



HAL
open science

Théorie des modèles d'expansions de corps valués : phénomènes de séparation

Romain Rioux

► **To cite this version:**

Romain Rioux. Théorie des modèles d'expansions de corps valués : phénomènes de séparation. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSE1157 . tel-01688186

HAL Id: tel-01688186

<https://theses.hal.science/tel-01688186>

Submitted on 19 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Claude Bernard Lyon 1
École doctorale **InfoMath**, ED 512
Spécialité : **Mathématiques**
N. d'ordre xx-xxxx

Théorie des modèles d'expansions de corps valués : phénomènes de séparation

Thèse de doctorat

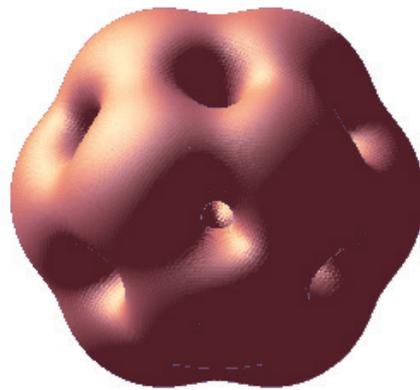
Soutenue publiquement le 18 septembre 2017 par

Romain Rioux

devant le Jury composé de :

M. Martin Hills	Université de Münster	Rapporteur
M. Thomas Scanlon	Université de Berkeley	Rapporteur
Mme Zoé Chatzidakis	École Normale Supérieure ULM	
Mme Françoise Delon	Université Paris 7	Co-Directrice de thèse
M. Philipp Habegger	Université de Bâle	
Mme Frank Wagner	Université Lyon 1	Directeur de thèse

Théorie des modèles d'expansions de corps valués :
phénomènes de séparation



Romain Rioux
Thèse de doctorat

Table des matières

0	Préliminaires	7
1	Corps valués algébriquement clos munis d'une section partielle	11
1.0.1	Présentation du résultat	11
1.0.2	Préliminaires et notations	12
1.0.3	Démonstration du théorème 1.0.1	13
2	Autour des vecteurs de Witt	17
2.1	Introduction	17
2.2	Structures du type $(W(k)^{alg}, \tau(k))$	19
2.2.1	Présentation du résultat	19
2.2.2	Démonstration du théorème 2.2.1	20
2.3	Paires de corps valués fortement séparées	22
2.3.1	Définitions et généralités	22
2.3.2	Résultats sur les paires fortement séparées quelconques	24
2.3.3	Résultats sur des paires fortement séparées spécifiques	32
2.4	Structures du type $(W(k)^{alg}, W(k))$	36
2.4.1	Présentation du résultat	36
2.4.2	Préliminaires et notations	37
2.4.3	Extensions de bonnes sous-paires	38
2.4.4	Démonstration du théorème	46
2.5	EQ relative pour les structures du type $(W(\mathbb{F}_p)^{alg}, W(\mathbb{F}_{p^q}))$.	47
2.5.1	Préliminaires	47
2.5.2	Présentation du résultat	50
2.5.3	Démonstration du résultat	51
3	La structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$	61
3.1	Introduction	61
3.2	Retour sur $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}})$	62
3.3	Valuation et racines de l'unité	63
3.3.1	Racines d'ordre une puissance de p et V -longueur . . .	63
3.3.2	V -longueur pour l'ensemble des racines de l'unité . . .	67

3.3.3	Maximum sur certains ensembles algébriques	71
3.4	Présentation du résultat	75
3.5	Préliminaires sur les modèles de T	80
3.5.1	Théorie complète de G_p en tant que groupe valué	80
3.5.2	Extension de la notion de V -longueur aux modèles de T et conséquences	83
3.5.3	Valuation de $\mathbb{Q}(G)$ et $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -formules	85
3.5.4	Répartition de $\Gamma_{V, G}$ dans Γ_M	91
3.6	Démonstration du théorème 3.4.3	96
3.6.1	Les structures de la forme $K(G)$	96
3.6.2	Démonstration du théorème 3.4.3	98

Introduction

Cette thèse a pour sujet l'étude d'un point de vue modèle théorique de corps valués algébriquement clos enrichis de sous-groupes ou de sous-corps. Ce sont les travaux d'Abraham Robinson [Rob77] sur les corps valués algébriquement clos (*ACVF*) qui entament la théorie des modèles des corps valués. Elle prendra son essor au milieu des années 1960 lorsque James Ax et Simon Kochen [AK65a] [AK65b] [AK66] d'une part et Yuri Ershov [Ers65] d'autre part montrent que deux corps valués henséliens d'équicaractéristique nulle, ou que deux corps valués henséliens de caractéristique mixte, non ramifiés, et dont les corps résiduels sont parfaits, sont élémentairement équivalents si et seulement si leurs corps résiduels et leurs groupes de valeurs le sont. Une des motivations premières d'Ax et Kochen était la conjecture d'Emil Artin affirmant que le corps \mathbb{Q}_p est C_2 , c'est-à-dire que tout polynôme homogène de degré d en au moins $d^2 + 1$ variables a un zéro non-trivial. Leur résultat permettra d'établir une forme faible de cette conjecture.

On voit apparaître dans ce théorème une idée très importante. Un corps valué est une structure en partie contrôlée par un corps et par un groupe ordonné. Dans les cas considérés par Ax-Kochen et Ershov le contrôle de la théorie élémentaire est total.

Dans le cas des corps valués \aleph_1 -saturés on peut considérer que le groupe de valeur « vit » dans le corps valué, dans le sens où il existe un sous-groupe multiplicatif du corps valué isomorphe au groupe de valeur par la valuation. La situation est un peu plus complexe pour le corps résiduel. Dans le cas des corps valués henséliens d'équicaractéristique nulle, il existe un sous-corps du corps valué isomorphe au corps résiduel par l'application de passage au reste. En revanche, dans le cas des corps valués de caractéristique mixte un tel sous-corps ne peut exister. Toutefois, il a été montré par Oswald Teichmüller [Tei36] au milieu des années 1930 que, pour tout corps valué complet, de caractéristique $(0, p)$, et de groupe de valeur $v(p)\mathbb{Z}$, il existe un unique sous-groupe multiplicatif du corps valué isomorphe (par l'application de passage au reste) au sous-groupe multiplicatif du corps résiduel. A la même période, Ernst Witt [Wit37] montre que, pour tout corps parfait k de caractéristique p il existe, à isomorphisme près, un unique corps valué complet noté $W(k)$ et appelé corps des vecteurs de Witt, de caractéristique 0, de corps résiduel k , et de groupe de valeur $v(p)\mathbb{Z}$. Ces deux objets jouent un rôle important dans

la théorie des corps valués henséliens de caractéristique mixte non ramifiés. Dans une partie de notre travail nous allons nous intéresser à la théorie des modèles des corps valués algébriquement clos enrichis d'un prédicat qui pourra représenter soit un sous-groupe multiplicatif soit un sous-corps du type $W(k)$. Nos résultats s'inscrivent dans la continuité de plusieurs travaux. D'une part, celui de Lou Van den Dries [dD99] qui à la fin des années 1990 donne une axiomatisation complète des structures valués du type (W, T) , où W est un corps de vecteurs de Witt et où T est le relèvement de Teichmüller du corps résiduel dans W . D'autre part, ceux de Walter Baur [Bau82], Gérard Leloup [Lel90], et Françoise Delon [Del88] et [Del14] sur les paires de corps valués séparées.

Dans le cas de \mathbb{C}_p le relèvement de Teichmüller correspond aux racines de l'unité d'ordre premier à p , cela nous conduira à nous intéresser à la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$, où \mathbb{U} désigne le sous-groupe multiplicatif des racines de l'unité. D'autres structures (non valués) approchantes avaient déjà fait l'objet d'études. Au début des années 1990 Boris Zilber [Zil90] a montré que la structure (\mathbb{C}, \mathbb{U}) est ω -stable. Il utilisait dans sa démonstration un résultat prouvé par Henry Mann [Man65] au milieu des années 1960 affirmant pour tous entiers a_1, \dots, a_n fixés, que l'ensemble $\{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{U}^n ; \sum_{i=1}^n a_i \zeta_i = 1\}$ est « essentiellement » fini. Dans la continuité de Zilber, cette propriété algébrique sera à la base de l'étude d'un point de vue modèle théorique des paires de Mann par Lou Van den Dries et Ayhan Günaydin [dDG06] [dDG10] [dDG11]. Ces derniers montreront [dDG06] que les structures du type (W, T) (définis plus haut) satisfont la propriété de Mann. Au milieu des années 1990 John Tate et José Felipe Voloch [TV96] montrent un résultat « proche » de celui de Mann dans le cas valué, à savoir : pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$ fixés, l'ensemble $\{v(\sum_{i=1}^n a_i \zeta_i) ; \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{U}, \sum_{i=1}^n a_i \zeta_i \neq 0\}$ est borné. Ce type de résultat jouera un rôle important dans notre étude de $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$.

Le chapitre 0 est consacré aux préliminaires, nous y rappelons les notions de théorie des modèles des corps valués qui nous seront utiles par la suite. Nous y introduisons aussi les notations que nous utiliserons dans le reste du manuscrit.

Dans le chapitre 1 nous nous intéressons au cas des corps valués algébriquement clos enrichis d'un prédicat pour une section partielle, nous y obtenons un résultat d'élimination partiel des quantificateurs.

Le chapitre 2 est divisé en plusieurs sections distinctes. Dans la première nous présentons les vecteurs de Witt et le relèvement de Teichmüller, et quelques résultats classiques les concernant. Dans la seconde nous obtenons une axiomatisation complète des structures valuées de caractéristique mixte

du type $(W(k)^{alg}, \tau(k))$, où k est un corps parfait de caractéristique p , où $W(k)$ est le corps des vecteurs de Witt au-dessus de k , et où $\tau(k)$ est le relèvement de Teichmüller de k dans $W(k)$. Dans la troisième nous étudions en détails les paires de corps valués fortement séparées, la proposition 2.3.13 nous permettra en particulier de définir un certain nombre de conditions assurant que des extensions de paires fortement séparées restent fortement séparées. Dans la quatrième section nous appliquons les résultats de la troisième section pour obtenir une axiomatisation complète des paires de corps valués du type $(W(k)^{alg}, W(k))$, où k est un corps parfait de caractéristique p (théorème 2.4.2). Dans la cinquième section nous appliquons les résultats de la troisième section pour présenter un résultat d'élimination partielle des quantificateurs lorsque k est un corps fini (théorème 2.5.3).

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$. Dans une première section nous appliquons le résultat de John Tate et José Felipe Voloch en nous servant de l'axiomatisation de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$ établie au chapitre 2 pour montrer que pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$ fixés, l'ensemble $\{v(\sum_{i=1}^n a_i \zeta_i) ; \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{U}_{\bar{p}}, \sum_{i=1}^n a_i \zeta_i \neq 0\}$, où $\mathbb{U}_{\bar{p}}$ désigne le sous-groupe des racines de l'unité d'ordre premier à p , est fini. Dans une seconde section nous introduisons la notion de V -longueur pour les racines de l'unité et développons les outils qui lui sont associés pour comprendre la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$. Nous terminons cette section par le théorème 3.3.22, qui affine le résultat de Tate et Voloch et qui exprime que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$ fixés, l'ensemble $\{v(\sum_{i=1}^n a_i \zeta_i) ; \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{U}, \sum_{i=1}^n a_i \zeta_i \neq 0\}$ admet un maximum. Dans la troisième section nous utilisons les outils développés dans la seconde section pour présenter un résultat qui sera au coeur de l'axiomatisation de la structure $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$. Le reste du chapitre est consacré à démontrer le théorème 3.4.3 qui donne une axiomatisation complète de la structure $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$.

Chapitre 0

Préliminaires

Nous présentons ici les faits et notions basiques dont nous aurons besoin. Certaines notions plus élaborées comme les vecteurs de Witt seront introduites dans le corps du texte.

Groupes

Définition 0.0.1. Soient G un groupe abélien et H un sous-groupe de G . On dira que H est pur dans G si G/H n'a pas de torsion.

Fait 0.0.2. Soient G un groupe abélien \aleph_1 -saturé et H un sous-groupe pur de G . Alors H est facteur direct dans G , c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe G' de G tel que $G = H \oplus G'$.

\mathbb{Z} -groupes

Définition 0.0.3. On dira que $(\Gamma, +, <, 0, 1)$ est un \mathbb{Z} -groupe si :

- $(\Gamma, +, 0)$ est un groupe abélien non trivial,
- $(\Gamma, <)$ est un ensemble discrètement ordonné (on notera alors 1 son plus petit élément strictement positif)
- l'ordre est compatible avec la loi de groupe, c'est-à-dire :

$$\forall x, \forall y, \forall z, x < y \implies x + z < y + z,$$

- pour tout entier n on a :

$$\forall x, \exists y, \bigvee_{i=0}^{n-1} x + i = ny.$$

Fait 0.0.4 ([Mar02], corollary 3.1.21). La théorie des \mathbb{Z} -groupes est une théorie complète qui élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L} := \{+, -, <, 0, 1\} \cup \{Q_n ; n \in \mathbb{N}^{\geq 2}\}$, où Q_n est un prédicat unaire qui est interprété par être divisible par n .

Le fait suivant est une conséquence facile du fait 0.0.2 :

Fait 0.0.5. *Soit G un \mathbb{Z} -groupe \aleph_1 -saturé. Alors $G = \mathbb{Z} \oplus D$, où D est un sous-groupe divisible de G .*

Corps valués

Les faits présentés dans cette section proviennent de [dD] et [Rib64].

Définition 0.0.6. *Soient K un corps et Γ un groupe ordonné. Une valuation sur K à valeur dans Γ est une application $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, où ∞ est un élément plus grand que tous les éléments de Γ , vérifiant pour tout $x, y \in K$:*

1. $v(x) = \infty$ si et seulement si $x = 0$,
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$,
3. $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

S'il existe x non nul tel que $v(x) \neq 0$ on dira que la valuation est non triviale. Un corps muni d'une valuation est appelé un corps valué.

Remarque 0.0.7. Si (K, v) est un corps valué alors pour tous $x, y \in K$ vérifiant $v(x) \neq v(y)$ on a $v(x + y) = \min(v(x), v(y))$.

Soit (K, v) est un corps valué non trivial. On appellera groupe de valeur de K le groupe ordonné $v(K^*)$ et on le notera Γ_K . On notera \mathcal{O}_K et \mathcal{M}_K les ensembles définis par $\mathcal{O}_K := \{x \in K ; v(x) \geq 0\}$ et $\mathcal{M}_K := \{x \in K ; v(x) > 0\}$. \mathcal{O}_K est un anneau local dont l'unique idéal maximal est \mathcal{M}_K . On appellera $\mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ le corps résiduel de K et on le notera K/v . On appellera *application résiduelle* et on notera *res* la projection canonique $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$.

Soit (K, v) un corps valué. On dira que K est d'équicaractéristique nulle si $\text{car}(K) = \text{car}(K/v) = 0$. On dira que K est de caractéristique mixte si $\text{car}(K) \neq \text{car}(K/v)$, dans ce cas on a $\text{car}(K) = 0$ et $\text{car}(K/v) = p$, où p est un nombre premier. Si K est de caractéristique mixte on dira que K est non ramifié si $v(p)$ est le plus petit élément strictement positif de Γ_K , dans ce cas on on posera $1 := v(p)$.

Définition 0.0.8. *Soit (K, v) un corps valué. On dira que K est hensélien si pour tout polynôme unitaire $P \in \mathcal{O}_K[X]$ et tout $a \in \mathcal{O}_K$ vérifiant $\text{res}(P(a)) = 0$ et $\text{res}(P'(a)) \neq 0$, il existe $b \in \mathcal{O}_K$ tel que $P(b) = 0$ et $\text{res}(b) = \text{res}(a)$.*

Définition-Fait 0.0.9. *Si (K, v) un corps valué, il existe une extension K^h de K telle que :*

- K^h soit hensélien,

— K^h se plonge au-dessus de K dans tout corps valué hensélien qui contient K .

Cette extension est unique, à K -isomorphisme de corps valué près, on l'appellera la clôture hensélienne de K .

Définition 0.0.10. Soit $(K, v) \subseteq (L, v)$ une extension de corps valué. On dira que L est une extension immédiate de K si $\Gamma_L = \Gamma_K$ et si $L/v = K/v$.

Fait 0.0.11. Si (K, v) est un corps valué il admet des extensions immédiates maximales.

Fait 0.0.12. Soit (K, v) un corps valué d'équicaractéristique nulle ou de caractéristique mixte non ramifié. Alors :

1. il existe, à isomorphisme près, une unique extension de corps valué immédiate maximale de K ,
2. si K est hensélien il est algébriquement maximal, c'est-à-dire qu'il n'admet pas d'extension immédiate algébrique propre.

Soient (K, v) un corps valué, β un ordinal limite, et $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ une suite d'éléments de K . On dira que la suite $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ est pseudo-convergente s'il existe un ordinal ρ_0 inférieur à β tel que pour tous ρ, τ, θ vérifiant $\rho_0 < \rho < \tau < \theta < \beta$ on ait $v(x_\theta - x_\tau) > v(x_\tau - x_\rho)$. Soit $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ une suite pseudo-convergente. Alors la suite $(v(x_\alpha))_{\alpha < \beta}$ est strictement croissante ou stationnaire à partir d'un certain ordinal. On dira que la suite $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ pseudo-converge vers x si la suite $(v(x - x_\alpha))_{\alpha < \beta}$ est strictement croissante à partir d'un certain ordinal. Pour tout polynôme $P \in K[X]$ la suite $(P(x_\alpha))_{\alpha < \beta}$ est pseudo-convergente. S'il existe $P \in K[X]$ tel que la suite $(P(x_\alpha))_{\alpha < \beta}$ pseudo-converge vers 0 on dira que la suite $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ est de type algébrique au-dessus de K , on définit alors son degré au-dessus de K comme étant le plus petit entier d tel qu'il existe un polynôme P de degré d tel que la suite $(P(x_\alpha))_{\alpha < \beta}$ pseudo-converge vers 0. Sinon on dira que la suite $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ est de type transcendant au-dessus de K , on définit alors son degré au-dessus de K comme étant ∞ .

Fait 0.0.13. Soit $(K(x), v) \subseteq (K, v)$ une extension immédiate propre de corps valués. Alors il existe une suite $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ d'éléments de K qui pseudo-converge vers x et qui n'admet pas de pseudo-limite dans K . Si x est algébrique sur K il existe une telle suite de type algébrique. Si K est algébriquement maximal la suite $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ est de type transcendant.

Corps valués et sections

Définition 0.0.14. Soient (K, v) un corps valué, Δ un sous-groupe de Γ_K et $s : \Delta \rightarrow K$. On dira que s est une section de Δ ou une section partielle si s est un morphisme de groupe de $(\Delta, +)$ dans (K^*, \times) tel que $v \circ s = \text{id}_\Delta$. Si $\Delta = \Gamma_K$ on dira que s est une section totale.

Fait 0.0.15. *Si (K, v) un corps valué \aleph_1 -saturé il admet une section totale.*

Ce fait est une conséquence directe du fait 0.0.2. En effet soit (K, v) un corps valué \aleph_1 -saturé. Notons \mathcal{O}_K^\times l'ensemble des éléments inversibles de \mathcal{O}_K , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de valuation nulle. Il est clair que \mathcal{O}_K^\times est un sous-groupe pur de K^* . D'après le fait 0.0.2, \mathcal{O}_K^\times admet un supplémentaire direct H dans K^* . Alors $v|_H$ est isomorphisme de groupe de H dans Γ_K et son inverse est une section totale.

Conventions

Dans cette thèse on utilisera les conventions suivantes.

- p désignera toujours un nombre premier.
- \mathbb{U} désignera le groupe des racines de l'unité.
- $\mathbb{U}_{\overline{p}}$ désignera le sous-groupe de \mathbb{U} engendré par les racines de l'unité d'ordre premier à p .
- \mathbb{U}_p désignera le sous-groupe de \mathbb{U} engendré par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p .
- Si A est un ensemble on notera $|A|$ son cardinal.
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau intègre on notera A^\times le groupe multiplicatif des inversibles de A .
- Si K est un corps, on notera K^{alg} la clôture algébrique de K .
- Si G est un groupe et si $(g_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de G , on notera $\langle (g_i)_{i \in I} \rangle$ le sous-groupe de G engendré par la famille $(g_i)_{i \in I}$. Si H est un sous-groupe de G on notera parfois $H \langle (g_i)_{i \in I} \rangle$, à la place de $\langle H, (g_i)_{i \in I} \rangle$, le sous-groupe de G engendré par H et la famille $(g_i)_{i \in I}$.
- Si (K, v) est un corps valué et si A est un sous-ensemble de K , on notera $\Gamma_A := \{v(a) ; a \in A\}$.
- Si (K, v) est un corps valué et si $x \in \mathcal{O}_K$, on notera $x/v := res(x)$.
- Si (K, v) est un corps valué et si $P \in \mathcal{O}_K[X]$, on notera $P/v := res(P)$.
- Si (K, v) et (K', v') sont des corps valués et si $f : K \rightarrow K'$ est un isomorphisme de corps valué, on notera f_Γ l'isomorphisme de groupe ordonnés induit par f de Γ_K dans $\Gamma_{K'}$, et on notera f/v l'isomorphisme de corps induit par f de K/v dans K'/v .

Chapitre 1

Corps valués algébriquement clos munis d'une section partielle

Le résultat de complétude pour les corps de type Ax-Kochen-Ershov équipés d'une section totale est plus ou moins classique. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à des paires du type (M, G) , où (M, v) est un corps valué algébriquement clos et où G est un sous-groupe multiplicatif de M sur lequel la valuation est injective, cela correspond à une section partielle de la valuation. Nous montrerons pour ces paires un résultat d'élimination relative des quantificateurs.

1.0.1 Présentation du résultat

Notons \mathcal{L}_v le langage à deux sortes des corps valués (une sorte pour le corps valué et une sorte pour le groupe de valeur et un élément infini) défini par $\mathcal{L}_v := \mathcal{L}_{anneau} \cup \{0_\Gamma, +_\Gamma, -_\Gamma, \infty_\Gamma\} \cup \{v\}$. Dans le reste de ce chapitre \mathcal{L} désignera le langage défini par $\mathcal{L} := \mathcal{L}_v \cup \{G, \lambda\} \cup \{G_\Gamma\}$, où G est un symbole de prédicat unaire de la sorte corps valué, où λ est un symbole de fonction unaire de la sorte corps valué, et où G_Γ est un symbole de prédicat unaire de la sorte groupe de valeur. \mathcal{L}_G désignera le langage défini par $\mathcal{L}_G := \mathcal{L} \setminus \{\lambda\}$ et \mathcal{L}_Γ désignera le langage défini par $\mathcal{L}_\Gamma := \{0_\Gamma, +_\Gamma, -_\Gamma, \infty_\Gamma, G_\Gamma\}$.

T désignera la \mathcal{L} -théorie constituée :

1. des \mathcal{L}_v -axiomes des corps valués algébriquement clos,
2. des axiomes exprimant que G est un groupe multiplicatif divisible,
3. de l'axiome exprimant que la valuation est injective sur G , c'est-à-dire

$$\forall g_1, \forall g_2, (g_1 \in G \wedge g_2 \in G \wedge v(g_1) = v(g_2)) \longrightarrow g_1 = g_2,$$

4. de l'axiome exprimant que $v(G) = G_\Gamma$,

5. et des axiomes

$$\forall x, \forall g, (g \in G \wedge v(x) = v(g)) \longrightarrow \lambda(x) = g$$

et

$$\forall x, (\forall g \in G, v(x) \neq v(g)) \longrightarrow \lambda(x) = 0.$$

Notre but sera de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.0.1. *T élimine les quantificateurs de corps valué dans \mathcal{L} , c'est-à-dire que pour toute \mathcal{L} -formule $\Phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$, où \bar{x} est un uplet de variables de la sorte corps valué et $\bar{\alpha}$ est un uplet de variables de la sorte groupe de valeur, il existe une \mathcal{L} -formule $\Psi(\bar{x}, \bar{\alpha})$, où les seules variables quantifiées sont de la sorte groupe de valeur, telle que*

$$T \vdash \forall \bar{x}, \bar{\alpha}, (\Phi(\bar{x}, \bar{\alpha}) \longleftrightarrow \Psi(\bar{x}, \bar{\alpha})).$$

1.0.2 Préliminaires et notations

Notations. Soit $\mathcal{M} = (M, G_M, \lambda, \Gamma_M, G_{\Gamma_M})$ un modèle de T .

1. Si Δ est un sous-groupe de Γ_M , on notera $G_\Delta := \Delta \cap G_{\Gamma_M}$.
2. Si K est un sous-corps de M , on notera $G_K := G_M \cap K$.

Lemme 1.0.2. *Soient \mathcal{M} un modèle de T , K un sous-corps de M et H un sous-groupe de G_K . Si $\Gamma_H = \Gamma_{G_K}$ alors $H = G_K$.*

Démonstration. Trivial. □

Lemme 1.0.3. *Soient \mathcal{M} un modèle de T et K un sous-ensemble de M . Alors il y a équivalence entre :*

1. *K est un corps stable par λ ,*
2. *K est un corps tel que $\Gamma_{G_K} = \Gamma_K \cap \Gamma_{G_M}$.*

Démonstration. 1) \implies 2). Il est clair que $\Gamma_{G_K} \subseteq \Gamma_K \cap \Gamma_G$, montrons que $\Gamma_K \cap \Gamma_G \subseteq \Gamma_{G_K}$. Soit $x \in K$ tel qu'il existe $g \in G$ vérifiant $v(x) = v(g)$. Alors $\lambda(x) = g$, et comme K est stable par λ , $g \in K$, donc $g \in G_K$. Ainsi $\Gamma_K \cap \Gamma_G \subseteq \Gamma_{G_K}$.

2) \implies 1). Soit $x \in K$ tel qu'il existe $g \in G$ vérifiant $v(x) = v(g)$. Comme $\Gamma_{G_K} = \Gamma_K \cap \Gamma_G$, on a $g \in G_K$. Comme $\lambda(x) = g$, on a $\lambda(x) \in K$. Ainsi K est stable par λ . □

Lemme 1.0.4. *Soient respectivement \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux modèles de T , K et K' des sous-corps de M et M' stables par λ et λ' , Δ et Δ' des sous-groupes de Γ_M et $\Gamma_{M'}$ qui contiennent Γ_K et $\Gamma_{K'}$, et $f : (K, \Delta) \longrightarrow (K', \Delta')$ un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. Alors f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel.*

Démonstration. Il faut montrer que $f \circ \lambda|_K = \lambda'_{|K'} \circ f$. Soit $x \in K^*$. Si $v(x) \notin \Gamma_{G_K}$, d'après le lemme 1.0.3, $v(x) \notin \Gamma_{G_M}$. Comme f est un \mathcal{L}_G -isomorphisme, $v(f(x)) \notin \Gamma_{G_{K'}}$, donc $v(f(x)) \notin \Gamma_{G_{M'}}$, et $f \circ \lambda(x) = \lambda' \circ f(x) = 0$. Si $v(x) \in \Gamma_{G_K}$, notons g l'unique élément de G_K tel que $v(g) = v(x)$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda(x)) &= f(g) \\ &= \lambda'(f(g)) \quad \text{car } f(g) \in G_{K'} \text{ puisque } f \text{ est un } \mathcal{L}_G\text{-isomorphisme} \\ &= \lambda'(f(x)) \quad \text{car } v(f(x)) = v(f(g)) \text{ puisque } f \text{ est un isomorphisme de corps valué.} \end{aligned}$$

□

1.0.3 Démonstration du théorème 1.0.1

Dans le reste de ce chapitre $\mathcal{M} = (M, G_M, \lambda, \Gamma_M, G_{\Gamma_M})$ et $\mathcal{M}' = (M', G_{M'}, \lambda', \Gamma_{M'}, G_{\Gamma_{M'}})$ désigneront deux modèles \aleph_1 -saturés de T .

On utilisera le fait facile suivant de théorie des modèles (que l'on peut trouver dans [Cha] lemme 4.2) pour prouver le théorème 1.0.1.

