



HAL
open science

Formes d'ondes MSPSR, traitements et performances associés

Fabien Arlery

► **To cite this version:**

Fabien Arlery. Formes d'ondes MSPSR, traitements et performances associés. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National des Télécommunications, 2017. Français. NNT: 2017TELE0005 . tel-01688050

HAL Id: tel-01688050

<https://theses.hal.science/tel-01688050>

Submitted on 19 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT CONJOINT TELECOM SUDPARIS ET L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE
CURIE EN PARTENARIAT AVEC THALES AIR SYSTEMS

Spécialité : Traitement du Signal

Ecole doctorale : École doctorale Informatique, Télécommunications et Électronique (Paris)

Présenté par
Fabien ARLERY

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE TELECOM SUDPARIS

*FORMES D'ONDES MSPSR, TRAITEMENTS ET
PERFORMANCES ASSOCIES*

Soutenue le 01 Décembre 2017 devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	M. LE RUYET Didier	CEDRIC/CNAM
<i>Rapporteurs :</i>	Mme. MARCOS Sylvie	L2S/CNRS
	M. CHONAVEL Thierry	IMT Atlantique
<i>Directeur de thèse :</i>	M. LEHMANN Frédéric	Télécom SudParis
<i>Examineurs :</i>	M. KASSAB Rami	THALES AIR SYSTEMS

Thèse N° : 2017TELE0005

REMERCIEMENTS

Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé tout au long de cette thèse et notamment mon directeur le professeur Frédéric Lehmann et mes encadrants Thales les ingénieurs Rami Kassab, Mathieu Klein et Michel Moruzzis, pour leur suivi, leur implication et leurs nombreux conseils tout au long de cette thèse, en particulier lors de la rédaction de celle-ci. Je les remercie également pour leur attentions et leur disponibilités malgré leurs emplois du temps chargés. Ils ont été et resteront des moteurs de mon travail de thèse.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à l'ensemble des membres de mon jury : Madame Sylvie Marcos et Messieurs Thierry Chonavel et Didier le Ruyet qui ont eu la lourde tâche de relire mon manuscrit et de plonger dans les profondeurs de ma thèse.

Ensuite, je souhaite remercier Télécom SudParis, l'UPMC et Thales Air Systems sans lesquels ce travail n'aurait pas été possible. Dans le cadre de cette collaboration CIFRE, le financement qui m'a été alloué et le milieu de travail où j'ai évolué sont des éléments qui m'ont permis de me consacrer sereinement à l'élaboration de ma thèse.

Bien sûr, ce travail n'aurait pas pu être mené à bien sans mes amis thésards : Hour pour nos nombreuses prises de tête et ton thé si précieux, Yanis pour tes brossages de dents continuels et tes manigances *pigeon*-esque, Marion pour avoir accepté de prendre la relève et Alice pour nous avoir montré la voie. Je remercie aussi tous mes collègues de chez ARC, en particulier Daniel, Valentin, Christophe, Paquito, Judith, et tous ceux que j'oublie pour le climat chaleureux dans lequel ils m'ont permis de travailler et les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec chacun.

Au terme de ce parcours, je remercie enfin celles et ceux qui me sont chers. Leurs encouragements m'ont accompagné tout au long de ce périple de trois ans. Je suis redevable à mes parents, Marie-Anne et Didier, pour leur soutien indéfectible, leur confiance et leur tendresse qui me portent et me guident tous les jours. Enfin j'ai une pensée toute particulière pour ma Choup qui me supporte depuis 5 années et ce n'est pas peu faire.. Elle est le moteur de ma réussite par ses encouragements, son soutien et son attention.

A vous tous je vous dis un grand MERCI.

RESUME

Titre : « Formes d'ondes MSPSR, traitements et performances associés ».

Aujourd'hui, les systèmes MSPSR (*Multi-Static Primary Surveillance Radar*) passifs se sont installés de manière durable dans le paysage de la surveillance aérienne [1]. L'intérêt que suscitent ces nouveaux systèmes provient du fait qu'en comparaison aux radars mono-statiques utilisés actuellement, les systèmes MSPSR reposent sur une distribution spatiale d'émetteurs et de récepteurs offrant des avantages en termes de fiabilité (redondance), de coûts (absence de joints tournants et émetteurs moins puissants) et de performances (diversité spatiale). Toutefois, le défaut majeur du MSPSR passif réside en l'absence de formes d'ondes dédiées dû à l'exploitation d'émetteurs d'opportunités tels que les émetteurs de radio FM (*Frequency Modulation*) et/ou de DVB-T (*Digital Video Broadcasting-Terrestrial*) [2]. Afin de pallier à ce défaut, il est envisagé d'utiliser des émetteurs dédiés permettant ainsi l'emploi de formes d'ondes optimisées pour une application radar, on parle alors de MSPSR actif.

Cette thèse se place dans ce cadre et a pour objectif d'étudier et de définir la ou les formes d'ondes ainsi que les traitements associés permettant d'atteindre de meilleures performances : une meilleure flexibilité sur la disposition du système (positionnement des émetteurs libres), une continuité de service (non dépendance d'un système tiers) et de meilleures performances radars (*e.g.* en terme de précision des mesures, détections, ...).

Dans ce but, cette thèse étudie :

- Les critères de sélection des codes : comportement des fonctions d'ambiguïtés, PAPR (*Peak to Average Power Ratio*), efficacité spectrale, etc... ;
- Les formes d'ondes utilisées en télécommunication (*scrambling code*, OFDM) afin d'identifier leur possible réemploi pour une application radar ;
- L'utilisation d'algorithmes cycliques pour générer des familles de séquences adaptées à notre problème ;
- Une approche basée sur une descente de gradient afin de générer des familles de codes de manière plus efficace ;
- Et l'évaluation des performances de ces différents algorithmes à travers l'établissement d'une borne supérieure sur le niveau maximum des lobes secondaires et à travers le dépouillement des données enregistrées suite à des campagnes d'essais.

Mots Clés : *Formes d'ondes, MSPSR, Scrambling Code, OFDM, Optimisation Cyclique, Descente de Gradient, Spectre, Fonction d'ambiguïté, PAPR, Borne sur le PSLR.*

ABSTRACT

Title : « **Formes d’ondes MSPSR, traitements et performances associés** ».

Nowadays, MSPSR (*Multi-Static Primary Surveillance Radar*) systems are sustainably settled in air surveillance program [1]. Compared to mono-static radar currently in use, an MSPSR system is based on a sparse network of transmitters (Tx) and receivers (Rx) interconnected to a Central Unit and offers advantages in terms of reliability, cost and performance. Two kinds of MSPSR systems exist: the Passive form and the Active one. While the Passive MSPSR uses transmitters of opportunity such as radio *Frequency Modulation* (FM) transmitters and/or *Digital Video Broadcasting-Terrestrial* (DVB-T) transmitters [2], the Active MSPSR uses dedicated transmitters, which emit a waveform that is controlled and designed for a radar application. Each receiver processes the signal coming from all transmitters and reflected on the targets; and the Central Unit restores the target location by intersecting “ellipsoids” from all (transmitter, receiver) pairs.

Compared to passive MSPSR, the main advantages of the active MSPSR are the use of dedicated waveforms that allow reaching better performances (like a better association of the transmitters’ contributions at the receiver level); more flexibility in the deployment of transmitters and receivers station (in order to meet the requirements in localisation accuracy and in horizontal and altitude coverages); and the guarantee of having a service continuity.

On this purpose, this thesis analyses the different codes criteria such as the ambiguity function behaviour, the PAPR (*Peak to Average Power Ratio*), the spectrum efficiency, etc... . Then, in order to find dedicated waveforms for MSPSR systems, one solution is to find easily-constructed families of sequences. Thus building on the works carried out by the Telecommunication field for solving multi-user issues, this document investigates the application of *spreading codes* and OFDM signals in MSPSR concept. Besides, another solution is to directly generate a set of sequences. Based on cyclic algorithms in [3] we derive a new algorithm that allows to optimize sets of sequences. Similarly, using a gradient descent approach, we develop a more efficient algorithm than the cyclic one. Finally, in order to evaluate the performances of the different algorithms, this thesis generalizes the Levenshtein Bound and establishes a new lower bounds on the PSLR (*Peak Sidelobe Level Ratio*) in mismatched filter case, and studies real data recorded during some trials.

Keywords : *Waveforms Design, MSPSR, Scrambling Code, OFDM, Cyclic Algorithm, Gradient Descent, Spectrum Efficiency, Ambiguity Function, PAPR, PSLR Bound.*

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	III
RESUME	V
ABSTRACT	VII
SOMMAIRE.....	IX
TABLE DES FIGURES	XV
TABLE DES TABLEAUX	XXI
ABREVIATIONS.....	XXV
NOTATIONS	XXVII
CHAPITRE 1. INTRODUCTION	1
1.1 Les différents systèmes de surveillance aérienne	2
1.1.1 Les systèmes de surveillance primaire	2
1.1.2 Fonctionnement d'un système MSPSR	5
1.2 Positionnement du problème	6
1.3 Déroulement de la thèse	6
1.4 Publications	8
CHAPITRE 2. CRITERES DE SELECTION DES CODES	9
2.1 Définitions préliminaires	9

2.1.1 La distance bi-statique	10
2.1.2 Le Doppler bi-statique	10
2.1.3 La résolution distance	11
2.1.4 La résolution vitesse.....	11
2.1.5 Distance maximale non-ambigüe.....	11
2.2 Cardinalité des familles et longueur de codes.....	12
2.2.1 Cardinalité des familles.....	12
2.2.2 Longueur des codes.....	14
2.3 PSLR et ISL des fonctions d'auto-ambiguïtés et d'ambiguïtés croisées	15
2.3.1 Les fonctions d'ambiguïtés	15
2.3.2 ISL et PSLR	22
2.4 Peak to Average Power Ratio (PAPR) des séquences	23
2.5 Efficacité spectrale.....	25
CHAPITRE 3. ETAT DE L'ART DES FAMILLES EXISTANTES	27
3.1 Préliminaires : codes à longueur maximale (<i>m-sequences</i>)	28
3.1.1 Linear Feedback Shift Register (LFSR).....	28
3.1.2 Les codes à longueur maximale : les <i>m-sequences</i>	29
3.2 Etude des codes pseudo-aléatoires	33
3.2.1 Codes de Gold / Pseudo-Gold.....	33
3.2.2 Codes de Kasami.....	34
3.2.3 Codes de Legendre et Weil	35
3.2.4 Codes de No	35
3.2.5 Codes de Trace Norm (TN)	35
3.2.6 Codes de Zadoff-Chu	36
3.2.7 Résultats de l'étude	36
3.3 Etude des codes OFDM	40

3.3.1 Modulations étudiées.....	42
3.3.2 Résultats de l'étude.....	43
3.4 Etudes des algorithmes existants.....	47
3.5 Conclusion.....	48
CHAPITRE 4. ALGORITHMES CYCLIQUES.....	49
4.1 Optimisation locale des fonctions d'ambiguïtés.....	50
4.1.1 Objectifs et Notations.....	51
4.1.2 Méthode de minimisation.....	54
4.1.3 Algorithme.....	64
4.1.4 Résultats de l'étude.....	65
4.2 Optimisation du spectre et du PAPR.....	68
4.2.1 Description de l'algorithme.....	69
4.2.2 Extension pour l'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté.....	71
4.2.3 Résultats de l'étude.....	72
4.3 Convergence et comparaison.....	73
4.3.1 Convergence.....	73
4.3.2 Comparaison avec les méthodes stochastiques (recuit simulé).....	74
4.4 Conclusion.....	77
CHAPITRE 5. ALGORITHMES DE DESCENTE DU GRADIENT.....	79
5.1 Optimisation locale des fonctions d'ambiguïtés.....	80
5.1.1 Objectifs et Notations.....	81
5.1.2 Calcul du gradient.....	83
5.1.3 Algorithme.....	90
5.1.4 Résultats de l'étude.....	91
5.2 Optimisation directe du spectre.....	94
5.2.1 Objectifs et Notations.....	95

5.2.2 Calcul du gradient	95
5.2.3 Algorithme	99
5.2.4 Résultats l'étude	99
5.3 Optimisation du spectre et du PAPR.....	103
5.3.1 Objectifs et Notations.....	103
5.3.2 Calcul du gradient	104
5.3.3 Algorithme	107
5.3.4 Résultats de l'étude	107
5.4 Optimisation jointe des fonctions d'ambiguïtés et du spectre directement	110
5.4.1 Objectifs et Notations.....	110
5.4.2 Calcul du gradient	112
5.4.3 Algorithme	113
5.4.4 Résultats de l'étude	114
5.5 Optimisation jointe des fonctions d'ambiguïtés, du spectre et du PAPR	117
5.5.1 Objectifs et Notations.....	118
5.5.2 Calcul du gradient	120
5.5.3 Algorithme	125
5.5.4 Résultats de l'étude	126
5.6 Convergence et Comparaison	130
5.6.1 Convergence.....	130
5.6.2 Comparaison avec les algorithmes cycliques.....	132
5.7 Conclusion	135
CHAPITRE 6. ETABLISSEMENT D'UNE BORNE SUR LE PSLR	137
6.1 Rappel des bornes existantes.....	139
6.2 Généralisation de la borne de Levenshtein (adapté)	140
6.2.1 Généralisation aux séquences uni-modulaires	140

6.2.2 Extension de la borne : prise en compte des derniers retards.....	143
6.2.3 Comparaisons aux bornes de Welch et de Levenshtein	145
6.3 Borne sur le PSLR en désadapté.....	150
6.3.1 Cas apériodique	151
6.3.2 Cas périodique	155
6.3.3 Discussions et interprétations	156
6.4 Extension : Prise en compte du volume du lobe principal.	161
6.4.1 Cas adapté.....	162
6.4.2 Cas désadapté	162
6.4.3 Discussions et interprétations	163
6.5 Conclusion.....	166
CHAPITRE 7. APPLICATION AU CONCEPT MSPSR ET ESSAIS	167
7.1 Préliminaires : Cahier des charges et spécifications.....	167
7.2 Résultats théoriques : Simulations.....	168
7.3 Résultats expérimentaux : Essais.....	174
7.3.1 Configuration du système et parcours effectif.....	175
7.3.2 Résultats des mesures	178
7.4 Conclusion.....	185
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	187
BIBLIOGRAPHIE	191
TABLES DES ANNEXES.....	201
ANNEXE A. IMPACT DU FENETRAGE FREQUENTIEL	203
A.1 Introduction	203
A.2 Pondération en réception et réduction du PSLR.....	204
A.3 Pondération à l'émission et efficacité spectrale.....	209
ANNEXE B. PREUVE DE LA BORNE (4.1.23).....	215

ANNEXE C. PREUVE DU LEMME 6.2	217
ANNEXE D. PREUVE DE L'EGALITE (C.4)	221
ANNEXE E. PREUVE DU LEMME 6.3	225
ANNEXE F. EXPRESSION DE LA BORNE AVEC DES POIDS UNIFORMES	227
ANNEXE G. PREUVE DU LEMME 6.5	230
ANNEXE H. PREUVE DE (G.9).....	234
RESUME	237
ABSTRACT	237

TABLE DES FIGURES

FIGURE 1.1 Configuration mono-statique	3
FIGURE 1.2 Configuration bi-statique	3
FIGURE 1.3 Configuration multi-statique (MSPSR)	4
FIGURE 1.4 Fonctionnement d'un système MSPSR	5
FIGURE 2.1 Représentation dans le plan \mathcal{P} de la configuration bi-statique	10
FIGURE 2.2 Multiplexage par fréquence FDMA	12
FIGURE 2.3 Multiplexage par temps TDMA	13
FIGURE 2.4 Multiplexage par code CDMA	13
FIGURE 2.5 : Fonction $\sin\pi f D N P T R N P \sin\pi f D T R$ pour $N P = 10$	20
FIGURE 2.6 : Extension de la fonction $\sin\pi f D N P T R N P \sin\pi f D T R$ pour tous les délais pour $N P = 10$	20
FIGURE 2.7 Fonctionnement d'un amplificateur de puissance	24
FIGURE 3.1 Architecture d'un LFSR	28
FIGURE 3.2 Architecture d'un LFSR pour générer des <i>m-sequences</i>	29
FIGURE 3.3 PAAF (en haut) et PCAF (en bas) d'une séquence du <i>Small Set</i> de Kasami pour $N = 2n - 1$ avec $n = 10; 12; 14; 16$ (de gauche à droite), dans la configuration du TABLEAU 3.4, soit un temps d'intégration constant de $T = 130$ ms.	37

FIGURE 3.4 Evolution du PSLR de la PAAF (en haut à gauche), de la PCAF (en bas à droite), de la fonction d'autocorrélation périodique (en haut à droite) et de la fonction d'intercorrélacion (en bas à droite) en fonction de N en échelle logarithmique ($n = \log_2 N$). 38	38
FIGURE 3.5 Spectre d'une séquence du <i>Small Set</i> de Kasami pour un temps d'échantillonnage de $T_{ech} = 1\mu s$ (soit le 1 ^{er} zéro en $1T_{ech} = 1MHz$)(en bleu) et ce même spectre fenêtré par une porte de largeur ($2/T_{ech}$) (en vert). 39	39
FIGURE 3.6 Impact du fenêtrage par une porte de largeur ($2/T_{ech}$) sur l'enveloppe temporelle d'une séquence du <i>Small Set</i> de Kasami : avec les valeurs binaires de la séquence (rond bleu), le signal échantillonné (trait plein vert) et le signal après fenêtrage (trait pointillé rouge). 40	40
FIGURE 3.7 Architecture OFDM numérique 41	41
FIGURE 3.8 Structure d'un symbole OFDM. 42	42
FIGURE 3.9 Ajout de l'intervalle de garde et du préfixe cyclique..... 42	42
FIGURE 3.10 Exemple de spectre d'un signal OFDM modulé par une <i>m-sequence</i> 44	44
FIGURE 3.11 Evolution du PSLR de la PAAF (en haut à gauche), de la PCAF (en bas à droite), de la fonction d'autocorrélation périodique (en haut à droite) et de la fonction d'intercorrélacion (en bas à droite) en fonction de N en échelle logarithmique ($n = \log_2 N$). 44	44
FIGURE 3.12 Exemple de PAAF d'un signal OFDM modulé par une m-séquence dans la configuration ($N = 2^{14} - 1 = 8191$, $K = 131072$, $N_{sym} = 16$, $T_{ech} = 1\mu s$). 45	45
FIGURE 3.13 Exemple de PCAF d'un signal OFDM modulé par une m-séquence dans la configuration ($N = 2^{14} - 1 = 8191$, $K = 131072$, $N_{sym} = 16$, $T_{ech} = 1\mu s$). 45	45
FIGURE 4.1 Objectif d'optimisation sur les fonctions d'ambiguïtés. 51	51
FIGURE 4.2 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes d'une famille de 3 séquences unimodulaire (PAPR = 0 dB). 66	66
FIGURE 4.3 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes d'une famille de 3 séquences de PAPR 2dB. 67	67
FIGURE 4.4 Comparaison de l'évolution du PSLR en fonction des itérations avec et sans relaxation du PAPR. 68	68
FIGURE 4.5 Objectif d'optimisation sur le spectre et le PAPR. 69	69

FIGURE 4.6 Exemple d'optimisation locale des PAF discrètes d'une famille de 3 séquences de PAPR = 2 dB avec les ALGORITHME 4.2 et ALGORITHME 4.4.....	72
FIGURE 4.7 Exemple de spectre obtenu suite à l'optimisation d'une famille de 3 séquences de PAPR = 2 dB avec les ALGORITHME 4.2 et ALGORITHME 4.4.....	73
FIGURE 4.8 Organigramme pour optimiser une famille de séquences polyphases à l'aide d'un algorithme de recuit simulé.	75
FIGURE 4.9 Exemple de fonctions d'ambiguïtés obtenues avec l'algorithme de recuit simulé.	76
FIGURE 4.10 Evolution du PSLR au cours du temps : Recuit simulé vs. Algorithme Cyclique.	77
FIGURE 5.1 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes dans les configurations 1 et 3 avec l'ALGORITHME 5.1.	92
FIGURE 5.2 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes dans les configurations 2 et 4 avec l'ALGORITHME 5.1.	93
FIGURE 5.3 Objectif de l'optimisation directe du spectre.....	95
FIGURE 5.4 Spectre optimisé dans la CONFIGURATION 1 sans (bleu) et avec (vert) fenêtrage fréquentiel (porte) et PAPR avant et après fenêtrage.....	100
FIGURE 5.5 Spectre optimisé dans la CONFIGURATION 2 sans (bleu) et avec (vert) fenêtrage fréquentiel (porte) et PAPR avant et après fenêtrage.	100
FIGURE 5.6 Objectif de l'optimisation du spectre et du PAPR.....	104
FIGURE 5.7 Spectre optimisé dans la CONFIGURATION 1 et PAPR avant et après optimisation.	108
FIGURE 5.8 Spectre optimisé dans la CONFIGURATION 2 et PAPR avant et après optimisation.	108
FIGURE 5.9 Exemple d'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté et du spectre après optimisation dans les configurations 1 (gauche) et 3 (droite) avec l'ALGORITHME 5.4.	115
FIGURE 5.10 Exemple d'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté et du spectre après optimisation dans les configurations 2 (gauche) et 4 (droite) avec l'ALGORITHME 5.4.	116

FIGURE 5.11 Exemple d'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté et du spectre après optimisation dans les configurations 1 (gauche) et 3 (droite) avec l'ALGORITHME 5.5.....	127
FIGURE 5.12 Exemple d'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté et du spectre après optimisation dans les configurations 2 (gauche) et 4 (droite) avec l'ALGORITHME 5.5.....	128
FIGURE 5.13 Répartition du PSLR obtenus sur 1000 exécutions avant et après optimisation et comparaison avec la borne de Welch périodique.....	131
FIGURE 5.14 Répartition fine du PSLR obtenus sur 1000 exécutions après optimisation.....	131
FIGURE 5.15 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes d'une famille de 3 séquences unimodulaire (PAPR = 0 dB) obtenu à l'aide de l'ALGORITHME 5.1.	133
FIGURE 5.16 Evolution du PSLR au cours du temps : Recuit simulé vs. Algorithme Cyclique vs. Algorithme du Gradient.....	134
FIGURE 6.1 Evolution de la borne B_{2N-1D} en fonction de D comparée à la borne de Welch	147
FIGURE 6.2 Evolution de B_{2N-1D} comparée à la borne de Welch et à D_{2N}^2 . La valeur optimale de D correspond au plus grand entier tel que $B_{Welch}, M=2 \geq D_{2N}^2$	147
FIGURE 6.3 Evolution de la borne proposée en fonction de K , pour un choix optimal de D , comparée à la borne de Liu et à la borne de Welch.	149
FIGURE 6.4 Evolution de la borne aperiodique du Corollaire 6.5 en fonction de K et N_y . Et comparaison avec la borne de Levensthein et la borne de Welch.	159
FIGURE 6.5 Evolution de la borne aperiodique du Corollaire 6.5 en fonction de N_x et N_y avec $K = K_{max}$. Les courbes sont superposées mettant en évidence l'invariance vis-à-vis de N_y	160
FIGURE 6.6 Evolution de la borne aperiodique du Corollaire 6.5 en fonction de M avec $N_y = 3N_x$ et $K = K_{max}$	161
FIGURE 6.7 Evolution des bornes en fonction de K dans la configuration du TABLEAU 6.1.	165
FIGURE 6.8 Evolution des bornes en fonction de M dans la configuration du TABLEAU 6.1.	165

FIGURE 7.1 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue dans la configuration de la Simulation 1 ($Np = 400$ soit $T = 100$ ms) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5) avec à gauche la coupe à Doppler nulle (auto-corrélation) et en bas la coupe à retard nul.....	170
FIGURE 7.2 Spectre obtenus dans la configuration de la Simulation 1 ($Np = 400$ soit $T = 100$ ms).....	171
FIGURE 7.3 Ensemble des fonctions d'ambiguïtés obtenues dans la configuration de la Simulation 3 ($Np = 15$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5).....	172
FIGURE 7.4 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue dans la configuration de la Simulation 3 ($Np = 15$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5) avec à gauche la coupe à Doppler nulle (auto-corrélation) et en bas la coupe à retard nul.....	173
FIGURE 7.5 Spectre obtenus dans la configuration de la Simulation 3	174
FIGURE 7.6 Aspect du diagramme d'émission selon le gisement.....	175
FIGURE 7.7 Diagramme en réception selon le gisement à une fréquence porteuse de 1.3 GHz.	176
FIGURE 7.8 Plan de vol de la campagne d'essais à Limours.....	176
FIGURE 7.9 Plan de vol effectif de la campagne d'essais à Limours.....	177
FIGURE 7.10 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue lors des essais dans la configuration de la Simulation 1 ($Np = 400$ soit $T = 100$ ms) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5).	178
FIGURE 7.11 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue lors des essais dans la configuration de la Simulation 3 ($Np = 15$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5).....	179
FIGURE 7.12 Fonctions d'ambiguïtés croisées obtenues à partir des mesures terrain dans la configuration de la Simulation 3 ($Np = 15$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5) en utilisant les deux autres séquences de la famille générée.....	179
FIGURE 7.13 Niveau maximum des lobes secondaires de la coupe distance dans la plage Doppler d'intérêt pour la fonction d'ambiguïté croisée de la paire (1,3) (Simulation 3).....	180
FIGURE 7.14 Niveau maximum des lobes secondaires de la coupe Doppler dans la plage distance d'intérêt pour la fonction d'ambiguïté croisée de la paire (1,3) (Simulation 3).....	180

FIGURE 7.15 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue lors des essais dans la configuration de la Simulation 2 ($Np = 4000$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5)..	181
FIGURE 7.16 Spectre obtenus à partir des données réelles récoltées lors des essais pour la configuration de la Simulation 1	182
FIGURE 7.17 Impact de l'offset en fréquence dû au filtre analogique utilisé à l'émission pour rejeter la zone hors-bande (exemple de la Simulation 1).....	182
FIGURE 7.18 Résultats obtenus avec la configuration 1 ($T = 100$ ms, $fp = 1290$ MHz) : Trace GPS et plots détectés.....	183
FIGURE 7.19 Résultats obtenus avec la configuration 2 ($T = 1$ s, $fp = 1290$ MHz) : Trace GPS et plots détectés.....	184
FIGURE 7.20 Mapping de la vitesse bistatique des plots au cours du temps et en fonction de la distance bistatique dans la configuration 2 ($T = 1$ s $fp = 1290$ MHz).	184
FIGURE 7.21 Trace GPS des avions mis en évidence dans la FIGURE 7.20.....	185
FIGURE A.1 : Architecture du récepteur avec pondération	205
FIGURE. A.2 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Hanning	205
FIGURE. A.3 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Hamming.....	206
FIGURE. A.4 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Taylor ($n = 5$, $k = -42$ dB)	207
FIGURE. A.5 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Blackman.....	207
FIGURE. A.6 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Blackman-Harris	208
FIGURE A.7 : Impact de la mise en forme par un filtre rectangulaire	209
FIGURE A.8 : Architecture de l'émetteur avec pondération à l'émission.....	210
FIGURE A.9 : Spectre et réponse temporelle du filtre SRRC pour $k = 128$	211
FIGURE A.10 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre en puissance de cosinus surélevé pour $n = 2$ et $k = 0.05$	212

TABLE DES TABLEAUX

TABLEAU 3.1 Exemple de polynômes générateurs primitifs de codes de longueurs maximales	30
TABLEAU 3.2 Evolution du nombre de séquences en fonction de la longueur du registre	31
TABLEAU 3.3 Evolution de la taille des ensembles connectés en fonction n	32
TABLEAU 3.4 Paramètres de simulation.	36
TABLEAU 3.5 Borne supérieur sur le PSLR des fonctions de corrélations.	38
TABLEAU 3.6 Longueur de séquences et cardinalité des signaux OFDM étudiés	43
TABLEAU 3.7 Evolution du PAPR des signaux OFDM sélectionnés	46
TABLEAU 4.1 Paramètres de l'algorithmes de recuit simulé.....	76
TABLEAU 4.2 Synthèse de la comparaison Algorithme Cyclique vs. Algorithme de recuit simulé	77
TABLEAU 5.1 Configuration 1 (apériodique) et 2 (périodique) – $wm1, m2, p, k = 1, \forall(m1, m2, p, k)$	91
TABLEAU 5.2 Configuration 3 (apériodique) et 4 (périodique) – $wm1, m2, p, k = 1$ si $k \leq 64, \forall(m1, m2, p)$ sinon.....	91
TABLEAU 5.3 PSLR obtenus selon les différentes configurations.....	94

TABLEAU 5.4 Energie moyenne de toutes les sous-bandes ainsi que de la bande globale dans les CONFIGURATIONS 1 et 2 avant et après fenêtrage fréquentiel.....	102
TABLEAU 5.5 Energie moyenne de réjection Hors-Bande ainsi que celle de la Bande Interdite dans les CONFIGURATIONS 1 et 2 avant et après fenêtrage fréquentiel.	102
TABLEAU 5.6 PAPR obtenu dans les Configurations 1 et 2 avant et après fenêtrage fréquentiel.	102
TABLEAU 5.7 Energie moyenne de toutes les sous-bandes ainsi que de la bande globale dans les CONFIGURATIONS 1 et 2.....	109
TABLEAU 5.8 Energie moyenne de réjection Hors-Bande ainsi que celle de la Bande Interdite dans les CONFIGURATIONS 1 et 2.....	109
TABLEAU 5.9 PAPR obtenu dans les Configurations 1 et 2 avant et après optimisation.....	109
TABLEAU 5.10 Configuration 1 (apériodique) et 2 (périodique) – $wm1, m2, p, k = 1, \forall(m1, m2, p, k)$	114
TABLEAU 5.11 Configuration 3 (apériodique) et 4 (périodique) – $wm1, m2, p, k = 1$ si $k \leq 64, \forall(m1, m2, p)$ sinon.....	114
TABLEAU 5.12 PSLR obtenus selon les différentes configurations.	117
TABLEAU 5.13 Configuration 1 (apériodique) et 2 (périodique) – $wm1, m2, p, k = 1, \forall(m1, m2, p, k)$	126
TABLEAU 5.14 Configuration 3 (apériodique) et 4 (périodique) – $wm1, m2, p, k = 1$ si $k \leq 64, \forall(m1, m2, p)$ sinon.....	126
TABLEAU 5.15 PSLR obtenus selon les différentes configurations.	129
TABLEAU 5.16 PAPR obtenus selon les différentes configurations.....	129
TABLEAU 5.17 Configuration pour analyser la convergence des algorithmes du gradient. ...	130
TABLEAU 5.18 Configuration pour comparer l'approche cyclique avec celle du gradient. ...	133
TABLEAU 6.1 Paramètres du lobe principal pour le tracé des bornes.....	164
TABLEAU 7.1 Spécifications du système.....	167
TABLEAU 7.2 Paramètres de simulation.	169

TABLEAU 7.3 PAPR obtenus avec la Simulation 3	173
TABLEAU A.1 : Caractéristiques de certaines lois de pondération utilisées en réception.....	208
TABLEAU A.2 : Caractéristiques de certaines lois de pondération utilisées en émission (sur-échantillonnage d'un facteur 20 et fenêtre temporelle des filtres sur $16Tech$) sur une séquence du <i>Small Set</i> de Kasami avec $N = 216 - 1$ et pour une intégration cohérente sur 2 périodes.	213

ABBREVIATIONS

AAF	Auto-Ambiguity Function
AF	Ambiguity Function
AMRC	Accès Multiple par Répartition de Code
ATM	Air Traffic Management
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BBAG	Bruit Blanc Additif Gaussien
CAF	Cross-Ambiguity Function
CDMA	Code Division Multiple Access
CF	Crest Factor
CW	Continuous Waves
DS-CDMA	Direct-Sequence Code-Division Multiple-Access
DVB-T	Digital Video Broadcasting – Terrestria
FDMA	Frequency Division Multiple Access
FFT	Fast Fourier Transform
ISL	Integrated Sidelobe Level
LFM	Linear Frequency Modulation

LFSR	Linear Feedback Shift Register
MC-CDMA	Multi-Carrier Code Division Multiple Access
MIMO	Multi-Input-Multi-Output
MRA	Minimum Redundancy Array
MSPSR	Multi-Static Primary Surveillance Radar
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
PAAF	Periodic Auto-Ambiguity Function
PAPR	Peak to Average Power Ratio
PCAF	Periodic Cross-Ambiguity Function
PCL	Passive Coherent Location
PSL	Peak-Sidelobe-Level
PSLR	Peak Sidelobe Level Ratio
PSR	Primary Surveillance Radar
RADAR	RAdio Detection And Ranging
Rx	Receiver
SER	Surface Equivalent Radar
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SVD	Singular Value Decomposition
TDMA	Time Division Multiple Access
TDOA	Time Difference Of Arrival
TFD	Transformée de Fourier Discrète
TFDi	Transformée de Fourier Discrète inverse
TN	Trace Norm
Tx	Transmitter
WISL	Weighted Integrated Sidelobe Level

NOTATIONS

Sauf mention contraire, les notations suivantes ont été prises :

Vecteurs :

Les vecteurs seront notés en caractères minuscules gras (*e.g.* **a**).

Exception faite pour différencier les représentations fréquentielles et temporelles (*e.g.* selon le contexte, **X** représente le vecteur de la transformée de Fourier de **x**).

Matrices :

Les matrices seront notées en caractères majuscules gras (*e.g.* **A**).

I Matrice identité

0 Matrice des zéros

Scalars :

j L'unité imaginaire ($j^2 = -1$)

f_D Fréquence Doppler [Hz]

τ Retard temporel [s]

λ Longueur d'onde [m]

c Vitesse de la lumière dans le vide [m/s]

B Bande passante [Hz]

T	Temps d'intégration [s]
T_R	Temps de répétition du motif [s]
T_{ech}	Temps d'échantillonnage [s]
T_{surech}	Temps de sur-échantillonnage [s]
R	Portée radar [m]
R_{max}	Distance maximale non-ambigüe [m]
Δr	Résolution distance [m]
Δv	Résolution vitesse [m/s]
N_x	Longueur de la séquence \mathbf{x}
M	Nombre de séquences dans la famille
E_x	Energie de la séquence \mathbf{x}
N_p	Nombre de périodes

Opérateurs :

\circ	Produit de Hadamard
$*$	Produit de convolution
$\frac{\partial}{\partial}$	Dérivée partielle
$Re(.)$	Partie réelle
$Im(.)$	Partie imaginaire
$Tr(.)$	Trace
$rg(.)$	Rang
$\arg(.)$	Argument
$\max(.)$	Maximum
$\min(.)$	Minimum
$(.)[K]$	Opérateur modulo K

\equiv	Opérateur de congruence
$[\cdot]$	Arrondi à l'entier supérieur
$(\cdot)^r$	Miroir
$(\cdot)^*$	Conjugué
$(\cdot)^T$	Transposé
$(\cdot)^H$	Transpose conjugué
$(\cdot)^{\circ q}$	q -puissance de Hadamard, $\mathbf{X}^{\circ q} = \underbrace{\mathbf{X} \circ \mathbf{X} \circ \dots \circ \mathbf{X}}_q$
$ \cdot $	Determinant d'une matrice ou module d'un scalaire
$\ \cdot\ _F$	Norme de Frobenius
$\delta_{m,n}$	Symbole de Kronecker, $\delta_{m,n} = 1$ si $m = n$, sinon 0
$\mathcal{F}_N(\cdot)$	Transformée de Fourier sur N éléments
$\text{PGCD}(\cdot)$	Plus Grand Commun Diviseur
$(\cdot)_k$	k -ième coordonnée d'un vecteur

Chapitre 1. INTRODUCTION

Grâce à leur capacité à détecter, localiser et identifier des cibles, les systèmes radars se sont très largement répandus, devenant ainsi des éléments essentiels des systèmes de défense et de surveillance actuels, dont l'un des rôles majeurs est d'assurer la surveillance d'un espace pouvant faire plusieurs centaines de kilomètres (*e.g.*, surveillance aérienne, surveillance côtière...).

A ce jour, il existe de nombreuses configurations de radars. Ces configurations dépendent de l'information recherchée. Ainsi différentes classifications sont utilisées en fonction de certains critères, par exemple :

- On parle de systèmes **primaires** lorsque la détection et l'identification des cibles se font en éclairant l'espace et en analysant les signaux rétrodiffusés. Ce type de système vise à détecter tout type de cibles (coopératives et/ou non-coopératives). Par contre on parle de systèmes **secondaires** lorsque la détection et l'identification des cibles se font en interrogeant la cible et en attendant une réponse de sa part. De fait, ces systèmes ne détectent que les cibles coopératives.
- Ensuite, on qualifie d'**actif** tout système qui émet des ondes dédiées afin de détecter et d'identifier des cibles (émetteurs dédiés). A l'inverse, on qualifie de **passif** tout système utilisant des signaux émis dits d'opportunités afin d'assurer la détection et l'identification des cibles (émetteurs d'opportunités).
- Enfin, on parle de configuration **mono-statique** lorsque l'émetteur et le récepteur sont co-localisés (classiquement une unique antenne réalisant l'émission et la réception). A l'inverse, on parle de configuration **multistatique** lorsque l'émission et la réception se

font sur une ou plusieurs antennes distinctes et séparées d'une certaine distance (émetteur(s) et receptrer(s) délocalisés) [4].

La configuration mono-statique primaire active est la plus répandue. Mais ces dernières années semblent montrer un intérêt grandissant envers la configuration multistatique. Par exemple, la recherche dans ce domaine se traduit par l'apparition de nouveaux systèmes de surveillance et tout particulièrement de systèmes multistatiques passifs comme le PCL (*Passive Coherent Location*) [5, 6, 7].

1.1 Les différents systèmes de surveillance aérienne

En particulier, les systèmes de surveillance aérienne mutualisent de nombreuses configurations radars.

1.1.1 Les systèmes de surveillance primaire

Les systèmes de surveillance primaire, tant dans le civil que dans le militaire, se basent sur l'emploi d'une ou plusieurs sources d'énergie : le/les « émetteurs » (dédiés ou d'opportunités), et d'un ou plusieurs « récepteurs ». Le fonctionnement est le suivant : l'émetteur **éclaire** une zone de l'espace ; si une cible est présente dans cette zone, alors celle-ci va **renvoyer** une partie de l'énergie (**rétrodiffusion**). Par la suite le récepteur se charge de traiter le signal qu'il reçoit afin de détecter et localiser les cibles potentielles (**coopératives et non-coopératives**).

On identifie, dans cette catégorie, différentes configurations :

- Les radars mono-statiques qui, comme leur nom l'indique, correspondent à des installations pour lesquelles l'émetteur (noté Tx) et le récepteur (noté Rx) sont co-localisés. Cette configuration, communément appelée PSR pour *Primary Surveillance Radar*, reste la plus répandue. Toutefois elle possède plusieurs points faibles : un coût élevé lié principalement à la partie mécanique de l'antenne (*e.g.*, la partie rotative avec le joint tournant), une architecture non redondante rendant le système inopérant en cas de panne et sensible au relief de la zone éclairée (zones d'ombres et phénomènes de masquage liés aux gros obstacles comme les montagnes et les bâtiments), et un mauvais traitement des cibles furtives lié à l'observation du même profil de l'avion (en effet, ces cibles sont conçues pour rétrodiffuser la majorité de l'énergie qu'elles

reçoivent par l'avant dans leurs dos, les rendant ainsi difficilement détectables lorsqu'elles sont en approche).

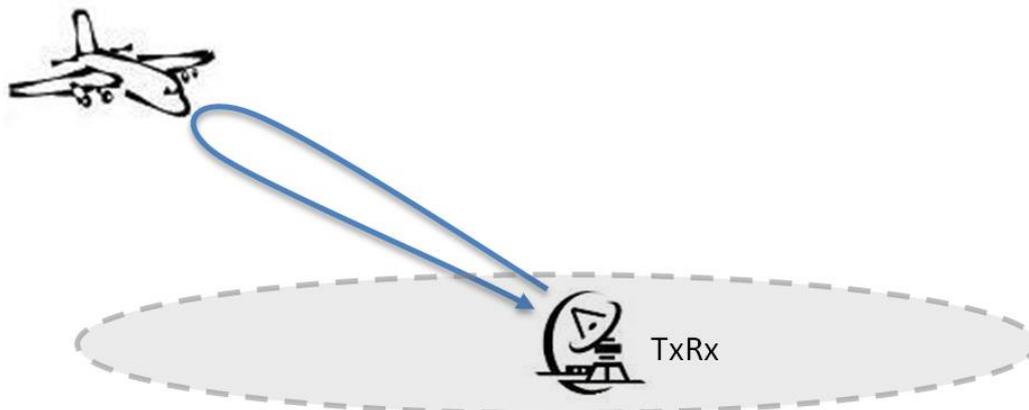


FIGURE 1.1 Configuration mono-statique

- Les radars bi-statiques qui, eux, se composent d'un émetteur et d'un récepteur non co-localisés [8]. Ils sont par exemple utilisés pour connaître l'activité aérienne dans une zone aérienne limitée dans les aéroports (« forward scatter »).

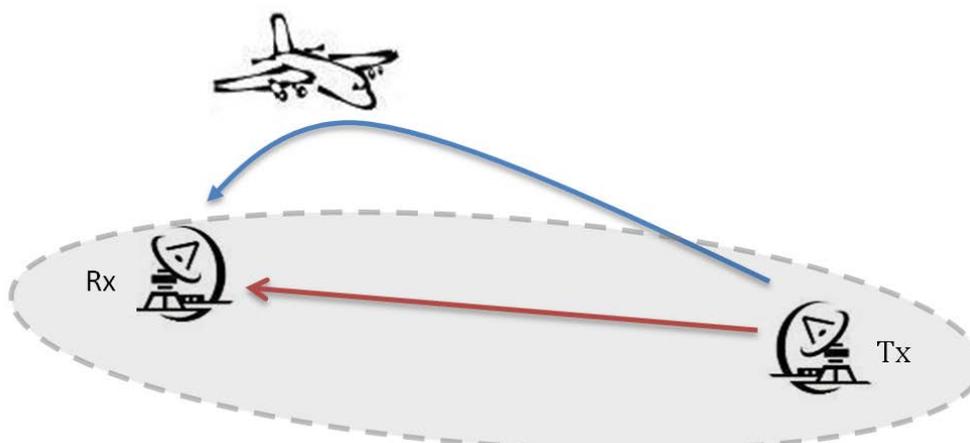


FIGURE 1.2 Configuration bi-statique

- Les radars multistatiques qui consistent en une généralisation des radars mono-statiques et bi-statiques, à savoir une installation composée d'au moins trois composants, que ce soient des émetteurs ou des récepteurs (par exemple deux émetteurs et un récepteur). On parle alors de systèmes MSPSR pour *Multistatic Primary Surveillance Radar* ou bien de systèmes MIMO (*Multi-Input-Multi-Output*) statistiques [9, 10, 4, 11]. La distinction entre ce type d'installation et les deux précédentes est l'étape de « fusion de données » qui permet de mettre en commun les différentes mesures des différents récepteurs. Ainsi le calcul de la position de l'avion

va être amélioré par le fait que la fusion de données va prendre en compte un nombre de mesures égal au produit du nombre de récepteurs par le nombre d'émetteurs (quatre mesures différentes dans la FIGURE 1.3). Ce type d'installation présente un certain nombre d'avantages sur les deux autres configurations :

- il s'affranchit des problèmes de couverture de l'espace aérien car selon les besoins des émetteurs et/ou des récepteurs peuvent être ajoutés à l'installation pour lever les zones d'ombres (montagnes, bâtiments...);
- il permet une meilleure détection des cibles furtives à l'aide de sa diversité spatiale permettant l'observation d'une cible sous différents profils;
- il permet une meilleure fiabilité du système de par son architecture redondante qui permet d'assurer un fonctionnement en cas de panne d'une ou plusieurs antennes du réseau.
- Il est moins onéreux car les émetteurs n'ont pas besoin de partie rotative. La couverture radar est assurée par la disposition spatiale des émetteurs et des récepteurs.

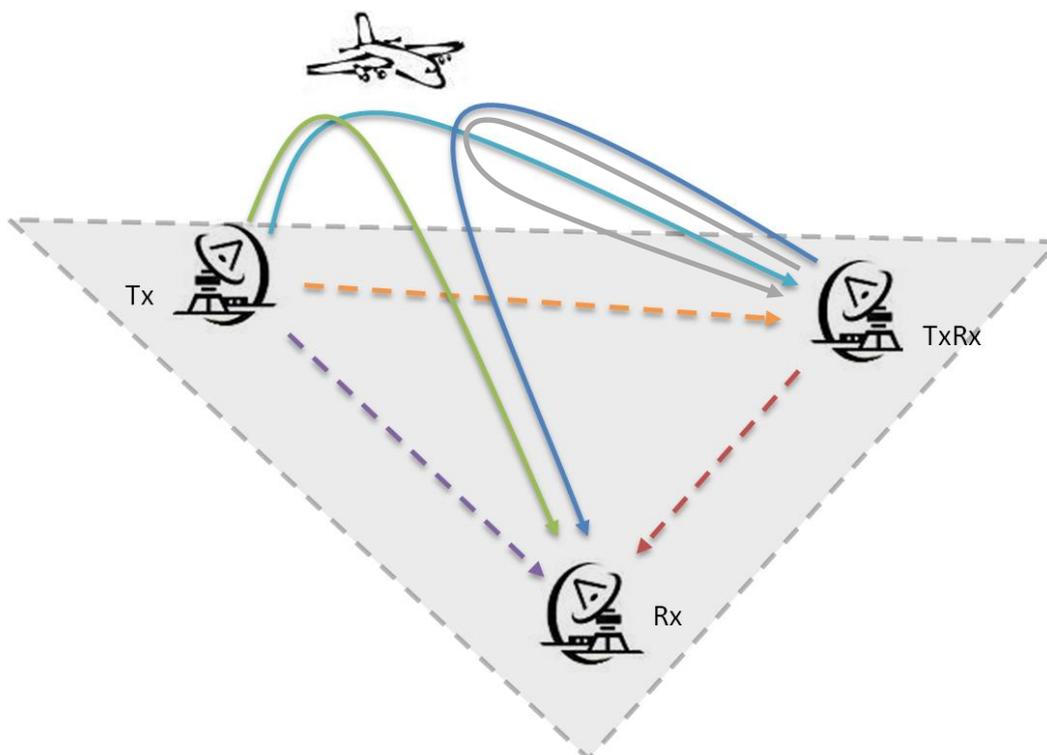


FIGURE 1.3 Configuration multi-statique (MSPSR)

1.2 Positionnement du problème

De nos jours, les systèmes MSPSR sont plus connus sous leur forme passive et en particulier à travers les systèmes PCL pour *Passive Coherent Location* [5, 6, 7]. Ces systèmes écoutent l'espace aérien en se basant sur la rétrodiffusion des émissions provenant d'un tiers (TV, radio, téléphonie) [2, 13]. Ils exploitent ainsi des émetteurs d'opportunités dont ils connaissent la localisation. Dû à cet intérêt grandissant, de nombreux programmes sur le PCL ont été lancés. Parmi eux, on peut citer le développement des radars HA-100 et GA-100 par Thales, celui des radars Silent Sentry par Lockheed Martin et le système CORA PCL développé par l'institut Fraunhofer en Allemagne.

Par contre, sous sa forme active, le concept MSPSR est bien moins développé. Il se compose, cette fois, d'émetteurs dédiés émettant des formes d'ondes conçues pour répondre aux exigences radars. De fait en comparaison avec son pendant passif, la forme active des systèmes MSPSR devrait permettre d'atteindre de meilleures performances (formes d'ondes dédiées), une plus grande flexibilité dans le déploiement du réseau (émetteurs dédiés) pour tenir les contraintes de précisions de mesures et de couvertures ; et une continuité de service (aucune dépendance à un service extérieur : TV, radio, téléphonie). Or, si le concept MSPSR actif est maintenant bien ancré dans le paysage de l'ATM (*Air Traffic Management*) futur (e.g., programme SESAR [1]), le niveau d'effort technique qui a permis d'atteindre ce niveau est paradoxalement très faible, en particulier en ce qui concerne l'aspect clef des formes d'ondes.

La thèse s'inscrit dans ce contexte. Son objectif est de hisser le niveau de définition technique concernant les formes d'ondes afin de pouvoir mieux cerner le concept, ses performances et ses limites. Ce travail, réalisé en parallèle avec une étude menée par ailleurs aux niveaux système, infrastructure et régulation, devrait permettre d'établir une vision plus mature du concept, et donc de mieux étayer une analyse de time-to-market.

1.3 Déroulement de la thèse

La thèse s'est organisée comme suit :

A travers le Chapitre 2, on introduit les notions propres à un système radar MSPSR : distance bi-statique, fréquence Doppler, etc... Ces notions définies et aux regards des caractéristiques d'un tel système, ce Chapitre établit, alors, les différents critères de sélection des codes

d'émissions radar. L'établissement de ces différents critères permet alors de sélectionner les familles de formes d'ondes les plus pertinentes pour une utilisation MSPSR active et d'orienter les algorithmes d'optimisation présentés par la suite.

En s'appuyant sur les critères établis dans le chapitre précédent, le Chapitre 3 étudie l'état de l'art afin d'identifier s'il n'existe pas déjà des familles répondant aux contraintes associées à un réseau d'émetteurs et de récepteurs distribués. En particulier, ce Chapitre s'appuie sur les formes d'ondes classiquement utilisées en télécommunication (*scrambling code*, OFDM) afin d'identifier leur possible réemploi pour une application radar MSPSR.

Dans le Chapitre 4, l'approche est différente. Elle consiste en une démarche algorithmique afin de générer des familles de séquences adaptées à notre problème. En particulier, ce Chapitre étend les travaux de Hao He, Petre Stoica et Jian Li sur les algorithmes cycliques [3] au cas d'une famille de séquences.

Le Chapitre 5 suit, aussi, une démarche algorithmique. En raison d'un coût calculatoire assez important des algorithmes cycliques précédemment introduits et en s'appuyant sur un article récent de Baden *et al.* [14], ce chapitre étudie une approche basée sur une descente de gradient afin de réaliser l'optimisation .

Dans le Chapitre 6 sont étudiées les performances des algorithmes à travers l'établissement d'une borne sur le niveau maximum des lobes secondaires que l'on peut obtenir. Deux bornes sont alors présentées : la première généralise la borne de Levenshtein (qui s'applique dans le cas d'un filtrage adapté), et la seconde établit une nouvelle borne dans le cas d'un filtrage désadapté.

Enfin dans le Chapitre 7 sont exploitées les données réelles enregistrées lors de différentes campagnes d'essais (Stuttgart et Limours). L'exploitation de ces données ont permis de valider les algorithmes développés dans le cadre d'un système MSPSR actif. En particulier, ces essais ont permis de vérifier que le comportement expérimental des formes d'ondes générées étaient bien en accord avec les résultats théoriques.

En parallèle à ces différents chapitres, des développements complémentaires seront donnés en annexe afin d'étayer les différents développements menés tout au long du manuscrit (Cf. ANNEXE A - ANNEXE H).

1.4 Publications

Ces travaux ont donnés lieu à un certain nombre de publications, listées ci-dessous :

Conférences Internationales

- F. Arlery, M. Klein et F. Lehmann, «**Utilization of Spreading Codes as dedicated waveforms for Active Multi-Static Primary Surveillance Radar**», *IEEE International Radar Symposium (IRS)*, pp. 327-332, Juin 2015
- F. Arlery, R. Kassab, U. Tan et F. Lehmann, «**Efficient Optimization of the Ambiguity Functions of Multi-Static radar waveforms**», *IEEE International Radar Symposium (IRS)*, Mai 2016.
- F. Arlery, R. Kassab, U. Tan et F. Lehmann, «**Efficient Gradient Method for Locally Optimizing the Periodic/Aperiodic Ambiguity Function**», *IEEE Radar Conference (RadarConf)*, Mai 2016
- U. Tan, O. Rabaste, C. Adnet, F. Arlery, et J. -P. Ovarlez, «**Optimization methods for solving the low autocorrelation sidelobes problem**», *IEEE International Radar Symposium (IRS)*, Mai 2016.
- U. Tan, O. Rabaste, C. Adnet, F. Arlery, J. -P. Ovarlez et J. -P. Guyvarch, «**Phase code optimization for coherent MIMO radar via a gradient descent**», *IEEE Radar Conference (RadarConf)*, Mai 2016.

Workshops :

- F. Arlery, R. Kassab, U. Tan et F. Lehmann, «**Efficient Optimization of the Ambiguity Functions of Multi-Static radar waveforms**», *4th SONDRRA Workshop*, Mai 2016.

Journaux Internationaux :

- F. Arlery, U. Tan et O. Rabaste, «**Generalization and Improvement of the Levenshtein Bound for Aperiodic Correlation**», *IEEE Transactions on Information Theory (soumis)*, 2017.
- F. Arlery, U. Tan et O. Rabaste, «**A New Lower Bound on the Maximum Correlation of a Set with Mismatched Filters**», *IEEE Transactions on Information Theory (soumis)*, 2017.

Chapitre 2. CRITERES DE SELECTION DES CODES

Tout au long de ce chapitre seront introduits les différents critères que devront respecter les familles de formes d'ondes trouvées :

- La cardinalité des familles ;
- La longueur des codes d'émission ;
- Le niveau du PSLR (*Peak Sidelobe Level Ratio*) et/ou de l'ISL (*Integrated Sidelobe Level*) des fonctions d'auto-ambiguïté et d'ambiguïté croisée ;
- Le PAPR (*Peak to Average Power Ratio*) ;
- Et l'efficacité spectrale.

Ces critères seront établis aux regards des caractéristiques d'un système MSPSR.

2.1 Définitions préliminaires

On définit ici diverses grandeurs propres aux systèmes MSPSR qui serviront tout au long du manuscrit. Comme énoncé dans l'INTRODUCTION, un système MSPSR se compose de paires bi-statiques et de radars mono-statiques ; de fait, il récupère les caractéristiques de ces deux configurations. Toutefois, tout au long de ce manuscrit on se basera sur les propriétés d'une

paire bistatique en partant du principe que le cas mono-statique est un cas particulier du cas bi-statique à savoir lorsque l'émetteur et le récepteur sont co-localisés.

En particulier on peut définir [8] :

2.1.1 La distance bi-statique

Par définition, la distance bi-statique est définie comme étant la différence de distance entre la distance parcourue par l'onde de l'émetteur au récepteur en passant par la cible (rétrodiffusion) et la distance parcourue par l'onde lors du trajet direct de l'émetteur au récepteur.

2.1.2 Le Doppler bi-statique

La vitesse d'une cible a un impact sur les performances d'un système radar, on parle d'« effet Doppler ». Dans le cas d'une paire bi-statique, l'effet Doppler est causé par la composante vitesse en direction du récepteur (\vec{u}_2) et la composante vitesse en direction de l'émetteur (\vec{u}_1) ; il peut être assimilé à la dérivée au cours du temps de la distance bi-statique.

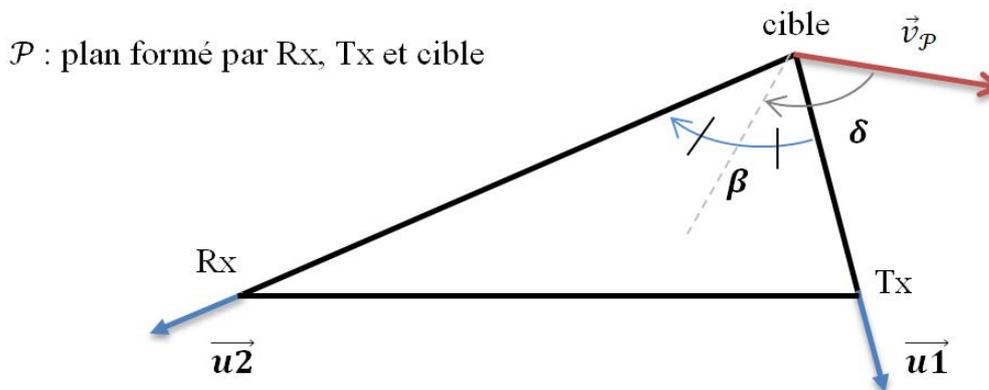


FIGURE 2.1 Représentation dans le plan \mathcal{P} de la configuration bi-statique

Ainsi pour un radar bi-statique, de longueur d'onde λ , la fréquence Doppler f_D peut être exprimée comme suit :

$$f_D = \frac{2}{\lambda} V \cos(\beta/2) \cos(\delta) \tag{2.1.1}$$

- où V est la norme de \vec{v}_p , projection du vecteur vitesse réel sur le plan \mathcal{P} ;
- β est l'angle bi-statique ;
- δ est l'angle bissecteur.

Il vient alors que, pour une configuration donnée (β et V fixés), le plus grand Doppler que l'on peut obtenir est donnée par $f_D = \frac{2}{\lambda} V \cos(\beta/2)$. Par contre à vitesse V donnée seulement, le plus grand Doppler que l'on peut obtenir est donnée par $f_D = 2V/\lambda$ (ce qui correspond à la configuration monostatique, $\beta = 0$).

2.1.3 La résolution distance

De manière conventionnelle c/B est considérée comme un degré de séparation en distance satisfaisant entre deux échos de cibles pour un radar bi-statique, où B est la bande passante émise et c la vitesse de la lumière dans le vide. Toutefois, selon la configuration, la résolution distance Δr peut s'exprimer comme suit:

$$\Delta r = \frac{c}{2B \cos(\beta/2)} \quad (2.1.2)$$

Cette égalité représente la condition minimum pour permettre l'observation de deux cibles résolues en distance.

2.1.4 La résolution vitesse

De la même manière $1/T$ est considérée comme un degré de séparation en Doppler satisfaisant entre deux échos de cibles pour un radar bi-statique, où T représente le temps d'intégration cohérente du système. Cette valeur représente la condition minimum pour permettre l'observation de deux cibles résolues en Doppler.

Or, sachant la relation qui lie la fréquence Doppler et la vitesse, il en découle l'expression de la résolution vitesse Δv suivante :

$$\Delta v = \frac{\lambda}{2T \cos(\beta/2)} \quad (2.1.3)$$

2.1.5 Distance maximale non-ambigüe

Par définition, dans le cas de l'émission d'un train d'ondes (répétition d'un motif), si on définit par T_R la période de répétition du motif, alors la distance maximale non-ambigüe R_{max} est donnée par :

$$R_{max} = cT_R \quad (2.1.4)$$

où : c représente la vitesse de la lumière dans le vide.

2.2 Cardinalité des familles et longueur de codes

La taille des familles et la longueur des séquences sont des paramètres importants dans l'optimisation d'une famille de formes d'onde dans le cadre d'une utilisation dans un système MSPSR actif.

2.2.1 Cardinalité des familles

La première raison à cela est que la taille des familles de codes à générer change selon le type de multiplexage utilisé :

- Pour un multiplexage par fréquence (FDMA : *Frequency Division Multiple Access*), comme chaque émetteur émet sur une bande de fréquence qui lui est propre, il est alors suffisant de trouver une seule séquence que l'on portera sur différentes fréquences porteuses de telle sorte qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral. L'orthogonalité entre les séquences est donc réalisée dans le domaine fréquentiel.

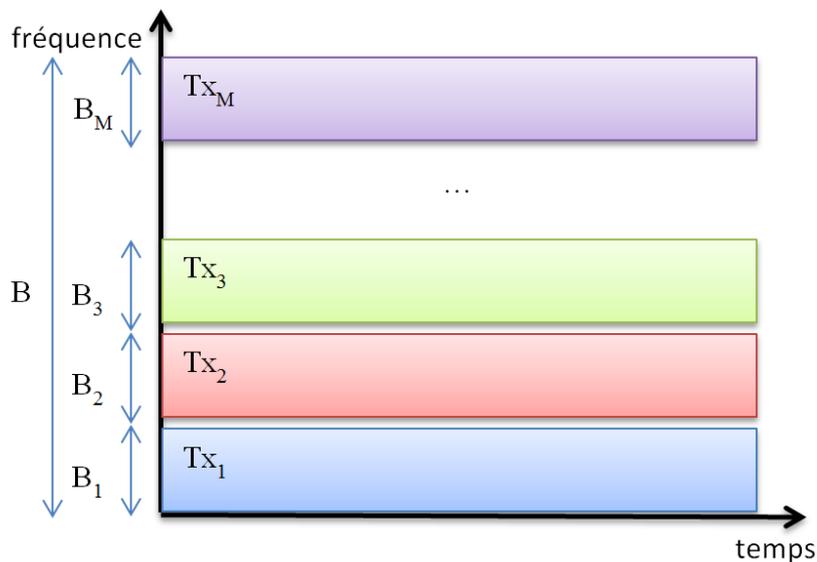


FIGURE 2.2 Multiplexage par fréquence FDMA

- Pour un multiplexage temporel (TDMA : *Time Division Multiple Access*), comme chaque émetteur émet sur un slot temporel qui lui est propre, alors il est aussi suffisant de trouver une seule séquence que chaque émetteur transmettra dans un intervalle de

temps qui lui sera réservé. L'orthogonalité des séquences est alors assurée dans le domaine temporel.

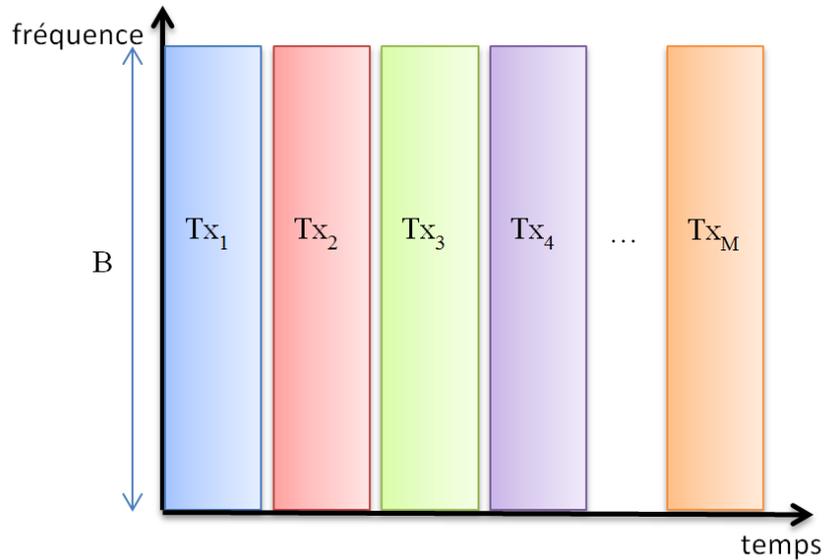


FIGURE 2.3 Multiplexage par temps TDMA

- Enfin pour le multiplexage par code (CDMA : *Code Division Multiple Access*), comme chaque émetteur émet une séquence qui lui est propre (un code pour un émetteur), il est alors nécessaire de trouver autant de séquences qu'il y a d'émetteurs distincts. Par exemple, si le système se compose de cinq émetteurs, alors la cardinalité de la famille de codes doit être au moins égale à cinq séquences. L'orthogonalité est alors portée par les séquences.

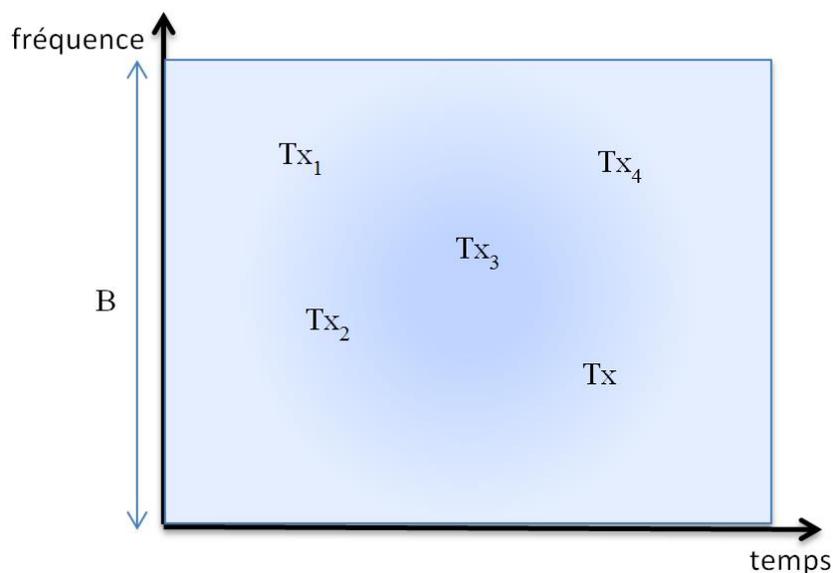


FIGURE 2.4 Multiplexage par code CDMA

On remarque qu'en TDMA et FDMA, il n'est pas nécessaire de trouver une famille de séquences. Ainsi l'emploi de ces deux types de multiplexage permet d'utiliser les formes d'onde radar classiques déjà existantes.

Toutefois ces deux types de multiplexages n'exploitent pas totalement soit la durée d'intégration du système ou soit la bande totale allouée au système (en FDMA, une sous-bande est réservée à chaque émetteur). C'est pour cette raison que dans cette thèse, on se focalisera sur le CDMA (multiplexage par code) car il offre la possibilité d'exploiter totalement le support temporel et fréquentiel comme l'orthogonalité est portée par les codes.

2.2.2 Longueur des codes

Parallèlement à la contrainte liée au multiplexage, le fait que les émetteurs émettent de manière continue (CW : *Continuous Waves*) engendre une contrainte sur la longueur des séquences. En effet, quel que soit l'émetteur, le signal émis consiste en la répétition d'une même séquence ; et ce schéma périodique engendre en réception des ambiguïtés distances tous les multiples du temps de répétition T_R . Ainsi, si on considère que la séquence est composée de N échantillons pour un temps d'échantillonnage T_{ech} alors il vient que le temps de répétition T_R peut être défini comme le produit de la longueur des séquences N par le temps d'échantillonnage T_{ech} (ou son inverse la fréquence d'échantillonnage F_{ech}). En particulier, si $T_{ech} = 1/F_{ech} = \frac{1}{kB}$, avec B la bande passante du signal et $k \geq 1$ le facteur de sur-échantillonnage, il vient alors que :

$$T_R = NT_{ech} = \frac{N}{kB}. \quad (2.2.1)$$

D'après cette expression, à bande passante fixée B (soit à une résolution distance fixée car $\Delta r = \frac{c}{B}$), le temps de répétition est proportionnel à la longueur de séquence N . Ainsi pour une portée radar R et une bande passante B données, il faut que le temps de répétition soit suffisamment grand ($R_{max} \geq R$), afin de repousser toute ambiguïté distance hors de la zone d'intérêt, autrement dit, que la longueur des séquences vérifie la relation suivante :

$$N > \frac{RF_{ech}}{c} = k \frac{RB}{c} = k \frac{R}{\Delta r}. \quad (2.2.2)$$

Par exemple, un radar ayant une portée de 300km et une bande passante de 1MHz doit vérifier $T_R = \frac{N}{kB} > 1 \text{ ms}$ afin de repousser l'ambiguïté en distance hors de la portée du radar.

En d'autres termes, si $T_{ech} = \frac{1}{B}$, la longueur de séquence doit vérifier $N > 1000$ éléments.

2.3 PSLR et ISL des fonctions d'auto-ambiguïtés et d'ambiguïtés croisées

Une autre étape importante dans le processus de sélection du code est d'étudier le niveau des lobes secondaires des fonctions d'auto-ambiguïtés et d'ambiguïtés croisées.

2.3.1 Les fonctions d'ambiguïtés

En premier lieu, nous allons définir les fonctions d'ambiguïtés (*AF – Ambiguity Function*) et rappeler certaines de leurs propriétés.

Quel que soit le système radar, le signal reçu par un récepteur se compose de bruit et potentiellement de signaux rétrodiffusés par des cibles. Ces signaux rétrodiffusés correspondent classiquement aux signaux émis par les différents émetteurs du système à ceci près qu'ils ont subi, entre autre, un retard temporel (distance) et/ou un décalage Doppler (vitesse). Par conséquent pour pouvoir isoler en réception les différents signaux rétrodiffusés par les cibles il est nécessaire d'utiliser :

- un outil permettant de caractériser la réponse du filtre adapté à une séquence u en présence de cette même séquence ayant subi un retard et/ou un décalage Doppler ;
- Et un outil permettant de caractériser la réponse du filtre adapté à une séquence u en présence d'une autre séquence v ayant subi un retard et/ou un décalage Doppler.

Nous allons, pour cela, utiliser les fonctions d'ambiguïtés. Deux définitions existent selon la périodicité des séquences :

2.3.1.1 Les fonctions d'ambiguïtés apériodiques

Dans cette partie, nous allons parler de la fonction d'auto-ambiguïté apériodique (*AAF – Auto-Ambiguity Function*) définie par Woodward [15, 16] et la fonction d'ambiguïté croisée apériodique (*CAF – Cross-Ambiguity Function*) qui en découle.

Soit deux signaux temporels $u(t)$ et $v(t)$ de support temporel fini T . Les fonctions d'auto-ambiguïté et d'ambiguïté croisée aperiodiques, de ces deux signaux temporels sont données, respectivement, par :

$$|\chi_{u,u}(\tau, f_D)| \triangleq \left| \int_0^T u^*(t - \tau)u(t)e^{-j2\pi f_D t} dt \right| = \left| \int_0^T u^*(t + \tau)u(t)e^{j2\pi f_D t} dt \right|; \quad (2.3.1)$$

$$|\chi_{u,v}(\tau, f_D)| \triangleq \left| \int_0^T u^*(t - \tau)v(t)e^{-j2\pi f_D t} dt \right| = \left| \int_0^T v^*(t + \tau)u(t)e^{j2\pi f_D t} dt \right|; \quad (2.3.2)$$

où : T représente le temps d'intégration.

Il est important de noter quelques propriétés importantes de cette fonction [17] :

- Le maximum de la fonction d'auto-ambiguïté est atteint en $(0, 0)$. Ce qui correspond en fait à l'énergie du signal $u(t)$, que l'on notera E_u :

$$|\chi_{u,u}(0,0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt \right| = E_u. \quad (2.3.3)$$

Preuve : Inégalité de Cauchy-Schwarz sur $|\chi_{u,u}(\tau, f_D)|^2$ □

- La fonction d'ambiguïté croisée d'une paire vérifie les propriétés de symétrie par rapport au point d'origine $(0, 0)$. suivantes :

$$\begin{aligned} |\chi_{u,v}(\tau, f_D)| &= |\chi_{v,u}(-\tau, -f_D)|; \\ |\chi_{u,v}(-\tau, f_D)| &= |\chi_{v,u}(\tau, -f_D)|. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Par conséquent il est suffisant d'étudier seulement deux quadrants adjacents des fonctions d'ambiguïtés croisées de $u(t)$ selon $v(t)$ et $v(t)$ selon $u(t)$, les quadrants restants pouvant être déduits des précédentes relations.

Preuve : Immédiate avec le changement de variable $t \leftarrow t + \tau$ sur $|\chi_{u,v}(\tau, f_D)|$ □

- On a conservation de l'énergie, donc toute amélioration dans une zone quelconque du plan (τ, f_D) entraîne irrémédiablement une détérioration ailleurs, et ce quel que soit la forme d'onde considérée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_{uv}(\tau, f_D)|^2 d\tau df_D = E_u E_v; \quad (2.3.5)$$

$$\text{où : } \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt = E_u ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = E_v.$$

Et dans le cas particulier où $u(t)$ et $v(t)$ ont la même énergie E il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_{uv}(\tau, f_D)|^2 d\tau df_D = E^2. \quad (2.3.6)$$

Preuve : En remarquant que :

$$\chi_{u,v}(\tau, f_D) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(t - \tau)v(t)e^{-j2\pi f_D t} dt = \mathcal{F}\{v(t)u^*(t - \tau)\};$$

où: $\mathcal{F}\{.\}$ est l'opérateur de transformée de Fourier.

Et en utilisant l'égalité de Parseval (l'énergie totale d'un signal est indépendante de la représentation choisie : temporelle ou fréquentielle) on obtient :

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_{u,v}(\tau, f_D)|^2 d\tau df_D = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)u^*(t - \tau)|^2 dt d\tau.$$

Et à l'aide des changements de variables $t_1 \leftarrow t$ et $t_2 \leftarrow t - \tau$, on montre que :

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t_1)u^*(t_2)|^2 |J(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 ;$$

$$\text{où : } J(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \frac{dt}{dt_1} & \frac{d\tau}{dt_1} \\ \frac{dt}{dt_2} & \frac{d\tau}{dt_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ représente la matrice jacobienne.}$$

Il vient alors, en calculant le déterminant $|J(t_1, t_2)|$, que :

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t_1)|^2 dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t_2)|^2 dt_2 = E_u E_v. \quad \square$$

2.3.1.2 Les fonctions d'ambiguïtés périodiques

Maintenant, nous allons décrire la fonction d'auto-ambiguïté périodique (PAAF – *Periodic Auto-Ambiguity Function*) définie et étudiée par *Levanon et al.* dans [17] [18] [19] [20] [21] et la fonction d'ambiguïté croisée aperiodique (PCAF – *Periodic Cross-Ambiguity Function*) qui en découle.

Soit deux signaux temporels $u(t)$ et $v(t)$ T_R -périodiques de support infini. Si on définit un temps d'intégration T borné et souvent donné comme étant un multiple de la période de répétition du signal T_R (le nombre de périodes considéré est noté N_p tel que $T = N_p T_R$), il vient, alors, que les fonctions d'auto-ambiguïté et d'ambiguïté croisée périodiques, de ces deux signaux temporels sont données, respectivement, par :

$$|\chi_{u,u}^T(\tau, f_D)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T u^*(t - \tau)u(t)e^{-j2\pi f_D t} dt \right| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T u^*(t + \tau)u(t)e^{j2\pi f_D t} dt \right| ; \quad (2.3.7)$$

$$|\chi_{u,v}^T(\tau, f_D)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T u^*(t - \tau)v(t)e^{-j2\pi f_D t} dt \right| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T v^*(t - \tau)u(t)e^{j2\pi f_D t} dt \right| ; \quad (2.3.8)$$

où : T représente le temps d'intégration ($T = N_p T_R$ avec N_p le nombre de périodes durant le temps d'intégration) ;

Dans le cas périodique il est intéressant de rappeler les propriétés suivantes [3] [19] :

- Le maximum de la PAAF est atteint en $(0, 0)$.

Preuve : Inégalité de Cauchy-Schwarz sur $|\chi_{u,u}^T(\tau, f_D)|^2$ □

- La PCAF est T_R -périodique selon l'axe retard (axe distance) :

$$|\chi_{u,v}^T(\tau + nT_R, f_D)| = |\chi_{u,v}^T(\tau, f_D)|; \quad (2.3.9)$$

Preuve : Immédiate comme u et v sont T_R -périodiques. □

- Lorsque $f_D = \frac{k}{N_p T_R}$, la PCAF d'une paire vérifie les propriétés de symétrie par rapport au point d'origine $(0, 0)$ suivantes :

$$\begin{aligned} |\chi_{u,v}(\tau, f_D)| &= |\chi_{v,u}(-\tau, -f_D)|; \\ |\chi_{u,v}(-\tau, f_D)| &= |\chi_{v,u}(\tau, -f_D)|; \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Par conséquent, pour ces valeurs spécifiques de Doppler, il est suffisant d'étudier seulement deux quadrants adjacents des PCAF de $u(t)$ selon $v(t)$ et $v(t)$ selon $u(t)$, les quadrants restants pouvant être déduits des précédentes relations.

Preuve : Immédiate avec le changement de variable $t \leftarrow t + \tau$ sur $|\chi_{u,v}(\tau, f_D)|$ □

- La contrainte sur le volume de la PCAF est toujours présente. Ainsi en rappelant que $T = N_p T_R$, il vient que ce volume sur une période T_R vaut:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{T_R} |\chi_{uv}^T(\tau, f_D)|^2 d\tau df_D = \frac{E_{T_R,u} E_{T_R,v}}{N_p T_R^2}; \quad (2.3.11)$$

$$\text{où : } \int_0^{T_R} |u(t)|^2 dt = E_{T_R,u};$$

$$\int_0^{T_R} |v(t)|^2 dt = E_{T_R,v};$$

Il découle naturellement que si u et v ont même énergie E_{T_R} sur une période T_R alors :

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{T_R} |\chi_{uv}^T(\tau, f_D)|^2 d\tau df_D = \frac{E_{T_R}^2}{N_p T_R^2}. \quad (2.3.12)$$

Preuve : Identique à celle de la CAF (Cf. 2.3.1.1). □

- Enfin, de manière analogue à [19] [20], on peut montrer qu'une expression simple lie $|\chi_{u,v}^{N_p T_R}(\tau, f_D)|$ et $|\chi_{u,v}^{T_R}(\tau, f_D)|$:

$$|\chi_{u,v}^{N_p T_R}(\tau, f_D)| = |\chi_{u,v}^{T_R}(\tau, f_D)| \left| \frac{\sin(\pi f_D N_p T_R)}{N_p \sin(\pi f_D T_R)} \right|. \quad (2.3.13)$$

Preuve : En partant de la définition de la PCAF sur N_p périodes :

$$|\chi_{uv}^{N_p T_R}(\tau, f_D)| = \left| \frac{1}{N_p T_R} \int_0^{N_p T_R} v^*(t + \tau) u(t) e^{j2\pi f_D t} dt \right|;$$

et en divisant l'intégrale en N_p sections :

$$|\chi_{uv}^{N_p T_R}(\tau, f_D)| = \left| \frac{1}{N_p T_R} \sum_{n=1}^{N_p} \int_{(n-1)T_R}^{nT_R} v^*(t + \tau) u(t) e^{j2\pi f_D t} dt \right|.$$

Le fait que $u(t)$ et $v(t)$ soient T_R -périodiques nous permet de faire apparaître la PCAF sur une période T_R en réalisant le changement de variable $t \leftarrow t - (n-1)T_R$:

$$|\chi_{uv}^{N_p T_R}(\tau, f_D)| = \frac{1}{N_p} \left| \sum_{n=1}^{N_p} e^{j2\pi f_D (n-1)T_R} \right| |\chi_{uv}^{T_R}(\tau, f_D)|.$$

Il ne reste plus qu'à expliciter la somme pour conclure :

$$\frac{1}{N_p} \left| \sum_{n=1}^{N_p} e^{j2\pi f_D (n-1)T_R} \right| = \frac{1}{N_p} \left| \frac{\sin(\pi f_D N_p T_R)}{\sin(\pi f_D T_R)} \right|.$$

On retrouve donc bien que :

$$|\chi_{uv}^{N_p T_R}(\tau, f_D)| = |\chi_{uv}^{T_R}(\tau, f_D)| \left| \frac{\sin(\pi f_D N_p T_R)}{N_p \sin(\pi f_D T_R)} \right|. \quad \square$$

Cette dernière propriété est particulièrement intéressante car elle montre qu'il est suffisant de calculer la fonction d'ambiguïté périodique associée à une période et de la multiplier par la fonction $\left| \frac{\sin(\pi f_D N_p T_R)}{N_p \sin(\pi f_D T_R)} \right|$ afin d'obtenir la fonction d'ambiguïté périodique sur N_p périodes. Elle montre aussi que tous les $\frac{1}{T_R}$ (l'inverse du temps de répétition), la PCAF sur N_p périodes prend les valeurs de la PCAF sur une période. Par contre pour les autres valeurs de Doppler, les lobes secondaires de la PCAF sur N_p périodes sont largement atténués par les valeurs de $\left| \frac{\sin(\pi f_D N_p T_R)}{N_p \sin(\pi f_D T_R)} \right|$. Ainsi l'optimisation de la PCAF sur N_p périodes peut se réduire à l'optimisation des raies Dopplers multiple de $\frac{1}{T_R}$.

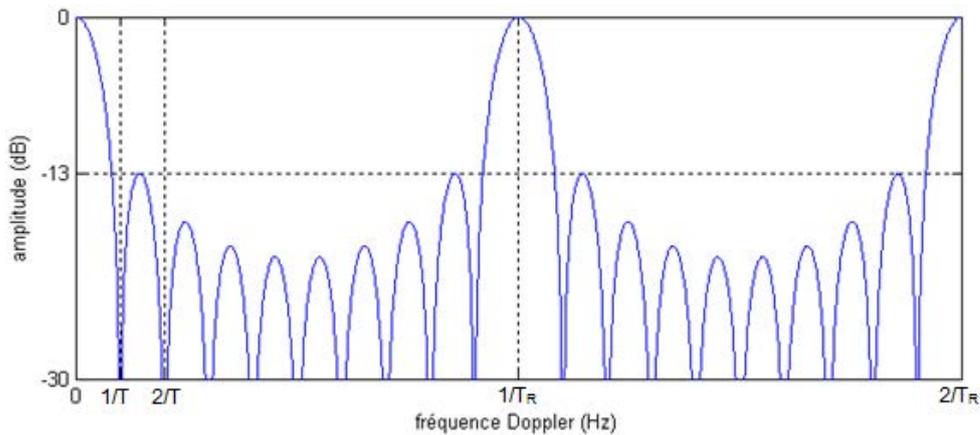


FIGURE 2.5 : Fonction $\left| \frac{\sin(\pi f_D N_p T_R)}{N_p \sin(\pi f_D T_R)} \right|$ pour $N_p = 10$.

