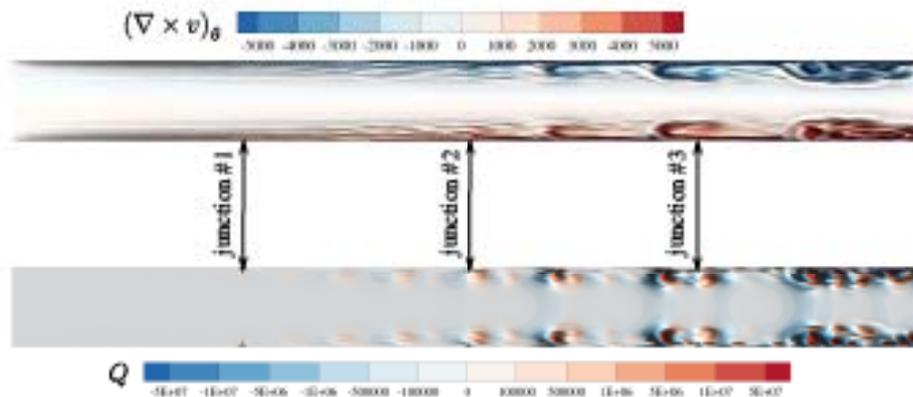


FIGURE 8.11 – Champ de vorticité et iso-contour de critère Q dans une coupe axiale du domaine.

t s internes conduit à une tridimensionnalisation de l'écoulement, puis à l'apparition de petites structures turbulentes. Ces structures sont principalement localisées en région de proche paroi, en raison de la forme des instabilités dont les maxima d'amplitude sont localisés vers la paroi latérale. La zone turbulente contamine le conduit radialement mais on conserve tout de même une zone laminaire au centre du canal, pour la longueur considérée. Ainsi, les instabilités internes des conduits à paroi débitante conduisent à l'apparition d'une zone turbulente pour les grandes valeurs du rapport x/R et sont donc à l'origine de leur amortissement. Le scénario d'apparition des ODP se confirme, la transition étant responsable du fait que les glissements en fréquence ne se produisent que pour des rapports d'aspect L/R faibles.

Dans la thèse de Gazanion [22], une seconde simulation avec un bruit injecté plus fort a été menée parallèlement. On observe aussi une zone turbulente dans cette simulation mais le niveau de bruit injecté a conduit à une tridimensionnalisation anticipée de l'écoulement, non représentative

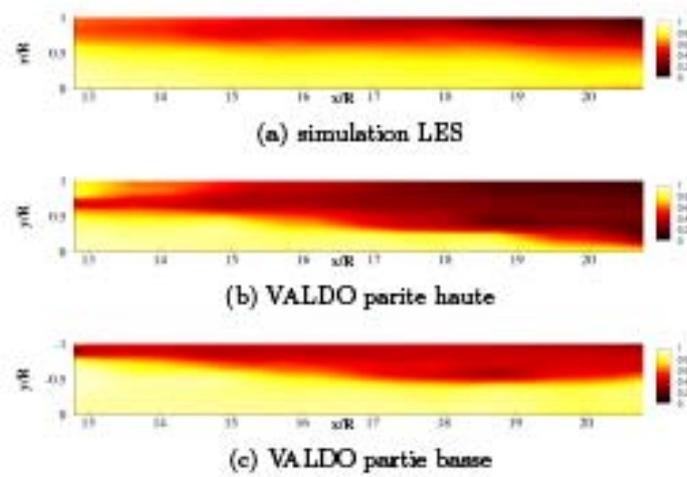


FIGURE 8.12 – Champ de critère E (8.1) pour la simulation et les résultats du montage VALDO

des mesures du montage VALDO.

Chapitre 9

Extension à une géométrie étoilée

Ces dernières années, de nouvelles géométries internes de moteurs à propergol solide ont été envisagées. La plus répandue est celle qui consiste à considérer des blocs dit finocyl. On parle plus généralement de blocs à géométrie étoilée. De telles configurations augmentent la surface de combustion et donc la quantité de gaz brûlés par section.

Évidemment, se pose la question de la stabilité de ces nouvelles configurations. Les instabilités mises en évidence dans le cas de conduits à section circulaire existent-elles toujours dans le cas de blocs à géométrie étoilée? De même, qu'en est-il de la transition? Par ailleurs, on dispose de mesures sur des moteurs échelle réduite et de résultats de calcul qui sont contradictoires. Jusqu'à présent en conduit à section cylindrique, simulation et expérience donnaient des résultats compatibles. Les mesures récentes montrent que pour une configuration étoilée le moteur est stable alors que la simulation prévoit l'émergence d'un nombre important de modes. Pour tenter de répondre à ces questions et fort du savoir-faire acquis, une thèse a été proposée sur ce thème. La thèse a débuté en octobre 2015 au DMAE, le doctorant est M. Bouyges. Je co-encadre cette thèse avec G. Casalis.

9.1 Recherche d'un écoulement de base

Bien entendu, avant toute étude de stabilité on se doit de disposer d'un écoulement de base. On est donc amené à chercher un écoulement représentatif d'un conduit à paroi débitante dont la section n'est plus circulaire mais étoilée, comme illustré sur la figure 9.1(b). On peut toujours utiliser un code CFD comme le code CEDRE pour calculer un tel écoulement, mais on souffre généralement de quelques difficultés lors de l'utilisation de ce type de solution pour des calculs de stabilité en raison de la précision des champs obtenus. Pour rappel, l'écoulement de base et ses dérivées sont les coefficients du système linéaire 6.2 à résoudre. Si possible, il est préférable d'avoir recours à une solution analytique pour le calcul de ces coefficients. C'est pourquoi la thèse M. Bouyges a commencé par la recherche d'une solution analytique au problème considéré. On va chercher une solution comme une perturbation à la solution de Taylor-Culick (6.14) donc dans le cas de conduits faiblement étoilés. On considère les équations de Navier-Stokes en incom-

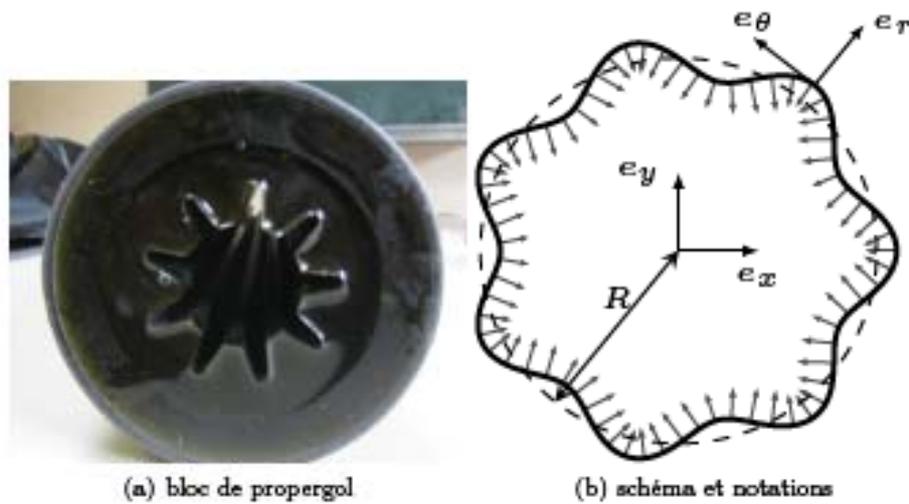


FIGURE 9.1 – Bloc de propergol et schéma d'une coupe en géométrie étoilée

pressible et en stationnaire et on introduit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{r} = \frac{r}{1 + \eta(\theta)} \\ \tilde{\theta} = \theta \end{cases} \quad (9.1)$$

avec $\tilde{r} \in [0, 1]$ dépendant de r et de θ . Le changement de variable a pour but de ramener la géométrie à une géométrie à section circulaire pour faciliter la recherche de solutions. Si $\eta \equiv 0$ alors on retrouve la solution de Berman (6.11). On recherche la solution pour $\eta \neq 0$ et on se place dans le cadre des petites perturbations. On pose $\eta = \varepsilon \sigma$ et on cherche une solution sous la forme d'une perturbation à la solution de Berman en posant :

$$\underline{U} = \underline{U} + \varepsilon \underline{v} \quad , \quad P = \overline{P} + \varepsilon p \quad (9.2)$$

avec ε un petit paramètre. Les conditions limites associées sont :

$$\begin{cases} v_\theta(\tilde{r} = 1) = \sigma'(\theta) \\ v_r(\tilde{r} = 1) = v_z(\tilde{r} = 1) = 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

On injecte dans les équations de Navier-Stokes la décomposition (9.2) et on écrit le système à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. En s'inspirant des travaux de Berman[4], de Taylor [31] et de Culick [18], on

recherche la solution sous une forme à variable séparée :

$$\begin{cases} v_x = \tilde{x} \left(f_1(\tilde{r}) + f_2(\tilde{r})\sigma(\tilde{\theta}) \right) \\ v_r = g_1(\tilde{r}) + g_2(\tilde{r})\sigma(\tilde{\theta}) \\ v_\theta = h_1(\tilde{r}) + h_2(\tilde{r})\sigma'(\tilde{\theta}) \\ p = k\frac{\tilde{x}^2}{2} + l_1(\tilde{r}) + l_2(\tilde{r})\sigma(\tilde{\theta}) \end{cases} \quad (9.4)$$

Les fonctions f_1 , g_1 et h_1 sont introduites à cause du gradient de pression en $k\frac{\tilde{x}^2}{2}$. En effet, dans l'équation de quantité de mouvement selon x , si on a la présence d'un gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ cela implique qu'il faut introduire des fonctions de r pour les composantes de vitesses. Par ailleurs, la dépendance azimutale de la solution recherchée n'est pas quelconque, elle dépend directement des conditions aux limites (9.3) par l'intermédiaire de la fonction σ .

On montre très rapidement que le système indicé 1 est nul avec $f_1 \equiv g_1 \equiv h_1 \equiv 0$. Le gradient de pression axial n'est pas modifié par rapport à la solution de Berman. On a $k = 0$. En revanche, pour le système indicé 2 on aboutit à des équations du type $\Phi(\tilde{r}) = \frac{-\sigma''(\tilde{\theta})}{\sigma(\tilde{\theta})}$. Il doit donc exister

une constante m telle que $\sigma'' = -m^2\sigma$. Comme σ est une fonction qui décrit la condition limite, réelle, en $\tilde{r} = 1$, on prend $m^2 > 0$ et donc $\sigma = \cos(m\tilde{\theta})$. Les conditions aux limites dérivées de (9.3) sont $h_2(1) = 1$ et $f_2(1) = g_2(1) = 0$. Le système est complété par 4 autres conditions aux limites obtenues en $\tilde{r} = 0$. De manière identique à ce qui a été évoqué dans le chapitre 6, on procède à un développement en série de Taylor et on identifie les coefficients par ordre dans le développement. On trouve $g_2'(0) = -F'''(0)$ et $f_2(0) = g_2(0) = h_2(0) = 0$ avec $m \neq 0$ et $m^2 \neq 1$. Le système est ensuite résolu numériquement. Les résultats sont comparés à des simulations réalisées avec le code CEDRE, qui ne présupposent pas $\varepsilon \ll 1$. Pour les calculs on prend les dimensions du montage VALDO $R = 0,03$ m et $V_{inj} = 1$ m/s soit $Re = 2000$. On prend $X_f = 8R$, $m = 7$ et $\varepsilon = 0,01$. Le cas $Re = 200$ est aussi simulé avec $R = 0,003$ m. Dans un premier temps on montre que les simulations retrouvent la solution de Berman à l'ordre $\mathcal{O}(1)$. On retranche ensuite cette solution analytique aux résultats numériques pour comparer les quantités \underline{v} et p .

On représente sur la figure 9.2 les champs des différentes composantes de vitesses v_x , v_r et v_θ obtenus par simulation numérique pour $Re = 2000$ et la solution donnée par (9.4). Les figures montrent un excellent accord entre la solution de similitude et les résultats de la simulation CEDRE. En effectuant des tracés à rayon fixé ou pour $\tilde{\theta} = c^{te}$ on note quelques écarts. De même pour $\tilde{x} > 6$ on voit la solution calculée par le code CEDRE perdre sa linéarité vis-à-vis de \tilde{x} , ce qui n'est pas cohérent avec le problème posé. C'est en fait lié à de légers effets compressibles. Des écarts de l'ordre du % apparaissent, ce qui correspond à quelques dixièmes de m/s pour \overline{U}_2 . Notons qu'à $Re = 200$ les résultats de la simulation sont encore plus proches de la solution de similitude. Enfin, on constate que pour $\varepsilon > 0,03$ des écarts importants commencent à apparaître et l'hypothèse de linéarité de la correction semble mise en défaut. Avec cette solution, qui n'est certes pas analytique mais malgré tout connue avec une grande précision, on peut donc procéder

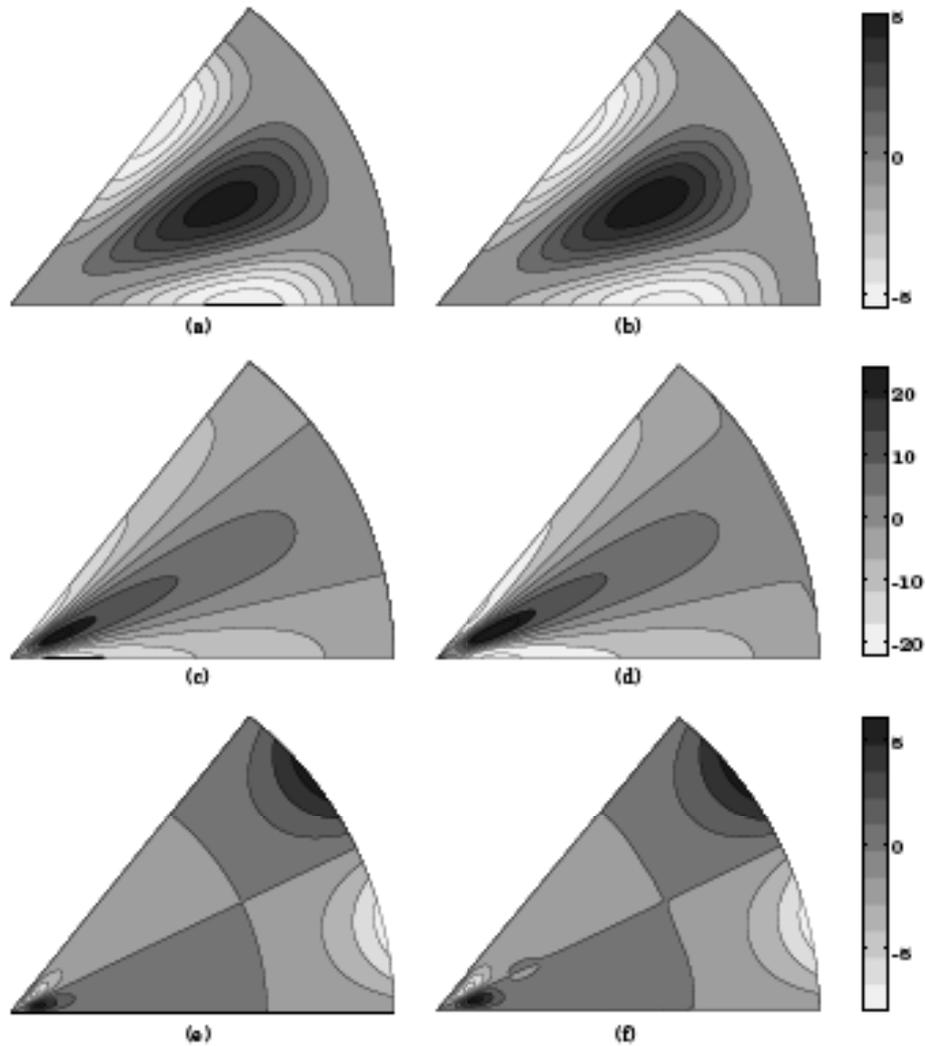


FIGURE 9.2 – Iso-contours des vitesses d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans la section $\tilde{x} = 4$, pour $\varepsilon = 0,01$, $m = 7$, $Re = 2000$. A gauche la solution de similitude et à droite les résultats de simulation CEDRE . Les images (a) et (b) représentent v_x/\tilde{x} , (c) et (d) représentent v_r , (e) et (f) représentent v_θ .

à une analyse de stabilité linéaire afin de voir si l'écoulement garde des caractéristiques identiques en géométrie étoilée par rapport au cas cylindrique.

9.2 Stabilité

La différence essentielle par rapport aux travaux exposés dans le chapitre 6 tient dans la dépendance en θ de l'écoulement de base. Ainsi la forme de la perturbation recherchée doit

prendre en compte une dépendance azimutale. On peut cependant tirer profit du fait que les coefficients du système, c'est-à-dire l'écoulement de base, sont périodiques en θ . On va donc s'appuyer sur la théorie de Floquet pour définir une forme modale adaptée.

9.2.1 Approche locale de la stabilité

En approche locale, on considère une perturbation de l'écoulement de base sous la forme modale suivante :

$$\tilde{q}(x, r, \theta, t) = \hat{q}(r, \theta) e^{s(kz - \omega t)} \quad (9.5)$$

où k est le nombre d'onde complexe et ω la pulsation complexe.

La périodicité des coefficients du système étant égale à $\frac{2\pi}{m}$, on écrit \hat{q} comme :

$$\hat{q}(r, \theta) = f(r, \theta) e^{\gamma\theta} \quad (9.6)$$

où la fonction f est périodique de période $\frac{2\pi}{m}$, et γ , le coefficient de Floquet est un nombre complexe $\gamma \in \mathbb{C}$. La fonction f étant périodique, on effectue une décomposition en série de Fourier pour obtenir :

$$f(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{q}^l(r) e^{lm\theta} \quad (9.7)$$

et finalement :

$$\tilde{q}(x, r, \theta, t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{q}^l(r) e^{lm\theta} \right) e^{\gamma\theta} e^{s(kz - \omega t)} \quad (9.8)$$

On montre aisément que γ est un imaginaire pur et que $|\gamma| < 7$.

Lorsque l'on introduit cette forme modale (9.8) dans le système d'équations linéarisé et compte tenu du changement de variable (9.1) effectué pour le calcul de l'écoulement de base, on aboutit pour l'équation de continuité par exemple à :

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\hat{u}_r^{l'} + \frac{\hat{u}_r^l}{r} + \frac{-\eta'}{1+\eta} \hat{u}_\theta^{l'} + \frac{1}{r} (iml + \gamma) \hat{u}_\theta^l + (1+\eta) ik \hat{u}_z^l \right) e^{lm\theta} = 0 \quad (9.9)$$

avec la notation $'$ pour désigner les dérivées par rapport à r .

On ne peut pas écrire que tous les termes de la série sont nuls car η dépend de θ . Il faut donc décomposer tous les termes dépendant de θ en série de Fourier. On écrit :

$$1 + \eta = 1 + \frac{e^{im\theta} + e^{-im\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \eta' = -m \frac{e^{im\theta} - e^{-im\theta}}{2i} \quad (9.10)$$

Après quelques réarrangements des termes, et notamment en tenant compte des décalages d'indices introduits par les décompositions en série de Fourier des coefficients contenant η , on écrit

l'équation de continuité de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2} \left(\hat{u}_r^{l-1'} + \hat{u}_r^{l+1'} \right) + \hat{u}_r^l + \frac{\varepsilon}{2r} \left(\hat{u}_r^{l-1} + \hat{u}_r^{l+1} \right) + \frac{\hat{u}_r^l}{r} + \frac{im\varepsilon}{2} \left(\hat{u}_\theta^{l-1'} - \hat{u}_\theta^{l+1'} \right) \right. \\
& + \frac{\varepsilon(\gamma + im)}{2} \left((l-1) \hat{u}_\theta^{l-1} + (l+1) \hat{u}_\theta^{l+1} \right) + \frac{\gamma + iml}{r} \hat{u}_\theta^l + \frac{ik\varepsilon^2}{4} \left(\hat{u}_x^{l-2} + \hat{u}_x^{l+2} \right) \\
& \left. + ik\varepsilon \left(\hat{u}_x^{l-1} + \hat{u}_x^{l+1} \right) + ik \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + 1 \right) \hat{u}_x^l \right) e^{iml\theta} = 0
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Les coefficients ne dépendant plus de θ , on en conclut que chacun d'eux est nul et donc on a $\forall l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon}{2} \left(\hat{u}_r^{l-1'} + \hat{u}_r^{l+1'} \right) + \hat{u}_r^l + \frac{\varepsilon}{2r} \left(\hat{u}_r^{l-1} + \hat{u}_r^{l+1} \right) + \frac{\hat{u}_r^l}{r} + \frac{im\varepsilon}{2} \left(\hat{u}_\theta^{l-1'} - \hat{u}_\theta^{l+1'} \right) \\
& + \frac{\varepsilon(\gamma + im)}{2} \left((l-1) \hat{u}_\theta^{l-1} + (l+1) \hat{u}_\theta^{l+1} \right) + \frac{\gamma + iml}{r} \hat{u}_\theta^l + \frac{ik\varepsilon^2}{4} \left(\hat{u}_x^{l-2} + \hat{u}_x^{l+2} \right) \\
& + ik\varepsilon \left(\hat{u}_x^{l-1} + \hat{u}_x^{l+1} \right) + ik \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + 1 \right) \hat{u}_x^l = 0
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Pour les équations de quantité de mouvement, on arrive à des termes rapidement très "lourds", notamment en raison du laplacien dans le membre de droite des équations, qui ont nécessité le recours au logiciel de calcul formel MAPLE. Ce dernier est utilisé pour calculer les expressions de l'ensemble des coefficients pour chacun des termes des équations. Ces coefficients sont ensuite exportés au format MathML puis convertis en routines fortran ou Matlab grâce à un script JAVA. Cette procédure complexe a aussi été étendue au cas où l'écoulement de base provient d'une solution donnée par un code CFD tel que le code CEDRE.

Dans un premier temps, une étape de validation du code de stabilité 1D a été effectuée. Pour $\varepsilon = 0$ le code doit retrouver des résultats identiques à ceux fournis par des codes équivalents traitant du problème de stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick. Une fois cette étape acquise, différentes études ont été menées pour caractériser l'influence des différents paramètres du problème [5]. Les résultats montrent que l'on retrouve les modes dits axisymétriques, et qui correspondent aux modes de stabilité trouvés dans le cas de l'écoulement de Taylor-Culick mais qu'en outre d'autres modes, plus stables, apparaissent. Ces modes se caractérisent par le fait qu'ils comportent une dépendance azimutale de leurs fonctions propres et que les maxima d'amplitudes de ces fonctions se situent vers l'axe et non proche de la paroi latérale comme pour les modes en conduits à section circulaire. Les figures 9.3(a), 9.3(b) et 9.3(c) montrent un exemple typique de résultat fourni par l'approche locale de stabilité pour ces nouveaux modes.

9.2.2 Approche 2D

Après avoir résolu le problème de stabilité en approche locale, M. Bouyges a entrepris de modifier le code de stabilité développé dans le cadre de la thèse de Boyer [6]. Ce code résout le problème de stabilité biglobale présenté au chapitre 6 avec une procédure parallélisée pour la méthode de Krylov. En outre le code permet des calculs multi-domaines autorisant ainsi des

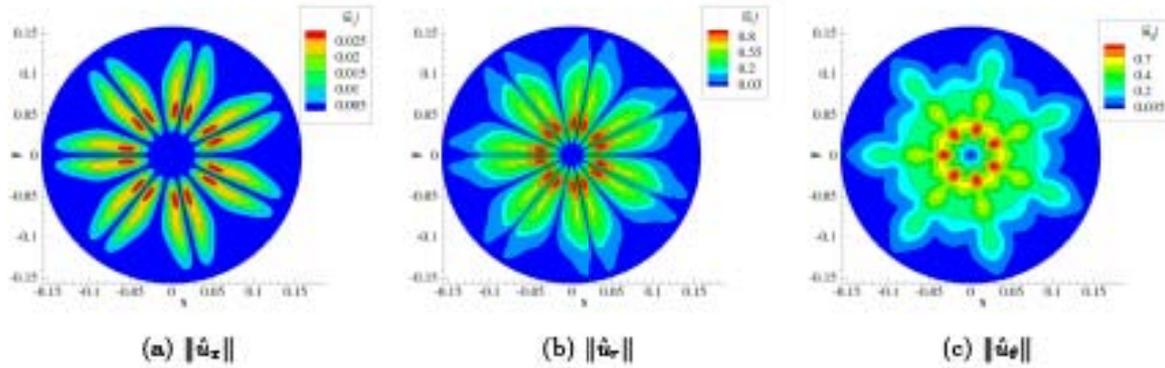


FIGURE 9.3 – Champs des fluctuations de vitesse obtenus par l'approche de stabilité 1D en géométrie étoilée avec $\varepsilon = 0.01$, $m = 7$, $Re = 5724$, $k = 3.101 - 0.277i$, $x = 4$, $\gamma = 0$ pour le mode $\mathcal{R}(\omega) = 58$.

raffinements locaux, utiles à la capture des couches limites¹. L'objectif est d'étendre le code à la configuration étoilée, ce qui ne va pas sans peine en raison notamment de l'existence d'une composante azimutale de la vitesse et l'introduction de la décomposition en série de Fourier. En conséquence les tailles des matrices rencontrées deviennent très importantes et un travail spécifique sur l'optimisation des ressources mémoire a été entrepris par M. Bouyges.

Dans le cadre de l'approche biglobale, on écrit :

$$\tilde{q}(x, r, \theta, t) = \hat{q}(x, r, \theta) e^{-i\omega t} \quad (9.13)$$

On utilise ensuite la théorie de Floquet et on aboutit à une expression qui prend la forme :

$$\tilde{q}(x, r, \theta, t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{q}^l(x, r) e^{iml\theta} \right) e^{\gamma\theta} e^{-i\omega t} \quad (9.14)$$

L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de traiter le problème complet avec la dépendance azimutale, tout en conservant un système d'EDP où les inconnues \hat{q}^l ne dépendent que de x et de r comme dans le cas à section circulaire. La taille du système est toutefois plus grande qu'auparavant en raison de la décomposition en série de Fourier qui introduit le paramètre l . Des tests ont montré qu'on peut se limiter à $l \in [-5, 5]$.

Pour les conditions limites, il y a quatre jeux de conditions à imposer :

- en entrée du domaine : $x = x_e$
- en sortie du domaine : $x = x_f$
- à la paroi : $r = 1$
- sur l'axe : $r = 0$

1. au sens des développements asymptotiques raccordés

En entrée, en $x = x_e$, la vitesse de l'écoulement de base est imposée. Ce qui entraîne la nullité des fluctuations de vitesse :

$$\forall l \in \mathbb{Z} , \begin{cases} \hat{u}_z^l(x_e, r) = 0 \\ \hat{u}_r^l(x_e, r) = 0 \\ \hat{u}_\theta^l(x_e, r) = 0 \end{cases} \quad (9.15)$$

et on montre aisément que :

$$\forall l \in \mathbb{Z} , \frac{\partial \hat{p}^l}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}_z^l}{\partial x^2} \quad (9.16)$$

En sortie, en $x = x_f$, on impose simplement que la fluctuation de pression soit nulle :

$$\forall l \in \mathbb{Z} , \hat{p}^l(x_f, r) = 0 \quad (9.17)$$

A la paroi d'injection, on impose :

$$\forall l \in \mathbb{Z} , \begin{cases} \hat{u}_z^l(x, 1) = 0 \\ \hat{u}_r^l(x, 1) = 0 \\ \hat{u}_\theta^l(x, 1) = 0 \end{cases} \quad (9.18)$$

Pour l'axe, on procède de manière identique à ce qui a été fait pour l'approche de stabilité locale, à savoir un développement régulier en $r = 0$ mais avec cette fois des coefficients qui dépendent de x . On distingue les trois cas $\gamma = 0$, $|\gamma| = 1$ et $(|\gamma| \neq 0)U$ ($|\gamma| \neq 1$).

Dans un premier temps, le code a été validé au sens où pour $\varepsilon = 0$, c'est à dire sans déformation de la paroi d'injection, on retrouve les résultats fournis par le code d'origine. Étant donné que le système résolu n'est pas le même, puisque les variables sont différentes, cette étape n'est pas triviale.

Ensuite, une étude paramétrique visant à déterminer l'influence des paramètres p_{max} , m et γ a été effectuée. Par exemple, les figures 9.4(a) et 9.4(b) montrent l'évolution des spectres obtenus pour des variations des paramètres ε et γ . On constate qu'à basse fréquence, l'augmentation de ε , qui pilote la forme de l'étoile, a tendance à stabiliser les modes sans pour autant changer la nature du spectre. A haute fréquence, pour $\omega_r > 100$, on note un changement de comportement. De même sur la figure 9.4(b) on voit que le cas $\gamma = 1$ est le cas le plus instable. Ce travail est toujours en cours, les capacités du ordinateur Stelvio de l'ONERA ne permettant pas toujours d'obtenir des résultats convergés.

Avec cet outil en place, on va pouvoir effectuer des calculs de stabilité avec comme écoulement de base une solution provenant d'un solveur Navier-Stokes. Ainsi, pour les calculs effectués en géométrie étoilée et qui mettent en avant des instabilités dans le moteur alors que les essais ont montré que le moteur était stable, on va pouvoir extraire le champ moyen à un instant donné et effectuer le calcul de stabilité. On espère mieux comprendre les différences observées entre simulation et expérience. En particulier, on souhaite vérifier l'hypothèse qui consiste à dire qu'il existe des modes très instables dans un tel cas. Ces modes sont visibles sur les simulations laminares. En revanche, dans les expériences, ces modes conduisent l'écoulement à être turbulent ce qui limitent les fluctuations de pressions internes. C'est vers ces enjeux que la fin de la thèse M. Bouyges s'oriente.

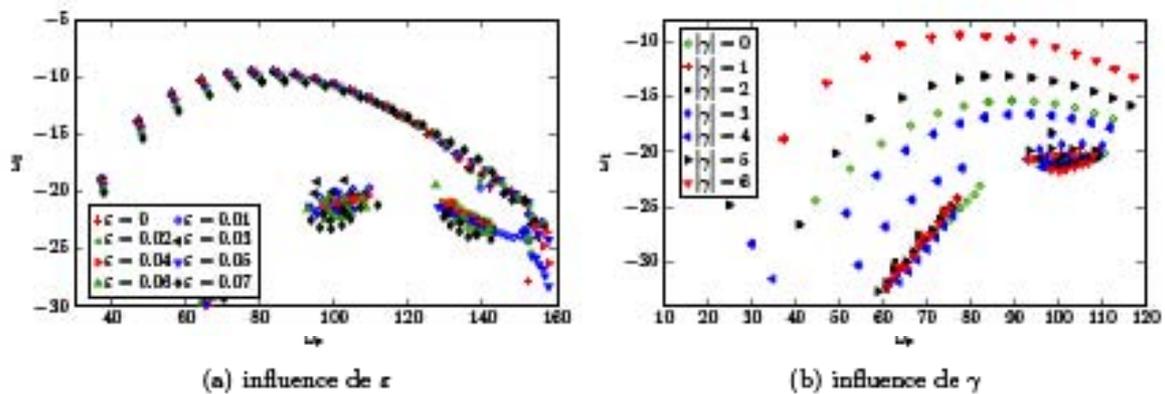


FIGURE 9.4 – Spectres de valeurs propres donnés par l'approche biglobale de stabilité. Les variations des résultats en fonction de ε et de γ sont tracés pour $\text{Re} = 2000$

Chapitre 10

Bilan

La thématique des oscillations de pression dans les moteurs à propergol solide est au cœur de mes travaux de recherche depuis mon arrivée en thèse à l'ONERA. Suivant les travaux de mes prédécesseurs, notamment Griffond [26] et Féraïlle [20], et sous l'impulsion de mon directeur de thèse G. Casalis, j'ai mis en évidence le caractère discret et temporellement stable des modes dans les conduits à parois débitantes. Les comparaisons aux mesures en gaz froid ont dans un premier temps montré la pertinence de l'approche [15]. Ensuite, une analyse détaillée de l'ensemble des tirs issus des montages échelles réduites LP6, LP9 et LP10 [14] a abouti à la mise en place d'une procédure de calcul de l'écoulement de Taylor-Culick équivalent (ETCE) à chaque instant et qui sert d'écoulement de base à l'analyse de stabilité. Avec cette procédure, on détermine pour chaque essai, l'évolution en temps du rapport $\frac{V_{inj}}{R}$ qui pilote le comportement fréquentiel d'un mode de stabilité de pulsation ω_r . Les comparaisons aux mesures ont montré un excellent accord et ont donc permis de confirmer le fait que des instabilités hydrodynamiques dans ces moteurs à propergol solide sont à l'origine des oscillations de pression. Enfin, des simulations DNS ont permis de reproduire l'accrochage d'un mode de stabilité avec un mode acoustique [16], reproduisant ainsi l'émergence d'un glissement en fréquence comme observé expérimentalement. Cependant pour compléter le scénario d'apparition de ces oscillations, il était nécessaire d'étudier la possible existence d'une transition laminaire-turbulent dans ces moteurs. La thèse de B. Gazanion [22] a montré que, dans les montages gaz froid du type VALDO, une transition se produit lorsque le rapport d'aspect $\frac{L}{R}$ est assez grand. Une simulation LES a ensuite été menée pour confirmer ce résultat et a démontré que cette transition résulte de la croissance des modes de stabilité internes.

Plus récemment, en raison du développement de nouveaux moteurs comportant des blocs de propergol à géométrie étoilée, la thèse de M. Bouyges a été initiée. L'objectif est de reprendre l'analyse de stabilité ainsi que l'étude de la transition lorsque la configuration n'est plus axisymétrique. Pour commencer ces travaux, on a d'abord recherché une solution analytique au problème considéré ce qui a débouché sur une solution de similitude simple et utilisable pour l'analyse de stabilité [5]. Ensuite une approche locale puis biglobale de la stabilité a été entreprise. La théorie de Floquet a été invoquée pour aboutir à une forme modale où les fonctions propres ne dépendent plus que de r et de (x, r) respectivement. Ces travaux sont toujours en cours. Parallèlement, et

avant de s'intéresser à la configuration étoilée, une nouvelle simulation LES a été initiée par M. Bouyges pour une configuration identique au montage VALDO. L'objectif est de s'affranchir des limitations rencontrées par B. Gazanion concernant les conditions limites acoustiques. Dans cette nouvelle simulation, le jet issu du montage VALDO et débouchant dans une atmosphère au repos, est pris en compte. On espère ainsi reproduire l'impédance acoustique vu par l'écoulement au niveau de la section de sortie et récupérer des niveaux de fluctuations de pression à l'intérieur du conduit qui soient cohérents avec ceux mesurés. A l'issue de la simulation, on souhaite également pouvoir construire une fonction d'impédance à partir des données obtenues. Cette fonction sera ensuite traduite en une condition limite utile à la conduite d'autres simulations sansqu'il soit nécessaire d'avoir à prendre en compte le jet libre. Parallèlement, une autre simulation en géométrie étoilée est prévue pour caractériser la transition et éclaircir le rôle de la turbulence dans ces configurations en étoile.

Bibliographie de la seconde partie

- [1] G. Avalon, G. Casalis et J. Griffond. « Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection ». Dans : *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. AIAA, 1998.
- [2] G. Avalon et T. Josset. « Cold Gas Experiments Applied to the Understanding of Aeroacoustic Phenomena inside Solid Propellant Boosters ». Dans : *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. AIAA, 2006.
- [3] G. Avalon et D. Lambert. *Campagne d'essais VALDO. Période 2000/2001*. Rap. tech. RT 2/05424 DEFA. ONERA Palaiseau : ONERA, 2001.
- [4] A.S Berman. « Laminar Flow in Channels with Porous Walls ». Dans : *Journal of Applied Physics* 24.9 (1953), p. 1232–1235.
- [5] M. Bouyges, F. Chedevergne et G. Casalis. « Local Linear Stability Analysis of Non-Circular Injection Driven Channel Flows ». Dans : *52th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. Salt Lake City : AIAA, 2016.
- [6] G. Boyer. « Étude de stabilité et simulation numérique de l'écoulement interne des moteurs à propergol solide simplifiés ». Thèse de doct. Université de Toulouse, ISAE, 2012.
- [7] G. Boyer, G. Casalis et J.-L. Estivalèzes. « Stability and sensitivity analysis in a simplified solid rocket motor flow ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 722 (2013), p. 618–644.
- [8] R. S. Brown, R. Dunlap, S. W. Young et R. C. Waugh. « Vortex Shedding as a Source of Acoustic Energy in Segmented Solid Rockets ». Dans : *Journal of Spacecraft and Rockets* 18 (1981), p. 312–319.
- [9] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quateroni et T.A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1987.
- [10] G. Casalis, G. Avalon et J.-P. Pineau. « Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls ». Dans : *Physics of Fluids* 10.10 (1998).
- [11] G. Casalis, F. Chedevergne et T. Férailla. « Global stability of the flow induced by wall injections ». Dans : *symposium on laminar-turbulent transition*. IUTAM, 2004.
- [12] F. Chedevergne. *Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide*. Rap. tech. rt 1/115116. ONERA, 2006.
- [13] F. Chedevergne. « Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide ». Thèse de doct. Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2007.

- [14] F. Chedevergne et G. Casalis. « Detailed analysis of the thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors ». Dans : *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. Sacramento : AIAA, 2006.
- [15] F. Chedevergne, G. Casalis et Th. Féraïlle. « Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection ». Dans : *Physics of Fluids* 18 (2006). (Visité le 21/10/2011).
- [16] F. Chedevergne, G. Casalis et J. Majdalani. « Direct numerical simulation and biglobal stability investigations of the gaseous motion in solid rocket motors ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 706 (2012), p. 190–218.
- [17] F. Chedevergne, G. Casalis et J. Majdalani. « DNS Investigation for the Taylor-Culick Flow Stability Analysis ». Dans : *43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. AIAA, 2007.
- [18] F. E. C. Culick. « Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket ». Dans : *AIAA Journal* 4.8 (1966), p. 1462–1464.
- [19] R. Dunlap, A. M. Blackner, R. C. Waugh, R. S. Brown et P. G. Willoughby. « Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber ». Dans : *Journal of Propulsion and Power* 6.6 (1990), p. 690–704.
- [20] T. Féraïlle. « Instabilités de l'écoulement interne des moteurs à propergol solide ». Thèse de doct. Toulouse : Université Paul sabatier, 2004.
- [21] G. A. Flandro et J. Majdalani. « Aeroacoustic Instability in Rockets ». Dans : *AIAA Journal* 41.3 (2003), p. 485–497.
- [22] B. Gazanion. « Transition laminaire-turbulent dans un conduit à paroi débitante ». Thèse de doct. Toulouse : Université Paul sabatier, 2014.
- [23] B. Gazanion, F. Chedevergne et G. Casalis. « On the laminar-turbulent transition in injection-driven porous chambers ». Dans : *Experiments in Fluids* 55.1 (2014).
- [24] B. Gazanion, F. Chedevergne et G. Casalis. « URANS Simulation of Injection-Driven Flows with an Imposed-Transition Model ». Dans : *Space Propulsion 2014*. 2014.
- [25] G.H. Golub et C.F. Van Loan. *Matrix Computations (third edition)*. The John Hopkins University Press, 1996.
- [26] J. Griffond. « Instabilité linéaire et non linéaire en conduit à parois débitantes ». Thèse de doct. Toulouse : Université Paul sabatier, 2001.
- [27] J. Griffond, G. Casalis et J.-P. Pineau. « Spatial instability of flow in a semiinfinite cylinder with fluid injection through its porous walls ». Dans : *European Journal of Mechanics, B/Fluids* 19.1 (2000), 69–88.
- [28] Godon J-C. « code PERSE : une approche unidimensionnelle dans la modélisation du fonctionnement stationnaire d'un propulseur à propergol solide ». Dans : *Écoulements internes en propulsion solide*. 3eme colloque R & D, 1998.
- [29] J. Majdalani et G. A. Flandro. « The Oscillatory Pipe Flow with Arbitrary Wall Injection ». Dans : *Proc. R. Soc. A* 458.2022 (2002), p. 1621–1651.

- [30] F. R. Menter. « Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications ». Dans : *AIAA Journal* 32.8 (1994), p. 1299–1310.
- [31] G. I. Taylor. « Fluid Flow in Regions Bounded by Porous Surfaces ». Dans : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 234.1199 (1956), p. 456–475.
- [32] V. N. Varapaev et V. I. Yagodkin. « Flow stability in a channel with porous walls ». Dans : *Fluid Dynamics* 4.5 (1969), p. 60–62.
- [33] V. I. Yagodkin. « Use of channels with porous walls for studying flows which occur during combustion of solid propellants ». Russian. Dans : *Proceedings of the 18 th International Astronautical Congress*. T. 3. 1967, p. 67–79.

Troisième partie

Actionneur Jet Synthétique par Plasma

Cette seconde partie se concentre sur les travaux menés autour de l'actionneur JSP et notamment sur le développement conjoint d'une base de données précise permettant la caractérisation de l'actionneur et d'une méthodologie de calcul. Ces travaux ont été menés en collaboration avec O. Léon et font suite aux travaux initiés par D. Caruana au DMAE. Une partie de ces travaux a été effectuée au cours de la thèse de F. Laurendeau, co-encadrée avec G. Casalis.

Chapitre 11

L'actionneur Jet Synthétique par Plasma

11.1 Description

Au début des années 2000, le DMAE a développé un premier prototype d'actionneur plasma de type jet synthétique. Ces travaux se sont inspirés de ceux réalisés à l'université John Hopkins sur le sparkjet [12]. Après plusieurs phases d'amélioration, une configuration a été retenue. L'actionneur, appelé JSP (Jet Synthétique par Plasma), se compose d'une cavité cylindrique en céramique¹ dans laquelle deux électrodes sont brasées. Les électrodes sont séparées d'une distance de 1,2 mm, la cavité étant d'une hauteur de 4 mm et d'un diamètre de 4,6 mm. La figure 11.1 montre la cavité du JSP. Un pas de vis est usiné sur la partie externe de la cavité



FIGURE 11.1 – Photographie de la cavité de l'actionneur JSP avec les deux électrodes.

1. le choix de la céramique s'est fait en raison de sa faible conductivité thermique et surtout électrique.

de sorte qu'elle peut s'insérer dans un bouchon ou une paroi qui ont pour but de définir la géométrie de la tuyère d'éjection. Le dispositif complet forme ainsi une enceinte, composée de la cavité et surmontée d'une tuyère, dans laquelle un dépôt d'énergie par une décharge d'arc est réalisé. Pour réaliser cette décharge électrique, les électrodes de l'actionneur sont reliées à une capacité C . Un générateur haute tension fournit l'énergie nécessaire à la charge de la capacité C , comme le montre le schéma de la figure 11.2(a). Lors de la décharge, la tension aux bornes des électrodes augmente jusqu'à atteindre la tension de claquage de l'air environnant, ce qui conduit à l'apparition d'un arc électrique. Des signaux typiques de tension U et d'intensité I enregistrés pendant une décharge sont présentés sur la figure 11.2(b). La décharge dure quelques microse-

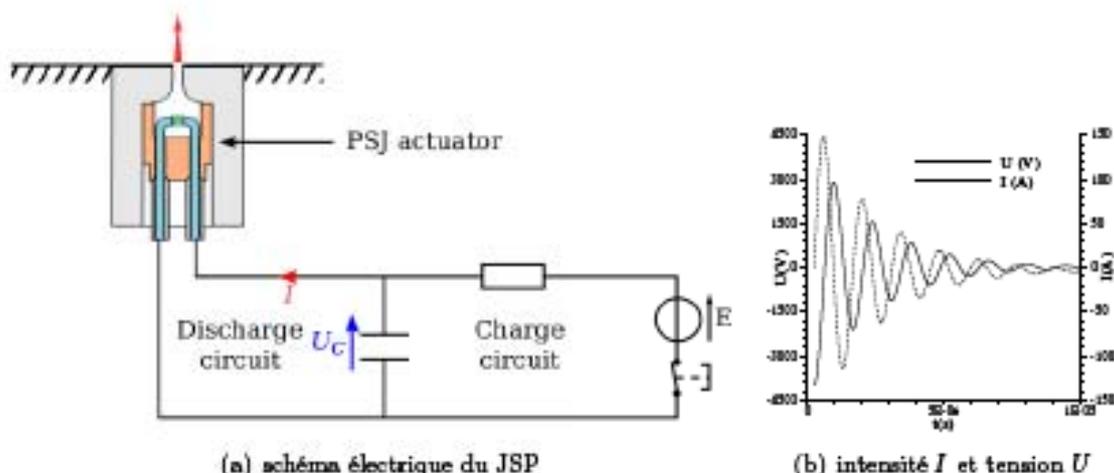


FIGURE 11.2 – Schéma électrique de l'actionneur et signaux typiques d'intensité et de tension lors d'une décharge.

condes. Les tensions de claquage sont de l'ordre de quelques kilovolts et les intensités maximales atteintes, pour des capacités de quelques nanofarads, sont de l'ordre de quelques centaines d'am-pères. Les décharges produites sont de type capacitive radiofréquence. Un travail important de caractérisation de ce type de décharge a été mené par Belinger [1–4].

11.2 Fonctionnement de l'actionneur JSP

La création de l'arc électrique entraîne une brusque montée en température et en pression qui expulse l'air contenu dans la cavité. Un jet se forme donc au travers de l'orifice de la tuyère. Le diamètre de l'orifice est de 1 mm. Le jet dure quelques centaines de microsecondes. Il s'en suit une phase naturelle d'aspiration qui permet à la cavité de retrouver un équilibre en pression. Ainsi, un cycle complet d'actionnement peut se décomposer en trois phases. Une phase de dépôt d'énergie, une phase d'éjection et une phase d'aspiration. La figure 11.3 décrit ces trois phases. Plusieurs remarques sont nécessaires pour bien comprendre le fonctionnement cyclique de cet actionneur. Pour des raisons mal maîtrisées, tel que l'environnement thermique, la pré-ionisation

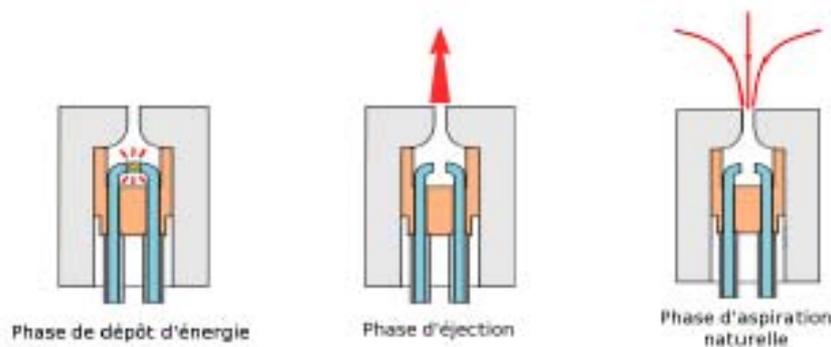


FIGURE 11.3 – Description en trois phases d'un cycle de fonctionnement de l'actionneur JSP.

des électrodes ou encore l'érosion des électrodes, les dépôts d'énergie ne sont pas identiques d'un cycle à l'autre. C'est d'autant plus vrai que la fréquence d'actionnement f augmente. On distingue en fait deux types de fonctionnement. Le premier, dit basse fréquence, qui comme son nom l'indique, correspond à des fréquences d'actionnement faibles $f < 100$ Hz, se caractérise par le fait que les cycles sont indépendants les uns des autres. La fréquence étant basse, la durée de la phase d'aspiration est grande devant celle de l'éjection ce qui permet à la cavité de revenir dans un état thermodynamique et dynamique très proche de celui du cycle précédent. En revanche, le second type de fonctionnement, dit haute-fréquence, lie les cycles entre eux. En effet, pour des fréquences f élevées, l'échauffement réalisé par un dépôt d'énergie n'est pas compensé par la phase d'aspiration dont la durée est assez courte. La montée en température dans la cavité provoque une modification de la masse volumique de l'air contenu dans la cavité. La tension de claquage, qui dépend notamment de la masse volumique, chute elle aussi ce qui modifie le dépôt d'énergie. Les cycles sont donc dépendants les uns des autres. Pour une fréquence de l'ordre du kilohertz, on atteint assez rapidement un cycle limite, pour lequel un équilibre thermique est atteint. On désignera par la suite ces deux types de fonctionnement par les sigles BF (basse-fréquence) et HF (haute-fréquence).

La thèse de Hardy [13] a permis de faire une première description du fonctionnement de l'actionneur JSP à basse fréquence. En particulier, des essais de l'actionneur dans un environnement au repos ont été effectués et des mesures par striscopie ont été réalisées. Le jet a pu être observé à différents instants de son développement. Les images de la figure 11.4(a) montre des instantanés du jet pour différents instants après le claquage alors que la figure 11.4(b) donne le résultat en moyenne de phase pour un décalage de $20 \mu\text{s}$ entre le claquage et la prise de vue. Pour réaliser ces moyennes de phases, des acquisitions d'images synchronisées avec le dépôt d'énergie sont réalisées. Pour obtenir une moyenne convergée, plusieurs centaines d'images sont nécessaires. Dans les expériences de Hardy, seules 100 images sont disponibles pour un décalage en temps donné. Cependant on peut tout de même constater sur la figure 11.4(b) que l'image moyenne pour $\Delta t = 20 \mu\text{s}$ permet d'observer les ondes de pression générées par le claquage. Laurendeau *et al.* [17] ont montré ultérieurement que ces ondes se propagent à la vitesse du son.

A partir de telles mesures striscopiques, on peut déterminer l'évolution temporelle du front de

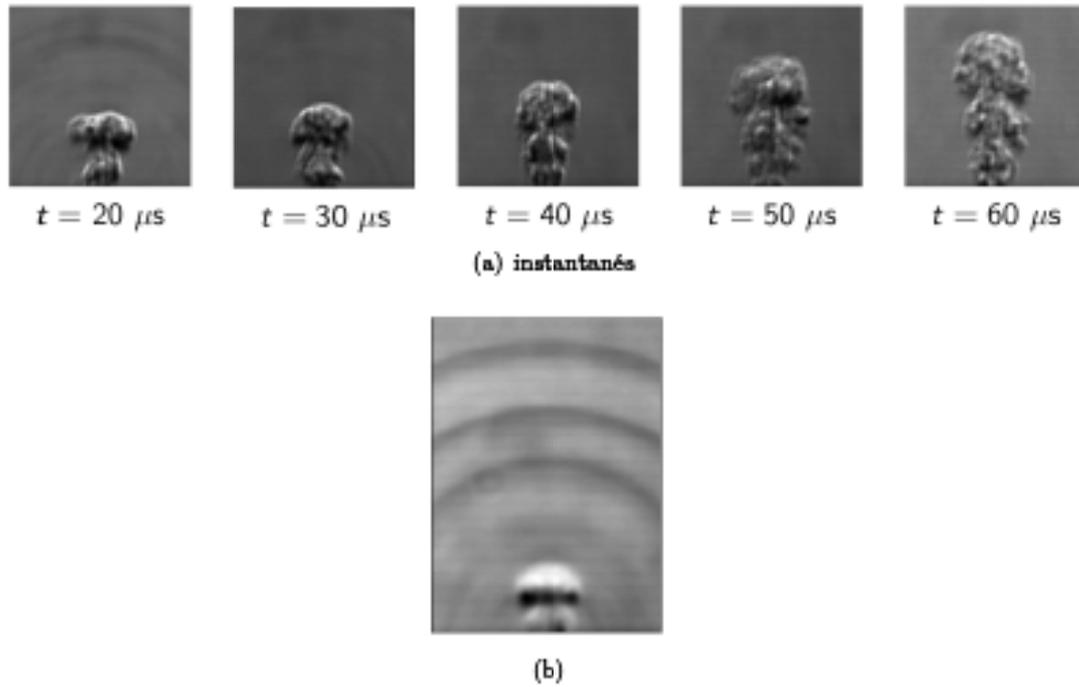


FIGURE 11.4 – Visualisations par strioscopie obtenues au cours de la thèse de Hardy [13]. En haut, 5 instantanés de mesures sont présentés et en bas, une image en moyenne de phase à $t = 20 \mu\text{s}$ est donnée.

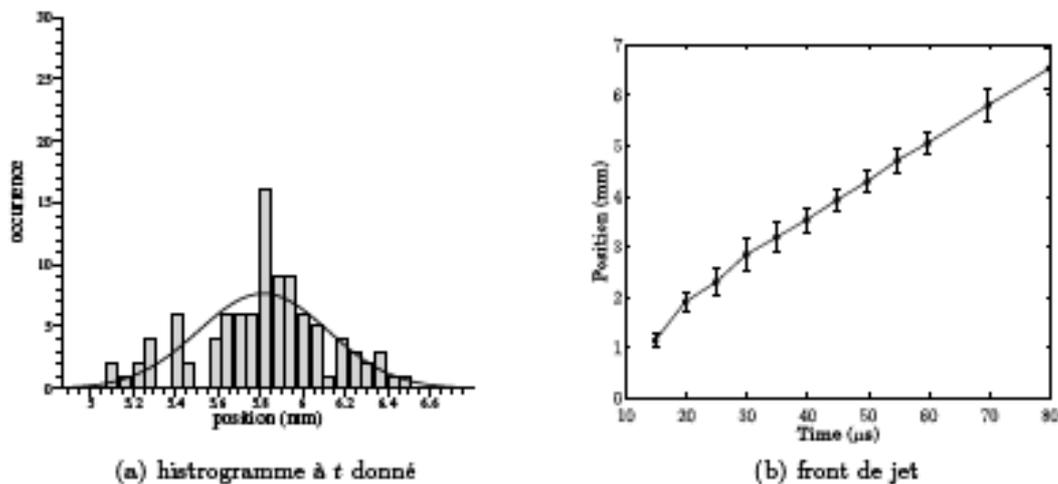


FIGURE 11.5 – Histogramme des positions du front de jet détectées sur les 300 images de strioscopie pour un instant t donné et évolution du front de jet en moyenne de phase. Extrait de [17].

jet. Pour un décalage Δt donné, les positions du front de jet sont extraites pour chacune des 100 images. On cherche ensuite la distribution gaussienne normale qui représente la distribution trouvée. La moyenne et l'écart type fournissent ainsi la position moyenne du front de jet à un instant t donné, ainsi qu'une incertitude. Les figures 11.5(a) et 11.5(b) présentent un exemple d'histogramme avec la gaussienne et les résultats obtenus à partir des mesures de Hardy.

11.3 Les travaux antérieurs

Ce qui motive le développement de l'actionneur JSP c'est le contrôle d'écoulement. Parmi les différentes classes d'actionneurs existantes [6], les actionneurs pulsés fluidiques sont très intéressants pour leurs faibles consommations en air. Différentes technologies ont été explorées comme les actionneurs piezo-électriques ou à piston. Les actionneurs pulsés à jets synthétiques par plasma présentent plusieurs avantages. Le premier est que le bilan de masse sur un cycle est nul. L'actionneur ne nécessite pas d'apport de masse. Le second point est sa capacité à générer des jets intenses, avec des vitesses d'éjection pouvant atteindre plusieurs centaines de mètres par seconde. Enfin, ce type d'actionneur peut fonctionner à des fréquences élevées de plusieurs kilohertz.

L'actionneur JSP de l'ONERA a fait l'objet de nombreuses études avant que je ne rejoigne l'équipe en charge de son développement en 2012. En particulier, le projet européen PLASMAERO, bien que non réduit à ce seul actionneur, a été l'occasion de mettre en évidence les capacités de l'actionneur. Par exemple, des contrôles de décollements sur des dièdres [5], à mi-corde sur un profil NACA12 [11] ou encore la réduction des tourbillons marginaux [20], ont été réalisés avec succès. Les thèses de Hardy [13], conjointement à celle de Belinger [1], ont aussi contribué au développement du JSP. Il faut aussi mentionner les travaux du DTIM (Département Traitement de l'Information et Modélisation) de l'ONERA, sous l'impulsion de F. Rogier, qui s'est intéressé à la modélisation du dépôt d'énergie. En particulier, les travaux de Dufour *et al* [10] et Sary *et al* [25] sont un élément fondamental qui sont à la base des simulations numériques menées après mon arrivée.

Bien que déjà très riches, les bases de données existantes ne permettaient pas de décrire finement le fonctionnement de l'actionneur. Si l'actionneur avait prouvé sa capacité à contrôler des décollements notamment, les mécanismes qui conduisaient aux contrôles opérés n'étaient pas maîtrisés. La stratégie scientifique mise en place alors a consisté à reprendre la caractérisation de l'actionneur JSP afin d'être en mesure de développer et de valider des outils de simulations numériques. Une fois ces outils opérationnels, on pense pouvoir définir une stratégie de contrôle adaptée à la configuration examinée. C'est cette démarche qui est présentée par la suite.

Chapitre 12

Caractérisation expérimentale

Pour pouvoir définir et surtout valider l'outil de simulation numérique désiré, il est nécessaire d'avoir une description qualitative mais aussi quantitative du fonctionnement de l'actionneur JSP. Des mesures PIV et strioscopiques, adaptées aux petites échelles, ont ainsi été effectuées avec cet objectif. On commence d'abord par se pencher sur le cas d'un jet issu de l'actionneur débouchant dans une atmosphère au repos en se concentrant sur le fonctionnement BF.

12.1 JSP dans une atmosphère au repos

12.1.1 Mesures par strioscopie

Les mesures par strioscopie ont été réalisées par O. Léon et n'ont jusqu'à présent pas fait l'objet d'une publication. Elles seront cependant exploitées par la suite et c'est à ce titre qu'elles sont rapidement présentées. Les figures 12.1(a) et 12.1(b) décrivent le banc utilisé pour ces essais. Contrairement à un banc strioscopique plus conventionnel en Z, utilisant des miroirs paraboliques, voir les expériences de Hardy [13], on utilise ici des lentilles afin d'obtenir un champ de visualisation adapté aux contraintes de l'actionneur JSP. La résolution ainsi obtenue est nettement améliorée par rapport aux précédentes expériences. L'acquisition simultanée d'images et de signaux électriques permet de définir pour chaque prise de vue le décalage Δt entre l'instant de claquage et la prise de vue effective. Pour des raisons d'interférences électro-magnétiques, il n'est pas possible de synchroniser la prise de vue par rapport à l'instant de claquage. On synchronise donc les acquisitions d'images par rapport à la commande de montée en charge du générateur haute tension au temps t_0 . Lorsque la tension aux bornes des électrodes atteint la tension de claquage, au bout d'un temps t_1 , le claquage se produit. Le temps t_2 de la prise de vue est déterminé en se fixant un décalage $\Delta t_0 = t_2 - t_0$. A partir des signaux de tensions et d'intensité acquis depuis la montée en charge il est facile de repérer le temps t_1 qui correspond au claquage. On accède ainsi pour chaque image au décalage effectif $\Delta t = t_2 - t_1$.

Pour accéder aux images en moyenne de phase, on procède à une série de 500 acquisitions pour une valeur Δt_0 fixée. Comme on l'a indiqué précédemment il existe une dispersion qui peut être de l'ordre de quelques microsecondes entre les différents instants de claquage lors d'un fonctionnement cyclique, et ce même à basse fréquence. Ainsi, en effectuant un post-traitement

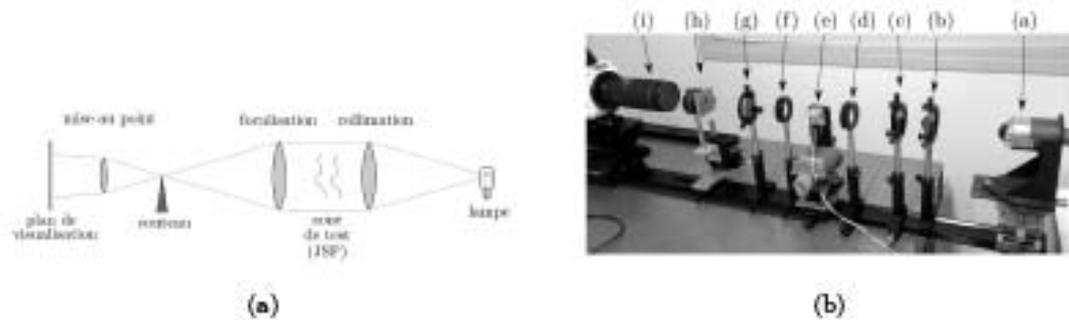


FIGURE 12.1 – Schéma de principe d'un banc de striscopie utilisant des lentilles pour la collimation et la focalisation et Photographie du banc de visualisation par striscopie avec lentilles. Les différents éléments du montage sont (a) lampe à éclat ; (b) lentille de condensation ; (c) fente ; (d) lentille de focalisation L1 ; (e) JSP ; (f) lentille de focalisation L2 ; (g) filtre neutre ; (h) couteau ; (i) objectif macroscopique.

statistique des signaux électriques on ne va retenir que les images dont le décalage Δt est égal à la valeur moyenne à $0,2 \mu s$ près, l'écart type étant de l'ordre de $2 \mu s$. En pratique, la moyenne de phase est donc calculée sur environ une centaine d'images, et ce pour chaque Δt_0 , ce qui semble suffisant dans le cas traité. Les figures 12.2(a) à 12.2(f) montrent les images moyennes obtenues pour une fréquence $f = 1 \text{ Hz}$ et une capacité $C = 30 \text{ nF}$. La résolution des images obtenues

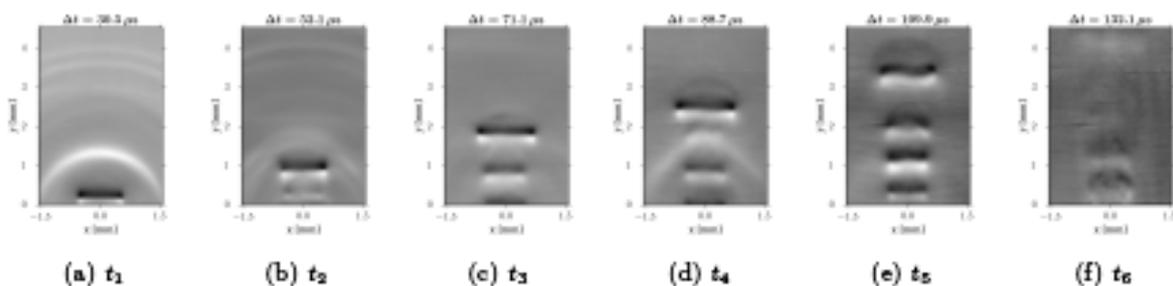


FIGURE 12.2 – Évolution en temps des champs de gradient de masse volumique en moyenne de phase.

permet de voir très distinctement le développement et la convection de structures annulaires, suggérant un comportement pulsé du jet au sein même d'un cycle. Grâce à ces mesures, on peut avoir accès à une description fine de la topologie de l'écoulement qui se développe en sortie de tuyère. C'est un des éléments de la base de données qui va servir à la validation de l'outil de simulation numérique.

12.1.2 Mesures PIV

Des mesures PIV 2D-2C (2 dimensions, 2 composantes) ont été réalisées par Laurendeau et Léon [18, 19] pour une fréquence d'actionnement de 1 Hz. Le choix d'une mesure seulement 2D s'appuie sur les mesures déjà acquises et les simulations effectuées qui indiquent que le jet qui se développe à l'extérieur de la cavité est axisymétrique. Cinq capacités C ont été testées ce qui conduit à des vitesses différentes dans le jet. Les problèmes de synchronisation évoqués pour les mesures sur le banc stéréoscopique se retrouvent sur ce montage. Une technique identique est utilisée, en s'appuyant sur l'acquisition simultanée des paires d'images PIV et des signaux électriques. Une autre difficulté se présente lors de la mesure par PIV avec ce type de dispositif. Il n'est pas envisageable d'ensemencer la cavité du JSP pour avoir des particules dans le jet. En s'inspirant de travaux conduits par Reedy *et al.* [21] et Ko *et al.* [14], on procède à un ensemencement indirect en venant remplir une enceinte en particules de DEHS. Les figures 12.3(a) et 12.3(b) donnent un aperçu du dispositif expérimental retenu. Cette technique fournit un bon

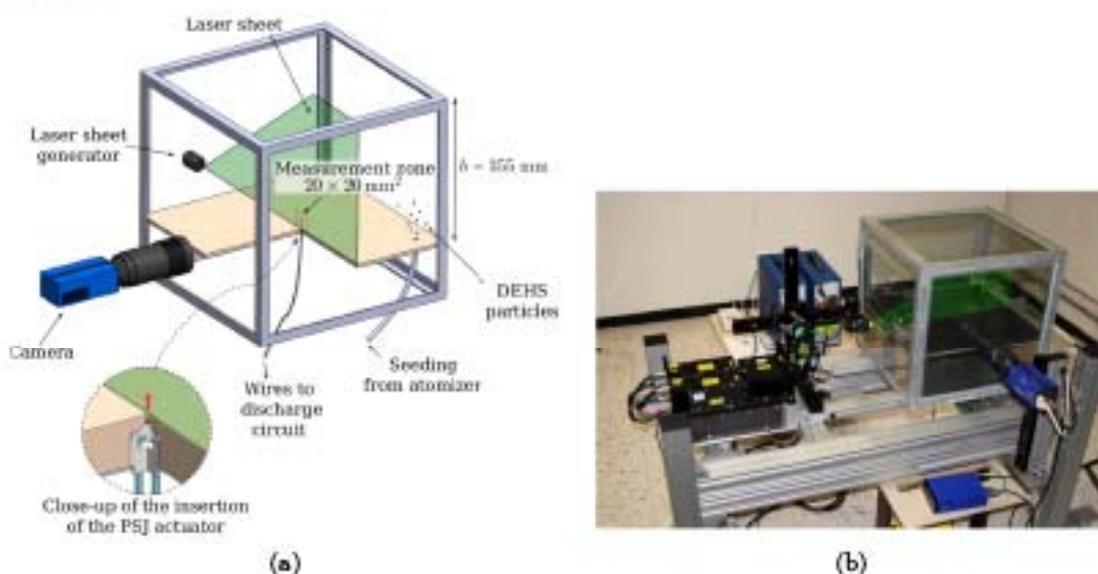


FIGURE 12.3 – Schéma et photographie du banc d'essais pour les mesures PIV 2D-2C dans une atmosphère au repos.

ensemencement de la périphérie du jet, des particules parvenant également au centre du jet grâce au développement des anneaux tourbillonnaires. Le centre de ces tourbillons est cependant peu ensemencé, imposant de répéter la mesure un nombre important de fois afin de pouvoir évaluer correctement le champ de vitesse pour l'ensemble du jet. Pour chaque décalage Δt_0 fixé, on procède à l'acquisition de 500 doublets d'images. En se donnant un écart à la moyenne de $1 \mu\text{s}$ pour le décalage Δt , on retient un total de plus de 300 paires d'images. Cela est nécessaire pour obtenir des informations dans les zones faiblement ensemencées. Le post-traitement des images PIV sélectionnées est réalisé à l'aide du logiciel FOLKI [7].

On donne sur les figures 12.4(a) à 12.4(h), un exemple de résultat obtenu pour une capacité

$C = 6,3 \text{ nF}$. Sur les figures sont représentés les champs de la norme de vitesse $\|\underline{U}\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$

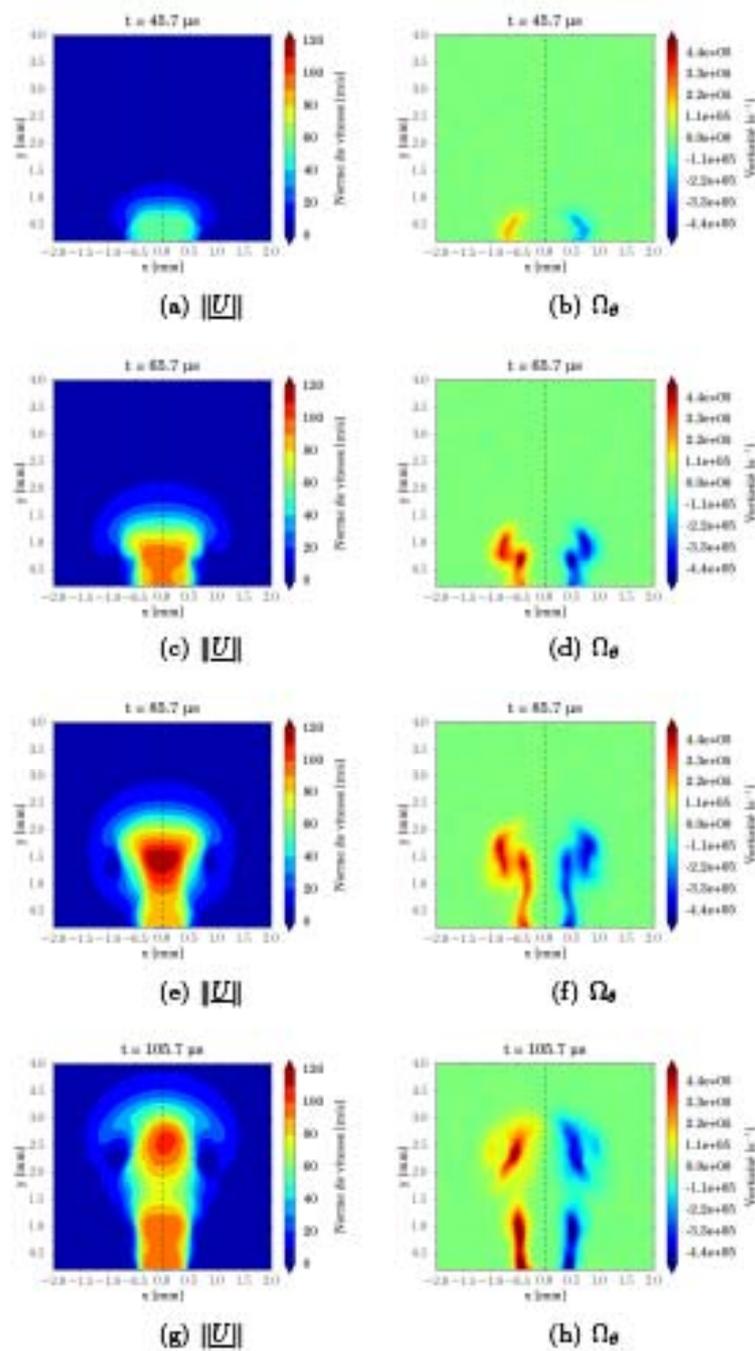


FIGURE 12.4 – Champs de la norme de vitesse $\|\underline{U}\|$ et de la vorticité Ω_θ obtenus par moyenne de phase à partir des images PIV pour quatre instants différents.

et ceux de la vorticité $\Omega_\theta = \frac{\partial U_z}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial z}$ pour quatre instants. En raison des difficultés d'ensemencement la résolution n'est pas très grande, cependant on identifie tout de même les structures tourbillonnaires principales qui sont convectées lors du développement du jet. L'intérêt majeur de ces mesures réside dans la quantification des vitesses mises en jeu dans le jet. Sur les figures 12.4(a), 12.4(c), 12.4(e) et 12.4(g) on note que la vitesse atteint 120 m/s au niveau du premier anneau tourbillonnaire à $t = 85,7$ m/s.

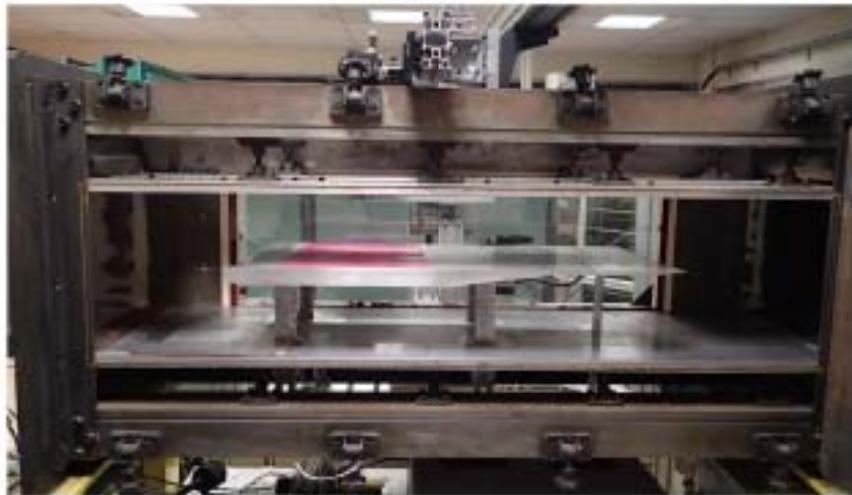
Ces mesures PIV, en complément des mesures par strioscopie, constituent une base de données importante pour la validation d'un modèle BF de l'actionneur JSP.

12.2 JSP en interaction avec une couche limite

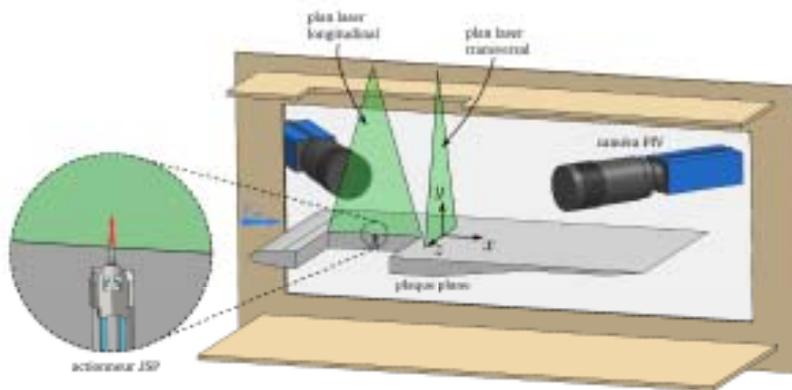
Afin d'être en mesure de déterminer une stratégie de contrôle adaptée à une configuration donnée, il faut se pencher sur les mécanismes de réceptivité des écoulements. Le problème étant vaste, on se concentre sur les écoulements de couche limite, en tant qu'écoulement modèle pour des configurations de décollements sur voilure. On souhaite donc acquérir des données d'expérience sur l'interaction d'un JSP avec une couche limite de plaque plane. Pour commencer¹, on considère une couche limite de plaque plane laminaire. Le montage est décrit sur les figures 12.5(a) et 12.5(b). Après une caractérisation de la couche limite laminaire, avec $U_e \approx 20$ m/s, on procède aux mesures de l'interaction du jet JSP avec l'écoulement de couche limite. Sur cette configuration, on va effectuer des mesures à basse et haute fréquence. Deux capacités ont été testées à basse fréquence $f = 3$ Hz, $C = 6,6$ nF et $C = 16,6$ nF alors qu'à haute-fréquence $f = 1$ kHz seule la capacité $C = 16,6$ nF a été testée. La méthodologie établie précédemment est reprise pour l'acquisition et le traitement statistique des images. Les figures 12.6(a), 12.6(b), 12.6(c) et 12.6(d) présentent deux exemples de résultats obtenus à deux instants distincts pour chacun des types de fonctionnement BF et HF. On remarque le fait que le jet généré par le JSP traverse largement la couche limite. Les anneaux tourbillonnaires sont cisailés par l'écoulement amont et convectés en aval. En pied de jet, il existe une déformation de la couche limite dont l'étendue est nettement plus importante dans le cas HF que dans le cas BF. Dans le cas HF, il y a coexistence sur la fenêtre de visualisation de deux jets issus du JSP et convectés par l'écoulement externe. Les signaux d'intensité relatifs aux essais BF et HF montrent une diminution du pic d'intensité maximale de l'ordre de 30% entre le cas BF et le cas HF. Comme évoqué précédemment, l'augmentation de fréquence conduit à la diminution de la tension de claquage par augmentation de la température moyenne dans la cavité et donc à une baisse de l'intensité mesurée. Cependant les jets mesurés dans les cas BF et HF ont des profondeurs de pénétration sensiblement identiques. La baisse de la quantité d'énergie déposée n'impacte pas la dynamique du jet en tant que telle.

Un ensemble important de mesures dédiées à la caractérisation du JSP a été initié afin de construire une base de données qui permette la validation d'un modèle numérique de l'actionneur. On parlera par la suite d'une méthodologie de restitution des essais plus que d'un modèle car il s'agit en fait d'un ensemble d'outils et de procédures qui permettent d'aboutir au résultat

1. mais aussi et surtout pour pouvoir effectuer des calculs LES de la configuration sans avoir à générer une turbulence en entrée de domaine. Notons que ce choix engendre des difficultés d'ensemencement importantes car les particules pénètrent difficilement la couche limite en régime laminaire.



(a) Vue du montage



(b) Schéma du montage

FIGURE 12.5 – Photographie et schéma du banc d'essais pour les mesures de l'interaction d'un JSP avec un écoulement de couche limite laminaire.

recherché.

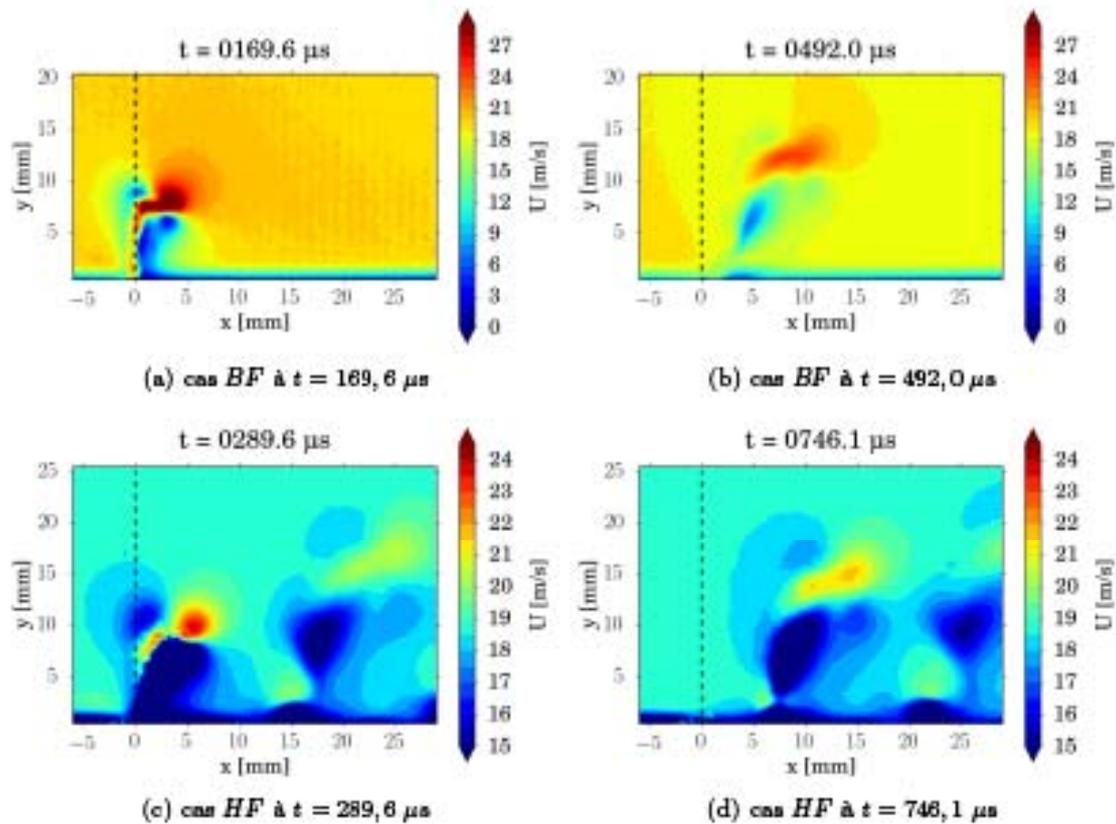


FIGURE 12.6 – Champ de vitesse longitudinale U_x en moyenne de phase dans le cas d'une interaction entre un JSP et une couche limite laminaire.