Fait 1.0.5. Soient \mathcal{L} un langage (contenant au moins un symbole de constante), κ un cardinal infini $> |\mathcal{L}|$, Ω un ensemble de formules clos par combinaisons booléennes, et T une \mathcal{L} -théorie. Supposons que si M et M' sont deux modèles κ -saturés de T , et si $f : K \rightarrow K'$ est un \mathcal{L} -isomorphisme entre des sous-structures K de M et K' de M' avec $|K| < \kappa$, qui préserve les formules de Ω (c'est-à-dire, pour toute formule $\varphi(\bar{x}) \in \Omega$ et uplet k dans K , on a $M \models \varphi(k) \implies M' \models \varphi(f(k))$), alors pour tout $x \in M$ on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme qui préserve les formules de Ω et qui contient x dans son domaine. Alors, si $\psi(\bar{x})$ est une formule, il existe $\varphi(\bar{x}) \in \Omega$ telle que $T \models \forall \bar{x} (\psi(\bar{x}) \longleftrightarrow \varphi(\bar{x}))$.

On notera Ω l'ensemble des \mathcal{L} -formules dans lesquelles les seules variables quantifiées sont des variables de la sorte groupe de valeur. Pour montrer le théorème 1.0.1, il est clair d'après le fait précédent, qu'il suffit de prouver que la famille \mathcal{F} des \mathcal{L} -isomorphismes entre \mathcal{L} -sous-structures dénombrables de \mathcal{M} et \mathcal{M}' qui préserve les formules de Ω a la propriété de va.

Remarque 1.0.6. Soient respectivement (A, Δ) et (A', Δ') des \mathcal{L} -sous-structures de \mathcal{M} et \mathcal{M}' et $f : (A, \Delta) \rightarrow (A', \Delta')$ un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. Alors Δ et Δ' sont des groupes car $-\Gamma \in \mathcal{L}$ et A et A' sont des anneaux. Comme il est clair que l'on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme de (K, Δ) dans (K', Δ') , où K et K' sont les corps de fractions de A et A' , dans la suite on restreindra notre étude aux \mathcal{L} -structures dont l'ensemble de base de la sorte corps valué est un corps.

Extensions valuationnelles

Lemme 1.0.7. *Soient (K, Γ_K) et $(K', \Gamma_{K'})$ des \mathcal{L} -sous-structures de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , $f : (K, \Gamma_K) \rightarrow (K', \Gamma_{K'})$ un \mathcal{L} -isomorphisme, h un \mathcal{L}_Γ -isomorphisme partiel qui prolonge $f|_{\Gamma_K}$, α un élément de Γ_{G_M} qui appartient au domaine de h , et g l'unique élément de G_M tel que $v(g) = \alpha$. Alors $\Gamma_{K(g)} = \Gamma_K(\alpha)$ et on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel de domaine $(K(g), \Gamma_K(\alpha))$ avec $f|_{\Gamma_K(\alpha)} = h|_{\Gamma_K(\alpha)}$.*

Démonstration. On va raisonner par cas.

1er cas : $v(g)$ appartient à la clôture divisible de Γ_K . Il existe alors un plus petit entier n tel que $nv(g)$ appartienne à Γ_K . Soit $x \in K$ tel que $nv(g) = v(x)$. Comme $v(g^n) = v(x)$, on a $\lambda(g^n) = \lambda(x)$. Comme $g^n \in G_M$, on a $\lambda(g^n) = g^n$, et comme K est stable par λ , on a $\lambda(x) \in K$, donc $g^n \in K$. Il est alors clair que $X^n - g^n$ est le polynôme minimal de g sur K et que $[K(g) : K] = [\Gamma_K(v(g)) : \Gamma_K]$. En particulier, $\Gamma_{K(g)} = \Gamma_K(\alpha)$. Alors,

$$\begin{aligned} \Gamma_{K(g)} \cap \Gamma_{G_M} &= \Gamma_K(\alpha) \cap \Gamma_{G_M} \\ &= (\Gamma_K \cap \Gamma_{G_M})(\alpha) \quad \text{car } \alpha \in G_M \\ &= \Gamma_{G_K}(\alpha) \quad \text{d'après le lemme 1.0.3} \\ &= \Gamma_{G_{K(g)}}. \end{aligned}$$

Comme $G_K(g) \subseteq G_{K(g)}$, on a $\Gamma_{G_K(g)} \subseteq \Gamma_{G_{K(g)}}$, et comme $\Gamma_{G_{K(g)}} \subseteq \Gamma_{K(g)} \cap \Gamma_{G_M}$, on a $\Gamma_{G_K(g)} = \Gamma_{G_{K(g)}} = \Gamma_{K(g)} \cap \Gamma_{G_M}$. D'après le lemme 1.0.2, on a $G_K(g) = G_{K(g)}$, et d'après le lemme 1.0.3, $K(g)$ est stable par λ .

Notons $\alpha' := h(\alpha)$. Comme h est un \mathcal{L}_Γ -isomorphisme, n est le plus petit entier tel que $n\alpha'$ appartienne à $\Gamma_{K'}$ et $\alpha' \in \Gamma_{G_{M'}}$. Soit g' l'unique élément de $G_{M'}$ tel que $v(g') = \alpha'$. On montre comme ci-dessus que $X^n - (g')^n$ est le polynôme de g' sur K' , que $[K'(g') : K'] = [\Gamma_{K'}(v'(g')) : \Gamma_{K'}]$, que $G_{K'(g')} = G_{K'}(g')$ et que $K'(g')$ est stable par λ' . On peut donc prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(g)$ dans $K(g')$ vérifiant $f(g) = g'$. Comme $f(G_K) = G_{K'}$, on a par construction de f que $f(G_K(g)) = G_{K'}(g')$. Comme $G_K(g) = G_{K(g)}$ et comme $G_{K'}(g') = G_{K'(g')}$, on a $f(G_{K(g)}) = G_{K'(g')}$. D'après le lemme 1.0.4, f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel.

2nd cas : $v(g)$ n'appartient pas à la clôture divisible de Γ_K . Alors $[K(g) : K] = [\Gamma_K(\alpha) : \Gamma_K] = \infty$ et $\Gamma_{K(g)} = \Gamma_K(\alpha)$. On montre comme dans le cas précédent que $G_{K(g)} = G_K(g)$ et que $K(g)$ est stable par λ .

Notons $\alpha' := h(\alpha)$. Comme h est un \mathcal{L}_Γ -isomorphisme, α' réalise la même coupure sur $\Gamma_{K'}$ que α sur Γ_K et $\alpha' \in \Gamma_{G_{M'}}$. Soit g' l'unique élément de $G_{M'}$ tel que $v(g') = \alpha'$. On a comme ci-dessus que $[K'(g') : K'] = [\Gamma_{K'}(\alpha') : \Gamma_{K'}] = \infty$, que $G_{K'(g')} = G_{K'}(g')$ et que $K'(g')$ est stable par λ' . On peut donc prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(g)$ dans $K(g')$ vérifiant $f(g) = g'$. On montre comme dans le cas précédent que f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. \square

Lemme 1.0.8. Soient (K, Γ_K) et $(K', \Gamma_{K'})$ des \mathcal{L} -sous-structures de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , $f : (K, \Gamma_K) \rightarrow (K', \Gamma_{K'})$ un \mathcal{L} -isomorphisme partiel, h un \mathcal{L}_Γ -isomorphisme partiel qui prolonge $f|_{\Gamma_K}$, α un élément du domaine de h tel que $\Gamma_K(\alpha) \cap \Gamma_{G_M} = \Gamma_{G_K}$. Alors il existe $x \in M$ tel que $\Gamma_{K(x)} = \Gamma_K(\alpha)$ et tel que l'on puisse prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel de domaine $(K(x), \Gamma_K(\alpha))$ vérifiant $f|_{\Gamma_K(\alpha)} = h|_{\Gamma_K(\alpha)}$.

Démonstration. On va raisonner par cas.

1er cas : α appartient à la clôture divisible de Γ_K . Il existe alors un plus petit entier n tel que $n\alpha$ appartienne à Γ_K . Soit $x \in K$ tel que $n\alpha = v(x)$. Soit $x^{\frac{1}{n}}$ une racine n -ième de x dans M . Alors, $[K(x^{\frac{1}{n}}) : K] = [\Gamma_K(\alpha) : \Gamma_K] = n$. En particulier, $\Gamma_{K(x^{\frac{1}{n}})} = \Gamma_K(\alpha)$. Il est clair que

$$\Gamma_{G_K} \subseteq \Gamma_{G_{K(x^{\frac{1}{n}})}} \subseteq \Gamma_{K(x^{\frac{1}{n}})} \cap \Gamma_{G_M} = \Gamma_K(\alpha) \cap \Gamma_{G_M}.$$

Comme $\Gamma_{G_K} = \Gamma_K(\alpha) \cap \Gamma_{G_M}$, on a $\Gamma_{G_K} = \Gamma_{G_{K(x^{\frac{1}{n}})}} = \Gamma_{K(x^{\frac{1}{n}})} \cap \Gamma_{G_M}$. D'après le lemme 1.0.2, on en déduit que $G_{K(x^{\frac{1}{n}})} = G_K$, et d'après le lemme 1.0.3,

on en déduit que $K(x^{\frac{1}{n}})$ est stable par λ .

Notons $\alpha' := h(\alpha)$. Comme h est un \mathcal{L}_Γ -isomorphisme, n est le plus petit entier tel que $n\alpha'$ appartienne à $\Gamma_{K'}$ et $\Gamma_{K'}(\alpha') \cap \Gamma_{G_{M'}} = \Gamma_{G_{K'}}$. Soit $f(x)^{\frac{1}{n}}$ une racine n -ième de $f(x)$ dans M' . On montre comme précédemment que $[K'(f(x)^{\frac{1}{n}})] = [\Gamma_{K'}(\alpha') : \Gamma_K] = n$, que $\Gamma_{K'(f(x)^{\frac{1}{n}})} = \Gamma_{K'}(\alpha')$, que $K'(f(x)^{\frac{1}{n}})$ est stable par λ' et que $\Gamma_{G_{K'(f(x)^{\frac{1}{n}})}} = \Gamma_{G_{K'}}$. On peut donc prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(x^{\frac{1}{n}})$ dans $K'(f(x)^{\frac{1}{n}})$ vérifiant $f(x^{\frac{1}{n}}) = f(x)^{\frac{1}{n}}$. Comme $\Gamma_{G_{K(x^{\frac{1}{n}})}} = \Gamma_{G_K}$ et comme $\Gamma_{G_{K'(f(x)^{\frac{1}{n}})}} = \Gamma_{G_{K'}}$, f est un \mathcal{L}_G -isomorphisme partiel. D'après le lemme 1.0.4, f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel.

2nd cas : α n'appartient pas à la clôture divisible de Γ_K . Soit $x \in M$ tel que $v(x) = \alpha$. Alors $[K(x) : K] = [\Gamma_K(\alpha) : \Gamma_K] = \infty$ et $\Gamma_{K(x)} = \Gamma_K(\alpha)$. On montre comme dans le cas précédent que $K(x)$ est stable par λ et que $G_{K(x)} = G_K$.

Notons $\alpha' := h(\alpha)$. Comme h est un \mathcal{L}_Γ -isomorphisme, α' réalise la même coupure sur $\Gamma_{K'}$ que α sur Γ_K et $\Gamma_{K'}(\alpha') \cap \Gamma_{G_{M'}} = \Gamma_{G_{K'}}$. Soit $x' \in M'$ tel que $v(x') = \alpha'$. Comme ci-dessus on a $[K'(x') : K'] = [\Gamma_{K'}(\alpha') : \Gamma_{K'}] = \infty$, $\Gamma_{K'(x')} = \Gamma_{K'}(\alpha')$, que $K'(x')$ est stable par λ' , et que $G_{K'(x')} = G_{K'}$. On peut donc prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(x)$ dans $K'(x')$ vérifiant $f(x) = x'$. On montre comme dans le cas précédent que f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. \square

Démonstration du théorème

Démonstration du théorème 1.0.1. Soient respectivement (K, Δ) et (K', Δ') des \mathcal{L} -sous-structures dénombrables de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , $f : (K, \Delta) \rightarrow (K', \Delta')$ un \mathcal{L} -isomorphisme partiel qui préserve les formules de Ω , x un élément de M , et α un élément de Γ_M . On va montrer que l'on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel qui préserve les formules de Ω et dont le domaine est une \mathcal{L} -sous-structure dénombrable qui contient x et α .

Comme f préserve les formules de Ω , par \aleph_1 -saturation, on peut prolonger $f|_{\Delta}$ en un \mathcal{L}_{Γ} -isomorphisme partiel de domaine $\Delta(\alpha)$ qui préserve les \mathcal{L}_{Γ} -formules. Notons $\alpha' := f(\alpha)$. Alors $f : (K, \Delta(\alpha)) \rightarrow (K', \Delta'(\alpha'))$ est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel qui préserve les formules de Ω .

D'après le lemme 1.0.7, on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel de domaine $(K_1, \Delta(\alpha))$, où K_1 est un corps dénombrable tel que $G_{\Delta} = G_{K_1}$. Il est immédiat que f préserve les formules de Ω .

D'après le lemme 1.0.8, on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel de domaine $(K_2, \Delta(\alpha))$, où K_2 est un corps dénombrable tel que $\Gamma_{K_2} = \Delta(\alpha)$. Il est immédiat que f préserve les formules de Ω .

Par \aleph_1 -saturation, on peut prolonger $f|_{\Gamma_{K_2}}$ en un \mathcal{L}_{Γ} -isomorphisme partiel de domaine $\Gamma_{K_2(x)}$ qui préserve les \mathcal{L}_{Γ} -formules. D'après le début de la démonstration, on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel qui préserve les formules de Ω , de domaine $(K_3, \Gamma_{K_2(x)})$, où K_3 est un corps dénombrable tel que $\Gamma_{K_3} = \Gamma_{K_2(x)}$.

Par un argument de chaîne, on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel, qui préserve les formules de Ω , de domaine $(K_{\infty}, \Gamma_{K_{\infty}})$, où K_{∞} est un sous-corps dénombrable de M tel que $\Gamma_{K_{\infty}} = \Gamma_{K_{\infty}(x)}$.

Comme la théorie des corps valués algébriquement clos élimine les quantificateurs dans le langage \mathcal{L}_v (voir par exemple ...), par \aleph_1 -saturation, on peut prolonger f en un isomorphisme de corps valué de domaine $(K_{\infty}(x), \Gamma_{K_{\infty}})$. Comme $\Gamma_{K_{\infty}} = \Gamma_{K_{\infty}(x)}$, d'après le lemme 1.0.2, $G_{K_{\infty}(x)} = G_{K_{\infty}}$. Comme K_{∞} est stable par λ , d'après le lemme 1.0.3, $\Gamma_{G_{K_{\infty}}} = \Gamma_{K_{\infty}}$. Ainsi, $\Gamma_{G_{K_{\infty}(x)}} = \Gamma_{K_{\infty}(x)}$, donc d'après le lemme 1.0.3, $K_{\infty}(x)$ est stable par λ . On montre de même que $f(K_{\infty})(f(x))$ est stable par λ et que $G_{f(K_{\infty})(f(x))} = G_{f(K_{\infty})}$.

Comme $f|_{K_{\infty}}$ est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel, $f(G_{K_{\infty}}) = G_{f(K_{\infty})}$. Donc $f(G_{K_{\infty}(x)}) = G_{f(K_{\infty})(f(x))}$, ainsi f est un \mathcal{L}_G -isomorphisme partiel. D'après le lemme 1.0.4, f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. Comme $\Gamma_{K_{\infty}} = \Gamma_{K_{\infty}(x)}$, il est clair que f préserve les formules de Ω puisque $f|_{K_{\infty}}$ préserve les formules de Ω . \square

Chapitre 2

Autour des vecteurs de Witt

2.1 Introduction

Les définitions et faits suivants sont tirés de [Haz09] et [Ser97], on pourra les consulter pour plus de détails.

Définition-Fait 2.1.1. *Si k est un corps parfait de caractéristique p alors il existe, à isomorphisme d'anneau valué près, un unique anneau commutatif de caractéristique 0 valué dans \mathbb{Z} , complet, et de corps résiduel k .*

On appellera cet anneau l'anneau des vecteurs de Witt au-dessus de k et on le notera $W[k]$. On notera $W(k)$ son corps de fraction.

Remarque 2.1.2. $W(k)$ est hensélien car valué dans \mathbb{Z} et complet.

Il résulte alors aisément du théorème d'Ax-Kochen-Ershov et du fait 0.0.4, que $W(k) \equiv W(k')$ si et seulement si $k \equiv k'$.

Définition-Fait 2.1.3. *Soit k un corps parfait de caractéristique p . Alors il existe un unique morphisme de groupe multiplicatif, que l'on notera τ , de k^* dans $W[k]^*$ tel que pour tout $x \in k$ on ait $\tau(x)/v = x$. On dira que $\tau(k)$ est le relèvement de Teichmüller de k dans $W[k]$.*

Lemme 2.1.4. *Pour toute suite d'entiers $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, il existe $N_{\bar{n}} \in \mathbb{N}$ et des polynômes $Q_0, \dots, Q_{N_{\bar{n}}}$ dans $\mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_m]$, tels que pour tout corps parfait k de caractéristique p et tous x_1, \dots, x_m dans k , on ait :*

1.

$$W[k] \models \sum_{i=1}^m n_i \tau(x_i) = 0 \iff k \models \bigwedge_{i=0}^{N_{\bar{n}}} Q_i(x_1, \dots, x_m) = 0.$$

2.

$$W[k] \models \sum_{i=1}^m n_i \tau(x_i) \neq 0 \iff W[k] \models \bigvee_{j=0}^{N_{\bar{n}}} v\left(\sum_{i=1}^m n_i \tau(x_i)\right) = j.$$

Démonstration. On peut montrer que $W[k]$ est isomorphe à $k^{\mathbb{N}}$, muni d'une multiplication que l'on n'explicitera pas ici et d'une addition définie par :

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (S_0(a_0, b_0), S_1(a_0, a_1, b_0, b_1), \dots),$$

où les S_i sont des polynômes de $\mathbb{F}_p[X_0, \dots, X_i, Y_0, \dots, Y_i]$ qui ne dépendent pas de k . Muni de cette structure, pour tout (a_0, a_1, \dots) non-nul appartenant à $W[k]$, la valuation de (a_0, a_1, \dots) est égal au plus petit entier r tel que a_r soit différent de 0. On montre aussi que pour tout a appartenant à k , $\tau(a) = (a, 0, \dots, 0, \dots)$. Il est alors clair que pour toute suite d'entiers $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$ il existe une suite de polynômes $Q_{i, \bar{n}} \in \mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_m]$ telle que, pour tout corps parfait k et tous $x_1, \dots, x_m \in k$, on ait

$$\sum_{i=1}^m n_i \tau(x_i) = (Q_{0, \bar{n}}(x_1, \dots, x_m), Q_{1, \bar{n}}(x_1, \dots, x_m), \dots).$$

Comme $\mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_m]$ est noethérien, il existe $N_{\bar{n}} \in \mathbb{N}$ tel que l'idéal engendré par la suite $Q_{i, \bar{n}}$ soit engendré par $Q_{0, \bar{n}}, \dots, Q_{N_{\bar{n}}, \bar{n}}$. Le lemme s'en déduit immédiatement. \square

Lou Van den Dries [dD99] a utilisé le premier point du lemme précédent pour donner une axiomatisation des structures du type $(W(k), \tau(k))$. Plus précisément énonçons son résultat. Soit \mathcal{L} le langage défini par $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{div} \cup \{G\}$, où G est un symbole de prédicat unaire, et soit T la \mathcal{L} -théorie constituée :

1. des axiomes des corps valués henséliens de caractéristique $(0, p)$ non ramifiés,
2. de l'axiome exprimant que le corps résiduel est parfait,
3. de l'axiome exprimant que G est un groupe qui est un relèvement multiplicatif du corps de reste privé de zéro,
4. pour toute suite d'entiers $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, de l'axiome

$$\forall \bar{g} \in G, \sum_{i=1}^m n_i g_i = 0 \iff \bigwedge_{i=1}^{N_{\bar{n}}} Q_i(g_1/v, \dots, g_m/v) = 0$$

(où $N_{\bar{n}}$ est l'entier introduit dans le lemme 2.1.4).

Alors si (M, G_M) et $(M', G_{M'})$ sont deux modèles de T , $(M, G_M) \equiv (M', G_{M'})$ si et seulement si $M/v \equiv M'/v$ et $\Gamma_M \equiv \Gamma_{M'}$. En particulier d'après le fait 0.0.4, si k et k' sont des corps parfaits de caractéristique p tels que $k \equiv k'$, on a $(W(k), \tau(k)) \equiv (W(k'), \tau(k'))$. On obtient alors que la théorie T' , constituée des axiomes de T , et des axiomes exprimant que le corps de reste est algébriquement clos et que le groupe de valuation est un \mathbb{Z} -groupe, est complète. C'est la théorie complète de $(W(\mathbb{F}_p^{alg}), \mathbb{U}_{\bar{p}})$, car il est clair que le relèvement

de Teichmüller dans $W(\mathbb{F}_p^{alg})$ est l'ensemble des racines de l'unité d'ordre premier à p . Dans la première partie de ce chapitre nous allons caractériser les structures du type $(W(k)^{alg}, \tau(k))$ où k est un corps algébriquement clos de caractéristique $(0, p)$. Cela sera cette fois le second point du lemme précédent qui jouera un rôle crucial, car il nous permettra d'exprimer au premier ordre que $v(\mathbb{Z}[\tau(k)]) = \mathbb{N}$. On verra que dans tout modèle suffisamment saturé de la théorie que nous introduirons, un sous-corps isomorphe au corps des vecteurs de Witt contient $\mathbb{Z}[\tau(k)]$. Ce qui nous amènera naturellement à étudier dans la suite de ce chapitre les structures du type $(W(k)^{alg}, W(k))$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique $(0, p)$.

2.2 Structures du type $(W(k)^{alg}, \tau(k))$

2.2.1 Présentation du résultat

Dans le reste de cette section $\mathcal{L}_{G_{\bar{p}}}$ désignera le langage défini par $\mathcal{L}_{G_{\bar{p}}} := \mathcal{L}_{div} \cup \{G_{\bar{p}}\}$, où $G_{\bar{p}}$ est un symbole de prédicat unaire.

$T_{G_{\bar{p}}}$ désignera la $\mathcal{L}_{G_{\bar{p}}}$ -théorie constituée :

1. des axiomes des corps valué algébriquement clos de caractéristique $(0, p)$,
2. de l'axiome exprimant que $G_{\bar{p}}$ est un sous-groupe multiplicatif qui est un relèvement multiplicatif du corps de restes privé de zéro,
3. pour toute suite d'entiers $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, de l'axiome

$$\forall \bar{g} \in G_{\bar{p}}, \sum_{i=1}^m n_i g_i \neq 0 \implies \bigvee_{k=0}^{N_{\bar{n}}} v\left(\sum_{i=1}^m n_i g_i\right) = k,$$

(où $N_{\bar{n}}$ est l'entier introduit dans le lemme 2.1.4).

Notre but sera de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *La théorie $T_{G_{\bar{p}}}$ est complète.*

Avant de passer à la démonstration du théorème 2.2.1, disons quelques mots sur les modèles de $T_{G_{\bar{p}}}$. Il est clair d'après le lemme 2.1.4, que pour tout corps valué k algébriquement clos de caractéristique $(0, p)$, $(W(k)^{alg}, \tau(k))$ et $(\mathbb{Q}(\tau(k))^{alg}, \tau(k))$ sont des modèles de $T_{G_{\bar{p}}}$. En particulier, $(W(\mathbb{F}_p)^{alg}, \mathbb{U}_{\bar{p}})$ et $(\mathbb{Q}^{alg}, \mathbb{U}_{\bar{p}})$ sont des modèles de $T_{G_{\bar{p}}}$. Il est aussi clair que $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}})$ est un modèle de $T_{G_{\bar{p}}}$. Dans le schéma d'axiomes 3. de $T_{G_{\bar{p}}}$, les vecteurs de Witt n'apparaissent pas explicitement, néanmoins pour tout modèle (M, G_M) de $T_{G_{\bar{p}}}$, G_M est un relèvement de Teichmüller de M/v dans un corps valué isomorphe à $W(M/v)$. C'est ce que montre le lemme qui suit.

Lemme 2.2.2. *Soit (M, G_M) un modèle de $T_{G_{\overline{p}}}$. Alors il existe un corps W isomorphe à $W(M/v)$ qui contient $\mathbb{Q}(G_M)$ et tel que G_M soit le relèvement de Teichmüller de M/v dans W . Si de plus M est \aleph_1 -saturé en tant que corps valué, alors il existe un tel W contenu dans M .*

Pour démontrer la seconde partie du lemme 2.2.2 nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.3. *Soient K un corps valué de caractéristique $(0, p)$ non ramifié et \tilde{K} une extension immédiate maximale de K . Alors on peut plonger \tilde{K} au-dessus de K dans toute extension de corps valué de K , qui soit hensélienne et $|\Gamma_K|^+$ -saturée.*

Démonstration. Soient L une extension de corps valué de K , immédiate, hensélienne, et $|\Gamma_K|^+$ -saturée, et \tilde{K} une extension immédiate maximale de K . Pour montrer que \tilde{K} se plonge dans L il est suffisant, d'après le fait 0.0.12, de montrer qu'il existe une extension immédiate maximale M de K contenue dans L . Par le lemme de Zorn, il existe une extension immédiate M de K inclus dans L , et n'admettant pas d'extensions immédiates propres dans L . Comme L est un corps valué hensélien contenant M , il contient aussi sa clôture hensélienne. Or M n'a pas d'extension immédiate propre dans L , donc M est hensélien. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite pseudo-convergente $(a_i)_{i \in I}$ de M qui n'ait pas de pseudo-limite dans M . Comme M est hensélien, $(a_i)_{i \in I}$ serait une suite pseudo-convergente de type transcendant. Comme L est $|\Gamma_K|^+$ -saturé, et $\Gamma_M = \Gamma_K$, il existerait une pseudo-limite l de $(a_i)_{i \in I}$ dans L , $M(l)$ serait alors une extension immédiate propre de M dans L , ce qui est impossible. Donc M est une extension immédiate maximale de K . \square

Démonstration du lemme 2.2.2. Soit (M, G_M) un modèle de $T_{G_{\overline{p}}}$. Alors $G_M/v = M/v$ et $v(\mathbb{Q}(G_M)) = \mathbb{Z}$. D'après le fait 0.0.11, il existe W une extension immédiate maximale de $\mathbb{Q}(G_M)$. Comme W est maximal et de groupe de valeur \mathbb{Z} , il est complet. Ainsi W est un corps valué complet, de caractéristique 0, de corps résiduel M/v , et de groupe de valeur \mathbb{Z} . Donc W est isomorphe à $W(M/v)$. Comme G_M est un relèvement multiplicatif de M/v dans W , il est clair d'après l'unicité de la définition-fait 2.1.3, que G_M est le relèvement de Teichmüller. D'après le lemme précédent, si M est \aleph_1 -saturé en tant que corps valué, il existe une extension immédiate maximale de $\mathbb{Q}(G_M)$ contenue dans M . \square

2.2.2 Démonstration du théorème 2.2.1

Dans le reste de cette sous-section, sauf mention contraire, le mot isomorphisme sera employé dans le sens isomorphisme de corps valués.

Soient (M, G_M) et $(M', G_{M'})$, deux modèles saturés de cardinalité \aleph_1 de

$T_{G_{\bar{p}}}$. D'après le lemme 2.2.2, il existe respectivement des sous-corps W et W' de M et M' , contenant $\mathbb{Q}(G_M)$ et $\mathbb{Q}(G_{M'})$, et isomorphes à $W(M/v)$ et $W(M'/v)$. Comme M/v et M'/v sont des corps algébriquement clos de caractéristique p et de cardinalité \aleph_1 , ils sont isomorphes en tant que corps. Donc d'après la définition-fait 2.1.1, W et W' sont isomorphes. Notons h cet isomorphisme.