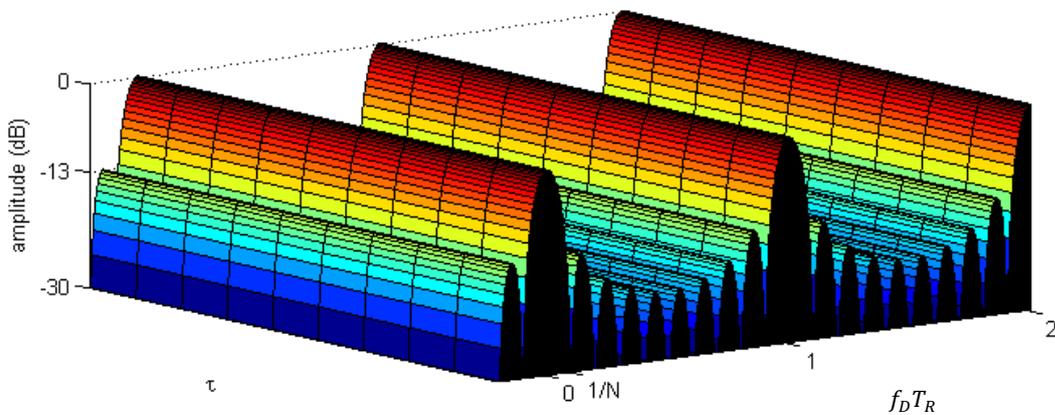


FIGURE 2.6 : Extension de la fonction $\left| \frac{\sin(\pi f_D N_p T_R)}{N_p \sin(\pi f_D T_R)} \right|$ pour tous les délais pour $N_p = 10$.

2.3.1.3 Les fonctions d'ambiguïtés discrètes

Toutefois, étant donné que les deux signaux temporels $u(t)$ et $v(t)$ seront modulés par les deux séquences discrètes de longueur N , $x(n)$ et $y(n)$ respectivement, et mis en forme par le filtre numérique $p_{T_{ech}}(t)$ de durée T_{ech} tels que :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)p_n(t); \quad (2.3.14)$$

$$v(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} y(n)p_n(t); \quad (2.3.15)$$

où : $p_n(t) = p_{T_{ech}}(t - (n - 1)T_{ech})$ et $p_{T_{ech}}(t) = 0$ si $t > T_{ech}$ ou $t < 0$;

Et $x(n + N) = x(N)$ dans le cas périodique ou sinon $x(n) = 0$ pour tout $n > N$ dans le cas apériodique.

Il vient en considérant seulement les séquences discrètes $x(n)$ et $y(n)$, le pendant discretisé de ces fonctions d'ambiguïtés, à savoir :

$$|r_{x,y}(k, p)| = \left| \sum_{n=1}^N x^*(n - k)y(n) e^{-j2\pi\frac{pn}{N}} \right| = \left| \sum_{n=1}^N y^*(n + k)x(n) e^{j2\pi\frac{pn}{N}} \right|; \quad (2.3.16)$$

avec : $k = \tau/T_{ech}$ où T_{ech} représente le temps d'échantillonnage ;

$$p = f_D N T_{ech}.$$

On prendra cette définition tant dans le cas périodique qu'apériodique. La seule différence proviendra de la définition de u et v .

Une propriété importante à relever est qu'à Doppler nul ($p = 0$), les fonctions d'ambiguïtés discrètes définies plus haut donnent les fonctions de corrélations suivantes :

- Dans le cas périodique, on parle de fonctions d'autocorrélation et d'intercorrrelation périodiques paires ;
- Dans le cas apériodique, on parle de fonctions d'autocorrélation et d'intercorrrelation apériodique.

On notera ces fonctions, respectivement, $\theta_x(k)$ et $\theta_{x,y}(k)$, telles que :

$$|\theta_x(k)| = |r_{x,x}(k, 0)| = \left| \sum_{n=1}^N x^*(n+k)x(n) \right|; \quad (2.3.17)$$

$$|\theta_{x,y}(k)| = |r_{x,y}(k, 0)| = \left| \sum_{n=1}^N y^*(n+k)x(n) \right|; \quad (2.3.18)$$

A nouveau la distinction entre le cas périodique et apériodique proviendra de la définition de u et v .

2.3.2 ISL et PSLR

Si on note $|\chi_{m,l}(\tau, f_D)|$ la valeur de la fonction d'ambiguïté de la m -ième séquence u_m par la l -ième séquence u_l pour un couple (retard, Doppler) = (τ, f_D) , on définit le PSLR (*Peak Sidelobe Level Ratio*), l'ISL (*Integrated Sidelobe Level*) et le WISL (*Weighted Integrated Sidelobe Level*) d'un ensemble de M séquences $\{u_m\}_{m=1}^M$ comme suit :

$$PSLR = \frac{\max \left(\max_{\substack{(\tau, f_D) \neq (0,0) \\ (\tau, f_D) \in \mathcal{D} \\ m=l}} |\chi_{m,l}(\tau, f_D)|^2, \max_{\substack{(\tau, f_D) \in \mathcal{D} \\ m \neq l}} |\chi_{m,l}(\tau, f_D)|^2 \right)}{\max_m |\chi_{m,m}(0,0)|^2}; \quad (2.3.19)$$

$$ISL = \sum_{\substack{m,l=1 \\ m \neq l}}^M \iint_{(\tau, f_D) \in \mathcal{D}} |\chi_{m,l}(\tau, f_D)|^2 + \sum_{m=1}^M \iint_{\substack{(\tau, f_D) \neq (0,0) \\ (\tau, f_D) \in \mathcal{D}}} |\chi_{m,m}(\tau, f_D)|^2; \quad (2.3.20)$$

$$WISL = \sum_{\substack{m,l=1 \\ m \neq l}}^M \iint_{(\tau, f_D) \in \mathcal{D}} |\chi_{m,l}(\tau, f_D)|^2 w_{m,l}(\tau, f_D) + \sum_{m=1}^M \iint_{\substack{(\tau, f_D) \neq (0,0) \\ (\tau, f_D) \in \mathcal{D}}} |\chi_{m,m}(\tau, f_D)|^2 w_{m,m}(\tau, f_D); \quad (2.3.21)$$

où : \mathcal{D} correspond à l'ensemble des couples (τ, f_D) appartenant au domaine d'intérêt. Il peut être défini par un retard max et un Doppler max.

$w_{m,l}(\tau, f_D)$ correspond au poids associé au couple de séquences (m, l) en (τ, f_D) .

Ces niveaux sont importants car ils représentent la dynamique maximale pour laquelle on peut dissocier deux cibles dans le domaine d'intérêt \mathcal{D} . Par exemple, pour une cible forte, si les lobes secondaires associées à cette dernière se trouvent à -30 dB du pic principal, alors une cible plus faible de -30 dB ne sera pas observable car elle sera noyée dans les lobes secondaires de la cible forte.

L'importance de ces métriques ont motivé de nombreux travaux pour définir une borne inférieure sur le PSLR des fonctions d'auto-corrélations et d'inter-corrélations pour des séquences de même énergie. En particulier, on peut citer la borne de Welch [22] qui établit que pour une famille de M séquences de longueur N , un minorant du PSLR est donné par :

$$\text{PSLR} \geq \begin{cases} \frac{M-1}{M(2N-1)-1} & \text{si aperiodique} \\ \frac{M-1}{MN-1} & \text{si periodique} \end{cases} \quad (2.3.22)$$

D'autres bornes existent, toutefois, elles seront introduites ultérieurement dans le Chapitre 6.

De plus, ces niveaux sont particulièrement critiques dans le cas d'un multiplexage par codes car chaque récepteur reçoit la somme des trajets directs de chaque émetteur et les échos de chaque cible provenant de chaque émetteur. Par conséquent, lorsque l'on réalise le filtrage adapté associé à l'émission de l'un des émetteurs, il faut faire en sorte de minimiser l'interférence liée aux autres émissions. Il faut donc minimiser les fonctions d'ambiguïtés croisées associées.

Ce dernier problème n'est pas présent pour les deux autres multiplexages car, par nature, l'orthogonalité n'est pas portée par le code mais soit par le temps soit par la fréquence.

2.4 Peak to Average Power Ratio (PAPR) des séquences

Un autre critère dans le choix du code le plus approprié à notre système est l'évaluation du *Peak to Average Power Ratio* (PAPR) ou du *Crest Factor* (CF) [23].

Soit une séquence discrète $\mathbf{x} := \{x(k)\}_{k=1}^N$ de longueur N :

$$\text{PAPR} = \frac{\text{Puissance crête}}{\text{Puissance moyenne}} = \frac{\max(|x(k)|^2)}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2}; \quad (2.4.1)$$

$$CF = \sqrt{PAPR}.$$

Le PAPR (et le CF) sont des critères importants. Ils permettent, en effet, de mesurer les fluctuations d'amplitudes du signal autour de sa valeur moyenne. Cette mesure est importante afin d'évaluer quel type d'amplificateurs sera nécessaire pour émettre le signal sans distortion entre la consigne et la sortie (*i.e.*, en offrant un gain constant sur l'ensemble de la plage de valeurs que prendra le signal émis).

Car une des caractéristiques majeures d'un amplificateur est son *point de compression* ; point séparant sa zone de fonctionnement linéaire et sa zone de fonctionnement non-linéaire, c'est à dire séparant la zone où le signal de sortie est la copie de la consigne d'entrée et la zone où le signal de sortie subit des distorsions en amplitude et en phase vis à vis de la consigne (FIGURE 2.7).

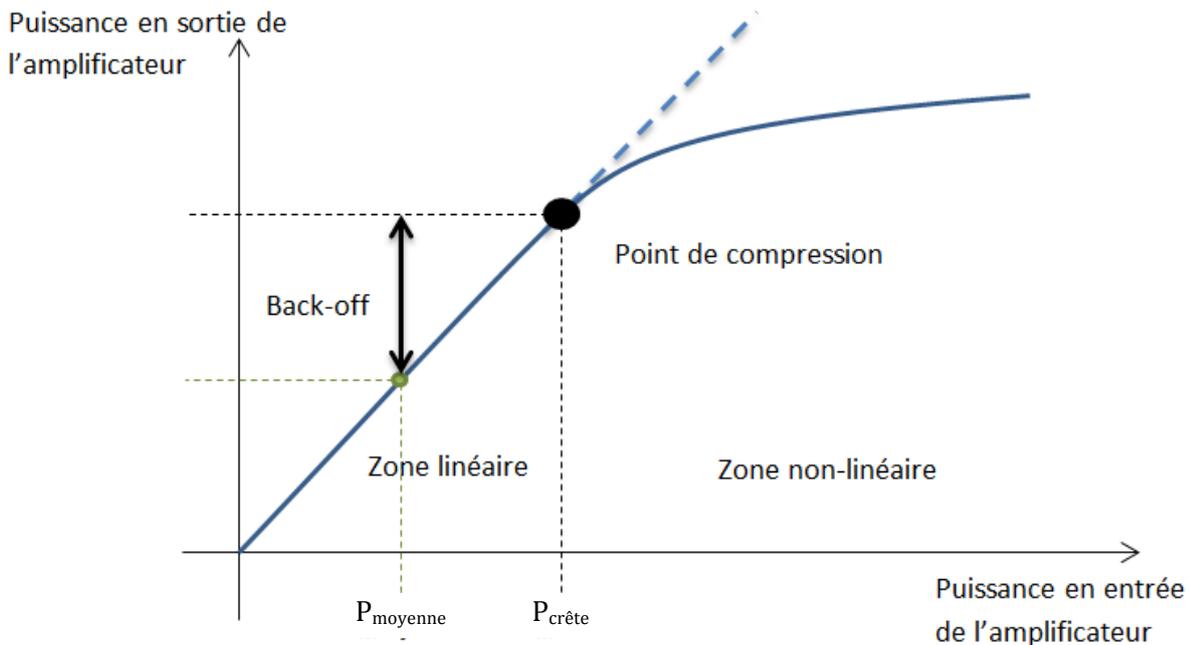


FIGURE 2.7 Fonctionnement d'un amplificateur de puissance

Ainsi, en pratique, on cherche pour un amplificateur donné, à émettre un signal avec une puissance de sortie maximale sans pour autant que ce signal subisse des distorsions conduisant à une dégradation des caractéristiques du système. Ainsi, on se place majoritairement en recul du point de compression (*back-off*) afin de conserver un fonctionnement linéaire sur toute la plage du signal. Mais le fait de ne plus travailler en régime saturé, mais sur la plage linéaire amène naturellement une perte en puissance. On

mesure alors tout l'intérêt de réduire le PAPR (et le CF) afin de se rapprocher du régime saturé et donc de minimiser les pertes de puissances au niveau de l'amplificateur.

2.5 Efficacité spectrale

Enfin, un dernier critère porte sur l'efficacité spectrale du signal. La contrainte est alors assez simple. Les signaux doivent respecter un certain gabarit souhaité. Par conséquent il faut pouvoir contrôler les émissions hors-bandes des formes d'ondes générées.

Dans ce but, on étudiera par la suite les niveaux de :

- l'énergie moyenne des différentes bandes (B_1, B_2, \dots)

$$E_{b B_i} = 10 \log_{10} \left(\left(\sum_{p \in B_i} |X(p)|^2 \right) / \left(\sum_{p \in B_i} 1 \right) \right); \quad (2.5.1)$$

- l'énergie moyenne de la bande totale :

$$E_b = 10 \log_{10} \left(\left(\sum_{p \in \cup B_i} |X(p)|^2 \right) / \left(\sum_{p \in \cup B_i} 1 \right) \right); \quad (2.5.2)$$

- l'énergie moyenne de réjection hors-bande (HB) :

$$E_{rej HB} = 10 \log_{10} \left(\left(\sum_{p \in HB} |X(p)|^2 \right) / \left(\sum_{p \in HB} 1 \right) \right); \quad (2.5.3)$$

- l'énergie moyenne de réjection dans les bandes interdites (BI) :

$$E_{rej BI} = 10 \log_{10} \left(\left(\sum_{p \in BI} |X(p)|^2 \right) / \left(\sum_{p \in BI} 1 \right) \right); \quad (2.5.4)$$

- le gain en réjection hors-bande :

$$G_{rej HB} = E_{rej HB} - E_b; \quad (2.5.5)$$

- et le gain en réjection dans les bandes interdites :

$$G_{rej BI} = E_{rej BI} - E_b; \quad (2.5.6)$$

où : $\mathbf{X} := \{X(p)\}$ représente la version discrétisée du spectre d'une séquence $\mathbf{x} := \{x(n)\}$ de longueur N . En d'autres termes, cela correspond à la transformée de Fourier Discrète de $\mathbf{x} := \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$, soit :

$$X(p) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi np}{N}}. \quad (2.5.7)$$

Chapitre 3. ETAT DE L'ART DES FAMILLES EXISTANTES

Le concept de système MSPSR actif consiste à utiliser des émetteurs dédiés et non plus d'opportunités. Or l'utilisation d'émetteurs spécifiquement conçus pour répondre aux exigences des systèmes radars engendre un questionnement tout naturel sur le jeu de formes d'onde qui correspondrait à de tels systèmes.

Afin de trouver une réponse à cette question, une première approche est d'étudier l'existant pour savoir s'il n'existe pas déjà des familles répondant aux contraintes associées à un réseau d'émetteurs et de récepteurs distribués (Cf. Chapitre 2 pour plus de détails sur les critères et les contraintes associés).

C'est le but de ce chapitre qui s'articule de la manière suivante :

- En premier lieu, il sera donné quelques résultats préliminaires sur les codes à longueur maximale ou *m-sequence*. Cette entrée en matière permet d'introduire les différentes notions qui seront utilisées dans la suite du chapitre.
- Ensuite, on s'attachera à l'état de l'art portant sur les codes pseudo-aléatoires, codes utilisés dans le domaine des télécommunication pour répondre aux problématiques multi-utilisateurs.
- En suivant, il sera étudié les signaux OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*), signaux déjà utilisés dans certains systèmes MSPSR passifs étant donné

qu'ils représentent le format d'émission de certains émetteurs d'opportunités (DVB-T – *Digital Video Broadcasting - Terrestrial*).

- Et dans une dernière partie, on donnera un bref état de l'art des méthodes connues permettant d'optimiser les fonctions de corrélations d'une famille de codes (e.g., méthodes stochastiques comme le recuit simulé).
- Enfin, une conclusion donnera le résultat de ces études et plus précisément les familles de codes qui serviront de références par la suite.

Ce chapitre a donné lieu à une publication [24] qui fut présentée à *IEEE Radar Symposium (IRS2015)* en Mai 2015.

3.1 Préliminaires : codes à longueur maximale (*m-sequences*)

3.1.1 Linear Feedback Shift Register (LFSR)

Un registre à décalage à contre-réaction (LFSR – *Linear Feedback Shift Register*) se compose de n flip-flops (éléments mémoire) et d'un circuit logique formant le circuit à contre-réaction. Les flip-flops sont synchronisés par une seule horloge H . À chaque coup d'horloge H , le contenu de chaque flip-flop est décalé d'une place vers la droite. De même, à chaque coup d'horloge, le circuit logique calcule une fonction booléenne du contenu des n flip-flops et le résultat est réinjecté à l'entrée du registre. La séquence pseudo-aléatoire est ainsi déterminée par le nombre n de flip-flops, l'état initial du registre et la fonction booléenne implémentée.

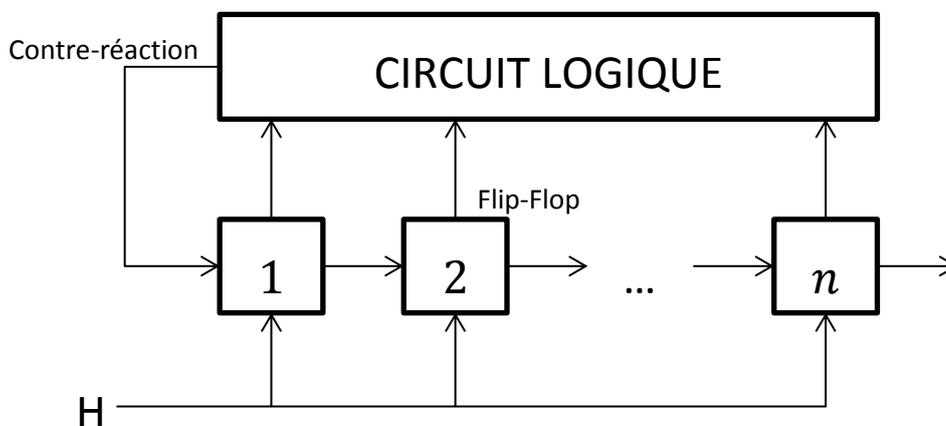


FIGURE 3.1 Architecture d'un LFSR

$x^m + 1 \quad \forall m < 2n - 1$. L'ensemble des polynômes générateurs primitifs pour un certain nombre de longueur de registre (pour n égal 1 à 6) sont donnés à titre d'exemple dans le tableau suivant :

TABLEAU 3.1 Exemple de polynômes générateurs primitifs de codes de longueurs maximales

Longueur du registre n	Longueur des séquences $N = 2^n - 1$	Polynôme générateur primitif $h = (h_k)_{k=0:n}$ en notation octale
2	3	<3>
3	7	<13> ; <15>
4	15	<23> ; <31>
5	31	<45> ; <75> ; <67> ; <73> ; <51> ; <57>
6	63	<103> ; <147> ; <155> ; <163> ; <141> ; <133>

Une propriété importante dans la construction de m -séquence est que pour un polynôme générateur et une longueur de registre donnés, quelque soit l'initialisation du registre, la m -séquence obtenue est la même à une permutation circulaire près. Par exemple, pour $n = 3$ et $h(x) = x^3 + x^2 + 1$, si l'initialisation du registre vaut :

- [1, 1, 1] alors la m -séquence obtenue est [0 0 1 0 1 1 1] ;
- [0, 1, 1] alors la m -séquence obtenue est [0 1 0 1 1 1 0] ;
- [1, 0, 0] alors la m -séquence obtenue est [0 1 1 1 0 0 1] ;

On observe bien que les trois séquences prises en exemple sont liées par de simples permutations circulaires. Par conséquent, le nombre de m -séquences disponibles M , pour une longueur de registre n donnée est directement liée au nombre de polynômes générateurs primitifs distincts que l'on peut obtenir.

Or, on remarque assez facilement dans le tableau précédent que pour une longueur de registre donnée n , **le nombre de polynômes primitifs M n'est pas du même ordre de grandeur que la longueur des séquences N** mais suit plutôt la relation suivante [30]:

$$M = \frac{\Phi(2^n - 1)}{n} \quad (3.1.2)$$

où : $\Phi(k) = k \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ est le nombre d'entiers inférieurs à k et premiers avec k , ou plus exactement la fonction indicatrice d'Euler (encore appelée en anglais « *Euler's totient function* »). $p|k$ désigne tous les termes de la décomposition en facteurs premiers de k .

TABLEAU 3.2 Evolution du nombre de séquences en fonction de la longueur du registre

Longueur du registre n	Longueur des séquences $N = 2^n - 1$	Nombre de séquences M
6	63	6
7	127	18
13	8191	630
14	16383	756
15	32767	1800
17	131071	7710

Toutefois dans le cadre d'une application dans le concept MSPSR, la cardinalité de ces familles reste tout à fait suffisante (TABLEAU 3.2).

Parallèlement, ces codes ont pour propriété d'avoir une fonction d'autocorrélation périodique paire (Cf. (2.3.17)) idéale à deux valeurs sur une période :

$$\theta_{C_i}(k) = \begin{cases} N & k = 0 \\ -1 & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Par contre leur fonction d'intercorrélacion périodique paire est loin d'être idéale pour toutes les paires de m -sequences [31]. Malgré cela, les bonnes propriétés de la fonction d'autocorrélation périodique paire de ces séquences ont motivé de nombreuses études afin de trouver, pour une longueur de séquence donnée, les plus grands ensembles de m -séquences ayant les meilleures propriétés d'intercorrélacion possibles. Par exemple Sarwate et Pursley ont développé dans [29] une méthode basée sur la q -décimation d'une m -séquence pour obtenir une famille de séquences à partir du même polynôme générateur.

La q -décimation d'une m -sequence $\mathbf{u} := \{u(i)\}_{i=1:N}$, notée $\mathbf{v} := \{v(i)\}_{i=1:N}$ est définie comme $\mathbf{v} = \mathbf{u}[q]$ telle que le i -ième élément de \mathbf{v} soit l'élément de \mathbf{u} d'indice qi modulo N :

$$v(i) = u(qi[N]) \quad \text{pour } i \in \llbracket 0 : N - 1 \rrbracket. \quad (3.1.4)$$

Si la séquence $\mathbf{v} = \mathbf{u}[q]$ n'est pas identiquement nulle, alors cette dernière est périodique, de période $\frac{N}{\text{PGCD}(q,N)}$. Ainsi, la q -décimation d'une m -sequence donne une m -sequence si et seulement si le facteur de décimation q est premier avec la longueur N de la m -sequence \mathbf{u} .

S. W. Golomb [30] a observé que l'intercorrélacion de deux m -sequences générées par des polynômes générateurs différents prenait au moins 3 valeurs différentes. Reprenant ce constat, Gold a montré que pour des longueurs de registres non multiples de 4 ($n \neq 0$ [4]), il existait parmi toutes les séquences à longueur maximale **des séquences dites préférées** [32]. Ces séquences s'obtiennent à partir de q -décimations spécifiques et ont pour propriétés d'avoir une fonction d'intercorrélacion prenant seulement 3 valeurs [29] [33]:

$$\theta_{C_i C_j}(k) = \begin{cases} -1 \\ -2 + t(n) \\ -t(n) \end{cases} \quad \text{où} \quad t(n) = \begin{cases} 1 + 2^{\frac{n+2}{2}} & \text{si } n \text{ est paire} \\ 1 + 2^{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

De la même manière, pour des longueurs de registres multiples de 4, il a été montré par Niho l'existence de q -décimations spécifiques donnant lieu à des « *pseudo* » paires préférées ayant des fonctions d'intercorrélacion (Cf. (2.3.18)) prenant seulement 4 valeurs [29] [34]:

$$\theta_{C_i C_j}(k) = \begin{cases} -1 + 2^{\frac{n+2}{2}} \\ -1 + 2^{\frac{n}{2}} \\ -1 \\ -1 - 2^{\frac{n}{2}} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Les ensembles formés de paires préférées sont appelés « ensembles connectés ». Ils ont pour avantages d'avoir des propriétés d'autocorrélacion périodique paire idéales et des propriétés d'intercorrélacion périodique paire bornées et faibles. **Toutefois ces ensembles sont limités par le faible nombre de séquences qui les constitue** (TABLEAU 3.3).

TABLEAU 3.3 Evolution de la taille des ensembles connectés en fonction n

Longueur du registre n	Longueur des séquences $N = 2^n - 1$	Cardinalité et q -décimations associées M et $\{q_1, q_2, \dots\}$
7	127	6 $\{1; 3; 9; 13; 27; 29\}$
11	2047	4 $\{1; 63; 411; 413\}$
12	4095	2 $\{1; 1387\}$
13	8191	4 $\{1; 287; 1243; 1245\}$
14	16383	4 $\{1; 2773; 2893; 3277\}$
15	32767	2 $\{1; 6555\}$
16	65535	2 $\{1; 21931\}$

Or, dans le cadre de notre application, il est souhaitable d'obtenir des ensembles plus grands tout en conservant au maximum les bonnes propriétés de ces *m-sequences préférées*.

On verra par la suite que ces *m-sequences* sont à l'origine de nombreuses familles de séquences possédant une grande cardinalité tout en conservant de bonnes propriétés de corrélation (Cf. 3.2).

3.2 Etude des codes pseudo-aléatoires

Dans une première partie de l'étude bibliographique, nous avons décidé de nous appuyer sur les différentes études qui ont été menées dans le domaine des télécommunications pour remédier aux problèmes multi-utilisateurs [24].

Nous allons plus précisément étudier les codes d'étalement utilisés dans les techniques à Accès Multiple par Répartition de Codes (AMRC à porteuses multiples ou MC-CDMA : *Multi-Carrier Code Division Multiple Access*) dans le contexte asynchrone.

3.2.1 Codes de Gold / Pseudo-Gold

Les codes de Gold ont été développés pour répondre au problème de cardinalité des ensembles connectés présentés ci-dessus [29] [35]. Ces séquences sont générées à partir d'*une paire préférée* de *m-sequence* de longueur N en réalisant l'addition modulo-2 de l'une des deux séquences par une version décalée de la seconde.

Il s'ensuit que l'ensemble des **séquences de Gold**, noté $G(a, b)$, **contient $N + 2$ séquences** et peut être défini par :

$$G(a, b) \triangleq \{a, b, a \oplus b, a \oplus Tb, \dots, a \oplus T^{N-1}b\} \quad (3.2.1)$$

Où : a et b forment *une paire préférée* de *m-sequence* de longueur N ;
 T est l'opérateur de permutation circulaire vers la gauche ;
 \oplus est l'opération d'addition modulo 2 (XOR).

Cette famille de séquences a pour propriété de voir ses différentes fonctions de corrélation prendre ses valeurs (hors pic de corrélation qui vaut N) dans $\{-1 ; -2 + t(n) ; -t(n)\}$ avec :

$$N = 2^n - 1 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \neq 0 [4] \quad (3.2.2)$$

$$t(n) = \begin{cases} 1 + 2^{\frac{n+2}{2}} & \text{si } n \text{ est paire} \\ 1 + 2^{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

On remarque alors que dans le cas où n est un multiple de 4, il n'y a pas de *paire préférée* ; par conséquent aucune séquence de Gold ne peut être générée dans ce cas. Néanmoins, en s'appuyant sur les travaux de Niho dans [34] il est possible de trouver des « *pseudo* » *paires préférées* de longueur N . Il est donc possible de générer une famille que l'on appellera « *pseudo-Gold* » en utilisant cette « *pseudo* » *paire préférée* dans la procédure de génération des séquences de Gold.

Il vient alors l'obtention d'une famille de $N + 2$ **séquences** de longueur N dont les fonctions de corrélations prennent leurs valeurs (hors pic de corrélation qui vaut N) dans $\{-1; t(n) - 2; -s(n); s(n) - 2\}$ avec :

$$N = 2^n - 1 \quad \text{avec } n = 4k \text{ et } k \in \mathbb{N}^* \quad (3.2.4)$$

$$s(n) = 1 + 2^{\frac{n}{2}} \quad (3.2.5)$$

3.2.2 Codes de Kasami

Les codes de Kasami sont composés de deux ensembles : le petit ensemble (« *Small Set* ») et le grand ensemble (« *Large Set* ») [29] [36] [37] :

- Le *Small Set* est généré en prenant une *m-séquence* $u(t)$ de longueur N et la q -décimation $v(t)$ de $u(t)$ avec $q = 2^{n/2} + 1$, puis en réalisant l'addition modulo-2 de $u(t)$ par une version décalée de $v(t)$. La famille générée possède alors $2^{\frac{n}{2}}$ **séquences** de longueur N dont les fonctions de corrélations prennent leurs valeurs (hors pic de corrélation qui vaut N) dans $\{-1; -s(n); s(n) - 2\}$ avec :

$$N = 2^n - 1 \quad \text{avec } n = 2k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \quad (3.2.6)$$

- Le *Large Set* est, lui, généré en considérant une *m-séquence* $u(t)$ de longueur N , la q -décimation $v(t)$ de $u(t)$ avec $q = 2^{n/2} + 1$, la q' -décimation $w^{(k)}(t)$ de $u(t)$ décalée de k avec $q' = 2^{(n+2)/2} + 1$ et $k \in [0 : PGCD(q', N) - 1]$, et en réalisant l'addition modulo-2 de $u(t)$ par une version décalée de $v(t)$ et de $w^{(k)}(t)$. Le résultat est une famille de $2^{\frac{n}{2}}(2^n + 1)$ ou $2^{\frac{n}{2}}(2^n + 1) - 1$ **séquences** de longueur N selon que $n \equiv 2[4]$ ou $n \equiv 0[4]$ dont les fonctions de corrélations prennent leurs

valeurs (hors pic de corrélation qui vaut N) dans $\{-1; -t(n); t(n) - 2; -s(n); s(n) - 2\}$

$$N = 2^n - 1 \quad \text{avec } n = 2k \text{ et } k \in \mathbb{N}^* \quad (3.2.7)$$

3.2.3 Codes de Legendre et Weil

Les codes de Legendre et Weil sont des codes binaires construits à partir de la séquence de Legendre $a(t)$ de longueur N premier. Ils sont générés en réalisant l'addition modulo-2 de $a(t)$ par une version décalée de lui-même [38] [39]. La famille générée se compose alors de $\frac{N+1}{2}$ séquences binaires de longueur N dont le PSL (*Peak-Sidelobe-Level*) est borné par $2\sqrt{N} + 5$.

$$N \text{ est premier} \quad (3.2.8)$$

3.2.4 Codes de No

Les codes de No sont des séquences utilisées en cryptographie. Introduite par Kumar et No dans [40] puis généralisées par No dans [41], leurs constructions se basent sur les éléments primitifs des ensembles de Galois $GF(2^n)$ et sur l'utilisation de la fonction trace [42]. Les caractéristiques de cette famille sont une cardinalité de $\sqrt{N+1} = 2^{n/2}$ séquence de longueur N avec des niveaux de corrélations (hors pic principal) bornés par $\sqrt{N+1} + 1$.

$$N = 2^n - 1 \quad \text{avec } n = 2k \text{ et } k \in \mathbb{N}^* \quad (3.2.9)$$

3.2.5 Codes de Trace Norm (TN)

Ces codes sont aussi des codes binaires utilisés en cryptographie. Leur génération est quasi-similaire à celle des codes de No à l'exception de l'utilisation de la fonction Norme [43]. Les caractéristiques de cette famille sont une cardinalité de $\sqrt{N+1} = 2^{n/2}$ séquence de longueur N avec des niveaux de corrélations (hors pic principal) bornés par $\sqrt{N+1} + 1$.

$$N = 2^n - 1 \quad \text{avec } n = 2km \text{ et } (k, m) \in \mathbb{N}^{*2} \quad (3.2.10)$$

3.2.6 Codes de Zadoff-Chu

Les codes de Zadoff-Chu sont des séquences polyphasées dont la fonction d'autocorrélation périodique est idéale [44] [45] [46] [47]. Dans le cas particulier où N est premier, cet ensemble est composé de $N - 1$ séquences de longueur N avec des niveaux de corrélations (hors pic principal) bornés par \sqrt{N} [46].

3.2.7 Résultats de l'étude

Afin de comparer l'ensemble des familles présentées plus haut, leurs fonctions d'ambiguïtés périodiques ont été calculées pour différentes longueurs de séquences N et dans la configuration décrite dans le TABLEAU 3.4.

TABLEAU 3.4 Paramètres de simulation.

Paramètres de simulation	Valeurs	
Temps d'intégration	T	130 ms
Temps bit	T_{ech}	1 μ s
Doppler maximum	2 kHz (équivalent à minima à 300 m/s en bande L)	
Delais maximum	1 ms (équivalent à 300 km)	

En particulier, les séquences ont été périodisées sur un certain nombre de période N_p pour permettre d'atteindre le temps d'intégration fixe de la simulation. Par exemple pour $n = 10$, le temps de répétition est donné par $T_R = NT_{ech} = 1,024$ ms par conséquent pour atteindre un temps d'intégration de 130 ms il est nécessaire d'intégrer le signal sur $N_p = 128$ périodes. Par contre pour $n = 16$, $T_R \sim 65$ ms et donc seulement $N_p = 2$ périodes sont nécessaires.

A titre d'exemple, la FIGURE 3.3 montre le comportement de la fonction d'auto-ambiguïté et d'ambiguïté croisée périodique (PAAF et PCAF) d'une séquence du petit ensemble de Kasami pour différentes longueurs de motif de répétition.

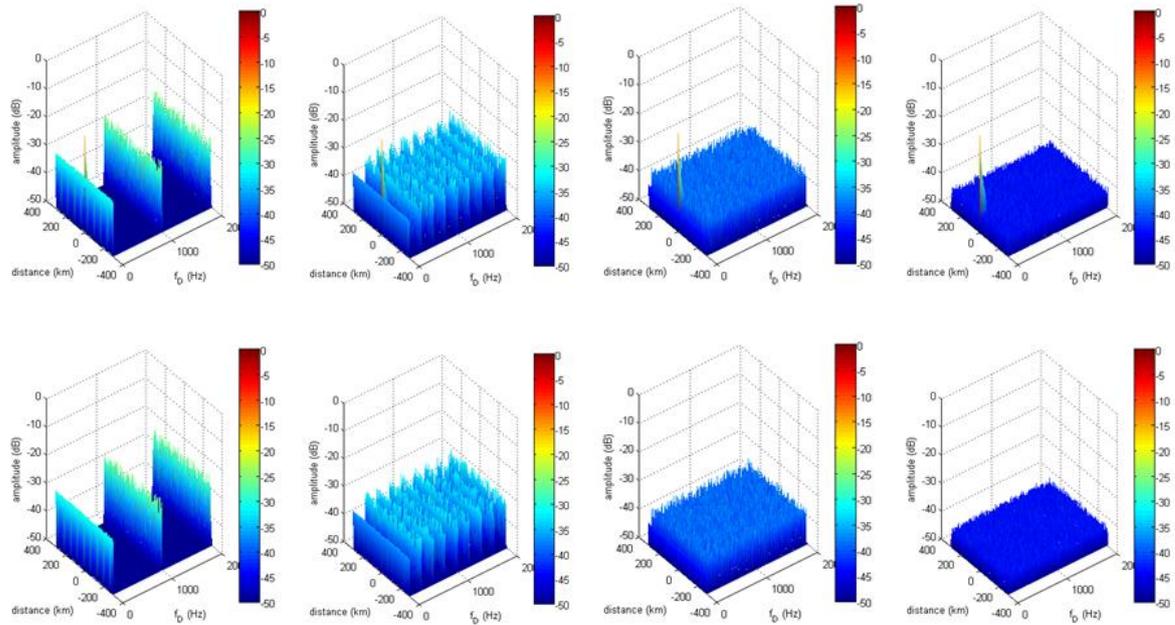


FIGURE 3.3 PAAF (en haut) et PCAF (en bas) d'une séquence du *Small Set* de Kasami pour $N = 2^n - 1$ avec $n = \{10; 12; 14; 16\}$ (de gauche à droite), dans la configuration du TABLEAU 3.4, soit un temps d'intégration constant de $T = 130 \text{ ms}$.

Différentes observations peuvent être faites :

- Tout d'abord on constate une remontée récurrente sur tous les intervalles Doppler multiples de l'inverse de la période de répétition. Ce comportement est toutefois prédictible et est inhérent aux fonctions d'ambiguïtés d'un signal périodique [19] [20].
- Ensuite, il est intéressant de remarquer que, plus la période de répétition est grande (N grand), plus la fréquence des remontées augmente, et meilleurs sont l'ISL et le PSL. Ainsi pour de très grandes valeurs de N , on tend vers un comportement en punaise de la PAAF et une PCAF très faible (Cf. FIGURE 3.3)

De manière analogue, d'autres simulations, non présentées ici, ont montré le même comportement sur l'ensemble des familles étudiées, exception faite des codes de Zadoff-Chu qui présentent des ambiguïtés Doppler liées à sa construction dite de Chirp-Like (ambiguïté semblable à une LFM : *Linear Frequency Modulation*) [48]. Toutefois, malgré un comportement globalement semblable, quelques familles semblent se démarquer.

En particulier, la FIGURE 3.4 donne l'évolution du PSLR des différentes fonctions d'ambiguïtés et fonctions de corrélations en fonction de la longueur des séquences en échelle logarithmique (donc selon $n = \log_2(N)$). A des fins de comparaison, l'ensemble des courbes

est comparée à celle d'un Bruit Blanc Additif Gaussien (BBAG ou AWGN en anglais) ayant la même structure (même longueur N et périodisé pour atteindre le temps de 130ms).

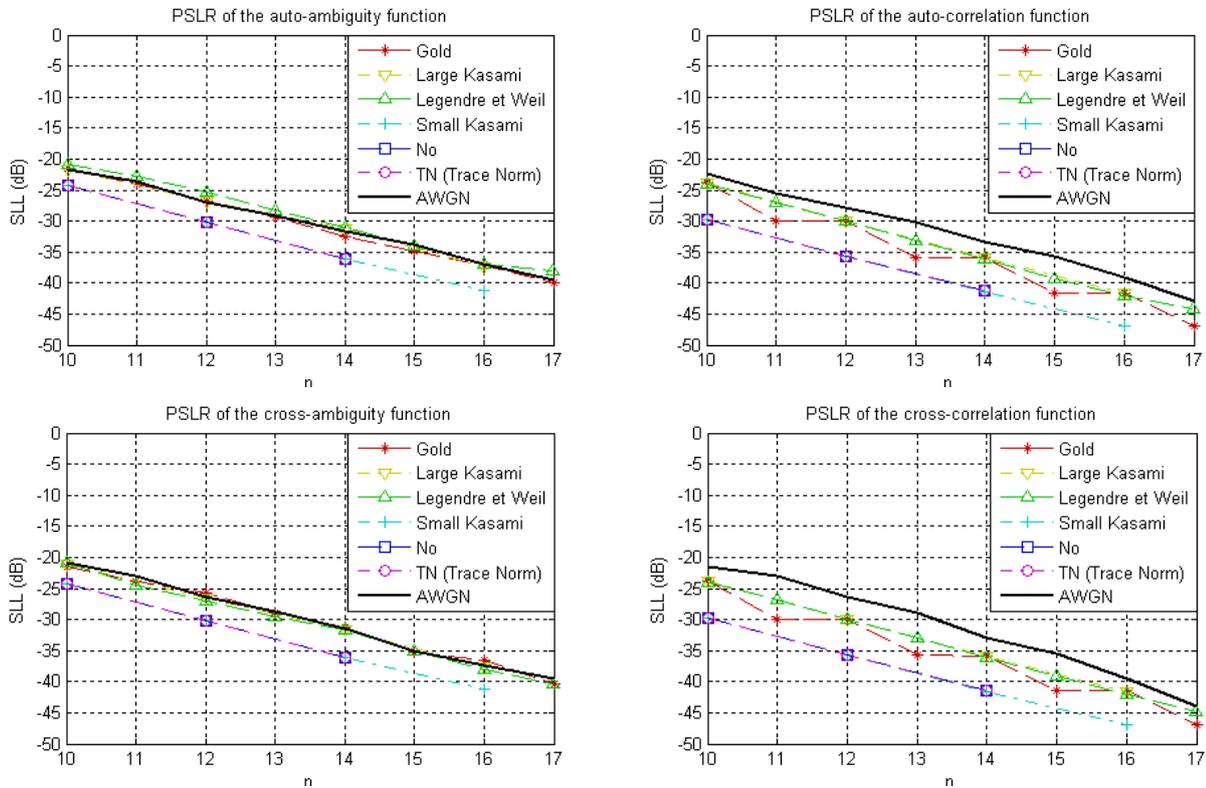


FIGURE 3.4 Evolution du PSLR de la PAAF (en haut à gauche), de la PCAF (en bas à droite), de la fonction d'autocorrélation périodique (en haut à droite) et de la fonction d'intercorrrelation (en bas à droite) en fonction de N en échelle logarithmique ($n = \log_2(N)$).

TABEAU 3.5 Borne supérieur sur le PSLR des fonctions de corrélations.

Nom de la famille	PSLR
Gold	$t(n)/N$
Pseudo-Gold	$(t(n) - 2)/N$
Small Kasami	$s(n)/N$
Large Kasami	$t(n)/N$
Legendre & Weil	$(2\sqrt{N} + 5)/N$
No	$s(n)/N$
TN	$s(n)/N$

Sans surprise, il apparaît dans la Figure 3.4 que l'évolution du PSLR sur les fonctions de corrélations suit la théorie (Cf. Tableau 3.5). Il apparaît aussi que l'évolution du PSLR sur les fonctions d'ambiguïtés est globalement semblable à celle du bruit blanc additif gaussien, à l'exception des 3 familles suivantes qui se trouvent 4dB plus bas :

- Les familles du *Small Set* de Kasami ;
- Les familles de No ;
- Et les familles de TN.

En particulier il peut être observé que le PSLR évolue approximativement en $-3(n - 2)$ dB.

Les résultats de simulations montrent que les familles du *Small Set* de Kasami, les familles de No et les familles TN offrent de meilleures performances en terme de PSLR que toutes les autres familles étudiées ici. Un autre avantage de ces séquences est qu'elles possèdent une enveloppe constante. Cette propriété signifie que le PAPR vaut un, permettant ainsi une meilleure efficacité des amplificateurs de puissance (Cf. 2.4).

Par contre il est important de noter que le principal défaut de ces séquences binaires est un spectre en sinus cardinal lié au filtre de mise en forme de type porte, classiquement utilisé pour sur-échantillonner le signal à l'émission (FIGURE 3.5). En effet, avec ce filtre de mise en forme, le spectre obtenu est de type sinus cardinal avec un lobe principal d'une largeur de deux fois l'inverse du temps d'échantillonnage, et des lobes secondaires pouvant atteindre -13.3 dB.

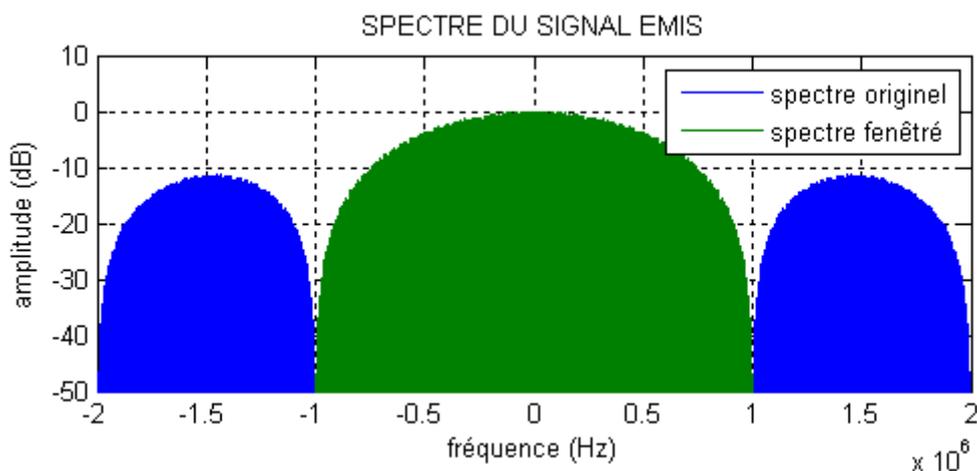


FIGURE 3.5 Spectre d'une séquence du *Small Set* de Kasami pour un temps d'échantillonnage de $T_{ech} = 1\mu s$ (soit le 1^{er} zéro en $\frac{1}{T_{ech}} = 1MHz$) (en bleu) et ce même spectre fenêtré par une porte de largeur $(2/T_{ech})$ (en vert).

Par conséquent, il est nécessaire de réaliser un fenêtrage fréquentiel afin de respecter les contraintes sur la bande imposée au système. Par contre cette pondération a pour résultat de dégrader le PAPR et la résolution distance du signal (Cf. FIGURE 3.5, FIGURE 3.6 et ANNEXE A). En particulier, dans l'exemple présenté ici (FIGURE 3.5 et FIGURE 3.6), le PAPR passe de 0 dB à 3 dB. En effet, on voit sur la FIGURE 3.6 que l'enveloppe du signal en rouge n'est plus constante après fenêtrage du spectre. Du coup, le PAPR ne vaut plus 0 dB, comme c'était le cas pour le signal d'origine en vert. En particulier, le maximum du module au carré a augmenté et sa valeur moyenne a diminué du fait des passages par zéros du signal.

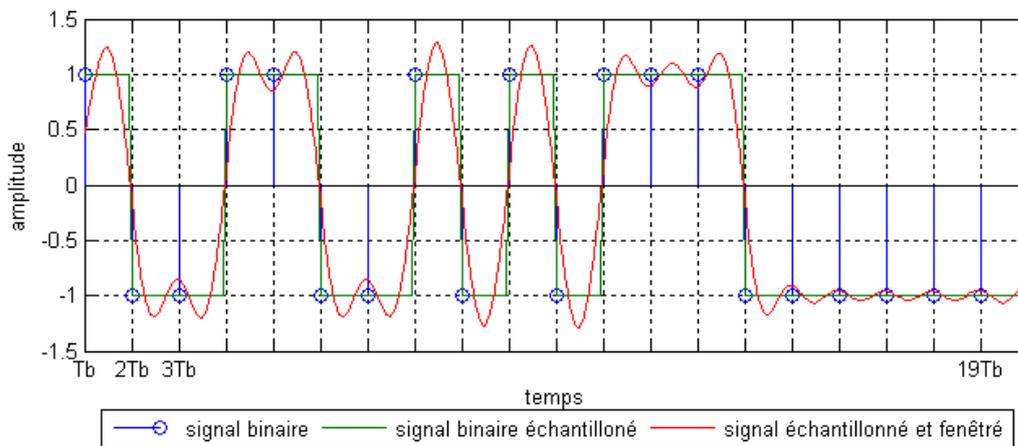


FIGURE 3.6 Impact du fenêtrage par une porte de largeur ($2/T_{ech}$) sur l'enveloppe temporelle d'une séquence du *Small Set* de Kasami : avec les valeurs binaires de la séquence (rond bleu), le signal échantillonné (trait plein vert) et le signal après fenêtrage (trait pointillé rouge).

En conclusion, malgré les problèmes relatifs au contrôle du spectre, ces trois familles semblent être de bonnes candidates pour une application MSPSR active.

3.3 Etude des codes OFDM

Les systèmes OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) sont aujourd'hui largement répandus dans le domaine des télécommunications (DVB-T, [49] [50] [51]). Ils sont d'ailleurs utilisés dans certains systèmes radars (MSPSR passifs) comme émetteurs d'opportunité. Il est, par conséquent, naturel de les positionner comme des candidats possibles pour le MSPSR actif.

La figure suivante (FIGURE 3.7) donne l'architecture pour traiter un signal OFDM.

Dans cette figure, N , N_{sym} , K , IG, CP et Δ font références, respectivement, au nombre de sous-porteuses actives, au nombre de symbole OFDM de la trame, au nombre total de sous porteuses, à l'intervalle de garde, au préfixe cyclique et au nombre d'échantillons de l'intervalle de garde.

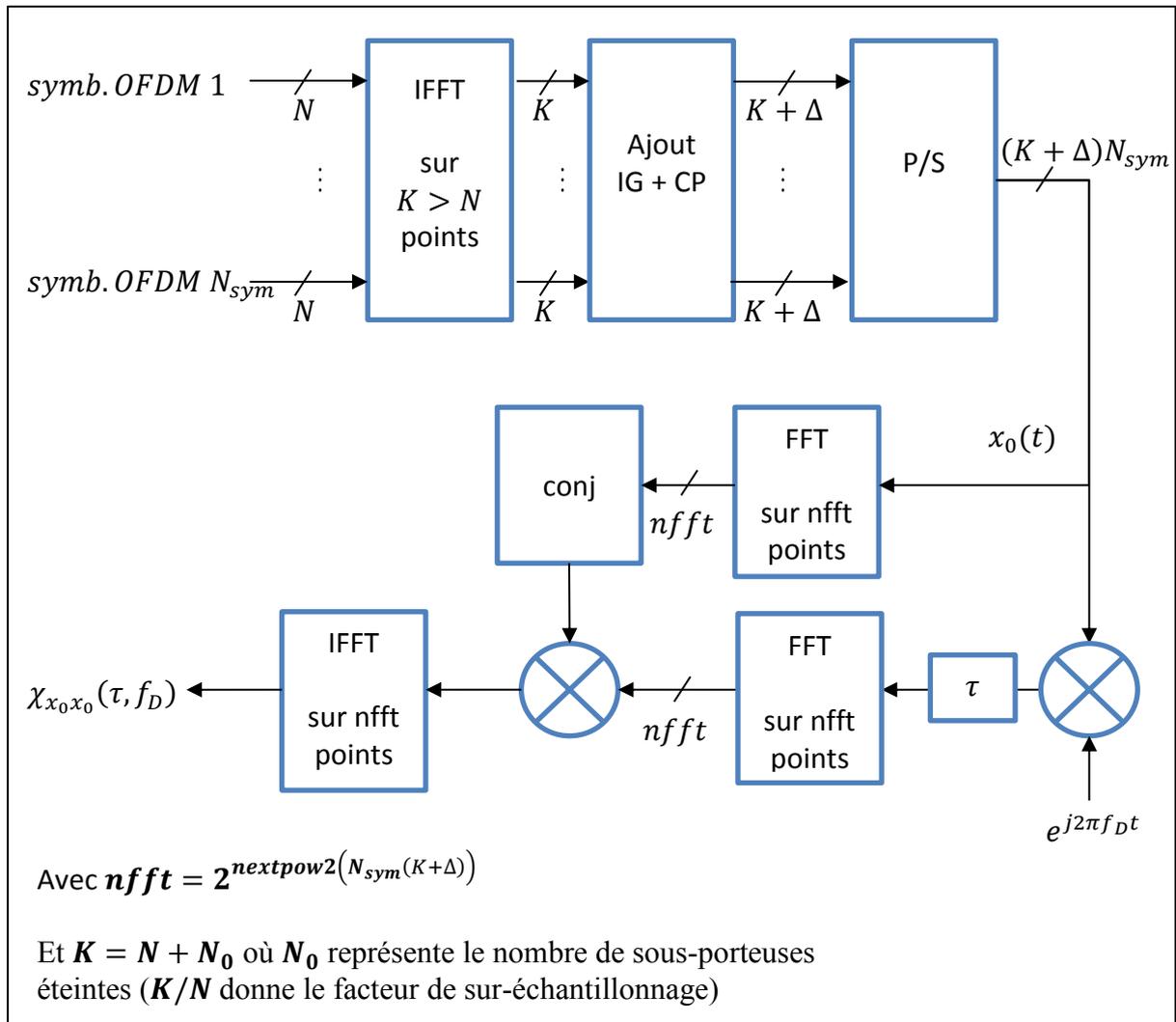


FIGURE 3.7 Architecture OFDM numérique

Sans perte de généralité, le signal OFDM $x_0(t)$ est construit à partir de N_{sym} symboles OFDM de longueur N qui module le spectre (valeurs des sous-porteuses actives, FIGURE 3.8). Chacun de ces symboles OFDM sont alors passés dans le domaine temporel par une transformée de Fourier inverse sur K éléments ($K = N + N_0$ où N_0 représente le nombre de sous-porteuses éteintes). Dans le domaine temporel s'ensuit l'ajout d'un interval de garde (IG) et du préfixe cyclique (CP) pour absorber les multi-trajet et éviter les interférences inter-symboles. Cela consiste à prendre les Δ derniers éléments du signal et à les ajouter au début

du signal (FIGURE 3.9). Finalement la génération du signal OFDM consiste en la concaténation des N_{sym} signaux temporels représentant chacun des symboles OFDM.

S'ensuit alors, le calcul de la fonction d'ambiguïté.

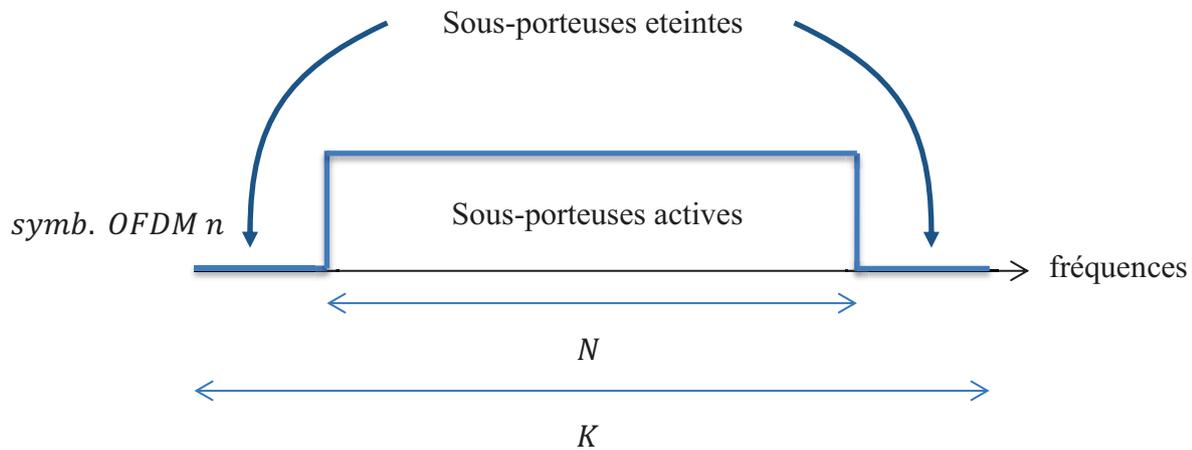


FIGURE 3.8 Structure d'un symbole OFDM.

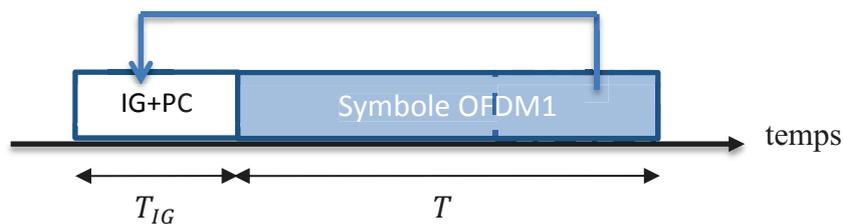


FIGURE 3.9 Ajout de l'intervalle de garde et du préfixe cyclique

Toutefois, contrairement au MSPSR passif, qui exploite des émissions d'opportunités de type OFDM qui présentent des intervalles de garde de tailles diverses, ici, les symboles OFDM sont pris identiques donc l'intervalle de garde n'est plus nécessaire. Et donc $\Delta = 0$. Cela améliore le comportement des fonctions d'ambiguïtés car aucun blanking de l'intervalle de garde n'est nécessaire à la réception pour éviter les ambiguïtés liées à la recopie d'une partie du signal. Et donc, à temps d'intégration donné plus d'énergie est intégrée.

3.3.1 Modulations étudiées

Nous avons étudié un certain nombre de types de modulations afin de moduler le spectre du signal OFDM :

- **Modulation QPSK, 16-QAM, 64-QAM [52]**

- *m-sequences* (codes à longueurs maximales) [29] [25] [30] [31] [32]
- Gold / Pseudo-Gold [29] [35] [34]
- Gold-Like [29]
- Gold orthogonaux [53]
- Kasami Small Set / Large Set [29] [36] [37]
- Legendre et Weil [38] [39]
- Bent [54] [55] [56] [57] [58] [59]
- No [40] [41] [42]
- TN [43]
- BBAG (Bruit Blanc Additif Gaussien)

Toutefois, dans la partie suivante nous allons seulement caractériser les signaux OFDM ayant donnés les meilleurs résultats c'est-à-dire ceux modulés par du QPSK ou des *m-séquences*.

3.3.2 Résultats de l'étude

Cette étude a montré que parmi les différentes modulations étudiées, les modulations QPSK et les *m-sequences* offraient les meilleures caractéristiques, à savoir :

- Une taille d'ensemble et une longueur de séquences satisfaisantes (TABLEAU 3.6) ;

TABLEAU 3.6 Longueur de séquences et cardinalité des signaux OFDM étudiés

Type de familles	Longueur des séquences	Cardinalité des familles
QPSK	N quelconque	4^N
<i>m-sequence</i>	$N = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}$	$\phi(2^n - 1)/n$

- Un spectre parfaitement contrôlé par construction des signaux OFDM ;

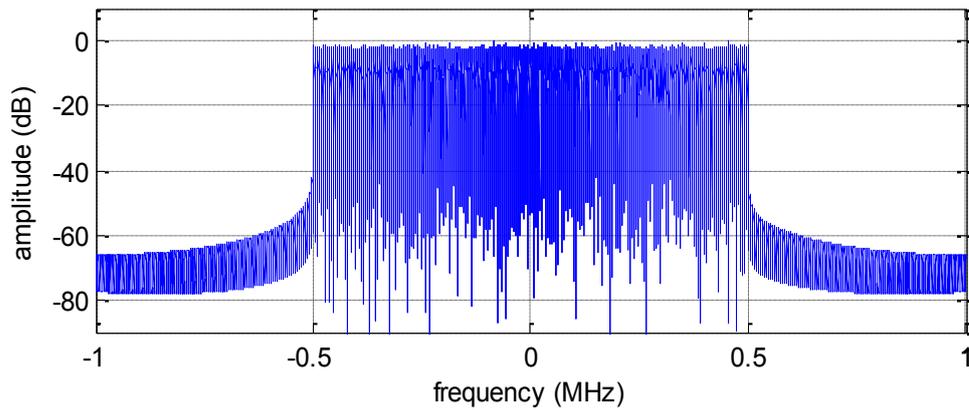


FIGURE 3.10 Exemple de spectre d'un signal OFDM modulé par une *m-séquence*.

- Un bon comportement des fonctions d'ambiguïtés périodiques (PAAF et PCAF, FIGURE 3.12 et FIGURE 3.13) semblables à celle d'un BBAG. Par contre la fonction d'autocorrélation possède une décroissance en sinus cardinal (comportement prévisible de par l'allure rectangulaire du spectre). Ce comportement en sinus cardinal implique une résolution distance à -3 dB de $0.886/T$ et un PSLR (*Peak Sidelobe Level Ratio*) de -13.4 dB qui devra être réduit par fenêtrage temporel.

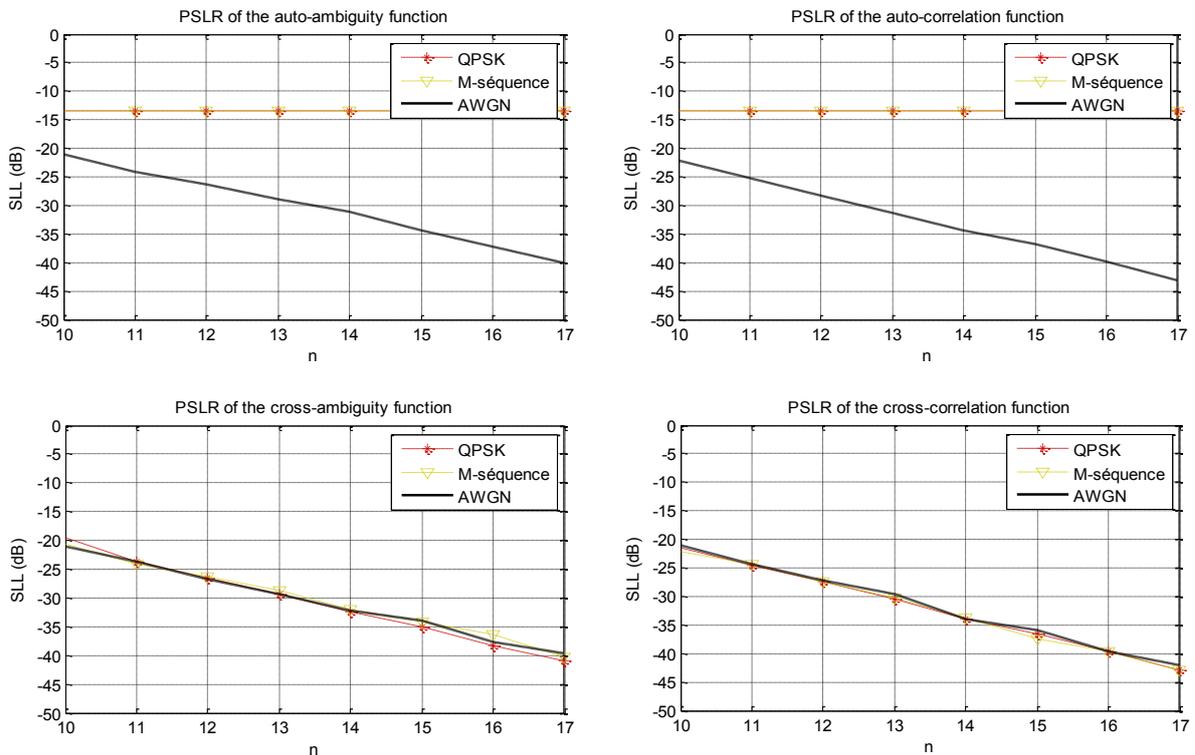


FIGURE 3.11 Evolution du PSLR de la PAAF (en haut à gauche), de la PCAF (en bas à droite), de la fonction d'autocorrélation périodique (en haut à droite) et de la fonction d'intercorrélacion (en bas à droite) en fonction de N en échelle logarithmique ($n = \log_2(N)$).

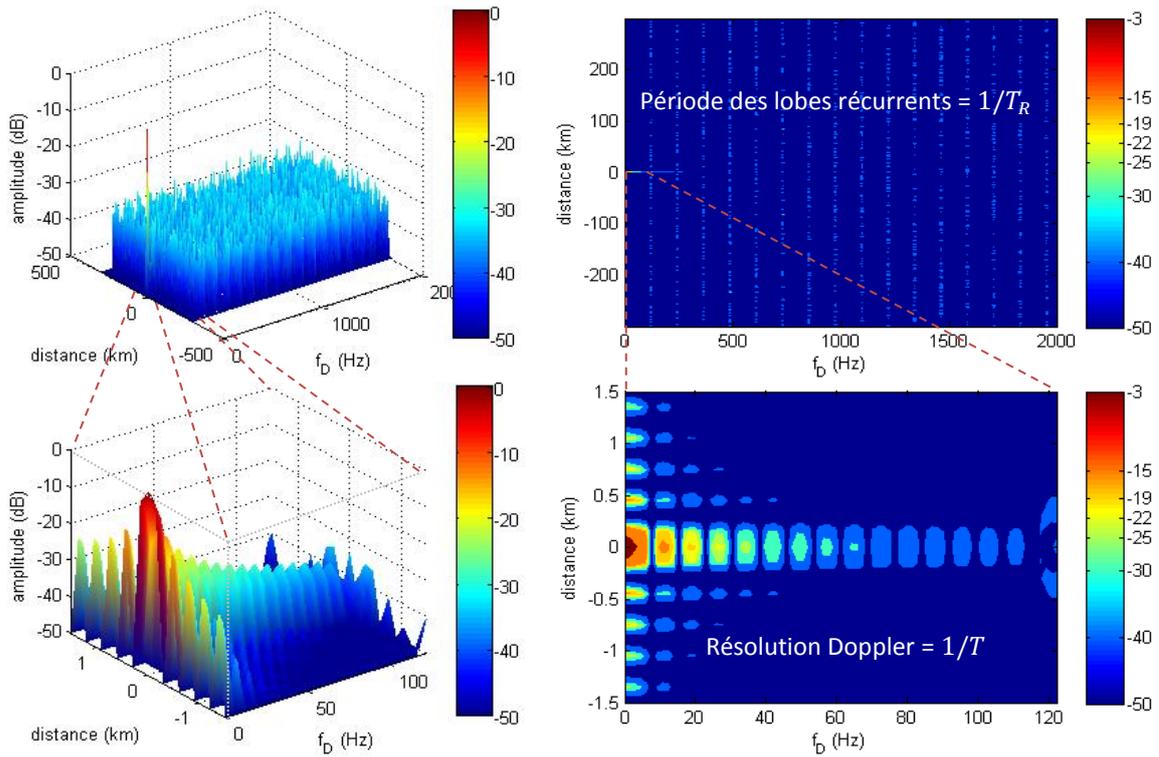


FIGURE 3.12 Exemple de PAAF d'un signal OFDM modulé par une m-séquence dans la configuration ($N = 2^{14} - 1 = 8191$, $K = 131072$, $N_{sym} = 16$, $T_{ech} = 1\mu s$).

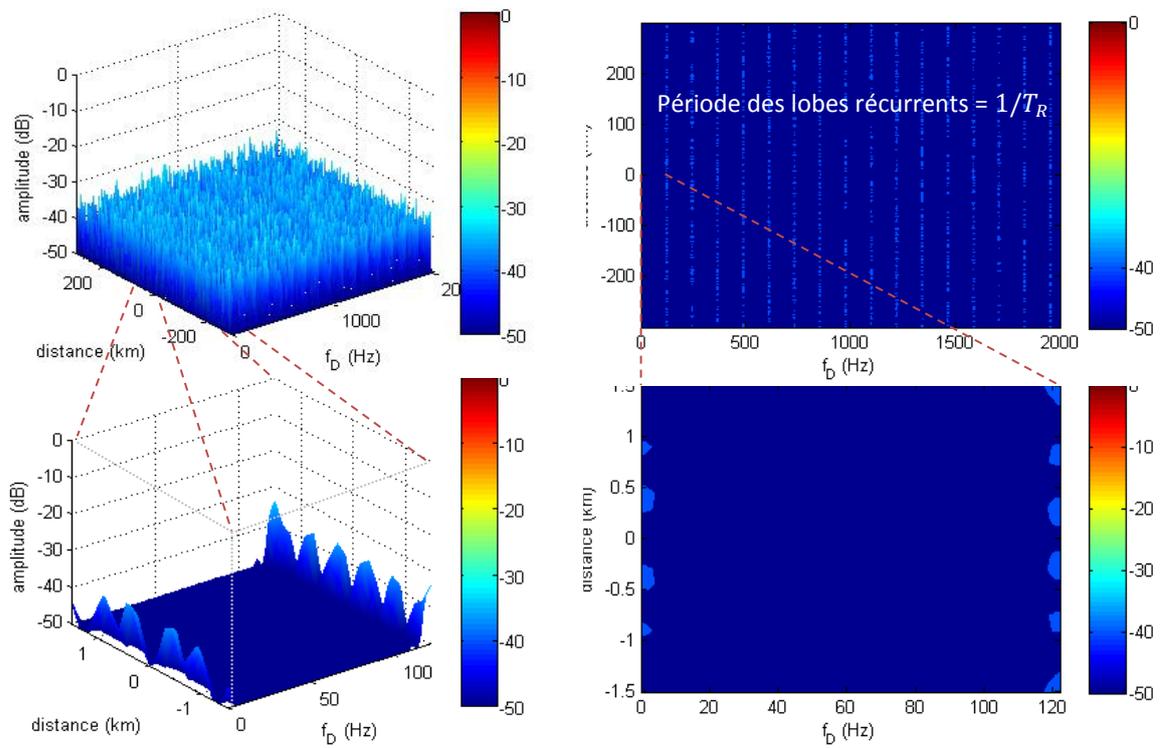


FIGURE 3.13 Exemple de PCAF d'un signal OFDM modulé par une m-séquence dans la configuration ($N = 2^{14} - 1 = 8191$, $K = 131072$, $N_{sym} = 16$, $T_{ech} = 1\mu s$)

Malgré les qualités des signaux OFDM, on voit apparaître (FIGURE 3.11, FIGURE 3.12 et FIGURE 3.13) une première contrainte associée au code OFDM : de forts lobes secondaires sur les fonctions d'auto-corrélation. Toutefois cela peut-être facilement corrigé à l'aide d'une pondération du spectre (Cf. ANNEXE A) :

- Soit directement à l'émission en pondérant le spectre de manière appropriée,
- Soit en réception en réalisant un filtrage désadapté.

Une autre contrainte – et des plus importantes – est celle sur la fluctuation de l'enveloppe temporelle. En effet, les signaux OFDM générés par l'intermédiaire de ces modulations ont une enveloppe non constante globalement très fluctuante (PAPR non nul, en dB, voir TABLEAU 3.7). Cela impose un certain recul du point de compression (*back-off*) afin de conserver un fonctionnement linéaire de l'amplificateur de puissance sur toute la plage du signal. De fait, l'amplificateur de puissance ne fonctionne plus en régime saturé et donc perd naturellement en puissance.

Toutefois il est appréciable d'observer dans la pratique une diminution naturelle du PAPR lorsque le signal OFDM modulé par une *m-sequence* est pondéré en fréquence. Cela nous permet alors d'obtenir des séquences dont les propriétés sont satisfaisantes avec un PAPR autour de 4 dB.

TABLEAU 3.7 Evolution du PAPR des signaux OFDM sélectionnés

Type de familles	PAPR moyen des signaux OFDM
QPSK	$\sim 0.31n + 5.2$
m-sequence	$\sim 0.18n + 4.2$
BBAG	$\sim 0.31n + 5.2$

n	QPSK (dB)	M-sequence (dB)	BBAG (dB)
10	9.5	6.5	9.0
11	10.0	6.8	9.5
12	10.5	7.1	10.0
13	11.0	7.4	10.5
14	11.5	7.7	11.0
15	12.0	8.0	11.5
16	12.5	8.3	12.0

Pour cette dernière raison, la famille de signaux OFDM modulés par une *m-sequence* semble être la meilleure famille parmi les codes OFDM étudiés. Elle sera donc une référence par la suite avec les familles de Kasami *Small Set*, No et TN.

3.4 Etudes des algorithmes existants

Suite à l'état de l'art portant sur les familles de codes existantes (Cf. Parties 3.2 et 3.3), nous allons dorénavant étudier les méthodes d'optimisation connues permettant la génération de familles de codes.

De nombreuses méthodes ont été développées afin de répondre à la problématique multi-utilisateurs. Ainsi un grand nombre de travaux ont porté sur l'optimisation de familles de séquences permettant de minimiser le niveau des lobes secondaires des fonctions d'autocorrélations et d'intercorrélations [60] [61] [62] [63] [64]. Ces recherches ont été motivées par la difficulté que représente la minimisation des lobes secondaires de ces fonctions. En effet, il est d'usage d'utiliser la métrique ISL lorsque l'on cherche à minimiser les niveaux des lobes secondaires. Or, la recherche de séquences polyphases ou à PAPR contrôlé minimisant cette énergie n'est pas une tâche aisée car on se confronte alors à un problème non-convexe fortement multi-modal.

Une première approche pour résoudre ce problème est de rechercher le minimum global en brute-force en parcourant tout l'espace de manière exhaustive. Ce type de méthode est employé pour optimiser de petites séquences ayant un petit alphabet, typiquement des séquences binaires. En effet, dans le cas de codes binaires, la méthode doit évaluer tout l'espace à savoir 2^N séquences (de manière générale cela dépend de la taille de l'alphabet, si celui-ci contient 10 phases alors l'ensemble se compose de 10^N séquences). Ainsi, le coût calculatoire devient très vite trop important pour permettre l'utilisation de tel algorithme pour de grandes longueurs de séquences (e.g., supérieure à 100 éléments dans le cas binaire). D'autres algorithmes de recherches exhaustives [65] permettent de réduire l'espace à évaluer (e.g., *Branch and Bound* et *Tree search* [66]), toutefois, leur utilisation reste limitée à de petites longueurs de séquences.

Il existe, aussi, les méthodes stochastiques. Ces méthodes sont utilisées pour générer des familles de codes quasi-orthogonaux pour de petites tailles de séquences, comme par exemple les méthodes de recuit simulé. Ces derniers algorithmes (Cf. [67], [68]), largement étudiés dans la littérature, sont connus pour converger vers le minimum global de la fonction de coût [69]. Ils ont d'ailleurs été utilisés pour minimiser la métrique ISL [62] [63] [64]. Toutefois, la charge calculatoire de ces algorithmes explose avec l'augmentation de la taille des séquences N . En particulier, de tels algorithmes deviennent difficilement efficaces lorsque $N \sim 10^3$ ou plus.

Parallèlement à ces méthodes, il existe des algorithmes permettant de converger vers le minimum local le plus proche (et non plus le maximum global). Par exemple, les algorithmes de descentes du gradient [14], et les algorithmes cycliques [3] convergent assez efficacement vers des minima locaux. A contrario des précédentes méthodes, ces algorithmes peuvent être utilisées pour optimiser de plus longues séquences. Ainsi, elles représentent des méthodes d'intérêt, d'autant plus que les solutions obtenues donnent de bonnes propriétés de corrélations.

3.5 Conclusion

En conclusion, quatre familles seront prises comme références à savoir :

- Les familles de codes Pseudo-Aléatoires de *Small Set* de Kasami, de No, et de TN ;
- Et la famille des signaux OFDM modulés par des *m-sequences*.

Toutefois, il est intéressant de faire les observations suivantes :

- Premièrement, les deux études menées durant ce Chapitre ont montré des limites avec des problèmes d'efficacité spectrale pour l'une et des problèmes de PAPR pour l'autre. Or, adresser ces problèmes engendrent irrévocablement des pertes.
- Ensuite, on peut noter que, pour l'ensemble de ces familles, on obtient un bon PSLR sur tout le domaine non-ambigüe, domaine généralement très grand devant la zone de surveillance radar (Cf. Chapitre 4 et Chapitre 5).

Enfin, au regard des algorithmes étudiés dans cette partie, la suite du manuscrit va étendre les algorithmes cycliques et les algorithmes du gradient à notre cas d'application afin de générer des séquences adaptées à des systèmes MSPSR actifs.

Chapitre 4. ALGORITHMES CYCLIQUES

Jusqu'à présent, nous avons étudié des familles de séquences connues telles que :

- Les codes pseudo-aléatoires empruntés aux ensembles du *Small Set* de Kasami, No et TN.
- Et ceux de type codes OFDM modulés par des *m-séquences*.

Or il a pu être observé que ces familles ne répondaient pas totalement à l'ensemble des critères établis dans le Chapitre 2

En particulier, ces familles de codes ont un bon PSLR sur tout le domaine non-ambiguë alors, qu'en pratique, le domaine d'intérêt est largement plus petit que ce domaine. Ainsi, il est tout naturel de se demander si optimiser localement dans la zone d'intérêt du radar ne permettrait pas d'atteindre de meilleurs performances (Objectif 1).

Ensuite, on a pu remarquer que ces familles montraient des limites avec des problèmes d'efficacité spectrale pour l'un et des problèmes de PAPR pour l'autre. Or, adresser ces problèmes engendre irrévocablement des pertes. Par conséquent, il est aussi d'intérêt de pouvoir contrôler ces deux critères lors de l'optimisation des familles de formes d'ondes (Objectif 2).

Ce chapitre tente de répondre à ces questionnements en **étendant en partie les travaux de Hao He, Petre Stoica et Jian Li** dans [3] [70] [71] [72] au **cas d'une famille de séquences**.

Pour ce faire, une première approche consiste à définir une fonction de coût permettant d'optimiser localement les fonctions d'ambiguïté d'une famille de séquences afin de relâcher les contraintes sur le système. Ensuite, une seconde étude a été menée pour pouvoir contrôler à la fois le PAPR des séquences et le spectre des ces dernières.

4.1 Optimisation locale des fonctions d'ambiguïtés

Dans cette première partie sera donné une méthode permettant d'optimiser localement les fonctions d'ambiguïté tant dans le cas périodique que dans le cas apériodique.

L'origine de cette méthode part du constat que les deux précédentes études donnent de bons niveaux de lobes secondaires sur un domaine largement supérieur au domaine d'application du système radar.

Par exemple pour une bande passante $B = 1 \text{ MHz}$, soit un temps d'échantillonnage $T_{ech} = \frac{1}{B} = 1 \mu\text{s}$, les séquences du *Small Set* de Kasami de longueur $N = 2^n - 1 = 2^{16} - 1$ ont un PSLR avoisinant -42 dB sur la totalité du domaine non-ambigu :

$$\{[-N + 1 : N - 1]T_{ech}c\} \times \left\{ [-N + 1 : N - 1] \frac{1}{NT_{ech}} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \sim [-20000 \text{ km} : 20000 \text{ km}] \times [-1 \text{ MHz} : 1 \text{ MHz}]$$

Or, dans le cadre d'une application radar, le domaine d'intérêt est souvent beaucoup plus petit. Car en pratique, les fréquences Doppler observées sont bien plus petites que la bande passante du signal émis, et les radars visées par l'application MSPSR ont rarement une aussi longue portée.

A titre d'exemple, dans le cadre d'une application radar en bande L ($\lambda = 0.3 \text{ m}$) où la forme d'onde occupe une bande passante de $B = 1 \text{ MHz}$, si l'on considère que la vitesse maximale observable est de $v_{max} = 300 \text{ m/s}$ alors cela correspond dans le pire des cas à une fréquence Doppler maximale observable de $f_{Dmax} = \frac{2v_{max}}{\lambda} = 2 \text{ kHz}$. Il vient alors que la plage Doppler d'intérêt est de $[-2f_{Dmax} : 2f_{Dmax}] = [-263 : 263] \frac{1}{NT_{ech}}$ (le coefficient 2 intervient pour éviter qu'une cible ayant un Doppler de 2 kHz perturbe une cible ayant un doppler de -2 kHz). De la même manière, si le radar a une portée bistatique R de 150 km alors la plage d'étude en distance est de $[-2R : 2R] = [-1000 : 1000]T_{ech}c$. De fait, on observe bien que le domaine d'intérêt est largement inférieur au domaine couvert par l'exemple précédent :

$$[-1000 : 1000]T_{ech}c \times [-263 : 263] \frac{1}{NT_{ech}}$$

$$\Leftrightarrow [-300 \text{ km} : 300 \text{ km}] \times [-4 \text{ kHz} : 4 \text{ kHz}]$$

Par conséquent, l'optimisation locale sur une petite zone d'intérêt devant la taille du domaine non-ambigu devrait permettre d'obtenir de meilleurs niveaux de lobes secondaires sur cette zone précise, en répartissant l'énergie sur les domaines de non-intérêt (FIGURE 4.1).

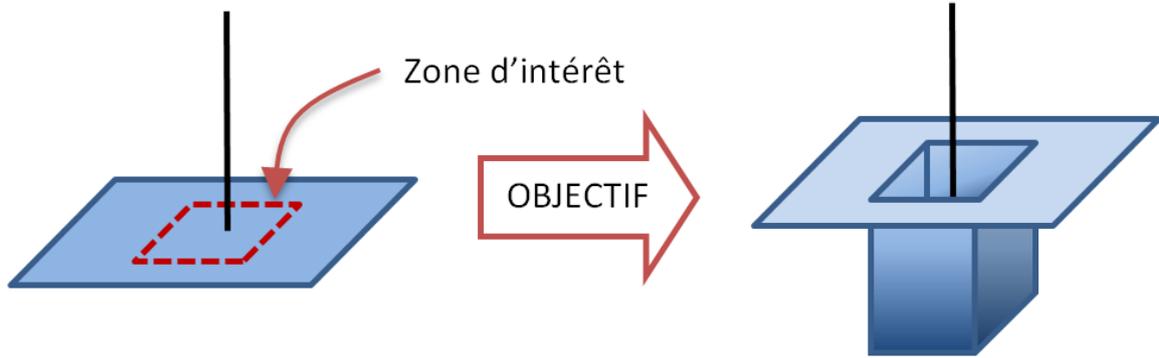


FIGURE 4.1 Objectif d'optimisation sur les fonctions d'ambiguïtés.

Afin de réaliser cette optimisation, cette partie étend les travaux de Hao He, Petre Stoica et Jian Li dans [3] [70] [71] [72] au cas d'une famille de séquences.

4.1.1 Objectifs et Notations

Dans cette partie, nous allons optimiser les fonctions d'ambiguïtés d'une famille de M séquences tant dans le cas apériodiques (AAF et CAF) que périodique (PAAF et PCAF). Afin de conserver une certaine clarté tout au long de cette partie, nous allons introduire les principales notations utilisées ici.

Définissons tout d'abord le signal temporel $u_m(t)$ qui sera modulé par la $m^{\text{ième}}$ séquence optimisée $x_m(n)$ de longueur N et mis en forme par le filtre numérique $p_{T_{ech}}(t)$ de durée T_{ech} . Il est important de noter que ce signal se dote de propriétés particulières selon la périodicité de ce dernier. Ainsi si $u_m(t)$ est périodique $x_m(n + N) = x_m(n)$, et dans le cas contraire $x_m(n) = 0$ pour tout n plus grand que N . De manière générale il vient que:

$$u_m(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_m(n)p_n(t); \quad (4.1.1)$$

où : $p_n(t) = p_{T_{ech}}(t - (n - 1)T_{ech})$ et $p_{T_{ech}}(t) = 0$ si $t > T_{ech}$ ou $t < 0$.