Chapitre 13

Simulations numériques

Ces travaux ont été commencés à mon arrivée au sein de l'équipe plasma. Le stage de master recherche de M. Oukacine a permis de vérifier la pertinence de l'approche et de tester certains paramètres. Ensuite la méthodologie en tant que telle a été reprise, consolidée et validée au cours de la thèse de F. Laurendeau.

La méthodologie de calcul d'un actionneur JSP repose avant tout sur le modèle de dépôt d'énergie proposée par l'équipe de F. Rogier au DTIM [10, 25].

13.1 Modèle de dépôt d'énergie

Le principe du modèle de dépôt d'énergie est relativement simple. Une fois l'arc créé, la décharge capacitive RF est assimilée à la décharge d'un circuit RLC. L'inductance L est prise égale à celle des fils qui composent le circuit électrique, la capacité C est celle du montage et la résistance est la somme d'une résistance des fils du circuit et d'une résistance due au plasma d'arc R_{plasma} . Cette dernière est fonction de la conductivité électrique de l'arc qui dépend principalement de la température et de la pression. Le plasma et le gaz environnant sont pris en compte au travers d'un solveur Euler 2D axisymétrique monophasique. Les propriétés thermodynamiques du gaz équivalent sont celles d'un gaz thermiquement parfait. Ainsi les effets de hautes températures sont directement intégrés dans ce modèle. On s'appuie sur les tables fournies par D'Angola *et al* [9]. Sur la figure 13.1 on montre pour l'exemple l'évolution de la capacité calorifique à pression constante C_p et de la conductivité thermique λ en fonction de la température à la pression atmosphérique. Les pics de C_p correspondent notamment aux dissociations et ionisation des différentes espèces comprises dans le modèle. Ces tables sont utilisées pour connaître l'état thermodynamique du gaz et ainsi en déduire la conductivité électrique locale σ . La résistance du plasma est alors exprimée comme :

$$R_{plasma} = \frac{1}{\int_0^{r_{arc}} 2\pi\sigma r dr} \quad (13.1)$$

où r est la coordonnée radiale et r_{arc} l'étendue radiale de l'arc. En pratique cette résistance est trop faible pour décrire l'amortissement de la tension et de l'intensité dans le circuit RLC

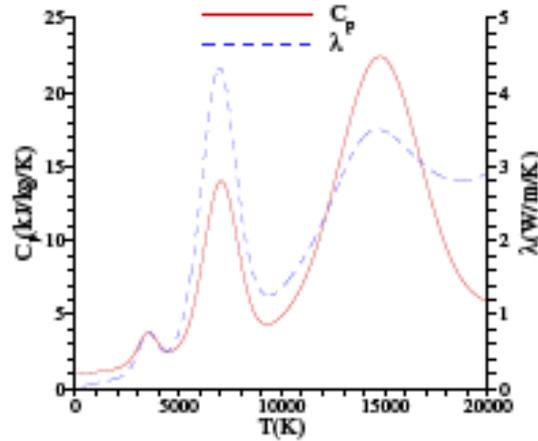


FIGURE 13.1 – Evolution de C_p et λ en fonction de la température T à $P = 1$ atm.

équivalent car elle ne tient pas compte de la gaine cathodique qui se trouve à proximité de l'électrode. Ainsi de manière empirique, il a été choisi de multiplier R_{plasma} par une constante $k_{gaine} = 5$ pour la décharge RLC. Ce qui revient à dire que 80% de l'énergie du circuit est absorbée par la gaine. C'est un point délicat sur lequel on reviendra par la suite. Notons que dans ce modèle R_{plasma} est fonction de la direction axiale x qui correspond à l'axe inter-électrode. Ainsi, le courant I traversant l'arc étant homogène en espace, le champ électrique est une fonction de x et de t seulement :

$$E(x, t) = IR_{plasma} \quad (13.2)$$

Finalement, l'effet de la décharge plasma sur l'air environnant se fait au travers d'un terme source d'énergie qui traduit l'effet Joule. La puissance transmise vaut :

$$p_{elec} = \sigma E^2 \quad (13.3)$$

Ce terme source est local puisque σ dépend localement de la température et de la pression. Le modèle doit être initialisé puisqu'il présuppose l'existence d'un arc électrique. Ainsi, un profil radial de température est utilisé comme état initial, la pression restant constante.

$$T_{int} = T_0 + (T_{max} - T_0) e^{-\frac{1}{1 - (r/r_{electrode})^2}} \quad (13.4)$$

avec T_0 la température ambiante dans la cavité JSP, $T_{max} = 7500$ K et $r_{electrode}$ le rayon des électrodes. L'influence du profil initial de température a été peu discutée jusqu'à présent. En revanche, des calculs ont montré des différences entre une initialisation à pression constante et une initialisation à densité constante. Cependant les comportements sont assez similaires et il a été choisi de conserver un modèle avec initialisation à pression constante.

Par ailleurs le canal de décharge est délimité par une condition de température. On considère que

l'arc plasma n'existe que pour des températures supérieures à 2000 K. Pour des valeurs "seuil" inférieures peu de différences ont été observées entre les résultats du modèle de dépôt.

Avec ce modèle de dépôt d'énergie, on peut calculer la distribution en temps et en espace d'un terme source représentatif d'un claquage d'arc dans la cavité JSP. Ces termes sources peuvent être ensuite utilisés lors d'un calcul Navier-Stokes en tant que termes sources d'énergie volumiques externes. C'est ce qui a été fait dans un premier temps à l'aide du code CEDRE et de son solveur Navier-Stokes CHARME. L'utilisation d'une telle procédure n'est en revanche pas possible pour la simulation de jets pulsés. En effet, comme le calcul des termes sources est effectué *a priori*, l'influence de l'état thermodynamique de l'air sur le dépôt suivant n'est pas pris en compte. Pour cela, il faudrait projeter la solution du solveur Navier-Stokes CHARME sur la grille du code Euler 2D qui sert au calcul des termes sources, et ce à chaque nouveau dépôt.

13.1.1 Couplage par termes sources externes et solveur COPAIER

Le point important de la modélisation présentée ci-avant est le calcul de la résistance plasma R_{plasma} . Or cette dernière est multipliée par un facteur k_{gaine} afin de tenir compte de la présence de la gaine cathodique pour la décharge. Des tentatives de modification du modèle au travers notamment d'une baisse de la tension aux bornes du canal de décharge en raison de la présence d'une gaine ont été effectuées. Ces modifications permettent de retrouver des résultats de mesures électriques conformes aux derniers essais réalisés au DMAE sur le JSP. Cependant, le modèle reste toujours fortement dépendant d'une constante et ce n'est pas très satisfaisant. Une solution pour s'affranchir de ce problème est de se donner l'évolution temporelle de l'intensité I mesurée aux bornes de la capacité C . En effet, le dépôt d'énergie est directement relié à cette grandeur et l'évolution de I tient compte de la résistance réelle qui existe entre les deux électrodes. Ceci nous contraint à des analyses *a posteriori* mais dans le modèle d'origine du DTIM les valeurs des résistances et d'inductance pour les fils devaient elles aussi être ajustées à chaque nouvelle expérience.

Par ailleurs, afin de pouvoir tenir compte de l'existence d'un canal de décharge non nécessairement axisymétrique, le calcul d'intégrale servant de définition pour R_{plasma} est quelque peu modifié. En pratique, on retient l'ensemble des contributions locales où la température est supérieure à la température seuil de 2000 K, ce qui dans un cas 3D ne constitue par nécessairement un disque pour une position axiale x donnée.

Cette formulation du modèle de dépôt d'énergie a été implantée dans le code CEDRE et plus précisément dans le solveur COPAIER. On souhaite ainsi s'affranchir d'un calcul préliminaire des termes sources et avoir directement un couplage interne au code CEDRE. Le solveur est couplé au solveur CHARME qui fournit à chaque itération des champs de pression et de température utiles au calcul de la conductivité électrique σ . Le solveur COPAIER procède ensuite au calcul du terme source d'énergie et le transmet au solveur CHARME. Le couplage se fait à chaque itération et une procédure spécifique d'horloge a été mis en place pour le solveur COPAIER afin de pouvoir effectuer des dépôts d'énergie cycliques à une fréquence donnée.

Une étape importante de validation du solveur COPAIER a consisté à démontrer que l'implantation réalisée permet de retrouver les résultats d'un calcul avec le couplage externe par termes sources. On effectue un calcul de dépôt d'énergie à l'aide du code 2D axisymétrique du DTIM.

Les termes sources résultants sont utilisés dans un calcul de référence où le solveur CHARME est initialisé avec le champ T_{int} (13.4). Ce calcul de référence est noté par la suite *TS* pour dire qu'il est effectué à l'aide de termes sources externes. Un deuxième calcul est réalisé à l'aide du couplage interne implanté à partir du signal d'intensité issu du calcul de dépôt d'énergie effectué précédemment. Ce calcul sera désigné sous le terme *COPAIER* pour rappeler qu'il résulte du couplage entre le solveur CHARME et le solveur COPAIER.

Les calculs sont ensuite conduits avec des paramètres strictement identiques à partir du même maillage. Ce dernier est composé de 449136 cellules pour la cavité JSP simulée¹. Le pas de temps est $\delta t = 3.10^{-10}$ s et le temps final est fixé à 1.10^{-5} s. On présente tout d'abord sur les figures 13.2(a) et 13.2(b) les bilans d'énergie dans la cavité JSP pour les deux calculs. Si

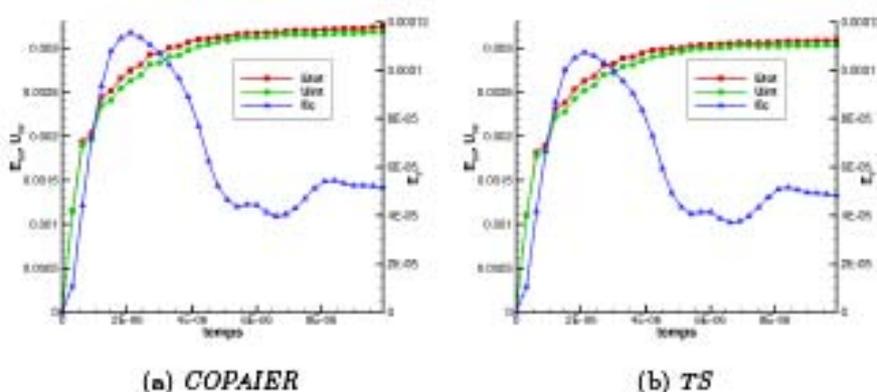


FIGURE 13.2 – Bilan d'énergie pour les deux simulations

les évolutions des deux calculs sont assez proches, on note tout de même que l'énergie globale déposée est supérieure de 5% dans le calcul *COPAIER*. Cela est principalement dû à deux choses. Premièrement, les termes sources calculés par le code Euler 2D axisymétrique de dépôt d'énergie sont projetés sur une partie du maillage CHARME et ne sont stockés que pour 150 instants représentatifs de la durée totale du dépôt à savoir $10\mu\text{s}$. L'erreur d'interpolation conduit à une sous-estimation de l'énergie déposée. La seconde source d'écart entre les deux simulations provient du calcul de la résistance R_{plasma} mais ce facteur ne devrait pas jouer beaucoup car la symétrie cylindrique est assez bien respectée dans le cas présent notamment dans les premiers instants où pratiquement toute l'énergie est déposée. Pour être tout à fait complet, il conviendrait de vérifier que les tables thermodynamiques utilisées dans le code Euler 2D axisymétrique de dépôt d'énergie et dans le code CEDRE sont identiques et possèdent le même raffinement en température et en pression. On néglige cet aspect en supposant que les écarts entre ces deux tables ont un rôle négligeable dans le cas présent. Enfin il faut bien avoir à l'esprit que le code 2D Euler axisymétrique est un code s'appuyant sur une méthode de différence finie d'ordre 2 en espace avec une intégration explicite d'ordre 1 en temps alors que le code Navier Stokes

1. La géométrie de la tuyère dans le cas présent correspond à une version plus ancienne du JSP. C'est sur cette géométrie que les premières validations de la méthodologie de calcul ont été conduites.

CHARME utilise dans le cas présent une méthode volume fini d'ordre 2 avec intégration explicite d'ordre 3 en temps et que les deux discrétisations utilisées pour les calculs des termes sources sont différentes. Or pour une intensité donnée, si la distribution de température est légèrement supérieure dans un des deux cas (effet des schémas numériques ou de la discrétisation), le calcul de la résistance R_{plasma} conduira à une légère diminution qui se traduira par une augmentation de la valeur des termes sources p_{elec} (13.3). A l'itération suivante l'écart sur la distribution de température sera augmenté. Il existe ainsi un couplage fort entre la distribution de température et le calcul des termes sources.

Finalement, ce que l'on retient de cette comparaison entre bilan d'énergie est que les deux simulations sont malgré tout très proches. Les deux calculs devraient conduire à des montées en pression et en température dans la cavité très similaires.

On examine donc maintenant les champs instantanés de pression et de température pour les deux calculs pour 2 instants différents. On représente à chaque fois deux plans verticaux respectivement parallèle et orthogonal au plan de symétrie des électrodes. Les figures 13.3(a), 13.3(b), 13.3(c) et 13.3(d) présentent l'ensemble des champs de pression tandis que les figures 13.4(a), 13.4(b), 13.4(c) et 13.4(d) montrent ceux de température.

Les champs de pression obtenus sont très proches pour les deux calculs et la dynamique de montée en pression dans la cavité semble identique. Ainsi, les jets produits, non calculés dans cette étude, seront identiques à peu de choses près. C'est un résultat essentiel qui confirme la bonne implantation du modèle de dépôt d'énergie dans le solveur COPAIER de la plateforme CEDRE. On profite de ces figures 13.3(a), 13.3(b), 13.3(c) et 13.3(d) pour décrire la dynamique interne de la cavité JSP. L'onde de pression issue du claquage initial se propage et se réfléchit sur les parois. Suite à la première réflexion sur les parois de la tuyère un point de focalisation apparaît, voir les figures 13.3(c) et 13.3(d), qui va entraîner l'expulsion d'une certaine quantité d'air. D'autres réflexions vont se produire ensuite. Laurendeau *et al* [17] détaille l'ensemble des réflexions se produisant dans la cavité et explique ainsi le caractère pulsé du jet lors d'un cycle. Évidemment, les figures 13.4(a), 13.4(b), 13.4(c), 13.4(d) confirment pour les températures l'excellent accord obtenu entre les deux simulations. On est ainsi certain de retrouver un état initial similaire pour le cycle suivant, et l'on sait que la température est un élément essentiel du modèle de dépôt d'énergie. On note que l'élévation de température reste relativement localisée autour des électrodes. La température n'intervient pas pour la dynamique du jet mais joue un rôle important quant à la quantité d'énergie déposée. La densité de l'air et donc le débit sortant sont dépendants de la température.

13.2 Méthodologie de calcul et validation basse-fréquence

En s'appuyant sur ce modèle de dépôt d'énergie et à l'aide du couplage CHARME/COPAIER, une méthodologie de calcul a été développée et validée. Ce que l'on souhaite reproduire numériquement, c'est le développement d'un jet suite à la montée en pression et en température d'une cavité. C'est un écoulement transitoire résultant d'un problème aux conditions initiales. On décide ainsi d'effectuer des calculs LES pour simuler le fonctionnement du JSP. Les gradients de pression, de température et de vitesse générés par le dépôt brutal d'énergie forcent à l'utilisation

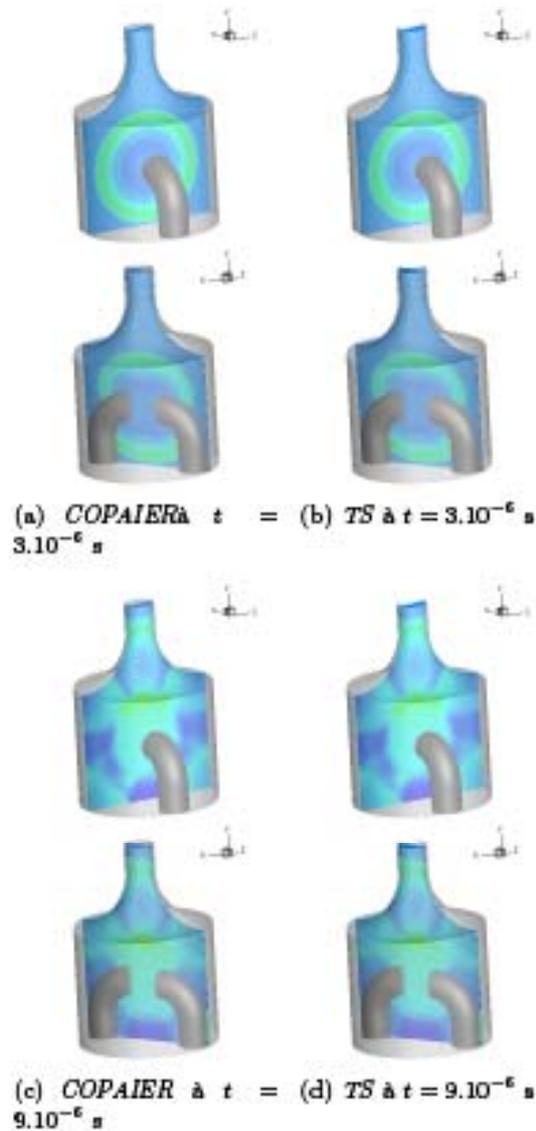


FIGURE 13.3 – Champs de pression pour les deux calculs .

de maillages raffinés et à l'utilisation de pas de temps petits, la contrainte CFL étant forte. La figure 13.5 donne un aperçu d'un maillage typique de la cavité JSP. On compte entre 700.000 et 1M de cellules pour le maillage de la cavité. Le jet débouchant à l'extérieur de l'actionneur doit lui aussi être finement discrétisé, bien que les temps caractéristiques d'évolution du jet et du dépôt d'énergie soient assez différents. Le dépôt se fait sur une durée de quelques μs avec une période de l'ordre de $1 \mu\text{s}$, voir la figure 11.2(b), alors que le jet dure quelques centaines de μs avec une période d'oscillation de l'ordre la dizaine de μs . Ainsi, on distingue dans les calculs la

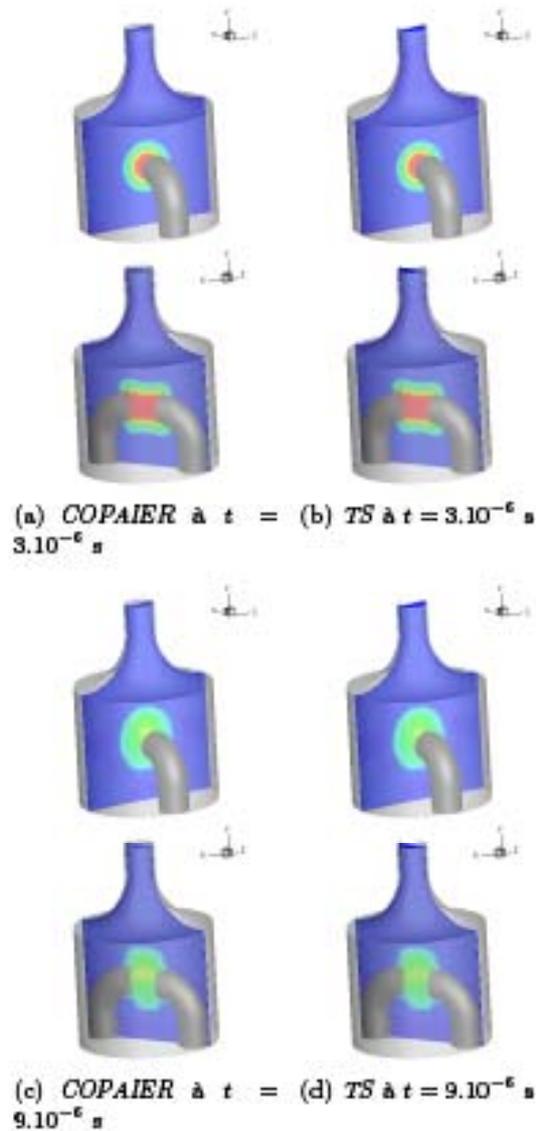


FIGURE 13.4 – Champs de température pour les deux calculs

phase de dépôt d'énergie de celle d'éjection et d'aspiration. Dans un premier temps, seuls des calculs explicites étaient effectués. Le coût d'une simulation avec phase de dépôt et d'éjection étant relativement élevé, on a tiré profit des différences de caractéristiques des différentes phases pour mettre en place des calculs avec une intégration temporelle implicite. Typiquement les pas de temps pour la phase de dépôt sont de 1.10^{-9} s (alors qu'ils sont de l'ordre de 1.10^{-10} s à 1.10^{-9} s en fonction de la raideur du signal d'intensité I pour les calculs explicites), alors que pour la phase d'éjection on considère des pas de temps de 1.10^{-7} s. On a montré qu'une inté-

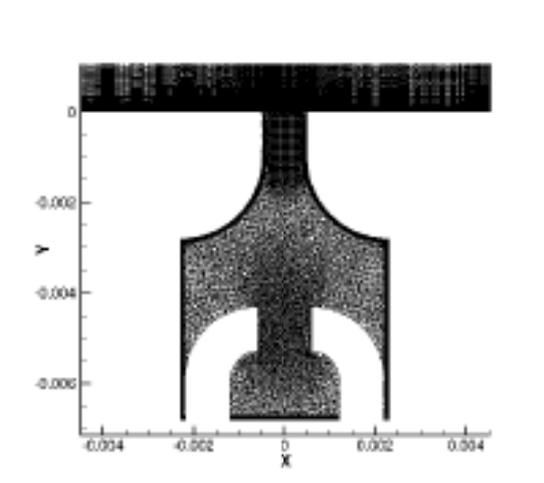


FIGURE 13.5 – Vue en coupe d'un maillage typique de la cavité JSP.

gration implicite avec les pas de temps considérés, 1.10^{-9} s pour la phase de dépôt et 1.10^{-7} s pour la phase d'éjection, permet de retrouver des résultats très proches de ceux issus de calculs explicites.

On commence par le cas du jet débouchant dans une atmosphère au repos. Pour simplifier, on se focalise sur le cas BF pour lequel les cycles sont indépendants les uns des autres. En outre, on peut supposer que les parois internes de la cavité sont adiabatiques dans un tel cas. On réalise donc une simulation LES des phases de dépôt et d'éjection d'un cycle unique. Les conditions initiales correspondant à celles d'un fluide au repos incite à penser que le jet simulé peut être représentatif d'un jet moyen. Ainsi les résultats sont comparés aux résultats moyennés en phase obtenus à partir des seules mesures disponibles au moment de leur réalisation, *i.e.* les images strioscopiques de Hardy [13]. Le détail des simulations ainsi que les post-traitements utilisés sont donnés dans [17]. On présente sur les figures 13.6(a) et 13.6(b) les évolutions du débit en section de sortie et la comparaison simulation/expérience de l'évolution temporelle du front de jet. Un second calcul avec terme source constant en temps a été aussi réalisé pour mettre en évidence l'apport du modèle de dépôt d'énergie. La courbe d'évolution du débit montre clairement le fonctionnement pulsé de l'actionneur sur un cycle. Ce comportement est lié à la dynamique interne de la cavité où les ondes de pression issues du claquage initial se propagent et se réfléchissent, créant ainsi un système pulsé. Ce qui est remarquable sur cette simulation, c'est l'excellent accord obtenu sur l'évolution du front de jet comparée aux mesures. Cela montre que le modèle de dépôt d'énergie permet de bien reproduire le développement du jet issu de l'actionneur JSP. Pour aller plus loin, les figures 13.7(a) et 13.7(b) proposent des représentations des structures annulaires qui se développent dans le jet. Elles permettent une description de la topologie du jet. Les comparaisons avec les images strioscopiques sont tout à fait probantes, et prouvent que la dynamique interne initiée par le dépôt d'énergie est représentative du comportement observé. On remarque aussi sur la figure 13.7(b) l'existence d'appariements entre tourbillons successifs qui conduisent au développement de structures turbulentes au sein du jet. En reprenant cette

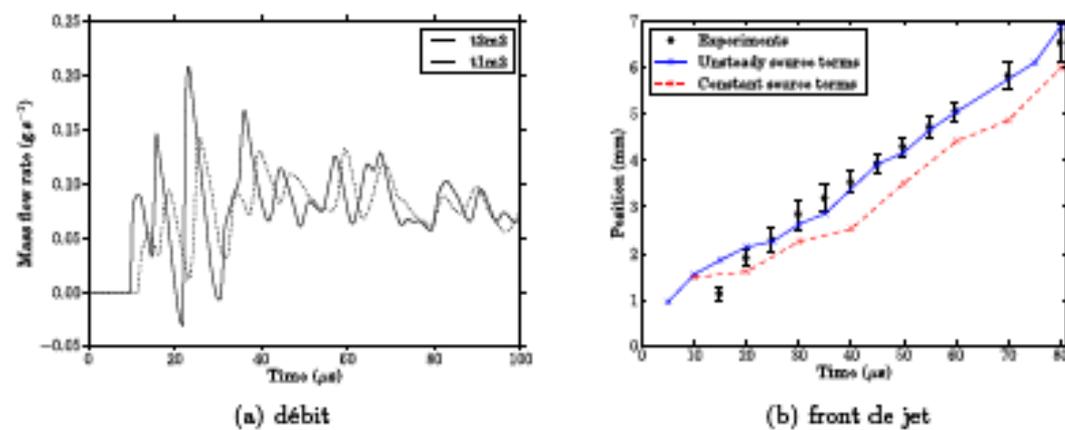
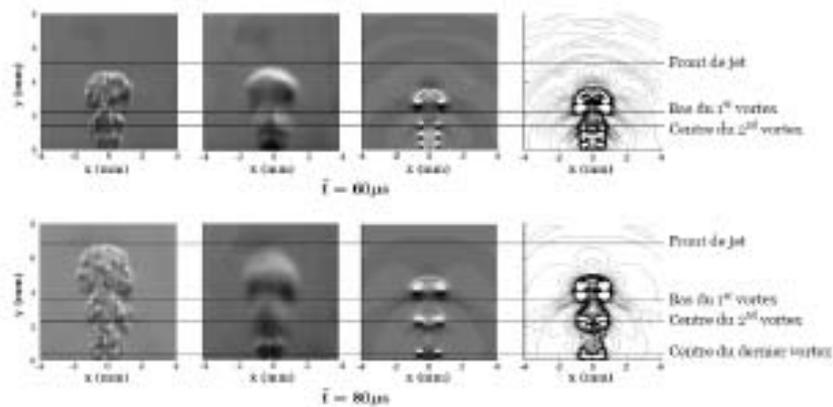
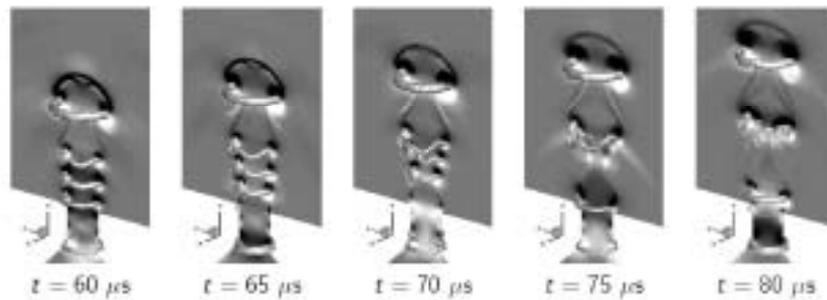


FIGURE 13.6 – Débit d'air à travers l'orifice de sortie de la cavité JSP et comparaison des évolutions des fronts de jet simulés [17] et mesurés par striescopie [13].



(a) Topologie du jet



(b) Structures annulaires

FIGURE 13.7 – Comparaison des topologies des jets simulés [17] et mesurés [13] sur la base d'images strioscopiques. Les structures annulaires sont représentées sur la partie inférieure de la figure par des iso-surfaces de critère Q sur fond d'iso-contours de gradient vertical de masse volumique.

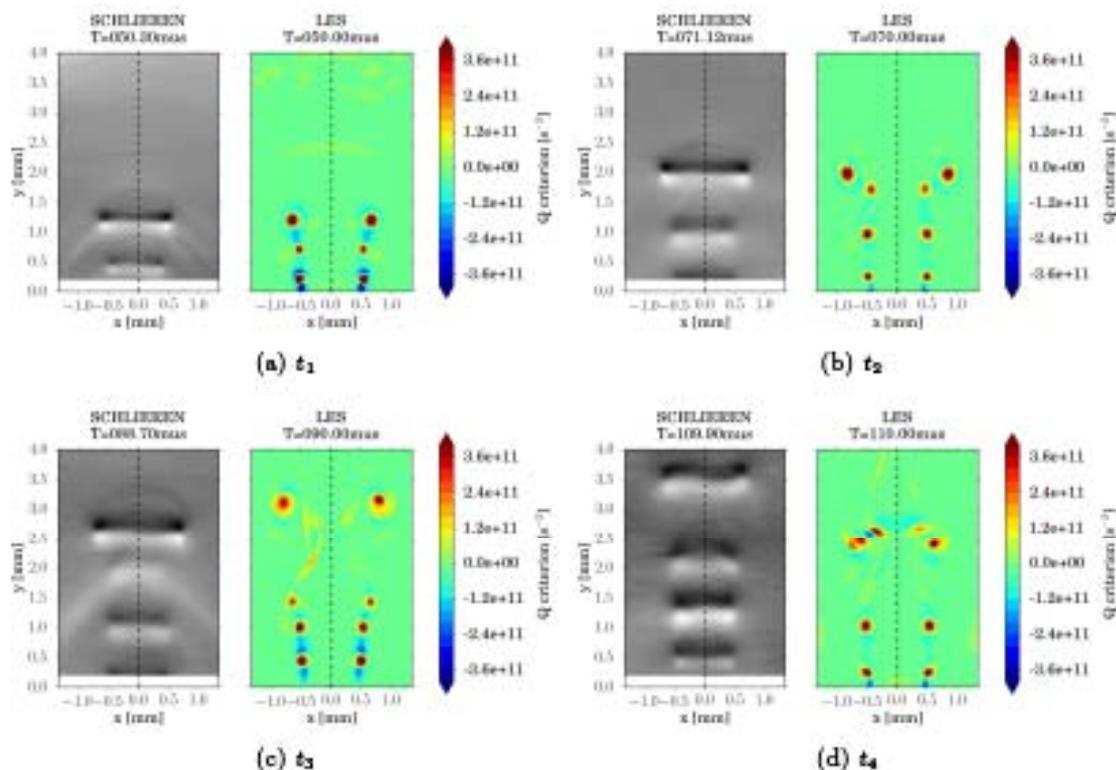


FIGURE 13.8 – Comparaison de la topologie des jets entre les mesures striscopiques et les simulations LES. Les champs de gradient de masse volumique obtenus expérimentalement sont comparés à des iso-contours de critère Q .

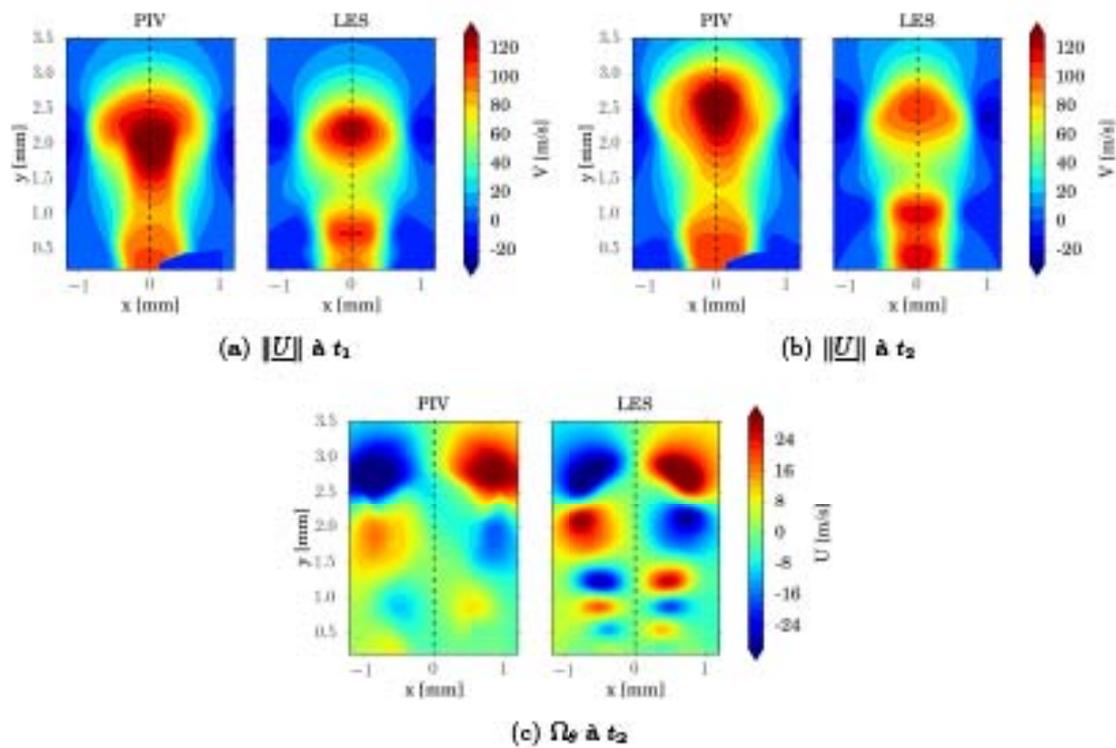


FIGURE 13.9 – Comparaison des champs de la norme de la vitesse et de vorticité entre les mesures PIV et les simulations LES.

méthodologie, les essais des bancs strioscopiques et PIV ont aussi été reproduits. A partir d'un signal d'intensité I moyen, on procède à un calcul avec le code CEDRE en activant les solveurs COPAIER et CHARME. Les figures 13.8(a) à 13.8(d) mettent en avant les très bons accords obtenus par rapport aux mesures strioscopiques. Sur ces figures sont tracés les champs de gradient vertical de masse volumique pour les mesures et des iso-contours de critère Q pour les résultats de la simulation. Le choix du critère Q permet de mieux identifier l'ensemble des structures présentes dans la simulation. La dynamique du jet et surtout la position des structures annulaires est remarquablement bien retrouvée par les simulations. On se doute que pour obtenir un si bon accord le champ de vitesse simulé doit lui aussi bien correspondre aux mesures. Pour ne pas laisser de place au doute, on examine à présent les comparaisons aux mesures PIV, données sur les figures 13.9(a), 13.9(b) et 13.9(c).

Si les résultats de la simulation paraissent plus éloignées des mesures PIV que lors des comparaisons aux mesures strioscopiques, c'est notamment dû aux incertitudes des mesures PIV. Les difficultés d'ensemencement des zones à forte vorticité sont une des explications qui conduisent aux écarts constatés. Cependant, l'accord entre mesures et calculs reste très satisfaisant. Sur le cas considéré et présenté sur les figures 13.9(a), 13.9(b) et 13.9(c), les zones de fortes vitesses sont bien reproduites avec des niveaux tout à fait comparables aux mesures. Une comparaison plus exhaustive sur l'ensemble des essais confirme ce résultat.

Pour démontrer que la méthodologie de calcul peut être un outil au service de la définition d'une stratégie de contrôle, on vérifie sa capacité à reproduire fidèlement l'interaction d'un jet synthétique issu de l'actionneur plasma avec un écoulement de couche limite laminaire. On commence par se tourner vers le cas BF puisque la méthodologie développée et présentée ci-avant est uniquement valable dans ce cas. On souhaite pouvoir reproduire l'effet de la moyenne de phase opérée dans les essais en réalisant un certain nombre de calculs dont les paramètres initiaux seraient distincts. Il s'agit donc de trouver les paramètres clés qui régissent la dispersion observée des mesures d'un cycle    l'autre. On a longtemps pensé que la turbulence résiduelle au sein de la cavité ou la non-uniformité du champ de température pouvaient conduire à la dispersion des essais. Plusieurs tentatives de modification des conditions initiales dans la cavité ont abouti à des impasses. En fait, on pense aujourd'hui que la dispersion observée dans le développement du jet provient des variations entre les différents claquages. Dans un cas basse fréquence, on impute ces variations à des effets de pré-ionisation des électrodes non reproductible d'un cycle    l'autre. En pratique, étant donné qu'on a acquis l'ensemble des signaux d'intensité I pour chacun des cycles d'un essai donné, on va pouvoir définir différentes conditions d'entrée du modèle de dépôt d'énergie qui vont reproduire l'effet désiré. Ainsi, à partir du signal d'intensité moyen d'un essai, et des écarts types obtenus pour la période et l'amplitude des signaux, on définit un ensemble de signaux représentatifs de ceux mesurés. Sur la figure 13.10, on trace 10 signaux représentatifs du cas d'essai BF avec $C = 16,6$ nF. On définit donc une série de 10 calculs, chacun d'une durée de 0,001 s, avec des conditions initiales au repos dans la cavité. Le cas simulé étant un cas BF, les parois sont considérées adiabatiques. A l'issu des 10 calculs on procède à un post-traitement des données comme suit. Outre la moyenne des différents calculs à un instant donné, on réalise deux autres opérations afin de reproduire le post-traitement opéré sur les images PIV. Ainsi, pour tenir compte de l'épaisseur de la nappe laser, on vient effectuer une intégration des résultats de

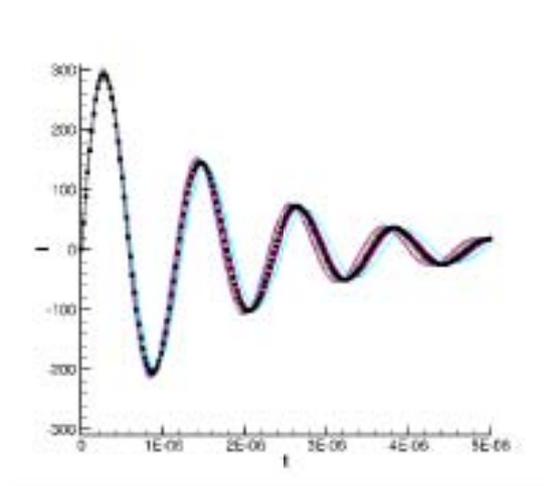


FIGURE 13.10 – Signaux utilisés pour la simulation du cas BF d'interaction du JSP avec une couche limite laminaire

simulation sur une épaisseur identique à celle de la nappe utilisée, *i.e.* $l = 1,5$ mm, pondérée par une gaussienne où l'écart type vaut $\sigma = \frac{l}{4}$. La gaussienne vise à retranscrire la variation d'intensité lumineuse sur l'épaisseur de la nappe. Par ailleurs, on balaye ensuite le champ de vitesse obtenu à l'aide d'une fenêtre d'interrogation dont la largeur est celle de la fenêtre utilisée pour le post-traitement PIV soit $2,16 \cdot 10^{-4}$ m (9 pixels). Pour un instant donné, si on effectue séparément ces traitements d'images, on s'aperçoit que la moyenne des 10 calculs reproduisant la moyenne de phase constitue l'effet dominant. L'intégration sur l'épaisseur de la nappe laser apporte un léger effet de lissage des structures alors que l'effet de moyenne sur la fenêtre d'interrogation semble négligeable. Les résultats obtenus avec ces trois traitements sont comparés aux mesures PIV sur les figures 13.11(a) à 13.11(e) sur lesquelles les champs de vitesse longitudinale U_x sont tracés. Les mesures et les simulations fournissent des résultats similaires. On observe le développement du jet, sa diffusion et sa convection par l'écoulement amont ainsi que la présence d'ondes de pression dans les premiers instants après le claquage. Sur d'autres quantités telle que la vorticité, on observe en pied de la structure principale convectée, une déformation de la couche limite qui est très bien retrouvée dans les simulations. La stratégie adoptée pour obtenir des champs proches de ceux obtenus expérimentalement, et notamment concernant l'effet de la moyenne de phase, s'avère être payante puisque les plus petites structures sont lissées pour que ne subsistent seulement les grosses, ce qui rapproche les résultats de simulation de ceux des expériences.  videmment, une centaine de calculs aurait été préférable pour accentuer encore davantage l'effet de moyenne, cependant le c ut de simulation devient rapidement prohibitif.

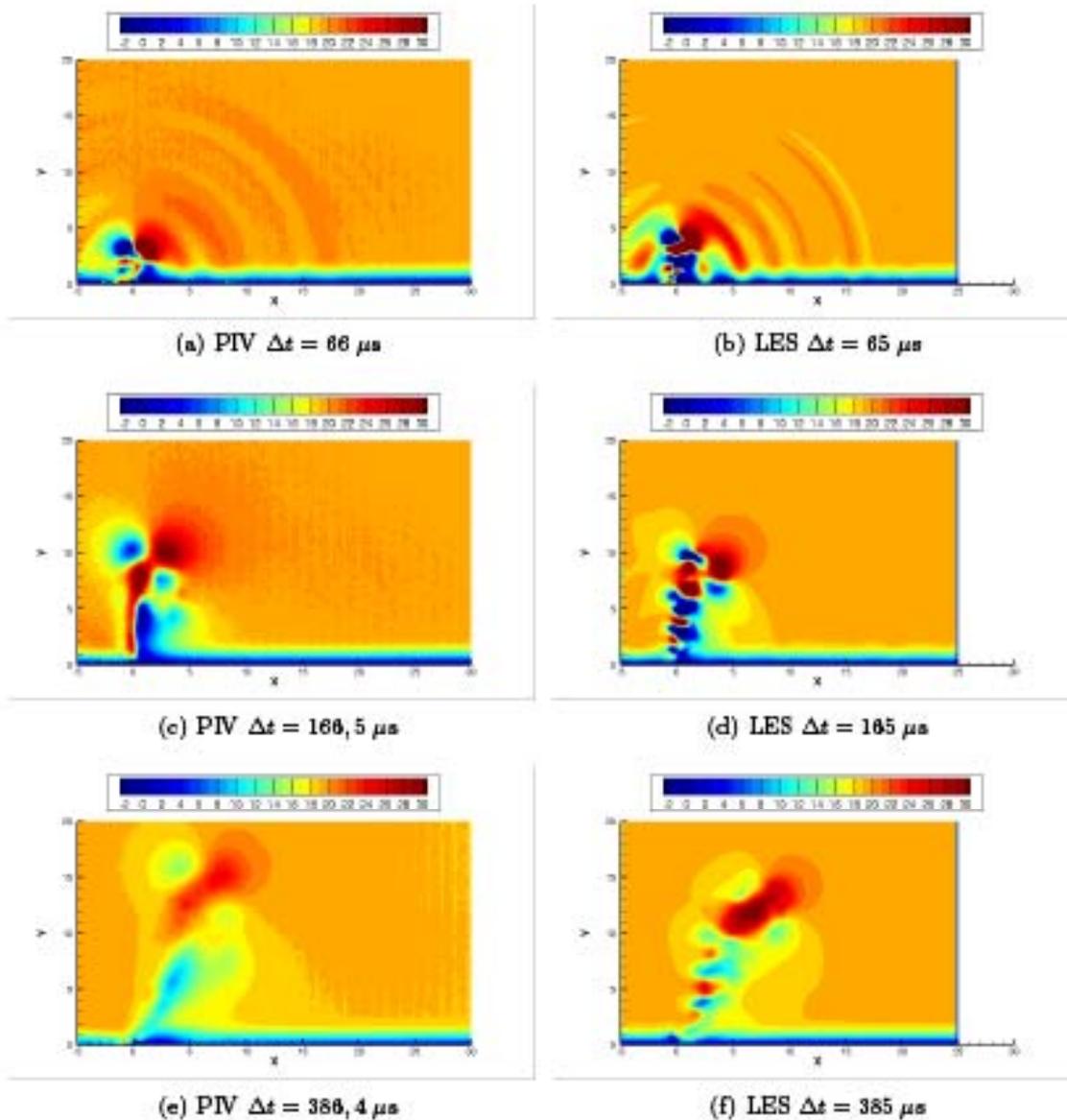


FIGURE 13.11 – Comparaison des champs de vitesse longitudinale U_x entre les mesures PIV et la moyenne des 10 calculs LES dans le cas BF de l'interaction d'un JSP avec une couche limite laminaire.

13.3 Extension du modèle au cas haute fréquence

Pour la reproduction du cas HF d'interaction JSP/couche limite, la fréquence d'actionnement est de $f = 1000$ Hz et on doit chaîner les calculs en activant de manière périodique le dépôt d'énergie. On ne peut plus considérer les parois comme adiabatiques et un travail préalable a été

nécessaire afin de déterminer un environnement thermique représentatif

Le modèle HF repose strictement sur la même base que le modèle BF précédemment présenté. Si on ne s'intéresse qu'au cycle limite, c'est-à-dire après un nombre de cycles suffisant pour atteindre un régime quasi-permanent, alors il suffit de déterminer les conditions limites thermiques à appliquer à la cavité JSP pour reproduire le comportement HF de l'actionneur. Pour construire le modèle, on s'appuie sur les mesures existantes et notamment l'évolution de la tension de claquage lors d'un essai à haute-fréquence. Les figures 13.12(a) et 13.12(b) montrent l'évolution de la tension de claquage durant un essai à fréquence $f = 1$ kHz. On remarque que l'évolution de la

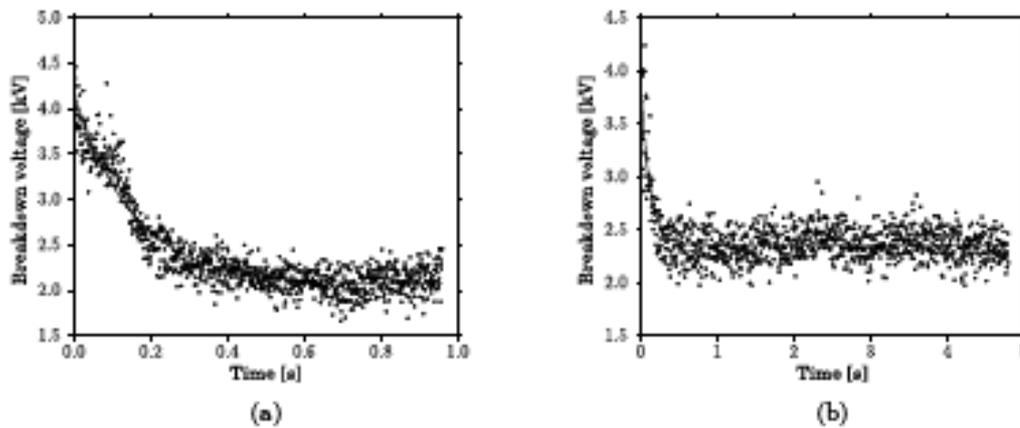


FIGURE 13.12 – Évolution de la tension de claquage durant un essai à haute fréquence $f = 1$ kHz. La courbe en noir représente une exponentielle décroissante dont le temps caractéristique est de 0,14 s

tension de claquage se fait en deux temps. Tout d'abord pour les tous premiers cycles (de 1 à 3) on observe une chute brutale de la tension de claquage de l'ordre de 1 kV, puis dans un second temps, on note un amortissement progressif suivant une exponentielle décroissante.

Une étude des décharges de plasma montre que plusieurs phénomènes peuvent intervenir pour expliquer le comportement observé. La première phase de chute rapide de la tension de claquage peut être imputée aux charges persistantes dans les électrodes et à la montée en température soudaine du canal de décharge. Cependant cette phase ne nous intéresse pas particulièrement, puisqu'on cherche à comprendre ce qui conduit au cycle limite, c'est-à-dire pour un grand nombre de cycles. Un bilan d'énergie sur un cycle moyen au niveau de la capacité C montre qu'une partie importante de l'énergie ($\approx 80\%$) est évacuée dans les gaines cathodique et anodique. Une analyse dimensionnelle montre que l'on peut négliger les effets de convection et de rayonnement pour le transfert d'énergie au niveaux des électrodes. Ainsi, l'énergie dissipée dans les gaines est transmise par conduction dans les électrodes. Cette hypothèse est confortée par une simulation de conduction comprenant la géométrie complète de la cavité JSP et lors de laquelle la quantité d'énergie dissipée est imposée sous la forme d'un flux sur les faces en regard des électrodes. Le temps caractéristique de montée en température des faces des électrodes est de 0,1 s et corres-

pond bien au temps de décroissance caractéristique de la tension de claquage. Finalement on en conclut que pour déterminer les conditions limites à imposer au niveau des parois de la cavité JSP, un calcul de conduction avec flux imposé au niveau des électrodes suffit.

Des simulations sur un grand nombre de cycles avec une courbe d'intensité donnée et dans lesquelles la température des électrodes était fixée ont montré qu'au-delà de 20 cycles le champ de température dans la cavité est convergé. Il n'y a donc pas d'effet d'histoire au niveau du champ aérodynamique au delà de 20 cycles. Ainsi avec les conditions limites issues du calcul de conduction, on procède à un calcul sur vingt cycles qui va donner un champ de température pour l'air représentatif du comportement à haute-fréquence en régime permanent. C'est ce champ qui est utilisé comme condition initiale. Plus de détails sur la construction de ce modèle haute-fréquence sont disponibles dans la thèse de F. Laurendeau [16].

Des calculs avec un environnement extérieur au repos ont permis de mettre en évidence les différences apportées par ce modèle HF par rapport à des calculs opérés avec le modèle BF, c'est-à-dire avec des conditions limites adiabatiques en paroi. Notons tout de même que dans la mesure où l'on utilise un signal d'intensité issu de l'expérience, ce dernier intègre une grande partie des effets HF. En effet, le signal d'intensité est fortement dépendant de l'environnement thermique comme on l'a déjà évoqué précédemment. Ce que le modèle HF doit reproduire, c'est le bon niveau de transfert d'énergie qui va dépendre de la conductivité électrique, cette dernière étant elle-même liée au champ de température du gaz.

Le modèle n'a pas encore été validé par l'expérience. Une première étape consiste à l'éprouver sur le cas de l'interaction couche limite/JSP pour une fréquence d'actionnement de 1 kHz. Des mesures en environnement au repos seraient souhaitables afin de valider le modèle et de vérifier certaines hypothèses constitutives du modèle HF.

13.4 Utilisation pour l'analyse des mesures PIV

Maintenant que l'on possède un modèle numérique qui permet de reproduire fidèlement le jet issu de l'actionneur JSP, on va pouvoir mettre à profit ce modèle pour différentes études. Un point sensible des mesures PIV réalisées dans le cas du jet isolé, voir le chapitre 12, est la quantification de l'incertitude. En outre, étant donné les conditions indirectes d'ensemencement dues à l'actionneur, se pose également la question de la dynamique des particules et donc de la représentativité du champ PIV obtenu. Ces questions ont fait l'objet d'une étude approfondie par F. Laurendeau et un article a été soumis à un journal à comité de lecture.

13.4.1 Dynamique des particules

Le modèle numérique est couplé au solveur SPARTE du code CEDRE. C'est un solveur lagrangien pour la phase dispersée. Étant donné les conditions des essais PIV, pour lesquels la fraction volumique des particules dans l'écoulement est estimée à $2 \cdot 10^{-7}$ et l'écart moyen entre particule à $32 \mu\text{m}$, on peut supposer que le couplage entre les phases gazeuse et liquide est seulement "one-way". Le gaz influence les particules mais la réciproque n'est pas vraie. Par ailleurs on suppose que les particules n'interagissent pas entre elles. Seuls les efforts de traînée inter-

viennent dans la dynamique des particules en raison de l'écart de densité entre le gaz et la phase dispersée. On considère 7 classes de particules pour la simulation. Chaque classe représente une gamme de diamètres de gouttes issue de la distribution donnée par le constructeur du système d'ensemencement et allant de $0,14 \mu\text{m}$ à $0,6 \mu\text{m}$. A l'instant initial, on place des particules sans vitesse dans un volume en sortie de l'actionneur. Notons que des particules sont aussi placées dans la tuyère de l'actionneur. Comme le couplage est "one-way", il est inutile de respecter la concentration pour chaque classe de particules mesurée expérimentalement. En effet, on pourra tenir compte des effets de concentration *a posteriori* puisque les particules n'interagissent pas entre elles et n'influencent pas le gaz. On place donc une particule de chaque classe dans chacune des cellules du volume retenu.

On trace sur la figure 13.13 les champs de vitesse obtenus pour chaque classe de particule. On reporte aussi sur cette image le champ de vitesse du gaz. La vitesse d'une classe donnée est cal-

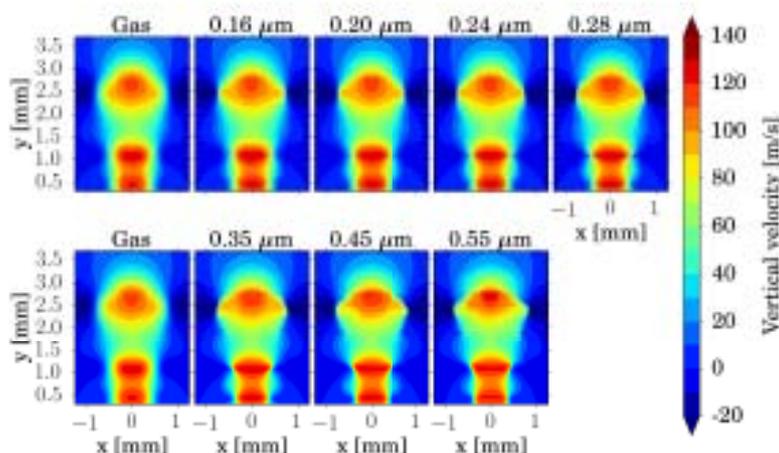


FIGURE 13.13 – Champs de vitesse verticale issus du calcul couplé avec le solveur SPARTE pour chaque classe de particule à l'instant $\Delta t = 94 \mu\text{s}$.

culée en prenant la moyenne pondérée de toutes les particules de cette classe contenues dans la fenêtre d'interrogation. La pondération se fait à partir du profil gaussien de l'intensité lumineuse de la nappe laser. On note qu'il existe des écarts entre le champ de vitesse de la phase gazeuse et les champs de vitesse obtenus pour chaque classe de particule. Les écarts sont d'autant plus grand que le diamètre des gouttes augmente.

En reconstituant la concentration globale dans la simulation à partir des données expérimentales, et en attribuant une intensité lumineuse à chaque particule en fonction de son diamètre selon la théorie de Lorentz-Mie, une procédure a été mise en place afin de créer des images numériques de particules. Une fois ces images établies, on montre que les particules, pour lesquelles la plage de variation du nombre de Stokes renvoie de faibles valeurs, ne suivent pas parfaitement la phase gazeuse. En effet, dans les zones de forte vorticité, les effets centrifuges n'autorisent pas les par-

ticules à suivre l'écoulement. On constate des écarts allant jusqu'à 10% entre la vitesse verticale du gaz et celles des particules.

Ainsi, en s'appuyant sur la méthodologie de simulation développée pour les JSP, on a pu estimer l'erreur commise dans les mesures PIV en raison de la dynamique des particules. C'est une manière de rapprocher les simulations de l'expérience. De manière un peu similaire, une quantification de l'incertitude de mesure a pu être menée en faisant appel aux résultats des calculs CEDRE.

13.4.2 Quantification de l'incertitude

L'outil numérique développé a aussi servi pour l'évaluation des incertitudes des mesures PIV. Il a été identifié trois sources d'incertitudes dans les mesures obtenues.

La première est une incertitude statistique liée à la dispersion des mesures par moyenne de phase. Comme on l'a déjà évoqué, il existe une dispersion dans les instants de mesures Δt , mais aussi sur le signal d'intensité I , l'ensemencement initial, la turbulence résiduelle en fin de cycle, ... Cette incertitude est donnée par une loi normale, obtenue à partir de l'écart type entre les vitesses instantanées et la vitesse en moyenne de phase. On montre que cette source d'incertitude est assez faible.

La deuxième source d'incertitude est liée à la position de la paroi sur les images. On évalue cette incertitude à partir de la réflexion de la nappe laser visible sur les images PIV. Cette estimation fait intervenir le gradient vertical de la vitesse en moyenne de phase qui est accessible depuis les données PIV. De manière identique à la première source d'incertitude, cette seconde source a une contribution faible sur l'incertitude globale.

En effet, c'est la troisième source d'incertitude qui domine très nettement. Elle est liée à la position radiale de la nappe laser. Une prise de vue en fin d'expérience, voir la figure 13.14 montre la trace laissée par la nappe laser sur la rhodamine qui recouvre le plancher de la boîte de mesure. Cette image permet d'estimer la position radiale de la nappe laser $r = 0,25 \pm 0,1$ mm. Pour estimer l'incertitude liée à la position de la nappe, il faut connaître le gradient radial de la vitesse en moyenne de phase. Cette information n'est pas accessible à partir des images PIV et c'est là que le modèle numérique intervient. On procède ainsi à des extractions de champ de vitesse pour deux positions radiales $r = 0,15$ mm et $r = 0,35$ mm à partir des données du champ gaz de la simulation couplée avec la phase dispersée. On montre ainsi que c'est cette source d'incertitude qui prédomine largement. La figure 13.15 présente une carte de l'incertitude globale obtenue à l'instant $\Delta t = 94 \mu s$. Évidemment on retrouve le fait que les zones de forte vorticité sont celles qui présentent le plus d'incertitudes de mesures. De même, proche de l'orifice, la taille des tourbillons annulaires étant de l'ordre de la taille de l'orifice de sortie de l'actionneur, on constate une incertitude importante liée à la position radiale de la nappe laser.

L'étude de la dynamique des gouttes et la quantification de l'incertitude sont deux exemples d'une utilisation possible du modèle numérique mis en place pour l'actionneur. Cet outil, précis et validé, nous permet aujourd'hui de mieux comprendre le développement du jet issu de l'actionneur JSP et nous donne accès à un niveau d'information inaccessible par la mesure. Une autre exploitation, plus directe, de cet outil est donnée dans la section qui suit.

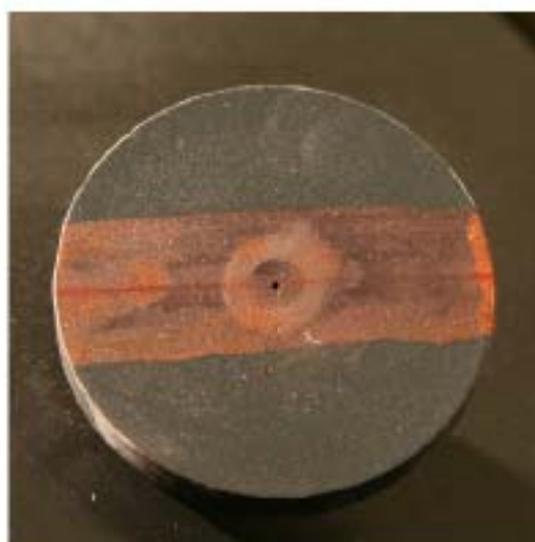


FIGURE 13.14 – Photographie de l'insert contenant le JSP et partiellement recouvert de Rhodamine. La position de la nappe laser est visible, passant par l'orifice de sortie de l'actionneur.

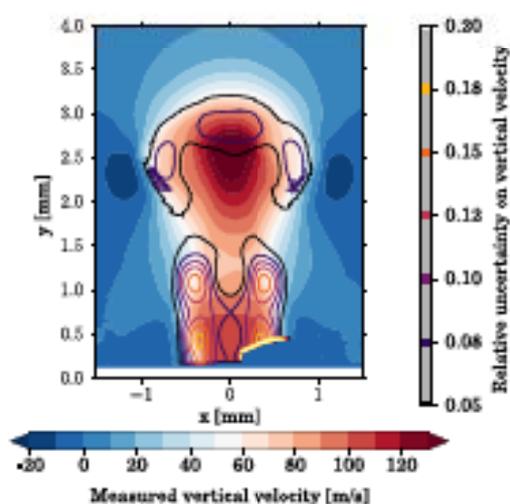


FIGURE 13.15 – Incertitude globale sur la vitesse verticale en moyenne de phase à l'instant $\Delta t = 94 \mu s$.

13.5 Exploitation des données du projet ORINOCO

La méthodologie de calcul développée a servi à exploiter des mesures réalisées dans le cadre d'un projet collaboratif Europe-Russie et nommé ORINOCO. Dans ce projet, des campagnes de mesures ont été menées au DMAE sur un jet subsonique, à nombre de Mach $M = 0,6$ et $M = 0,9$, et dont la lèvre de la tuyère était équipée de 12 actionneurs JSP, voir la figure 13.16. L'objectif visé était la réduction du bruit de jet, à l'instar de ce qui a été fait par Samimy et

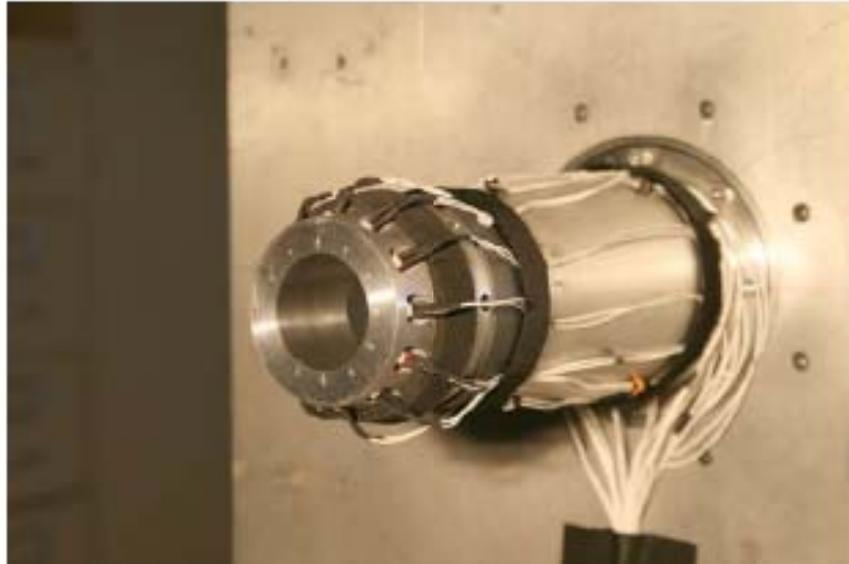


FIGURE 13.16 – Vue du montage équipé des 12 actionneurs JSP.

al [22, 23] avec l'actionneur LAFPA [24]. Les expériences mettant en jeu les 12 actionneurs ont donné des résultats mitigés en terme de réduction de bruit. Cependant il a bien été identifié une action des JSP sur la couche de mélange du jet. Parmi l'ensemble des mesures disponibles, une série d'expérimentations mettant en jeu un seul des 12 actionneurs présents sur la lèvre a été effectuée. Ainsi des mesures PIV de la zone à proximité de la lèvre et caractérisant l'interaction du jet issu du JSP avec la couche de mélange en développement ont été réalisées à $M = 0,6$. On note U_{jet} la vitesse du jet réacteur. Les figures 13.17(a) et 13.17(b) montrent les géométries de la tuyère utilisée, de diamètre $D = 50$ mm, le plan de mesure PIV et l'insertion du JSP à 45° dans la lèvre de la tuyère. L'actionneur est pulsé à la fréquence $f = 820$ Hz, ce qui correspond à un nombre de Strouhal égal à 0,2. On acquiert 300 paires d'images pour 5 instants différents qui décrivent une période $T = 1/f$. L'effet de l'actionneur sur la couche mélange n'influence que la partie supérieure $y > 0$ du domaine de mesure. Ainsi la partie basse des mesures peut être exploitée pour caractériser le jet subsonique non perturbé. Une analyse détaillée de ces mesures a montré un comportement standard du jet [8, 15].

Une simulation a été conduite à l'aide du code CEDRE avec prise en compte de l'actionneur JSP via le modèle de dépôt d'énergie. Au moment des calculs, seul le modèle basse-fréquence était

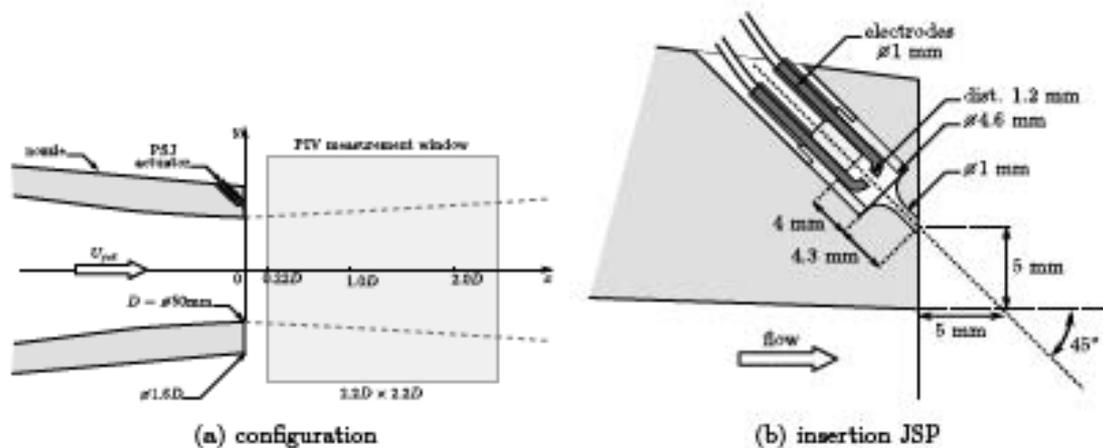


FIGURE 13.17 – Schémas représentant la configuration étudiée et l'insertion de l'actionneur JSP dans la lèvre de la tuyère.

disponible et on a fait l'hypothèse que les effets thermiques étaient faibles. Ils sont néanmoins en partie compris dans le signal d'intensité moyen tiré des mesures et utilisé pour les calculs. Le domaine de calcul et le maillage sont présentés sur les figures 13.18(a) et 13.18(b). Le maillage

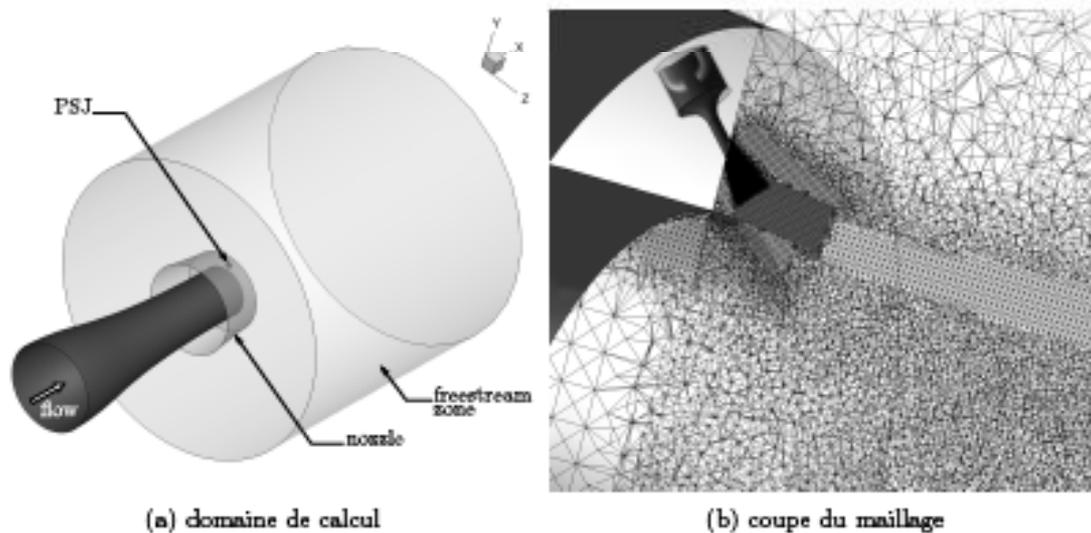


FIGURE 13.18 – Domaine de calcul et vue en coupe du maillage de la configuration ORINOCO

comporte environ 11M de cellules et est raffiné seulement sur $2,5D$ après la sortie tuyère pour s'intéresser uniquement à l'interaction du JSP avec la couche de mélange. On tire profit du fait que le code CEDRE propose la possibilité d'utiliser des modélisations différentes dans des do-

maines distincts, pour effectuer une simulation RANS dans la tuyère et une simulation LES à l'extérieur, c'est-à-dire à partir de la sortie de la tuyère et pour l'actionneur JSP. Le fait d'effectuer un calcul RANS dans la tuyère permet de simplement récupérer une épaisseur de couche limite correspondant aux mesures en sortie de tuyère sans avoir à générer de la turbulence en amont. En outre cela limite grandement le nombre de cellules nécessaire pour le calcul. En revanche, aucune fluctuation ne sort de la tuyère ce qui va conduire à une sous-estimation des tensions de Reynolds immédiatement à la sortie tuyère.

Le calcul se déroule de la manière suivante. A l'instant initial, après avoir établi l'écoulement moyen et mis en place l'écoulement instationnaire dans la couche de mélange, on procède à un premier dépôt d'énergie d'une durée t_d . On laisse le calcul se dérouler ensuite sur une période $T = 1/f - t_d$. On procède ensuite à un second claquage et on poursuit le calcul sur une demi-période supplémentaire. Ainsi lorsque l'on place une série de capteurs dans la couche mélange, on voit successivement passer la perturbation initiale issue du premier claquage, puis le second dépôt d'énergie. C'est ce qu'illustre la figure 13.19 sur laquelle quatre signaux de vitesse longitudinale u_x/U_{jet} , correspondant à quatre capteurs formant une ligne dans la couche de mélange², sont tracés. Après un temps ΔT , la perturbation issue du JSP atteint le premier capteur. Elle est ensuite convectée en aval et passe par les différents capteurs, ce que montre la première flèche. Ensuite le second claquage se produit et la seconde perturbation se propage. On définit les temps t_1 et t_2 , qui encadre le second claquage et qui vont servir par la suite pour illustrer les différents champs.

Avant de se focaliser sur l'interaction du JSP et de la couche de mélange, on présente les figures 13.20(a), 13.20(b), 13.20(c) et 13.20(d) relatives à la couche de mélange non perturbée. Les champs de vitesse moyenne longitudinale $\overline{U_x}/U_{jet}$ et de vitesse fluctuante $\overline{u_x^2}/U_{jet}^2$ sont globalement assez bien reproduits par la simulation. On note, comme attendu, le fait que l'écoulement dans la tuyère ne produit pas de fluctuations, ce qui entraîne une sous-estimation des fluctuations $\overline{u_x^2}/U_{jet}^2$ juste à la sortie de tuyère. Par ailleurs, on constate un effet du déraffinement du maillage un peu trop fort pour $x/D = 1$ sur la figure 13.20(d).

Sachant que la couche de mélange simulée est représentative de celle mesurée, on se penche maintenant sur la partie haute du domaine, où les interactions se concentrent. On trace sur les figures 13.21(a) à 13.21(h) différentes composantes de la vitesse pour les mesures et le calcul aux instants t_1 et t_2 . Les résultats de calcul obtenus aux instants t_1 et t_2 , figures 13.21(g) et 13.21(h), reproduisent bien l'effet du JSP sur la couche de mélange. A l'instant t_1 , on note la perturbation de la couche de mélange entre $x/D = 0,5$ et $x/D = 2$ qui est bien captée par la simulation. A l'instant t_2 , plus proche du second claquage que l'instant t_1 du premier dépôt d'énergie, la perturbation est localisée en amont, entre $x/D = 0,25$ et $x/D = 1,25$. L'accord reste très bon entre simulation et expérience, ce qui confirme l'intérêt de la méthodologie retenue. De plus amples détails sur la correspondance entre les résultats CEDRE et les mesures PIV sont donnés dans [8]. Ce qui est intéressant dans ce cas, c'est que l'on peut maintenant s'appuyer sur la simulation pour comprendre comment la perturbation identifiée expérimentalement et retrouvée numériquement est créée. On se concentre donc sur la région de sortie de tuyère pour $x/D < 0,3$. En traçant le champ de pression pour trois instants successifs encadrant le second claquage, on peut analyser la modification induite sur la couche de mélange par le dépôt d'énergie consécutif au

2. Les points ont les coordonnées suivantes $(x/D; r/D) = \{(0,5; 0.45), (1; 0.4), (1.5; 0.35), (2; 0.3)\}$.

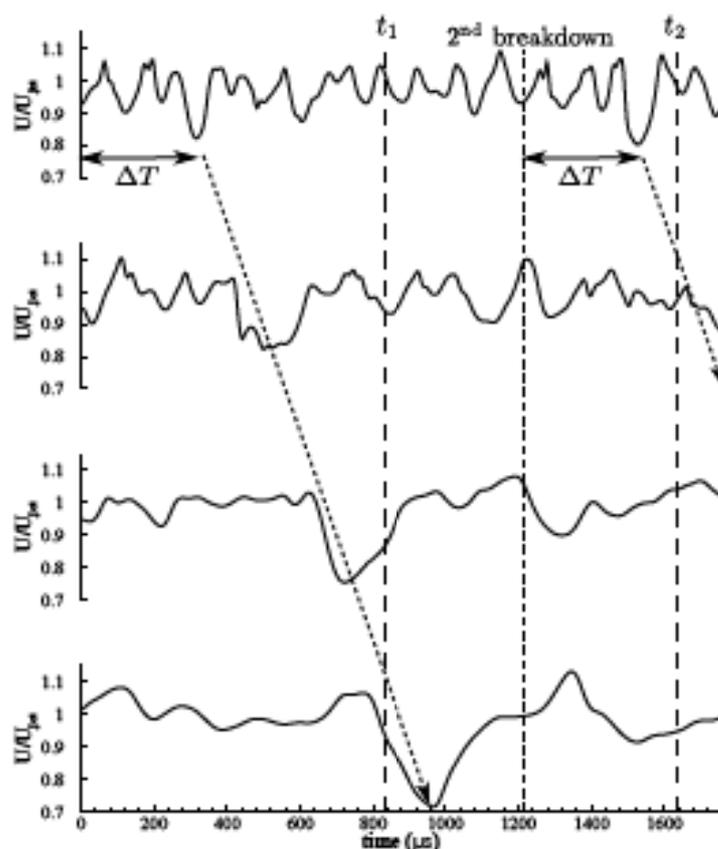


FIGURE 13.19 – Evolutions temporelles des signaux de vitesse U/U_{jet} pour quatre positions de capteurs alignés sur une droite. Les instants de mesures t_1 et t_2 sont repérés par rapport aux deux instants de claquage.

claquage. Les figures 13.22(a), 13.22(b) et 13.22(c) présentent ainsi les champs de pression pour les instants $t = 1177 \mu s$, $t = 1302 \mu s$ et $t = 1350 \mu s$. On ajoute en haut à droite de chacune des figures, la distribution de pression le long de la ligne $r/D = 0,5$. Au premier instant $t = 1177 \mu s$, c'est-à-dire juste avant le second claquage, on constate le développement de fluctuations de pression correspondant à des instabilités de Kelvin-Helmholtz. A l'instant $t = 1302 \mu s$, peu après le second claquage, on met en évidence la forte perturbation de la couche de mélange par les ondes de pression issues du dépôt. Avant que le jet du JSP n'ait atteint la couche de mélange, on a d'ores et déjà une perturbation majeure de la couche de mélange. A l'instant $t = 1350 \mu s$, sans que l'on sache précisément pourquoi, une perturbation singulière de la couche de mélange apparaît. Elle est visible sur la figure 13.22(c) pour $x/D = 0,15$. Il semble s'agir d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz mais d'amplitude plus importante que les autres. C'est cette fluctuation qui va par la suite être convectée et amplifiée et qui va conduire aux observations faites sur les figures 13.21(a) à 13.21(h).

Bien que tout ne soit pas encore compris, on entrevoit sur un tel cas l'intérêt de disposer d'un

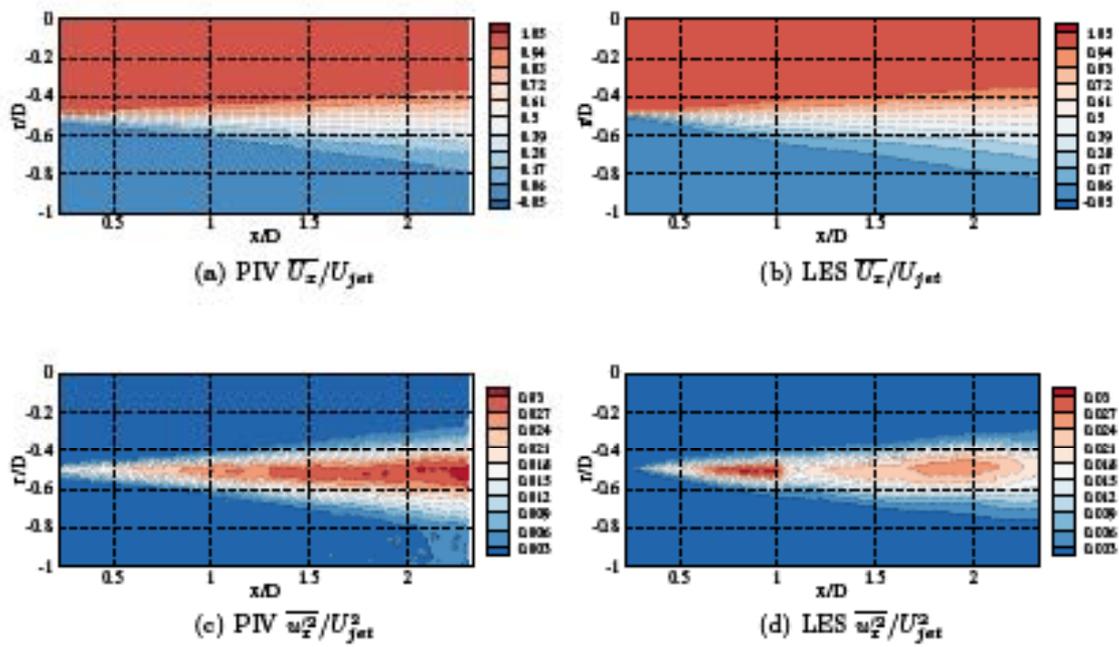


FIGURE 13.20 – Comparaison des champs de vitesse moyenne et rms entre les mesures PIV et la simulation LES pour la partie basse du domaine correspondant à la couche de mélange non perturbée.