Remarque 2.2.4. h est un $\mathcal{L}_{G_{\bar{p}}}$ -isomorphisme. En effet, $h(G_M)$ est un relèvement multiplicatif de $(M'/v)^*$ dans W' , donc d'après la définition-fait 2.1.3, $h(G_M) = G_{M'}$.

Proposition 2.2.5. *La famille \mathcal{F} des isomorphismes $f : K \rightarrow K'$ entre sous-corps valués respectifs de M et M' , qui prolongent h , et tels que Γ_K soit dénombrable, est non vide et a la propriété de va-et-vient.*

Démonstration. \mathcal{F} est non vide car h lui appartient. Par symétrie il est juste nécessaire de montrer la propriété de va. Soit $f : K \rightarrow K'$ un élément de \mathcal{F} .

On va montrer dans un premier temps que l'on peut se ramener au cas où K est algébriquement clos. En effet $K^{alg} \subseteq M$ et $K'^{alg} \subseteq M'$. Comme K et K' sont isomorphes leurs clôtures algébriques le sont aussi. On peut donc prolonger f à K^{alg} . C'est encore un élément de \mathcal{F} car $\Gamma_{K^{alg}}$ est dénombrable (puisque $\Gamma_{K^{alg}}$ est la clôture divisible de Γ_K).

A partir de maintenant on supposera K algébriquement clos. Soit $x \in M \setminus K$. Comme $G_M \subseteq K$, $K/v = M/v$, donc soit $K(x)$ est une extension immédiate de K soit il existe $y \in K(x)$ tel que $v(y) \notin \Gamma_K$.

1^{er} cas : il existe $y \in K(x)$ tel que $v(y) \notin \Gamma_K$. Comme Γ_K est divisible $v(y)$ réalise une coupure sur Γ_K . Comme Γ_K est dénombrable il existe, par \aleph_1 -saturation, un élément $y' \in M'$ tel que $v(y')$ réalise la même coupure sur $\Gamma_{f(K)}$. Par un résultat classique $K(y)$ et $K(y')$ sont isomorphes et $\Gamma_{K(y)} = \Gamma_K \oplus v(y)\mathbb{Z}$. Donc $\Gamma_{K(y)}$ est aussi dénombrable. On peut donc prolonger f en un élément de \mathcal{F} de domaine $K(y)$. Comme y est transcendant sur K , x est algébrique sur $K(y)$. Donc d'après ce que nous avons vu précédemment on peut prolonger f en un élément de \mathcal{F} de domaine $K(x)$.

2nd cas : $K(x)$ est une extension immédiate de K . Il existe un ordinal β et une suite $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ d'éléments de K qui pseudo-converge vers x et qui n'admet pas de pseudo-limite dans K . Comme Γ_K est dénombrable, β est un ordinal dénombrable. Considérons le type partiel au-dessus des $f(x_\alpha)$, $p(z) := \{v(z - f(x_\alpha)) < v(z - f(x_{\alpha'})) ; \alpha < \alpha' < \beta\}$. Comme $(f(x_\alpha))_{\alpha < \beta}$ est une suite de pseudo-Cauchy de K' , $p(z)$ est finiment réalisé dans K' . Comme β est dénombrable, et M' \aleph_1 -saturé, il existe un élément x' qui réalise $p(z)$ dans M' . Alors la suite $(f(x_\alpha))_{\alpha < \beta}$ pseudo-converge vers x' . Comme K est algébriquement clos il est en particulier algébriquement maximal donc la suite de pseudo-Cauchy $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ est de type transcendant sur K . Par un

résultat classique on peut prolonger f en un isomorphisme entre $K(x)$ et $K(x')$. \square

Remarque 2.2.6. Tout élément f de \mathcal{F} est un $\mathcal{L}_{G_{\bar{p}}}$ -isomorphisme partiel puisque c'est un isomorphisme tel que $f(G_M) = G_{M'}$.

Corollaire 2.2.7. *Tous les modèles saturés de cardinalité \aleph_1 de $T_{G_{\bar{p}}}$, sont élémentairement équivalents.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la remarque et de la proposition précédente. \square

Corollaire 2.2.8. *Théorème 2.2.1.*

Démonstration. Sous l'hypothèse du continu tout modèle de $T_{G_{\bar{p}}}$ est élémentairement équivalent à un modèle de cardinalité \aleph_1 et \aleph_1 -saturé, le théorème se déduit alors du corollaire précédent. \square

2.3 Paires de corps valués fortement séparées

Dans la section précédente nous avons vu que pour tout modèle (M, G_M) \aleph_1 -saturé de $T_{G_{\bar{p}}}$, il existe un sous-corps W de M isomorphe à $W(M/v)$. C'est maintenant l'étude des structures du type $(W(k)^{alg}, W(k))$ qui va nous intéresser. C'est la notion de paires de corps valués fortement séparées qui nous permettra de comprendre de telles structures. Cette section est entièrement consacrée à l'étude des paires de corps valués fortement séparées.

2.3.1 Définitions et généralités

Définition 2.3.1. *Soit $(E \subseteq L, v)$ une extension de corps valués.*

1. *On dira qu'une suite $l_1, \dots, l_n \in L$ est séparée au-dessus de E si pour tous $e_1, \dots, e_n \in E$ on a*

$$v\left(\sum_{i=1}^n e_i l_i\right) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(e_i l_i)).$$

2. *On dira que l'extension $(E \subseteq L, v)$ est séparée si tout sous E -espace vectoriel de L de dimension finie admet une base séparée.*

Fait 2.3.2 (Voir [Bau82]). *Toute extension d'un corps valué maximal est séparée.*

Définition 2.3.3. *Soient $(E \subseteq L, v)$ une extension de corps valués, x un élément de L , et $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in L$. On notera*

$$I_n(x/\bar{y}, E) := \left\{v\left(x + \sum_{i=1}^n e_i y_i\right) ; e_1, \dots, e_n \in E\right\}.$$

Lorsque $I_n(x/\bar{y}, E)$ a un élément maximal on le notera $\gamma_n(x/\bar{y}, E)$.

On dira que l'extension $(E \subseteq L, v)$ est fortement séparée lorsque pour tous $x, \bar{y} \in K$, $\gamma_n(x/\bar{y}, E)$ existe.

Remarque 2.3.4. On voit facilement qu'une suite x_1, \dots, x_n est séparée si et seulement si $\gamma_{n-1}(x_i/(x_j)_{j \neq i})$ existe pour chaque i et est égale à $v(x_i)$. On en déduit qu'une extension fortement séparée est séparée.

Proposition 2.3.5. *Toute extension d'un corps valué maximal est fortement séparée.*

Démonstration. Soient (E, v) un corps valué maximal et (M, v) une extension de corps valué de (E, v) . Supposons par l'absurde que l'extension $(E \subseteq M, v)$ ne soit pas fortement séparée. Il existerait alors un plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y_1, \dots, y_n \in M$ tels que $I_n(x/\bar{y}, E)$ n'ait pas de maximum. D'après le fait 2.3.2, l'extension $(E \subseteq M, v)$ est séparée. Donc le E -espace vectoriel engendré par y_1, \dots, y_n admettrait une base séparée (b_1, \dots, b_m) . On aurait alors $I_n(x/\bar{y}, E) = I_m(x/\bar{b}, E)$. Par minimalité de n on aurait $m = n$. Il existerait alors une suite $((e_{1,\alpha}, \dots, e_{n,\alpha}))_{\alpha < \alpha_0}$ d'éléments de E telle que la suite $(v(x + \sum_{i=1}^n e_{i,\alpha} b_i))_{\alpha < \alpha_0}$ soit croissante et cofinale dans $I_n(x/\bar{b}, E)$. Comme la suite $(v(x + \sum_{i=1}^n e_{i,\alpha} b_i))_{\alpha < \alpha_0}$ serait croissante, pour tous $\alpha < \beta < \alpha_0$ on aurait $v(x + \sum_{i=1}^n e_{i,\alpha} b_i) = v(\sum_{i=1}^n (e_{i,\beta} - e_{i,\alpha}) b_i)$. Comme (b_1, \dots, b_n) est séparée au-dessus de E , on aurait $v(\sum_{i=1}^n (e_{i,\beta} - e_{i,\alpha}) b_i) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v((e_{i,\beta} - e_{i,\alpha}) b_i))$. Ainsi, $v(x + \sum_{i=1}^n e_{i,\alpha} b_i) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v((e_{i,\beta} - e_{i,\alpha}) b_i))$. Quitte à extraire une sous-suite cofinale, on peut supposer sans perte de généralité qu'il existerait $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que pour tout $\alpha < \alpha_0$ on ait $v(x + \sum_{i=1}^n e_{i,\alpha} b_i) = v((e_{i_0,\beta} - e_{i_0,\alpha}) b_{i_0})$. On en déduirait que la suite $(e_{i_0,\alpha})_{\alpha < \alpha_0}$ serait pseudo-Cauchy. Comme E est maximal, il existerait une pseudo-limite e_{i_0} de la suite $(e_{i_0,\alpha})_{\alpha < \alpha_0}$ appartenant à E . Pour tous $\alpha < \beta < \alpha_0$ on aurait alors $v(e_{i_0} - e_{i_0,\alpha}) = v(e_{i_0,\beta} - e_{i_0,\alpha})$. On en déduirait que

$$\begin{aligned} v(x + e_{i_0} b_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} e_{i,\alpha} b_i) &\geq \min \left(v(x + \sum_{i=1}^n e_{i,\alpha} b_i), v((e_{i_0} - e_{i_0,\alpha}) b_{i_0}) \right) \\ &\geq \min \left(v(x + \sum_{i=1}^n e_{i,\alpha} b_i), v((e_{i_0,\beta} - e_{i_0,\alpha}) b_{i_0}) \right) \quad \text{pour } \alpha < \beta < \alpha_0 \\ &\geq v(x + \sum_{i=1}^n e_{i,\alpha} b_i). \end{aligned}$$

Ainsi, $I_{n-1}(x + e_{i_0}b_{i_0}/(b_1, \dots, b_{i_0-1}, b_{i_0+1}, \dots, b_n), E)$ serait cofinal dans $I_n(x/\bar{y}, E)$.

Par minimalité de n , $I_{n-1}(x + e_{i_0}b_{i_0}/(b_1, \dots, b_{i_0-1}, b_{i_0+1}, \dots, b_n), E)$ admettrait un maximum. Donc $I_n(x/\bar{y}, E)$ admettrait aussi un maximum, ce qui serait absurde. On en déduit que l'extension $(E \subseteq M, v)$ est fortement séparée. \square

Remarque 2.3.6. Cette proposition montre que les extensions du type $(W(k) \subseteq W(k)^{alg})$, où k est un corps parfait de caractéristique p , sont fortement séparées. En effet, comme $\Gamma_{W(k)} = \mathbb{Z}$ et comme $W(k)$ est complet, $W(k)$ est un corps valué maximal.

Notations. Soit $(E \subseteq L, v)$ une extension de corps valués fortement séparée.

1. On notera $\mathbb{L} := (E \subseteq L, v)$.
2. Si K est un sous-corps de L , on notera $E_K = K \cap E_L$.
3. Si K est un sous-corps de L et D un sous-ensemble de L , on notera $\mathbb{K}(D) := (E_{K(D)} \subseteq K(D))$.

Définition 2.3.7. Soient \mathbb{L} une paire de corps valués fortement séparée et K un sous-corps de L . On dira que $\mathbb{K} := (E_K \subseteq K)$, est une sous-paire fortement séparée de \mathbb{L} , si \mathbb{K} est une paire fortement séparée, et si pour tout entier n , pour tous $x, \bar{y} \in K$, on a $\gamma_n(x/\bar{y}, E_K) = \gamma_n(x/\bar{y}, E_L)$. On notera $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$.

Remarque 2.3.8. Si E est un sous-corps de E_L , alors $\mathbb{E} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$.

2.3.2 Résultats sur les paires fortement séparées quelconques

Dans toute cette sous-section, $\mathbb{L} := (E_L \subseteq L, v)$ désignera une paire de corps valué fortement séparée quelconque.

Certains résultats que nous obtiendrons sont une généralisation des travaux de Françoise Delon [Del14]. La proposition 2.3.16 y est montré pour certaines paires d'équicaractéristique nulle avec des hypothèses de théorie des modèles supplémentaires et le lemme 2.3.18 y est prouvé pour certaines paires d'équicaractéristique nulle.

Soient x et y des éléments de L . Notons $\gamma := \gamma_1(x/y, E_L)$. Supposons que l'on veuille connaître la valuation d'une somme du type $x + ey$, où $e \in E_L$. En écrivant $x + ey = x + \xi y + (e - \xi)y$, où ξ est un élément de E_L vérifiant $v(x + \xi y) = \gamma$, on obtient $v(x + ey) = \min(\gamma, v(e - \xi) + v(y))$. Ainsi il apparaît que la valuation de $x + ey$ dépend seulement de γ et de la valuation d'un élément de E_L , à savoir $e - \xi$. La généralisation de ce genre de résultat aux sommes ayant un nombre de termes arbitraire sera l'objet du lemme 2.3.10, et les notations introduites ci-dessous permettront d'énoncer le résultat.

Notations. On note $(P_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X_i, Y_j]_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

- $P_n \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{\frac{n(n-1)}{2}}]$,
- $P_1(X_1) = X_1$,
- $P_2(X_1, X_2, Y_1) = X_2 - X_1 Y_1$,
- et la relation d'induction suivante, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} & P_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1}, Y_1, \dots, Y_{\frac{n(n+1)}{2}}) \\ &= P_n \left(P_2(X_1, X_2, Y_1), \dots, P_2(X_1, X_{n+1}, Y_n), Y_{n+1}, \dots, Y_{\frac{n(n+1)}{2}} \right). \end{aligned}$$

Remarque 2.3.9. On peut facilement montrer par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_{\frac{n(n-1)}{2}}]$ tels que

$$P_n(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{\frac{n(n-1)}{2}}) = X_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i X_i.$$

- Notations.**
1. Soit $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in L$. Pour $i \leq n$, on notera $\gamma^{(i)}(\bar{x}) = \gamma_{n-i}(x_i/x_{i+1}, \dots, x_n)$.
 2. Soient $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n), \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{\frac{n(n-1)}{2}}) \in E_L$. On notera $P_1(\bar{e}, \bar{\xi}) = P_1(e_1)$, et pour $i \geq 2$, $P_i(\bar{e}, \bar{\xi}) = P_i(e_1, \dots, e_i, \xi_i, \dots, \xi_{\frac{i(i-1)}{2}})$.
 3. Soient $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in L$, et $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n), \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{\frac{n(n-1)}{2}}) \in E_L$. Si $v(x_1 + \sum_{i=2}^n \xi_{i-1} x_i) = \gamma^{(1)}(\bar{x}), v(x_2 + \sum_{i=3}^n \xi_{n-1+i} x_i) = \gamma^{(2)}(\bar{x}), \dots, v(x_{n-1} + \xi_{\frac{n(n-1)}{2}} x_n) = \gamma^{(n-1)}(\bar{x})$, on notera $v(\bar{\xi}\bar{x}) = \gamma$.

Lemme 2.3.10. Soient $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in L$ et $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n) \in E_L$. Pour tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{\frac{n(n-1)}{2}}) \in E_L$ vérifiant $v(\bar{\xi}\bar{x}) = \gamma$, on a

$$v\left(\sum_{1 \leq i \leq n} e_i x_i\right) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v\left(P_i(e_1, \dots, e_i, \xi_1, \dots, \xi_{\frac{i(i-1)}{2}})\right) + \gamma^{(i)}(\bar{x}) \right).$$

Démonstration. On va procéder par induction sur n .

Pour $n = 1$, c'est trivial.

Pour $n = 2$. Soit ξ_1 tel que $v(x_1 + \xi_1 x_2) = \gamma(x_1/x_2)$. L'égalité $e_1 x_1 + e_2 x_2 = e_1(x_1 + \xi_1 x_2) + (e_2 - e_1 \xi_1)x_2$, entraîne que

$$v(e_1 x_1 + e_2 x_2) = \min \left(v(e_1) + \gamma(x_1/x_2), v(e_2 - e_1 \xi_1) + \gamma(x_2) \right).$$

Supposons maintenant que la propriété est vraie au rang n avec $n \geq 2$ et

montrons-la au rang $n + 1$.

Soient $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})$ et $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{\frac{n(n+1)}{2}})$ vérifiant $v(\bar{\xi}\bar{x}) = \gamma$. On a

$$\begin{aligned} v\left(\sum_{i=1}^{n+1} e_i x_i\right) &= \min\left(v(e_1) + \gamma(x_1/x_2, \dots, x_{n+1}), v\left(\sum_{i=1}^n (e_{i+1} - e_1 \xi_1) x_{i+1}\right)\right) \\ &= \min\left(v\left(P_1(e_1)\right) + \gamma(x_1/x_2, \dots, x_{n+1}), v\left(\sum_{i=1}^n P_2(e_1, e_{i+1}, \xi_1) x_{i+1}\right)\right) \\ &= \min\left(v\left(P_1(e_1)\right) + \gamma(x_1/x_2, \dots, x_{n+1}), v\left(P_1(P_2(e_1, e_2, \xi_1))\right) + \gamma(x_2/x_3, \dots, x_n), \right. \\ &\quad \left. \dots, v\left(P_n(P_2(e_1, e_2, \xi_1), \dots, P_2(e_1, e_n, \xi_n), \xi_{n+1}, \dots, \xi_{\frac{n(n+1)}{2}})\right) + \gamma(x_n)\right) \\ &= \min\left(v\left(P_1(e_1)\right) + \gamma(x_1/x_2, \dots, x_{n+1}), v\left(P_2(e_1, e_2, \xi_1)\right) + \gamma(x_2/x_3, \dots, x_n), \right. \\ &\quad \left. \dots, v\left(P_{n+1}(e_1, \dots, e_n, \xi_1, \dots, \xi_{\frac{n(n+1)}{2}})\right) + \gamma(x_n)\right). \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.3.11. Soient $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ et D un sous-corps de E_L . Si pour tous $x, \bar{y} \in K$, $\gamma_n(x/\bar{y}, D)$ existe et est égal à $\gamma_n(x/\bar{y}, E_L)$, et si $\gamma_n(x/\bar{y}, E_L) \in \Gamma_K$, alors $\Gamma_{K(D)} = \Gamma_K + \Gamma_D$. En particulier, si $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{L}$ et si D est un sous-ensemble de E_L , on a $\Gamma_{K(D)} = \Gamma_K + \Gamma_{E_K(D)}$.

Démonstration. On va montrer que $\Gamma_{K[D]} = \Gamma_K + \Gamma_D$, le résultat voulu s'en déduira immédiatement. Soient $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n) \in K$ et $\bar{d} = (d_1, \dots, d_n) \in D$. Par hypothèse, il existe $\bar{\xi} \in D$ tel que $v(\bar{\xi}\bar{k}) = \gamma$. D'après le lemme 2.3.10, on a $v(\sum d_i k_i) = \min_i \left(v\left(P_i(\bar{d}, \bar{\xi})\right) + \gamma^{(i)}(\bar{k})\right)$. Par hypothèse, pour tout i , $\gamma^{(i)}(\bar{k}) \in \Gamma_K$, et $v(P_i(\bar{d}, \bar{\xi})) \in \Gamma_D$ car $\bar{d}, \bar{\xi} \in D$. □

Définition 2.3.12. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\bar{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$, où $\tilde{y}_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,n})$, des éléments de L , $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n) \in E_L$ et $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \Gamma_L$. On note $\delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, \bar{e}) = \min_{i \in [1, m]} \left(v(x_i + \bar{e}\tilde{y}_i) + \eta_i\right)$ et $\Delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_L) = \{\delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, \bar{e}) ; \bar{e} \in E_L\}$. Si de plus $\Delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_L)$ a un maximum, on note $\delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_L)$ ce maximum.

Proposition 2.3.13. Soient \bar{x} , \bar{y} et $\bar{\eta}$ comme dans la définition précédente. Alors $\delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_L)$ existe. Si de plus $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{L}$ et $\bar{x}, \bar{y} \in K$ alors $\delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_K)$ existe et $\delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_K) = \delta_{m,n}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_L)$.

Avant de passer à la démonstration de cette proposition nous allons montrer quelques lemmes qui nous seront utiles.

Lemme 2.3.14. Soient η_1, \dots, η_n des éléments de Γ_L et ξ_1, \dots, ξ_n des éléments de L . Si $\eta_i = \min_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\eta_j)$, alors pour tout $e \in L$,

$$\min_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(e - \xi_k) + \eta_k) \leq \min_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(\xi_i - \xi_k) + \eta_k).$$

Démonstration. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v(\xi_i - \xi_j) + \eta_j = \min_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(\xi_i - \xi_k) + \eta_k)$. On va montrer que pour tout $e \in L$, il existe $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v(e - \xi_l) + \eta_l \leq v(\xi_i - \xi_j) + \eta_j$. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $e \in L$, tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $v(e - \xi_k) + \eta_k > v(\xi_i - \xi_j) + \eta_j$. On aurait alors $v(e - \xi_j) + \eta_j > v(\xi_i - \xi_j) + \eta_j$. On en déduirait que $v(e - \xi_j) > v(\xi_i - \xi_j)$, ce qui impliquerait que $v(e - \xi_i) = v(\xi_j - \xi_i)$. D'autre part on aurait $v(e - \xi_i) + \eta_i > v(\xi_i - \xi_j) + \eta_j$. Comme $\eta_i \leq \eta_j$, on en déduirait que $v(e - \xi_i) > v(\xi_i - \xi_j)$. Ce que serait absurde. \square

Lemme 2.3.15. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\bar{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$, avec $\tilde{y}_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,n+1})$, des éléments de L , et $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m) \in E_L$, avec $\tilde{\xi}_i = (\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i, \frac{(n+1)(n+2)}{2}})$, vérifiant, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $v(\tilde{\xi}_i(x_i, \tilde{y}_i)) = \gamma$. Alors il existe $Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_{\frac{n(n+1)}{2}}]$, et $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, tels que pour tout $\bar{e} = (e_1, \dots, e_{n+1}) \in E_L$, on ait

$$\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, \bar{e}) \leq \delta_{m,n+1}\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_n, Q_0(\tilde{\xi}_k) + \sum_{1 \leq i \leq n} Q_i(\tilde{\xi}_k)e_i)\right).$$

Démonstration. On a $\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, \bar{e}) = \min_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} (v(x_i + \sum_{j \leq n+1} e_j y_{i,j}) + \eta_i)$. D'après le lemme 2.3.10, on en déduit que pour tout $\bar{e} = (e_1, \dots, e_{n+1}) \in E_L$ on a

$$\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, \bar{e}) = \min_{i \leq m, j \leq n+2} \left(v\left(P_j(1, e_1, \dots, e_{j-1}, \tilde{\xi}_i)\right) + \gamma^{(j)}(x_i/\tilde{y}_i) + \eta_i \right).$$

Notons $\Omega(e_1, \dots, e_n) := \min_{i \leq m, j \leq n+1} \left(v\left(P_j(1, e_1, \dots, e_{j-1}, \tilde{\xi}_i)\right) + \eta_i \right)$ et

$\Theta(e_1, \dots, e_{n+1}) := \min_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \left(v\left(P_{n+2}(1, e_1, \dots, e_{n+1}, \tilde{\xi}_i)\right) + \eta_i \right)$. Alors

$$\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, \bar{e}) = \min\left(\Omega(e_1, \dots, e_n), \Theta(e_1, \dots, e_{n+1})\right).$$

D'après la remarque 2.3.9, il existe $Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_{\frac{n(n+1)}{2}}]$, tels que

pour tous $e_1, \dots, e_{n+1} \in E_L$, et tous $\tilde{\xi} \in L$, on ait

$P_{n+2}(1, e_1, \dots, e_{n+1}, \tilde{\xi}) = e_{n+1} - Q_0(\tilde{\xi}) - \sum_{1 \leq l \leq n} Q_l(\tilde{\xi})e_l$. Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, tel que $\gamma^{(n+2)}(x_k/\tilde{y}_k) + \eta_k$ soit minimal. D'après le lemme 2.3.14, appliqué aux $P_{n+2}(1, e_1, \dots, e_{n+1}, \tilde{\xi}_i)$, avec $e = e_{n+1}$, $\xi_i = Q_0(\tilde{\xi}_i) + \sum_{1 \leq l \leq n} Q_l(\tilde{\xi}_i)e_l$, et $v(a_i) = \eta_i$, on obtient que pour tous $e_1, \dots, e_{n+1} \in E_L$, et tous $\tilde{\xi} \in L$,

on a $\Theta(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) \leq \Theta(e_1, \dots, e_n, Q_0(\tilde{\xi}_k) + \sum_{1 \leq l \leq n} Q_l(\tilde{\xi}_k)e_l)$. Comme $\Omega(e_1, \dots, e_n)$ ne dépend pas de e_{n+1} , pour tous $e_1, \dots, e_{n+1} \in E_L$

$$\begin{aligned} & \left(\Omega(e_1, \dots, e_n), \Theta(e_1, \dots, e_{n+1}) \right) \\ & \leq \min \left(\Omega(e_1, \dots, e_n), \Theta(e_1, \dots, e_n, Q_0(\tilde{\xi}_k) + \sum_{1 \leq l \leq n} Q_l(\tilde{\xi}_k)e_l) \right). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\delta_{n+1,m}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, e_1, \dots, e_{n+1}) \leq \delta_{n+1,m}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_n, Q_0(\tilde{\xi}_k) + \sum_{1 \leq i \leq n} Q_k(\tilde{\xi}_k)e_i)).$$

□

Démonstration de la proposition 2.3.13. On va raisonner par induction sur n .

Pour $n = 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, tout $\bar{x} \in K$, et tout $\bar{\eta} \in \Gamma_L$, les $\delta_{m,0}$ au-dessus de E_K et E_L existent, et $\delta_{m,0}(\bar{x}, \bar{\eta}, E_K) = \delta_{m,0}(\bar{x}, \bar{\eta}, E_L) = \min_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} (v(x_i) + \eta_i)$.