Définissons aussi les M séquences que l'on cherche à optimiser $\{x_m(n)\}_{m=1}^M$:

$$x_m(n) = \rho_m(n)e^{j\phi_m(n)} \quad n \in \llbracket 1 : N \rrbracket. \quad (4.1.2)$$

Ces séquences sont soumises à un certain nombre de contraintes telles que :

- Une énergie constante, valant N , pour chaque séquence :

$$\sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N \quad \forall m. \quad (4.1.3)$$

- Une enveloppe temporelle respectant un certain Peak-to-Average Power Ratio (PAPR) ρ_{PAPR} pour chaque séquence :

$$PAPR(x_m) \leq \rho_{PAPR} \quad \forall m; \quad (4.1.4)$$

$$\text{où : } PAPR(x) = \frac{\max(|x(n)|^2)}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x(n)|^2} = \max(|x(n)|^2) = \max(\rho(n)^2).$$

- Et, si le signal est périodique :

$$x_m(n) = x_m(n + N) \quad \forall m. \quad (4.1.5)$$

Sinon $x_m(n) = 0$ pour tout n plus grand que N .

En résumé on recherche $x_m(n)$ telle que :

$$x_m(n) = \rho_m(n)e^{j\phi_m(n)}$$

tel que

$$\begin{cases} n \in \llbracket 1 : N \rrbracket \text{ et } m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \\ \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N, \forall m \\ PAPR(x_m) \leq \rho_{PAPR}, \forall m \\ x_m(n) = x_m(n + N), \forall m \quad \text{si périodique} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

A partir de là et en développant la définition de la fonction d'ambiguïté croisée tant apériodique (CAF) que périodique (PCAF), on peut montrer que sur la grille $\tau = kT_{ech}$ avec $k \in \mathcal{K}$, et $f_D = \frac{p}{NT_{ech}}$ avec $p \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{K} = \llbracket -K + 1 : K - 1 \rrbracket$ et $\mathcal{P} = \llbracket -P + 1 : P - 1 \rrbracket$ sont les index relatifs à la région d'intérêt), si $p_{T_{ech}}(t)$ est un filtre porte, on a :

$$\left| \chi_{m_1, m_2} \left(kT_{ech}, \frac{p}{NT_{ech}} \right) \right| \approx |r_{m_1, m_2}(k, p)|; \quad (4.1.7)$$

si $|p| \ll N$

où : $r_{m_1, m_2}(k, p) = \sum_{n=1}^N x_{m_1}^*(n - k)x_{m_2}(n) e^{-j2\pi \frac{pn}{N}}$ correspond à la CAF/PCAF Discrète associée à la paire $u_{m_1}(t)$ et $u_{m_2}(t)$.

En pratique, la condition $|p| \ll N$ est souvent vérifiée car la bande passante est sensiblement plus grande que le Doppler maximum observable ($|f_D| \ll B \Leftrightarrow \left| \frac{p}{NT_{ech}} \right| \ll \frac{1}{T_{ech}} \Leftrightarrow \left| \frac{p}{N} \right| \ll 1$).

A partir de là, l'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté a périodiques ou périodiques sur la grille que l'on s'est donnée consiste à optimiser localement l'AAF discrète et la CAF discrète, respectivement, la PAAF discrète et la PCAF discrète. Or comme son homologue continue, les fonctions d'ambiguïtés vérifient les mêmes propriétés, à savoir :

- Les propriétés de symétrie :

$$\begin{aligned} |r_{m_1, m_2}(k, p)| &= |r_{m_2, m_1}(-k, -p)|; \\ |r_{m_1, m_2}(-k, p)| &= |r_{m_2, m_1}(k, -p)|. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

- La propriété de volume constant si $\forall m, \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N$:

$$\sum_{k=-N+1}^{N-1} \sum_{p=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} |r_{m_1, m_2}(k, p)|^2 = N^3. \quad (4.1.9)$$

- Et dans le cas périodique, la propriété de périodicité selon l'axe distance :

$$|r_{m_1, m_2}(k + N, p)| = |r_{m_1, m_2}(k, p)|. \quad (4.1.10)$$

En résumé, le design des séquences $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$ doit permettre de minimiser les fonctions d'ambiguïtés discrètes sur la zone d'intérêt autour de l'origine. Cela peut se traduire par le critère de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}} C &= \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{p \in \mathcal{P}} |r_{m_1, m_2}(k, p) - r_{expected}^{m_1, m_2}(k, p)|^2; \\ \text{tel que} &\begin{cases} x_m(n) = \rho_m(n) e^{j\phi_m(n)} \\ n \in \llbracket 1 : N \rrbracket \text{ et } m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \\ \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N, \forall m \\ PAPR(x_m) \leq \rho_{PAPR}, \forall m \\ x_m(n) = x_m(n + N), \forall m \text{ si périodique} \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

où : $\mathcal{K} = \llbracket -K + 1 : K - 1 \rrbracket$ et $\mathcal{P} = \llbracket -P + 1 : P - 1 \rrbracket$ sont les index relatifs à la région d'intérêt.

$r_{expected}^{m_1, m_2}(k, p)$ correspond au comportement attendu sur la région d'intérêt de l'AF discrète de la paire $u_{m_1}(t)$ et $u_{m_2}(t)$.

4.1.2 Méthode de minimisation

Afin de minimiser localement et conjointement les fonctions d'ambiguïtés discrètes sur une certaine région d'intérêt ($\mathcal{K} = \llbracket -K + 1 : K - 1 \rrbracket$ et $\mathcal{P} = \llbracket -P + 1 : P - 1 \rrbracket$), on définit pour chaque séquence de la famille un ensemble de P séquences $\{x_{m,p}(n)\}_{n=1, m=1, p=1}^{N, M, P}$ où chaque séquence correspond à une fréquence Doppler positive de la région d'intérêt :

$$x_{m,p}(n) = x_m(n) e^{j2\pi \frac{(p-1)n}{N}}$$

$$\text{avec } \begin{cases} 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq m \leq M \\ 1 \leq p \leq P \end{cases} \quad (4.1.12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ x_{m,p}(n) = x_{m,p}(n + N), \forall m \end{array} \right\} \text{ si périodique}$$

Soit $\{r_{m_1, p_1, m_2, p_2}(k)\}$ la fonction de corrélation de $\{x_{m_1, p_1}(n)\}$ et $\{x_{m_2, p_2}(n)\}$:

$$\begin{aligned} r_{m_1, p_1, m_2, p_2}(k) &= \sum_{n=1}^N x_{m_2, p_2}(n) x_{m_1, p_1}^*(n - k) \\ &= \sum_{n=1}^N x_{m_2}(n) e^{j2\pi \frac{(p_2-1)n}{N}} x_{m_1}^*(n - k) e^{-j2\pi \frac{(p_1-1)n}{N}} \\ &= \sum_{n=1}^N x_{m_2}(n) x_{m_1}^*(n - k) e^{-j2\pi \frac{(p_1-p_2)n}{N}} \\ &= r_{m_1, m_2}(k, p_1 - p_2). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Le précédent développement montre que les valeurs de $\{r_{m_1, m_2}(k, p)\}$ que l'on souhaite minimiser (pour $k \in \mathcal{K}$, $p \in \mathcal{P}$ et $(m_1, m_2) \in \llbracket 1 : M \rrbracket^2$) sont comprises dans l'ensemble des produits de corrélation $\{r_{m_1, p_1, m_2, p_2}(k)\}$ (pour $k \in \mathcal{K}$, $(p_1, p_2) \in \{1, \dots, P\}^2$ et $(m_1, m_2) \in \llbracket 1 : M \rrbracket^2$).

REMARQUE 4.1.1 : Il n'est pas nécessaire que p_1 et p_2 parcourent tous les entiers compris entre 1 et P pour couvrir toutes les valeurs possibles de $\{r_{m_1, m_2}(k, p)\}_{k \in \mathcal{K}, p \in \mathcal{P}}$. (Cf. les travaux sur les *Minimum Redundancy Array* – MRA, [73] [74] [75] [76]). Par exemple pour

$P = 7$, $\{r_{m_1, p_1, m_2, p_2}(k)\}$ pour $(p_1, p_2) \in \{1, 2, 5, 7\}^2$ couvrent toutes les valeurs possibles de $\{r_{m_1, m_2}(k, p)\}_{k \in \mathcal{K}, p \in \mathcal{P}}$ où $p \in \llbracket 0 : 6 \rrbracket$.

Par conséquent, la minimisation des produits de corrélation des $\{x_{m,p}(n)\}_{n=1, m=1, p=1}^{N, M, P}$ est équivalent à la minimisation locale des AF discrètes sur la région d'intérêt, soit la minimisation du critère C (Equation (4.1.11)).

Ainsi, en définissant la matrice \mathbf{X} , matrice permettant de prendre en compte les différents décalages distances concernés par la région d'intérêt pour chaque séquence $\{x_{m,p}(n)\}_{n=1, m=1, p=1}^{N, M, P}$, telle que :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_{1,1} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{1,P} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{M,1} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{M,P}]; \quad (4.1.14)$$

avec :

$$\mathbf{X}_{m,p} = \begin{bmatrix} x_{m,p}(1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & x_{m,p}(1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & x_{m,p}(1) \\ x_{m,p}(N-1) & \vdots & & \vdots \\ x_{m,p}(N) & x_{m,p}(N-1) & & \vdots \\ 0 & x_{m,p}(N) & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & x_{m,p}(N-1) \\ 0 & & 0 & x_{m,p}(N) \end{bmatrix}_{(N+K-1) \times K} \quad \text{si aperiodique ; } (4.1.15)$$

$$\mathbf{X}_{m,p} = \begin{bmatrix} x_{m,p}(1) & x_{m,p}(N) & \dots & x_{m,p}(N-K+2) \\ \vdots & x_{m,p}(1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x_{m,p}(N) \\ \vdots & \vdots & & x_{m,p}(1) \\ x_{m,p}(N-1) & \vdots & & \vdots \\ x_{m,p}(N) & x_{m,p}(N-1) & \dots & x_{m,p}(N-K+1) \end{bmatrix}_{N \times K} \quad \text{si périodique. } (4.1.16)$$

où $\{x_{m,p}(n)\}_{n=1, m=1, p=1}^{N, M, P}$ est défini en (4.1.12),

on peut remarquer que le produit matriciel $\mathbf{X}^H \mathbf{X}$ fait apparaître tous les $\{|r_{m_1, p_1, m_2, p_2}(k)|\}$ (pour $k \in \mathcal{K}$, $(p_1, p_2) \in \{1, \dots, P\}^2$ et $(m_1, m_2) \in \llbracket 1 : M \rrbracket^2$) :

$$\mathbf{X}^H \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,1}^H \mathbf{X}_{1,1} & \dots & \dots & \mathbf{X}_{1,1}^H \mathbf{X}_{1,P} & \mathbf{X}_{1,1}^H \mathbf{X}_{M,1} & \dots & \dots & \mathbf{X}_{1,1}^H \mathbf{X}_{M,P} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{X}_{1,P}^H \mathbf{X}_{1,1} & \dots & \dots & \mathbf{X}_{1,P}^H \mathbf{X}_{1,P} & \mathbf{X}_{1,P}^H \mathbf{X}_{M,1} & \dots & \dots & \mathbf{X}_{1,P}^H \mathbf{X}_{M,P} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{X}_{M,1}^H \mathbf{X}_{1,1} & \dots & \dots & \mathbf{X}_{M,1}^H \mathbf{X}_{1,P} & \mathbf{X}_{M,1}^H \mathbf{X}_{M,1} & \dots & \dots & \mathbf{X}_{M,1}^H \mathbf{X}_{M,P} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{X}_{M,P}^H \mathbf{X}_{1,1} & \dots & \dots & \mathbf{X}_{M,P}^H \mathbf{X}_{1,P} & \mathbf{X}_{M,P}^H \mathbf{X}_{M,1} & \dots & \dots & \mathbf{X}_{M,P}^H \mathbf{X}_{M,P} \end{bmatrix}_{KPM \times KPM} ; \quad (4.1.17)$$

où :

$$\mathbf{X}_{m,p}^H \mathbf{X}_{l,q} = \begin{bmatrix} r_{m,p,l,q}(0) & r_{m,p,l,q}^*(1) & \dots & \dots & r_{m,p,l,q}^*(K-1) \\ r_{m,p,l,q}(1) & r_{m,p,l,q}(0) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & r_{m,p,l,q}^*(1) \\ r_{m,p,l,q}(K-1) & r_{m,p,l,q}(K-2) & \dots & \dots & r_{m,p,l,q}(0) \end{bmatrix}_{K \times K} ; \quad (4.1.18)$$

avec $r_{m,p,l,q}^*(k) = r_{l,q,m,p}(-k)$.

On remarque aussi que, d'après la contrainte sur l'énergie en (4.1.3), $r_{m,p,m,p}(0) = \sum_{n=1}^N |x_{m,p}(n)|^2 = \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N$ donc les éléments diagonaux de $\mathbf{X}^H \mathbf{X}$ valent N .

Suite à ces observations, la minimisation des produits de corrélation des $\{x_{m,p}(n)\}_{n=1, m=1, p=1}^{N, M, P}$ peut être réalisée par la minimisation du critère suivant :

$$\min_{\mathbf{X}} \hat{C} = \|\mathbf{X}^H \mathbf{X} - N(\mathbf{I}_{KPM} + \mathbf{R})\|_F^2. \quad (4.1.19)$$

où: \mathbf{R} représente la matrice des valeurs attendues pour les produits de corrélation croisée. Cette matrice se compose des $r_{expected}^{m1, m2}(k, p)$ (coefficients relatifs au comportement attendu sur la région d'intérêt de l'AF discrète de la paire $u_{m1}(t)$ et $u_{m2}(t)$) ;

$\|\cdot\|_F$ représente la norme de Frobenius. ($\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 = Tr(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$).

REMARQUE 4.1.2 : Dans les travaux de Hao He, Petre Stoica et Jian Li [3], l'optimisation cherche à obtenir des AF discrètes à zéros dans la zone d'intérêt (hors origine pour l'AAF). Le critère de minimisation devient donc :

$$\min_{\mathbf{X}} \hat{C} = \|\mathbf{X}^H \mathbf{X} - N(\mathbf{I}_{KPM})\|_F^2.$$

Dans le cas où l'on cherche à atteindre un certain niveau des lobes secondaires r_0 , on définit la matrice \mathbf{R} comme suit :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & & r_0 \\ & \ddots & \\ r_0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Et dans le cas où l'on cherche à borner le niveau des lobes secondaires par r_0 , alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1:KPM \rrbracket$:

$$[\mathbf{R}]_{ij} = \begin{cases} [\mathbf{X}^H \mathbf{X}]_{ij} & \text{si } |[\mathbf{X}^H \mathbf{X}]_{ij} - r_0| < 0 \\ \frac{[\mathbf{X}^H \mathbf{X}]_{ij}}{|[\mathbf{X}^H \mathbf{X}]_{ij}|} r_0 & \text{si } |[\mathbf{X}^H \mathbf{X}]_{ij} - r_0| \geq 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas, \mathbf{R} est hermitienne (auto-adjointe) c'est à dire que $\mathbf{R}^H = \mathbf{R}$.

Toutefois cette dernière équation (4.1.19) est une fonction quartique de $\{x_{m,p}(n)\}_{n=1,m=1,p=1}^{N,M,P}$.

Et donc, au lieu de minimiser (4.1.19), nous allons plutôt chercher à minimiser l'équation suivante, dont la forme est quadratique :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}, \mathbf{U}} \hat{C}_1 &= \|\mathbf{X} - \sqrt{N} \mathbf{U}\|_F^2 \\ \text{tel que} & \begin{cases} \mathbf{U}^H \mathbf{U} = (\mathbf{I}_{KPM} + \mathbf{R}) \quad (\mathbf{U} \text{ de même dimension que } \mathbf{X}) \\ PAPR(x_m) \leq \rho_{PAPR} \quad \text{avec } 1 \leq m \leq M \\ x_{m,p}(n) = x_m(n) e^{j2\pi \frac{(p-1)n}{N}} \quad \text{avec } \begin{cases} 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq m \leq M \\ 1 \leq p \leq P \end{cases} \\ x_m(n) = x_m(n + N), \forall m \quad \text{si périodique} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Les équations (4.1.19) et (4.1.20) sont « quasi-équivalentes » au sens que leur minimisation est susceptible de donner des signaux ayant les mêmes propriétés de corrélation [77] [3].

Contrairement à (4.1.19), ce problème de minimisation (4.1.20) peut être résolu par l'intermédiaire d'un algorithme cyclique.

Cet algorithme cyclique se décompose en plusieurs étapes.

4.1.2.1 Détermination de \mathbf{U} sachant \mathbf{X}

La première étape consiste à déterminer \mathbf{U} sachant \mathbf{X} qui minimise \hat{C}_1 . Or :

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{U} \text{ sachant } \mathbf{X}} \hat{C}_1 &= \min_{\mathbf{U} \text{ sachant } \mathbf{X}} \text{Tr} \left((\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U})^H (\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U}) \right) \\
&= \min_{\mathbf{U} \text{ sachant } \mathbf{X}} \left[\text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{X}) + N \text{Tr}(\mathbf{U}^H \mathbf{U}) - 2\sqrt{N} \text{Re}(\text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{U})) \right] \\
&= \min_{\mathbf{U} \text{ sachant } \mathbf{X}} \left[2NKPM - 2\sqrt{N} \text{Re}(\text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{U})) \right].
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Ainsi la minimisation de $\|\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U}\|_F^2$ sachant \mathbf{X} consiste à maximiser la trace de $\mathbf{X}^H \mathbf{U}$.

Et par l'intermédiaire de la décomposition en valeur singulière compacte (*Singular Value Decomposition* – SVD) de \mathbf{X}^H :

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{S} \mathbf{U}_2^H = \mathbf{X}^H; \tag{4.1.22}$$

où : \mathbf{U}_1 une matrice unitaire ;

\mathbf{U}_2 une matrice semi-unitaire ;

\mathbf{S} une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs singulières de \mathbf{X}^H ;

on peut déterminer une borne inférieure au problème de minimisation :

$$\|\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U}\|_F^2 \geq 2NKPM - 2\sqrt{N} \sum_{k=1}^{KPM} (1 + [\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk})^{1/2} \mathbf{S}_{kk}. \tag{4.1.23}$$

Preuve : Voir ANNEXE B.

Dans le cas où l'on cherche à minimiser à zéro les lobes secondaires ($\mathbf{R} = \mathbf{0}_{KPM}$), une solution évidente vérifiant $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_{KPM}$ et donnant l'égalité de (4.1.23) est donnée par :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \tag{4.1.24}$$

Par contre, lorsque $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}_{KPM}$, on a trouvé une autre solution approchée (ne donnant pas l'égalité dans (4.1.23)) qui est :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \left(\mathbf{I}_{KPM} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \right) \tag{4.1.25}$$

Cette solution s'approche de $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = (\mathbf{I}_{KPM} + \mathbf{R})$ car :

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^H \mathbf{U} &= \left(\mathbf{I}_{KPM} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \right)^H \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^H \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \left(\mathbf{I}_{KPM} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \right) \\
&= \mathbf{I}_{KPM} + \frac{1}{4} \mathbf{R}^H \mathbf{R} + \frac{1}{2} (\mathbf{R} + \mathbf{R}^H)
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Or \mathbf{R} est hermitienne ($\mathbf{R}^H = \mathbf{R}$) et ses coefficients sont de modules très petits devant 1 car ils représentent le niveau des lobes secondaires relativement au maximum qui vaut 1. Par exemple si l'on recherche un niveau de lobes secondaires de -40 dB, cela correspond à $[\mathbf{R}]_{i,j} \leq 0.01 \forall (i,j) \in \llbracket 1:KPM \rrbracket$ qui est bien très petit devant 1. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^H + \mathbf{R} &= 2\mathbf{R} \\ [\mathbf{R}^H \mathbf{R}]_{kk} &\ll [\mathbf{R}]_{kk} \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Ces remarques permettent alors de montrer que (4.1.26) est presque égale à (4.1.23) :

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} \approx \mathbf{I}_{KPM} + \mathbf{R} \quad (4.1.28)$$

Par contre cette solution ne permet pas d'atteindre la borne inférieure trouvée en (4.1.23) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U}\|_F^2 &= 2NKPM - 2\sqrt{N} \sum_{k=1}^{KPM} \left(1 + \frac{1}{2} [\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk}\right) \mathbf{S}_{kk} \\ &\geq 2NKPM - 2\sqrt{N} \sum_{k=1}^{KPM} (1 + [\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk})^{1/2} \mathbf{S}_{kk} \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Toutefois en pratique, $[\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk}$ est petit devant 1, et donc à l'aide d'un développement à l'ordre 1 que $(1 + [\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk})^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} [\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk} + o([\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk}^2)$, on peut remarquer que la solution proposée s'approche grandement de la borne inférieure trouvée.

4.1.2.2 Détermination de \mathbf{X} sachant \mathbf{U}

La seconde étape consiste à déterminer \mathbf{X} sachant \mathbf{U} . Or d'après (4.1.21), il vient que minimiser $\|\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U}\|_F^2$ sachant \mathbf{U} consiste à maximiser la partie réelle de la trace de $\mathbf{X}^H \mathbf{U}$:

$$Re(\text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{U})) = Re\left(\sum_{k=1}^{KPM} [\mathbf{X}^H \mathbf{U}]_{kk}\right) \quad (4.1.30)$$

4.1.2.2.1 Cas apériodique

Or d'après (4.1.14) – (4.1.15) :

$$\mathbf{X}^H = \begin{bmatrix} x_{1,1}^*(1) \dots x_{1,1}^*(N) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_{1,1}^*(1) \dots x_{1,1}^*(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,P}^*(1) \dots x_{1,P}^*(N) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_{1,P}^*(1) \dots x_{1,P}^*(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{M,P}^*(1) \dots x_{M,P}^*(N) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_{M,P}^*(1) \dots x_{M,P}^*(N) \end{bmatrix}_{KPM \times (N+K-1)} \quad (4.1.31)$$

si on note $\mathbf{U} = \{u_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{N+K-1,KPM}$ alors :

$$[\mathbf{X}^H \mathbf{U}]_{kk} = \sum_{n=1}^N x_{\lceil \frac{k}{KP} \rceil, (\lceil \frac{k}{K} \rceil - 1)[P] + 1}^*(n) u_{(k-1)[K] + n, k} \quad (4.1.32)$$

avec : $\lceil . \rceil$ l'arrondi supérieur ;

$(.)[K]$ l'opérateur modulo K .

Or on rappelle que $x_{m,k}(n) = x_m(n) e^{j2\pi \frac{(k-1)n}{N}}$, donc :

$$[\mathbf{X}^H \mathbf{U}]_{kk} = \sum_{n=1}^N x_{\lceil \frac{k}{KP} \rceil}^*(n) e^{-j2\pi \frac{((\lceil \frac{k}{K} \rceil - 1)[P])n}{N}} u_{(k-1)[K] + n, k}. \quad (4.1.33)$$

Ainsi :

$$Re(\text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{U})) = Re \left(\sum_{k=1}^{KPM} \sum_{n=1}^N x_{\lceil \frac{k}{KP} \rceil}^*(n) e^{-j2\pi \frac{((\lceil \frac{k}{K} \rceil - 1)[P])n}{N}} u_{(k-1)[K] + n, k} \right). \quad (4.1.34)$$

Et en réalisant le changement de variable $k \leftarrow (m-1)KP + k$, (4.1.34) devient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\operatorname{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{U})\right) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{KP} \sum_{n=1}^N x_m^*(n) e^{-j2\pi \frac{(\lfloor \frac{k}{K} \rfloor - 1)n}{N}} u_{(k-1)[K]+n, (m-1)KP+k}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_m^*(n) \left(\sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m}\right)\right);
\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mu_{1,n}^* \\ \mu_{2,n}^* \\ \vdots \\ \mu_{KP,n}^* \end{bmatrix}_{KP \times 1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ e^{-j2\pi \frac{n}{N}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{n}{N}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{n(P-1)}{N}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{n(P-1)}{N}} \end{bmatrix}_{KP \times 1} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{n,1,m} \\ \tilde{u}_{n,2,m} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n,KP,m} \end{bmatrix}_{KP \times 1} = \begin{bmatrix} u_{n,(m-1)KP+1} \\ u_{n+1,(m-1)KP+2} \\ \vdots \\ u_{n+K-1,(m-1)KP+K} \\ u_{n,(m-1)KP+K+1} \\ u_{n+1,(m-1)KP+K+2} \\ \vdots \\ u_{n+K-1,(m-1)KP+2K} \\ \vdots \\ u_{n,(m-1)KP+K(P-1)+1} \\ u_{n+1,(m-1)KP+K(P-1)+2} \\ \vdots \\ u_{n+K-1,(m-1)KP+KP} \end{bmatrix}_{KP \times 1}.
\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

Par conséquent la maximisation de la partie réelle de la trace de $\mathbf{X}^H \mathbf{U}$ revient à trouver les $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$ qui maximisent le problème suivant :

$$\begin{aligned}
\max_{\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |x_m(n)| \left| \sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m} \right| \cos\left(\arg(x_m(n)) - \arg\left(\sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m}\right)\right) \\
\text{tel que } \begin{cases} n \in \llbracket 1 : N \rrbracket, m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \\ \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N \\ \text{PAPR}(x_m) \leq \rho_{\text{PAPR}} \end{cases} ;
\end{aligned} \tag{4.1.37}$$

où : $\arg(a)$ retourne l'argument de a .

Dans le cas où l'on recherche une séquence de module unitaire ($\text{PAPR}(x_m) = 1$), une solution évidente de l'équation (4.1.37) est donnée par :

$$x_m(n) = \exp\left(j \times \arg\left(\sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m}\right)\right) \text{ avec } n \in \llbracket 1 : N \rrbracket \tag{4.1.38}$$

Par contre, lorsque l'on relâche la contrainte sur l'enveloppe temporelle de la séquence (en se donnant un PAPR acceptable plus grand que 1), le problème de minimisation de (4.1.37) ne donne plus de solution évidente. Par contre, en réécrivant (4.1.37) sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_{\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left| x_m(n) - \sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m} \right|^2 \\ \text{tel que } \begin{cases} n \in \llbracket 1 : N \rrbracket, m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \\ \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N \\ \text{PAPR}(x_m) \leq \rho_{\text{PAPR}} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Et en notant : $\mathbf{x}_m = [x_m(1) \ x_m(2) \ \dots \ x_m(N)]^T$; $z_m(n) = \sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m}$; et $\mathbf{z}_m = [z_m(1) \ z_m(2) \ \dots \ z_m(N)]^T$, le problème de minimisation peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}} \sum_{m=1}^M \|\mathbf{x}_m - \mathbf{z}_m\|_2^2. \\ \text{tel que } \begin{cases} n \in \llbracket 1 : N \rrbracket, m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \\ \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N \\ \text{PAPR}(x_m) \leq \rho_{\text{PAPR}} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

Il suffit alors de résoudre un problème de minimisation dit de « vecteur-proche » (« *nearest-vector* » *problem*) qui a notamment été étudié par Tropp *et al.* [78] et ce, pour les M séquences composant la famille. La résolution d'un tel problème suit la procédure algorithmique suivante :

 ALGORITHME 4.1 : “Nearest-vector” problem

Etape 0 : $k = 0, \delta = \sqrt{\rho_{PAPR}}, \sum_{n=1}^N |x(n)|^2 = N$ et $z(n) = \sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k}$

Etape 1 : Prendre les $N - k$ plus petit éléments de $abs(z(n))$ (d’index \mathcal{M})

Etape 2 : **Si** l’ensemble de ces éléments sont nuls **alors** :

$$x(n) = \begin{cases} \sqrt{\frac{N-k\delta^2}{N-k}} & \text{si } n \in \mathcal{M} \\ \delta e^{j\arg(z(n))} & \text{si } n \notin \mathcal{M} \end{cases}$$

Sinon :

$$\gamma = \sqrt{\frac{N-k\delta^2}{\sum_{n \in \mathcal{M}} |z(n)|^2}}$$

Si $\forall n \in \mathcal{M}, \gamma |z(n)| \leq \delta$ **alors** :

$$x(n) = \begin{cases} \gamma z(n) & \text{si } n \in \mathcal{M} \\ \delta e^{j\arg(z(n))} & \text{si } n \notin \mathcal{M} \end{cases}$$

Sinon :

$$k = k + 1 ;$$

retour à l’**Etape 1** ;

Fin.

Fin.

Pour plus de détails se référer à [78].

4.1.2.2.2 Cas périodique

De manière analogue, en prenant la définition de \mathbf{X} dans le cas périodique (Equation (4.1.16)) on retrouve que la minimisation de $\|\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U}\|_F^2$ sachant \mathbf{U} consiste en la minimisation d’un problème dit de « vecteur-proche » (« nearest-vector » problem) pour les M séquences composant la famille :

$$\min_{\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}} \sum_{m=1}^M \|\mathbf{x}_m - \mathbf{z}_m\|_2^2$$

$$\text{tel que } \begin{cases} n \in \llbracket 1 : N \rrbracket, m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \\ \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N \\ PAPR(x_m) \leq \rho_{PAPR} \end{cases} ; \quad (4.1.41)$$

avec : $\mathbf{x}_m = [x_m(1) \ x_m(2) \ \dots \ x_m(N)]^T$

$$z_m(n) = \sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m}$$

$$\mathbf{z}_m = [z_m(1) \ z_m(2) \ \dots \ z_m(N)]^T$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{1,n}^* \\ \mu_{2,n}^* \\ \vdots \\ \mu_{KP,n}^* \end{bmatrix}_{KP \times 1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ e^{-j2\pi \frac{n}{N}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{n}{N}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{n(P-1)}{N}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{n(P-1)}{N}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{u}_{n,1,m} \\ \tilde{u}_{n,2,m} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n,KP,m} \end{bmatrix}_{KP \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n[N],(m-1)KP+1} \\ u_{(n+1)[N],(m-1)KP+2} \\ \vdots \\ u_{(n+K-1)[N],(m-1)KP+K} \\ u_{n[N],(m-1)KP+K+1} \\ u_{(n+1)[N],(m-1)KP+K+2} \\ \vdots \\ u_{(n+K-1)[N],(m-1)KP+2K} \\ \vdots \\ u_{n[N],(m-1)KP+K(P-1)+1} \\ u_{(n+1)[N],(m-1)KP+K(P-1)+2} \\ \vdots \\ u_{(n+K-1)[N],(m-1)KP+KP} \end{bmatrix}_{KP \times 1} \end{bmatrix} .$$

Dans le cas où l'on recherche une séquence de module unitaire ($PAPR(x) = 1$), une solution évidente à ce problème est donnée par :

$$x(n) = \exp \left(j \times \arg \left(\sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k} \right) \right). \quad (4.1.42)$$

Et dans le cas où l'on relâche la contrainte sur l'enveloppe temporelle de la séquence (en se donnant un PAPR acceptable plus grand que 1) la résolution du problème suit la procédure algorithmique décrite dans la 4.1.2.2.1 (Cf. ALGORITHME 4.1).

4.1.3 Algorithme

Finalement, l'algorithme permettant de minimiser localement les AF discrètes d'une famille de séquences peut être décrit comme suit :

ALGORITHME 4.2 : *Algorithme cyclique minimisant localement les AF discrètes*

Etape 0 : Initialisation de $\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ (aléatoirement ou prédéfini)
 Dimensionnement de la zone à minimiser (Choix de \mathcal{K} et \mathcal{P})
 Dimensionnement du PAPR : ρ_{PAPR}

Etape 1 : Détermination de **U sachant X** (Cf. Partie 4.1.2.1)

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \left(\mathbf{I}_{KPM} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \right);$$

avec : **X** la matrice des décalages Dopplers et Distances (Cf. (4.1.14)) ;

U₁ et **U**₂ les matrices obtenues à partir de la SVD compacte de **X**^H ;

R la matrice des niveaux des lobes secondaires attendus ;

Etape 2 : Détermination de **X sachant U** (Cf. Partie 0) par résolution du problème de minimisation suivant pour chaque séquences composant la famille:

$$\min_{\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{z}_m\|_2^2$$

tel que
$$\begin{cases} n \in \llbracket 1 : N \rrbracket, m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \\ \sum_{n=1}^N |x_m(n)|^2 = N \\ PAPR(x_m) \leq \rho_{PAPR} \end{cases} ;$$

avec : $\mathbf{x}_m = [x_m(1) \ x_m(2) \ \dots \ x_m(N)]^T$;

$\mathbf{z}_m = [z_m(1) \ z_m(2) \ \dots \ z_m(N)]^T$, où $z_m(n) = \sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m}$.

Etape 3 : Tant que ça n'a pas convergé/rencontré un critère d'arrêt, retour à l'**Etape 1**.

REMARQUE 4.1.3 : Les critères d'arrêt ou de convergence sont divers : nombre d'itération maximum atteint, critère de minimisation C suffisamment faible, PSLR objectif atteint...

4.1.4 Résultats de l'étude

Il peut être noté que le nombre limité de degrés de liberté (NM éléments dans $\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ contraints en amplitude) et le possible grand nombre de contraintes ($\sim 2KPM^2$ contraintes) contraignent la qualité de l'optimisation dans la zone à optimiser imposée au système. Ainsi, le dimensionnement de la zone à minimiser doit rester confiné sur une petite zone autour de l'origine afin d'obtenir une zone significativement atténuée.

A titre d'exemple, dans la configuration suivante : $N = 1024$, $M = 3$, $\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ tirés aléatoirement à l'initialisation, $K = 30$, $P = 3$ et $r_0 = -120dB$, l'optimisation de séquences unimodulaires ($\rho_{PAPR} = 0$ dB) avec l'ALGORITHME 4.2 donnent les fonctions d'ambiguïtés périodiques suivantes :

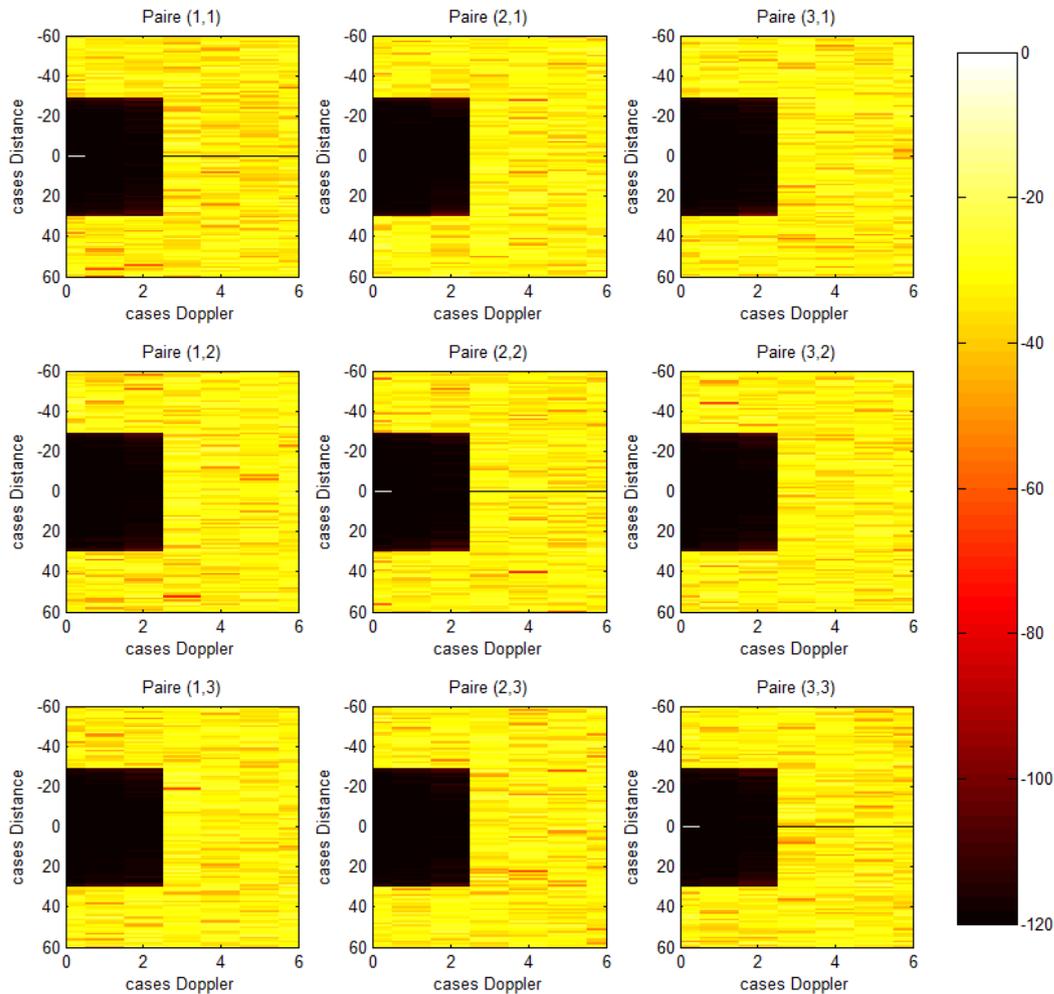


FIGURE 4.2 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes d'une famille de 3 séquences unimodulaire (PAPR = 0 dB).

En comparaison, en reprenant la configuration précédente mais en se donnant un PAPR acceptable de 2 dB ($\rho_{PAPR} = 2$ dB) alors on obtient les fonctions d'ambiguïtés suivantes :

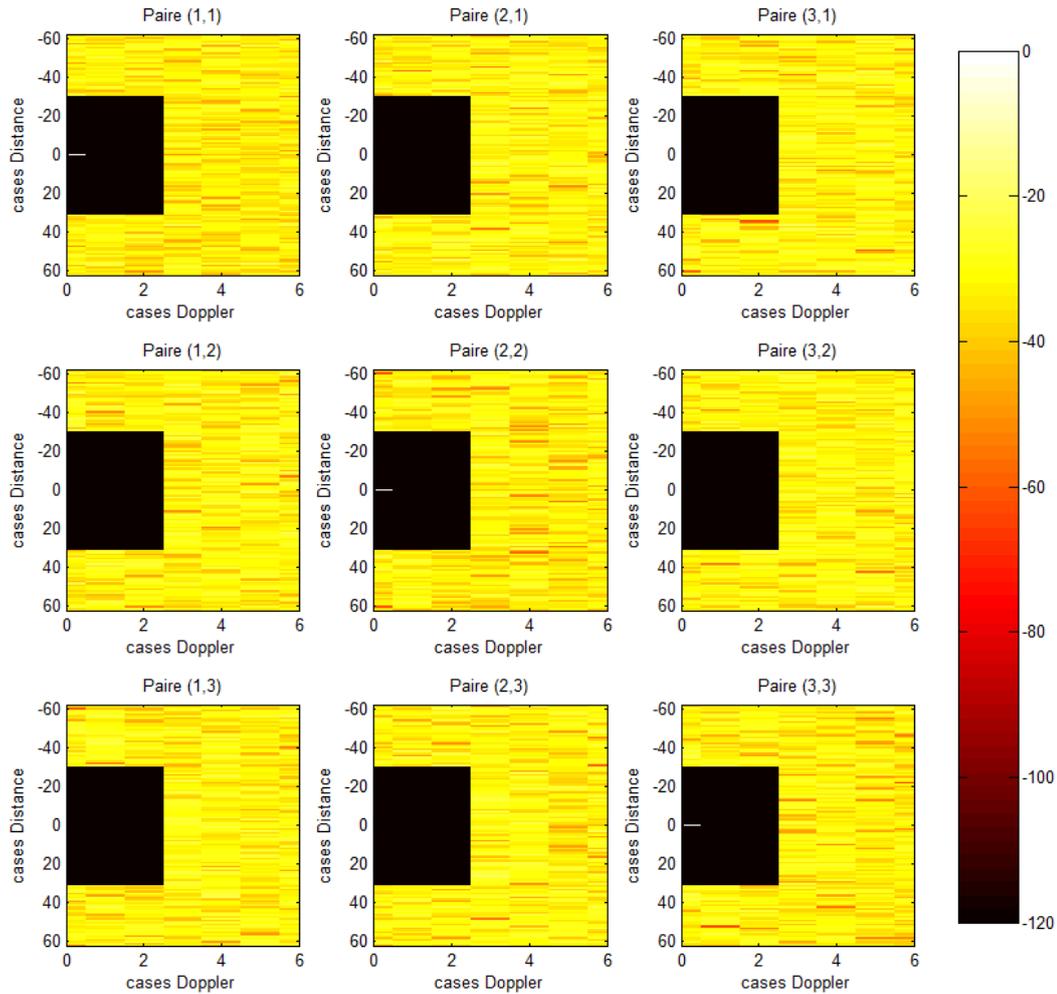


FIGURE 4.3 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes d'une famille de 3 séquences de PAPR 2dB

Ainsi, on peut aussi noter que la recherche d'une séquence de module unitaire est une contrainte forte sur l'enveloppe du signal ; Le fait de relâcher cette contrainte en permettant une certaine fluctuation de celle-ci ($\text{PAPR} > 0$ dB) permet d'atteindre de meilleures performances de l'algorithme (convergence plus rapide et/ou zone à optimiser plus grande et/ou optimisation meilleure).

En particulier, les exemples précédents illustrent ce constat. Car, à configuration identique, on peut voir qu'en relaxant la contrainte sur l'enveloppe temporelle (FIGURE 4.3), alors on obtient un PSLR de -120 dB, résultat obtenu en à peu près 2500 itérations. Alors que, sous contrainte d'uni-modularité (FIGURE 4.2), on atteint un PSLR de -99 dB au bout de 20000 itérations (condition d'arrêt de l'algorithme dans cet exemple) soit un peu plus d'une heure de simulation (Cf. FIGURE 4.4).

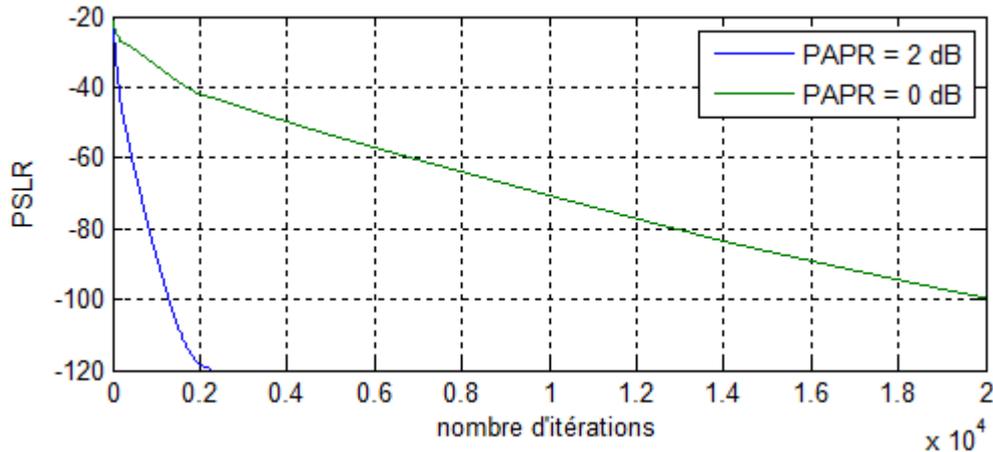


FIGURE 4.4 Comparaison de l'évolution du PSLR en fonction des itérations avec et sans relaxation du PAPR.

Par contre, ces algorithmes possèdent deux défauts :

- Ils ne permettent pas de contrôler le spectre. A nouveau, on obtient des spectres en sinus cardinal lié au filtre de mise en forme de type porte classiquement utilisé pour sur-échantillonner le signal à l'émission ;
- Ils ont un coût calculatoire important car, à chaque itération, une SVD doit être calculée. Or, une SVD a une complexité de l'ordre de $O(h^3)$ avec h proportionnelle à la longueur des séquences et à la zone que l'on souhaite optimiser (relatif à la dimension de la matrice \mathbf{X}). Ainsi, plus les séquences sont longues et plus la zone à optimiser est importante, plus l'algorithme devient coûteux en temps de calculs.

4.2 Optimisation du spectre et du PAPR

Dans cette deuxième partie, on est parti du constat que les codes Pseudo-Aléatoires ont tendance à avoir un spectre en sinus cardinal à cause du filtre de mise en forme rectangulaire classiquement utilisé pour sur-échantillonner la séquence discrète. Le constat est le même avec les algorithmes cycliques présentés plus haut (Cf. **Partie 4.1**)

Par conséquent, il est nécessaire de réaliser des pondérations fréquentielles pour pouvoir contrôler le spectre ; Toutefois, cela se paye par une détérioration du PAPR.

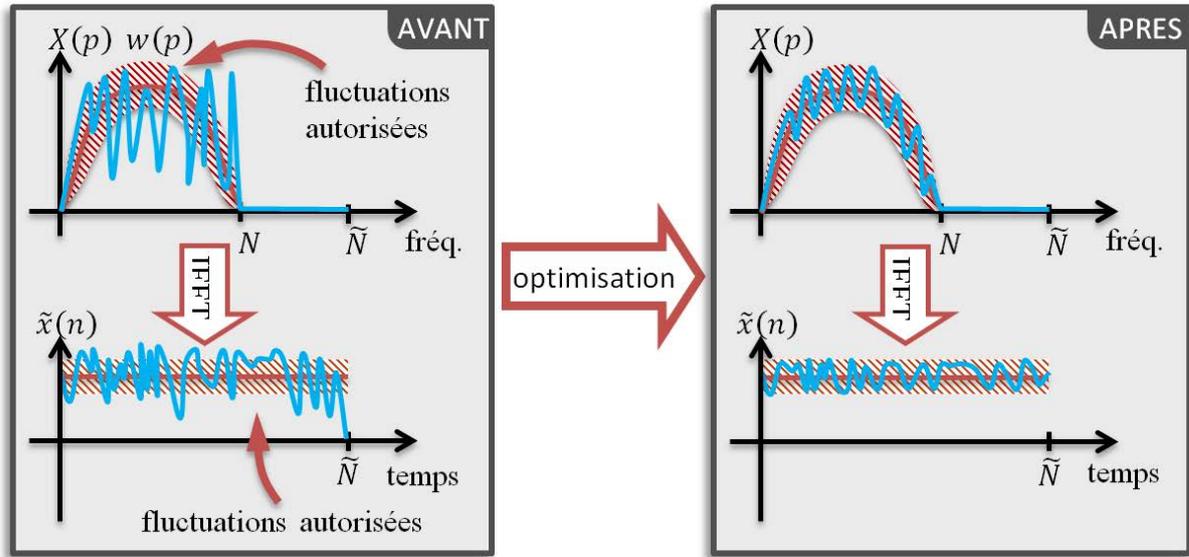


FIGURE 4.5 Objectif d'optimisation sur le spectre et le PAPR.

De ce fait, cette partie a pour objectif de trouver une méthode pour contrôler le PAPR et le spectre des familles de séquences (FIGURE 4.5).

4.2.1 Description de l'algorithme

Soit une séquence \mathbf{x} de taille N que l'on souhaite sur-échantillonner d'un facteur $\frac{\tilde{N}}{N}$, où \tilde{N} représente la longueur de la séquence sur-échantillonnée $\tilde{\mathbf{x}}$.

On cherche à sur-échantillonner le signal \mathbf{x} par une Transformée de Fourier Discrète inverse (TFDi) sur \tilde{N} points, de telle sorte que le spectre de $\tilde{\mathbf{x}}$ soit restreint à ses N premières valeurs et que le PAPR de $\tilde{\mathbf{x}}$ soit contrôlé :

$$PAPR(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \rho_{PAPR}. \quad (4.2.1)$$

Si on définit \mathbf{F}_N , la matrice de Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur N points, telle que :

$$\mathbf{F}_N = \left\{ e^{-\frac{j2\pi(i-1)(j-1)}{N}} \right\}_{i=1, j=1}^{N, N}, \quad (4.2.2)$$

et si on définit le sur-échantillonnage par TFD inverse sur \tilde{N} points comme étant :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\tilde{N}}^H \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \mathbf{x} \\ \mathbf{0}_{\tilde{N}-N} \end{pmatrix}, \quad (4.2.3)$$

alors le contrôle du spectre est assuré par la détermination de α sachant \mathbf{x} qui minimise l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \min & \|\mathbf{F}_N \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 \\ \text{tel que} & \quad PAPR(\boldsymbol{\alpha}/\mathbf{w}) < \rho_\alpha; \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

où : \mathbf{w} représente la fenêtre de pondération objectif,

$PAPR(\boldsymbol{\alpha}/\mathbf{w}) < \rho_\alpha$ représente la fluctuation autorisée autour de cette fenêtre objectif.

Alors que le contrôle du PAPR de $\tilde{\mathbf{x}}$ est, lui, assuré par la détermination de $\tilde{\mathbf{x}}$ sachant $\boldsymbol{\alpha}$ qui minimise l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \min & \left\| \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{F}_{\tilde{N}}^H \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0}_{\tilde{N}-N} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ \text{tel que} & \quad PAPR(\tilde{\mathbf{x}}) < \rho_{\tilde{\mathbf{x}}}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Enfin la dernière étape consiste à déterminer \mathbf{x} sachant $\tilde{\mathbf{x}}$ en résolvant :

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_N^H \mathbf{F}_{\tilde{N}} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (4.2.6)$$

Finalement, l'algorithme peut être décrit comme suit :

ALGORITHME 4.3 : *Algorithme cyclique contrôlant le spectre et le PAPR*

Etape 0 : Initialisation de la séquence : \mathbf{x} (aléatoirement ou existant)
 Dimensionnement des bandes autorisée et interdite (Choix de N et \tilde{N})
 Dimensionnement du PAPR de $\tilde{\mathbf{x}}$: $\rho_{\tilde{\mathbf{x}}}$
 Choix de la fenêtre objectif : \mathbf{w}
 Dimensionnement de la fluctuation permise autour de \mathbf{w} : ρ_α

Etape 1 : Détermination de $\boldsymbol{\alpha}$ sachant \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \min & \|\mathbf{F}_N \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 \\ \text{tel que} & \quad PAPR(\boldsymbol{\alpha}/\mathbf{w}) < \rho_\alpha \end{aligned}$$

Etape 2 : Détermination de $\tilde{\mathbf{x}}$ sachant $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \min & \left\| \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{F}_{\tilde{N}}^H \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0}_{\tilde{N}-N} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ \text{tel que} & \quad PAPR(\tilde{\mathbf{x}}) < \rho_{\tilde{\mathbf{x}}} \end{aligned}$$

Etape 3 : Détermination de \mathbf{x} sachant $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_N^H \mathbf{F}_{\tilde{N}} \tilde{\mathbf{x}}$$

Etape 4 : Tant que ça n'a pas convergé/rencontré un critère d'arrêt, retour à l'**Etape 1**.

REMARQUE 4.2.1 : Il peut être noté que les minimisations de (4.2.4) et (4.2.5) consistent à résoudre des problèmes dits de « vecteur-proche » (« *nearest-vector* » *problems*) dont la résolution suit la procédure algorithmique énoncée dans l'ALGORITHME 4.1 de la partie précédente (Cf. Partie 0).

4.2.2 Extension pour l'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté

Il est aussi important de noter que ce précédent algorithme peut être intégré dans celui de contrôle local des fonctions d'ambiguïtés, afin de pallier au problème de spectre lié à cet algorithme. Pour ce faire il suffit de modifier l'**Etape 2** de l'ALGORITHME 4.2 de la manière suivante :

ALGORITHME 4.4 : *Extension de l'ALGORITHME 4.2 pour contrôler le spectre*

Etape 2.1 : Détermination de α_m sachant \mathbf{z}_m :

$$\min \|\mathbf{F}_N \mathbf{z}_m - \alpha_m\|_2^2$$

tel que $PAPR(\alpha_m/\mathbf{w}) < \rho_{\alpha_m}$

avec : $\mathbf{z}_m = [z_m(1) \ z_m(2) \ \dots \ z_m(N)]^T$;

$$z_m(n) = \sum_{k=1}^{KP} \mu_{k,n}^* \tilde{u}_{n,k,m} .$$

Etape 2.2 : Détermination de $\tilde{\mathbf{z}}_m$ sachant α_m (avec aucune contrainte sur $\tilde{\mathbf{z}}_m$) :

$$\tilde{\mathbf{z}}_m = \mathbf{F}_N^H \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \mathbf{0}_{\tilde{N}-N} \end{pmatrix}$$

Etape 2.3 : Détermination de \mathbf{X} sachant \mathbf{U} (Cf. Partie 04.1) par résolution du problème de minimisation suivant pour chaque séquences composant la famille:

$$\min_{\{\tilde{x}_m(n)\}_{n=1, m=1}^{\tilde{N}, M}} \|\tilde{\mathbf{x}}_m - \tilde{\mathbf{z}}_m\|_2^2$$

tel que $\begin{cases} n \in \llbracket 1 : \tilde{N} \rrbracket, m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \\ \sum_{n=1}^{\tilde{N}} |\tilde{x}_m(n)|^2 = \tilde{N} \\ PAPR(\tilde{x}_m) \leq \rho_{PAPR} \end{cases}$

avec : $\tilde{\mathbf{x}}_m = [\tilde{x}_m(1) \ \tilde{x}_m(2) \ \dots \ \tilde{x}_m(\tilde{N})]^T$.

Etape 2.4 : Détermination de \mathbf{x}_m sachant $\tilde{\mathbf{x}}_m$

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{F}_N^H \mathbf{F}_{\tilde{N}} \tilde{\mathbf{x}}_m$$

4.2.3 Résultats de l'étude

Ces algorithmes permettent alors de contrôler, à la fois, le spectre et les fonctions d'ambiguïtés, tout en offrant la possibilité de relaxer les contraintes sur les fluctuations d'enveloppe temporelle (PAPR).

Par exemple, dans la configuration suivante : $N = 1024$, $M = 3$, $\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ tirés aléatoirement à l'initialisation, $K = 30$, $P = 3$, $r_0 = -120\text{dB}$, $\rho_{\text{PAPR}} = 2\text{dB}$, $\tilde{N} = 2048$ et w une fenêtre objectif de type porte, l'optimisation par le biais des ALGORITHME 4.2 et ALGORITHME 4.4 donnent les résultats suivants :

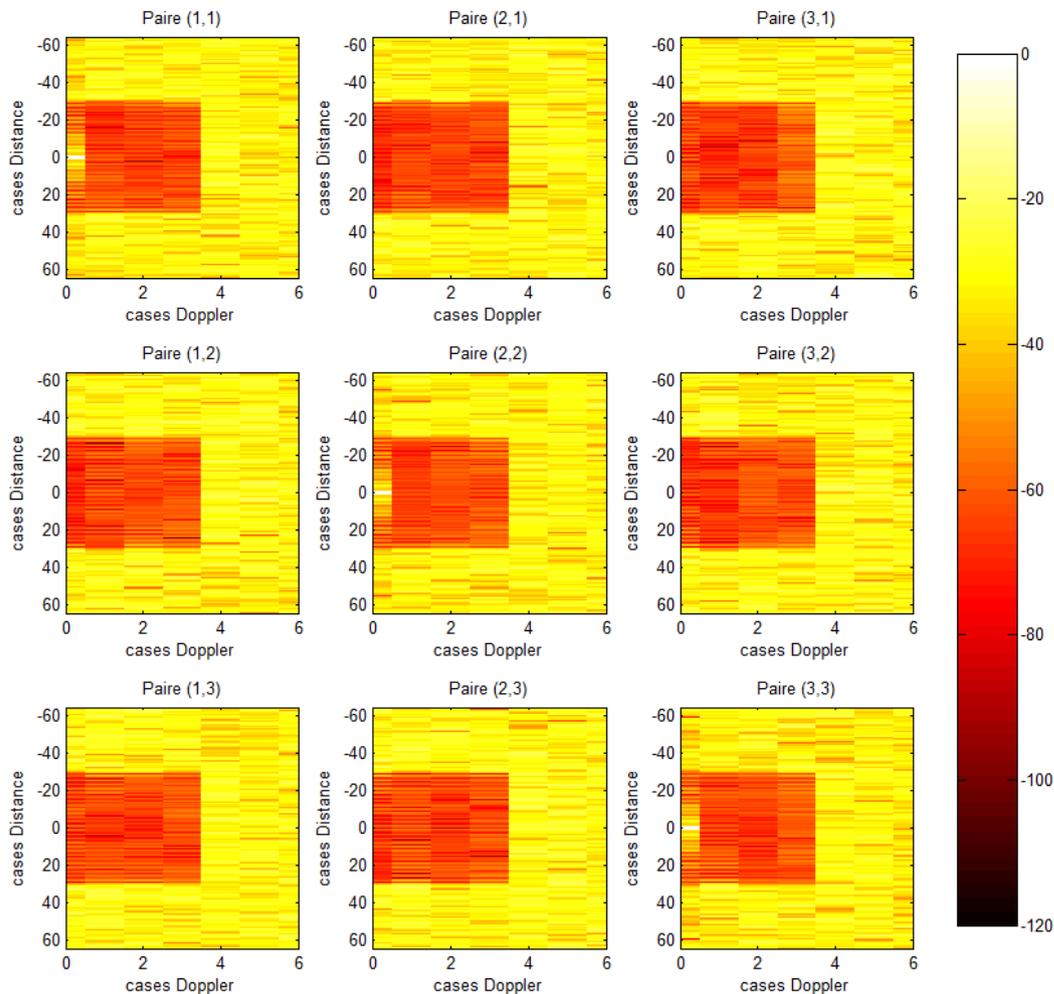


FIGURE 4.6 Exemple d'optimisation locale des PAF discrètes d'une famille de 3 séquences de $\text{PAPR} = 2\text{ dB}$ avec les ALGORITHME 4.2 et ALGORITHME 4.4.

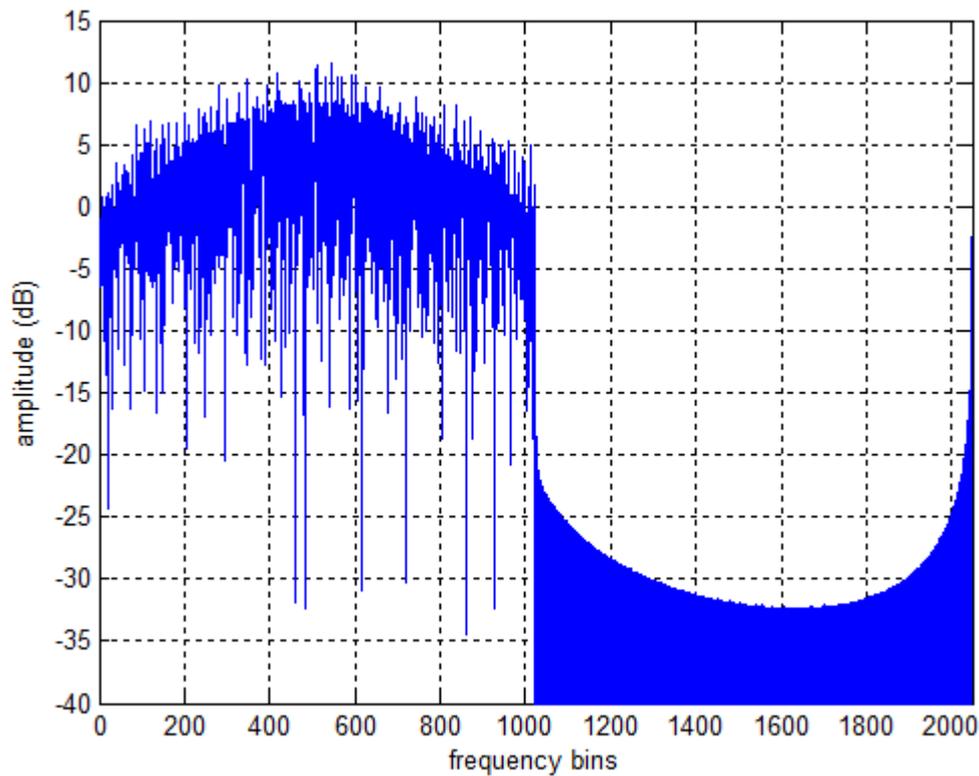


FIGURE 4.7 Exemple de spectre obtenu suite à l'optimisation d'une famille de 3 séquences de PAPR = 2 dB avec les ALGORITHME 4.2 et ALGORITHME 4.4.

4.3 Convergence et comparaison

4.3.1 Convergence

D'après Tropp [78] et Stoica *et al.* [3] [77] :

- Théoriquement la convergence n'est pas garantie ;
- En pratique on l'observe tout le temps.

Stoica *et al.* ont donné une explication à ce phénomène dans [77] [70].

En particulier, il est important de noter que les deux problèmes de minimisation en (4.1.19) et, respectivement, en (4.1.20) ne sont pas équivalents (ces deux problèmes peuvent donner des solutions différentes) mais plutôt « quasi-équivalents » au sens que si le critère (4.1.20) prend de faibles valeurs alors (4.1.19) aussi, et inversement. Plus spécifiquement, (4.1.19) est nulle si et seulement si (4.1.20) l'est aussi. Par conséquent, par des arguments de continuité, si

le minimum global de (4.1.19) est « suffisamment petit » alors on peut s'attendre à ce que les séquences minimisant (4.1.19) et, respectivement, (4.1.20) soient proches l'une de l'autre. En d'autres termes, dans ces conditions, la séquence minimisant (4.1.19) donne une petite valeur de (4.1.20), et inversement.

Cependant, comme il a déjà été mentionné, les deux séquences minimisant (4.1.19) et (4.1.20), respectivement, donneront en général des solutions différentes.. De même, les minima locaux de ces deux critères seront généralement différents. En particulier, ils peuvent être atteints en des séquences différentes selon (4.1.19) et (4.1.20).

Une analyse mathématique plus quantitative des minima globaux et locaux des deux critères, ainsi que de la manière dont ils sont liés les uns aux autres, apparaît comme une tâche difficile qui dépasse le cadre du présent document.

4.3.2 Comparaison avec les méthodes stochastiques (recuit simulé)

Afin d'évaluer les performances des algorithmes cycliques précédemment introduits, nous allons comparer ces algorithmes à des méthodes plus standards et en particulier avec des algorithmes stochastiques de type recuit simulé.

Pour réaliser le recuit simulé, nous avons suivi la procédure suivante :

- Initialisation aléatoire des $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$, et initialisation de la température initiale T_0 (définie dans [60] comme 10 fois l'écart-type de la distribution de la fonction de coût E à l'initialisation);
- Ensuite, pour une température T_i donnée (le i -ème changement de température), on réalise une perturbation aléatoire d'une phase de $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$ (le nombre de perturbations réalisé à une température donnée sera noté C) ;
- Si on observe une amélioration de la fonction de coût (variation négative de la fonction de coût E , notée ΔE , soit $\Delta E < 0$) alors on accepte la perturbation, sinon ($\Delta E > 0$) on l'accepte avec une probabilité de $e^{-\Delta E/T_i}$.
- On réitère le tirage d'une perturbation aléatoire tant qu'un certain nombre de changements C_0 n'a pas été atteint (tant que $C < C_0$).
- Dans le cas contraire, on vérifie que durant les 3 derniers changements de températures, la fonction de coût a changé de valeurs. Si c'est le cas, l'algorithme n'a toujours pas convergé et la température est diminuée selon une loi de température

géométrique ($i = i + 1$ et $T_i = \alpha T_{i-1}$ avec $0 < \alpha < 1$), on réitère alors à nouveau l'étape des perturbations aléatoires en ayant remis à zéro le nombre de perturbations réalisé le tour précédent ($C = 0$). Par contre dans le cas contraire, l'algorithme a convergé et s'arrête.

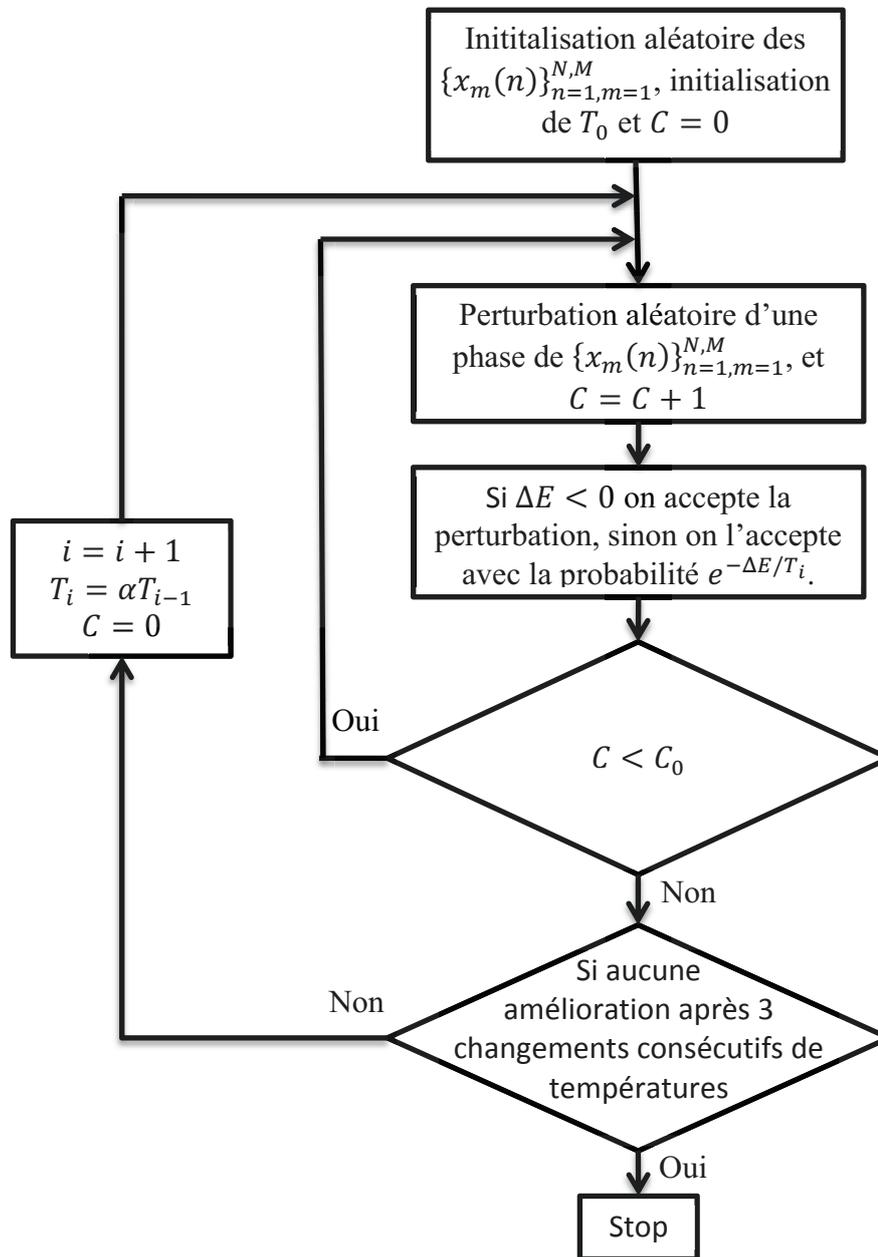


FIGURE 4.8 Organigramme pour optimiser une famille de séquences polyphases à l'aide d'un algorithme de recuit simulé.

A des fins de comparaisons, nous allons reprendre la configuration de la partie 4.1, à savoir : $N = 1024$, $M = 3$, $\{x_m(n)\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ tirés aléatoirement à l'initialisation, $K = 30$, $P = 3$, $\rho_{PAPR} = 0$ dB et $r_0 = -120$ dB.

Sous cette configuration, l'algorithme cyclique donne des séquences ayant un PSLR de -99 dB au bout de 20000 itérations (condition d'arrêt de l'algorithme dans cet exemple) soit un peu plus d'une heure de simulation (Cf. FIGURE 4.4). Par conséquent, la comparaison avec l'algorithme de recuit simulé se fera sur la base d'un temps de simulation fixe de 1 heure de simulation. Par contre, il est nécessaire de définir quelques paramètres supplémentaires afin de configurer l'algorithme de recuit simulé :

TABLEAU 4.1 Paramètres de l'algorithmes de recuit simulé.

Paramètres de simulation	Valeurs
Nombre de perturbations max.	C_0 1000
Température initiale	T_0 0.5 (10×0.05)
Pas de descente en température	α 0.95

Ainsi, sous cette condition d'arrêt (1 heure de simulation) et dans cette configuration, l'algorithme de recuit simulé nous donne les résultats suivants :

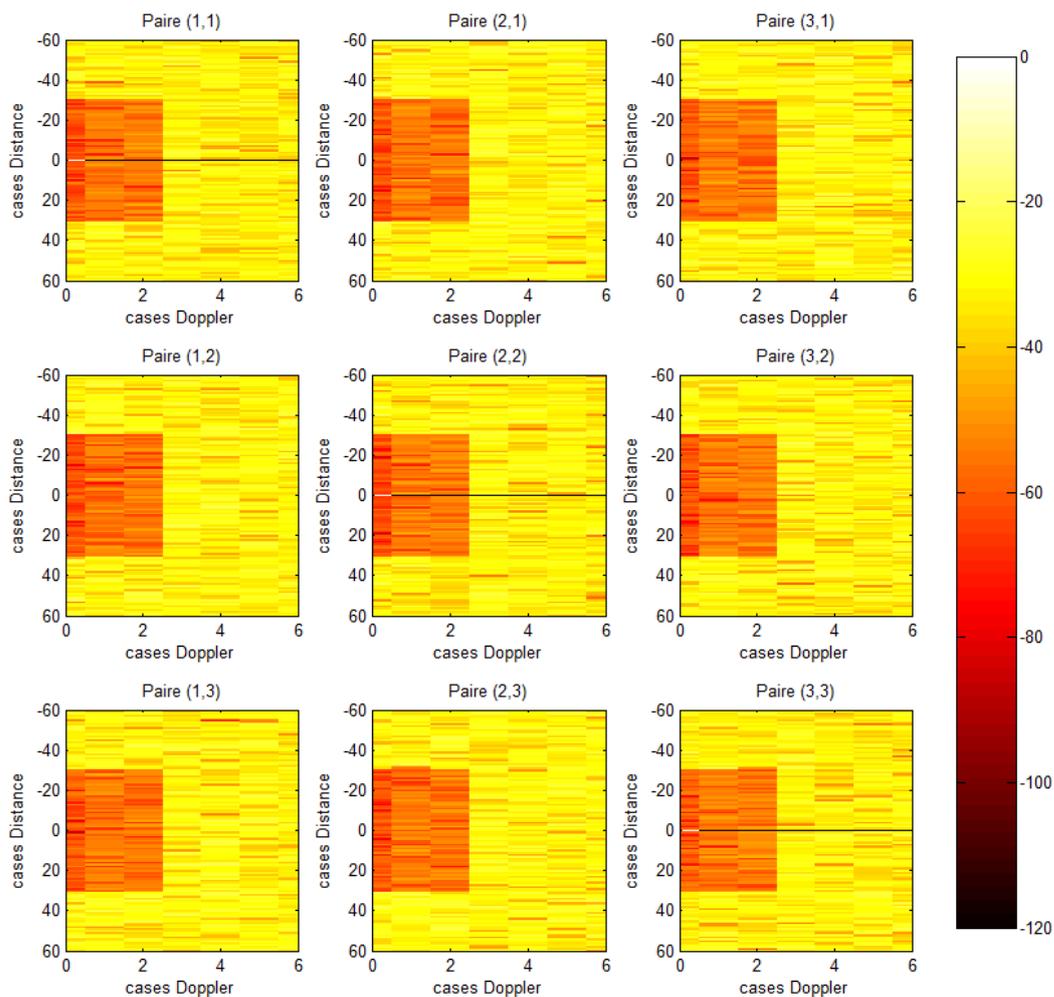


FIGURE 4.9 Exemple de fonctions d'ambiguïtés obtenues avec l'algorithme de recuit simulé.

TABLEAU 4.2 Synthèse de la comparaison
Algorithme Cyclique vs. Algorithme de recuit simulé

	Algorithme Cyclique	Recuit Simulé
PSLR	-99 dB	-45 dB

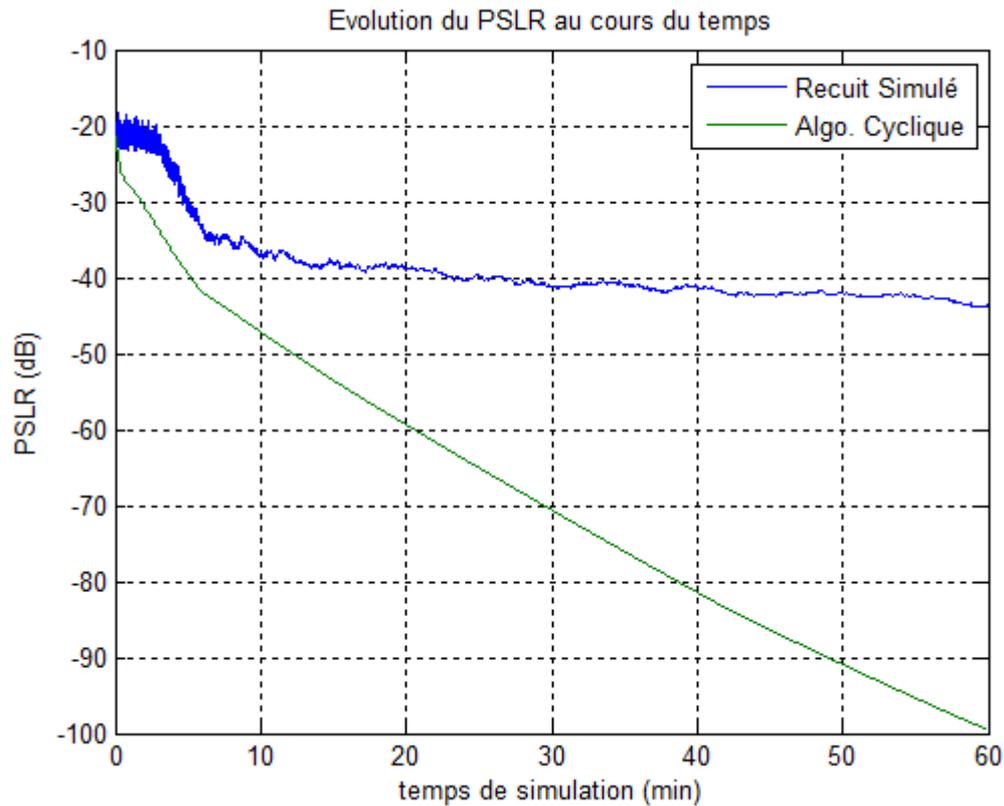


FIGURE 4.10 Evolution du PSLR au cours du temps : Recuit simulé vs. Algorithme Cyclique.

On observe sur ces résultats qu'en un temps de simulation identique, l'algorithme cyclique est bien plus performant que l'algorithme de recuit simulé avec un PSLR obtenu de -99 dB contre -45 dB en 1 heure de simulation.

4.4 Conclusion

Finalement, ce Chapitre a permis d'étendre les travaux de Hao He, Petre Stoica et Jian Li dans [3] [70] [71] [72] en permettant l'optimisation jointe des fonctions d'ambiguïtés, du spectre et du PAPR d'une famille de séquences.

Le principal avantage des algorithmes présentés dans ce Chapitre est d'offrir une grande flexibilité sur les contraintes que l'on impose au système.

Toutefois, il est intéressant de faire les observations suivantes :

- Premièrement, le nombre limité de degrés de liberté (NM éléments dans $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$ contraintes en amplitude) et le possible grand nombre de contraintes ($\sim 2KPM^2$ contraintes) contraignent la qualité de l'optimisation dans la zone à optimiser imposée au système. Ainsi, le dimensionnement de la zone à minimiser doit rester confiné sur une petite zone autour de l'origine afin d'obtenir une zone significativement atténuée.
- Ensuite, on peut noter que le coût calculatoire peut devenir très important car, à chaque itération, une SVD doit être calculée. Or, une SVD a une complexité de l'ordre de $O(h^3)$ avec, ici, h proportionnelle à la longueur des séquences et à la zone que l'on souhaite optimiser (relatif à la dimension de la matrice \mathbf{X}). Ainsi plus les séquences sont longues et plus la zone à optimiser est importante, plus l'algorithme devient coûteux en temps de calculs.

Pour rappel pour une application MSPSR active, la longueur des séquences peut devenir très grande (plusieurs dizaines de milliers d'éléments). Ainsi l'approche discutée ici semble atteindre ses limites dans notre cas d'étude.

Chapitre 5. ALGORITHMES DE DESCENTE DU GRADIENT

Le précédent chapitre a étudié une approche basée sur les algorithmes cycliques afin de générer des formes d'ondes dédiées à une application MSPSR active. Toutefois, il a été observé que ces algorithmes avaient un coût calculatoire important de l'ordre de $O(h^3)$ par itération où h représente la longueur des séquences. Cette complexité calculatoire est en grande partie dû à l'utilisation d'une décomposition en valeur singulière à chaque itération.

Par conséquent, il est intéressant de se demander s'il n'existe pas d'autres approches permettant d'atteindre une complexité moindre que les algorithmes cycliques précédemment introduits.

Ainsi, ce chapitre présente une **approche basée sur une descente de gradient afin d'optimiser localement les fonctions d'ambiguïtés d'une famille de séquences**. Cette nouvelle approche devrait permettre d'atteindre un niveau de complexité calculatoire plus faible en comparaison des algorithmes précédents (Cf. Chapitre 4).

En particulier, cette étude est une extension d'un article récent de Baden *et al.* [14] qui porte sur l'optimisation de la fonction d'autocorrélation aperiodique d'une séquence polyphasée (module constant, optimisation portant seulement sur la phase) pour un coût calculatoire de l'ordre de $O(h \log(h))$ par itération.

Ce chapitre s'articulera de la manière suivante :

- Dans une première approche, sera donné un algorithme de descente du gradient permettant d'optimiser localement les fonctions d'ambiguïtés d'une famille de séquences.
- Ensuite, afin de compléter cette première approche, une seconde partie de l'étude consistera à optimiser le spectre, également par le biais d'une descente du gradient. Deux approches seront étudiées : une approche directe qui consistera à minimiser directement l'énergie hors-bande, et une approche détournée qui consistera à minimiser la fluctuation d'enveloppe temporelle des séquences engendrée par le contrôle strict (par construction) des zones hors-bandes.
- Enfin, les algorithmes de contrôle du PSLR des fonctions d'ambiguïtés et les algorithmes de contrôle du spectre seront combinés afin de permettre la génération de familles de séquences répondant aux deux critères.

Ce chapitre a fait l'objet de deux publications [79] et [80] qui furent présentées, respectivement, à *IEEE International Radar Symposium (IRS 2016)* et *IEEE Radar Conference (RadarConf 2016)* en Mai 2016.

5.1 Optimisation locale des fonctions d'ambiguïtés

Alors que les algorithmes cycliques précédemment introduits reposent sur des calculs de SVD (*Singular Value Decomposition*) dont la complexité est de l'ordre $O(h^3)$, l'approche présentée dans cette première partie porte sur une descente de gradient afin d'optimiser localement les fonctions d'ambiguïtés d'une famille de séquence. Cette nouvelle approche devrait permettre d'atteindre un niveau de complexité calculatoire moindre en comparaison aux algorithmes précédents.

Cette étude est une extension d'un article récent de Baden [14] qui porte sur l'optimisation de la fonction d'autocorrélation apériodique d'une séquence polyphasée (module constant, optimisation de la phase seulement). Cette extension consiste à porter l'optimisation sur les fonctions d'ambiguïtés d'une famille de séquences polyphasées.

5.1.1 Objectifs et Notations

Afin de conserver une certaine clarté tout au long de cette partie, nous allons introduire les principales notations utilisées ici.

Commençons par définir $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$ une famille de M séquences de longueur N , soit \mathbf{x}_m la $m^{\text{ième}}$ séquence de longueur N de cette famille, et soit \mathbf{x}_{m,f_D} cette même séquence ayant subi un décalage Doppler f_D :

$$\mathbf{x}_m := \{x_m(n)\}_{n=0}^{N-1}; \quad (5.1.1)$$

$$\mathbf{x}_{m,f_D} := \{x_m(n)e^{j2\pi f_D n T_{ech}}\}_{n=0}^{N-1}; \quad (5.1.2)$$

où : T_{ech} représente le temps d'échantillonnage ;

$x_m(n) = A_m(n)e^{j\phi_m(n)}$ avec $A_m(n)$ prédéfini (*i.e.*, enveloppe constante ou pulsée etc.) ;

Et $x_m(n + N) = x_m(n)$ dans le cas périodique.