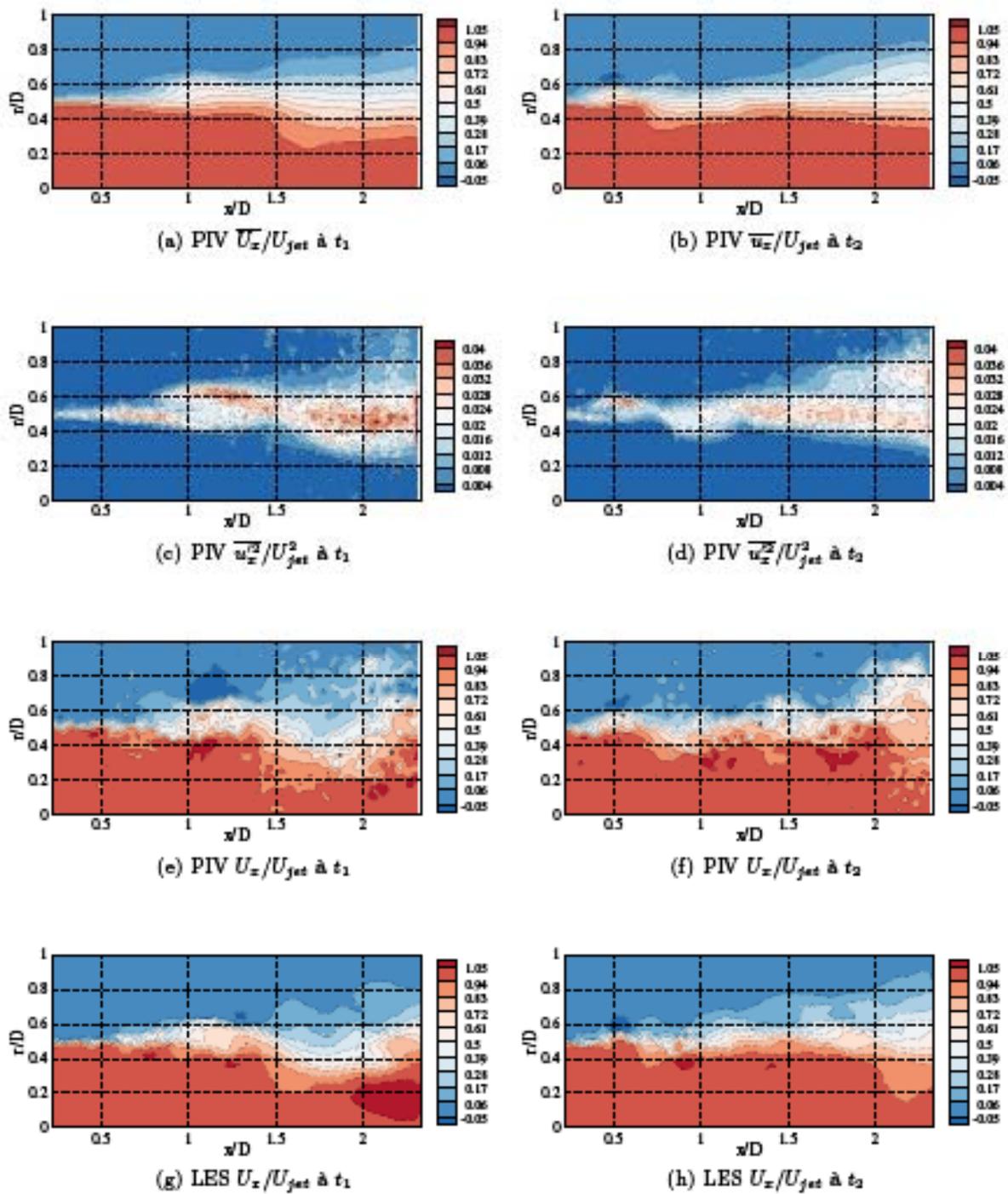


FIGURE 13.21 – Champs de vitesses mesurés et simulés pour les instants t_1 et t_2 .

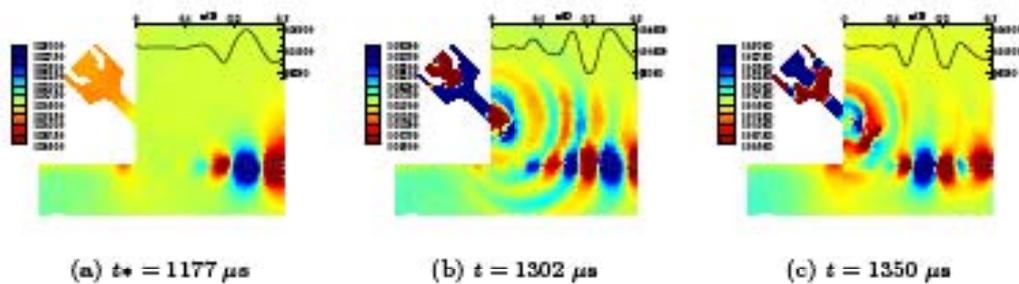


FIGURE 13.22 – Champs de pression en sortie de tuyère à trois différents instants encadrant la décharge. La distribution de pression en $r = 0,5D$ est tracée en haut à droite de chacune des images.

modèle qui reproduise fidèlement l'action du JSP sur les écoulements. Par exemple, on s'aperçoit que dans le cas présent ce sont les ondes de pression issues du claquage qui suffisent à générer une perturbation de la couche de mélange. Le jet lui-même n'entre pas en ligne de compte, ce que l'on avait pas nécessairement soupçonné auparavant. Ainsi, on peut espérer être en mesure de mieux comprendre les interactions entre cet actionneur et les écoulements à contrôler et donc de pouvoir définir des stratégies de contrôle adaptées.

Chapitre 14

Bilan

Après avoir rejoint le DMAE en octobre 2012 pour m'occuper de la modélisation des actionneurs JSP, j'ai rapidement mis en place une feuille de route pour atteindre les objectifs suivants. Tout d'abord, afin de mieux comprendre le fonctionnement de l'actionneur, il fallait disposer d'un modèle qui reproduise fidèlement la physique du jet synthétique. Cela a été possible grâce aux travaux du DTIM sur le modèle de dépôt d'énergie. Cependant on a très vite été confronté au problème du fonctionnement à haute fréquence de l'actionneur pour lequel les effets thermiques deviennent importants. Une fois le modèle opérationnel, on a envisagé plusieurs pistes. La première consistait en l'optimisation de la configuration de l'actionneur JSP pour le rendre plus efficace à haute-fréquence notamment. Cette piste n'a pas été suivie et on a préféré prendre le parti de garder l'actionneur tel quel et de voir dans quelle mesure on pouvait l'utiliser au mieux pour le contrôle d'écoulement. Dans cette optique, le modèle numérique devait alors être étendu au cas haute fréquence. En effet, un des intérêts des actionneurs pulsés est la possibilité de perturber les écoulements en forçant des réponses instationnaires plutôt que de chercher à modifier l'écoulement moyen. Les fréquences à exciter sont généralement bien supérieures à 1 Hz. Ensuite, une fois le modèle opérationnel, il était prévu de développer des modèles réduits afin d'être capable de proposer des simulations de configurations contrôlées au moyen d'un nombre important d'actionneurs. Il est évidemment inenvisageable de calculer, par exemple, une configuration de décollement sur un profil d'aile en 3D comprenant ne serait-ce qu'une dizaine d'actionneurs avec le modèle présenté ci-avant. Une démarche de construction d'un tel modèle réduit a été élaborée et proposée dans le cadre de la soumission d'un projet européen dont j'étais le coordinateur, nommé IMPACT (Integration and Modeling of Plasma Actuators for Control Techniques), et qui n'a pas été retenu au second tour du call H2020 MG1.3-2015. Ce refus a mis un coup d'arrêt à la démarche proposée faute de financement. De nombreuses pistes restent cependant à explorer. Cette technologie basée sur les plasmas d'arc est prometteuse mais de nombreux obstacles la rendent encore aujourd'hui peu opérationnelle. Un des volets importants du projet IMPACT était "l'intégrabilité" ou "l'avionnabilité" de tels dispositifs. Ainsi des études sur la miniaturisation des alimentations haute-tension, les interférences électro-magnétiques, "l'opérabilité" en conditions réelles (pluie, altitude, ...) ou encore la robustesse du contrôle étaient envisagées avec, *in fine* des essais en vol prévus sur un planeur motorisé de l'université de Darmstadt. Bien que l'avenir soit encore incertain à l'ONERA sur cette thématique, on espère toujours que dans un avenir

proche, nous ayons l'occasion de développer ces différents sujets dans le cadre d'une collaboration à l'échelle nationale ou européenne.

Bibliographie de la troisième partie

- [1] A. Belinger. « Alimentations électriques et étude énergétique d'un générateur de jets synthétiques à plasma ». Thèse de doct. Université de Toulouse III Paul Sabatier, 2011.
- [2] A. Belinger, P. Hardy, P. Barricau, J.P. Cambronnie et D. Caruana. « Influence of the energy dissipation rate in the discharge of a plasma synthetic jet actuator ». Dans : *J Phys D Appl Phys* 44 (2011), p. 365201.
- [3] A. Belinger, P. Hardy, N. Gherardi, N. Naude, J-P. Cambronnie et D. Caruana. « Influence of the Spark Discharge Size on a Plasma Synthetic Jet Actuator ». Dans : *IEEE T Plasma Sci* 39 (2011), p. 2334–2335.
- [4] A. Belinger, N. Naudé, J-P. Cambronnie et D. Caruana. « Plasma synthetic jet actuator : electrical and optical analysis of the discharge ». Dans : *J Phys D Appl Phys* 47 (2014), p. 345202.
- [5] D. Caruana, J-P. Cambronnie, P. Barricau et A. Belinger. « The plasma synthetic jet actuator for separation control ». Dans : *Ercraftac Ser* 94 (2013), p. 17–22.
- [6] Louis N. Cattafesta et Mark Sheplak. « Actuators for Active Flow Control ». Dans : *Annu Rev Fluid Mech* 43 (2011), p. 247–272.
- [7] F. Champagnat, A. Plyer, G. Le Besnerais, B. Leclaire, S. Davoust et Y. Le Sant. « Fast and accurate PIV computation using highly parallel iterative correlation maximization ». Dans : *Exp Fluids* 50 (2011), p. 1169–1182.
- [8] F. Chedeveigne, O. Léon, V. Bodoc et D. Caruana. « Experimental and numerical response of a high-Reynolds-number $M = 0.6$ jet to a Plasma Synthetic Jet actuator ». Dans : *Int J Heat Fluid Fl* 56 (2015), p. 1–15.
- [9] A. D'Angola, G. Colonna, C. Gorse et M. Capitelli. « Thermodynamic and transport properties in equilibrium air plasma in a wide pressure and temperature range ». Dans : *Eur Phys J D D* 46 (2007), p. 129–150.
- [10] G. Dufour, P. Hardy, G. Quint et F. Rogier. « Physics and models for plasma synthetic jets ». Dans : *International Journal of Aerodynamics* 3 (2013), p. 47–70.
- [11] M. Forte, A. Debien, D. Caruana, N. Bénard, P. Barricau, C. Gleyzes et E. Moreau. « Mid-Chord Separation Control Using PSJ and DBD Plasma Actuators ». Dans : *Ercraftac Ser* 94 (2013), p. 41–46.
- [12] K.R. Grossman, B.Z. Cybyk et D.M. VanWie. « Sparkjet Actuator for Flow Control ». Dans : *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. AIAA 2003-57. Reno, NV, 2003.

- [13] P. Hardy. « Etude et qualification aérothermodynamique et électrique d'un actionneur plasma de type jet ». Thèse de doct. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2012.
- [14] H.S Ko, S.J. Haack, H.B. Land, B. Cybyk, J. Katz et H.J. Kim. « Analysis of flow distribution from high-speed flow actuator using particule image velocimetry and digital speckle tomography ». Dans : *Flow Meas Instrum* 21 (2010), p. 443–453.
- [15] J.C. Lau, P.J. Morris et M.J. Fisher. « Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 93 (1979), p. 1–27.
- [16] F. Laurendeau. « Analyse expérimentale et modélisation numérique d'un actionneur plasma de type jet synthétique ». Thèse de doct. Université de Toulouse, 2016.
- [17] F. Laurendeau, F. Chedevergne et G. Casalis. « Transient ejection phase modeling of a Plasma Synthetic Jet ». Dans : *Phys Fluids* 26.12 (2014), p. 125101.
- [18] F. Laurendeau, F. Chedevergne, O. Léon et G. Casalis. « Experimental Characterization of a Plasma Synthetic Jet ». Dans : *50th SAF International Conference on Applied Aerodynamics*. FP40-2015-laurendeau. 2015.
- [19] F. Laurendeau, O. Léon, F. Chedevergne et G. Casalis. « PIV and Electric Characterization of a Plasma Synthetic Jet Actuator ». Dans : *45th AIAA Fluid Dynamics Conference*. 2015-2465. 2015.
- [20] P. Molton, A. Leroy-Chesneau, J. Pons, Y. Carpels, P. Barricau, C. Gleyzes, M. Forte et D. Caruana. « Wing Tip Vortex Control By Plasma Actuators ». Dans : *Ercraftac Ser* 94 (2013), p. 53–58.
- [21] T. M. Reedy, N. V. Kale, J. C. Dutton et G. S. Elliot. « Experimental Characterization of a Pulsed Plasma Jet ». Dans : *AIAA J* 51.8 (2013), p. 2027–2031.
- [22] M. Samimy, J-H. Kim, M. Kearney-Fischer et A. Sinha. « Acoustic and flow fields of an excited high Reynolds number axisymmetric supersonic jet ». Dans : *J Fluid Mech* 656 (2010), p. 507–529.
- [23] M. Samimy, J-H. Kim, J. Kastner, I. Adamovich et Y. Utkin. « Active control of high-speed and high-Reynolds-number jets using plasma actuators ». Dans : *J Fluid Mech* 578 (2007), p. 305–330.
- [24] M. Samimy, I. Adamovich, B. Webb, J. Kastner, J. Hileman, S. Keshav et P. Palm. « Development and characterization of plasma actuators for high-speed jet control ». Dans : *Exp Fluids* 37 (2004), p. 577–588.
- [25] G. Sary, G. Dufour, F. Rogier et K. Kourtzanidis. « Modeling and Parametric Study of a Plasma Synthetic Jet for Flow Control ». Dans : *AIAA J* 52.2 (2014), p. 1591–1603.

Quatrième partie

Modélisation de la turbulence en proche paroi

La dernière partie du manuscrit est consacrée à un ensemble de travaux réalisés traitant tous de la modélisation des écoulements turbulents, notamment des échanges dans les régions de proche paroi. Ces travaux ont en particulier été menés en collaboration avec B. Aupoix. Les développements relatifs à la reconstruction des fluctuations de pression à la paroi s'inscrivent dans le cadre de la thèse de S. Morilhat.

Chapitre 15

Loi de paroi

Bien que les ressources de calculs augmentent continûment et que la tendance est au développement de modélisations instationnaires, il reste encore une forte demande industrielle pour l'utilisation de modèles RANS couplés à des lois de paroi. C'est notamment le cas pour des applications turbomachines où la complexité des écoulements internes poussent à l'utilisation de telles méthodes. Dans ce cadre, j'ai été amené à m'intéresser aux lois de paroi du code CEDRE et à proposer une nouvelle loi permettant de dépasser une partie des limites des lois analytiques déjà présentes dans le code.

15.1 Loi analytiques

Le code CEDRE dispose de trois lois de paroi analytiques, développées en interne ONERA, et qui se basent sur les principes suivants. Si on considère un écoulement de couche limite développée sur plaque plane sans gradient de pression, on montre que la vitesse longitudinale u^+ , exprimée en variables de paroi, suit la loi suivante dans la région logarithmique :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (15.1)$$

avec $\kappa = 0,4 - 0,42$ la constante de Karman et C une constante comprise entre $C \in [5, 2; 5, 5]$.

Par définition, on a $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$, $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$ et $u_\tau = \frac{\tau_p}{\rho}$ où τ_p est le frottement à la paroi.

Dans le code CEDRE, la loi de paroi fournit une évaluation locale du frottement par l'intermédiaire du coefficient $h_f = \frac{u^+}{y^+}$ puisque :

$$\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_p = \left(\rho u_\tau^2 \frac{y}{u} \right) \frac{u}{y} = h_f \mu \frac{u}{y} \quad (15.2)$$

Dans le cas où le maillage est tel que les centres des cellules de paroi sont dans la sous-couche visqueuse $y^+ < 5$, on a $h_f = 1$ et donc $\tau_p = \mu \frac{u}{y}$. Le coefficient h_f mesure donc l'écart à la solution linéaire $u^+ = y^+$, valable uniquement dans la sous-couche visqueuse.

Une première loi de paroi peut être construite si on considère un modèle de longueur de mélange

pour représenter la viscosité turbulente μ_t et que l'on procède à une interpolation de la solution $u = f(y)$ en fonction du nombre de Reynolds local $Re_y = \frac{yu}{\nu}$. On trouve :

$$h_f = \frac{f_c}{1 + f_c} \left(\frac{Re_y}{447} \right)^{0,825} \quad \text{avec} \quad f_c = \frac{Re_y}{80} + \left(\frac{Re_y}{120} \right)^2 \quad (15.3)$$

La seconde loi de paroi est construite à partir du nombre de Reynolds turbulent Re_t . On écrit :

$$l = \kappa y \quad , \quad u_\tau = C_v \sqrt{k} \quad , \quad \mu_t = \rho C_v \sqrt{k} l \quad (15.4)$$

ainsi :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Re_t) + C - \frac{1}{\kappa} \ln(\kappa) \quad (15.5)$$

Finalement on écrit :

$$h_f = e^{-\frac{u^+}{30}} + \frac{Re_t}{3,05 + \ln(1 + Re_t)} \quad (15.6)$$

Pour retrouver $h_f = 1$ dans la sous-couche laminaire on ajoute la partie exponentielle et on change $\ln(Re_t)$ en $\ln(1 + Re_t)$ pour éviter toute singularité.

Enfin, une troisième loi, similaire à la seconde dans son esprit, a été introduite dans le code CEDRE. Plutôt que de considérer une variation en fonction du nombre de Reynolds turbulent Re_t , on définit un nombre de Reynolds y^* tel que :

$$y^* = \frac{y\sqrt{k}}{\nu} \quad \text{d'où} \quad Re_t = C_v \kappa y^* \quad (15.7)$$

Se faisant on aboutit à :

$$h_f = e^{-\kappa^* y^*} + \frac{\kappa^* y^*}{3,05 + \ln(1 + \kappa^* y^*)} \quad (15.8)$$

avec $\kappa^* = C_v \kappa$.

Pour tenir compte des effets de compressibilité, la troisième loi utilise la correction introduite par Van Driest qui définit une vitesse u^* telle que :

$$u^* = \int_0^u \sqrt{\frac{\rho}{\rho_p}} du \quad (15.9)$$

en supposant le gradient pression normal négligeable, soit $\rho T = \rho_p T_p$ et en établissant une loi de Crocco [10] pour la température, on écrit :

$$u^* = \frac{2C_p T_p}{Pr_t} \left[\operatorname{asin} \left(\frac{\frac{\phi_p}{\tau_p} + u}{\sqrt{\left(\frac{\phi_p}{\tau_p}\right)^2 + \frac{2C_p T_p}{Pr_t}}} \right) - h_{box} \operatorname{asin} \left(\frac{\frac{\phi_p}{\tau_p}}{\sqrt{\left(\frac{\phi_p}{\tau_p}\right)^2 + \frac{2C_p T_p}{Pr_t}}} \right) \right] \quad (15.10)$$

où ϕ_p est le flux de chaleur à la paroi et Pr_t le nombre de Prandtl turbulent. Finalement on arrive à :

$$h_f = \left(e^{-\kappa^* y^*} + \frac{\kappa^* y^*}{3,05 + \ln(1 + \kappa^* y^*)} \right) \frac{u^*}{u} \quad (15.11)$$

avec cette fois $y^* = \frac{y\sqrt{\rho\mu_p k}}{\mu_p}$ pour tenir compte des variations de ρ .

Pour la détermination des échanges de chaleur, on s'appuie sur l'analogie de Reynolds pour lier les coefficients h_f et h_c , avec h_c défini par :

$$h_c = Pr \frac{y^+}{T^+} \quad \text{avec} \quad T^+ = \frac{T_p - T}{T_\tau} \quad \text{et} \quad \frac{\phi_p}{\rho C_p u_\tau} \quad (15.12)$$

Pour la première loi, on écrit simplement $h_f = h_c$. C'est en fait une déclinaison de l'analogie de Reynolds pour $Pr = 1$ et $Pr_t = 1$. Pour les deuxième et troisième lois, on relie la température et la vitesse par la relation :

$$T^+ = Pr_t(u^+ + \mathcal{P}) \quad (15.13)$$

La fonction de correction \mathcal{P} est donnée par Jayatilleke [17]. *In fine*, on retient :

$$h_c = Gh_f$$

$$G = \frac{\frac{Pr}{Pr_t}}{1 + z \sqrt{\frac{2(h_f - 1)}{Re_y + 300}}} \quad (15.14)$$

$$z = 9,24 \left(\left(\frac{Pr}{Pr_t} \right)^{\frac{3}{4}} - 1 \right) \left(1 + 0,28e^{-0,007 \frac{Pr}{Pr_t}} \right)$$

Enfin, mentionnons le fait que selon la condition thermique à la paroi, flux imposé ou température imposée, la quantité inconnue est calculée à partir de la relation :

$$\phi_p = \frac{h_c \lambda}{y} (T - T_{ad}) \quad \text{avec} \quad T_{ad} = T_c + r \frac{u^2}{2C_p} \quad (15.15)$$

avec T_c la température de la cellule paroi et r le facteur de recouvrement choisi égal à Pr_t .

15.2 Principales limitations

Toutes les lois de paroi du code CEDRE s'appuient sur le comportement logarithmique de la loi de vitesse, qui correspond à un écoulement de plaque plane sans gradient de pression. Bien que des corrections *ad hoc*, notamment pour les deuxième et troisième lois, soient ajoutées pour étendre la validité des lois dans la sous-couche visqueuse, les centres des cellules de parois doivent être tels que $y^+ > 30$ et $y < 0,2\delta$ pour rester dans le domaine de validité. Ainsi la dépendance au maillage de ces lois est parfois problématique. En outre, dès lors qu'un gradient de pression existe, ces trois lois se comportent assez mal et sont rapidement mises en défaut. Il est donc nécessaire de disposer de lois qui permettent d'étendre ce domaine de validité.

Enfin le point, peut-être le plus délicat, est celui du recours à l'analogie de Reynolds pour le calcul des échanges de chaleur. Bon nombre de situations, notamment en aérothermique, ont permis de constater qu'une telle analogie n'existe pas. Pour se départir de cette hypothèse, il

faut résoudre de concert l'équation de l'énergie et celles de quantité de mouvement. Pour répondre aux besoins exprimés en aérothermique, il a donc été entrepris le développement d'une nouvelle loi de paroi. Les lois analytiques étant par nature restreintes aux approximations mentionnées ci-avant, on s'est tourné vers les lois de paroi numériques. Ces lois résolvent un système d'équations simplifiées dans chaque cellule. Ces travaux sont inspirés de ceux de Goncalves [25] et on fait l'objet d'une publication [7].

15.3 Développement d'une loi de paroi numérique

Pour tenir compte du caractère non-structuré du code CEDRE, on ne tient pas compte des gradients dans le plan parallèle à la paroi, et on va résoudre un problème 1D dans la direction normale à la paroi. En négligeant les termes convectifs dans les équations de couche limite, on écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{xy} + w\tau_{xz} - \phi_y) = 0 \end{cases} \quad (15.16)$$

Ce système fait intervenir les gradients de pression longitudinaux et transversaux. Ce système ne fait intervenir que des équations 1D et est donc facilement intégrable :

$$\begin{cases} \mu_e \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_{px} + y \frac{\partial P}{\partial x} \\ \mu_e \frac{\partial w}{\partial y} = \tau_{pz} + y \frac{\partial P}{\partial z} \\ \lambda_e \frac{\partial T}{\partial y} + \mu_e u \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_e w \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_p \end{cases} \quad (15.17)$$

Les quantités μ_e et λ_e sont les viscosités et conductivités dites effectives :

$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad \text{et} \quad \lambda_e = \lambda + \lambda_t \quad (15.18)$$

À ce système d'équations (15.17), on associe les conditions limites suivantes :

- à la paroi en $y = 0$, $u = w = 0$ et $T = T_p$ ou $\phi = \phi_p$
- au centre de la cellule paroi en $y = \Delta$, on raccorde la solution aux grandeurs fournies par le solveur Navier-Stokes de CEDRE. On écrit $u = u_{NS}$, $w = w_{NS}$ et $T = T_{NS}$.

Pour fermer le système, on choisit de modéliser la viscosité turbulente et la conductivité turbulente à l'aide d'un modèle de longueur de mélange tiré de [10] :

$$\begin{aligned}
u_\tau^* &= \left(\frac{(\tau_{pz} + y \frac{\partial P}{\partial z})^2 + (\tau_{pz} + y \frac{\partial P}{\partial z})^2}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{4}} \\
y^* &= \frac{y u_\tau^*}{\nu} \\
l &= \kappa y \\
F &= 1 - e^{-\left(\frac{y^*}{26}\right)^3} \\
\mu_t &= \rho \sqrt{\frac{T_p}{T}} l^2 F \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} \\
\lambda_t &= \frac{\mu_t C_p}{Pr_t}
\end{aligned} \tag{15.19}$$

Notons que la fonction d'amortissement F diffère de celle classiquement utilisée par Van Driest. Elle a été proposée par Piomelli *et al.* [22]. Les effets de compressibilité sont pris en compte via u_τ^* , qui est une vitesse de cisaillement locale, et le rapport $\frac{T_p}{T}$ qui permet d'inclure la transformation de Van Driest dans le calcul de μ_t .

On utilise une grille 1D avec une distribution de points selon une raison géométrique. Les figures 15.1(a) et 15.1(b) illustrent la configuration de couche limite étudiée et le maillage utilisé dans les cellules paroi. On exprime la dérivée d'une quantité Q au point $i + 1/2$ à l'ordre 2 de la manière suivante :

$$Q_{i+1/2} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta y_i} + \mathcal{O}(\Delta y_i^2) \text{ avec } \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \tag{15.20}$$

Les composantes du vecteur frottement à la paroi et le flux de chaleur s'expriment comme :

$$\begin{aligned}
\tau_{pz} &= \frac{\mu_{e_{3/2}}}{\Delta y_1} w_2 - y_{3/2} \frac{\partial P}{\partial x} \\
\tau_{pz} &= \frac{\mu_{e_{3/2}}}{\Delta y_1} w_2 - y_{3/2} \frac{\partial P}{\partial z} \\
\phi_p &= -\frac{\lambda_{e_{3/2}}}{\Delta y_1} (T_2 - T_1) - \frac{\mu_{e_{3/2}}}{2\Delta y_1} (u_2^2 + w_2^2)
\end{aligned} \tag{15.21}$$

Notons que lorsque $\phi_p = 0$, c'est-à-dire pour des conditions adiabatiques, on trouve une relation entre T_1 et T_2 :

$$T_2 = T_1 + \frac{\mu_{e_{3/2}}}{2\Delta y_1} (u_2^2 + w_2^2) \tag{15.22}$$

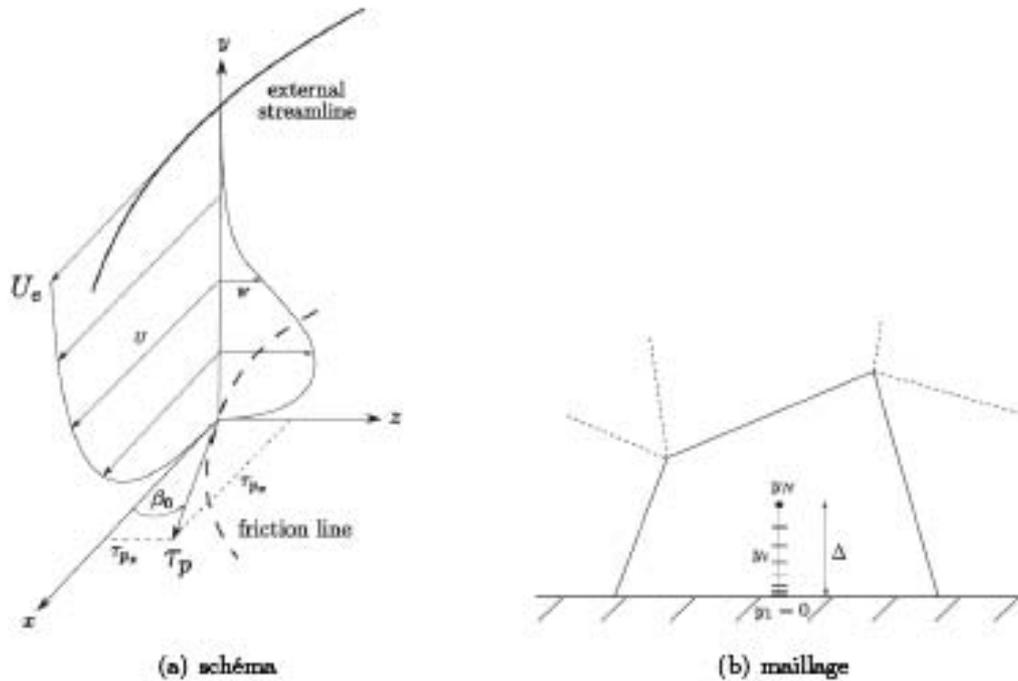


FIGURE 15.1 – Notation, schéma d'une couche limite et illustration d'un maillage dans une cellule 2D.

Finalement après discrétisation du système (15.17) on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\mu_{e_{i+1/2}}}{\Delta y_i} (u_{i+1} - u_i) = \frac{\mu_{e_{3/2}}}{\Delta y_1} w_2 + \xi_i \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\mu_{e_{i+1/2}}}{\Delta y_i} (w_{i+1} - w_i) = \frac{\mu_{e_{3/2}}}{\Delta y_1} w_2 + \xi_i \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\lambda_{e_{i+1/2}}}{\Delta y_i} (T_{i+1} - T_i) + u_{i+1/2} \left(\frac{\mu_{e_{3/2}}}{\Delta y_1} w_2 + \xi_i \frac{\partial P}{\partial x} \right) + w_{i+1/2} \left(\frac{\mu_{e_{3/2}}}{\Delta y_1} w_2 + \xi_i \frac{\partial P}{\partial z} \right) = -\phi_p \end{cases} \quad (15.23)$$

avec $\xi_i = \frac{y_{i+1} + y_i - y_2}{2}$.

Le système (15.23) est implicite au sens où les coefficients μ_e et λ_e dépendent des grandeurs u , w et T . On fait appel à un algorithme itératif s'appuyant sur une méthode de Newton et une méthode de substitution. Le système à proprement dit est résolu par récurrence avec des coefficients constants à chaque sous-itération. Les détails de la méthode sont donnés dans [7].

Une fois convergée, la solution est utilisée pour fournir les coefficients h_f et h_c comme pour les lois analytiques du code CEDRE, à la différence que h_f est maintenant un vecteur représentant les composantes longitudinale et transversale du frottement. En pratique, on procède à deux résolutions, la seconde étant effectuée avec $\phi_p = 0$ qui permet d'obtenir T_{ad} . Ainsi on s'affranchit du recours à un facteur de recouvrement r dont la valeur peut être sujette à caution. C'est grâce

à cette procédure que l'on évite l'utilisation de l'analogie de Reynolds, ce qui confère à cette loi une plage de validité plus étendue.

Un nombre important de cas tests a été réalisé afin de mettre en évidence les apports de cette loi de paroi numérique. Quatre d'entre eux sont présentés dans [7]. En particulier le cas de l'aile en flèche semi-infinie est intéressant, au sens où, en raison du gradient de pression transverse, il n'y a pas alignement des lignes de frottement pariétales avec les lignes de courant. Les lois de paroi analytiques, qui fournissent un coefficient h_f constant sont incapables de reproduire un tel effet alors que la loi numérique le permet.

Lors de la thèse de F. Guillou [14], une extension de cette loi visant à prendre en compte les termes d'advection a été développée. Malheureusement l'intérêt d'un tel développement s'est montré très vite limité et la complexité introduite a elle aussi constitué un frein à ces travaux. Au cours de cette thèse, il a été montré que la qualité des résultats obtenus en termes d'échanges à la paroi est très dépendante de la solution du solveur Navier-Stokes et en particulier des données aux centres des cellules de paroi. Néanmoins, dans le contexte aérothermique turbomachine, pour la prévision des transferts de chaleur, il a ainsi été mis en évidence que l'on pouvait obtenir de bons résultats en couplant un solveur Navier-Stokes RANS avec une loi de paroi numérique, même lorsque l'écoulement présente une forte anisotropie. Un travail important a ensuite été mené pour étudier l'influence du modèle pour les flux de chaleur turbulents, et démontré l'intérêt des modèles qui se départissent de l'utilisation d'un nombre de Prandtl turbulent constant.

Chapitre 16

Rugosité

S'il existe un grand nombre d'études concernant les écoulements à proximité de parois lisses, un nombre important et croissant de configurations requiert l'utilisation de modélisations des parois rugueuses. Récemment à l'ONERA, l'émergence de la thématique givrage a donné un regain d'intérêt pour des activités autour de la prise en compte des rugosités de paroi. Plusieurs types d'approches existent dans la littérature. On compte notamment l'approche par éléments discrets, voir par exemple [4], et celle par grain de sable équivalent. C'est cette dernière approche qui a fait l'objet de développements récents au DMAE, par B. Aupoix [3, 5] et sur laquelle je suis amené à m'investir à l'avenir. On présente tout d'abord l'approche retenue par B. Aupoix, puis de récents travaux que j'ai effectué concernant l'extension de la modélisation aux lois de parois.

16.1 Grain de sable équivalent et modélisation

Les effets des rugosités sur un écoulement sont de deux ordres. D'une part, si l'écoulement est laminaire, les rugosités peuvent provoquer la transition vers le régime turbulent. D'autre part, pour une couche limite turbulente, on observe une augmentation des niveaux de frottement et de flux de chaleur pariétaux sur surface rugueuse, par rapport aux niveaux sur paroi lisse. Il est possible de classer les rugosités selon diverses critères. Classiquement on distingue les rugosités isolées des rugosités réparties. La rugosité isolée a des effets sur l'écoulement qui sont indépendants de la présence d'autres rugosités au contraire des rugosités réparties. Cela suppose que l'écart entre rugosités isolées soit au moins de l'ordre de l'épaisseur de couche limite. On distingue ensuite les rugosités de type " k " et de type " d ". Les premières sont celles qui correspondent typiquement à des grains de sable sur une surface. L'effet des rugosités varie alors en fonction de la hauteur k des rugosités. Les rugosités de type " d " correspondent à des plaques munies de trous. Au-delà d'une certaine profondeur il n'y a pratiquement plus d'écoulement et l'effet des rugosités est alors essentiellement piloté par le diamètre des trous d . Dans toute la suite on ne s'intéressera qu'aux rugosités de type " k ".

Les travaux conduits par Nikuradse [20, 21] constituent la référence pour caractériser les effets de rugosité. Nikuradse a étudié la perte de charge dans une conduite de section cylindrique, rendue rugueuse à l'aide de grains de sable, arrangés de façon très dense. Trois régimes distincts

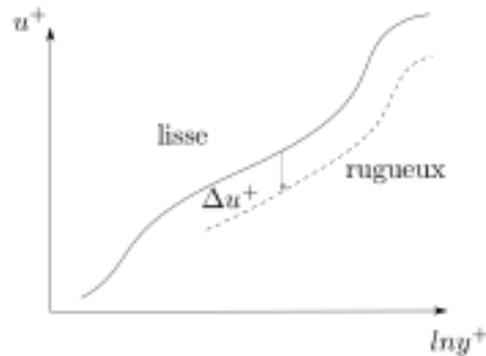


FIGURE 16.1 – Profil de vitesse moyenne en représentation semi-logarithmique. Illustration du décalage de la loi logarithmique

ont été mis en évidence :

- le régime aérodynamiquement lisse
- le régime rugueux établi
- le régime transitionnel entre ces deux cas

En outre, Nikuradse a caractérisé ces trois régimes d'écoulement en fonction de la hauteur de grain de sable adimensionnée en variables de paroi

$$k_s^+ = \frac{k_s u_\tau}{\nu} \quad (16.1)$$

Le régime aérodynamiquement lisse est obtenu pour $k_s^+ < 3,5$, le régime rugueux établi pour $k_s^+ > 67,6$.

Le second résultat important obtenu par Nikuradse concerne les profils de vitesse. Il n'est pas possible de définir un profil de vitesse moyenne en dessous des sommets des rugosités, ni sur une certaine distance au-dessus, ce profil variant encore localement. Cependant, pour des distances deux fois supérieures à la hauteur des rugosités, le profil de vitesse moyenne devient indépendant de la position par rapport aux éléments rugueux. On retrouve alors pour le profil de vitesse moyenne une région logarithmique. Dans le cas des parois rugueuses la loi logarithmique est décalée par rapport au cas de la paroi lisse et s'écrit :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C - \Delta u^+ \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad (16.2)$$

La figure 16.1 illustre le décalage de la loi logarithmique entre les cas de paroi lisse et rugueuse. Le décalage de la loi logarithmique Δu^+ est un paramètre essentiel car il est directement lié à l'augmentation du frottement pariétal. D'après Aupoix [1] on a directement :

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} - \sqrt{\frac{2}{C_{f_r}}} = \Delta u^+ \quad (16.3)$$

où C_{f_l} et C_{f_r} sont respectivement les coefficients de frottement en paroi lisse et rugueuse. Nikuradse propose d'exprimer le profil de vitesse dans la région logarithmique sous la forme :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y^+}{k_s^+} + B \quad \kappa = 0,40 \quad (16.4)$$

avec

$$\begin{aligned} 1 < k_s^+ < 3,5 & B = 5,5 + \frac{1}{\kappa} \ln k_s^+ \\ 3,5 < k_s^+ < 7 & B = 6,59 + 1,52 \ln k_s^+ \\ 7 < k_s^+ < 14 & B = 9,58 \\ 14 < k_s^+ < 68 & B = 11,5 - 0,7 \ln k_s^+ \\ 68 < k_s^+ & B = 8,48 \end{aligned} \quad (16.5)$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour le décalage de la loi logarithmique :

$$\Delta u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln k_s^+ + C - B \quad C = 5,5 \quad (16.6)$$

L'approche basée sur le concept de grain de sable équivalent peut être décomposée en deux étapes. Tout d'abord, toute surface rugueuse est ramenée à une surface de référence correspondant à la surface dont la hauteur de grain de sable dans l'expérience de Nikuradse donnerait la même augmentation du frottement, ce qui introduit la notion de "grain de sable équivalent"¹. Dans un second temps, on modifie un modèle de turbulence pour augmenter artificiellement le niveau de turbulence au voisinage de la paroi. On reproduit ainsi l'augmentation du frottement. Cette approche ne respecte pas la physique des écoulements sur paroi rugueuse mais est la seule facilement utilisable dans un contexte industriel. Une des difficultés associées à cette approche est la détermination de la hauteur de grain de sable équivalent qui repose en général sur des corrélations empiriques.

Il est important de noter que si l'on se contente de cette seule modification qui permet d'augmenter le niveau de frottement par rapport à une configuration lisse, on va surestimer les échanges de chaleur. En effet, l'augmentation du frottement sur des parois rugueuses résulte en fait d'une augmentation de la traînée de pression. Pour les échanges de chaleur, deux effets interviennent. Le premier est l'augmentation de la surface d'échange, la surface mouillée, et le second est lié à l'augmentation du brassage turbulent dans la région des rugosités. Si on augmente artificiellement μ_t pour augmenter le frottement, on constate que l'augmentation induite sur λ_t par l'intermédiaire d'un nombre de Prandtl turbulent constant conduit à une surestimation des échanges de chaleur. Aupoix [3] a ainsi développé une correction thermique associée à la correction dynamique. Ces corrections ont été développées sur la base du modèle $k - \omega$ SST de Menter [19] mais le principe est généralisable à d'autres modèles de turbulence. On présente maintenant rapidement les principes de modélisation.

Pour obtenir le décalage de la loi logarithmique (16.6), l'idée d'Aupoix [1] est d'introduire un décalage y_0^+ sur la dérivée de la vitesse de la forme :

$$\left. \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right|_{y^+} = \left. \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right|_{y^+ + y_0^+} \quad (16.7)$$

1. Notons que cette notion suppose un comportement universel et n'a donc réellement de sens que dans le régime rugueux établi

il en découle par intégration que :

$$u_v^+(y^+) = u_i^+(y^+ + y_0^+) - u_i^+(y_0^+) \quad (16.8)$$

ce qui entraîne que :

$$\Delta u^+ = u_i^+(y_0^+) \quad (16.9)$$

L'équation de quantité de mouvement dans la région interne de couche limite se réduit à :

$$(1 + \mu_t^+) \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1 \quad (16.10)$$

Ainsi le décalage introduit sur le gradient de vitesse (16.7) implique :

$$\mu_{tr}^+(y^+) = \mu_{tr}^+(y^+ + y_0^+) \quad (16.11)$$

Finalement, dans le cas d'un modèle de turbulence $k-\omega$, le problème de la recherche du décalage introduit pour retrouver le comportement de la loi logarithmique en rugueux, se ramène à la recherche des grandeurs à la paroi :

$$k_p^+(k_s^+) = k_i^+(y_0^+) \text{ et } \omega_p^+(k_s^+) = \omega_i^+(y_0^+) \quad (16.12)$$

Autrement dit, connaissant le décalage de la loi logarithmique Δu^+ en fonction de k_s^+ donné par (16.5), une solution du problème en paroi lisse permet de trouver y_0 tel quel $u_i^+(y_0^+) = \Delta u^+$. On a donc accès aux valeurs $k_i^+(y_0^+)$ et $\omega_i^+(y_0^+)$, qui fournissent les grandeurs k_p^+ et ω_p^+ à imposer à la paroi afin de reproduire l'augmentation de frottement. Le calcul de $k_p^+(k_s^+)$ et de $\omega_p^+(k_s^+)$ peut être effectué une fois pour toutes à partir du modèle de turbulence retenu. La correction finale donnée par Aupoix s'écrit :

$$\begin{aligned} k_p^+ &= \max \left(0; \frac{1}{\sqrt{\beta^*}} \tanh \left[\left(\frac{\ln \frac{k_s^+}{30}}{\ln 8} + 0,5 \left[1 - \tanh \frac{k_s^+}{100} \right] \right) \tanh \left(\frac{k_s^+}{75} \right) \right] \right) \\ \omega_p^+ &= \frac{400000}{k_s^{+4}} \left(\tanh \frac{10000}{3k_s^{+3}} \right)^{-1} + \frac{70}{k_s^+} \left[1 - \exp \left(-\frac{k_s^+}{300} \right) \right] \end{aligned} \quad (16.13)$$

Notons qu'une autre variante établie à partir des données de Colebrook [8, 9], plutôt qu'à partir de celles de Nikuradse, est aussi disponible, elle prend une forme légèrement différente mais fournit des résultats très proches de celle donnée par (16.13).

Concernant la correction thermique, le seul paramètre disponible pour limiter l'effet de l'augmentation de μ_t sur les transferts de chaleur à la paroi est le nombre de Prandtl turbulent Pr_t . On cherche donc une modification de Pr_t qui prend la forme :

$$Pr_t = Pr_{t_0} + \Delta Pr_t \quad (16.14)$$

où Pr_{t_0} est le nombre de Prandtl turbulent utilisé classiquement dans un modèle de turbulence et ΔPr_t la correction pour reproduire l'effet désiré. Cette correction doit être limitée à la région affectée par les éléments rugueux. En d'autres termes, la correction doit tendre vers zéro quand

on s'éloigne de la paroi. Par ailleurs, pour de faibles valeurs de la hauteur de grain de sable équivalent, la correction doit aussi tendre vers zéro. Enfin, compte tenu des causes de la modification des échanges de chaleur à la paroi en présence de rugosités, à savoir, l'augmentation de la surface mouillée et la hauteur des éléments rugueux, les paramètres principaux qui vont piloter l'augmentation du flux de chaleur seront S_m et k_s . Ainsi, Aupoix [3] aboutit à la formulation suivante :

$$\begin{aligned}\Delta Pr_t &= \mathcal{F} e^{-y/k} \\ \mathcal{F} &= A \Delta u^+{}^2 + B \Delta u^+ \\ A &= (0,0155 - 0,0035 S_{corr}) \left(1 - e^{-12(S_{corr}-1)}\right) \\ B &= -0,08 + 0,25 e^{-10(S_{corr}-1)} \\ \Delta u^+ &= \Delta u^+ (k_s^+)\end{aligned}\tag{16.15}$$

avec S_{corr} qui représente le rapport de la surface mouillée corrigée à la surface de base. La surface mouillée corrigée correspond en pratique à la surface des éléments rugueux qui se situe au dessus de la surface de référence. La surface de référence correspondant quant à elle à la surface que l'on obtiendrait en faisant "fondre" les rugosités. C'est en quelque sorte une surface moyenne. Ces corrections ont été introduites dans le code CEDRE après avoir été validées dans le code de couche limite CLICET. Les figures 16.2(a) et 16.2(b) montrent l'apport de ces corrections dans le code CEDRE pour la prévision du frottement et des transferts de chaleur dans des cas d'écoulements de plaques planes.

16.2 Extension aux lois de paroi

Suite à une demande industrielle pour des applications givrage, une extension de l'approche présentée ci-avant a été faite pour s'adapter aux contraintes des lois de parois. Afin de voir si un tel modèle peut apporter une amélioration par rapport à ce que l'on peut trouver dans la littérature, on a décidé d'adapter le modèle dit AWF (Analytical Wall Function) développé par Craft *et al.* [11] et étendu aux rugosités par Suga *et al.* [28].

On donne rapidement une description de la construction de ces lois de paroi. L'idée force est d'imposer une évolution linéaire à μ_t dans la région interne de couche limite. Ainsi on n'impose pas directement un comportement logarithmique au profil de vitesse. Cette idée est tirée de la relation :

$$\mu_t = \rho C_v \sqrt{k} l = \rho C_v \sqrt{k} \kappa y \approx \alpha \mu y^*\tag{16.16}$$

où $y^* = \frac{y \sqrt{k_P}}{\nu}$ est un nombre de Reynolds caractéristique de la cellule paroi de centre P . Afin de conserver une sous-couche laminaire dans laquelle $\mu_t \ll \mu$, on introduit une distance y_v telle que :

$$\mu_t = \max(0, \alpha \mu (y^* - y_v^*))\tag{16.17}$$

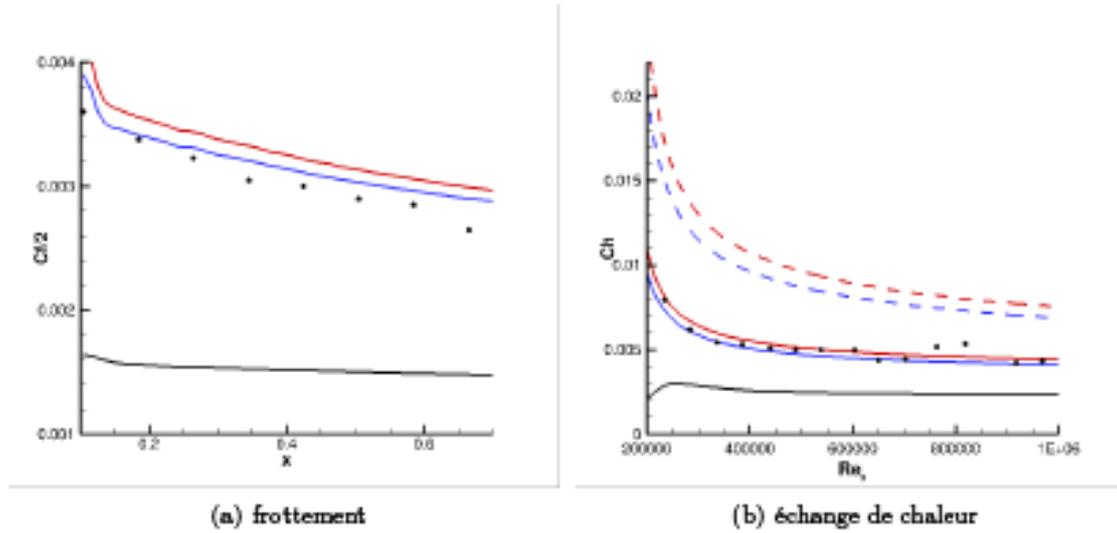


FIGURE 16.2 – Comparaison entre des résultats de simulations CEDRE avec les corrections (16.13) et (16.15) et des mesures pour des écoulements sur plaque plane rugueuse (en rouge les corrections basées sur les données de Nikuradse et en bleu celles basées sur les données de Colebrook). A gauche, on présente l'évolution du coefficient de frottement dans une configuration où $k = 0,425$ mm ($k_s^+ \approx 150$). A droite, on trace l'évolution du nombre de Stanton où $k = 3,07$ mm ($k_s^+ \approx 4000$ et $S_{corr} = 1,22$). Les courbes en pointillées correspondent à des calculs avec la correction dynamique (16.13) et un nombre de Prandtl turbulent constant Pr_{t_0} .

Les équations de couche limite en 2D dans la région de proche paroi prennent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y^*} \right] &= \frac{\nu^2}{k_P} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial P}{\partial x} \right] = C_u \\ \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu}{Pr_{tt}} \right) \frac{\partial T}{\partial y^*} \right] &= \frac{\nu^2}{k_P} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u T) + S_T \right] = C_T \end{aligned} \quad (16.18)$$

avec S_T le terme source d'énergie moyen dans la cellule de paroi. En considérant C_u et C_T constants, et compte tenu de la modélisation de μ_t (16.17), Suga *et al.* [28] aboutissent à des expressions analytiques pour les profils de vitesse et de température. Le frottement τ_p et le flux de chaleur à la paroi ϕ_p s'expriment alors simplement de manière analytique. Associés à cette modélisation pour le frottement et le flux de chaleur à la paroi, des modèles pour le terme de production P_k de l'énergie cinétique turbulente k et sa dissipation ε sont associés. Des calculs ont permis d'optimiser la valeur de y_v^* pour des configurations de plaque plane standard dont la valeur est fixé à 10,7.

Pour reproduire l'effet du décalage de la loi logarithmique produit par les rugosités, Suga *et al.* autorisent y_v^* à varier en fonction de la hauteur de grain de sable équivalent. En pratique, y_v diminue lorsque k_s augmente ce qui augmente μ_t en paroi et contribue à l'augmentation du

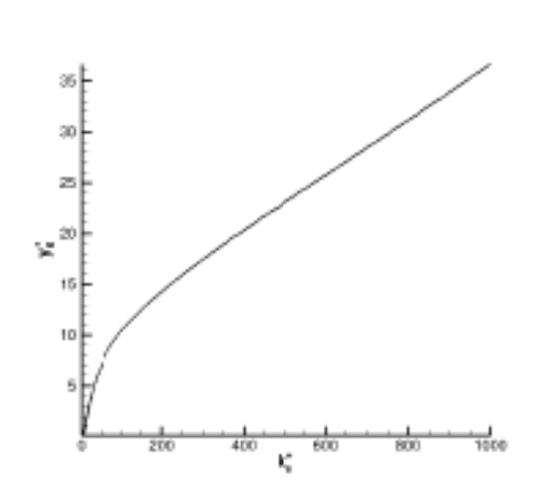


FIGURE 16.3 – Évolution du décalage y_0^+ en fonction de k_s^+ .

frottement. Ils expriment y_{0r}^* comme :

$$y_{0r}^* = y_v^* \left(1 - \left(\frac{k_s^*}{70} \right)^m \right) \quad \text{avec } m = \max \left(\left(0,5 - 0,4 \left(\frac{k_s^*}{70} \right)^{0,7} \right), \left(1 - 0,79 \left(\frac{k_s^*}{70} \right)^{-0,28} \right) \right) \quad (16.19)$$

Pour la partie thermique, Suga *et al.* adoptent une formulation similaire à celle de la relation (16.14) avec :

$$\Delta Pr_t = C_0 \max \left(0,1 - \frac{y^*}{k_s^*} \right) \quad \text{avec } C_0 = \frac{5,5}{1 + \left(\frac{k_s^*}{70} \right)^{8,3}} + 0,6 \quad (16.20)$$

On peut d'ores et déjà s'étonner du fait que $\Delta Pr_t \rightarrow 0,6$ à la paroi quand $k_s^* \rightarrow \infty$, et que l'effet de la surface mouillée ne soit pas pris en compte.

Reprenant le principe proposé par Aupoix [1] d'introduire un décalage y_0 selon (16.7), on a entrepris de construire un nouveau modèle pour y_{0r} . Pour cela on se base sur la loi de Reichardt qui décrit un profil de couche limite de plaque plane sans gradient de pression :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7,8 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \left(\frac{y^+}{11} \right) e^{-0,33y^+} \right) \quad (16.21)$$

On détermine dans un premier temps le décalage y_0^+ en fonction de k_s^+ . La figure 16.3 montre le résultat obtenu. Comme dans la région interne on a $\mu_t^+ = \frac{\partial u^+}{\partial y^+} - 1$, la loi de Reichardt (16.21) fournit $\mu_t^+(y_0^+)$ qui correspond à $\mu_{tp}^+(k_s^+)$ d'après (16.11). On cherche ensuite une fonction de k_s^+

qui reproduise au mieux l'évolution trouvée. Finalement comme $y_{v_r}^* = -\frac{\mu_v^+}{\alpha}$ on obtient :

$$y_{v_r}^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{k_s^+}{165} \right)^{1,3} \left(2e^{-\left(\frac{k_s^+}{100}\right)^{0,9}} + 1 \right) \left(\left(\left(\frac{k_s^{+0,8} - 11}{8} \right)^2 - 2,5 \right) e^{-\left(\frac{k_s^+}{20}\right)^{1,2}} + 1 \right) + y_v^* e^{-2k^+} \quad (16.22)$$

Le dernier terme servant de rappel vers la valeur en lisse y_v^* .

On peut relier y^* à y^+ selon :

$$y^* = \frac{y\sqrt{k_P}}{\nu} = \frac{y u_\tau \sqrt{k}}{\nu u_\tau} = y^+ \sqrt{k^+} \quad (16.23)$$

La relation de Bradshaw valable dans la région logarithmique permet de trouver directement :

$$y^* = \frac{y^+}{\sqrt{a_1}} \quad \text{avec} \quad k^+ = \frac{1}{a_1} \quad \text{où} \quad a_1 = 0,31 \quad (16.24)$$

Cependant cette relation n'est pas applicable en dehors de la région logarithmique et pour relier y^* à y^+ dans toute la région interne, on a retenu une simple interpolation à partir du profil de k^+ donné le modèle $k - \omega$ SST :

$$k^+ = \frac{1}{a_1} \tanh(0,005y^{+2}) \quad (16.25)$$

Avec cette relation, on peut donc finalement tracer sur la figure 16.4 l'évolution de μ_v^+ en fonction de k_s^+ . On note que les différences sont faibles pour $k_s^+ < 200$ entre le modèle de Suga *et al* et celui présenté ci-dessus ce qui explique les bons résultats montrés dans [28] pour lesquels les valeurs de k_s^+ restent limitées. En revanche, le comportement est très sensiblement différent pour les grandes valeurs de k_s^+ . On s'attend donc à de forts écarts sur des cas d'écoulements en présence de fortes rugosités.

Pour la partie thermique, on reprend les travaux de Suga *et al* mais avec une distribution de nombre de Prandtl turbulent Pr_t modifié. On s'appuie sur la formulation donnée par Au poix (16.15) mais afin de garder le caractère analytique de la loi de paroi, on modifie le comportement exponentiel selon :

$$\Delta Pr_t = \mathcal{F} \max \left(0, 1 - \frac{y^*}{2k^*} \right) \quad (16.26)$$

Pour illustrer les différences de comportement entre le modèle de Suga *et al* et celui donné par Au poix, on trace sur la figure 16.5 l'évolution de la correction pour le nombre de Prandtl turbulent $\Delta Pr_t|_{y=0}$ à la paroi en fonction de k_s^+ . Il faut être vigilant en ce qui concerne la région $k_s^+ < 70$ car dans le modèle de Suga *et al* dans cette région $y_{v_r} > 0$ et pour $y < y_{v_r}$ on a $\mu_t = 0$. Ainsi la correction thermique n'a pas d'effet dans ces cas là. En revanche, le comportement pour les grandes valeurs de k_s^+ est très différent entre les deux modèles. Des tests sont en cours afin de s'assurer que la nouvelle loi de paroi réponde bien aux attentes et apporte une avancée par rapport au modèle existant.

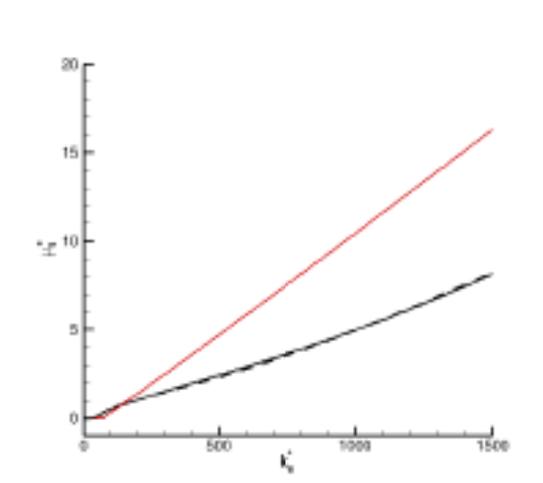


FIGURE 16.4 – Évolution de $\mu_{t_p}^+$ en fonction de k_s^* . Les courbes en noir correspondent respectivement aux évolutions trouvées à partir de la loi de Reichardt (16.21) (trait plein) et à son interpolation $\max(0, -\alpha y_{t_w}^*)$ issue de (16.22) (pointillés) alors que la courbe rouge montre le résultat obtenu par Suga *et al* $\max(0, -\alpha y_{t_w}^*)$ à partir de la relation (16.19).

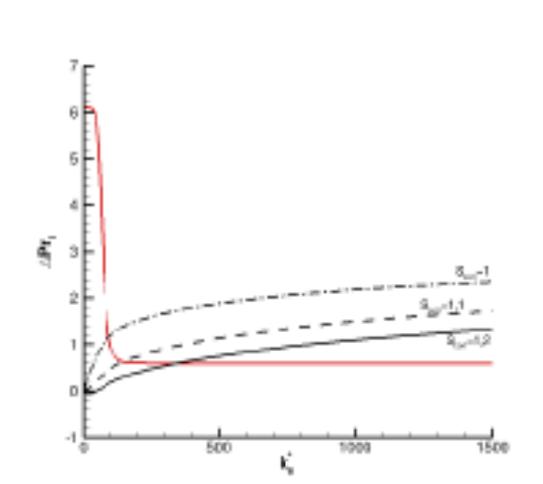


FIGURE 16.5 – Correction thermique $\Delta Pr_t|_{y=0}$ à la paroi en fonction de k_s^* . En rouge le modèle de Suga *et al.* (16.20) et en noir les courbes obtenues avec le modèle de Aupoix (16.15) pour trois valeurs de S_{corr} .

Chapitre 17

Fluctuations de pression à la paroi

La connaissance des niveaux de fluctuations de pression à la paroi, en norme ou sous forme spectrale, ou encore sous forme de corrélations spatio-temporelle, est nécessaire dans différentes applications et notamment dans la prévision des interactions fluide/structure pour la vibro-acoustique. À première vue, il faut une approche résolvant la turbulence pour disposer de telles informations, et donc le recours à la DNS ou la LES semble indispensable. Cependant, les coûts souvent prohibitifs de ces approches ne permettent pas d'envisager une utilisation dans un contexte industriel. On aimerait donc disposer de ces informations, même de manière partielle, à partir de simples calculs RANS. Si des corrélations ont été développées par différents auteurs, voir les exemples récents de Remmler *et al* [23] et Rozenberg *et al* [24], Lysak [18] a développé une approche qui permet une estimation du spectre des fluctuations de pression dans le cas d'une conduite à partir du champ moyen. Les travaux de Lysak ont été étendus par Aupoix [2] à l'utilisation d'une solution RANS quelconque. D'autres améliorations du modèle sont en cours de finalisation et feront l'objet d'une soumission pour publication prochainement. On présente par la suite l'approche de Lysak originelle. Une extension de cette approche pour une utilisation en vibro-acoustique est rapidement proposée ci-après, elle correspond aux travaux de thèse de S. Morilhat.

17.1 Description de l'approche Lysak

L'approche de Lysak part de l'équation de Poisson pour les fluctuations de pression exprimée en incompressible :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(2U_i u'_j + u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (17.1)$$

où $\overline{\quad}$ désigne la moyenne d'ensemble. L'interaction turbulence/turbulence qui constitue les deuxième et troisième termes du second membre de l'équation (17.1) est supposée négligeable devant l'interaction champ moyen/turbulence. Bien que cette hypothèse soit contestée par certains auteurs, les difficultés de modélisation de ces termes conduisent Lysak à ne pas les prendre en compte. Avec les notations de couche limite, où y est la direction normale à la paroi, l'équation (17.1)

s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial x_1} = -2\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} v' + U \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = -2\rho \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (17.2)$$

où le cisaillement selon x a été négligé, ce qui se justifie pleinement dans le cas d'écoulements en conduite.

La solution de l'équation de Poisson $\Delta f = g$ fait intervenir un opérateur de Green et la prise en compte des conditions sur les frontières du domaine. Elle donne :

$$f(\underline{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V g(\underline{x}) \frac{d^3 \underline{x}}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[f \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \right) - \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \frac{\partial f}{\partial n} \right] d^2 \underline{x} \quad (17.3)$$

En considérant un champ image de l'autre côté de la paroi, les contributions surfaciques s'annulent et finalement Lysak retient pour la fluctuation de pression à la paroi :

$$p'_p(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{q'(\xi_x, \xi_y, \xi_z, t) d\xi_x d\xi_z}{\sqrt{(x - \xi_x)^2 + \xi_y^2 + (z - \xi_z)^2}} d\xi_y \quad \text{avec } q'(\xi_x, \xi_y, \xi_z, t) = -2\rho \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (17.4)$$

L'objectif de cette approche n'est pas l'évaluation des fluctuations de pression mais de ses statistiques. Ainsi, Lysak [18] propose de se placer dans l'espace spectral et introduit la transformée de Fourier de la fluctuation de pression notée \hat{p}' :

$$\hat{p}'_p(k_x, k_z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty p'_p(x, z, t) \exp[-i(k_x x + k_z z)] \exp(-i\omega t) dx dz dt \quad (17.5)$$

Grâce à l'égalité donnée par la relation :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp[-i(k_x x + k_z z)]}{\sqrt{(x - \xi_x)^2 + \xi_y^2 + (z - \xi_z)^2}} dx dz = \frac{\exp(-k \xi_y)}{k} \exp[-i(k_x \xi_x + k_z \xi_z)] \quad (17.6)$$

avec $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$, on arrive à une expression de \hat{p}' relativement simple qui fait intervenir la transformée de Fourier du terme source q' :

$$\hat{p}'_p(k_x, k_z, \omega) = \int_0^\infty \frac{\exp(-ky)}{k} \hat{q}'(k_x, y, k_z, \omega) dy \quad (17.7)$$

A ce stade, il faut rappeler qu'en fonction des applications visées, on va s'intéresser à différentes quantités. Dans un premier temps, si on cherche simplement à valider l'approche, la quantité la plus souvent extraite expérimentalement est le spectre fréquentiel des fluctuations de pression qui s'exprime comme :

$$\Phi_{pp}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty P(k_x, k_z, \omega) dk_x dk_z \quad (17.8)$$

Une intégration supplémentaire sur les fréquences donne la fluctuation de pression quadratique moyenne :

$$\langle p'^2 \rangle = \int_{-\infty}^\infty \Phi_{pp}(\omega) d\omega \quad (17.9)$$

Le spectre fréquentiel est directement lié au spectre des fluctuations de pressions $P(k_x, k_z, \omega)$ qui s'exprime selon :

$$P(k_x, k_z, \omega) = \langle \hat{p}'_p(k_x, k_z, \omega) \hat{p}'_p{}^*(k_x, k_z, \omega) \rangle \quad (17.10)$$

où * désigne le conjugué. Ce spectre va faire intervenir la corrélation en deux points des fluctuations de vitesse via q' :

$$Q(k_x, y, r_y, k_z, \omega) = \langle q'(\xi_x, y, \xi_z, \omega) q'{}^*(\xi_x, y + r_y, \xi_z, \omega) \rangle \quad (17.11)$$

Moyennant l'hypothèse que Q tende rapidement vers 0 pour $r_y \rightarrow 0$, et en supposant Q symétrique en r_y , on aboutit à une expression simple pour le spectre des fluctuations de pression :

$$P(k_x, k_z, \omega) \approx 2\pi \int_0^\infty \frac{\exp(-2ky)}{k^2} \Phi_{qq}(k_x, y, 0, k_z, \omega) dy \quad (17.12)$$

avec :

$$\Phi_{qq}(k_x, y, k_y, k_z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Q(k_x, y, r_y, k_z, \omega) \exp(-ik_y r_y) dr_y \quad (17.13)$$

Le terme source q' de l'équation de poisson (17.4), dépend de la fluctuation de vitesse verticale v' . Le spectre de pression pariétale va donc être relié au spectre de fluctuation de vitesse v' . En faisant l'hypothèse d'une turbulence figée et convectée par l'écoulement moyen U , autrement appelée hypothèse de Taylor, le spectre de v' peut s'écrire :

$$\Phi_{v'v'}(k_x, y, k_y, k_z, \omega) = \Phi_{v'v'}(k_x, y, k_y, k_z) \delta[\omega - U(y)k_x] \quad (17.14)$$

La relation de dispersion $\omega = Uk_x$ permet de séparer les dépendances fréquentielle et spatiale. Pour modéliser le spectre $\Phi_{v'v'}$ on se sert du modèle de von Karman, qui peut se mettre sous la forme :

$$E(k) = C \frac{\langle v'^2 \rangle}{k_e} \frac{(k/k_e)^4}{[1 + (k/k_e)^2]^{17/8}} \quad (17.15)$$

où k_e est le nombre d'onde des structures porteuses d'énergie et C une constante qui peut se calculer en écrivant que l'intégrale du spectre correspond à l'énergie cinétique de turbulence. La relation (17.15) est valable dans le cas d'une turbulence isotrope ce qui n'est pas le cas en proche paroi où une forte anisotropie de la turbulence s'exprime. Étant donné le caractère isotrope de (17.15), on aboutit à :

$$\Phi_{v'v'}(k_x, k_y, k_z) \approx \frac{3}{8\pi} \frac{\langle v'^2 \rangle}{k_e^3} \frac{(k_x/k_e)^2 + (k_y/k_e)^2 + (k_z/k_e)^2}{[1 + (k_x/k_e)^2 + (k_y/k_e)^2 + (k_z/k_e)^2]^{17/8}} \quad (17.16)$$

En utilisant cette forme de spectre, l'équation (17.12) devient

$$P(k_x, k_z, \omega) \approx 3\rho^2 \int_0^\infty \frac{k_x^2}{k_e^3} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \exp(-2ky) \frac{\langle v'^2 \rangle}{[1 + (k/k_e)^2]^{17/8}} \delta[\omega - U(y)k_x] dy \quad (17.17)$$

Ainsi le spectre fréquentiel des fluctuations de pression Φ_{pp} qui nous intéresse se met sous la forme :

$$\Phi_{pp}(\omega) \approx 3\rho^2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \frac{\langle v'^2 \rangle \omega^2}{U^3 \kappa_e^4} I \left(\frac{\omega}{U \kappa_e}, \kappa_e y \right) dy \quad \text{où } I(\xi, \alpha) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp \left[-2\alpha \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} \right]}{(1 + \xi^2 + \zeta^2)^{17/6}} d\zeta \quad (17.18)$$

Pour fermer son approche, Lysak [18] considère un écoulement en conduite et se donne des profils pour U , $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\langle v'^2 \rangle$ et un modèle pour k_e . Un certain nombre d'hypothèses, notamment concernant la tension $\langle v'^2 \rangle$ pour laquelle Lysak considère $\langle v'^2 \rangle = -\langle u'v' \rangle$, peuvent être remises en cause, en particulier, si l'on souhaite étendre l'approche à l'utilisation d'une solution provenant d'un calcul RANS.

17.2 Extensions et utilisation pour la vibro-acoustique

Les travaux de Aupoix [2] ont permis cette extension dans le cadre de l'utilisation du modèle de turbulence Launder-Sharma $k - \varepsilon$. Le modèle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle v'^2 \rangle &= C_{v2} (-\langle u'v' \rangle) \quad \text{avec } C_{v2} = 1,3 \\ k_e &= C_k \frac{\varepsilon}{k^{3/2}} \quad \text{avec } C_k = 1,9 \end{aligned} \quad (17.19)$$

Pour le calcul de l'intégrale $I(\xi, \alpha)$, Aupoix [2] a mis en place une procédure utilisant la méthode Gause-Laguerre, ce qui rend le calcul rapide et robuste.

Notons aussi que l'extension de la méthode à des écoulements tridimensionnels est directe. Le terme source dans l'équation de Poisson devient

$$q'(\xi_x, \xi_y, \xi_z, t) = -2\rho \left[\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial z} \right] \quad (17.20)$$

ce qui permet d'aboutir à :

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}(\omega) &\approx 3\rho^2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \frac{\langle v'^2 \rangle \omega^2}{U^3 k_e^4} I \left(\frac{\omega}{U k_e}, k_e y, \frac{W}{U} \right) dy \\ &+ 3\rho^2 \int_0^\infty \left(\frac{W}{U} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \frac{\langle v'^2 \rangle}{U k_e^2} J \left(\frac{\omega}{U k_e}, k_e y, \frac{W}{U} \right) dy \end{aligned} \quad (17.21)$$

où les intégrales sont maintenant définies comme

$$\begin{aligned} I(\xi, \alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp \left[-2\alpha \sqrt{\xi^2 - 2\beta\xi\zeta + \zeta^2(1 + \beta^2)} \right]}{(1 + \xi^2 - 2\beta\xi\zeta + \zeta^2(1 + \beta^2))^{17/6}} d\zeta \\ J(\xi, \alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^\infty \zeta^2 \frac{\exp \left[-2\alpha \sqrt{\xi^2 - 2\beta\xi\zeta + \zeta^2(1 + \beta^2)} \right]}{(1 + \xi^2 - 2\beta\xi\zeta + \zeta^2(1 + \beta^2))^{17/6}} d\zeta \end{aligned} \quad (17.22)$$

L'approche ainsi formulée a ensuite été adaptée aux modèles de turbulence $k - \omega$ de Menter [19] et SA de Spalart et Allmaras [26, 27]. En ce qui concerne le modèle $k - \omega$, le comportement singulier du modèle dans la région tampon induit une réponse sur le spectre d'énergie Φ_{pp} qui ne permet pas de retrouver les résultats obtenus jusqu'alors avec le modèle $k - \varepsilon$ et qui se compare très bien aux mesures de Gravante *et al.* [13] par exemple. Pour palier ce défaut, la dissipation ε qui intervient dans la définition de k_ε (17.19) est modifiée. Ainsi on considère :

$$\varepsilon = \beta^* k \omega \left(1 - \left(e^{-\frac{y^+}{10}} \right)^{1/5} \right) \quad (17.23)$$

Il ne s'agit pas d'améliorer la représentation de la dissipation dans le modèle $k - \omega$ mais de mieux représenter l'évolution des spectres Φ_{pp} dans la zone dissipative et de se rapprocher des résultats expérimentaux.

Parallèlement, la constante C_{v_2} est modifiée de sorte qu'elle intègre une correction afin de mieux reproduire le blocage de $\langle v'^2 \rangle$ à la paroi. En effet le blocage à la paroi de $\langle v'^2 \rangle$ est supérieur à celui de $\langle -u'v' \rangle$ ce qui impose de modifier C_{v_2} pour reproduire le bon comportement pour les grandes valeurs de la pulsation ω .

$$C_{v_2} = 1,3 \left[1 - e \left(-\frac{y^+}{10} \right) \right] \quad (17.24)$$

Avec ces corrections, l'adaptation de l'approche de Lysak pour l'utilisation du modèle $k - \omega$ permet de retrouver les résultats expérimentaux disponibles jusqu'alors. En particulier, dans la région logarithmique on trouve que le spectre Φ_{pp} se comporte en $\omega^{+^{-1}}$, ce qui semble conforme aux mesures de Gravante [13]. En fait, la base de données récente établie par Tsuji *et al.* [29] indique un comportement en $\omega^{+^{-0,7}}$ dans la zone logarithmique. Pour retrouver ce comportement on est amené à modifier le comportement de k_ε vis-à-vis de la distance à la paroi y . En effet, par construction $k_\varepsilon \propto y^{+^{-1}}$, dans la région logarithmique. Si on suppose $k_\varepsilon \propto y^{+^{-\beta}}$, on peut montrer qu'en première approximation $\Phi_{pp} \propto \omega^{+^{\frac{1-2\beta}{\beta}}}$. En prenant $\beta \approx 0,77$, on retrouve le comportement en $\omega^{+^{-0,7}}$. Jusqu'à présent on a lié k_ε à l'échelle de longueur classique $L_\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ qui se comporte comme κy dans la région interne de couche limite et conduit à $k_\varepsilon \propto y^{+^{-1}}$. Pour modifier cette relation on lie k_ε à L_ε et à l'échelle de Kolmogorov $L_K = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$, qui elle, n'est pas proportionnelle à y^+ dans la région de proche paroi. Ainsi, en construisant k_ε à partir de L_ε et L_K on peut aboutir au comportement souhaité. On pose :

$$k_\varepsilon \propto (L_\varepsilon^{1-\alpha} L_K^\alpha)^{-1} \propto y^{+\frac{3\alpha-4}{4}} \quad (17.25)$$

Avec $\alpha \approx 0,3$, on retrouve $\beta \approx 0,77$.

En pratique, une étude paramétrique de la pente $\frac{\partial \ln \Phi_{pp}}{\partial \ln \omega}$ en fonction de α montre que l'on retrouve une plage où l'on observe le comportement $\Phi_{pp} \propto \omega^{+^{-0,7}}$ pour $\alpha \approx 0,13$. Cette valeur est

plus faible que celle trouvée avec l'analyse précédente qui comprenait quelques approximations. En retenant $\alpha = 0,13$, on montre qu'il faut modifier C_k pour retrouver les bons niveaux de pression pariétale. On prend ainsi $C_k = 0,97$.

Enfin, les données de Tsuji *et al.* [29] ont aussi montré que les spectres de pression Φ_{pp} sont dépendants du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement Re_θ . Cette dépendance apparaît dans la région inertielle, dans laquelle on n'observe pas de comportement universel. Cela est attribué aux "inactives motions" [6] ou "mouvements de très grande échelle" [15]. Ces structures contribuent aux tensions $\langle u'^2 \rangle$ et $\langle w'^2 \rangle$ mais pratiquement pas aux tensions $\langle v'^2 \rangle$ et $\langle u'v' \rangle$. Ainsi elles ne contribuent pas au cisaillement, donc au champ moyen, et correspondent à des mouvements dans le plan parallèle à la paroi. Les modèles de turbulence, dont le $k - \omega$ de Menter, ne tiennent pas compte de ces mouvements puisque $-\langle u'v' \rangle$ est directement relié à k selon la relation de Bradshaw. Si $\langle u'v' \rangle$ ne dépend pas de ces "inactives motions", k devrait.

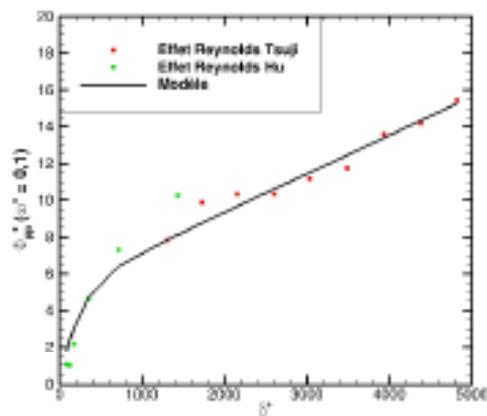
Dans la modélisation pour la reconstruction des fluctuations de pression à la paroi, seule la tension $\langle v'^2 \rangle$ intervient. Elle est déduite de données RANS et du profil $\langle u'v' \rangle$. Ainsi, la modélisation, elle aussi, par construction, ne permet pas de reproduire l'effet du nombre de Reynolds sur les niveaux de fluctuations de pression à la paroi. Le défaut de la modélisation réside dans le fait que le terme qui intervient à l'origine est la corrélation en deux points $\langle \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial x} \rangle$. Le passage dans l'espace spectral a seulement laissé la corrélation $\langle v'^2 \rangle$ dans la formulation finale. L'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = - \int_0^y \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} \right) dy \quad (17.26)$$

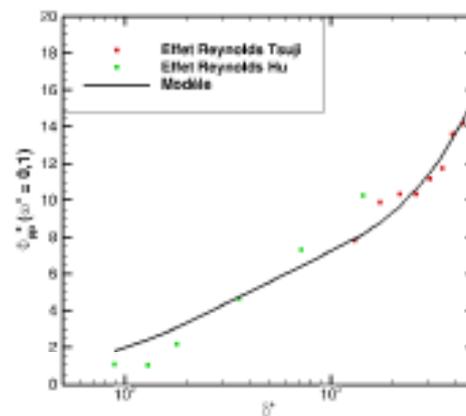
les termes du second membre étant sensible à Re_θ . Pour introduire la dépendance en Re_θ de la région inertielle, le paramètre C_{v_2} est modifié à nouveau. Pour cela, à l'aide des données de Tsuji et des données de DNS de canal de Hu [16], on trace sur les figures 17.1(a) et 17.1(b), l'évolution de Φ_{pp} pris en $\omega = 0,1$ en fonction de l'épaisseur de couche limite adimensionnée δ^+ . Sur ces figures apparaît en trait plein une corrélation qui interpole les points expérimentaux. Cette corrélation est directement reprise pour la modification de C_{v_2} , qui, compte-tenu de (17.24), s'écrit :

$$C_{v_2} = 1,3 \left[1 + \left(\frac{5,13 + 0,0021\delta^+}{17} \left(1 - e^{-\frac{\delta^+}{20}} \right) - 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{\delta^+}{10}} \right) \right] \quad (17.27)$$

L'ensemble de ces corrections est validé par comparaison aux mesures de Tsuji *et al.* [29] sur les figures 17.2(a) à 17.2(d). Sur ces figures on présente les mesures de Φ_{pp} et la reconstruction par l'approche de Lysak modifiée. Les excellents accords obtenus valident les modifications apportées, qui permettent d'obtenir un comportement conforme aux mesures dans la région interne et reproduisent la dépendance en Re_θ . D'autres validations à partir des mesures de Gravante [13] et des DNS de Hu [16] montrent aussi un bon accord. Finalement, en traçant sur la figure 17.3 l'allure de la variance p'^2 à la paroi en fonction de δ^+ , on montre que le modèle permet de retrouver les niveaux de pression pariétale mesurés. On dispose donc d'un modèle qui, sur la base de données issues d'un calcul RANS, permet de reproduire les niveaux de fluctuations de pression à la paroi. Grâce à cette approche, on espère être en mesure de modéliser le bruit rayonné par une paroi soumise à un écoulement turbulent.