Supposons maintenant que la propriété soit vraie au rang n , et montrons-la au rang $n + 1$. Soient \bar{x}, \bar{y} et $\bar{\eta}$ fixés. D'après le lemme 2.3.15, il existe $Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_{\frac{n(n+1)}{2}}]$ et $\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}) \in E_K$ tels que, pour tous $e_1, \dots, e_{n+1} \in E_L$, on ait

$$\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_{n+1})) \leq \delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_n, Q_0(\tilde{\xi}) + \sum_{1 \leq i \leq n} Q_i(\tilde{\xi})e_i)).$$

Posons $\bar{x}' = (x_1 - Q_0(\tilde{\xi})y_{1,n+1}, \dots, x_m - Q_0(\tilde{\xi})y_{m,n+1})$ et $\bar{y}' = (\tilde{y}'_1, \dots, \tilde{y}'_m)$, où $\tilde{y}'_i = (y_{i,1} - Q_1(\tilde{\xi})y_{i,n+1}, \dots, y_{i,n} - Q_n(\tilde{\xi})y_{i,n+1})$. Il est alors facile de vérifier que, pour tous $e_1, \dots, e_n \in E_L$, on a

$$\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_n, Q_0(\tilde{\xi}) + \sum_{1 \leq i \leq n} Q_i(\tilde{\xi})e_i)) = \delta_{m,n}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_n)).$$

Par hypothèse d'induction, il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in E_K$ tels que $\delta_{m,n}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{\eta}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) = \delta_{m,n}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{\eta}, E_L)$. Donc, pour tous $e_1, \dots, e_{n+1} \in E_L$

$$\begin{aligned} \delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_{n+1})) & \leq \delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_n, Q_0(\tilde{\xi}) + \sum_{1 \leq i \leq n} Q_i(\tilde{\xi})e_i)) \\ & \leq \delta_{m,n}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{\eta}, (e_1, \dots, e_n)) \\ & \leq \delta_{m,n}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{\eta}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) \\ & \leq \delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, Q_0(\tilde{\xi}) + \sum_{1 \leq i \leq n} Q_i(\tilde{\xi})\varepsilon_i)). \end{aligned}$$

Ainsi $\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_K)$ et $\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, E_L)$ existent et sont tous deux égaux à $\delta_{m,n+1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, Q_0(\tilde{\xi}) + \sum_{1 \leq i \leq n} Q_i(\tilde{\xi})\varepsilon_i))$. \square

Proposition 2.3.16. *Soient $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, et D un sous-ensemble de E_L , tel que pour tous $x, \bar{y} \in K$, $\gamma_n(x/\bar{y}, E_K(D))$ existe et soit égal à $\gamma_n(x/\bar{y}, E_L)$. Alors $\mathbb{K}(D) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$, et $E_{K(D)} = E_K(D)$. En particulier, si $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et si D est un sous-ensemble quelconque de E_L , alors $\mathbb{K}(D) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$.*

Démonstration. Commençons par montrer, que pour tout $\bar{d} \in D$ et tous $P_0, \dots, P_n \in K[\bar{X}]$, $\gamma_n(P_0(\bar{d})/P_1(\bar{d}), \dots, P_n(\bar{d}), E_K(D))$ existe et est égal à $\gamma_n(P_0(\bar{d})/P_1(\bar{d}), \dots, P_n(\bar{d}), E_L)$. Soient $\bar{d} \in D$ et $P_0, \dots, P_n \in K[\bar{X}]$. Par hypothèse, pour tous $x, \bar{y} \in K$, $\gamma_n(x/\bar{y}, E_K(D)) = \gamma_n(x/\bar{y}, E_L)$. Ainsi, le $E_K(D)$ -espace vectoriel engendré par les coefficients des P_i admet une base, (l_1, \dots, l_r) , séparée au-dessus de E_L . On peut alors écrire $P_i(\bar{X}) = \sum_{j=1}^r P_{i,j}(X)l_j$ avec $P_{i,j} \in E_K(D)[\bar{X}]$. Donc, pour tous $e_1, \dots, e_n \in E_L$, on a

$$\begin{aligned} v\left(P_0(\bar{d}) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(\bar{d})\right) &= v\left(\sum_{j=1}^r (P_{0,j}(\bar{d}) + \sum_{i=1}^n e_i P_{i,j}(\bar{d}))l_j\right) \\ &= \min_{j \in [1,r]} \left(v\left(P_{0,j}(\bar{d}) + \sum_{1 \leq i \leq n} e_i P_{i,j}(\bar{d})\right) + v(l_j) \right). \end{aligned}$$

Posons $\bar{P}_0 = (P_{0,1}(\bar{d}), \dots, P_{0,r}(\bar{d}))$, $\bar{P} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_r)$, où $\tilde{P}_i = (P_{1,i}(\bar{d}), \dots, P_{n,i}(\bar{d}))$, et $\bar{v}(l) = (v(l_1), \dots, v(l_r))$. Alors, pour tous $e_1, \dots, e_n \in E_L$,

$$v\left(P_0(\bar{d}) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(\bar{d})\right) = \delta_{r,n}(\bar{P}_0, \bar{P}, \bar{v}(l), (e_1, \dots, e_n)).$$

\bar{P}_0 et \bar{P} ont leurs coefficients dans $E_K(D)$, et $\mathbb{E}_{\mathbb{K}(D)} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$, car $E_K(D) \subseteq E_L$. Donc d'après la proposition 2.3.13, $\delta_{r,n}(\bar{P}_0, \bar{P}, \bar{v}(l), E_K(D))$ et $\delta_{r,n}(\bar{P}_0, \bar{P}, \bar{v}(l), E_L)$ existent et sont égaux. Ainsi, $\gamma_n(P_0(\bar{d})/P_1(\bar{d}), \dots, P_n(\bar{d}), E_K(D))$ existe, et est égal à $\gamma_n(P_0(\bar{d})/P_1(\bar{d}), \dots, P_n(\bar{d}), E_L)$. Un simple jeu d'écriture sur les valuations montre que le résultat reste vrai si $P_0, \dots, P_n \in K(\bar{X})$. Donc pour tous $x, \bar{y} \in K(D)$, $\gamma_n(x/\bar{y}, E_K(D))$ existe et est égal à $\gamma_n(x/\bar{y}, E_L)$. Comme $E_K(D) \subseteq E_{K(D)}$, on en déduit que $\mathbb{K}(D) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$. De plus, comme $x \in E_L \cap K(D)$ est équivalent à $\gamma_1(x/1, E_L) = \infty$, qui est équivalent, d'après ce que nous venons de montrer, à $\gamma_1(x/1, E_K(D)) = \infty$, qui est équivalent à $x \in E_K(D)$, on a $E_L \cap K(D) = E_K(D)$, c'est-à-dire $E_{K(D)} = E_K(D)$. \square

Lemme 2.3.17. *Soient $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $x \in L$. Si $[\Gamma_{K(E_L)}(v(x)) : \Gamma_{K(E_L)}] = [K(x) : K]$, alors $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $E_{K(x)} = E_K$.*

Démonstration. Posons $d := [K(x) : K]$. Pour montrer le lemme, il est suffisant, pour des raisons analogues à celles de la preuve de la proposition précédente, de montrer que pour tous $P_0, \dots, P_n \in K_{d-1}[X]$, $\gamma_n(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_K)$ existe et est égal à $\gamma_n(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_L)$. Soient $P_0, \dots, P_n \in K_{d-1}[X]$, avec $P_i(X) = \sum_{k=0}^{d-1} a_{i,k} X^k$. Pour tous $e_1, \dots, e_n \in E_L$,

$$\begin{aligned} v\left(P_0(x) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x)\right) &= v\left(\sum_{j=0}^{d-1} (a_{0,j} + \sum_{i=1}^n e_i a_{i,j}) x^j\right) \\ &= \min_{j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket} \left(v\left(a_{0,j} + \sum_{i=1}^n e_i a_{i,j}\right) + v(x^j) \right) \\ &\quad (\text{car } [K(x) : K] = [\Gamma_{K(E_L)}(v(x)) : \Gamma_{K(E_L)}]) \\ &= \delta_{d,n}(\overline{a_0}, \overline{a}, \overline{v(x)}, (e_1, \dots, e_n)), \end{aligned}$$

où $\overline{a_0} = (a_{0,0}, \dots, a_{0,d-1})$, $\overline{a} = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{d-1})$, avec $\tilde{a}_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})$, et $\overline{v(x)} = (0, v(x), 2v(x), \dots, (d-1)v(x))$. On montre, grâce à la proposition 2.3.13, de la même façon que dans la démonstration de la proposition précédente, que cela implique que $\gamma_n(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_K)$ existe et est égal à $\gamma_n(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_L)$. \square

Lemme 2.3.18. *Soient $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{L}$ et $x \in L$ un élément de valuation nulle. Si $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] = [K(x) : K]$, alors $\mathbb{K}(x) \subseteq_{\gamma} \mathbb{L}$ et $E_{\mathbb{K}(x)} = E_K$.*

Démonstration. Posons $d := [K(x) : K]$. Pour prouver le lemme, il est suffisant de montrer que pour tout $P_0, \dots, P_n \in K_{d-1}[X]$, $\gamma_n(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_K)$ existe et est égal à $\gamma_n(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_L)$. Soient $P_0, \dots, P_n \in K_{d-1}[X]$, avec $P_i(X) = \sum_{k=0}^{d-1} a_{i,k} X^k$, et $e_1, \dots, e_n \in E_L$. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{d-1} p_i X^i \in K[E_L]_{d-1}[X]$, où $p_i = a_{0,i} + \sum_{j=1}^n e_j a_{j,i}$. Alors

$$\begin{aligned} v\left(P_0(x) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x)\right) &= v(P(x)) \\ &= \min_{i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket} \left(v(p_i) \right) \\ &\quad (\text{car } [(K(E_L)/v)(x/v) : K(E_L)/v] = [K(x) : K]) \\ &= \min_{i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket} \left(v\left(a_{0,i} + \sum_{j=1}^n e_j a_{j,i}\right) \right) \\ &= \delta_{d,n}(\overline{a_0}, \overline{a}, \overline{0}, (e_1, \dots, e_n)), \end{aligned}$$

où $\bar{a}_0 = (a_{0,0}, \dots, a_{0,d-1})$, $\bar{a} = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{d-1})$, avec $\tilde{a}_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})$, et $\bar{0} = (0, \dots, 0)$. On montre, grâce à la proposition 2.3.13, comme précédemment, que cela implique que $\gamma_n(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_K)$ existe et est égal à $\gamma_n(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_L)$. \square

Lemme 2.3.19. *Soient $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$, $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de K , suite de degré d (vu comme élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) au-dessus de K . S'il existe une pseudo-limite $x \in L$ de $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ telle que $[K(x) : K] = d$, que $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$, et que $E_{K(x)} = E_K$, alors pour toute pseudo-limite $y \in L$ de $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ telle que $[K(y) : K] = d$, on a $\mathbb{K}(y) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $E_{K(y)} = E_K$.*

Démonstration. Pour prouver le lemme il est suffisant de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $P_0, P_1, \dots, P_n \in K_{d-1}[X]$ (avec la convention $d-1 = \infty$ si $d = \infty$) et tous $e_1, \dots, e_n \in E_L$, la suite $\left(v\left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x_\alpha) \right) \right)_{\alpha < \beta}$ est asymptotiquement constante (ce qui revient, en d'autres termes, à montrer que d est aussi le degré de la suite pseudo-convergente $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ au-dessus de $K(E_L)$). On va raisonner par l'absurde. Supposons que cette propriété ne soit pas vraie. Il existerait alors un plus petit entier n pour lequel il existerait $P_0, P_1, \dots, P_n \in K_{d-1}[X]$ et $e_1, \dots, e_n \in E_L$ tels que la suite $\left(v\left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x_\alpha) \right) \right)_{\alpha < \beta}$ soit strictement croissante à partir d'un certain ordinal α_0 . Par définition de d , (e_1, \dots, e_n) ne peut pas appartenir à $(E_K)^n$, donc quitte à ré-indexer les P_i , on peut supposer que $e_n \notin E_K$. Par hypothèse il existerait $h_1, \dots, h_n \in E_K$ tels que $v\left(P_0(x) + \sum_{i=1}^n h_i P_i(x) \right) = \gamma\left(P_0(x)/P_1(x), \dots, P_n(x), E_L \right)$.

Comme $P_0(X) + \sum_{i=1}^n h_i P_i(X) \in K_{d-1}([X])$, la suite $\left(v\left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n h_i P_i(x_\alpha) \right) \right)_{\alpha < \beta}$ serait constante à partir d'un certain ordinal α_1 . Pour $\alpha > \max(\alpha_0 + 1, \alpha_1)$ on aurait

$$\begin{aligned} v\left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x_\alpha) \right) &< v\left(P_0(x) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x) \right) \\ &\leq v\left(P_0(x) + \sum_{i=1}^n h_i P_i(x) \right) \\ &= v\left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n h_i P_i(x_\alpha) \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
v\left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x_\alpha)\right) &= v\left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x_\alpha) - \left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n h_i P_i(x_\alpha)\right)\right) \\
&= v\left(\sum_{i=1}^n (e_i - h_i) P_i(x_\alpha)\right) \\
&= v(e_n - h_n) + v\left(P_n(x_\alpha) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i - h_i}{e_n - h_n} P_i(x_\alpha)\right) \\
&\quad (e_n - h_n \neq 0 \text{ car } e_n \notin E_K).
\end{aligned}$$

Par minimalité de n , la suite $\left(v\left(P_n(x_\alpha) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i - h_i}{e_n - h_n} P_i(x_\alpha)\right)\right)_{\alpha < \beta}$ serait asymptotiquement constante. Il en serait donc de même de la suite $\left(v\left(P_0(x_\alpha) + \sum_{i=1}^n e_i P_i(x_\alpha)\right)\right)_{\alpha < \beta}$, ce qui impliquerait une contradiction. \square

2.3.3 Résultats sur des paires fortement séparées spécifiques

Notation. Soit \mathbb{K} une paire de corps valués fortement séparée telle que Γ_{E_K} possède un plus petit élément strictement positif noté 1. On emploiera la notation $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$ si pour tout $\alpha \in \Gamma_K$ il existe $\varepsilon \in \Gamma_{E_K}$ tel que $0 \leq \alpha - \varepsilon < 1$.

Dans le reste de cette sous-section \mathbb{L} désignera une paire de corps valués fortement séparée telle que $1 := v(p)$ soit le plus petit élément strictement positif de Γ_{E_L} .

Lemme 2.3.20. Soient \mathbb{K} une sous-paire de corps valués de \mathbb{L} , vérifiant $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, et D un sous-ensemble de E_L . Alors $\mathbb{K}(D) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$, $E_{\mathbb{K}(D)} = E_K(D)$, et $\frac{\Gamma_{\mathbb{K}(D)}}{\Gamma_{E_{\mathbb{K}(D)}}} \subseteq [0, 1[$.

Démonstration. D'après la proposition 2.3.16, $\mathbb{K}(D) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$, $E_{\mathbb{K}(D)} = E_K(D)$. D'après le corollaire 2.3.11, $\Gamma_{\mathbb{K}(D)} = \Gamma_K + \Gamma_{E_K}(D)$, donc $\frac{\Gamma_{\mathbb{K}(D)}}{\Gamma_{E_{\mathbb{K}(D)}}} \subseteq [0, 1[$. \square

Lemme 2.3.21. Soient \mathbb{K} une sous-paire de corps valués de \mathbb{L} , vérifiant $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, et D un sous-corps de E_L qui contient E_K . Alors $K[D]/v = K/v[D/v]$, et $K(D)/v = K/v(D/v)$.

Démonstration. Commençons par prouver que $K[D]/v = K/v[D/v]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $K[D]_n := \left\{ \sum_{i=1}^n d_i k_i; d_i \in D, k_i \in K \right\}$. On va montrer, en

procédant par induction, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K[D]_n/v \subseteq K/v[D/v]$. Cela impliquera que $K[D]/v = K/v[D/v]$.

Pour $n = 1$. Soient $d \in D$ et $k \in K$ tels que $v(dk) = 0$. Par hypothèse, il existe $e_k \in E_K$ tel que $0 \leq v(k) - v(e_k) < 1$. D'où $v(e_k) \leq v(k) < 1 + v(e_k)$, puis $v(de_k) \leq 0 < 1 + v(de_k)$, c'est-à-dire $-1 < v(de_k) \leq 0$. Donc $v(de_k) = 0$, car -1 est le plus grand élément négatif de Γ_{E_L} . Ainsi $v(k) = v(e_k)$, et en écrivant $dk = \left(\frac{k}{e_k}\right)(de_k)$, on voit que $dk \in K/v[D/v]$.

Supposons maintenant que $K[D]_n/v \subseteq K/v[D/v]$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n+1} d_i k_i$ avec $d_i \in D$ et $k_i \in K$, tel que $v(x) = 0$. Comme x est non nul, on peut supposer, quitte à ré-indexer la somme, que d_1 et k_1 sont non nuls. Soient $\xi_1, \dots, \xi_n \in E_K$ tels que $v(x_1 + \sum_{i=1}^n \xi_i k_{i+1}) = \gamma_n(k_1/k_2, \dots, k_{n+1})$. Posons $k = \sum_{i=1}^n \xi_i k_{i+1}$. Comme $v(k) = \gamma_n(k_1/k_2, \dots, k_{n+1})$, $v(d_1 k) \geq v(x)$, c'est-à-dire $v(d_1 k) \geq 0$. On en déduit que $v(x - d_1 k) \geq 0$, puis que $x/v = (x - d_1 k)/v + (d_1 k)/v$. Comme $x - d_1 k \in K[D]_n$ et $d_1 k \in K[D]_1$, par hypothèse d'induction, $(x - d_1 k)/v \in K/v[D/v]$ et $(d_1 k)/v \in K/v[D/v]$, d'où $x/v \in K/v[D/v]$. Ainsi, $K[D]_{n+1}/v \subseteq K/v[D/v]$. Ce qui termine de montrer l'induction.

Montrons maintenant que $K(D)/v = K/v(D/v)$. Soient $\alpha, \beta \in K[D]$ avec $\beta \neq 0$ et $v(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$. D'après le corollaire 2.3.11, il existe $d \in D$ et $k \in K$, tels que $v(dk) = v(\alpha) = v(\beta)$. Notons $\alpha' := \frac{\alpha}{dk}$ et $\beta' := \frac{\beta}{dk}$. Comme $\alpha'/v, \beta'/v \in K[D]/v$, d'après ce que nous avons montré précédemment, $\alpha'/v, \beta'/v \in K/v[D/v]$. Ainsi $(\frac{\alpha}{\beta})/v = \frac{\alpha'/v}{\beta'/v} \in K/v(D/v)$. \square

Lemme 2.3.22. Soient $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{L}$ tel que $\frac{\Gamma_{\mathbb{K}}}{\Gamma_{E_{\mathbb{K}}}} \subseteq [0, 1[$ et x un élément de L de valuation nulle. Si $\mathbb{K}(x) \subseteq_{\gamma} \mathbb{L}$ et $E_{\mathbb{K}(x)} = E_{\mathbb{K}}$, alors $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] = [K/v(x/v) : K/v]$.

Démonstration. Il est clair que

$$[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] \leq [K/v(x/v) : K/v].$$

Pour montrer que $[(K(x, E_L))/v : (K(E_L))/v] = [(K(x))/v : K/v]$, raisonnons par l'absurde et supposons que

$$[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] < [K/v(x/v) : K/v].$$

En particulier $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v]$ serait fini. Il existerait donc P un polynôme minimal de x/v sur $K(E_L)/v$. D'après le lemme 2.3.21, $K(E_L)/v = K/v(E_L/v)$, donc quitte à multiplier P par un élément non nul de $K/v(E_L/v)$, on pourrait supposer que P appartiendrait à $K/v[E_L/v][X]$. Pour tout $n \in$

\mathbb{N}^* , notons

$$K/v[X][E_L/v]_n := \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i P_i ; \xi_i \in E_L/v, P_i \in K/v[X] \right\}.$$

Soit n le plus petit entier tel que $P \in K/v[X][E_L/v]_n$. Quitte à remplacer P par αP , avec $\alpha \in (K/v(E_L/v))^*$, on pourrait supposer qu'il n'existe aucun entier m strictement inférieur à n et aucun $Q \in \{\alpha P ; \alpha \in (K/v(E_L/v))^*\}$ tels que $Q \in K/v[X][E_L/v]_m$. Il existerait alors $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in (E_M/v)^*$, et $P_1, \dots, P_n \in K/v[X]$ tels que $P = \sum_{i=1}^n \epsilon_i P_i$. On pourrait supposer sans perte de généralité que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg(P_i) \leq \deg(P)$. On aurait nécessairement $n \geq 2$, car si n était égal à 1, quitte à multiplier P par un élément non nul de E_L/v , on aurait que P appartiendrait à $K/v[X]$, ce qui contredirait l'hypothèse $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] < [K/v(x/v) : K/v]$. Par minimalité de n , aucun des P_i ne serait le polynôme nul. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg(P_i) \leq \deg(P)$, aucun des P_i ne s'annulerait en x/v , car cela contredirait l'hypothèse $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] < [K/v(x/v) : K/v]$. Montrons maintenant que P_1, \dots, P_n seraient linéairement indépendants au-dessus de E_L/v . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in E_L/v$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \zeta_i P_i = 0$. Quitte à permuter les P_i , on pourrait supposer que $\zeta_1 \neq 0$, et quitte à multiplier tous les ζ_i par $\frac{\epsilon_1}{\zeta_1}$, on pourrait supposer que $\zeta_1 = \epsilon_1$. On aurait alors $P = \sum_{i=2}^n (\epsilon_i - \zeta_i) P_i$, ce qui contredirait la minimalité de n . Donc P_1, \dots, P_n seraient linéairement indépendants au-dessus de E_L/v . Soient $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{O}_K[X]$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q_i/v = P_i$. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_i(x/v) \neq 0$, on aurait $v(Q_i(x)) = 0$. Montrons maintenant que la famille $(Q_2(x), \dots, Q_n(x))$ serait séparée au-dessus de E_L . Pour ce faire, il serait suffisant de prouver que pour tous $e_2, \dots, e_n \in E_L$ avec $v(e_2) = \dots = v(e_n) = 0$, on aurait $v\left(\sum_{i=2}^n e_i Q_i(x)\right) = 0$. Supposons par l'absurde que cela ne soit pas le cas, et qu'il existe $e_2, \dots, e_n \in E_L$ avec $v(e_2) = \dots = v(e_n) = 0$ et que $v\left(\sum_{i=2}^n e_i Q_i(x)\right) > 0$. On aurait alors, $\sum_{i=2}^n e_i/v P_i(x/v) = 0$. Notons $R = \sum_{i=2}^n e_i/v P_i$. Comme $\deg(R) \leq \deg(P)$, ou bien $R = 0$ ou bien $R = \alpha P$ avec $\alpha \in (K/v(E_L/v))^*$. Par minimalité de n , le second cas ne pourrait pas se produire, on aurait donc $R = 0$. Cela contredirait l'indépendance linéaire de P_1, \dots, P_n au-dessus de E_L/v , ce qui serait absurde, donc la famille $(Q_2(x), \dots, Q_n(x))$ serait séparée au-dessus de E_L . Quitte à diviser P par ϵ_1 , on pourrait supposer que $\epsilon_1 = 1$. Soient $e_2, \dots, e_n \in E_L/v$ tels que $e_2/v = \epsilon_2, \dots, e_n/v = \epsilon_n$. Puisque $P_1(x/v) + \sum_{i=2}^n \epsilon_i P_i(x/v) = 0$, on aurait $v(Q_1(x) + \sum_{i=2}^n e_i Q_i(x)) > 0$. Donc

$\gamma_{n-1}(Q_1(x)/(Q_2(x), \dots, Q_n(x)), E_L) > 0$. Par hypothèse, il existerait donc $h_2, \dots, h_n \in E_M$ tels que $v(Q_1(x) + \sum_{i=2}^n h_i Q_i(x)) > 0$. Comme $v(Q_1(x)) = 0$, on aurait aussi $v(\sum_{i=2}^n h_i Q_i(x)) = 0$. Puisque la famille $(Q_2(x), \dots, Q_n(x))$ serait séparée au-dessus de E_L , et que pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $v(Q_i(x)) = 0$, on aurait que pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $v(h_i) \geq 0$. Notons alors $S = P_1 + \sum_{i=2}^n h_i/v P_i$. Par construction $S \in K/v[X]$ et $S(x/v) = 0$. Comme $\deg(S) \leq \deg(P)$, ou bien $S = 0$ ou bien $S = \alpha P$ avec $\alpha \in (K/v(E_L/v))^*$. Comme $S \in K/v[X]$, on ne pourrait pas avoir $S = \alpha P$ avec $\alpha \in (K/v(E_L/v))^*$, car cela contredirait l'hypothèse $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] < [K/v(x/v) : K/v]$. Comme P_1, \dots, P_n seraient linéairement indépendants au-dessus de E_L/v , S ne pourrait pas non plus être le polynôme nul. Ce qui serait absurde, donc $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] = [K/v(x/v) : K/v]$. \square

Lemme 2.3.23. Soient $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ tel que $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, et x un élément de L de valuation nulle tel que $[K(x) : K] = [K/v(x/v) : K/v]$. Alors il y a équivalence entre :

1. $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] = [K(x) : K]$,
2. $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$, $E_{K(x)} = E_K$, et $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} \subseteq [0, 1[$.

Démonstration. 1) \implies 2). D'après le lemme 2.3.18, $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $E_{K(x)} = E_K$. Comme $[K(x) : K] = [K/v(x/v) : K/v]$, on a $\Gamma_{K(x)} = \Gamma_K$, d'où $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} \subseteq [0, 1[$.

2) \implies 1). D'après le lemme précédent $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] = [K/v(x/v) : K/v]$, et comme $[K(x) : K] = [K/v(x/v) : K/v]$, on a $[K(E_L)/v(x/v) : K(E_L)/v] = [K(x) : K]$. \square

Lemme 2.3.24. Soient $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ tel que $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, et x un élément de L . S'il existe $e_x \in E_K$ tel que $0 \leq v(x) - v(e_x) < 1$, alors $[\Gamma_{K(E_L)}(v(x)) : \Gamma_{K(E_L)}] = [\Gamma_K(v(x)) : \Gamma_K]$.

Démonstration. Posons $d := [\Gamma_{K(E_L)}(v(x)) : \Gamma_{K(E_L)}]$, et $d' := [\Gamma_K(v(x)) : \Gamma_K]$. L'inégalité $d \leq d'$ étant triviale, on montrera seulement que $d \geq d'$. Prouvons dans un premier temps, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $e_{x^n} \in E_K$, tel que $0 \leq v(x^n) - v(e_{x^n}) < 1$. Par hypothèse, il existe $e_x \in K$ tel que $0 \leq v(x) - v(e_x) < 1$. D'où $0 \leq v(x^n) - v(e_x^n) < n$. Il existe donc $l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, tel que $l \leq v(x^n) - v(e_x^n) < l+1$. Alors $e_{x^n} = p^{-l} e_x^n$ convient. Par définition de d , $v(x^d) \in \Gamma_{K(E_L)}$. D'après le corollaire 2.3.11, $\Gamma_{K(E_L)} = \Gamma_K + \Gamma_{E_L}$. Il

existe donc $e \in E_L$ et $k \in K$, tels que $v(x^d) = v(ek)$. Par hypothèse il existe $e_k \in K$ tel que $0 \leq v(k) - v(e_k) < 1$. D'où $0 \leq v(x^d) - v(ee_k) < 1$. On en déduit que $-1 < v(e_{x^d}) - v(ee_k) < 1$. Comme 1 et -1 sont, respectivement, le plus petit élément strictement positif et le plus grand élément strictement négatif de Γ_{E_L} , $v(e_{x^d}) = v(ee_k)$. Ainsi $v(x^d) = v(\frac{e_{x^d}}{e_k}k)$, donc $v(x^d) \in \Gamma_K$ et $d \geq d'$. \square

Lemme 2.3.25. Soient $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ tel que $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, et x un élément de L tel que $[K(x) : K] = [\Gamma_K(v(x)) : \Gamma_K]$. Alors il y a équivalence entre :

1. il existe $e_k \in E_K$ tel que $0 \leq v(x) - v(e_k) < 1$,
2. $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$, $E_{K(x)} = E_K$, et $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} \subseteq [0, 1[$.

Démonstration. 2) \implies 1) est trivial.

Montrons que 1) \implies 2). D'après le lemme précédent, $[\Gamma_{K(E_L)}(v(x)) : \Gamma_{K(E_L)}] = [\Gamma_K(v(x)) : \Gamma_K]$. Donc $[\Gamma_{K(E_L)}(v(x)) : \Gamma_{K(E_L)}] = [K(x) : K]$. D'après le lemme 2.3.17, $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $E_{K(x)} = E_K$. Soit $h \in K(x)$. Comme $[K(x) : K] = [\Gamma_K(v(x)) : \Gamma_K]$, on a $[\Gamma_{K(x)} : \Gamma_K] = [\Gamma_K(v(x)) : \Gamma_K]$ et $\Gamma_{K(x)} = \Gamma_K(v(x))$. Ainsi, il existe $l \in \mathbb{N}$ et $k \in K$ tels que $v(h) = v(x^l) + v(k)$. Soit $e_k \in E_K$ tel que $0 \leq v(k) - v(e_k) < 1$. On montre comme dans le lemme précédent qu'il existe $e_{x^l} \in E_K$ tel que $0 \leq v(x^l) - v(e_{x^l}) < 1$. Alors, $0 \leq v(h) - v(e_k e_{x^l}) < 2$. Il existe donc $j \in \{0, 1\}$ tel que $j \leq v(h) - v(e_k e_{x^l}) < j + 1$. Posons $e_h = p^j e_k e_{x^l}$. Alors $e_h \in E_K$ et $0 \leq v(h) - v(e_h) < 1$. Donc $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} \subseteq [0, 1[$. \square

2.4 Structures du type $(W(k)^{alg}, W(k))$

2.4.1 Présentation du résultat

Dans le reste de cette section \mathcal{L} désignera le langage défini par $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{div} \cup \{E\}$, où E est un symbole de prédicat unaire.