Si on définit un Doppler normalisé p tel que :

$$f_D = \frac{p}{NT_{ech}}, \quad (5.1.3)$$

alors on peut noter que $\mathbf{x}_{m,f_D} = \mathbf{x}_{m,p}$ avec :

$$\mathbf{x}_{m,p} := \left\{ x_m(n) e^{j2\pi \frac{pn}{N}} \right\}_{n=0}^{N-1}. \quad (5.1.4)$$

Il vient donc que la fonction de corrélation de $\mathbf{x}_{m1,p}$, par \mathbf{x}_{m2} noté $\mathbf{r}_{m1,m2,p} = \mathbf{x}_{m1,p} * \mathbf{x}_{m2}$ est donné par :

$$\begin{aligned} r_{m1,m2,p}(k) &\triangleq (\mathbf{x}_{m1,p} * \mathbf{x}_{m2})_k \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_{m1}(n) x_{m2}^*(n+k) e^{j2\pi \frac{np}{N}}; \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

dont une propriété intéressante, – quel que soit la périodicité du signal –, est :

$$r_{m1,m2,p}^*(k) = r_{m2,m1,-p}(-k) e^{j2\pi \frac{pk}{N}} \begin{cases} \forall p & \text{si apériodique} \\ p \in \mathbb{Z} & \text{si périodique} \end{cases}. \quad (5.1.6)$$

A partir de là, on peut définir la fonction de coût partielle qui nous servira à calculer le gradient, notée $E_{m1,m2,p}$:

$$E_{m1,m2,p} = \sum_{k=-N+1}^{N-1} |r_{m1,m2,p}(k)|^{2q} w_{m1,m2,p,k} \quad (5.1.7)$$

où : q est un paramètre permettant un certain contrôle des lobes secondaires. Lorsque $q = 1$, $E_{m1,m2,p}$ est équivalent au *Weighted Integrated Sidelobe Level* (WISL) (Cf. (2.3.21)). Par contre, plus l'exposant est grand, plus le terme dominant de la somme est mis en avant, et donc plus le PSLR est pris en compte ;

$\mathbf{w}_{m1,m2,p} = \{w_{m1,m2,p,k}\}_{k=-N+1}^{N-1}$ sont des coefficients de pondération permettant de contrôler l'allure des lobes secondaires. Plus $w_{m1,m2,p,k}$ est grand, plus on met de poids sur l'optimisation du lobe secondaire correspondant. A contrario, lorsque $w_{m1,m2,p,k} = 0$, l'optimisation ne se préoccupe pas du lobe secondaire correspondant. En règle général $w_{m1,m2,p,k} \in \mathbb{R}^{+*}$ dans la zone d'intérêt et 0 sinon.

Cette fonction de coût partielle est relative à l'énergie des lobes secondaires dans le domaine d'intérêt de la fonction de corrélation de $\mathbf{x}_{m1,p}$ par \mathbf{x}_{m2} . Cela correspond donc au produit d'intercorrélation entre la $m2^{\text{ième}}$ séquence et la $m1^{\text{ième}}$ séquence en présence d'un Doppler normalisé p .

Maintenant, si on définit par \mathcal{P} , l'ensemble de raies Doppler que l'on souhaite optimiser tel que :

$$\mathcal{P} := \{p \mid p \in \mathbb{Z} \text{ si périodique, } p \in \mathbb{R} \text{ sinon}\}; \quad (5.1.8)$$

on peut définir la fonction de coût relative à l'énergie des lobes secondaires dans la zone d'intérêt pour la fonction d'ambiguïté formée par le couple $(m1, m2)$. On la notera $E_{m1,m2}$:

$$E_{m1,m2} = \sum_{p \in \mathcal{P}} E_{m1,m2,p}. \quad (5.1.9)$$

A partir de là, on définit alors la fonction de coût globale comme étant la somme des $E_{m1,m2}$ pour tous les couples de séquences $(m1, m2)$ qui composent notre famille :

$$E = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M E_{m1,m2}. \quad (5.1.10)$$

5.1.2 Calcul du gradient

Dès lors, nous allons nous attaquer au calcul du gradient de E . Afin de mener ce calcul nous allons calculer le gradient associé aux éléments $\{x_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$ de la $m^{\text{ième}}$ séquence de la famille. Or comme les séquences de la famille ont une enveloppe temporelle prédéfinie, le gradient sera calculé selon les phases de la $m^{\text{ième}}$ séquence, à savoir les $\{\phi_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$.

Ainsi si on note $\mathbf{g}_m = \left\{ \frac{\partial E}{\partial \phi_m(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ et $\mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p} = \left\{ \frac{\partial E_{m_1, m_2, p}}{\partial \phi_m(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ les gradients respectifs de E et $E_{m_1, m_2, p}$ selon les phases $\{\phi_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$ de la $m^{\text{ième}}$ séquence, il vient que :

$$\mathbf{g}_m = \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p}. \quad (5.1.11)$$

On observe alors que la détermination de \mathbf{g}_m consiste en la détermination de $\mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p}$. Nous allons donc focaliser notre attention sur l'expression de $\mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p}$, et donc expliciter $\frac{\partial E_{m_1, m_2, p}}{\partial \phi_m(i)}$.

Or, en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées, on peut ramener le calcul de la dérivée partielle selon $\phi_m(i)$ à celui du calcul des dérivées partielles selon les parties réelles et imaginaires de $x_m(i)$:

$$\frac{\partial E_{m_1, m_2, p}}{\partial \phi_m(i)} = -Im(x_m(i)) \frac{\partial E_{m_1, m_2, p}}{\partial Re(x_m(i))} + Re(x_m(i)) \frac{\partial E_{m_1, m_2, p}}{\partial Im(x_m(i))}. \quad (5.1.12)$$

Or il peut être montré que :

$$\frac{\partial E_{m_1, m_2, p}}{\partial (\cdot)} = q \sum_{k=-N+1}^{N-1} w_{m_1, m_2, p, k} |r_{m_1, m_2, p}(k)|^{2(q-1)} \frac{\partial |r_{m_1, m_2, p}(k)|^2}{\partial (\cdot)} \quad (5.1.13)$$

$$\text{avec : } \partial(\cdot) = \begin{cases} \partial Re(x_m(i)) \\ \partial Im(x_m(i)) \end{cases}.$$

$$\text{Si on note : } \gamma_{m_1, m_2, p, k} = w_{m_1, m_2, p, k} |r_{m_1, m_2, p}(k)|^{2(q-1)};$$

$$\text{et : } |r_{m_1, m_2, p}(k)|^2 = Re(r_{m_1, m_2, p}(k))^2 + Im(r_{m_1, m_2, p}(k))^2;$$

l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{m_1, m_2, p}}{\partial(\cdot)} = 2q \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m_1, m_2, p, k} \left[\operatorname{Re} \left(r_{m_1, m_2, p}(k) \right) \frac{\partial \operatorname{Re} \left(r_{m_1, m_2, p}(k) \right)}{\partial(\cdot)} \right. \\ \left. + \operatorname{Im} \left(r_{m_1, m_2, p}(k) \right) \frac{\partial \operatorname{Im} \left(r_{m_1, m_2, p}(k) \right)}{\partial(\cdot)} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Dans le but d'expliciter cette dernière expression, nous allons tout d'abord développer les expressions des parties réelles et imaginaires de $r_{m_1, m_2, p}(k)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(r_{m_1, m_2, p}(k) \right) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_{m_1}(n) x_{m_2}^*(n+k) e^{j2\pi \frac{np}{N}} \right] \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i; n \neq i-k}}^{N-1} \operatorname{Re} \left(x_{m_1}(n) x_{m_2}^*(n+k) e^{j2\pi \frac{np}{N}} \right) \\ &\quad + \operatorname{Re} \left(x_{m_1}(i) \left(x_{m_2}(i+k) e^{-j2\pi \frac{ip}{N}} \right)^* \right) \\ &\quad + \operatorname{Re} \left(x_{m_2}^*(i) x_{m_1}(i-k) e^{j2\pi \frac{(i-k)p}{N}} \right). \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Or en s'appuyant sur les propriétés liant les parties réelles et imaginaires de deux nombres complexes a et b à la partie réelle de leur produit :

$$\operatorname{Re}(ab) = \operatorname{Re}(a)\operatorname{Re}(b) - \operatorname{Im}(a)\operatorname{Im}(b), \quad (5.1.16)$$

$$\operatorname{Re}(ab^*) = \operatorname{Re}(a)\operatorname{Re}(b) + \operatorname{Im}(a)\operatorname{Im}(b), \quad (5.1.17)$$

il vient que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(r_{m_1, m_2, p}(k) \right) &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i; n \neq i-k}}^{N-1} \operatorname{Re} \left(x_{m_1}(n) x_{m_2}^*(n+k) e^{j2\pi \frac{np}{N}} \right) \\ &\quad + \operatorname{Re}(x_{m_1}(i)) \operatorname{Re} \left(x_{m_2}(i+k) e^{-j2\pi \frac{ip}{N}} \right) \\ &\quad + \operatorname{Im}(x_{m_1}(i)) \operatorname{Im} \left(x_{m_2}(i+k) e^{-j2\pi \frac{ip}{N}} \right) \\ &\quad + \operatorname{Re}(x_{m_2}(i)) \operatorname{Re} \left(x_{m_1}(i-k) e^{j2\pi \frac{(i-k)p}{N}} \right) \\ &\quad + \operatorname{Im}(x_{m_2}(i)) \operatorname{Im} \left(x_{m_1}(i-k) e^{j2\pi \frac{(i-k)p}{N}} \right). \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

De la même manière on peut réécrire la partie imaginaires de $r_{m1,m2,p}(k)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
Im\left(r_{m1,m2,p}(k)\right) &= Im\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_{m1}(n)x_{m2}^*(n+k)e^{j2\pi\frac{np}{N}}\right] \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i; n \neq i-k}}^{N-1} Im\left(x_{m1}(n)x_{m2}^*(n+k)e^{j2\pi\frac{np}{N}}\right) \\
&\quad + Im\left(x_{m1}(i)\left(x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right)^*\right) \\
&\quad + Im\left(x_{m2}^*(i)x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right).
\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

Or, en s'appuyant sur les propriétés liant les parties réelles et imaginaires de deux nombres complexes a et b à la partie imaginaire de leur produit :

$$Im(ab) = Im(a)Re(b) + Re(a)Im(b) \tag{5.1.20}$$

$$Im(ab^*) = Im(a)Re(b) - Re(a)Im(b) \tag{5.1.21}$$

Il vient que:

$$\begin{aligned}
Im\left(r_{m1,m2,p}(k)\right) &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i; n \neq i-k}}^{N-1} Im\left(x_{m1}(n)x_{m2}^*(n+k)e^{j2\pi\frac{np}{N}}\right) \\
&\quad + Im(x_{m1}(i))Re\left(x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \\
&\quad - Re(x_{m1}(i))Im\left(x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \\
&\quad - Im(x_{m2}(i))Re\left(x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right) \\
&\quad + Re(x_{m2}(i))Im\left(x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right).
\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

A partir des équations (5.1.18) et (5.1.22) il découle que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Re\left(r_{m1,m2,p}(k)\right)}{\partial Re(x_m(i))} &= \delta_{m,m1}Re\left(x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \\
&\quad + \delta_{m,m2}Re\left(x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right);
\end{aligned} \tag{5.1.23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re}\left(r_{m1,m2,p}(k)\right)}{\partial \operatorname{Im}\left(x_m(i)\right)} &= \delta_{m,m1} \operatorname{Im}\left(x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \\ &+ \delta_{m,m2} \operatorname{Im}\left(x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right); \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Im}\left(r_{m1,m2,p}(k)\right)}{\partial \operatorname{Re}\left(x_m(i)\right)} &= -\delta_{m,m1} \operatorname{Im}\left(x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \\ &+ \delta_{m,m2} \operatorname{Im}\left(x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right); \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Im}\left(r_{m1,m2,p}(k)\right)}{\partial \operatorname{Im}\left(x_m(i)\right)} &= \delta_{m,m1} \operatorname{Re}\left(x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \\ &- \delta_{m,m2} \operatorname{Re}\left(x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right). \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

A ce stade, nous pouvons alors calculer les dérivées partielles de $E_{m1,m2,p}$ par rapport aux parties réelles et imaginaires de $x_m(i)$. Et on obtient après développement:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{m1,m2,p}}{\partial \operatorname{Re}\left(x_m(i)\right)} &= 2q \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \left[\delta_{m,m1} \operatorname{Re}\left(r_{m1,m2,p}(k)x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \right. \\ &\left. + \delta_{m,m2} \operatorname{Re}\left(r_{m1,m2,p}(k)\left(x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right)^*\right) \right]; \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{m1,m2,p}}{\partial \operatorname{Im}\left(x_m(i)\right)} &= 2q \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \left[\delta_{m,m1} \operatorname{Im}\left(r_{m1,m2,p}(k)x_{m2}(i+k)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \right. \\ &\left. - \delta_{m,m2} \operatorname{Im}\left(r_{m1,m2,p}(k)\left(x_{m1}(i-k)e^{j2\pi\frac{(i-k)p}{N}}\right)^*\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Par conséquent, en utilisant la règle de la chaîne on obtient l'expression de la dérivée partielle de $E_{m1,m2,p}$ selon $\phi_m(i)$ en fonction des dérivées partielles de $E_{m1,m2,p}$ selon les parties réelles et imaginaires de $x_m(i)$:

$$\frac{\partial E_{m1,m2,p}}{\partial \phi_m(i)} = -\operatorname{Im}\left(x_m(i)\right) \frac{\partial E_{m1,m2,p}}{\partial \operatorname{Re}\left(x_m(i)\right)} + \operatorname{Re}\left(x_m(i)\right) \frac{\partial E_{m1,m2,p}}{\partial \operatorname{Im}\left(x_m(i)\right)}. \quad (5.1.29)$$

Après développement il vient alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{m1,m2,p}}{\partial \phi_m(i)} &= -2q \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \\ &\times \left[\delta_{m,m1} \text{Im} \left(x_m(i) \left(r_{m1,m2,p}(k) x_{m2}(i+k) e^{-j2\pi \frac{ip}{N}} \right)^* \right) \right. \\ &\left. + \delta_{m,m2} \text{Im} \left(x_m(i) r_{m1,m2,p}(k) \left(x_{m1}(i-k) e^{j2\pi \frac{(i-k)p}{N}} \right)^* \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

A partir de cette dernière expression et en se rappelant la propriété du produit de corrélation de $\mathbf{x}_{m1,p}$ par \mathbf{x}_{m2} vis-à-vis du conjugué (équation (5.1.6)) :

$$r_{m1,m2,p}^*(k) = r_{m2,m1,-p}(-k) e^{j2\pi \frac{pk}{N}} \begin{cases} \forall p & \text{si apériodique} \\ p \in \mathbb{Z} & \text{si périodique} \end{cases},$$

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{m1,m2,p}}{\partial \phi_m(i)} &= -2q \text{Im} \left[x_m(i) \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \right. \\ &\times \left[\delta_{m,m1} r_{m2,m1,-p}(-k) \left(x_{m2}(i+k) e^{-j2\pi \frac{(i+k)p}{N}} \right)^* \right. \\ &\left. \left. + \delta_{m,m2} r_{m1,m2,p}(k) \left(x_{m1}(i-k) e^{j2\pi \frac{(i-k)p}{N}} \right)^* \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

Pour plus de clarté on définit $\beta_m^{m1,m2,p} = \{\beta_m^{m1,m2,p}(i)\}_{i=0}^{N-1}$ avec :

$$\begin{aligned} \beta_m^{m1,m2,p}(i) &= \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \left[\delta_{m,m1} r_{m2,m1,-p}(-k) \left(x_{m2}(i+k) e^{-j2\pi \frac{(i+k)p}{N}} \right)^* \right. \\ &\left. + \delta_{m,m2} r_{m1,m2,p}(k) \left(x_{m1}(i-k) e^{j2\pi \frac{(i-k)p}{N}} \right)^* \right]. \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut-être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \beta_m^{m1,m2,p}(i) &= \delta_{m,m1} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} r_{m2,m1,-p}(-k) \left(x_{m2}(i+k) e^{-j2\pi \frac{(i+k)p}{N}} \right)^* \\ &+ \delta_{m,m2} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} r_{m1,m2,p}(k) \left(x_{m1}(i-k) e^{j2\pi \frac{(i-k)p}{N}} \right)^* \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Or si on définit les vecteurs $\mathbf{Y}_{m1,m2,p}$, $\mathbf{r}_{m1,m2,p}$ et $\boldsymbol{\theta}_p$ tels que :

$$\mathbf{Y}_{m1,m2,p} := \{\gamma_{m1,m2,p,k}\}_{k=-N+1}^{N-1} \quad \text{avec} \quad \gamma_{m1,m2,p,k} = w_{m1,m2,p,k} |r_{m1,m2,p}(k)|^{2(q-1)} \quad (5.1.33)$$

$$\mathbf{r}_{m_1, m_2, p} := \{r_{m_1, m_2, p}(k)\}_{k=-N+1}^{N-1}; \quad (5.1.34)$$

$$\boldsymbol{\theta}_p := \left\{ e^{-j2\pi \frac{kp}{N}} \right\}_{k=0}^{N-1}; \quad (5.1.35)$$

Et si on définit aussi l'opérateur $*$ et l'opérateur \circ (produit de Hadamard) tels que :

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})_i = \sum_{k=-N+1}^{N-1} x(k)y^*(i+k); \quad (5.1.36)$$

$$(\mathbf{x} \circ \mathbf{y})(k) = x(k)y(k); \quad (5.1.37)$$

on peut montrer que la dérivée partielle de l'énergie $E_{m_1, m_2, p}$ selon la phase $\phi_m(i)$ est donnée par :

$$\frac{\partial E_{m_1, m_2, p}}{\partial \phi_m(i)} = -2q \operatorname{Im}[x_m(i)\beta_m^{m_1, m_2, p}(i)]; \quad (5.1.38)$$

avec $(\cdot)^r$ l'opérateur miroir et :

$$\begin{aligned} \beta_m^{m_1, m_2, p}(i) &= \delta_{m, m_1} \left((\mathbf{Y}_{m_1, m_2, p} \circ \mathbf{r}_{m_2, m_1, -p}^r) * (\mathbf{x}_{m_2} \circ \boldsymbol{\theta}_p) \right)_i \\ &+ \delta_{m, m_2} \left((\mathbf{Y}_{m_1, m_2, p} \circ \mathbf{r}_{m_1, m_2, p}) * (\mathbf{x}_{m_1} \circ \boldsymbol{\theta}_p^*)^r \right)_{N+1-i}. \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

Ainsi, il vient que le vecteur gradient partiel $\mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p}$ est donné par :

$$\mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p} = -2q \operatorname{Im}[\mathbf{x}_m \circ \boldsymbol{\beta}_m^{m_1, m_2, p}]; \quad (5.1.40)$$

avec :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_m^{m_1, m_2, p} &= \left\{ \delta_{m, m_1} \left((\mathbf{Y}_{m_1, m_2, p} \circ \mathbf{r}_{m_2, m_1, -p}^r) * (\mathbf{x}_{m_2} \circ \boldsymbol{\theta}_p) \right)_i \right. \\ &\left. + \delta_{m, m_2} \left((\mathbf{Y}_{m_1, m_2, p} \circ \mathbf{r}_{m_1, m_2, p}) * (\mathbf{x}_{m_1} \circ \boldsymbol{\theta}_p^*)^r \right)_{N+1-i} \right\}_{i=1}^N. \end{aligned}$$

Il est alors très facile de déterminer le vecteur gradient global \mathbf{g}_m en se rappelant que:

$$\mathbf{g}_m = \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p}.$$

Finalement, on peut constater que le vecteur gradient s'exprime comme une somme faisant intervenir des fonctions de corrélation. Or ces opérations de corrélation peuvent être calculées efficacement à l'aide de *Fast Fourier Transform* (FFT). Ainsi si on note $\mathcal{F}(\cdot)$ l'opérateur de Transformée de Fourier Discrète (TFD) et si on reprend notre définition de fonction de

corrélation (équation (5.1.36)) il peut être montré que la corrélation de 2 séquences \mathbf{a} et \mathbf{b} est équivalent à [81] :

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{a})\mathcal{F}(\mathbf{b}^*)) \quad (5.1.41)$$

De fait, comme la FFT à un coût calculatoire de l'ordre de $O(h \log h)$ [82], il vient que le coût calculatoire du vecteur gradient \mathbf{g}_m est de l'ordre de $O(h \log h)$ opérations.

REMARQUE 5.1.1 : Il est aussi possible de définir $E_{m1,m2,p}$ de la manière suivante :

$$E_{m1,m2,p} = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(|r_{m1,m2,p}(k)|^{2q} - |obj_{m1,m2,p}(k)|^{2q} \right)^2 w_{m1,m2,p,k}$$

ou

$$E_{m1,m2,p} = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(|r_{m1,m2,p}(k)|^2 - |obj_{m1,m2,p}(k)|^2 \right)^{2q} w_{m1,m2,p,k}$$

avec : $obj_{m1,m2,p}(k)$ la valeur objectif associée aux paramètres $(m1, m2, p, k)$.

Cette définition ne change en rien le résultat obtenu en (5.1.40). Seul $\gamma_{m1,m2,p,k}$ change de définition pour devenir :

$$\gamma_{m1,m2,p,k} = 2w_{m1,m2,p,k} \left(|r_{m1,m2,p}(k)|^{2q} - |obj_{m1,m2,p}(k)|^{2q} \right) |r_{m1,m2,p}(k)|^{2(q-1)}$$

Ou respectivement :

$$\gamma_{m1,m2,p,k} = w_{m1,m2,p,k} \left(|r_{m1,m2,p}(k)|^2 - |obj_{m1,m2,p}(k)|^2 \right)^{2q-1}$$

Ces nouvelles définitions de la fonction de coût ont pour avantages de permettre de relaxer les contraintes, en se donnant un objectif de minimisation non plus nul mais donné par les valeurs de $obj_{m1,m2,p}(k)$. Cela permet d'atteindre de meilleurs niveaux de lobes secondaires car l'algorithme ne cherche plus à atteindre des lobes secondaires nuls mais une valeur objectif possiblement moins contraignante, donnant lieu alors à une optimisation plus homogène.

De plus, ces définitions permettent une plus grande flexibilité, donnant libre choix sur les niveaux des lobes secondaires que l'on souhaite obtenir selon les AF et au sein même des AF. C'est-à-dire qu'il est tout à fait envisageable de rechercher des lobes secondaires à -70 dB dans une zone donnée et de relaxer à -40 dB dans une autre zone de la fonction d'ambiguïté ; comme il est également envisageable de se donner comme objectif d'obtenir des niveaux de lobes secondaires plus bas pour les fonctions d'auto-ambiguïtés et un peu plus élevés pour les fonctions d'ambiguïtés croisées. Cette flexibilité donne du coup une grande liberté de configuration dans l'optimisation d'une famille de séquences, permettant ainsi une meilleure adaptation aux différents cas d'application que l'on peut rencontrer.

REMARQUE 5.1.2 : On remarque, aussi, que l'optimisation d'une raie optimise son symétrique. Donc la plage de \mathcal{P} peut être réduite à $\mathcal{P} := \{p \mid p \in \mathbb{Z}^+ \text{ si périodique, } p \in \mathbb{R}^+ \text{ sinon}\}$ ou son symétrique.

5.1.3 Algorithme

A partir du développement mené dans la partie précédente, l'algorithme de descente de gradient pour optimiser les fonctions d'ambiguïtés d'une famille de séquences complexes peut être décrit en les étapes suivantes :

ALGORITHME 5.1 : Algorithme de descente du gradient minimisant localement les AF discrètes d'une famille de séquences.

Etape 0 : Initialisation de $\mathbf{x}_m := \{x_m(n)\}_{n=0, m=1}^{N-1, M}$ (aléatoirement ou existant)
Dimensionnement de la zone à minimiser (Choix de \mathcal{P} et $\mathbf{w}_{m1, m2, p}$).

Etape 1 : Calcul des vecteurs gradients associés à chaque décalage Doppler à optimiser et à chaque couple de séquences de séquences, $\mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p}$:

$$\mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p} = -2qlm[\mathbf{x}_m \circ \boldsymbol{\beta}_m^{m_1, m_2, p}]$$

avec :

$$\boldsymbol{\beta}_m^{m_1, m_2, p} = \left\{ \delta_{m, m_1} \left((\mathbf{Y}_{m1, m2, p} \circ \mathbf{r}_{m2, m1, -p}^r) * (\mathbf{x}_{m2} \circ \boldsymbol{\theta}_p) \right)_i + \delta_{m, m_2} \left((\mathbf{Y}_{m1, m2, p} \circ \mathbf{r}_{m1, m2, p}) * (\mathbf{x}_{m1} \circ \boldsymbol{\theta}_p^*) \right)_{N+1-i} \right\}_{i=1}^N$$

$$\mathbf{r}_{m1, m2, p} = \mathbf{x}_{m1, p} * \mathbf{x}_{m2}$$

$$\mathbf{Y}_{m1, m2, p} = \mathbf{w}_{m1, m2, p} \circ |\mathbf{r}_{m1, m2, p}|^{2(q-1)}$$

Etape 2 : Calcul du vecteur gradient de chaque séquence \mathbf{g}_m de la famille :

$$\mathbf{g}_m = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p}$$

Etape 3 : Détermination du pas de descente α et actualisation des \mathbf{x}_m :

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m e^{-j\alpha \mathbf{g}_m}$$

Etape 4 : Tant que ça n'a pas convergé/rencontré un critère d'arrêt, retour à l'**Etape 1**.

REMARQUE 5.1.3 : Les critères d'arrêt ou de convergence sont divers : nombre d'itération maximum atteint, pas α trop petit, énergie sur la zone d'intérêt E suffisamment faible...

5.1.4 Résultats de l'étude

A nouveau, il peut être noté que le nombre limité de degrés de liberté (NM éléments dans $\{x_m(n)\}_{n=0, m=1}^{N-1, M}$ contraints en amplitude) limite la qualité de la convergence dans la zone que l'on souhaite optimiser. (Plus petite est la zone à optimiser, meilleur est le PSLR obtenu).

A titre d'exemple, les figures suivantes (FIGURE 5.1 et FIGURE 5.2) illustrent le comportement de l'ALGORITHME 5.1 suite à l'optimisation dans les configurations suivantes (TABLEAU 5.1 et TABLEAU 5.2) avec une initialisation aléatoire :

TABLEAU 5.1 Configuration 1 (apériodique) et 2 (périodique) –

$$w_{m1, m2, p, k} = 1, \forall(m1, m2, p, k).$$

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	3
Longueur de séquences	N	1024
Dopplers considérés	\mathcal{P}	$\mathcal{P} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
Choix des pondérations	$\mathbf{w}_{m1, m2, p}$	$w_{m1, m2, p, k} = 1, \forall(m1, m2, p, k)$
Exposant	q	10
Périodicité		Apériodique (config. 1) / Périodique (config. 2)

TABLEAU 5.2 Configuration 3 (apériodique) et 4 (périodique) –

$$w_{m1, m2, p, k} = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 64, \forall(m1, m2, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	3
Longueur de séquences	N	1024
Dopplers considérés	\mathcal{P}	$\mathcal{P} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
Choix des pondérations	$\mathbf{w}_{m1, m2, p}$	$w_{m1, m2, p, k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq 64, \forall(m1, m2, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Exposant	q	10
Périodicité		Apériodique (config. 3) / Périodique (config. 4)

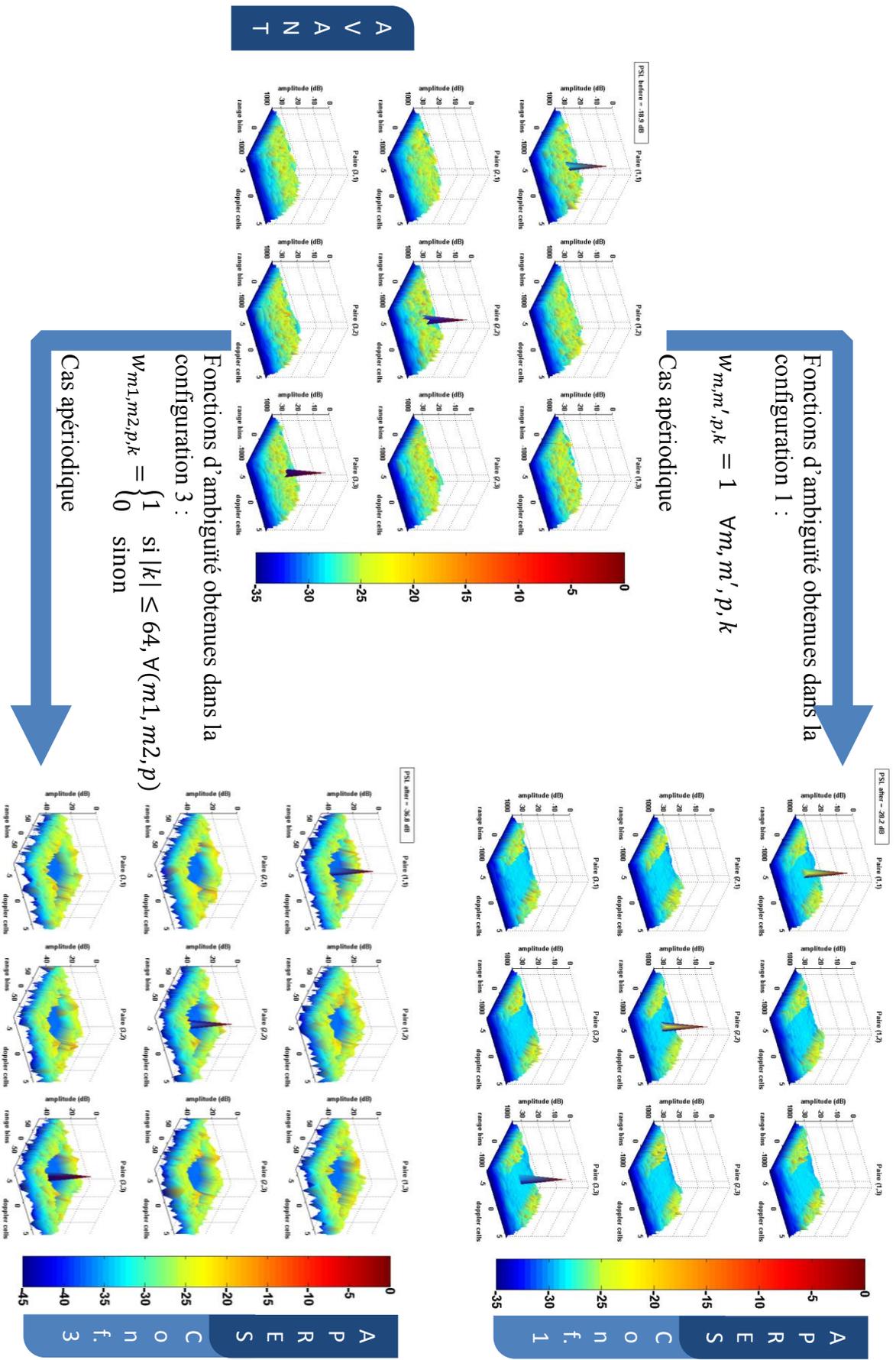


FIGURE 5.1 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes dans les configurations 1 et 3 avec l'ALGORITHME 5.1.

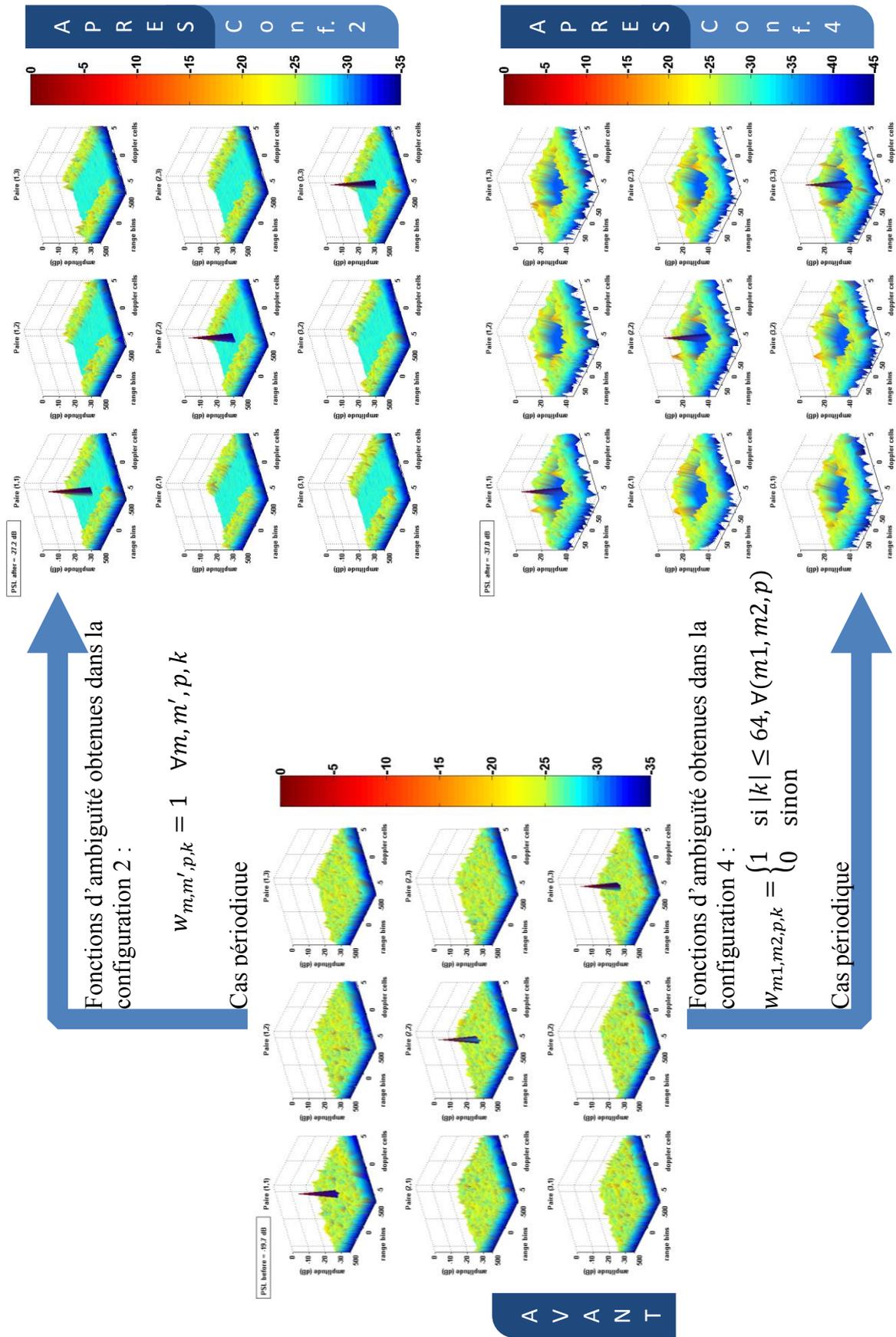


FIGURE 5.2 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes dans les configurations 2 et 4 avec l'ALGORITHME 5.1.

Ces exemples illustrent le constat concernant la contrainte de convergence associée à la zone que l'on souhaite optimiser. On observe bien que, plus la zone à optimiser est petite, meilleur est le PSLR obtenu sur ce domaine. Par contre pour les configurations 3 et 4, les résultats présentés, ici, sont obtenus au bout de 60000 itérations (condition d'arrêt de l'algorithme dans cet exemple) alors que pour les configurations 1 et 2, ils sont obtenus, respectivement, en moins de 500 et 5000 itérations.

On peut aussi remarquer que l'optimisation – que ce soit dans le cas apériodique (FIGURE 5.1) ou périodique (FIGURE 5.2) – donne à peu près des résultats similaires.

TABLEAU 5.3 PSLR obtenus selon les différentes configurations.

PSLR	Cas apériodique	/	Cas périodique
Configuration 1 / 2	-28.2 dB		-27.2 dB
Configuration 3 / 4	-36.8 dB		-37.0 dB

Par contre, sous cette forme, **ces algorithmes ne permettent pas de contrôler le spectre**. A nouveau, on obtient des spectres en sinus cardinal lié au filtre de mise en forme de type porte classiquement utilisé pour sur-échantillonner le signal à l'émission. Ainsi, il est nécessaire de réaliser un fenêtrage fréquentiel afin de respecter la bande imposée au système ce qui a pour conséquence de dégrader le PAPR et la résolution distance du signal (Cf. 3.2.7).

5.2 Optimisation directe du spectre

Tout comme la **Partie 4.2**, cette étude part du constat que les codes Pseudo-Aléatoires ont tendance à avoir un spectre en sinus cardinal, à cause du filtre de mise en forme rectangulaire classiquement utilisé pour sur-échantillonner.

Par conséquent, il est nécessaire de réaliser des pondérations fréquentielles pour pouvoir contrôler le spectre. Toutefois cela se paye par une détérioration du PAPR.

Le constat est le même avec les algorithmes cycliques et les algorithmes du gradient présentés plus haut (Cf. **Partie 4.1** et **Partie 5.1**)

De ce fait, se basant sur une approche « directe » pour optimiser le spectre, semblable à celle prise par He, Li et Stoica dans leurs algorithmes SCAN (*Stopband Cyclic Algorithm-New*) [3],

nous allons réaliser, ici, l'optimisation non plus à l'aide d'algorithmes cycliques mais par l'intermédiaire d'une descente de gradient.

5.2.1 Objectifs et Notations

Soit une séquence $\mathbf{x} := \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ de longueur N , et $\tilde{\mathbf{X}} := \{\tilde{X}(p)\}_{p=0}^{\tilde{N}-1}$ sa transformée de Fourier sur $\tilde{N} \geq N$ points (avec zero-padding) :

$$\tilde{X}(p) = \sum_{k=0}^{\tilde{N}-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kp}{\tilde{N}}} \quad (5.2.1)$$

Si on définit les bandes interdites comme des zones du spectre que l'on souhaite plus ou moins atténuer, et que l'on note $\mathbf{w}' := \{w'_p\}_{p=0}^{\tilde{N}-1}$ les coefficients de pondération permettant de contrôler cette atténuation, alors minimiser l'émission dans les bandes interdites correspond à minimiser l'énergie portée par ces bandes. (Les bandes interdites sont décrites par les coefficients de pondérations w'_p). (FIGURE 5.3)

$$E = \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} |\tilde{X}(p)|^{2q} w'_p \quad (5.2.2)$$

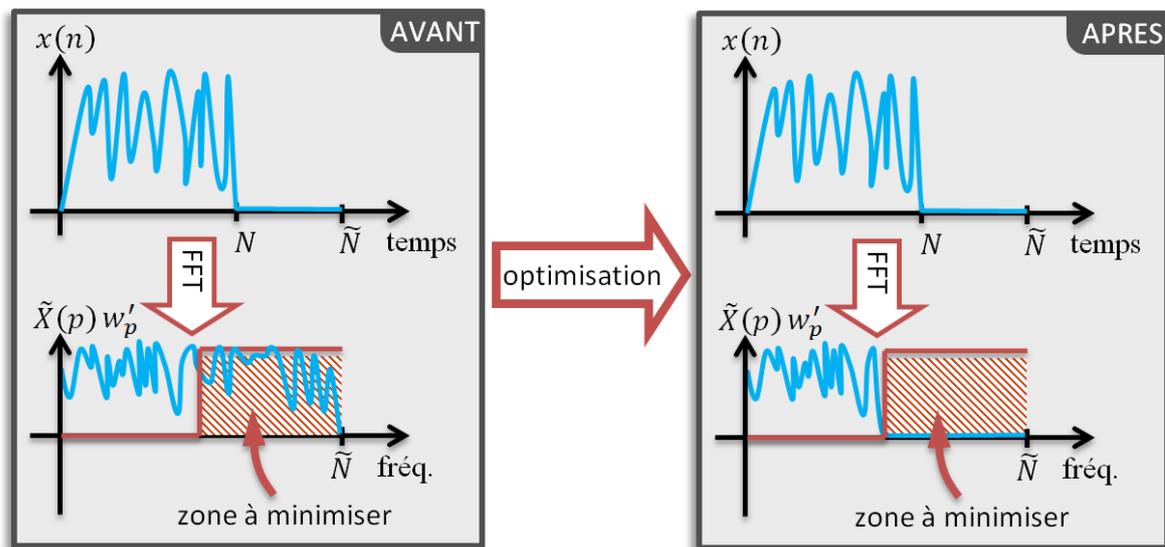


FIGURE 5.3 Objectif de l'optimisation directe du spectre.

5.2.2 Calcul du gradient

Dès lors, nous allons nous attaquer au calcul du gradient de E . Afin de mener ce calcul, nous allons calculer le gradient associé aux éléments $\{x(i)\}_{i=0}^{N-1}$ de la séquence. Or, comme on

suppose que la séquence a une enveloppe temporelle prédéfinie, le gradient sera calculé selon les phases de la séquence, à savoir les $\{\phi(i)\}_{i=0}^{N-1}$.

Ainsi, nous allons nous focaliser sur le calcul du gradient de E selon la i -ième phase de \mathbf{x} , $\phi(i)$. Pour ce faire, commençons par expliciter $\frac{\partial E}{\partial \phi(i)}$.

A nouveau, en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées on peut ramener le calcul de la dérivée partielle selon $\phi(i)$ à celui du calcul des dérivées partielles selon les parties réelles et imaginaires de $x(i)$:

$$\frac{\partial E}{\partial \phi(i)} = -Im(x(i)) \frac{\partial E}{\partial Re(x(i))} + Re(x(i)) \frac{\partial E}{\partial Im(x(i))}. \quad (5.2.3)$$

Or il peut être montré que :

$$\frac{\partial E}{\partial (\cdot)} = q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} w'_p |\tilde{X}(p)|^{2(q-1)} \frac{\partial |\tilde{X}(p)|^2}{\partial (\cdot)} \quad (5.2.4)$$

avec :
$$\partial (\cdot) = \begin{cases} \partial Re(x(i)) \\ \partial Im(x(i)) \end{cases}.$$

Si on note :
$$\gamma_p = w'_p |\tilde{X}(p)|^{2(q-1)}$$

et :
$$|\tilde{X}(p)|^2 = Re(\tilde{X}(p))^2 + Im(\tilde{X}(p))^2;$$

l'expression précédente devient :

$$\frac{\partial E}{\partial (\cdot)} = 2q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \left[Re(\tilde{X}(p)) \frac{\partial Re(\tilde{X}(p))}{\partial (\cdot)} + Im(\tilde{X}(p)) \frac{\partial Im(\tilde{X}(p))}{\partial (\cdot)} \right]. \quad (5.2.5)$$

Dans le but d'expliciter cette dernière expression, nous allons tout d'abord développer les expressions des parties réelles et imaginaires de $\tilde{X}(p)$:

$$Re(\tilde{X}(p)) = Re\left(x(i)e^{-j2\pi\frac{ip}{N}}\right) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{\tilde{N}-1} Re\left(x(k)e^{-j2\pi\frac{kp}{N}}\right). \quad (5.2.6)$$

Or, en s'appuyant sur les propriétés liant les parties réelles et imaginaires de deux nombres complexes a et b à la partie réelle de leur produit ((5.1.16) et (5.1.17)) il vient :

$$\begin{aligned}
Re(\tilde{X}(p)) &= Re(x(i))Re\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right) + Im(x(i))Im\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \\
&+ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{\tilde{N}-1} Re\left(x(k)e^{-j2\pi\frac{kp}{N}}\right).
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

De même, en s'appuyant cette fois sur les propriétés de la partie imaginaire du produit de deux complexes ((5.1.20) et (5.1.21)) il vient que la partie imaginaire de $\tilde{X}(p)$ peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned}
Im(\tilde{X}(p)) &= Im(x(i))Re\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right) - Re(x(i))Im\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \\
&+ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{\tilde{N}-1} Im\left(x(k)e^{-j2\pi\frac{kp}{N}}\right).
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

A partir des équations (5.2.7) et (5.2.8) il découle que :

$$\frac{\partial Re(\tilde{X}(p))}{\partial Re(x(i))} = Re\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right); \tag{5.2.9}$$

$$\frac{\partial Re(\tilde{X}(p))}{\partial Im(x(i))} = Im\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right); \tag{5.2.10}$$

$$\frac{\partial Im(\tilde{X}(p))}{\partial Re(x(i))} = -Im\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right); \tag{5.2.11}$$

$$\frac{\partial Im(\tilde{X}(p))}{\partial Im(x(i))} = Re\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right). \tag{5.2.12}$$

A ce stade, nous pouvons alors calculer les dérivés partielles de E par rapport aux parties réelles et imaginaires de $x(i)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial Re(x(i))} &= 2q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \left[Re(\tilde{X}(p)) \frac{\partial Re(\tilde{X}(p))}{\partial Re(x(i))} + Im(\tilde{X}(p)) \frac{\partial Im(\tilde{X}(p))}{\partial Re(x(i))} \right] \\
&= 2q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \left[Re(\tilde{X}(p)) Re\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right) - Im(\tilde{X}(p)) Im\left(e^{j2\pi\frac{ip}{N}}\right) \right];
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \text{Im}(x(i))} &= 2q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \left[\text{Re}(\tilde{X}(p)) \frac{\partial \text{Re}(\tilde{X}(p))}{\partial \text{Im}(x(i))} + \text{Im}(\tilde{X}(p)) \frac{\partial \text{Im}(\tilde{X}(p))}{\partial \text{Im}(x(i))} \right] \\ &= 2q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \left[\text{Re}(\tilde{X}(p)) \text{Im}\left(e^{j2\pi \frac{ip}{\tilde{N}}}\right) + \text{Im}(\tilde{X}(p)) \text{Re}\left(e^{j2\pi \frac{ip}{\tilde{N}}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Or, d'après les relations liant les parties réelles et imaginaires de deux complexes avec les parties réelles et imaginaires du produit ((5.1.16), (5.1.17), (5.1.20) et (5.1.21)) :

$$\frac{\partial E}{\partial \text{Re}(x(i))} = 2q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \text{Re}\left(\tilde{X}(p) e^{j2\pi \frac{ip}{\tilde{N}}}\right); \quad (5.2.15)$$

et :

$$\frac{\partial E}{\partial \text{Im}(x(i))} = 2q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \text{Im}\left(\tilde{X}(p) e^{j2\pi \frac{ip}{\tilde{N}}}\right). \quad (5.2.16)$$

Par conséquent, en utilisant la règle de la chaîne, on obtient l'expression de la dérivée partielle de E selon $\phi(i)$ à partir des dérivés partielles de E selon les parties réelles et imaginaires de $x(i)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \phi(i)} &= -2q \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \text{Im}\left(x(i) \left(\tilde{X}(p) e^{j2\pi \frac{ip}{\tilde{N}}}\right)^*\right) \\ &= -2q \text{Im}\left[x(i) \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_p \tilde{X}^*(p) e^{-j2\pi \frac{ip}{\tilde{N}}}\right]. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

On peut remarquer que cette dernière expression peut être calculée à l'aide d'une transformée de Fourier. Ainsi si on définit les vecteurs $\boldsymbol{\gamma}$ et $\tilde{\mathbf{X}}$ tels que :

$$\boldsymbol{\gamma} := \{\gamma_p\}_{p=0}^{\tilde{N}-1} \quad (5.2.18)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} := \{\tilde{X}(p)\}_{p=0}^{\tilde{N}-1} \quad (5.2.19)$$

Et si on note $\mathcal{F}_{\tilde{N}}(\cdot)$ la Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur \tilde{N} éléments, il vient alors

que le vecteur gradient noté $\mathbf{g} := \left\{ \frac{\partial E}{\partial \phi(i)} \right\}_{i=0}^{\tilde{N}-1}$ est donné par :

$$\mathbf{g} = -2q \text{Im}\left[\mathbf{x} \circ \mathcal{F}_{\tilde{N}}(\boldsymbol{\gamma} \circ \tilde{\mathbf{X}}^*)\right] \quad (5.2.20)$$

5.2.3 Algorithme

A partir du développement mené dans la partie précédente, l'algorithme de descente de gradient pour optimiser le spectre d'une séquence polyphase peut être décrit par les étapes suivantes :

ALGORITHME 5.2 : *Algorithme de descente du gradient optimisant le spectre.*

Etape 0 : Initialisation de la séquence : $\mathbf{x} := \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ (aléatoirement ou existant)

Facteur de sur-échantillonnage (Choix de \tilde{N})

Dimensionnement des bandes autorisées et interdites (Choix de \mathbf{w}')

Etape 1 : Calcul du vecteur gradient \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} = -2q \text{Im}[\mathbf{x} \circ \mathcal{F}_{\tilde{N}}(\boldsymbol{\gamma} \circ \tilde{\mathbf{X}}^*)]$$

avec :

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w}' \circ |\tilde{\mathbf{X}}|^{2(q-1)} \quad \text{où} \quad \mathbf{w}' = \{w'_p\}_{p=0}^{\tilde{N}-1}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathcal{F}_{\tilde{N}}(\mathbf{x})$$

Etape 2 : Détermination du pas de descente α et actualisation de \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} e^{-j\alpha \mathbf{g}}$$

Etape 3 : Tant que ça n'a pas convergé/rencontré un critère d'arrêt, retour à l'**Etape 1**.

5.2.4 Résultats l'étude

Afin d'illustrer les performances de cette algorithme, nous avons étudié les configurations suivantes : $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ tirés aléatoirement à l'initialisation avec $N = 3 \times 3072$, $\tilde{N} = N$, $q = 4$ et respectivement :

- $w'_p = \begin{cases} 1 & p > 3072 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (CONFIGURATION 1) ;
- $w'_p = \begin{cases} 1 & 512 < p < 1024 \text{ et } p > 3072 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (CONFIGURATION 2).

En particulier, les figures suivantes donnent les spectres des séquences obtenues suite à l'optimisation par la méthode du gradient (courbe bleu) et les spectres de ces séquences optimisées suite à l'application d'un fenêtrage fréquentiel afin de nettoyer les résidus d'émissions hors-bande en y associant la dégradation sur le PAPR associée (courbe verte).

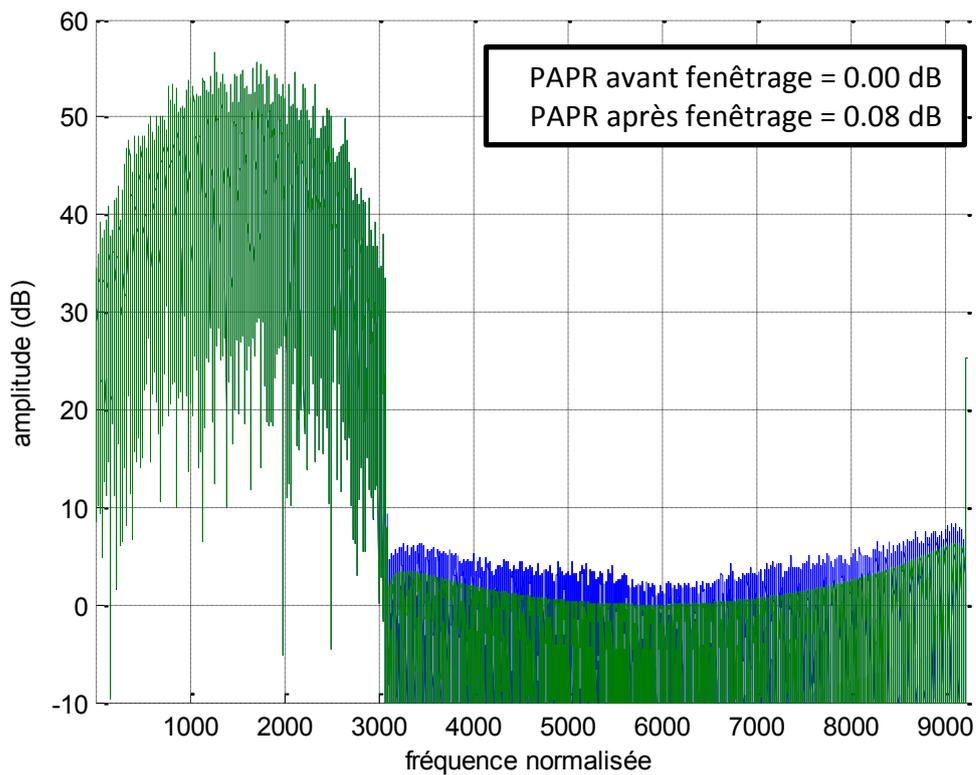


FIGURE 5.4 Spectre optimisé dans la CONFIGURATION 1 sans (bleu) et avec (vert) fenêtrage fréquentiel (porte) et PAPR avant et après fenêtrage..

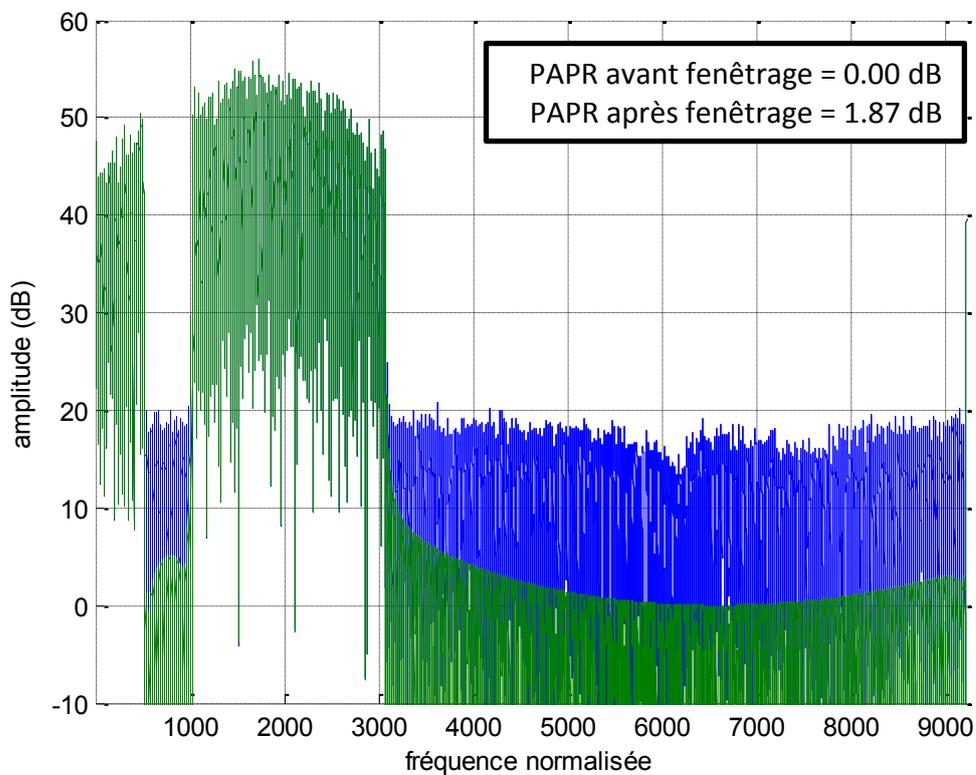


FIGURE 5.5 Spectre optimisé dans la CONFIGURATION 2 sans (bleu) et avec (vert) fenêtrage fréquentiel (porte) et PAPR avant et après fenêtrage.

Différentes remarques peuvent être faites :

- On constate que l'optimisation de la zone hors bande seule donne une bonne réjection des émissions dans ladite zone (courbe bleue). Ainsi l'application d'un fenêtrage fréquentiel afin de nettoyer les résidus d'émissions hors-bande ne détériore pas trop le signal optimisé (le PAPR n'augmente pas de manière significative, courbe verte).
- Par contre, lorsqu'on se donne à optimiser la zone hors-bande et des bandes interdites au sein même de la bande passante, l'algorithme optimise plus difficilement le spectre. On constate alors que les niveaux de réjection dans ces zones sont bien moins importants que dans le premier cas de figure (optimisation de la zone hors-bande seule) avec un delta d'une dizaine de décibel (courbe bleue, Cf. TABLEAU 5.5). Et tout naturellement, l'application d'un fenêtrage fréquentiel (courbe verte) afin de nettoyer les résidus d'émissions hors-bande détériore significativement le signal optimisé (le PAPR augmente de manière significative), avec un PAPR, après filtrage supérieur, à 1 dB.

Les tableaux suivants illustrent ces remarques à travers les niveaux de :

- l'énergie moyenne des différentes bandes (B_1, B_2, \dots)

$$E_{b B_i} = 10 \log_{10} \left(\left(\sum_{p \in B_i} |\tilde{X}(p)|^2 \right) / \left(\sum_{p \in B_i} 1 \right) \right)$$

- l'énergie moyenne de la bande totale :

$$E_b = 10 \log_{10} \left(\left(\sum_{p \in \cup B_i} |\tilde{X}(p)|^2 \right) / \left(\sum_{p \in \cup B_i} 1 \right) \right)$$

- l'énergie moyenne de réjection hors-bande (HB) :

$$E_{rej HB} = 10 \log_{10} \left(\left(\sum_{p \in HB} |\tilde{X}(p)|^2 \right) / \left(\sum_{p \in HB} 1 \right) \right)$$

- l'énergie moyenne de réjection dans les bandes interdites (BI) :

$$E_{rej BI} = 10 \log_{10} \left(\left(\sum_{p \in BI} |\tilde{X}(p)|^2 \right) / \left(\sum_{p \in BI} 1 \right) \right)$$

- le gain en réjection hors-bande :

$$G_{rej HB} = E_{rej HB} - E_b$$

- le gain en réjection dans les bandes interdites :

$$G_{rej BI} = E_{rej BI} - E_b$$

TABLEAU 5.4 Energie moyenne de toutes les sous-bandes ainsi que de la bande globale dans les CONFIGURATIONS 1 et 2 avant et après fenêtrage fréquentiel.

Configurations	E_b		$E_{b B_1}$		$E_{b B_2}$	
	AVANT Filtrage	APRES Filtrage	AVANT Filtrage	APRES Filtrage	AVANT Filtrage	APRES Filtrage
CONFIGURATION 1	44.4 dB	44.4 dB	44.4 dB	44.4 dB	-	-
CONFIGURATION 2	45.2 dB	45.2 dB	45.8 dB	45.8 dB	41.0 dB	41.0 dB

TABLEAU 5.5 Energie moyenne de réjection Hors-Bande ainsi que celle de la Bande Interdite dans les CONFIGURATIONS 1 et 2 avant et après fenêtrage fréquentiel.

Configurations	$E_{rej HB}$ ($G_{rej HB}$)		$E_{rej BI}$ ($G_{rej BI}$)	
	AVANT Filtrage	APRES Filtrage	AVANT Filtrage	APRES Filtrage
CONFIGURATION 1	-0.5 dB (-44.9 dB)	-1.0 dB (-45.4 dB)	-	-
CONFIGURATION 2	12.8 dB (-32.4 dB)	-0.4 dB (-45.7 dB)	13.9 dB (-31.3 dB)	1.5 dB (-43.7 dB)

TABLEAU 5.6 PAPR obtenu dans les Configurations 1 et 2 avant et après fenêtrage fréquentiel.

Configurations	PAPR	
	AVANT Filtrage	APRES Filtrage
CONFIGURATION 1	0.0 dB	0.08 dB
CONFIGURATION 2	0.0 dB	1.87 dB

Dans les exemples précédents, on a considéré seulement le cas $\tilde{N} = N$; ce choix a été pris car il peut être observé que sur-échantillonner le signal ($\tilde{N} > N$) ne donne pas forcément de meilleurs résultats, en particulier après filtrage fréquentiel.

5.3 Optimisation du spectre et du PAPR

Cette partie reprend l'approche de la **Partie 4.2** pour contrôler le spectre d'une séquence (dont l'enveloppe temporelle est prédéfinie) à l'aide d'une méthode de sur-échantillonnage par FFT. Toutefois, ce sur-échantillonnage engendre la plupart du temps une fluctuation d'enveloppe. De ce fait, l'objectif est ici de contrôler cette fluctuation d'enveloppe temporelle (PAPR) par le biais d'une descente de gradient sur la phase de la séquence non sur-échantillonnée.

5.3.1 Objectifs et Notations

Soit une séquence $\mathbf{x} := \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ de longueur N , $\mathbf{X} := \{X(p)\}_{p=0}^{N-1}$ sa transformée de Fourier sur N éléments, et $\tilde{\mathbf{x}} := \{\tilde{x}(n)\}_{n=0}^{\tilde{N}-1}$ sa version sur-échantillonnée de longueur $\tilde{N} \geq N$ de filtre de mise en forme $\mathbf{W} := \{W(p)\}_{p=0}^{N-1}$ avec :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \sum_{p=0}^{N-1} X(p)W(p)e^{j2\pi\frac{pn}{\tilde{N}}} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\frac{kp}{N}} \right) W(p)e^{j2\pi\frac{pn}{\tilde{N}}} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

On considère que la séquence $\tilde{\mathbf{x}}$ doit vérifier une contrainte sur son énergie :

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} |\tilde{x}(n)|^2 = \tilde{N} \quad (5.3.2)$$

Par conséquent, minimiser le PAPR de $\tilde{\mathbf{x}}$ revient à minimiser l'écart des $|\tilde{x}(n)|^2$ à 1.

Et donc, l'optimisation consiste à minimiser la fonction de coût suivante :

$$E = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} (|\tilde{x}(n)|^2 - 1)^{2q} \quad (5.3.3)$$

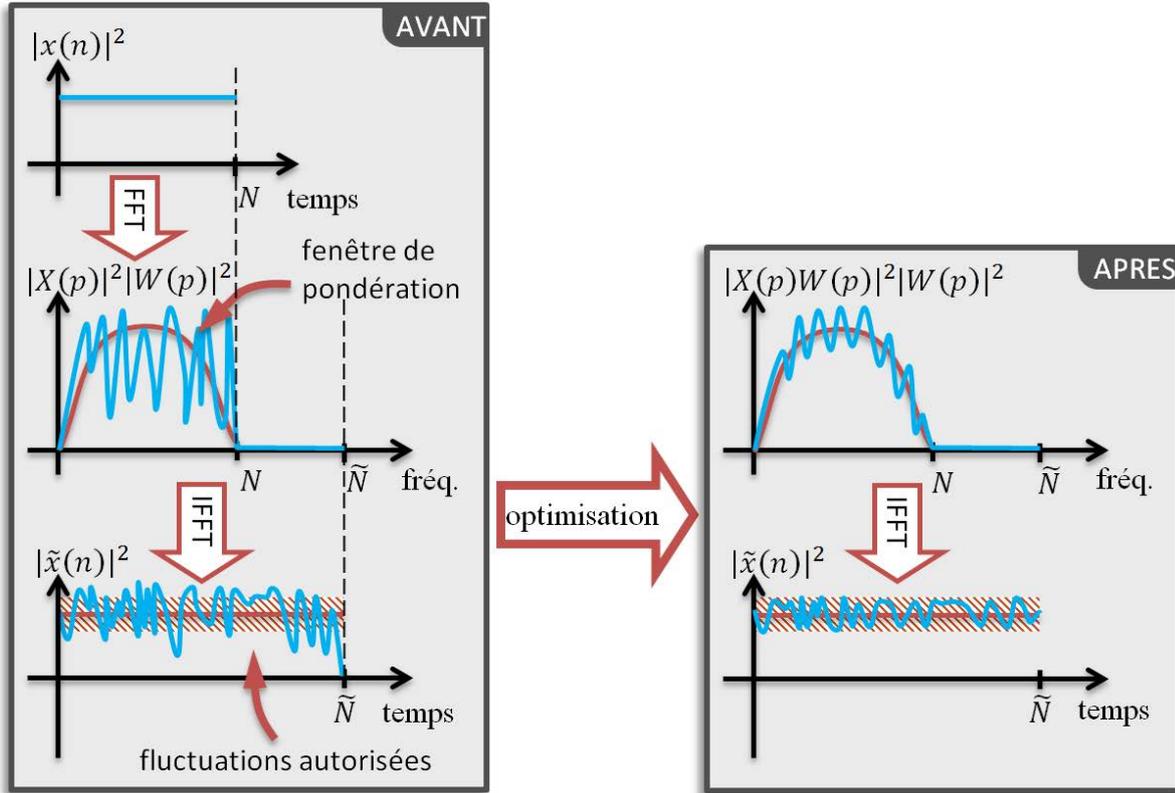


FIGURE 5.6 Objectif de l’optimisation du spectre et du PAPR.

5.3.2 Calcul du gradient

On souhaite minimiser le PAPR et donc les fluctuations d’enveloppe de la version sur-échantillonnée de \mathbf{x} , notée $\tilde{\mathbf{x}}$. Nous allons donc partir d’une séquence \mathbf{x} dont le module est constant afin de faciliter la minimisation de E ; par conséquent le calcul du gradient de E se fera, à nouveau, selon les phases de la séquence \mathbf{x} , à savoir les $\{\phi(i)\}_{i=0}^{N-1}$.

Ainsi nous allons nous focaliser sur le calcul du gradient de E selon la i -ième phase de \mathbf{x} , $\phi(i)$ que l’on notera $\frac{\partial E}{\partial \phi(i)}$. Toutefois, les calculs menés dans cette partie sont très semblables à ceux de la partie précédente (Cf. 5.2.2), par conséquent, seules les étapes clés du calculs seront données ici.

Tout d’abord, sachant que $|\tilde{x}(n)|^2 = \text{Re}(\tilde{x}(n))^2 + \text{Im}(\tilde{x}(n))^2$, il peut être montré que :

$$\frac{\partial E}{\partial (\cdot)} = 4q \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_n \left[\text{Re}(\tilde{x}(n)) \frac{\partial \text{Re}(\tilde{x}(n))}{\partial (\cdot)} + \text{Im}(\tilde{x}(n)) \frac{\partial \text{Im}(\tilde{x}(n))}{\partial (\cdot)} \right] \quad (5.3.4)$$

$$\text{avec : } \partial(\cdot) = \begin{cases} \partial \text{Re}(x(i)) \\ \partial \text{Im}(x(i)) \end{cases},$$

$$\gamma_n = (|\tilde{x}(n)|^2 - 1)^{2q-1}.$$

Ensuite, dans le but d'expliciter cette dernière expression, en utilisant les propriétés liant les parties réelles et imaginaires de deux nombres complexes a et b à la partie réelle et imaginaires de leur produit ((5.1.16), (5.1.17), (5.1.20) et (5.1.21)), il est possible de montrer que :

$$\frac{\partial \text{Re}(\tilde{x}(n))}{\partial \text{Re}(x(i))} = \sum_{p=0}^{N-1} \text{Re} \left(e^{j2\pi \frac{ip}{N}} W^*(p) e^{-j2\pi \frac{pn}{N}} \right) \quad (5.3.5)$$

$$\frac{\partial \text{Re}(\tilde{x}(n))}{\partial \text{Im}(x(i))} = \sum_{p=0}^{N-1} \text{Im} \left(e^{j2\pi \frac{ip}{N}} W^*(p) e^{-j2\pi \frac{pn}{N}} \right) \quad (5.3.6)$$

$$\frac{\partial \text{Im}(\tilde{x}(n))}{\partial \text{Re}(x(i))} = - \sum_{p=0}^{N-1} \text{Im} \left(e^{j2\pi \frac{ip}{N}} W^*(p) e^{-j2\pi \frac{pn}{N}} \right) \quad (5.3.7)$$

$$\frac{\partial \text{Im}(\tilde{x}(n))}{\partial \text{Im}(x(i))} = \sum_{p=0}^{N-1} \text{Re} \left(e^{j2\pi \frac{ip}{N}} W^*(p) e^{-j2\pi \frac{pn}{N}} \right) \quad (5.3.8)$$

A ce stade, nous pouvons alors calculer les dérivés partielles de E par rapport aux parties réelles et imaginaires de $x(i)$:

$$\frac{\partial E}{\partial \text{Re}(x(i))} = 4q \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_n \sum_{p=0}^{N-1} \text{Re} \left(\tilde{x}(n) e^{j2\pi \frac{ip}{N}} W^*(p) e^{-j2\pi \frac{pn}{N}} \right); \quad (5.3.9)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \text{Im}(x(i))} = 4q \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_n \sum_{p=0}^{N-1} \text{Im} \left(\tilde{x}(n) e^{j2\pi \frac{ip}{N}} W^*(p) e^{-j2\pi \frac{pn}{N}} \right). \quad (5.3.10)$$

Finalement, en utilisant la règle de la chaîne on obtient l'expression de la dérivée partielle de E selon $\phi(i)$ en fonction des dérivés partielles de E selon les parties réelles et imaginaires de $x(i)$:

$$\frac{\partial E}{\partial \phi(i)} = -\text{Im}(x(i)) \frac{\partial E}{\partial \text{Re}(x(i))} + \text{Re}(x(i)) \frac{\partial E}{\partial \text{Im}(x(i))}. \quad (5.3.11)$$

Après développement il vient alors l'expression suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial \phi(i)} = -4qIm \left[x(i) \sum_{p=0}^{N-1} W(p) \left(\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_n \tilde{x}^*(n) e^{j2\pi \frac{pn}{\tilde{N}}} \right) e^{-j2\pi \frac{ip}{\tilde{N}}} \right] \quad (5.3.12)$$

On peut remarquer que cette dernière expression peut être calculée à l'aide de transformée de Fourier. Ainsi si on définit les vecteurs $\boldsymbol{\gamma}$ et \mathbf{A} tels que :

$$\boldsymbol{\gamma} := \{\gamma_n\}_{n=0}^{\tilde{N}-1} \quad (5.3.13)$$

$$\mathbf{A} := \{A(p)\}_{p=0}^{\tilde{N}-1} \quad (5.3.14)$$

$$A(p) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \gamma_n \tilde{x}^*(n) e^{j2\pi \frac{pn}{\tilde{N}}} \quad (5.3.15)$$

Et si on note : $\mathcal{F}_N(\cdot)$ la Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur N éléments

$\mathcal{F}_{\tilde{N}}^{-1}(\cdot)$ la Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDi) sur \tilde{N} éléments

Il vient alors que :

$$\mathbf{A} = \mathcal{F}_{\tilde{N}}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \circ \tilde{\mathbf{x}}^*) \quad (5.3.16)$$

Et donc, le vecteur gradient noté $\mathbf{g} := \left\{ \frac{\partial E}{\partial \phi(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ est donné par :

$$\mathbf{g} = -4qIm[\mathbf{x} \circ \mathcal{F}_N(\mathbf{W} \circ \mathbf{A}_N)] \quad (5.3.17)$$

avec :

$$\mathbf{W} := \{W(p)\}_{p=0}^{N-1}; \quad (5.3.18)$$

$$\mathbf{A}_N := \{A(p)\}_{p=0}^{N-1}. \quad (5.3.19)$$

REMARQUE 5.3.1 : Il est aussi possible de définir E de la manière suivante :

$$E = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} (|\tilde{x}(n)|^{2q} - 1)^2$$

Cette définition ne change en rien le résultat obtenu en (5.3.17). Seul γ_n change de définition pour devenir :

$$\gamma_n = 2(|\tilde{x}(n)|^{2q} - 1)|\tilde{x}(n)|^{2(q-1)}$$

5.3.3 Algorithme

A partir du développement mené dans la partie précédente, l'algorithme de descente de gradient pour optimiser le spectre et le PAPR d'une séquence peut être décrit par les étapes suivantes :

ALGORITHME 5.3 : *Algorithme de descente du gradient optimisant le spectre et le PAPR.*

Etape 0 : Initialisation de la séquence : $\mathbf{x} := \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ (aléatoirement ou existant) ;

Facteur de sur-échantillonnage (Choix de \tilde{N}) ;

Dimensionnement des bandes autorisées et interdites (Choix de \mathbf{W}).

Etape 1 : Calcul du vecteur gradient \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} = -4q \text{Im}[\mathbf{x} \circ \mathcal{F}_N(\mathbf{W} \circ \mathbf{A}_N)]$$

avec :

$$\mathbf{W} := \{W(p)\}_{p=0}^{N-1} ;$$

$$\mathbf{A}_N := \{A(p)\}_{p=0}^{N-1} \quad \text{où} \quad \mathbf{A} := \{A(p)\}_{p=0}^{\tilde{N}-1} ;$$

$$\mathbf{A} = \mathcal{F}_{\tilde{N}}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \circ \tilde{\mathbf{x}}^*) .$$

Etape 2 : Détermination du pas de descente α et actualisation de \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} e^{-j\alpha \mathbf{g}}$$

Etape 3 : Tant que ça n'a pas convergé/rencontré un critère d'arrêt, retour à l'**Etape 1**.

5.3.4 Résultats de l'étude

A titre d'exemple, les figures suivantes montrent les spectres obtenus après l'optimisation dans les configurations suivantes, $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ tirés aléatoirement à l'initialisation avec $N = 3072$, $\tilde{N} = 3N$, $q = 4$ et respectivement :

- $W(p) = \begin{cases} 1 & p > 3072 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (CONFIGURATION 1) ;
- $W(p) = \begin{cases} 1 & 512 < p < 1024 \text{ et } p > 3072 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (CONFIGURATION 2).

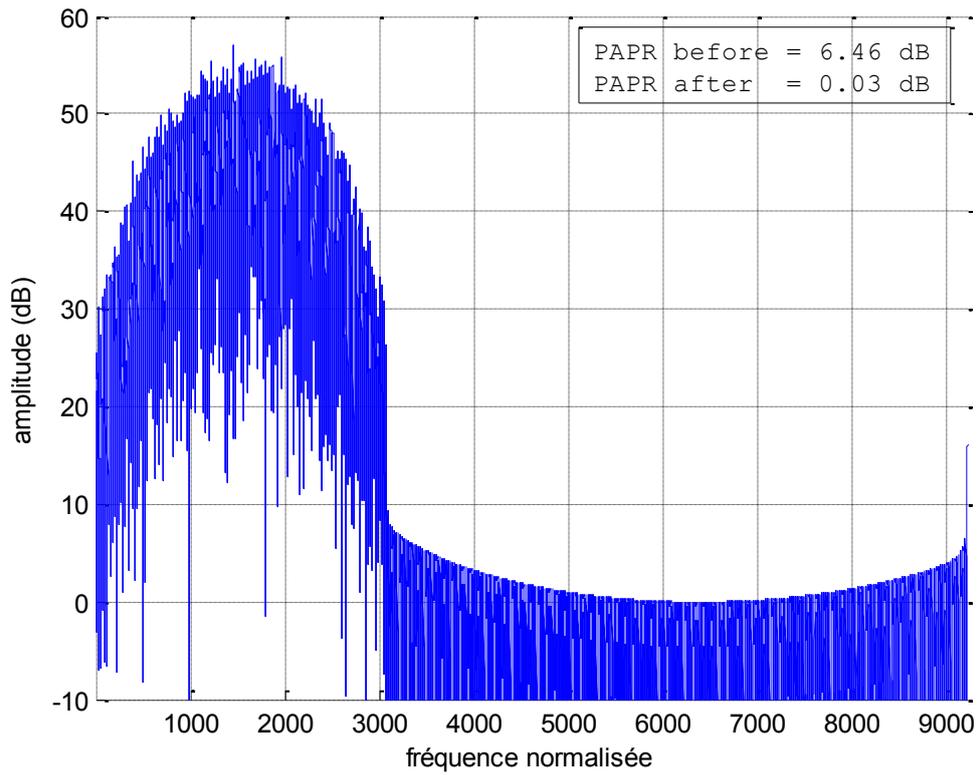


FIGURE 5.7 Spectre optimisé dans la CONFIGURATION 1 et PAPR avant et après optimisation.

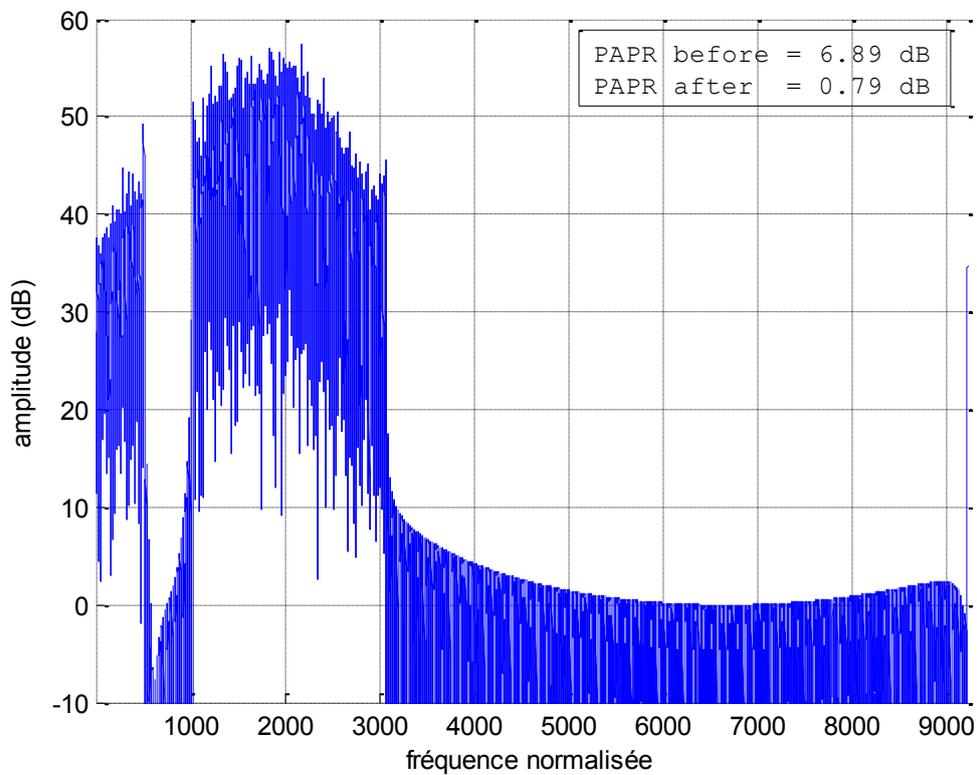


FIGURE 5.8 Spectre optimisé dans la CONFIGURATION 2 et PAPR avant et après optimisation.

On remarque sur ces figures que :

- l'optimisation de la zone hors bande seule donne des résultats quasi-similaires à celle de la méthode de la partie précédente, à savoir un PAPR extrêmement faible associé à une bonne réjection Hors-Bande.
- Et d'autre part, lorsqu'on impose des bandes interdites au sein même de la bande passante en plus de la zone Hors-Bande, l'algorithme converge vers des solutions donnant de meilleurs niveaux de réjection que ceux de la partie précédente. De plus ce gain s'obtient tout en ne dégradant pas significativement l'enveloppe temporelle du signal avec des niveaux de PAPR assez contenus (inférieur à 1 dB).

Les tableaux suivants illustrent ces remarques à travers les niveaux introduits dans la partie précédente (5.2.4) :

TABLEAU 5.7 Energie moyenne de toutes les sous-bandes ainsi que de la bande globale dans les CONFIGURATIONS 1 et 2.

Configurations	E_b	$E_{b B_1}$	$E_{b B_2}$
CONFIGURATION 1	44.4 dB	44.4 dB	—
CONFIGURATION 2	45.2 dB	46.1 dB	35.2 dB

TABLEAU 5.8 Energie moyenne de réjection Hors-Bande ainsi que celle de la Bande Interdite dans les CONFIGURATIONS 1 et 2.

Configurations	$E_{rej HB} (G_{rej HB})$	$E_{rej BI} (G_{rej BI})$
CONFIGURATION 1	-0.9 dB (-45.3 dB)	—
CONFIGURATION 2	-0.4 dB (-45.6 dB)	-1.5 dB (-46.7 dB)

TABLEAU 5.9 PAPR obtenu dans les Configurations 1 et 2 avant et après optimisation.

Configurations	PAPR	
	AVANT Opt.	APRES Opt.
CONFIGURATION 1	6.46 dB	0.03 dB
CONFIGURATION 2	6.89 dB	0.79 dB

5.4 Optimisation jointe des fonctions d'ambiguïtés et du spectre directement

Jusqu'à maintenant nous avons implémenté deux types de méthodes à base de descente de gradient : une optimisant localement les AF périodiques/apériodiques d'une famille de séquences et l'autre optimisant le spectre d'une séquence soit directement, soit par contrôle du PAPR.

Il est alors tout naturel de réaliser une fusion de ces deux méthodes afin de pouvoir contrôler tant le PSLR que le spectre, critères qui nous sont utiles pour la génération de formes d'ondes pour des systèmes MSPSR actifs.

Cette étude se place dans ce contexte et vise donc à optimiser conjointement les AF et les spectres d'une famille de séquences polyphasées (module constant, optimisation seulement de la phase) en suivant l'approche « directe » de la partie 5.2.

5.4.1 Objectifs et Notations

Dans cette partie nous allons reprendre, à quelques détails près, les notations des parties 5.1 et 5.2, à savoir :

Soit $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$ une famille de séquence de taille M , et $\mathbf{x}_m := \{x_m(n)\}_{n=0}^{N-1}$ la $m^{\text{ième}}$ séquence de longueur N de cette famille. Soit $\tilde{\mathbf{X}}_m := \{\tilde{X}_m(p)\}_{p=0}^{\tilde{N}-1}$ sa transformée de Fourier sur $\tilde{N} \geq N$ points (avec zero-padding) :

$$\tilde{X}_m(p) = \sum_{k=0}^{N-1} x_m(k) e^{-j2\pi \frac{kp}{\tilde{N}}}. \quad (5.4.1)$$

Si on définit les bandes interdites comme des zones du spectre que l'on souhaite plus ou moins atténuer, et que l'on note $\mathbf{w}'_m := \{w'_{m,p}\}_{p=0}^{\tilde{N}-1}$ les coefficients de pondération permettant de contrôler cette atténuation pour chaque séquence de la famille, alors minimiser l'émission dans les bandes interdites correspond à minimiser l'énergie portée par ces bandes :

$$E_{\text{spectre}} = \sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^{\tilde{N}-1} |\tilde{X}_m(p)|^{2q_{\text{spectre}}} w'_{m,p} \quad (5.4.2)$$

De plus, si on définit la fonction de corrélation de $\mathbf{x}_{m1,p}$ (séquence \mathbf{x}_{m1} ayant subi un Doppler normalisé p tel que $f_D = \frac{p}{NT_{ech}}$ où T_{ech} représente le temps d'échantillonnage) par \mathbf{x}_{m2} , noté $\mathbf{r}_{m1,m2,p} = \mathbf{x}_{m1,p} * \mathbf{x}_{m2}$, comme étant :

$$\begin{aligned} r_{m1,m2,p}(k) &= (\mathbf{x}_{m1,p} * \mathbf{x}_{m2})_k \\ &= \sum_{n=1}^N x_{m1}(n)x_{m2}^*(n+k)e^{j2\pi\frac{np}{N}}, \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Et si on définit \mathcal{P} , l'ensemble de raies Doppler que l'on souhaite optimiser tel que :

$$\mathcal{P} := \{p \mid p \in \mathbb{Z} \text{ si périodique}, p \in \mathbb{R} \text{ sinon}\}, \quad (5.4.4)$$

alors, la fonction de coût à prendre en compte, pour minimiser localement le niveau des lobes secondaires des fonctions d'ambiguïtés (auto-ambiguïtés et ambiguïtés-croisées), peut être définie comme suit :

$$E_{SLL} = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |r_{m1,m2,p}(k)|^{2q_{SLL}} w_{m1,m2,p,k}; \quad (5.4.5)$$

ou :

$$E_{SLL} = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(|r_{m1,m2,p}(k)|^{2q_{SLL}} - |obj_{m1,m2,p}(k)|^{2q_{SLL}} \right)^2 w_{m1,m2,p,k}, \quad (5.4.6)$$

ou encore :

$$E_{SLL} = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(|r_{m1,m2,p}(k)|^2 - |obj_{m1,m2,p}(k)|^2 \right)^{2q_{SLL}} w_{m1,m2,p,k}. \quad (5.4.7)$$

Par conséquent, dans le cas d'une optimisation jointe, la fonction de coût globale à prendre en compte peut être définie comme une combinaison linéaire des fonctions de coût sur les lobes secondaires et sur le spectre :

$$E = \lambda E_{spectre} + (1 - \lambda) E_{SLL}; \quad (5.4.8)$$

où λ est un paramètre permettant de pondérer le critère que l'on souhaite favoriser (ou défavoriser).