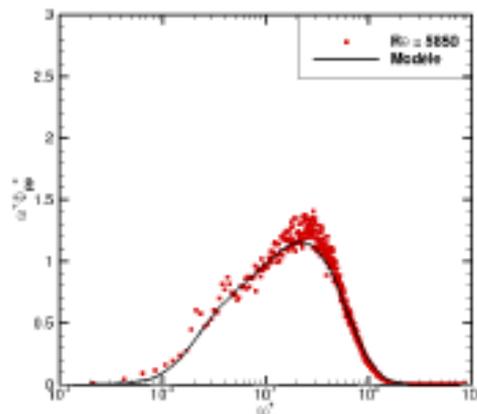


(a) échelle linéaire

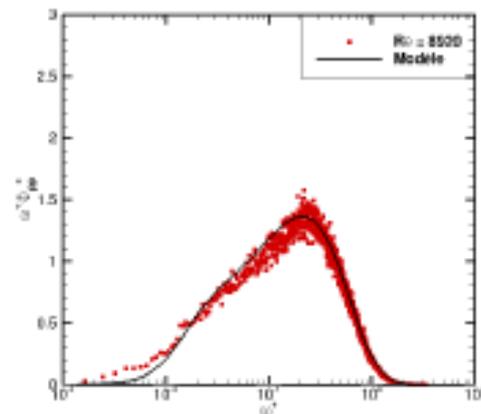


(b) échelle logarithmique

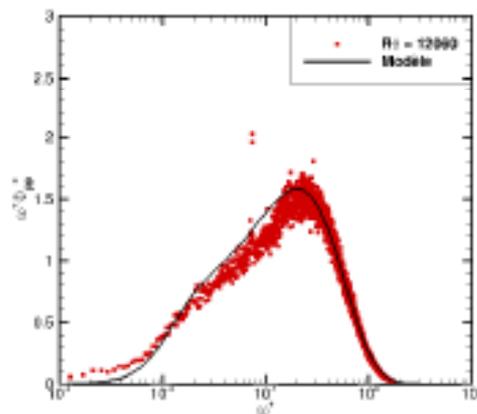
FIGURE 17.1 – Étude de l'influence du nombre de Reynolds sur le spectre des fluctuations de pression Φ_{pp} .



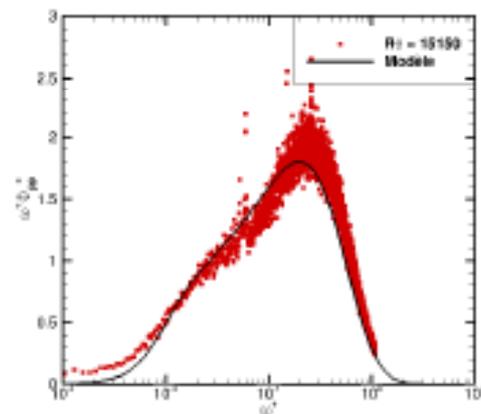
(a) $Re_{\theta} = 5850$



(b) $Re_{\theta} = 8920$



(c) $Re_{\theta} = 12060$



(d) $Re_{\theta} = 15150$

FIGURE 17.2 – Comparaison entre modèle et expérience de Tsuji pour le spectre Φ_{pp} . Les corrélations proposées par Farabee et Casarella [12] et Tsuji *et al* [29] sont aussi portées sur la figure.

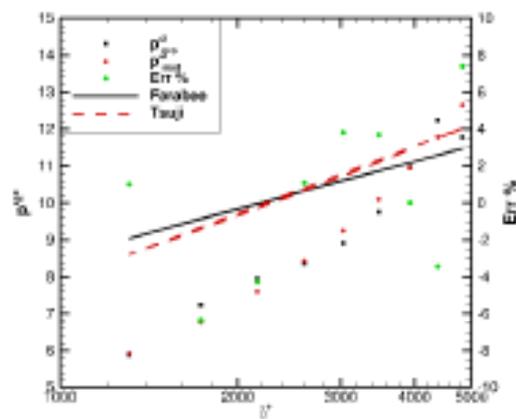


FIGURE 17.3 – Comparaison entre modèle est expérience de Tsuji pour les niveaux de variance de fluctuations de pression pariétale

Chapitre 18

Bilan

Les besoins de modélisation des écoulements en proche paroi restent importants malgré les nombreux travaux déjà effectués sur ce sujet. Ce thème, avec d'autres, était jusqu'à présent traité par B. Aupoix au DMAE. Son départ est l'occasion pour moi de m'investir sur l'ensemble de ces sujets et de continuer le travail entrepris depuis de nombreuses années. Plusieurs pistes de recherche peuvent être évoquées. La première concerne la prise en compte des rugosités dans la modélisation des échanges en paroi. Les récents travaux d'Aupoix [3, 5] ont permis de développer des corrections pour le modèle $k - \omega$ SST. Une extension à un modèle RSM est envisagée dans un proche avenir. La même méthodologie [1] que celle déjà employée sera reconduite pour la construction de ces nouvelles corrections. La difficulté réside essentiellement dans la description de l'évolution des différentes tensions de Reynolds au voisinage de parois rugueuses. Si l'approche par grain de sable équivalent permet de répondre rapidement aux besoins industriels, son champ d'application reste limité dans la mesure où, par construction, les corrections introduites ne respectent pas la physique des écoulements sur parois rugueuses. Ainsi, il existe un intérêt évident à développer l'approche par élément discret [4]. Cependant l'introduction d'une telle méthode dans un code Navier-Stokes comme le code CEDRE n'est pas naturelle et un travail important en amont est nécessaire afin d'adapter le code aux contraintes du modèle. Une fois cette étape réalisée, on pourra se pencher sur la modélisation de certains termes du modèle, notamment le terme spécifique relatif aux tensions dispersives [4].

Concernant la reconstruction des fluctuations de pression à la paroi à partir d'un champ RANS, de nombreux travaux restent encore à effectuer. Tout d'abord le modèle actuel présenté ci-dessus va être mis en œuvre sur des configurations où l'on dispose de mesures ou de résultats de référence comme des DNS. Dans le cadre de la thèse de S. Morilhat, un grand nombre de cas a d'ores et déjà été identifié. On souhaite notamment vérifier le comportement du modèle pour des écoulements de couche limite avec gradient de pression. Par ailleurs, un montage expérimental est en cours de définition, il doit nous permettre d'acquérir des données pour les corrélations en deux points autorisant la validation du modèle. Des couches limites avec et sans gradient de pression seront testées.

Bibliographie de la quatrième partie

- [1] B. Aupoix. « A General Strategy to Extend Turbulence Models to Rough Surfaces – Application to Smith's $k - L$ model ». Dans : *Journal of Fluid Engineering* 129.10 (2007), p. 1245–1254.
- [2] B. Aupoix. « Extension of Lysak's Approach to Evaluate the Wall Pressure Spectrum for Boundary Layer Flows ». Dans : *Flow, Turbulence and Combustion* 94.1 (2015), p. 63–78.
- [3] B. Aupoix. « Improved Heat Transfer Predictions on Rough Surfaces ». Dans : *International Journal of Heat and Fluid Flows* 56 (2015), p. 160–171.
- [4] B. Aupoix. « Revisiting the Discrete Element Method for Predictions of Flows over Rough Surfaces ». Dans : *Journal of Fluids Engineering* (2016), p. 31205.
- [5] B. Aupoix. « Roughness Corrections for the $k - \omega$ Shear Stress Transport Model : Status and Proposals ». Dans : *Journal of Fluids Engineering* 137 (2015), p. 021202.
- [6] P. Bradshaw. « Inactive Motion and Pressure Fluctuations in turbulent Boundary Layers ». Dans : *Journal of Fluid Mechanics* 30.2 (1967), p. 241–258.
- [7] F. Chedevigne. « Advanced wall model for aerothermodynamics ». Dans : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 31 (2010), 916–924.
- [8] C.F. Colebrook. « Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region Between the Smooth and Rough Pipe Laws ». Dans : *Journal of the Institution of Civil Engineering* 21 (1938-1939), p. 133–156.
- [9] C.F. Colebrook et C.M. White. « Experiments with Fluid Friction in Roughened Pipes ». Dans : *Proceedings of the Royal Society of London A* 161 (1937), p. 367–381.
- [10] J. Cousteix. *Turbulence et couche limite*. CEPADUES-EDITIONS, 1989.
- [11] T.J. Craft, A.V. Gerasimov, H. Iacovides et B.E. Launder. « Progress in the generalization of wall-function treatments ». Dans : *International Journal of Heat and Fluid Flows* 23 (2002), p. 148–160.
- [12] T.M. Farabee et M.J. Casarella. « Spectral Features of Wall pressure Fluctuations beneath Turbulent Boundary Layers ». Dans : *Physics of Fluids A* 3.10 (1991), p. 2410–2420.
- [13] S.P. Gravante, A.M. Naguib, C.E. Wark et H.M. Nagib. « Characterization of the Pressure Fluctuations under a Fully Developed Turbulent Boundary Layer ». Dans : *AIAA Journal* 36.10 (1998), p. 1808–1816.

- [14] F. Guillou. « Modélisation et simulations numériques stationnaires de l'aérodynamique des circuits internes d'aubes de turbines refroidies ». Thèse de doct. Rouen : Université de Rouen, 2013.
- [15] S. Hoyas et J. Jiménez. « Scaling of velocity Fluctuations in Turbulent Channels up to $Re_\tau = 2000$ ». Dans : *Physics of Fluids* 18 (2006), p. 011702.
- [16] Z.W. Hu, C.L. Morfey et N.D. Sandham. « Wall pressure and Shear Stress Spectra from Direct Simulations of Channel Flow ». Dans : *AIAA Journal* 44.7 (2006), p. 1541–1549.
- [17] C.L.V. Jaystilleke. « The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sublayer to momentum and heat transfer ». Dans : *Prog. Heat Mass Transfer* (1969), p. 1–193.
- [18] P.D. Lysak. « Modeling the Wall pressure Spectrum in Turbulent Pipe Flow ». Dans : *Journal of Fluids Engineering* 128 (2006), p. 216–222.
- [19] F. Menter. « Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications ». Dans : *AIAA Journal* 32.8 (1994), p. 1598–1605.
- [20] J. Nikuradse. *Laws of Flows in Rough Pipes*. Technical Memorandum 1292. Washington : NACA, 1937.
- [21] J. Nikuradse. *Strömungsgesetze in rauhen Röhren*. Rap. tech. 361. VDI-Forschungsheft, 1933.
- [22] U. Piomelli, J. Ferziger, P. Moin et J. Kim. « New approximate boundary conditions for large-eddy simulations of wall bounded flows ». Dans : *Physics of Fluids* 1.6 (1989), p. 1061–1068.
- [23] S. Remmler, J. Christophe, J. Anthoine et S. Moreau. « Computation of Wall-Pressure Spectra from Steady Flow Data for Noise Prediction ». Dans : *AIAA Journal* 48.9 (2010), p. 1997–2008.
- [24] Y. Rozenberg, G. Robert et S. Moreau. « Wall-Pressure Spectral Model Including the Adverse Pressure Gradient Effect ». Dans : *AIAA Journal* 50.10 (2012), p. 2168–2179. DOI : [10.2514/1.J051500](https://doi.org/10.2514/1.J051500).
- [25] E. Goncalves Da Silva. « Implantation et validation de lois de paroi dans un code Navier-Stokes ». Thèse de doct. Toulouse : SUPAERO, 2001.
- [26] P.R. Spalart et S.R. Allmaras. « A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows ». Dans : 1992.
- [27] P.R. Spalart et S.R. Allmaras. « A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows ». Dans : *La Recherche Aéronautique* 1 (1994), p. 5–21.
- [28] K. Suga, T.J. Craft et H. Iacovides. « An analytical wall-function for turbulent flows and heat transfer over rough walls ». Dans : *International Journal of Heat and Fluid Flows* 27 (2006), p. 852–866.

- [29] Y. Tsuji, S. Imayama, P. Schlatter, P.H. Alfredsson, A.V. Johansson, I. Marusic, N. Hutchins et J. Monty. « Pressure Fluctuations in High-Reynolds-Number Turbulent Boundary Layer : Results from experiments and DNS ». Dans : *Journal of Turbulence* 13.50 (2012), p. 1–19. DOI : [10.1080/14685248.2012.734625](https://doi.org/10.1080/14685248.2012.734625).

Cinquième partie

Conclusion et perspectives

Chapitre 19

Conclusion et Perspectives

Entre mes premiers travaux de thèse sur les instabilités des moteurs à propergols solides et les récents développements autour de la prise en compte des rugosités dans les lois de paroi, ma carrière a été l'occasion de m'intéresser à des sujets variés. Il est difficile de trouver une ligne conductrice dans l'ensemble de ces travaux, ce qui n'a rien d'étonnant au regard des différentes fonctions que j'ai occupé au DEFA et au DMAE. Je tire cependant avantage de cette situation lorsque je suis confronté à un problème complexe mêlant différentes physiques, puisqu'au fil du temps l'expérience m'a conduit à adopter différents points de vue. L'avenir devrait toutefois me permettre de me concentrer essentiellement sur la modélisation des écoulements turbulents. Malgré tout l'intérêt et l'affection que je porte tant à la problématique des oscillations de poussées qu'aux actionneurs plasma, dans un avenir proche, les activités de recherche au DMAE sur ces deux thèmes seront mises entre parenthèses. Ce choix résulte aussi du départ en retraite de notre expert B. Aupoix dans le domaine de la modélisation des écoulements turbulents. Le maintien de cette expertise étant jugée comme stratégique par le DMAE, je me vois confié aujourd'hui la reprise d'une grande partie des activités couvertes jusqu'ici par B. Aupoix.

19.1 Oscillations de pression

Traiter la question des oscillations de poussée par le prisme de la stabilité linéaire a permis de mettre en évidence une instabilité propre aux écoulements en conduit à paroi débitante et qui explique très bien les observations faites sur les moteurs à propergol solide. Si mes travaux de thèses ont livré un scénario crédible d'apparition des oscillations de poussée, les travaux complémentaires effectués dans la thèse de B. Gazanion sur la question de la transition laminaire-turbulent ont permis d'assoir ce scénario. Récemment fort de ces résultats, une extension au cas d'une géométrie étoilée a été entreprise dans le cadre de la thèse de M. Bouyges. C'est finalement l'aboutissement d'un long chemin, notamment initié par G. Casalis, dans lequel je me suis inscrit. Le développement du prochain lanceur Ariane 6, dont les boosters seront de rapport d'aspect plus petit que l'actuel P230 et qui donc ne devraient pas être sujet à ce type d'instabilités, va conduire à une diminution progressive des activités de recherches liées aux oscillations de poussée. Cependant, il est tout de même intéressant du point de vue scientifique de conclure certains travaux encore en cours. En particulier, une nouvelle simulation LES visant à reproduire

la transition laminaire/turbulent dans la configuration VALDO a été initiée. A la différence des travaux de B. Gazanion, le jet issu du montage VALDO et débouchant dans un environnement au repos est pris en compte. Ainsi, on devrait être en mesure de reproduire l'impédance acoustique de la section de sortie du montage et donc obtenir un environnement acoustique dans le conduit comparable aux mesures. Outre la caractérisation de la transition, on souhaite aussi construire à partir de cette simulation une condition limite reproduisant l'impédance acoustique de la section de sortie afin qu'elle soit utilisée pour des calculs 2D URANS. Une seconde simulation est aussi prévue pour caractériser la transition dans le cas d'une géométrie étoilée. Enfin, il est important de se doter d'une méthode résolution du système aux valeurs propres généralisé correspondant à l'approche biglobale en géométrie étoilée qui soit moins gourmande en ressources mémoire. A l'heure actuelle, on ne peut converger les résultats de stabilité que pour des rapports d'aspect courts, ce qui ne facilite pas leur validation. Différentes pistes sont explorées par M. Bouyges. On peut essayer de tirer profit des symétries du système à résoudre pour réduire la taille des matrices à inverser, ou encore modifier l'algorithme d'Arnoldi en limitant au maximum le stockage mémoire.

La problématique des oscillations de poussée et des instabilités qui se développent dans les moteurs à propergol solide est un cas d'étude tout à fait remarquable, et il est regrettable de ne pas pouvoir prolonger les études existantes. Tout d'abord, bien que le problème d'oscillations de poussée soit complexe, il peut être analysé à partir d'une configuration extrêmement simple. Ainsi, dans un conduit avec injection pariétale, on peut facilement étudier le couplage entre un mode acoustique et un mode hydrodynamique. Les questions relatives à ce couplage sont encore nombreuses. Comment s'opère le mécanisme de couplage ? Qui des modes acoustiques ou des modes hydrodynamiques sont les plus réceptifs aux excitations internes à la chambre ? Comment se passe la sélection de modes ? Ensuite, avec cette configuration, on possède un cas simple où l'on peut caractériser une transition laminaire-turbulent consécutive à une croissance modale. A la différence du cas classique de couche limite, les tailles des structures mises en jeu sont grandes et il est relativement aisé de procéder à des mesures. On peut notamment envisager une étude de l'intermittence dans ces conduits. Le travail reste encore important sur ce très beau sujet.

19.2 Actionneur plasma JSP

Peu de temps après ma mutation à Toulouse, j'ai défini une première feuille de route pour la modélisation de l'actionneur JSP. L'objectif était de disposer d'un outil précis qui apporte des informations inaccessibles par la mesure, en particulier la description du fonctionnement aérodynamique dans la cavité de l'actionneur. En m'appuyant sur les travaux du DTIM, j'ai initié le stage de M. Oukacine puis la thèse de F. Laurendeau. Finalement, un modèle dit basse-fréquence, de l'actionneur a été développé et validé par confrontation à plusieurs expériences. Ce modèle a récemment été étendu au cas haute-fréquence mais une étape de validation est encore nécessaire. Ensuite, cet outil doit dans un deuxième temps servir de base au développement d'un modèle réduit ouvrant la voie à la simulation de configurations de contrôles d'écoulements.

Outre les aspects d'intégration de ces dispositifs plasma sur avions, et toutes les questions relatives aux alimentations hautes tensions associées, des questions fondamentales se posent sur le fonctionnement de l'actionneur à haute altitude. Plus précisément, l'hypothèse d'équilibre

thermodynamique locale qui est au cœur de la modélisation adoptée jusqu'ici tombe vraisemblablement en défaut lorsque la pression devient trop faible. Des modifications importantes du modèle sont donc à prévoir pour être en mesure de décrire le fonctionnement à haute altitude. Par ailleurs, il est envisageable de tirer profit des qualités du modèle de dépôt d'énergie qui reproduit bien l'effet d'une décharge d'arc sur l'air environnant pour tenter de définir un nouveau dispositif d'apport d'énergie. Par exemple il a été envisagé de simplement placer deux électrodes à la surface d'une paroi générant des ondes de pressions dans l'écoulement à la manière d'une ns-DBD (Décharge à Barrière Diélectrique Nanosconde) afin de tenter de faire du contrôle de transition. Enfin, on note que l'actionneur JSP est un objet d'étude singulier qui mêle plusieurs physiques. C'est un cas d'application multi-physique très intéressant pour le code CEDRE avec la possibilité de procéder à des simulations mettant en jeu plusieurs solveurs. Avec la qualité des mesures déjà obtenues et avec de nouvelles expériences impliquant la BOS (Background Oriented Schlieren) par exemple, on pourrait certainement enrichir le modèle HF développé en fin de thèse par F. Laurendeau.

19.3 Modélisation de la turbulence

Beaucoup de travaux sont envisageables sur ce thème mais étant donné le contexte de travail qui est le mien et la nécessité d'enrichir le code CEDRE pour des applications multi-physique, la première orientation visée est celle de la modélisation stationnaire des parois non lisses. Outre les parois rugueuses, il existe un besoin fort pour la modélisation des parois poreuses, des liners acoustiques, des parois avec aspiration ou soufflage, des parois multiperforées ou encore des parois catalytiques. La littérature scientifique est déjà riche de nombreux modèles avec cependant un champ d'application souvent limité. A l'instar de ce qui a été fait par B. Aupoix pour la modélisation des parois rugueuses, on souhaite définir des corrections *ad hoc* couplées à des modèles de turbulence standards et utilisables en pratique sur des configurations d'intérêt industriel. Parallèlement, on envisage d'introduire la méthode des éléments discrets dans le code CEDRE pour les applications sur paroi rugueuse. Cette méthode s'appuie sur une double moyenne mêlant moyenne d'ensemble et moyenne volumique. La seconde moyenne vise à prendre en compte les inhomogénéités introduites par la paroi. Une fois disponible dans le code CEDRE, le système d'équations peut tout à fait être adapté à d'autres types de parois, notamment poreuses, la technique de moyenne volumique étant classique pour ce type de paroi, débouchant sur l'équation de Forchheimer et la loi de Darcy. Enfin, bien que les simulations RANS soient encore majoritaires dans l'industrie, il y a une montée en puissance de l'utilisation de modèles instationnaires. En particulier, l'engouement légitime pour les modélisations hybrides RANS/LES nous pousse à adapter les modèles développés en RANS au cas des écoulements instationnaires. On possède d'ores et déjà une approche consistante pour la reconstruction de fluctuations de pressions à la paroi à partir d'un champ RANS. Il reste un travail important de validation de cette approche. On peut cependant remettre en cause certains points de cette approche et proposer des améliorations. En particulier, le fait de négliger le terme source d'interaction turbulence-turbulence de l'équation de Poisson est une hypothèse forte, contestée par certains auteurs. Sa prise en compte est complexe, ce qui explique en partie le recours à cette hypothèse. Par ailleurs, l'utilisation du modèle de spectre de Von Karman est contestable dans la mesure où c'est un

spectre qui décrit une turbulence isotrope alors que l'on cherche à caractériser un spectre de couche limite présentant une forte anisotropie.

Pour conclure, on peut mentionner qu'il existe plusieurs axes de recherche en modélisation de la turbulence, initiés au cours des 20 dernières années au DMAE sous l'impulsion de B. Aupoix, et qu'un certain nombre sont toujours d'actualité. Parmi eux, la construction de modèles de flux de chaleur turbulent, notamment pour des méthodes hybrides RANS/LES, permettant de reproduire l'évolution du nombre de Prandtl turbulent dans toute la région de couche limite et en dehors est un enjeu important. De même, il serait intéressant de poursuivre les efforts faits sur le développement d'un modèle de turbulence avec intermittence de frontière pour répondre aux contraintes des écoulements avec frontière libre.

Sixième partie

Recueil de publications

Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection

F. Chedevergne,^{a)} G. Casalis,^{b)} and Th. Féraïlle^{c)}
 ONERA DMAE, 2 av. Ed. Belin, BP. 4025, 31 055 Toulouse Cedex, France

(Received 19 April 2005; accepted 23 November 2005; published online 12 January 2006)

The hydrodynamic stability of the flow in a solid rocket motor is revisited using a general linear stability approach. A harmonic perturbation is introduced into the linearized Navier-Stokes equations leading to an eigenvalue problem posed as a system of partial differential equations with respect to the spatial coordinates. The system is discretized by a spectral collocation method applied to each spatial coordinate and the eigenvalues are determined using Arnoldi's procedure. A special emphasis is placed on the boundary conditions. The main result is the discrete nature of the eigenvalue set. According to the present theory and the obtained results, only some discrete frequencies may exist in the motor (as eigenmodes). These frequencies only depend on the Reynolds number based on the injection velocity and the radius of the pipe flow. They are compared to measurements that have been performed at ONERA in one case with a cold-gas setup and in another case with a reduced scale live motor. Due to the agreement obtained with both experiments, the biglobal stability approach seems to offer new insight into the unresolved thrust oscillations problem. © 2006 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.2160524]

I. INTRODUCTION

Large solid rocket motors exhibit thrust oscillations under some specific conditions. The amplitude of these oscillations is not very large (maximum 2% or 3% of the mean thrust) and seems to be very sensitive to the environmental conditions; accurate predictions for practical applications are thus not workable up to now. The physical mechanism itself from which the oscillations originate is still not well understood. For about 20 years, several studies have been devoted to this problem. The present paper presents a biglobal approach leading to a model for the theoretical prediction of the observed thrust oscillations.

The published studies can be divided into three groups:

- The first one deals with experimental activities and is itself divided into two subgroups. Experiments with combustion (with the real propellant or a modified one) are on one side, either full scale or using reduced scale motors; so-called "cold-gas" experiments are on the other side. The first ones are obviously more realistic, particularly concerning ambient conditions, such as the pressure, the temperature, the combustion process, and also the slow increase of the cavity volume due to the wall regression. Measurements are not easy in such conditions and only global information is available, usually the steady and the unsteady pressure at the front wall and/or close to the throat. Conversely, setups using gas at ambient conditions work with a constant value of the radius pipe, allow in-flow detailed measurements in addition to the ones similar to those used with combustion.
- The second group contains numerical investigations, mainly by using Reynolds-averaged Navier-Stokes solvers.

Their main advantage is that this approach allows parametric studies in order to analyze for instance the effects of some cavities, their position, their size, the shape of the nozzle, and the presence of protuberances in the flow.

- The last group includes the theoretical activities that aim to provide physical models for the considered problem. The present paper belongs to it.

Let us start with the current state-of-the-art ideas regarding the thrust oscillations. Experiments with combustion show that these oscillations may appear, but only at some instances of the firing. They also show that the frequency of the oscillations, when they exist, is close to that of one of the longitudinal acoustic modes (the fundamental one or one of its first harmonics). As described in Refs. 1–3, the latter is simply obtained as an irrotational mode by considering the motor as an organ pipe. There is then a rotational contribution due to the flow inside, but it does not modify the frequency itself. However, a detailed analysis of the measurements in the presence of significant pressure oscillations shows that the frequency changes with respect to the time; it exhibits continuous paths (the frequency decreases) and abrupt jumps (sudden increase), moving back the frequency to a value that is close to the acoustic mode (see Fig. 1). This behavior (continuous paths and abrupt jumps) may occur several times in the experiments with combustion either in full scale or in reduced scale. The goal of the different works devoted to this purpose is to understand the physical origin of the oscillations, to be able to predict the associated amplitudes, and finally to propose practical solutions in order to remove them or at least reduce them.

Taking into account the exhibited frequency paths, the acoustic longitudinal mode cannot be the single mechanism. During the firing, the geometry changes as mentioned above; the cavity volume increases due to the increase of the chamber radius where the flow takes place. There are other modi-

^{a)}Electronic mail: francois.chedevergne@oncert.fr

^{b)}Electronic mail: gregoire.casalis@oncert.fr

^{c)}Electronic mail: thierry.feraïlle@sonema.fr

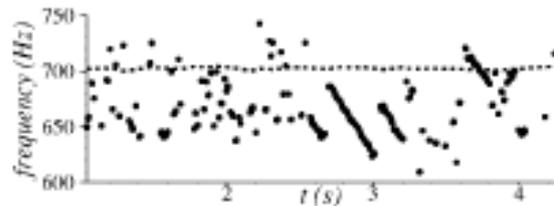


FIG. 1. Time evolution of the frequency of the fluctuation associated to the largest amplitude in symbols. The dashed line represents the frequency evolution of the fundamental cavity mode. The evolution of the latter is due to small variations of the mean quantities. Experiments have been carried out at ONERA with a small scale motor called LP9 (see Ref. 28).

fications that depend on the load structure. As proposed initially by Vuillot,⁴ three possible sources of unsteadiness may be invoked: they are called by the acronyms VSA, VSO, and VSP. VSA (angle vortex shedding) may occur at the upper downstream angle of a block of propellant; at this point the wall ejection is not uniform and may induce hence some shear instabilities. VSO (obstacle vortex shedding) is related to the presence of inhibitors between two blocks that appear to be obstacles inside the flow, inducing an unsteady wake. For a long time, VSO has been believed to be either the main source or the only source of the thrust oscillations. However, their role is not so clear as experiments in combustion with metallic (nonabrasive) inhibitors do not present large oscillations whereas the same configuration without inhibitors does present large oscillations, as experimentally proven in Ref. 5. VSP (parietal vortex shedding) does not come from a geometry irregularity but is a hydrodynamic instability of the flow itself, for which a biglobal approach is described in the present paper.

This instability (VSP) cannot be measured directly in experiments with combustion, but it has been identified in different computations,⁶ for instance, and in cold-gas experiments. The theoretical approach is based on the usual small perturbation technique: a mean (or basic) flow being given (the so-called Taylor flow in the present case as it will be reminded in the following), a perturbation is superimposed without any forcing term in the boundary conditions (the perturbation is assumed to be an eigenmode). Then due to the linearization and to some symmetries of the mean flow, a particular mathematical form for the perturbation is prescribed, leading usually to an ordinary differential equation with respect to the coordinate associated with the normal distance from the injection wall. The first investigations consider the plane geometry and the pioneers are Varapaev and Yagodkin.⁷ As discussed in Ref. 8, their approach is not fully consistent by assuming for the perturbation an exponential dependence with respect to the streamwise coordinate and by keeping at the same time the nonparallel terms induced by the mean flow. However, using the same theoretical approach and again for the plane geometry, the first validation with respect to cold-gas experiments is given in Ref. 9. It is proved that even if not fully coherent the nonconsistent quasi-parallel approach gives results that are in very good agreement with the measurements. A first extension to the cylindrical and more realistic geometry is given in Ref. 10 with a similar approximation for the nonparallel terms. Some gen-

eral comparisons with experimental results are published in Ref. 11. However, in both cases, if the agreement between the measurements and the theoretical results seems to be acceptable, some noticeable differences remain that do not seem to exist in the plane case.

The most probable weakness of the theoretical stability approach used is in relation to the nonparallel effects and consequently to the induced inconsistency. According to the theory used, the critical frequency (the one that crosses first the neutral curve) is about twice as large in the cylindrical geometry compared to the plane case. This leads to a wavelength that is about half its value in the plane case. Thus, one can explain why the nonparallel effects can be more important in the cylindrical case than in the plane configuration. To solve this difficulty the present biglobal approach treats the mean flow as a general function of two spatial coordinates (x and r in the present case). This approach is more general but needs more computational resources than the classical stability theory. Due to the improvement of the computational capacities (the random-access memory and not the speed in our case), the general approach starts to be used for different mean flows. The first application was the laminar Poiseuille flow that may exist in a rectangular duct (see Ref. 12). This configuration has the advantage to be mathematically well posed with respect to the boundary conditions, therefore, it plays the role of a test case for code validation. The stability analysis for this flow has been revisited successfully (see Ref. 13 and later in Refs. 14 and 15). Then the laminar boundary layer on an infinite swept wing in the neighborhood of the attachment line has been investigated by some contributors (see Refs. 13 and 16). Other flow configurations have been analyzed using this technique such as a separation bubble in a boundary layer.¹⁷ In these configurations, at least one of the boundaries is not a physical one and thus "ad hoc" conditions must be imposed on it (see Refs. 16 and 18) as it is also routinely done for Navier-Stokes computations with exit boundary conditions.

We also developed a code to be applied to strongly nonparallel flows and validated it (see Ref. 19) in comparison with previous studies.^{16,18} The present flow induced by wall injection, however, has not been investigated previously by the general approach; to our knowledge, this is the first contribution.

The present paper starts with a description of the physical model including the geometry, the mean flow under investigation, and a short summary of the standard linear stability approach, which is not consistent in the present case as explained above. Then, a short description of two experimental setups is given, one with cold gas, the other with a small scale solid propellant motor. Finally, the biglobal approach is detailed, first with the governing equations and boundary conditions, then with the numerical procedure. A special emphasis is made on the nonphysical boundary exhibited in the present configuration. Finally numerical results are given in comparison with the experimental ones.

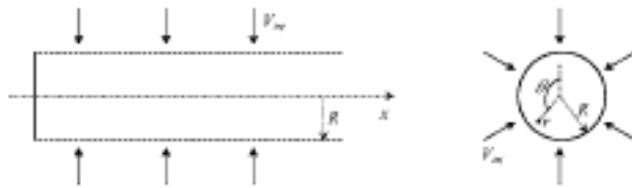


FIG. 2. Cylindrical coordinate system (r, θ, x) . Flow is injected through the cylindrical wall located at $r=R$ with the injection velocity V_{inj} . The pipe is bounded by a solid wall located at $x=0$.

II. PHYSICAL MODEL

The description given below corresponds directly to the flow existing in a cold-gas setup. The application to a live motor is explained in the last part of this section.

A. Geometry

The configuration considered is a cylindrical pipe; the base is circular of radius R . The coordinate system is the usual cylindrical one (r, θ, x) as indicated in Fig. 2. The pipe is limited by a hermetic front wall located at $x=0$ and is supposed to be very long in the direction of positive values of x . Through the cylindrical wall, flow is injected and it is assumed that the injection velocity denoted by V_{inj} is uniform (independent of x and θ), constant (independent of the time t), and normal to the wall. In some conditions, e.g., in live motors, the radius and the injection velocity vary with respect to time, but due to the different involved time scales, both quantities can be confidently assumed to be constant, see Sec. II E 3 for more details.

B. Governing equations

The flow is assumed to be an incompressible viscous fluid, so that the dimensionless velocity vector $\underline{U}=(U_r, U_\theta, U_x)$ and the dimensionless pressure P satisfy the standard Navier-Stokes equations

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \underline{U} \cdot \underline{U} + \nabla P &= \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta \underline{U}. \end{aligned} \quad (1)$$

In these equations the distances, the velocity components, the time and the pressure have been made dimensionless thanks to, respectively, the radius R , the wall injection velocity V_{inj} , R/V_{inj} and ρV_{inj}^2 , where ρ is the flow density that is assumed to be constant. It remains the Reynolds number $\mathcal{R}e$ based on the injection velocity and the radius R . Associated with this system (1), the following boundary conditions are imposed:

$$\begin{aligned} \forall x, \theta, t \quad U_r(R, \theta, x, t) &= -1 \quad U_\theta(R, \theta, x, t) = U_x(R, \theta, x, t) = 0, \\ \forall r, \theta, t \quad U_r(r, \theta, 0, t) &= U_\theta(r, \theta, 0, t) = U_x(r, \theta, 0, t) = 0, \\ \forall x, \theta, t \quad \underline{U}(0, \theta, x, t), |P(0, \theta, x, t)| &\text{bounded}, \end{aligned} \quad (2)$$

expressing the uniform normal injection, the no-slip condi-

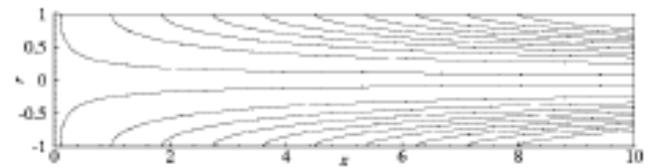


FIG. 3. Some streamlines corresponding to the Taylor-Culick basic flow (3).

tion at the front wall, and the regular behavior at the axis $r=0$ where the cylindrical coordinate system is ill posed.

C. Mean flow

The previous system (1)+(2) is used for the stability problem. Concerning the mean flow, there are three main types of solution depending on possible approximations of Eqs. (1) and of the boundary conditions (2):

- (1)+(2): only CFD solutions can be found, as far as the authors know.
- (1)+(2) without the no-slip condition at the head end $x=0$: a self-similar solution has been found by Berman.²⁰
- (1) inviscid (Euler equations)+(2) without the no-slip condition at the head end $x=0$: an exact (self-similar) analytical solution exists,

$$\left. \begin{aligned} U_r^{(b)} &= -\frac{1}{r} \sin \frac{\pi r^2}{2} \\ U_x^{(b)} &= \pi x \cos \frac{\pi r^2}{2} \end{aligned} \right\} P^{(b)} = -\frac{\pi^2 x^2}{2} - \frac{1}{2r^2} \sin^2 \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) + P_0, \quad (3)$$

with P_0 a constant. It is the so-called "Taylor" flow. Some streamlines associated with the Taylor flow (3) are plotted in Fig. 3. As expected, the streamlines come from the wall. The figure also shows that for large values of x , the streamlines become more or less parallel. In a region very close to the wall, however, the flow is strongly nonparallel.

In Ref. 10, comparisons between the last two solutions show that they are nearly identical for $\mathcal{R}e$, typically greater than 1000. The classical stability approach applied to these two solutions leads of course to the same observation. Table I provides numerical values obtained by the biglobal approach (see Sec. III) for a small Reynolds number using the last two solutions of the mean flow. It clearly shows that the choice of the mean flow weakly affects the stability results. The higher the Reynolds number is, the lower the difference is. In practice, the results are computed for $\mathcal{R}e$ of greater than 1000 so that the effect is considered to be negligible.

Concerning the first type of solution (CFD), numerical results obtained by Lupoglazov and Vuillot in Ref. 6 and by others show that, except in a region very close to the head end, the mean flow coincides with the other solutions (for $\mathcal{R}e \geq 1000$). Actually, close to the head end, the problem is not completely solved (as discussed in a private communication with Vuillot). Consequently, only the two self-similar solutions can be confidently used for biglobal stability analysis.

TABLE I. Comparison between stability modes computed with the viscous and the inviscid self-similar mean flow.

	$\mathcal{R}_e=100$		$\mathcal{R}_e=500$		$\mathcal{R}_e=1000$	
	Inviscid	Viscous	Inviscid	Viscous	Inviscid	Viscous
Mode 1	7.059–6.792i	7.114–6.812i	5.912–5.333i	5.921–5.340i	5.478–4.931i	5.482–4.934i
Mode 2	12.547–9.726i	12.607–9.723i	10.892–7.485i	10.906–7.488i	10.189–6.813i	10.196–6.815i
Mode 3	17.083–12.419i	17.134–12.421i	15.224–9.451i	15.240–9.453i	14.378–8.549i	14.386–8.551i
Mode 4	21.114–14.854i	21.140–14.871i	19.060–11.331i	19.075–11.336i	18.130–10.258i	18.139–10.261i

D. Classical linear stability theory

Based on the small perturbation technique, the standard linear stability theory is now widespread in several fluid mechanics configurations; see Ref. 21 for a recent and detailed review. More specifically, the case of the flow induced by wall injection (or suction) has been investigated both for small Reynolds numbers in Refs. 22 and 23 and for large Reynolds numbers (the present case); see Ref. 24 for a review. The principle is to assume that the actual flow consists in the superposition of the considered basic flow, given by (3) and identified by the superscript (b) and of an unknown perturbation. This is imposed by

$$\underline{U} = \underline{U}^{(b)} + \underline{u}, \quad P = P^{(b)} + p, \quad (4)$$

with \underline{u} and p the velocity field and the pressure of the perturbation, being *a priori* general functions of (r, θ, x, t) . In the linear approach the amplitudes of \underline{u} and p are supposed to be very small in comparison with the ones of $\underline{U}^{(b)}$ and $P^{(b)}$. The superposition is introduced in the governing system (1)+(2) and, with the linear assumption, nonlinear terms with respect to perturbation quantities are neglected. The following systems are then obtained:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla U^{(b)} \cdot \underline{u} + \nabla u \cdot \underline{U}^{(b)} + \nabla p &= \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta \underline{u}, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \forall x, \theta, t \quad \underline{u}(R, \theta, x, t) &= 0 \\ \forall r, \theta, t \quad \underline{u}(r, \theta, 0, t) &= 0 \\ \forall x, \theta, t \quad \|\underline{u}(0, \theta, x, t)\|, \|p(0, \theta, x, t)\| &\text{bounded.} \end{aligned} \quad (5b)$$

The zero perturbation is of course a solution. However, in many cases, a nonzero solution exists; it is called an eigenmode. Roughly speaking, if the latter increases with respect to time (it is assumed to have a very small amplitude at the beginning in order to allow the linear treatment) the basic flow is claimed linearly unstable whereas conversely if it decreases the basic flow is claimed to be linearly stable. Usually in practice, only some of the eigenmodes are amplified thus determining “dangerous” frequencies, wavelengths, or other parameters related to the amplified eigenmodes.

Then, influenced by the mean flow velocity, which acts as coefficient in the linear system (5a), the mathematical form of the perturbation is prescribed. The approach proposed in the present article is actually, to the best of our knowledge, new for the Taylor flow with respect to this form (see Sec. III).

The classical theory assumes that the mean flow is quasiseparable. This leads to the nonconsistent approach with the usual normal mode form for any fluctuating quantity q :

$$q = \bar{q}(r) e^{i(kx + m\theta - \omega t)}, \quad \omega = \omega_r + i\omega_i, \quad (6)$$

with m an integer, k a real number (in the framework of the temporal theory), and ω a complex number, its real part corresponding to the circular frequency and its imaginary part to the temporal growth rate. The amplitude function \bar{q} is a function of r only. Introducing this particular normal mode form into (5a) leads to a system of ordinary differential equations (ODEs) with respect to r . The boundary conditions (5b) are written in terms of the amplitude functions, except for the no-slip condition at the head end, which cannot be satisfied.

As shown in Ref. 9, this approach is in very good agreement with the measurements performed in a cold-gas setup in the case of a duct with a rectangular section and for not too small distances from the head end ($x=0$). The main result is a range of frequencies that are highly (actually exponentially) amplified with respect to x . Concerning the more relevant axisymmetric configuration, the agreement is not very good with the experimental results (see Ref. 10).

The shortcomings of this classical approach are as follows:

- it is not consistent;
- it can be applied only for large values of x independently of what happens for other values of x and consequently the boundary condition at $x=0$ in (5b) cannot be satisfied;
- it is less suitable in axisymmetric configurations than in planar cases.

In order to overcome these difficulties, a global stability approach (consistent) is proposed and will be detailed in Sec. III. The remaining part of the present section is devoted to the description of two different experimental setups for the subsequent comparisons that will be done at the end of the present paper.

E. Experimental setups

1. The VALDO cold-gas facility

Experimental investigations have been carried out using the so-called VECLA setup for which the section is rectangular; some results can be found in Ref. 9. VALDO is based on the same principle: cold gas is injected through a porous wall, but has a circular section, which is more realistic for

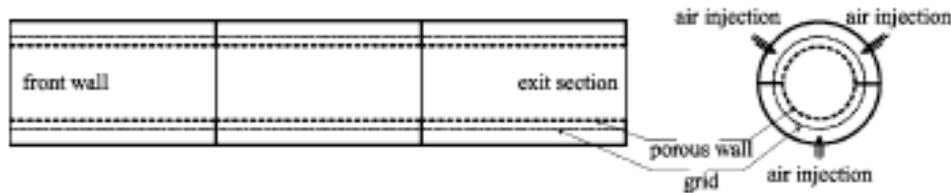


FIG. 4. Schematic view of the VALDO setup. Air is injected in the three (two, three, or four) elements; a grid aims to spread out the injected air. Finally air is injected in the cavity through a porous wall.

comparisons with real solid rocket motors. Similar setups have been previously used (see Refs. 11 and 25 or Ref. 26).

VALDO is located at ONERA in Palaiseau; the experiments are carried out by G. Avalon. A detailed description of the setup may be found in Ref. 27; only the main characteristics are given below. There are four identical elements (only one is equipped with a pressure probe and a hot wire), the length of each being 168 mm and the inside diameter 60 mm. VALDO may operate with two, three, or four elements, leading to a total length of 336, 504, or 672 mm. The structure of the interior wall is a porous (porosity $2 \mu\text{m}$ in the present case). Air is injected at three different azimuthal angles for each element used and is assumed to be spread out uniformly with respect to the axial direction and the azimuthal one thanks to a grid placed between the external structure and the porous (see Fig. 4). Finally the air is injected inside the cavity at the injection velocity V_{inj} with a direction assumed to be normal to the wall and with a norm assumed to be constant in space.

The exit section can be either free (air goes directly in the atmosphere) or equipped with a (sonic) throat. The injection velocity can be varied directly in the first case and in the second case by a needle, placed in the middle of the throat, which has a varying section and which can be moved more or less in the axial direction. Changing the critical section forces a change of the mass flow rate and thus of the injection velocity. Typical values of the injection velocity and the corresponding Reynolds number \mathcal{R}_e are given in Table II.

In this cold-gas facility, direct measurements in the flow are possible; they are performed with a hot wire. When a throat is mounted at the exit section, only very few positions in x are available for this measurement, each one corresponding to one position of the equipped element. When the exit section is free, a long shaft, carrying the hot wire probe, is introduced through the exit and may be moved all along the pipe. In addition, the instantaneous pressure is measured at the front wall and close to the exit section. The data acquisition is done during 1 s at a rate of 4000 points per second. The signal is then filtered between 50 Hz and 2000 Hz. Fi-

TABLE II. Typical operating conditions using VALDO, air is at ambient conditions so that the kinematic viscosity is about $\nu=15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. The radius of the pipe is $R=30 \text{ mm}$.

Free exit section	With a throat
$V_{\text{inj}}=0.84 \text{ m s}^{-1}$, $\mathcal{R}_e=1680$	$V_{\text{inj}}=0.55 \text{ m s}^{-1}$, $\mathcal{R}_e=1100$
$V_{\text{inj}}=1.05 \text{ m s}^{-1}$, $\mathcal{R}_e=2100$	

nally a spectral analysis is performed using the spectrogram method applied to the 2048 first points of each acquisition. This procedure leads to the FFT of the fluctuating velocity and pressure, as it will be presented below.

2. The reduced scale solid rocket motors LP9

As explained in Sec. I, several sources are mentioned as being responsible for the thrust oscillations observed in large solid rocket motors. In order to prove the key role played by the hydrodynamic instability considered in the present paper, simple motors have been investigated for some years at ONERA Le Fauga-Mauzac centre by M. Prévost and his colleagues (see Ref. 28). Numerous configurations have been investigated. In this paper only the so-called LP9-15 will be analyzed. It corresponds to a very simplified geometry of the European launcher Ariane 5 boosters, the scale being 1/35. A schematic view is given in Fig. 5. In this configuration, there is a free cavity upstream close to the front wall and there are two cylindrical blocks of propellant. There is no cavity in the vicinity of the nozzle at the exit. On the other hand, there is a small cavity between the two blocks and it must be noted that a varnish is put on the lateral surfaces of the propellant block so that it may be expected that combustion does not occur on this lateral surface. The combustion generates a flow with a small injection velocity normal to the wall (close to 1 m/s). The velocity components of the mean flow are very close to the ones given in (3), as demonstrated by different numerical simulations; see, e.g., Refs. 4 and 29. In addition, these computations show that, except in a zone very close to the propellant surface, the pressure and the temperature in the cavity are roughly uniform. This explains why there is no real coupling between the dynamics and the energy equation. The effects of laminar premixed flame oscillations are limited to a thin region above the burning surface as shown in Refs. 30 and 31. The flow velocity is very close to the incompressible solution and the stability analysis can also be performed using the incompressible approximation.

At the beginning of the firing, the radius of the cavity is 20 mm; at the end, which occurs 4 s later, the radius is 42.5 mm.

3. About the unsteady effects

Two types of experiments have been performed: one cold-gas set up (VALDO) with a fixed geometry and a small scale solid propellant motor (LP9). As explained above, the first setup has been used either in static conditions (fixed injection velocity) or in dynamic conditions (variable injec-

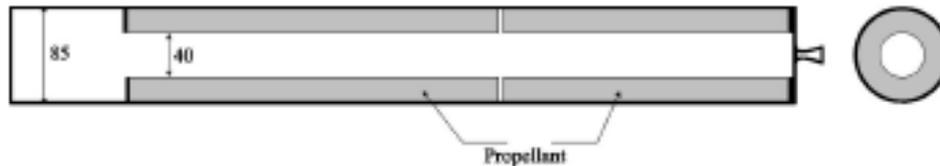


FIG. 5. Schematic view of the LP9 setup for the firing 15. The sizes are in mm.

tion velocity), whereas the geometry in a live motor is necessarily unsteady (decrease of the propellant quantity inside the cavity). From a theoretical point of view an exponential dependence in $\exp(-i\omega t)$ for the perturbation in a linear approach is justified in static conditions, when the geometry and the mean flow are really steady.

Concerning the dynamic experiments, this exponential dependence may appear questionable. In fact, as it has been shown in Ref. 32, the time scale that is associated with the increase of the geometry in a live motor (small scale and full scale) is larger than the time scale associated with the first longitudinal acoustic mode (small scale motor). As mentioned above, 4 s corresponds to an increase of nearly 20 mm, so that a 1% increase of the geometry needs 0.04 s, which is significantly larger than the 1/700 s associated with the time scale of the acoustic mode (see Fig. 1). The same is true for the injection velocity variation in VALDO. The increase of the injection velocity from 0.6 to 2 m/s is performed in about 30 s. Thus, a 1% increase of the injection velocity takes 0.43 s, which is very slow compared to the characteristic time (1/400 s) of the main phenomenon (detailed in Sec. III D; see Fig. 12).

Thus, in terms of a regular WKB approach, the exponential dependence for the fluctuation corresponds to the leading order terms. In Ref. 32 one additional term has been calculated (in the framework of the nonconsistent approach), whose influence can be confidently neglected. In the following the basic flow will be considered as steady even for the (weakly) unsteady experiments.

III. BIGLOBAL STABILITY ANALYSIS

A. Eigenvalue problem

The goal of this section is to describe the biglobal approach used to solve the problem composed by the linearized Navier-Stokes (LNS) system (5a) and by the boundary conditions (5b).

1. Differential equations

As explained above (see Fig. 3), the Taylor flow is nonparallel. The idea of the proposed biglobal stability approach is to perform an analysis that is as general as possible for a fully nonparallel basic flow. As the coefficients of the LNS system do not depend on t and θ , any perturbation $q = (u_r, u_\theta, u_x, p)$ can be searched with the following form:

$$q = \hat{q}(x, r) e^{i(m\theta - \omega t)} m \in \mathbb{N}, \omega \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

where m stands for the azimuthal wave number. The real part ω_r of ω is the dimensionless circular frequency and the imaginary part ω_i is the temporal growth rate. The classical

approach (6) has an explicit x dependence (in relation with the parallel assumption), whereas the proposed one does not assume anything for the x dependence.

This study is limited to the axisymmetric modes given by $m=0$ and so, in the following, one mode will be completely identified by the complex number ω . If $m=0$, and so $\hat{a}_\theta=0$, a streamfunction can be defined such that

$$\hat{a}_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r}, \quad \hat{a}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}. \quad (8)$$

Then the LNS system (5a) leads for the differential equations to a scalar equation written for the streamfunction:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial (\mathcal{L} \hat{\phi})}{\partial x} - r \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \mathcal{L} \hat{\phi} \right) + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] - r \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{Re} \mathcal{L} (\mathcal{L} \hat{\phi}) = i\omega \mathcal{L} \hat{\phi}, \quad (9)$$

where

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

is a linear operator and Ψ is a streamfunction of the mean flow. Relation (9) is a partial differential equation (PDE) of order four in r and x and must be solved in a domain Ω in the (x, r) plane. The chosen domain is $\Omega = [0, X_e] \times [0, 1]$, where X_e stands for an artificial exit section. This equation leads to an elliptic problem and will be associated with boundary conditions on all the boundaries.

2. Boundary conditions

On the front wall $x=0$ and on the porous wall $r=1$, the no-slip conditions written in (5b) are imposed. Using (8), the conditions are

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}(0, r) = 0, \quad \hat{\phi}(0, r) = 0; \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r}(x, 1) = 0, \quad \hat{\phi}(x, 1) = 0, \quad (10)$$

choosing an integration constant equal to zero. There are different ways to impose the last boundary condition of (5b) on the axis $r=0$. First, one can use a Taylor series expansion of about zero. Second, given the symmetry of the problem, one can show that $\hat{\phi}$ has to be an even function with respect to r that vanishes on the axis. The two approaches are equivalent and lead finally to

$$\hat{\phi}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial r^2}(x,0) = 0. \quad (11)$$

It remains a condition to be imposed at the exit $x=X_e$. The chosen exit condition is simply a linear extrapolation in the streamwise direction x . If N_x is the number of points used to discretize the domain Ω in the streamwise direction (e.g., $X_{N_x}=X_e$) then the condition can be written as

$$\begin{aligned} \nabla r \hat{\phi}(X_{N_x}, r) &= \frac{X_{N_x} - X_{N_x-2}}{X_{N_x-1} - X_{N_x-2}} \hat{\phi}(X_{N_x-1}, r) \\ &+ \frac{X_{N_x-1} - X_{N_x}}{X_{N_x-1} - X_{N_x-2}} \hat{\phi}(X_{N_x-2}, r). \end{aligned} \quad (12)$$

In Sec. III B some comments are given about the validity of such a condition.

Once the problem is well posed, a spectral collocation method (see Ref. 33) based on the Chebyshev polynomials is used to solve numerically the problem (9)+(10)+(11)+(12). Each function of $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_x, \hat{p})$ is decomposed on the base of the Chebyshev polynomials for the two variables x and r . So the linear system can be written as an algebraic system defining a generalized eigenvalue problem:

$$\underline{A} \underline{\hat{\phi}} = \omega \underline{B} \underline{\hat{\phi}}, \quad (13)$$

where $\underline{\hat{\phi}}$ represents an arrangement of the discretized points of the streamfunction $\hat{\phi}$. Now, the difficulty consists in finding the eigenvalues and eigenvectors of (13). In spite of the spectral accuracy, which allows to use only a low number of points in the domain, the matrices size remains large to ensure the convergence (basically, of the order of $10\,000 \times 10\,000$). It is not possible to get the entire spectrum of (13), and so the well-known Arnoldi procedure³⁴ (where the size of Krylov subspaces is equal to 200) is used, providing only a few eigenvalues around a given target. The last step consists in identifying the physical eigenvalues among those coming from the computation and further focusing on the most amplified ones (largest values of ω_i). Fortunately, the interesting eigenvalues seem to be isolated from the others.

B. Some comments on the questionable boundary conditions

Some boundary conditions are questionable: the exit condition, the head end boundary condition, and the choice of the integration constant for $\hat{\phi}$.

There is no physical condition that can be imposed in $x=X_e$. Nevertheless, choosing an appropriate exit condition is crucial to make the calculation feasible and relevant. It is expected that for a sufficiently long domain Ω , the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions are independent of the value of X_e and of the condition imposed at this exit section.

Many kinds of conditions have been tried, but just a few of them fulfill the previous requirement. For instance, a buffer domain has been added where the elliptic original problem has been turned into a parabolic one. This technique leads to unsatisfying results. Another failure arises by forcing

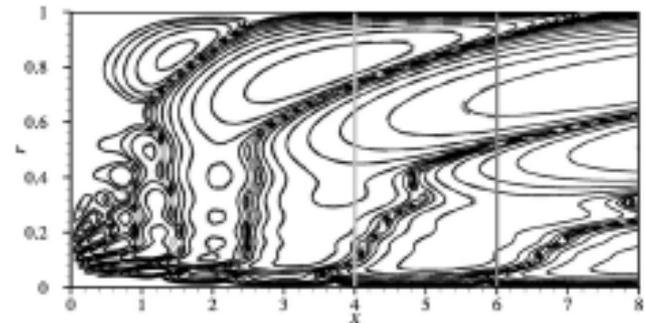


FIG. 6. Contours of $|\hat{\phi}|$ for the mode $\omega_r = 20.83$, $Re = 2100$, and for three calculations: $X_e = 4, 6$, and 8 . $X_e = 4$ corresponds to the (colored) thick lines, $X_e = 6$ to the dashed lines, and $X_e = 8$ to the thin lines. In order to see the different details, the aspect ratio is not respected.

an exponential x dependence as defined in the classical stability approach (6). The tried condition is $(\partial \hat{\phi} / \partial x) - ikX_e \hat{\phi} = 0$, with k the wave number computed for the abscissa X_e and for a given complex number ω .

Up to now, the only kind of condition that gives satisfactory results is the polynomial extrapolation, and particularly, the linear extrapolation written in (12). Previously, this condition has been successfully applied for nonparallel flows; see the pioneering study by Lin and Malik¹⁶ and by Theofilis³⁵ for a recent and complete review on these flows. In the present case with this condition, the results are independent of the value of X_e as long as the eigenfunctions are decaying in the streamwise direction or are slowly growing. This arises for the first modes ω_r lower than about 25 (depending on the Reynolds number Re ; here $Re = 2100$). Let us give an example. Three values of X_e have been tested: 4, 6, and 8 for a Reynolds number equal to 2100, for 120 points in x and 120 in r . The eigenvalue $\omega_r = 20.83$ has been found to be independent of X_e . Furthermore, looking at the absolute value of the real part of the corresponding streamfunction $|\hat{\phi}|$ (see Fig. 6), it seems that the different contours are superimposed, except in a region very close to the chosen exit. For large values of ω_r , as the problem is elliptic and as the eigenfunctions are exponentially growing with respect to x , the linear extrapolation modifies the eigenfunction in the neighborhood of X_e . The longitudinal growth is only locally changed around the exit X_e due to the linear extrapolation. Consequently, the eigenvalues ω are weakly affected. This nonzero dependence is not observed in the swept attachment line case; see Refs. 16 and 35. However, in this case, the streamwise growth is polynomial. The local modification of the longitudinal growth due to the linear extrapolation is weaker than in the present case where the amplification is exponential. Finally, the modifications on the values of ω are sufficiently weak to be confident with the independence of the truncated domain length. (A 40% increase of X_e makes ω_r decrease by less than 1%.) Thus, due to the observed independence of the artificial boundary condition, relation (12) has been used for all the following results.

The second point concerns the head end boundary condition. This problem has two different aspects that deal with the main flow and with the calculated perturbation itself. The

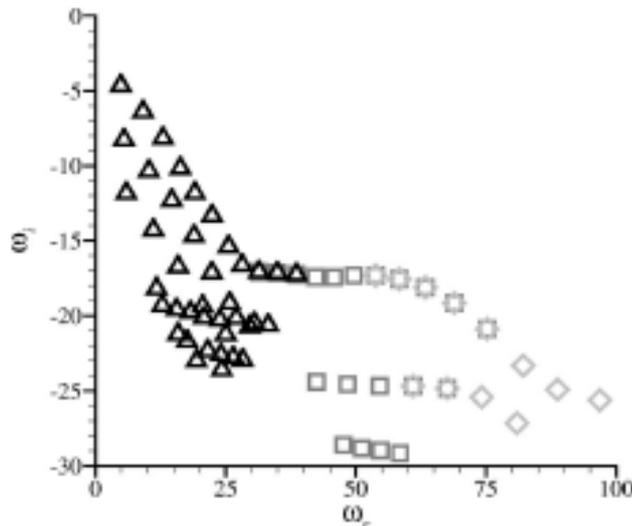


FIG. 7. Eigenvalue spectrum for $Re=2100$, $Xe=4$, and three different targets. All the eigenvalues obtained with a given target are represented by the same symbol. There is a perfect overlapping between the three computations.

first aspect has been previously discussed (see Sec. II C). More details are, however, given below. The two self-similar solutions do not satisfy the no-slip condition at $x=0$ (the radial velocity component is not zero) whereas it does at the injection wall. CFD laminar Navier-Stokes calculations³⁶ show that the Taylor profile is recovered in a region very close to the head end (which depends on the Reynolds number; $x=0.1$ for practical applications). As the mean flow components are the coefficients of the system (5a), only a few matrix coefficients of \underline{A} would be weakly changed if the no-slip condition at $x=0$ was taken into account in the mean flow. Thus, the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions can be assumed to be slightly affected by this choice of mean flow.

Now that the Taylor solution is chosen to be the mean flow, it could be interesting to look at a perturbation that satisfies the same set of boundary conditions, in particular, a perturbation that is symmetric with respect to x as is the Taylor flow. In that case the problem can be solved with two different approaches (see Appendix): using an ODE-based approach or the biglobal approach described above. The results are the same. This validates our biglobal stability code. However, modifying a boundary condition for the perturbation makes the problem completely different. The obtained solutions are not observed in the experiments, and it can be concluded that the no-slip condition at the head end for the perturbation is a crucial condition.

Finally, it appears that the no-slip condition at the head end plays a major role for the computation of the stability results only because of its effect on the calculated perturbation but (probably) not because of its effect on the mean flow.

Another questionable point related to the boundary conditions is the condition $\phi=0$ on the walls. Actually ϕ could be any constant ϕ_0 on the walls. Nevertheless, our numerical procedure is more efficient by choosing $\phi_0=0$. However, an-

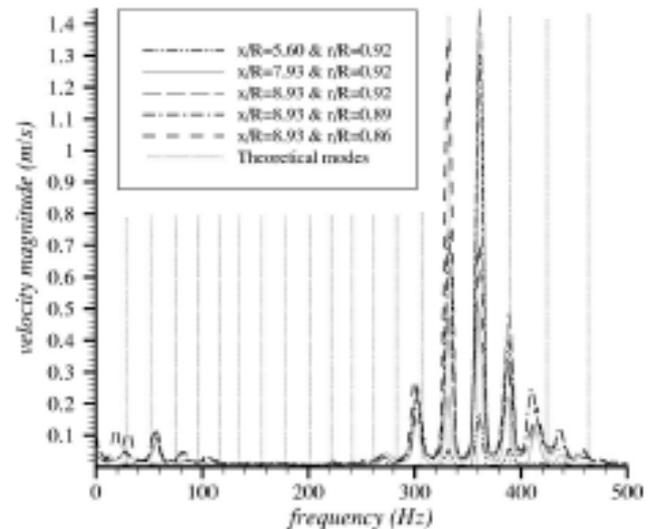


FIG. 8. Comparison between the measured frequencies in VALDO corresponding to five different positions of the hot wire and the dimensionalized theoretical modes.

other formulation has been introduced. It consists in writing the system with two variables $U=\partial\hat{\phi}/\partial r$ and $V=\partial\hat{\phi}/\partial x$ satisfying Eq. (9) and a coupling equation that is just the commutativity of the partial derivatives with respect to r and x . This second system gives the same results as the previous formulation. Therefore, in the following the formulation used to perform the calculations will not be mentioned.

C. Results

In the following comparisons with the experimental results, the computed circular frequencies ω_r will be turned into dimensionalized frequencies using the formula

$$f = \frac{V_{inj}}{2\pi R} \omega_r. \quad (14)$$

There is thus a linear relationship between f and ω_r with a coefficient equal to $V_{inj}/2\pi R$.

This section is divided into two parts, whether V_{inj} and R are fixed in time or not. First, static results will be explored and compared to the measurements issued from the VALDO facility. They correspond to a constant coefficient in the previous relationship (14). Conversely, associated with a variable coefficient, a dynamic study will be performed using the different experimental results coming from VALDO and LP9 setups.

1. Static results

The results (eigenvalues and eigenfunctions) depend on the value of the Reynolds number Re only. This Reynolds number Re is based on the radius R and the velocity injection V_{inj} . Thus, Re is a constant and the whole set of eigenvalues, called a spectrum, is fixed. A typical spectrum, obtained for $Re=2100$, is shown in Fig. 7 in the (ω_r, ω_i) plane. It has been obtained with three different targets in the Arnoldi procedure. There are two remarkable points for this spectrum.

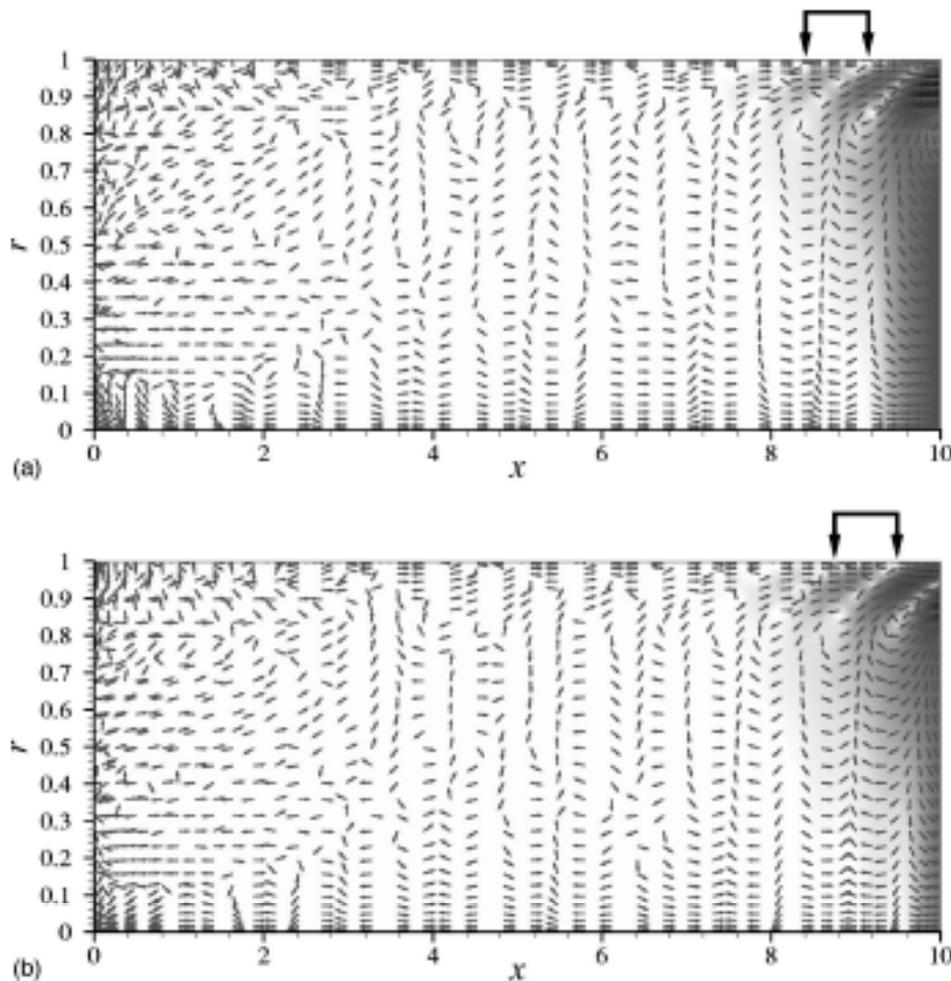


FIG. 9. Velocity field and rms velocity filled contours of the eigenfunction associated to the mode $\omega_r=63576$ ($f=360$ Hz) computed for $X_c=10$ and $Re=2100$.

First, the spectrum exhibits discrete eigenvalues (at least for the most amplified ones). Thus, according to the present biglobal approach only a discrete set of values of the circular frequency ω_c of the perturbation can be expected in the considered flow. This is a strong difference between the biglobal approach (which will be referred to as 2D) and the classical monodimensional theory (referred to as 1D) that exhibits a continuous spectrum. It also implies that the frequency signature of the perturbation remains the same in any spatial location (x, r) of the domain Ω .

Figure 8 shows a FFT transform of five measured rms velocity signals. Each of them comes from a different spatial location (x, r) of the hot wire. As indicated in the legend, three values of x at a given radial position r and three values of r at a given distance x are considered. In addition to these five experimental results, the discrete calculated frequencies are indicated by vertical dashed lines. For this comparison, the injection velocity is $V_{inj}=1.05$ m/s, which yields the Reynolds number $Re=2100$ (the radius is 30 mm) used for the stability computation. This figure shows first that the measured frequencies are organized as discrete thick peaks that are independent of x and r . Furthermore, these peaks belong to the set of the 2D modes, and the matching is very

satisfactory. The pressure measured at the front wall and at the exit section exhibits exactly the same peaks. With this 2D approach, it is thus now possible to predict the set of frequencies that can develop in the Taylor flow.

Second, all the eigenvalues have a negative imaginary part ω_i , which means that all the associated modes are temporally stable. However, some of the associated eigenfunctions are spatially growing. In particular, for $Re=2100$ and ω_c of greater than 25, all the eigenfunctions are exponentially growing in the streamwise direction x . For one mode, there are two opposite effects. On one hand, the perturbation amplitude is decreasing when time goes on. On the other hand, there is an exponential growth in the streamwise direction. However, due to the temporal damping, a continuous external excitation must exist to explain the existing measured peaks. In this sense and according to the present stability approach, the VSP cannot be an intrinsic instability, but an extrinsic one.

Let us give some comments on the numerical convergence of the presented results for enough collocation points in both directions. On the one hand, the values of the circular frequencies ω_c are weakly dependent on X_c . On the other hand, the values of the temporal growth rates ω_i are slowly

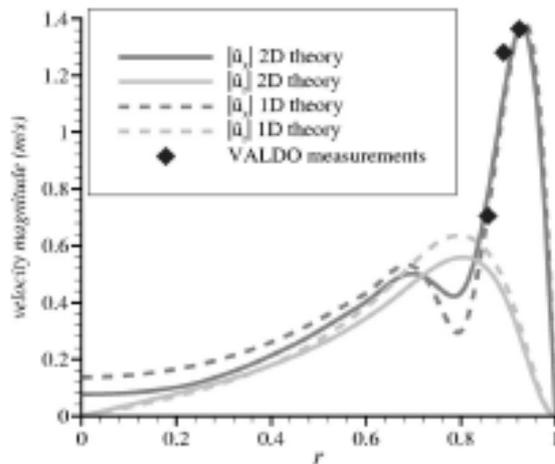


FIG. 10. Radial cut of $|\hat{u}_x|$ and $|\hat{u}_r|$ for the two theories ($x=8.93R=238$ mm, $\omega_r^{1D}=64$, $\omega_r^{2D}=63.576$, $\mathcal{R}e=2100$). The experimental values are plotted as symbols.

increasing with increasing values of X_e . However, they remain always negative. In the following only the values of the frequencies and the sign of the growth rate are taken into account.

Concerning the eigenfunctions, a remarkable characteristic is that the modes behave as progressive 2D waves for large values of x , typically for $x \geq 5$. When adding the time dependence $e^{-i\omega t}$ to the perturbation amplitude $\hat{\phi}(x, r)$, waves can be observed which move along the streamlines of the mean flow. This is roughly illustrated by Figs. 9(a) and 9(b). They represent the velocity fields of the mode $\omega_r=63.576$ ($f=360$ Hz) computed with $X_e=10$ and for $\mathcal{R}e=2100$. Two instants are plotted. For the sake of clarity, the velocity fields are drawn artificially using the same size for all the vectors, whereas the rms velocity contours give access to the longitudinal exponential growth of the velocity perturbation field (the darkest, the most amplified). For $8 < x < 10$ and near $r=1$, one recognizes the typical shape of the parietal vortex shedding (VSP) that has been computed with different Navier-Stokes solvers (see, for instance, Ref. 6). Between the two instances one can see the progression of the wave front that is nearly plane for $x \geq 5$. For small values of x , there is a complex organization of the velocity field. It is important to note that in the 1D theory regarding the x direction, the perturbation is searched with a wave dependence expressed by Eq. (6), whereas in the 2D approach the obtained progressive waves are only a consequence of the computation.

For large values of x , the radial shape of the perturbation is expected to be close to that of the 1D theory given that the mean flow is nearly parallel. A radial cut at $x=8.93$ of the longitudinal and radial velocity magnitude is plotted on Fig. 10 for both the 1D and the 2D theories. Both approaches provide eigenmodes with an arbitrary amplitude (linear approach). For comparison, a normalization is required. In Fig. 10, the magnitude of $|\hat{u}_x|$ for both approaches is adjusted in order to match the measured value at $r=0.92$. The radial evolution of the velocities is roughly the same for the two approaches, especially near the injection wall. This result

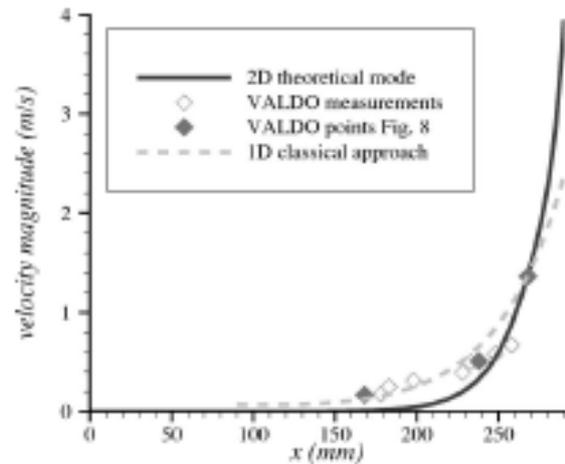


FIG. 11. Comparison of the longitudinal evolution of the rms velocity between the VALDO measurements, the 1D theory, and the 2D approach ($r=0.92R=27.7$ mm, $f=360$ Hz, which corresponds to the 2D mode $\omega_r=63.576$, $V_{inj}=1.05$ m/s, that is, $\mathcal{R}e=2100$). The filled symbols represent the points of Fig. 8 for $r=0.92R$.

confirms the previous conclusion: the 2D mode behaves like a 1D mode for large values of x . However, this is true for a given frequency. Let us recall that the 1D approach provides a continuous range of frequencies while the 2D approach only provides a discrete set.

Finally, the longitudinal evolution of the perturbations is explored. Figure 11 gives an example at $r=0.92$ for the two approaches in comparison to the available experimental results. The 2D computation is performed for $X_e=10$ and again for $\omega_r=63.576$ and $\mathcal{R}e=2100$. The arbitrary theoretical amplitudes of the 2D and 1D results are chosen in order to coincide with the measuring point $x=8.93$. The axial growth rate is well predicted by the 2D theory, especially for large values of x , whereas the 1D theory gives better results for small values of x . Nevertheless, for small values of x , the rms measured signal for one specific frequency is weak compared to the surrounding noise. As mentioned before, the perturbation exhibits an exponential growth with respect to x for large frequencies ($\omega_r > 25$). Thus the present computation has taken into account several orders of magnitude for the perturbation. There is a 10^6 factor between the magnitude of the velocity near $x=0$ and at the exit $X_e=10$.

To summarize the static results, the biglobal stability approach predicts a discrete set of possible frequencies for the eigenmodes. The measured frequencies in VALDO belong to this set. Since all the eigenmodes are temporally damped, a continuous external excitation (added to the exponential growth in x) may explain the fact that some of these modes emerge from the surrounding noise. (It is also possible that a transient growth is responsible of this merging. However, the authors believe, because of the following results, that coupling mechanisms play a major role in the merging of the biglobal modes. Further research will hopefully give more information on this point.)

TABLE III. Range of values of R , V_{inj} and Re for the two considered setups.

	Setup	
	VALDO	LP9
R (mm)	constant=30	24.4–42.5
V_{inj} (m/s)	0.6–2	2.60–1.77
Re	1200–4000	3750–6375

D. Dynamic analysis

In this part, the effects of time-dependent values of V_{inj} and/or R are analyzed in order to have a better understanding of the frequency paths that arise in motors. The time dependence of V_{inj} and/or R induces of course a time dependence of the Reynolds number Re . As explained before and thanks to the different time scales, the linear stability equation system is assumed to remain valid at each value of the time. Furthermore, as it has been checked⁹ for the 1D approach, the stability results are not very sensitive to a change of the Reynolds number if the latter is large enough (greater than 1000). This is also valid for the 2D approach. Thus, the 2D results are computed from one particular relevant Reynolds number.

Table III summarizes the different ranges of values for R , V_{inj} and Re in the following explored cases. For the LP9 setup, the measurements start once the pressure is large enough. It means that there is a difference between the value $R=20$ mm at the beginning of the firing (see Fig. 5) and the first value $R=24.4$ mm used for the measurements.

1. Comparisons with VALDO results

In the VALDO facility, only V_{inj} can vary. Figure 12 presents spectrograms (black spots) of the rms velocity fluctuation. Two cases can be distinguished: whether V_{inj} is increasing (case up) on the left-hand side or decreasing (case down) on the right-hand side. In both cases, the calculated modes are plotted as thin lines and draw a network of lines due to the V_{inj} dependence given by relationship (14). The experimental values seem to be organized in agreement with the discrete 2D modes. The most amplified frequency seems to follow the well identified lines of the theoretical network.

However, VALDO results exhibit a little bending for large values of V_{inj} . This bending is not due to a Reynolds effect but may have two possible origins. First, the porous wall of the VALDO setup has not been designed to work for such large values of V_{inj} and this may affect the results. Second, the use of a slide window to perform the FFT transform induces a little shift that may also explain the observed results. Finally, in spite of the weak bending, the measured amplified frequencies are clearly linearly varying with respect to V_{inj} , as expected by the present model.

It is interesting to plot both previous cases in the same figure. This is done in Fig. 13, which presents for a frequency of around 500 Hz the case up in light gray and the case down in dark gray. Of course, as was shown before, the different frequencies belong to the same network but there is hysteresis. It means that the most amplified frequency at a

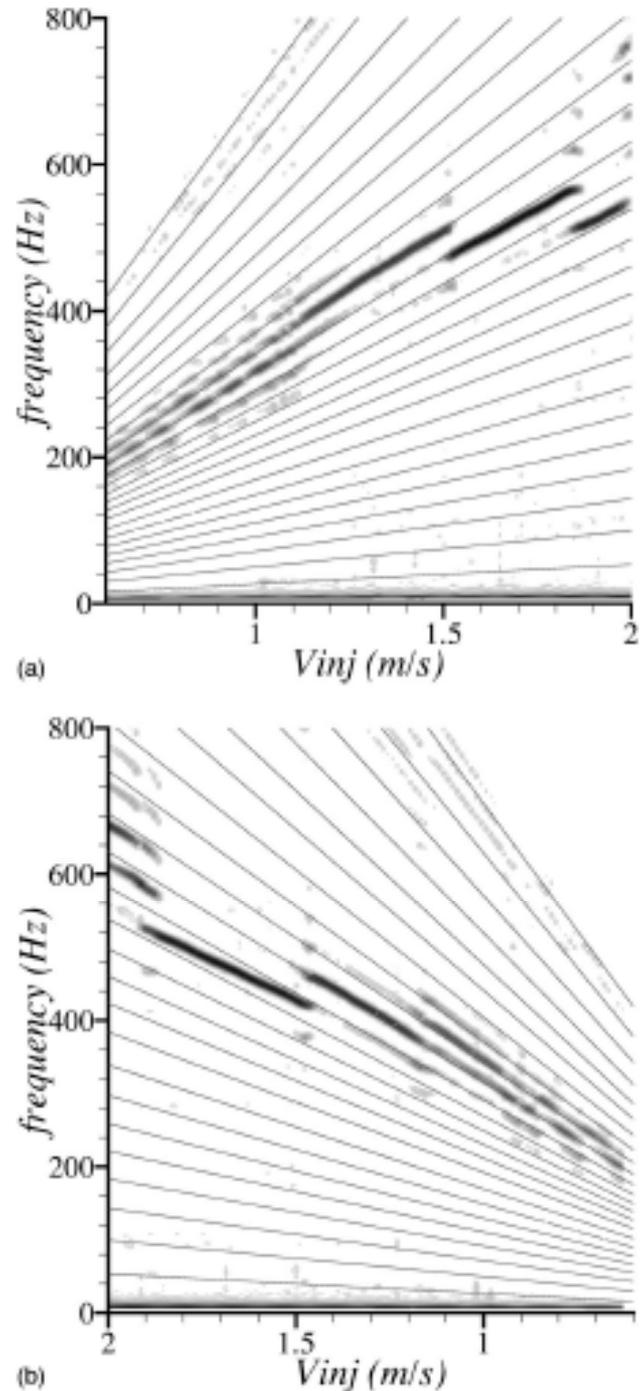


FIG. 12. VALDO frequencies evolution with respect to V_{inj} . The lines correspond to the evolution of the 2D theoretical modes. Case up on the left, case down on the right.

given injection velocity is not intrinsic. This behavior is coherent with the extrinsic nature of the 2D instability results. We think that in this case (no throat, free exit section) the continuous external source of excitation can be the intrinsic instability (Kelvin-Helmholtz type) of the jet flow that develops at the exit of VALDO. The frequencies involved depend on the jet velocity, which is itself related to the injection velocity V_{inj} . Other configurations tested in VALDO equipped with a throat exhibit amplified frequencies that fol-

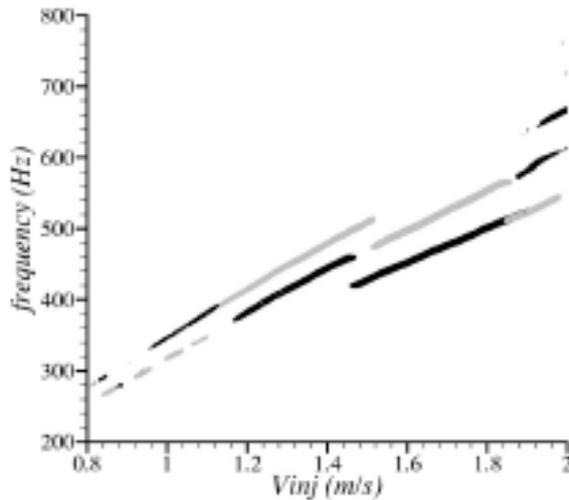


FIG. 13. View of an hysteresis while superimposing the VALDO frequencies evolution for both cases up and down.

low once again our theoretical network of 2D modes, but in this case the frequencies associated with the largest amplitudes remain around the fundamental acoustic mode (similarly to live motor experiments). Thus, the external source of excitation is assumed to be the acoustic modes.