T désignera la \mathcal{L} -théorie constituée :

1. des \mathcal{L}_{div} -axiomes des corps valués algébriquement clos de caractéristiques $(0, p)$,
2. des axiomes exprimant que E est un sous-corps hensélien,
3. des axiomes exprimant que la paire est fortement séparée,
4. de l'axiome exprimant que E/v est un corps parfait,
5. des axiomes exprimant que Γ_E est un \mathbb{Z} -groupe dont $1 := v(p)$ est le plus petit élément strictement positif,

6. de l'axiome

$$\forall x \neq 0, \exists e \in E, v(e) \leq v(x) < v(e) + 1.$$

Notre but sera de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. *Soient \mathbb{M} et \mathbb{M}' deux modèles de T . Si $(M/v, E_M/v) \equiv (M'/v, E_{M'}/v)$, alors $\mathbb{M} \equiv \mathbb{M}'$.*

Jerome Keisler a montré dans [Kei64] que pour tous corps non réels clos E_1 et E_2 et tous corps algébriquement clos M_1 et M_2 contenant respectivement E_1 et E_2 on a : $E_1 \equiv E_2$, $E_1 \neq M_1$, et $E_2 \neq M_2$ implique $(E_1, M_1) \equiv (E_2, M_2)$. Si \mathbb{M} est un modèle de T , comme E_M/v est un corps de caractéristique p , il n'est pas réel clos. On peut donc reformuler le théorème 2.4.1 de la façon suivante :

Théorème 2.4.2. *Soient \mathbb{M} et \mathbb{M}' deux modèles de T .*

- Si $E_M/v \neq M/v$, si $E_{M'}/v \neq M'/v$, et si $E_M/v \equiv E_{M'}$, alors $\mathbb{M} \equiv \mathbb{M}'$.
- Si $E_M/v = M/v$ et si $E_{M'}/v = M'/v$, alors $\mathbb{M} \equiv \mathbb{M}'$.

Corollaire 2.4.3. *Pour tous corps parfait k et k' de caractéristique p si $k \equiv k'$ alors $(W(k)^{alg}, W(k)) \equiv (W(k')^{alg}, W(k'))$.*

Démonstration. Soient k et k' des corps parfait k et k' de caractéristique p tels que $k \equiv k'$. D'après la remarque 2.3.6, les paire de corps valués $(W(k)^{alg}, W(k))$ et $(W(k')^{alg}, W(k'))$ sont fortement séparées. Ainsi, les paires $(W(k)^{alg}, W(k))$ et $(W(k')^{alg}, W(k'))$ sont des modèles de T . Si k et k' sont algébriquement clos, on a $W(k)^{alg}/v = W(k)/v (= k)$ et $W(k')^{alg}/v = W(k')/v (= k')$. D'après le théorème 2.4.2, on en déduit que $(W(k)^{alg}, W(k)) \equiv (W(k')^{alg}, W(k'))$. Si k et k' ne sont pas algébriquement clos, on a $W(k)^{alg}/v \neq W(k)/v$ et $W(k')^{alg}/v \neq W(k')/v$. D'après le théorème 2.4.2, on en déduit que $(W(k)^{alg}, W(k)) \equiv (W(k')^{alg}, W(k'))$. \square

2.4.2 Préliminaires et notations

Dans cette section (\mathbb{M}, s) et (\mathbb{M}', s') désigneront deux modèles de T , saturés de cardinalité \aleph_1 , munis de sections totales.

Définition 2.4.4. *Soit $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{M}$. On dira que \mathbb{K} est une bonne sous-paire de \mathbb{M} si :*

- K est dénombrable,
- $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{M}$,
- $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$,
- $s(\Gamma_{E_K}) \subseteq E_K$

— E_K/v est parfait.

Définition 2.4.5. Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , et $f : K \rightarrow K'$ un \mathcal{L} -isomorphisme. On dira que f est un bon isomorphisme partiel si :

- f commute aux sections, c'est-à-dire : $f \circ s = s' \circ f_\Gamma$,
- il existe un isomorphisme de groupe ordonné g de Γ_{E_M} dans $\Gamma_{E_{M'}}$, qui prolonge f_Γ ,
- il existe un isomorphisme de corps h , de M/v dans M'/v , vérifiant $h(E_M/v) = E_{M'}/v$, qui prolonge f/v .

Pour démontrer le théorème 2.4.1, on se ramènera à l'étude des bonnes sous-paires et des bons isomorphismes partiels entre bonnes sous-paires grâce à la proposition suivante :

Proposition 2.4.6. Soient respectivement \mathbb{M} et \mathbb{M}' deux modèles saturés de cardinalité \aleph_1 de T munis de sections totales s et s' de Γ_{E_M} et de $\Gamma_{E_{M'}}$, vérifiant $s(1) = p$ et $s'(1) = p$. Si $(M/v, E_M/v) \equiv (M'/v, E_{M'}/v)$, alors la famille \mathcal{F} des bons isomorphismes partiels entre bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' est non-vide et a la propriété de va-et-vient.

Le théorème 2.4.1 s'en déduit facilement. En effet, soient \mathbb{L} et \mathbb{L}' des modèles de T tels que $(L/v, E_L/v) \equiv (M'/v, E_{L'}/v)$. Il existe sous l'hypothèse du continu, \mathbb{M} et \mathbb{M}' deux modèles saturés de cardinalité \aleph_1 de T tels que $\mathbb{M} \equiv \mathbb{L}$ et $\mathbb{M}' \equiv \mathbb{L}'$. En particulier, $(M/v, E_M/v) \equiv (M'/v, E_{M'}/v)$. On peut munir \mathbb{M} d'un section partielle $s : \mathbb{Z} \rightarrow M$ vérifiant $s(1) = p$. D'après le fait 0.0.5, $\Gamma_{E_M} = \mathbb{Z} \oplus D$, où D est un sous-groupe divisible de Γ_{E_M} . Comme D est divisible et comme M \aleph_1 -saturé, il est facile de voir que l'on peut prolonger s en une section totale de Γ_{E_M} . De même on peut munir \mathbb{M}' d'une section totale s' de $\Gamma_{E_{M'}}$ tel que $s'(1) = p$. D'après la proposition précédente, $\mathbb{M} \equiv \mathbb{M}'$, donc $\mathbb{L} \equiv \mathbb{L}'$.

On va maintenant se consacrer à la démonstration de la proposition 2.4.6.

2.4.3 Extensions de bonnes sous-paires

Extensions par des éléments de \mathbf{E}

Lemme 2.4.7. Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et e et e' des éléments de E_M et $E_{M'}$. Si l'on peut prolonger $f|_{E_K}$ en un isomorphisme de corps valué de $E_K(e)$ sur $E_{K'}(e')$ vérifiant $f(e) = e'$, alors on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme de $K(e)$ sur $K'(e')$.

Démonstration. Commençons par montrer que l'on peut étendre f en un \mathcal{L}_{div} -isomorphisme partiel de domaine $K(e)$ vérifiant $f(e) = e'$. Pour cela il

est suffisant de prouver que pour tous $P, Q \in K[X]$, on a

$$v(P(e)) < v(Q(e)) \iff v(f(P)(e')) < v(f(Q)(e')).$$

Soient $P, Q \in K[X]$. Comme $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{M}$, il existe des éléments k_1, \dots, k_n de K tels que le E_K -espace-vectoriel engendré par les k_i contiennent les coefficients de P et de Q , et que la suite (k_1, \dots, k_n) soit séparée au-dessus de E_M . Comme $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, on peut supposer que pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq v(k_i) < 1$. Comme f est un \mathcal{L} -isomorphisme, la suite $(f(k_1), \dots, f(k_n))$ est séparée au-dessus de $E_{K'}$. Comme $\mathbb{K}' \subseteq_\gamma \mathbb{M}'$, la suite $(f(k_1), \dots, f(k_n))$ est séparée au-dessus de $E_{M'}$. Il existe alors $S_1, \dots, S_n, T_1, \dots, T_n \in E_K[X]$ tels que $P(X) = \sum_{i=1}^n S_i(X)k_i$ et $Q(X) = \sum_{i=1}^n T_i(X)k_i$. Notons

$$J_P := \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket ; v(S_j(e)) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(S_i(e)))\}$$

et

$$J_Q := \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket ; v(T_j(e)) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(T_i(e)))\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} v(P(e)) < v(Q(e)) &\iff v\left(\sum_{i=1}^n S_i(e)k_i\right) < v\left(\sum_{i=1}^n T_i(e)k_i\right) \\ &\iff \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(S_i(e)k_i)) < \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(T_i(e)k_i)) \\ &\iff \left[\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(S_i(e))) < \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(T_i(e))) \right] \vee \\ &\quad \left[\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(S_i(e))) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(T_i(e))) \wedge \min_{j \in J_P} (v(k_j)) < \min_{j \in J_Q} (v(k_j)) \right] \\ &\quad \text{(car pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v(k_i) < 1) \\ &\iff \left[\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(f(S_i)(e'))) < \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(f(T_i)(e'))) \right] \vee \\ &\quad \left[\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(f(S_i)(e))) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(f(T_i)(e))) \wedge \right. \\ &\quad \left. \min_{j \in J_P} (v(f(k_j))) < \min_{j \in J_Q} (v(f(k_j))) \right] \\ &\iff \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(f(S_i)(e')f(k_i))) < \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (v(f(T_i)(e')f(k_i))) \\ &\iff v\left(\sum_{i=1}^n f(S_i)(e')f(k_i)\right) < v\left(\sum_{i=1}^n f(T_i)(e')f(k_i)\right) \\ &\iff v(f(P)(e')) < v(f(Q)(e')). \end{aligned}$$

Ainsi on peut prolonger f en un \mathcal{L}_{div} -isomorphisme partiel de domaine $K(e)$ vérifiant $f(e) = e'$. Pour montrer que f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel, il est maintenant suffisant de prouver que pour tous $P, Q \in K[X]$ avec $Q(e) \neq 0$, on a

$$\frac{P(e)}{Q(e)} \in E_M \iff \frac{f(P)(e')}{f(Q)(e')} \in E_{M'}.$$

Soient $P, Q \in K[X]$ vérifiant $Q(e) \neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{P(e)}{Q(e)} \in E_M &\iff \frac{P(e)}{Q(e)} \in E_{K(e)} \\ &\iff \frac{P(e)}{Q(e)} \in E_K(e), \text{ d'après la proposition 2.3.16} \\ &\iff \frac{f(P)(e')}{f(Q)(e')} \in E_{K'}(e'), \text{ car } f \text{ est un } \mathcal{L}_{div}\text{-isomorphisme} \\ &\iff \frac{f(P)(e')}{f(Q)(e')} \in E_{K'}(e'), \text{ d'après la proposition 2.3.16} \\ &\iff \frac{f(P)(e')}{f(Q)(e')} \in E_{M'}. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.4.8. *Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et e un élément de E_M tel que $E_K(e)$ soit une extension immédiate de E_K . Alors $\mathbb{K}(e)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} , et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(e)$.*

Démonstration. Comme respectivement E_M et $E_{M'}$ sont \aleph_1 -saturés en tant que modèles de $T_{\uparrow E}$, il existe d'après le fait 2.2.3, des extensions immédiates maximales E_I et $E_{I'}$ de $E_K(e)$ et $E_{K'}$ contenues dans E_M et $E_{M'}$. Comme $E_K(e)$ est une extension immédiate de E_K , E_I est aussi une extension immédiate maximale de E_K . D'après le fait 0.0.12, il existe un isomorphisme de corps valué h , de E_I sur $E_{I'}$, qui prolonge $f_{\uparrow E_K}$. Notons $e' = h(e)$. D'après le lemme 2.4.7, on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel de domaine $K(e)$ vérifiant $f(e) = e'$. D'après le lemme 2.3.20, $\mathbb{K}(e) \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$ et $\frac{\Gamma_{K(e)}}{\Gamma_{E_K(e)}} \subseteq [0, 1[$. Comme $\Gamma_{E_K(e)} = \Gamma_{E_K}$ et $(E_{K(e)})/v = E_K/v$, $\mathbb{K}(e)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} . On montre de même que $\mathbb{K}'(e')$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M}' . Il est alors clair que f est un bon isomorphisme partiel. □

Lemme 2.4.9. *Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et γ un élément de Γ_{E_M} . Alors $\mathbb{K}(s(\gamma))$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} , et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(s(\gamma))$.*

Démonstration. Comme f est un bon isomorphisme partiel entre \mathbb{K} et \mathbb{K}' , il existe un isomorphisme de groupe ordonné g , entre Γ_{E_M} et $\Gamma_{E_{M'}}$, qui prolonge f_Γ . Notons $\gamma' = g(\gamma)$. Commençons pas montrer que l'on peut prolonger $f|_{E_K}$ en un isomorphisme de corps valué de $E_K(s(\gamma))$ dans $E_{K'}(s'(\gamma'))$, vérifiant $f(s(\gamma)) = s'(\gamma')$. Si γ n'est pas dans la clôture divisible de Γ_{E_K} dans Γ_{E_M} , alors γ' n'est pas non plus dans la clôture divisible de $\Gamma_{E_{K'}}$ dans $\Gamma_{E_{M'}}$, et il est alors classique que l'on peut prolonger $f|_{E_K}$ en un isomorphisme de corps valué de $E_K(s(\gamma))$ dans $E_{K'}(s'(\gamma'))$, vérifiant $f(s(\gamma)) = s'(\gamma')$. Si γ est dans la clôture divisible de Γ_{E_K} dans Γ_{E_M} , notons n le plus petit entier tel que $n\gamma \in \Gamma_{E_K}$. Comme $s(\Gamma_{E_K})$ est inclus dans E_K , $s(n\gamma) \in E_K$. Ainsi $X^n - s(n\gamma)$ est un polynôme annulateur de $s(\gamma)$ sur E_K , comme n le plus petit entier tel que $n\gamma \in \Gamma_{E_K}$, $[E_K(s(\gamma)) : E_K] \geq n$, donc $X^n - s(n\gamma)$ est le polynôme minimal de $s(\gamma)$ sur E_K . On montre de même que $X^n - s'(n\gamma')$ est le polynôme minimal de $s'(\gamma')$ sur $E_{K'}$. Il est alors classique que l'on peut prolonger $f|_{E_K}$ en un isomorphisme de corps valué de $E_K(s(\gamma))$ dans $E_{K'}(s'(\gamma'))$, vérifiant $f(s(\gamma)) = s'(\gamma')$. D'après le lemme 2.4.7, on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme partiel entre $K(s(\gamma))$ et $K'(s'(\gamma'))$ vérifiant $f(s(\gamma)) = s'(\gamma')$. Montrons maintenant que $f : K(s(\gamma)) \rightarrow K'(s'(\gamma'))$ est un bon isomorphisme partiel. Commençons par prouver que $\mathbb{K}(s(\gamma))$ est une bonne sous paire de \mathbb{M} . D'après le lemme 2.3.20, $\mathbb{K}(s(\gamma)) \subseteq_\gamma \mathbb{M}$, $E_{K(s(\gamma))} = E_K(s(\gamma))$,

et $\frac{\Gamma_{K(s(\gamma))}}{\Gamma_{E_{K(s(\gamma))}}} \subseteq [0, 1[$. Comme $[E_K(s(\gamma)) : E_K] = [\Gamma_{E_K}(\gamma) : \Gamma_{E_K}]$, on a $\Gamma_{E_{K(s(\gamma))}} = \Gamma_{E_K}(\gamma)$. Par hypothèse $s(\Gamma_{E_K}) \subseteq E_K$, on en déduit que $s(\Gamma_{E_{K(s(\gamma))}}) \subseteq E_{K(s(\gamma))}$. Comme $[E_{K(s(\gamma))} : E_K] = [\Gamma_{E_K}(\gamma) : \Gamma_{E_K}]$, on a $E_{K(s(\gamma))}/v = E_K/v$. On en déduit que $\mathbb{K}(s(\gamma))$ est une bonne sous paire de \mathbb{M} . On montre de même que $\mathbb{K}'(s'(\gamma'))$ est une bonne sous paire de \mathbb{M}' . Par construction de f , g prolonge f_γ en un isomorphisme de groupe ordonné de Γ_{E_M} dans $\Gamma_{E_{M'}}$ et $f \circ s = s' \circ f_\Gamma$. Comme $E_{K(s(\gamma))}/v = E_K/v$, on en déduit que f est un bon isomorphisme partiel. \square

Lemme 2.4.10. *Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et ϵ un élément de E_M/v algébrique sur E_K/v . Alors il existe $e \in E_M$ tel que $E_{K(e)}/v = (E_K/v)(\epsilon)$, que $\mathbb{K}(e)$ soit une bonne sous-paire de \mathbb{M} , et que l'on puisse prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(e)$.*

Démonstration. Soit $P_{/v} = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$ le polynôme minimal de ϵ sur E_K/v . Comme E_K/v est parfait, $P_{/v}$ n'appartient pas à $(E_K/v)[X^p]$, donc $P'_{/v}(\epsilon) \neq 0$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ il existe $a_i \in E_K$ tel que $a_i/v = \alpha_i$. Posons $P :=$

$\sum_{i=0}^n a_i X^i$. Comme E_M est hensélien, il existe $e \in E_M$ tel que $e/v = \epsilon$ et $P(e) = 0$. D'après le lemme 2.3.20, $\mathbb{K}(e) \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$, $E_{\mathbb{K}(e)} = E_K(e)$ et $\frac{\Gamma_{\mathbb{K}(e)}}{\Gamma_{E_{\mathbb{K}(e)}}} \subseteq [0, 1[$. Comme $[E_K/v(\epsilon) : E_K] = [E_K(e) : E_K]$, on a $E_K(e)/v = E_K/v(\epsilon)$ et $\Gamma_{E_{\mathbb{K}(e)}} = \Gamma_{E_K}$. Comme $(E_K/v)(\epsilon)$ est une extension algébrique de E_K/v , $(E_K/v)(\epsilon)$ est un corps parfait. On en déduit que $\mathbb{K}(e)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} . Par hypothèse, il existe un isomorphisme de corps h de M/v dans M'/v , vérifiant $h(E_M/v) = E_{M'}/v$, qui prolonge f/v . Notons $e' := h(\epsilon)$. On montre comme précédemment qu'il existe $e' \in E_M$ tel que $e'/v = \epsilon'$ et $f(P)(e') = 0$. On prouve de même que $\mathbb{K}'(e')$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M}' . Comme $P(e) = 0$, $f(P)(e') = 0$, $[E_K/v(\epsilon) : E_K] = [E_K(e) : E_K]$, et $[E_{K'}/v(\epsilon') : E_{K'}] = [E_{K'}(e') : E_{K'}]$, on peut prolonger $f|_{E_K}$ en un isomorphisme de corps valué de $E_K(e)$ dans $E_{K'}(e')$, vérifiant $f(e) = e'$. D'après le lemme 2.4.7, on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme de $\mathbb{K}(e)$ dans $\mathbb{K}'(e')$. Par construction de f , h est isomorphisme de corps h de M/v dans M'/v , vérifiant $h(E_M/v) = E_{M'}/v$, qui prolonge f/v . Comme $\Gamma_{E_{\mathbb{K}(e)}} = \Gamma_{E_K}$, f est un bon isomorphisme partiel. \square

Lemme 2.4.11. *Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et ϵ un élément de E_M/v transcendant sur E_K/v . Alors il existe un sous-ensemble dénombrable D de E_M tel que $E_{\mathbb{K}(D)}/v$ soit la clôture parfaite de $E_K/v(\epsilon)$, que $\mathbb{K}(D)$ soit une bonne sous-paire de \mathbb{M} , et que l'on puisse prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(D)$.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons $\epsilon^{\frac{1}{p^i}}$ la racine p^i -ième de ϵ dans E_M/v . Par \aleph_1 -saturation, il existe $e \in E_M$ tel que $e/v = \epsilon$, et qu'il existe une famille $(e^{\frac{1}{p^i}})_{i \in \mathbb{N}}$, de racines p^i -èmes de e dans E_M , telle que pour tous $i \leq j \in \mathbb{N}$, $(e^{\frac{1}{p^j}})^{p^{j-i}} = e^{\frac{1}{p^i}}$. Notons $D = \{e^{\frac{1}{p^i}} ; i \in \mathbb{N}\}$. Montrons maintenant que $\mathbb{K}(D)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} . D'après le lemme 2.3.20, $\mathbb{K}(D) \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$, $E_{\mathbb{K}(D)} = E_K(D)$ et $\frac{\Gamma_{\mathbb{K}(D)}}{\Gamma_{E_{\mathbb{K}(D)}}} \subseteq [0, 1[$. Comme $[E_K/v(\epsilon) : E_K] = [E_K(e) : E_K]$, on a $E_K(e)/v = E_K/v(\epsilon)$ et $\Gamma_{E_{\mathbb{K}(e)}} = \Gamma_{E_K}$. Comme ϵ est transcendant sur E_K/v , on a $E_K(e)/v = E_K/v(\epsilon)$. Prouvons que $X^{p^i} - \epsilon$ est le polynôme minimal de $\epsilon^{\frac{1}{p^i}}$ sur $E_K/v(\epsilon)$. Notons $\Pi(X)$ le polynôme minimal de $\epsilon^{\frac{1}{p^i}}$ sur $E_K/v(\epsilon)$. Comme $X^{p^i} - \epsilon = (X - \epsilon^{\frac{1}{p^i}})^{p^i}$ et comme $X^{p^i} - \epsilon$ est un polynôme annulateur de $\epsilon^{\frac{1}{p^i}}$ sur $E_K/v(\epsilon)$, $\Pi(X) = (X - \epsilon^{\frac{1}{p^i}})^r$, pour un certain r appartenant à $\llbracket 1, p^i \rrbracket$. Ainsi le terme constant de $\Pi(X)$ est $\epsilon^{\frac{r}{p^i}}$, et comme pour tout r appartenant à $\llbracket 1, p^i \rrbracket$, $\epsilon^{\frac{r}{p^i}}$ n'appartient pas à $(E_K/v)(\epsilon)$ car ϵ est transcendant sur E_K/v , on a $r = p^i$ et $\Pi(X) = X^{p^i} - \epsilon$. On en déduit immédiatement que $X^{p^i} - e$ est le polynôme minimal de $e^{\frac{1}{p^i}}$ sur $E_K(e)$. Ainsi $E_K(e^{\frac{1}{p^i}})/v =$

$(E_K/v)(\epsilon^{\frac{1}{p^i}})$, et $\Gamma_{E_K(e^{\frac{1}{p^i}})} = \Gamma_K$. D'où, $E_{K(D)}/v = (E_K/v)((\epsilon^{\frac{1}{p^i}})_{i \in \mathbb{N}^*})$ et $\Gamma_{E_{K(D)}} = \Gamma_{E_K}$. Comme E_K/v est un corps parfait, $E_{K(D)}/v$ est aussi un corps parfait puisqu'il contient toutes les racines p^i -èmes de ϵ . On en déduit que $\mathbb{K}(D)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} . Par hypothèse, il existe un isomorphisme de corps h de M/v dans M'/v , vérifiant $h(E_M/v) = E_{M'}/v$, qui prolonge f/v . Notons $\epsilon' := h(\epsilon)$. On montre comme précédemment qu'il existe $e' \in E_{M'}$ tel que $e'/v = \epsilon$, et qu'il existe une famille $(e'^{\frac{1}{p^i}})_{i \in \mathbb{N}}$, de racines p^i -ièmes de e' dans $E_{M'}$, telle que pour tous $i \leq j \in \mathbb{N}$, $(e'^{\frac{1}{p^j}})^{p^{(j-i)}} = e'^{\frac{1}{p^i}}$. Notons $D' = \{e'^{\frac{1}{p^i}} ; i \in \mathbb{N}\}$. On prouve de même que $\mathbb{K}'(D')$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M}' , que $E_{K'(D')}/v = (E_{K'}/v)((\epsilon'^{\frac{1}{p^i}})_{i \in \mathbb{N}^*})$, et que $\Gamma_{E_{K'(D')}} = \Gamma_{E_{K'}}$. Il est clair que l'on peut prolonger $f|_{E_K}$ en un isomorphisme de corps valué de $E_K(D)$ dans $E_{K'}(D')$, vérifiant pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f(e^{\frac{1}{p^i}}) = e'^{\frac{1}{p^i}}$. D'après le lemme 2.4.7, on peut prolonger f en un \mathcal{L} -isomorphisme de $\mathbb{K}(D)$ dans $\mathbb{K}'(D')$. Par construction, $f_r/v(\epsilon) = \epsilon' = h(\epsilon)$. Comme ϵ' a une unique racine p^i -ième dans $E_{M'}/v$, $f/v(\epsilon^{\frac{1}{p^i}}) = h(\epsilon^{\frac{1}{p^i}})$. Ainsi, $h|_{E_{K(D)}/v} = f/v$, donc h prolonge f/v . Comme $\Gamma_{E_L} = \Gamma_{E_K}$, on en déduit que f est un bon isomorphisme partiel. \square

Lemme 2.4.12. *Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et e un élément de E_M . Alors il existe D un sous-ensemble dénombrable de E_M qui contient e , tel que $\mathbb{K}(D)$ soit une bonne sous-paire de \mathbb{M} , et que l'on puisse prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(D)$.*

Démonstration. D'après les lemmes 2.4.10 et 2.4.11, on peut prolonger f en un bon isomorphisme de domaine K_1 , où E_{K_1}/v est la clôture parfaite de $E_{K(e)}$. D'après le lemme 2.4.9, on peut étendre f en un bon isomorphisme de domaine K_2 , avec $\Gamma_{E_{K_2}} = \Gamma_{E_{K_1(e)}}$. En itérant ces constructions, on peut par un argument de chaîne, prolonger f en un bon isomorphisme de domaine K_∞ tel que $E_{K_\infty(e)}$ soit une extension immédiate de E_{K_∞} . D'après le lemme 2.4.8, $\mathbb{K}_\infty(e)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} et on peut étendre f en un bon isomorphisme de domaine $K_\infty(e)$. \square

Extensions valuationnelles

Lemme 2.4.13. *Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et x un élément de M tel que $[K(x) : K] = [\Gamma_K(v(x)) : \Gamma_K]$. S'il existe $e_x \in E_K$ tel que $0 \leq v(x) - v(e_x) < 1$, alors $\mathbb{K}(x)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} , $E_{K(x)} = E_K$, et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(x)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3.25, $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{M}$, $E_{K(x)} = E_K$, et

$\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} \subseteq [0, 1[$. Donc $\mathbb{K}(x)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} . Par \aleph_1 -saturation, il existe $x' \in M'$ tel que l'on puisse prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(x)$ dans $K'(x')$, vérifiant $f(x) = x'$. En particulier, $[K'(x') : K'] = [\Gamma_{K'}(v(x')) : \Gamma_{K'}]$ et $0 \leq v(x') - v(f(e_x)) < 1$. Donc d'après le lemme 2.3.25, $\mathbb{K}'(x') \subseteq_\gamma \mathbb{M}'$, $E_{K'(x')} = E_{K'}$, et $\frac{\Gamma_{K'(x')}}{\Gamma_{E_{K'(x')}}} \subseteq [0, 1[$. Donc $\mathbb{K}'(x')$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M}' . Comme $E_{K(x)} = E_K$ et $E_{K'(x')} = E_{K'}$, f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. Comme $E_{K(x)} = E_K$, f est un bon isomorphisme partiel. \square

Extensions résiduelles

Lemme 2.4.14. *Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et x un élément de M de valuation nulle tel que $[K(x) : K] = [K/v(x/v) : K/v]$. Si $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{M}$ et si $E_{K(x)} = E_K$, alors $\mathbb{K}(x)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} , et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(x)$.*