5.4.2 Calcul du gradient

Nous allons maintenant calculer le gradient de E . Pour cela, nous allons calculer le gradient associé aux éléments $\{x_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$ de la $m^{\text{ième}}$ séquence de la famille. Or, comme les séquences de la famille ont une enveloppe temporelle prédéfinie, le gradient sera calculé selon les phases de la $m^{\text{ième}}$ séquence, à savoir les $\{\phi_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$.

Ainsi si on note $\mathbf{g}_m = \left\{ \frac{\partial E}{\partial \phi_m(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$, $\mathbf{g}_m^{\text{spectre}} = \left\{ \frac{\partial E_{\text{spectre}}}{\partial \phi_m(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ et $\mathbf{g}_m^{\text{SLL}} = \left\{ \frac{\partial E_{\text{SLL}}}{\partial \phi_m(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ les gradients respectifs de E , E_{spectre} et E_{SLL} selon les phases de la $m^{\text{ième}}$ séquence $\{\phi_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$, il vient que :

$$\mathbf{g}_m = \lambda \mathbf{g}_m^{\text{spectre}} + (1 - \lambda) \mathbf{g}_m^{\text{SLL}}. \quad (5.4.9)$$

Nous allons, donc, focaliser notre attention sur les expressions de $\mathbf{g}_m^{\text{spectre}}$ et $\mathbf{g}_m^{\text{SLL}}$; Or les expressions de ces vecteurs gradients sont données dans les parties 5.1 et 5.2, à savoir :

$$\mathbf{g}_m^{\text{spectre}} = -2q_{\text{spectre}} \text{Im}[\mathbf{x}_m \circ \mathcal{F}_{\tilde{N}}(\mathbf{Y}'_m \circ \tilde{\mathbf{X}}_m^*)] \quad (5.4.10)$$

avec : $\mathbf{Y}'_m := \{\gamma'_{m,p}\}_{p=0}^{\tilde{N}-1}$ où $\gamma'_{m,p} = w'_{m,p} |\tilde{X}_m(p)|^{2(q_{\text{spectre}}-1)}$,

$\mathcal{F}_{\tilde{N}}(\cdot)$ la Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur \tilde{N} éléments ;

Et :

$$\mathbf{g}_m^{\text{SLL}} = \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p}; \quad (5.4.11)$$

avec : $\mathbf{g}_m^{m_1, m_2, p} = -2q_{\text{SLL}} \text{Im}[\mathbf{x}_m \circ \boldsymbol{\beta}_m^{m_1, m_2, p}]$ (Cf. parties 5.1 pour plus de détails, en particulier la REMARQUE 5.1.1 pour les définitions de E_{SLL} selon (5.4.6) ou (5.4.7)).

Il alors très facile de déterminer le vecteur gradient global \mathbf{g}_m en se rappelant que:

$$\mathbf{g}_m = \lambda \mathbf{g}_m^{\text{spectre}} + (1 - \lambda) \mathbf{g}_m^{\text{SLL}}.$$

Finalement, on constate, à nouveau, que le vecteur gradient s'exprime comme une somme faisant intervenir des fonctions de corrélation. Or, ces opérations de corrélation peuvent être calculés efficacement à l'aide de *Fast Fourier Transform* (FFT). Ainsi si on note $\mathcal{F}(\cdot)$ l'opérateur de Transformée de Fourier Discrète (TFD), et si on reprend notre définition de fonction de corrélation (équation (5.1.36)) il peut être montré que la corrélation de deux séquences \mathbf{a} et \mathbf{b} est équivalent à [81] :

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{a})\mathcal{F}(\mathbf{b}^{r*})). \quad (5.4.12)$$

De fait, comme la FFT à un coût calculatoire de l'ordre de $O(h \log h)$ [82], il vient que le coût calculatoire du vecteur gradient \mathbf{g}_m est de l'ordre de $O(h \log h)$ opérations.

5.4.3 Algorithmme

A partir du développement mené dans la partie précédente, l'algorithme de descente de gradient pour optimiser les fonctions d'ambiguïtés et le spectre d'une famille de séquences complexes peut être décrit en les étapes suivantes :

ALGORITHME 5.4 : Algorithme de descente du gradient minimisant conjointement les AF discrètes d'une famille de séquences et directement le spectre de ces séquences.

Etape 0 : Initialisation de $\mathbf{x}_m := \{x_m(n)\}_{n=0, m=1}^{N-1, M}$ (aléatoirement ou existant) ;
 Dimensionnement de la zone à minimiser (Choix de \mathcal{P} et $\mathbf{w}_{m1, m2, p}$) ;
 Facteur de sur-échantillonnage (Choix de \tilde{N}) ;
 Dimensionnement des bandes autorisées et interdites (Choix de \mathbf{w}').

Etape 1 : Calcul des vecteurs gradients associés au niveau des lobes secondaires et au spectre, \mathbf{g}_m^{SLL} et $\mathbf{g}_m^{\text{spectre}}$ respectivement :

$$\mathbf{g}_m^{SLL} = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{g}_m^{m1, m2, p}$$

avec : $\mathbf{g}_m^{m1, m2, p} = -2q_{SLL} \text{Im}[\mathbf{x}_m \circ \boldsymbol{\beta}_m^{m1, m2, p}]$ (Cf. parties 5.1).

$$\mathbf{g}_m^{\text{spectre}} = -2q_{\text{spectre}} \text{Im}[\mathbf{x}_m \circ \mathcal{F}_{\tilde{N}}(\mathbf{y}'_m \circ \tilde{\mathbf{X}}_m^*)]$$

Etape 2 : Calcul du vecteur gradient de chaque séquence \mathbf{g}_m de la famille :

$$\mathbf{g}_m = \lambda \mathbf{g}_m^{\text{spectre}} + (1 - \lambda) \mathbf{g}_m^{SLL}$$

Etape 3 : Détermination du pas de descente α et actualisation des \mathbf{x}_m :

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m e^{-j\alpha \mathbf{g}_m}$$

Etape 4 : Tant que ça n'a pas convergé/rencontré un critère d'arrêt, retour à l'**Etape 1**.

5.4.4 Résultats de l'étude

A titre d'exemple, les figures suivantes (FIGURE 5.9 et FIGURE 5.10) illustrent le comportement de l'ALGORITHME 5.4 suite à l'optimisation dans les configurations suivantes (TABLEAU 5.10 et TABLEAU 5.11) avec une initialisation aléatoire :

TABLEAU 5.10 Configuration 1 (apériodique) et 2 (périodique) –

$$w_{m1,m2,p,k} = 1, \forall(m1, m2, p, k).$$

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	3
Longueur de séquences	N	2048
Longueur sur-échantillonnée \tilde{N}		4096
Dopplers considérés	\mathcal{P}	$\mathcal{P} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
Choix des pondérations	$\mathbf{w}_{m1,m2,p}$	$w_{m1,m2,p,k} = 1, \forall(m1, m2, p, k)$
	$\mathbf{w}'_{m,p}$	$w'_{m,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p > 2048 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \forall m$
Exposant	q_{SLL}	10
	$q_{spectre}$	10
Périodicité	Apériodique (config. 1) / Périodique (config. 2)	

TABLEAU 5.11 Configuration 3 (apériodique) et 4 (périodique) –

$$w_{m1,m2,p,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 64, \forall(m1, m2, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	3
Longueur de séquences	N	2048
Longueur sur-échantillonnée \tilde{N}		4096
Dopplers considérés	\mathcal{P}	$\mathcal{P} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
Choix des pondérations	$\mathbf{w}_{m1,m2,p}$	$w_{m1,m2,p,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq 64, \forall(m1, m2, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
	$\mathbf{w}'_{m,p}$	$w'_{m,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p > 2048 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \forall m$
Exposant	q_{SLL}	10
	$q_{spectre}$	10
Périodicité	Apériodique (config. 3) / Périodique (config. 4)	

REMARQUE 5.4.1 : On optimise à partir de la $\frac{N}{\tilde{N}} \times 2048 = 1024^{\text{ième}}$ fréquence normalisée, soit à partir de $1024 \times 1/T_R$ Hz (le sur-échantillonnage offrant un meilleur contrôle du spectre).

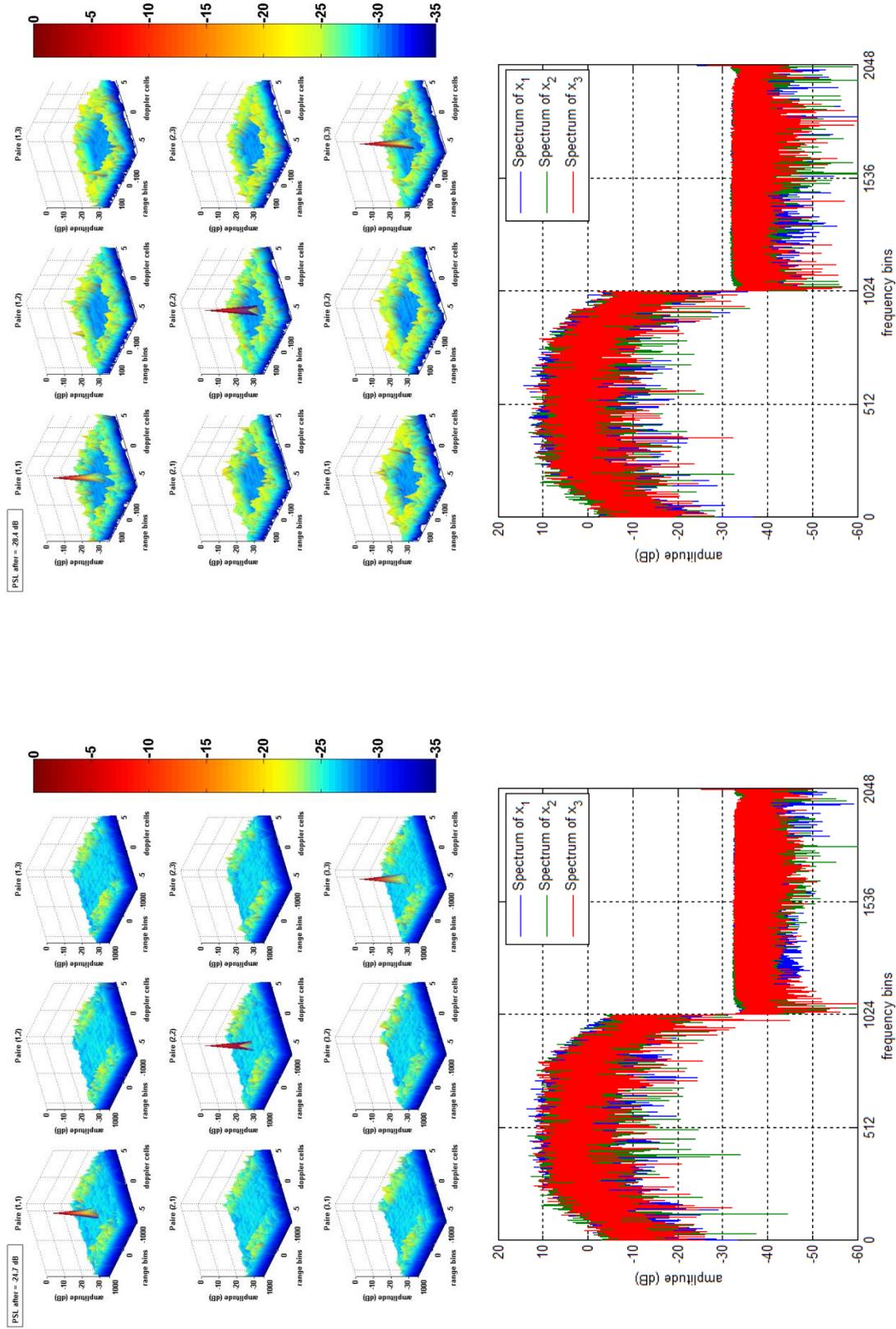


FIGURE 5.9 Exemple d'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté et du spectre après optimisation dans les configurations 1 (gauche) et 3 (droite) avec l'ALGORITHME 5.4.

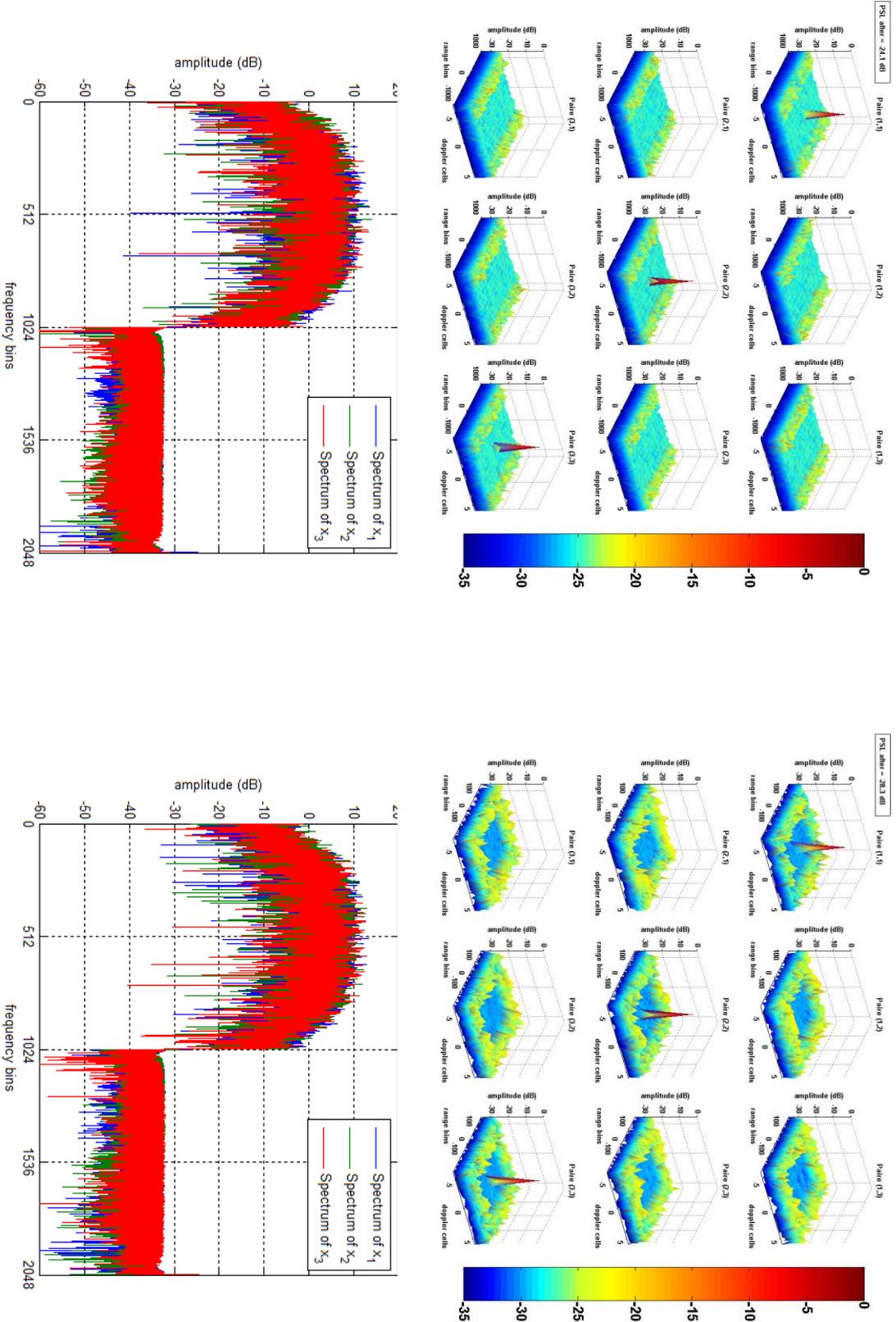


FIGURE 5.10 Exemple d'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté et du spectre après optimisation dans les configurations 2 (gauche) et 4 (droite) avec l'ALGORITHME 5.4.

Tout comme la partie 5.1.4, ces exemples illustrent le constat fait sur la contrainte de convergence associée à la zone que l'on souhaite optimiser. On observe bien que, plus la zone à optimiser est petite, meilleur est le PSLR obtenu sur ce domaine.

On peut aussi remarquer que l'optimisation, que ce soit dans le cas aperiodique (FIGURE 5.9) ou periodique (FIGURE 5.10), donne à peu près des résultats similaires.

TABLEAU 5.12 PSLR obtenus selon les différentes configurations.

PSLR	Cas aperiodique	/	Cas periodique
Configuration 1 / 2	-24.7 dB		-24.1 dB
Configuration 3 / 4	-28.4 dB		-28.3 dB

Par contre, il peut être noté qu'ici, les performances obtenues en termes de PSLR sont moins bonnes que celle de la **Partie 5.1** (Cf. TABLEAU 5.3) portant sur l'optimisation seule des fonctions d'ambiguïtés d'une famille de séquences. Cette observation s'explique par le fait que l'on optimise, ici, conjointement le spectre et les fonctions d'ambiguïtés. Et donc le nombre de contrainte sur nos séquences augmente de manière non négligeable, ce qui, irrévocablement, dégrade les performances atteignables en comparaison à une optimisation seule du PSLR.

De plus, les résultats présentés, ici, sont obtenus au bout de :

- 60000 itérations soit en environ 1 heure et 30 minutes pour la config. 1,
- 60000 itérations soit en environ 1 heure pour la config. 2,
- 60000 itérations soit en environ 37 minutes pour la config. 3,
- 60000 itérations soit en environ 37 minutes pour la config. 4,

où 60000 itérations représente la condition d'arrêt de l'algorithme dans cet exemple.

5.5 Optimisation jointe des fonctions d'ambiguïtés, du spectre et du PAPR

Comme la partie précédente (Cf. Partie 5.4), cette étude vise à optimiser conjointement les AF et les spectres d'une famille de séquences polyphasées (module constant, optimisation seulement de la phase).

Toutefois, le spectre n'est plus optimisé « directement » mais est contrôlé en suivant la méthode présentée dans les parties 4.2 et 5.3, c'est-à-dire qu'il est cette fois-ci imposé à l'aide d'une méthode de sur-échantillonnage par FFT.

L'approche consiste donc à contrôler le PAPR des séquences de la famille et à optimiser localement les différentes fonctions d'ambiguïtés dans les zones d'intérêt que l'on a préalablement défini.

5.5.1 Objectifs et Notations

Dans ce deuxième cas de figure, nous allons reprendre, à quelques détails près, les notations des parties 5.1 et 5.3, à savoir :

Soit $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$ une famille de séquence de taille M , et $\mathbf{x}_m := \{x_m(n)\}_{n=0}^{N-1}$ la $m^{\text{ième}}$ séquence de longueur N de cette famille. Soit $\mathbf{X}_m := \{X_m(p)\}_{p=0}^{N-1}$ la transformée de Fourier de \mathbf{x}_m sur N éléments définie pour $p \in \llbracket 0 : N - 1 \rrbracket$, où $\tilde{N} = lN$ avec $l > 1$:

$$X_m(p) = \sum_{k=0}^{N-1} x_m(k) e^{-j2\pi \frac{kp}{N}}. \quad (5.5.1)$$

Et soit $\tilde{\mathbf{x}}_m := \{\tilde{x}_m(n)\}_{n=0}^{\tilde{N}-1}$ la version sur-échantillonnée de \mathbf{x}_m , de longueur \tilde{N} , de filtre de mise en forme $\mathbf{W}'_m : \{W'_m(p)\}_{p=0}^{N-1}$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_m(n) &= \sum_{p=0}^{N-1} X_m(p) W'_m(p) e^{j2\pi \frac{pn}{\tilde{N}}} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_m(k) e^{-j2\pi \frac{kp}{N}} \right) W'_m(p) e^{j2\pi \frac{pn}{\tilde{N}}}; \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

avec $\forall m$, $\tilde{\mathbf{x}}_m$ vérifiant la contrainte suivante :

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} |\tilde{x}_m(n)|^2 = \tilde{N}. \quad (5.5.3)$$

De ces notations, il est évident que minimiser le PAPR de $\tilde{\mathbf{x}}_m$ revient à minimiser l'écart des $|\tilde{x}_m(n)|^2$ à 1.

Et donc, la fonction de coût à prendre en compte pour contrôler le PAPR des séquences de l'ensemble peut être définie comme suit :

$$E_{PAPR} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} (|\tilde{\mathbf{x}}_m(n)|^2 - 1)^{2q_{PAPR}} ; \quad (5.5.4)$$

ou :

$$E_{PAPR} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} (|\tilde{\mathbf{x}}_m(n)|^{2q_{PAPR}} - 1)^2. \quad (5.5.5)$$

De plus, si on définit le produit de corrélation de $\tilde{\mathbf{x}}_{m1,p}$ (séquence $\tilde{\mathbf{x}}_{m1}$ ayant subi un Doppler normalisé p tel que $f_D = \frac{p}{NT_{ech}} = \frac{p}{\tilde{N}T_{surech}}$, où T_{ech} et T_{surech} représentent la période d'échantillonnage et la période de sur-échantillonnage, respectivement) par $\tilde{\mathbf{x}}_{m2}$ noté $\tilde{\mathbf{r}}_{m1,m2,p} = \tilde{\mathbf{x}}_{m1,p} * \tilde{\mathbf{x}}_{m2}$ comme étant :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{m1,m2,p}(k) &= (\tilde{\mathbf{x}}_{m1,p} * \tilde{\mathbf{x}}_{m2})_k \\ &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \tilde{\mathbf{x}}_{m1}(n) \tilde{\mathbf{x}}_{m2}^*(n+k) e^{j2\pi \frac{np}{\tilde{N}}} ; \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

dont une propriété intéressante, quel que soit la périodicité du signal, est :

$$\tilde{\mathbf{r}}_{m1,m2,p}^*(k) = \tilde{\mathbf{r}}_{m2,m1,-p}(-k) e^{j2\pi \frac{pk}{\tilde{N}}} \begin{cases} \forall p & \text{si apériodique} \\ p \in \mathbb{Z} & \text{si périodique} \end{cases} . \quad (5.5.7)$$

Et si on définit \mathcal{P} , l'ensemble de raies Doppler que l'on souhaite optimiser tel que :

$$\mathcal{P} := \{p \mid p \in \mathbb{Z} \text{ si périodique, } p \in \mathbb{R} \text{ sinon}\},$$

alors, la fonction de coût à prendre en compte, pour minimiser localement le niveau des lobes secondaires des fonctions d'ambiguïtés (auto-ambiguïtés et ambiguïtés-croisées), peut être définie comme suit :

$$E_{SLL} = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} |\tilde{\mathbf{r}}_{m1,m2,p}(k)|^{2q_{SLL}} w_{m1,m2,p,k} ; \quad (5.5.8)$$

$$E_{SLL} = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(|\tilde{\mathbf{r}}_{m1,m2,p}(k)|^{2q_{SLL}} - |\text{obj}_{m1,m2,p}(k)|^{2q_{SLL}} \right)^2 w_{m1,m2,p,k} \quad (5.5.9)$$

Ou encore :

$$E_{SLL} = \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(|\tilde{\mathbf{r}}_{m1,m2,p}(k)|^2 - |\text{obj}_{m1,m2,p}(k)|^2 \right)^{2q_{SLL}} w_{m1,m2,p,k} . \quad (5.5.10)$$

Par conséquent, dans le cas d'une optimisation jointe, la fonction de coût globale à prendre en compte peut être définie comme une combinaison linéaire des fonctions de coût définies sur le PSLR et sur le PAPR :

$$E = \lambda E_{PAPR} + (1 - \lambda) E_{SLL}; \quad (5.5.11)$$

où λ est un paramètre permettant de pondérer le critère que l'on souhaite favoriser (ou défavoriser).

5.5.2 Calcul du gradient

Nous allons maintenant calculer le gradient de E . Afin de mener ce développement, nous allons calculer le gradient associé aux éléments $\{x_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$ de la $m^{\text{ième}}$ séquence de la famille. Or, comme les séquences de la famille ont une enveloppe temporelle prédéfinie, le gradient sera calculé selon les phases de la $m^{\text{ième}}$ séquence, à savoir les $\{\phi_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$.

Ainsi si on note $\mathbf{g}_m = \left\{ \frac{\partial E}{\partial \phi_m(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$, $\mathbf{g}_m^{PAPR} = \left\{ \frac{\partial E_{PAPR}}{\partial \phi_m(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ et $\mathbf{g}_m^{SLL} = \left\{ \frac{\partial E_{SLL}}{\partial \phi_m(i)} \right\}_{i=0}^{N-1}$ les gradients respectifs de E , E_{PAPR} et E_{SLL} selon les phases de la $m^{\text{ième}}$ séquence $\{\phi_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$, il vient que :

$$\mathbf{g}_m = \lambda \mathbf{g}_m^{PAPR} + (1 - \lambda) \mathbf{g}_m^{SLL}. \quad (5.5.12)$$

Nous allons, donc, focaliser notre attention sur les expressions de \mathbf{g}_m^{PAPR} et \mathbf{g}_m^{SLL} .

On peut remarquer que l'expression de \mathbf{g}_m^{PAPR} est donnée dans la partie 5.3 (Cf. Partie 5.3 pour plus de détails), à savoir :

$$\mathbf{g}_m^{PAPR} = -4qIm[\mathbf{x}_m \circ \mathcal{F}_N(\mathbf{W}'_m \circ \mathbf{A}_{m,N})] \quad (5.5.13)$$

avec : $\mathbf{W}'_m := \{W'_m(p)\}_{p=0}^{N-1}$;

$$\mathbf{A}_{m,N} := \{A_m(p)\}_{p=0}^{N-1} \quad \text{où} \quad \mathbf{A}_m := \{A_m(p)\}_{p=0}^{\tilde{N}-1} ;$$

$$\mathbf{A}_m = \mathcal{F}_{\tilde{N}}^{-1}(\mathbf{Y}'_m \circ \tilde{\mathbf{x}}_m^*) \quad \text{où} \quad \mathbf{Y}'_m := \{\gamma'_{m,n}\}_{n=0}^{\tilde{N}-1} ;$$

$$\gamma'_{m,n} = \begin{cases} (|\tilde{x}_m(n)|^2 - 1)^{2q_{PAPR}-1} & \text{si (5.5.4)} \\ 2(|\tilde{x}_m(n)|^{2q_{PAPR}} - 1)|\tilde{x}_m(n)|^{2(q_{PAPR}-1)} & \text{si (5.5.5)} \end{cases}$$

Par contre, l'expression \mathbf{g}_m^{SLL} n'est plus celle de la Partie 5.1 car le gradient ne se fait pas selon les phases de la $m^{\text{ième}}$ séquence sur-échantillonnée $\tilde{x}_m(i)$ (comme dans la Partie 5.1.2)

mais selon les phases de la $m^{i\text{ème}}$ séquence non sur-échantillonnée $x_m(i)$, à savoir les $\{\phi_m(i)\}_{i=0}^{N-1}$.

Par conséquent, nous allons focaliser notre attention sur l'expression de \mathbf{g}_m^{SLL} , et donc expliciter $\frac{\partial E_{SLL}}{\partial \phi_m(i)}$. Toutefois, les calculs menés dans cette partie sont, à quelques détails près, très semblables à ceux de la partie précédente (Cf. Partie 5.2.2). Par conséquent, seules les étapes clés du calculs seront données ici.

Tout d'abord, sachant que $|a|^2 = \text{Re}(a)^2 + \text{Im}(a)^2$, il peut être montré que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{SLL}}{\partial (\cdot)} &= 2q_{SLL} \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \\ &\times \left[\text{Re}(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k)) \frac{\partial \text{Re}(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k))}{\partial (\cdot)} \right. \\ &\left. + \text{Im}(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k)) \frac{\partial \text{Im}(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k))}{\partial (\cdot)} \right] \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

$$\text{avec : } \partial (\cdot) = \begin{cases} \partial \text{Re}(x_m(i)) \\ \partial \text{Im}(x_m(i)) \end{cases};$$

et selon la définition de E_{SLL} : (5.5.8), (5.5.9) ou (5.5.10), respectivement :

$$\gamma_{m1,m2,p,k} = \begin{cases} W_{m1,m2,p,k} |\tilde{r}_{m1,m2,p}(k)|^{2(q_{SLL}-1)} \\ 2W_{m1,m2,p,k} (|\tilde{r}_{m1,m2,p}(k)|^{2q_{SLL}} - |\text{obj}_{m1,m2,p}(k)|^{2q_{SLL}}) |\tilde{r}_{m1,m2,p}(k)|^{2(q_{SLL}-1)} \\ W_{m1,m2,p,k} (|\tilde{r}_{m1,m2,p}(k)|^2 - |\text{obj}_{m1,m2,p}(k)|^2)^{2q_{SLL}-1} \end{cases}$$

Ensuite, comme :

$$\tilde{r}_{m1,m2,p}(k) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \tilde{x}_{m1}(n) \tilde{x}_{m2}^*(n+k) e^{j2\pi \frac{np}{\tilde{N}}}$$

avec :

$$\tilde{x}_m(n) = \sum_{v=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_m(k) e^{-j2\pi \frac{kv}{N}} \right) W'_m(v) e^{j2\pi \frac{vn}{N}};$$

Il est possible de montrer, en utilisant les propriétés liant les parties réelles et imaginaires de deux nombres complexes a et b à la partie réelle et imaginaires de leur produit ((5.1.16), (5.1.17), (5.1.20) et (5.1.21)), que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Re(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k))}{\partial Re(x_m(i))} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \delta_{m,m1} Re\left(\tilde{x}_{m2}(n+k)w_{m1}'^*\left(n-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{-j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \\ &\quad + \delta_{m,m2} Re\left(\tilde{x}_{m1}(n)w_{m2}'^*\left(n+k-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Re(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k))}{\partial Im(x_m(i))} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \delta_{m,m1} Im\left(\tilde{x}_{m2}(n+k)w_{m1}'^*\left(n-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{-j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \\ &\quad + \delta_{m,m2} Im\left(\tilde{x}_{m1}(n)w_{m2}'^*\left(n+k-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Im(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k))}{\partial Re(x_m(i))} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} -\delta_{m,m1} Im\left(\tilde{x}_{m2}(n+k)w_{m1}'^*\left(n-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{-j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \\ &\quad + \delta_{m,m2} Im\left(\tilde{x}_{m1}(n)w_{m2}'^*\left(n+k-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Im(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k))}{\partial Im(x_m(i))} &= \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \delta_{m,m1} Re\left(\tilde{x}_{m2}(n+k)w_{m1}'^*\left(n-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{-j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \\ &\quad - \delta_{m,m2} Re\left(\tilde{x}_{m1}(n)w_{m2}'^*\left(n+k-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

avec $\mathbf{w}'_m = \mathcal{F}_{\tilde{N}}^{-1}(\mathbf{W}'_m)$ ($w'_m(n) = \sum_{v=0}^{\tilde{N}-1} W'_m(v)e^{j2\pi\frac{vn}{\tilde{N}}}$) où $\mathcal{F}_{\tilde{N}}^{-1}(\cdot)$ la Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDi) sur \tilde{N} éléments.

A ce stade, nous pouvons alors calculer les dérivés partielles de E_{SLL} par rapport aux parties réelles et imaginaires de $x_m(i)$. Et on obtient après développement:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{SLL}}{\partial Re(x_m(i))} &= 2q_{SLL} \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \\ &\quad \times \left[\delta_{m,m1} Re\left(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k) \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \tilde{x}_{m2}(n+k)w_{m1}'^*\left(n-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{-j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{m,m2} Re\left(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k) \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \left(\tilde{x}_{m1}(n)w_{m2}'^*\left(n+k-i\frac{\tilde{N}}{N}\right)e^{j2\pi\frac{np}{\tilde{N}}}\right)^*\right) \right]; \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{SLL}}{\partial \text{Im}(x_m(i))} &= 2q_{SLL} \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \\
&\times \left[\delta_{m,m1} \text{Im} \left(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k) \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \tilde{x}_{m2}(n+k) w_{m1}'^* \left(n - i \frac{\tilde{N}}{N} \right) e^{-j2\pi \frac{np}{N}} \right) \right. \\
&\left. - \delta_{m,m2} \text{Im} \left(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k) \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \left(\tilde{x}_{m1}(n) w_{m2}'^* \left(n + k - i \frac{\tilde{N}}{N} \right) e^{j2\pi \frac{np}{N}} \right)^* \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.5.20}$$

Finalement, en utilisant la règle de la chaîne, on obtient l'expression de la dérivée partielle de E_{SLL} selon $\phi_m(i)$ en fonction des dérivés partielles de E_{SLL} selon les parties réelles et imaginaires de $x_m(i)$:

$$\frac{\partial E_{SLL}}{\partial \phi_m(i)} = -\text{Im}(x_m(i)) \frac{\partial E_{SLL}}{\partial \text{Re}(x_m(i))} + \text{Re}(x_m(i)) \frac{\partial E_{SLL}}{\partial \text{Im}(x_m(i))}. \tag{5.5.21}$$

Après développement il vient alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{SLL}}{\partial \phi_m(i)} &= -2q_{SLL} \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \text{Im} \left[x_m(i) \sum_{k=-N+1}^{N-1} \gamma_{m1,m2,p,k} \right. \\
&\times \left[\delta_{m,m1} \left(\tilde{r}_{m2,m1,-p}(-k) \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \tilde{x}_{m2}^*(n+k) w_{m1}' \left(n - i \frac{\tilde{N}}{N} \right) e^{j2\pi \frac{(n+k)p}{N}} \right) \right. \\
&\left. \left. + \delta_{m,m2} \left(\tilde{r}_{m1,m2,p}(k) \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \tilde{x}_{m1}^*(n) w_{m2}' \left(n + k - i \frac{\tilde{N}}{N} \right) e^{-j2\pi \frac{np}{N}} \right) \right] \right]
\end{aligned} \tag{5.5.22}$$

Dès lors, si on définit l'opérateur $*$ et l'opérateur \circ (produit de Hadamard) tels que :

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})_i = \sum_{k=-N+1}^{N-1} x(k) y^*(i+k); \tag{5.5.23}$$

$$(\mathbf{x} \circ \mathbf{y})(k) = x(k) y(k); \tag{5.5.24}$$

Et les vecteurs $\boldsymbol{\theta}_p$, $\mathbf{Y}_{m1,m2,p}$ et $\mathbf{r}_{m1,m2,p}$ tels que :

$$\boldsymbol{\theta}_p := \left\{ e^{-j2\pi \frac{kp}{N}} \right\}_{k=0}^{\tilde{N}-1}; \tag{5.5.25}$$

$$\mathbf{Y}_{m1,m2,p} := \left\{ \gamma_{m1,m2,p,k} \right\}_{k=-N+1}^{N-1}; \tag{5.5.26}$$

$$\mathbf{r}_{m1,m2,p} := \left\{ r_{m1,m2,p}(k) \right\}_{k=-N+1}^{N-1}; \tag{5.5.27}$$

on peut montrer que la dérivée partielle de l'énergie E_{SLL} selon la phase $\phi_m(i)$ est donnée par :

$$\frac{\partial E_{SLL}}{\partial \phi_m(i)} = -2q_{SLL} \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \text{Im}[x_m(i) \beta_m^{m_1, m_2, p}(i)] \quad (5.5.28)$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta_m^{m_1, m_2, p}(i) = & \delta_{m, m_1} \left((\mathbf{Y}_{m_1, m_2, p} \circ \mathbf{r}_{m_2, m_1, -p}^r) * \left(((\mathbf{w}_{m_1} \circ \boldsymbol{\theta}_p^*) * \tilde{\mathbf{x}}_{m_2})^* \circ \boldsymbol{\theta}_p \right) \right)_{i \frac{\tilde{N}}{N}} \\ & + \delta_{m, m_2} \left((\mathbf{Y}_{m_1, m_2, p} \circ \mathbf{r}_{m_1, m_2, p}) * \left(((\mathbf{w}_{m_2} \circ \boldsymbol{\theta}_p) * \tilde{\mathbf{x}}_{m_1})^* \circ \boldsymbol{\theta}_p^* \right)^r \right)_{N+1-i \frac{\tilde{N}}{N}}. \end{aligned} \quad (5.5.29)$$

Ainsi, il vient que le vecteur gradient \mathbf{g}_m^{SLL} est donné par :

$$\mathbf{g}_m^{SLL} = -2q_{SLL} \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \text{Im}[\mathbf{x}_m \circ \boldsymbol{\beta}_m^{m_1, m_2, p}] \quad (5.5.30)$$

avec :

$$\boldsymbol{\beta}_m^{m_1, m_2, p} = \{\beta_m^{m_1, m_2, p}(i)\}_{i=0}^{N-1}.$$

Il est alors très facile de déterminer le vecteur gradient global \mathbf{g}_m en se rappelant que:

$$\mathbf{g}_m = \lambda \mathbf{g}_m^{APR} + (1 - \lambda) \mathbf{g}_m^{SLL}$$

Finalement, on constate, à nouveau, que le vecteur gradient s'exprime comme une somme faisant intervenir des fonctions de corrélation. Or ces opérations de corrélation peuvent être calculées efficacement à l'aide de *Fast Fourier Transform* (FFT). Ainsi si on note $\mathcal{F}(\cdot)$ l'opérateur de Transformée de Fourier Discrète (TFD) et si on reprend notre définition de fonction de corrélation (équation (5.1.36)) il peut être montré que la corrélation de deux séquences \mathbf{a} et \mathbf{b} est équivalent à [81] :

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{a})\mathcal{F}(\mathbf{b}^{r*})) \quad (5.5.31)$$

De fait, comme la FFT à un coût calculatoire de l'ordre de $O(h \log h)$ [82], il vient que le coût calculatoire du vecteur gradient \mathbf{g}_m est de l'ordre de $O(h \log h)$ opérations.

REMARQUE 5.5.1 : Il peut aussi être montré que si l'on prend \mathbf{w}_m égal à une porte $\forall m$ et $\tilde{N} = N$ alors on retrouve l'expression du gradient trouvée dans la Partie 5.1 comme

expression de \mathbf{g}_m^{SLL} . Ce résultat est prévisible car on se ramène alors à dériver selon la même variable que la Partie 5.1.

5.5.3 Algorithme

A partir du développement mené dans la partie précédente, l'algorithme de descente de gradient pour optimiser les fonctions d'ambiguïtés et le spectre d'une famille de séquences complexes peut être décrit en les étapes suivantes :

ALGORITHME 5.5 : Algorithme de descente du gradient minimisant conjointement les AF discrètes d'une famille de séquences et le spectre de ces séquences par contrôle du PAPR.

Etape 0 : Initialisation de $\mathbf{x}_m := \{x_m(n)\}_{n=0, m=1}^{N-1, M}$ (aléatoirement ou existant) ;
 Dimensionnement de la zone à minimiser (Choix de \mathcal{P} et $\mathbf{w}_{m1, m2, p}$) ;
 Facteur de sur-échantillonnage (Choix de \tilde{N}) ;
 Dimensionnement des bandes autorisée et interdite (Choix de \mathbf{W}').

Etape 1 : Calcul des vecteurs gradients associés au niveau des lobes secondaires et au PAPR, \mathbf{g}_m^{SLL} et \mathbf{g}_m^{PAPR} respectivement :

$$\mathbf{g}_m^{SLL} = -2q_{SLL} \sum_{m1=1}^M \sum_{m2=1}^M \sum_{p \in \mathcal{P}} \text{Im}[\mathbf{x}_m \circ \boldsymbol{\beta}_m^{m1, m2, p}]$$

$$\mathbf{g}_m^{PAPR} = -4q \text{Im}[\mathbf{x}_m \circ \mathcal{F}_N(\mathbf{W}'_m \circ \mathbf{A}_{m, N})]$$

avec : $\mathbf{W}'_m := \{W'_m(p)\}_{p=0}^{N-1}$;

$\mathbf{A}_{m, N} := \{A_m(p)\}_{p=0}^{N-1}$ où $\mathbf{A}_m := \{A_m(p)\}_{p=0}^{\tilde{N}-1}$;

$\mathbf{A}_m = \mathcal{F}_{\tilde{N}}^{-1}(\mathbf{Y}'_m \circ \tilde{\mathbf{x}}_m^*)$.

(Cf. 5.5.2 pour plus de détails)

Etape 2 : Calcul du vecteur gradient de chaque séquence \mathbf{g}_m de la famille :

$$\mathbf{g}_m = \lambda \mathbf{g}_m^{PAPR} + (1 - \lambda) \mathbf{g}_m^{SLL}$$

Etape 3 : Détermination du pas de descente α et actualisation des \mathbf{x}_m :

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_m e^{-j\alpha \mathbf{g}_m}$$

Etape 4 : Tant que ça n'a pas convergé/rencontré un critère d'arrêt, retour à l'**Etape 1**.

5.5.4 Résultats de l'étude

A titre d'exemple, les figures suivantes (FIGURE 5.9 et FIGURE 5.10) illustrent le comportement de l'ALGORITHME 5.5 suite à l'optimisation dans les configurations suivantes (TABLEAU 5.13 et TABLEAU 5.14) avec une initialisation aléatoire :

TABLEAU 5.13 Configuration 1 (apériodique) et 2 (périodique) –

$$w_{m1,m2,p,k} = 1, \forall(m1, m2, p, k).$$

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	3
Longueur de séquences	N	1024
Longueur sur-échantillonnée \tilde{N}		2048
Dopplers considérés	\mathcal{P}	$\mathcal{P} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
Choix des pondérations	$\mathbf{W}_{m1,m2,p}$	$w_{m1,m2,p,k} = 1, \forall(m1, m2, p, k)$
	$\mathbf{W}'_{m,p}$	$W'_{m,p} = 1, \forall(p, m)$
Exposant	q_{SLL}	10
	q_{PAPR}	2
Périodicité	Apériodique (config. 1) / Périodique (config. 2)	

TABLEAU 5.14 Configuration 3 (apériodique) et 4 (périodique) –

$$w_{m1,m2,p,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq 64, \forall(m1, m2, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	3
Longueur de séquences	N	1024
Longueur sur-échantillonnée \tilde{N}		2048
Dopplers considérés	\mathcal{P}	$\mathcal{P} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
Choix des pondérations	$\mathbf{W}_{m1,m2,p}$	$w_{m1,m2,p,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq 64, \forall(m1, m2, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
	$\mathbf{W}'_{m,p}$	$W'_{m,p} = 1, \forall(p, m)$
Exposant	q_{SLL}	10
	q_{PAPR}	2
Périodicité	Apériodique (config. 3) / Périodique (config. 4)	

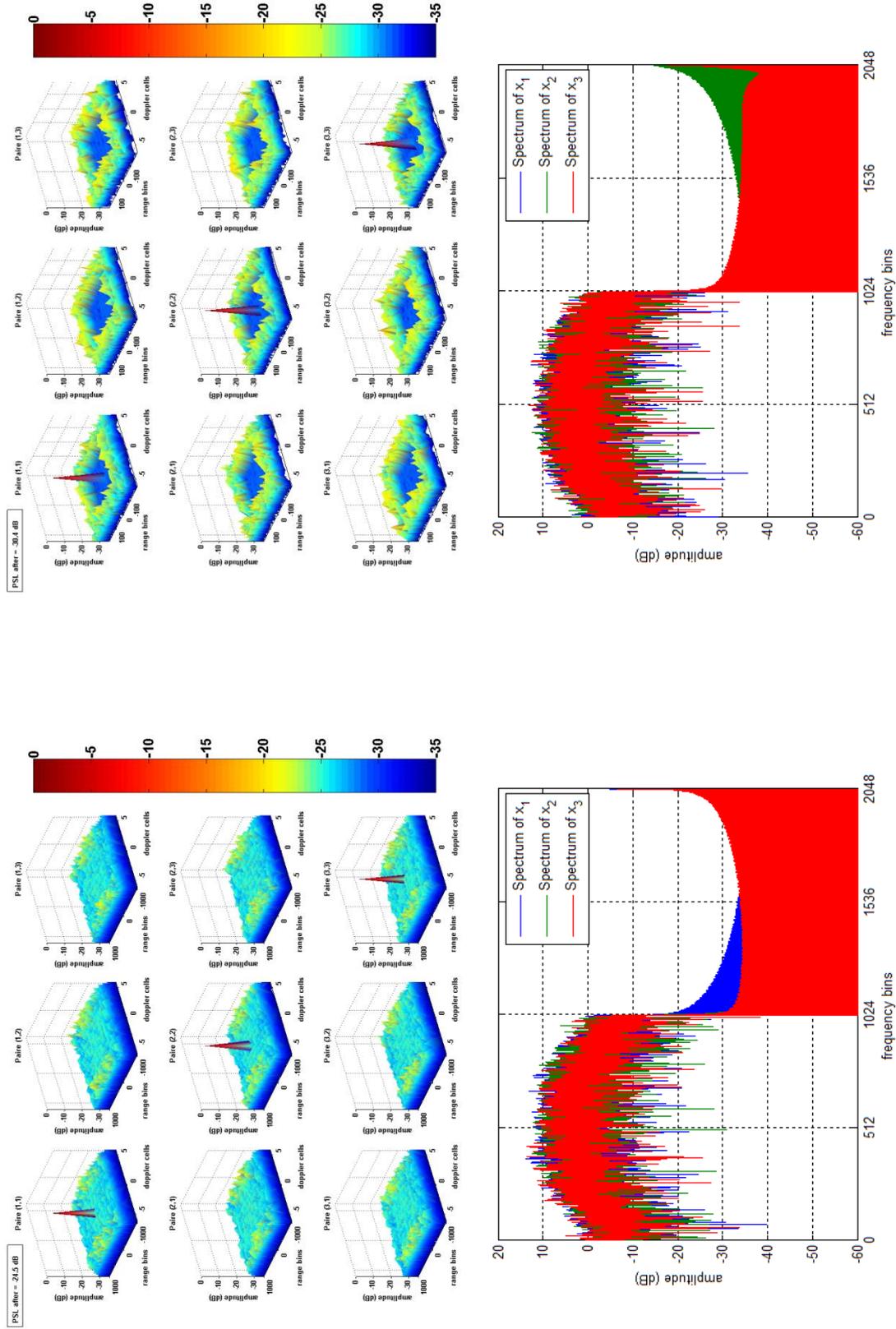


FIGURE 5.11 Exemple d'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté et du spectre après optimisation dans les configurations 1 (gauche) et 3 (droite) avec l'ALGORITHME 5.5.

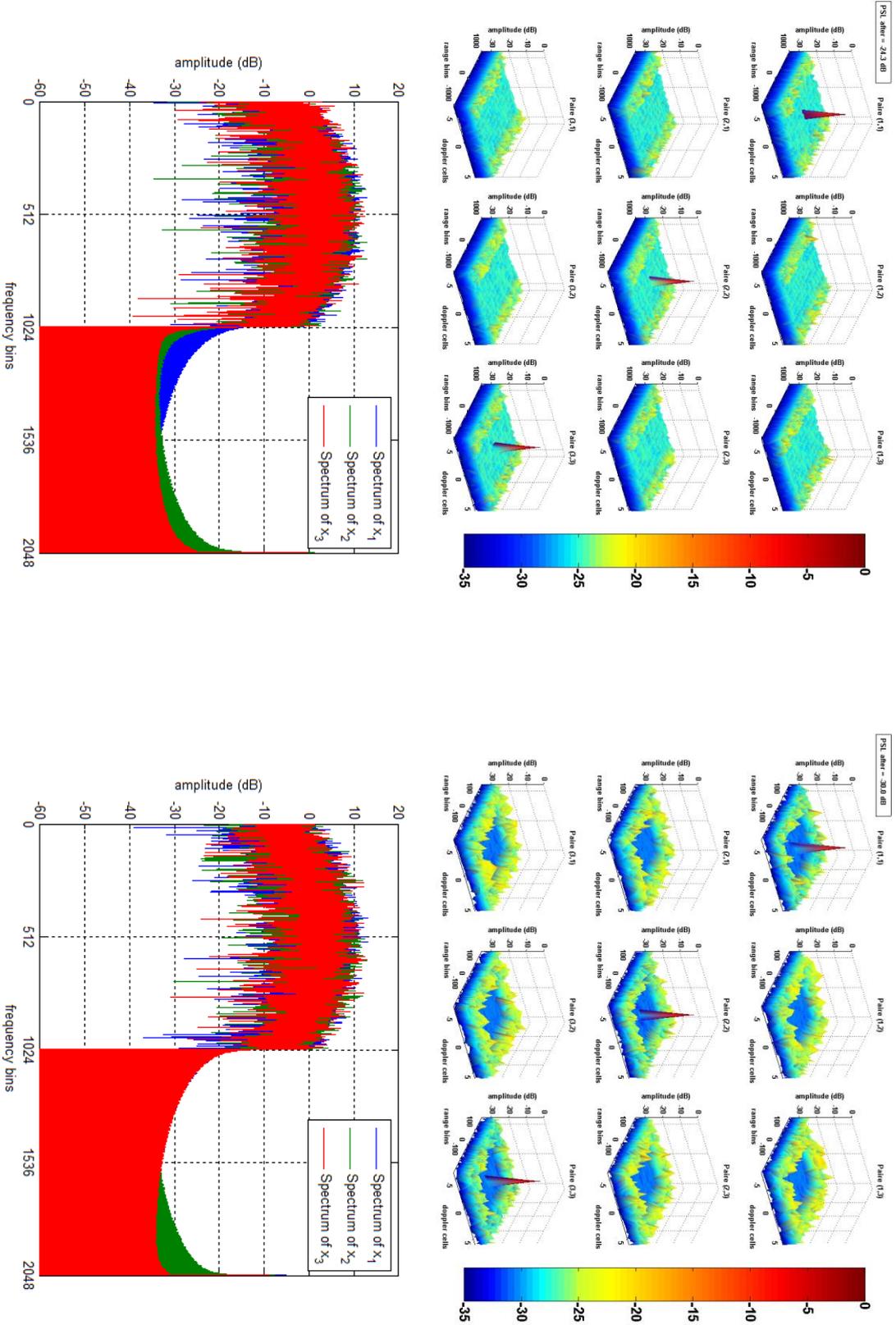


FIGURE 5.12 Exemple d'optimisation locale des fonctions d'ambiguïté et du spectre après optimisation dans les configurations 2 (gauche) et 4 (droite) avec l'ALGORITHME 5.5.

Tout comme les parties précédentes, on observe bien que plus la zone à optimiser est petite, meilleur est le PSLR obtenu sur ce domaine.

On peut aussi remarquer que l'optimisation, que ce soit dans le cas aperiodique (FIGURE 5.11) ou periodique (FIGURE 5.12), donne à peu près des résultats similaires.

TABLEAU 5.15 PSLR obtenus selon les différentes configurations.

PSLR	Cas aperiodique	Cas periodique
Configuration 1 / 2	-24.5 dB	-24.3 dB
Configuration 3 / 4	-30.4 dB	-30.0 dB

TABLEAU 5.16 PAPR obtenus selon les différentes configurations.

PAPR	Avant Opt.	Après Opt.
Configuration 1 (aperiodique)	6.44 dB	0.39 dB
	6.11 dB	0.39 dB
	6.24 dB	0.43 dB
Configuration 2 (periodique)	6.99 dB	0.37 dB
	6.32 dB	0.37 dB
	6.77 dB	0.35 dB
Configuration 3 (aperiodique)	6.44 dB	0.32 dB
	6.11 dB	0.37 dB
	6.24 dB	0.34 dB
Configuration 4 (periodique)	6.24 dB	0.40 dB
	6.20 dB	0.41 dB
	6.27 dB	0.41 dB

Par contre, il peut être noté qu'ici, les performances obtenues en termes de PSLR sont meilleures que celles de la **Partie 5.4** (Cf. TABLEAU 5.12). Cette observation s'explique par le fait que l'on optimise, ici, le spectre en contrôlant le PAPR alors que dans la partie précédente le PAPR est imposé (module constant) ; par conséquent cette approche offre davantage de degrés de liberté.

De plus, les résultats présentés, ici, sont obtenus au bout de :

- 2000 itérations soit en environ 250 secondes pour la config. 1.
- 3000 itérations soit en environ 250 secondes pour la config. 2.

- 6000 itérations soit en environ 400 secondes pour la config. 3.
- 9000 itérations soit en environ 600 secondes pour la config. 4.

On remarque alors que le nombre d'itérations nécessaire à l'obtention de ces résultats est bien moindre que ceux de la **Partie 5.4**. Par conséquent l'algorithme de cette partie sera préféré à celui de la partie précédente (Cf. **Partie 5.4** et ALGORITHME 5.4).

5.6 Convergence et Comparaison

5.6.1 Convergence

D'après Boyd dans son livre *Convex Optimization* [83], le gradient converge vers le minimum global de la fonction de coût si cette dernière est convexe.

Toutefois, dans notre cas nous sommes dans un problème non-convexe. Par conséquent, la convergence vers le minimum global n'est pas assurée. Il est très probable que la méthode du gradient reste piégée dans le meilleur des cas dans un minimum local voire dans un point selle.

Par contre, malgré le défaut apparent de cette méthode, il apparait que les résultats obtenus sur un grand nombre d'observations (Méthode de Monte Carlo [84]) donne une répartition assez uniforme des performances des résultats obtenus.

TABLEAU 5.17 Configuration pour analyser la convergence des algorithmes du gradient.

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	3
Longueur de séquences	N	128
Dopplers considérés	\mathcal{P}	$\mathcal{P} = \{0 ; 1 ; 2\}$
Choix des pondérations	$\mathbf{w}_{m1,m2,p}$	$w_{m1,m2,p,k} = 1, \forall(m1, m2, p, k)$
Exposant	q	20
Périodicité		Périodique

En effet, en prenant la configuration du TABLEAU 5.17, l'analyse des résultats obtenus suite à 1000 exécutions de l'ALGORITHME 5.1 (avec une initialisation aléatoire) illustre bien ce constat (FIGURE 5.13 et FIGURE 5.14) :

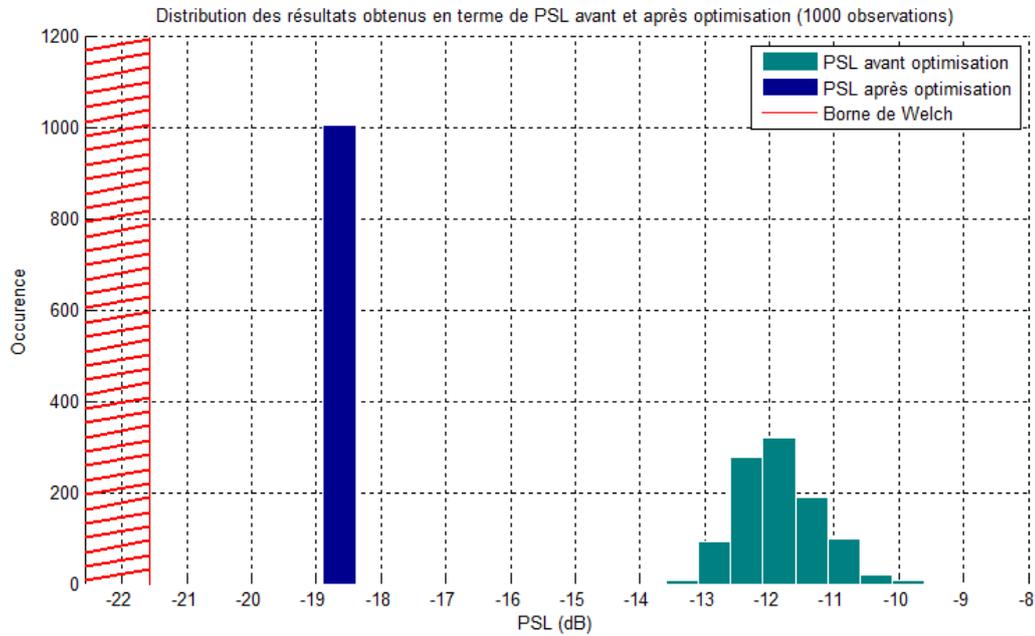


FIGURE 5.13 Répétition du PSLR obtenus sur 1000 exécutions avant et après optimisation et comparaison avec la borne de Welch périodique.

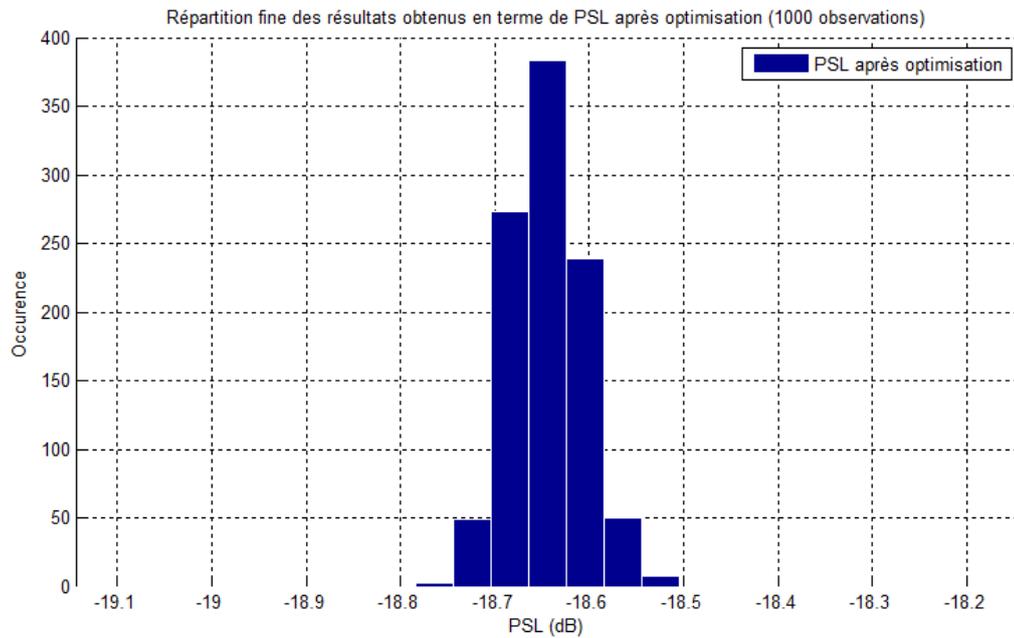


FIGURE 5.14 Répétition fine du PSLR obtenus sur 1000 exécutions après optimisation.

On observe, dans cet exemple, qu'en moyenne le tirage aléatoire d'une famille de séquence polyphasée donne un PSLR autour de -11.8 dB avec un écart type de l'ordre de 0.62 . Par contre, suite à l'optimisation de chacun de ces 1000 tirages, on remarque que le PSLR obtenus est en moyenne de -18.6 dB avec un écart type proche de 0.04.

De fait, on remarque bien, à travers cet exemple, que pour une configuration donnée les résultats obtenus en terme de PSLR sont assez homogènes. Cela laisse entendre une répartition assez uniforme des minima locaux.

De plus, si l'on compare les résultats obtenus avec la borne de Welch périodique (Cf. les travaux de Welch dans [22] et 2.3.2), il apparait, dans cet exemple, que la borne de Welch donne une borne inférieure sur le PSLR de -21.6 dB ; et donc les résultats obtenus se trouvent à peu près à 3dB de l'optimum (si la borne de Welch est atteignable).

REMARQUE 5.6.1 : En particulier, la borne de Welch établie dans [22] ne prend pas en compte les Doppler mais seulement les fonctions de corrélations de M séquences de longueur N .

$$\text{PSLR} \geq \begin{cases} \frac{M-1}{M(2N-1)-1} & \text{si apériodique} \\ \frac{M-1}{MN-1} & \text{si périodique} \end{cases}$$

Toutefois, si l'on considère que prendre P raies Doppler de M séquences revient à prendre MP séquences, alors il est possible d'adapter la formule de Welch en :

$$\text{PSLR} \geq \begin{cases} \frac{MP-1}{MP(2N-1)-1} & \text{si apériodique} \\ \frac{MP-1}{MPN-1} & \text{si périodique} \end{cases}$$

Par contre, il est évident que cette réécriture ne prend pas en compte la corrélation entre une séquence et cette même séquence ayant subit un Doppler. Ainsi, il est probable qu'il existe une borne plus serrée que celle de Welch.

5.6.2 Comparaison avec les algorithmes cycliques

Afin de comparer les algorithmes cycliques et les algorithmes du gradient, nous allons reprendre la configuration de la partie 4.1, à savoir : $N = 1024$, $M = 3$, $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$ tirés aléatoirement à l'initialisation, $K = 30$, $P = 3$ et $r_0 = -120dB$ (Cf. TABLEAU 5.18) :

TABLEAU 5.18 Configuration pour comparer l'approche cyclique avec celle du gradient.

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	3
Longueur de séquences	N	1024
Dopplers considérés	\mathcal{P}	$\mathcal{P} = \{0 ; 1 ; 2\}$
Choix des pondérations	$\mathbf{w}_{m1,m2,p}$	$w_{m1,m2,p,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq 30, \forall(m1, m2, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Objectif lobes secondaires		$ \text{obj}_{m1,m2,p}(k) ^2 \leq -120 \text{ dB (hors pic)}$
Exposant	q	1
Périodicité		Périodique

La figure suivante (FIGURE 5.15) illustre le comportement de l'ALGORITHME 5.1 suite à l'optimisation dans cette configuration (TABLEAU 5.18) :

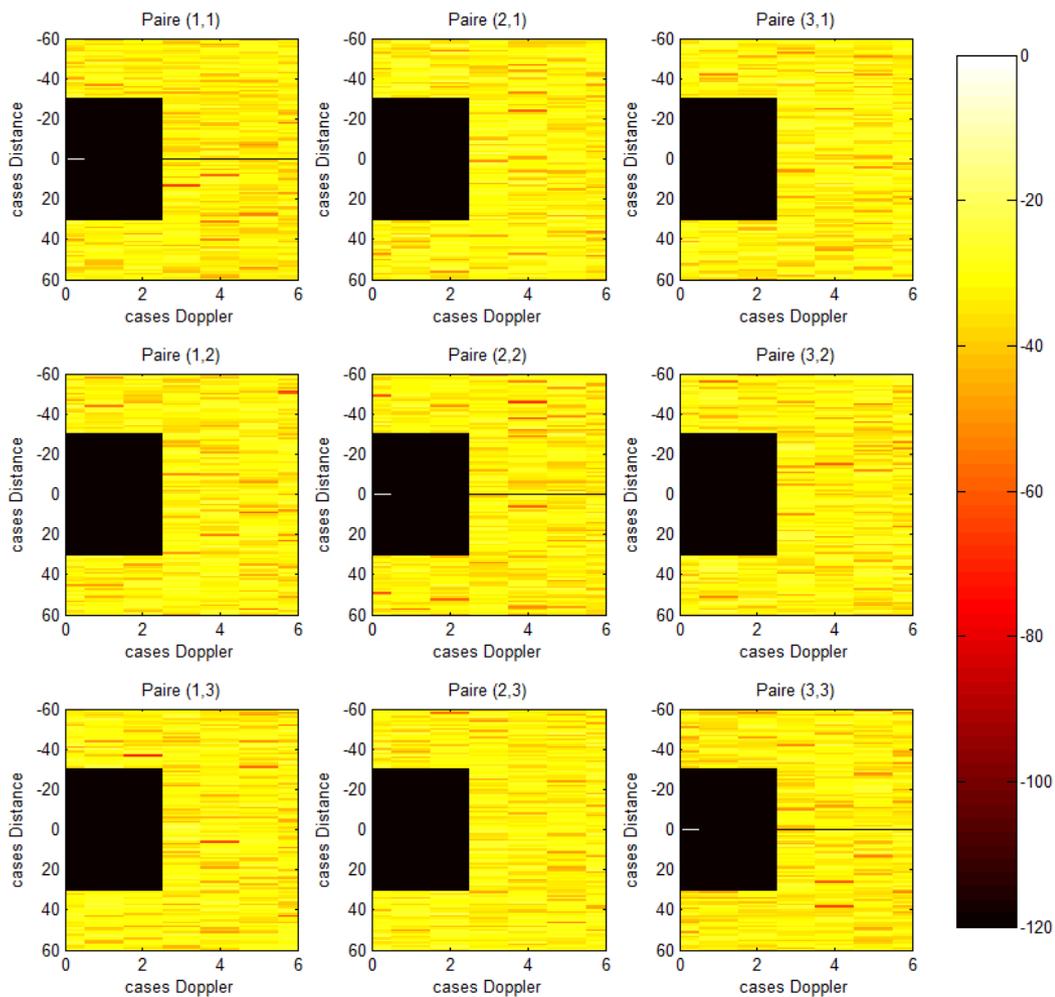


FIGURE 5.15 Exemple d'optimisation locale des AF discrètes d'une famille de 3 séquences unimodulaire (PAPR = 0 dB) obtenu à l'aide de l'ALGORITHME 5.1.

On remarque que les fonctions d'ambiguïtés obtenues respectent l'objectif que l'on s'était donné, c'est-à-dire des lobes secondaires inférieurs à -120 dB sur toute la zone souhaitée : $[-30 : 30]$ cases distances $\times [-2 : 2]$ cases Dopplers. Ce résultat est obtenu en, à peu près, 10000 itérations, ce qui correspond à un peu moins de 3 minutes de simulation.

Ce résultat est très semblable à celui obtenu dans la partie 4.1, à ceci près qu'avec les algorithmes cycliques on a obtenu un PSLR de -99 dB (cf. 0) en 20000 itérations (condition d'arrêt de l'algorithme dans ce cas de figure) ; soit un peu plus de 1 heure de simulation.

Ainsi, on constate que l'optimisation via une descente du gradient donne de meilleurs résultats en un temps grandement inférieur à ceux des algorithmes cycliques.

Ce résultat était prévisible étant donné que la complexité la méthode du gradient est de l'ordre de $O(h \log h)$ opérations par itérations alors que pour les algorithmes cycliques celle-ci est de l'ordre de $O(h^3)$ avec h proportionnelle à la longueur des séquences et à la zone que l'on souhaite optimiser.

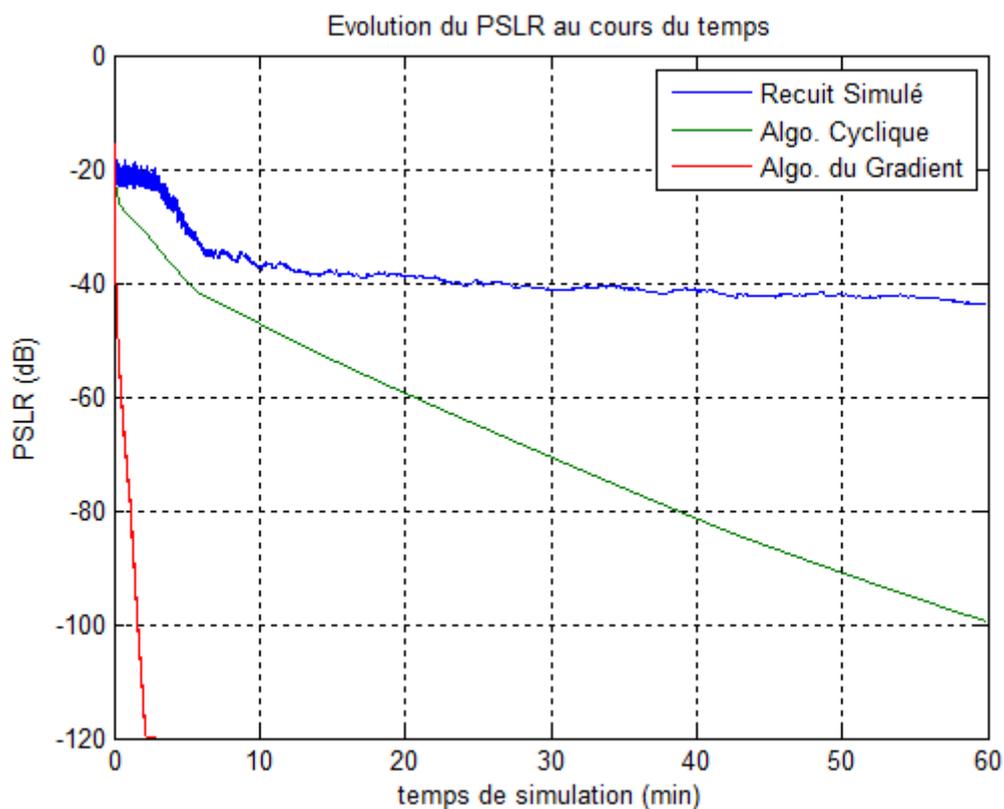


FIGURE 5.16 Evolution du PSLR au cours du temps : Recuit simulé vs. Algorithme Cyclique vs. Algorithme du Gradient.

5.7 Conclusion

Ce Chapitre s'inspire d'une approche basée sur une descente du gradient de Baden *et al.* [14] (pour optimiser la fonction d'autocorrélation aperiodique d'une séquence polyphasée) pour mettre à jour une méthode efficace pour optimiser tant les fonctions d'ambiguïtés que le spectre d'une famille de séquences. En particulier il a été calculé :

- Le gradient de la fonction de coût relative au domaine d'intérêt que l'on souhaite optimiser sur les fonctions d'ambiguïtés (auto-ambiguïtés et ambiguïtés croisées) de la famille de séquences à optimiser ;
- Le gradient de la fonction de coût relative aux émissions hors-bandes du spectre ;
- Et le gradient de la fonction de coût relative à la fluctuation d'enveloppe temporelle (PAPR) d'une séquence sur-échantillonnée de telle sorte que son spectre soit parfaitement contrôlé.

Nous avons pu montrer que cette nouvelle approche s'appuie sur des opérations simples (convolution, transformée de Fourier) qui pouvaient être calculées de manière efficace à l'aide de *Fast Fourier Transform* (FFT). De cette observation résulte une complexité calculatoire de l'ordre de $O(h \log(h))$ opérations pour calculer le gradient à chaque itérations. Cet important résultat offre ainsi la possibilité d'optimiser des séquences assez longues avec une coût calculatoire relativement faible en comparaison des algorithmes cycliques présentés dans le Chapitre précédent (Cf. Chapitre 4).

Toutefois, de manière analogue aux algorithmes cycliques, il est intéressant de remarquer que le nombre limité de degrés de liberté (NM éléments dans $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$ contraints en amplitude) et le possible grand nombre de contraintes ($\sim 2KPM^2$ contraintes) contraignent la qualité de l'optimisation dans la zone à optimiser imposée au système. Ainsi, le dimensionnement de la zone à minimiser doit rester confiné sur un petit domaine autour de l'origine afin d'obtenir une zone significativement atténuée.

Malgré cela, ces algorithmes offrent une grande flexibilité d'usage et permettent de générer des familles de séquences ayant d'intéressantes propriétés radars : un faible PSLR, une bonne réjection des émissions hors-bandes et une faible fluctuation d'enveloppe temporelle (PAPR faible).

Chapitre 6. ETABLISSEMENT D'UNE BORNE SUR LE PSLR

Jusqu'à présent, nous avons travaillé sur l'optimisation d'une famille de séquences dans le cadre d'une application radar. Et tout particulièrement sur l'optimisation des propriétés de corrélations de ces dernières en minimisant localement le PSLR des fonctions d'ambiguïté.

Les propriétés de corrélation jouent un rôle important dans la détermination des performances de détection et localisation qu'un système peut atteindre. Par exemple, Pursley a montré que les performances des systèmes asynchrones DS-CDMA (Direct-Sequence Code-Division Multiple-Access) sont directement liées au PSLR [85]. Ainsi, il est intéressant de concevoir des séquences avec le plus faible PSLR possible afin d'améliorer les performances en termes de probabilité de détection et SNR (*Signal-to-Noise Ratio*). En particulier, pour les systèmes radars, plus le PSLR est faible, meilleur est la discrimination entre une cible « faible » (faible SER – Surface Equivalente Radar) et une cible « forte » (forte SER). C'est pourquoi, dans le cadre d'un système MSPSR, il est pertinent de rechercher une famille de séquences ayant les plus faibles lobes secondaires possibles tant sur les fonctions d'auto-ambiguïtés que sur les fonctions d'ambiguïtés croisées.

La recherche de telles séquences ont nourri un grand nombre de travaux, en particulier, certains de ces travaux ont permis d'établir une borne inférieure sur le PSLR sous-certaines

hypothèses : nombre de séquences, longueur des séquences, hypothèse sur les séquences (*e.g.*, module constant), type de corrélation...

Welch fut le premier à établir une borne inférieure sur le PSLR des fonctions de corrélations d'une famille de M séquences de longueurs N sous l'hypothèse d'équi-énergie [22]. Seulement, 25 ans plus tard, en 1990, une meilleure borne fut trouvée par Levenshtein [86] [87]. A l'origine, cette borne s'appliquait seulement aux codes binaires, mais Boztaş dans [88] montra qu'elle se généralisait aux séquences dont l'alphabet s'étendait à l'ensemble des racines n -ième de l'unité.

Il a été prouvé que la borne de Levenshtein était plus serrée que celle de Welch dans le cas $M = 3$, $N \geq 3$, et pour tout $M \geq 4$, $N \geq 2$ [87] [88] [89]. Toutefois cette borne est limitée à un petit ensemble de séquences (racines complexes de l'unité). Ainsi, il est naturel de se demander s'il ne serait pas possible d'étendre sa validité à un ensemble plus grand.

De plus, que ce soit la borne de Welch ou la borne de Levenshtein, ces bornes ont été établies sous l'hypothèse d'un filtrage adapté, mais, qu'en est-il dans le cas d'un filtrage désadapté ? En effet, alors que le filtrage désadapté est largement utilisé dans les systèmes radars pour améliorer leurs performances en apodisant le spectre afin de pondérer les lobes secondaires au prix d'une perte de désadaptation (perte en SNR), aucune borne sur le PSLR n'existe dans ce cas.

Basé sur ces observations, ce Chapitre adresse ces deux questions ouvertes en apportant :

- **Une généralisation la borne de Levenshtein aux séquences polyphasées ;**
- **Et la définition de la première borne portant sur les filtres désadaptés.**

Ce Chapitre s'articule de la manière suivante :

- La première section donne une brève vue d'ensemble des bornes existantes : la borne de Welch et la borne de Levenshtein ;
- La seconde section traite de la généralisation de la borne de Levenshtein aux séquences unimodulaires et de l'amélioration de cette dernière en utilisant les propriétés des derniers retards ;
- Et la dernière section établit une nouvelle borne dans le cas désadapté.

Ce chapitre a fait l'objet de deux d'articles de journaux [90] et [91] qui furent soumis, tous deux, sur *IEEE Transactions on Information Theory*.

6.1 Rappel des bornes existantes

Ce Chapitre se concentre sur la détermination de bornes inférieures sur le niveau maximum des lobes secondaires des fonctions d'auto-corrélations et d'inter-corrélations pour des séquences de même énergie.

Soit $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$ une famille de séquences de même énergie E_x de taille M , et $\mathbf{x}_m := \{x_n^m\}_{n=0}^{N-1}$ la $m^{\text{ième}}$ séquence de longueur N de cette famille. On définit la fonction de corrélation de \mathbf{x}_m , par \mathbf{x}_l , noté $\mathbf{r}_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l} = \mathbf{x}_m * \mathbf{x}_l$, par :

$$r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l}(k) = (\mathbf{x}_m * \mathbf{x}_l)_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^m (x_{n+k}^l)^* \quad (6.1.1)$$

De nombreuses bornes ont été établies sur le niveau maximum des lobes secondaires des fonctions d'auto-corrélations et d'inter-corrélations, que l'on le notera r_{\max} :

$$|r_{\max}|^2 = \max \left(\max_{\substack{m \neq l \\ k}} |r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l}(k)|^2, \max_{\substack{m=l \\ k \neq 0}} |r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l}(k)|^2 \right) \quad (6.1.2)$$

A des fins de comparaisons, on exprimera les bornes en fonction du *Peak Sidelobe Level Ratio*, noté PSLR, que l'on définit par :

$$\text{PSLR} = \frac{|r_{\max}|^2}{|E_x|^2} \quad (6.1.3)$$

Les bornes les plus connues sont celles de Welch [22] et de Levenshtein [86] [87] [88] :

La borne de Welch est valide pour les familles de séquences à énergie constante. Elle est donnée par :

$$\text{PSLR} \geq \begin{cases} \frac{M-1}{M(2N-1)-1} & \text{si aperiodique} \\ \frac{M-1}{MN-1} & \text{si periodique} \end{cases} \quad (6.1.4)$$

Alors que la borne de Levenshtein est seulement valide dans le cas aperiodique pour les familles de séquences dont les éléments sont les racines n -ième de l'unité (séquence à énergie constante dont l'alphabet est réduit aux racines de l'unité). Dans sa forme la plus générale, cette borne donne :

$$\text{PSLR} \geq \frac{1}{N^2} \left[N - \frac{Q_{2N-1} \left(\mathbf{w}, \frac{N(N-1)}{M} \right)}{1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2N-1} w_i^2} \right] \quad (6.1.5)$$

où : $\mathbf{w} := \{w_i\}_{i=1}^{2N-1}$ est un vecteur de poids qui vérifie $\sum_{i=1}^{2N-1} w_i = 1$

$$Q_{2N-1}(\mathbf{w}, a) = a \sum_{i=1}^{2N-1} w_i^2 + \sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t$$

$$l_{s,t,N} = \min(|s-t|, 2N-1-|s-t|)$$

Dans le cas particulier où l'on considère des poids uniformes $w_i = 1/K$ si $i \leq K$, et $w_i = 0$ sinon ; il a été montré que pour tout $1 \leq K \leq N$:

$$\text{PSLR} \geq \frac{1}{N^2} \left[\frac{3NMK - 3N^2 - MK^2 + M}{3(KM - 1)} \right] \quad (6.1.6)$$

Et un choix optimal de K donne :

$$\text{PSLR} \geq \frac{1}{N^2} \left[N - \frac{2N}{\sqrt{3M}} \right] \quad \text{quand } M \geq 3 \quad (6.1.7)$$

D'autre part, sous sa forme la plus générale, cette borne consiste en un problème de minimisation de la forme quadratique $Q_{2N-1} \left(\mathbf{w}, \frac{N(N-1)}{M} \right)$ selon le vecteur de pondération \mathbf{w} , problème ayant été traité par Levenshtein [87] et donnant la borne suivante :

$$\text{PSLR} \geq \frac{1}{N^2} \left[N - \left\lceil \frac{\pi N}{\sqrt{8M}} \right\rceil \right] \quad \text{quand } 5 \leq M \leq N^2 \quad (6.1.8)$$

Dans [88] et [89], des vecteurs de poids spécifiques \mathbf{w} ont été trouvés afin de resserrer la borne dans certaines configurations ($M = 3, N \geq 3$, et pour tout $M \geq 4, N \geq 2$).

6.2 Généralisation de la borne de Levenshtein (adapté)

6.2.1 Généralisation aux séquences uni-modulaires

Dans cette section, on établit que la borne de Levenshtein reste valide pour toutes familles de séquences unimodulaires. Cette généralisation est réalisée en deux étapes :

- Le calcul d'une borne supérieure et d'une borne inférieure sur la norme de Frobenius de la matrice des produits de corrélation ;

- Et la fusion de ces résultats afin de retrouver la borne de Levensthein sur le PSLR.

Soit $\{\mathbf{x}^m\}_{m=1}^M$ une famille de M séquences unimodulaires de longueur N telle que $|x_n^m|^2 = 1/N$ pour tout $n \in \llbracket 1 : N \rrbracket$. Sous cette contrainte, $E_x = 1$ et donc $\text{PSLR} = |r_{\max}|^2$.