2. Comparisons with LP9 results

Here, the "injection" velocity (actually gas velocity at the propellant surface) V_{inj} and the chamber radius R vary during the firing. Thanks to the static pressure signal in the reduced scale motor, it is possible to access the evolution of R and other physical quantities.³⁷ Moreover, from the unsteady fluctuating pressure signal, a Hilbert transform allows to know the time evolution of the most amplified frequency. As explained in Sec. I (see Fig. 1), this evolution exhibits continuous paths separated by abrupt jumps. At the beginning of the firing, there are no frequency paths and it seems that the most amplified frequency has no particular organization. In those first instances, the ratio R/L , where L stands for the chamber length, is very small. Thus, the flow is expected to become turbulent soon in the streamwise direction. As R increases, the main flow becomes laminar in the major part of the pipe, and this allows the growth of some frequencies. For $t > 2.5$ s, the frequency paths appear. They occur around the first acoustic mode of the pipe up to the end of the firing.

The procedure is similar to the one explained in the VALDO case. For an average value of the Reynolds number ($Re=5000$), the biglobal stability approach is brought into play, leading to a discrete set of ω_r . Then, thanks to (14), the physical frequencies are calculated at each time and are plotted as a network in the same graph of Fig. 1. This is done in Fig 14 with the radius R as an x coordinate instead of the time. At the end of the firing, the propellant is almost fully burned, and the velocity injection has a faster time evolution than the radius R . This explains the particular shape to the 2D mode network at the end.

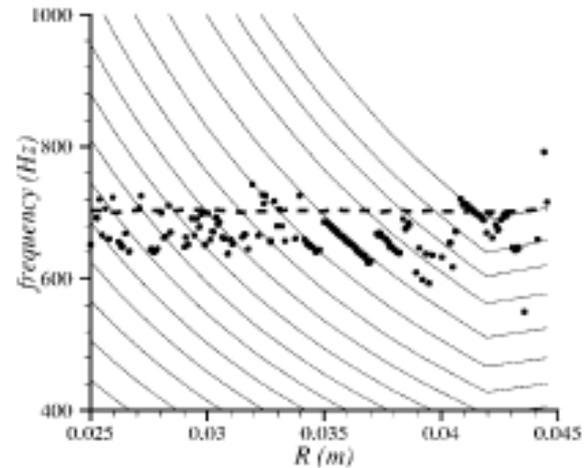


FIG. 14. LP9-15 frequencies evolution with respect to R . The lines correspond to the evolution of the 2D theoretical modes. The first longitudinal acoustic mode is represented as a dashed line.

In spite of the complexity of the physical mechanism that exists in the reduced scale motor LP9, it appears that the observed pressure oscillations follow very well the 2D modes. This confirms the key role of V_{inj}/R in relationship (14) for the observed paths and the discrete nondimensionalized eigenvalues ω_r , computed by the biglobal approach. Otherwise, the external source of excitation is clearly the fundamental acoustic mode in the present LP9 case. This is widely confirmed in Ref. 5.

The good agreement given by Fig. 14 is a major result that leads to, as far as we know, a new possible understanding of the thrust oscillations exhibited by large solid rocket motors.

IV. SUMMARY

This paper is devoted to a biglobal stability analysis of a particular unbounded nonparallel steady flow. Taking into account the nonparallel effects on the perturbation form leads to a major modification of the stability results compared to the classical approach. The eigenvalue problem exhibits a discrete spectrum of temporally stable frequencies. A continuous external source of excitation may explain the merging of these stable modes. This sheds light in on the appearance of the pressure oscillations that are observed in reduced scale motors, whether they work with cold gas or with solid propellant. Looking at the results of the different setups, it is clear that the pressure oscillations have a time evolution that is a function of V_{inj}/R . Even if at that time the predicted modes are not fully resolved, it seems that the present 2D approach is able to determine the main amplified frequencies that appear in solid rocket motors. It would also be interesting to make theoretical investigations to understand the complex interaction that may exist between the computational modes and the external source of excitation, for instance, the longitudinal acoustic modes.

TABLE IV. Comparison between the first five eigenvalues given by the ODE-based approach and by the biglobal approach for linearly growing modes.

	N_r, N_r+1	ODE-based approach	Biglobal approach
Mode 1	101, 102	-0.000 000 02-7.989 816 73i	-0.000 001 36-7.989 816 41i
Mode 2	101, 102	0.819 404 69-7.946 951 10i	0.819 405 11-7.946 953 56i
Mode 3	101, 102	1.585 774 34-7.865 700 79i	1.585 776 26-7.865 702 15i
Mode 4	101, 102	2.338 485 24-7.779 018 82i	2.338 480 11-7.779 921 16i
Mode 5	101, 102	3.069 852 16-7.696 636 36i	3.069 853 02-7.696 635 17i
Mode 1	151, 152	-0.000 000 01-7.974 798 01i	-0.000 006 23-7.974 783 82i
Mode 2	151, 152	0.723 703 79-7.944 533 15i	0.723 702 63-7.944 541 35i
Mode 3	151, 152	1.411 743 50-7.882 614 27i	1.411 731 81-7.882 611 50i
Mode 4	151, 152	2.084 559 27-7.814 019 52i	2.084 571 76-7.814 925 05i
Mode 5	151, 152	2.741 766 38-7.747 904 56i	2.741 749 55-7.747 900 12i

ACKNOWLEDGMENTS

This study has been partly supported by the French space agency CNES and partly by ONERA. The authors thank Gérard Avalon from ONERA Palaiseau (VALDO) and Michel Prévost and Jean-Claude Godon from ONERA Fauga (LP9) for their help, valuable comments, and numerous suggestions.

APPENDIX: SYMMETRIC BOUNDARY CONDITION AT THE HEAD END

The Taylor flow can be seen as a symmetric solution with respect to x . At $x=0$, the longitudinal velocity component $U_x^{(b)}$ is zero, whereas the radial velocity component $U_r^{(b)}$ is not. Thus, it seems to be interesting to look at disturbances that satisfy the same set of boundary conditions, in particular at the head end. In that case, it appears that linear solutions with respect to x may exist, as is the case with the well-known Görtler-Hammerlin modes of the swept attachment line boundary layer.¹⁸ The PDE system (5a) associated to these boundary conditions can be then reduced to a simple ODE system with respect to r . Let $\Psi = xF(r)$ and $\phi = xf(r)e^{-i\omega t}$ be respectively a streamfunction of the Taylor flow and one of the unknown perturbation. Then the system can be written as follows:

$$\frac{1}{r}N(F)L(f) + \frac{1}{r}N(f)L(F) - \frac{F}{r} \frac{dL(f)}{dr} - \frac{f}{r} \frac{dL(F)}{dr} = i\omega L(f)f(1) = 0, \quad \frac{df}{dr}(1) = 0, f(0) = 0 \quad (\text{A1})$$

where

$$L = \frac{d}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

and

$$N = \frac{d}{dr} + \frac{2Id}{r}$$

(Id is the identity function). Using a spectral collocation method, it is easy to compute the eigenvalue ω of (A1).

On the other hand, the biglobal approach has been also used to solve the PDE problem. Instead of imposing the no-slip condition, a symmetric condition is applied at $x=0$. It means that the first two conditions of (10) are changed into

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, r) = 0, \quad \phi(0, r) = 0.$$

Many computations have been done with different values of parameters. For a given number of points in the radial direction N_r , different values of the exit abscissa ($X_e=4, 5, 6, 8, 10$) and of the number of points in the streamwise direction ($N_x=5, 10, 15, 20$) have been tested. Except for spurious modes, all these computations give exactly the same set of eigenvalues (the observed maximum difference is about 0.0001 on the absolute value of an eigenvalue), associated with linearly growing eigenfunctions. The results of the two codes are compared in Table IV for different values of N_r . The first five modes are given in this table. As the eigenvalues are symmetric with respect to the imaginary axis, only the eigenvalues with $\omega_r \geq 0$ are written. It is interesting to note that the results in both codes are depend on the parity of N_r . To have access to the whole set of eigenvalues, two computations must be done for N_r and N_r+1 .

In the framework of this study, these results do not present a physical interest. There are no experiments, as far as the authors know, that exhibited linear growing modes. For this reason, no details on the structure of the eigenvalue set and on the eigenfunctions will be given here. However, it is a good test case that enables to validate the computational code used for the biglobal approach. Moreover, it proves that the no-slip condition at $x=0$ is necessary to obtain stability results which are in agreement with the experiments.

¹G. A. Flandro and J. Majdalani, "Aeroacoustic instability in rockets," *AIAA J.* 41, 485 (2003).

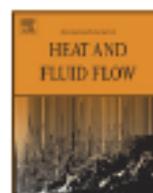
²J. Majdalani and G. A. Flandro, "The oscillatory pipe flow with arbitrary wall injection," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 458, 1621 (2002).

³J. Majdalani, G. A. Flandro and S. R. Fishbach, "Some rotational corrections to the acoustic energy equation in injection-driven enclosures," *Phys. Fluids* 17, 074102 (2005).

⁴E. Vuillot, "Vortex shedding phenomena in solid propellant motors," *J. Propul. Power* 11, 626 (1995).

⁵M. Prévost, J. Vetel, F. Plourde, S. Doan-Kim Son, and M. Augelli, "In-

- fluence of inhibitor shape in small scale motors and cold-gas set-up," 30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Huntsville, USA July 20-23, 2003, AIAA 2003-4673.
- ⁶N. Lupoglazoff and F. Vuillot, "Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors. Numerical simulations and comparisons with firing tests," 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, AIAA 96-0761 (1996).
- ⁷V. N. Varpaev and V. I. Yagodkin, "Flow stability in a channel with porous wall," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza* 4, 91 (1969).
- ⁸J. Griffond and G. Casalis, "On the dependence on the formulation of some nonparallel stability approaches applied to the Taylor flow," *Phys. Fluids* 12, 466 (2000).
- ⁹G. Casalis, G. Avalon, and J. Ph. Pineau, "Atial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls," *Phys. Fluids* 10, 2558 (1998).
- ¹⁰J. Griffond, G. Casalis, and J. Ph. Pineau, "Spatial instability of flow in a semiinfinite cylinder with fluid injection through its porous walls," *Eur. J. Mech. B/Fluids* 19, 69 (2000).
- ¹¹R. S. Brown, R. Dunlap, S. W. Young, and R. C. Waugh, "Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets," *J. Spacecr. Rockets* 18, 312 (1981).
- ¹²T. Tatsumi and T. Yoshimura, "Stability of the laminar flow in a rectangular duct," *J. Fluid Mech.* 212, 437 (1990).
- ¹³V. Theofilis, "Linear instability analysis in two spatial dimensions," *Fourth ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, ECCOMAS98, Athens* (1998).
- ¹⁴V. Theofilis, P. W. Duck, and J. Owen, "Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows," *J. Fluid Mech.* 505, 249 (2004).
- ¹⁵J. Ch. Robinet and P. de la Motte, "Global instabilities in separated boundary layers," *Third International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomenon (TSP-3), Sendai, Japan* (2003).
- ¹⁶R. S. Lin and M. Malik, "On the stability of attachment-line boundary layers. Part 1. The incompressible swept Hiemenz flow," *J. Fluid Mech.* 311, 239 (1996).
- ¹⁷V. Theofilis, S. Hein and U. Dallmann, "On the origins of unsteadiness and three-dimensionality in a laminar separation bubble," *Philos. Trans. R. Soc. London* 358, 3229 (2000).
- ¹⁸V. Theofilis, A. Fedorov, D. Obrist, and U. Ch. Dallmann, "The extended Görtler-Hämmerlin model for linear instability of three-dimensional incompressible swept attachment-line boundary layer flow," *J. Fluid Mech.* 487, 271 (2003).
- ¹⁹C. Robitaille-Montané, Th. Féraillé, and G. Casalis, "Linear stability of the incompressible swept Hiemenz flow : A 2D model," in *21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Warsaw* (2003).
- ²⁰A. Berman, "Laminar flow in channels with porous walls," *J. Appl. Phys.* 24, 1232 (1953).
- ²¹P. Huerre and M. Rossi, *Hydrodynamic Instabilities in Open Flows* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- ²²M. B. Zaturka, P. G. Drazin, and W. H. H. Banks, "On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls," in *Fluid Dynamics Research 4* (North-Holland, Amsterdam, 1988), pp. 151-178.
- ²³S. Ferro and G. Gnani, "Spatial instability of similarity solutions for viscous flows in channels with porous walls," *Phys. Fluids* 12, 797 (2000).
- ²⁴G. Casalis and F. Vuillot, "Motor flow instabilities—Part 2 : Intrinsic linear stability of the flow induced by wall injection," *RTO-AVT VKI Special Course on Internal Aerodynamics in Solid Rocket Propulsion* (2002).
- ²⁵R. Dunlap, A. M. Blackner, R. C. Waugh, R. S. Brown, and P. G. Willoughby, "Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber," *J. Propul. Power* 6, 600 (1990).
- ²⁶J. Barron, W. Van Moorhem, and J. Majdalani, "A novel investigation of the oscillatory field over a transpiring surface," *J. Sound Vib.* 235, 281 (2000).
- ²⁷G. Avalon and D. Lambert, *Campagne d'essais VALDO, période 2000/2001*, ONERA, Etablissement de Palaiseau RT 2/05424 DEFA (2001).
- ²⁸J. C. Godon and M. Prévost, "Restitutions et analyses des instabilités des essais no 10 à 15 du montage LP9—démonstrateur de VSP, ONERA, Etablissement du Fauga-Mauzac RT 2/08692 DEFA/DMAE, CNES-RT-NT-1331-0402-ONERA-01 (2004).
- ²⁹V. Yang, "Overview of motor internal flow dynamics," *RTO-AVT VKI Special Course on Internal Aerodynamics in Solid Rocket Propulsion* (2002).
- ³⁰W. W. Chu, V. Yang, and J. Majdalani, "Premixed flame response to acoustic waves in a porous-walled chamber with surface mass injection," *Combust. Flame* 133, 359 (2003).
- ³¹A. B. Vyas, J. Majdalani, and V. Yang, "Estimation of the laminar premixed flame temperature and velocity in injection-driven combustion chambers," *Combust. Flame* 133, 371 (2003).
- ³²J. Griffond and G. Casalis, "Linear stability of injection induced flow: Effect of weak unsteadiness," *International Conference on Stability and Turbulence, Novosibirsk* (1999).
- ³³C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer, New York, 1987).
- ³⁴W. S. Edwards, L. S. Tuckerman, R. A. Friesner, and D. C. Sorensen, "Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations," *J. Comput. Phys.* 110, 82 (1994).
- ³⁵V. Theofilis, "Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows," *Prog. Aerosp. Sci.* 39, 249 (2003).
- ³⁶B. Ugurtas, "Etude numérique et expérimentale des instabilités hydrodynamiques et du couplage aéro-acoustique dans unécoulement de Taylor," Ph.D. thesis Université Paris VI (2000).
- ³⁷J.-Cl. Godon, "Code PERSE: Une approche unidimensionnelle dans la modélisation du fonctionnement stationnaire d'un propulseur à propellant solide," 3ème colloque R&D "Écoulements internes en propulsion solide," Poitiers (1998).



Advanced wall model for aerothermodynamics

F. Chedevigne*

ONERA, 29 Avenue de la Division Leclerc, BP 72, 92322 Châtillon Cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 22 September 2009

Received in revised form 16 April 2010

Accepted 6 May 2010

Available online 8 June 2010

Keywords:

Wall function

Boundary layer equations

RANS computations

CEDRE code

Infinite swept flat plate

Supere elliptic transition duct

ABSTRACT

This paper presents a new advanced wall model dedicated to the simulation of flow in an aerothermodynamic context. It consists in the resolution of a system of 1D boundary layer equations on each wall-cell. The numerical integration of the system is achieved through a recurrence procedure. A simple closure formulation is retained for the system, based on a mixing length model. Because of the dependency on the temperature and velocity profiles of the closure formulation, iterative loops involving substitution and Newton methods are used. The new wall model is compared to conventional wall functions already existing in the ONERA code CEDRE. Four validation cases highlight the progress realized by the model and demonstrate the ability of this wall function to make accurate predictions on coarse meshes.

© 2010 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

Despite the increase of computer resources, in an industrial context it is often still out of scope to perform computations using fine grids. Consequently, wall functions are preferably used for large computations, especially for aerothermodynamic purposes. However, most of the commercial codes use simplistic algebraic formulations which are theoretically limited to a few applications. There is a real need for advanced wall functions, capable of accounting for pressure gradients for instance. The original hypothesis of a local equilibrium in the near-wall turbulence, upon which the log-law is based, is generally not satisfied, leading to a poor description of the friction and heat transfer effects at the walls.

Different approaches exist to overcome the difficulties linked to the deviation from the local equilibrium hypothesis. In the framework of analytical wall functions, one can point out the recent model (Craft et al., 2002) developed at UMIST that extend the field of applications of such wall models to a large variety of flows (Craft et al., 2004b, 2008). Over the last two decades, another approach has been explored, based on the resolution of a simplified set of equations in the wall-cells. The basic idea is to discretize each wall-cell in the direction normal to the wall, and to solve a system of equations such as boundary layer equations. The models differ from one another in the level of approximation made in the set of equations and on the closure formulation. Two main models

can be highlighted for their relevance. The first one, dedicated to RANS simulations, has been developed at UMIST (Craft et al., 2001, 2004a). Using the structured, finite-volume TEAM code and a curvilinear multi-block code STREAM, the authors solve 1D low-Reynolds transports equations associated with a linear or a non-linear eddy viscosity model (NLEVM) (Craft et al., 1996). The principal interest of the model is to provide an accurate description of the near-wall quantities on a coarse grid, equivalent to a low-Reynolds computation on a fine grid. For equivalent grids and convergence limits, the model is found to be much faster than a low-Reynolds number model. However, regarding only the CPU time per iteration, the reduction is small and this time is notably much larger than for an analytical wall function (Craft et al., 2001, 2004a). The second interesting model (Balaras et al., 1996) has been designed for LES applications to avoid the grid refinement near the wall. This model is known as the Thin Boundary Layer Equation model (TBLE model). In the wall-cell, a simplified set of 1D equations, namely boundary layers equations, is solved on a subgrid. Contrary to the model of UMIST, the set of equations solved on the subgrid differs from the set of equations used for the high-Reynolds regions. A mixing length model is used for the closure formulation of the eddy viscosity, implying a damping function such as the Van Driest function. Since the TBLE model is dedicated to unsteady computations, the temporal term in the boundary layer equations is retained, contrary the UMIST-N model. In both cases, the convective terms are kept and thus the resolution of these systems requires a fairly complex numerical scheme.

This paper presents a new model, combining the advantages of these two previous models, and which uses integrated boundary

* Tel.: +33 1 46 73 43 12; fax: +33 1 46 73 41 47.

E-mail address: francois.chedevigne@onera.fr

layer equations leading to a system easy to solve. It will be referred as the Simple Integrated Boundary Layer Equations model (SIBLE model). This model is oriented for RANS applications, but with care it can also be used in an unsteady context. The SIBLE model has been implemented in an unstructured, finite-volume, cell-centered code called CEDRE that is developed at ONERA. A short description of the code is given in Section 2 where the numerical models are described. In addition, in this section the physical modelisation of the SIBLE model is presented and compared to the conventional wall functions already implemented in the CEDRE code. Section 3 focuses on the validation of the model through different applications.

2. Physical and numerical modelisations

2.1. The CEDRE code

The computations were performed using ONERA's code: CEDRE (<http://cedre.onera.fr>). This code accepts general unstructured meshes (made of general polyhedra) including possibly structured, hybrid and embedded Cartesian grids. The space discretization, based on a finite volume approach, is cell-centered, and employs an upwind Roe scheme with a second order extension thanks to the Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws (MUSCL) scheme with a Van Leer limiter. The code can be used on a wide range of Mach numbers from almost incompressible (using low Mach preconditioning) up to hypersonic. Time integration schemes can be explicit or implicit. An adaptive local time-stepping method can be associated with an implicit integration. A complete description of CEDRE is given by [Chevalier et al. \(2005\)](#) and more specific information concerning code validation may be found in the work by [Vuillot et al. \(2003\)](#).

2.2. Conventional wall laws in CEDRE

The CEDRE code allows the user to access two different conventional wall laws. They are both based on the local equilibrium assumption, i.e. they mimic the behavior of a zero pressure gradient boundary layer following the log-law. These two wall functions differ from one another in the parameter which controls the evolution of function. Consider the log-law, κ being the Karman constant:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (1)$$

where B is generally taken as 5.25. The role of a wall function in CEDRE is to provide the value of h_f for each cell in order to evaluate the local friction, where h_f is defined as:

$$h_f = \frac{y^+}{U^+} \quad (2)$$

The variable h_f is a function of y^+ but can be considered as a function of $Re_{\tau} = U_{\tau}^+ d/\nu$.

The first wall function of CEDRE, noted WF1, is a simple interpolation function, linking h_f and Re_{τ} :

$$h_f = 1 + \frac{f_c}{1+f_c} \left(\frac{Re_{\tau}}{447} \right)^{0.825} \quad \text{with} \quad f_c = \frac{Re_{\tau}}{80} + \left(\frac{Re_{\tau}}{120} \right)^2 \quad (3)$$

Note that the function is equal to 1 for $Re_{\tau} = 0$ in order to restore the theoretical behavior of the viscous sublayer where $U^+ = y^+$.

This wall function is limited to flows without separation. In fact, in stagnation regions, it is found that such a correlation, controlled by Re_{τ} , gives poor results. One possible solution is to define a new wall law, driven by the turbulent Reynolds number $Re_{\tau} = \mu_d/\mu$, which is a better driving parameter in separation regions. Thus,

the second wall function of the CEDRE code, WF2, uses an empirical relation between h_f and Re_{τ} :

$$h_f = \frac{Re_{\tau}}{3.05 + \ln(1 + Re_{\tau})} + e^{-\frac{Re_{\tau}}{30}} - 1 \quad (4)$$

with $\mu_{\tau} = C_v \sqrt{kl}$, $l = \kappa y$, $u_{\tau} = C_v \sqrt{k}$

The term $\ln(1 + Re_{\tau})$ replaces $\ln(Re_{\tau})$ in order to avoid any singularity and the term $e^{-\frac{Re_{\tau}}{30}}$ is introduced to extend the model to the viscous sublayer. Concerning the thermal aspects of these wall laws, the Reynolds analogy is used:

$$h_h = Gh_f, \quad \text{where} \quad h_h = Pr \frac{y^+}{T^+} \quad (5)$$

The parameter G is set to 1 for the WF1 wall function, whereas it is linked to the Jayatilake's correction ([Jayatilake, 1969](#)) for the WF2 law, following:

$$G = \frac{\frac{Pr}{Pr^+}}{1 + z \sqrt{\frac{20y^+ - 1}{Re_{\tau}^+ 300}}} \quad (6)$$

with $z = 9.24 \left(\left(\frac{Pr}{Pr^+} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(1 + 0.28 e^{-0.007 \frac{Pr}{Pr^+}} \right)$

A compressibility correction is added to the WF2 wall law, based on the Van Driest transformation where the velocity U is replaced by U^{VD} :

$$U^{VD} = \int_0^U \sqrt{\frac{\rho}{\rho_p}} du \quad (7)$$

Then, assuming that the normal pressure gradient at the wall is constant, one can establish a Crocco law for the temperature T , leading to:

$$U^{VD} = \sqrt{\frac{2C_p T_p}{Pr^+}} \left[\arcsin \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial y} + U}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \frac{2C_p T_p}{Pr^+}}} \right) - \arcsin \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \frac{2C_p T_p}{Pr^+}}} \right) \right] \quad (8)$$

Using this correction, the h_f coefficient can be written:

$$h_f = \left(e^{-\frac{Re_{\tau}^+}{30}} - 1 + \frac{Re_{\tau}^+}{3.05 + \ln(1 + Re_{\tau}^+)} \right) \frac{U^{VD}}{U} \quad (9)$$

where Re_{τ} as been replaced by $Re_{\tau}^+ = C_v \sqrt{\rho \rho_p k l} / \mu_p$

Depending on the thermal boundary condition applied at the wall, i.e. either an imposed temperature condition or an imposed heat flux condition, the unknown variable is calculated using the following relation:

$$\phi_p = \frac{h_h \lambda}{d} (T_p - T_{pw}), \quad T_{pw} = T^{ns} + r \frac{U^2}{2C_p} \quad (10)$$

T^{ns} stands for the fluid temperature of the wall-cell, obtained from the Navier–Stokes calculation. r is the recovery factor and is chosen to be equal to the turbulent Prandtl number Pr_{τ} .

2.3. New advanced wall model: SIBLE

Conventional wall laws quickly reach their limits when calculated flows develop boundary layers with non-zero pressure gradients, for instance. The objective of this new wall function is thus to provide accurate values of h_f and h_h depending on pressure gradients. Rather than developing an analytical wall function, whose scope is definitively limited to the extent of the used approximations, it is preferable to evaluate h_f and h_h from a system of equations. The main problem then lies in the resolution of the system. A system

composed of simple 1D boundary layer equations, which is easily integrated, is solved efficiently by recurrence. The new wall law is thus called Simple Integrated Boundary Layer Equations (SIBLE).

2.3.1. Boundary layer equations

Due to the unstructured nature of the CEDRE code, it is extremely complex and highly time-consuming to take into account the wall-parallel velocity gradients in the boundary layer problem. Let us thus consider the steady boundary layer equations where the convection terms have been neglected. The tangential pressure gradient in the longitudinal, x , and transverse, z , directions are retained in these equations, whereas the pressure gradient normal to the wall is neglected.

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (U\tau_{xy} + W\tau_{zy} - \phi_y) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

With these approximations, the system of 1D equations depends only on y , and is easily integrated. The shear stresses are then expressed as functions of the velocity gradient components, as is usually done in eddy viscosity models.

$$\begin{cases} \mu_e \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_{yx} + y \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \\ \mu_e \frac{\partial w}{\partial y} = \tau_{yz} + y \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \lambda_e \frac{\partial T}{\partial y} + \mu_e U \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_e W \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_p \end{cases} \quad (12)$$

The quantities μ_e and λ_e account for the "effective" viscosity and conductivity:

$$\begin{aligned} \mu_e &= \mu + \mu_t \\ \lambda_e &= \lambda + \lambda_t \end{aligned} \quad (13)$$

The boundary conditions associated with this system of equations are located at the wall and in the center of the wall-cell.

- at the wall $y = 0$: the velocity components are zero, $U = 0$ and $W = 0$, and either the temperature is imposed $T = T_p$, or the heat flux is imposed $\phi = \phi_p$
- at the center of the wall-cell $y = \Delta$: the velocity and the temperature should equal the solution of the Navier–Stokes code, $U = U^{NS}$, $W = W^{NS}$ and $T = T^{NS}$.

Finally, the closure of the system is ensured by choosing an eddy viscosity formulation. A simple mixing length model is retained in which a damping function F is used. This function differs from the Van Driest function and is taken from *Piomelli et al. (1989)*. In order to take account of compressible effects, the friction velocity u_τ is replaced by u_τ^* , a shear velocity calculated using local shear instead of the wall friction τ_p . In the same way, the velocity gradient is multiplied by $\sqrt{T_p/T}$ to include the effect of the Van Driest transformation. The eddy viscosity model can thus be written:

$$\begin{aligned} u_\tau^* &= \left(\frac{(\tau_{yx} + y \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x})^2 + (\tau_{yz} + y \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z})^2}{\rho^2} \right)^{1/2} \\ y^* &= \frac{\rho y u_\tau^*}{\mu} \\ l &= \kappa y \\ F &= 1 - e^{-\left(\frac{y^*}{\kappa}\right)^4} \\ \mu_t &= \rho \sqrt{\frac{T_p}{T}} l^2 F \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

In this paper, the turbulent conductivity λ_t is chosen to be linked to the eddy viscosity μ_t using the turbulent Prandtl number, Pr_t .

$$\lambda_t = \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \quad (15)$$

Other models exist (*Behnia et al., 1998*), for which the turbulent Prandtl number is not assumed to be constant but depends on the turbulent Reynolds number Re_t , for instance. Tests have to be done to confirm the interest of implementing such models.

2.3.2. Numerical resolution

In order to solve the system of Eq. (12), each wall-cell is discretized in the y direction, normal to the wall. Let N be the number of nodes. For these computations the author has used points in a geometrical series with a constant ratio r , see Fig. 2. Other choices are possible. The numerical resolution is based on a finite difference scheme over two points. Any physical quantity G can be evaluated at point $(i + 1/2)$ from the two points (i) and $(i + 1)$:

$$G_{i+1/2} = \frac{G_i + G_{i+1}}{2} \quad (16)$$

Thus the derivative of G at point $(i + 1/2)$ is given by:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{i+1/2} = \frac{G_{i+1} - G_i}{\Delta y_i} + \mathcal{O}(\Delta y_i^2) \quad (17)$$

with $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

The friction components, τ_{yx} and τ_{yz} , and the heat flux ϕ_p can then be expressed as:

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \frac{\mu_{r,12}}{\Delta y_1} U_2 - y_{3/2} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= \frac{\mu_{r,12}}{\Delta y_1} W_2 - y_{3/2} \frac{\partial P}{\partial z} \\ \phi_p &= -\frac{\lambda_{r,12}}{\Delta y_1} (T_2 - T_1) - \frac{\mu_{r,12}}{2\Delta y_1} (U_2^2 + W_2^2) \end{aligned} \quad (18)$$

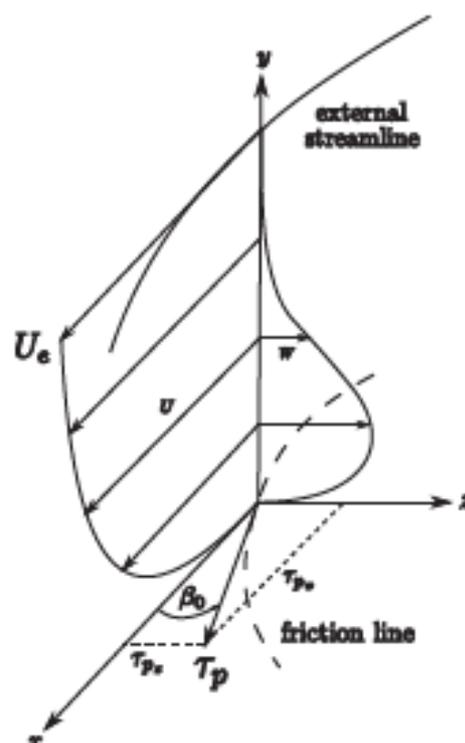


Fig. 1. Three-dimensional scheme of a boundary layer developing on a flat plate.

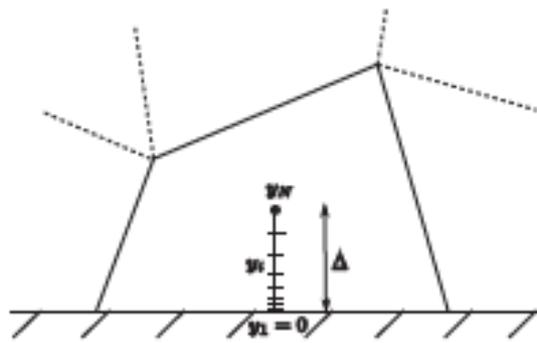


Fig. 2. Discretization of a wall-cell.

When adiabatic conditions are imposed, i.e. $q_p = 0$, the last equation of (18) provides a relation between T_1 and T_2 :

$$T_1 = T_2 + \frac{\mu_{e,3\Delta}}{2\lambda_{0,\Delta}}(U^2 + W^2) \quad (19)$$

Finally, once discretized at each point $(i+1/2)$, the system of Eq. (12) reads as follows:

$$\begin{cases} \frac{\mu_{e,3\Delta}}{\Delta y} (U_{i+1} - U_i) = \frac{\mu_{e,\Delta}}{\Delta y} U_2 + \xi_i \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\mu_{e,3\Delta}}{\Delta y} (W_{i+1} - W_i) = \frac{\mu_{e,\Delta}}{\Delta y} W_2 + \xi_i \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\lambda_{e,3\Delta}}{\Delta y} (T_{i+1} - T_i) + U_{i+1/2} \left(\frac{\mu_{e,\Delta}}{\Delta y} U_2 + \xi_i \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ + W_{i+1/2} \left(\frac{\mu_{e,\Delta}}{\Delta y} W_2 + \xi_i \frac{\partial W}{\partial x} \right) = -q_p \end{cases} \quad (20)$$

where $\xi_i = (y_{i+1} + y_i - y_2)/2$.

This system of $3 \times (N-1)$ equations is implicit because the transport coefficients, such as μ_e and μ , depend on the unknown variables $(U_i^{n-1})_{1 \leq i \leq N}$, $(W_i^{n-1})_{1 \leq i \leq N}$ and $(T_i^{n-1})_{1 \leq i \leq N}$. An iterative algorithm, combining Newton's method and a substitution method, is used to obtain the solution. For each system (20), the transport coefficients are assumed to be constant, and are evaluated from the velocity and temperature profiles found in the previous iteration. A recurrence procedure is applied at each iteration to solve the system (20). Details are given in Appendix A.

Similarly to the case for the conventional wall function, the SIBLE wall law computes the coefficients h_y and h_h . However, in this case, h_y is directly linked to τ_p , and is now a vector since the friction components are not necessarily aligned with the flow streamlines. In addition, when a thermal boundary condition is applied on a wall, a second calculation is performed with $q_p = 0$, in order to obtain T_{ad} , the adiabatic wall temperature. Knowing T_{ad} , one can find the exchange coefficient h_h , used in relation (10). For adiabatic wall conditions, $T_p = T_{ad}$ and the coefficient h_h is irrelevant.

One of the difficulties faced during the development of the SIBLE wall function concerns the initialization of the velocity and temperature profiles used to start the iterative procedure. A linear temperature profile and power profile for $(U_i^{n-1})_{1 \leq i \leq N}$ have been found to be satisfactory. However to increase the robustness and the performance of the SIBLE wall function, at each new Navier–Stokes iteration, the velocity and temperature profiles are initialized with the solution found in the previous iteration in the given wall-cell. Consequently, the storage requirements are increased. This is why the possibility of applying the SIBLE wall function only on specific walls has been introduced in the CEDRE code. Note that during transient phase of the development of a RANS solution, non-physical states can be encountered in some cells. In particular, inconsistent pressure gradient and velocities can emerge from the Navier–Stokes computations. The model on which the SIBLE law is based may then not be able to find a solution. Limitations of the

pressure gradients are thus temporarily applied to overcome this kind of difficulty. However, for well-posed problems, these difficulties never appear, such as once the RANS computations are on their way to convergence.

3. Validation

Four different cases will be examined in order to validate the physical model and the implementation of the SIBLE law. The first two cases aim at demonstrating the accuracy of the SIBLE wall law on simple flows where conventional wall functions are also expected to provide good results. The two other cases illustrate the advantages of the new wall function in more complex flows for which the classical assumption of local equilibrium is not valid in some areas. The following computations using the SIBLE wall function are made with $N = 20$ subnodes and a progression factor $r = 1.1$ unless otherwise stated.

Tests have been made to ensure that the SIBLE wall model is independent of the number of nodes, N , when N is large enough. However, it is not necessary to use a large N to obtain a stable solution of the Navier–Stokes calculations, although the accuracy of the results may then depend on N .

3.1. Heated pipe

The first validation case is a simple pipe flow with a heated wall, on which a constant heat flux $q_p = 100 \text{ W/m}^2$ is imposed. The pipe diameter is $D = 0.0265 \text{ m}$. We consider a pipe of length $L = 0.01 \text{ m}$, where a pressure gradient $\Delta p = 0.5 \text{ Pa}$ drives the motion of an air flow at 295 K ($Re \approx 17,500$, $M \approx 0.03$). Using generalized periodic boundary conditions, that take into account the energy injected into the pipe, calculations are run with two turbulence models: *k-l* (Dutoya) and *k ω -SST* (Menter, 1993). In order to be sure that the wall transfers are driven by the wall functions rather than by any low-Reynolds number formulation, the mesh is such that the wall-cell thickness is $\Delta = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, which corresponds to $y^+ \approx 90$. The momentum and heat transfer at the wall are expressed in terms of the friction factor and the Nusselt number. We define:

$$\begin{cases} \bar{p} = \int_S \rho dS \\ \bar{U} = \frac{1}{\rho} \int_S \rho U dS \\ \bar{V} = \frac{1}{\rho} \int_S \rho v dS \\ T_r = \frac{1}{\rho} \int_S \rho U T dS \\ \bar{Re} = \frac{\rho \bar{U} D}{\mu} \end{cases} \quad (21)$$

The friction factor, f , and the Nusselt number, Nu , are then given by:

$$\begin{aligned} f &= \frac{D \Delta p}{2 \rho \bar{U}^2 L} \\ Nu &= \frac{D q_p}{\lambda \Delta T} \quad \text{with} \quad \Delta T = T - T_r \end{aligned} \quad (22)$$

The friction factor f and the Nusselt number are normalized using the correlations of Blasius (Incropera and DeWitt, 1996) and Dittus–Boelter (Dittus and Boelter, 1930):

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{0.3164}{4 Re^{0.25}} \\ Nu_0 &= 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} \end{aligned} \quad (23)$$

Tables 1 and 2 give the reduced results for the three wall functions for each of the two turbulence models.

The WF1 wall function gives acceptable results, however WF2 is unable to provide reasonable values of f and Nu , even in such a simple case. The reason lies in the values of k provided by the turbu-

Table 1
Dimensionless friction factor f_w

Model	WF1	WF2	SIBLE
kl	1.006	0.509	0.970
$k\omega$	1.083	0.795	0.984

Table 2
Dimensionless Nusselt number Nu_w

Model	WF1	WF2	SIBLE
kl	1.151	0.518	0.967
$k\omega$	1.171	0.805	0.985

lence model.¹ To increase the accuracy of WF2, the production term P_k or the kinetic energy k should be imposed on the wall-cells as it is done in some analytical wall functions (Craft et al., 2002). On the whole, the SIBLE wall law gives the best results, and moreover, the results are almost independent of the turbulence model.

3.2. Flat plate

The second validation case is an extension of the previous case for momentum transfer in that sense that it focuses on local transfer, whereas the first validation case gives information only on integral parameters.

Let us consider a flat plate of length $L = 2$ m, over which air at 300 K is injected at a constant inlet velocity $U_e = 100$ m s⁻¹ ($Re \approx 1.3 \times 10^7$, $M \approx 0.3$). The wall is adiabatic and thus only the friction coefficient will be analyzed. Two meshes, M1 and M2, are used. They correspond to two wall-cell thicknesses $\Delta = 2 \times 10^{-4}$ m and $\Delta = 4 \times 10^{-4}$ m respectively. Values of y^+ are in the interval [35, 110] for these two meshes. The friction coefficient $C_f = 2(U_\tau/U_e)^2$ resulting from the calculations are compared to the Falkner correlation (Falkner, 1943):

$$C_{f,Falkner} = 0.0262Re_x^{-1/7} \quad (24)$$

As previously, three computations with the three wall functions are performed for the two turbulence models kl and $k\omega$ -SST. Fig. 3a and b confirm the fact that for large values of y^+ , the WF2 wall law gives a poor estimation of momentum transfer, amplified by the use of the kl model for which the values of k in the wall-cells are underestimated. The results obtained with the WF1 wall function are not bad, but depend on the thickness of the wall-cells. It can be seen that the correlation (3) gives the best fit to the log-law for large values of y^+ . However, once again, the results of the SIBLE wall function are in best overall agreement with the Falkner correlation. In addition, Fig. 3a and b clearly show the weak dependence of the results on the turbulence model and on the mesh.

3.3. Infinite swept flat plate

To go further in the validation of the SIBLE wall function, a new flow case is explored. The experiments by Van den Berg et al. (1975) provide a useful database² for comparison with computations of the flow over an infinite swept flat plate. A pressure inducing body, and guiding vanes are mounted over a flat test plate of chord $c = 1.3$ m. The latter is swept at an angle of 35°. The experiment

¹ A correction has been developed for WF2 without the compressibility correction based on the Van Driest velocity (7) which boils down to imposing the level of k in the wall-cell. However, this correction is only efficient for the zero pressure gradient boundary layer.

² ERCOFTAC database Case 27.

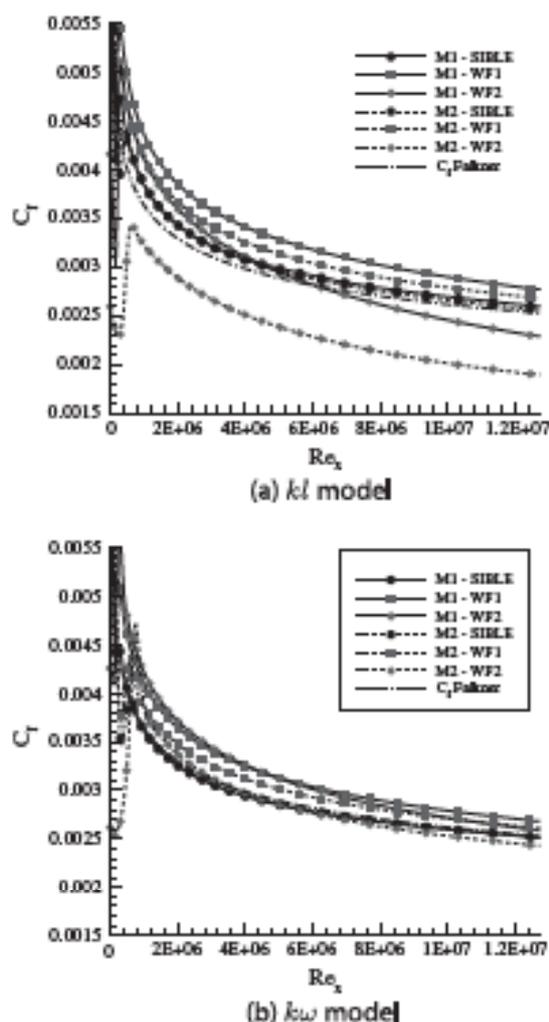


Fig. 3. Friction coefficients C_f compared to the Falkner correlation.

recreates the flow conditions over an infinite swept flat plate. In such a boundary layer flow, the orthogonal pressure gradient induces a non-alignment of the friction lines with respect to the external streamlines. In other words, the local streamline angle α differs from the wall friction angle β , i.e. $\beta_0 = \beta - \alpha \neq 0$, see Fig. 1. To simulate this flow, we have to apply a pressure gradient in the upper part of the computational domain. The imposed pressure gradient is such that we recover the measured pressure gradient at the wall. Note that as the pressure gradients are not very intense in the present case, the induced effects are not very pronounced. This validation case must be seen as a demonstration case. The free stream conditions in air are $U_e = 36.55$ m s⁻¹ and $T = 293$ K. An adiabatic condition is imposed at the wall. Periodic conditions are considered at the edges of the flat plate whose simulated width is 1 m. Two meshes, M1 and M2, are used with a different number of nodes in the y direction. After computation, the values of y^+ are found to be in the range [35, 70] for the first mesh, and [110, 220] for the second mesh. On each mesh, two computations are made with the $k\omega$ -SST turbulence model using the WF1 and SIBLE wall functions respectively. On mesh M2 a larger number of nodes, $N = 120$, is used to discretize each wall-cell. Such a large number is not necessary (50 is enough) but is used here to illustrate the CPU times dependence on N , see Table 3. In Fig. 4, left, we plot the pressure coefficient $C_p = (P - P_0)/(0.5\rho U_e^2)$, where P_0 is the reference pressure taken at the leading edge.

This figure shows that the pressure gradient at the wall is well reproduced in all cases. The right-hand part of the figure presents

Table 3

CRU time as a function of the wall function, for the validation case of an infinite swept flat plate.

Mesh	CRU time: WF1/SIBLE (s/s)	N	Add. cost (%)
M1	16,779/17,159	20	2.3
M2	5558/7208	120	29.7

the computed friction coefficients C_f compared to the measured ones. Since the longitudinal pressure gradient is weak, only 280 Pa between the inlet and exit sections, the WF1 wall law gives acceptable results. It is difficult to say whether the C_f distribution obtained with SIBLE wall function is better or not. However, when one focuses on the wall friction lines, a major difference arises. Conventional wall functions are unable to take into account the non-alignment of the friction line with respect to the external streamlines. Fig. 5 demonstrates the ability of the SIBLE wall function to take into account the effect of a transverse pressure gradi-

ent on the friction vector, contrary to conventional wall functions. For clarity, only the first part of the plate ($x < 1.12$ m) for which the computed friction coefficients match the measured ones, is shown. The figure plots the evolution of the friction angle β along the plate for the measurements and the different simulations. As for the friction velocity U_τ , the results gained through the use of the SIBLE wall function are nearly identical on the two meshes and close to the measurements. On the contrary, with the WF1 wall function, the β angle is aligned with the external streamline angle α and thus deviates from the measurements as the wall-cell thicknesses increase.

3.4. Superelliptic transition duct

The last validation case is dedicated to the behavior of the thermal aspect of the new wall function. Accurate measurements of heat exchanges have been conducted at NASA on transitional ducts (Poinsatte et al., 2008). In this article, we focus on the so-called superelliptic transition duct. The cross-sectional shape of the duct

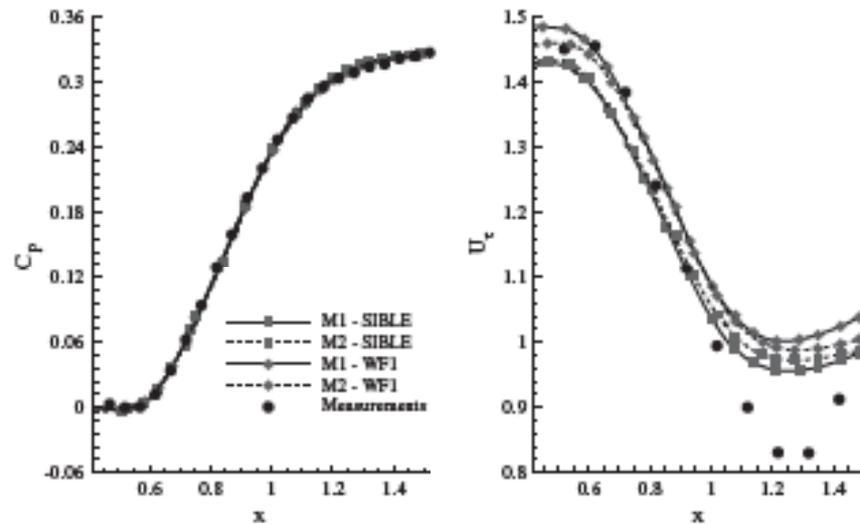


Fig. 4. Pressure coefficient C_p and friction coefficient C_f compared to measurements by Van den Berg along the center line of the flat plate.

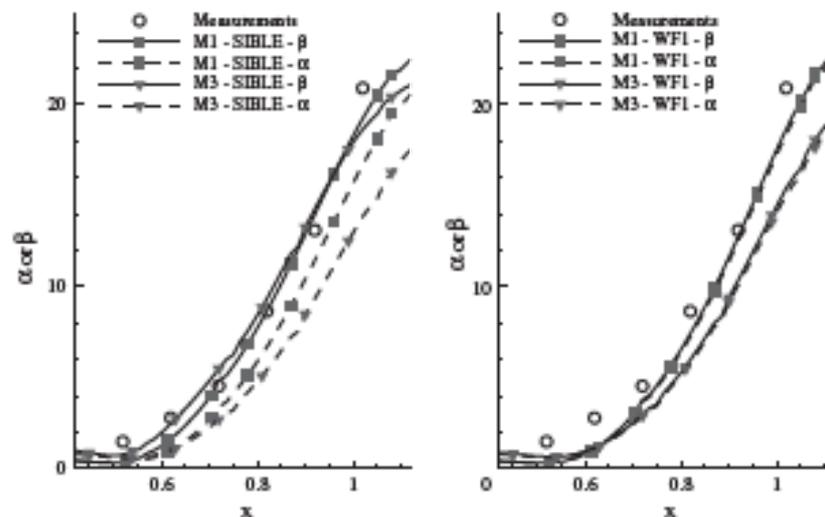


Fig. 5. Streamlines and friction angles compared to measurements along the center line. The left part of the figure shows the results obtained with the SIBLE wall function for the two meshes. The right part illustrates the results obtained with the conventional WF1 wall law.

is described by a superelliptical equation with varying coefficients depending on the axial position. The inlet section is circular, with a diameter $D = 22.225$ cm, while the exit section is almost rectangular, with an aspect ratio of 1/3. The axial length of the duct is $L = 77.8$ cm. It is equipped with thermochromic liquid crystals allowing continuous measurement of the wall temperature. Initially preheated at a constant temperature $T_p = 344$ K, the duct is cooled by an incoming air flow with $U_e = 181$ m s⁻¹ ($Re_D = 2.4 \times 10^6$, $M = 0.55$) and whose recovery temperature is $T_r = 291$ K. To mimic the presence of a boundary layer in the upstream part of the duct, an inlet velocity profile is imposed such that:

$$\begin{cases} \forall r \in [D/2 - \delta, D/2] U = U_e \left(\frac{D/2-r}{\delta}\right)^{1/11} \\ \forall r \in [0, D/2 - \delta] U = U_e \end{cases} \quad (25)$$

where $\delta = 0.03D$ is the measured boundary layer thickness and r designates the radial coordinate. The inlet boundary condition also produces a flow with 1% turbulence intensity and a turbulent length scale of 0.1D. The $k\omega$ -SST turbulence model is used for these com-

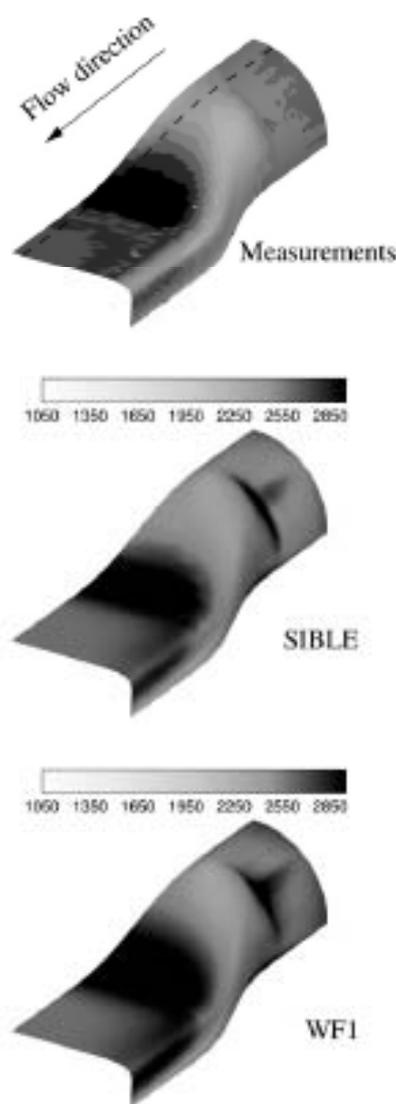


Fig. 6. Contours of the Nusselt number, Nu . From top to bottom, the contour plots correspond to the measurements, the computation with the SIBLE wall function and the computation with the WF1 wall law. A dashed line is drawn on the top image, from which data are extracted and plotted on Fig. 7.

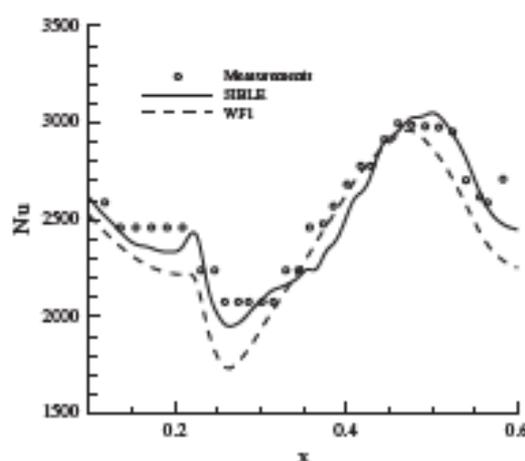


Fig. 7. Evolution of Nu along a duct generatrix.

putations. The mesh is such that the values of y^+ evolves between 200 and 450.

Comparisons with contours of the measured Nusselt number $Nu = q_p D / (\lambda_p (T_p - T_r))$ are shown in Fig. 6. In the expression for the Nusselt number, λ_p stands for the conductivity of air at the recovery temperature T_r . The computations compared to the measurements show the overall superiority of the new advanced wall function compared to the conventional approach. To highlight this point, Fig. 7 plots the evolutions along a duct cutting line,³ see Fig. 6, of the Nusselt number, Nu , for the two computations and the measurements. In spite of its lower accuracy compared to the SIBLE wall law, the simple correlation of the WF1 wall function still provides quite satisfactory results.

4. Conclusion

We have demonstrated that the new wall function, called SIBLE, is able to efficiently compute momentum and heat transfer at the wall. Compared to conventional wall laws, it has significant advantages and opens the possibility of calculating complex aerothermodynamic configurations on coarse grids with a satisfactory precision. As seen so far, the WF1 wall function gives quite good results but lacks consistency when the pressure gradients become important. Moreover, since separations appear in flows, this wall model quickly reaches its limits. On the contrary, for moderate values of y^+ , the WF2 function is well adapted to stagnation regions but is found to provide poor results when y^+ becomes large, even for very simple flows. The mixing length model adopted in the SIBLE wall model eliminates this limitation of conventional wall laws while ensuring a high level of precision in both attached and separated flows.

It must be noted that the increase of complexity in the wall modelisation is paid for in terms of computational effort (CPU time). Depending on N , r , the wall boundary condition and the ratio of the number of wall-cells to of the total number of cells, this additional cost turned out to be between 5% and 30% of the total CPU time in the different computations. For instance, for the validation case of an infinite swept flat plate, the CPU time obtained with the WF1 and SIBLE wall functions and for the same number of iterations are summarized in Table 3. Nevertheless, even if substantial additional CPU time per iteration is needed, overall conver-

³ The cutting line corresponds to the intersection of a plane inclined from an angle of 15° around the duct axis with the duct surface.

gence is faster and a smaller number of iterations is required. The additional cost can also be reduced by converging the computation with a conventional wall function and performing a refined calculation with the SIBLE wall model.

The present model can be amended by changing the closure formulation used for μ_e and λ_e . The present modelisation can be considered as an entry-level, demonstrating the relevance of the approach.

Appendix A

This appendix describes the recurrence procedure used for the resolution of the system (20). Let n be the number of iteration already done, and $n + 1$ the next iteration. Solving the system means finding the velocity and temperature profiles at iteration $n + 1$. We define the variation between the two iterations by:

$$\begin{cases} \Delta U_i^n = U_i^{n+1} - U_i^n \\ \Delta W_i^n = W_i^{n+1} - W_i^n \\ \Delta T_i^n = T_i^{n+1} - T_i^n \end{cases} \quad (A.1)$$

The effective viscosity μ_e and conductivity λ_e are assumed to be constant for the current iteration and are evaluated from $(U_i^n)_{1 \leq i \leq N}$, $(W_i^n)_{1 \leq i \leq N}$ and $(T_i^n)_{1 \leq i \leq N}$. In the following, the superscript n is dropped for simplicity. The system (20) can be rewritten as:

$$A_i \begin{pmatrix} \Delta U_i \\ \Delta W_i \\ \Delta T_i \end{pmatrix} + B_i \begin{pmatrix} \Delta U_{i+1} \\ \Delta W_{i+1} \\ \Delta T_{i+1} \end{pmatrix} + C_i \begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta W_2 \\ \Delta T_2 \end{pmatrix} = D_i \quad (A.2)$$

The matrices A_i, B_i are given below:

$$A_i = \begin{pmatrix} -2 \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} & 0 & 0 \\ 0 & -2 \frac{\rho_{i+1,0}}{\Delta y_1} & 0 \\ \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} U_2 + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} W_2 + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} & -2 \frac{\lambda_{i,0}}{\Delta y_1} \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 2 \frac{\rho_{i+1,0}}{\Delta y_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\rho_{i+1,0}}{\Delta y_1} & 0 \\ \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} U_2 + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} W_2 + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} & 2 \frac{\lambda_{i,0}}{\Delta y_1} \end{pmatrix} \quad (A.4)$$

The matrices C_i and D_i depend on the boundary condition at the wall.

A.1. Wall with a imposed heat flux

$$C_i = 2 \frac{\mu_{e,0}}{\Delta y_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ U_{i+1/2} & W_{i+1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (A.5)$$

and

$$D_i = \begin{pmatrix} -2 \frac{\rho_{i+1,0}}{\Delta y_1} (U_{i+1} - U_i) + 2 \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2 \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} U_2 \\ -2 \frac{\rho_{i+1,0}}{\Delta y_1} (W_{i+1} - W_i) + 2 \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2 \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} W_2 \\ -2 \frac{\lambda_{i+1,0}}{\Delta y_1} (T_{i+1} - T_i) \\ -2 U_{i+1/2} \left(\frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} U_2 + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ -2 W_{i+1/2} \left(\frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} W_2 + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ -2 \phi_p \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

A.2. Wall with an imposed temperature

$$C_i = 2 \frac{\mu_{e,0}}{\Delta y_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ U_{i+1/2} & W_{i+1/2} & -\frac{\lambda_{i,0}}{\rho_{i,0}} \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

and

$$D_i = \begin{pmatrix} -2 \frac{\rho_{i+1,0}}{\Delta y_1} (U_{i+1} - U_i) + 2 \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2 \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} U_2 \\ -2 \frac{\rho_{i+1,0}}{\Delta y_1} (W_{i+1} - W_i) + 2 \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2 \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} W_2 \\ -2 \frac{\lambda_{i+1,0}}{\Delta y_1} (T_{i+1} - T_i) \\ -2 U_{i+1/2} \left(\frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} U_2 + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ -2 W_{i+1/2} \left(\frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} W_2 + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ + \frac{\rho_{i,0}}{\Delta y_1} (U_2^2 + W_2^2) + 2 \frac{\lambda_{i,0}}{\Delta y_1} (T_2 - T_1) \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

A.3. Recurrence

Finally, we define a recurrence procedure for the vector

$$A_i = \begin{pmatrix} \Delta U_i \\ \Delta W_i \\ \Delta T_i \end{pmatrix} \text{ while asserting:} \quad (A.9)$$

The matrix α_i and the vectors β_i satisfy the following relations:

$$\forall i \in [3, N-1] \begin{cases} \alpha_i = -A_i^{-1} (C_i + B_i \alpha_{i+1}) \\ \beta_i = A_i^{-1} (D_i - B_i \beta_{i+1}) \end{cases} \quad (A.10)$$

When $\Delta N = 0$ then $\alpha_N = \beta_N = 0$, giving an initiation condition for the calculation of the matrix α_i and the vectors β_i .

In addition, we can write:

$$A_2 = (A_2 + B_2 \alpha_3 + C_2)^{-1} (D_2 - B_2 \beta_3) \quad (A.11)$$

References

Balaras, E., Benocci, C., Piomelli, U., 1996. Two-layer approximate boundary condition for large-eddy simulation. *AAA Journal* 34, 1111–1119.

Behnia, M., Fameix, S., Durbin, P.A., 1998. Prediction of heat transfer in an axisymmetric turbulent jet impinging on a flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 41, 1845–1855.

Chevalier, P., Gourbet, B., Dutoya, D., Klotz, P., Ruiz, E., Troyes, J., Villedieu, P., 2005. CEDRE: development and validation of a multiphysics computational software. In: 1st European Conference for Aerospace Sciences (EUCAST), Moscow, Russia.

Craft, T.J., Launder, B.E., Suga, K., 1996. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 17, 108–115.

Craft, T.J., Gant, S.E., Iacovides, H., Launder, B.E., 2001. Development and application of a new wall function for complex turbulent flows. In: ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Swansea, Wales.

Craft, T.J., Gerasimov, A.V., Iacovides, H., Launder, B.E., 2002. Progress in the generalization of wall-function treatments. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 23, 148–160.

Craft, T.J., Gant, S.E., Iacovides, H., Launder, B.E., 2004a. A new wall-function strategy for complex turbulent flows. *Numerical Heat Transfer Part B* 45, 301–318.

Craft, T.J., Gerasimov, A.V., Iacovides, H., Kidger, J.W., Launder, B.E., 2004b. The negative buoyant turbulent wall jet: performance of alternative options in RANS modelling. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 25, 809–823.

Craft, T.J., Iacovides, H., Launder, B.E., Zacharas, A., 2008. Some swirling-flow challenges for turbulent CFD. *Flow Turbulence and Combustion* 80, 419–434.

Ditus, F.W., Boelter, L.M.K., 1930. Berkeley Publications on Engineering, vol. 2. University of California (p. 443).

Falkner, V.M., 1943. A new law for calculating drag. The resistance of a smooth flat plate with turbulent boundary layer. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology* 15, 65–69.

Incropera, F.P., DeWitt, D.P., 1996. Introduction to Heat Transfer, third ed. John Wiley & Sons, New York.

- Jayatilake, C.L.V., 1969. The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sublayer to momentum and heat transfer. *Progress in Heat and Mass Transfer* 1, 193–321.
- Menter, F.R., 1998. Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows. In: 24th AIAA Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida.
- Piomelli, U., Ferziger, J.H., Moin, P., Kim, J., 1989. New approximate boundary conditions for large-eddy simulations of wall bounded flows. *Physics of Fluids* 1, 1061–1068.
- Poinatte, P., Thurman, D., Hippensteele, S., 2008. Heat transfer in a superelliptic transition duct. NASA/TP-2008-214943, <<http://gltrs.grc.nasa.gov>>.
- Vanden Berg, B., Eisenaa, A., Lindhout, J.P.F., Wesseling, P., 1975. Measurements in an incompressible three dimensional turbulent boundary layer, under infinite swept-wing conditions, and comparison with theory. *Journal of Fluid Mechanics* 70, 127–148.
- Vallot, F., Scherer, D., Habiballah, M., 2008. CFD code validation for space propulsion applications. In: 5th International Symposium on Liquid Space Propulsion, Chattanooga, Tennessee.

Direct numerical simulation and biglobal stability investigations of the gaseous motion in solid rocket motors

F. Chedevergne^{1‡}, G. Casalis¹ and J. Majdalani^{2†}

¹ Aerodynamics and Energetics Modelling Department, ONERA, Toulouse 31055, France

² Department of Mechanical, Aerospace and Biomedical Engineering, University of Tennessee Space Institute, Tullahoma, TN 37388, USA

(Received 2 October 2011; revised 12 March 2012; accepted 23 May 2012)

In this article, a biglobal stability approach is used in conjunction with direct numerical simulation (DNS) to identify the instability mode coupling that may be responsible for triggering large thrust oscillations in segmented solid rocket motors (SRMs). These motors are idealized as long porous cylinders in which a Taylor–Culick type of motion may be engendered. In addition to the analytically available steady-state solution, a computed mean flow is obtained that is capable of securing all of the boundary conditions in this problem, most notably, the no-slip requirement at the chamber headwall. Two sets of unsteady simulations are performed, static and dynamic, in which the injection velocity at the chamber sidewall is either held fixed or permitted to vary with time. In these runs, both DNS and biglobal stability solutions converge in predicting the same modal dependence on the size of the domain. We find that increasing the chamber length gives rise to less stable eigenmodes. We also realize that introducing an eigenmode whose frequency is sufficiently spaced from the acoustic modes leads to a conventional linear evolution of disturbances that can be accurately predicted by the biglobal stability framework. While undergoing spatial amplification in the streamwise direction, these disturbances will tend to decay as time elapses so long as their temporal growth rate remains negative. By seeding the computations with the real part of a specific eigenfunction, the DNS outcome reproduces not only the imaginary part of the disturbance, but also the circular frequency and temporal growth rate associated with its eigenmode. For radial fluctuations in which the vorticoacoustic wave contribution is negligible in relation to the hydrodynamic stability part, excellent agreement between DNS and biglobal stability predictions is ubiquitously achieved. For axial fluctuations, however, the DNS velocity will match the corresponding stability eigenfunction only when properly augmented by the vorticoacoustic solution for axially travelling waves associated with the Taylor–Culick profile. This analytical approximation of the vorticoacoustic mode is found to be quite accurate, especially when modified using a viscous dissipation function that captures the decaying envelope of the inviscid acoustic wave amplitude. In contrast, pursuant to both static and dynamic test cases, we find that when the frequency of the introduced eigenmode falls close to (or crosses over) an acoustic mode, a nonlinear mechanism is triggered that leads to the emergence of a

† Email address for correspondence: joe.majdalani@gmail.com

‡ Present address: Fundamental and Applied Energetics Department, ONERA, Châtillon, France.

secondary eigenmode. Unlike the original eigenmode, the latter materializes naturally in the computed flow without being artificially seeded. This natural occurrence may be ascribed to a nonlinear modal interplay in the form of internal, eigenmode-to-eigenmode coupling instead of an external, eigenmode pairing with acoustic modes. As a result of these interactions, large amplitude oscillations are induced.

Key words: absolute/convective instability, aeroacoustics, vortex shedding

1. Introduction

Large segmented solid rocket motors (SRMs) are known to exhibit thrust oscillations that can be induced by inevitable disturbances that develop in motor cavities. Efforts to understand and predict the onset of these oscillations continue to receive attention in the propulsion community, particularly in the framework of the P230 programme, the primary booster for the European Ariane 5 launcher (see Fabignon *et al.* 2003). Although resonant combustion and, primarily, acoustic instabilities such as those studied by Culick (1968) and Kuentzmann (1991) were originally believed to be the only causes of thrust oscillations, hydrodynamic instabilities of the flow inside the motor have also been shown to provide additional sources of perturbations.

The earliest contributions in this direction include those by Varapaev & Yagodkin (1969), Beddini (1986), Vuillot (1995), Lee & Beddini (1999, 2000), and others. However, these endeavours have rested on the one-dimensional normal mode approach with perturbations in the streamfunction. Subsequent studies by Casalis, Avalon & Pineau (1998) and Griffond & Casalis (2001) have extended the one-dimensional investigations with the addition of experimental measurements and theoretical solutions based on perturbing the primitive variables. The latter are formulated along the lines of the local non-parallel (LNP) approach, in which all of the non-zero components of the basic flow are retained in the Navier–Stokes equations. In this vein, Casalis *et al.* (1998), Griffond, Casalis & Pineau (2000) and Griffond & Casalis (2000, 2001) have applied the LNP approach to injection-driven fluid motions in porous channels and tubes using the planar and axisymmetric steady flow profiles of Taylor (1956) and Culick (1966), respectively. These are used to mimic the bulk gaseous motion in slab and circular-port rocket motors. Corresponding experimental facilities that utilize a cold gas simulation are referred to as VECLA and VALDO. Other related studies include those on parietal vortex shedding and its connection to intrinsic instability by Lupoglazoff & Vuillot (1996), Couton, Doan-Kim & Vuillot (1997), Ugurtas *et al.* (1999) and Avalon, Casalis & Griffond (1998). The destabilizing effects of headwall injection are also considered by Abu-Irshaid, Majdalani & Casalis (2007) in modelling cylindrically shaped solid and hybrid rocket chambers.

To overcome the limitations of the LNP approach in relation to the problem in cylindrical, axisymmetric geometry (e.g. Griffond *et al.* 2000), a biglobal stability approach has been implemented by Chedevergne & Casalis (2005, 2006a) and Chedevergne, Casalis & Féraïlle (2006). Thus by expressing the disturbance amplitude as a function of two spatial coordinates, radial and axial, the biglobal approach is no longer restricted to a purely exponential form in prescribing spatial amplification or attenuation. In consequence, intrinsic instabilities of the mean flow field are succinctly identified as the primary source of pressure fluctuations (Chedevergne *et al.* 2006). According to Chedevergne & Casalis (2006a), biglobal instability predictions compare

favourably with live subscale SRM measurements obtained by Prévost & Godon (2005). They also agree satisfactorily with the large collection of data acquired through VALDO, the cold gas experimental facility operated by Avalon & Josset (2006). In particular, the unstable frequencies reported in the experiments are found to match the circular frequencies recovered from the biglobal stability analysis. Moreover, the biglobal theory is proved to be quite accurate in delineating the frequency paths arising in actual SRMs.

In the present article, some unresolved issues in previous studies are clarified through the use of direct numerical simulation (DNS) investigations. For example, DNS results will be used to: (a) verify the dependence of the temporal growth rate on the domain size; (b) reproduce the same frequencies and growth rates predicted by the stability eigensolver; and (c) confirm the nonlinear coupling between stability eigenmodes and acoustic modes, a mechanism that leads to the emergence of secondary eigenmodes in the flow. Additionally, the oscillatory velocity components obtained through DNS will be shown to match the corresponding stability eigenfunctions when properly augmented by the vorticoacoustic solution of Majdalani & Van Moorhem (1998), and a properly modelled viscous dissipation function that must be applied to the inviscid acoustic amplitudes.

The paper is organized as follows. Before exploring the details of the direct numerical simulation, the first part will be devoted to the biglobal stability equations used to capture the intrinsic instabilities of the flow field. In the process, the unresolved issues of this approach will be pointed out. Next, the procedure used to set up the DNS computations will be described along with the steps needed to evaluate the steady-state motion. This is followed by an overview of the theoretical techniques leading to the assessment of unsteady flow disturbances, including both hydrodynamic instability eigenmodes and pressure-driven vorticoacoustic modes. Our theoretical predictions will be thoroughly verified through comparisons to DNS data obtained using both a static and a dynamic chamber configuration in which the injection velocity at the sidewall is permitted to vary with time. The latter will enable us to continuously change the eigenmode frequency until crossing with the chamber's fundamental acoustic mode occurs. At the outset, the effect of acoustic and hydrodynamic modal crossing will be captured and discussed.

2. Problem configuration

2.1. Equations of motion

The configuration used to represent the flow inside a simulated SRM is delineated by a solid boundary at the headwall and a porous, semi-infinite cylindrical surface of radius R that we call the sidewall. Furthermore, we assume that a non-reactive, cold gas is injected uniformly and perpendicularly to the sidewall at a characteristic speed of V_{inj} as illustrated in figure 1. The regression of the propellant grain during rocket firing is modelled by the time evolution of R and V_{inj} .

For a viscous and incompressible fluid, the velocity $\mathbf{U} = (U_r, U_\theta, U_x)$ and pressure P satisfy the standard Navier–Stokes equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) + \nabla P = \mu \Delta \mathbf{U}, \end{cases} \quad (2.1)$$

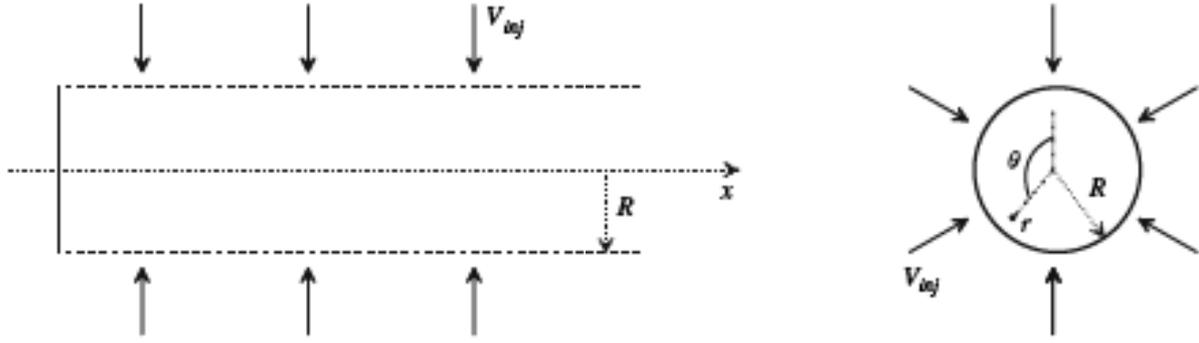


FIGURE 1. Cylindrical coordinate system (r, θ, x) . The gas is normally injected through the circumferential wall located at $r = R$ with an inward radial speed equal to V_{inj} . The porous cylinder is bounded by a solid wall located at $x = 0$.

where ρ denotes the flow density and μ the dynamic viscosity. Several boundary conditions may be associated with (2.1), and these correspond to the uniform wall-normal injection, the no-slip condition at the headwall, and the no-divergence condition along the axis $r = 0$:

$$\begin{cases} \forall x, \theta, t & U_r(x, R, \theta, t) = -V_{inj} \quad U_\theta(x, R, \theta, t) = U_x(x, R, \theta, t) = 0, \\ \forall r, \theta, t & U_r(0, r, \theta, t) = U_\theta(0, r, \theta, t) = U_x(0, r, \theta, t) = 0, \\ \forall x, \theta, t & \|U(x, 0, \theta, t)\|, |P(x, 0, \theta, t)| \text{ bounded.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Note that a singular point appears at the corner of the domain $(x = 0, r = R)$ where the radial flow entering the chamber from the sidewall is unable to observe the no-slip condition at the headwall. This situation is extensively analysed by Kurdyumov (2008) and will be revisited in § 2.2.2.

The present work is based on a perturbation concept that considers the instantaneous flow field as being composed of a basic, mean flow component and of two types of unsteady fluctuations. While the first type of disturbances is driven by the hydrodynamic instability eigenmodes, the second is due to the acoustic modes in the chamber. For this reason, the evaluation of the basic flow will be examined before analysing the unsteady contributions.

2.2. Mean flow evaluation

The classical representation of the mean flow (\bar{U}) in a simulated SRM is based on the assumption that the motion may be decomposed into a series of steady-state profiles. As shown by Majdalani, Vyas & Flandro (2002, 2009), the effects of time-dependent propellant grain regression on the mean flow may be safely dismissed in the context of linear stability and vorticoacoustic wave analysis. The characteristic frequencies of these unsteady effects are sufficiently low compared with other flow disturbances to justify ignoring them. Consequently, the radius R and injection velocity V_{inj} may be taken as quasi-steady, even when their values must be updated with each time step based on data acquired from live rocket firings. Moreover, the analysis of Majdalani (2007) suggests that compressibility effects in typical SRMs are only important in chambers with lengths that exceed approximately 40 % of the critical distance needed for the flow to reach choking conditions in the absence of a converging-diverging nozzle.

Hence, by assuming incompressible and axisymmetric mean flow conditions, the system given by (2.1)–(2.2) can be made dimensionless, and written in terms of the

mean flow streamfunction Ψ and the dimensionless vorticity $\bar{\Omega} = \bar{\Omega} e_\theta = \nabla \times \bar{U}$. In this process, spatial coordinates, time, velocity components and pressure are normalized using R , R/V_{inj} , V_{inj} and ρV_{inj}^2 , respectively. These render

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = -\mathcal{L}\Psi = -\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right), \\ \frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial(\bar{\Omega}/r)}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial(\bar{\Omega}/r)}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\bar{\Omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\Omega}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial r} - \frac{\bar{\Omega}}{r}\right) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

where the Reynolds number $Re = \rho R V_{inj} / \mu$ depends on the instantaneous radius and injection velocity. The linear operator $\mathcal{L} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial r^2 - r^{-1}\partial/\partial r$ connecting the mean flow vorticity and the streamfunction is used later to define the linear stability problem in (3.2). At this stage, the physical conditions stemming from (2.2) may be expressed in terms of Ψ and written as

$$\begin{cases} \forall x : \frac{\partial\Psi}{\partial r}(x, 1) = 0, & \frac{\partial\Psi}{\partial x}(x, 1) = 1, \\ \forall r : \frac{\partial\Psi}{\partial r}(0, r) = \frac{\partial\Psi}{\partial x}(0, r) = 0, \\ \forall x : \frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3}(x, 0) = \frac{\partial\Psi}{\partial r}(x, 0) = \frac{\partial\Psi}{\partial x}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Note that the last three relations are deduced from the axisymmetric conditions along $r = 0$, namely, $\bar{U}_r = 0$ and $\partial\bar{U}_x/\partial r = 0$. They can also be derived from (2.3) after expanding Ψ in a Taylor series about $r = 0$.

2.2.1. Taylor-Culick motion

Similarity solutions for (2.3)–(2.4) exist provided that the corner condition that requires forcing $\bar{U}_r = 0$ at $x = 0$ is relaxed. In the absence of this singularity, one may follow Berman (1953) and posit $\Psi = xF(r)$ to the extent of retrieving

$$\begin{cases} \left[\left[\left(\frac{F}{r}\right) \left(\frac{F'}{r}\right)' - \left(\frac{F'}{r}\right)^2 \right]' + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \left(r \left(\frac{F'}{r}\right)' \right)' \right]' \right]' = 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} (F'' - F'/r)/r = F(0) = F'(1) = 0, \quad F(1) = 1, \end{cases} \quad (2.5)$$

where primes denote differentiation with respect to r . As shown independently by Taylor (1956) and Culick (1966), an exact solution of (2.5) exists for an infinite Reynolds number, with $\bar{\Omega} = C^2 r \Psi$ and $C \in \mathbb{R}$. The corresponding Taylor-Culick motion is defined by

$$\begin{cases} \bar{U}_r = -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \\ \bar{U}_x = \pi x \cos\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \end{cases} \quad \bar{P} = -\frac{\pi^2 x^2}{2} - \frac{1}{2r^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) + P_0 \quad (2.6)$$

where P_0 is the reference pressure at the headwall centre.

To illustrate the non-parallel nature of the Taylor-Culick flow due to radial injection at $r = 1$, analytical streamlines are depicted as solid lines in figure 2. We also note that the motion becomes gradually more parallel in the downstream direction, away from the headwall.