Démonstration. Comme $[K(x) : K] = [K/v(x/v) : K/v]$, on a $\Gamma_{K(x)} = \Gamma_K$. Donc $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} = \frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$. Par hypothèse $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{M}$ et $E_{K(x)} = E_K$, donc $\mathbb{K}(x)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} . Comme f est un bon isomorphisme partiel, il existe un isomorphisme de corps h de M/v dans M'/v , vérifiant $h(E_M/v) = E_{M'}/v$, qui prolonge f/v . Notons $x'_v := h(x/v)$. Il est facile de montrer qu'il existe $x' \in M'$ tel que $x'/v = x'_v$ et que l'on puisse prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(x)$ dans $K'(x')$, vérifiant $f(x) = x'$. D'après le lemme 2.3.23, $[K/v(E_M/v)(x/v) : K/v(E_M/v)] = [K(x) : K]$. Comme h est un isomorphisme de corps de M/v dans M'/v , vérifiant $h(E_M/v) = E_{M'}/v$, on a $[K'/v(E_{M'}/v)(x'_v) : K/v(E_{M'}/v)] = [K'(x') : K']$. D'après le lemme 2.3.23, $\mathbb{K}'(x') \subseteq_\gamma \mathbb{M}'$, $E_{K'(x')} = E_{K'}$, et $\frac{\Gamma_{K'(x')}}{\Gamma_{E_{K'(x')}}} \subseteq [0, 1[$. On en déduit que $\mathbb{K}'(x')$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M}' . Comme $E_{K(x)} = E_K$ et $E_{K'(x')} = E_{K'}$, f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. Comme $E_{K(x)} = E_K$, f est un bon isomorphisme partiel. \square

Extensions immédiates

Lemme 2.4.15. *Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de K , suite de degré d (vu comme élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) au-dessus de K , et x une pseudo-limite de cette suite telle que $[K(x) : K] = d$, que $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{M}$, et que $E_{K(x)} = E_K$. Alors $\mathbb{K}(x)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} , et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(x)$.*

Démonstration. Par hypothèse, $\mathbb{K}(x) \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$ et $E_{K(x)} = E_K$. Comme $\Gamma_{K(x)} = \Gamma_K$, on a $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} = \frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$. Donc $\mathbb{K}(x)$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M} . Par \aleph_1 -saturation, il existe $x' \in M'$ tel que l'on puisse prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(x)$ dans $K'(x')$, vérifiant $f(x) = x'$. Montrons maintenant que $\mathbb{K}'(x')$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M}' . Commençons par prouver que pour tous $P_0, \overline{P} \in K'_{d-1}(X)$, $\gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{K'})$ existe, et est égal à $\gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{M'})$. Il existe un sous-ensemble dénombrable D' de $E_{M'}$, tel que pour tous $P_0, \overline{P} \in K'_{d-1}(X)$, $\gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), D)$ existe et soit égal à $\gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{M'})$. D'après le lemme 2.4.12, on peut prolonger $f|_{K'}$ en un bon isomorphisme partiel h dont le domaine contient $K'(D')$. Par \aleph_1 -saturation, il existe $y \in M$ tel que l'on puisse prolonger h en un isomorphisme de corps valué de $K'(D')(x')$ dans $K(h(D'))(y)$, vérifiant $h(x') = y$. En particulier, y est un pseudo-limite de la suite $(x_{\alpha})_{\alpha < \beta}$ et $[K(y) : K] = d$. Par construction de D' ,

$$\gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{M'}) = \gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{K'(D')}).$$

Par hypothèse,

$$\gamma_n(f^{-1}(P_0)(x)/\overline{f^{-1}(P)}(x), E_M) = \gamma_n(f^{-1}(P_0)(x)/\overline{f^{-1}(P)}(x), E_K).$$

Comme y est un pseudo-limite de la suite $(x_{\alpha})_{\alpha < \beta}$ et $[K(y) : K] = d$, d'après le lemme 2.3.19,

$$\gamma_n(f^{-1}(P_0)(y)/\overline{f^{-1}(P)}(y), E_M) = \gamma_n(f^{-1}(P_0)(y)/\overline{f^{-1}(P)}(y), E_K).$$

En particulier, $\gamma_n(f^{-1}(P_0)(y)/\overline{f^{-1}(P)}(y), E_{h(K'(D'))}) = \gamma_n(f^{-1}(P_0)(y)/\overline{f^{-1}(P)}(y), E_K)$, et comme h est un isomorphisme de corps valué vérifiant $h(E_{K'(D')}) = E_{h(K'(D'))}$ et $h(E_{K'}) = E_K$,

$$\gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{K'(D')}) = \gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{K'}).$$

Ainsi,

$$\gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{M'}) = \gamma_n(P_0(x')/\overline{P}(x'), E_{K'}).$$

Donc $\mathbb{K}'(x') \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}'$, et d'après la proposition 2.3.16, $E_{K'(x')} = E_{K'}$. Comme $\Gamma_{K'(x')} = \Gamma_{K'}$, $\frac{\Gamma_{K'(x')}}{\Gamma_{E_{K'(x')}}} = \frac{\Gamma_{K'}}{\Gamma_{E_{K'}}} \subseteq [0, 1[$. Donc $\mathbb{K}'(x')$ est une bonne sous-paire de \mathbb{M}' . Comme $E_{K(x)} = E_K$ et $E_{K'(x')} = E_{K'}$, f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. Comme $E_{K(x)} = E_K$, f est un bon isomorphisme partiel. \square

2.4.4 Démonstration du théorème

D'après ce que nous avons vu en sous-section 2.4.1, il est suffisant de démontrer la proposition 2.4.6.

Démonstration. Soient respectivement \mathbb{M} et \mathbb{M}' deux modèles saturés de cardinalité \aleph_1 de T munis de sections totales s et s' de Γ_{E_M} et de $\Gamma_{E_{M'}}$, vérifiant $s(1) = p$ et $s'(1) = p$, et $(M/v, E_M/v) \equiv (M'/v, E_{M'}/v)$. Comme $(M/v, E_M/v) \equiv (M'/v, E_{M'}/v)$, il existe un isomorphisme de corps h , de M/v dans M'/v , vérifiant $h(E_M/v) = E_{M'}/v$. Comme la théorie des \mathbb{Z} -groupes est complète, il existe un isomorphisme de groupe ordonné de Γ_{E_M} dans $\Gamma_{E_{M'}}$. Alors, $id_{\mathbb{Q}}$ est un bon isomorphisme partiel. En effet, il est facile de vérifier que \mathbb{Q} est une bonne sous-paire de \mathbb{M} et de \mathbb{M}' , que $id_{\Gamma_{\mathbb{Q}}} = id_{\mathbb{Z}} = g_{\mathbb{Z}}$, et que $id_{\mathbb{Q}/v} = id_{\mathbb{F}_p} = h_{\mathbb{F}_p}$. Ainsi \mathcal{F} est non-vide. Montrons maintenant que \mathcal{F} a la propriété de va-et-vient. Par symétrie, il est suffisant de montrer le va. Soient respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}' des bonnes sous-paires de \mathbb{M} et \mathbb{M}' , $f : K \rightarrow K'$ un bon isomorphisme partiel, et x un élément de M .

Par un argument de chaîne, il existe H , un sous-ensemble dénombrable de E_M vérifiant les conditions suivantes : pour tous $z, \bar{y} \in K(H)(x)^{alg}$, il existe $h \in H$ vérifiant $0 \leq \gamma_n(z/\bar{y}) - v(h) < 1$, et $\gamma_n(z/\bar{y}, H)$ existe et soit égal à $\gamma_n(z/\bar{y}, E_M)$. D'après le lemme 2.4.12, il existe D , un sous ensemble dénombrable de E_M contenant H , tel que l'on puisse prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(D)$. Par un argument de chaîne, on peut se ramener au cas où, pour tous $z, \bar{y} \in K(D)(x)^{alg}$, il existe $d \in D$, vérifiant $0 \leq \gamma_n(z/\bar{y}) - v(d) < 1$, $\gamma_n(z/\bar{y}, D)$ existe et soit égal à $\gamma_n(z/\bar{y}, E_M)$, et $\Gamma_{E_{K(D)}}$ est égal à sa clôture divisible dans Γ_{E_M} . Notons $K_1 := K(D)$.

Soit $\eta \in \Gamma_M$, tel que η appartienne à la clôture divisible de Γ_{K_1} . Il existe alors un plus petit entier n , tel que $n\eta \in \Gamma_{K_1}$. Soit $k \in K_1$ tel que $n\eta = v(k)$. Notons $k^{\frac{1}{n}}$ une racine n -ième de k dans M . D'après le lemme 2.4.13, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K_1(k^{\frac{1}{n}})$. Ainsi, par un argument de chaîne, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine K_2 , tel que Γ_{K_2} soit divisible et que $K_2 \subseteq K_1^{alg}$.

Soit $\zeta \in (K_2/v)^{alg}$. Il existe alors $z \in K_2^{alg}$, tel que $z/v = \zeta$, et $[K_2(z) : K_2] = [(K_2/v)(\zeta) : K_2/v]$. D'après le lemme 2.4.14, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K_2(z)$. Ainsi, par un argument de chaîne, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine K_3 , tel que K_3/v soit algébriquement clos et que $K_3 \subseteq K_2^{alg}$. De plus, comme $\Gamma_{K_3} = \Gamma_{K_2}$, Γ_{K_3} est divisible.

Soit $z \in K_3^{alg}$, comme Γ_{K_3} est divisible et K_3/v est algébriquement clos, $K_3(z)$ est une extension immédiate de K_3 , alors d'après le lemme 2.4.15, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K_3(z)$. Par un argument de chaîne, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K_3^{alg} = K(D)^{alg}$ ($= K_1^{alg} = K_2^{alg}$).

Alors, soit $K(D)^{alg}(x)$ est une extension immédiate de type transcendant de $K(D)^{alg}$, soit il existe $y \in K(D)^{alg}(x)$ tel que $v(y) = 0$ et $y/v \notin K(D)^{alg}/v$, soit il existe $y \in K(D)^{alg}(x)$ tel que $v(y) \notin \Gamma_{K(D)^{alg}}$. Dans le premier cas, d'après le lemme 2.4.15, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(D)^{alg}(x)$. Dans les deux derniers cas, d'après les lemmes 2.4.14 et 2.4.13, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel de domaine $K(D)^{alg}(y)$. Comme $x \in K(D, y)^{alg}$, d'après ce que nous avons fait ci-dessus, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel dont le domaine contient $K(D)(x)$. \square

2.5 EQ relative pour les structures du type $(W(\mathbb{F}_p)^{alg}, W(\mathbb{F}_{p^q}))$

2.5.1 Préliminaires

Dans cette section nous allons présenter un résultat d'élimination partiel des quantificateurs. Plus précisément nous allons montrer que dans un langage approprié on peut borner la quantification sur le petit corps pour les paires de corps valués de type $(W(\mathbb{F}_p)^{alg}, W(\mathbb{F}_{p^q}))$. Ce type de résultat avait déjà été obtenu par Françoise Delon dans [Del14] pour certaines paires de corps valués fortement séparées en équicaractéristique nulle.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour commencer intéressons nous à la théorie de la structure valuée $W(\mathbb{F}_{p^q})$. Notons \mathcal{L}_{pCF} le langage défini par $\mathcal{L}_{pCF} := \mathcal{L}_{div} \cup \{P_n ; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\alpha\}$, où les P_n sont des prédicats unaires et où α est un symbole de constante. Soit $\tilde{\zeta} \in \mathbb{F}_{p^q}$ tel que $\mathbb{F}_{p^q} = \mathbb{F}_p(\tilde{\zeta})$ et soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que Q/v soit le polynôme minimal de $\tilde{\zeta}$ sur \mathbb{F}_p . Comme $W(\mathbb{F}_{p^q})$ est hensélien, il existe $\zeta \in W(\mathbb{F}_{p^q})$ tel que $Q(\zeta) = 0$. On notera pCF_Q la \mathcal{L}_{pCF} -théorie constituée :

1. des axiomes des corps valués henséliens,
2. de l'axiome exprimant que P_n est l'ensemble des puissances n -ièmes,
3. des axiomes exprimant que le groupe de valeur est un \mathbb{Z} -groupe dont $1 := v(p)$ est le plus petit élément strictement positif,
4. de l'axiome exprimant que le corps résiduel est \mathbb{F}_{p^q} ,
5. de l'axiome exprimant que $Q(\alpha) = 0$.

Il est clair que $W(\mathbb{F}_{p^q})$ est un modèle de pCF_Q , et d'après un résultat classique (voir par exemple [Cha]), pCF_Q est complète et élimine les quantificateurs dans \mathcal{L}_{pCF} .

On utilisera la notion d'élimination des imaginaires dont on se contente ici de rappeler la définition. On pourra consulter [Rid12] pour plus de détails.

Définition 2.5.1. *Soit T une \mathcal{L} -théorie. On dira que T élimine les imaginaires si pour toute \mathcal{L} -formule qui définit une relation d'équivalence E dans T il existe une \mathcal{L} -formule qui définit une fonction f dans T telle que $T \vdash E[\bar{x}, \bar{y}] \iff f(\bar{x}) = f(\bar{y})$.*

Soit $\mathbb{L} = (E_L \subseteq L, v)$ une paire de corps valués fortement séparée. Pour tout $(x, \bar{y}) \in L \times L^n$ l'ensemble $\{(e_1, \dots, e_n) \in E_L ; v(x + \sum_{i=1}^n e_i y_i) = \gamma_n(x/\bar{y}, E_L)\}$ est définissable. On peut le voir comme un imaginaire de \mathbb{L} . Grâce au lemme suivant on verra que dans les cas qui nous intéressent on pourra voir cet ensemble comme un imaginaire de E_L , ce qui sera un point essentiel dans la démonstration d'élimination relative des quantificateurs que nous ferons.

Lemme 2.5.2. *Pour tout entier n , il existe une \mathcal{L}_{div} -formule (sans quantificateurs) $\varphi_n(\bar{u}, \bar{w})$, avec $|\bar{u}| = n$, telle que dans toute paire de corps fortement séparée $\mathbb{L} := (E_L \subseteq L, v)$, dans lesquelles $1 := v(p)$ est le plus petit élément strictement positif de Γ_{E_L} , et vérifiant $\frac{\Gamma_L}{\Gamma_{E_L}} \subseteq [0, 1[$, on ait*

$$\forall x, \forall \bar{y}, \exists \bar{z} \in E_L, \forall \bar{e} \in E_L, \left(v(x + \sum_{i=1}^n e_i y_i) = \gamma_n(x/\bar{y}) \iff \varphi_n(\bar{e}, \bar{z}) \right).$$

Si $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, pour tous $x, \bar{y} \in K$, on peut choisir un tel $\bar{z} \in E_K$.

Démonstration. Soient $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ et $x, \bar{y} \in K$. Comme $\mathbb{K} \subseteq_\gamma \mathbb{L}$ il existe $\bar{\xi} \in E_K$ tel que $v(\bar{\xi}(x, \bar{y})) = \gamma$. D'après le lemme 2.3.10, pour tout $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n) \in E_L$, $v(x + \sum_{i=1}^n e_i y_i) = \min_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \left(v(P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi})) + \gamma^{(i)}((x, \bar{y})) \right)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}((x, \bar{y})) \neq \infty$, posons $l_i = 0$, et pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}((x, \bar{y})) = \infty$, posons $l_i = 1$. Si $\gamma^{(1)}((x, \bar{y})) (= \gamma_n(x/\bar{y})) \neq \infty$, comme $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}((x, \bar{y})) \neq \infty$, il existe $\varepsilon_i \in E_K$ tel que $\gamma_n(x/\bar{y}) - \gamma^{(i)}((x, \bar{y})) \leq v(\varepsilon_i) < \gamma_n(x/\bar{y}) - \gamma^{(i)}((x, \bar{y})) + 1$.

Alors,

$$\begin{aligned}
 & v\left(x + \sum_{i=1}^n e_i y_i\right) = \gamma_n(x/\bar{y}) \\
 \Leftrightarrow & v\left(x + \sum_{i=1}^n e_i y_i\right) \geq \gamma_n(x/\bar{y}) \\
 \Leftrightarrow & \min_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \left(v(P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi})) + \gamma^{(i)}((x, \bar{y})) \right) \geq \gamma_n(x/\bar{y}) \\
 \Leftrightarrow & \left(\gamma_n(x/\bar{y}) = \infty \wedge \bigwedge_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \left(\gamma^{(i)}((x, \bar{y})) = \infty \vee v(P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi})) = \infty \right) \right) \vee \\
 & \left(\gamma_n(x/\bar{y}) \neq \infty \bigwedge_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \left(\gamma^{(i)}((x, \bar{y})) = \infty \vee \left(v(P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi})) \geq \gamma_n(x/\bar{y}) - \gamma^{(i)}((x, \bar{y})) \right) \right) \right) \\
 \Leftrightarrow & \left(\gamma_n(x/\bar{y}) = \infty \wedge \bigwedge_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \left(\gamma^{(i)}((x, \bar{y})) = \infty \vee v(P_i(\bar{e}, \bar{\xi})) = \infty \right) \right) \vee \\
 & \left(\gamma_n(x/\bar{y}) \neq \infty \bigwedge_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \left(\gamma^{(i)}((x, \bar{y})) = \infty \vee \left(v(P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi})) \geq v(\varepsilon_i) \right) \right) \right) \\
 & \text{(car 1 est le plus petit élément strictement positif de } \Gamma_{E_L} \text{)} \\
 \Leftrightarrow & \left(l_1 = 1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n+1} \left(l_i = 1 \vee P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi}) = 0 \right) \right) \\
 & \vee \left(l_1 = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n+1} \left(l_i = 1 \vee v(P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi})) \geq v(\varepsilon_i) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme avec

$$\begin{aligned}
 & \varphi_n(e_1, \dots, e_n, \bar{\xi}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}, l_1, \dots, l_{n+1}) := \\
 & \left(l_1 = 1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n+1} \left(l_i = 1 \vee P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi}) = 0 \right) \right) \vee \left(l_1 = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n+1} \left(l_i = 1 \vee v(P_i(1, \bar{e}, \bar{\xi})) \geq v(\varepsilon_i) \right) \right).
 \end{aligned}$$

□

On va maintenant s'intéresser à l'élimination des imaginaires dans les structures du type $W(\mathbb{F}_{p^q})$.

Soit (L, v) un corps valué. On notera $\mathcal{S}_n(L)$ l'ensemble des réseaux de rang n de L , c'est-à-dire l'ensemble des sous- \mathcal{O}_L -modules libres de rang n de L . Remarquons que \mathcal{S}_1 est l'ensemble des boules fermées centrées en 0 de rayon fini appartenant à L . On a donc $\mathcal{S}_1 \simeq \Gamma_L$. Par ailleurs, la surjection canonique $L^* \longrightarrow \mathcal{S}_1 \simeq L^*/\mathcal{O}_L^* = \Gamma_L$ est v .

Notons $\mathcal{L}_{pCF}^{\mathcal{I}}$ le langage obtenu en enrichissant \mathcal{L}_{pCF} , pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, d'une sorte \mathcal{S}_n pour les réseaux de rang n . Silvain Rideau a montré dans [Rid12] que $pCF_Q^{\mathcal{I}}$, où $pCF_Q^{\mathcal{I}}$ est l'enrichissement par définition de pCF_Q correspondant à l'ajout de ces sortes (voir [Rid12]) élimine les imaginaires dans le langage $\mathcal{L}_{pCF}^{\mathcal{I}}$, généralisant ainsi un résultat obtenu par Ehud Hrushovski et Ben Martin dans [HMRC].

Dans la suite, pour alléger les notations nous ne préciserons pas la sorte lorsqu'il s'agira des variables de la sorte principale.

Comme $pCF_Q^{\mathcal{I}}$ élimine les imaginaires, pour tout entier n , il existe une fonction r_n définie sur la sorte principale et définissable dans le langage $\mathcal{L}_{pCF}^{\mathcal{I}}$ telle que

$$\forall \bar{x}, \bar{y}, \left((\forall \bar{z}, \varphi_n(\bar{z}, \bar{x}) \longleftrightarrow \varphi_n(\bar{z}, \bar{y})) \longleftrightarrow r_n(\bar{x}) = r_n(\bar{y}) \right),$$

où φ_n est la formule définie dans le lemme 2.5.2.

2.5.2 Présentation du résultat

Dans le reste de ce chapitre on notera \mathcal{L}_E le langage défini par $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_{div} \cup \{E\}$, où E est un symbole de prédicat unaire. On notera $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ le langage défini par $\mathcal{L}_{\mathcal{I}} := \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_{pCF \setminus E}^{\mathcal{I}}$. On notera \mathcal{L}_{EQ} le langage défini par $\mathcal{L}_{EQ} := \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \cup \{g_n, h_n, ; n \in \mathbb{N}^*\}$, où g_n et h_n sont des symboles de fonction $n+1$ -aires de domaine la sorte principale.

T désignera la \mathcal{L}_{EQ} -théorie constituée :

1. des axiomes de la théorie introduite dans la section 2.4,
2. des axiomes exprimant que E est un modèle de pCF_Q , et des schémas de définition exprimant que $E \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{S}_n(E)$ est un modèle de $pCF_Q^{\mathcal{I}}$,
3. de l'axiome

$$\forall x, \bar{y}, \forall \bar{z} \in E,$$

$$\left(\forall \bar{e} \in E, \left(v(x + \sum_{i=1}^n e_i y_i) = \gamma_n(x/\bar{y}) \right) \longleftrightarrow \varphi_n(\bar{e}, \bar{z}) \right) \longrightarrow h_n(x, \bar{y}) = r_n(\bar{z}),$$

4. de l'axiome

$$\forall x, \bar{y}, \forall e \in E, \left(v(e) \leq \gamma_n(x/\bar{y}) \leq v(e) + 1 \right) \longrightarrow g_n(x, \bar{y}) = v(e).$$

Notre but sera de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.5.3. *T élimine les quantificateurs dans \mathcal{L}_{EQ} relativement à E , c'est-à-dire que pour toute \mathcal{L}_{EQ} -formule $\Phi(\bar{x})$, il existe une \mathcal{L}_{EQ} -formule $\Psi(\bar{x})$, où les seules variables quantifiées de la sorte principale sont quantifiées sur E , telle que*

$$T \vdash \forall \bar{x}, \left(\Phi(\bar{x}) \longleftrightarrow \Psi(\bar{x}) \right).$$

2.5.3 Démonstration du résultat

Notations. Soient \mathcal{M} un modèle de T et \mathcal{K} une \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} .

1. On notera M l'ensemble de base de la sorte principale de \mathcal{M} et K l'ensemble de base de la sorte principale de \mathcal{K} .
2. On notera $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ la $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -sous-structure engendrée par $E_{\mathcal{M}}$.
3. On notera $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ si $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \preceq \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ en tant que $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -structures.

Lemme 2.5.4. *Soient \mathcal{M} un modèle de T et \mathcal{K} une $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -sous-structure de \mathcal{M} . Si $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$, si $\frac{\Gamma_{\mathcal{K}}}{\Gamma_{E_{\mathcal{K}}}} \subseteq [0, 1[$, et si $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, alors \mathcal{K} est \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} .*

Démonstration. Il suffit de montrer que \mathcal{K} est stable par les fonctions h_n et g_n . Commençons par prouver que \mathcal{K} est stable par les fonctions h_n . Soient $x, \bar{y} \in K$. Comme $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$ et comme $\frac{\Gamma_{\mathcal{K}}}{\Gamma_{E_{\mathcal{K}}}} \subseteq [0, 1[$, d'après le lemme 2.5.2, il existe $\bar{z} \in E_{\mathcal{K}}$, tel que

$$\forall e_1, \dots, e_n \in E_{\mathcal{M}}, \left(v(x + \sum e_i y_i) = \gamma_n(x/\bar{y}) \longleftrightarrow \varphi_n(\bar{e}, \bar{z}) \right).$$

Par définition de h_n , $h_n(x, \bar{y}) = r_n(\bar{z})$. Comme $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et comme r_n est une fonction définissable dans le langage $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, on a $r_n(\bar{z}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, d'où $h_n(x, \bar{y}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$. Ainsi \mathcal{K} est stable par les fonctions h_n . Prouvons maintenant que \mathcal{K} est stable par les fonctions g_n . Soient $x, \bar{y} \in K$ tels que $\gamma_n(x/\bar{y}) \neq \infty$. Comme $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$ et comme $\frac{\Gamma_{\mathcal{K}}}{\Gamma_{E_{\mathcal{K}}}} \subseteq [0, 1[$, il existe $e \in E_{\mathcal{K}}$ tel que $v(e) \leq \gamma_n(x/\bar{y}) < v(e) + 1$. Par définition de g_n , $g_n(x, \bar{y}) = v(e)$. Comme $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et comme t est une fonction définissable dans le langage $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, on a $t(e) \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, d'où $g_n(x, \bar{y}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$. \square

Définition 2.5.5. *Soient \mathcal{M} un modèle de T et \mathcal{K} une \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} . On dira que \mathcal{K} est une bonne sous-structure de \mathcal{M} si K est un corps dénombrable, si $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$, si $\frac{\Gamma_{\mathcal{K}}}{\Gamma_{E_{\mathcal{K}}}} \subseteq [0, 1[$, et si $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$.*

Lemme 2.5.6. *Soient respectivement \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux modèles de T , \mathcal{K} et \mathcal{K}' des bonnes \mathcal{L}_{EQ} -sous-structures de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , et $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ un \mathcal{L}_{div} -isomorphisme partiel tel que $f|_{\mathcal{E}_{\mathcal{K}'}}$ soit un $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -isomorphisme partiel. Alors f est un \mathcal{L}_{EQ} -isomorphisme partiel.*

Démonstration. Il faut montrer que f commute avec les fonctions h_n et g_n . Commençons par prouver que f commute avec les fonctions h_n . Soient $x, \bar{y} \in K$. Comme $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$ et comme $\frac{\Gamma_{\mathcal{K}}}{\Gamma_{E_{\mathcal{K}}}} \subseteq [0, 1[$, d'après le lemme 2.5.2, il existe

$\bar{z} \in E_K$ et $\bar{z}' \in E_{K'}$ tels que

$$\forall \bar{e} \in E_M, v(x + \sum_{i=1}^n e_i y_i) = \gamma_n(x/\bar{y}) \iff \varphi_n(\bar{e}, \bar{z}),$$

$$\forall \bar{e}' \in E_{M'}, v(f(x) + \sum_{i=1}^n e'_i f(y_i)) = \gamma_n(f(x)/f(\bar{y})) \iff \varphi_n(\bar{e}', \bar{z}').$$

Par définition de h_n , on a $h_n(x, \bar{y}) = r_n(\bar{z})$ et $h_n(f(x), f(\bar{y})) = r_n(\bar{z}')$. Comme f est un \mathcal{L}_{div} -isomorphisme partiel, on a

$$\forall \bar{e}' \in E_{K'}, v(f(x) + \sum_{i=1}^n e'_i f(y_i)) = \gamma_n(f(x)/f(\bar{y})) \iff \varphi_n(\bar{e}', f(\bar{z})).$$

Ainsi, $\forall \bar{e}' \in E_{K'}, \varphi_n(\bar{e}', \bar{z}') \iff \varphi_n(\bar{e}', f(\bar{z}))$. Comme $\mathcal{E}_{K'} \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{M'}$, $\forall \bar{e}' \in E_{M'}, \varphi_n(\bar{e}', \bar{z}') \iff \varphi_n(\bar{e}', f(\bar{z}))$. Donc $r_n(\bar{z}') = r_n(f(\bar{z}))$. Alors,

$$\begin{aligned} f(h_n(x, \bar{y})) &= f(r_n(\bar{z})) \\ &= r_n(f(\bar{z})) \quad \text{car } f|_{\mathcal{E}_{K'}} \text{ est un } \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\text{-isomorphisme} \\ &= r_n(\bar{z}') \\ &= h_n(f(x), f(\bar{y})). \end{aligned}$$

Ainsi f commute avec les fonctions h_n . Prouvons maintenant que f commute avec les fonctions g_n . Soient $x, \bar{y} \in K$. Si $\gamma_n(x/\bar{y}) = \infty$ il est clair que $f(g_n(x, \bar{y})) = g_n(f(x)/f(\bar{y})) = v(0) = \infty$. Si $\gamma_n(x/\bar{y}) \neq \infty$, comme $\mathbb{K} \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$ et comme $\frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$, il existe $e \in E_K$ tel que $v(e) \leq \gamma_n(x/\bar{y}) < v(e) + 1$. On a alors $v(f(e)) \leq \gamma_n(f(x)/f(\bar{y})) < v(f(e)) + 1$. Par définition de g_n , on a $g_n(x, \bar{y}) = v(e)$ et $g_n(f(x), f(\bar{y})) = v(f(e))$. Alors,

$$\begin{aligned} f(g_n(x, \bar{y})) &= f(v(e)) \\ &= v(f(e)) \quad \text{car } f|_{\mathcal{E}_{K'}} \text{ est un } \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\text{-isomorphisme} \\ &= g_n(f(x), f(\bar{y})). \end{aligned}$$

Ainsi f commute avec les fonctions g_n . □

Notation. On notera Ω l'ensemble des \mathcal{L}_{EQ} -formules dont les seules variables quantifiées de la sorte principale sont quantifiées sur E .