Ensuite, soit la matrice des « retards » \mathbf{X} de taille $[M(2N - 1)] \times [2N - 1]$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{X}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^M \end{bmatrix}_{[M(2N-1)] \times [2N-1]} \quad (6.2.1)$$

avec : \mathbf{X}^m , une matrice carrée de taille $[2N - 1] \times [2N - 1]$ définie comme suit :

$$\mathbf{X}^m = \begin{bmatrix} x_1^m & x_2^m & \dots & x_{N-1}^m & x_N^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^m & x_2^m & \dots & x_{N-1}^m & x_N^m & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x_1^m & x_2^m & \dots & x_{N-1}^m & x_N^m \\ x_N^m & 0 & & & 0 & x_1^m & x_2^m & & x_{N-1}^m \\ x_{N-1}^m & x_N^m & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 & x_1^m & x_2^m \\ x_2^m & \dots & x_{N-1}^m & x_N^m & 0 & \dots & \dots & 0 & x_1^m \end{bmatrix} \quad (6.2.2)$$

Si l'on note \mathbf{X}_i^m , $i \in \llbracket 1 : 2N - 1 \rrbracket$ la i -ième ligne de \mathbf{X}^m , et $X_{i,q}^m$ son q -ième élément avec $q \in \llbracket 1 : 2N - 1 \rrbracket$, il apparaît que tous les produits de corrélations (auto-corréations et inter-corrélations) formés par les différents couples de séquences de $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$ sont fournis par l'ensemble des produits scalaires des vecteurs $\{\mathbf{X}_i^m\}_{m=1, i=1}^{M, 2N-1}$, ensemble contenu dans la matrice carrée $\mathbf{R} = \mathbf{X}\mathbf{X}^H$ d'ordre $M(2N - 1)$.

Par ailleurs, il est possible de considérer l'ensemble des retards sous une version pondérée (et non plus de manière uniforme), en multipliant chaque ligne \mathbf{X}_i^m par un coefficient de pondération w_i :

$$\tilde{\mathbf{X}}_i^m = \mathbf{X}_i^m \sqrt{w_i} \quad i \in \llbracket 1 : 2N - 1 \rrbracket \text{ et } m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \quad (6.2.3)$$

où le vecteur de poids $\mathbf{w} := \{w_i\}_{i=1}^{2N-1}$ vérifie :

$$\sum_{i=1}^{2N-1} w_i = 1 \quad \text{et} \quad w_i \geq 0 \quad (6.2.4)$$

Les matrices $\tilde{\mathbf{R}}$ et $\tilde{\mathbf{X}}$ associées s'expriment alors :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^H \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^1 \\ \tilde{\mathbf{X}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}^M \end{bmatrix} \quad (6.2.5)$$

REMARQUE 6.2.1 : En particulier, si on définit le paramètre K de sorte que seul les K premiers éléments de \mathbf{w} soient non-nuls, alors la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ ne contient seulement que les valeurs d'auto-corrélations et d'inter-corrélations jusqu'au K -ième retard.

Il peut être montré que la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ vérifie le lemme suivant :

Lemme 6.1 (Borne Supérieure) : *Sous les hypothèses précédentes, la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ peut être majorée par :*

$$\|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2 \leq M^2 |r_{\max}|^2 + M(1 - |r_{\max}|^2) \sum_{i=1}^{2N-1} |w_i|^2. \quad (6.2.6)$$

Preuve : Ce résultat est semblable à celui du Lemme 1 de [92] et est obtenu de la même manière. \square

Il peut aussi être déterminé une borne inférieure sur la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$:

Lemme 6.2 (Borne Inférieure) : *Sous les hypothèses précédentes, la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ peut être minorée par :*

$$\|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2 \geq \frac{M^2}{N^2} \left[N - \sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t \right] \quad (6.2.7)$$

avec : $l_{s,t,N} = \min(|t - s|, 2N - 1 - |t - s|)$.

Preuve : Cette preuve combine l'approche de Welch et celle de Levenshtein. Toutefois, au lieu d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, elle exploite, d'une certaine manière, la structure particulière de $\tilde{\mathbf{R}}$ (liée à la corrélation aperiodique) et la contrainte d'uni-modularité

des séquences, permettant ainsi d'étendre la validité de la borne au regards de la borne de Levenshtein. Voir ANNEXE C . \square

A partir de ces deux lemmes, il peut être facilement déduit une borne inférieure sur le PSLR :

Théorème 6.1 (Borne de Levenshtein généralisé) : *Pour toute famille de M séquences unimodulaires de longueur N , et pour tout vecteur de poids \mathbf{w} qui vérifie la condition (6.2.4), une borne inférieure sur le Peak Sidelobe Level Ratio est donnée par :*

$$|r_{max}|^2 \geq \frac{1}{N^2} \left[N - \frac{Q_{2N-1} \left(\mathbf{w}, \frac{N(N-1)}{M} \right)}{1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2N-1} |w_i|^2} \right] \quad (6.2.8)$$

avec : $Q_{2N-1}(\mathbf{w}, a) = \sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t + a \sum_{i=1}^{2N-1} |w_i|^2$;

$$l_{s,t,N} = \min(|t - s|, 2N - 1 - |t - s|).$$

Preuve : Combiner le **Lemme 6.1** et le **Lemme 6.2**.

Cette borne est identique à celle de Levenshtein [87]. Toutefois, il a été prouvé ici que celle-ci reste valide pour toute famille de séquences **unimodulaires** alors qu'originellement, cette borne était établie pour des séquences binaires ou des séquences dont l'alphabet était réduit aux racines n-ième de l'unité.

Ainsi, tous les travaux réalisés, à ce jour, sur la borne de Levenshtein, tiennent aussi pour les familles de séquences unimodulaires. En particulier, les vecteurs de poids spécifiques établis par Levenshtein [87] et Liu [88] [89] restent valables.

6.2.2 Extension de la borne : prise en compte des derniers retards

Dans la précédente section, nous avons montré que la borne de Levenshtein restait vraie pour les séquences unimodulaires (**Théorème 6.1**). A travers le développement mené dans la partie précédente, on a pu constater que la démonstration faisait seulement appel aux propriétés d'unimodularité des séquences et à la structure des matrices \mathbf{X}^m mais en aucun cas aux propriétés des fonctions de corrélations aperiodiques. Par conséquent, nous allons, ici, utiliser une propriété spécifique aux fonctions de corrélation aperiodiques, à savoir que le dernier retard vérifie :

$$|r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l}(k)|^2 = \frac{1}{N^2} \quad \forall (m, l) \text{ et } |k| = N - 1 ; \quad (6.2.9)$$

et le d -ième dernier retard ($d \in \llbracket 1: N \rrbracket$) vérifie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|r_{x_m, x_l}(k)|^2 \leq \frac{d^2}{N^2} \quad \forall (m, l) \text{ et } |k| = N - d. \quad (6.2.10)$$

En exploitant ces propriétés, il est possible d'étendre le précédent majorant de $\|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2$ (**Lemme 6.1**) en prenant en compte les D derniers retards, comme énoncé dans le lemme suivant :

Lemme 6.3 (Borne Supérieure avec prise en compte des D derniers retards) : *Sous les hypothèses précédentes, la norme de Frobenius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ peut être majorée par :*

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2 &\leq M^2 |r_{\max}|^2 + M(1 - |r_{\max}|^2) \sum_{i=1}^{2N-1} |w_i|^2 \\ &\quad - M^2 \sum_{d=1}^D \left(\left(|r_{\max}|^2 - \frac{d^2}{N^2} \right) \sum_{\substack{s,t=1 \\ l_{s,t,N}=N-d}}^{2N-1} w_s w_t \right). \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

avec : $l_{s,t,N} = \min(|s - t|, 2N - 1 - |s - t|)$.

Preuve : Voir ANNEXE E. □

De manière évidente, cette borne supérieure est égale à celle du **Lemme 6.1** lorsque $D = 0$ et est plus serrée que cette dernière si elle vérifie la propriété suivante :

$$\exists (w_s, w_t) \text{ s.t. } \sum_{\substack{s,t=1 \\ l_{s,t,N}=N-d}}^{2N-1} w_s w_t \neq 0 \quad \text{et} \quad |r_{\max}|^2 \geq \frac{d^2}{N^2} \quad (6.2.12)$$

Ainsi, prendre le minimum de la partie de droite de (6.2.11) pour tous les D assure d'obtenir une borne supérieure au moins égale voir plus serrée que celle du **Lemme 6.1**.

A partir de ce majorant et du précédent minorant (**Lemme 6.2**), il peut être facilement déduit une nouvelle borne inférieure sur le PSLR (**Théorème 6.2**) qui prend en compte les D -derniers retards des fonctions d'auto-corrélations et d'inter-corrélations, où les matrices \mathbf{A}_d et \mathbf{L} sont définies telles que :

$$\sum_{\substack{s,t=1 \\ l_{s,t,N}=N-d}}^{2N-1} w_s w_t = \mathbf{w}^T \mathbf{A}_d \mathbf{w}; \quad (6.2.13)$$

$$\sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t = \mathbf{w}^T \mathbf{L} \mathbf{w}. \quad (6.2.14)$$

Théorème 6.2 : Pour toute famille de M séquences unimodulaires de longueur N , et pour tout vecteur de poids \mathbf{w} qui vérifie la condition (6.2.4), une borne inférieure sur le Peak Sidelobe Level Ratio est donnée par :

$$|r_{max}|^2 \geq \max_D \frac{1}{N^2} \left[N - \frac{\tilde{Q}_{2N-1} \left(\mathbf{w}, \frac{N(N-1)}{M}, \sum_{d=1}^D (d^2 - N) \mathbf{A}_d \right)}{1 - \mathbf{w}^T \left(\frac{1}{M} \mathbf{I} + \sum_{d=1}^D \mathbf{A}_d \right) \mathbf{w}} \right] \quad (6.2.15)$$

avec : $\tilde{Q}_{2N-1}(\mathbf{w}, a, \mathbf{B}) = \mathbf{w}^T (a\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{L}) \mathbf{w}$.

Preuve : Cette expression découle directement de **Lemme 6.2** et **Lemme 6.3**. \square

Ce théorème donne une borne plus générale qui prend en compte une information supplémentaire sur les D derniers retards des fonctions d'auto-corrélations et d'inter-corrélations aperiodiques.

Si on note D_{max} la valeur du paramètre D qui maximise la borne du **Théorème 6.2**, on peut remarquer que lorsque $D_{max} = 0$ alors on retrouve la borne de Levenshtein du **Théorème 6.1**. Par contre, lorsque $D_{max} \geq 1$, alors la borne obtenue est cette fois plus serrée que celle de Levenshtein dans la même configuration (M , N et \mathbf{w} donnés).

Corollaire 6.1 : Soit la borne de Levenshtein, notée B_{Lev} , pour M , N et \mathbf{w} donnés. S'il existe d tel que \mathbf{w} vérifie (6.2.12) et $B_{Lev} \geq d^2/N^2$, alors le **Théorème 6.2** donne lieu à une meilleure borne que celle de Levenshtein dans la même configuration.

Plus généralement, si le corollaire est vérifié, alors il existe un D_{max} qui maximise la borne. Une évaluation grossière de ce paramètre peut être obtenu en prenant la plus grande valeur entière D telle que $B_{Lev} \geq D^2/N^2$.

6.2.3 Comparaisons aux bornes de Welch et de Levenshtein

La borne donnée dans le **Théorème 6.2** dépend d'un grand nombre de paramètres tels que :

- Le nombre de séquences M ;
- La longueur des séquences N ;
- Le choix du vecteur de poids \mathbf{w} ;

- Et le nombre de derniers retards à considérer D .

Dans la littérature, un certain nombre de travaux ont porté sur ces critères (hors critère sur D) dans le cadre des bornes de Levenshtein [87] [88] [89]. Dans cette section, étudie le comportement de la nouvelle borne selon ces paramètres et plus précisément selon le nombre de séquences M .

6.2.3.1 Cas $M = 2$

Dans le cas $M = 2$, il a été montré que la meilleure borne de Levenshtein est obtenue avec des vecteurs de poids uniformes [87] :

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{2N-1} & \text{si } i \leq 2N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.2.16)$$

Dans ce cas précis, la borne de Levenshtein est exactement égale à celle de Welch [22] :

$$B_{Welch, M=2} := \frac{1}{4N-3} \quad (6.2.17)$$

Selon Levenshtein in [87] – ‘la borne de Welch ne peut pas être amélioré à l’aide de la méthode de Levenshtein’ ; Toutefois, à partir de la borne établie dans cette section, il peut être facilement montré qu’il existe un certain $d \geq 1$ (par exemple avec $d = 1$) tel que $B_{Welch, M=2} \geq d^2/N^2$ pour $N \geq 3$ et (6.2.12) est vérifiée. Ainsi, l’application du **Corollaire 6.1** montre que la borne proposée est plus serrée que celle de Welch dans le cas $M = 2$. Une forme explicite de cette borne est :

$$|r_{max}|^2 \geq \frac{1}{3} \frac{1}{N^2} \left[\frac{3MN^2 - 3N^2 - MD(D+1)(2D+1)}{M(2N-1-2D) - 1} \right] = B_{2N-1}(D)$$

dont la preuve est donnée dans l’ANNEXE F.

La FIGURE 6.1 trace l’évolution de la borne proposée en fonction de D , lorsque $M = 2$, $N = 1000$ et \mathbf{w} vecteur de poids uniformes.

Comme attendu, la borne proposée est meilleure que Welch pour certaines valeurs de D ; en particulier pour $D \in \llbracket 1 : 25 \rrbracket$. Le D optimal est atteint en $D_{max} = 15$. Et comme, mentionné plus haut, cette valeur peut être calculée de manière approximative en prenant la valeur entière de D qui maximise $B_{Lev} = B_{Welch, M=2} \geq D^2/N^2$ (Cf. **Corollaire 6.1**).

$$\frac{15^2}{N^2} \approx 2,25 \cdot 10^{-4} < B_{Welch, M=2} \approx 2,50 \cdot 10^{-4} < \frac{16^2}{N^2} \approx 2,56 \cdot 10^{-4}$$

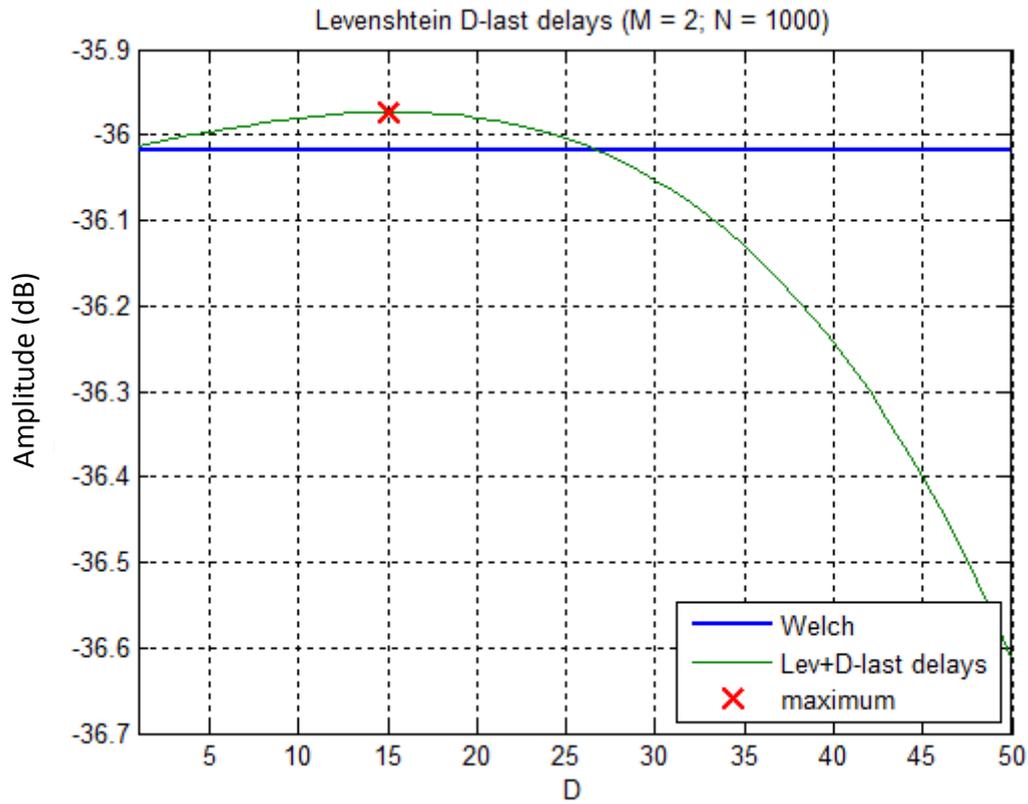


FIGURE 6.1 Evolution de la borne $B_{2N-1}(D)$ en fonction de D comparée à la borne de Welch .

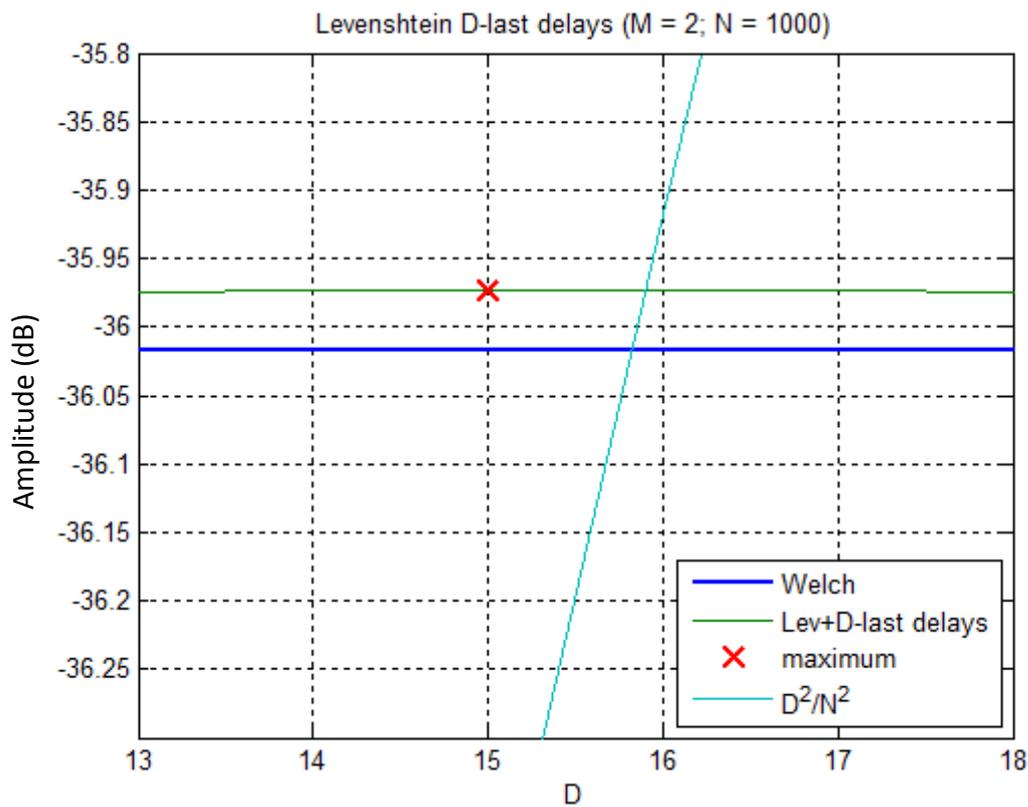


FIGURE 6.2 Evolution de $B_{2N-1}(D)$ comparée à la borne de Welch et à $\frac{D^2}{N^2}$. La valeur optimale

de D correspond au plus grand entier tel que $B_{Welch, M=2} \geq \frac{D^2}{N^2}$.

6.2.3.2 Cas $M = 3$ et $M = 4$

Liu a défini, dans [89], un vecteur de poids de type « *Positive-Cycle-of-a-Sine-Wave* » qui permet d'améliorer la borne de Levenshtein pour $M \geq 3$, $N \geq 3$ et $M \geq 4$, $N \geq 2$. Ce vecteur de poids est défini par (avec $K \in \llbracket 2 : 2N - 1 \rrbracket$) :

$$w_i = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2K}\right) \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{K}\right) & \text{si } i \in \llbracket 1 : K \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.2.18)$$

En utilisant ce vecteur de poids, la borne associée, définie dans [89], atteint son maximum pour une certaine valeur de K que l'on notera K_{\max} . Dans le cas $M = 3$ et $M = 4$, cette borne est plus précise que les autres bornes de Levenshtein, en particulier, celle avec les poids uniformes.

Or, il est possible de montrer que la borne proposée, ici, est encore plus précise que celle de Liu pour ces deux valeurs de M . Pour montrer cela, on utilise à nouveau le **Corollaire 6.1**. Pour ce faire, il suffit de vérifier que :

1. Il existe un certain $d \geq 1$ (par exemple avec $d = 1$) tel que la borne de Liu que l'on notera B_{Liu} vérifie $B_{Liu} \geq d^2/N^2$;
2. K_{\max} est plus grand que N (ce qui implique directement (6.2.12)) ;

Tout d'abord, si on prend $d = 1$, la première condition est directement vérifiée car $B_{Liu} \geq 1/N^2$. Ensuite, pour montrer la seconde condition (et donc (6.2.12)), il suffit de montrer que la borne de Liu est croissante selon K sur l'intervalle $\llbracket 2 : N \rrbracket$. Or, comme définie dans [89], sur cet interval, la borne de Liu prend la forme suivante :

$$B_{Liu}(K) = \frac{1}{N^2} \left[N - \frac{\left((N-1)N - \frac{M}{2} \right) K \tan^2\left(\frac{\pi}{2K}\right) + \frac{MK}{2}}{2M - K \tan^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)} \right] \quad (6.2.19)$$

Et il peut être montré, en étudiant les variations de $B_{Liu}(K)$, que cette borne est une fonction croissante de K pour $M = 3$ et $M = 4$. Par conséquent, K_{\max} est nécessairement supérieur ou égal à N . (6.2.12) est donc vérifiée. Ainsi, toutes les conditions nécessaires à l'application du **Corollaire 6.1** sont satisfaites ; et donc la borne proposée, ici, est meilleure que celle de Liu pour ces deux valeurs de M .

Par contre pour $M \geq 5$, aucune conclusion ne peut être tirée car K_{\max} n'est pas nécessairement plus grand que N avec le vecteur de poids de Liu. Toutefois, tout vecteur de

pois vérifiant le **Corollaire 6.1** donne une borne de Levenshtein pouvant être améliorée par le **Théorème 6.2**.

La FIGURE 6.1 trace l'évolution, lorsque $M = 3$, $N = 1000$, de :

- la borne de Welch ;
- la borne de Levenshtein avec \mathbf{w} vecteur de poids uniformes en fonction de K ;
- la borne de Levenshtein avec \mathbf{w} vecteur de poids de Liu en fonction de K ;
- et la borne proposée avec \mathbf{w} vecteur de poids de Liu en fonction de K , où pour un K donné, la valeur optimale de D a été prise.

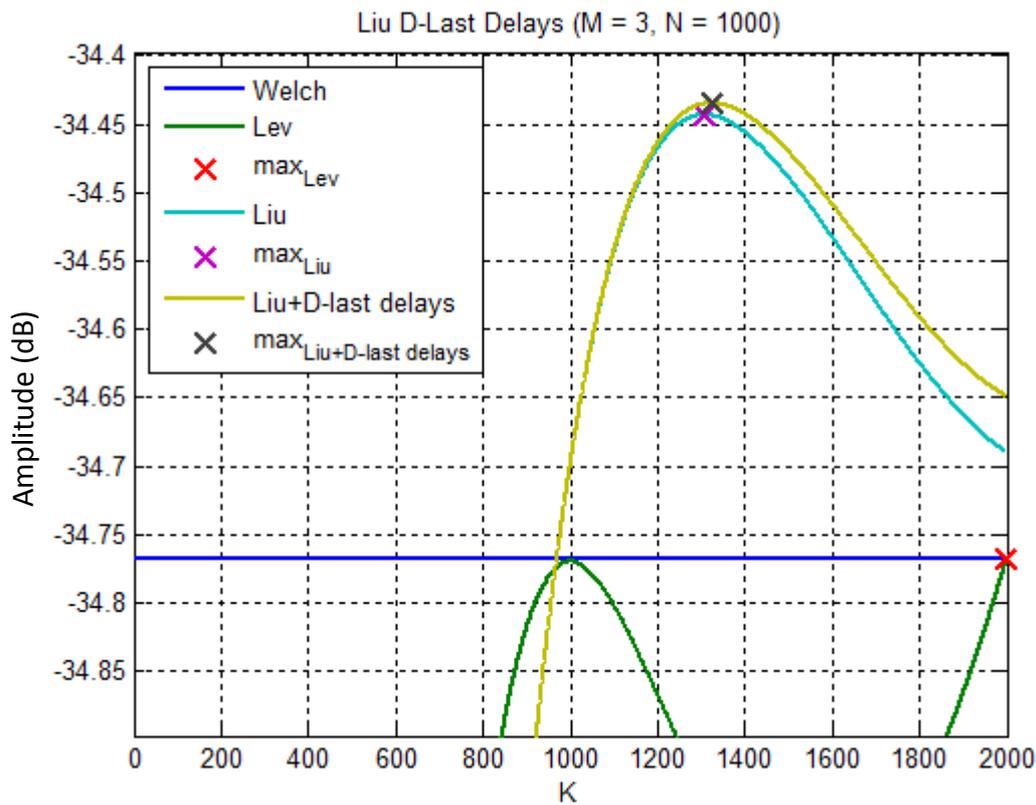


FIGURE 6.3 Evolution de la borne proposée en fonction de K , pour un choix optimal de D , comparée à la borne de Liu et à la borne de Welch.

On peut voir, à travers cette figure, que la valeur optimale de K (*i.e.*, $K = K_{\max}$) est bien supérieure à N . Et que pour cette valeur, la borne proposée est effectivement plus grande que la borne de Liu.

On observe aussi, que la borne de Liu est bien plus serrée que la borne de Levenshtein avec poids uniformes (résultat montré par Liu dans [89]) et donc, par transitivité, la borne proposée l'est aussi.

Le cas $M = 4$, non illustré ici, a un comportement semblable. La seule différence repose sur le fait que la borne de Levenshtein avec poids uniformes est maintenant meilleure que celle de Welch mais toujours moins bonne que celle avec les poids de Liu.

6.3 Borne sur le PSLR en désadapté

Tout d'abord, nous allons introduire succinctement ce qu'est le filtre désadapté. Le filtre adapté permet de maximiser le rapport Signal sur Bruit (SNR). Or, ce dernier souffre parfois de lobes secondaires assez importants inhérent à la structure de la séquence émise. C'est pour cela que dans certaines applications comme par exemple en présence d'un fort clutter ou de nombreuses cibles qu'il est préférable de remplacer le filtre adapté par un filtre dit « désadapté » permettant d'atteindre un meilleur PSLR au pris d'une perte en désadaptation. En effet, l'emploi d'un filtre désadapté permet dans une certaine mesure d'augmenter le nombre de degrés de liberté pour abaisser le niveau des lobes secondaires en sortie de filtrage. Par exemple si l'on considère un signal ayant un spectre rectangulaire, la réponse du filtre adapté à ce signal donnera un sinus cardinal dont les premiers lobes secondaires sont à -13.3 dB du pic principal ce qui n'est pas acceptable. Typiquement, il est commun d'associer au filtre adapté une pondération fréquentielle (de type Taylor, Hamming, Hanning, ...) pour apodiser le spectre afin de permettre d'abaisser ces lobes secondaires en dessous de -30 dB pour une perte en désadaptation de classe 1-2 dB. Et l'ensemble constitué du filtre adapté conjugué avec la pondération fréquentielle constitue alors un exemple de filtre « désadapté ». Par contre, contrairement au filtre adapté, aucune borne sur le PSLR n'existe dans ce cas-ci.

Ainsi dans cette section, on va établir une nouvelle borne sur le PSLR dans le cas d'un filtrage désadapté pour toutes familles de séquences de même énergie. A nouveau, deux étapes ont été réalisées :

- Le calcul d'une borne supérieure et d'une borne inférieure sur la norme de Frobenius de la matrice des produits de corrélation ;
- Et la fusion de ces deux résultats afin d'établir la nouvelle borne sur le PSLR dans le cas désadapté.

Soit $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$ une famille de M séquences de même énergie $E_x = 1$ de longueur N_x telle que :

$$\sum_{n=1}^{N_x} |x_n^m|^2 = E_x = 1 \quad , m \in \llbracket 1 : M \rrbracket ; \quad (6.3.1)$$

soit $\{\mathbf{y}_m\}_{m=1}^M$ l'ensemble des filtres désadaptés associés de longueur $N_y = N_x + 2N_{supp}$ où $N_{supp} \in \llbracket 0 : N_x - 1 \rrbracket$. Et soit $ML_{loss}^m = |ML_{loss}^m| e^{j\phi^m}$ la perte en désadaptation sur le lobe principal en sortie du m -ième filtrage désadapté ; perte définie comme étant :

$$\sum_{n=1}^{N_x} x_n^m (y_{n+N_{supp}}^m)^* = |ML_{loss}^m| e^{j\phi^m} \quad , m \in \llbracket 1 : M \rrbracket ; \quad (6.3.2)$$

On définit la fonction de corrélation de \mathbf{x}_m , par \mathbf{y}_l noté $\mathbf{r}_{\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_l} = \mathbf{x}_m * \mathbf{y}_l$, par :

$$r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_l}(k) = (\mathbf{x}_m * \mathbf{y}_l)_k = \sum_{n=1}^{N_x} x_n^m (y_{n+N_{supp}+k}^l)^* \quad (6.3.3)$$

De manière très analogue à la partie précédente, il vient de cette définition que le niveau maximum des lobes secondaires des fonctions d'auto-corrélations et d'inter-corrélations, que l'on le notera r_{\max} peut être défini par :

$$|r_{\max}|^2 = \max \left(\max_{\substack{m \neq l \\ k}} |r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_l}(k)|^2, \max_{\substack{m=l \\ k \neq 0}} |r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_l}(k)|^2 \right) \quad (6.3.4)$$

Il vient alors que le PSLR pour *Peak Sidelobe Level Ratio* est donné par :

$$\text{PSLR} = \frac{|r_{\max}|^2}{\max_m |ML_{loss}^m|^2} \quad (6.3.5)$$

A ce stade, deux développements vont être menés :

- le premier portera sur le filtrage désadapté dans le cas apériodique
- et le deuxième cas de figure au filtrage désadapté dans le cas périodique.

Afin de faciliter la compréhension des deux démonstrations à venir, seulement les points clés essentiels à l'établissement des bornes seront donnés ici.

Toutefois, les détails des calculs seront donnés en annexes tout au long du développement.

6.3.1 Cas apériodique

Dans ce premier cas de figure, définissons les deux matrices suivantes \mathbf{X} et \mathbf{Y} de taille $[M(N_x + N_y - 1)] \times [N_x + N_y - 1]$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{X}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^M \end{bmatrix}_{[M(N_x+N_y-1)] \times [N_x+N_y-1]} ; \quad (6.3.6)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^1 \\ \mathbf{Y}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^M \end{bmatrix}_{[M(N_x+N_y-1)] \times [N_x+N_y-1]} ; \tag{6.3.7}$$

où \mathbf{X}^m et \mathbf{Y}^m sont des matrices carrées d'ordre $(N_x + N_y - 1)$ définies comme suit :

$$\mathbf{X}^m = \begin{bmatrix} x_1^m & \dots & \dots & x_{N_x}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & x_{N_x}^m & 0 & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & \ddots & \ddots & & & & x_{N_x}^m \\ x_{N_x}^m & 0 & & & & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ x_2^m & \dots & x_{N_x}^m & 0 & \dots & 0 & x_1^m \end{bmatrix} \tag{6.3.8}$$

$$\mathbf{Y}^m = \begin{bmatrix} y_{N_{supp}+1}^m & \dots & \dots & \dots & \dots & y_{N_y}^m & 0 & \dots & 0 & y_1^m & \dots & y_{N_{supp}}^m \\ y_{N_{supp}}^m & \ddots & & & & & y_{N_y}^m & 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & & & y_1^m \\ y_1^m & & & & & & & & & \ddots & & 0 \\ 0 & y_1^m & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & & & & & & \ddots & & y_{N_y}^m \\ y_{N_y}^m & 0 & & & & & & & & & & y_{N_y-1}^m \\ y_{N_y-1}^m & y_{N_y}^m & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ y_{N_{supp}+2}^m & \dots & \dots & \dots & \dots & y_{N_y}^m & 0 & \dots & 0 & y_1^m & \dots & \dots & y_{N_{supp}+1}^m \end{bmatrix} \tag{6.3.9}$$

On reprend ici les mêmes notations que dans la partie précédente, à savoir : notons \mathbf{X}_i^m et \mathbf{Y}_i^m , $i \in \llbracket 1 : N_x + N_y - 1 \rrbracket$, les i -ième lignes de \mathbf{X}^m et \mathbf{Y}^m respectivement. Il apparaît que tous les produits de corrélations sont fournis par l'ensemble des produits scalaires des vecteurs

$\{\mathbf{X}_i^m\}_{m=1, i=1}^{M, N_x+N_y-1}$ avec les vecteurs $\{\mathbf{Y}_i^m\}_{m=1, i=1}^{M, N_x+N_y-1}$, ensemble contenu dans la matrice carrée

$\mathbf{R} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^H$ d'ordre $M(N_x + N_y - 1)$:

De plus, si l'on souhaite considérer non plus l'ensemble des retards de manière uniforme mais plutôt sous une version pondérée, alors il est possible de pondérer chaque vecteur ligne par un coefficient de pondération w_i :

$$\tilde{\mathbf{X}}_i^m = \mathbf{X}_i^m w_i^{1/2q} \quad i \in \llbracket 1 : N_x + N_y - 1 \rrbracket \text{ et } m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \quad (6.3.10)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i^m = \mathbf{Y}_i^m w_i^{1/2q} \quad i \in \llbracket 1 : N_x + N_y - 1 \rrbracket \text{ et } m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \quad (6.3.11)$$

où le vecteur de poids $\mathbf{w} := \{w_i\}_{i=1}^{N_x+N_y-1}$ vérifie :

$$\sum_{i=1}^{N_x+N_y-1} w_i = 1 \quad (6.3.12)$$

Les matrices $\tilde{\mathbf{R}}$ et $\tilde{\mathbf{X}}$ associées s'expriment alors :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}}^H \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^1 \\ \tilde{\mathbf{X}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}^M \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^1 \\ \tilde{\mathbf{Y}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}^M \end{bmatrix} \quad (6.3.13)$$

En l'occurrence, dans notre cas, nous allons nous focaliser sur l'étude des K premiers retards et donc :

$$\sum_{i=1}^K w_i = 1 \quad (6.3.14)$$

$$w.r.t \begin{cases} w_i \geq 0 & i \in \llbracket 1 : K \rrbracket \\ w_i = 0 & i > K \text{ ou } i < 0 \end{cases}$$

Il peut être montré que la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ vérifie le lemme suivant :

Lemme 6.4 (Borne Supérieure) : *Sous les hypothèses précédentes, la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ élevée à la puissance q (produit de Hadamard) peut être majorée par :*

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 \leq M^2 |r_{\max}|^{2q} + \sum_{m=1}^M (|ML_{\text{loss}}^m|^{2q} - |r_{\max}|^{2q}) \mathbf{w}^T \mathbf{w}. \quad (6.3.15)$$

où : $\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q} = \underbrace{\tilde{\mathbf{R}} \circ \tilde{\mathbf{R}} \circ \dots \circ \tilde{\mathbf{R}}}_q$

Preuve : Ce résultat est semblable à celui du Lemme 1 de [92] et est obtenu de la même manière. \square

Il est aussi possible de déterminer une borne inférieure sur la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ élevée à la puissance q au sens de Hadamard :

Lemme 6.5 (Borne Inférieure) : *Sous les hypothèses précédentes, la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ élevée à la puissance q (produit de Hadamard) peut être minorée par :*

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 \geq \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{\min\left(\binom{N_x + N_y + q - 2}{q}, \binom{N_x + K + q - 2}{q}, MK\right)} \quad (6.3.16)$$

où : K représente le nombre de retards considéré ; les K premiers.

Preuve : Cette preuve reprend l'approche de Welch. Toutefois certaines modifications ont été apportées afin de prendre en compte l'aspect désadapté – Voir ANNEXE G. \square

En associant les deux précédents les **Lemme 6.4** et **Lemme 6.5**, il peut être facilement déduit une borne inférieure sur le PSLR :

Théorème 6.3 (Corrélation Apériodique) : *Pour toute famille de M séquences de longueur N_x sous la contrainte d'équi-énergie ayant chacune un filtre désadapté associé de taille N_y , et pour tout vecteur de poids \mathbf{w} qui vérifie la condition (6.3.14), une borne inférieure sur le Peak-to-Sidelobe Level est donnée par :*

$$|r_{max}|^{2q} \geq \frac{1}{M^2 - M\mathbf{w}^T\mathbf{w}} \left[\frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{l_{N_x, N_y, q}} - \mathbf{w}^T\mathbf{w} \sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^{2q} \right] \quad (6.3.17)$$

avec : $l_{N_x, N_y, q} = \min\left(\binom{N_x + N_y + q - 2}{q}, \binom{N_x + K + q - 2}{q}, MK\right)$;

$$K \in \llbracket 1 : N_x + N_y - 1 \rrbracket.$$

En corollaire de ce théorème, le cas $q = 1$ donne lieu à :

Corollaire 6.2 (Corrélation Apériodique) : *Pour toute famille de M séquences de longueur N_x sous la contrainte d'équi-énergie ayant chacune un filtre désadapté associé de taille N_y , et pour tout vecteur de poids \mathbf{w} qui vérifie la condition (6.3.14), une borne inférieure sur le Peak-to-Sidelobe Level est donnée par :*

$$|r_{max}|^2 \geq \frac{1}{M^2 - M\mathbf{w}^T\mathbf{w}} \left[\frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|)^2}{l_{N_x, N_y}} - \mathbf{w}^T\mathbf{w} \sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^2 \right] \quad (6.3.18)$$

avec : $l_{N_x, N_y} = \min(N_x + N_y - 1, N_x + K - 1, MK)$;

$$K \in \llbracket 1 : N_x + N_y - 1 \rrbracket.$$

6.3.2 Cas périodique

Dans ce deuxième cas de figure, le développement est très similaire à celui du cas a périodique. La principale différence provient de la structure des matrices \mathbf{X}^m et \mathbf{Y}^m qui deviennent des matrices carrées d'ordre N_x , respectivement :

$$\mathbf{X}^m = \begin{bmatrix} x_1^m & x_2^m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{N_x-1}^m & x_{N_x}^m \\ x_{N_x}^m & x_1^m & \ddots & & & & & & x_{N_x-1}^m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_3^m & & & & & & & \ddots & x_2^m \\ x_2^m & x_3^m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{N_x}^m & x_1^m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^m \\ \mathbf{Y}_2^m \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{N_x}^m \end{bmatrix}$$

avec :

$$\mathbf{Y}_i^m := \{Y_{i,j}^m\}_{j=1}^{N_x}$$

$$Y_{i,j}^m = y_{j+N_{supp}-i+1}^m + y_{j+N_{supp}-i+1-N_x}^m + y_{j+N_{supp}-i+1+N_x}^m.$$

De manière analogue à la partie précédente on obtient le Lemme suivant :

Lemme 6.6 (Borne Inférieure) : *Sous les hypothèses précédentes, la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ élevée à la puissance q (produit de Hadamard) peut être minorée par :*

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 \geq \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{\min\left(\binom{N_x + q - 1}{q}, MK\right)} \quad (6.3.19)$$

où : K représente le nombre de retards considéré ; les K premiers.

Il s'ensuit en regroupant **Lemme 6.4** et **Lemme 6.6** que :

Théorème 6.4 (Corrélation Périodique) : *Pour toute famille de M séquences de longueur N_x sous la contrainte d'équi-énergie ayant chacune un filtre désadapté associé de taille N_y , et pour tout vecteur de poids \mathbf{w} qui vérifie la condition (6.3.14), une borne inférieure sur le Peak-to-Sidelobe Level est donnée par :*

$$|r_{max}|^{2q} \geq \frac{1}{M^2 - M\mathbf{w}^T\mathbf{w}} \left[\frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{l_{N_x, N_y, q}} - \mathbf{w}^T\mathbf{w} \sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^{2q} \right] \quad (6.3.20)$$

avec : $l_{N_x, N_y, q} = \min \left(\binom{N_x + q - 1}{q}, MK \right) ;$

$$K \in \llbracket 1 : N_x \rrbracket.$$

Il vient alors que le cas $q = 1$ donne lieu à :

Corollaire 6.3 (Corrélation Périodique) : *Pour toute famille de M séquences de longueur N_x sous la contrainte d'équi-énergie ayant chacune un filtre désadapté associé de taille N_y , et pour tout vecteur de poids \mathbf{w} qui vérifie la condition (6.3.14), une borne inférieure sur le Peak-to-Sidelobe Level est donnée par :*

$$|r_{max}|^2 \geq \frac{1}{M^2 - M\mathbf{w}^T\mathbf{w}} \left[\frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|)^2}{l_{N_x, N_y}} - \mathbf{w}^T\mathbf{w} \sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^2 \right] \quad (6.3.21)$$

avec : $l_{N_x, N_y} = \min(N_x, MK) ;$

$$K \in \llbracket 1 : N_x \rrbracket.$$

6.3.3 Discussions et interprétations

Les bornes introduites dans cette section dépendent d'un certain nombre de paramètres tels que : le nombre de séquences M ; leurs tailles N_x ; et la longueur des filtres désadaptés associés N_y . Cependant, ces bornes peuvent aussi dépendre du choix du vecteur de poids \mathbf{w} . Ce dernier paramètre permet à la fois d'affiner la borne (e.g. la borne est parfois maximale pour un $K_{max} < N_y$ et donc la borne pour tout $K \geq K_{max}$ est bornée par cette valeur) et

d'apporter une flexibilité à cette dernière (e.g. borne sur le PSLR lorsque l'on optimise non plus la totalité des retards mais les K premiers).

Cette section étudie le comportement de la borne apériodique (**Théorème 6.3**) et périodique (**Théorème 6.4**) selon ces différents paramètres.

Tout d'abord, on peut réécrire la borne du **Théorème 6.3** et du **Théorème 6.4** de la manière suivante :

$$|r_{max}|^{2q} \geq \left[1 - \frac{M}{M - \mathbf{w}^T \mathbf{w}} \frac{l_{N_x, N_y, q} - \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{M \sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^{2q}}}{l_{N_x, N_y, q}} \right] \times \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^{2q}$$

Ainsi, il peut être observé que plus $\mathbf{w}^T \mathbf{w}$ est petit, meilleur est la borne. Ainsi, choisir le vecteur de poids \mathbf{w} optimal qui minimise $\mathbf{w}^T \mathbf{w}$ permettrait d'obtenir la meilleure borne possible. En particulier en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut remarquer que :

$$\mathbf{w}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^K w_i^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^K w_i)^2}{K} = \frac{1}{K}$$

Par conséquent, le meilleur vecteur de poids est obtenu lorsque $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1/K$; donc lorsque l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité, c'est-à-dire lorsque \mathbf{w} est le vecteur de poids uniformes :

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{K} & \text{if } i \in \llbracket 1:K \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.3.22)$$

Ainsi, en utilisant ce vecteur de poids particulier, **Théorème 6.3** et **Théorème 6.4** deviennent :

Corollaire 6.4 (Poids uniformes) :

$$|r_{max}|^{2q} \geq \left[1 - \frac{MK}{MK - 1} \frac{l_{N_x, N_y, q} - \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{M \sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^{2q}}}{l_{N_x, N_y, q}} \right] \times \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^{2q} \quad (6.3.23)$$

$$\text{avec : } l_{N_x, N_y, q} = \begin{cases} \min \left(\binom{N_x + q - 1}{q}, MK \right) & \text{si périodique} \\ \min \left(\binom{N_x + N_y + q - 2}{q}, \binom{N_x + K + q - 2}{q}, MK \right) & \text{si apériodique} \end{cases} ;$$

$$K \in \llbracket 1 : N_x \rrbracket.$$

Or on rappelle que le PSLR pour *Peak Sidelobe Level Ratio* est donné par :

$$\text{PSLR} = \frac{|r_{\max}|^2}{\max_m |ML_{\text{loss}}^m|^2}$$

Il vient alors que :

$$\text{PSLR}^q \geq \left[1 - \frac{MK}{MK-1} \frac{l_{N_x, N_y, q} - \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{\text{loss}}^m|^q)^2}{M \sum_{m=1}^M |ML_{\text{loss}}^m|^{2q}}}{l_{N_x, N_y, q}} \right] \times \frac{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |ML_{\text{loss}}^m|^{2q}}{\max_m (|ML_{\text{loss}}^m|^{2q})}.$$

Il est alors intéressant de remarquer que le PAPR (pour *Peak to Average Power Ratio*) de la perte en désadaptation puissance q selon m apparaît. On le notera $\text{PAPR}_{ML_{\text{loss}}^q}$:

$$\text{PSLR}^q \geq \left[1 - \frac{MK}{MK-1} \frac{l_{N_x, N_y, q} - \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{\text{loss}}^m|^q)^2}{M \sum_{m=1}^M |ML_{\text{loss}}^m|^{2q}}}{l_{N_x, N_y, q}} \right] \times \frac{1}{\text{PAPR}_{ML_{\text{loss}}^q}}$$

Ce résultat montre que la meilleure borne est obtenue lorsque $\text{PAPR}_{ML_{\text{loss}}^q} = 1$ (car $(\sum_{m=1}^M |ML_{\text{loss}}^m|^q)^2 \leq M \sum_{m=1}^M |ML_{\text{loss}}^m|^{2q}$ d'après Cauchy-Schwarz, inégalité devenant égalité lorsque $\text{PAPR}_{ML_{\text{loss}}^q} = 1$). Ce qui correspond au cas particulier d'une perte en désadaptation identique pour toutes les paires $(\mathbf{x}^m, \mathbf{y}^m)$. Classiquement, ce résultat est souvent attendu lors de l'optimisation des filtre désadaptés d'une famille de séquences pour des applications radars. Ainsi, lorsque $\text{PAPR}_{ML_{\text{loss}}^q} = 1$, il vient la forme compacte suivante :

Corollaire 6.5 (Poids uniformes et $\text{PAPR}_{ML_{\text{loss}}^q} = 1$) :

$$|r_{\max}|^{2q} \geq \left[1 - \frac{MK}{MK-1} \frac{l_{N_x, N_y, q} - 1}{l_{N_x, N_y, q}} \right] \max_m (|ML_{\text{loss}}^m|^{2q}) \quad (6.3.24)$$

$$\text{avec : } l_{N_x, N_y, q} = \begin{cases} \min \left(\binom{N_x + q - 1}{q}, MK \right) & \text{si périodique} \\ \min \left(\binom{N_x + N_y + q - 2}{q}, \binom{N_x + K + q - 2}{q}, MK \right) & \text{si apériodique} \end{cases} ;$$

$$K \in \llbracket 1 : N_x \rrbracket.$$

Il est aussi intéressant de remarquer que, dans le cas périodique, la borne est invariante selon N_y . Ainsi, il est suffisant de prendre $N_x = N_y$ dans ce cas précis. De la même manière, dans le

cas apériodique, si l'expression du **Corollaire 6.5** atteint son maximum pour un $K = K_{max} < N_y$, alors la borne est invariante selon N_y (FIGURE 6.4).

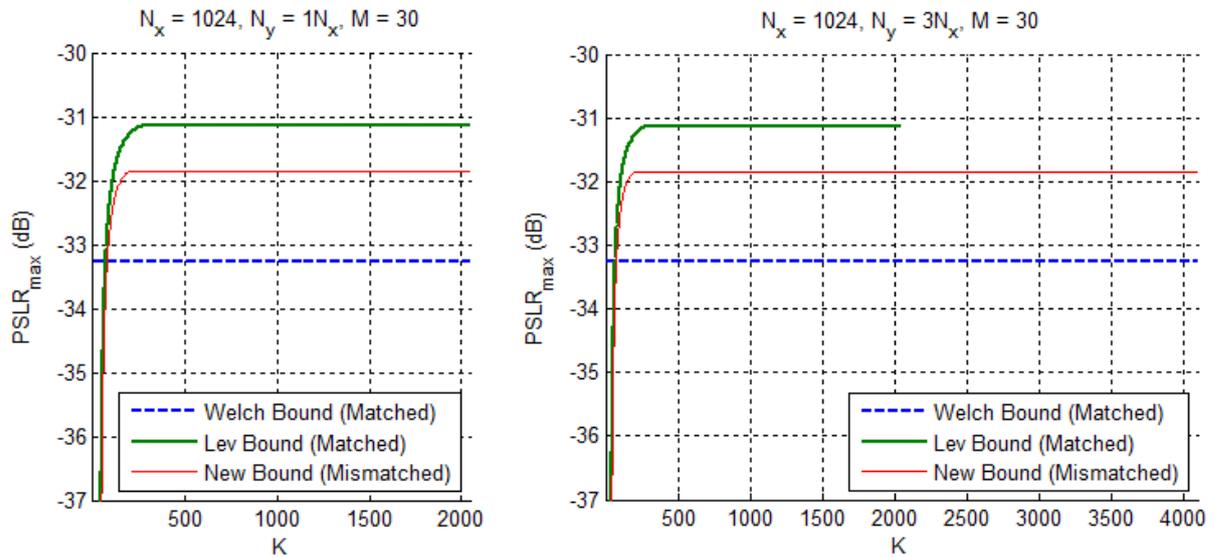


FIGURE 6.4 Evolution de la borne apériodique du **Corollaire 6.5** en fonction de K et N_y . Et comparaison avec la borne de Levensthein et la borne de Welch.

On remarque sur la précédente figure que, contrairement aux idées reçues, l'apport du filtre désadapté est faible lorsqu'on travaille sur une famille de séquences (dans l'exemple $M = 30$). En effet, la FIGURE 6.5 montre que l'apport du filtrage désadapté sur le PSLR dans la configuration $M = 30$ et $K = K_{max}$ pour $N_x = \llbracket 8:200000 \rrbracket$ tend au mieux à un gain d'environ 0.72 dB.

Cela peut se comprendre car malgré un plus grand nombre de degrés de liberté (aucune contrainte d'amplitude, longueur du filtre désadapté possiblement plus importante), pour chaque filtre désadapté, on recherche à minimiser non seulement la fonction d'auto-corrélation associée mais aussi l'ensemble des fonctions d'inter-corrélations relatives aux autres séquences de la famille. En d'autres termes, la relaxation des contraintes sur l'enveloppe temporelle des séquences reste faible devant les contraintes imposées sur les fonctions de corrélations.

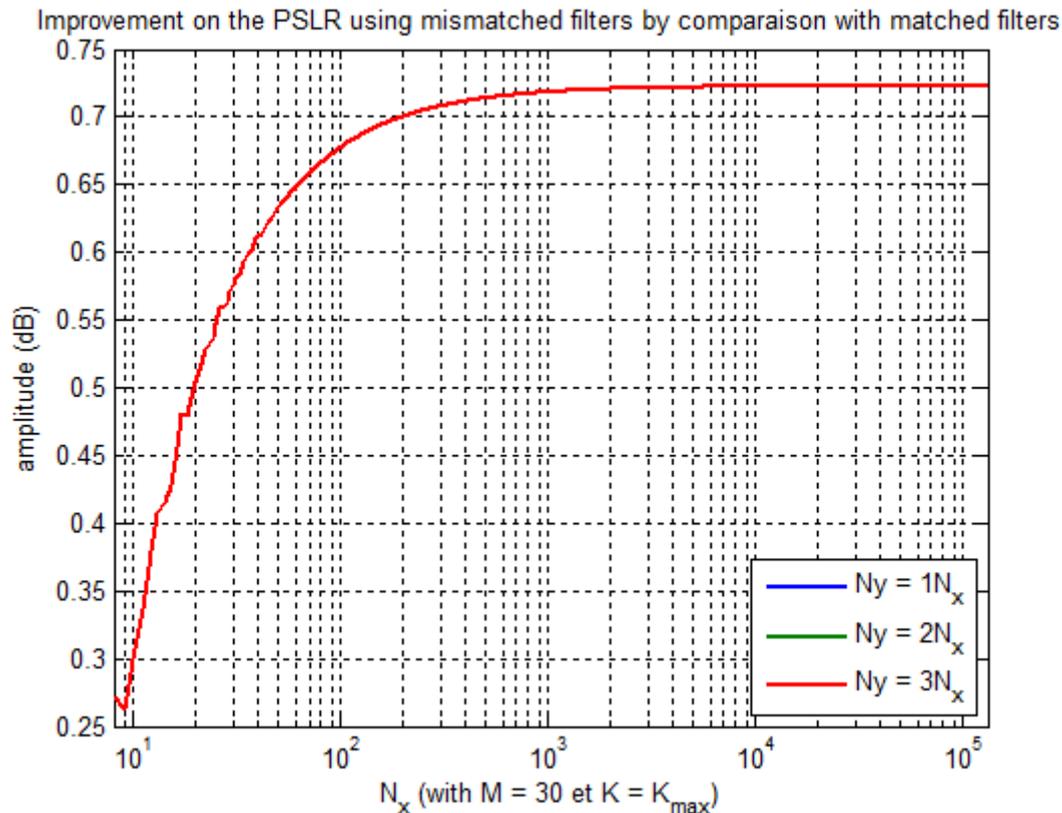


FIGURE 6.5 Evolution de la borne aperiodique du **Corollaire 6.5** en fonction de N_x et N_y avec $K = K_{max}$. Les courbes sont superposées mettant en évidence l'invariance vis-à-vis de N_y .

Par contre, lorsqu'on trace l'évolution de la borne selon la cardinalité de la famille de séquences (*i.e.*, selon M), on observe bien que l'apport du filtre désadapté est d'autant plus important que M est petit (FIGURE 6.6). En l'occurrence, le cas particulier $M = 1$ nous donne que le PSLR maximum atteignable est de $-\infty$ tout comme la borne adaptée. Or, dans cette configuration, il est commun d'utiliser un filtre désadapté pour grandement diminuer le PSLR. C'est pour cela qu'il est communément admis que le filtre désadapté permet de grandement diminuer le PSLR et que les résultats obtenus lorsque $M > 1$ semblent contre-intuitifs. Toutefois, on peut expliquer ce phénomène par le fait que, lorsque $M = 1$, la relaxation des contraintes sur l'enveloppe temporelle des séquences n'est plus négligeable devant les contraintes imposées sur la fonction d'auto-corrélation. Par conséquent, le filtre désadapté possède plus de levier pour minimiser le PSLR. Et à contrario, plus M est grand, plus la relaxation devient négligeable et donc plus l'apport du filtre désadapté devient faible (FIGURE 6.6).

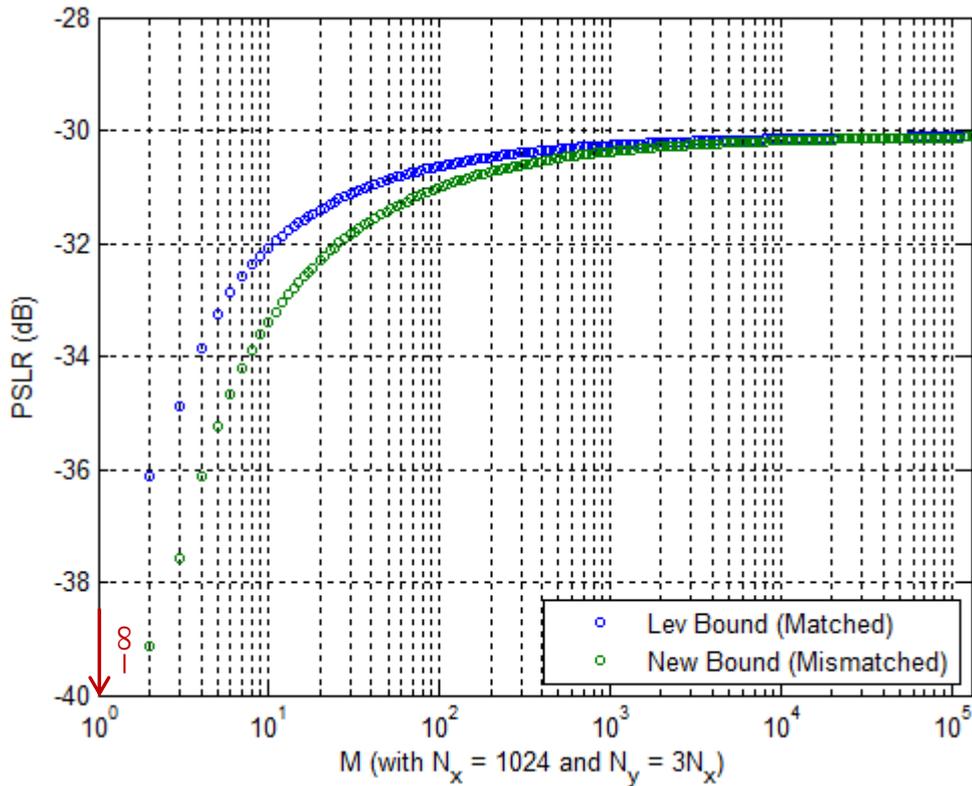


FIGURE 6.6 Evolution de la borne aperiodique du **Corollaire 6.5** en fonction de M avec $N_y = 3N_x$ et $K = K_{max}$.

6.4 Extension : Prise en compte du volume du lobe principal.

Jusqu'à présent, nous avons considéré le pic de corrélation comme une dirac, or, dans les faits, ce pic de corrélation à un certain empatement en distance (lié au spectre du signal, et plus précisément à la variance sur la distribution spectrale de puissance normalisée du signal [93]).

De fait, cette partie s'attache à prendre en compte cet empatement. Par conséquent, nous allons définir le lobe principal comme étant composé d'un ensemble de retard : $\llbracket -F + 1 : F - 1 \rrbracket$, où F représente le nombre de retards positifs composant le lobe principal. Maintenant, si on prédéfinit l'allure du lobe principal pour ces différents retards, dont les valeurs seront notées α_k , telles que :

$$0 \leq \alpha_k \leq 1 \text{ et } \alpha_0 = 1 \quad (6.4.1)$$

$$|r_{x_m, x_m}(k)| = \alpha_k, \quad |k| \leq F; \quad (6.4.2)$$

ou
$$|r_{x_m, y_m}(k)| = |ML_{loss}^m| \alpha_k, \quad |k| \leq F; \quad (6.4.3)$$

selon que l'on traite du cas adapté ou désadapté.

6.4.1 Cas adapté

En prenant en compte ces coefficients, il vient que le **Lemme 6.1** peut se réécrire de la manière suivante :

Lemme 6.7 (Borne Supérieure) : *Sous les hypothèses précédentes, la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ peut être majorée par :*

$$\|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2 \leq M^2 |r_{\max}|^2 + \sum_{k=0}^{F-1} \sum_{m=1}^M (|\alpha_k|^2 - |r_{\max}|^2) \mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w}. \quad (6.4.4)$$

où : $\mathbf{w} := \{w_i\}_{i=1}^{N_x+N_y-1}$;

$$\mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ |i-j|=k \\ \text{ou } |i-j|=N_x+N_y-k-1}}^K w_i w_j.$$

Il vient alors en combinant le **Lemme 6.7** et le **Lemme 6.2** que :

Théorème 6.5 : *Pour toute famille de M séquences unimodulaires de longueur N , pour tout lobe principal défini par F et α_k , et pour tout vecteur de poids \mathbf{w} qui vérifie la condition (6.2.4), une borne inférieure sur le Peak Sidelobe Level Ratio est donnée par :*

$$|r_{\max}|^2 \geq \frac{\frac{M^2}{N^2} [N - \mathbf{w}^T \mathbf{L} \mathbf{w}] - M \sum_{k=0}^{F-1} |\alpha_k|^2 \mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w}}{M^2 - M \sum_{k=0}^{F-1} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w}} \quad (6.4.5)$$

avec : $\mathbf{w} := \{w_i\}_{i=1}^{N_x+N_y-1}$;

$$\sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t = \mathbf{w}^T \mathbf{L} \mathbf{w}.$$

6.4.2 Cas désadapté

De la même manière, il vient que le **Lemme 6.4** peut se réécrire de la manière suivante :

Lemme 6.8 (Borne Supérieure) : *Sous les hypothèses précédentes, la norme de Frobénius de la matrice $\tilde{\mathbf{R}}$ élevée à la puissance q (produit de Hadamard) peut être majorée par :*

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 \leq M^2 |r_{\max}|^{2q} + \sum_{k=0}^{F-1} \sum_{m=1}^M (|ML_{loss}^m \alpha_k|^{2q} - |r_{\max}|^{2q}) \mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w}. \quad (6.4.6)$$

où : $\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q} = \underbrace{\tilde{\mathbf{R}} \circ \tilde{\mathbf{R}} \circ \dots \circ \tilde{\mathbf{R}}}_q$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{A}_i \mathbf{w} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ |i-j|=i \\ \text{ou } |i-j|=N_x+N_y-i-1}}^K w_i w_j$$

Il vient alors en combinant le **Lemme 6.8** et le **Lemme 6.5** (ou le **Lemme 6.6**) que :

Théorème 6.6 : *Pour toute famille de M séquences de longueur N_x sous la contrainte d'équi-énergie ayant chacune un filtre désadapté associé de taille N_y , pour tout lobe principal défini par F et α_k , et pour tout vecteur de poids \mathbf{w} qui vérifie la condition (6.3.14), une borne inférieure sur le Peak-to-Sidelobe Level est donnée par :*

$$|r_{\max}|^2 \geq \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{l_{N_x, N_y, q}} - \frac{\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^{2q} \sum_{k=0}^{F-1} |\alpha_k|^{2q} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w}}{M^2 - M \sum_{k=0}^{F-1} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w}} \quad (6.4.7)$$

$$\text{avec : } l_{N_x, N_y, q} = \begin{cases} \min\left(\binom{N_x + q - 1}{q}, MK\right) & \text{si périodique} \\ \min\left(\binom{N_x + N_y + q - 2}{q}, \binom{N_x + K + q - 2}{q}, MK\right) & \text{si apériodique} \end{cases} ;$$

$$K \in \llbracket 1 : N_x + N_y - 1 \rrbracket.$$

En particulier, en s'appuyant sur les interprétations de la partie 6.3.3, il vient :

Corollaire 6.6 ($\text{PAPR}_{ML_{loss}^q} = 1$) :

$$|r_{\max}|^{2q} \geq \frac{\frac{M^2}{l_{N_x, N_y, q}} - M \sum_{k=0}^{F-1} |\alpha_k|^{2q} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w}}{M^2 - M \sum_{k=0}^{F-1} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_k \mathbf{w}} \max_m (|ML_{loss}^m|^{2q}). \quad (6.4.8)$$

6.4.3 Discussions et interprétations

L'avantage de ces deux derniers théorèmes est de permettre de distribuer l'énergie dans le lobe principal et d'observer l'impact d'un lobe plus ou moins large sur le PSLR.

Afin d'illustrer le comportement de ces deux nouvelles bornes, nous allons nous placer dans la configuration des vecteurs de poids uniformes, c'est-à-dire :

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{K} & \text{if } i \in \llbracket 1:K \rrbracket; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.4.9)$$

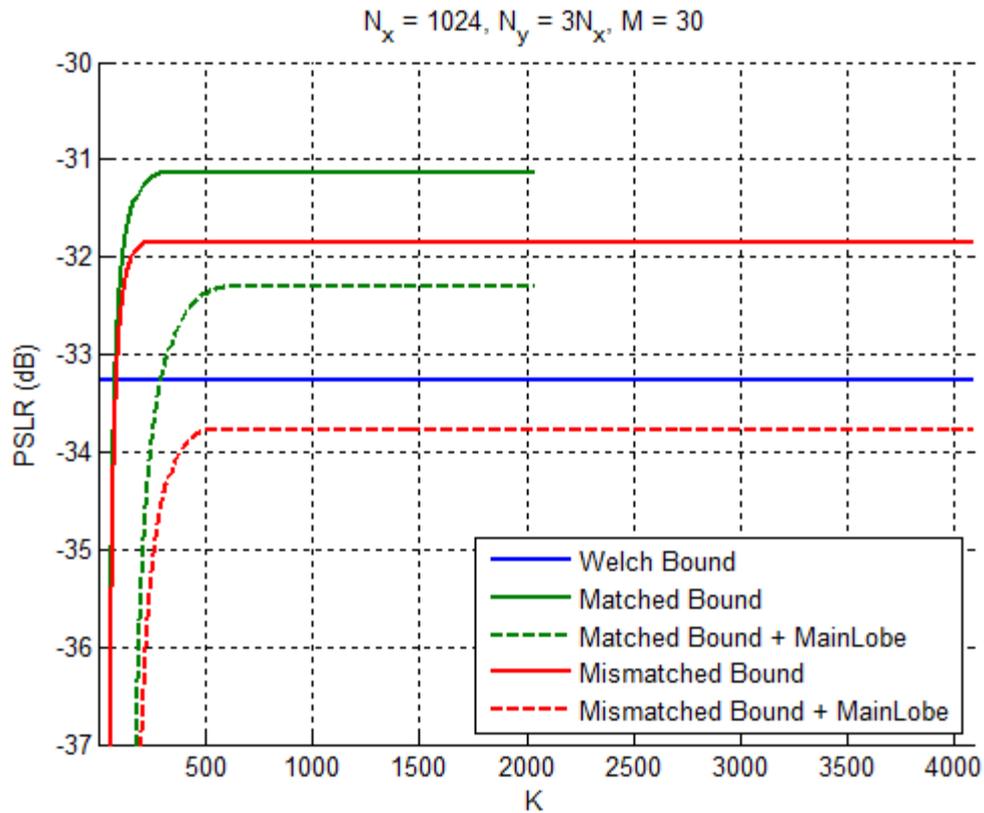
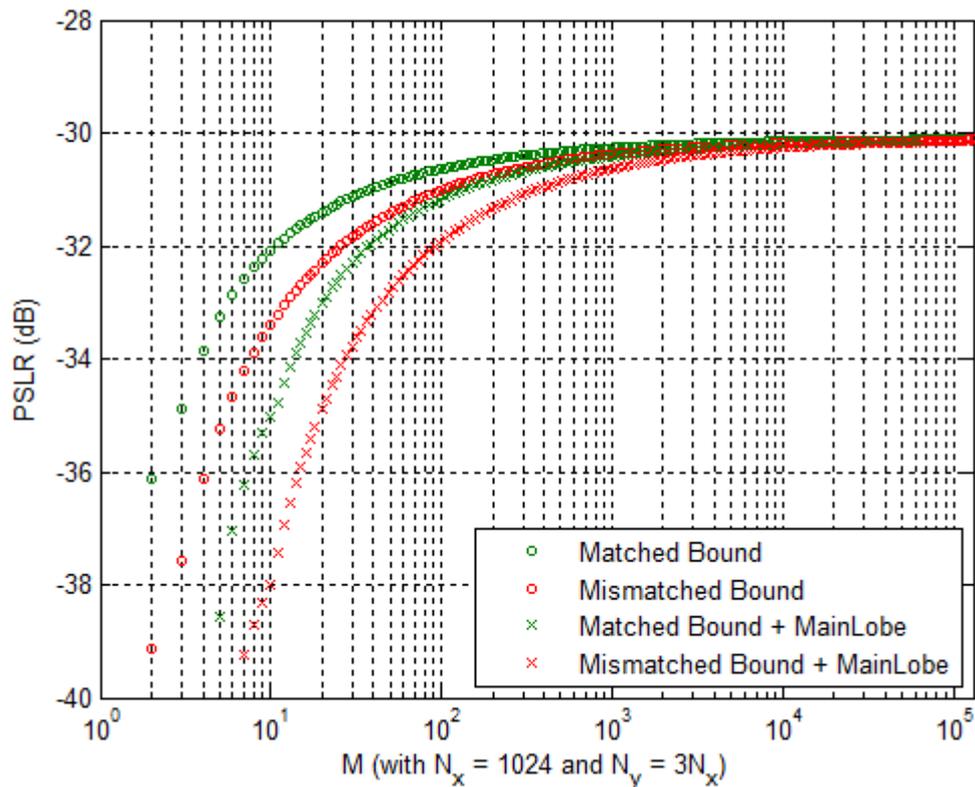
et nous allons prendre $\text{PAPR}_{ML_{loss}^q} = 1$.

De là, nous avons tracé (FIGURE 6.7) l'évolution en fonction de K , suivant les paramètres du TABLEAU 6.1, de :

- la borne de Welch ;
- la borne adaptée du **Théorème 6.2** (pic principal en dirac) ;
- la borne adaptée du **Théorème 6.5** (lobe principal étendu) ;
- la borne désadaptée du **Théorème 6.3** (pic principal en dirac) ;
- et la borne désadaptée du **Théorème 6.6** (lobe principal étendu).

TABLEAU 6.1 Paramètres du lobe principal pour le tracé des bornes.

Paramètres de simulation		Valeurs
Nombre des séquences	M	30
Longueur de séquences	N_x	1024
	$N_y = 3N_x$	3072
Lobe principal	F	3
	$\{\alpha_k\}_{k=0}^{F-1}$	$\{0 \text{ dB}, -1.5 \text{ dB}, -7 \text{ dB}\}$
Pondération	$\{w_i\}_i$	$\begin{cases} \frac{1}{K} & \text{if } i \in \llbracket 1:K \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Perte en désadaptation	$\text{PAPR}_{ML_{loss}^q}$	1

FIGURE 6.7 Evolution des bornes en fonction de K dans la configuration du TABLEAU 6.1.FIGURE 6.8 Evolution des bornes en fonction de M dans la configuration du TABLEAU 6.1.

Sans surprise, on remarque alors qu'en considérant un lobe principal étendu on obtient pour de petites valeurs de M , d'une part, une borne sur le PSLR plus faible, et d'autre part, un apport du filtre désadapté plus grand. Par contre on constate à nouveau que plus M devient grand plus le comportement des bornes avec lobe principal étendu rejoint celui des bornes à pic de corrélation en dirac. Mais, à nouveau, une explication de ce comportement peut être faite : plus M devient grand, plus la relaxation liée à l'élargissement du lobe principal devient négligeable devant les contraintes sur les fonctions de corrélations. Et par conséquent plus l'apport d'un lobe principal étendu devient faible.

6.5 Conclusion

La contribution de Chapitre est double à travers l'établissement de deux bornes :

- une dans le cas adapté qui généralise la borne de Levenshtein aux séquences unimodulaires, et qui permet de prendre en compte les D -derniers retards ;
- une autre dans le cas désadapté qui permet de donner, pour la première fois, une borne sur le PSLR en fonction de la longueur du filtre désadapté.

Ces deux bornes permettent ainsi d'évaluer les performances des algorithmes étudiés en donnant, a priori, une borne inférieure sur PSLR que l'on pourrait obtenir – a priori car la borne n'est pas forcément atteignable. En particulier, elles permettent de mesurer l'écart aux bornes établies des familles de séquences générées, constituant alors un outil permettant de mesurer les performances des algorithmes présentés dans le Chapitre 4 et Chapitre 5 de ce manuscrit.

Chapitre 7. APPLICATION AU CONCEPT MSPSR ET ESSAIS

Dans le Chapitre qui va suivre, nous allons utiliser les algorithmes précédents afin de générer des familles de formes d'ondes pour des systèmes de type MSPSR actif.

7.1 Préliminaires : Cahier des charges et spécifications

Dans cette application radar, il sera pris la configuration suivante :

TABLEAU 7.1 Spécifications du système.

Spécification N°	Noms des paramètres principaux <i>Noms des paramètres dérivés</i>	Valeurs
SPECIFICATION 1	Fréquence porteuse f_p <i>Longueur d'onde</i> λ	~1.3 GHz (bande L) <i>0,23 m</i>
SPECIFICATION 2	Bande passante B <i>Fréquence d'échantillonnage</i> F_{ech}	1.5 MHz <i>2.048 MHz</i>
SPECIFICATION 3	Durée d'intégration T	100 ms – 1 s
SPECIFICATION 4	Vitesse max. observable v_{max} <i>Fréquence Doppler max.</i> f_{Dmax}	150 m/s <i>1.30 kHz</i>
SPECIFICATION 5	Portée R	75 km
SPECIFICATION 6	PAPR ρ	≤ 5 dB

7.2 Résultats théoriques : Simulations

Au regard du TABLEAU 7.1, nous allons retranscrire ces spécifications en terme de longueurs des séquences, durée du motif, nombre de périodes, etc...

Sachant que la fréquence d'échantillonnage est donnée par $F_{ech} = 2.048$ MHz, que la portée du système est de 75 km, et en reprenant l'équation (2.2.2), il en vient que la longueur des séquences (en terme de nombre d'échantillons) est donnée par :

$$N \geq \frac{RF_{ech}}{c} = 512.$$

Ce résultat implique (sachant (2.2.1)) que le temps de répétition du motif est au moins plus grand que :

$$T_R > \frac{N}{F_{ech}} \geq 0.25 \text{ ms.}$$

On détermine alors le nombre de périodes nécessaire afin d'atteindre le temps d'intégration spécifié par le système :

$$N_p = \frac{T}{T_R} \leq 400.$$

Dès lors, pour reprendre les notations du Chapitre 5, il est nécessaire d'établir la zone que l'on souhaite minimiser. En l'occurrence, on recherche à minimiser la zone définie par deux fois le Doppler maximum (afin d'éviter qu'une cible ayant un Doppler de 1.3 kHz brouille celle ayant un Doppler de -1.3 kHz) et la portée radar que l'on se donne (afin d'éviter qu'une cible à 75 km brouille celle étant 0 km). Il vient que la zone à optimiser est définie par :

$$[-K : K] \times [-P : P] \Leftrightarrow [-75 \text{ km} : 75 \text{ km}] \times [-2.6 \text{ kHz} : 2.6 \text{ kHz}]$$

où : K représente la plage distance à optimiser (case distance maximale) ;

P représente la plage Doppler à optimiser (case Doppler maximale).

Associé à cela, on rappelle que l'on travaille, ici, en émission continue. Donc, tous les $\frac{1}{T_R}$ (l'inverse du temps de répétition), la PCAF sur N_p périodes prend les valeurs de la PCAF sur une période. Par contre pour les autres valeurs de Doppler, les lobes secondaires de la PCAF sur N_p périodes sont largement atténués par les valeurs de $\left| \frac{\sin(\pi f_D N_p T_R)}{N_p \sin(\pi f_D T_R)} \right|$. Ainsi l'optimisation de la PCAF sur N_p périodes peut se réduire à l'optimisation des raies Dopplers multiples de

$\frac{1}{T_R}$ (Cf. Partie 2.3.1.2.). Par conséquent, il est suffisant d'optimiser les raies Doppler multiples de $\frac{1}{T_R}$ dans l'intervalle $[-2.6 \text{ kHz} : 2.6 \text{ kHz}]$ pour contrôler la plage Doppler de notre domaine d'intérêt (e.g., si $T_R = 0.25 \text{ ms}$, alors seulement la raie à Doppler nulle doit être minimisée ; par contre, si $T_R = 64 \text{ ms}$, alors les 166 premières raies en plus de la raie à Doppler nulle doivent être minimisées).

De plus, il faut aussi respecter la bande passante associée au système. Cette dernière est fixée à 1.5 MHz.

Enfin, la fluctuation d'enveloppe temporelle (PAPR) des séquences doit être la plus faible possible afin de maximiser l'efficacité des amplificateurs de puissance. En particulier, on recherche des familles de séquences dont le PAPR est au moins plus petit ou égal à 5 dB.

Afin de réaliser les simulations permettant de tenir les spécifications de TABLEAU 7.1, différentes configurations vont être prises (Voir TABLEAU 7.2) :

- En premier lieu, on étudiera conjointement les cas d'un multiplexage FDMA et TDMA. Dans ces cas-ci, l'orthogonalité n'est pas portée par le code ; ainsi il est suffisant d'optimiser qu'une seule séquence qui répond aux exigences du système ($M = 1$). Deux simulations (**1** et **2**) seront alors menées avec pour seule différence le temps d'intégration en réception. Le multiplexage FDMA et TDMA à proprement parlé n'est pas traité ici car nous ne possédons qu'une paire bi-statique. Par contre le comportement de la séquence seule est, elle, analysée.
- Dans une deuxième étude, on se placera dans une configuration CDMA. Et donc, il sera nécessaire de générer une famille de séquences la plus orthogonale possible. En l'occurrence en considérera une famille de trois séquences ($M = 3$) (**Simulation 3**).

TABLEAU 7.2 Paramètres de simulation.

Paramètres de simulation		Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3
Nombre des séquences	M	1	1	3
Longueur de séquences	N	374	374	95744
Longueur sur-échantillonnée	\tilde{N}	512	512	131072
Case Dopplers max.	P	$P = 0$	$P = 0$	$P = 166$
Case Distance max.	K	$K = 512$	$K = 512$	$K = 512$
Nombre de périodes	N_p	$N_p = 400$	$N_p = 4000$	$N_p = 15$
(Temps d'intégration)	T	($T = 100 \text{ ms}$)	($T = 1 \text{ s}$)	($T = 1 \text{ s}$)
Périodicité		Périodique	Périodique	Périodique

Dans les deux première configurations (**Simulation 1** et **Simulation 2**), on se place dans un schéma d'optimisation assez simple qui consiste en l'optimisation seule de la fonction d'autocorrélation. Sous ce jeu de paramètres, l'emploi de l'ALGORITHME 5.5 nous donne les résultats suivants :

- Une fonction d'ambiguïté contrôlée sur le domaine d'intérêt $[-75 \text{ km} : 75 \text{ km}] \times [-460 \text{ m/s} : 460 \text{ m/s}]$. En utilisant une fenêtre temporelle de Taylor(5,-52.5), on obtient un PSLR d'environ -53 dB dans la zone d'intérêt. Par contre, on peut noter les ambiguïtés en distance tous les 75 km liées au temps de répétition, T_R , de 0.25 ms et les fortes remontées en Doppler tous les 465 m/s (lobes autour de -20 dB) liées à l'inverse du temps de répétition soit tous les 4 kHz (or $v = \lambda/2T_R = 465 \text{ m/s}$ car $\lambda \cong 0.2324$).

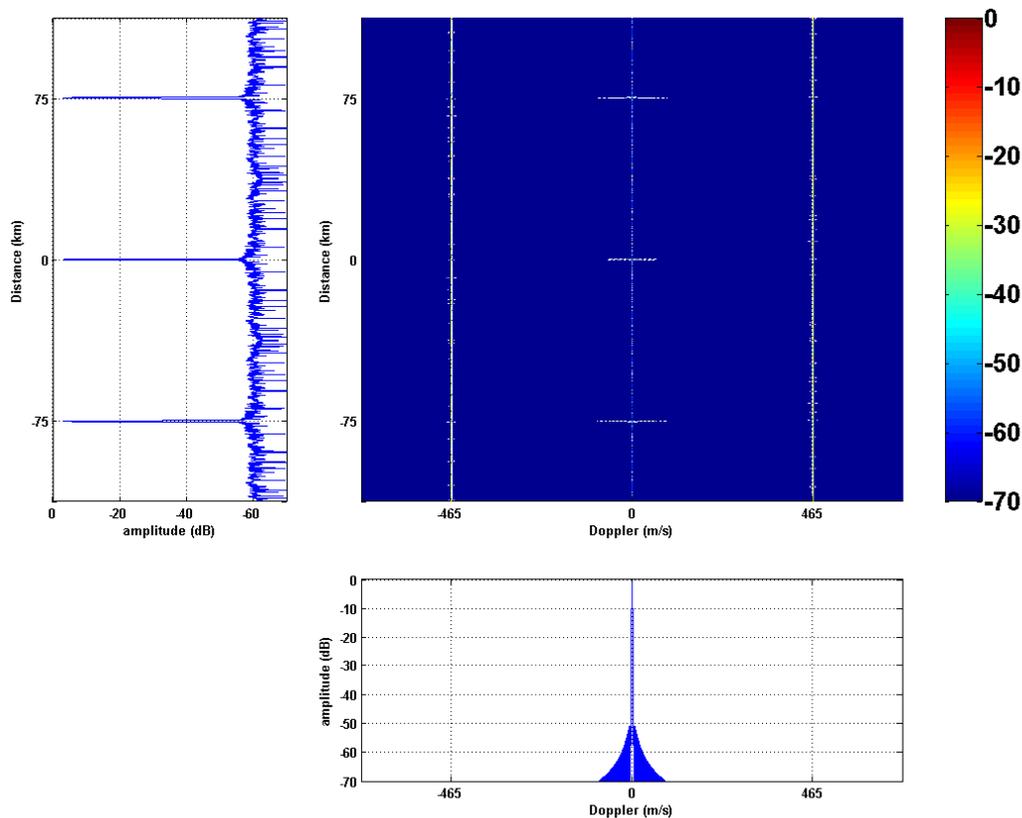


FIGURE 7.1 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue dans la configuration de la **Simulation 1** ($N_p = 400$ soit $T = 100 \text{ ms}$) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5) avec à gauche la coupe à Doppler nulle (auto-corrélation) et en bas la coupe à retard nul.

- Une enveloppe temporelle maîtrisée, avec une fluctuation d'enveloppe relativement faible ($PAPR = 1.1 \text{ dB}$).

- Un spectre borné sur les 1.5 MHz définis par les spécifications. On remarque, d'ailleurs, que l'enveloppe du spectre n'est pas de type porte mais est naturellement apodisé. C'est en partie pour cette raison que la fonction d'auto-corrélation est naturellement pondérée contrairement à un spectre de type porte qui donne une fonction d'auto-corrélation de type sinus cardinal. Ainsi, il n'est pas nécessaire de pondérer en réception le spectre. Cela permet donc d'éviter les pertes associées, pertes de classe 1-2 dB.