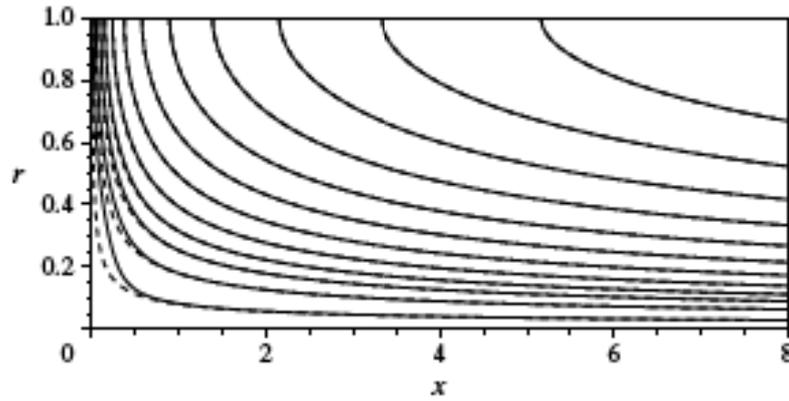


FIGURE 2. Streamlines of the mean flow solutions. Solid lines correspond to the DNS-computed base flow used in § 4, whereas dashed lines stand for the Taylor–Culick analytical solution given by (2.6).

In studying the influence of the mean flow on one-dimensional linear stability, Griffond *et al.* (2000) show that (2.6) represents a legitimate solution of Berman’s equation for $Re > 1000$. Furthermore, Majdalani & Akiki (2010) show that viscous effects do not play any appreciable role in modifying the flow characteristics, especially when the no-slip condition $\bar{U}_r(0, r) = 0$ is discounted. These theoretical predictions are corroborated by the excellent agreement between the Taylor–Culick profile and cold-flow measurements acquired by Avalon & Josset (2006) using an experimental facility known as VALDO. The latter has a radius of $R_0 = 0.03$ m and allows V_{inj} to vary from 0.6 m s $^{-1}$ up to 2 m s $^{-1}$, thus permitting its Reynolds number to range between 1200 and 4000. In this setup, a fluid is injected across a porous cylinder that is made of poral, a permeable bronze metal. In addition to these in-house experiments, the Taylor–Culick motion is actually confirmed through a set of laboratory investigations carried out by Dunlap *et al.* (1990). In both experiments, it is reported that agreement with experimental data is maintained as long as the flow remains laminar with $x/R < 12$. It can thus be seen that the inviscid Taylor–Culick solution provides an excellent approximation of the Berman equation for large Re and $x/R < 12$.

2.2.2. Computed mean flows

In seeking a more accurate representation of the mean flow, a numerically computed solution will be needed, particularly one that remains valid both in the headwall region and far downstream. To overcome the inconsistency at the point $(0, 1)$, a simple idea may be borrowed from the cold-flow apparatus VALDO and then implemented into our model by introducing a spatially varying velocity distribution $V_{inj}(x)$ along the sidewall. This spatial function will satisfy the condition $V_{inj}(0) = 0$ while still permitting a smooth C^2 transition to the final value of $V_{inj} = 1$, after crossing a designated distance from headwall that we refer to as x_{link} . Different feasible test functions have in fact been explored and these are summarized in a paper by Chedeveigne & Casalis (2006b).

To start with, the computation of the mean flow is performed for a porous cylinder truncated at $x = X_e$ using a multi-module, multi-physics code named CEDRE. This solver is developed at ONERA with the objective of serving multiple functions and flow regimes, including instantaneous velocity and pressure calculations in a user-defined SRM chamber. Spatial discretization in CEDRE is based on a finite volume

Δr_{min}	Δr_{max}	Δx_{min}	Δx_{max}
2.89×10^{-6} m	2.945×10^{-4} m	2.29×10^{-6} m	1.2566×10^{-3} m

TABLE 1. Grid spacings used to compute both mean and unsteady flows.

approach that employs an upwind Roe scheme with a second-order extension (MUSCL scheme with Van Leer limiter). A complete description of the code is given by Refloch *et al.* (2011) and more specific information concerning code validation for rocket simulations may be gleaned from a survey by Vuillot, Scherrer & Habiballah (2003).

In the interest of establishing realistic baseline cases, the characteristic length and velocity are chosen to match those employed in the VALDO facility by Avalon & Josset (2006). For this reason, we use a chamber radius of $R = R_0 = 0.03$ m and an injection velocity of $V_{inj} = 1$ m s⁻¹. Homogeneous boundary conditions are subsequently used, corresponding to the velocity adherence at $x = 0$, the constant normal velocity injection at $r = R$, and symmetry conditions at $r = 0$. At $x = X_e$, a radial pressure equilibrium is imposed so that the average pressure is equal to P_{am} :

$$\frac{1}{R} \int_0^R P(r) dr = P_{am}. \quad (2.7)$$

Four meshes are successively tested to the extent of establishing grid independence. Our sample results for $X_e = 8$ are performed with a Cartesian grid that is composed of 301×161 nodes (later, for $X_e = 10$, the grid is increased to 351×161 nodes such that the thickness of the cells at the headwall remains identical to the $X_e = 8$ case). Furthermore, cosine repartition is employed such that the thickness of the cells on the boundaries is suitably refined close to the headwall. The minimum and maximum grid spacings used are given in table 1.

Here, calculations are conducted in the (x, r) plane assuming an axisymmetric, rotational, laminar flow. To reach steady state, an implicit time scheme is used with a fixed value of the Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) number. Using $CFL = 10$, steady-state runs are performed to obtain the basic flow components whose (dashed) streamlines are depicted in figure 2. Compared to the Taylor–Culick approximation, one may infer that good agreement exists. Both solid and dashed lines merge quite rapidly as one departs from the headwall. The limiting case of $x_{link} = 0$ with $V_{inj} = \text{const.}$ (which proves to be mesh-dependent) differs from the Taylor–Culick solution solely because of the viscous effects that are neglected in the analytical model expressed through (2.6).

Figure 3(a,b) provides views of the mean axial and radial velocity components computed at a dimensionless $X_e = 8$ and $V_{inj} = 1$ m s⁻¹. It is clear that this flow closely resembles the Taylor–Culick model except in the front-end region, where a boundary layer develops. The agreement obtained between the computed flow and the Taylor–Culick profile confirms the essentially incompressible character of this motion. While a compressible solution for the Taylor–Culick problem has been recently developed by Majdalani (2007), it is not considered here due to the relatively small velocities characterizing our problem.

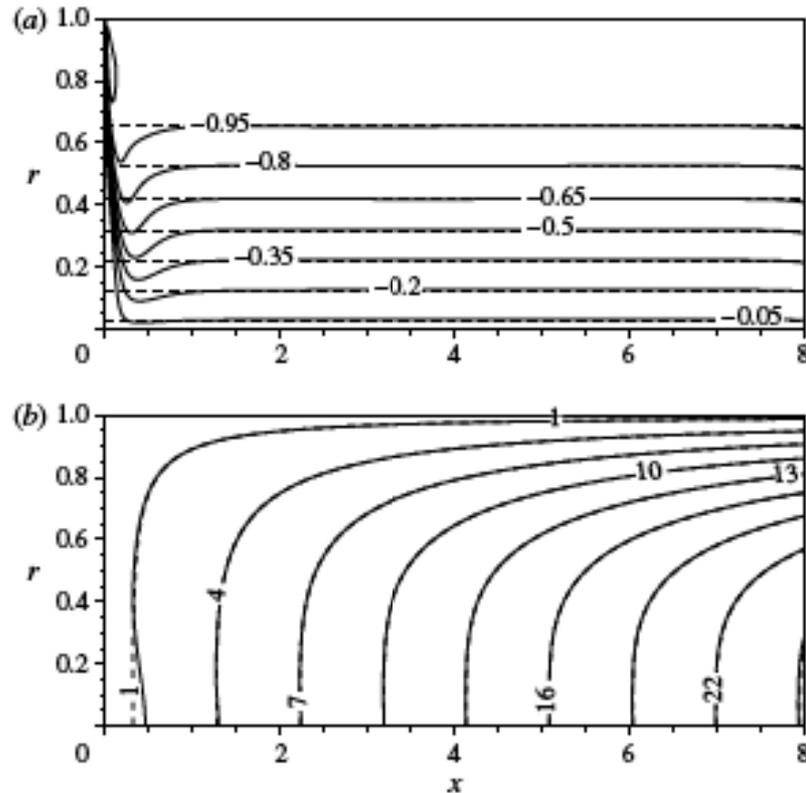


FIGURE 3. Contour lines of the axial and radial components of the basic flow velocity: (a) \bar{U}_x and (b) \bar{U}_r . Solid lines represent the DNS-computed mean flow and dashed lines display the analytical solution given by (2.6).

At this stage, it may be instructive to note that, as described in detail by Chedeveigne & Casalis (2006b), the impact of a numerically acquired mean flow on hydrodynamic instability eigenmodes may be shown to be weak in the extent of small x_{link} values. On the one hand, although the physical nature of the eigenmodes remains indifferent to the choice of analytical or computed motions, using a computed mean flow leads to a more accurate specification of the eigenvalues. For this reason, the computed field will be used in the stability analysis. On the other hand, unlike hydrodynamic stability eigenmodes, acoustic modes remain unaffected by the small mean flow differences that arise in the front-end region. This may be attributed to the markedly longer wavelengths associated with acoustic oscillations. The attendant behaviour will be illustrated in § 3.2, where the limited impact of the mean flow approximation on the acoustic modes will be discussed. Unless noted otherwise, the analytical Taylor–Culick profile will be the basis of the vorticoacoustic wave analysis.

In what follows, the term ‘mean flow’ will designate the steady-state solution obtained either numerically or analytically, depending on whether the analysis refers to hydrodynamic stability or acoustic mode calculations, respectively.

3. Theoretical treatment of flow disturbances

When a basic flow is perturbed, it gives rise to both incompressible, hydrodynamic instability eigenmodes, and to compressible, pressure-driven acoustic modes. The corresponding disturbances may be determined using techniques based on biglobal instability, Helmholtz wave decomposition, and small perturbation theories. In this

study, only a brief overview of the relevant theories will be presented. Substantially more detailed descriptions can be found in work by Chedevergne *et al.* (2006) and Majdalani (2009).

3.1. Hydrodynamic instability eigenmodes

3.1.1. Streamfunction formulation

Eigenmodes of the flow induced by wall-normal injection originate in accordance with biglobal stability theory. In fact, a biglobal approach is needed because of the non-parallel nature of the basic flow, especially for small x . The linear theory that we rely on is based on a perturbation notion that considers any physical quantity Q to be a superposition of a mean variable \bar{Q} and a fluctuating, time-dependent part q . The decomposition $Q = \bar{Q} + q$ can be introduced into the Navier–Stokes equations which, after some simplifications and cancellations, give rise to a linear system of partial differential equations (PDEs). These PDEs prescribe the motion of time-dependent disturbances q . Because of linearity, only one-way coupling is permitted such that the mean flow can affect the disturbances but not the other way around. In the linearized system of equations, the Reynolds number Re , the mean flow \bar{Q} , and its various derivatives, define the main coefficients. Accordingly, any perturbation q may be judiciously expressed as

$$q = \hat{q}(x, r)e^{i(n\theta - \omega t)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

This unsteady variable representation is mathematically consistent with the mean flow being dependent on both x and r . It can thus be seen that biglobal theory differs from the local stability concept where the amplitude function $\hat{q} = \hat{q}(r)$ is strictly one-dimensional. In (3.1), n is an integer that denotes the azimuthal wavenumber (an index that vanishes for purely axisymmetric disturbances), θ stands for the azimuthal angle, and ω represents the complex circular frequency. While its real part ω_r reproduces the circular frequency of oscillations, its imaginary part ω_i controls the temporal growth rate.

Based on the findings of Chedevergne & Casalis (2005, 2006a) and the supporting experimental measurements gathered from subscale SRMs by Prévost & Godon (2005), the hypothesis of axisymmetric disturbances seems quite appropriate as it leads to near-perfect agreement between theory and measurements. Furthermore, by focusing on the $n = 0$ eigenmodes, a two-dimensional streamfunction ψ may be introduced to capture the essence of the disturbances. This simplification enables us to reduce the linearized Navier–Stokes equations into a single, fourth-order PDE written for the unsteady streamfunction $\psi(x, r) = \hat{\psi}(x, r)e^{i(n\theta - \omega t)}$. We get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial (\mathcal{L} \hat{\psi})}{\partial x} - r \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \mathcal{L} \hat{\psi} \right) + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] \\ & - r \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{Re} \mathcal{L} (\mathcal{L} \hat{\psi}) = i\omega \mathcal{L} \hat{\psi}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

At this point, one may recall that the instantaneous flow $Q = \bar{Q} + q$ must satisfy the original boundary conditions stipulated in (2.4). This permits deducing the assortment

of conditions that must be imposed on $\hat{\psi}$, namely,

$$\begin{cases} \forall x: \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r}(1, x) = 0; & \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}(1, x) = 0, \\ \forall r: \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r}(r, 0) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}(r, 0) = 0, \\ \forall x: \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial r^3}(r, 0) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r}(r, 0) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}(r, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Next, we sketch the numerical scheme that must be applied to (3.2)–(3.3).

3.1.2. Numerical procedure

Equation (3.2) can be solved directly for $(x, r) \in [0, X_e] \times [0, 1]$ provided that a suitable outflow condition is made available at $x = X_e$. We follow Theofilis (2003, 2011), Theofilis, Duck & Owen (2004) and Casalis *et al.* (2004), who utilize a simple linear extrapolation relation. Thus, given a number of discretization points N_x in the streamwise direction, we set, for all r :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(X_e, r) = \hat{\psi}(X_{N_x}, r) &= \frac{X_{N_x} - X_{N_x-2}}{X_{N_x-1} - X_{N_x-2}} \hat{\psi}(X_{N_x-1}, r) \\ &+ \frac{X_{N_x-1} - X_{N_x}}{X_{N_x-1} - X_{N_x-2}} \hat{\psi}(X_{N_x-2}, r). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Discretization of the computational domain $[0, X_e] \times [0, 1]$ may be effected using Chebyshev polynomials. After some effort, (3.2)–(3.4) are turned into a generalized eigenvalue problem of the form $\mathcal{A}\psi = \omega\mathcal{B}\psi$. Here the unknown eigenvector ψ refers to an arrangement of the discretized values of $\hat{\psi}(x, r)$ whereas ω corresponds to one of the (unknown) eigenvalues. Finally, Arnoldi's algorithm may be implemented to produce the problem's complex eigenvalues, ω , and their associated eigenvectors ψ , as shown for example by Golub & Loan (1996).

3.1.3. Biglobal stability spectra

As alluded to earlier, the stability results featured in this work are based on a numerically computed mean flow. Two sample sets of complex eigenvalues are showcased in figure 4 for $Re = 1975$ and $X_e = 8$ and 10. Interestingly, although the spectra appear at approximately the same circular frequencies, their temporal growth rates increase with the chamber length. Everywhere, the CEDRE-computed basic flow corresponds to $R = 0.03$ m and $V_{inj} = 1$ m s⁻¹.

For each eigenvalue ω , a companion eigenvector ψ may be retrieved, thus leading to the recovery of the axial and radial velocity eigenfunctions \hat{u}_x and \hat{u}_r directly from

$$\hat{u}_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \quad \text{and} \quad \hat{u}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Clearly, any disturbance $q = \hat{q}e^{-i\omega t}$, determined by its eigenvalue ω , contains the essential fluctuating flow ingredients such as u_x, u_r, p and their derivatives. Using the constant parameters R and V_{inj} , the complete set of perturbations q may be transformed into dimensional quantities. Although mathematically q can be complex, the associated physical perturbation is given by its real part $\text{Re}(q)$. Then, given an

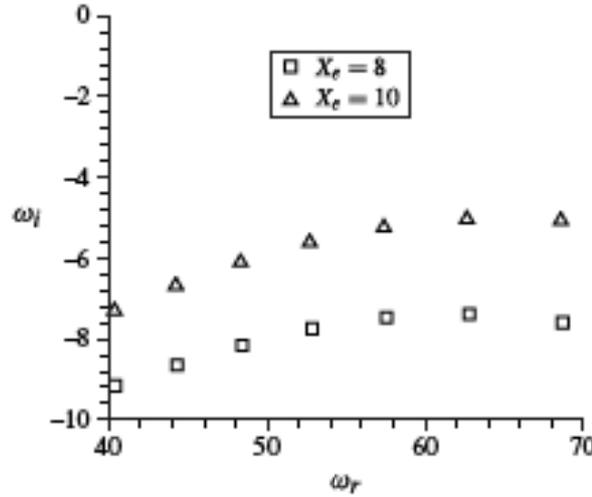


FIGURE 4. Set of eigenvalues in the complex (ω_r, ω_i) plane for $Re = 1975$. Two cases are shown: $X_e = 8$ (squares) and $X_e = 10$ (triangles).

eigenmode $\omega = \omega^0$, the ensuing physical disturbance may be deduced from

$$\begin{cases} \text{Re}(A\hat{q}e^{-i(V_{inj}/R)\omega_r^0 t}) = A[(\hat{q})_r \cos(2\pi ft) + (\hat{q})_i \sin(2\pi ft)]e^{\nu t}, \\ \text{with } f = \frac{V_{inj}}{2\pi R}\omega_r^0 \quad \text{and} \quad \nu = \frac{V_{inj}}{R}\omega_i^0 \end{cases} \quad (3.6)$$

where $\omega^0 = \omega_r^0 + i\omega_i^0$ and A represents the initial amplitude of the perturbation, an initially unknown value. Naturally, it is not necessary to specify A because q is a solution to a linear system.

Two major results stemming from the stability analysis can be immediately pointed out. First, we note that the spectrum in figure 4 is discrete. As such, only a discrete set of dimensionless frequencies ω_r exists for which disturbances may develop from the mean flow. Second, all of the eigenvalues ω bear a negative imaginary part. This implies that all of the eigenmodes will be exponentially damped in time. However, their associated eigenfunctions will grow exponentially in the streamwise direction, as illustrated in figure 5(a,b). These three-dimensional surface plots display the spatial evolution of the real part of the eigenfunctions \hat{u}_x and \hat{u}_r for the eigenvalue $\omega^0 = 40.409 - 9.164i$ and $X_e = 8$. Without having been explicitly prescribed in the formulation of the disturbance itself, as in (3.1), the axial fluctuation in figure 5(a) points to the existence of a strong (exponential-like) amplification in the x direction. The spatial amplification is thus implicitly embedded in the biglobal stability framework.

We conclude that, for a given eigenvalue, two counteracting mechanisms are seen to coexist: a temporal decay affecting the perturbations as time elapses and a spatial growth in the perturbed amplitudes as the wave propagates downstream. These eigenmodes do not represent absolute instabilities. Provided that X_e remains small in figure 4, the flow will continue to be globally stable. The influence of X_e on the eigenvalues will be further discussed in § 4.

3.2. Vorticoacoustic modes

In the absence of mean flow instability, the flow driven by wall-normal injection in a porous chamber is strongly susceptible to vorticoacoustic oscillations. These are

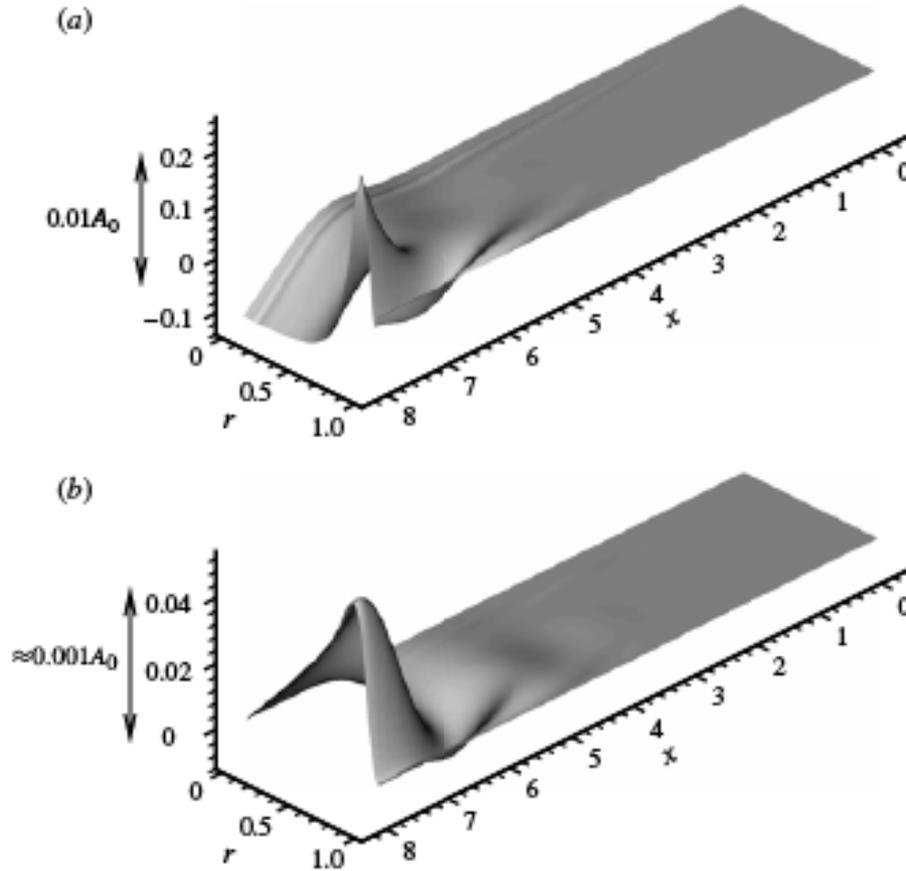


FIGURE 5. Axial and radial components of the velocity eigenfunctions (real parts) for eigenmode $\omega = 40.409 - 9.164i$: (a) \hat{u}_x and (b) \hat{u}_r . Here $t = 0$ and the initial amplitude in (3.6) is taken as $A = 0.01A_0$, where A_0 is defined in figure 3(a).

invariably reported in SRM chambers due to small, inevitable fluctuations in the injection process (Majdalani, Flandro & Roh 2000). Unlike hydrodynamic instability disturbances, which evolve over short wavelengths and characteristic speeds at the order of the mean flow, the vorticoacoustic waves travel over much longer wavelengths and a much higher speed, namely, that of sound. The disparity in spatial and temporal scales over which these two types of disturbances propagate enables us to linearly superimpose their contributions and obtain the total unsteady fluctuation in the chamber.

With the instability eigenfunctions already in hand, the vorticoacoustic waves remain to be determined, and these have been systematically investigated by Majdalani and co-workers in a variety of geometries and flow configurations (see, for example, Majdalani & Van Moorhem 1998; Majdalani 1999; Majdalani & Roh 2000; Majdalani 2001*a,b*; Majdalani & Flandro 2002; Majdalani 2009). Unlike the instability waves, which cannot be obtained except by computer, the vorticoacoustic framework leads to closed-form approximations that can be used to directly describe the oscillatory waves driven by pressure fluctuations. In what follows, only the basics of Majdalani's approach will be revisited.

In the analytical framework, a small perturbation q is superimposed on the mean flow \bar{Q} to the extent of linearizing the compressible Navier–Stokes equations before seeking an asymptotic solution. The steady motion \bar{Q} may be equated to the Taylor–Culick profile, although the time-dependent formulation has been

generalized to the extent of accommodating an arbitrary mean flow (see Majdalani 2001a; Majdalani & Flandro 2002; Majdalani 2009). Subsequently, the Helmholtz decomposition theorem can be used to split the temporal perturbation q into two complementary parts: $q = \check{q} + \bar{q}$. Here \check{q} defines the irrotational compressible wave, which is pressure-driven, and \bar{q} denotes the incompressible rotational part, which is induced by unsteady vorticity originating at the boundaries. Chu & Kovászny (1958) refer to these fluctuations as mass-like or force-like, sound or vorticity disturbance modes, respectively. In the present configuration, \check{q} stands for the irrotational acoustic wave, which is dominated by longitudinal oscillations in a porous cylinder with no flow, thus leaving \bar{q} to serve as the correction needed to account for the basic flow pattern \bar{Q} . As noted by Griffond (2002), \bar{q} controls the vorticoacoustic boundary layer and this component has been resolved using several perturbation methods such as multiple scales and WKB.

For an axisymmetric cylinder, the sound wave \check{q} may be expressed as

$$\begin{cases} \check{p}(x, t^*) = \cos(\omega_m x) e^{-i\omega_m t^*}, \\ \check{u}(x, t^*) = i \sin(\omega_m x) e^{-i\omega_m t^*} e_x \end{cases} \quad (3.7)$$

where \check{p} and \check{u} are the pressure and velocity fluctuations of the longitudinal plane wave. Using a_0 for the speed of sound, these fluctuations are normalized by a characteristic time $t^* = ta_0/R$, which captures the time that an acoustic disturbance consumes while crossing the radius. For the closed–open acoustic conditions imposed by the present configuration, one may use a circular frequency of $\omega_m = (m - \frac{1}{2})\pi/X_e$, where $m \in \mathbb{N}^*$.

As shown by Majdalani & Flandro (2002), the boundary-driven vorticity wave \bar{q} associated with a steady motion \bar{Q} can be expressed in terms of a self-similar mean flow streamfunction, $\Psi(x, r) = xF(r)$. By letting \bar{q} designate the velocity fluctuation \bar{u} , we have

$$\begin{cases} \bar{u}_x = -i \left(\frac{F}{F_0} \right) e^{[\zeta - i(\omega_m t^* + \Phi)]}, & F_0 \equiv F(1), \quad F'_0 \equiv F'(1), \\ \bar{u}_r = -\frac{M}{r} \left(\frac{F}{F_0} \right)^3 e^{[\zeta - i(\omega_m t^* + \Phi)]}, \end{cases} \quad (3.8)$$

where $M = V_{inj}/a_0$ is the wall injection Mach number. Using the generalized-scaling technique introduced by Majdalani & Rienstra (2002), $\zeta(r)$ and $\Phi(r)$ may be written at order Re^{-1} ,

$$\begin{cases} \zeta(r) = \xi \int_1^r x^3 F^{-3}(x) dx, \\ \Phi = S_m \left[\int_1^r (xF^{-1} - 4Re^{-1}xF^{-2}) + \frac{3}{2}Re^{-1}(r^2F^{-2} - F_0^{-2}) \right], \end{cases} \quad (3.9)$$

where

$$\xi = \frac{S_m^2}{Re} = \frac{\omega_m^2}{M^2 Re}, \quad S_m = \frac{\omega_m}{M}, \quad Re = \frac{V_{inj} R}{\nu}, \quad (3.10)$$

and the characteristic function F may be taken to be

$$F(r) = \begin{cases} r^2(2 - r^2) & 10 < Re < 100, \\ \sin(\frac{1}{2}\pi r^2) & Re \geq 100. \end{cases} \quad (3.11)$$

The Taylor–Culick flow becomes a special case for which $F = \sin \theta$, $F_0 = 1$, $F'_0 = 0$, and $\theta = \frac{1}{2}\pi$. The corresponding solution reduces to

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_x = -i \sin \theta \sin(\omega_m x \sin \theta) e^{[\zeta - i(\omega_m r^* + \Phi)]}, \\ \bar{u}_r = -\frac{M}{r} \sin^3 \theta \cos(\omega_m x \sin \theta) e^{[\zeta - i(\omega_m r^* + \Phi)]}, \\ \zeta = -\frac{\xi}{\pi^2} \left[\csc \theta - 1 + \theta \cot \theta \csc \theta + I\left(\frac{1}{2}\pi\right) - I(\theta) \right], \\ \Phi = \frac{S_m}{\pi} \ln \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \frac{S_m}{\pi Re} \left[4 \cot \theta + 3 \left(\theta \csc^2 \theta - \frac{1}{2}\pi \right) \right], \\ I(\theta) = \theta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - 2^{1-2k})}{(2k+1)\pi^{2k}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k}} \right) \theta^{2k+1} \\ = \theta + \frac{1}{18}\theta^3 + \frac{7}{1800}\theta^5 + \frac{31}{105840}\theta^7 + \dots \end{array} \right. \quad (3.12)$$

A simpler closed-form expression may be obtained, as shown by Majdalani & Van Moorhem (1998), using the concept of composite scales. The so-called ‘CST’ technique is a variant of multiple scales theory and applies to the treatment of some problems with nonlinear scales (see Majdalani 1998, 2001a). At the outset, one may employ a practically equivalent expression to (3.12), namely,

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = -\xi \left[\frac{\eta(r)r^3}{F^3} - \frac{\eta(1)}{F_0^3} \right] = -\xi \frac{\eta(r)r^3}{\sin^3 \theta}, \\ \eta(r) = \frac{1-r}{1 + \frac{3}{2}(1-r)^{3/2} \left(\frac{1-r}{r} - \frac{3}{2} \ln r \right)}, \\ \Phi = S_m \int_1^r \frac{x}{F} dx + \frac{S_m}{Re} \left[\frac{\eta(r)r}{F^3} (3rF' + 2F) - \frac{\eta(1)}{F_0^3} (3F'_0 + 2F_0) \right] \\ = \frac{S_m}{\pi} \ln \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \frac{2S_m}{Re} \frac{\eta(r)r}{\sin^2 \theta} \left(1 + \frac{3\theta}{\tan \theta} \right). \end{array} \right. \quad (3.13)$$

A detailed characterization of the vorticoacoustic layer that accompanies (3.13) is given by Majdalani (1999). Figure 6 illustrates the distribution of the axial component of the wave by providing four radial profiles along the chamber for the first acoustic mode. The irrotational component \bar{u}_x can be identified as the driver of the rotational part \bar{u}_r . Their combination leads to the vorticoacoustic velocity fluctuation in the axial direction.

The relations formed by (3.7)–(3.13) constitute a practical framework for analytically approximating the acoustic modes while accounting for the effects of the mean flow \bar{Q} , especially in the case of the Taylor–Culick profile. When using the latter, the vorticoacoustic approximation will be valid everywhere except in the close vicinity of the headwall. This particular limitation remains secondary because fluctuations near the headwall are so small that they can be of no material consequence.

As for the modal dependence on X_e , it may be helpful to remark that the acoustic frequencies are directly impacted by variations in the chamber length through $\omega_m = (m - \frac{1}{2})\pi/X_e$. So while X_e plays an appreciable role in controlling the frequency

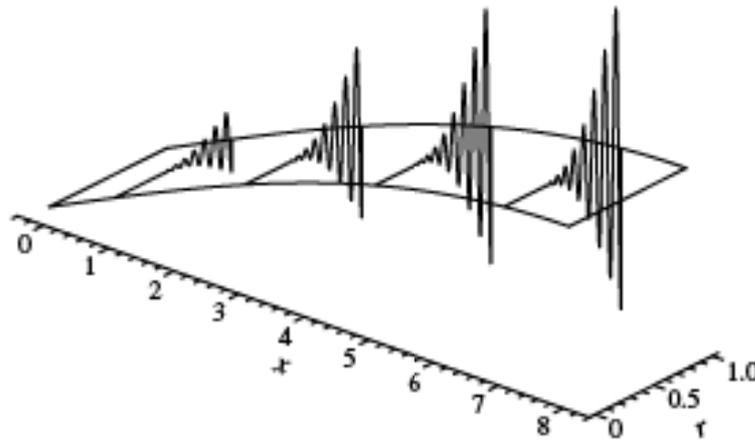


FIGURE 6. Radial profiles of the longitudinal velocity of the first acoustic mode $\omega_1 = 6.545$.

of the compressible mode, its effect on the incompressible eigenmode ω_r remains secondary. This behaviour is corroborated by the spectrum of figure 4, where the influence of X_e on ω_r can hardly be seen.

4. Direct numerical simulation (DNS)

It may be generally hypothesized that amplification of thrust oscillations can be attributed to coupling mechanisms between acoustic modes and hydrodynamic instability frequencies. To investigate such potential interactions, DNS calculations are performed with the aim of elucidating the unsteady wave behaviour. In this effort, two separate types of computations are carried out and these correspond to two distinct configurations. The first aims at investigating the coupling between eigenmode frequencies and acoustic modes in the context of a static configuration in which both R and V_{inj} remain fixed. This setup can also permit characterizing the dependence of biglobal stability eigenmodes on X_e .

In the second set of numerical experiments, which we call dynamic, V_{inj} is varied to the extent of reproducing the emergence of eigenmodes through acoustic forcing.

The DNS computations of the unsteady disturbances represent a continuation to the simulation initiated in § 2.2.2 based on ONERA's code CEDRE. For consistency, the same geometric and input parameters used to obtain the steady-state solution are retained in the unsteady flow investigation.

4.1. Static cases

The primary reason behind DNS computations in a static configuration is to isolate the influence of one specific eigenmode on the acoustic field. As stated in § 3.1, an eigenmode can be characterized by its dimensionless frequency ω_r . Depending on the proximity of ω_r to the acoustic frequencies, different outcomes may be expected. In addition, since the dependence of eigenmodes on X_e has been brought into question, several test cases will be simulated with varying chamber lengths.

4.1.1. Computational strategy

Our strategy is to superimpose, at the initial time, a representative eigenmode $\omega = \omega^0 = 40.409 - 9.164i$ (extracted from the spectrum in figure 4), on the DNS-calculated basic flow. The eigenvelocities u_x and u_r associated with ω^0 are projected on the DNS grid and added to the previously computed mean flow. The projection is made so that fluctuations in u_x and u_r follow (3.6) at $t = 0$.

Regarding u_x , we take $A^w = 0.01A_0$, with A_0 being the peak value attained by the longitudinal component \bar{U}_x as shown in figure 3(a). This value is selected so that fluctuations remain in the linear range relative to the mean flow. As for the amplitude factor A^w , it is prescribed by the stability calculation. Typically, one gets $A^w \approx 0.1A^u$. Given that the initial time corresponds to $t = 0$ s, only the real parts (\hat{u}_x)_r and (\hat{u}_r)_r need to be introduced into the simulations.

It may be important to note that the pressure perturbation of the stability mode $\omega = \omega^0$ is not superimposed on the pressure distribution of the mean flow, being very small in amplitude. At first glance, the superposition process may appear to be simple. Actually, the superposition of the mean and unsteady components requires careful grid projections to avoid introducing spurious errors. It also requires special attention to the boundary conditions.

To compute the unsteady field, an explicit time scheme is used with a time step of $\Delta t = 5 \times 10^{-9}$ s. The corresponding maximum CFL number is kept under unity. With the origin of time being set at $t = 0$ s, our computer runs are stopped after 4 000 000 iterations, at $t = 0.02$ s. Subsequently, signals from different virtual sensors (placed to cover the flow in the entire chamber) are extracted and analysed.

It should be remarked that other comparable strategies exist for exploring the character of oscillations in simulated SRMs. For example, Apte & Yang (2001a,b, 2003) introduce white noise or an acoustic excitation to perform LES calculations that can be quite effective at capturing the triggered instabilities.

4.1.2. Three representative cases

Using the strategy described above, several representative computations are performed by changing the eigenmode introduced at $t = 0$ s or the length of the chamber X_c . In what follows, three benchmark cases are chosen at fixed values of R and V_{inj} . The first two enable us to capture the effect of changing X_c . The third one aims at exploring the nonlinear behaviour that emerges from eigenmodes being close to the main chamber's acoustic frequency.

- (i) Case 1: introduces $\omega^0 = 40.409 - 9.164i$ in the DNS code using $X_c = 8$. The corresponding frequency is calculated to be $f = V_{inj}\omega_r^0/(2\pi R_0) = 214$ Hz.
- (ii) Case 2: introduces $\omega^0 = 40.367 - 7.302i$ in the DNS code using $X_c = 10$. Although this eigenmode is less damped than in Case 1, its frequency remains the same, namely, $f = 214$ Hz.
- (iii) Case 3: introduces $\omega^0 = 68.679 - 7.594i$ in the DNS code using $X_c = 8$. The frequency shifts to $f = 364$ Hz, which is nearly identical to the first acoustic mode in the chamber, specifically, $f_{ac} = a_0/(4RX_c) = 363$ Hz.

The essential difference between the first two cases lies in the computations being carried out in chambers with slightly different lengths. In figure 4, one can clearly see that the mode $\omega = 40.409 - 9.164i$, calculated for $X_c = 8$, shifts to $40.367 - 7.302i$ when the length is increased to $X_c = 10$. Physically, the two modes are virtually the same and the lowest for the given geometry.

For the two chamber lengths, $X_c = 8$ and 10, the acoustic frequencies are 291 and 363 Hz, respectively. For Cases 1 and 2, the frequency of the intrinsic disturbance is 214 Hz, hence considerably lower than the acoustic mode frequency. Because of this disparity in frequencies, one expects the perturbations to exhibit linear oscillations. In contrast to the first two cases, Case 3 consists of an eigenmode with a frequency that mirrors the first acoustic mode. At the outset, one expects nonlinear interactions

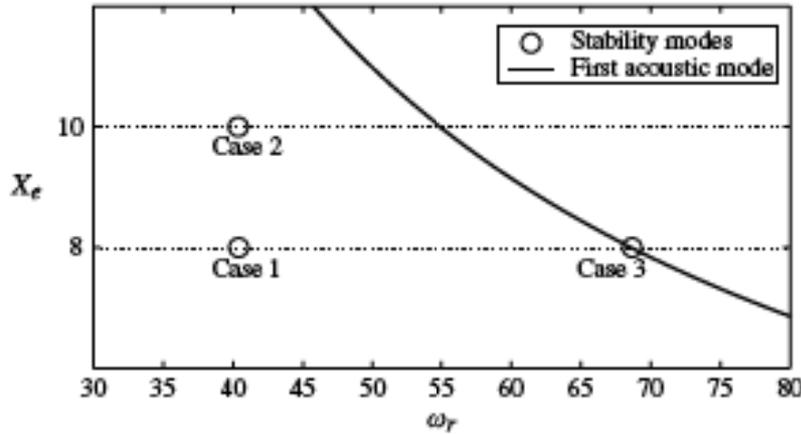


FIGURE 7. Sketch representing the three benchmark cases.

to be imminent. These three cases are situated side by side in figure 7, where both acoustic and stability eigenmode frequencies are displayed as function of the chamber length X_e .

Before additional comparisons could be made, a few definitions are in order. First, we introduce s_{fluc}^q as the net fluctuation in q reported by a virtual sensor signal. It is obtained by subtracting the mean flow from the DNS value at a sensor location. Second, we let s_{ih}^q represent the theoretical evolution of q according to biglobal stability analysis as given by (3.6).

4.1.3. Radial fluctuations

Any signal s_{fluc}^q can be compared to its theoretical prediction s_{ih}^q . Starting with the computed s_{fluc}^w for the three representative cases, figures 8(a)–8(c) provide an overview of the results obtained for the radial velocity fluctuations.

As one may infer from figure 8(a,b), excellent agreement exists between DNS and biglobal stability solutions for the radial velocity in Cases 1 and 2. A short animation of the radial fluctuations obtained from the DNS signal s_{fluc}^w for Case 1 is provided in supplementary movie 1, available online at <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2012.245>. Here, it can be clearly seen that $s_{fluc}^w \approx s_{ih}^w$. This agreement is no longer valid for Case 3 in figure 8(c). This outcome is typical of other results obtained in our study as signals from other sensor locations lead to similar conclusions.

In principle, as long as an eigenmode's circular frequency remains sufficiently separated from an acoustic mode, its linear evolution predicted by linear stability theory appears to be quite accurate, being corroborated by DNS results. Indeed, only real parts $(\hat{u}_r)_r$ and $(\hat{u}_x)_r$ are introduced in the DNS code at $t = 0$ while the theoretical pattern in (3.6) also involves $(\hat{u}_r)_i$, ω_r and ω_i . Consequently, in addition to an already gratifying DNS confirmation of the values of ω_r and ω_i for a given eigenmode, the dependence of our stability results on X_e is also verified.

The remaining question is now turned to the physical interpretation of the dependence of eigenmodes on the domain size. It may be argued that truncating the cylinder at $x = X_e$ enables us to ignore the accelerating mean flow and its influence on the eigenmodes downstream of X_e . Then, given the nature of spatial amplification in the streamwise direction, we find that longer domain sizes lead to less damped and, hence, less stable eigenmodes.

Concerning Case 3, the fast Fourier transform (FFT) of the signal, s_{fluc}^w , can be used to track down the origin of the discrepancy observed in figure 8(c). However,

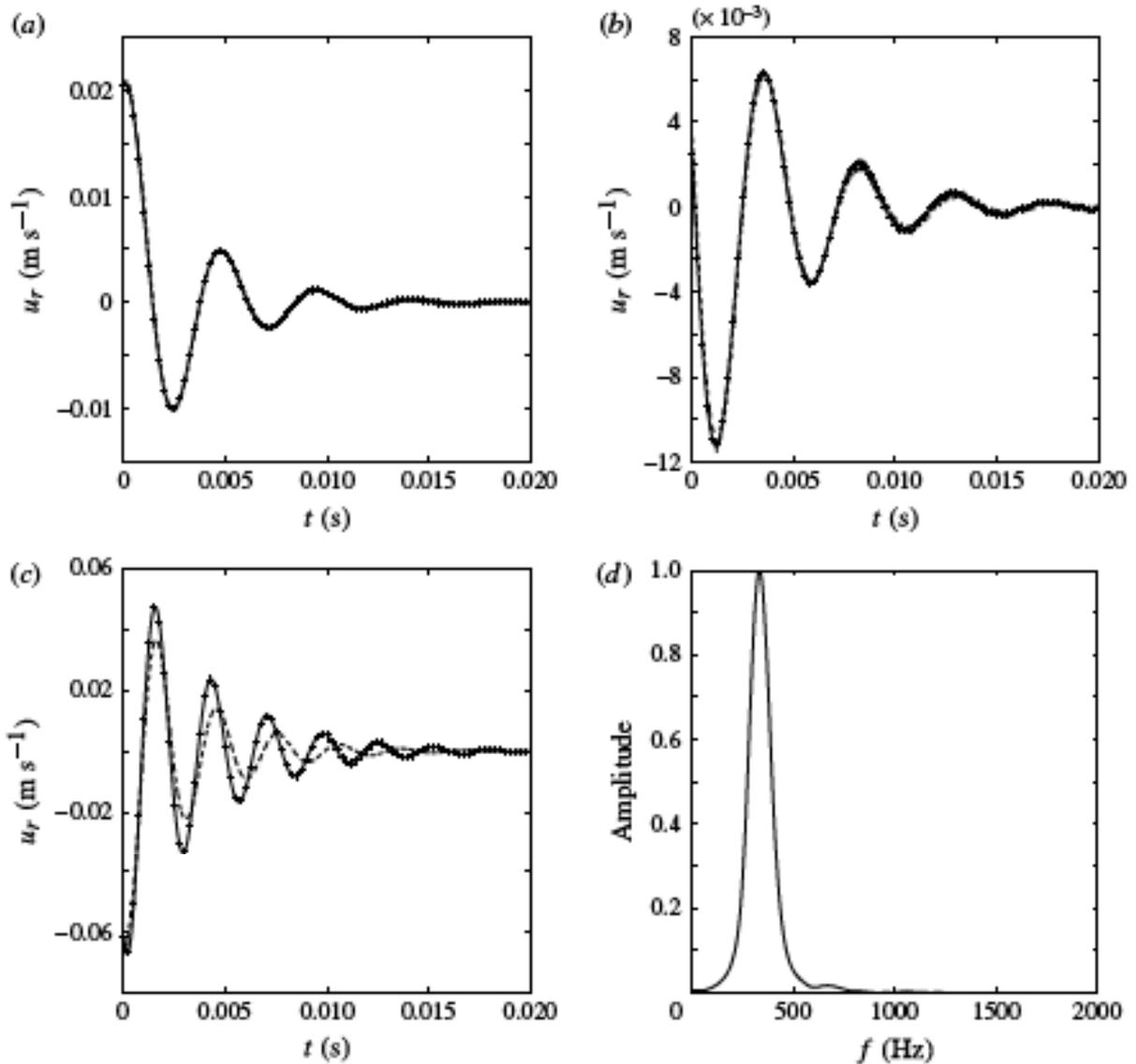


FIGURE 8. Comparisons between the fluctuating radial velocity signal s_{fluc}^{nr} (dashed line) and the theoretical evolution s_{th}^{nr} (solid line with + symbol) given by (3.6) for the three cases of figure 7: (a) u_r at $(x, r) = (7.333, 0.342)$, Case 1; (b) u_r at $(x, r) = (8, 0.809)$, Case 2; (c) u_r at $(x, r) = (8, 0.866)$, Case 3. (d) The FFT output for s_{fluc}^{nr} in (c), Case 3.

calculating the FFT of such signals proves to be laborious because our sampling frequency happens to be considerably high relative to the amplified frequencies. For this reason, the periodogram method with a Hann window is employed to acquire the frequency signature of the signal s_{fluc}^{nr} .

The peak in figure 8(d) corresponds to $f = 335$ Hz, a value that matches the frequency of $\omega^{62} = 62.787 - 7.389i$. This eigenmode happens to be the neighbouring point in figure 4 to the initially introduced $\omega^{68} = 68.679 - 7.594i$.

At first glance, it may be surprising to identify ω^{62} in the DNS computations since its frequency lags behind the fundamental acoustic frequency by 30 Hz, whereas ω^{68} falls within 1 Hz of f_{ac} . Upon further inspection, it may be seen that the two eigenmodes are at play in this particular case. Given available signal characteristics, the low frequency accuracy achieved by the periodogram method does not allow us to conclude with absolute certainty that the only amplified frequency is $f = 335$ Hz. Moreover, neither the modal evolution s_{th}^{nr} of ω^{68} nor that of ω^{62} corresponds to the

acquired DNS signal s_{fluc}^{nr} . At this point we realize that a combination of the two eigenmodes will lead to a more suitable fit.

To identify the individual modal contributions, a spatial decomposition over the acquired set of signals s_{fluc}^{nr} must be performed at each time step. To this end, each signal s_{fluc}^{nr} may be assumed to be a combination of the two eigenfunctions corresponding to ω^{68} and ω^{62} . Letting A^{68} and A^{62} be the complex amplitude coefficients of the combined signal (standing for the exponential dependence $Ae^{-i(V_{inj}/R)\omega t}$ in (3.6)), then s_{fluc}^{nr} may be deduced from the real part of the complex sum $A^{62}\hat{u}^{62} + A^{68}\hat{u}^{68}$, namely,

$$s_{fluc}^{nr} = A_r^{62} (\hat{u}_r^{62})_r - A_i^{62} (\hat{u}_r^{62})_i + A_r^{68} (\hat{u}_r^{68})_r - A_i^{68} (\hat{u}_r^{68})_i. \quad (4.1)$$

At each time step, one has as many relations of the form given by (4.1) as the number of virtual sensor signals, namely 30. In view of this overdetermined system, the four unknowns $(A_r^{62}, A_i^{62}, A_r^{68}, A_i^{68})$ are calculated using least squares. This enables us to fully recover the complex amplitude coefficients (A^{68}, A^{62}) as a function of time.

Figures 9(a)–9(c) display the modulus and phases of (A^{68}, A^{62}) and compare them to modal solutions based on the theoretical evolution prescribed by (3.6), i.e. the envelope $Ae^{v t}$. According to the resulting combination, the initially introduced eigenmode ω^{68} collapses at the very beginning of the computation in favour of ω^{62} . Thus, one can note the large gap that exists between the computed evolution of ω^{68} and its theoretical modal prediction $0.01A_0 \|\hat{u}_r^{68}\|_\infty e^{v^{68} t}$. In contrast, as shown in figure 9(b), ω^{62} tends to behave linearly following its quasi-modal evolution with a small phase gap. Similarly, as depicted in figure 9(a), its amplitude decreases according to modal behaviour of the form $A_1 e^{v^{62} t}$ with a proportionality constant $A_1 = 10$. In fact, this mode becomes dominant in the majority of the computations as confirmed by the frequency analysis of the signals: see figure 8(d). Instead of strong coupling between acoustic and stability modes, the present analysis suggests a probable pairing mechanism. For example, the velocity eigenfunctions \hat{u}_x and \hat{u}_r exhibit similar attributes for ω^{62} and ω^{68} . In particular, the corresponding peak values in \hat{u}_x occur at the same location near the wall. Given this behaviour, we may be unable to ascertain whether the bimodal analysis supports the existence of a physical coupling mechanism or whether a numerical artefact is triggering a rather spurious, coupling-like effect due to the proximity of eigenmodes.

So far, in the analysis of s_{fluc}^{nr} , no strong evidence of vorticoacoustic fluctuations has been seen. Upon a closer look, however, the absence of acoustic mode manifestation in the radial direction may be attributed to the amplitude of \tilde{u}_r being small, specifically of $O(M)$ or 10^{-3} relative to \tilde{u}_x . Recalling that $\ddot{u}_r = 0$ and $\tilde{u}_r \approx O(M\tilde{u}_x)$ in (3.12), it is no longer surprising that reconciliation between theory and DNS could be achieved in the case of radial fluctuations without reference to the vorticoacoustic field. Evidently, this situation changes in the analysis of axial fluctuations.

4.1.4. Axial fluctuations

Let us now examine the signals acquired for the axial fluctuations s_{fluc}^{nx} . Unlike the analysis of radial disturbances, substantial discrepancies between s_{fluc}^{nx} and s_{sh}^{nx} are observed for all three benchmark cases. Figures 10(a) and 10(b) provide examples for Cases 1 and 2. While the interplay of two eigenmodes may be responsible for part of the discrepancies associated with Case 3, the disagreement in Cases 1 and 2 between DNS and biglobal stability solutions can only be due to the omission of the vorticoacoustic contributions. This behaviour suggests a strong likelihood of acoustic

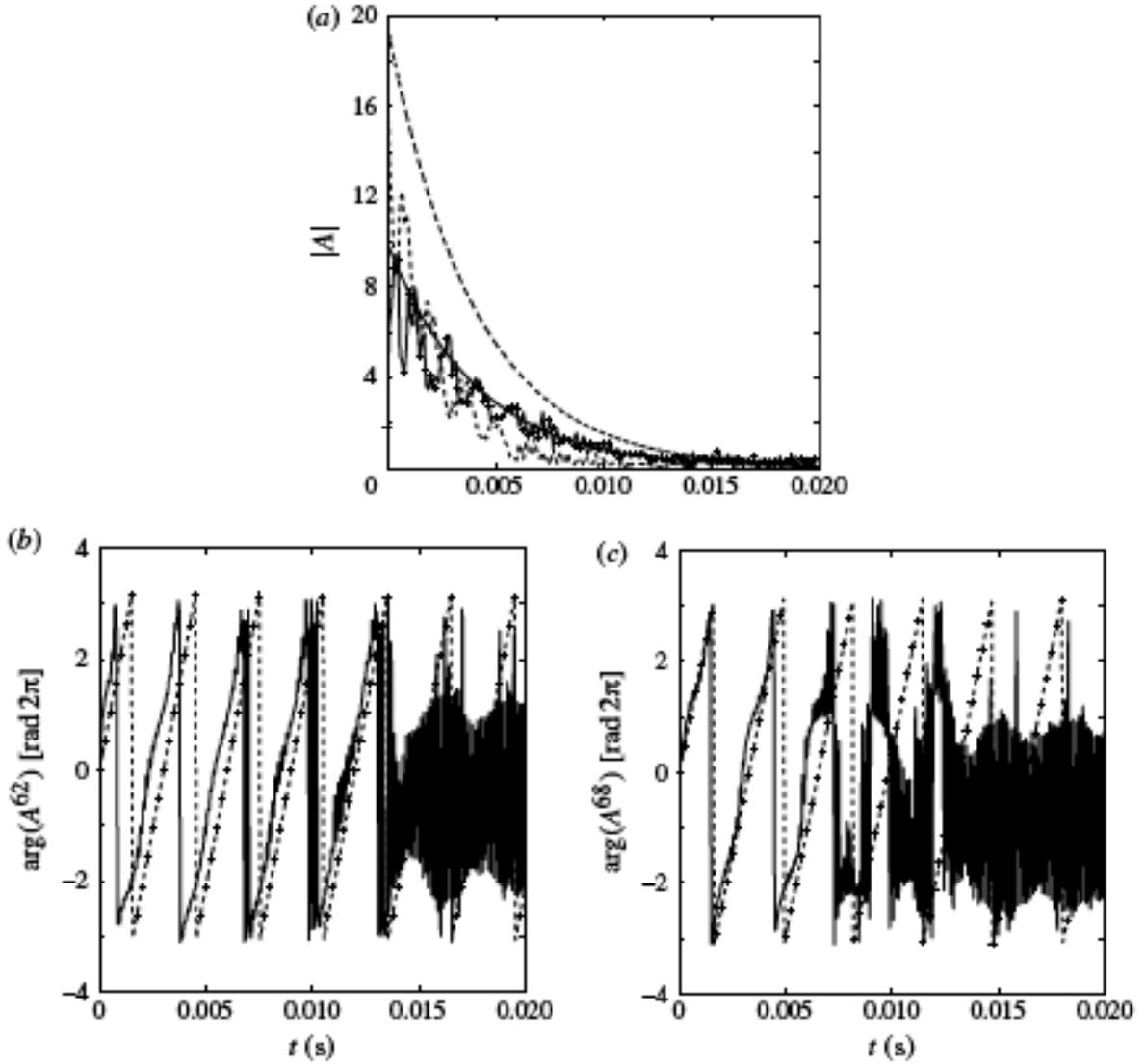


FIGURE 9. (a) The amplitude evolution for the two modes $\omega^{62} = 62.787 - 7.389i$ (solid line with + symbol) and $\omega^{68} = 68.679 - 7.594i$ (dashed line). These amplitudes are compared to $A_1 e^{\nu^{62}t}$ (solid line) and $0.01A_0 \|\hat{u}_r^{68}\|_\infty e^{\nu^{68}t}$ (dashed line). Amplitudes $|A_{62}|$ and $|A_{68}|$. (b, c) Comparison of the phase functions φ^{62} and φ^{68} (dashed lines) and the theoretical evolutions $2\pi f^{62}t[2\pi]$ and $2\pi f^{68}t[2\pi]$ (solid lines with + symbol): (b) φ^{62} ; (c) φ^{68} .

modes developing naturally during the simulation, a hypothesis that will soon be tested.

For Cases 1 and 2, the acoustic part of the signal in s_{fluc}^{ux} can be extracted by subtracting the linear evolution s_{th}^{ux} using $s_{ac}^{ux} = s_{fluc}^{ux} - s_{th}^{ux}$. The hydrodynamic and vorticoacoustic fluctuations can be identified in supplementary movie 2 which represents the DNS evolution of s_{fluc}^{ux} for Case 1. For Case 3, assuming a dual mode coupling, the acoustic part s_{ac}^{ux} may be restored from the pair of coefficients A^{62} and A^{68} . This is accomplished by taking

$$s_{ac}^{ux} = s_{fluc}^{ux} - A_r^{62} (\hat{u}_x^{62})_r + A_i^{62} (\hat{u}_x^{62})_i - A_r^{68} (\hat{u}_x^{68})_r + A_i^{68} (\hat{u}_x^{68})_i. \quad (4.2)$$

Here, the combination of acoustic modes can be readily evaluated owing to the closed-form analytical approximations provided in § 3.2.

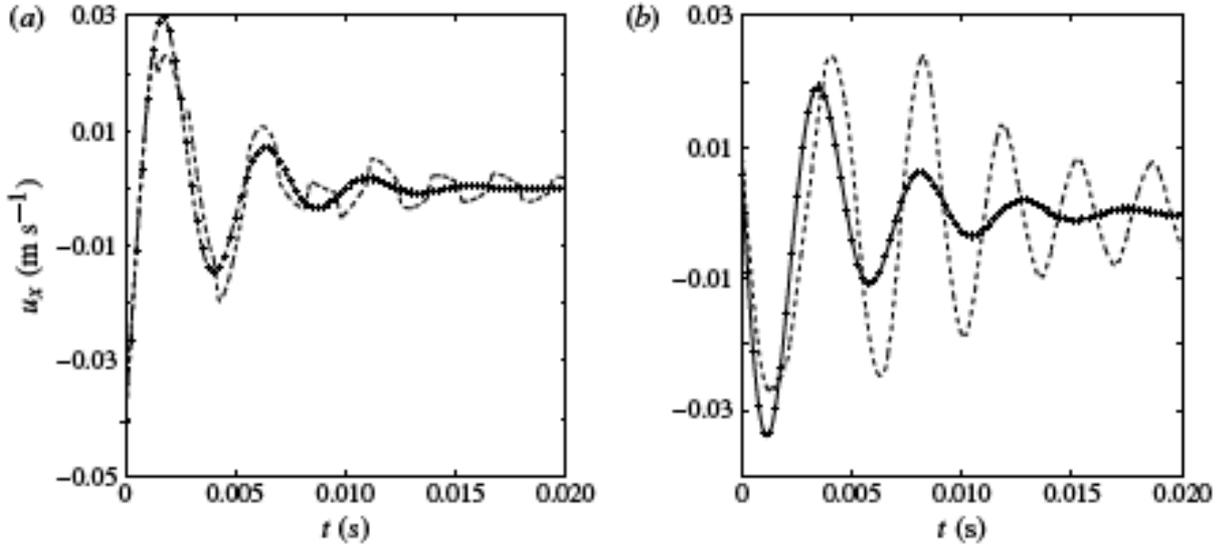


FIGURE 10. Comparisons between the fluctuating axial velocity signal s_{fluc}^{ax} (dashed line) and the theoretical evolution s_{th}^{ax} (solid line with + symbol) given by (3.6) for Cases 1 and 2: (a) u_x at $(x, r) = (7.333, 0.342)$, Case 1; (b) u_x at $(x, r) = (8, 0.809)$, Case 2.

Concerning the pressure oscillations, they are mainly composed of acoustic modes because any signal s_{fluc}^p remains chiefly prescribed by the acoustic waveform \check{p} ; the other two contributions \hat{p} and \tilde{p} may be ignored, being negligible in comparison. While the pseudopressure \tilde{p} that accompanies the boundary-driven vorticoacoustic wave is known to be of higher order in the Mach number, the pressure fluctuation \hat{p} proves to be immaterial, especially near the headwall of the chamber where the virtual pressure sensor is located. Since we essentially have $s_{fluc}^p \approx s_{ac}^p$, the signal s_{fluc}^p can be reconstructed from the first M acoustic modes using

$$s_{fluc}^p = \sum_{m=0}^M A_m \check{p}_m, \quad (4.3)$$

where $\check{p}_m = \cos(\omega_m x) e^{-i\omega_m t}$ corresponds to the plane wave given by § 3.2. Here too, we face an underdetermined system while writing (4.3) at each time step for the chosen sensor. This warrants the use of least squares to retrieve the coefficients $\{A_m\}$ of the combination of acoustic modes exhibiting a quasi-harmonic distribution with $A_m = 1/m^2$.

In view of A_m and the vorticoacoustic solution given by (3.12), the axial component of the acoustic mode fluctuation can be constructed and compared to s_{ac}^{ax} everywhere in the chamber. But first, the viscous dissipation mechanism that is present in the DNS results must be modelled and applied to the acoustic wave amplitudes. Otherwise, the inviscid amplitudes would remain constant and therefore insensitive to the amount of viscous dissipation in the chamber. In reality, acoustic amplitudes are susceptible to viscous decay and so this aspect must be modelled before meaningful comparisons can be made between DNS and theory.

Assuming linear acoustic oscillations for the three representative cases, an artificial function $F_\mu(t)$ is developed in a manner to match the observed viscous dissipation rate. We find $F_\mu(t) = F_\mu^0 e^{-2.3((V_{ax}^0)/R_0)t}$, with $F_\mu^0 = 0.015$. It should be noted that $F_\mu(t)$ is used for all sensors and has the same expression for all three cases, despite the nonlinear interplay of eigenmodes that may be expected for Case 3. Furthermore, $F_\mu(t)$ is only

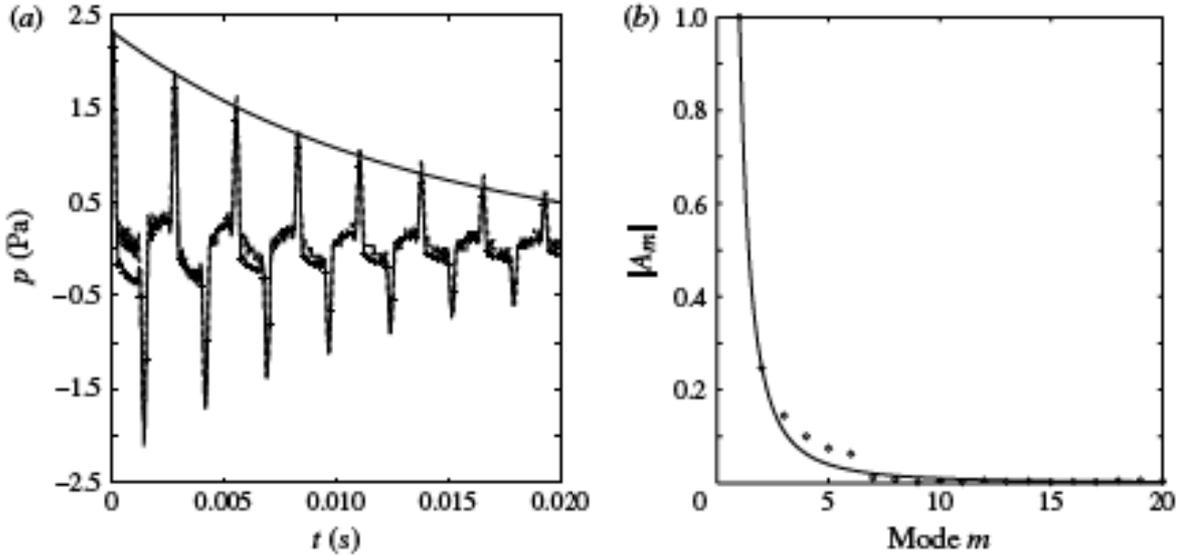


FIGURE 11. (a) Case 1 comparison between the signal s_{ac}^p (dashed line) and the combination of 100 acoustic modes (solid line with + symbol) for a sensor located at $(x, r) = (6.667, 0.985)$. The function F_μ (solid line) tracks the decaying envelope of the combined signal. (b) The circles show the values $\{A_m\}$ of the coefficients with respect to the mode number m . These are compared to the hyperbolic line $1/m^2$.

valid for $t > 0.005$ s, after the acoustic growth phase that occurs at the beginning of the computations.

A sample comparison between s_{ac}^p and the combination of acoustic modes is shown in figure 11(a). Since a combination of acoustic modes can reproduce the signal s_{ac}^p at any location in the chamber, this method can be used to faithfully predict the acoustic pressure. In figure 11(b), the coefficients $\{A_m\}$ are plotted with respect to the mode number m for the first 20 modes. Clearly, $A_m \approx 1/m^2$ and the combination found corresponds to a harmonic distribution of acoustic modes. The same coefficients $\{A_m\}$ can be relied upon to evaluate the vorticoacoustic velocity fluctuations s_{ac}^{vr} .

Figures 12(a)–12(d) display comparative plots between DNS and biglobal stability solutions in which vorticoacoustic contributions and proper viscous dissipation are accounted for. The favourable agreement observed in figures 12(a)–12(c) is gratifying and lends support to the validity of our framework for Cases 1 and 2. It also confirms the accuracy of the vorticoacoustic approximation obtained by Majdalani and co-workers along with the suitability of a dissipation function to capture the effects of viscous attenuation on the acoustic modes.

The early disagreement between DNS and biglobal stability theory in figure 12(d) corresponds to Case 3, for which nonlinear pairing of eigenmodes is likely to occur. In this situation, the eigenmode coupling captured through (4.1) leads to good agreement, albeit limited to $t > 0.0055$ s. Other comparisons performed using several different DNS sensors lead to the same conclusion. As for the discrepancies observed in the first instants of figure 12(d), they are indicative of local nonlinear behaviour wherein the acoustic mode distribution captured through $\{A_m\}$ deviates from the expected harmonic form.

To summarize, both DNS and biglobal stability analysis converge in predicting the same dependence of eigenmodes on the size of the domain X_c . This is established through Cases 1 and 2. In addition, introducing an eigenmode ω whose frequency is sufficiently removed from the acoustic modes leads to a conventional linear evolution

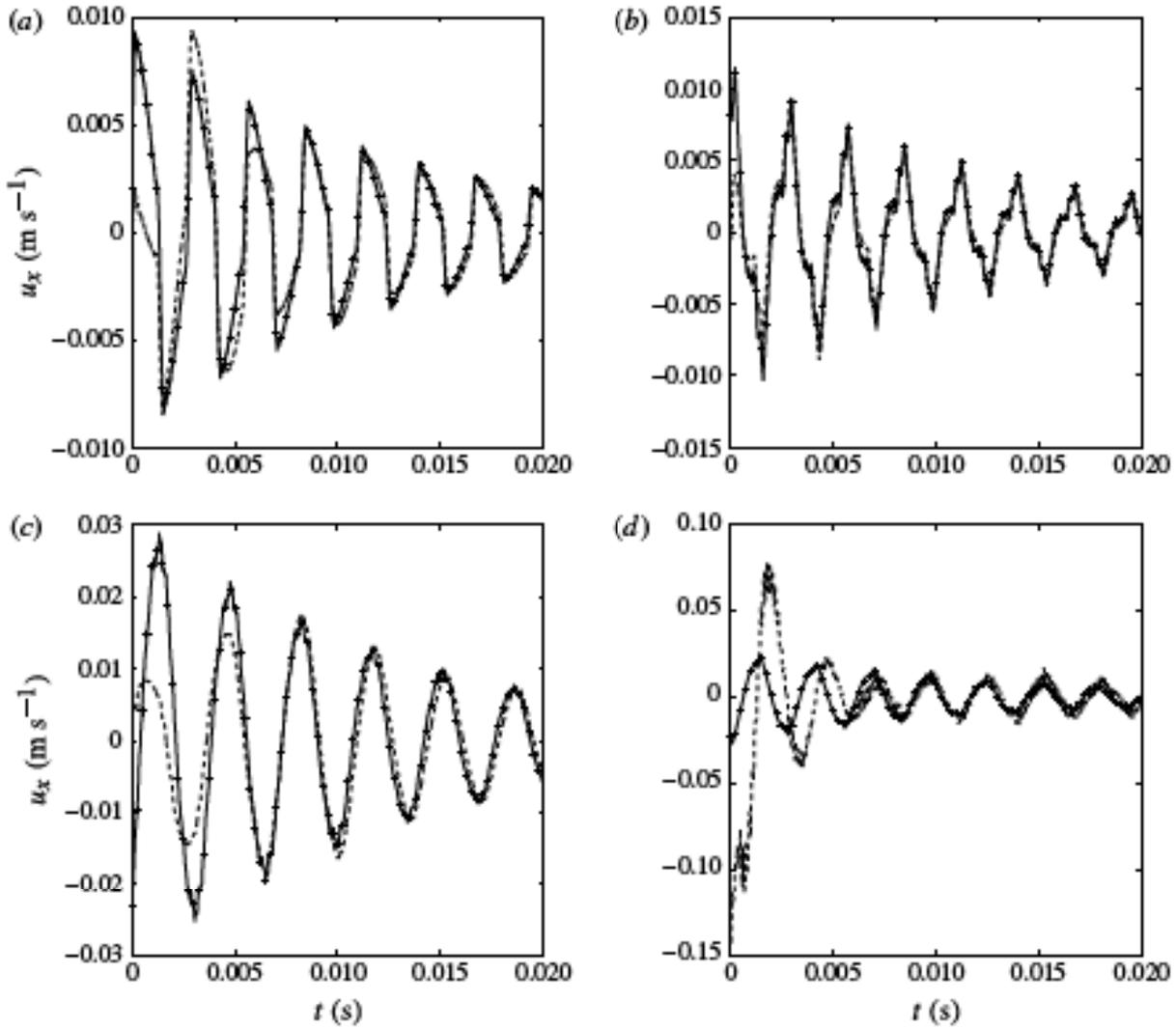


FIGURE 12. Comparisons between the acoustic part of longitudinal velocity signals s_{ac}^{ax} (dashed lines) and the acoustic reconstruction (solid lines with + symbol) based on the coefficients $\{A_m\}$ in (4.3) obtained from a pressure signal s_{fmc}^p . Viscous dissipation is modelled using $F_\mu(t)$. (a) u_x at $(x, r) = (7.333, 0.342)$, Case 1; (b) u_x at $(x, r) = (6.667, 0.985)$, Case 1; (c) u_x at $(x, r) = (8, 0.809)$, Case 2; (d) u_x at $(x, r) = (8, 0.866)$, Case 3.

that can be accurately predicted with the biglobal stability framework. In contrast, when the frequency of the introduced eigenmode happens to be close to an acoustic mode, a nonlinear mechanism occurs. Unlike the original eigenmode, a secondary one emerges naturally in the computed flow without being artificially superimposed. According to the present bimodal analysis, this natural emergence is linked to nonlinear interactions that give rise to internal, eigenmode-to-eigenmode pairing rather than external coupling between eigenmodes and acoustic modes.

4.2. Dynamic cases

In the second set of simulations, it is assumed that either R or V_{inj} are time-dependent. In real motors, the radius R continuously expands with respect to time due to propellant combustion and subsequent grain regression. However, in order to simplify the ensuing analysis, the sidewall boundary condition is specified with a temporal function $V_{inj}(t)$ while the mesh is kept unchanged with a fixed radius, $R = 0.03$ m. By varying $V_{inj}(t)$, we are able to simulate conditions leading to a

frequency shift according to $f = V_{inj}(t)\omega_r/(2\pi R)$. A frequency crossing is expected between an eigenmode and an acoustic mode. We hypothesize that such a crossing would trigger the emergence of a secondary eigenmode as seen in SRMs and VALDO experiments. Two main parameters characterize this crossing mechanism: the crossing speed linked to the slopes of the frequency evolutions and the minimal frequency gap for which the emergence of a secondary eigenmode can be induced. Realistic values of these parameters may be extracted from VALDO experiments and simulated in the DNS code. However, given the small time step $\Delta t = 5 \times 10^{-9}$ s used in our simulation, subsequent computations can be estimated to have prohibitively long durations. A compromise must be made and this is accomplished by taking

$$\begin{cases} X_e = 8 \text{ (0.24 m)}, \\ t \in [0, 0.06] \text{ (12 000 000 iterations)}, \\ V_{inj}(t) = 0.98 + 0.5t. \end{cases} \quad (4.4)$$

By introducing into the DNS run the eigenmode $\omega^{68} = 68.679 - 7.594i$, its frequency $f = \omega_r^{68}V_{inj}(t)/(2\pi R)$ will range from 357 to 368 Hz during the computation, thus crossing at some point the first acoustic mode $f = 363$ Hz. In this manner, an amplification is expected to occur around $t = 0.04$ s. To engender secondary eigenmodes, the presence of small disturbances in the DNS code is required, and this effect may be realized through mesh deformation. To this end, the injection line is distorted such that $r = R + n(x)e^{-4}$, where $n(x)$ corresponds to 3 dB Gaussian white noise. The distortion is extended over the entire mesh using the radial function $\sin(\frac{1}{2}\pi r/R)$. This particular type of mesh deformation mainly affects the injection condition. A uniform wall-normal injection velocity V_{inj} gives rise to a non-uniform radial velocity \bar{U}_r and a non-zero axial velocity \bar{U}_x . The induced shearing near the injecting wall becomes appreciable despite the mesh distortion being relatively small. It therefore leads to a high level of noise in the computations.

Using this mesh along with a constant injection velocity $V_{inj} = 0.98 \text{ m s}^{-1}$, the steady-state motion is computed and used as the basic flow in the biglobal stability code. The eigenmodes are then modified. For example, $\omega^{68} = 68.679 - 7.594i$ is slightly distorted into $\omega^0 = 68.442 - 5.501i$. The slight shift in the circular frequency ω_r does not affect the upcoming frequency crossing. However, the reduction in $|\omega_i^0|$ makes this eigenmode less stable, especially in the presence of noise.

The other ingredient that is needed to induce the expected coupling is the inception of acoustic oscillations, particularly the first longitudinal modes, in the dynamic simulations. This may be accomplished by superimposing a harmonic distribution $1/m^2$ of the first ten acoustic modes onto the steady pressure field. The amplitude of the entire distribution is set at $0.001P_{atm}$, where P_{atm} is the atmospheric pressure imposed in the exit plane at $x = 8$. However, we find it unnecessary to add velocity perturbations to the steady-state velocities U_x and U_r .

Computations are initiated following this basic superposition. At the end of the simulation, signals from 100 virtual sensors are extracted. Then, using short-time Fourier transforms, our analysis is performed with a sampling frequency of $f_s = 10^5$ Hz.

Based on all sensors and signals for s_{fluc}^{ux} , s_{fluc}^{uy} and s_{fluc}^p , the frequency analysis indiscriminately reveals a highly amplified frequency along with its nonlinear harmonics. The origin of this frequency, $f = 6050$ Hz, may be linked to the ninth acoustic mode $f_{ac} = 6180$ Hz. Nonetheless, limitations due to the sampling frequency and the relatively small number of sensors do not allow us to accurately analyse this

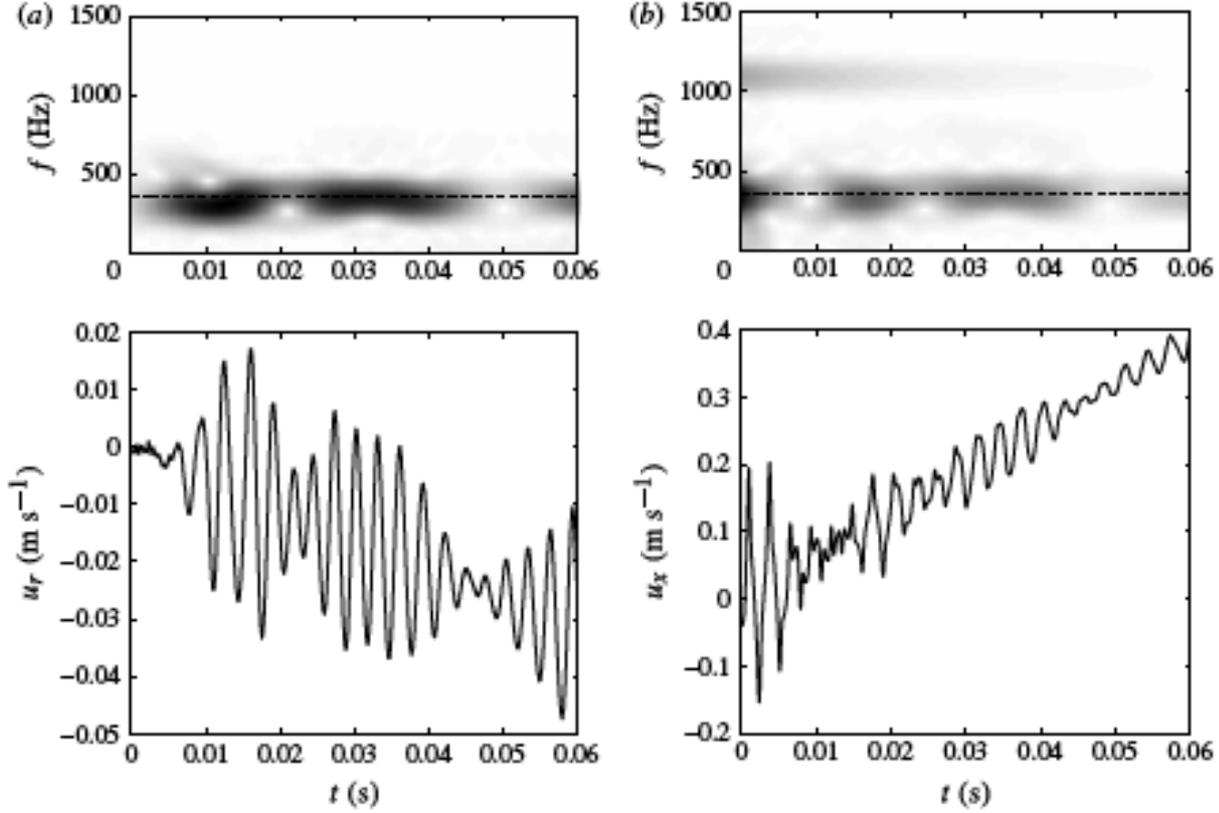


FIGURE 13. Evolutions of the filtered signals s_{fluc}^{ur} and s_{fluc}^{ux} and their short-time Fourier transforms (top). The horizontal dashed lines in the top part of each figure correspond to the first longitudinal acoustic mode frequency $f_{ac} = 363$ Hz. (a) u_r at $(x, r) = (7.222, 0.707)$; (b) u_x at $(x, r) = (8, 0.809)$.

mode. Its presence is eliminated by conditioning the signals using a Butterworth filter of order five and a cutting frequency of $f_c = 2000$ Hz. Furthermore, the continuous parts of the signals for $V_{inj}(t)s_{fluc}^i(0)/0.98$, which are linked to the increase in V_{inj} , are subtracted from the filtered signals.

We examine the radial and axial velocity fluctuations by showing in figures 13(a) and 13(b) samples of s_{fluc}^{ur} and s_{fluc}^{ux} at two sensor locations. As explained before, the radial disturbances are primarily composed of eigenmodes because their vorticoacoustic parts are negligible. Interestingly, figure 13(a) shows amplified frequencies around the first acoustic mode $f_{ac} = 363$ Hz. Furthermore, within the periodic signal for s_{fluc}^{ur} , two distinct oscillations are observed, namely, around $t = 0.015$ and 0.03 s. These two oscillations correspond to the evolution of two eigenmode frequencies according to $f = (V_{inj}/2\pi R)\omega^0$. These are $\omega^{62} = 62.288 - 5.328i$ and the expected eigenmode $\omega^{68} = 68.442 - 5.501i$. Figure 13(b) again shows the emergence of these two eigenmodes. In fact, after the first instants where the acoustic frequencies dominate the evolution of s_{fluc}^{ux} , the signal begins to exhibit the two characteristic oscillations caused by the emergence of ω^{62} and ω^{68} .

Instead of the unique appearance of ω^{68} around $t = 0.04$ s, the DNS computations reveal the eigenmode ω^{62} around $t = 0.015$ s, prior to the anticipated appearance of ω^{68} around $t = 0.03$ s. The temporal stability of these modes is visible especially for ω^{68} , which quickly vanishes as its circular frequency moves away from the acoustic value.