Définition 2.5.7. Soient respectivement \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux modèles de T , \mathcal{K} et \mathcal{K}' deux \mathcal{L}_{EQ} -sous-structures de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , et $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ un \mathcal{L}_{EQ} -isomorphisme partiel. On dira que f est un bon isomorphisme partiel si f préserve les formules de Ω , c'est-à-dire si pour toute formule $\Phi(\bar{x}) \in \Omega$ et tout uplet \bar{k} de \mathcal{K} on a $\mathcal{M} \models \Phi(\bar{k}) \implies \mathcal{M}' \models \Phi(f(\bar{k}))$.

Dans le reste de ce chapitre \mathcal{M} et \mathcal{M}' désigneront deux modèles saturés de cardinalité \aleph_1 de T . D'après le fait 1.0.5, pour prouver le théorème 2.5.3 il est suffisant de montrer que la famille des bons isomorphismes partiels entre sous-structures dénombrables de \mathcal{M} et \mathcal{M}' a la propriété de va.

Extension par des éléments de \mathbf{E}

Lemme 2.5.8. *Soient respectivement \mathcal{K} et \mathcal{K}' des \mathcal{L}_{EQ} -sous-structures dénombrables de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ un bon isomorphisme partiel et D un sous-ensemble dénombrable de E_M , tel que $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D}) \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et que pour tous $x, \bar{y} \in K$, $\gamma_n(x/\bar{y}, D)$ existe et soit égal à $\gamma_n(x/\bar{y}, E_M)$, et qu'il existe $d_{x\bar{y}} \in D$ vérifiant $0 \leq \gamma_n(x/\bar{y}) - v(d_{x\bar{y}}) < 1$. Notons $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ la $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -structure engendrée par $K(D)$. Alors $E_{\mathcal{K}(\mathcal{D})} = E_K(D)$, $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} , et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}(\mathcal{D})$.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} . D'après la proposition 2.3.16, $\mathbb{K}(D) \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}$, et $E_{\mathcal{K}(\mathcal{D})} = E_K(D)$. D'après le corollaire 2.3.11, $\Gamma_{\mathcal{K}(\mathcal{D})} = \Gamma_{E_K(D)} + \langle \gamma \rangle$, où $\langle \gamma \rangle$ désigne le groupe engendré par les $\gamma(x/\bar{y})$, pour $x, \bar{y} \in K$. Donc $\frac{\Gamma_{\mathcal{K}(\mathcal{D})}}{\Gamma_{E_K(D)}} \subseteq [0, 1[$. Comme $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D}) \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, d'après le lemme 2.5.4, $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ est une \mathcal{L}_{EQ} -structure. Ainsi $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} .

Comme $f|_{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}}$ préserve les formules de Ω , par \aleph_1 -saturation, on peut prolonger $f|_{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}}$ en un $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -isomorphisme de domaine $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})$ qui préserve les formules de Ω . Notons $D' := f(D)$ et $\mathcal{K}'(\mathcal{D}')$ la $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -structure engendrée par $K'(D')$. On va maintenant prouver que $\mathcal{K}'(\mathcal{D}')$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M}' . Soient $x, \bar{y} \in K$, et $\bar{l} \in D$. Alors,

$$\begin{aligned}
 v\left(x + \sum_{i=1}^n l_i y_i\right) = \gamma_n(x/\bar{y}) &\iff \exists \bar{z} \in E_K(D), \varphi_n(\bar{l}, \bar{z}) \wedge \left(r_n(\bar{z}) = h_n(x, \bar{y})\right) \\
 &\quad \text{(d'après le lemme 2.5.2)} \\
 &\iff \exists \bar{z} \in E_K(D), \varphi_n(f(\bar{l}), f(\bar{z})) \wedge \left(f(r_n(\bar{z})) = f(h_n(x, \bar{y}))\right) \\
 &\quad \text{car } f|_{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})} \text{ est un } \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\text{-isomorphisme} \\
 &\iff \exists \bar{z} \in E_K(D), \varphi_n(f(\bar{l}), f(\bar{z})) \wedge \left(r_n(f(\bar{z})) = f(h_n(x, \bar{y}))\right) \\
 &\quad \text{car } f|_{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})} \text{ est un } \mathcal{L}_{\mathcal{I}}\text{-isomorphisme} \\
 &\iff \exists \bar{z} \in E_K(D), \varphi_n(f(\bar{l}), f(\bar{z})) \wedge \left(r_n(f(\bar{z})) = h_n(f(x), f(\bar{y}))\right) \\
 &\quad \text{car } f|_{\mathcal{K}} \text{ est un } \mathcal{L}_{EQ}\text{-isomorphisme} \\
 &\implies v\left(f(x) + \sum_{i=1}^n f(l_i) f(y_i)\right) = \gamma_n(f(x)/f(\bar{y})).
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $x', \bar{y}' \in K'$, $\gamma_n(x', \bar{y}', D')$ existe, et est égal à $\gamma_n(x', \bar{y}', E_{M'})$. D'après la proposition 2.3.16, $\mathbb{K}(D) \subseteq_{\gamma} M'$, et $E_{K'(D')} = E_{K'(D')}$. Soient $x, \bar{y} \in K$ tels que $\gamma_n(x/\bar{y}) \neq \infty$ et $d \in D$. Alors

$$\begin{aligned} v(d) \leq \gamma_n(x/\bar{y}) < v(d) + 1 &\iff g_n(x, \bar{y}) = v(d) \\ &\iff f(g_n(x, \bar{y})) = f(v(d)) \\ &\iff g_n(f(x), f(\bar{y})) = v(f(d)) \\ &\iff v(f(d)) \leq \gamma_n(f(x)/f(\bar{y})) < v(f(d)) + 1. \end{aligned}$$

En particulier, comme pour tous $x, \bar{y} \in K$ tels que $\gamma_n(x/\bar{y}) \neq \infty$ il existe $d \in D$ tel que $v(d) \leq \gamma_n(x/\bar{y}) < v(d) + 1$, alors pour tous $x', \bar{y}' \in K'$ tels que $\gamma_n(x'/\bar{y}') \neq 0$ il existe $d' \in D'$ tel que $v(d') \leq \gamma_n(x'/\bar{y}') < v(d') + 1$.

On en déduit, comme dans le cas de $K(D)$, que $\frac{\Gamma_{K'(D')}}{\Gamma_{E_{K'(D')}}} \subseteq [0, 1[$. D'après le lemme 2.5.4, $\mathcal{K}'(D')$ est une \mathcal{L}_{EQ} -structure. Ainsi, $\mathcal{K}'(D')$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M}' . Montrons maintenant que l'on peut prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(D)$ dans $K'(D')$. Pour cela il est suffisant de prouver que pour tous $\bar{x}, \bar{y} \in K$ et tous $\bar{d}, \bar{e} \in D$ on a

$$v\left(\sum_{i=1}^n d_i x_i\right) < v\left(\sum_{i=1}^n e_i y_i\right) \iff v\left(\sum_{i=1}^n f(d_i) f(x_i)\right) < v\left(\sum_{i=1}^n f(e_i) f(y_i)\right).$$

Soient $\bar{x}, \bar{y} \in K$ et $\bar{d}, \bar{e} \in D$, avec $|\bar{x}| = |\bar{y}| = |\bar{g}| = |\bar{l}| = n$. Comme $\mathbb{K}(D) \subseteq_{\gamma} M$, il existe $\bar{\xi}_d, \bar{\xi}_e \in D$, tels que $v(\bar{\xi}_g \bar{x}) = \gamma(\bar{x})$ et $v(\bar{\xi}_l \bar{y}) = \gamma(\bar{y})$. Comme $\frac{\Gamma_{K(D)}}{\Gamma_{E_{K(D)}}} \subseteq [0, 1[$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}(\bar{x}) \neq \infty$, il existe $e_{\gamma^{(i)}(\bar{x})} \in D$ tel que $0 \leq \gamma^{(i)}(\bar{x}) - v(e_{\gamma^{(i)}(\bar{x})}) < 1$, de même, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}(\bar{y}) \neq \infty$, il existe $e_{\gamma^{(i)}(\bar{y})} \in D$ tel que $0 \leq \gamma^{(i)}(\bar{y}) - v(e_{\gamma^{(i)}(\bar{y})}) < 1$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}(\bar{x}) = \infty$, posons $e_{\gamma^{(i)}(\bar{x})} = 0$, de même, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}(\bar{y}) = \infty$, posons $e_{\gamma^{(i)}(\bar{y})} = 0$. Notons N l'ensemble défini par

$$N := \left\{ j \in \llbracket 1, n \rrbracket ; v(P_j(\bar{d}, \bar{\xi}_d)) + v(e_{\gamma^{(j)}(\bar{x})}) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(\bar{d}, \bar{\xi}_d)) + v(e_{\gamma^{(i)}(\bar{x})}) \right) \right\}.$$

D'après ce que nous avons montré précédemment il est clair que $v(f(\bar{\xi}_d) f(\bar{x})) = \gamma(f(\bar{x}))$, que $v(f(\bar{\xi}_e) f(\bar{y})) = \gamma(f(\bar{y}))$, que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}(\bar{x}) \neq \infty$ on a $0 \leq \gamma^{(i)}(f(\bar{x})) - v(f(e_{\gamma^{(i)}(\bar{x})})) < 1$, que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\gamma^{(i)}(\bar{y}) \neq \infty$ on a $0 \leq \gamma^{(i)}(f(\bar{y})) - v(f(e_{\gamma^{(i)}(\bar{y})})) < 1$, et que

$$\begin{aligned} N &:= \left\{ j \in \llbracket 1, n \rrbracket ; v\left(P_j(f(\bar{d}), f(\bar{\xi}_d))\right) + v(f(e_{\gamma^{(j)}(\bar{x})})) = \right. \\ &\quad \left. \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v\left(P_i(f(\bar{d}), f(\bar{\xi}_d))\right) + v(f(e_{\gamma^{(i)}(\bar{x})})) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 & v\left(\sum_{i=1}^n d_i x_i\right) < v\left(\sum_{i=1}^n l_i y_i\right) \\
 \Leftrightarrow & \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(\bar{d}, \bar{\xi}_d)) + \gamma^{(i)}(\bar{x}) \right) < \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(\bar{l}, \bar{\xi}_l)) + \gamma^{(i)}(\bar{y}) \right) \\
 \Leftrightarrow & \left(\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(\bar{d}, \bar{\xi}_d)) + e_{\gamma^{(i)}}(\bar{x}) \right) < \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(\bar{l}, \bar{\xi}_l)) + e_{\gamma^{(i)}}(\bar{y}) \right) \right) \vee \\
 & \left(\left(\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(\bar{d}, \bar{\xi}_d)) + e_{\gamma^{(i)}}(\bar{x}) \right) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(\bar{l}, \bar{\xi}_l)) + e_{\gamma^{(i)}}(\bar{y}) \right) \neq \infty \right) \wedge \right. \\
 & \left. \min_{i \in N} \left(\gamma^{(i)}(\bar{x}) - e_{\gamma^{(i)}}(\bar{x}) \right) < \min_{i \in N} \left(\gamma^{(i)}(\bar{y}) - e_{\gamma^{(i)}}(\bar{y}) \right) \right) \\
 \Leftrightarrow & \left(\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(f(\bar{d}), f(\bar{\xi}_d))) + f(e_{\gamma^{(i)}}(\bar{x})) \right) < \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(f(\bar{l}), f(\bar{\xi}_l))) + f(e_{\gamma^{(i)}}(\bar{y})) \right) \right) \\
 \vee & \left[\left(\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(f(\bar{d}), f(\bar{\xi}_d))) + f(e_{\gamma^{(i)}}(\bar{x})) \right) = \right. \right. \\
 & \left. \left. \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(f(\bar{l}), f(\bar{\xi}_l))) + f(e_{\gamma^{(i)}}(\bar{y})) \right) \neq \infty \right) \wedge \right. \\
 & \left. \min_{i \in N} \left(\gamma^{(i)}(f(\bar{x})) - f(e_{\gamma^{(i)}}(\bar{x})) \right) < \min_{i \in N} \left(\gamma^{(i)}(f(\bar{y})) - f(e_{\gamma^{(i)}}(\bar{y})) \right) \right) \\
 \Leftrightarrow & \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(f(\bar{d}), f(\bar{\xi}_d))) + f(\gamma^{(i)}(\bar{x})) \right) < \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(v(P_i(f(\bar{l}), f(\bar{\xi}_l))) + f(\gamma^{(i)}(\bar{y})) \right) \\
 \Leftrightarrow & v\left(\sum_{i=1}^n f(d_i) f(x_i)\right) < v\left(\sum_{i=1}^n f(l_i) f(y_i)\right).
 \end{aligned}$$

Ainsi on peut prolonger f en un isomorphisme de corps valué de $K(D)$ dans $K'(D')$. D'après le lemme 2.5.6, f est un \mathcal{L}_{EQ} -isomorphisme partiel. Comme $f|_{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})}$ préserve les formules de Ω , il est clair que f préserve les formules de Ω . Donc f est un bon isomorphisme partiel. \square

Extensions résiduelles

Lemme 2.5.9. *Soient respectivement \mathcal{K} et \mathcal{K}' des bonnes \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ un bon isomorphisme partiel, et x un élément de valuation nulle de \mathcal{M} tel que $[K(x) : K] = [K/v(x/v) : K/v]$. Notons $\mathcal{K}(x)$ la $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -structure engendré par $K(x)$. Alors $\mathcal{K}(x)$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} , $E_{\mathcal{K}(x)} = E_{\mathcal{K}}$, et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}(x)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3.21, $K(E_M)/v = K/v(E_M/v)$. Or $E_M/v = \mathbb{F}_{p^g}$, donc $K(E_M)/v = K/v$. Ainsi, $[K(E_M)/v(x/v) : K(E_M)/v] = [K/v(x/v) : K/v] = [K(x) : K]$. Donc d'après le lemme 2.3.23, $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{M}$ et $E_{K(x)} = E_K$. Comme $[K(x) : K] = [K/v(x/v) : K/v]$, on a $\Gamma_{K(x)} = \Gamma_K$. Donc $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} = \frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$. D'après le lemme 2.5.4, $\mathcal{K}(x)$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} . Par \aleph_1 -saturation on peut prolonger f en un isomorphisme de corps valué de domaine $K(x)$. Notons $x' := f(x)$. On montre exactement comme ci-dessus que $\mathcal{K}'(x')$, la $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -structure engendrée par $K'(x')$, est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M}' , vérifiant $E_{K'(x')} = E_{K'}$. D'après le lemme 2.5.6, f est un \mathcal{L}_{EQ} -isomorphisme partiel. Comme $E_{K(x)} = E_K$, comme $E_{K'(x')} = E_{K'}$, et comme $f|_{\mathcal{K}}$ préserve les formules de Ω , il est clair que f préserve les formules de Ω . Ainsi f est un bon isomorphisme partiel. \square

Extensions valuationnelles

Lemme 2.5.10. *Soient respectivement \mathcal{K} et \mathcal{K}' des bonnes \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ un \mathcal{L}_{EQ} -isomorphisme partiel, et x un élément de \mathcal{M} tel que $[K(x) : K] = [\Gamma_K(v(x)) : \Gamma_K]$ et qu'il existe $e \in E_K$ vérifiant $0 \leq v(x) - v(e) < 1$. Notons $\mathcal{K}(x)$ la $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -structure engendré par $K(x)$. Alors $\mathcal{K}(x)$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -structure de \mathcal{M} , $E_{K(x)} = E_K$, et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}(x)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3.25, $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{M}$, $E_{K(x)} = E_K$, et $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} \subseteq [0, 1[$. D'après le lemme 2.5.4, $\mathcal{K}(x)$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} . Par \aleph_1 -saturation on peut prolonger f en un isomorphisme de corps valué de domaine $K(x)$. Notons $x' := f(x)$. On montre exactement comme ci-dessus que $\mathcal{K}'(x')$, la $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ -structure engendrée par $K'(x')$, est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M}' vérifiant $E_{K'(x')} = E_{K'}$. D'après le lemme 2.5.6, f est un \mathcal{L}_{EQ} -isomorphisme partiel. Comme $E_{K(x)} = E_K$, comme $E_{K'(x')} = E_{K'}$, et comme $f|_{\mathcal{K}}$ préserve les formules de Ω , il est clair que f préserve les formules de Ω . Ainsi f est un bon isomorphisme partiel. \square

Remarque 2.5.11. Dans le lemme précédent, si $[K(x) : K]$ est fini, il existe forcément $e \in E_K$ tel que $0 \leq v(x) - v(e) < 1$. En effet, notons n le degré de x sur K . Par hypothèse sur la théorie, il existe $e \in E_M$ tel que $0 \leq v(x) - v(e) < 1$, d'où $0 \leq v(x^n) - v(e^n) < n$. Il existe donc $l \in [0, n - 1]$ tel que $0 \leq v(x^n) - v(p^{-l}e^n) < 1$. Comme $v(x^n) \in \Gamma_K$, il existe $e_k \in E_K$, tel que $0 \leq v(x^n) - v(e_k) < 1$, on en déduit que $v(e_k) = v(p^{-l}e^n)$. Ainsi $v(e^n) \in \Gamma_{E_K}$, et comme $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, il existe $e' \in E_K$, tel que $v(e') = v(e)$.

Extensions immédiates

Lemme 2.5.12. *Soient respectivement \mathcal{K} et \mathcal{K}' des bonnes \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ un bon isomorphisme partiel, $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de K , suite de degré d (vu comme élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) au-dessus de K , et x une pseudo-limite de cette suite vérifiant $[K(x) : K] = d$, $\mathbb{K}(x) \subseteq_\gamma \mathbb{M}$, et $E_{K(x)} = E_K$. Notons $\mathcal{K}(x)$ la $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ -structure engendré par $K(x)$. Alors $\mathcal{K}(x)$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -structure de \mathcal{M} et on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}(x)$.*

Démonstration. Comme $K(x)$ est une extension immédiate de K , on a $\Gamma_{K(x)} = \Gamma_K$, par hypothèse $\Gamma_{E_{K(x)}} = \Gamma_{E_K}$, donc $\frac{\Gamma_{K(x)}}{\Gamma_{E_{K(x)}}} = \frac{\Gamma_K}{\Gamma_{E_K}} \subseteq [0, 1[$. D'après le lemme 2.5.4, $\mathcal{K}(x)$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} . Par \aleph_1 -saturation on peut prolonger f en un isomorphisme de corps valué de domaine $K(x)$. Notons $x' := f(x)$. On va montrer que $\mathcal{K}'(x')$, la $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ -structure engendrée par $K'(x')$, est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M}' . Commençons par prouver, que pour tout $P_0, \overline{P} \in K'(X)$, $\gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{K'})$ existe, et est égal à $\gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{M'})$. Il existe un sous-ensemble dénombrable D' de $E_{M'}$, tel que pour tous $P_0, \overline{P} \in K'(X)$, $\gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, D')$ existe et soit égal à $\gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{M'})$, et que $\mathcal{E}_{\mathcal{K}'}(D') \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}'}$. D'après le lemme 2.5.8, on peut prolonger $f|_{K'}$ en un bon isomorphisme partiel h de domaine $\mathcal{K}'(D')$. Par \aleph_1 -saturation on peut prolonger h en un isomorphisme de corps valué de domaine $K'(D')(x')$. Notons $y := h(x')$. Soient $P_0, \overline{P} \in K'(X)$. Par construction de D' ,

$$\gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{M'}) = \gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{K'(D')}).$$

Par hypothèse,

$$\gamma_n\left(f^{-1}(P_0)(x)/\overline{f^{-1}(P)(x)}, E_M\right) = \gamma_n\left(f^{-1}(P_0)(x)/\overline{f^{-1}(P)(x)}, E_K\right).$$

Comme h est un isomorphisme de corps valué qui prolonge $f|_{K'}$, on a en particulier que $[K(y) : K] = d$ et que y est une pseudo-limite de la suite $(x_\alpha)_{\alpha < \beta}$. D'après le lemme 2.3.19,

$$\gamma_n\left(f^{-1}(P_0)(y)/\overline{f^{-1}(P)(y)}, E_M\right) = \gamma_n\left(f^{-1}(P_0)(y)/\overline{f^{-1}(P)(y)}, E_K\right).$$

En particulier, $\gamma_n\left(f^{-1}(P_0)(y)/\overline{f^{-1}(P)(y)}, E_{h(K'(D'))}\right) = \gamma_n\left(f^{-1}(P_0)(y)/\overline{f^{-1}(P)(y)}, E_K\right)$, et comme h est un isomorphisme de corps valué,

$$\gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{K'(D')}) = \gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{K'}).$$

Ainsi,

$$\gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{M'}) = \gamma_n(P_0(x')/\overline{P(x')}, E_{K'}).$$

D'après le lemme 2.3.16, $\mathbb{K}'(x') \subseteq_{\gamma} \mathbb{M}'$, et $E_{K'(x')} = E_{K'}$. Comme $\Gamma_{K'(x')} = \Gamma_{K'}$, $\frac{\Gamma_{K'(x')}}{\Gamma_{E_{K'(x')}}} = \frac{\Gamma_{K'}}{\Gamma_{E_{K'}}} \subseteq [0, 1[$. D'après le lemme 2.5.4, $\mathcal{K}'(x')$ est une bonne \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M}' . D'après le lemme 2.5.6, f est un \mathcal{L}_{EQ} -isomorphisme partiel. Comme $E_{K(x)} = E_K$, comme $E_{K'(x')} = E_{K'}$, et comme $f|_{\mathcal{K}}$ préserve les formules de Ω , il est clair que f préserve les formules de Ω . Ainsi f est un bon isomorphisme partiel. \square

Démonstration du théorème 2.5.3

Démonstration du théorème 2.5.3. Soient respectivement \mathcal{K} et \mathcal{K}' des \mathcal{L}_{EQ} -sous-structure de \mathcal{M} et \mathcal{M}' , $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ un bon isomorphisme partiel, et x un élément de M . On va montrer que l'on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel dont le domaine contient $K(x)$.

Il existe un sous-ensemble dénombrable D de E_M , tel qu'il existe $d \in D$ vérifiant $0 \leq v(x) - v(d) < 1$, tel que pour tous $z, \bar{y} \in K(D)(x)^{alg}$, $\gamma_n(z/\bar{y}, D)$ existe et soit égal à $\gamma_n(z/\bar{y}, E_M)$, et tel que $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(D) \preceq_{pCF} \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. D'après le lemme 2.5.8, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}(D)$. Notons $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}(D)$.

Soit $\eta \in \Gamma_M$, tel que η appartienne à la clôture divisible de Γ_{K_1} . Il existe alors un plus petit entier n tel que $n\eta \in \Gamma_{K_1}$. Soit $k \in K_1$ tel que $n\eta = v(k)$. Notons $k^{\frac{1}{n}}$ une racine n -ième de k dans M . D'après le lemme 2.5.10 et la remarque 2.5.11, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}_1(k^{\frac{1}{n}})$. Ainsi, par un argument de chaîne, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine \mathcal{K}_2 tel que Γ_{K_2} soit divisible.

Soit $\zeta \in (K_2/v)^{alg}$. Il existe alors $z \in K_2^{alg} (= K_1^{alg})$, tel que $z/v = \zeta$, et $[K_2(z) : K_2] = [(K_2/v)(\zeta) : K_2/v]$. D'après le lemme 2.5.9, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}_2(z)$. Ainsi, par un argument de chaîne, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine \mathcal{K}_3 tel que K_3/v soit algébriquement clos. De plus, comme $\Gamma_{K_3} = \Gamma_{K_2}$, Γ_{K_3} est divisible.

Soit $(z_{\alpha})_{\alpha < \beta}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de K_3 de type algébrique, de degré d au-dessus de K . Il existe alors une pseudo-limite de cette suite $z \in K_3^{alg}$, tel que $[K_3(z) : K_3] = d$. D'après le lemme 2.5.12, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}_3(z)$. Ainsi, par un argument de chaîne, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entre bonnes sous-paires de domaine \mathcal{K}_3^{alg} . De plus, $K_3^{alg} = K(D)^{alg}$.

Alors, soit $K(D)^{alg}(x)$ est une extension immédiate de type transcendant de

$K(D)^{alg}$, soit il existe $y \in K(D)^{alg}(x)$ tel que $v(y) = 0$ et $y/v \notin K(D)^{alg}/v$, soit il existe $y \in K(D)^{alg}(x)$ tel que $v(y) \notin \Gamma_{K(D)^{alg}}$. Dans le premier cas, d'après le lemme 2.5.12, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entres bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}(\mathcal{D})^{alg}(x)$. Dans les deux derniers cas, d'après les lemmes 2.5.9 et 2.5.10, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel entres bonnes sous-paires de domaine $\mathcal{K}(\mathcal{D})^{alg}(y)$. Comme $x \in K(D, y)^{alg}$, d'après ce que nous avons fait ci-dessus, on peut prolonger f en un bon isomorphisme partiel dont le domaine contient $\mathcal{K}(\mathcal{D})(x)$. \square

Chapitre 3

La structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$

3.1 Introduction

Dans la première section du chapitre précédent nous avons donné une axiomatisation complète de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}})$. Que se passe-t-il si au lieu de considérer le corps valué \mathbb{C}_p enrichi d'un prédicat pour $\mathbb{U}_{\bar{p}}$, on le considère enrichi d'un prédicat pour \mathbb{U} ? C'est ce que nous allons voir dans ce chapitre.

On sera amené à étudier deux sous groupes de \mathbb{U} , $\mathbb{U}_{\bar{p}}$ et \mathbb{U}_p de nature très différente du point de vue de la valuation. En effet, $\mathbb{Q}(\mathbb{U}_{\bar{p}})$ a le même corps résiduel que $\mathbb{Q}(\mathbb{U})$ et le même groupe de valeur que \mathbb{Q} , tandis que l'on verra que pour \mathbb{U}_p , la situation est « duale » dans le sens où $\mathbb{Q}(\mathbb{U}_p)$ a le même corps résiduel que \mathbb{Q} et le même groupe de valeur que $\mathbb{Q}(\mathbb{U})$. On verra que ces deux sous-groupes sont tous les deux définissable sans paramètres dans la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$.

Pour axiomatiser la structure $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}})$ nous nous sommes servis du fait que pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ fixés l'ensemble $\{v(\sum_{i=1}^n a_i z_i) ; z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}_{\bar{p}}\}$ est fini, permettant ainsi d'exprimer au premier ordre que $\Gamma_{\mathbb{Q}(\mathbb{U}_{\bar{p}})} = \Gamma_{\mathbb{Q}}$. La finitude de tels ensembles est en fait un cas particulier d'un théorème de John Tate et José Felipe Voloch [TV96] (cité dans l'introduction générale et que nous rappelons ici) qui affirme que pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$ fixés, l'ensemble

$$\{v(\sum_{i=1}^n a_i z_i) ; z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}, \sum_{i=1}^n a_i z_i \neq 0\}$$

est borné.

On verra toutefois que pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ fixés, bien que l'ensemble

$$\{v(\sum_{i=1}^n a_i z_i) ; z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}_p, \sum_{i=1}^n a_i z_i \neq 0\}$$

soit borné, il n'est en général pas fini. On développera alors un outil pour comprendre la valuation de telles sommes, qui nous permettra d'une part d'améliorer le résultat de John Tate et José Felipe Voloch dans le sens suivant : pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$ fixés, l'ensemble

$$\left\{ v\left(\sum_{i=1}^n a_i z_i\right) ; z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}, \sum_{i=1}^n a_i z_i \neq 0 \right\}$$

admet un élément maximal, et d'autre part de donner une axiomatisation complète de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$.

3.2 Retour sur $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}})$

On reprend ici les notations de la section 2 du chapitre 2.