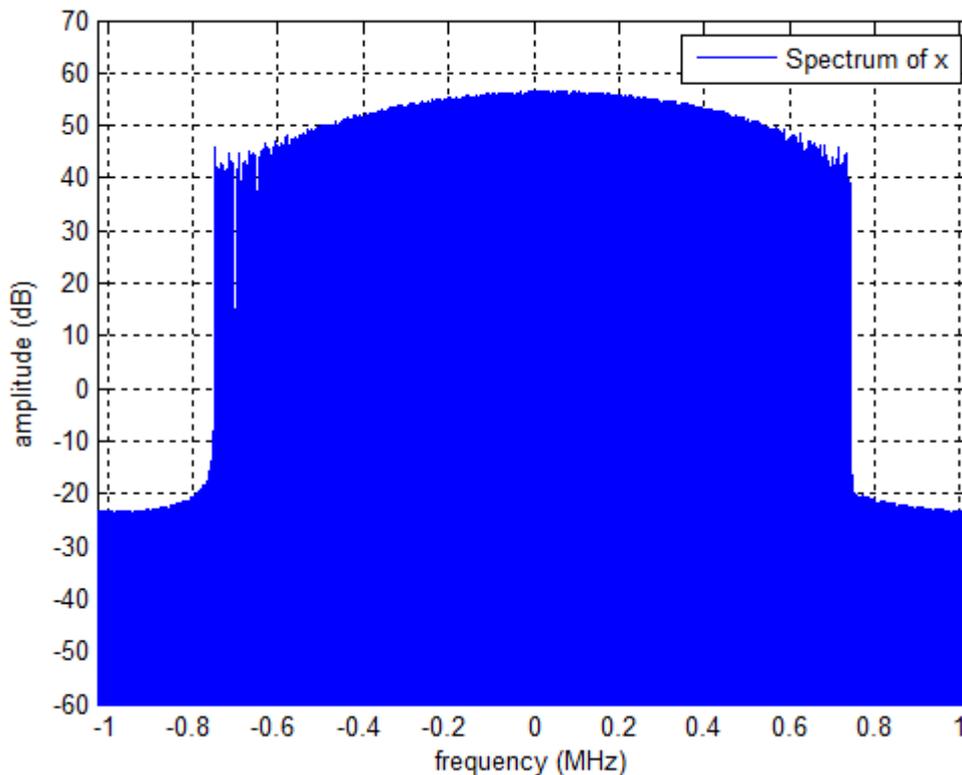


FIGURE 7.2 Spectre obtenu dans la configuration de la **Simulation 1**
($N_p = 400$ soit $T = 100$ ms)

La principale différence entre la **Simulation 1** et la **Simulation 2** repose sur le temps d'intégration. En effet, dans un cas on intègre sur 100 ms alors que dans l'autre sur 1s. Cette différence notable se traduit par une augmentation de la résolution vitesse (car $\Delta v = \lambda/2T$) et une augmentation du rapport signal sur bruit pour la **Simulation 2** vis-à-vis de la **Simulation 1**.

Dans la dernière configuration (**Simulation 3**), on se place dans un schéma d'optimisation plus compliqué qui consiste en l'optimisation des fonctions d'auto-ambiguïtés et d'inter-

ambiguïtés sur une plage distance/Doppler donnée. Dans cette configuration, l'ALGORITHME 5.5 nous donne les résultats suivants :

- Une fonction d'ambiguïté contrôlée sur le domaine d'intérêt $[-75 \text{ km} : 75 \text{ km}] \times [-460 \text{ m/s} : 460 \text{ m/s}]$. En utilisant une fenêtre temporelle de Taylor(5,-52.5) pour pondérer la coupe à retard nul, on obtient un PSLR d'environ -45 dB dans la zone d'intérêt. Le PSLR obtenu est donc moins bon que celui obtenu pour les configurations des **Simulation 1** et **Simulation 2**. Toutefois, les ambiguïtés en distance ne sont plus tous les 75 km car le temps de répétition, T_R , est 256 fois plus grand et donc l'ambiguïté en distance est repoussée à 19200 km. Ensuite on n'observe plus les fortes remontées en Doppler tous les 465 m/s car ces remontées, liées à l'inverse du temps de répétition, sont plus fréquentes (toutes les $v = \lambda/2T_R = 1.8 \text{ m/s}$) mais moins énergétique (plus grande répartition). De fait, cette configuration semble à priori plus robuste aux échos lointains (supérieur à 75 km) car ces derniers ne devraient pas faire apparaître de raies importantes sur plage d'intérêt.

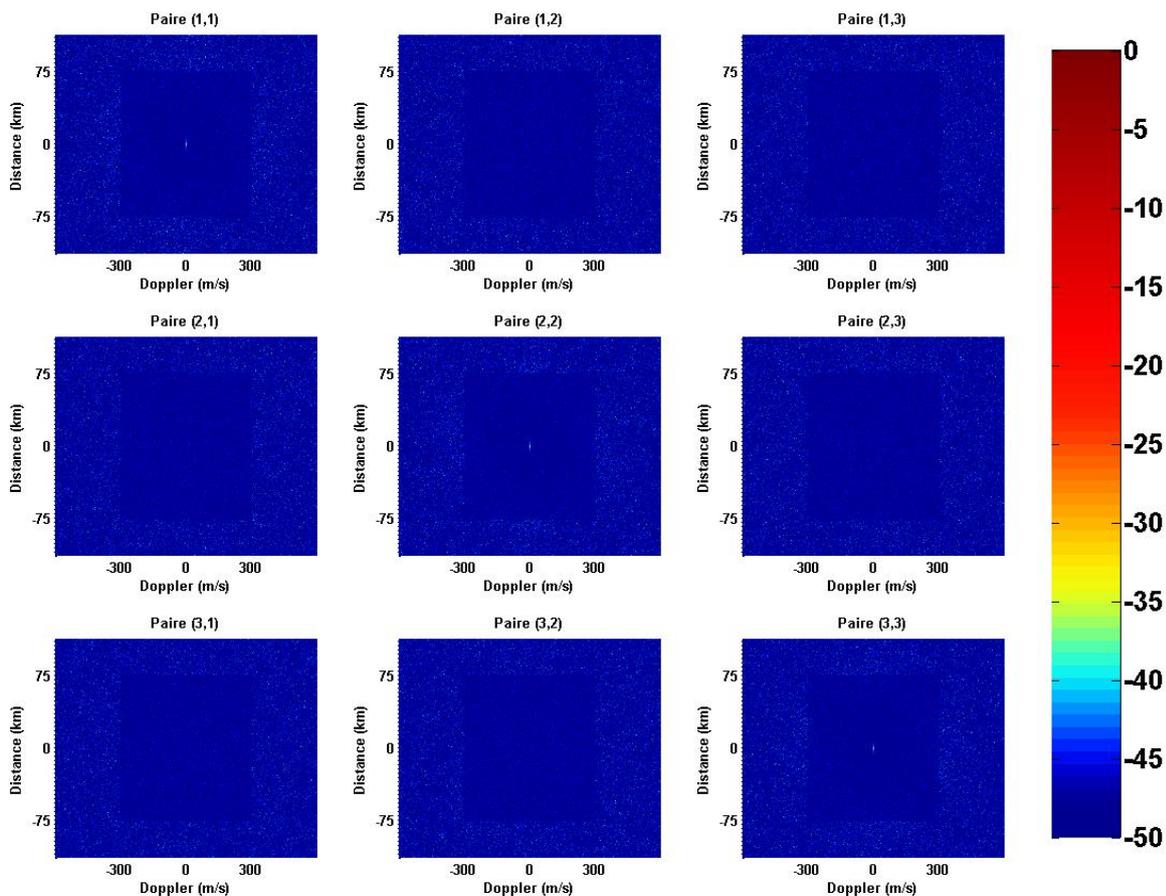


FIGURE 7.3 Ensemble des fonctions d'ambiguïtés obtenues dans la configuration de la **Simulation 3** ($N_p = 15$ soit $T = 1 \text{ s}$) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5).

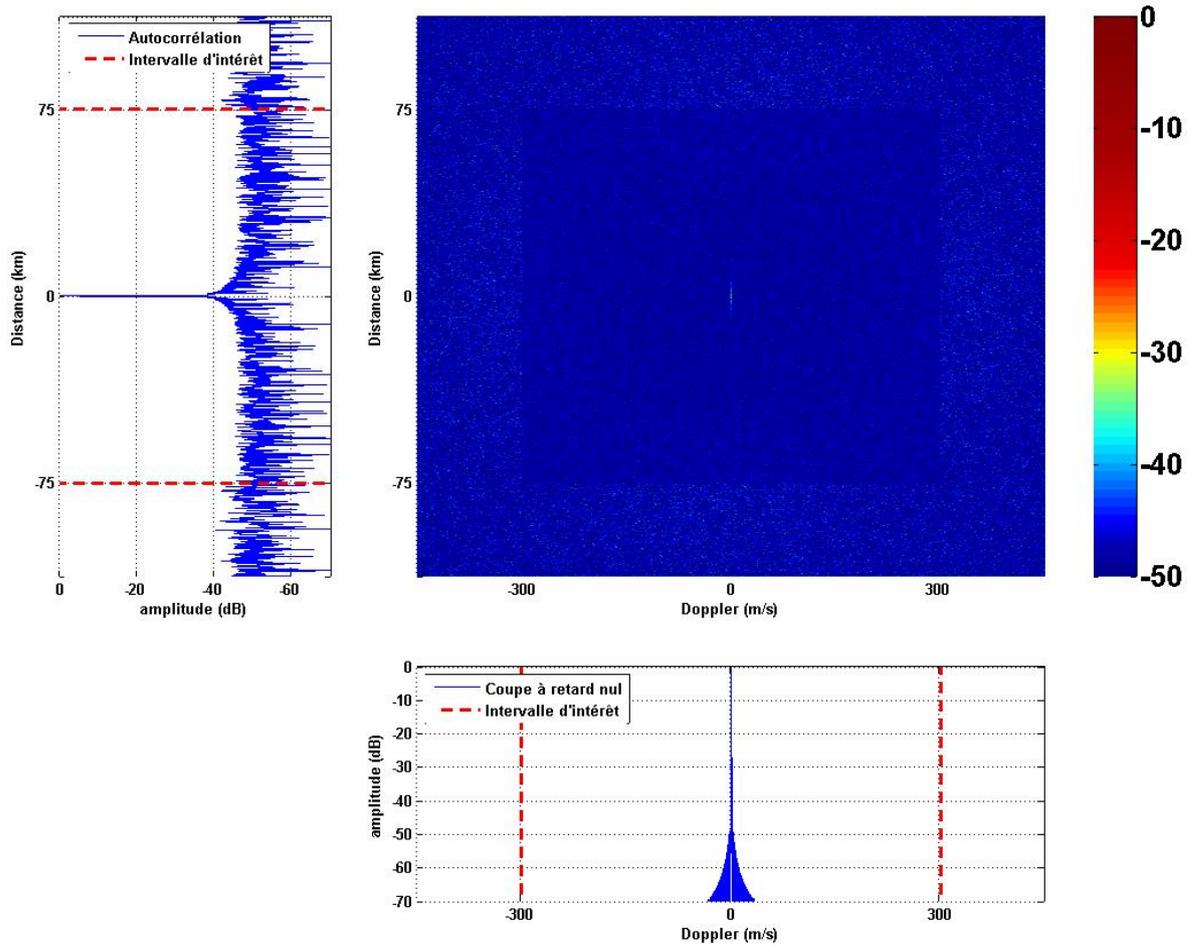


FIGURE 7.4 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue dans la configuration de la **Simulation 3** ($N_p = 15$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5) avec à gauche la coupe à Doppler nulle (auto-corrélation) et en bas la coupe à retard nul.

- Une enveloppe temporelle maîtrisée, avec une fluctuation d'enveloppe relativement faible ($PAPR = 1.2$ dB).

TABLEAU 7.3 PAPR obtenus avec la **Simulation 3**.

Simulation 3	PAPR
Séquence 1	1.23 dB
Séquence 2	1.23 dB
Séquence 3	1.24 dB

- Un spectre borné sur les 1.5 MHz définis par les spécifications. On remarque, à nouveau, que l'enveloppe du spectre n'est pas de type porte mais est naturellement apodisé. C'est en partie pour cette raison que la fonction d'auto-corrélation est

naturellement pondérée contrairement à un spectre de type porte qui donne une fonction d'auto-corrélation de type sinus cardinal. Ainsi, il n'est pas nécessaire de pondérer en réception le spectre. Cela permet donc d'éviter les pertes associées, pertes de classe 1-2 dB.

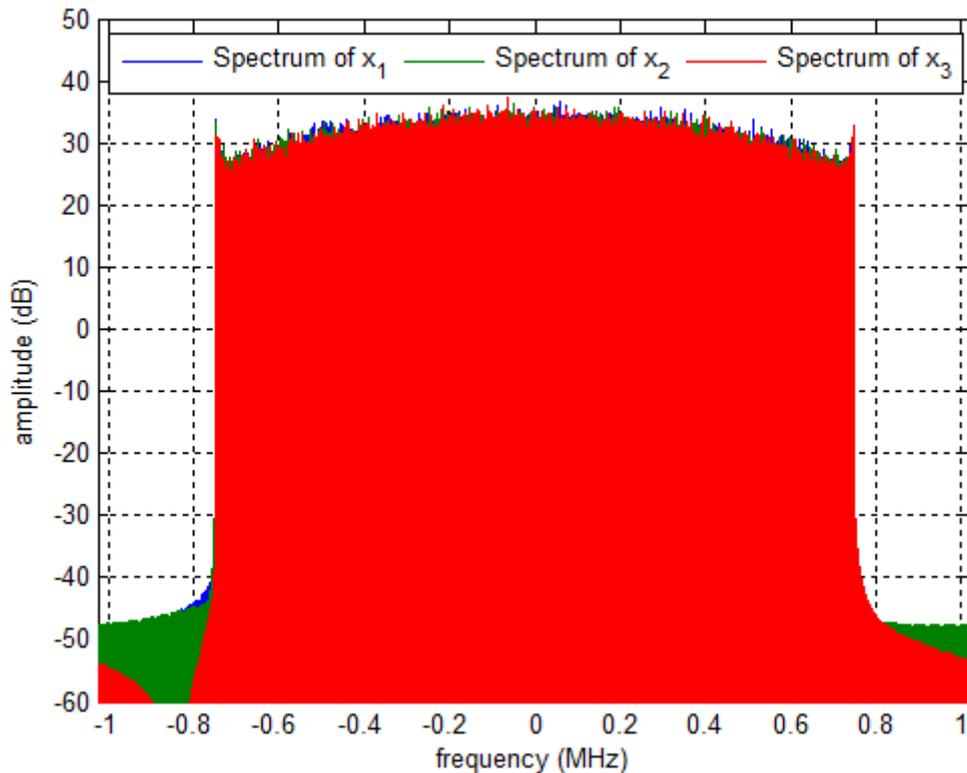


FIGURE 7.5 Spectre obtenu dans la configuration de la **Simulation 3**

7.3 Résultats expérimentaux : Essais

Afin d'étudier et de valider le comportement des formes d'ondes générées, deux campagnes d'essais ont été menées :

- Une campagne d'essais à Stuttgart en Allemagne ;
- Et une campagne d'essais sur site à Limours.

La première campagne d'essais ne sera pas décrite dans cette partie car des problèmes techniques n'ont pas permis une bonne exploitation des données enregistrées.

Par contre la deuxième campagne d'essais a, elle, permis de récolter des données exploitables, permettant ainsi d'apporter une preuve de validation terrain.

7.3.1 Configuration du système et parcours effectif

Le système est composé d'une paire bistatique distante de 10,6 km :

- L'émetteur se trouve sur le site de TRT (Thales Research and Technology) à Palaiseau ;
- Et le récepteur se situe sur le site de TAS (Thales Air Systems) à Limours.

L'émetteur pointe sur le site de Limours avec un cône d'émission de 180° alors que le récepteur pointe à -2° Nord avec un cône de réception de 120° (FIGURE 7.6). Il est important de noter que le récepteur est très directionnel, hors de son cône de 120° la détection est grandement compromise (FIGURE 7.7).

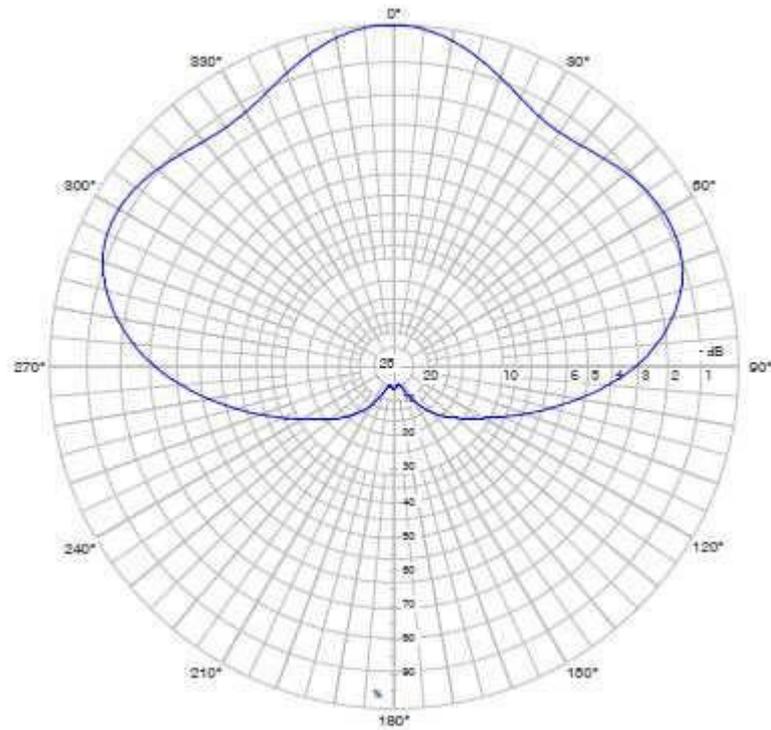


FIGURE 7.6 Aspect du diagramme d'émission selon le gisement.

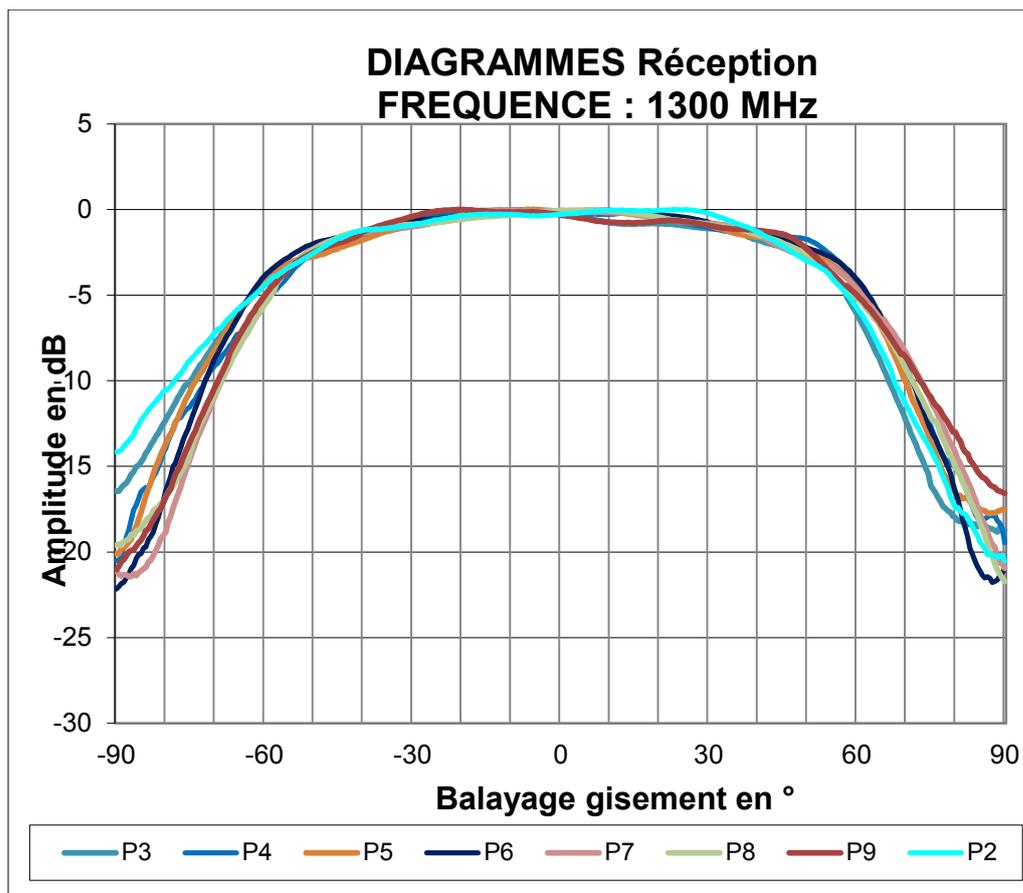


FIGURE 7.7 Diagramme en réception selon le gisement à une fréquence porteuse de 1.3 GHz.

Le plan de vol de cette campagne est, approximativement, le suivant :

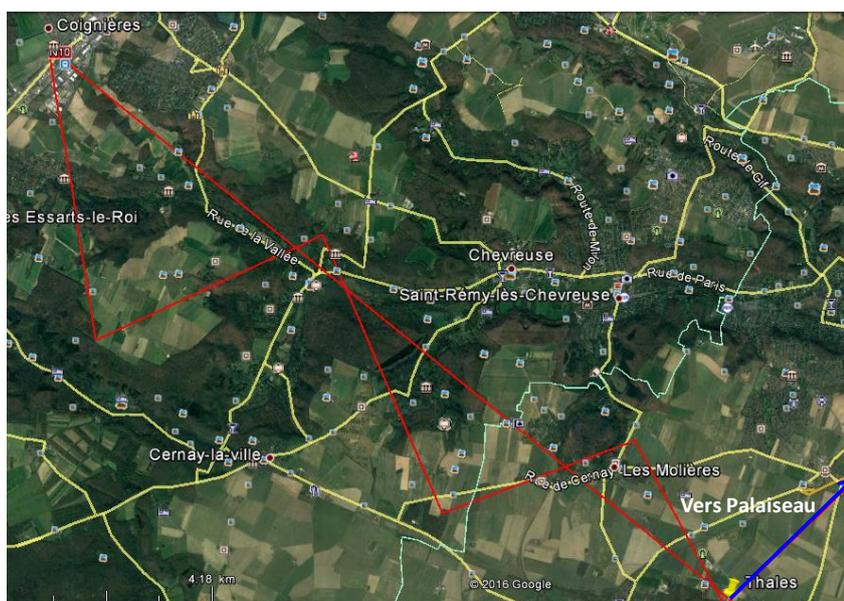


FIGURE 7.8 Plan de vol de la campagne d'essais à Limours.

L'avion (petit avion de tourisme de type CESSNA 4 places de classe 1-2 m² de SER) avait pour consigne de suivre :

- une trajectoire rectiligne entre le site de Limours et Coignières à une vitesse réduite d'approximativement ~50 kts (~26 m/s),
- et une trajectoire en zig-zag au retour à la vitesse maximale de l'avion soit autour de 80 kts (41 m/s).

Et il devait répéter ce cycle autant de fois que possible durant les 2 heures de vols.

Du point de vue du récepteur, pour ce type de cible (classe 1-2 m² de SER) et pour la configuration du système (puissance d'émission, gain émission/réception, perte de propagation...), la portée du radar est de l'ordre de 20 km.

Toutefois, le plan de vol de l'avion étant très proche de la limite du cône de réception, il s'avère que la portée effective avoisine plutôt les 10.5 km (FIGURE 7.9). En effet, si l'on prend la trajectoire de l'avion et que l'on se place à 10.5 km du récepteur, on observe que l'on se trouve à 57° de la normale au récepteur et à 39° de la normale à l'émetteur. Cela correspond, à environ 4 dB de pertes sur le diagramme en réception et 1.5 dB de pertes sur le diagramme à l'émission soit un total de 5.5 dB de pertes. Il vient donc qu'à distance à l'émetteur fixée, la distance au récepteur est à peu près divisé par 2 (environ 10.6 km).

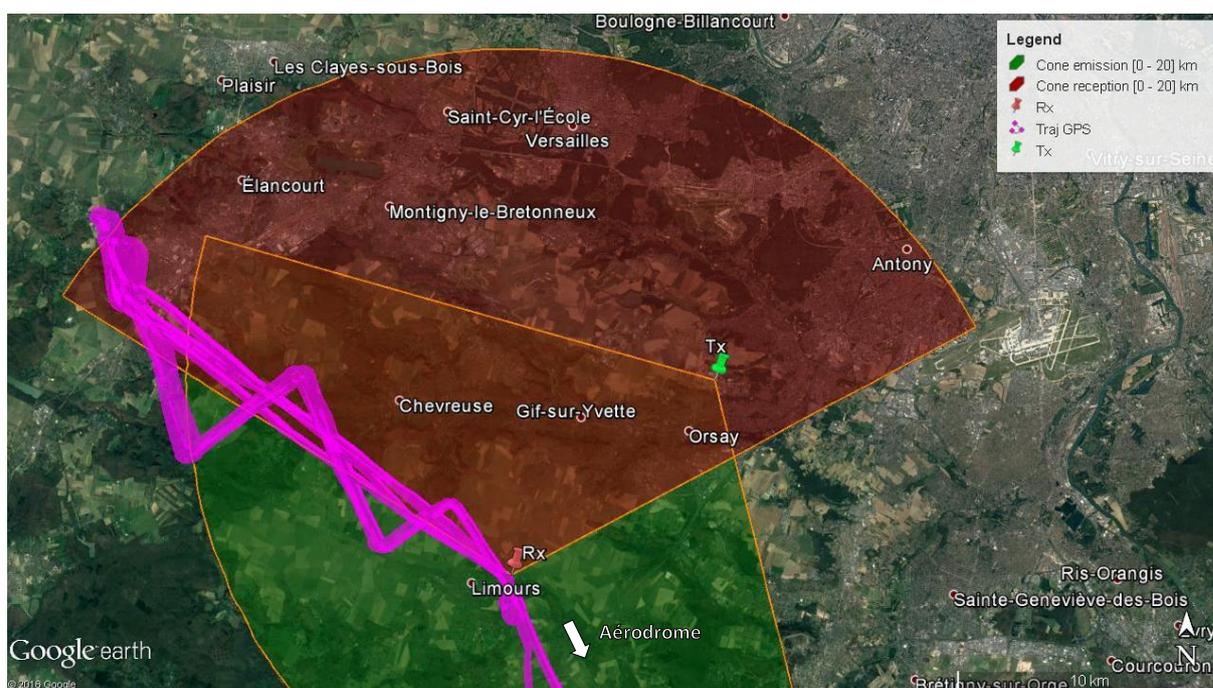


FIGURE 7.9 Plan de vol effectif de la campagne d'essais à Limours.

De plus, on s'attend à de faibles détections lors de la phase de zig-zag puisque, sur certains tronçons, l'avion sort du cône de réception (fortes pertes sur le diagramme en réception : supérieure à 5 dB).

7.3.2 Résultats des mesures

Les résultats obtenus à partir de ce vol d'essai sont très encourageants, ils permettent de valider les algorithmes et le bon comportement des formes d'ondes générées (fonctions d'ambiguïtés et spectres) :

- Des fonctions d'ambiguïtés contrôlés sur la zone d'intérêt
- Des spectres contrôlés et apodisés naturellement (léger biais dû à une erreur de recalage en bande de base à l'émission donc dégradation du spectre lors de l'émission)

En effet, suite à ces essais, en calculant la fonction d'ambiguïté obtenue entre le trajet direct et le signal de référence, on a obtenu les figures suivantes :

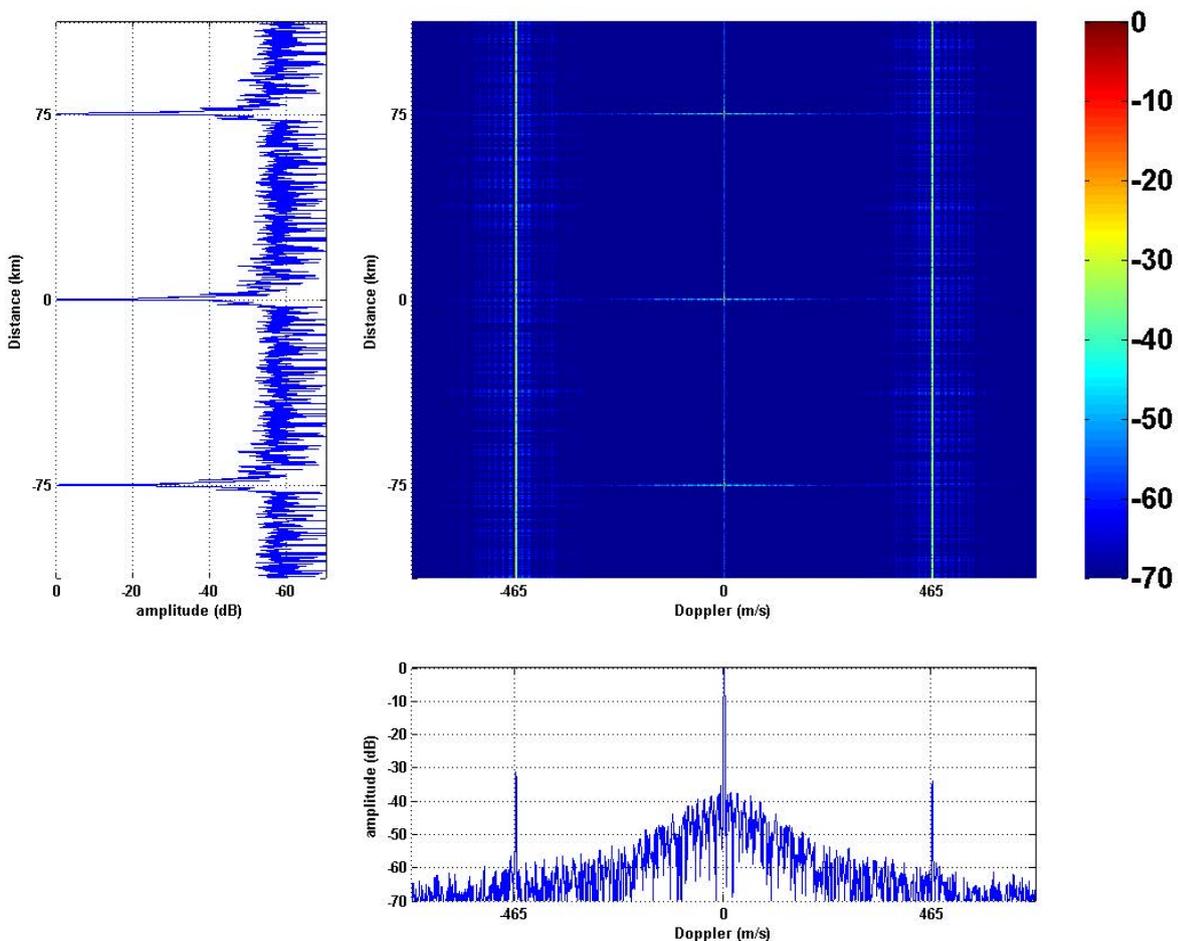


FIGURE 7.10 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue lors des essais dans la configuration de la **Simulation 1** ($N_p = 400$ soit $T = 100$ ms) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5).

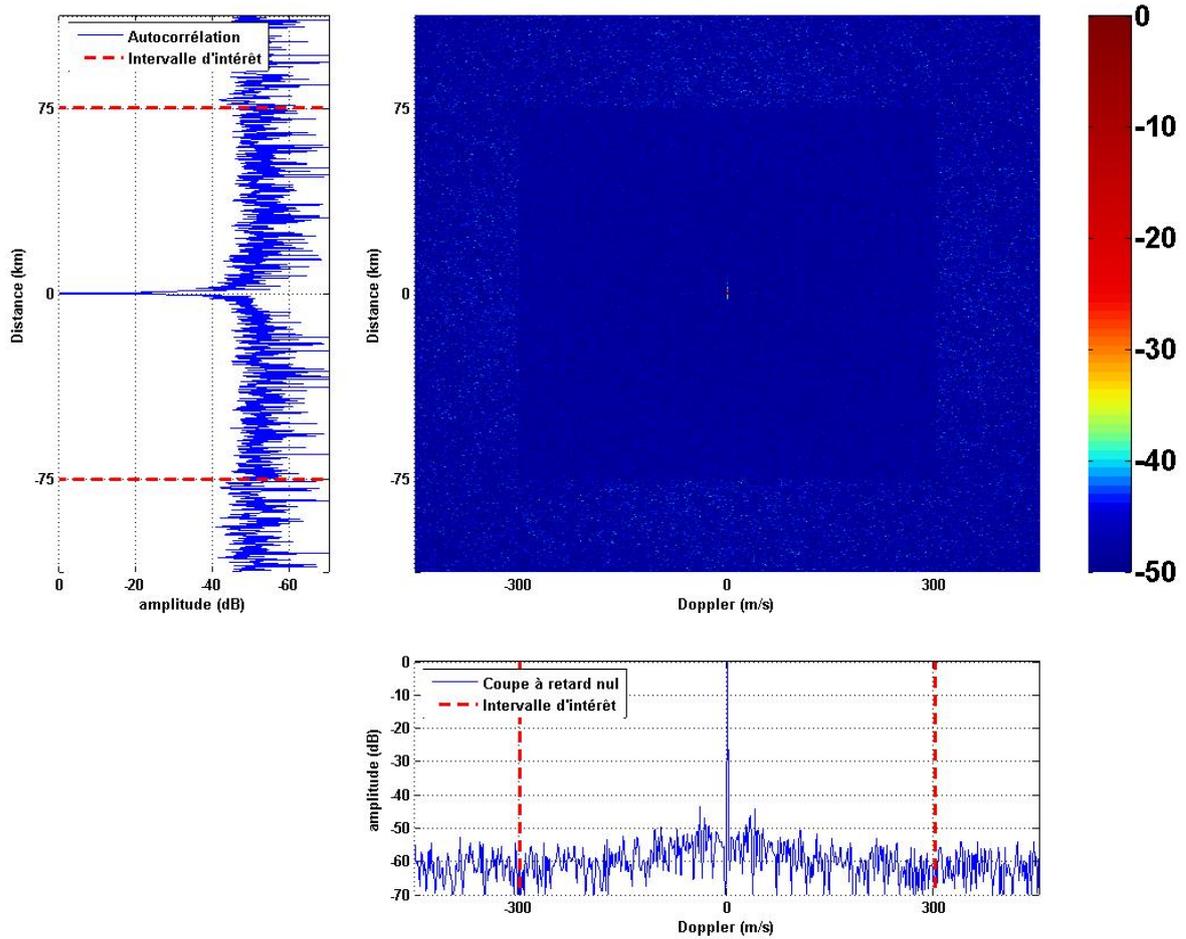


FIGURE 7.11 Fonction d’auto-ambiguïté obtenue lors des essais dans la configuration de la **Simulation 3** ($N_p = 15$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5).

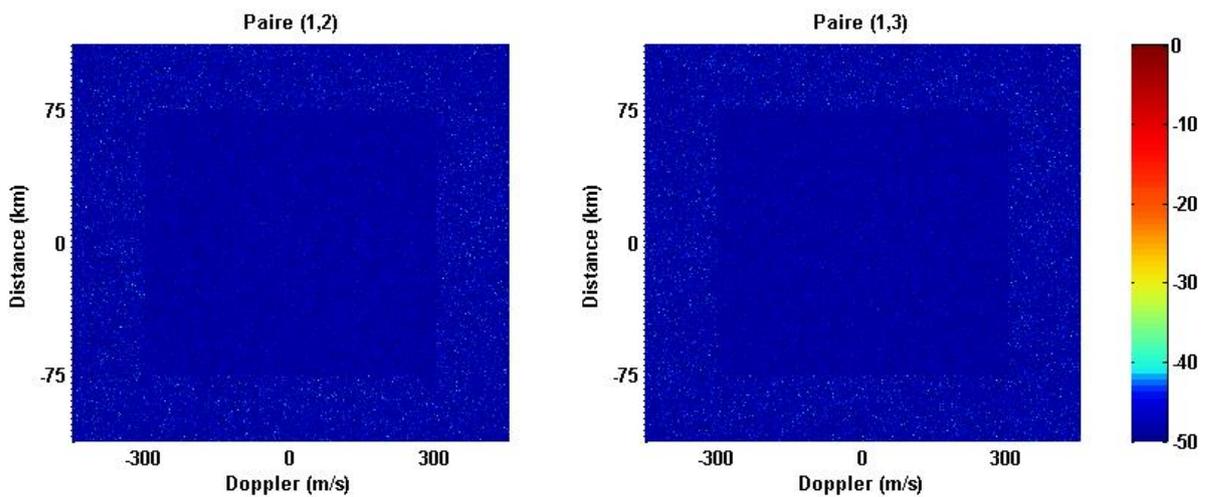


FIGURE 7.12 Fonctions d’ambiguïtés croisées obtenues à partir des mesures terrain dans la configuration de la **Simulation 3** ($N_p = 15$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5) en utilisant les deux autres séquences de la famille générée.

En observant ces figures, on peut noter le bon comportement des fonctions d'ambiguïtés obtenues. En particulier, pour la **Simulation 3**, nous avons émis une des séquences de la famille parmi les $M = 3$ séquences disponibles et les résultats obtenus en corrélant par chacune ces séquences montrent que la zone optimisée théoriquement reste clairement identifiable, et ce pour l'ensemble des fonctions d'ambiguïtés obtenues: auto-ambiguïté ou ambiguïtés croisées. Cette zone est d'ailleurs clairement identifiable en traçant :

- Le maximum des lobes secondaires de la coupe distance dans la plage Doppler d'intérêt (FIGURE 7.13) ;
- Et le maximum des lobes secondaires de la coupe Doppler dans la plage distance d'intérêt (FIGURE 7.14).

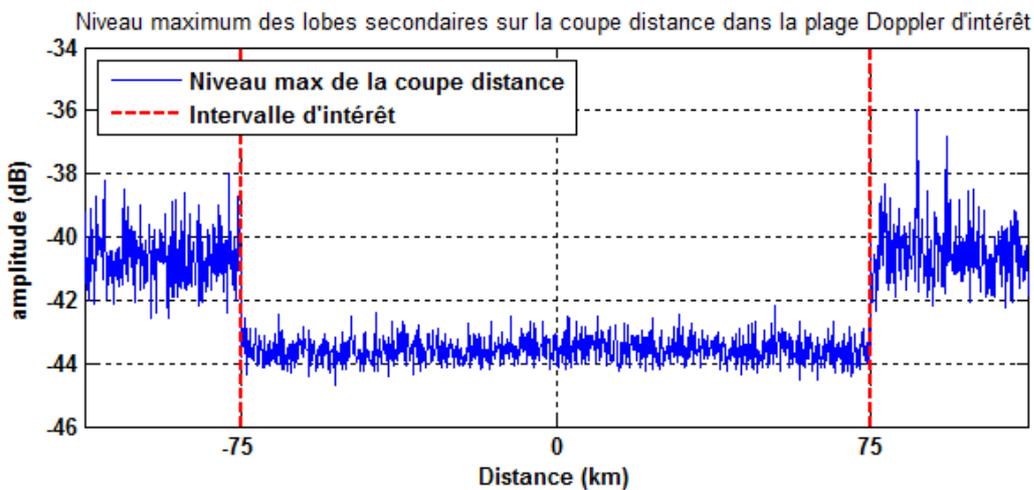


FIGURE 7.13 Niveau maximum des lobes secondaires de la coupe distance dans la plage Doppler d'intérêt pour la fonction d'ambiguïté croisée de la paire (1,3) (**Simulation 3**)

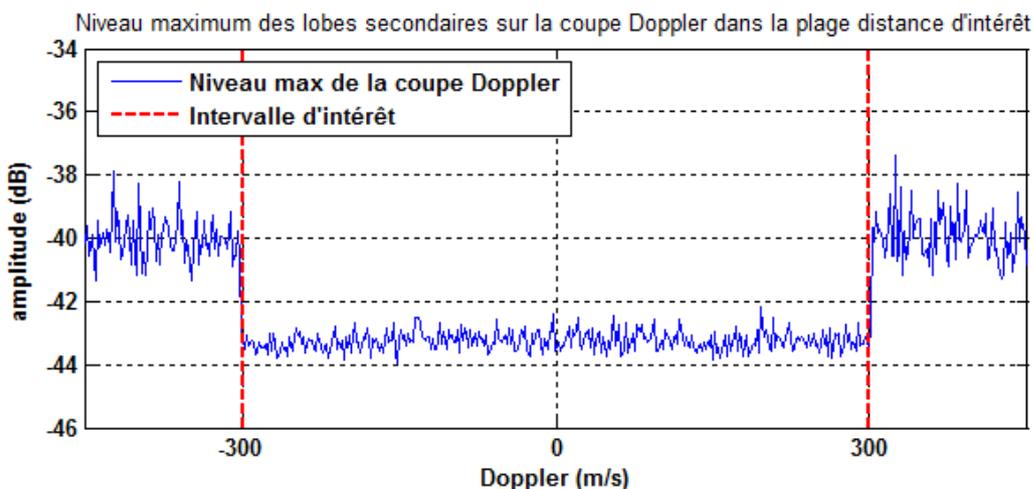


FIGURE 7.14 Niveau maximum des lobes secondaires de la coupe Doppler dans la plage distance d'intérêt pour la fonction d'ambiguïté croisée de la paire (1,3) (**Simulation 3**)

Ensuite, en se plaçant dans la configuration de la **Simulation 2** (*i.e.*, en intégrant non plus sur $T = 100$ ms mais maintenant sur $T = 1$ s), on observe bien une augmentation de la résolution vitesse (car $\Delta v = \lambda/2T$) et une augmentation du rapport signal sur bruit (FIGURE 7.10 et FIGURE 7.15). Par exemple, on peut noter un gain d'environ 10 dB sur la coupe Doppler entre la **Simulation 1** et la **Simulation 2**. Cela concorde avec la théorie car on a augmenté le temps d'intégration d'un facteur 10, ce qui nous donne un gain d'intégration d'exactement 10 dB. Par contre cela veut dire, que les remontées observées autour des faibles vitesses sur les coupes Doppler des FIGURE 7.10 et FIGURE 7.15 sont dûes probablement à du bruit de stabilité de l'émetteur.

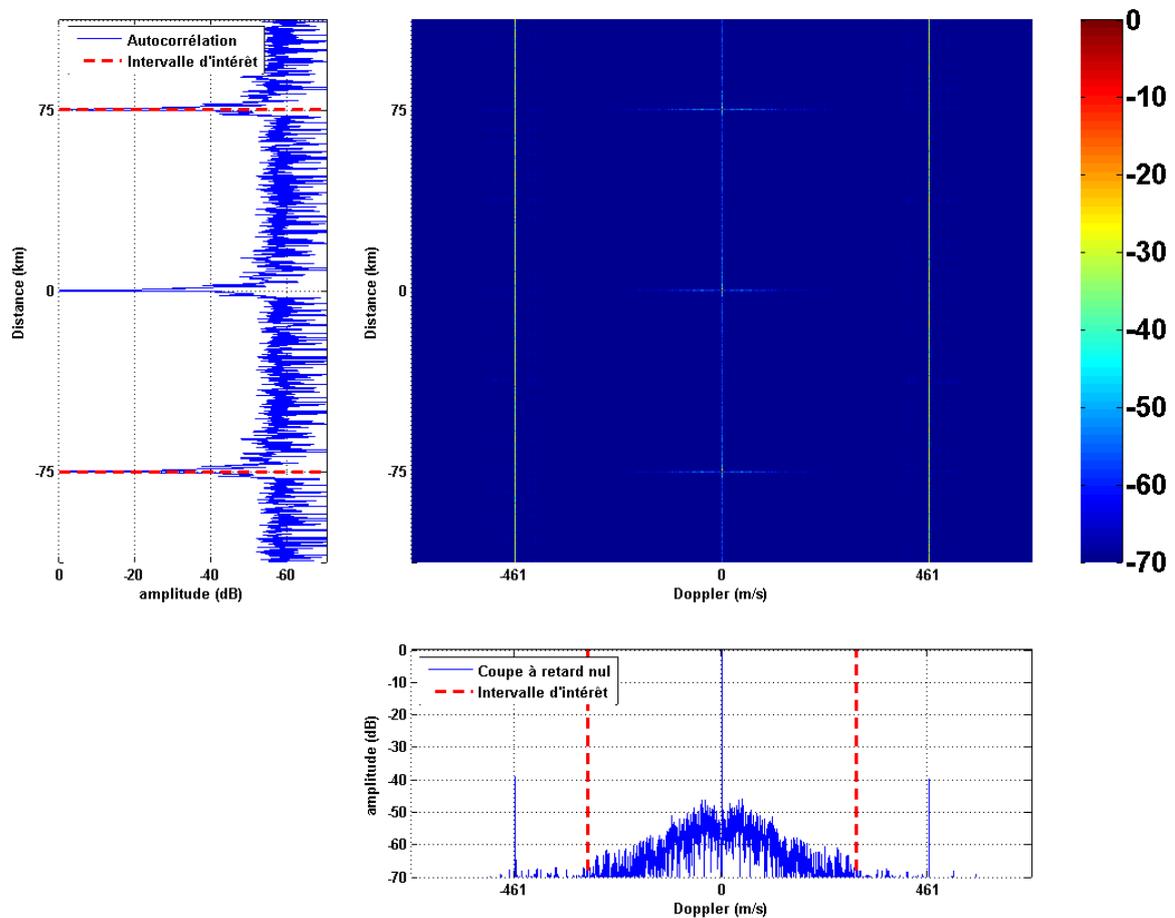


FIGURE 7.15 Fonction d'auto-ambiguïté obtenue lors des essais dans la configuration de la **Simulation 2** ($N_p = 4000$ soit $T = 1$ s) avec pondération temporelle de Taylor(5,-52.5).

Ensuite, en comparant le spectre obtenu en isolant le trajet direct avec le spectre théorique, on a, aussi, obtenu des résultats en adéquation avec nos attentes :

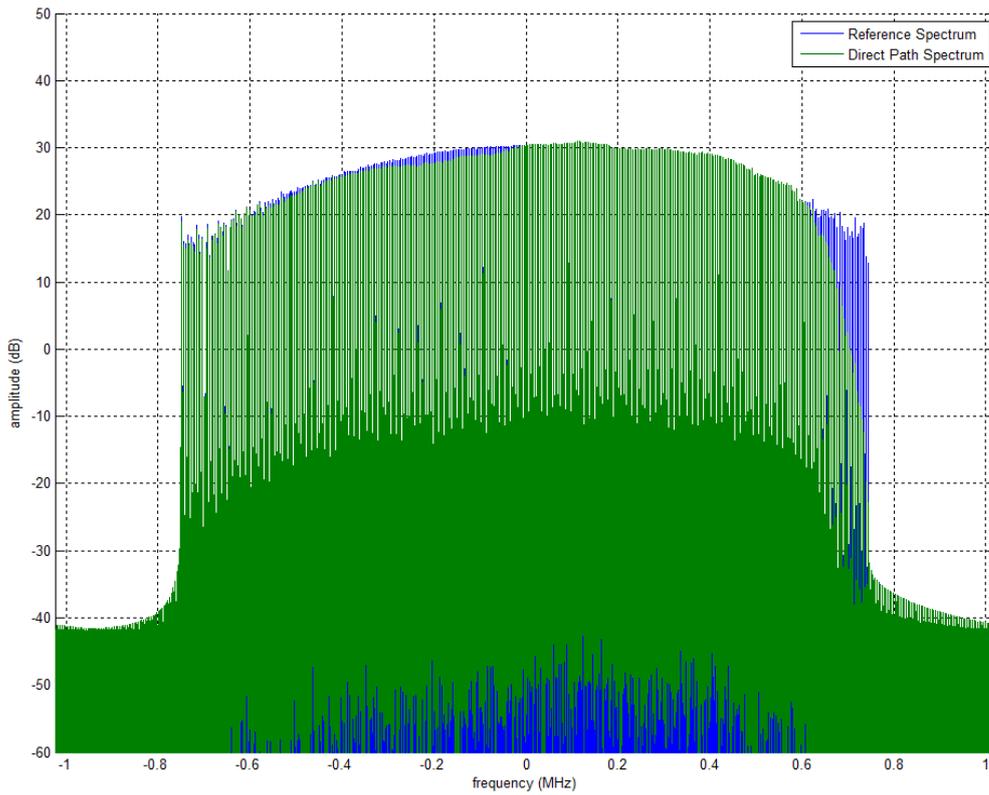


FIGURE 7.16 Spectre obtenus à partir des données réelles récoltées lors des essais pour la configuration de la **Simulation 1**.

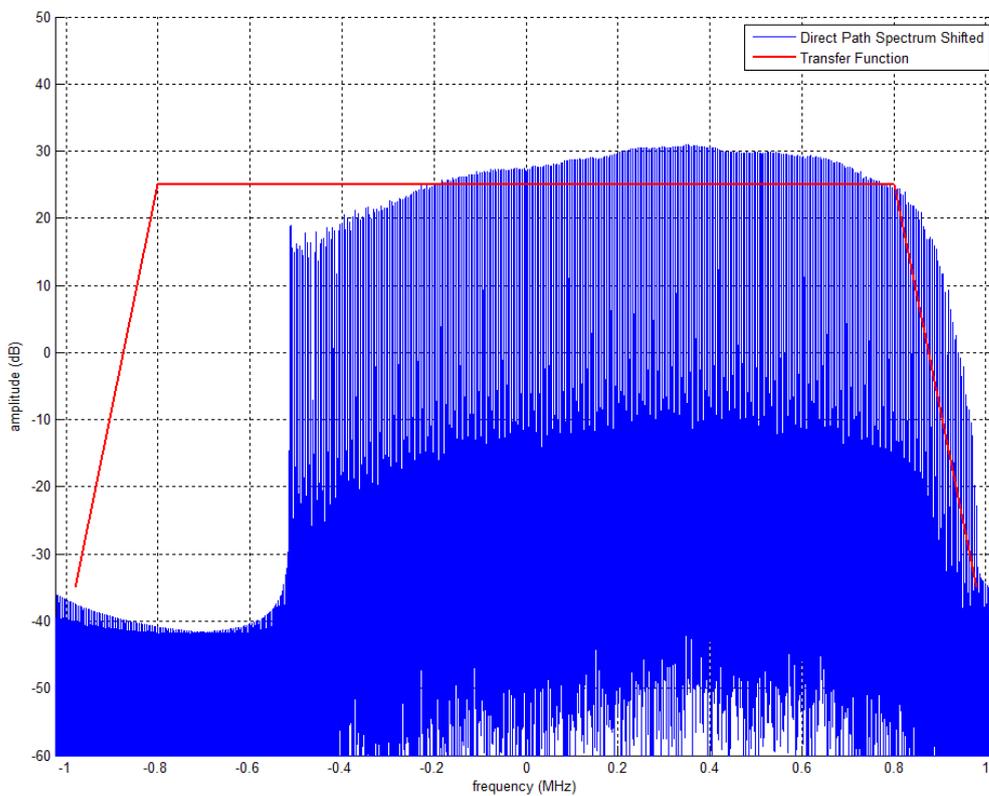


FIGURE 7.17 Impact de l'offset en fréquence dû au filtre analogique utilisé à l'émission pour rejeter la zone hors-bande (exemple de la **Simulation 1**)

On remarque dans ces deux dernières figures que le spectre suit assez fidèlement le spectre de raies théoriques.

Toutefois, on peut observer un décrochage du spectre à partir de 0.6MHz. Ce décrochage est dû à un offset en fréquence à l'émission (de l'ordre de 0.24MHz) qui a pour conséquence l'apodisation de la queue du spectre par le filtre analogique utilisé à l'émission pour rejeter la zone hors-bande (FIGURE 7.17).

En particulier, cette apodisation non volontaire du spectre est sûrement à l'origine de la dégradation de la fonction d'autocorrélation (on observe une remontée des lobes secondaires proches du pic de corrélation, FIGURE 7.10 et FIGURE 7.11).

Enfin, on observe que les résultats obtenus (après traitement radar) sont fidèles aux informations GPS retournées par l'avion des essais en terme d'azimut, de vitesse bistatique, de distance et d'élévation. A titre d'exemple, la FIGURE 7.18 et la FIGURE 7.19 superposent la trace GPS de l'avion d'essais avec les détections obtenues dans la configuration 1 et 2, respectivement. On retrouve alors que plus le temps d'intégration est important meilleure est la détection.

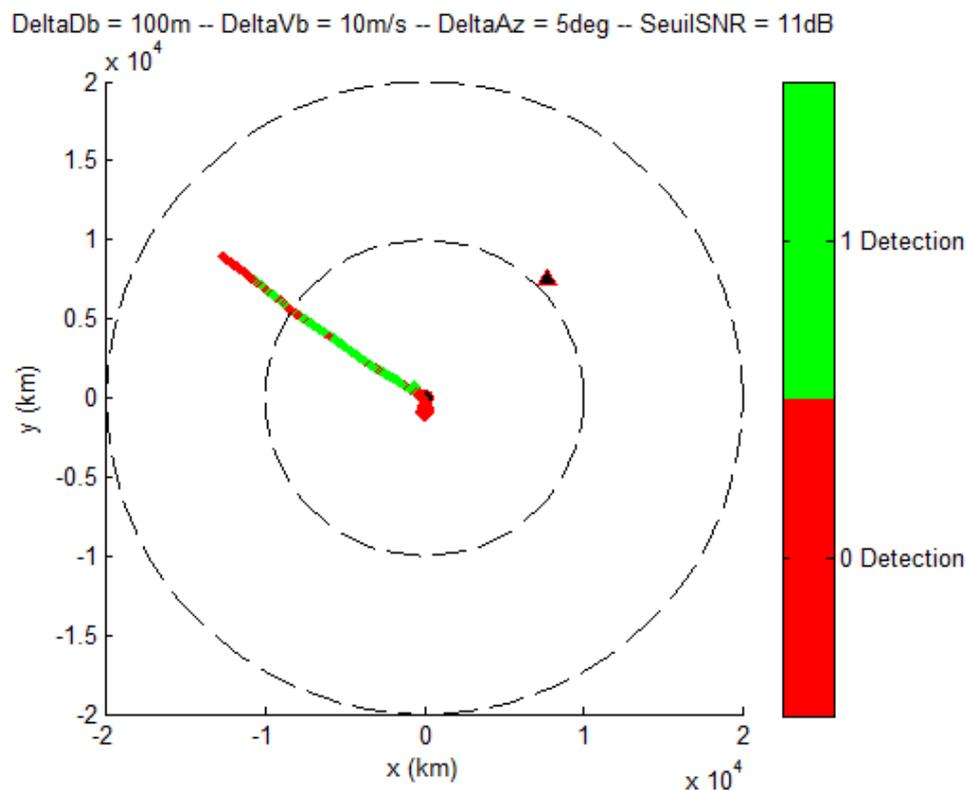


FIGURE 7.18 Résultats obtenus avec la configuration 1 ($T = 100$ ms, $f_p = 1290$ MHz) :
Trace GPS et plots détectés.

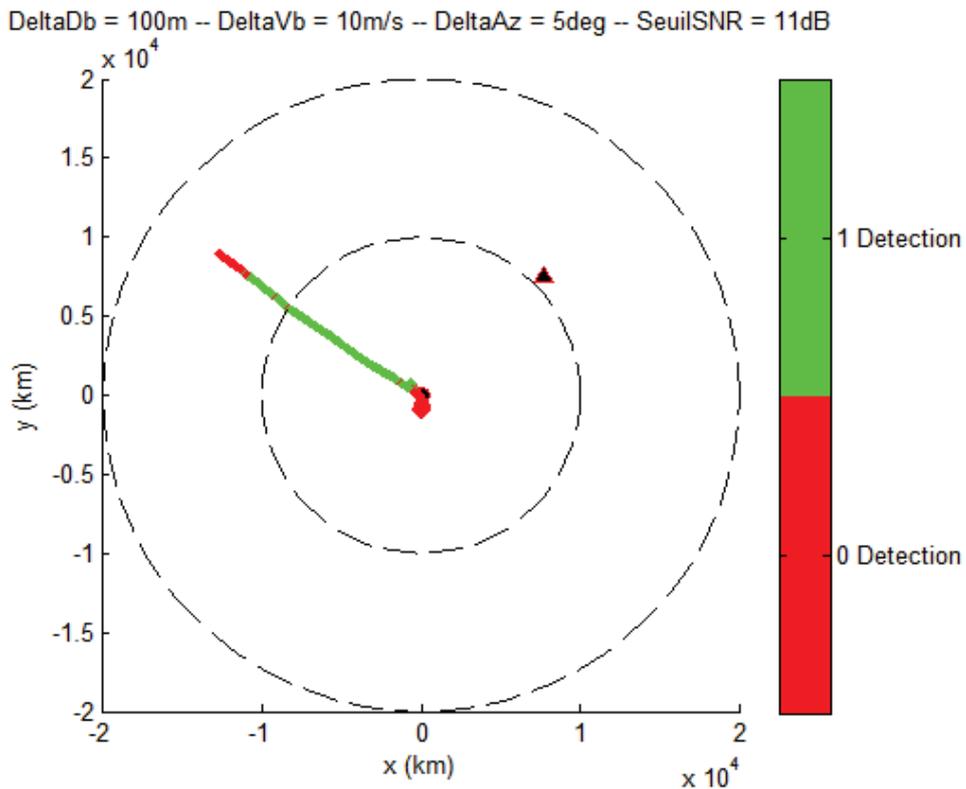


FIGURE 7.19 Résultats obtenus avec la configuration 2 ($T = 1$ s, $f_p = 1290$ MHz) :
Trace GPS et plots détectés.

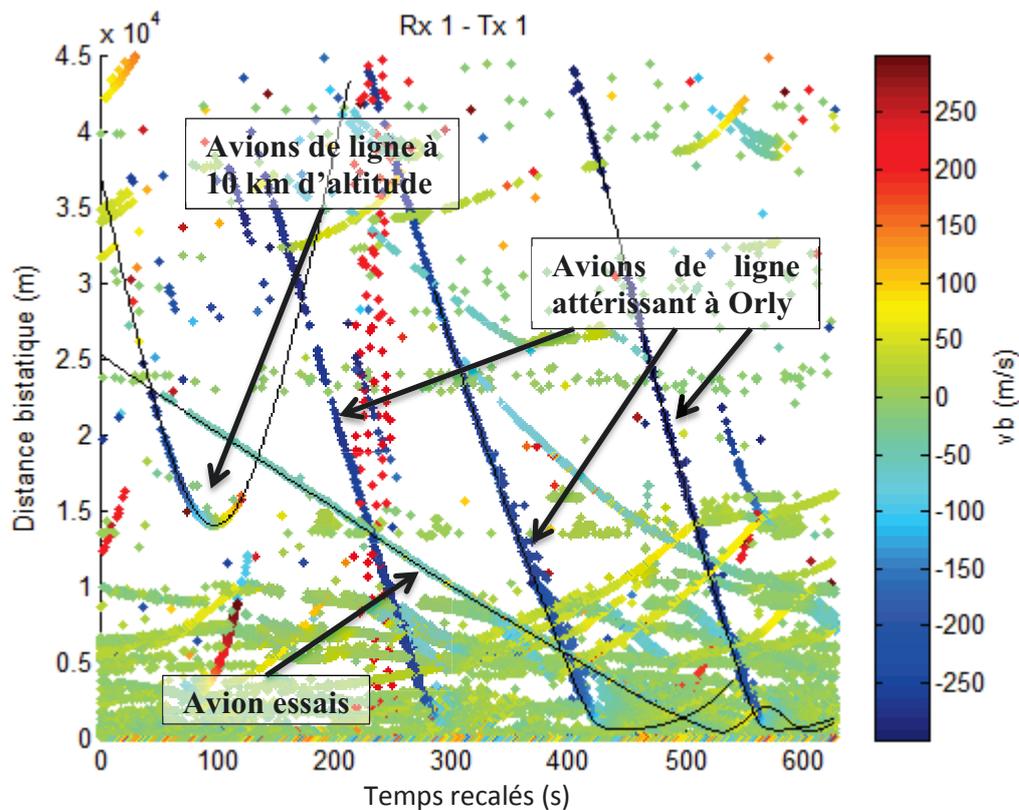


FIGURE 7.20 Mapping de la vitesse bistatique des plots au cours du temps et en fonction de la distance bistatique dans la configuration 2 ($T = 1$ s $f_p = 1290$ MHz).

On observe aussi que l'on arrive à détecter des avions de ligne (plus grosse SER) qui survolent Limours. Ces avions de ligne sont détectés sur une plus grande distance car leur SER est plus importante (classe 10 dB). En particulier, on arrive à observer des avions de lignes engageant leur trajectoire d'atterrissage sur l'aéroport d'Orly ou bien survolant le site de limours à haute altitude, autour de 10 km (FIGURE 7.20 et FIGURE 7.21).

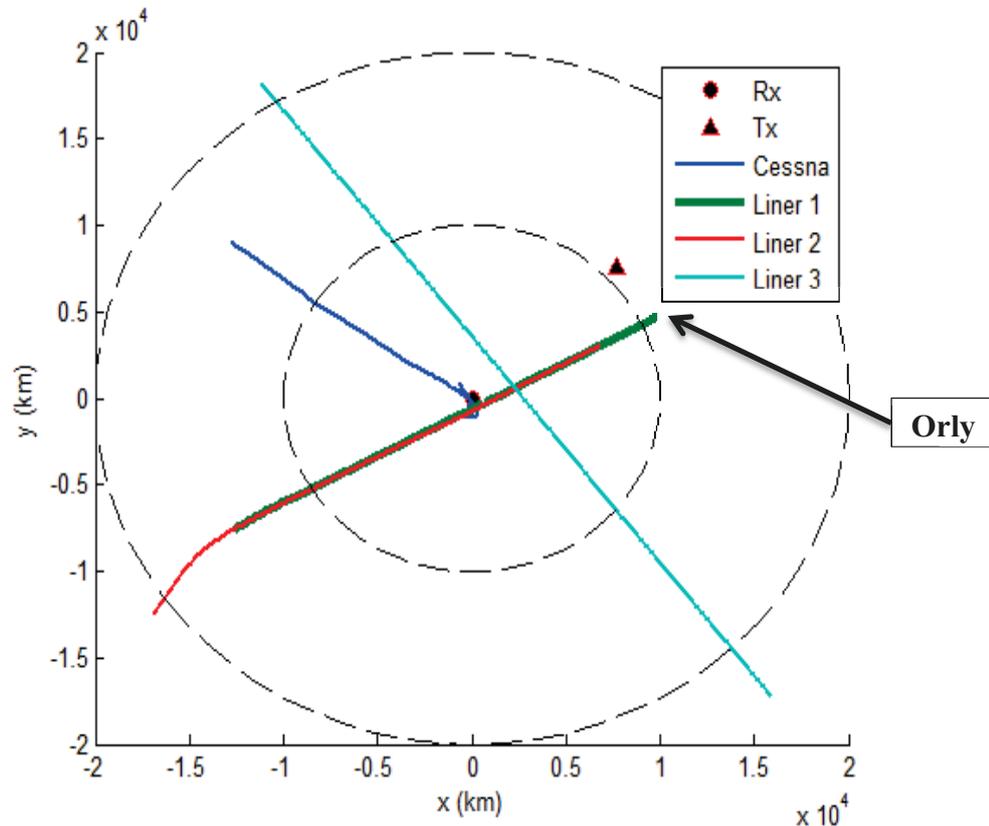


FIGURE 7.21 Trace GPS des avions mis en évidence dans la FIGURE 7.20.

7.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de valider les algorithmes développés dans le cadre d'un système MSPSR actif. En particulier, ces essais ont permis de vérifier que le comportement expérimental des formes d'ondes générées étant bien en accord avec les résultats théoriques.

Ensuite, l'exploitation des enregistrements a permis d'observer une bonne précision des résultats obtenus (après traitement radar) vis-à-vis des informations GPS retournées par l'avion des essais et les différents avions de ligne en survol.

Par contre, la plateforme actuelle ne se compose que d'une paire bi-statique et donc une évolution de la plateforme vers une configuration multistatique serait intéressante et

permettrait de parfaire la validation expérimentale. De plus, une augmentation de la puissance des émetteurs devrait permettre d'observer un plus grand nombre de avions de ligne sur de plus grandes distances.

Enfin, une analyse comparative plus fine permettrait de mesurer l'apport de telles familles de séquences en termes de PAPR, de fonctions d'ambiguïtés, de spectres, ...

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Au cours de cette thèse, évoluant dans un contexte radar et tout particulièrement dans le cadre du radar MSPSR actif, nous avons fourni des réponses à la problématique portant sur les formes d'ondes d'un tel système, les traitements et les performances associés. Notre réponse à ce problème s'est articulé autour de : la définition de critères permettant d'identifier les familles potentiellement candidates, la création d'outils de génération de familles de formes d'ondes candidates et l'évaluation des performances de ces algorithmes.

Plus précisément, cette thèse nous a permis :

1. D'identifier la problématique et de structurer la recherche de solution autour de critères clés tels que le PSLR, le PAPR, l'efficacité spectrale, la taille des séquences et la cardinalité des familles (Cf. Chapitre 1 et Chapitre 2).
2. De rechercher dans l'existant de possibles candidats pour une application MSPSR actif à travers deux études : l'une sur les codes Pseudo-Aléatoires et l'autre sur les signaux OFDM. Ces études ont permis de sélectionner quatre familles de codes potentiellement intéressantes : les familles de séquences Pseudo-Aléatoires de No, TN et du *Small Set* de Kasami et les familles de signaux OFDM modulés par des *m-sequences*. Toutefois, les deux études menées durant le Chapitre 3. ont montré des limites avec des problèmes d'efficacité spectrale pour l'une (codes Pseudo-Aléatoires) et des problèmes de PAPR pour l'autre (codes OFDM). Or, adresser ces problèmes engendre irrévocablement des pertes. De plus, il a été noté que, pour l'ensemble de ces

familles, le PSLR obtenu est bon sur l'ensemble du domaine non-ambiguë, domaine généralement très grand devant le zone de surveillance radar. Ces deux observations ont été à l'origine des Chapitre 4 et Chapitre 5.

3. D'implémenter des algorithmes cycliques pour générer des familles de séquences tout en contrôlant l'ensemble des critères à savoir : la cardinalité des familles, la longueur des codes, les spectres, les fonctions d'ambiguïtés et le PAPR. Ces algorithmes ont l'avantage d'offrir une certaine flexibilité sur les contraintes que l'on impose au système. Toutefois, il est intéressant de faire les observations suivantes : Premièrement, le nombre limité de degrés de liberté (NM éléments dans $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$ contraints en amplitude) et le possible grand nombre de contraintes ($\sim 2KPM^2$ contraintes) contraignent la qualité de l'optimisation dans la zone à optimiser imposée au système. Ainsi, le dimensionnement de la zone à minimiser doit rester confiné sur une petite zone autour de l'origine afin d'obtenir une zone significativement atténuée. Deuxièmement, on peut noter que le coût calculatoire peut devenir très important car une SVD doit être calculée à chaque itération. Or, une SVD a une complexité de l'ordre de $O(h^3)$ avec, ici, h proportionnelle à la longueur des séquences et à la zone que l'on souhaite optimiser (relatif aux dimensions de la matrice \mathbf{X}). Ainsi plus les séquences sont longues et plus la zone à optimiser est importante, plus l'algorithme devient coûteux en temps de calculs (Cf. Chapitre 4).
4. De réaliser une étude sur des algorithmes à base de descente du gradient afin de générer, à nouveau, des familles de séquences tout en contrôlant l'ensemble des critères établis dans le Chapitre 2. Ces algorithmes donnent des résultats quasi-similaires à ceux obtenus avec les algorithmes cycliques. A ceci près que la complexité calculatoire est bien moindre avec ces derniers algorithmes ($h \log h$ contre h^3). En effet, il a été montré que cette nouvelle approche s'appuie sur des opérations simples (convolution, transformée de Fourier) qui peuvent être calculées de manière efficiente à l'aide de *Fast Fourier Transform* (FFT). Toutefois, de manière analogue aux algorithmes cycliques, il est intéressant de remarquer que le nombre limité de degrés de liberté (NM éléments dans $\{x_m(n)\}_{n=1, m=1}^{N, M}$ contraints en amplitude) et le possible grand nombre de contraintes ($\sim 2KPM^2$ contraintes) contraignent la qualité de l'optimisation dans la zone d'intérêt imposée au système. Ainsi, le dimensionnement de cette zone doit rester confiné sur un petit domaine autour de

l'origine afin d'obtenir de bonnes performances. Néanmoins, ces algorithmes offrent une grande flexibilité d'usage et permettent de générer des familles de séquences ayant d'intéressantes propriétés radars : un faible PSLR, une bonne réjection des émissions hors-bandes et une faible fluctuation d'enveloppe temporelle (PAPR faible).

5. De définir une borne sur le PSLR permettant :
 - a. dans le cas adapté, de généraliser les bornes existantes de Levenshtein et Welch pour les familles de séquences polyphasés et d'améliorer ces bornes en exploitant une propriété propre aux corrélations aperiodiques, à savoir une propriété sur les D -derniers retards;
 - b. dans le cas désadapté, d'établir une borne pour une famille de séquences polyphasés.

Ces nouvelles bornes permettent ainsi d'évaluer les performances de nos algorithmes en mesurant l'écart entre le résultat que l'on obtient et la borne que l'on a définie. Par contre, des développements restent à être menés afin de prendre en compte des contraintes spectrales dans le calcul de la borne. Ces contraintes peuvent être intégrées dans la construction des matrices \mathbf{X} en intégrant les vecteurs de la base de Fourier des fréquences que l'on souhaite minimiser.

6. Et de réaliser des essais. Essais qui ont permis de tester et d'évaluer, dans une situation réelle, les performances des formes d'ondes que l'on a générées à l'aide des algorithmes présentés durant cette thèse. Ces essais ont été réalisés sur une paire bistatique unique. Ils ont principalement consisté à valider le comportement des formes d'ondes générées en termes de contrôle du spectre, de contrôle du PAPR et de contrôle des fonctions d'ambiguïtés. Toutefois, ils ont aussi permis d'évaluer le comportement de ces formes d'ondes vis-à-vis des perturbations liées au domaine d'emploi (Doppler, bruit, clutter, etc...).

Pour faire suite à ces travaux, il est envisageable d'explorer les axes d'études suivants :

1. Réaliser de nouveaux jeux d'essais afin de compléter la validation de manière expérimentale de l'adéquation de ces formes d'ondes aux cas d'application MSPSR actif. En particulier, la plateforme actuelle ne se compose que d'une paire bi-statique et donc une évolution de la plateforme vers une configuration multistatique serait intéressante et permettrait de parfaire la validation expérimentale. De plus, il serait

tout aussi intéressant de réaliser une analyse fine des performances obtenues afin de mieux appréhender les gains qu'apporteraient l'emploi de telles familles de séquences.

2. Prendre en compte des contraintes spectrales dans le calcul de la borne. Ces contraintes peuvent être intégrées assez facilement en modifiant la structure des matrices \mathbf{X} et \mathbf{Y} . En effet, en remarquant que le produit scalaire d'une séquence avec un vecteur de la base de Fourier donne la valeur de son spectre à une certaine fréquence, il vient qu'en intégrant les vecteurs de la base de Fourier des fréquences que l'on souhaite minimiser, on peut réussir à prendre en compte les contraintes sur le spectre. Cette extension permettrait alors d'obtenir une borne plus fidèle à la réalité des formes d'ondes radars.
3. Investiguer la géométrie du problème, afin de mesurer l'impact de celle-ci sur le traitement en réception du radar. En particulier, il serait intéressant de mesurer son impact sur la levée d'ambiguïté sur le plan Distance-Doppler. Car, dans le cas où les formes d'ondes générées possèdent des ambiguïtés distance et/ou Doppler, on présente que l'observation d'une cible sous différentes géométries amène une structure d'ambiguïté différente pour chaque paire bi-statique qui compose le système. Ainsi, on peut se demander si cette pluralité d'observations ne permettrait pas de lever les ambiguïtés dans une certaine mesure et donc de soulager l'optimisation des formes d'ondes en permettant un certain nombre d'ambiguïté. Par exemple, les familles de codes de Zadoff-Chu, sont des codes *Chirp-Like* ayant un couplage temps-fréquence comme les LFM. Or, il est peut-être possible d'envisager son utilisation dans un cadre MSPSR actif si la géométrie du système permettait de lever les ambiguïtés Doppler qui lui sont propres.
4. Étendre les algorithmes du gradient au cas désadapté. Durant cette thèse, les développements ont été menés et se fondent sur la dérivée de Wirtinger. Malheureusement, l'étude s'est limitée à étudier la génération de filtres désadaptés qui minimisent seulement les retards à Doppler nul (autocorrélation). Ainsi il serait intéressant d'étudier l'apport du filtrage désadapté sur l'optimisation des fonctions d'ambiguïtés (car ce cas n'a pas pu être traité en profondeur mais mériterait de l'être), même si la borne obtenue dans le cas désadapté montre qu'optimiser les fonctions d'ambiguïtés d'une famille de séquences à l'aide de filtres désadaptés n'apportera pas de gain significatif.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Eurocontrol, «Surveillance developments in SESAR,» [En ligne]. Available: <https://www.eurocontrol.int/articles/surveillance-developments-sesar>.
- [2] N. Millet et M. Klein, «Multi-Receiver Passive Radar Tracking,» *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 27, n° 110, 2012.
- [3] H. He, J. Li et P. Stoica, *Waveform Design for Active Sensing Systems : A Computational Approach*, New York: Cambridge University Press, 2012.
- [4] E. Fishler, A. Haimovich, R. Blum, D. Chizhik, L. Cimini et R. Valenzuela, Spatial diversity in radars - models and detection performance, vol. 54, In *IEEE Trans. Signal Process.*, mars 2006, p. 823–838.
- [5] H. Griffiths et C. Baker, «Passive coherent location radar systems. Part 1: performance prediction,» *Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings -*, vol. 152, n° 13, pp. 153-159, 2005.
- [6] C. Baker et H. Griffiths, «Passive coherent location radar systems. Part 2: waveform properties,» *Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings -*, vol. 152, n° 13, pp. 160-168, 2005.
- [7] J. Byrnes, *Advances in Sensing with Security Applications*, Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.

- [8] N. J. Willis, *Bistatic Radar*, Artech House, 1991.
- [9] A. M. Haimovich, R. S. Blum et L. J. Cimini, «MIMO radar with widely separated antennas,» *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, n° 11, pp. 116-129, 2008.
- [10] J. LI et P. STOICA, *MIMO Radar Signal Processing*, John Wiley & Sons Inc, 2008.
- [11] S. C. A. Thomopoulos, R. Viswanathan et D. C. Bougoulas, Optimal decision fusion in multiple sensor systems, In *Aerospace and Electronic Systems*, IEEE Transactions on, sept 1987, pp. 644-653.
- [12] CANSO, «Response to IATA User Requirements for Air Traffic Services,» 2010.
- [13] G. Gassier, F. Briolle, G. Chabriel et J. Barrère, *Passive RADAR using DVB-T illuminators: an efficient and low-complexity method to extract targets echoes*, Szczecin, Poland: 4th Focus Days on PCL (Passive Coherent Localization), May 2013.
- [14] J. M. Baden, M. S. Davis et L. Schmiieder, «Efficient Energy Gradient Calculations for Binary and Polyphase Sequences,» *RadarCon*, pp. 301-309, Mai 2015.
- [15] P. M. Woodward, *Probability and information theory : with applications to radar*, London: Electronic Waves, Pergamon Press, 1953.
- [16] P. M. Woodward, *Radar ambiguity analysis*, In R. R. E. Technical note No. 731, 1967.
- [17] N. Levanon et E. Mozeson, *Radar Signals*, WILEY-INTERSCIENCE, 2004.
- [18] N. Levanon et A. Freedman, *Periodic Ambiguity Function of CW Signals with Perfect Periodic Autocorrelation*, vol. 28, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Avril 1992, pp. 387-395.
- [19] A. Freedman et N. Levanon, *Properties of the Periodic Ambiguity Function*, vol. 30, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Juillet 1994, pp. 938-941.
- [20] B. Getz et N. Levanon, *Weight Effects on the Periodic Ambiguity Function*, vol. 31, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Janvier 1995, pp. 182-193.
- [21] N. Levanon, *The Periodic Ambiguity Function - Its Validity and Value*, *IEEE Radar Conference*, Mai 2010, pp. 204-208.
- [22] L. R. Welch, *Lower bounds on the maximal cross correlation of signals*, vol. 20, *IEEE*

- Transactions on Information Theory, Mai 1976, pp. 396-399.
- [23] M. Coupechoux et P. Martins, Vers les systèmes radiomobiles de 4e génération De l'UMTS au LTE, Springer, 2013.
- [24] F. Arlery, M. Klein et F. Lehmann, «Utilization of Spreading Codes as dedicated waveforms for Active Multi-Static Primary Surveillance Radar,» *IEEE International Radar Symposium (IRS)*, pp. 327-332, 2015.
- [25] A. J. Viterbi, CDMA Principles of spread spectrum communication, Addison-Wesley, 1995.
- [26] N. Zierler, Linear Recurring Sequences, vol. 7, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1959, pp. 31-48.
- [27] N. Zierler et W. H. Mills, Products of Linear Recurring Sequences, vol. 27, Journal of Algebra, 1973, pp. 147-157.
- [28] E. S. Selmer, Linear recurrence relations over finite fields, Bergen: Dept. of Mathematics, University of Bergen, 1966.
- [29] D. V. Sarwate et M. B. Pursley, Crosscorrelation properties of pseudorandom and related sequences, vol. 68, Proceeding of the IEEE, Mai 1980, pp. 593-619.
- [30] S. W. Golomb, Shift Register Sequences, Aegean Park Press, 1967 (revu en 1982).
- [31] A. Z. Tirkel, Cross-correlation of M-sequences - some unusual coincidences, vol. 3, In proceedings of IEEE 4th International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications, Septembre 1996, pp. 969-973.
- [32] R. Gold et E. Kopitzke, Study of correlation properties of binary sequences, vol. 1 à 4, Interim Tech.Rep. 1, Megavox Research Laboratories, Janvier 1965.
- [33] R. Gold., Maximal recursive sequences with 3-valued recursive cross-correlation functions (corresp.), Information Theory, IEEE Transactions on, Janvier 1968, pp. 154-156.
- [34] Y. Niho, Multivalued cross-correlation between two maximal linear recursive sequence, Los Angeles: Ph.D. dissertation, 1970.
- [35] R. Gold, Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing, IEEE

Transactions on Information Theory, Octobre 1967, pp. 619-621.

- [36] H. F. A. Roefs, Binary Sequences for Spread Spectrum Multiple-Access Communications, PhD thesis, University of Illinois, 1977.
- [37] D. V. Sarwate et M. B. Pursley, Applications of coding theory to spread spectrum multiple access satellite communications, in Canadian Communications and Power Conference, Octobre 1976, pp. 72-75.
- [38] J. J. Rushanan, Weil Sequences: A Family of Binary Sequences with Good Correlation Properties, Seattle: in Proc. IEEE International Symposium on Information Theory, Juillet 2006, pp. 1648-1652.
- [39] Z. Guohua et Z. Quan, Pseudonoise codes constructed by Legendre sequence, vol. 38, Electronics Letters, Avril 2001, pp. 376-377.
- [40] J. S. No et P. V. Kumar, A New Family of Binary Pseudorandom Sequences Having Optimal Periodic Correlation Properties and Large Linear Span, vol. 35, IEEE Transactions on Information Theory, mars 1989.
- [41] J. S. No, Generalization of GMW Sequences and No Sequences, vol. 42, IEEE Transactions on Information Theory, Janvier 1996.
- [42] R. J. M. Eliece, Finite Fields for computer scientists and engineers, Kluwer Academic, 1987.
- [43] A. M. Klapper, d-Form Sequences: Families of Sequences with Low Correlation Values and Large Linear Spans, vol. 41, IEEE Transactions on Information Theory, Mars 1995, pp. 423-431.
- [44] R. L. Frank et S. A. Zadoff, Phase Shift Pulse Codes With Good Periodic Correlation Properties, IRE Transactions on Information Theory, Octobre 1962, pp. 381-382.
- [45] D. C. Chu, Polyphase Code With Good Periodic Correlation Properties, IEEE Transactions on Information Theory, Juillet 1972, pp. 531-532.
- [46] B. M. Popovic, Generalized Chirp-Like Polyphase Sequences With Optimum Correlation Properties, vol. 38, IEEE Transactions on Information Theory, Juillet 1992, pp. 1406-1409.