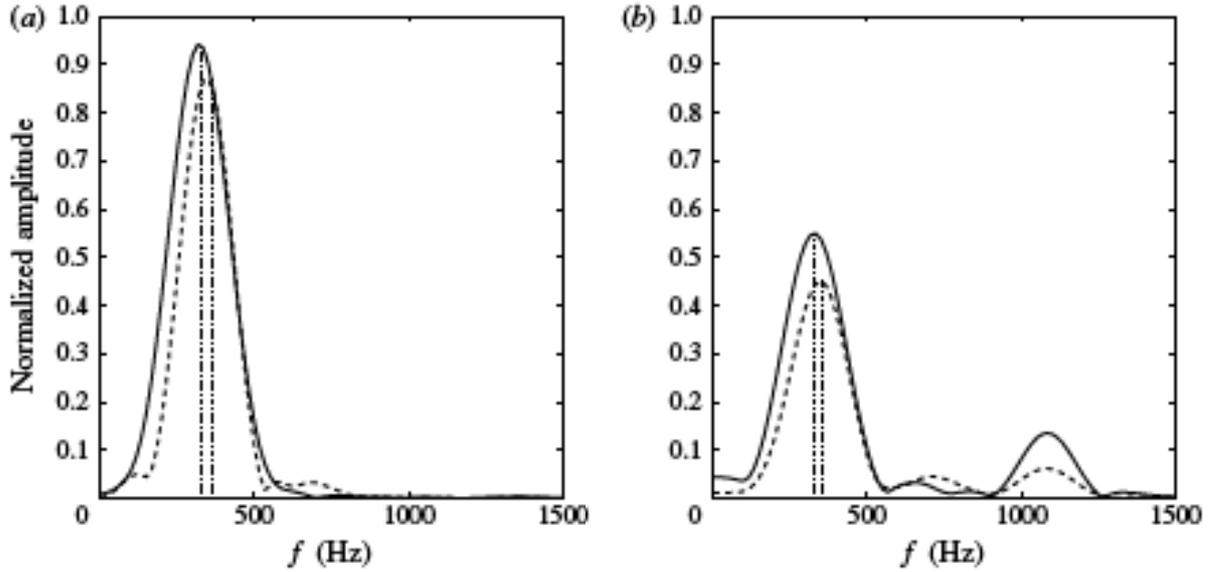


FIGURE 14. Spectra extracted from the short-time Fourier transforms of figure 13(a,b) at two distinct instants. Solid lines correspond to $t = 0.015$ s whereas dashed lines stand for $t = 0.03$ s. Vertical lines indicate frequencies of eigenmodes ω^{62} and ω^{68} . (a) u_r at $(x, r) = (7.222, 0.707)$; (b) u_x at $(x, r) = (8, 0.809)$.

Confirmation of the presence of the two eigenmodes is given by figures 14(a) and 14(b), where spectra at instants $t = 0.015$ s and $t = 0.03$ s are depicted. The amplitudes of signals s_{fluc}^{ur} and s_{fluc}^{ux} are normalized by the maximum values gained on the short-time Fourier transforms of figure 13(a,b). The reason for the appearance of ω^{62} is not entirely clear. However, as in the static simulation of Case 3, a nonlinear interaction between the first acoustic mode and the superimposed mode ω^{68} can trigger the emergence of the secondary eigenmode, ω^{62} .

In closing, it may be worthwhile to remark that, although our computations have been subject to a very fast crossing speed (i.e. 182 Hz s^{-1} compared to 34 Hz s^{-1} in the VALDO experiments), the main objective of this investigation has been achieved. The emergence of an eigenmode induced by the crossing of its frequency with an acoustic mode has been clearly demonstrated using both static and dynamic simulations. This behaviour constitutes a major result that lends support to our fundamental hypothesis for the occurrence of thrust oscillations in SRMs (see Chedevergne *et al.* 2006). The suspected coupling mechanism between acoustic modes and eigenmodes is now elucidated through the use of DNS data and biglobal stability theory.

5. Concluding remarks

In this study, we have shown that the use of DNS calculations can provide new physical insight into understanding the results of biglobal stability analysis. For example, we have demonstrated that the critical eigenvalues precipitated by the theoretical stability analysis are recovered when computing the unsteady motion of an isolated fluctuation through DNS calculations. In the process, special attention has been given to the dependence of the temporal growth rate ω_i on the chamber length X_c . Evidently, ω_i controls the stability character of these eigenmodes and the linear analysis predicts a growth in ω_i with successive increases in X_c . These theoretical results are limited to the use of a steady, laminar mean flow. Experimentally, this

assumption holds true as long as $x < 12$. Under these conditions, ω_i remains negative, thus implying the presence of temporal damping. However, as X_e continues to increase, nonlinearities in the flow will inevitably lead to strong amplification in the streamwise direction. The natural transition of the flow around $x = 12$ is likely to result from the existence of the eigenmodes discussed heretofore. This hypothesis has to be further explored in future work. So far, comparisons with cold and reactive gas experiments have confirmed the relevance of biglobal stability analysis in accurately estimating the temporally stable modes (see Chedevergne *et al.* 2006; Chedevergne & Casalis 2006a). The nature of these intrinsic instabilities has led to a coherent construct that explains the source of SRM thrust oscillations.

In addition to their important role in corroborating the biglobal stability results, these DNS calculations have confirmed the accuracy of Majdalani's analytical solution for the vorticoacoustic boundary-driven waves associated with the Taylor–Culick flow. Moreover, it has been demonstrated that the proximity of instability frequencies to natural acoustic modes can lead to the emergence of neighbouring stability eigenmodes. Both static and dynamic DNS computations made with a time-dependent injection velocity have established the presence of strong coupling between acoustic modes and instability eigenmodes. For the unsteady injection velocity cases, the frequency of one mode $f = V_{inj}\omega_r/(2\pi R)$ becomes a function of the time t and can cross the acoustic mode f_{ac} . This event reproduces what occurs in live motors, where the coupling mechanism between acoustics and intrinsic instabilities is believed to be responsible for the emergence of secondary eigenmodes and the merging of frequency paths.

Acknowledgements

This study was supported by the French Space Agency CNES and by ONERA. The authors thank M. Prévost and G. Avalon from ONERA for their accurate measurements, help, and valuable suggestions. The corresponding author was supported by the National Science Foundation.

Supplementary material

For supplementary material for this article, please visit <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2012.245>.

REFERENCES

- ABU-IRSHAD, E. M., MAJDALANI, J. & CASALIS, G. 2007 Hydrodynamic stability of rockets with headwall injection. *Phys. Fluids* **19** (2), 024101.
- APTE, S. & YANG, V. 2001a Unsteady flow evolution in a porous chamber with surface mass injection. Part 1. Free oscillation. *AIAA J.* **39** (8), 1577–1586.
- APTE, S. & YANG, V. 2001b Unsteady flow evolution in porous chamber with surface mass injection. Part 2. Acoustic excitation. *AIAA J.* **40** (2), 244–253.
- APTE, S. & YANG, V. 2003 A large-eddy simulation study of transition and flow instability in a porous-walled chamber with mass injection. *J. Fluid Mech.* **477**, 215–225.
- AVALON, G., CASALIS, G. & GRIFFOND, J. 1998 Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection. In *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA Paper 98-3218.
- AVALON, G. & JOSSET, T. 2006 Cold gas experiments applied to the understanding of aeroacoustic phenomena inside solid propellant boosters. In *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA Paper 2006-5111.
- BEDDINI, R. A. 1986 Injection induced flows in porous-walled ducts. *AIAA J.* **24** (11), 1766–1773.

- BERMAN, A. 1953 Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.* **24** (9), 1232–1235.
- CASALIS, G., AVALON, G. & PINEAU, J.-P. 1998 Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Phys. Fluids* **10** (10), 2558–2568.
- CASALIS, G., CHEDEVERGNE, F., FÉRAILLE, T. & AVALON, G. 2004 Global stability of the flow induced by wall injection. In *IUTAM Symp. Laminar–Turbulent Transition, Bangalore, India* (ed. R. Govindarajan). Springer.
- CHEDEVERGNE, F. & CASALIS, G. 2005 Thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors. Part 2. A theoretical approach. In *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA Paper 2005-4000.
- CHEDEVERGNE, F. & CASALIS, G. 2006a Detailed analysis of the thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors. In *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA Paper 2006-4424.
- CHEDEVERGNE, F. & CASALIS, G. 2006b Front wall boundary layer influence on the stability of the flow induced by wall injection. In *7th ONERA DLR Aerospace Symp, Toulouse, France*.
- CHEDEVERGNE, F., CASALIS, G. & FÉRAILLE, T. 2006 Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection. *Phys. Fluids* **18** (1), 014103.
- CHU, B.-T. & KOVÁSZNAY, L. S. G. 1958 Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *J. Fluid Mech.* **3** (5), 494–514.
- COUTON, D., DOAN-KIM, S. & VUILLOT, F. 1997 Numerical simulation of vortex-shedding phenomenon in a channel with flow induced through porous wall. *Intl J. Heat Fluid Flow* **18** (3), 283–296.
- CULICK, F. E. C. 1966 Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. *AIAA J.* **4** (8), 1462–1464.
- CULICK, F. E. C. 1968 A review of calculations for unsteady burning of a solid propellant. *AIAA J.* **6** (12), 2241–2254.
- DUNLAP, R., BLACKNER, A. M., WAUGH, R. C., BROWN, R. S. & WILLOUGHBY, P. G. 1990 Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber. *J. Propul. Power* **6** (6), 690–704.
- FABIGNON, Y., DUPAYS, J., AVALON, G., VUILLOT, F., LUPOGLAZOFF, N., CASALIS, G. & PRÉVOST, M. 2003 Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors. *Aera Sci Technol* **7** (3), 191–200.
- GOLUB, G. H. & LOAN, C. F. VAN. 1996 *Matrix Computations*, 3rd edn. The Johns Hopkins University Press.
- GRIFFOND, J. 2002 Receptivity and aeroacoustic resonance in channels with blowing walls. *Phys. Fluids* **14** (11), 3946–3962.
- GRIFFOND, J. & CASALIS, G. 2000 On the dependence on the formulation of some nonparallel stability approaches applied to the Taylor flow. *Brief Comm. Phys. Fluids* **12** (2), 466–468.
- GRIFFOND, J. & CASALIS, G. 2001 On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow. *Phys. Fluids* **13** (6), 1635–1644.
- GRIFFOND, J., CASALIS, G. & PINEAU, J. P. 2000 Spatial instability of flow in a semiinfinite cylinder with fluid injection through its porous walls. *Eur. J. Mech. B* **19** (1), 69–87.
- KUENTZMANN, P. 1991 *Combustion Instabilities*, AGARD, vol. LS 180. AGARDograph.
- KURDYUMOV, V. N. 2008 Viscous and inviscid flows generated by wall-normal injection into a cylindrical cavity with a headwall. *Phys. Fluids* **20** (12), 123602.
- LEE, Y. & BEDDINI, R. A. 1999 Acoustically-induced turbulent transition in solid propellant rocket chamber flow fields. In *35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA Paper 99-2508.
- LEE, Y. & BEDDINI, R. A. 2000 Effect of solid rocket chamber pressure on acoustically-induced turbulent transition. In *36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA Paper 2000-3802.
- LUPOGLAZOFF, N. & VUILLOT, F. 1996 Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors: numerical simulations and comparisons with firing tests. In *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper 96-0761.
- MAJDALANI, J. 1998 A hybrid multiple scale procedure for boundary layers involving several dissimilar scales. *Z. Angew. Math. Phys.* **49** (6), 849–868.

- MAJDALANI, J. 1999 The boundary layer structure in cylindrical rocket motors. *AIAA J.* **37** (4), 505–508.
- MAJDALANI, J., FLANDRO, G. & ROH, T. 2000 Convergence of two flowfield models predicting a destabilizing agent in rocket combustion. *J. Propul. Power* **16** (3), 492–497.
- MAJDALANI, J. 2001a The oscillatory channel flow with arbitrary wall injection. *Z. Angew. Math. Phys.* **52** (1), 33–61.
- MAJDALANI, J. 2001b Vorticity dynamics in isobarically closed porous channels. Part I: standard perturbations. *J. Propul. Power* **17** (2), 355–362.
- MAJDALANI, J. 2007 On steady rotational high speed flows: the compressible Taylor–Culick profile. *Proc. R. Soc. A* **463** (2077), 131–162.
- MAJDALANI, J. 2009 Multiple asymptotic solutions for axially travelling waves in porous channels. *J. Fluid Mech.* **636** (1), 59–89.
- MAJDALANI, J. & AKIKI, M. 2010 Rotational and quasiviscous cold flow models for axisymmetric hybrid propellant chambers. *Trans. ASME: J. Fluids Engng* **132** (10), 101202.
- MAJDALANI, J. & FLANDRO, G. A. 2002 The oscillatory pipe flow with arbitrary wall injection. *Proc. R. Soc. A* **458** (2022), 1621–1651.
- MAJDALANI, J. & RIENSTRA, S. W. 2002 Two asymptotic forms of the rotational solution for wave propagation inside viscous channels with transpiring walls. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **55** (1), 141–162.
- MAJDALANI, J. & ROH, T. S. 2000 The oscillatory channel flow with large wall injection. *Proc. R. Soc. A* **456** (1999), 1625–1657.
- MAJDALANI, J. & VAN MOORHEM, W. K. 1998 Improved time-dependent flow field solution for solid rocket motors. *AIAA J.* **36** (2), 241–248.
- MAJDALANI, J., VYAS, A. B. & FLANDRO, G. A. 2002 Higher mean-flow approximation for a solid rocket motor with radially regressing walls. *AIAA J.* **40** (9), 1780–1788.
- MAJDALANI, J., VYAS, A. B. & FLANDRO, G. A. 2009 Higher mean-flow approximation for a solid rocket motor with radially regressing walls: erratum. *AIAA J.* **47** (1), 286–286.
- PRÉVOST, M. & GODON, J. CL. 2005 Thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors. Part 1. Experimental investigations. In *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA Paper 2005-4003.
- REFLOCH, A., COURBET, B., MURRONE, A., VILLEDIEU, P., LAURENT, C., GILBANK, P., TROYES, J., TESSÉ, L., CHAINERAY, G., DARGAUD, J. B., QUÉMERAIS, E. & VUILLOT, F. 2011 CEDRE software. *The ONERA J., AerospaceLab* **2**, <http://www.aerospacelab-journal.org>.
- TAYLOR, G. I. 1956 Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. *Proc. R. Soc. A* **234** (1199), 456–475.
- THEOFILIS, V. 2003 Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. *Prog. Aerosp. Sci.* **39** (4), 249–315.
- THEOFILIS, V. 2011 Global linear instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 319–352.
- THEOFILIS, V., DUCK, P. W. & OWEN, J. 2004 Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows. *J. Fluid Mech.* **505**, 249–286.
- UGURTAS, B., AVALON, G., LUPOGLAZOFF, N. & VUILLOT, F. 1999 Numerical computations of hydrodynamic instabilities inside channels with wall injection. In *35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA Paper 99-2505.
- VARAPAEV, V. N. & YAGODKIN, V. I. 1969 Flow stability in a channel with porous wall. *Fluid Dyn. (Izv. Akad. Nauk SSSR Mekh. Zhidk. Gaza)* **4** (5), 91–95.
- VUILLOT, F. 1995 Vortex shedding phenomena in solid propellant motors. *J. Propul. Power* **11** (4), 626–639.
- VUILLOT, F., SCHERRER, D. & HABIBALLAH, M. 2003 CFD code validation for space propulsion applications. In *5th Int. Symp. Liquid Space Prop. Chattanooga, Tennessee*. NASA Marshall Space Flight Center.

On the laminar-turbulent transition in injection-driven porous chambers

B. Gazanion · F. Chedevergne · G. Casalis

Received: 15 July 2013 / Revised: 14 November 2013 / Accepted: 2 December 2013
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Abstract This paper presents a characterization of the laminar-turbulent transition in a cold flow setup, representative of the flow in a solid rocket motor. Recent developments based on a linear stability analysis of this particular flow have highlighted the existence of intrinsic instabilities, generating the so-called parietal vortex shedding, responsible for thrust oscillations. From this essential ingredient, an original interpretation of the laminar-turbulent transition is proposed using three approaches. Eventually, a description of the laminar and turbulent areas is obtained for the entire flow, from which a transition line is defined.

1 Introduction

Long segmented solid rocket motors (SRM) are known to exhibit thrust oscillations due to internal pressure fluctuations. Following pioneer papers (Brown et al. 1981; Dunlap et al. 1990; Flandro and Majdalani 1971; Yagodkin 1967), this issue has been intensively studied during the last fifteen years, especially in France (Avalon and Josset 2006; Avalon et al. 2000; Chedevergne and Casalis 2005; Prévost and Godon 2005), to ensure the reliability of the Ariane 5 launcher. One of the main outcomes of this work lies in the characterization of intrinsic instabilities of the internal flow (Casalis et al. 1998; Vuillot 1995). The mechanism that triggers instabilities can be examined through a simplified flow model, known as the Taylor-Culick flow (Taylor 1956; Culick 1966). Based on this

model flow, linear stability analysis (Chedevergne et al. 2006; Griffond et al. 2000) revealed the existence of temporally damped stability modes. Nonetheless, through coupling mechanisms involving acoustic modes of the channel, these spatially amplified modes can emerge to produce vortex shedding (Boyer et al. 2012; Chedevergne et al. 2012), called parietal vortex shedding (PVS). The most interesting results is that comparisons with pressure oscillations in subscale SRM (Chedevergne and Casalis 2006), for which mean flows slightly depart from the Taylor-Culick solution, are very good, supporting the relevance of the stability approach to explain the thrust oscillations phenomena. This is a major achievement in the understanding of the occurrence of thrust oscillations in SRM. Recently, applications (Ballereau et al. 2011) to real full scale SRM, such as P230 or SRMU of Ariane 5 and Titan IV launchers, respectively, have definitively established the link between the intrinsic instabilities defined by the linear theory and the observed thrust oscillations.

These successful analyses have brought a new insight into the issue; however, some important problems remain unresolved. For instance, the Taylor-Culick solution, given by Eq. (1), on which the stability analysis relies, stands for a laminar mean flow. Now, as the flow in a solid rocket motor is probably partially or totally turbulent during the flight, the relevance of linear stability theory is raised. More generally, the type of the flow, whether it is laminar or turbulent, is undetermined in SRM. The need for a characterization of the type of flow in SRM is essential in the sense that turbulence is expected to occur somewhere in the rear part of the motor and to interact with the PVS modes responsible of thrust oscillations. Numerous applications exist, ranging from linear stability analysis to numerical simulations taking into account the laminar-turbulent transition.

B. Gazanion · F. Chedevergne (✉) · G. Casalis
Aerodynamics and Energetics Modelling Department, ONERA,
2 Avenue Edouard Belin, 31055 Toulouse, France
e-mail: francois.chedevergne@onera.fr

A fundamental difference of behavior exists between planar and cylindrical configurations concerning the characterization of laminar-turbulent transition. Indeed, in the planar case (Traineau et al. 1986), laminar and turbulent regions are easily identified through mean velocity profiles modifications in the same way as in boundary layer flows. Numerical simulations (Apte and Yang 2003) support the measurements and show the influence of PVS in the transition process. However, there is no equivalent work in cylindrical coordinates, neither numerically nor experimentally.

To start addressing this question, existing experimental database on cold flow setups can be examined focusing on the detection of laminar-turbulent transition. The cold flow setup of ONERA, named VALDO, that reproduces the flow characteristics of SRM, has been used in the last decade to prove the existence of PVS (Avalon and Josset 2006). Measurement campaigns providing velocity and pressure signals were previously conducted and are now post-processed with the objective of determining the actual type of the flow. The present paper proposes different signal processing leading to the characterization of the transition location in the VALDO setup.

The first part is dedicated to the description of the VALDO setup and the measurement techniques. Then, the second part presents the factors defined to analyze the measured signals that lead to the characterization of laminar-turbulent transition in the flow, finally explained in the third part.

2 VALDO cold flow setup

The experimental setup VALDO was operated at ONERA by Avalon and Josset (2006) from 2000 to 2011. It aimed at reproducing the inner flow of a SRM using a cold gas approximation, to study its features and oscillatory phenomena. Several campaigns were conducted over this period to investigate vortex sheddings, acoustics and structure vibration of inner parts such as inhibitors. All the informations presented in this article about the experimental setup configuration and the measurements concern the 2001 campaign. The latter was dedicated to the characterization of the intrinsic instabilities of the flow which existence was predicted by stability analysis. This experimental work provided reference oscillation frequencies to support the development of stability methods capable of dealing with this 2D axisymmetric non-parallel flow. The measurement process was therefore adapted to capture axisymmetric coherent structures with rather low frequencies. As a consequence, choices made for the 2001 campaign are not optimal for the laminar-turbulent transition investigation which is the aim of the present work. These

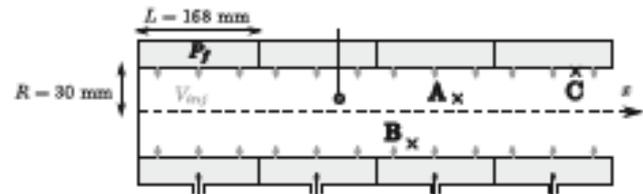


Fig. 1 VALDO setup in its 4 elements configuration. Points A, B and C are the locations of the three representative signals used in Sect. 4

limitations have been carefully considered in the present analyses.

VALDO is a modular cylindrical cold flow setup designed to model the injection-driven flow in a SRM (Avalon and Josset 2006). The modeling principle is that of Yagodkin (1967) and Brown et al. (1981), Dunlap et al. (1990), i.e., a porous cylinder placed in a pressurized chamber producing a homogeneous wall injection. Up to four identical cylinders of 168 mm length, 30 mm inner radius R and 5 mm wall thickness, built in a material with a porosity of $18 \mu\text{m}^1$, can be mounted in order to vary the total length of the duct. Each cylinder is enclosed in a pressurized chamber, fed in air by three tubes equally distributed, creating an independent injection element. Other features such as cavities and inhibitors can be added to VALDO in order to mimic technological details of a SRM. In addition, an adaptive nozzle can be mounted on the downstream end to control the output flowrate.

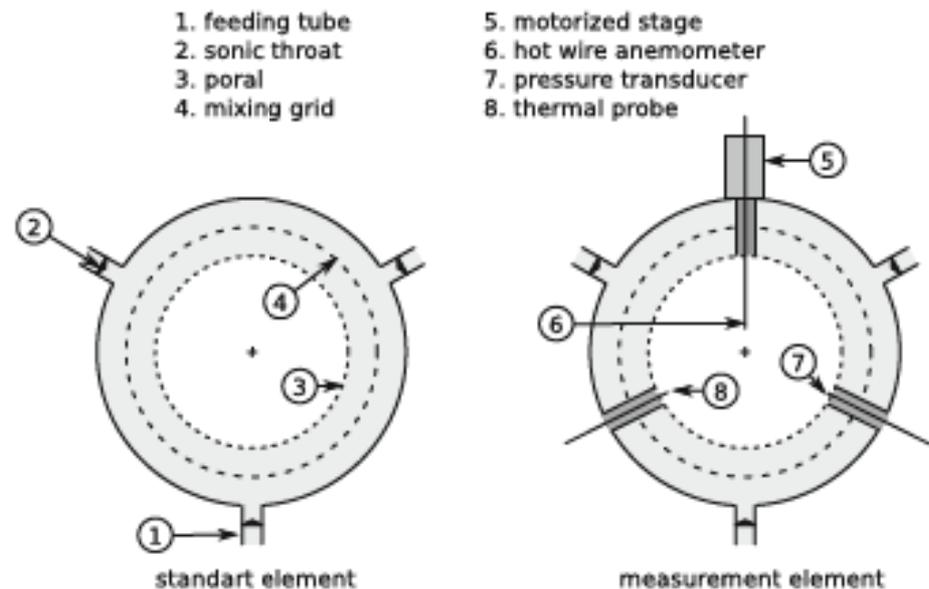
In the present work, VALDO is in a simple configuration composed of four injection elements assembled together without any cavity or inhibitor, as shown in Fig. 1, providing a 672-mm-long porous channel with an aspect ratio of $4L/R = 22.4$. The channel is closed at one extremity, named head-end, which is chosen as the origin for the axial position x . The other end is a nozzleless open exit. The injection velocity is therefore determined by the chosen feeding pressure and channel wall porosity. A feeding pressure $P_f = 3.5$ bar has been used, leading to an injection velocity of 1.05 ms^{-1} . A heating device regulates the input flow temperature to maintain an inner channel temperature of 20°C .

One of the four elements of VALDO is specially designed for inner measurements in two sections located at 49 and 119 mm from one of its extremity along the axis. Each section is equipped with three ports, one every 120° , in order to hermetically insert probes through the chamber into the channel, as depicted in the right part of Fig. 2.

The first port hosts a hot-wire probe mounted on a motorized stage. The latter moves the probe vertically from 0 mm, i.e., the injection wall, to 58 mm inside the chamber (i.e., closed to the opposite wall). The single wire of this

¹ Pencil bronze, made of sintered small bronze spheres.

Fig. 2 Longitudinal cutting plane of VALDO for a standard element (left) and for the measurement element (right)



probe is set horizontal and perpendicular to the channel axis, therefore the measured instantaneous local velocity is $U = \sqrt{U_x^2 + U_r^2}$. The other ports of the same section, called measurement section, host a thermal probe and a pressure transducer. According to the particular form of the mean flow, pressure and temperature mainly evolve in the longitudinal direction. They can reasonably be considered constant over the section, so that only one measurement position is needed in each section. A pressure transducer on the head-end wall and another in a feeding chamber complete the experimental apparatus.

The measurement database consists in the instantaneous signals from the five probes for all the hot-wire available positions. For a given position, the signals of the probes were sampled simultaneously during 1 s at a frequency of 4,000 Hz. A low-pass filtering with a cutting frequency of 2,000 Hz was used by the sampling device to prevent aliasing during signal processing. Due to the modular design of the VALDO setup, the measurement element can be successively switched with each other element, which gives a set of 8 different measurement sections. For each available section, the flow velocity was measured vertically every 2 mm providing a total of 240 measurement positions.

The constant temperature anemometry system consists of a 1210-T1.5 (TSI) single-component hot-wire probe with an IFA 100 (TSI) anemometer. The hot-wire probe is a 3.8- μm diameter and 1.27-m length tungsten-platinum wire. Measurements were conducted with an overheat ratio of 1.96, corresponding to a temperature difference of 130 K between the wire and the flow. The anemometer is designed to capture unsteady phenomena with

frequencies up to 150 kHz. The anemometry system was calibrated for measurements at 20 °C and over the velocity range of the experiment using a TSI 1127 calibrator. The pressure transducers model is XT-190-100A (Kulite), and the thermal probe is a cold-wire PT100 sensor (Thermocoax).

3 Mean flow and linear stability analysis

Considering a cylinder closed at one end, for which a constant injection of an inviscid gas is applied on its lateral wall, an analytic solution can be reached:

$$\begin{aligned} \overline{U}_x &= \pi \frac{x}{R} V_{inj} \cos\left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \\ \overline{U}_r &= -\frac{R}{r} V_{inj} \sin\left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (1)$$

where x and r are the cylindrical coordinates, R is the cylinder radius and V_{inj} the injection velocity. This solution is known as the Taylor–Culick flow (Taylor 1956; Culick 1966). It is commonly used as a reference solution to evaluate flow quantities inside SRM. Cold flow setups such as VALDO aim at reproducing this solution. As there is no boundary layer developing along the lateral walls due to injection, the viscosity of air in the rig is not a source of departures from the inviscid solution of Eq. (1). The Taylor–Culick flow is actually a particular solution the Berman's equation (Berman 1953) that accounts for viscous effects through a Reynolds number based on the injection velocity. In cylindrical coordinates, the Berman's equation reads:

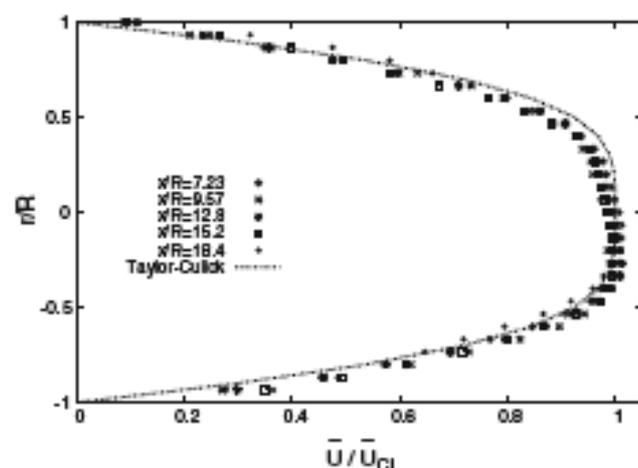


Fig. 3 Mean velocity profiles in the experiment ($V_{inj} = 1.05 \text{ ms}^{-1}$) compared to analytical solution

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{RV_{inj}}{\nu} \\
 U_x &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad U_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
 \Phi &= xF(r) \\
 \left[\left(\frac{F'}{r} \right) \left(\frac{F'}{r} \right)' - \left(\frac{F'}{r} \right)^2 \right]' + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \left(r \left(\frac{F'}{r} \right)' \right) \right]' &= 0 \\
 \left(\frac{F'}{r} \right)'(0) = \left(\frac{F'}{r} \right)(0) = F'(1) = 0, F(1) = 1 &
 \end{aligned} \quad (2)$$

For $Re \rightarrow \infty$, Berman's equation leads to the Taylor–Culick solution. For $Re > 100$, differences between the Berman's equation and Taylor–Culick solutions are insignificant. In SRM, the Reynolds numbers Re are at least several hundreds, and in the present, VALDO experiments Re is about 2000. Time-averaged measurements of U , denoted \bar{U} , at different axial positions are depicted on Fig. 3 and compared to the solution of Eq. (1). The results of those experiments are consistent with Taylor–Culick's mean profiles for low x/R positions. To account for possible injection velocity differences between experiments performed at different moments, a normalization velocity $\bar{U}_{CL}(x)$ is defined for each measurement abscissa. It corresponds to the centerline velocity of the Taylor–Culick solution (1), calculated using an injection velocity deduced from the experimental bulk velocity at the given abscissa.

Experimental profiles are in overall agreement with the Taylor–Culick's ones. The mean velocity profile is close to the laminar solution of Taylor–Culick even for large values of longitudinal position x . Unlike the planar channel configuration, for which a mean flow profile deviation is observed (Traineau et al. 1986) when turbulence acts, no remarkable change can be noticed to determine whether the flow is laminar or turbulent.

The velocity profile departures from that of Taylor–Culick are recurrent in experiments with a cylindrical porous channel. Similar discrepancies have been reported by Dunlap et al. (1990), Yildiz et al. (2001) and Avakon and Josset (2006). Explanations vary from one author to another.

Dunlap et al. (1990) attribute the asymmetry to a buoyancy effect due to the temperature difference between the flow and the head-end wall; the temperature difference involved in the VALDO setup is far smaller. A partial obstruction of the porous wall due to dust fouling, which affects differently the upper and lower halves of the channel, could also explain this asymmetry. No asymmetry was observed when the setup was placed vertically (Dunlap et al. 1990), which supports both explanations.

Chedevigne and Casalis (2006) highlight the sensitivity of the mean flow to the injection condition close to the head-end using numerical simulation. Small differences of the injection velocity distribution over the first millimeters can lead to departures from the Taylor–Culick profile in the head-end region that reduce downstream. In an experimental setup, this perturbation of the velocity distribution is likely due to small defects of the porous wall near its junction with the head-end wall. The main induced effect is a bending of velocity profiles around the centerline which is clearly visible in Yildiz et al. (2001). In the present experiment, this injection defect is supposed to act on the first three measurement sections, as in Fig. 4a for instance.

Besides, the traversing hot-wire probe has also an effect on the flow. Indeed, the presence of the probe and its support in the channel directly result in a reduction in the section area. Since the flow is weakly compressible, this leads to an increase in the bulk velocity which evolves linearly with the penetration length of hot-wire support. Estimation of the area reduction shows that this velocity increase reaches 8 % when the hot-wire probe approaches the opposite wall ($r/R = 0.93$). A theoretical correction of this effect significantly reduces the asymmetry, as shown in Fig. 4b. In this experiment, the mean velocity profile departures are probably due to a combination of these effects.

Based on the laminar solution of Taylor–Culick (1), a linear stability analysis has been conducted, leading to the identification of intrinsic instabilities. These instabilities have remarkable characteristics (Chedevigne et al. 2006). They are temporally damped but with a very high amplification rate in the streamwise direction x . They are forming discrete eigenmodes almost regularly spaced in the spectral space. Once amplified, the eigenmodes lead to the arrival of PVS modes that have been observed experimentally in several setups, especially in the VALDO rig. Experimentally, one observes the emergence in the flow of amplified modes with frequencies close to that of the first

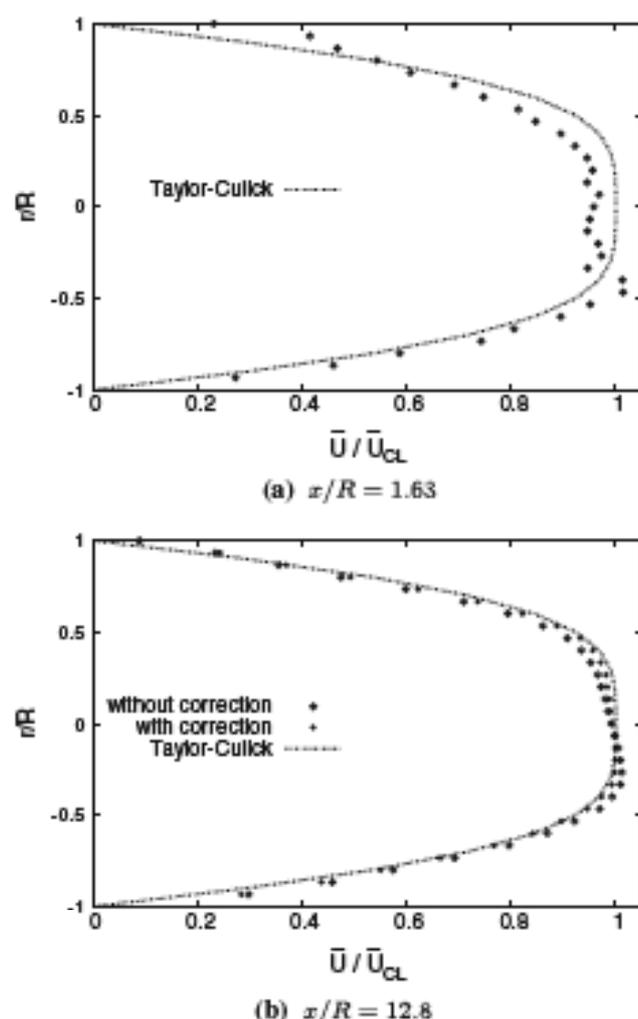


Fig. 4 Departures of mean velocity profiles from the analytical solution

acoustic mode of the channel. The mechanisms that lead to this observation are now well understood and have been reproduced through numerical simulations (Chedevigne et al. 2012).

Prior work by Dunlap et al. (1990) provides root mean square (RMS) velocities $u_{rms} = \sqrt{u'^2}$, with $u = U - \bar{U}$ the fluctuating part of velocity, that can be compared to measurements in the VALDO setup. RMS velocities are normalized by the local time-averaged velocity, standing for local fluctuation intensities. The axial evolution of the fluctuations intensities u_{rms}/\bar{U} for the VALDO measurements and for Dunlap's experiments are drawn in Fig. 5 at several radial positions.

According to Fig. 5, VALDO measurements are in a general good agreement with those of Dunlap et al. However, small discrepancies exist which origins are probably linked to the rig conceptions. Although very similar, the

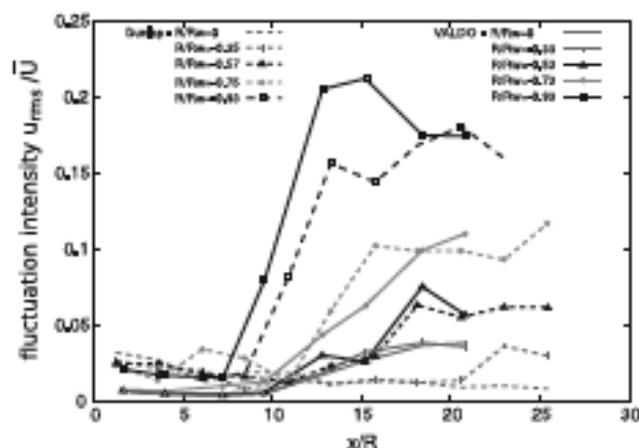


Fig. 5 Fluctuations intensities in two different cold flow setups

channels used for the two experiments differ in two major points: the number of segments and the wall porosity. The connection of segments locally interrupts the injection, introducing perturbations in the flow. Wall porosity has a real influence on the turbulence levels reached, as indicated by experiments on VALDO with two different porosities.

In the first part of the channels, for $x/R < 7$, the fluctuation amplitudes are low indicating a stable and nearly steady laminar behavior of the flow. Then, in both experiments, a huge spatial amplification is observed from $x/R = 7$ to $x/R = 13$ in the near-wall region. This amplification is characteristic of the eigenmodes described by the linear stability theory. This phenomenon is not transition, which would imply that the flow becomes turbulent, but results from the linear amplification of an intrinsic instability developing on a laminar base flow. Downstream, a saturation is observed, probably due to nonlinear effects, since the linear theory no longer holds for perturbations with large amplitudes. At this stage, the flow is expected to become turbulent.

From this evolution of radial profiles of normalized RMS velocity along the channel, Dunlap et al. (1990) deduced a longitudinal transition position. According to their analysis, transition was claimed to start at $x/R \approx 11$ and end at $x/R \approx 15$, although these authors notice the radial dependence upon the amplification. Their interpretation did not include the presence of PVS in the flow since the theory was not available at that time. Now, in the light of the stability analysis, a new description of the transition can be sought. Besides, as experiments in VALDO were conducted on an established flow with static operating conditions, the type of the flow only evolves spatially. This feature enables a spatial exploration of the type of the flow in order to locate transition regions, surrounded by laminar and turbulent regions.

4 Analysis criteria

In order to access more information on turbulence development inside the chamber, a new description of the transition is sought relying on specific signal processing. Focus is set on fluctuating velocities u . Three signals, representative of those found at the different axial and radial locations, are depicted in Fig. 6. The corresponding positions named A, B and C, are plotted on Fig. 1.

Signal A is a combination of a few number of harmonic modes, and signal B is seemingly a nonlinear interaction of the same modes, while signal C does not present any remarkable pattern. These three examples give an overview of the variety of behaviors found in the channel for $x/R > 7$. As shown in Fig. 5, there is no fluctuations upstream, where the flow is obviously laminar. They illustrate common characteristics of the measured signals: unsteadiness and absence of transitional features such as intermittency classically observed in the boundary layer transition (Arnal and Juillen 1977). Signal processing is therefore required in order to extract information on laminar-turbulent transition.

Three approaches are considered in the present paper involving, respectively, energy spectrum, autocorrelation function and statistics of the signals. These approaches have

been retained owing to the fact that each of them bring a particular insight into the flow nature. They are successively described and applied to the representative signals of Fig. 6. A quantitative information is then extracted to characterize the flow nature at the given positions.

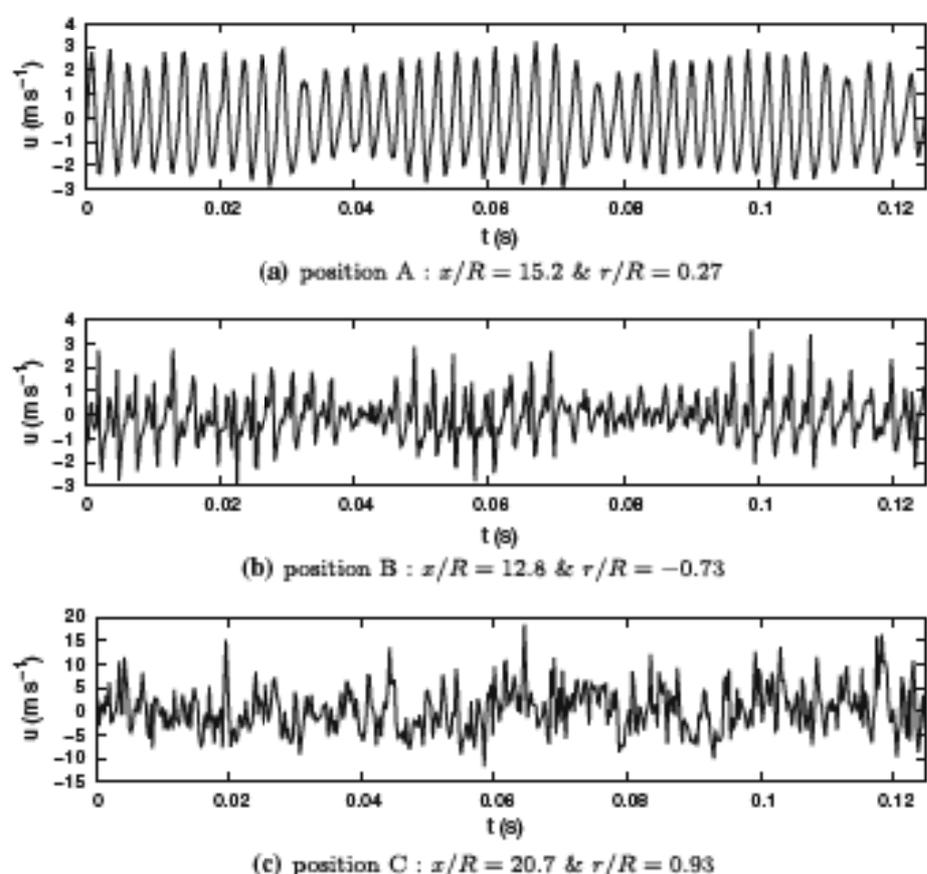
4.1 Energy spectrum

First, focusing on energy distribution with respect to frequency, power spectral densities (PSD) are obtained using Welch's method. Fourier transforms are computed on samples of 2,048 points with a 90 % overlap and 2,048 points Hamming windows, over the frequency range [0, 2,000] Hz.

Figures 7, 8, 9 present the PSD of the three examined signals, designated by p . The top part (a) of these figures are build using a regular frequency scale, restricted to [0, 1,200] Hz to look for the main harmonics of PVS. The bottom parts (b) use instead a logarithmic scale on the whole frequency range.

The power spectrum of signal A on Fig. 7a is dominated by a structure of linearly spaced modes. Their frequencies, between 280 and 420 Hz, are close to that of the first longitudinal acoustic mode, around 343 Hz in the present case. This spectrum matches with the description of PVS

Fig. 6 Signals of fluctuating velocity u



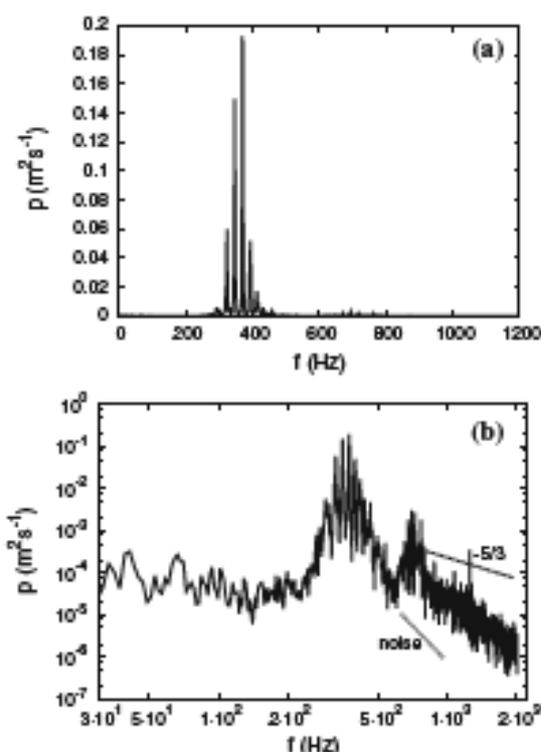


Fig. 7 PSD—position A

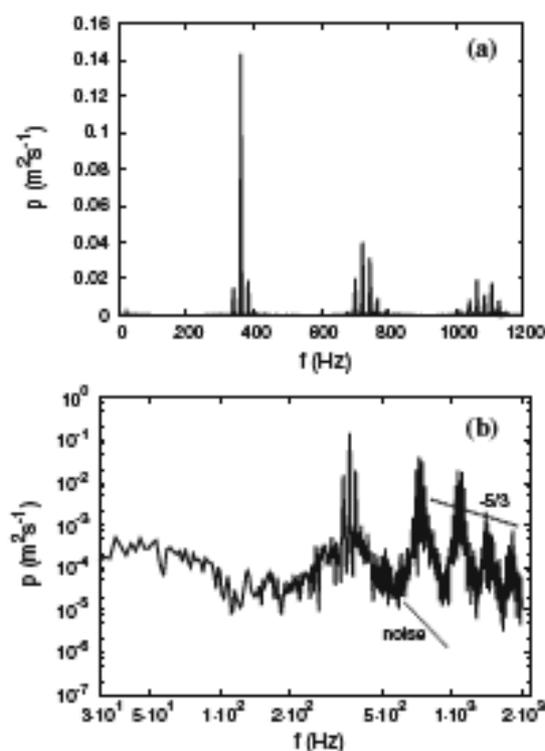


Fig. 8 PSD—position B

modes recalled above. They prevail over the spectrum which indicates that the flow at position A is laminar with pure PVS modes as described by the linear stability theory.

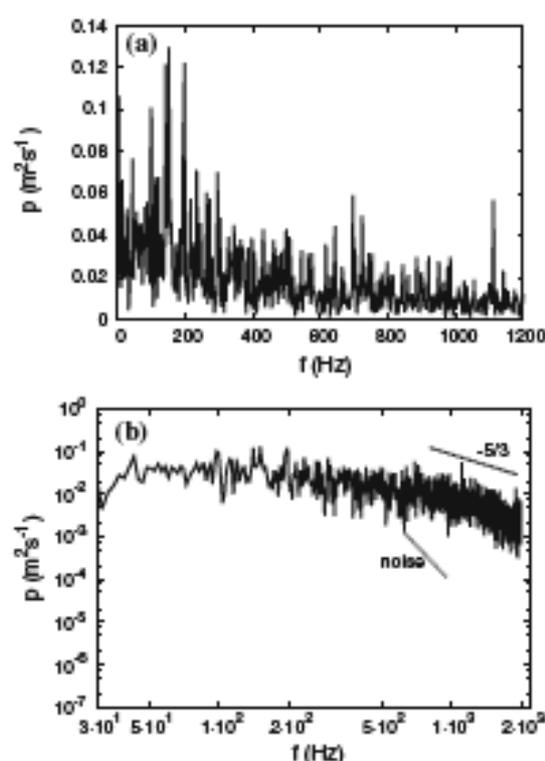


Fig. 9 PSD—position C

The same modal structure can be observed in signal B as well as additional similar structures at higher frequencies.² It can be noticed that the frequencies exhibited in these structures are harmonics of those around the first acoustic mode. This suggests that these secondary modes are due to nonlinear interactions between the stability eigenmodes. Flow in position B is still laminar. Figure 9a shows that the energy spectrum of signal C is spread all over the frequency range, without any dominating frequency. The flow at this position is turbulent.

Figures 7b, 8, 9b present spectra using the classical representation based on logarithmic scales. High frequencies can be due to turbulence or noise. Indeed, the irregularities of the porous wall material (sintered bronze spheres) add a low amplitude noise to the injection velocity which propagates in the whole channel. To distinguish the turbulent contents from noise, the $-5/3$ slope representative of the energy cascade and a -5.71 slope characteristic of the noise are depicted in these figures. From a velocity measurement close to the porous wall and near the head-end, it was found that the energy spectrum of noise evolves in $\propto f^{-5.71}$ between 500 and 1,600 Hz. The laminar flow of Fig. 7a essentially features strong coherent structures easily distinguishable from the noise. For Fig. 9b, it can be noticed that high frequency evolution corresponds to the

² Up to four packets of harmonics are visible on Fig. 8b.

inertial subrange and is therefore due to turbulence development and not to the injection noise. However, the low sampling frequency limits this analysis, in particular information is missing for the inertial subrange up to the Kolmogorov scale.

Power spectral densities is a relevant tool to show the importance of the energy carried by PVS eddies. To quantify this importance, the ratio E_{PVS} is defined in Eq. (3). This ratio stands for the relative energy of the PVS modes with respect to the total energy of the spectrum. The frequency range considered in the numerator has been calibrated once and for all on laminar signals to capture the main PVS modes, as shown in Fig. 7. The frequency range $[f_{PVS}]$ is centered around the first acoustic mode of the channel (343 Hz) and has a half width of 75 Hz. Consequently, E_{PVS} is defined such that it is expected to take small values when the energy is distributed on a large range of frequencies, typically when the flow is turbulent, whereas in laminar cases E_{PVS} reaches values close to 1.

$$E_{PVS} = \frac{\int_{[f_{PVS}]} p \, df}{\int p \, df} \quad (3)$$

The values of E_{PVS} for the three positions A, B and C are given in Table 1. E_{PVS} has two main characteristics. First, its values are coherent with the energy spectra. E_{PVS} takes large values when PVS modes are dominant as in Fig. 7a and small values when they are hidden by other structures, as in Fig. 9a. Since the focus is set on frequencies of PVS modes emerging around the first acoustic modes, higher harmonics are ignored, see Fig. 8, resulting in a lower value for case B. However, an important part of the energy, about 37 %, is carried by PVS modes which indicates a laminar behavior of the flow at this position, even if no linearity is observed. For the turbulent case C, E_{PVS} value is significantly lower. Second, the severe difference of behaviors observed in spectra results in a huge gap between values of E_{PVS} . Consequently, this first criterion allows a clear discrimination between signals generated at positions where the flow is laminar and those where the flow is turbulent.

4.2 Autocorrelation

The second approach has been chosen by focusing on autocorrelation, which is the time-correlation at a given location and is defined as:

Table 1 Values of E_{PVS} for the three reference signals

Position	A	B	C
E_{PVS}	0.90	0.37	0.11

$$\mathcal{A}(s) = \frac{\overline{u(t)u(t+s)}}{\overline{u(t)u(t)}} \quad (4)$$

Autocorrelation provides a measure of the presence of repeating patterns. Applied to a velocity signal, it is sensitive to the coherent structures carried by the flow, such as the PVS vortices developing in the laminar flow regions and described in the previous section. A discretized form of this function is required to treat a data set composed of n points :

$$\mathcal{A}_s = \frac{c_s}{c_{s=0}} \quad \text{with} \quad c_s = \frac{1}{n-s} \sum_{k=1}^{n-s} u_k u_{k+s} \quad (5)$$

A special treatment is used in the present study to emphasize the discrimination of the underlying type of flow of the experimental signals. First, each signal is divided into 40 consecutive samples of 100 points. Time is redefined on every sample as the lag s related to the first point of the sample, therefore ranging in $[0, 2.475 \times 10^{-2}]$ s. Then, a discrete autocorrelation function is computed for each sample. At last, a resulting autocorrelation function is built as the statistical mean of the sample autocorrelation functions.

This process aims at extracting an autocorrelation function on a short time representative of the whole signal. The average is expected to smooth the small departures that appear locally in some samples and highlight the general trends. Splitting the signal with the given parameters and averaging leads to use of a high-pass filter with a cutting frequency of 40 Hz. As for this particular flow, the relevant frequencies carrying energy, whether the flow is laminar or turbulent, are far above 40 Hz since the PVS frequencies start at 280 Hz, see Fig. 7, this operation is not leading to a loss of information.

The autocorrelation function of a turbulent signal should vanish very quickly, revealing the weak coherence of the eddies. Indeed, the energy cascade, characteristic of turbulent flows, tends to break large eddies carrying information. On the opposite, the function slowly decreases for signals exhibiting coherent structures. As mentioned earlier, the laminar solution of Taylor–Culick can exhibit such behavior due to the presence of its eigenmodes.

Autocorrelation of signal A, displayed on Fig. 10, has a damped pseudo-oscillatory shape of frequency approximately 360 Hz, which corresponds to the range of PVS frequencies. The negative values of \mathcal{A} are representative of anti-correlation, i.e., an out of phase evolution of $u(t)$ and $u(t+s)$, which is not a loss of correlation. The correlation evolution is rather to be seen in the amplitude of \mathcal{A} . This figure can consequently be related to a laminar flow. A similar behavior is found in the positive part of the autocorrelation function for signal B, with a steeper shape. The

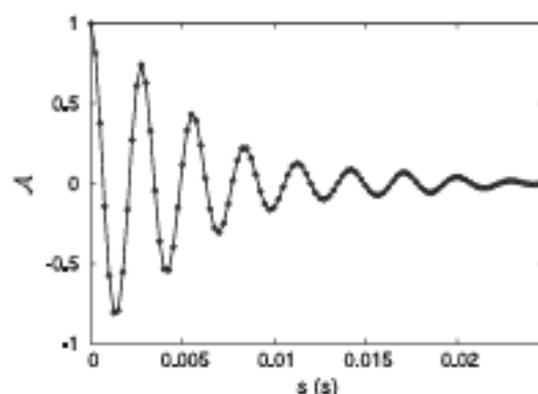


Fig. 10 Autocorrelation—position A

Table 2 Values of T_{corr} for the three reference signals

Position	A	B	C
T_{corr}	3.9×10^{-3} s	2.3×10^{-3} s	5.1×10^{-4} s

associated negative values are very close to zero, indicating a loss of correlation. Autocorrelation function of signal C decreases quickly and oscillates around zero, suggesting that the flow is locally turbulent.

Time-scale T_{corr} is defined as the integration of the autocorrelation function,

$$T_{corr} = \int |\mathcal{A}| ds \quad (6)$$

The correlation loss to be caught is contained in the envelope that draws the decreasing amplitude of \mathcal{A} . Therefore, T_{corr} is based on the absolute value of \mathcal{A} . The values computed for the three examples are given in Table 2.

The values of T_{corr} are affected by the method chosen for calculating the autocorrelation function. Usual calculation using Eq. (5) and full length signals³ give much higher values, ranging between 10^{-2} and 10^{-1} s. However, the focus is not set on the exact values of T_{corr} but on its capacity to separate extreme cases. The present calculation of T_{corr} keeps its discriminating role between signals issued from positions where the flow is laminar or turbulent. Thus, the main interest of the defined factor from autocorrelation function remains unchanged.

As previously indicated with the first approach, the correlation time T_{corr} confirms the flow is laminar at positions A and B (Figs. 10, 11) whereas it is supposed to be turbulent at position C (Fig. 12).

³ Instead of 40 samples of duration equals to 2.475×10^{-2} s.

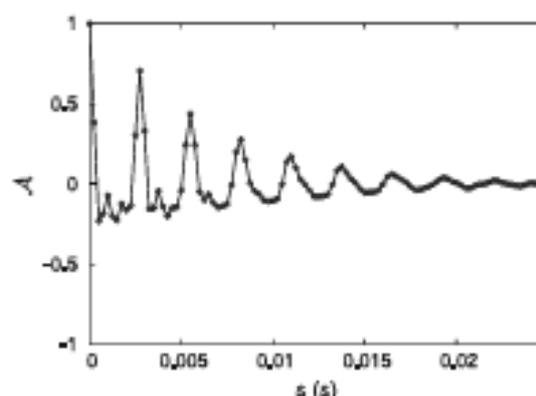


Fig. 11 Autocorrelation—position B

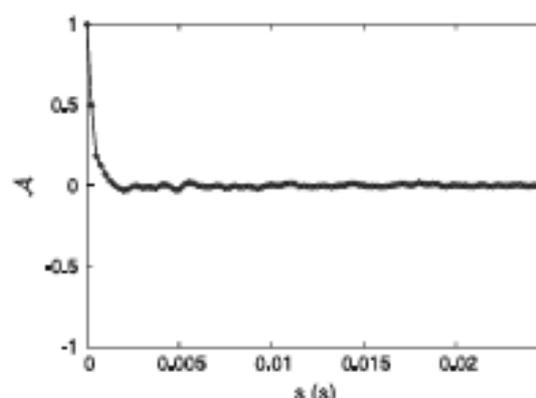


Fig. 12 Autocorrelation—position C

4.3 Statistics

In the last approach, the type of the flow is evaluated considering the statistics of the velocity signals. In fully developed turbulence, the flow quantities such as the velocity U behave like random variables following normal statistical distributions. Let $\hat{u} = u/u_{rms}$ be the standardized⁴ variable of mean 0 and standard deviation 1. If U is normally distributed, then the probability density function (PDF) of \hat{u} is the standardized normal distribution given in Eq. (7).

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\hat{u}^2} \quad (7)$$

As the velocity measurements in VALDO are sampled signals, a discrete PDF $d(\hat{u})$ is computed. The range of \hat{u} is split up into n parts. $n = 80$ has been chosen as a compromise between the resolution of the PDF and a minimum number of points per interval required to perform meaningful statistics. Figures 13, 14, 15 show this discrete

⁴ By definition $\hat{u} = \frac{u-\mu}{\sigma}$, here $\mu = \bar{U}$ is the mean, so $U - \mu = u$, and $\sigma = u_{rms}$ is the standard deviation of U .

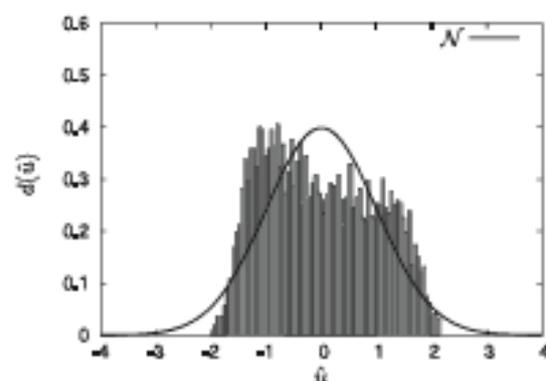


Fig. 13 PDF—position A

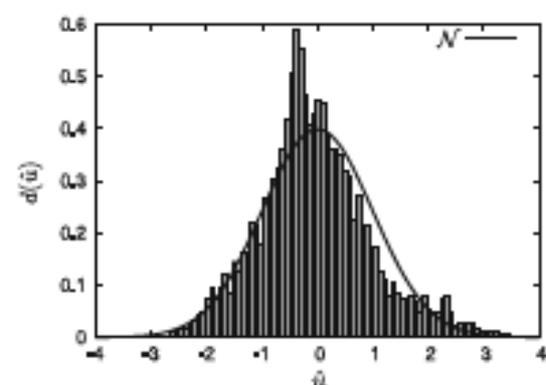


Fig. 14 PDF—position B

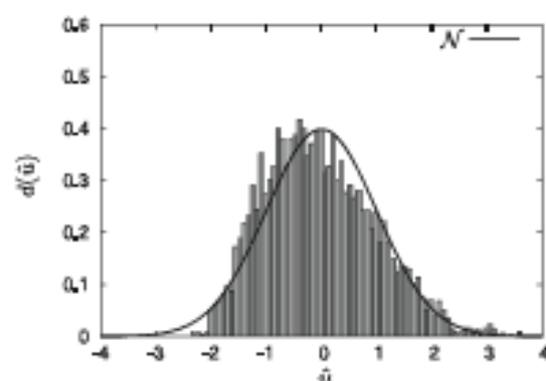


Fig. 15 PDF—position C

PDF for the three examples. The curve of \mathcal{N} provides a comparison with the PDF of the random distribution illustrating a theoretical turbulent signal.

Interpretation of these figures is more difficult than for the two previous approaches. The PDF clearly departs from the normal law for signal A and quite fits for signal C. However, the PDF for position B, see Fig. 14, is ambiguous since it looks like the curve of \mathcal{N} and could therefore be considered turbulent, which is in contradiction with the conclusions of the previous approaches.

Table 3 Values of S and F for the three reference signals

Position	A	B	C
S	0.22	0.40	0.42
F	2.13	2.97	2.80

Characteristics of the PDF curves can be quantified using two shape factors:

$$S = \overline{u^3} / (\overline{u^2})^{3/2} \quad F = \overline{u^4} / (\overline{u^2})^2 \quad (8)$$

The skewness factor S measures the asymmetry and its orientation. The flatness factor F takes higher values for sharp curves and lower for flat ones. The standardized normal law \mathcal{N} is characterized by $S = 0$ and $F = 3$. The values obtained for the representative signals are given in Table 3.

The third approach offers a less discriminating quantification of the signals. If positions A and C are still well differentiated, skewness and flatness for position B are close to those of signal C. Besides, note that the representative signals A and C have surprising skewness values S , since $S_C > S_A$ whereas the flow at position C is expected to be more turbulent than at position A. A further analysis in Sect. 5, including all measuring positions, see Fig. 16c, confirms both the singularity of the obtained values and the global interest of such a criteria.

Finally, three approaches have been presented to investigate laminar-turbulent transition through signal processing. The resulting figures and factors E_{PVS} , T_{corr} , S and F allow a qualification of the type of the flow depending on the position. In spite of the expressed reservations about the statistics, the coherence that exists between these approaches allows to draw conclusions on the type of flow for the three retained signals. The same process is now applied to the whole set of signals to investigate the laminar to turbulent transition inside the channel.

5 Transition detection

To determine the laminar-turbulent transition line of the flow inside a SRM, the measurements of the VALDO setup were examined. Methods developed in Sect. 4 have shown their ability to make a clear distinction between laminar and turbulent flow on the representative signals A and C, see Sect. 4. The post-processing methods provide quantitative values E_{PVS} , T_{corr} , S and F allowing the desired analysis of the flow for the complete set of measurement signals.

To begin with, a global comparison of the factors calculated all over the chambers is needed, to determine

whether the agreement obtained for three reference signals, used in Sect. 4, can be extended to the whole set of signals. For this purpose, the spatial distribution of the related factors E_{PVS} , T_{corr} , S and F is investigated. According to stability analysis and as shown by Fig. 5, transition should occur for $x/R > 11$. Upstream, the fluctuations have very low amplitudes which makes the application of the defined approaches irrelevant. The flow is actually laminar in the first part of the channel, and PVS modes, assuming that they exist, are not amplified enough to be accurately measured. The data set will therefore be reduced to the downstream part of the duct, i.e., $12.8 \leq x/R \leq 20.8$.

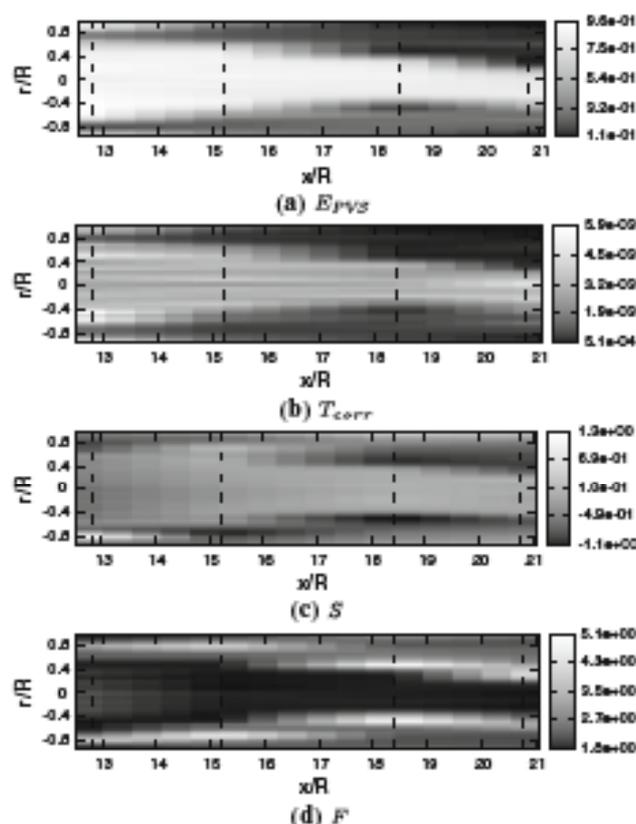


Fig. 16 Interpolated fields of factors E_{PVS} , T_{corr} , S , and F for $12.8 \leq x/R \leq 20.8$

Visualization is improved by linear interpolation of the values of the factors on a more refined grid. The new regular grid is composed of 16 points for $x/R \in [12.8, 20.8]$ and 60 points for $r/R \in [-0.93, 1]$. The interpolated fields are presented in Fig. 16a–d.

Figure 16a–d shows that the four fields exhibit a similar pattern, i.e., a central area, large at low x/R that narrows when x/R increases, and two lateral areas that expand radially downstream. The observed coherence between Fig. 16a–d, previously highlighted with the reference positions, reveals the relevance of the proposed approaches.

It was concluded in part 4 that E_{PVS} and T_{corr} are good indicators of the development of turbulence since they take higher values when the flow is laminar and diminish as turbulence grows. An analysis of Fig. 16a, b reveals that the central area corresponds to laminar behaviors, while the two lateral areas correspond to developing turbulence.

The laminar-turbulent transition onset occurs at the frontier between these areas. In order to visualize this frontier, a combination C of the normalized factors is computed. Normalization on the same range $[0, 1]$, denoted by a N superscript, facilitates their comparison. Hereafter, the chosen combination is a simple average value :

$$C = (E_{PVS}^N + T_{corr}^N + S^N)/3 \tag{9}$$

Contours of C are plotted on Fig. 17. The limit of the areas corresponds to the contour of medium level, since it is the case for E_{PVS} and T_{corr} , as it can be seen on Fig. 16a, b, while S reaches its extrema around this limit, see Fig. 16c. The transition line is defined as this limit, highlighted in Fig. 17, and corresponds to the contour line $C = 0.5$.

Based upon the chosen numerical factors and combination C , a transition line has been defined. Represented on Fig. 17, it exhibits several important features, analyzed below. First, the shape of the transition line in the upper and lower parts of the channel is not symmetric. A slight asymmetry exists upstream $x/R = 17$, whereas it becomes stronger for $x/R > 17$ and particularly downstream $x/R > 19$ where a slope deviation is observed. This asymmetry reminds of the mean velocity profiles asymmetry

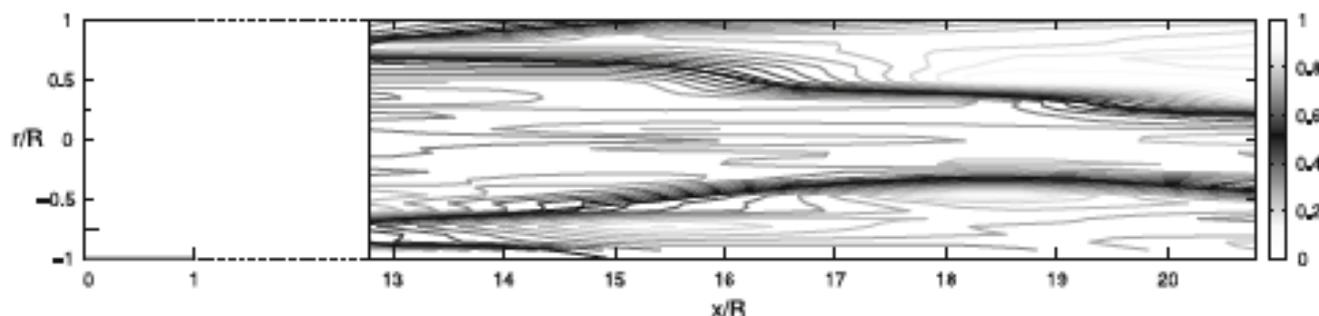


Fig. 17 Contours of C and transition line

noticed earlier 3 and is likely linked to it. However, it has to be noticed that the asymmetry also results from the interpolation. In particular, departures in the values of the four factors for radial positions around $r/R = \pm 0.4$ in the last axial section propagate upstream, reinforcing the perception of the asymmetry. The second point concerns the three areas that are demarcated by the transition line. The two first ones, located near the lateral wall, can be qualified as turbulent areas. On the contrary, the last area is a laminar one and occupies the core of the channel. It is important to note that the use of the term "turbulent area" does not mean that the flow is literally turbulent there. Actually, signals in this region exhibit different behaviors ranging from a nonlinearity saturation to a fully developed turbulence pattern as for signal C, see Fig. 15. The line exhibited in Fig. 17 corresponds thus to the end of the laminar region. Besides, the criterion seems to indicate the presence of a small near-wall laminar area for $12.8 \leq x/R \leq 15$. Finally, an important characteristic of these areas is that they evolve radially along the channel. The turbulent areas expand toward the centerline for $x/R \leq 18$. Downstream, despite the asymmetry that disturbs the analysis, it seems that the expansion continues but with a much slower slope. If confirmed, this asymptotic trend suggests that a significant laminar area prevails near the centerline, even for large values of x/R .

6 Conclusion

From existing measurements, specific post-processing operations were developed to investigate the type of flow in a setup representative of SRM. For this purpose, different quantitative factors were defined. The specificity of the studied flow lies in the existence of an intrinsic instability generating vortex shedding and that develops on a laminar flow. Based on this established behavior, a first factor is proposed, involving the power spectral density of the signals. Two other factors, taking advantage of turbulence characteristics, i.e., a fast decay of the autocorrelation function and a quasi-normal distribution of the probability density function, was proposed to analyze the fluctuating signals and determine the underlying type of flow.

Once applied to the whole set of signals, the four factors provide information on the transition line in the VALDO setup. Contrary to what was commonly admitted, claiming that the transition is essentially depending on the longitudinal position, the present analysis reveals the influence of the radial position. In particular, the core flow is laminar anywhere in the chamber. This suggests that full transition to turbulence in the whole section may happen on a long axial distance. This information on transition in cold flow setups has now to be extended to SRM, especially through numerical simulations.

Acknowledgments This work has been partly supported by the French space agency CNES and partly by ONERA. Authors are very grateful to G. Avalon and D. Lambert for sharing their data and technical informations about the 2001 campaign. Authors also thank D. Arnal and M. Forte for their relevant advices concerning transition analysis and O. Leon for his kind help.

References

- Apte S, Yang V (2003) A large-eddy simulation study of transition and flow instability in a porous-walled chamber with mass injection. *J Fluid Mech* 477:215–225
- Amal D, Juillen JC (1977) Étude de l'intermittence dans une région de transition de la couche limite. *La Recherche Aéronautique* 3:147–166
- Avalon G, Josset T (2006) Cold gas experiments applied to the understanding of aeroacoustic phenomena inside solid propellant boosters. AIAA
- Avalon G, Ugurtas B, Grisch F, Besson A (2000) Numerical computations and visualization tests of the flow inside a cold gas simulation with characterization of a parietal vortex shedding. AIAA, Huntsville
- Ballereau S, Godfroy F, Gallier S, Orlandi O, Thepenier J, Robert E, Cesco N (2011) Evaluation method of thrust oscillations in large SRM—application to segmented SRM's. In: AIAA Paper 2011-6054
- Berman A (1953) Laminar flow in channel with porous walls. *J Appl Phys* 24(9):1232–1235
- Boyer G, Casalis G, Estivalezes JL (2012) Theoretical investigation of the parietal vortex shedding in solid rocket motors. AIAA, Atlanta
- Brown RS, Dunlap R, Young SW, Waugh RC (1981) Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets. *J Spacecr Rockets* 18: 312–319. doi:10.2514/3.57822
- Casalis G, Avalon G, Pineau JP (1998) Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Phys Fluid* 10:2558. doi:10.1063/1.869770
- Chedevigne F, Casalis G (2005) Thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors, part II : a theoretical approach. In: AIAA Paper 2005-4000
- Chedevigne F, Casalis G (2006) Detailed analysis of the thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors. AIAA, Sacramento
- Chedevigne F, Casalis G (2006) Front wall boundary layer influence on the stability of the flow induced by wall injection. In: ONERA-DLR aerospace symposium
- Chedevigne F, Casalis G, Féraïlle T (2006) Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection. *Phys Fluid* 18(1):014,103–14
- Chedevigne F, Casalis G, Majdalani J (2012) Direct numerical simulation and biglobal stability investigations of the gaseous motion in solid rocket motor. *J Spacecr Rockets* 706:190–218
- Culick FEC (1966) Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. *AIAA J* 4(8):1462–1464
- Dunlap R, Blackner AM, Waugh RC, Brown RS, Willoughby PG (1990) Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber. *J Propuls Power* 6:690–704
- Flandro GA, Majdalani J (2003) Aeroacoustic instability in rockets. *AIAA J* 41(3):485–497. doi:10.2514/2.1971
- Griffond J, Casalis G, Pineau J (2000) Spatial instability of flow in a semiinfinite cylinder with fluid injection through its porous walls. *Eur J Mech B Fluids* 19(1):69–88

- Prévost M, Godon JC (2005) Thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors, part I : experimental investigations. In: AIAA Paper 2005-4003
- Taylor GI (1956) Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Sci* 234(1199):456–475. doi:10.1098/rspa.1956.0050
- Tmineau JC, Hervat P, Kuentzmann P (1986) Cold-flow simulation of a two-dimensional nozzleless solid rocket motors. In: AIAA Paper 86-1447
- Vuillot F (1995) Vortex shedding phenomena in solid propellant motors. *J Propuls Power* 11(4):626–639
- Yagodkin VI (1967) Use of channels with porous walls for studying flows which occur during combustion of solid propellants. In: Proceedings of the 18th international astronomical congress, vol 3, pp 67–79
- Yıldız D, Anthoine J, Buchlin JM (2001) Influence of radial injected flow on the aeroacoustic coupling in solid propellant boosters. *Am Inst Aeronaut Astronaut*. doi:10.2514/6.2001-2101

Transient ejection phase modeling of a Plasma Synthetic Jet actuator

F. Laurendeau,^{a)} F. Chedeveigne,^{b)} and G. Casalis
*Aerodynamics and Energetics Modeling Department, ONERA, 2 Avenue Edouard Belin,
31055 Toulouse Cedex 4, France*

(Received 16 April 2014; accepted 5 November 2014; published online 1 December 2014)

For several years, a promising Plasma Synthetic Jet actuator for high-speed flow control has been under development at ONERA. So far, its confined geometry and small space-time scales at play have prevented its full experimental characterization. Complementary accurate numerical simulations are then considered in this study in order to provide a complete aerothermodynamic description of the actuator. Two major obstacles have to be overcome with this approach: the modeling of the energy deposited by the electric arc and the accurate computation of the transient response of the cavity generating the pulsed jet. To solve the first problem, an Euler solver coupled with an electric circuit model was used to evaluate the energy deposition in the cavity. Such a coupling is performed by considering the electric field between the two electrodes. The second issue was then addressed by injecting these source terms in large Eddy simulations of the entire actuator. Aerodynamic results were finally compared with Schlieren visualizations. Using the proposed methodology, the temporal evolution of the jet front is remarkably well predicted. © 2014 AIP Publishing LLC. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4902394>]

I. INTRODUCTION

Aerodynamic active flow control has been a major concern for researchers in the aeronautic community for a long time. Many experiments were successfully conducted in laboratories, but practical implementation of actuators on aircraft often remains challenging. From this perspective, recent developments on plasma actuators are very promising, since they are very compact. For several years, ONERA,^{1,2} with the collaboration of the CNRS LAPLACE laboratory,^{3,4} has developed a Plasma Synthetic Jet (PSJ) actuator. It consists of a cylindrical cavity which dimensions do not exceed a few millimeters. A convergent nozzle is added to produce a directional jet for interaction with the external flow. Two electrodes are located inside the cavity and are connected to an electronic circuit. When the actuator operates, the electronic circuit triggers an electric discharge between the electrodes. Due to the Joule effect, the resulting plasma arc transfers energy to the surrounding air in the cavity. A jet is then generated through the nozzle. Afterwards, a natural aspiration phase occurs, and another cycle—air expulsion then natural aspiration—can be performed. The PSJ has a zero net mass flux. To date, successful applications concern jet noise control,⁵ separation flow control,⁶ and wing tip vortex attenuation.⁷ Other laboratories have developed similar actuators. The John Hopkins University Applied Physics Laboratory initially proposed the “sparkjet,”⁸ from which the ONERA PSJ is derived. The Center of Aeromechanics Research in the University of Texas at Austin has studied another actuator able to control the unsteadiness of shock-induced turbulent separation.^{9,10}

So far, in order to characterize the PSJ without external flow, several experimental techniques were used: total pressure measurements,¹ Schlieren visualization,^{1,11–13} voltage-current measurements,^{1,12} digital speckle tomography of the jet plume,¹⁴ optical emission spectroscopy of the discharge,^{12,15}

^{a)}Electronic mail: francois.laurendeau@onera.fr

^{b)}Electronic mail: francois.chedeveigne@onera.fr

short-exposure-time photographs of the discharge,⁴ and particle image velocimetry.^{14,16} Because of the intrinsic characteristics of the PSJ, experiments were not able to provide an exhaustive characterization of the actuator. Indeed, considering the small time and space scales at play, the induced flow is hardly measurable. Beyond the spatial resolutions and frequencies to be reached, some difficulties are specific to this type of actuator. In case of particles imagery techniques, it is quite tricky to seed particles in the cavity. Also, the strong electromagnetic field may be problematic for the particles seeding. In addition, important electromagnetic interference can be encountered by all the sensors and the measurement chain. To complete the existing experiments, numerical simulations are performed. Up to now, only Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes (URANS) simulations were conducted, both in 2D or 3D configurations. For Cybyk *et al.*,¹⁷ Grossman *et al.*,¹¹ and Anderson and Knight,¹⁸ the energy deposition realized by the discharge was considered instantaneous and was converted into initial conditions through a delimited zone where the temperature and density are imposed uniformly. Hardy *et al.*¹ proposed to solve the energy deposition phase by adding a source term in the energy equation. This term is assumed constant in time during the discharge and uniform in the whole cavity. In all cases, the value of the energy deposited by the arc is a fixed parameter and plays a significant role in the computations. These simulations were essentially used to observe the influence of some parameters, as the geometry of the cavity, the amount of deposited energy, or the location of the deposition. Only Hardy *et al.* have compared their results with experiences, in terms of maximal velocity and stagnation pressure of the jet.

The current paper presents numerical simulations aiming at faithfully describing the PSJ behavior during the electric discharge and the ejection phases. First, Schlieren experiments are analyzed in order to define a reference for the simulations. Thus, in Sec. II, the evolution of the jet front is extracted from the Schlieren images. Regarding numerical simulations of the PSJ, the energy deposition is a key point. In the present article, the model recently proposed by Dufour *et al.*¹⁹ is used to address this major issue. This model is based on the resolution of the Euler equations coupled with an electric circuit model. The coupling is realized through the electric field in the inter-electrodes space. The energy source terms calculated are then injected in the computations considering the complete geometry of the actuator. To capture the transient development of the jet, Large Eddy Simulations (LES) are retained. The modeling will be exposed in Sec. III. To evaluate the influence of the source terms modeling, simulations based on a similar overall energy deposition but with constant source terms in space and time are realized. The aerodynamic response of the PSJ highlights the differences induced by the two models. Finally, Sec. IV is devoted to the post-processing and the analysis of the simulations. The comparison of the positions of the numerical jet front with the experimental ones provides an evaluation of the relevance and accuracy of the proposed PSJ numerical model.

II. EXPERIMENTS

To characterize the PSJ actuator, experiments from Belinger *et al.*³ and Hardy *et al.*¹ are explored. The actuator was tested in quiescent atmosphere for several frequencies and levels of energy deposition. Only electric measurements and Schlieren images are available.

A. Actuator

The PSJ actuator studied at ONERA is represented in Figure 1. It is composed of a cavity in which two electrodes take place. The corresponding dimensions are given in Figure 1(a). The electrodes are connected to an electric circuit, which aims at imposing the breakdown voltage that will lead to the formation of a plasma arc. The circuit is made of three parts. The first one comprises a low voltage supply, an IGBT (Insulated-Gate Bipolar Transistor) and the primary part of a high voltage transformer. The second one is composed of a simple serial RC (Resistor-Capacitor) circuit and the secondary part of the transformer. The electrodes are mounted in parallel with the capacitor, constituting the last part of the circuit. The PSJ, visible in Figure 1(b), is usually screwed in a wall containing an integrated nozzle. Figure 2 gives a synoptic representation of the final assembling.