- [47] R. C. Heimiller, Phase Shift Pulse Codes With Good Periodic Correlation Properties, IRE Transactions on Information Theory, Octobre 1961, pp. 254-257.
- [48] M. Hua, M. Wang, W. Yang, X. You, F. Shu, J. Wang, W. Sheng et Q. Chen, Analysis of the Frequency Offset Effect on Random Access Signals, vol. 61, IEEE Transactions on communications, Novembre 2013, pp. 4728-4740.
- [49] ETSI, *Norme DVB-T ETSI EN 300 744 V1.6.1*, 2009.
- [50] ETSI, *Norme DVB-T ETSI EN 302 755 V1.1.1*, 2009.
- [51] ETSI, *Norme DVB-T ETSI EN 300 468 V1.11.1*, 2010.
- [52] E. D. e. al., Communications Engineering Desk Reference, Academic Press, mars 2009.
- [53] H. Donelan et T. O'Farrell, Method for generating sets of orthogonal sequences, vol. 35, Electronics Letters, Septembre 1999, pp. 1537-1538.
- [54] J. D. Olsen, R. A. Scholtz et L. R. Welch, Bent-Function Sequences, vol. 28, IEEE Transactions on Information Theory, Novembre 1982, pp. 858-864.
- [55] J. F. Dillon, Elementary Hadamard Difference Sets, PhD thesis, University of Maryland, 1974.
- [56] O. S. Rothaus, On 'bent' functions, vol. 20, Journal of Combinatorial Theory (Ser. A), 1976, pp. 300-305.
- [57] A. Grochowska-Czurylo, A study of differences between bent functions constructed using Rothaus method and randomly generated bent functions, Journal of Telecommunications and Information Technology, Avril 2003.
- [58] A. Lempel et M. Cohn, Maximal Families of Bent Sequences, vol. 28, IEEE Transactions on Information Theory, Novembre 1982, pp. 865-868.
- [59] F. Cheng, J. Hua, J. Zhu, L. Tong et L. Meng, A fast generation method of bent sequences and its application in ads simulation, WASE International Conference on Information Engineering, Août 2010, pp. 328-331.
- [60] H. Deng, «Polyphase Code Design for Orthogonal Netted Radar Systems,» *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, n° 111, pp. 3126-3135, 2004.

- [61] B. Liu, Z. He, J. Zeng et B. Liu, «Polyphase Orthogonal Code Design for MIMO Radar Systems,» *CIE international conference on radar*, 2006.
- [62] A. R. Brenner, «Polyphase Barker sequences up to length 45 with small alphabets,» *Electronics Letters*, vol. 34, n° 116, pp. 1576-1577, 1998.
- [63] H. Schotten et H. D. Lüke, «On the search for low correlated binary sequences,» *International Journal of Electronics and Communications*, vol. 59, n° 12, pp. 67-78, 2005.
- [64] P. Borwein et R. Ferguson, «Polyphase sequences with low autocorrelation,» *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, n° 14, pp. 1564-1567, 2005.
- [65] G. Coxson et J. Russo, «Efficient Exhaustive Search for Optimal Peak-Sidelobe-Binary Codes,» *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 41, n° 11, 2005.
- [66] S. Mertens, «Exhaustive search for low-autocorrelation binary sequences,» *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 29, n° 118, pp. L473-L481, 1996.
- [67] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt et M. P. Vecchi, *Optimization by Simulated Annealing*, Science, 1983.
- [68] P. J. M. Laarhoven et E. H. L. Aarts, *Simulated Annealing : Theory and Applications*, Springer, 1987.
- [69] V. Granville, M. Krivanek et J.-P. Rasson, «Simulated Annealing : A Proof of Convergence,» *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 16, n° 16, pp. 652-656, June 1994.
- [70] P. Stoica, H. He et J. Li, «New Algorithms for Designing Unimodular Sequences With Good Correlation Properties,» *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 57, n° 14, pp. 1415-1425, Avril 2009.
- [71] P. Stoica, H. He et J. Li, «On Designing Sequences With Impulse-Like Periodic Correlation,» *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 16, n° 18, pp. 703-706, Août 2009.
- [72] P. Stoica, H. He et J. Li, «Sequence Sets With Optimal Integrated Periodic Correlation Level,» *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 17, n° 11, pp. 63-66, Janvier 2010.

- [73] R. N. Bracewell, «Optimum spacings for radio telescopes with unfilled apertures,» *Progress in Scientific Radio (15th URSI Assembly)*, 1966.
- [74] A. T. Moffet, «Minimum-Redundancy Linear Arrays,» *IEEE Transactions on antennas and propagation*, Vols. 1 sur 2AP-16, n° 12, pp. 172-175, Mars 1968.
- [75] D. Pearson, S. U. Pillai et Y. Lee, «An Algorithm for Near-Optimal Placement of Sensor Elements,» *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36, n° 16, pp. 1280-1284, Novembre 1990.
- [76] C. S. Ruf, «Numerical Annealing of Low-Redundancy Linear Arrays,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 41, n° 11, pp. 85-90, Janvier 1993.
- [77] H. He, P. Stoica et J. Li, «Designing Unimodular Sequence Sets With Good Correlations - Including an Application to MIMO Radar,» *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 57, n° 11, pp. 4391-4405, Novembre 2009.
- [78] J. A. Tropp, I. S. Dhillon, R. W. J. Heath et T. Strohmer, «Designing Structured Tight Frames Via an Alternating Projection Method,» *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, n° 11, pp. 188-209, Janvier 2005.
- [79] F. Arlery, R. Kassab, U. Tan et F. Lehmann, «Efficient Optimization of the Ambiguity Functions of Multi-Static radar waveforms,» *IEEE International Radar Symposium (IRS)*, pp. 1-6, 2016.
- [80] F. Arlery, R. Kassab, U. Tan et F. Lehmann, «Efficient Gradient Method for Locally Optimizing the Periodic/Aperiodic Ambiguity Function,» *IEEE Radar Conference (RadarConf)*, pp. 1-6, 2016.
- [81] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, 3rd Edition éd., New York: McGraw-Hill, 1986.
- [82] J. W. Cooley et J. W. Tukey, «An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series,» *Math. of Comput.*, vol. 19, pp. 297-301, 1965.
- [83] S. Boyd et L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.
- [84] N. Metropolis et S. Ulam, «The monte carlo method,» *Journal of the American statistical association*, vol. 44, n° 1247, pp. 335-341, 1949.

- [85] M. B. Pursley, «Performance evaluation for phase-coded spread-spectrum multiple-access communication -- Part I: System analysis,» *IEEE Transactions on Communications*, vol. 25, n° 18, pp. 795-799, August 1977.
- [86] V. Levenshtein, «New lower bounds on aperiodic crosscorrelation of binary codes (Corresp.),» *IEEE Transaction on Information Theory*, p. 471, 1998.
- [87] V. Levenshtein, «New Lower Bounds on Aperiodic Crosscorrelation of Binary Codes,» *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, n° 11, pp. 284-288, 1999.
- [88] Z. Liu, S. Boztas, L. Guan et U. Parampalli, «Quadratic Weight Vector for Tighter Aperiodic Levenshtein Bound,» *IEEE International Symposium on Information Theory*, pp. 3130-3134, 2013.
- [89] Z. Liu, U. Parampalli, Y. L. Guan et S. Boztas, «A New Weight Vector for a Tighter Levenshtein Bound on Aperiodic Correlation,» *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 60, n° 12, pp. 1356-1366, 2014.
- [90] F. Arlery, U. Tan et O. Rabaste, «Generalization and Improvement of the Levenshtein Bound for Aperiodic Correlation,» *IEEE Transactions on Information Theory (soumis)*, 2017.
- [91] F. Arlery, U. Tan et O. Rabaste, «A New Lower Bound on the Maximum Correlation of a Set with Mismatched Filters,» *IEEE Transactions on Information Theory (soumis)*, 2017.
- [92] V. I. Levenshtein, «New Lower Bounds on Aperiodic Crosscorrelation of Binary Codes,» *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, n° 11, pp. 284-288, 1999.
- [93] F. Le Chevalier, Principles of radar and sonar signal processing, Artech House, 2002.
- [94] J. Darricau, Physique et théorie du Radar, Paris: Edition Sodipe, 2005.
- [95] F. J. Harris, On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform, vol. 66, Proceedings of the IEEE, 1978, pp. 172-204.
- [96] J. R. Klauder, The Theory and Design of Chirp Radars, The bell system Technical Journal, 1960.
- [97] R. B. Blackman et J. W. Tukey, The Measurement of Power Spectra, New York: Dover

Publications, 1958.

[98] 3GPP TS 25.104 version 12.4.0 Release 12 (2014-10).

[99] I. Peng et S. Waldron, Signed frames and Hadamard products of Gram matrices, Auckland: Department of Mathematics, University of Auckland, 2001.

[100] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[101] J. Calmet, W. Geiselmann et J. Müller-Quade, Mathematical Methods in Computer Science, Berlin: Springer, 2008.

TABLES DES ANNEXES

ANNEXE A.	IMPACT DU FENETRAGE FREQUENTIEL	203
ANNEXE B.	PREUVE DE LA BORNE (4.1.23).....	215
ANNEXE C.	PREUVE DU LEMME 6.2.....	217
ANNEXE D.	PREUVE DE L'EGALITE (C.4).....	221
ANNEXE E.	PREUVE DU LEMME 6.3.....	225
ANNEXE F.	EXPRESSION DE LA BORNE AVEC DES POIDS UNIFORMES	227
ANNEXE G.	PREUVE DU LEMME 6.5.....	230
ANNEXE H.	PREUVE DE (G.9).....	234

ANNEXE A. IMPACT DU FENETRAGE FREQUENTIEL

A.1 Introduction

Le fenêtrage fréquentiel est un traitement très répandu dans le domaine des télécommunications et des radars. Son intérêt est multiple et réside en le maintien d'un gabarit spectral donné, et/ou en la diminution du PSLR de la fonction d'autocorrélation.

Par exemple un fenêtrage est typiquement employé pour des radars à compression d'impulsion à modulation linéaire de fréquence (LFM : *Linear Frequency Modulation*). Ce dernier est réalisé en réception du signal (filtrage désadapté) afin d'abaisser le niveau des lobes secondaires de la fonction d'autocorrélation. Car malgré une très bonne efficacité spectrale des LFM (spectre rectangulaire de largeur $B = 1/T$ avec T la durée du chirp), le principal défaut des LFM est l'allure de la fonction d'autocorrélation qui évolue en sinus cardinal (allure prévisible car la transformée de Fourier inverse d'une porte donne un sinus cardinal). Toutefois, il est important de garder à l'esprit que le gain apporté par la pondération fréquentielle s'obtient au prix d'un élargissement du lobes principal de la fonction d'autocorrélation et d'une perte en Rapport Signal à Bruit (SNR : *Signal to Noise Ratio*) due à la désadaptation du filtre en réception.

Ce type d'application des fenêtres de pondération est aussi présent pour traiter les signaux OFDM car tout comme les LFM, le spectre d'un signal OFDM est rectangulaire ce qui lève la même problématique de diminution du PSLR.

Par contre, dans le cas d'une séquence pseudo aléatoire binaire (PRBS : *Pseudo-Random Binary Sequence*) la problématique se porte alors sur le contrôle du spectre. Cela vient du fait que la séquence pseudo aléatoire correspond à une suite numérique de bit qu'il est nécessaire de mettre en forme pour permettre la conversion sous forme analogique (filtre de mise en forme). Classiquement on prend pour référence le filtre de mise en forme de type porte car ce filtre conserve les propriétés de corrélation de la séquence aléatoire par contre il vient alors que le spectre du signal après le filtre de mise en forme a l'allure d'un sinus cardinal dont le premier zéros est à $1/T_{ech}$ où T_{ech} représente le temps d'échantillonnage. Par conséquent il devient évident que le spectre doit être fenêtré à l'émission pour rentrer dans un gabarit donné. Mais cette pondération va forcément impacter les propriétés de corrélation, l'enveloppe du signal émis et la largeur du lobe principal. Car pour des séquences PRBS de type Gold, Kasami et autres, les propriétés de corrélation sont très bonnes et s'obtiennent à partir d'un séquençement spécifique des séquences et l'enveloppe du signal est constante (PAPR nul en dB). Or l'utilisation d'un fenêtrage fréquentiel correspond à convoluer temporellement la séquence par un filtre différent d'une porte, ce qui va amener une détérioration des performances de corrélation et la destruction de l'enveloppe constante (PAPR non nul en dB).

A.2 Pondération en réception et réduction du PSLR

Il est étudié dans cette partie, l'impact de l'opération de pondération lorsque celle-ci est réalisée en réception du signal. Comme présenté dans l'ouvrage de J. Darricau [94] ce traitement permet de lutter contre de haut niveau de lobes secondaires par modification de l'amplitude du spectre du signal.

Par contre il devient évident que le filtrage alors réalisé n'est plus adapté au signal reçu et donc des pertes en SNR vont apparaître. De plus, l'utilisation d'une fenêtre de pondération entraîne un élargissement du lobe principal de la fonction d'autocorrélation et dégrade ainsi le pouvoir discriminatoire du radar (résolution distance dégradée).

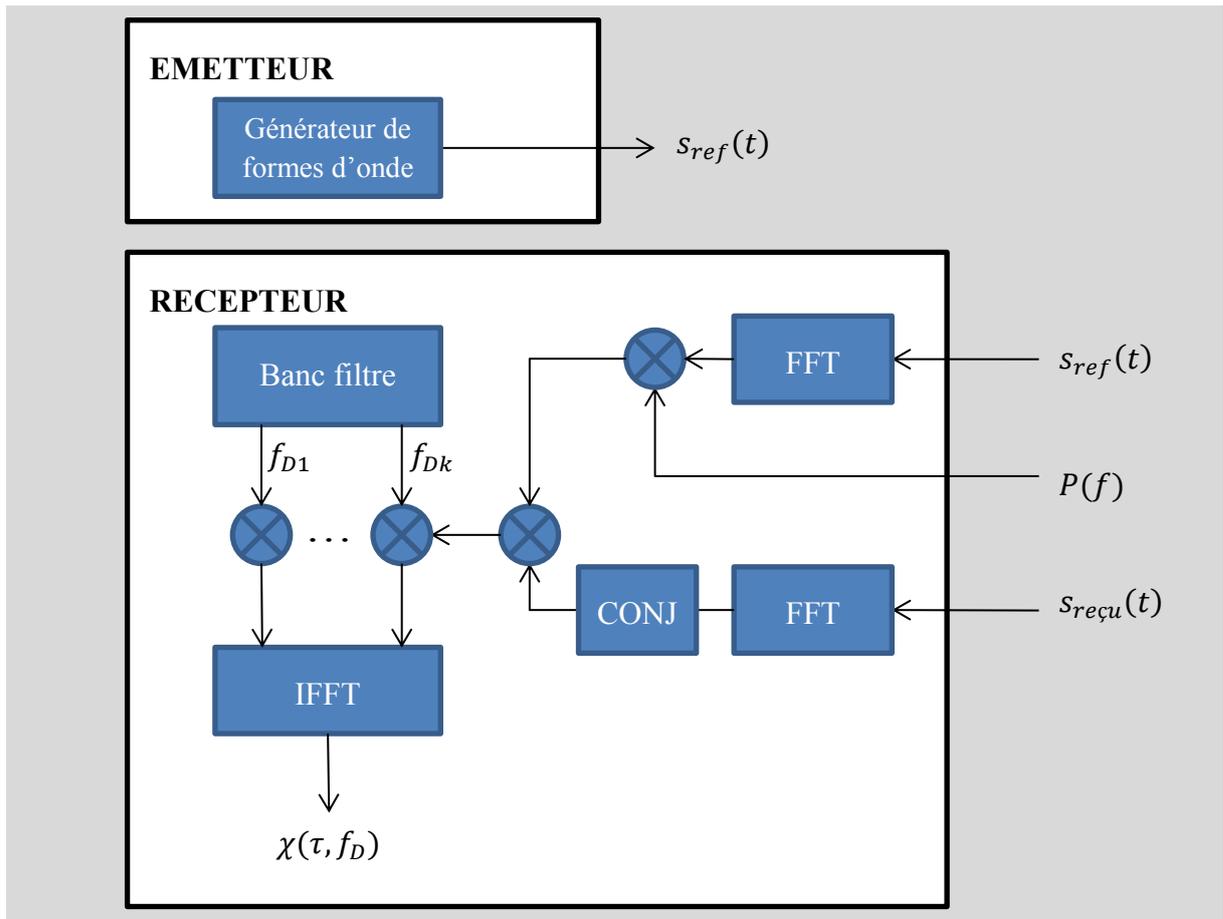


FIGURE A.1 : Architecture du récepteur avec pondération

La fenêtre de Hanning : C'est une fenêtre en cosinus surélevé de la forme [95] :

$$P(f) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{B} f\right) & |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

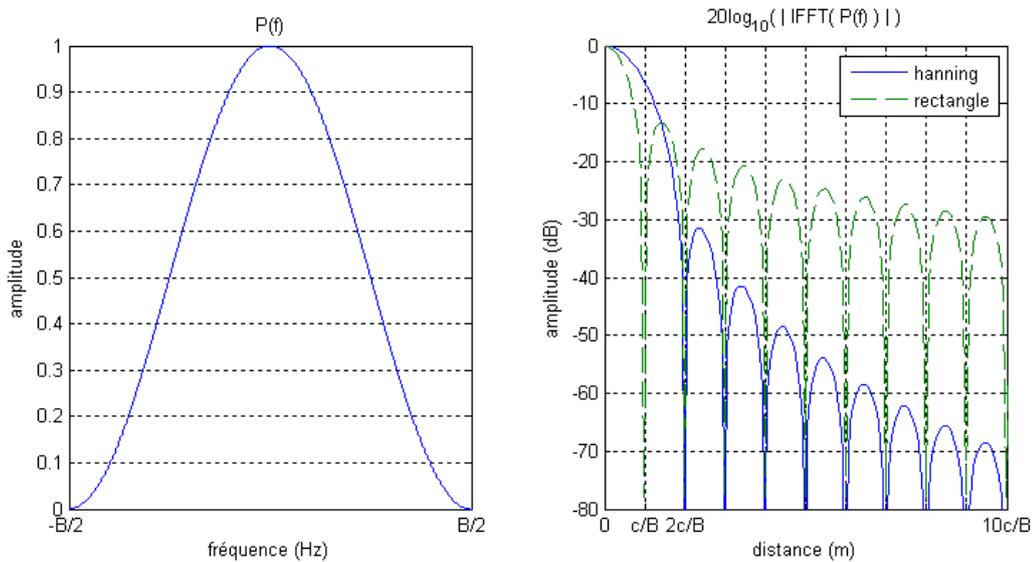


FIGURE. A.2 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Hanning

La fenêtre de Hamming : C'est aussi une fenêtre en cosinus surélevé. Mais cette fois-ci le spectre repose sur un piédestal [95]:

$$P(f) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi}{B} f\right) & |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

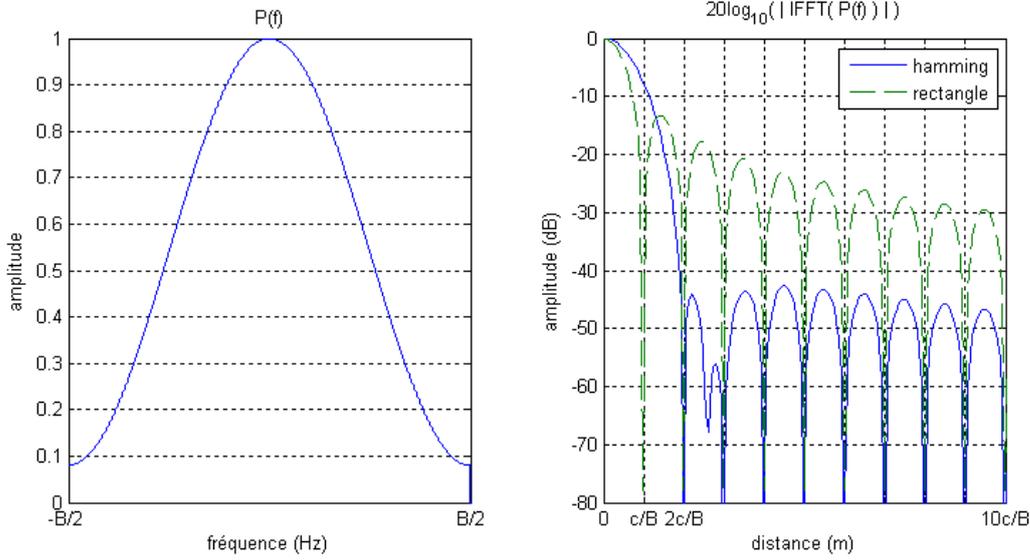


FIGURE. A.3 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Hamming

La fenêtre de Taylor : C'est une fenêtre de la forme suivante [95] [96] :

$$P(f) = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} F_m \cos\left(\frac{2\pi m}{B} f\right) & |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Où $F_m = F(m, k, n)$ le coefficient de Taylor du $m^{\text{ième}}$ ordre, n le nombre de lobes secondaires autour du lobe principal à égal niveau et k l'atténuation des lobes secondaires en décibels ($k < 0$).

$$F_m = F(m, k, n) = (-1)^{m+1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \left[1 - \frac{m^2(A(k)^2 + (n-0.5)^2)}{n^2(A(k)^2 + (i-0.5)^2)} \right]}{2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n-1} \left[1 - \frac{m^2}{j^2} \right]} \quad (\text{A.4})$$

$$A(k) = \text{arcosh} \left(\frac{10^{\left(\frac{-k}{20}\right)}}{\pi} \right)$$

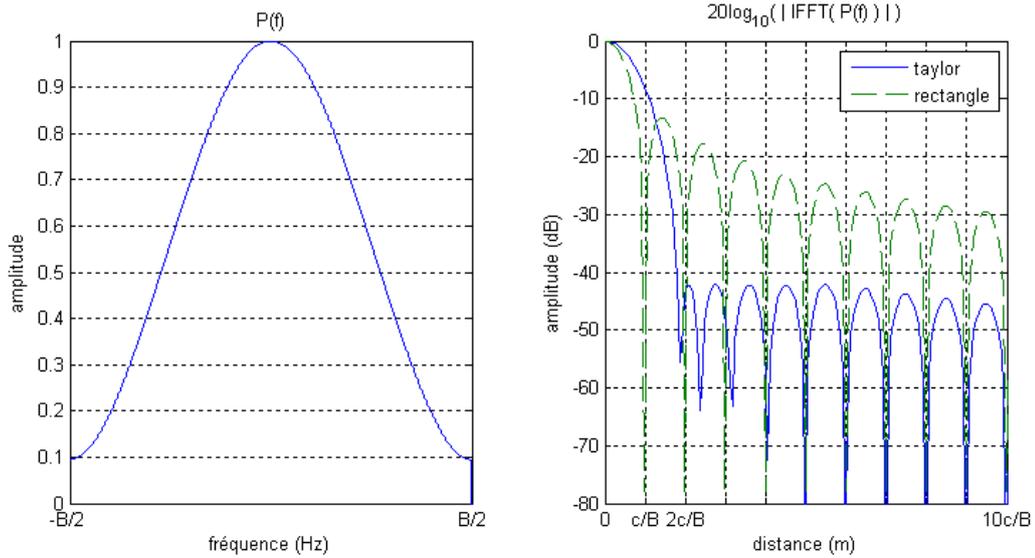


FIGURE. A.4 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Taylor ($n = 5, k = -42 \text{ dB}$)

La fenêtre de Blackman : C'est une fenêtre en quatre cosinus de la forme [95] [97] :

$$P(f) = \begin{cases} a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{B} f\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{B} f\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi}{B} f\right) & |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Avec $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} = \{0.42659, 0.49656, 0.076849, 0.0000\}$ dans le cas de l'exact Blackman, mais il est préféré dans la littérature les coefficients $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} = \{0.42, 0.50, 0.08, 0.00\}$ qui ont pour propriétés d'avoir une somme nulle aux limites permettant la continuité de la fenêtre.

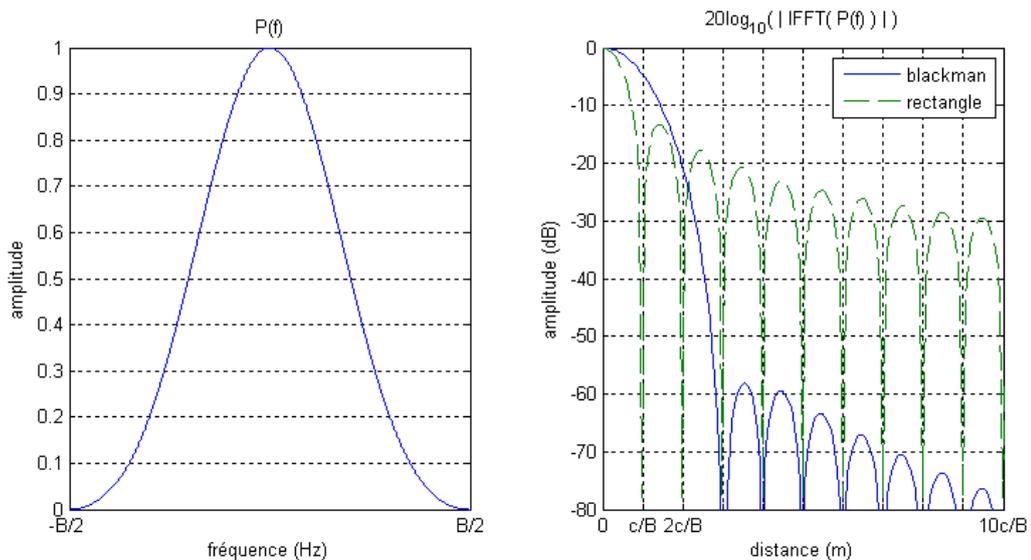


FIGURE. A.5 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Blackman

La fenêtre de Blackman-Harris : C'est aussi une fenêtre en quatre cosinus de la forme [95] :

$$P(f) = \begin{cases} a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{B}f\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{B}f\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi}{B}f\right) & |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Avec $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} = \{0.35875, 0.48829, 0.14128, 0.01168\}$

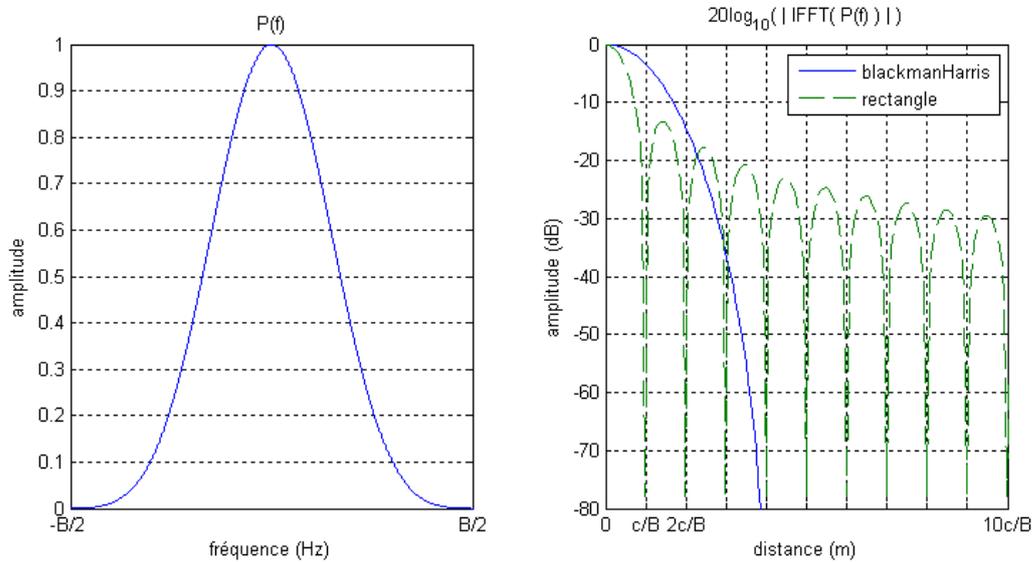


FIGURE. A.6 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre de Blackman-Harris

Le tableau suivant donne les caractéristiques de ces lois en prenant pour référence un signal OFDM (spectre rectangulaire et fonction d'autocorrélation en sinus cardinal).

Types de Pondération	PSLR (dB)	Résolution distance (m)	Perte en SNR (dB)
Aucune (rectangle)	-13.26 dB	$0.886 \frac{c}{B}$	0 dB
Hanning	-31.5 dB	$1.45 \frac{c}{B}$	1.76 dB
Hamming	-42.1 dB	$1.30 \frac{c}{B}$	1.34 dB
Taylor ($n = 5, k = -42$)	-41.0 dB	$1.26 \frac{c}{B}$	1.22 dB
Blackman	-55.8 dB	$1.64 \frac{c}{B}$	2.37 dB
Blackman-Harris	-54.6 dB	$1.90 \frac{c}{B}$	3.02 dB

TABLEAU A.1 : Caractéristiques de certaines lois de pondération utilisées en réception.

A.3 Pondération à l'émission et efficacité spectrale

Il est maintenant étudié l'impact de l'opération de pondération lorsque celle-ci est réalisée à l'émission du signal. Cette opération permet de respecter un gabarit spectral donné en fenêtrant le spectre pour que celui-ci respecte la plage de fréquence imposée.

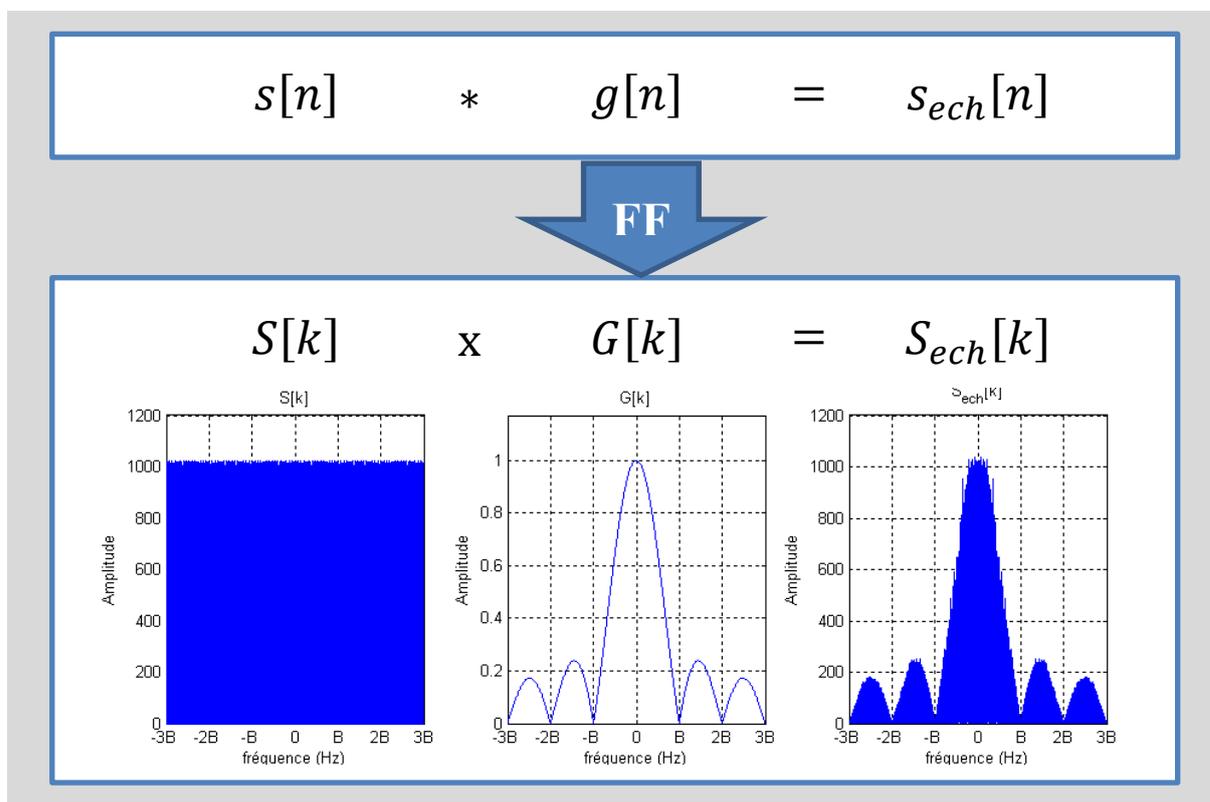


FIGURE A.7 : Impact de la mise en forme par un filtre rectangulaire

Ce traitement est particulièrement intéressant dans le cas de l'émission de bruit pseudo-aléatoire car pour sur-échantillonner de tels signaux, il est pris comme référence que le filtre de mise en forme utilisé est le filtre rectangulaire. Et donc le spectre d'une telle séquence est un sinus cardinal dont l'étalement spectral est assez important (Voir FIGURE A.7). Il est donc nécessaire de le contrôler par le biais d'un fenêtrage adapté (ou un choix de filtre de mise en forme adapté).

Lorsque la pondération est réalisée à l'émission, l'approche classique est de prendre comme filtre la racine carrée des filtres classiquement utilisés pour pondérer en réception $G(f) = \sqrt{P(f)}$. Car en réception, l'opération de filtrage adapté permet de se ramener aux filtres classiques :

$$\begin{aligned}
 \chi(t, f_D) &= IFFT(C(f)G(f)\overline{C(f)G(f)}) \\
 &= IFFT(|C(f)|^2|G(f)|^2) \\
 &= IFFT(|C(f)|^2P(f))
 \end{aligned}
 \tag{A.7}$$

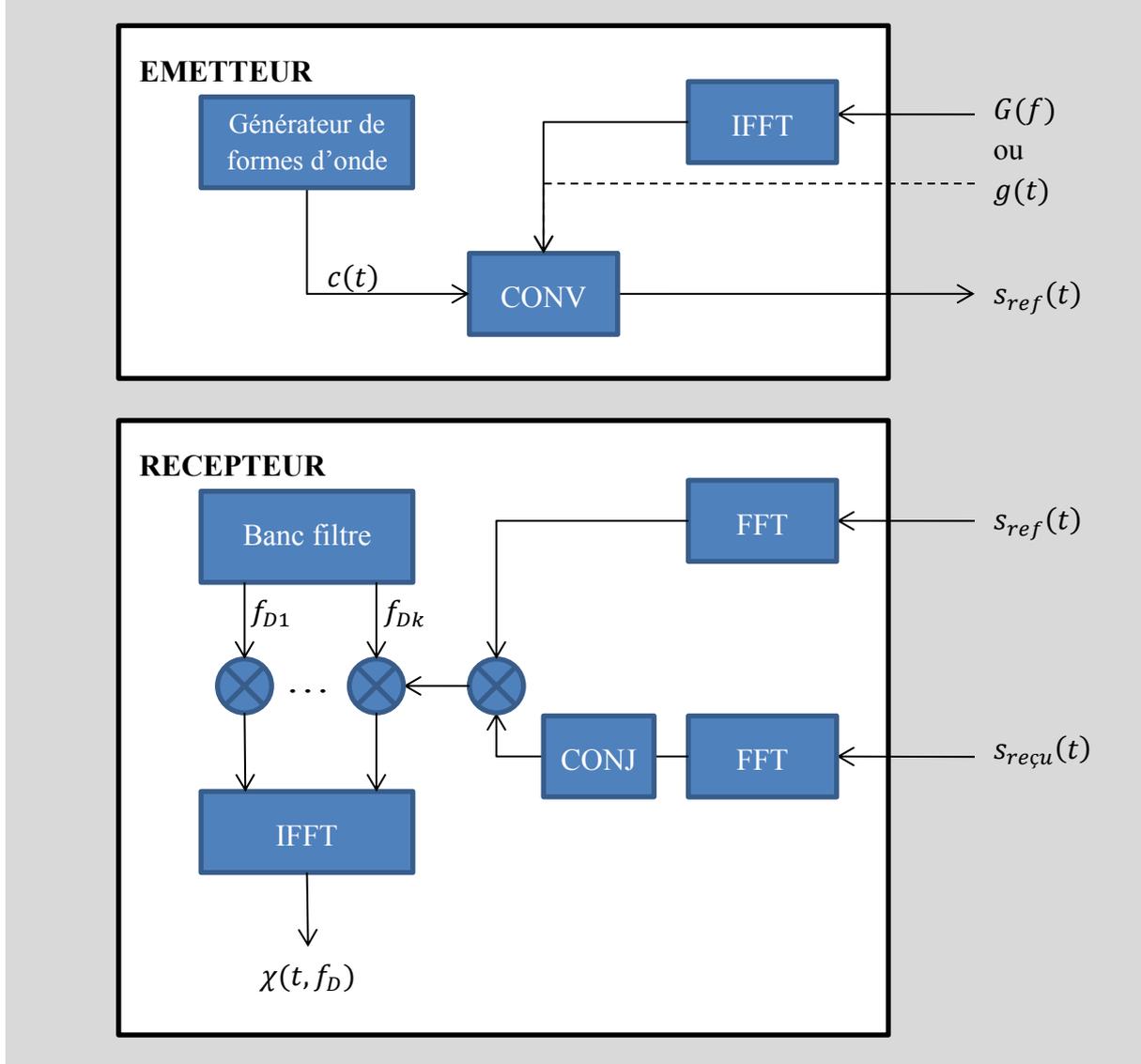


FIGURE A.8 : Architecture de l'émetteur avec pondération à l'émission

Le filtre SRRC (Square Root Raised Cosine) : Ce filtre de mise en forme (d'après le standard 3GPP [98]) est donné par :

$$g(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T_{ech}}(1 - \alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T_{ech}} \cos\left(\pi \frac{t}{T_{ech}}(1 + \alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T_{ech}} \left(1 - \left(4\alpha \frac{t}{T_{ech}}\right)^2\right)} \quad |t| \leq kT_{ech} \tag{A.8}$$

Où : T_{ech} représente le temps d'échantillonnage de la séquence. L'inverse de ce temps donne la bande passante idéale B ;

α représente le facteur de débordement (*roll-off factor*), il indique la proportion du spectre excédent la bande donnée B . Ce coefficient varie de 0 à 1. La largeur du spectre est alors donné par $((1 + \alpha)B)$;

k représente la durée de la réponse impulsionnelle du filtre qui peut varier selon les besoins. De manière générale, l'augmentation du nombre d'échantillon permet d'améliorer la bande d'arrêt (remontée des lobes secondaires hors de la bande souhaitée).

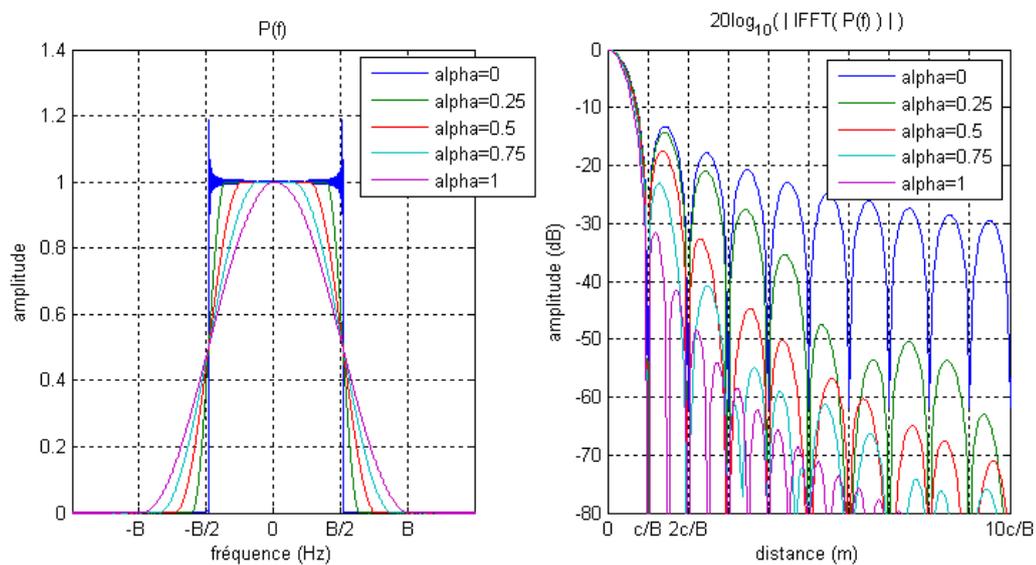


FIGURE A.9 : Spectre et réponse temporelle du filtre SRRC pour $k = 128$

La fenêtre en puissance de cosinus surélevés : Cette fenêtre est de la forme :

$$G(f) = \sqrt{P(f)} = \sqrt{k + (1 - k) \left[\cos\left(\pi \frac{f}{B}\right) \right]^n} \quad |f| \leq \frac{B}{2} \quad (\text{A.9})$$

Où : k représente l'offset en fréquence du spectre ;

n représente la puissance de cosinus de la fenêtre ;

Ces fenêtres sont équivalentes à celles de Hamming et Hanning dans les configurations respectives :

- Fenêtre de Hamming : $n = 2$ et $k = 0.08$;
- Fenêtre de Hanning : $n = 2$ et $k = 0$;

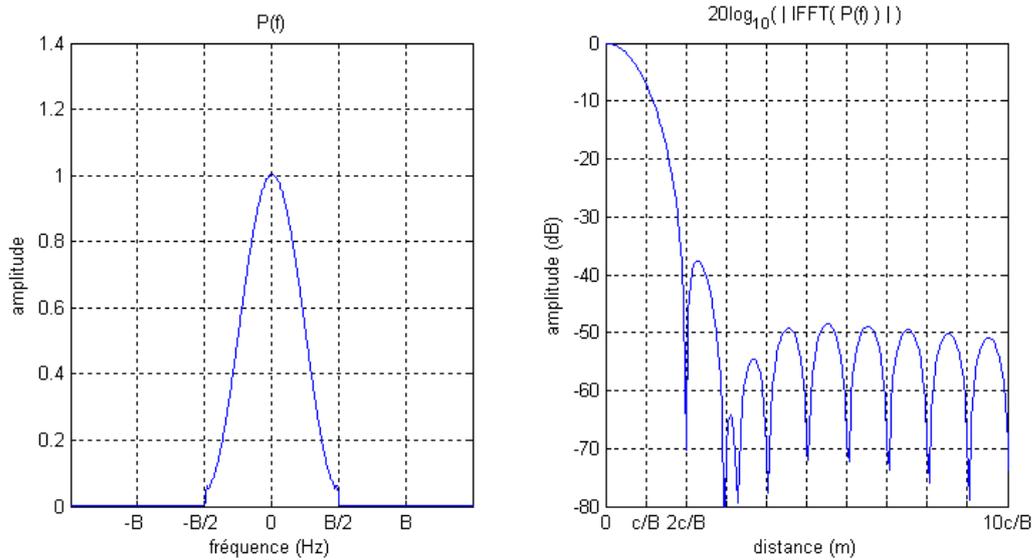


FIGURE A.10 : Spectre et réponse temporelle de la fenêtre en puissance de cosinus surélevé pour $n = 2$ et $k = 0.05$.

Pour les autres fenêtres :

$$G(f) = \sqrt{P(f)} \quad (\text{A.10})$$

REMARQUE A.7.4.1 : Théoriquement les fenêtres de pondérations utilisées sont à support borné (atténuation infinie hors de la bande d'intérêt). Ils sont donc à support infini dans le domaine temporel. Mais dans la pratique, le filtre se compose d'un nombre fini d'échantillons.

Et plus ce nombre d'échantillons est important plus le spectre obtenu approche le spectre idéal attendu c'est à dire plus l'atténuation hors bande est importante.

De plus il est important de noter que plus la bande d'intérêt est étroite plus le nombre d'échantillons pour décrire le filtre doit être important afin d'atteindre des niveaux d'atténuation hors bande faibles. Par exemple dans le cas des filtres SRRC, plus le facteur de débordement est petit, plus le nombre d'échantillons à prendre en compte est important pour atteindre un niveau d'atténuation donné.

A titre d'exemple, le tableau suivant donne l'impact de ces lois en prenant pour référence une séquence du *Small Set* de Kasami avec $N = 2^{16} - 1$ pour un temps d'échantillonnage de T_{ech} et pour une intégration cohérente T sur 2 périodes soit $T = 2NT_{ech}$. Dans ce tableau, on définit $B = 1/T_{ech}$:

TABEAU A.2 : Caractéristiques de certaines lois de pondération utilisées en émission (sur-échantillonnage d'un facteur 20 et fenêtre temporelle des filtres sur $16T_{ech}$) sur une séquence du *Small Set* de Kasami avec $N = 2^{16} - 1$ et pour une intégration cohérente sur 2 périodes.

Type de pondérations	PSL (dB)	Résolution distance (m)	PAPR (dB)	Bande passante à $-3dB$ (Hz)	Largeur du lobe principal du spectre (Hz)
porte (T_b) (ou sinc de largeur $2B$)	-41.6 dB	$0.5858 \frac{c}{B}$	0 dB	$0.886B$	$2B$
Filtre sinc (T_b) (passerbas) + porte (T_b)	-41.1 dB	$0.78 \frac{c}{B}$	3.0 dB	$0.886B$	$2B$
Filtre SRRC ($\alpha = 1$) + porte (T_b)	-40.1 dB	$0.97 \frac{c}{B}$	1.9 dB	$0.68B$	B
Hanning	-31.2 dB	$1.44 \frac{c}{B}$	4.9 dB	$0.50B$	B
Hamming	-37.3 dB	$1.30 \frac{c}{B}$	5.1 dB	$0.53B$	B
Blackman	-36.2 dB	$1.64 \frac{c}{B}$	4.6 dB	$0.40B$	B
Blackman-Harris	-35.4 dB	$1.90 \frac{c}{B}$	4.6 dB	$0.34B$	B
Taylor ($n = 5, k = -42$)	-36.4 dB	$1.27 \frac{c}{B}$	5.4 dB	$0.55B$	B
Taylor ($n = 5, k = -35$)	-32.7 dB	$1.19 \frac{c}{B}$	6.1 dB	$0.59B$	B
Taylor ($n = 4, k = -75$)	-36.9 dB	$1.46 \frac{c}{B}$	4.3 dB	$0.46B$	B
Puissance de cosinus surélevé ($n = 2, k = 0.16$)	-31.7 dB	$1.21 \frac{c}{B}$	6.0 dB	$0.57B$	B

ANNEXE B. PREUVE DE LA BORNE (4.1.23)

Cette annexe s'inspire des travaux mené par Hao He, Petre Stoica et Jian Li dans [3].

On rappelle que le critère (4.1.20) peut se réécrire comme :

$$\|\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U}\|_F^2 = 2NKPM - 2\sqrt{N}Re(Tr(\mathbf{X}^H\mathbf{U})) \quad (\text{B.1})$$

Ainsi la minimisation de $\|\mathbf{X} - \sqrt{N}\mathbf{U}\|_F^2$ sachant \mathbf{X} consiste à maximiser la trace de $\mathbf{X}^H\mathbf{U}$.

Or, par l'intermédiaire de la décomposition en valeur singulière compacte (SVD) de \mathbf{X}^H :

$$\mathbf{U}_1\mathbf{S}\mathbf{U}_2^H = \mathbf{X}^H \quad (\text{B.2})$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} Re(Tr(\mathbf{X}^H\mathbf{U})) &= Re(Tr(\mathbf{U}_1\mathbf{S}\mathbf{U}_2^H\mathbf{U})) \\ &\stackrel{Tr(\mathbf{AB})=Tr(\mathbf{BA})}{=} Re(Tr(\mathbf{U}_2^H\mathbf{U}\mathbf{U}_1\mathbf{S})) \\ &\stackrel{S \text{ diagonale}}{=} \sum_{k=1}^{KPM} Re([\mathbf{U}_2^H\mathbf{U}\mathbf{U}_1]_{kk})\mathbf{S}_{kk} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Si on note $\mathbf{B} = \mathbf{U}_2^H\mathbf{U}\mathbf{U}_1$, il vient :

$$|Re([\mathbf{B}]_{kk})|^2 \leq |[\mathbf{B}]_{kk}|^2 \leq [\mathbf{B}^H\mathbf{B}]_{kk} = [\mathbf{U}_1^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}_2\mathbf{U}_2^H\mathbf{U}\mathbf{U}_1]_{kk} \quad (\text{B.4})$$

Or \mathbf{U}_2 est une matrice semi-unitaire ($\mathbf{U}_2^H \mathbf{U}_2 = \mathbf{I}$), ainsi $\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H$ est la projection orthogonale sur l'image de $\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H$ (que l'on notera $\mathcal{R}(\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H)$) donc il existe une matrice \mathbf{U}_3 tel que $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \end{bmatrix}$ soit unitaire et donne la décomposition en valeur propre de $\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H$:

$$\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H = [\mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{rang(\mathcal{R}(\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H))} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2^H \\ \mathbf{U}_3^H \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Et si on note $\mathbf{C} = \{c_{ij}\} = \mathbf{U}_1^H \mathbf{U}^H [\mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3]$, il vient que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}^H \mathbf{B}]_{kk} &= \left[\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{rang(\mathcal{R}(\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H))} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{C}^H \right]_{kk} \\ &= \sum_{i=1}^{rang(\mathcal{R}(\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H))} |c_{ki}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Ainsi il en découle la borne supérieure suivante :

$$|Re([\mathbf{B}]_{kk})|^2 \leq \sum_i |c_{ki}|^2 = [\mathbf{C} \mathbf{C}^H]_{kk} \quad (\text{B.7})$$

Or $\mathbf{C} = \mathbf{U}_1^H \mathbf{U}^H [\mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3]$ donc :

$$\begin{aligned} |Re([\mathbf{B}]_{kk})|^2 &\leq [\mathbf{C} \mathbf{C}^H]_{kk} \\ &= \left[\mathbf{U}_1^H \mathbf{U}^H [\mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2^H \\ \mathbf{U}_3^H \end{bmatrix} \mathbf{U} \mathbf{U}_1 \right]_{kk} \\ &= [\mathbf{U}_1^H \mathbf{U}^H \mathbf{U} \mathbf{U}_1]_{kk} \\ &= [\mathbf{U}_1^H (\mathbf{I}_{KPM} + \mathbf{R}) \mathbf{U}_1]_{kk} \\ &= [\mathbf{I}_{KPM} + \mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk} \\ &= 1 + [\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Il découle de (B.1) - (B.8) que :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \sqrt{N} \mathbf{U}\|_F^2 &= 2NKPM - 2\sqrt{N} \sum_{k=1}^{KPM} Re([\mathbf{U}_2^H \mathbf{U} \mathbf{U}_1]_{kk}) \mathbf{S}_{kk} \\ &\geq 2NKPM - 2\sqrt{N} \sum_{k=1}^{KPM} (1 + [\mathbf{U}_1^H \mathbf{R} \mathbf{U}_1]_{kk})^{1/2} \mathbf{S}_{kk} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ANNEXE C. PREUVE DU LEMME 6.2

Afin de minorer $\tilde{\mathbf{R}}$, commençons d'abord par rappeler la structure de \mathbf{X}^m , structure qui sera utilisée par la suite tout au long de la preuve :

$$\mathbf{X}^m = \begin{bmatrix} x_1^m & x_2^m & \dots & x_{N-1}^m & x_N^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^m & x_2^m & \dots & x_{N-1}^m & x_N^m & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x_1^m & x_2^m & \dots & x_{N-1}^m & x_N^m \\ x_N^m & 0 & & & 0 & x_1^m & x_2^m & & x_{N-1}^m \\ x_{N-1}^m & x_N^m & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 & x_1^m & x_2^m \\ x_2^m & \dots & x_{N-1}^m & x_N^m & 0 & \dots & \dots & 0 & x_1^m \end{bmatrix}$$

Développons maintenant l'expression de la norme de Frobenius de $\tilde{\mathbf{R}}$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2 &= \|\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^H\|_F^2 = \|\tilde{\mathbf{X}}^H\tilde{\mathbf{X}}\|_F^2 \\ &= \sum_{k,k'=1}^{2N-1} \left| \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{2N-1} X_{i,k}^m (X_{i,k'}^m)^* w_i \right|^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^{2N-1} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{2N-1} |X_{i,k}^m|^2 w_i \right)^2 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenu en ne conservant que les termes $k = k'$ de la somme précédente.

A partir de là, comme, par construction, la structure des différentes matrices \mathbf{X}^m sont semblables ; il vient en utilisant la propriété d'uni-modularité des séquences que $|X_{i,k}^m|^2 = |X_{i,k}^l|^2$ pour tout $(m, l) \in \llbracket 1: M \rrbracket$ (en particulier $|X_{i,k}^m|^2$ peut prendre seulement deux valeurs 0 ou $1/N$, voir (6.2.2)). En utilisant cette propriété, on obtient alors l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2 \geq M^2 \sum_{k=1}^{2N-1} \left(\sum_{i=1}^{2N-1} |X_{i,k}^m|^2 w_i \right)^2 \quad (\text{C.1})$$

A ce stade, d'après la structure particulière de \mathbf{X}^m , il vient que chaque colonne k contient N éléments $X_{i,k}^m$ non-nuls. Or en se rappelant que les $|X_{i,k}^m|^2$ non-nuls valent tous $1/N$, il vient naturellement que :

$$\sum_{i=1}^{2N-1} |X_{i,k}^m|^2 w_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^k w_i/N + \sum_{i=N+k}^{2N-1} w_i/N & \text{si } k \leq N-1 \\ \sum_{i=k-N+1}^k w_i/N & \text{si } k \geq N \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

On obtient alors, en utilisant (C.2) dans (C.1), que :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2 \geq \frac{M^2}{N^2} \left[\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^k w_i + \sum_{i=N+k}^{2N-1} w_i \right)^2 + \sum_{k=N}^{2N-1} \left(\sum_{i=k-N+1}^k w_i \right)^2 \right] \quad (\text{C.3})$$

Or il peut être montré que le côté droit de l'inégalité est égal à (Cf. ANNEXE D) :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^k w_i + \sum_{i=N+k}^{2N-1} w_i \right)^2 + \sum_{k=N}^{2N-1} \left(\sum_{i=k-N+1}^k w_i \right)^2 = N - \sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t \quad (\text{C.4})$$

avec : $l_{s,t,N} = \min(|t - s|, 2N - 1 - |t - s|)$.

Par conséquent, le minorant de $\|\tilde{\mathbf{R}}\|_{\text{F}}^2$ est donné par :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}\|_{\text{F}}^2 \geq \frac{M^2}{N^2} \left[N - \sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t \right] \quad (\text{C.5})$$

ANNEXE D. PREUVE DE L'EGALITE (C.4)

Cette annexe donne les détails de calculs pour prouver l'égalité (C.4).

Commençons par expliciter le côté droit de l'inégalité (C.3) :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^k w_i + \sum_{i=N+k}^{2N-1} w_i \right)^2 + \sum_{k=N}^{2N-1} \left(\sum_{i=k-N+1}^k w_i \right)^2 \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=1}^k \sum_{t=N+k}^{2N-1} w_s w_t + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=N+k}^{2N-1} w_i \right)^2 + \sum_{k=1}^{2N-1} \left(\sum_{i=k-N+1}^k w_i \right)^2
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

où cette dernière expression est obtenu en remarquant que lorsque $k \leq N - 1$, $\sum_{i=1}^k w_i = \sum_{i=k-N+1}^k w_i$.

Par la suite, nous allons basculer sur l'écriture matricielle. Par conséquent nous allons prendre les définitions suivantes : soit $\mathbf{w} := \{w_i\}_{i=1}^{2N-1}$ le vecteur de poids, et $\mathbf{M}_{s_1, t_1}^{s_2, t_2}$ la matrice carrée de taille $2N - 1$ telle que la sous-matrice d'indices lignes $s_1 \leq i \leq s_2$ et d'indices colonnes $t_1 \leq j \leq t_2$ vaille 1, et le reste 0 :

$$\mathbf{M}_{s_1, t_1}^{s_2, t_2} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow s_1 \\ \\ \\ \leftarrow s_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (D.2)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ t_1 & t_2 \end{matrix}$

En utilisant ces définitions, on a :

$$\sum_{s=s_1}^{s_2} \sum_{t=t_1}^{t_2} w_s w_t = \mathbf{w}^T \mathbf{M}_{s_1, t_1}^{s_2, t_2} \mathbf{w}. \quad (D.3)$$

Il vient alors que chaque terme de (D.1) peut s'exprimer à l'aide des matrices $\mathbf{M}_{s_1, t_1}^{s_2, t_2}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2N-1} \left(\sum_{i=k-N+1}^k w_i \right)^2 &= \mathbf{w}^T \left[\sum_{k=1}^{2N-1} \mathbf{M}_{k-N+1, k-N+1}^{k, k} \right] \mathbf{w} \\
\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=N+k}^{2N-1} w_i \right)^2 &= \mathbf{w}^T \left[\sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{M}_{N+k, N+k}^{2N-1, 2N-1} \right] \mathbf{w} \\
2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=1}^k \sum_{t=N+k}^{2N-1} w_s w_t &= \mathbf{w}^T \left[\sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{M}_{1, N+k}^{k, 2N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{M}_{N+k, 1}^{2N-1, k} \right] \mathbf{w}
\end{aligned}$$

Si on définit les matrices \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 et \mathbf{M}_4 suivantes, respectivement :

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} N & N-1 & \dots & \dots & 1 \\ N-1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & N-1 \\ 1 & \dots & \dots & N-1 & N \end{bmatrix}_{N \times N};$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & N-2 & N-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & N-2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{[N-1] \times N} ;$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} N-1 & N-2 & \cdots & 2 & 1 \\ N-2 & N-2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{[N-1] \times [N-1]} ;$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & N-2 & N-2 \\ 1 & 2 & \cdots & N-2 & N-1 \end{bmatrix}_{[N-1] \times [N-1]} ;$$

on peut montrer que :

$$\sum_{k=1}^{2N-1} \mathbf{M}_{k-N+1, k-N+1}^{k,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2^T \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix} ; \quad (\text{D.4})$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{M}_{N+k, N+k}^{2N-1, 2N-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N,N} & \mathbf{0}_{N, N-1} \\ \mathbf{0}_{N-1, N} & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix} ; \quad (\text{D.5})$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{M}_{1,N+k}^{k,2N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{M}_{N+k,1}^{2N-1,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1,N-1} & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_2^T & \mathbf{0}_{N,N} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^k w_i + \sum_{i=N+k}^{2N-1} w_i \right)^2 + \sum_{k=N}^{2N-1} \left(\sum_{i=k-N+1}^k w_i \right)^2 = \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^T \\ \mathbf{M}_2^T + \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 \end{bmatrix} \mathbf{w}.$$

Or :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^T \\ \mathbf{M}_2^T + \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & N-1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 2 & \dots & N-1 \\ N-1 & N & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & N-1 \\ N-1 & \dots & 2 & 1 & 1 & \dots & \dots & N-1 & N \end{bmatrix}.$$

Et donc :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^k w_i + \sum_{i=N+k}^{2N-1} w_i \right)^2 + \sum_{k=N}^{2N-1} \left(\sum_{i=k-N+1}^k w_i \right)^2 = N - \sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t \quad (\text{D.7})$$

avec : $l_{s,t,N} = \min(|t-s|, 2N-1-|t-s|)$.

ANNEXE E. PREUVE DU LEMME 6.3

Dévelopons la norme de Frobenius de $\tilde{\mathbf{R}}$:

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{\mathbf{R}}\|_F^2 &= \sum_{l,m=1}^M \sum_{s,t=1}^{2N-1} |\tilde{\mathbf{x}}_s^l(\tilde{\mathbf{x}}_t^m)^H|^2 \\
 &= \sum_{l,m=1}^M \sum_{s,t=1}^{2N-1} |\mathbf{x}_s^m(\mathbf{x}_t^l)^H|^2 w_s w_t \\
 &= \sum_{l,m=1}^M \sum_{s,t=1}^{2N-1} |r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l}(l_{s,t,N})|^2 w_s w_t
 \end{aligned}$$

avec : $l_{s,t,N} = \min(|t-s|, 2N-1-|t-s|)$.

On rappelle que r_{\max} dénote le niveau maximum des lobes secondaires des fonctions d'auto-corrélations et d'inter-corrélations :

$$|r_{\max}|^2 = \max \left(\max_{\substack{m \neq l \\ k}} |r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l}(k)|^2, \max_{\substack{m=l \\ k \neq 0}} |r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l}(k)|^2 \right)$$

Ainsi il vient assez naturellement que :

$$|r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_l}(k)|^2 \leq |r_{\max}|^2 \quad \forall (m, l, k) \setminus \{m=l \text{ et } k=0\} \quad (\text{E.1})$$

De plus, les $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$ sont des séquences d'équi-énergie : $E_{\mathbf{x}} = 1 = r_{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m}(0)$ pour tout m ainsi :

$$|r_{x_m, x_m}(0)|^2 = |E_x|^2 = 1 \quad \text{avec } m \in \llbracket 1 : M \rrbracket \quad (\text{E.2})$$

Enfin, en exploitant une propriété spécifique aux fonctions de corrélation aperiodiques, à savoir que le dernier retard vérifie :

$$|r_{x_m, x_l}(k)|^2 = \frac{1}{N^2} \quad \forall (m, l) \text{ et } |k| = N - 1; \quad (\text{E.3})$$

et le d -ième dernier retard ($d \in \llbracket 1 : N \rrbracket$) vérifie :

$$|r_{x_m, x_l}(k)|^2 \leq \frac{d^2}{N^2} \quad \forall (m, l) \text{ et } |k| = N - d; \quad (\text{E.4})$$

il peut être montré à l'aide de (E.1) – (E.4) qu'un majorant de $\|\tilde{\mathbf{R}}\|_{\text{F}}^2$ prenant en compte les D derniers retards est donné par :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{R}}\|_{\text{F}}^2 &= \sum_{l,m=1}^M \sum_{s,t=1}^{2N-1} |r_{x_m, x_l}(l_{s,t,N})|^2 w_s w_t \\ &\leq \sum_{l,m=1}^M \sum_{s,t=1}^{2N-1} |r_{\max}|^2 w_s w_t + \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^{2N-1} (1 - |r_{\max}|^2) w_s^2 \\ &\quad - \sum_{l,m=1}^M \sum_{\substack{s,t=1 \\ l_{s,t,N}=N-1}}^{2N-1} \left(|r_{\max}|^2 - \frac{1}{N^2} \right) w_s w_t \\ &\quad - \dots \\ &\quad - \sum_{l,m=1}^M \sum_{\substack{s,t=1 \\ l_{s,t,N}=N-d}}^{2N-1} \left(|r_{\max}|^2 - \frac{d^2}{N^2} \right) w_s w_t \\ &\quad - \dots \\ &\quad - \sum_{l,m=1}^M \sum_{\substack{s,t=1 \\ l_{s,t,N}=N-D}}^{2N-1} \left(|r_{\max}|^2 - \frac{D^2}{N^2} \right) w_s w_t. \end{aligned}$$

Or en se rappelant que $\sum_{s=1}^{2N-1} w_s = 1$, il vient que :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}\|_{\text{F}}^2 \leq M^2 |r_{\max}|^2 + M(1 - |r_{\max}|^2) \sum_{s=1}^{2N-1} w_s^2 - M^2 \sum_{d=1}^D \left(|r_{\max}|^2 - \frac{d^2}{N^2} \right) \sum_{\substack{s,t=1 \\ l_{s,t,N}=N-d}}^{2N-1} w_s w_t ;$$

ce qui conclut la preuve.

ANNEXE F. EXPRESSION DE LA BORNE AVEC DES POIDS UNIFORMES

Dans cette annexe sont explicités les calculs pour déterminer l'expression de la borne du

Théorème 6.2 lorsque $w_i = \begin{cases} \frac{1}{2N-1} & \text{si } i \leq 2N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On rappelle que la borne sur le PSLR

obtenue est la suivante :

$$|r_{max}|^2 \geq \max_D \frac{1}{N^2} \left[N - \frac{\tilde{Q}_{2N-1} \left(\mathbf{w}, \frac{N(N-1)}{M}, \sum_{d=1}^D (d^2 - N) \mathbf{A}_d \right)}{1 - \mathbf{w}^T \left(\frac{1}{M} \mathbf{I} + \sum_{d=1}^D \mathbf{A}_d \right) \mathbf{w}} \right]$$

avec : $\tilde{Q}_{2N-1}(\mathbf{w}, a, \mathbf{B}) = \mathbf{w}^T (a\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{L})\mathbf{w}$.

Pour déterminer l'expression de la borne dans ce cas spécifique, nous allons expliciter chaque terme de cette borne, à savoir :

- $\mathbf{w}^T \mathbf{L} \mathbf{w}$
- $\mathbf{w}^T \mathbf{A}_d \mathbf{w}$
- $\mathbf{w}^T (\sum_{d=1}^D \mathbf{A}_d) \mathbf{w}$
- $\mathbf{w}^T (\sum_{d=1}^D d^2 \mathbf{A}_d) \mathbf{w}$

Dans un premier temps nous allons expliciter $\mathbf{w}^T \mathbf{L} \mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{L} \mathbf{w} = \sum_{s,t=1}^{2N-1} l_{s,t,N} w_s w_t ;$$

avec $l_{s,t,N} = \min(|t-s|, 2N-1-|t-s|)$.

Commençons par expliciter $\mathbf{L} := \{L_{s,t}\}_{s=1,t=1}^{2N-1,2N-1}$ (matrice carrée d'ordre $2N-1$) :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & N-1 & N-1 & N-2 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & N-2 \\ N-1 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & N-1 \\ N-1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & N-1 \\ N-2 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & N-2 & N-1 & N-1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans le cas de vecteurs de poids uniformes il vient que :

$$\mathbf{w}^T \mathbf{L} \mathbf{w} = \frac{1}{(2N-1)^2} \sum_{s,t=1}^{2N-1} L_{s,t}.$$

Ainsi, en s'appuyant sur la structure de \mathbf{L} , il vient que :

$$\mathbf{w}^T \mathbf{L} \mathbf{w} = \frac{2}{(2N-1)^2} \sum_{s=1}^{2N-1} (2N-1-s)s = \frac{N(N-1)}{2N-1}.$$

On considère maintenant $\mathbf{w}^T \mathbf{A}_d \mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{A}_d \mathbf{w} = \sum_{\substack{s,t=1 \\ l_{s,t,N}=N-d}}^{2N-1} w_s w_t.$$

Or sous l'hypothèse des poids uniformes, il vient que :

$$\mathbf{w}^T \mathbf{A}_d \mathbf{w} = \frac{1}{(2N-1)^2} \sum_{\substack{s,t=1 \\ |s-t|=N-d \\ \text{ou } |s-t|=N+d-1}}^{2N-1} 1 = \frac{1}{(2N-1)^2} \left[2 \sum_{s=1}^{N+d-1} 1 + 2 \sum_{s=1}^{N-d} 1 \right]$$

$$= \frac{2}{2N - 1}.$$

Il vient ensuite que :

$$\mathbf{w}^T \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{A}_d \right) \mathbf{w} = \sum_{d=1}^D \mathbf{w}^T \mathbf{A}_d \mathbf{w}.$$

Ainsi, sous l'hypothèse des poids uniformes, il est évident que :

$$\mathbf{w}^T \left(\sum_{d=1}^D \mathbf{A}_d \right) \mathbf{w} = \frac{2D}{2N - 1}.$$

Enfin :

$$\mathbf{w}^T \left(\sum_{d=1}^D d^2 \mathbf{A}_d \right) \mathbf{w} = \sum_{d=1}^D d^2 \mathbf{w}^T \mathbf{A}_d \mathbf{w}.$$

Ainsi, sous l'hypothèse des poids uniformes, il est tout aussi évident que :

$$\mathbf{w}^T \left(\sum_{d=1}^D d^2 \mathbf{A}_d \right) \mathbf{w} = \frac{2}{2N - 1} \frac{D(D + 1)(2D + 1)}{6}.$$

Finalement, en réunissant tous ces résultats, il vient que la borne prend la forme suivante :

$$|r_{max}|^2 \geq \frac{1}{3} \frac{1}{N^2} \left[\frac{3MN^2 - 3N^2 - MD(D + 1)(2D + 1)}{M(2N - 1 - 2D) - 1} \right]$$

ANNEXE G. PREUVE DU LEMME 6.5

Cette annexe commence avec un résultat préliminaire sur la norme de Frobenius :

Lemme 7.1 : *La norme de Frobenius est invariante par rotation, c'est-à-dire que pour toute matrice complexe \mathbf{X} et pour toute matrice de rotation \mathbf{R} ($\mathbf{R}\mathbf{R}^H = \mathbf{I}$) :*

$$\|\mathbf{XR}\|_F^2 = \|\mathbf{RX}\|_F^2 = \|\mathbf{X}\|_F^2 \quad (\text{G.1})$$

Preuve : $\|\mathbf{XR}\|_F^2 = \text{Tr}(\mathbf{R}^H \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{R}) = \text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_F^2$
 $\|\mathbf{RX}\|_F^2 = \text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{R}^H \mathbf{R} \mathbf{X}) = \text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_F^2 \quad \square$

L'intérêt de ce Lemme est qu'il permet, ici, de compenser les variations de phases entre les éléments diagonaux de $\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}$, maximisant ainsi la trace de la matrice résultante. En d'autres termes, il permet de compenser la phase Φ^m lié à la perte en désadaptation sur le lobe principal en sortie de chaque filtre désadapté $ML_{loss}^m = |ML_{loss}^m| e^{j\Phi^m}$.

Ainsi si l'on définit la matrice diagonale \mathbf{D} d'ordre $M(N_x + N_y - 1)$ telle que ses éléments diagonaux compensent les Φ^m et sont donnés par :

$$\underbrace{e^{-j\Phi^1} \dots e^{-j\Phi^1}}_{N_x+N_y-1} \quad \underbrace{e^{-j\Phi^2} \dots e^{-j\Phi^2}}_{N_x+N_y-1} \quad \dots \quad \underbrace{e^{-j\Phi^M} \dots e^{-j\Phi^M}}_{N_x+N_y-1};$$

il vient que :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 = \|(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}\|_F^2. \quad (\text{G.2})$$

Cette réécriture est particulièrement importante dans la détermination de la borne inférieure sur $\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2$ car l'approche de Welch dans [22] se base sur la trace $\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}$ or sous cette forme la trace n'est pas informative (du fait des variations de phases liées aux Φ^m). Par contre la trace de $(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}$ se libère des Φ^m et devient donc d'intérêt.

Notons $\{\lambda_i\}_{i=1}^{rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})}$ les valeurs propres non-nulles de $(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}$ où $rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})$ désigne le rang de la matrice $(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}$. Par définition, la norme de Frobenius d'une matrice peut s'exprimer en fonction des valeurs propres de celle-ci ; ainsi :

$$\|(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})} |\lambda_i|^2. \quad (\text{G.3})$$

Or, en se rappelant que la trace d'une matrice est égale à la somme de ces valeurs propres :

$$Tr((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}) = \sum_{i=1}^{rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})} \lambda_i ; \quad (\text{G.4})$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le module au carré de cette précédente équation, il vient que :

$$\begin{aligned} |Tr((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})|^2 &\leq rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}) \sum_{i=1}^{rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})} |\lambda_i|^2 \\ &\leq rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}) \|(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}\|_F^2 ; \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Ainsi :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 = \|(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}\|_F^2 \geq \frac{|Tr((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})|^2}{rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})}. \quad (\text{G.6})$$

Or, par construction :

$$\begin{aligned} |Tr((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})|^2 &= \left(\sum_{m=1}^M \left(|ML_{loss}^m|^q \sum_{i=1}^{N_x+N_y-1} w_i \right) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q \right)^2 \end{aligned}$$

où la dernière expression s'obtient en se rappelant que $\sum_{j=1}^{N_x+N_y-1} w_j = 1$.

Finalement, il vient que :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 = \|(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}\|_F^2 \geq \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q})}. \quad (\text{G.7})$$

Maintenant, en se rappelant que le multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible ne modifie pas le rang, il vient que $rg((\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}) = rg(\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q})$ et donc :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 = \|(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D})^{\circ q}\|_F^2 \geq \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{rg(\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q})}. \quad (\text{G.8})$$

Il reste alors à déterminer un majorant de $rg(\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q})$ afin de compléter la preuve.

Tout d'abord, on rappelle que $rg(\mathbf{AB}) \leq \min(rg(\mathbf{A}), rg(\mathbf{B}))$. Or :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}}^H \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^1 \\ \tilde{\mathbf{X}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}^M \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^1 \\ \tilde{\mathbf{Y}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}^M \end{bmatrix}$$

Ainsi $rg(\tilde{\mathbf{R}}) \leq \min(rg(\tilde{\mathbf{X}}), rg(\tilde{\mathbf{Y}}))$. Toutefois il peut être montré que :

$$rg(\tilde{\mathbf{X}}) \leq \begin{cases} \min(MK, N_x + K - 1) & \text{si } K \leq N_y \\ \min(MK, N_x + N_y - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$rg(\tilde{\mathbf{Y}}) \leq \begin{cases} \min(MK, N_y + K - 1) & \text{si } K \leq N_x \\ \min(MK, N_x + N_y - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve : Immédiate à partir de la construction des matrices $\tilde{\mathbf{X}}$ et $\tilde{\mathbf{Y}}$, et du vecteur de poids \mathbf{w} dont seules les K premières valeurs sont non-nulles. \square

Il vient donc :

$$rg(\tilde{\mathbf{R}}) \leq \min(MK, N_x + N_y - 1, N_x + K - 1)$$

Le problème, maintenant, est d'établir un majorant de $rg(\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q})$ connaissant un majorant de $rg(\tilde{\mathbf{R}})$. Toutefois, des nombreuses études ont été menées à ce propos (Voir [99], Section 1.2. de [100] et Section 4 de [101]), nous permettons ainsi d'obtenir la majorant suivant :

$$rg(\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}) \leq \min\left(\binom{N_x + N_y + q - 2}{q}, \binom{N_x + K + q - 2}{q}, MK\right) \quad (\text{G.9})$$

Preuve : Voir ANNEXE H. \square

Ce dernier résultat permet de conclure la preuve :

$$\|\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}\|_F^2 \geq \frac{(\sum_{m=1}^M |ML_{loss}^m|^q)^2}{\min\left(\binom{N_x + N_y + q - 2}{q}, \binom{N_x + K + q - 2}{q}, MK\right)} \quad (\text{G.10})$$

ANNEXE H. PREUVE DE (G.9)

Soit $\mathbf{R} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^H$ une matrice telle que $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$ et $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n]$ soient deux matrices de tailles $m \times n$ où \mathbf{x}_i et \mathbf{y}_i correspondent à la i -ième colonne de \mathbf{X} et \mathbf{Y} respectivement.

D'après cette notation il vient que :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \quad (\text{H.1})$$

avec $\mathbf{R}_i = \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*$.

Par conséquent, $\mathbf{R}^{\circ q} = \underbrace{\mathbf{R} \circ \mathbf{R} \circ \dots \circ \mathbf{R}}_q$ peut être réécrit comme suit :

$$\mathbf{R}^{\circ q} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \right)^{\circ q} \quad (\text{H.2})$$

En utilisant la formule du multinôme de Newton, il vient que :

$$\mathbf{R}^{\circ q} = \sum_{\sum_{i=1}^n q_i = q} \binom{q}{q_1, q_2, \dots, q_n} (\mathbf{R}_1^{\circ q_1} \circ \mathbf{R}_2^{\circ q_2} \circ \dots \circ \mathbf{R}_n^{\circ q_n}) \quad (\text{H.3})$$

où : $\binom{q}{q_1, q_2, \dots, q_n} = \frac{q!}{q_1! q_2! \dots q_n!}$ représente le coefficient multinomial.

Or en utilisant les propriétés suivantes :

$$rg(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq rg(\mathbf{A}) + rg(\mathbf{B}) ;$$

$$rg(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \leq rg(\mathbf{A})rg(\mathbf{B});$$

Il vient que :

$$rg(\mathbf{R}^{\circ q}) \leq \sum_{\sum_{i=1}^n q_i = q} rg(\mathbf{R}_1)^{q_1} \times \dots \times rg(\mathbf{R}_n)^{q_n}. \quad (\text{H.4})$$

Et comme $rg(\mathbf{AB}) \leq \min(rg(\mathbf{A}), rg(\mathbf{B}))$ et $\mathbf{R}_i = \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*$; on en déduit que :

$$rg(\mathbf{R}_i) \leq 1.$$

Et donc :

$$rg(\mathbf{R}^{\circ q}) \leq \sum_{\sum_{i=1}^n q_i = q} 1. \quad (\text{H.5})$$

Or, le cardinal de l'ensemble $\{[q_1, q_2, \dots, q_n] \mid \sum_{i=1}^n q_i = q\}$ équivaut au nombre de combinaisons avec répétition de q éléments parmi n éléments, aussi appelé '*multiset coefficient*' ou encore '*multiset number*'. Et donc :

$$rg(\mathbf{R}^{\circ q}) \leq \binom{n+q-1}{q}. \quad (\text{H.6})$$

Cependant comme $\mathbf{R}^{\circ q}$ est une matrice carrée d'ordre m , il s'ensuit que :

$$rg(\mathbf{R}^{\circ q}) \leq \min\left(m, \binom{n+q-1}{q}\right).$$

En particulier, si $rg(\mathbf{R}) \leq k$ alors il existe une matrice \mathbf{A} d'ordre $m \times k$ et une matrice \mathbf{B} d'ordre $m \times k$ telles que $\mathbf{R} = \mathbf{AB}^H$. Et donc :

$$rg(\mathbf{R}^{\circ q}) \leq \min\left(m, \binom{k+q-1}{q}\right). \quad (\text{H.7})$$

Par conséquent, si on reprend les notations de l'ANNEXE G , on retrouve bien :

$$rg(\tilde{\mathbf{R}}^{\circ q}) \leq \min\left(\binom{N_x + N_y + q - 2}{q}, \binom{N_x + K + q - 2}{q}, MK\right).$$

RESUME

Aujourd'hui, les systèmes MSPSR (*Multi-Static Primary Surveillance Radar*) passifs se sont installés de manière durable dans le paysage de la surveillance aérienne [1]. L'intérêt que suscitent ces nouveaux systèmes provient du fait qu'en comparaison aux radars mono-statiques utilisés actuellement, les systèmes MSPSR reposent sur une distribution spatiale d'émetteurs et de récepteurs offrant des avantages en termes de fiabilité (redondance), de coûts (absence de joints tournants et émetteurs moins puissants) et de performances (diversité spatiale). Toutefois, le défaut majeur du MSPSR passif réside en l'absence de formes d'ondes dédiées due à l'exploitation d'émetteurs d'opportunités tels que les émetteurs de radio FM (*Frequency Modulation*) et/ou de DVB-T (*Digital Video Broadcasting-Terrestrial*) [2]. Afin de pallier à ce défaut, il est envisagé d'utiliser des émetteurs dédiés permettant l'emploi de formes d'ondes optimisées pour une application radar, on parle alors de MSPSR actif.

Cette thèse se place dans ce cadre et a pour objectif d'étudier et de définir la ou les formes d'ondes ainsi que les traitements associés permettant d'atteindre de meilleures performances : une meilleure flexibilité sur la disposition du système (positionnement des émetteurs libres), une continuité de service (non dépendance d'un système tiers) et de meilleures performances radars (*e.g.* en terme de précision des mesures, détections, ...).

Dans ce but, cette thèse étudie :

- Les critères de sélection des codes : comportement des fonctions d'ambiguïtés, PAPR (*Peak to Average Power Ratio*), efficacité spectrale, etc... ;
- Les formes d'ondes utilisées en télécommunication (*scrambling code*, OFDM) afin d'identifier leur possible réemploi pour une application radar ;
- L'utilisation d'algorithmes cycliques pour générer des familles de séquences adaptées à notre problème ;
- Une approche basée sur une descente de gradient afin de générer des familles de codes de manière plus efficiente ;
- Et l'évaluation des performances de ces différents algorithmes à travers l'établissement d'une borne supérieure sur le niveau maximum des lobes secondaires et à travers le dépouillement des données enregistrées suite à des campagnes d'essais.

Mots Clés : *Formes d'ondes, MSPSR, Scrambling Code, OFDM, Optimisation Cyclique, Descente de Gradient, Spectre, Fonction d'ambiguïté, PAPR, Borne sur le PSLR.*

ABSTRACT

Title : « *Formes d'ondes MSPSR, traitements et performances associés* ».

Nowadays, MSPSR (*Multi-Static Primary Surveillance Radar*) systems are sustainably settled in air surveillance program [1]. Compared to mono-static radar currently in use, an MSPSR system is based on a sparse network of transmitters (Tx) and receivers (Rx) interconnected to a Central Unit and offers advantages in terms of reliability, cost and performance. Two kinds of MSPSR systems exist: the Passive form and the Active one. While the Passive MSPSR uses transmitters of opportunity such as radio *Frequency Modulation* (FM) transmitters and/or *Digital Video Broadcasting-Terrestrial* (DVB-T) transmitters [2], the Active MSPSR uses dedicated transmitters, which emit a waveform that is controlled and designed for a radar application. Each receiver processes the signal coming from all transmitters and reflected on the targets; and the Central Unit restores the target location by intersecting "ellipsoids" from all (transmitter, receiver) pairs.

Compared to passive MSPSR, the main advantages of the active MSPSR are the use of dedicated waveforms that allow reaching better performances (like a better association of the transmitters' contributions at the receiver level); more flexibility in the deployment of transmitters and receivers station (in order to meet the requirements in localisation accuracy and in horizontal and altitude coverages); and the guarantee of having a service continuity.

On this purpose, this thesis analyses the different codes criteria such as the ambiguity function behaviour, the PAPR (*Peak to Average Power Ratio*), the spectrum efficiency, etc... . Then, in order to find dedicated waveforms for MSPSR systems, one solution is to find easily-constructed families of sequences. Thus building on the works carried out by the Telecommunication field for solving multi-user issues, this document investigates the application of *spreading codes* and OFDM signals in MSPSR concept. Besides, another solution is to directly generate a set of sequences. Based on cyclic algorithms in [3] we derive a new algorithm that allows to optimize sets of sequences. Similarly, using a gradient descent approach, we develop a more efficient algorithm than the cyclic one. Finally, in order to evaluate the performances of the different algorithms, this thesis generalizes the Levenshtein Bound, establishes new lower bounds on the PSLR (*Peak Sidelobe Level Ratio*) in mismatched filter case, and studies real data recorded during some trials.

Keywords : *Waveforms Design, MSPSR, Scrambling Code, OFDM, Cyclic Algorithm, Gradient Descent, Spectrum Efficiency, Ambiguity Function, PAPR, PSLR Bound.*