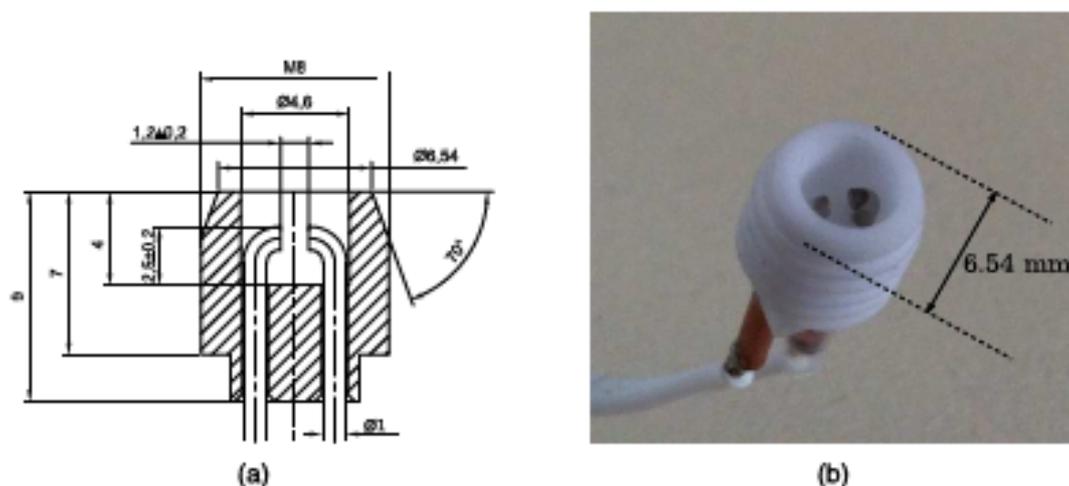


FIG. 1. Views of the actuator. (a) Sectional view of the actuator (dimensions in millimeters) and (b) photograph of the actuator.

The resulting PSJ actuator operates at a given frequency, creating a pulsed jet with each cycle being decomposed into three phases. First, energy is deposited in the cavity through an arc discharge. At the beginning of the cycle, the IGBT is closed and the primary part of the transformer is progressively magnetized. When the IGBT is opened, the accumulated energy is transferred to the second part of the circuit. The capacitor is charged, until the breakdown voltage is reached between the electrodes. Then, the discharge occurs, the third part of the circuit is then closed and behaves as a serial RLC (Resistor-Inductor-Capacitor) circuit. The resistance is partly due to the wires and mostly to the discharge arc, while the inductance only comes from the wires. The electric arc can be assimilated to a spark,^{3,4,15} and can be seen as an energy source for the surrounding fluid. As a consequence, the fluid temperature dramatically rises, reaching local values around 10 000 K. Since the air is confined, the pressure increases as well.

This leads to the second phase, which is the ejection phase. For the present actuator, it starts after the end of the energy deposition, with a decay depending on the pressure response of the cavity. A jet is thus formed at the nozzle exit.

Afterwards, the PSJ naturally aspirates air from outside. This aspiration phase brings the actuator back to pressure equilibrium. The PSJ is thus a zero net mass flux actuator.

As the PSJ operates, cycle effects appear, leading to a limit cycle. The first effect is due to the change of the aerodynamic conditions at breakdown. After the first cycle, the air in the cavity is no longer at rest. A residual movement still remains, affecting the next generated jet. Thermal effects also

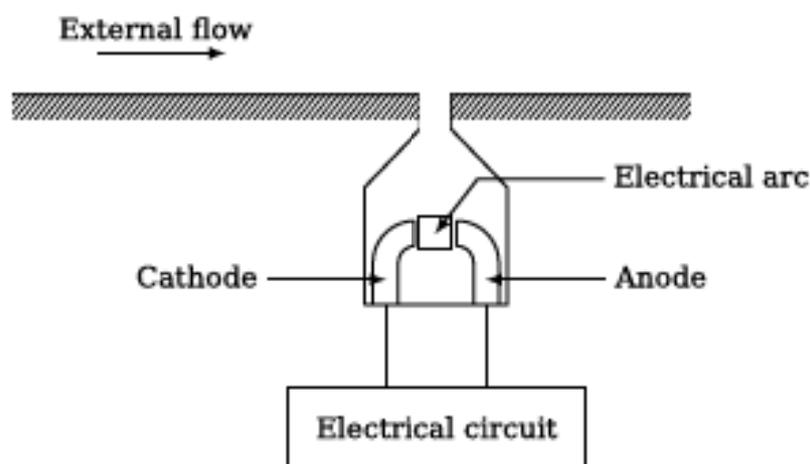


FIG. 2. Sketch of the PSJ actuator.

TABLE I. Acquisition delays for the Schlieren experiments.

Instants	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
Delays (μs)	05	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60	70

play a significant role. Indeed, the walls, the electrodes, and the fluid in the cavity receive heat coming from the discharges at each cycle. The air temperature is modified, changing the breakdown voltage, and consequently the amount of deposited energy. The induced effects of cycles obviously decline when the actuation frequency decreases. In this article, only one pulse is simulated from quiescent conditions, avoiding the considerations of the cycle effects. Therefore, experiments with a reduced actuation frequency are chosen. Finally, the retained configuration has a frequency $f = 50$ Hz, a capacitor $C = 10$ nF, and the nozzle exit diameter is $D = 1$ mm. The duration of energy deposition is found to be about $10 \mu\text{s}$ and the ejection phase lasts around $100 \mu\text{s}$. This value is deduced from the simulations presented in this article. The end of the ejection is arbitrary defined as the time when the mass flow rate is below 30% of its maximum value. In the present case, for $t > 100 \mu\text{s}$, the flow rate at the nozzle exit starts oscillating at low amplitudes and the cavity slowly returns to its initial state.

B. Schlieren photography and analysis

The actuator is inserted in a flat plate and tested without any external flow. The jet then develops into a quiescent atmosphere. The Schlieren technique is used to capture the jet dynamics, with the apparatus described by Dufour *et al.*¹⁹ The resolution is $60.05 \mu\text{m}$ by pixel. The acquisition system is synchronized with the breakdown using the trigger signal that controls the PSJ pulses. Only one Schlieren photography is taken per pulse. To visualize the jet at different instants, delays provided in Table I are added. A series of 99 pictures was taken for each delay. The streamwise gradient of density was observed. Figure 3 shows three instantaneous pictures obtained for three different delays.

1. Time calibration

The delay between the breakdown and the instant of the shot is actually affected by an additional delay, specific to the apparatus. It is referred as the installation delay. However, to compare computations and experiments, a common reference time is required. Considering the mean Schlieren images, deduced for each delay as illustrated in Figure 4 for $t = t_4$, a reference time t_0 can be defined. Indeed, the positions of the first three pressure waves, clearly visible in Figure 4, can be detected and followed, as reported in Figure 5. As expected, they travel at the speed of sound. The reference time t_0 is chosen so that it corresponds to the time when the first pressure wave exits from the nozzle. Extending the corresponding line down to the horizontal axis leads to $t_0 = -9.8 \mu\text{s}$,

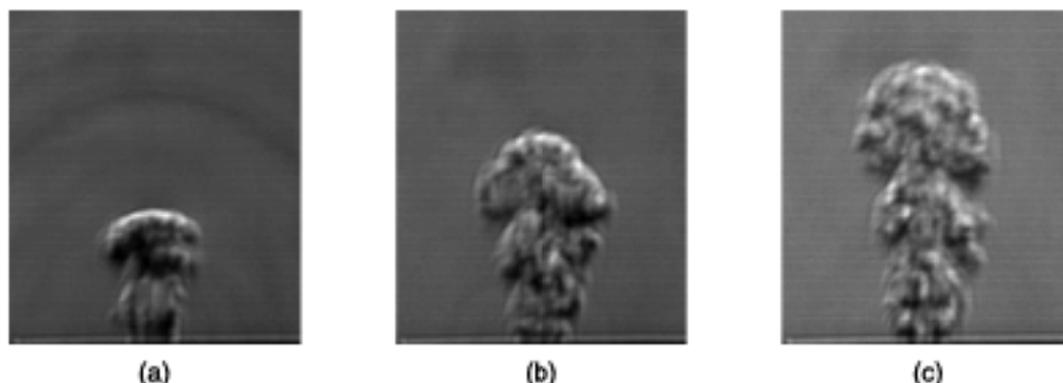
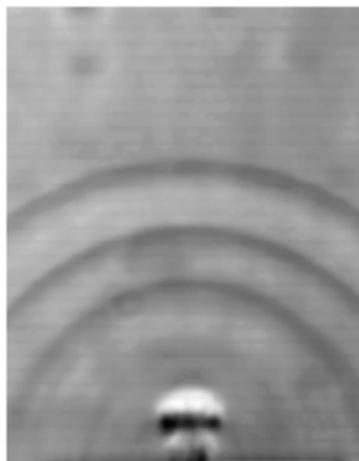


FIG. 3. Examples of Schlieren photography of the jet. (a) Instant t_6 , (b) instant t_{10} , and (c) instant t_{12} .

FIG. 4. Mean Schlieren picture at t_4 .

as drawn in Figure 5. The detection of the pressure waves on the instantaneous images provides a standard deviation of the position of the waves. An uncertainty of about $1 \mu\text{s}$ for the installation delay is then obtained.

The three pressure waves observed result from the energy deposition. At the beginning, a blast wave is created and propagates from the inter-electrodes space. A part of this wave passes directly through the nozzle orifice. This is the first pressure wave that can be seen in the mean Schlieren pictures, as in Figure 4. An other part of the initial wave is reflected on the conic part of the nozzle, and then passes through the orifice to the exterior. This creates the second pressure wave. The rest of the initial wave—the major part—is reflected on the side and the bottom of the cavity (nearly the same distances from the inter-electrodes space). These reflections generate the third pressure wave. The distances observed between these waves in the mean Schlieren pictures are in agreement with such propagation and reflections. Also, the simulations presented in the article corroborate this scenario and indicate that the third pressure wave is the most intense one at the cavity exit, as shown in Figure 17.

2. Jet front detection

The jet front is extracted from each instantaneous image. A Sobel^{20,21} filter, classically used in edge detection, is applied to improve the contrast. Then, the front is detected on the centerline of

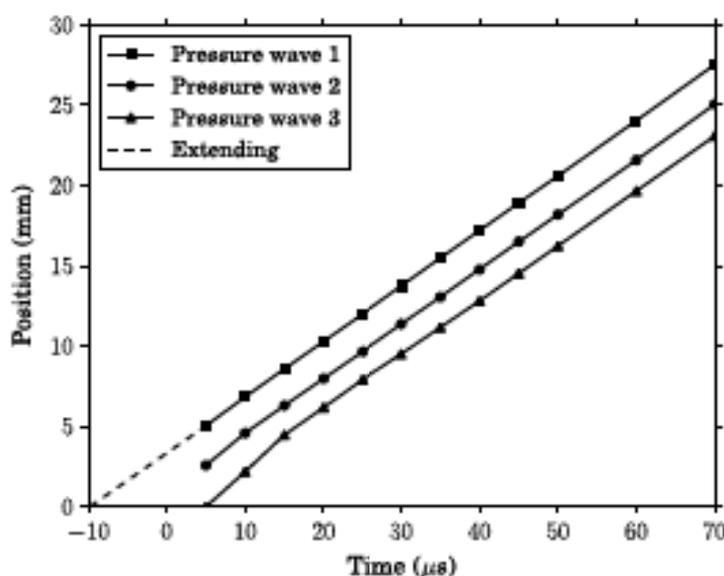


FIG. 5. Evolution of the pressure wave radius.

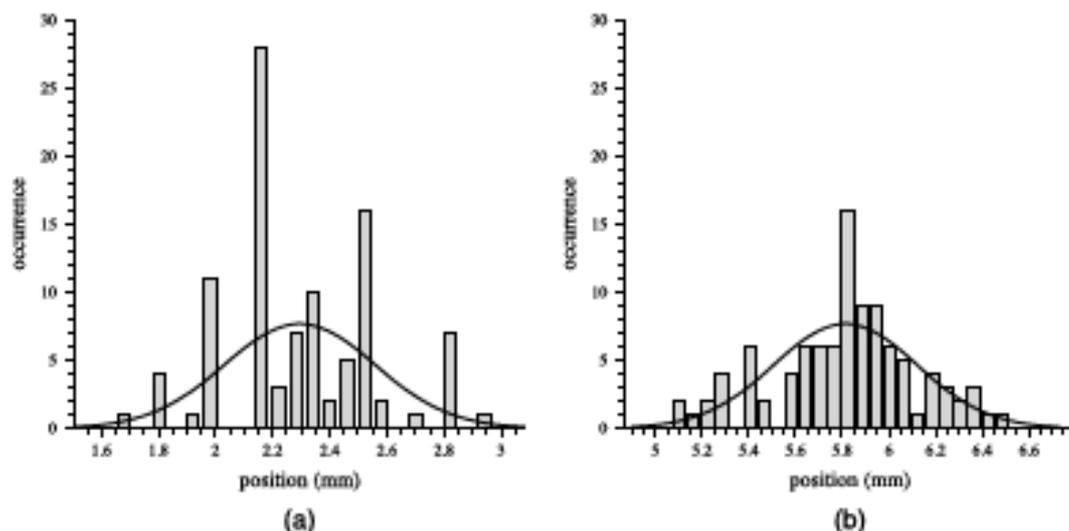


FIG. 6. Histogram and Gaussian fit of the location of the jet front at two different delays. (a) Instant t_3 and (b) instant t_{11} .

the jet as the location where the light intensity suddenly drops. Since the pressure waves produce similar light intensity variations, the detection windows and detection levels have to be carefully calibrated.

For each time delay, a normal distribution is fitted to the histogram of the positions found for the 99 images. Figure 6 illustrates the method. The width of the bars correspond to the resolution of the Schlieren pictures. As expected, the distributions of the positions are more Gaussian for the last instants than for the first ones. The Gaussian distribution provides the mean position of the front and the standard deviation. The results are reported in Figure 7, where dots stand for the mean values whereas error bars represent the standard deviations. The velocity of the jet front, after $30 \mu\text{s}$ from the reference time, is about 75 m s^{-1} .

III. MODELING

The aim of the present simulations is to reproduce the jet generated by the PSJ actuator in quiescent air. Only one ejection phase is calculated. The simulation is realized in two steps. First,

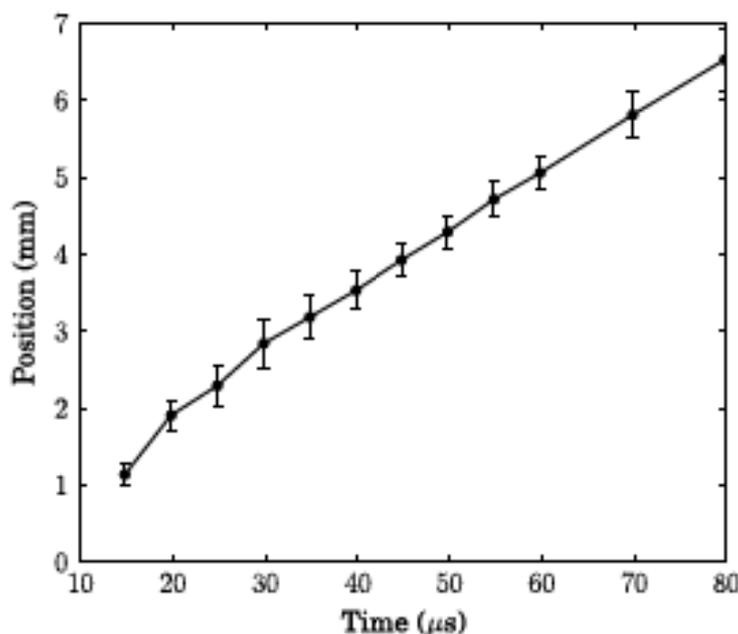


FIG. 7. Evolution of the jet front from the Schlieren pictures. Error bars are given by standard deviations.

the energy deposition of the spark into the air in cavity is evaluated. Then, using the energy source terms obtained, the evolution of the jet is calculated. For both steps, a specific gas model for the air is necessary. The first part of this section is devoted to the energy deposition model, the second to the gas model, and the last one to the jet simulations.

A. Energy deposition

Two deposition models were tested, referred to as unsteady and constant source terms.

1. Unsteady source term

The first model aims at reproducing the energy transfer that operates in the spark, from the electronic circuit to the air, via the electromagnetic field. It thus models the aerodynamic, electromagnetic, and electric phenomena and their coupling.

First of all, local thermodynamic equilibrium is assumed for the plasma. This assumption allows to consider a unique temperature for ions and electrons. Therefore, the most accurate way to calculate the energy deposition is to solve Navier-Stokes and Maxwell equations in the cavity, with the electric potentials at the electrodes given by the electric circuit. However, as there is no need for such a complexity in the present case, and also for computational cost reasons, simpler models are used. They were developed by Dufour *et al.*¹⁹ and are based on studies of the plasma realized by Belinger *et al.*^{3,4,15} These models are briefly recalled hereinafter.

The geometry is simplified and an unconfined 2D axisymmetric region surrounding the electrodes axis is considered. The electrodes are assimilated to semi-infinite cylinders and the walls are removed. This assumption may seem arguable, since, in reality, when the spark occurs, a first pressure wave is generated, and part of it is reflected at the walls of the cavity, propagating back to the arc zone. The moment when this first perturbation reaches this zone defines the instant when the walls start influencing the physics in the arc zone. This instant comes 10 μs after the breakdown, according to the simulations exposed below in Sec. IV. But, at this moment, the energy deposition is finished. Therefore, the walls can be assumed to have no influence on the energy deposition. The flow is considered inviscid, and the pinch effect is neglected. As a consequence, the only electromagnetic term in the Euler equations is the Joule heating term $q = \sigma E^2$ where σ is the electric conductivity of air and E the electric field. The radiative losses are also considered in the model.

The electromagnetic part is extremely simplified, since the electric field is considered axial and constant on a slice: $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$, with z being the inter-electrodes direction.

In order to calculate E , the electronic circuit that supplies the energy to the electrodes has to be modeled. It has been referred in Sec. II A as the third part of the circuit. It is composed of a capacitor, an inductance due to the wire, a wire resistance, and a variable resistance R_{plasma} . The last one reproduces the effects of the spark on the circuit. Therefore, the coupling between the plasma and the circuit is provided by R_{plasma} and E . The resistance of the discharge arc is taken as the sum of elementary resistances connected in series

$$R_{\text{plasma}}(t) = \int_0^l \frac{dz}{\int_0^{r_{\text{arc}}} 2\pi r \sigma(r, z, t) dr}, \quad (1)$$

where r is the radial direction of the 2D axisymmetric problem, l the length of the plasma, i.e., the inter-electrodes distance, and r_{arc} the radius of the discharge, defined as the zone where the temperature is superior to a threshold value. Some tests have shown that this value has no significant influence on the results. In the computations exposed in this article, the threshold value is 2000 K. Current and voltage measurements of the discharge indicate that the damping of the pseudo-periodic signals is highly underestimated by the electric circuit model. Actually, R_{plasma} is not responsible for the whole loss in such energy deposition process. The periphery of the arc plasma, called sheath, induces supplementary losses included in a sheath resistance. In the electric circuit model, this additional resistance is placed in series with the resistance of the discharge arc and is estimated based on the damping evaluated from the measurements. The sheath dissipates the majority of the energy and is considered proportional to R_{plasma} .

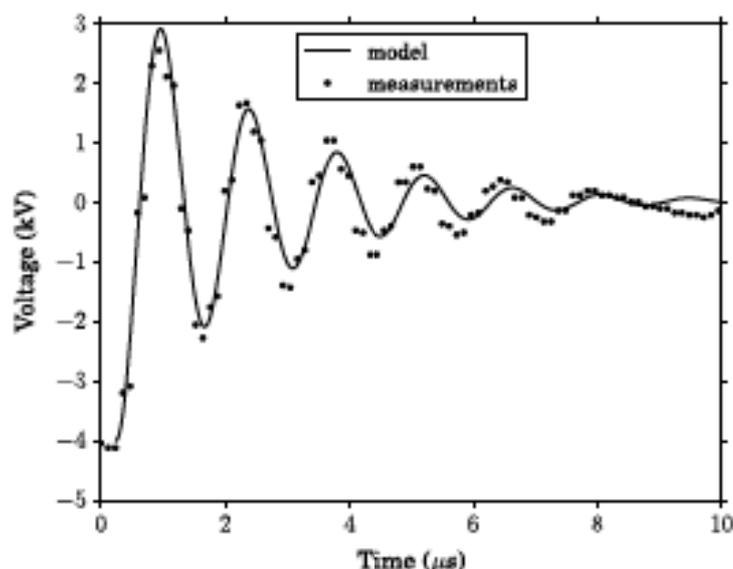


FIG. 8. Comparison of voltage evolution at the capacitor between experiments and unsteady source terms model.

The resulting expression of the electric field is deduced from the definition of the conductivity, yielding

$$E(z,t) = \frac{i(t)}{\int_0^{r_{arc}} 2\pi r \sigma(r,z,t) dr}, \quad (2)$$

where i is the current in the RLC circuit. The calculation starts at the time when the arc is established, that is to say, when a current start crossing the inter-electrodes space. The arc is represented as a high temperature cylinder between the electrodes. A radially decreasing temperature profile is imposed. The core temperature is fixed at $T = 7500$ K but this value has no significant impact on the results. The breakdown voltage between the electrodes is also imposed. The pressure is initialized at the atmospheric value.

A dedicated code has been developed using finite differences. Figure 8 shows the evolution of the capacitor voltage during the discharge obtained with this model in comparison with measurements. The damping is not exactly identical. This is due to the value of the sheath resistance, which is estimated from experiments with several values of breakdown voltage. Figure 9 illustrates the

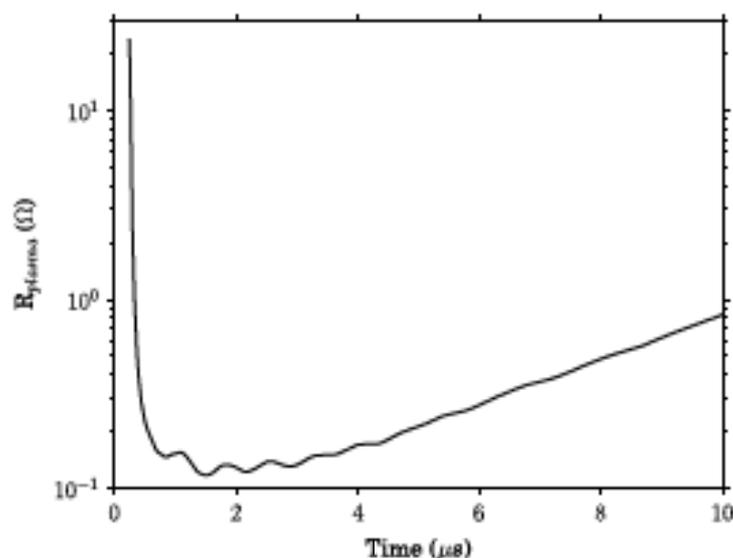


FIG. 9. Plasma resistance evolution in logarithmic scale.

evolution of R_{plasma} . It rapidly drops after the breakdown, due to the dramatic temperature increase in the plasma. After a few microseconds, R_{plasma} slightly increases due to the thermal diffusion.

Finally, the code provides the source terms at each time step, with the following expression:

$$P_o(r, z, t) = \sigma(r, z, t)E(z, t)^2 - U_{rad}, \quad (3)$$

where P_o is the energy density source term and U_{rad} the radiative loss. This model gives the amount of total energy deposited, $Q = 3.11$ mJ for a deposition duration of $\Delta t = 10$ μ s. The energy deposition is considered over when the current in the circuit is below 1 A.

2. Constant source term

The second model retained for the computations is very simple. It is based on the assumption that the energy deposition is constant in time and space during the discharge. The duration of this phase is assumed to be identical to the one calculated with the previous model. In addition, assuming that the deposition zone corresponds to the inter-electrodes space, the source term reads

$$P_v = \frac{Q}{V\Delta t} = 3.18 \times 10^{11} \text{ W m}^{-3} \quad (4)$$

where V is the volume between the electrodes, considering that the amount of total energy deposited is $Q = 3$ mJ.

B. Gas model

Because of high temperatures and pressures reached during the discharge, it is necessary to have suitable state relations and thermo-physical properties for the air. The latter is composed of many chemical species which interact through a highly complex reaction mechanism. With the assumption of chemical equilibrium, the fluid can be modeled by a single ideal gas. It follows the perfect gas law, but with the thermodynamic and transport coefficients depending on temperature and pressure, taking into account the chemical equilibrium displacement. D'Angola *et al.*²² provide tabulations of the coefficients that cover a large range of pressure values (0.01–100 atm) and temperature values (50–60 000 K). Figure 10 gives an example of the variations of thermal capacity C_p and conductivity λ . Three peaks can be observed at 3500 K, 7000 K, and 14 800 K. They correspond to the dissociations and the ionizations of the different species.

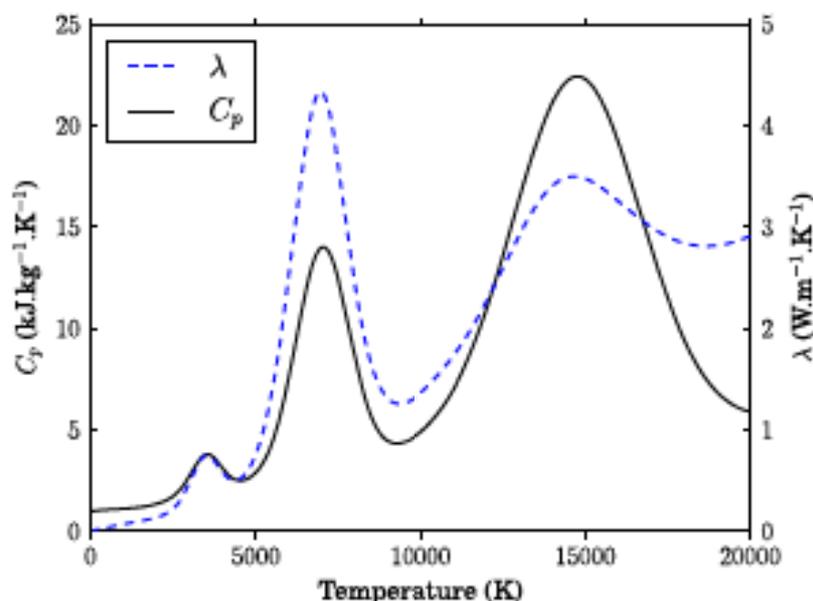


FIG. 10. Evolution of the coefficients C_p and λ with the temperature, at the atmospheric pressure.

TABLE II. Meshes characteristics.

	Mesh 1		Mesh 2		Mesh 3	
	Cavity	Hemisphere	Cavity	Hemisphere	Cavity	Hemisphere
Faces	1 122 077	12 484 624	2 334 296	10 858 373	3 227 387	22 578 857
Cells	554 308	6 235 728	1 077 598	5 425 052	1 443 176	11 279 412

C. Generation of the jet

Using the modeling described in Sec. III A for the source terms of Navier-Stokes computations, the jet dynamics is explored using LES. The objective is to reproduce the transient phase of the development of the jet. Calculations are conducted using ONERA in-house Computational Fluid Dynamics (CFD) code CEDRE. This is a multi-physic platform, designed originally to simulate energetic and propulsive applications. The Navier-Stokes CEDRE solver is designed for highly parallel computations and uses a finite volume formulation on unstructured mesh. A second order MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) reconstruction with the Van Leer limiter constitutes the core of the spatial scheme. Second order implicit and up to third order explicit time schemes are available. Turbulence modeling ranges from Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) methods to LES models, through hybrid RANS/LES methods. Recently, the CEDRE code has been used for unsteady applications that demonstrate its ability to capture flow dynamics in a complex thermodynamic context.^{23,24}

1. Mesh

The computational domain is composed of the PSJ cavity and an external volume formed by a hemisphere of radius $R_h = 40D = 4$ cm.

Three different meshes were tested, built on the same basis but with different levels of refinement. The three grids are made of tetrahedrons and two of them include prism layers. Details are given in Table II. In addition to a relaxation of the pressure outlet condition, the meshes are coarsened at the periphery of the hemisphere to facilitate the dissipation of outgoing pressure waves, and consequently limit their reflection. Therefore, this domain stands for a semi-infinite space for the jet outside the PSJ cavity and is important to ensure that reflective waves do not perturb the development of the jet. Refinements of the meshes are adapted to capture the transient pressure and temperature rises in the cavity and in the jet region. Figure 11 provides views of Mesh 2 in the plane $z = 0$ in the two zones of interest. In the cavity, the space between the electrodes is particularly

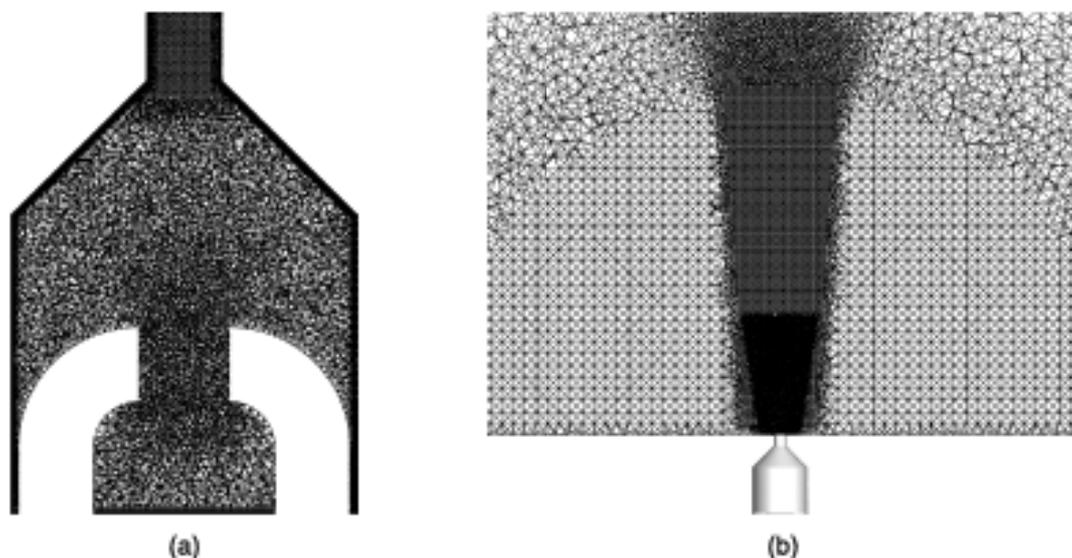


FIG. 11. Views of Mesh 2. (a) PSJ cavity and (b) jet region.

refined in order to correctly reproduce the effect of the energy deposition. This is a key point of the mesh definition that will be presented in Sec. IV. For Mesh 2 and Mesh 3, prisms layers are placed at the wall in the cavity. For Mesh 3, 20 layers of cells compose the near wall region over a distance equals to 0.5 mm, following a geometric progression of ratio 1.1. It should be noticed that prismatic cells do not ensure a wall-resolved LES, even if the dimensionless wall distance $y^+ < 1$ is obtained everywhere. The cells aspect ratio has to be limited for this purpose. However, at the wall for Mesh 3, which exhibits the thinner prism layers, a maximum aspect ratio of about 30 can be reached. In the jet region, the mesh refinement progressively decreases after the cavity exit.

2. LES parameters

Two time integration methods were tested, namely second and third orders explicit Runge-Kutta methods, respectively, referred to as RK2 and RK3 in the following. The time step is $\delta t = 1 \times 10^{-9}$ s. The flux scheme is a Roe scheme. The HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact) scheme was tested in order to quantify the influence of the flux scheme on the results. No significant variation was observed. The Smagorinsky subgrid model was employed, and two different constant values were tested $C_s = 0.1$ and $C_s = 0.2$. Again, the gas model described in Sec. III B is retained.

3. Initial and boundary conditions

The external flat plate is treated as an adiabatic wall. The same assumption is used for the walls of the cavity and the electrodes. This hypothesis is questionable, since, actually, thermal transfers occur at these walls. The wall temperature varies during the energy deposition phase and the ejection phase, and is certainly non-uniform. This evolution being so far unknown, a wall temperature boundary condition cannot be used. However, the present simulations using the adiabatic walls will serve as reference case for further studies including thermal effects.

An outlet pressure condition is imposed at the hemisphere periphery using a time relaxation. Combined with the coarse mesh, it ensures a weak reflection of the acoustic waves. The initial state corresponds to quiescent air at atmospheric conditions.

The source terms require an interpolation step. Indeed, they are calculated on a structured 2D axisymmetric grid, but they have to be imposed on a 3D unstructured mesh. Moreover, to restrict the memory space allocation, the source terms are not stored for all time steps. A non-uniform temporal grid with 150 points is used to represent the first 10 μ s during which the source terms are activated.

IV. SIMULATIONS

A. Computations

Different parameters have been tested, in terms of mesh, temporal integration, subgrid models, and source terms modeling. A summary is given in Table III. The terminology $txmy$ (t for Type, m for Mesh) will be used in the following to designate the corresponding calculations.

Results are examined with the help of three different criteria. First of all, an energy balance is post-processed, allowing to verify the relevance of the energy deposition. As explained further down, this is a crucial point for the unsteady source term modeling. Second, the integral values at the exit of the cavity permit to highlight differences between computations. Finally, the comparison

TABLE III. Calculation plan. An empty cell means that the calculation was not realized.

	Mesh 1	Mesh 2	Mesh 3
Type 1: RK2, $C_s = 0.1$, constant source terms	t1m1	t1m2	
Type 2: RK2, $C_s = 0.1$, unsteady source terms	t2m1	t2m2	t2m3
Type 3: RK3, $C_s = 0.1$, unsteady source terms			t3m3
Type 4: RK2, $C_s = 0.2$, unsteady source terms			t4m3

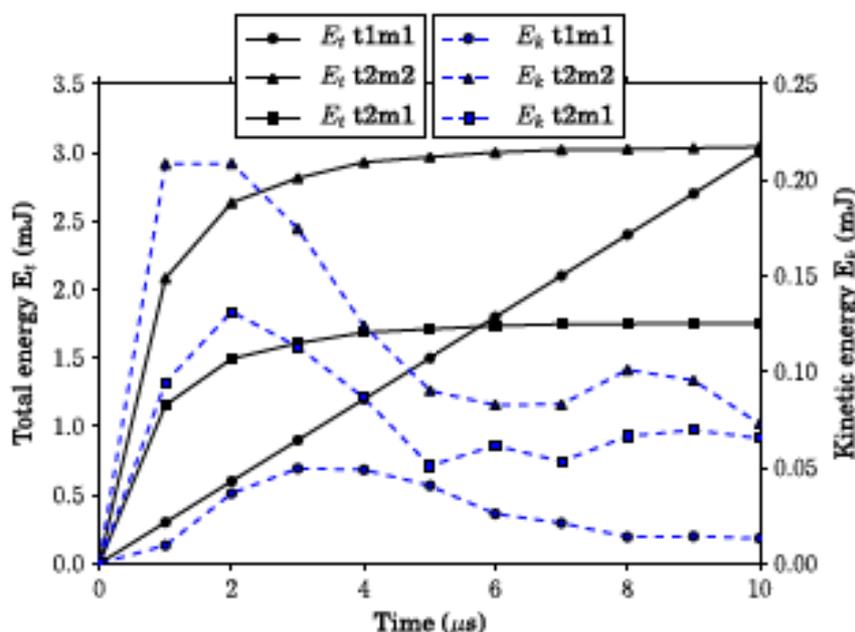


FIG. 12. Energy balance in the cavity; t2m3, t3m3, and t4m3 results are superimposed on the t2m2 results; t1m1 and t1m2 results are identical.

of the jet front positions with experiments provides an evaluation of the accuracy of the simulations. These analyses will be detailed in Secs. IV B–IV D.

The computations were realized on 480 Intel Nehalem processors. As an example, the t2m2 computation requires around 6500 CPU hours.

B. Energy balance

To ensure the suitability of the source terms modeling regarding the amount of energy deposited, an energy balance is realized for the deposition phase. A mass-weighted integration is performed in the cavity for the total energy E_t and kinetic energy E_k . The initial values are subtracted from the values found every microseconds, as shown in Figure 12, to access to the evolution of the deposited energy. Several important results can be underlined. For the constant source terms modeling (t1), the total energy follows a linear evolution. The expected 3 mJ deposition is reached at $t = 10 \mu\text{s}$. There is little energy transfer to kinetic energy. The results are identical for Mesh 1 and Mesh 2. Concerning the unsteady source terms, results are depending on the mesh. Using Mesh 1, more than 1.25 mJ is missing at the end of the deposition phase. This energy dissipation is due to the use of a coarse mesh in the inter-electrodes region, where strong gradients are generated by the source terms modeling. For meshes 2 and 3, the mesh density in the inter-electrodes space is increased. Thus, the correct amount of energy is obtained after $10 \mu\text{s}$, since its value is 3.04 mJ which is close to the value 3.11 mJ provided by the external code dedicated to this model. The t2m3 results are not represented, since they are almost identical to those given by t2m2 calculation. The remaining errors may be caused by the numerical dissipation, the source terms interpolation step, or the integral calculation during the post-processing which combines several interpolations. However, the losses remain very low: about 2.25%. Moreover, it has to be noted that the amount of energy deposited using both source terms models are almost the same in the computations, the difference being equal to 1.3% which makes the comparison relevant. In addition, Figure 12 highlights the difference between the two models of energy deposition. Indeed, in the unsteady model, the initial rise is much higher than with the use of a constant source term modeling. Moreover, the transfer to the kinetic energy is increased. These observations have a direct impact on the dynamics of the actuator, as detailed in Sec. IV C. Results from t3m3 and t4m3 simulations are not displayed in Figure 12 since they are almost identical to those illustrated for t2m2. To conclude, the energy balance in the cavity is strongly depending on the energy deposition modeling. Besides, the unsteady

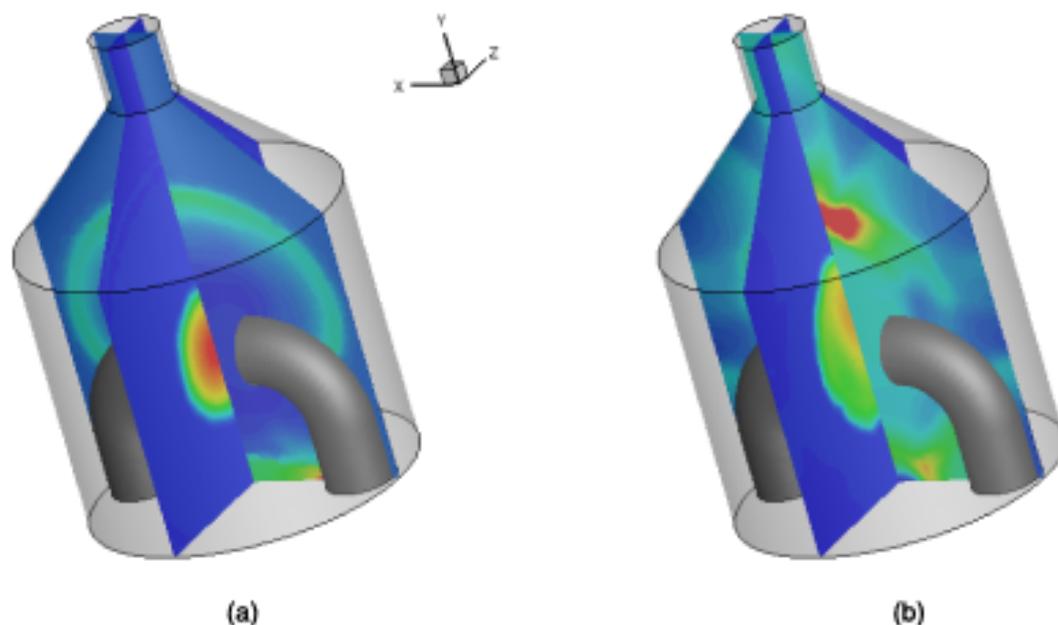


FIG. 13. Temperature field ($x = 0$ plane) and pressure field ($z = 0$ plane) for two instants. (a) $t = 4 \mu\text{s}$ and (b) $t = 10 \mu\text{s}$.

source terms model requires a fine mesh in the inter-electrodes region. The other parameters have no significant influence on the energy balance.

Figure 13 shows the temperature and the pressure fields in the cavity at two instants, for the unsteady modeling. At $t = 4 \mu\text{s}$, the high temperature zone corresponds to the location of the energy deposition. This zone diffuses very slightly compared to the evolution of the pressure. The initial pressure wave is visible at $t = 4 \mu\text{s}$. After its reflection on the upper cavity wall, it is focused above the electrodes at $t = 10 \mu\text{s}$. As explained below, this corresponds to the appearance of a positive mass flow rate in the nozzle exit section.

C. Global and integral values

In the following, the t2m1 calculation is no longer discussed, since the energy deposition is not correct. To characterize the ejection phase of the PSJ, a focus is made on integral and global values. The source terms modeling has a substantial influence on the mass flow rate at the exit of the cavity. Figure 14 gives the evolution of this value for t1m2 and t2m2 calculations, in which only the energy

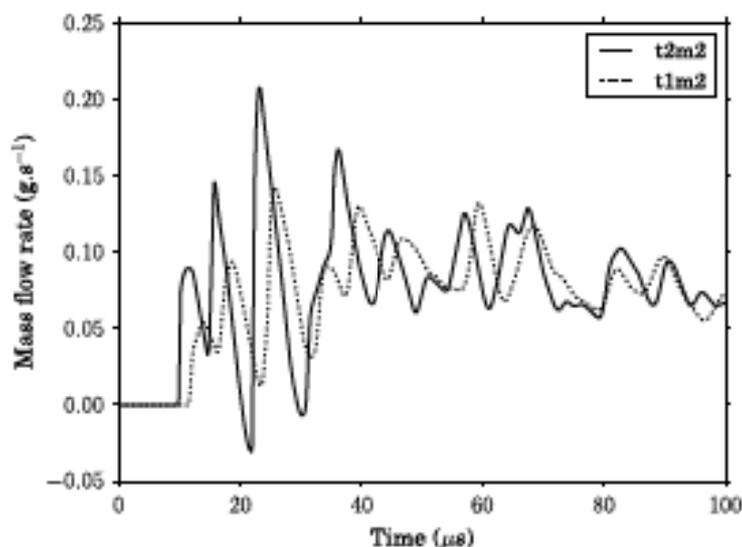


FIG. 14. Time evolution of the mass flow rate at the exit section of the cavity.

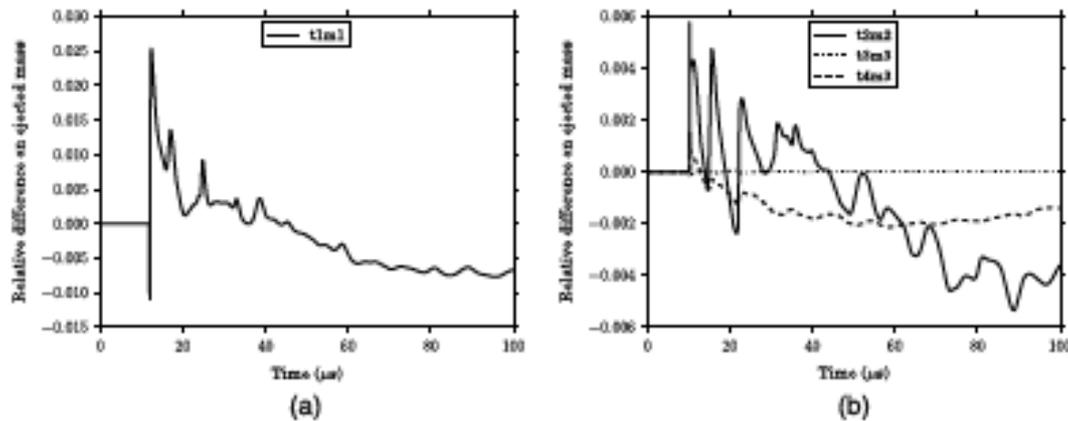


FIG. 15. Relative differences on ejected mass. (a) (the reference is t1m2 calculation) and (b) unsteady source terms (the reference is t2m3 calculation).

deposition model is different. When using the unsteady source terms modeling, i.e., for the t2m2 calculation, the ejection phase starts at $t = 10 \mu\text{s}$. For the computation t1m2, using constant energy source terms, there is a supplementary delay of $2 \mu\text{s}$. The total ejected mass after $100 \mu\text{s}$ for the t1m2 simulation is 7.15 g whereas it is 7.52 g , for the t2m2 simulation. This will induce differences on the jet front propagation, as explained in Sec. IV D. As it might be expected, the calculations with the same modeling for the source terms exhibit very similar results. Reference calculations are defined for each of the two deposition models, respectively, the calculation t1m2 for constant source terms and t2m3 for unsteady source terms. Relative differences to these references are plotted in Figure 15 for the ejected mass as a function of time. For the constant source terms modeling, there is a small difference between computations t1m1 and t1m2 concerning the time when the ejection starts. It appears $0.03 \mu\text{s}$ earlier in the reference calculation than in the t1m1 calculation. This explains the negative relative difference on the ejected mass at the beginning. Then, the time difference is caught up. A positive relative difference is found just after, since the first mass flow rate peak is higher in the t1m1 calculation than in the t1m2 case. As the differences remain less than 3% all along the ejection phase, the calculations indicate a small mesh dependence regarding the ejected mass flow rate. For the unsteady source terms modeling, the relative differences between computations are very low. There is no significant variations induced by the meshes, the change of the constant C_s of the Smagorinsky subgrid model or the order of the Runge-Kutta time integration method.

To complete the analysis made with the energy balance, the temperature and pressure maxima in the cavity are reported in Figure 16. The curves correspond to t2m2 and t1m2 calculations. Only the first $20 \mu\text{s}$ are depicted, since the differences induced by the deposition model are the most significant during this period. The maximal temperatures are located in the inter-electrodes region,

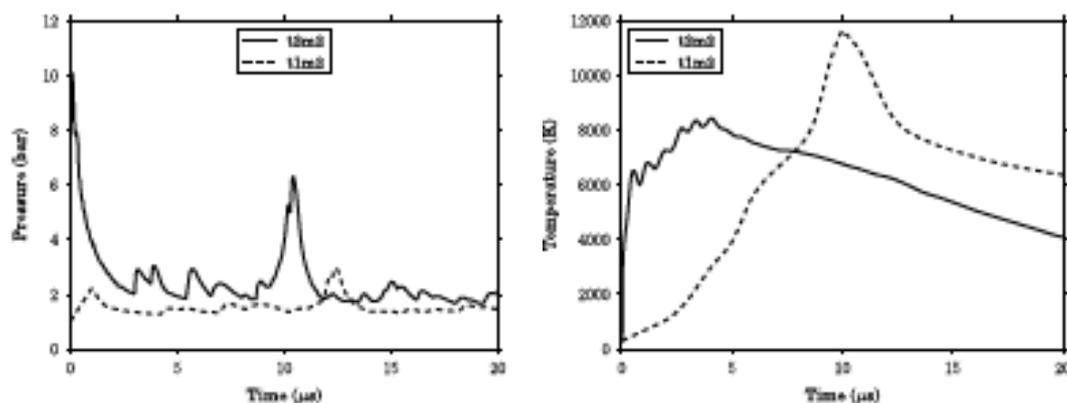


FIG. 16. Maximal temperature and pressure in the cavity evolution. (a) Pressure and (b) temperature.

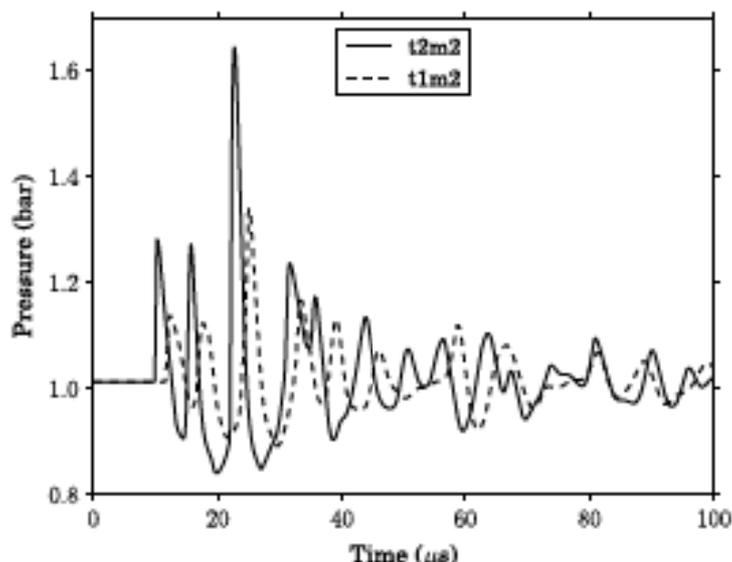


FIG. 17. Evolution of the mean pressure on the cavity exit section.

whereas this is not always the case for the pressure, since the maxima are linked to waves propagation, as illustrated in Figure 13. After the rapid initial rise in the spark core, a second pressure peak is observed at $t = 10 \mu\text{s}$ and $t = 12 \mu\text{s}$, respectively, for the unsteady source terms and the constant source terms. It corresponds to the focusing of the initial pressure wave in the cavity. These instants coincide with the exit of the first pressure wave, in the two cases, as it can be seen in Figure 17. Therefore, a high pressure zone is created in the upper part of the cavity which initiates the jet. This is confirmed by Figure 14, which indicates that these instants correspond to the beginning of the ejection. Actually, the two simulations have a similar behavior at the cavity exit with a $2 \mu\text{s}$ time shift. The mean velocity and mean temperature evolutions on the nozzle exit section support this idea. Likewise, the pressure time evolutions shown in Figure 17 are relatively similar in both cases, although the unsteady source terms imply variations with higher amplitudes, which can cause, for example, a negative mass flow rate around $t = 20 \mu\text{s}$. It can be observed in Figure 16(b), that the higher transfer to kinetic energy in the unsteady source terms case, visible on Figure 12, implies a lower rise of temperature than with the use of constant source terms.

D. Analysis of the jet

As explained in Sec. II, the reference time t_0 is chosen as the moment when the first pressure wave exits the nozzle. Results give $t_0 = 10 \mu\text{s}$ and $t_0 = 12 \mu\text{s}$, respectively, for the unsteady source terms and the constant source terms calculations. Thus, for comparisons, the time $\bar{t} = t - t_0$ will now be used. Jet front positions were extracted from the experiments, as illustrated in Figure 7. The same process was applied to the simulation. However, the post-processing of the numerical density gradient field is quite difficult. Indeed, strong pressure waves appear in the simulations, substantially perturbing the density fields. In such conditions, the jet front does not appear clearly, and an appropriate treatment is necessary.

As the jet is almost axisymmetric, one can conclude that the presence of the electrodes has no significant effect on the symmetry. The variables are thus analyzed along the revolution axis. The detection of the jet front is realized in two phases. First, the structure which corresponds to the jet must be differentiated from the pressure waves. For that purpose, the density is plotted along the revolution axis every $5 \mu\text{s}$, allowing to conveniently identify structures moving at the speed of sound. By deduction, the flow structure which corresponds to the jet appears. Figure 18 shows an example of the method applied to the t2m3 calculation, at four instants: $\bar{t} = 5 \mu\text{s}$, $\bar{t} = 10 \mu\text{s}$, $\bar{t} = 15 \mu\text{s}$, and $\bar{t} = 20 \mu\text{s}$. Vertical lines illustrate the propagation of the first two pressure waves. They are 1.8 mm spaced. Dividing by the speed of sound, a time delay of $5.3 \mu\text{s}$ is found. This

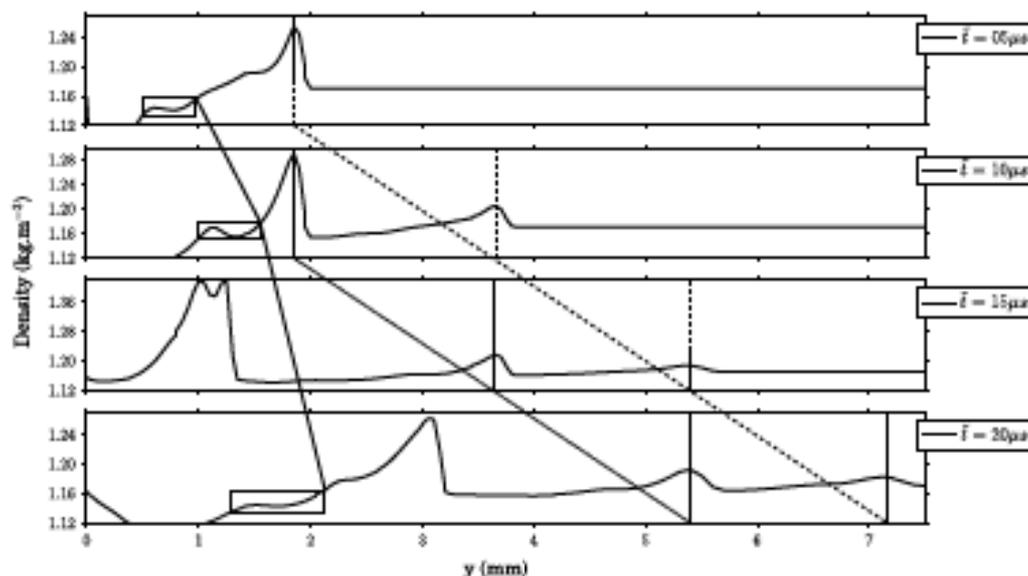


FIG. 18. Density along the revolution axis at $\bar{t} = 5 \mu s$, $\bar{t} = 10 \mu s$, $\bar{t} = 15 \mu s$, and $\bar{t} = 20 \mu s$, for the t2m3 calculation. Dashed and dotted lines correspond to pressure waves. The box identifies the pattern containing the jet front.

value nearly corresponds to the time delay between the emissions of the first two pressure waves, as shown in Figure 17. The box drawn in Figure 18 frames a particular pattern in the density curve which moves at a lower velocity than sound. By cross-checking with 2D slices of the density field at the same instants, this pattern is revealed to contain the jet front. It is easily identifiable and can be followed on most of the instants on the density curve as illustrated on Figure 18. At some instants, for example, $\bar{t} = 15 \mu s$, a pressure wave passes through the jet front zone. This induces a strong deformation of the pattern, making it hardly detectable. At this particular instant, two density peaks are visible. The first one corresponds to the traveling pressure wave. The second one seems to result from the superposition of the pressure wave tail and the beginning of the pattern containing the jet front. Actually, the end of the pattern is not perturbed, and is usable for the next stage of the method.

A second stage is necessary to detect the jet front position. It consists in analyzing the density derivative along the revolution axis. Figure 19 illustrates the situation for the t2m3 calculation at $\bar{t} = 20 \mu s$. The jet front can be assimilated to a particular point of the followed structure. Its location is estimated as the maximum of the vertical density gradient at the end of the pattern. It is marked

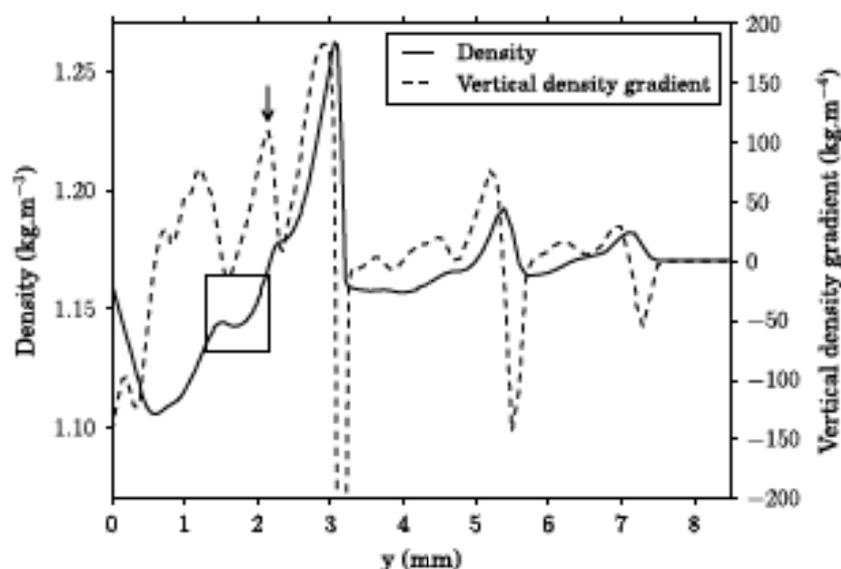


FIG. 19. Density and vertical density gradient along the revolution axis at $\bar{t} = 20 \mu s$ for the t2m3 calculation. The box identifies the pattern containing the jet front, the arrow shows the jet front.

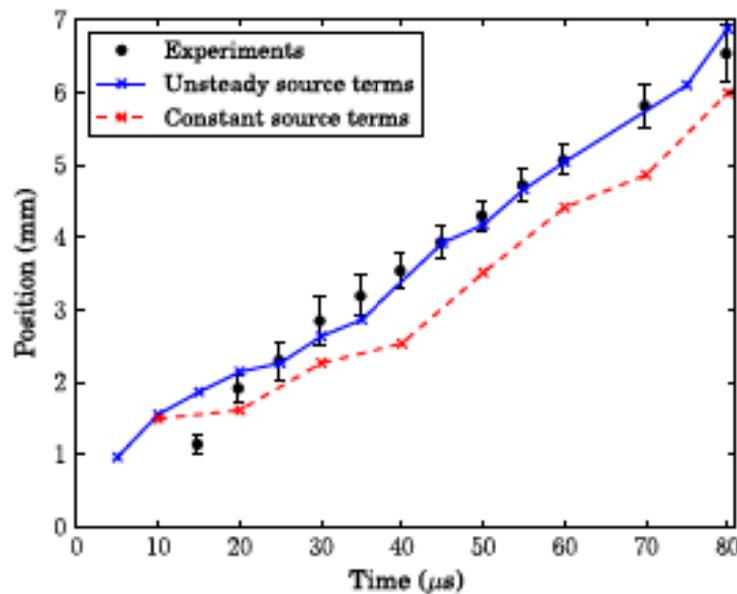


FIG. 20. Positions of the jet front from the experiments, and from calculations using unsteady source terms model and constants source terms model.

with the thin arrow on the figure. As the jet develops, the pattern stretches, indicating the spreading of the jet.

From now, only the two reference calculations $t1m2$ and $t2m3$ will be considered, since the influence of the meshes and models parameters remains very weak. They will be designated only using their modeling of energy deposition, i.e., constant source terms or unsteady source terms. Figure 20 shows the jet front positions found in the computations and compared with the experiments. It proves that the modeling of source terms plays a significant role in the jet simulation. The unsteady source terms provide simulations that are in good agreement with experiments, whereas the use of constant source terms leads to a less predictive jet development. However, in both cases, the first two points deduced from the experiments are quite far from the computational results. Two reasons can be given to explain this discrepancy. First, when the jet starts forming, the front is very difficult to identify in the experimental images. Only the first vortex ring is clearly visible in each image. This may be due to the lack of resolution in the area of interest or to the weak intensity of the density gradients. The method used to extract the positions of the jet front from the measurements, explained in Sec. II, is therefore potentially inaccurate at these instants. A second source of discrepancy may be found in the installation delay, which value is evaluated at $1 \mu\text{s}$, as detailed in Sec. II B 1.

Figure 21 directly compares numerical and experimental Schlieren pictures. For both types of picture, the density gradient is vertical. Although the frequency of the experiments is low (50 Hz), initial conditions are never at rest. The instantaneous images (on the far left) clearly show jets which are influenced by these initial conditions. On the mean pictures (on the center left), the effect of the initial conditions is reduced. In this article, the computations presented simulate a unique ejection starting from conditions at rest. Consequently, numerical Schlieren pictures do not strictly correspond either to an experimental instantaneous image or to a mean image, but to an intermediate situation that can be considered closer to the mean images. The instantaneous images chosen in Figure 21 are representative of the whole set of 99 images for each instant, the exhibited jets being similar to those obtained on the mean images. The calculation used for comparison is $t2m3$ in which the energy source terms are unsteady. The post-processing must be done with caution. Indeed, due to the fine resolution of the mesh, the range of density gradient available is much larger than in Schlieren experience. The contours (on the center right) are plotted on a sufficiently large range to display most of the density gradient levels. However, the position of some structures, particularly the jet front, is not easily detectable on such an image. The range of density gradient used to plot the iso-lines figures (on the far right) is more restrictive. The boundaries of the structures described

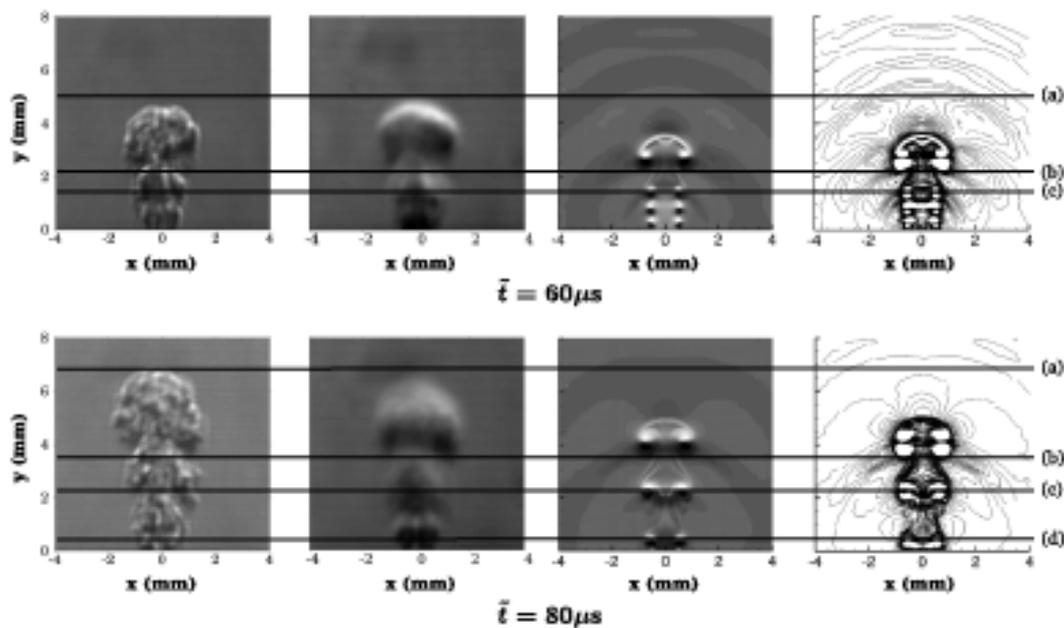


FIG. 21. Experimental and numerical (t2m3 calculation) Schlieren images, at $\bar{t} = 60 \mu\text{s}$ and $\bar{t} = 80 \mu\text{s}$. From left to right: an instantaneous experimental Schlieren shot, the mean experimental Schlieren image, contours, and iso-lines of numerical vertical density gradient. All positions identified by the letters are deduced from the simulations with: jet front (a), lower limit of the first vortex ring (b), end of the tail of the first vortex ring (c), and center of the last vortex ring (d).

in the following, appear more clearly. At $\bar{t} = 60 \mu\text{s}$, the jet front (a) identified on the simulations fits well to the jet front of the mean experimental picture. This is in agreement with the experimental jet front detection, as illustrated in Figure 20. The position of the jet front on the selected instantaneous picture is about 0.2 mm lower. At $\bar{t} = 80 \mu\text{s}$, the images feature the same differences between simulations and experiments as in Figure 20. On the mean picture, the front is more spread out than in the previous case. This explains why the standard deviation of the jet front position is more elevated at $\bar{t} = 80 \mu\text{s}$. At this instant, the instantaneous image selected has a jet front 0.3 mm higher than the jet front given by the experimental post-processing. Concerning the lower limit of the first vortex ring (b), the simulation indicates a lower position than those visible on the experimental picture, at $\bar{t} = 60 \mu\text{s}$. The difference between the numerical case and the mean experimental case is around 0.3 mm. At $\bar{t} = 80 \mu\text{s}$, the position identified on the numerical results is very close to the position given by the experimental Schlieren images. The end of the tail of the first vortex ring (c), which is quite easy to detect, seems to be well reproduced by the computations. Finally, the center of the last vortex ring position (d), is correctly simulated at $\bar{t} = 80 \mu\text{s}$.

To conclude, Figure 22 illustrates the jet topology obtained from the t2m3 calculation between $\bar{t} = 60 \mu\text{s}$ and $\bar{t} = 80 \mu\text{s}$. At these instants, the pressure waves are less disturbing for the jet front detection than for the first instants, since they have weaker intensity. One of these pressure waves can be identified on the last two pictures. Indeed, the spherical white trace in the vertical density gradient field corresponds to a spherical depression which is produced downstream of a pressure wave. This trace is located close to the second vortex ring at $\bar{t} = 75 \mu\text{s}$, and is close to the first vortex ring when $\bar{t} = 80 \mu\text{s}$. The jet front location is slightly above the black line which identifies a strong vertical density gradient above the first vortex ring. The jet contains several vortex rings which are formed at the exit of the nozzle, and are convected. It is interesting to observe the breaking of the secondary vortex rings, due to their intrinsic instabilities.

Turbulence thus plays an important role in the jet dynamics. The same is true for the residual movement in the cavity at the breakdown instant. With the assumption that the air in the cavity is at rest, the calculations presented in this article can only simulate the ejection phase produced by an actuator working at low frequency, i.e., a frequency such that the cycle effects have no significant influence on the physics of the PSJ. To take into account the remaining agitation in the cavity when the breakdown voltage is reached, calculations over several successive cycles are necessary. The

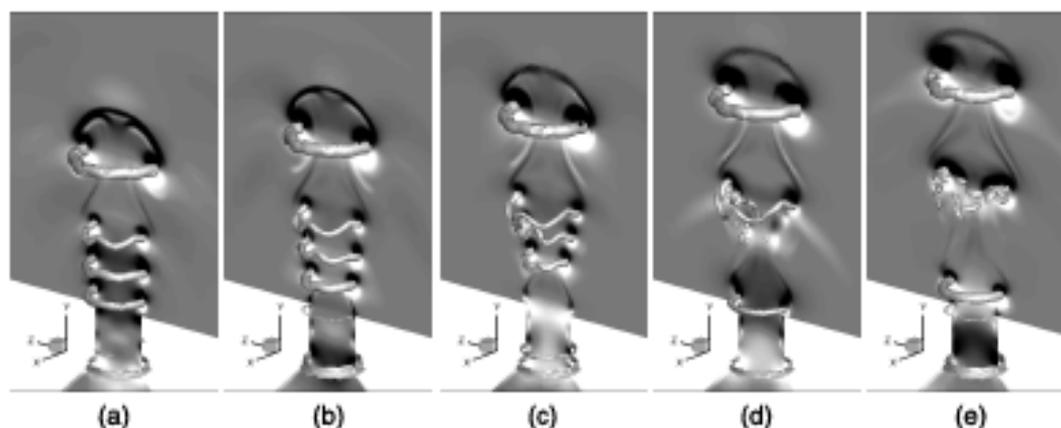


FIG. 22. Views the vertical density gradient (vertical plan) and of surfaces of Q iso-criteria (3D) from the t2m3 calculation. (a) $\bar{t} = 60 \mu\text{s}$, (b) $\bar{t} = 65 \mu\text{s}$, (c) $\bar{t} = 70 \mu\text{s}$, (d) $\bar{t} = 75 \mu\text{s}$, and (e) $\bar{t} = 80 \mu\text{s}$.

aspiration phase has to be simulated and the cycles repeated. But the cycles effects are not limited to aerodynamics. Thermal effects also appear. Indeed, the walls and the electrodes are heated by radiative and convective transfers during the energy depositions and the ejection phases. These elements heat the cold air aspirated, which modifies the value of the breakdown voltage. Consequently, the breakdown instant and the deposited energy are changed. Finally, the generated jet evolves with cycles, until reaching a limit cycle, i.e., when the temperature evolution remains identical from one cycle to another.

V. CONCLUSION

For more than ten years, plasma synthetic jet actuators have been under development in several laboratories in the world. Up to now, number of studies were devoted to the characterization of the actuator working in quiescent atmosphere, especially, using Schlieren technique to visualize the generated jet. However, there were no numerical models able to accurately reproduce the jets observed in the experiments. The present paper provides an original approach based on a specific energy deposition model that permits to describe the ejection phase of a PSJ actuator developed at ONERA. In particular, the main structure of the induced jet is well recovered as well as the jet front evolution.

The simulations are realized in two steps. In previous works, the energy deposition was modeled by specific initial conditions, or by constant widespread energy source terms to avoid accounting for high temperature effects on gas properties. In the present study, the energy deposition is calculated using a model developed by Dufour *et al.*¹⁹ associated with specific thermodynamic tables for air developed by D'Angola *et al.*²² Based on the resulting source terms, a LES approach is chosen to correctly catch the transient development of the generated jet. In order to evaluate the contribution of the discharge modeling, simulations with constant energy source terms were realized. The high levels of the unsteady energy source terms at the beginning of the energy deposition imply a very different fluid dynamics in the cavity. The maximal pressure is much more elevated and the rise of temperature is much faster than with the use of constant source terms. Moreover, the ejection phase starts $2 \mu\text{s}$ earlier with the unsteady source terms. However, leaving aside this time shift, the shape of the mass flow rate at the nozzle exit is similar for both models. Nevertheless, the unsteady modeling induces variations with higher amplitudes and leads to a higher value of the ejected mass. The jet front positions extracted from the simulations have been compared to those provided by the experiments. The unsteady modeling shows an excellent agreement, whereas the positions calculated with the use of constant source terms are less predictive. In addition, numerical Schlieren visualizations have been realized with the unsteady modeling. The visual comparison with the experiments indicates that the jet topology is well reproduced, since the position of some identifiable structures, as the first vortex rings and the end of its tail, is in very good agreement.

The methodology developed in this article, and based on the association of an energy deposition modeling and a LES approach, permits to accurately describe the jet development. The complementary information that can be extracted from these simulations help understanding the physics of such an actuator. In particular, they provide a description of the phenomena in the cavity, which cannot be measured. However, this model is only valid for low working frequencies so far. Multiphysics simulations including radiation and conduction are required to account for cycle effects appearing at higher frequencies. These simulations realized over several successive cycles would be useful in order to improve the knowledge of the PSJ working.

ACKNOWLEDGMENTS

This work is supported by the French General Directorate for Armament (DGA) and by ONERA. The authors are grateful to Guillaume Dufour and François Rogier for sharing their energy deposition model and code. The authors also thank Daniel Caruana and Pierrick Hardy for providing Schlieren pictures of their experiments.

- ¹ P. Hardy, P. Barricau, A. Belinger, D. Caruana, J. P. Cambonne, and C. Gleyzes, "Plasma synthetic jet for flow control," in *40th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, AIAA Paper No. 2010-5103, 2010.
- ² D. Caruana, F. Rogier, G. Dufour, and C. Gleyzes, "The plasma synthetic jet actuator, physics, modeling and flow control application on separation," *J. Aerosp. Lab* 6, 10 (2013).
- ³ A. Belinger, P. Hardy, P. Barricau, J. P. Cambonne, and D. Caruana, "Influence of the energy dissipation rate in the discharge of a plasma synthetic jet actuator," *J. Phys. D: Appl. Phys.* 44(36), 365201 (2011).
- ⁴ A. Belinger, P. Hardy, N. Gherardi, N. Naudé, J.-P. Cambonne, and D. Caruana, "Influence of the spark discharge size on a plasma synthetic jet actuator," *IEEE Trans. Plasma Sci.* 39, 2334–2335 (2011).
- ⁵ D. Caruana, P. Barricau, P. Hardy, J.-P. Cambonne, and A. Belinger, "The "plasma synthetic jet" actuator. Aerothermodynamic characterization and first flow control applications," in *47th AIAA Aerospace Science Meeting Including The New Horizon Forum and Aerospace Exposition*, AIAA Paper No. 2009-1307, 2009.
- ⁶ D. Caruana, P. Barricau, and C. Gleyzes, "Separation control with plasma synthetic jet actuators," *Int. J. Aerodyn.* 3, 71–83 (2013).
- ⁷ P. Molton, A. Leroy-Chesneau, J. Pons, Y. Carpels, P. Barricau, C. Gleyzes, M. Forte, and D. Caruana, "Wing tip vortex control by plasma actuators," *Ercraft* 94, 53–58 (2013).
- ⁸ K. R. Grossman, B. Z. Cybyk, and D. M. VanWie, "Sparkjet actuator for flow control," in *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 2003-57, 2003.
- ⁹ V. Narayanaswamy, L. L. Raja, and N. T. Clemens, "Control of unsteadiness of a shock wave/turbulent boundary layer interaction by using a pulsed-plasma-jet actuator," *Phys. Fluids* 24, 076101 (2012).
- ¹⁰ V. Narayanaswamy, L. L. Raja, and N. T. Clemens, "Control of a shock/boundary-layer interaction by using a pulsed-plasma jet actuator," *AIAA J.* 50(1), 246–249 (2012).
- ¹¹ K. R. Grossman, B. Z. Cybyk, M. C. Rigling, and D. M. Van Wie, "Characterization of sparkjet actuators for flow control," in *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper No. 2004-89, 2004.
- ¹² V. Narayanaswamy, L. L. Raja, and N. T. Clemens, "Characterization of high-frequency pulsed-plasma jet actuator for supersonic flow control," *AIAA J.* 48, 297–305 (2010).
- ¹³ J. Shin, V. Narayanaswamy, L. L. Raja, and N. T. Clemens, "Characterization of a direct-current glow discharge plasma actuator in low-pressure supersonic flow," *AIAA J.* 45(7), 1596–1605 (2007).
- ¹⁴ H. S. Ko, S. J. Haack, H. B. Land, B. Cybyk, J. Katz, and H. J. Kim, "Analysis of flow distribution from high-speed flow actuator using particle image velocimetry and digital speckle tomography," *Flow Meas. Instrum.* 21, 443–453 (2010).
- ¹⁵ A. Belinger, N. Naudé, J.-P. Cambonne, and D. Caruana, "Plasma synthetic jet actuator: Electrical and optical analysis of the discharge," *J. Phys. D: Appl. Phys.* 47, 345202 (2014).
- ¹⁶ T. M. Reedy, N. V. Kale, J. C. Dutton, and G. S. Elliot, "Experimental characterization of a pulsed plasma jet," *AIAA J.* 51(8), 2027–2031 (2013).
- ¹⁷ B. Z. Cybyk, J. T. Wilkerson, K. R. Grossman, and D. M. Van Wie, "Computational assessment of the sparkjet flow control actuator," in *33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, AIAA Paper No. 2003-3711, 2003.
- ¹⁸ K. V. Anderson and D. D. Knight, "Plasma jet for flight control," *AIAA J.* 50(9), 1855–1872 (2012).
- ¹⁹ G. Dufour, P. Hardy, G. Quint, and F. Rogier, "Physics and models for plasma synthetic jets," *Int. J. Aerodyn.* 3, 47–70 (2013).
- ²⁰ R. Duda and P. Hart, *Pattern Classification and Scene Analysis* (John Wiley and Sons, 1973).
- ²¹ P. E. Danielsson and O. Seger, "Generalized and separable sobel operators," in *Machine Vision for Three-Dimensional Scenes*, edited by H. Freeman (Academic Press, 1990).
- ²² A. D'Angola, G. Colonna, C. Gorse, and M. Capitelli, "The thermodynamic and transport properties in equilibrium air plasma in a wide pressure and temperature range," *Eur. Phys. J. D* 46, 129–150 (2007).
- ²³ J.-B. Dargaud, J. Troyes, J.-M. Lamet, L. Tessé, F. Vuillot, and C. Bailly, "Numerical study of solid-rocket motor ignition overpressure wave including infrared radiation," *J. Propul. Power* 30, 164–174 (2014).
- ²⁴ B. Sainte-Rose, N. Bertier, S. Deck, and F. Dupoirieux, "Numerical simulations and physical analysis of an overexpanded reactive gas flow in a planar nozzle," *Combust. Flame* 159, 2856–2871 (2012).

Exemples d'approches pour la modélisation d'écoulements complexes : oscillations de poussée, jet synthétique par plasma et écoulements de paroi

Le manuscrit retrace mon parcours de recherche initié à l'ONERA Toulouse au DMAE par une thèse et poursuivi par une carrière d'ingénieur de recherche au DEFA puis au DMAE. Différentes thématiques de recherche ont été étudiées durant ces années allant des oscillations de poussée dans les moteurs à propergol solide à la caractérisation d'un actionneur plasma à jets synthétiques en passant par la modélisation des écoulements turbulents. Les études menées ont nécessité la mise en œuvre d'approches spécifiques aux objectifs recherchés et qui mêlent des aspects théoriques, de modélisation numérique et de simulations. Au travers de quelques exemples illustrant la variété des activités de recherche entreprises, le manuscrit met en avant l'originalité et la cohérence des démarches scientifiques adoptées. Ainsi, on aborde successivement l'utilisation d'une approche de stabilité linéaire pour l'identification d'instabilités dans les conduits à parois débitantes, représentatifs des moteurs à propergol solide, la mise en œuvre de simulations avec dépôts d'énergie pour la description du jet synthétique issu de l'actionneur plasma et le développement d'une loi de paroi pour la prise en compte des effets de rugosité sur les couches limites turbulentes. Quelques orientations parmi les nombreuses perspectives de recherche associées à ces thématiques sont finalement proposées.

Mots-clés : OSCILLATION DE POUSSÉE ; STABILITE LINEAIRE ; JET SYNTHETIQUE PAR PLASMA ;
CODE CEDRE ; COUCHE LIMITE TURBULENTE ; LOI DE PAROI ; RUGOSITE ;
PRESSION PARIETALE

Examples of approaches for modelling complex flows : thrust oscillations, plasma synthetic jets and wall-bounded flows

The manuscript presents my research path started at ONERA DMAE Toulouse with a Ph.D. thesis and followed by a research scientist career at DEFA and then at DMAE. Different research topics have been explored during these years, ranging from thrust oscillations in solid rocket motors to the characterization of a plasma synthetic jet actuator through turbulence modelling. The studies relied on specific approaches dedicated to the targeted objectives and mixing theoretical aspects, numerical models and simulations. Through some examples illustrating the variety of the conducted research activities, the originality of the work done and the relevance of the adopted scientific routes are exposed in the manuscript. Thus, in the latter we successively present a linear stability approach used to identify instabilities in injection driven flows, representative of solid rocket motors, the realization of numerical simulations based on energy deposition describing the synthetic jets produced by plasma actuators and the development of a wall law including roughness effects on turbulent boundary layers. Finally, some research directions and perspectives are provided for these themes.

Keywords : THRUST OSCILLATIONS ; LINEAR STABILITY ; PLASMA SYNTHETIC JETS ; CEDRE CODE ;
TURBULENT BOUNDARY LAYER ; WALL LAW ; ROUGHNESS ; WALL PRESSURE