On va voir une conséquence intéressante du résultat de John Tate et José Felipe Voloch et de la complétude de la théorie $T_{G_{\bar{p}}}$.

Proposition 3.2.1. *Pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$, l'ensemble $\{v(\sum_i a_i \mu_i) ; \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{U}_{\bar{p}}\}$ est fini.*

Démonstration. On va commencer par montrer que $T_{G_{\bar{p}}}$ satisfait la formule :

$$\forall \bar{a}, \exists \alpha, (0 < v(\alpha)) \wedge \left(\forall \bar{\mu}, \bar{\eta} \in G_{\bar{p}}, v\left(\sum_i a_i \mu_i\right) \neq v\left(\sum_i a_i \eta_i\right) \implies v(\alpha) < \left|v\left(\sum_i a_i \mu_i\right) - v\left(\sum_i a_i \eta_i\right)\right| \right).$$

Comme $T_{G_{\bar{p}}}$ est complète, il suffit de vérifier que cette formule est vraie dans la structure $(\mathbb{Q}^{alg}, \mathbb{U}_{\bar{p}})$, qui est modèle de $T_{G_{\bar{p}}}$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}^{alg}$. Comme $\Gamma_{\mathbb{Q}(\mathbb{U}_{\bar{p}})} = \mathbb{Z}$, $\Gamma_{\mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)(\mathbb{U}_{\bar{p}})}$ qui en est une extension finie, est aussi un groupe ordonné discret. Or, d'après le résultat de John Tate et José Felipe Voloch, l'ensemble $\{v(\sum_i a_i \mu_i) ; \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{U}_{\bar{p}}, \sum_i a_i \mu_i \neq 0\}$ est borné, il est donc fini. Donc $(\mathbb{Q}^{alg}, \mathbb{U}_{\bar{p}})$ est modèle de la formule voulue.

Soient maintenant $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$. Comme $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}})$ est un modèle de $T_{G_{\bar{p}}}$, d'après ce qui précède, l'ensemble $\{v(\sum_i a_i \mu_i) ; \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{U}_{\bar{p}}\}$ est discret. D'après le résultat de John Tate et José Felipe Voloch, l'ensemble $\{v(\sum_i a_i \mu_i) ; \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{U}_{\bar{p}}, \sum_i a_i \mu_i \neq 0\}$ est borné, donc l'ensemble $\{v(\sum_i a_i \mu_i) ; \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{U}_{\bar{p}}\}$ est fini. \square

Remarque 3.2.2. De façon plus générale on montre que pour tout modèle (M, G_M) de $T_{G_{\bar{p}}}$ dont le groupe de valeur est archimédien et pour tout $a_1, \dots, a_n \in M$ fixés, l'ensemble $\{v(\sum_{i=1}^n a_i g_i) ; g_1, \dots, g_n \in G_M\}$ est fini.

3.3 Valuation et racines de l'unité

Dans toute cette section, pour tout $\xi \in \mathbb{U}$ on notera $\text{ord}(\xi)$ le plus petit entier r tel que $\xi^r = 1$. Pour tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}^n$ on notera $\text{ord}(\bar{\xi}) := \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\text{ord}(\xi_i))$.

3.3.1 Racines d'ordre une puissance de p et V -longueur

Dans cette sous-section on va introduire des outils permettant de décrire la valuation des sommes du type $\sum_i a_i \xi_i$ où $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_p$. Pour motiver leur introduction traitons de façon informelle deux cas simples. Soient a_1, \dots, a_n des rationnels. Supposons dans un premier temps que ξ_1, \dots, ξ_n sont des racines p -ièmes de l'unité et que $\xi_1 \neq 1$. On verra par la suite que $v(\xi_1 - 1) = \frac{1}{p-1}$. On peut alors réécrire la somme $\sum_{i=1}^n a_i \xi_i$ sous la forme $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \xi_1^i$, puis sous la forme $\sum_{i=0}^{p-2} \alpha'_i \xi_1^i$ (en utilisant que $\xi_1^{p-1} = -\sum_{i=0}^{p-2} \xi_1^i$) et enfin sous la forme $\sum_{i=0}^{p-2} \beta_i (\xi_1 - 1)^i$, où les α_i, α'_i , et les β_i sont des rationnels. Sous cette dernière forme, comme les β_i sont des rationnels, chaque terme de la somme a une valuation différente, ce qui permet de conclure. Supposons maintenant que ξ_1, \dots, ξ_n sont des racines p^2 -ièmes de l'unité et que $\xi_1^p \neq 1$. On verra par la suite que $v(\xi_1 - 1) = \frac{1}{p(p-1)}$. On montre alors facilement que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $k_i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ et ξ'_i une racine p -ième de l'unité tels que $\xi_i = \xi_1^{k_i} \xi'_i$. On peut alors réécrire la somme $\sum_{i=1}^n a_i \xi_i$ sous la forme $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \xi_1^i$, où les α_i sont des rationnels, puis sous la forme $\sum_{i=0}^{p-1} \beta_i (\xi_1 - 1)^i$, où les β_i sont des sommes à coefficients rationnels de racines p -ièmes de l'unité. On pourrait ensuite décomposer chaque β_i comme dans l'exemple précédent, et obtenir une somme dont chaque terme a une valuation différente. Dans le cas général on introduira la notion de V -longueur d'un uple de racines pour faire ce type de décomposition. Les deux lemmes suivants sont des résultats classiques, qui se trouvent par exemple dans [Gou13] (p.171) ou [Ser97] (p.85) sous des formes différentes.

Lemme 3.3.1. *Soit $\xi \in \mathbb{U}_p$ tel que $\text{ord}(\xi) = p^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$v(\xi - 1) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}.$$

Démonstration. On va raisonner par induction sur n .

Pour $n = 1$, on a $\xi^p = 1$, d'où $v(\xi) = 0$. On a alors $\xi^p = 1$ dans $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ et comme $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ est de caractéristique p on en déduit que $\xi = 1$. Ainsi on peut écrire $\xi = 1 + \varepsilon$ avec $v(\varepsilon) > 0$. En élevant cette égalité à la puissance p on

obtient $0 = \varepsilon^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \varepsilon^i$. En regroupant dans cette somme tous les termes de degré supérieur ou égal à 2 et en utilisant que $v(\varepsilon) > 0$ et que $p \mid \binom{p}{i}$ pour $i \in [2, p-1]$ on obtient que $0 = \varepsilon^p + p\varepsilon + \varepsilon'$ avec $v(\varepsilon') > v(p\varepsilon)$. Cette dernière égalité implique que $v(\varepsilon^p) = v(p\varepsilon)$ c'est à dire que $v(\varepsilon) = \frac{1}{p-1}$, ce qui termine la preuve pour le cas $n = 1$.

Supposons maintenant le résultat vrai à l'ordre n et montrons-le à l'ordre $n + 1$. Soit $\xi \in \mathbb{U}_p$ avec $\text{ord}(\xi) = p^{n+1}$. On montre de la même manière que précédemment que $\xi = 1 + \varepsilon$ avec $v(\varepsilon) > 0$. En élevant cette égalité à la puissance p on obtient $\xi^p - 1 = \varepsilon^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \varepsilon^i$. En regroupant tous les termes de cette somme et en utilisant que $p \mid \binom{p}{i}$ pour $i \in [1, p-1]$ on obtient $\xi^p - 1 = \varepsilon^p + \varepsilon'$ avec $v(\varepsilon') > 1$. Or $\text{ord}(\xi^p) = p^n$ donc par hypothèse d'induction $v(\xi^p - 1) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$. Comme $v(\xi^p - 1) < 1$ et $v(\varepsilon') > 1$ l'égalité $\xi^p - 1 = \varepsilon^p + \varepsilon'$ implique que $v(\xi^p - 1) = v(\varepsilon^p)$, d'où $v(\varepsilon) = \frac{1}{p^n(p-1)}$ ce qui termine la démonstration. \square

Lemme 3.3.2. $\mathbb{Q}(\mathbb{U}_p)/v = \mathbb{F}_p$ et $\Gamma_{\mathbb{Q}(\mathbb{U}_p)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^n(p-1)} \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit ζ une racine primitive p^n -ième de l'unité. D'après un résultat classique de théorie des corps $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = p^{n-1}(p-1)$. Comme $v(\zeta - 1) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$, $\Gamma_{\mathbb{Q}(\zeta)} = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)} \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}(\zeta)/v = \mathbb{Q}/v = \mathbb{F}_p$, car $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] \geq [\Gamma_{\mathbb{Q}(\zeta)} : \Gamma_{\mathbb{Q}}] \times [\mathbb{Q}(\zeta)/v : \mathbb{Q}/v]$. On en déduit immédiatement le lemme. \square

Introduisons maintenant quelques notations qui nous seront utiles dans la suite.

- Notations.**
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on notera \mathcal{P}_n l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en p ensembles.
 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute partition $B = (B_0, \dots, B_{p-1}) \in \mathcal{P}_n$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on notera $B(i)$ l'élément de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $i \in B_{B(i)}$.
 3. On utilisera la convention $\binom{i}{j} = 0$ si $i < j$.
 4. Pour tout $\xi \in \mathbb{U}_p$ on notera $V(\xi) := v(\xi - 1)$.
 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}_p^n$ on notera $V(\bar{\xi}) := \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (V(\xi_i))$.

Lemme 3.3.3. Soient $\xi_1 \in \mathbb{U}_p \setminus \{1\}$ et $\xi_2 \in \mathbb{U}_p$. Si $V(\xi_1) \leq V(\xi_2)$, alors il existe un unique couple $(k, \xi'_2) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \times \mathbb{U}_p$ tel que $V(\xi_1) < V(\xi'_2)$ et $\xi_2 = \xi_1^k \xi'_2$.

Démonstration. Notons $\mathbb{U}_{p,n} := \{\xi \in \mathbb{C}_p ; \xi^{p^n} = 1\}$. Alors le lemme est équivalent à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(\mathbb{U}_{p,n+1}/\mathbb{U}_{p,n}, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{U}_{p,n}| = p^n$, d'où $|\mathbb{U}_{p,n+1}/\mathbb{U}_{p,n}| = p$, donc $(\mathbb{U}_{p,n+1}/\mathbb{U}_{p,n}, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$. \square

Définition 3.3.4. Pour tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}_p^n \setminus \{\bar{1}\}$, on définit $\tilde{\xi}$, que l'on notera simplement $\tilde{\xi}$ dans la suite pour alléger la notation, par $\tilde{\xi} := \xi_{i_0}$, où i_0 est le plus petit indice tel que $V(\xi_{i_0}) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (V(\xi_i))$, et on définit les ensembles $B_{\tilde{\xi}, 0}, \dots, B_{\tilde{\xi}, p-1}$ par $B_{\tilde{\xi}, i} := \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket ; V(\tilde{\xi}) < V(\frac{\xi_j}{\tilde{\xi}^i})\}$ pour $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Pour $\bar{\xi} = \bar{1}$, on définit $\tilde{\xi}$ par $\tilde{\xi} := 1$, et on définit les ensembles $B_{\tilde{\xi}, 0}, \dots, B_{\tilde{\xi}, p-1}$ par $B_{\tilde{\xi}, 1} := \{1, \dots, n\}$ et $B_{\tilde{\xi}, i} := \{\emptyset\}$ pour $i \in \{0\} \cup \llbracket 2, p-1 \rrbracket$. D'après le lemme 3.3.3, $B_{\tilde{\xi}, 0}, \dots, B_{\tilde{\xi}, p-1}$ est une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on dira que $B_{\bar{\xi}} = (B_{\tilde{\xi}, 0}, \dots, B_{\tilde{\xi}, p-1})$ est la partition adaptée à $\bar{\xi}$. On notera $\bar{\xi}' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ où ξ'_i est défini par $\xi'_i = \frac{\xi_i}{\tilde{\xi}^{B_{\bar{\xi}}(i)}}$.

Remarque 3.3.5. $\text{ord}(\bar{\xi}) = \text{ord}(\bar{\xi}')$, en particulier $\bar{\xi} = \bar{1}$ est équivalent à $\tilde{\xi} = 1$.

Définition 3.3.6. Pour tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_p^n$, on définit par induction la suite $(\bar{\xi}^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ par $\bar{\xi}^{(0)} = \bar{\xi}$ et $\bar{\xi}^{(i+1)} = (\bar{\xi}^{(i)})'$.

Remarque 3.3.7. Si $\overline{\xi^{(r-1)}} \neq \bar{1}$ alors on a $V(\xi^{(0)}) < \dots < V(\xi^{(r)})$.

Lemme 3.3.8. Pour tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_p^n$ on a $\overline{\xi^{(n)}} = \bar{1}$.

Démonstration. Notons $A_{\bar{\xi}} := \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket ; \xi_j = 1\}$. Par construction $A_{\overline{\xi^{(i)}}} \subseteq A_{\overline{\xi^{(i+1)}}}$. Fixons i . Si $A_{\overline{\xi^{(i)}}} \neq \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $A_{\overline{\xi^{(i)}}} \subsetneq A_{\overline{\xi^{(i+1)}}}$; en effet, notons j_0 le plus petit élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $V(\xi_{j_0}^{(i)}) = \min_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} (V(\xi_j^{(i)}))$, alors $j_0 \notin A_{\overline{\xi^{(i)}}}$ car $A_{\overline{\xi^{(i)}}} \neq \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j_0 \in A_{\overline{\xi^{(i+1)}}}$ par construction de $\overline{\xi^{(i+1)}}$. On en déduit que $A_{\overline{\xi^{(n)}}} = \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $\overline{\xi^{(n)}} = \bar{1}$. \square

Définition 3.3.9. Soit $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}_p^n$. On appelle V -longueur de $\bar{\xi}$ et on note $l(\bar{\xi})$ le plus petit entier i tel que $\overline{\xi^{(i)}} = \bar{1}$.

Remarque 3.3.10. Soit $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_p^n$. Alors $l(\bar{\xi}) \leq n$, et $l(\bar{\xi}) = 0$ si et seulement si $\bar{\xi} = \bar{1}$.

Lemme 3.3.11. On a $X^n - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (X-1)^k$.

Démonstration. $X^n - 1 = ((X-1) + 1)^n - 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X-1)^k - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (X-1)^k$ \square

Lemme 3.3.12. *Pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_p^n$ et tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}_p^n$ on a*

$$\sum_{i=1}^n x_i \xi_i = \sum_{j=0}^{p-1} (\tilde{\xi} - 1)^j \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\bar{\xi}}(i)}{j} x_i \xi_i' \right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n x_i \xi_i &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i \in B_{\bar{\xi}, k}} x_i \xi_i \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i \in B_{\bar{\xi}, k}} \tilde{\xi}^k x_i \xi_i' \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i \in B_{\bar{\xi}, k}} x_i \xi_i' + \sum_{k=1}^{p-1} (\tilde{\xi}^k - 1) \left(\sum_{i \in B_{\bar{\xi}, k}} x_i \xi_i' \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \xi_i' + \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\tilde{\xi} - 1)^j \right) \left(\sum_{i \in B_{\bar{\xi}, k}} x_i \xi_i' \right) \quad (\text{par le lemme 3.3.11}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \xi_i' + \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} \binom{k}{j} (\tilde{\xi} - 1)^j \right) \left(\sum_{i \in B_{\bar{\xi}, k}} x_i \xi_i' \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \xi_i' + \sum_{j=0}^{p-1} (\tilde{\xi} - 1)^j \left(\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i \in B_{\bar{\xi}, k}} \binom{k}{j} x_i \xi_i' \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \xi_i' + \sum_{j=0}^{p-1} (\tilde{\xi} - 1)^j \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\bar{\xi}}(i)}{j} x_i \xi_i' \right) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} (\tilde{\xi} - 1)^j \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\bar{\xi}}(i)}{j} x_i \xi_i' \right). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.13. *Pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_p^n$, tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}_p^n$ et tout $r \in \mathbb{N}$ on a*

$$\sum_{i=1}^n x_i \xi_i = \sum_{\vec{j} \in [0, p-1]^{r+1}} (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r)} - 1)^{j_r} \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\xi^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{\xi^{(r)}}(i)}{j_r} x_i \xi_i^{(r+1)} \right).$$

Démonstration. On va montrer par induction sur r que pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_p$ et tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}_p$ on a

$$\sum_{i=1}^n x_i \xi_i = \sum_{\vec{j} \in [0, p-1]^{r+1}} (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r)} - 1)^{j_r} \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\xi^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{\xi^{(r)}}(i)}{j_r} x_i \xi_i^{(r+1)} \right).$$

Le lemme 3.3.12 montre que la propriété est vraie pour $r = 0$.

Supposons maintenant que la propriété est vraie au rang r et montrons-la au rang $r + 1$. Par hypothèse d'induction on a

$$\sum_{i=1}^n x_i \xi_i = \sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r)} - 1)^{j_r} \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\xi^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{\xi^{(r)}}(i)}{j_r} x_i \xi_i^{(r+1)} \right)$$

et pour tout $\bar{j} = (j_0, \dots, j_r) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}$, on a d'après le lemme 3.3.12,

$$\sum_{i=1}^n \binom{B_{\xi^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{\xi^{(r)}}(i)}{j_r} x_i \xi_i^{(r+1)} = \sum_{k=0}^{p-1} (\xi^{(r+1)} - 1)^k \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\xi^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{\xi^{(r)}}(i)}{j_r} \binom{B_{\xi^{(r+1)}}(i)}{k} x_i \xi_i^{(r+2)} \right),$$

$$\text{d'où, } \sum_{i=1}^n x_i \xi_i = \sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+2}} (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r+1)} - 1)^{j_{r+1}} \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\xi^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{\xi^{(r+1)}}(i)}{j_{r+1}} x_i \xi_i^{(r+2)} \right).$$

□

3.3.2 V -longueur pour l'ensemble des racines de l'unité

Comme $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_{\bar{p}} = \{1\}$, pour tout $\xi \in \mathbb{U}$ il existe un unique couple $(\xi_p, \xi_{\bar{p}}) \in \mathbb{U}_p \times \mathbb{U}_{\bar{p}}$ tel que $\xi = \xi_p \xi_{\bar{p}}$. On va se servir de ce fait pour étendre la notion de V -longueur à \mathbb{U} .

Définition 3.3.14. Pour tout $\xi \in \mathbb{U}$, on définit $V(\xi)$ par $V(\xi) := V(\xi_p)$, où ξ_p est la composante de ξ sur \mathbb{U}_p .

Définition 3.3.15. Pour tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}^n$, on définit $l(\bar{\xi})$, $\xi^{(i)}$ et $\bar{\xi}^{(i)}$ par $l(\bar{\xi}) := l(\bar{\xi}_p)$, $\xi^{(i)} := \xi_p^{(i)}$ et $\bar{\xi}^{(i)} := \bar{\xi}_{\bar{p}} \xi_p^{(i)}$, où $\bar{\xi}_p$ et $\bar{\xi}_{\bar{p}}$ désignent respectivement les composantes de $\bar{\xi}$ sur \mathbb{U}_p et sur $\mathbb{U}_{\bar{p}}$.

On peut maintenant généraliser la proposition 3.2.1 de la façon suivante :

Proposition 3.3.16. Pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, l'ensemble $\{v(\sum_i a_i \xi_i) ; \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\bar{\xi}) > \varepsilon\}$ est fini.

Démonstration. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ fixés. L'ensemble $\{\bar{\xi} \in \mathbb{U}^n ; V(\bar{\xi}) > \varepsilon\}$ est fini, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta_1, \dots, \zeta_N \in \mathbb{U}_p$ tels que

$$\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}^n ; V(\bar{\xi}) > \varepsilon\} = \bigcup_{j_1, \dots, j_n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \{(\zeta_{j_1} \xi_1, \dots, \zeta_{j_n} \xi_n) ; \bar{\xi} \in \mathbb{U}_{\bar{p}}^n\}.$$

Ainsi

$$\{v(\sum_i a_i \xi_i) ; \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\bar{\xi}) > \varepsilon\} = \bigcup_{j_1, \dots, j_n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \{v(\sum_i a_i \zeta_{j_i} \xi_i) ; \bar{\xi} \in \mathbb{U}_{\bar{p}}^n\}.$$

D'après la proposition 3.2.1, chaque ensemble $\{v(\sum_i a_i \zeta_{j_i} \xi_i) ; \bar{\xi} \in \mathbb{U}_{\bar{p}}^n\}$ est fini, donc l'ensemble $\{v(\sum_i a_i \xi_i) ; \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{U}, V(\bar{\xi}) > \varepsilon\}$ est fini. □

Les lemmes 3.3.12 et 3.3.13 se généralisent, avec des démonstrations identiques, de la façon suivante :

Lemme 3.3.17. *Pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_p^n$ et tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}^n$ on a*

$$\sum_{i=1}^n x_i \xi_i = \sum_{j=0}^{p-1} (\tilde{\xi} - 1)^j \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\bar{\xi}}(i)}{j} x_i \xi_i' \right).$$

Lemme 3.3.18. *Pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_p^n$, tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}^n$ et tout $r \in \mathbb{N}$ on a*

$$\sum_{i=1}^n x_i \xi_i = \sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} (\xi^{(\tilde{0})} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(\tilde{r})} - 1)^{j_r} \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{\xi^{(\tilde{0})}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{\xi^{(\tilde{r})}}(i)}{j_r} x_i \xi_i^{(r+1)} \right).$$

En pratique on utilisera ce lemme quand tous les termes de la somme du membre de gauche auront des valuations différentes. Les deux lemmes suivants vont nous servir à montrer que c'est le cas dans une situation que nous rencontrerons par la suite.

Lemme 3.3.19. *Soient $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{U}$ et $q_1, \dots, q_n \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket$. Si $V(\xi_1) < \dots < V(\xi_n)$, alors $|\sum_{k=1}^n q_k V(\xi_k)| < pV(\xi_n)$. De plus si $(q_1, \dots, q_n) \neq (0, \dots, 0)$ alors $0 < |\sum_{k=1}^n q_k V(\xi_k)|$.*

Démonstration. Si $n = 1$ le résultat est trivial. Sinon, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a, $V(\xi_i) \leq \frac{1}{p}V(\xi_{i+1})$, d'où $V(\xi_i) \leq \frac{1}{p^{n-i}}V(\xi_n)$. Alors on a,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n q_i V(\xi_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |q_i| V(\xi_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (p-1) V(\xi_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (p-1) \frac{1}{p^{n-i}} V(\xi_n) \\ &\leq \frac{p^n - 1}{p^{n-1}} V(\xi_n) \\ &< pV(\xi_n), \end{aligned}$$

ce qui montre la première partie du lemme. Si $(q_1, \dots, q_n) \neq (0, \dots, 0)$, notons r le plus grand entier tel que $q_r \neq 0$. Si $r = 1$, on a trivialement $\sum_{i=1}^n q_i V(\xi_i) \neq 0$. Si $r > 1$, d'après la première partie du lemme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{r-1} q_i V(\xi_i) \right| &< pV(\xi_{r-1}) \\ &\leq V(\xi_r). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^r q_i V(\xi_i) \right| &\geq |q_r V(\xi_r)| - \left| \sum_{i=1}^{r-1} q_i V(\xi_i) \right| \\
&> |q_r| |V(\xi_r) - V(\xi_r)| \\
&\geq (|q_r| - 1) V(\xi_r) \\
&\geq 0 \quad (\text{car } q_r \neq 0).
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.20. Soient $\xi_0, \dots, \xi_n \in \mathbb{U}$ et $(a_{\bar{j}})_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1}}$ une suite d'éléments de \mathbb{C}_p . Si

$$pV(\xi_n) \leq \min \left(\{v(a_{\bar{j}}) - v(a_{\bar{j}'}) ; \bar{j}, \bar{j}' \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1}\} \cap \mathbb{Q}_+^* \right)$$

et si $V(\xi_0) < \dots < V(\xi_n)$ alors

$$v \left(\sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1}} a_{\bar{j}} (\xi_0 - 1)^{j_0} \dots (\xi_n - 1)^{j_n} \right) = \min_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1}} v \left(a_{\bar{j}} (\xi_0 - 1)^{j_0} \dots (\xi_n - 1)^{j_n} \right).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tous \bar{j}, \bar{j}' avec $\bar{j} \neq \bar{j}'$, $a_{\bar{j}} \neq 0$ et $a_{\bar{j}'} \neq 0$, on a $v \left(a_{\bar{j}} (\xi_0 - 1)^{j_0} \dots (\xi_n - 1)^{j_n} \right) \neq v \left(a_{\bar{j}'} (\xi_0 - 1)^{j'_0} \dots (\xi_n - 1)^{j'_n} \right)$. On va raisonner par l'absurde en supposant que $v \left(a_{\bar{j}} (\xi_0 - 1)^{j_0} \dots (\xi_n - 1)^{j_n} \right) = v \left(a_{\bar{j}'} (\xi_0 - 1)^{j'_0} \dots (\xi_n - 1)^{j'_n} \right)$. On aurait alors $\sum_{i=0}^n (j_i - j'_i) V(\xi_i) = v(a_{\bar{j}}) - v(a_{\bar{j}'})$. D'après le lemme précédent, $0 < \left| \sum_{i=0}^n (j_i - j'_i) V(\xi_i) \right| < pV(\xi_n)$, ce qui impliquerait une contradiction. □

Afin de convaincre le (la) lecteur (lectrice) de l'utilité de cette décomposition montrons (même si ne nous en servons pas directement dans l'axiomatisation de la théorie) comment l'utiliser pour obtenir la

Proposition 3.3.21. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$. On ne peut pas extraire de suite strictement croissante de l'ensemble $\{v(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i) ; \xi \in \mathbb{U}^n\}$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$, et une suite $(\bar{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{U}^n)^{\mathbb{N}}$, tels que la suite $\left(v \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_{j,i} \right) \right)_{j \in \mathbb{N}}$, soit strictement croissante. Quitte à extraire une sous-suite de $(\bar{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on peut supposer qu'il existe des partitions B_0, \dots, B_n de $\llbracket 1, n \rrbracket$, telles que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on ait, $B_0 = B_{\xi_j^{(0)}}, \dots, B_n = B_{\xi_j^{(n)}}$. D'après la proposition 3.3.16, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, l'ensemble $\{v(\sum_{i=1}^n a_i z_i) ; \bar{z} \in \mathbb{U}^n, V(\bar{z}) \geq \varepsilon\}$ est fini. Donc quitte à extraire une sous-suite de $(\bar{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que la suite $\left(V(\bar{\xi}_j) \right)_{j \in \mathbb{N}}$, est strictement décroissante et converge vers

0. Or $V(\xi_j^{(0)}) = V(\bar{\xi}_j)$, donc la suite $(V(\xi_j^{(0)}))_{j \in \mathbb{N}}$, est strictement décroissante et converge vers 0. Notons r le plus grand entier (qui existe d'après le lemme 3.3.8) tel que, quitte à extraire une sous-suite de $(\bar{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on puisse supposer que les suites $(V(\xi_j^{(0)}))_{j \in \mathbb{N}}, \dots, (V(\xi_j^{(r)}))_{j \in \mathbb{N}}$, soient strictement décroissantes et convergent vers 0. Par définition de r , quitte à extraire une sous-suite de $(\bar{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on peut supposer qu'il existe $\eta \in \mathbb{Q}_+^*$, tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on ait, $V(\xi_j^{(r+1)}) \geq \eta$. D'après le lemme 3.3.18, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on aurait

$$\sum_{i=1}^n a_i \xi_{j,i} = \sum_{\bar{k} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} (\xi_j^{(0)} - 1)^{k_0} \dots (\xi_j^{(r)} - 1)^{k_r} \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{k_0} \dots \binom{B_r(i)}{k_r} a_i \xi_{j,i}^{(r+1)} \right).$$

Quitte à extraire une sous-suite de $(\bar{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on peut supposer d'après le lemme 3.3.16, que pour $k_0, \dots, k_r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ fixés,

$$v\left(\sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{k_0} \dots \binom{B_r(i)}{k_r} a_i \xi_{j,i}^{(r+1)}\right) = v\left(\sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{k_0} \dots \binom{B_r(i)}{k_r} a_i \xi_{j',i}^{(r+1)}\right),$$

pour tous $j, j' \in \mathbb{N}$. De plus, on peut supposer que,

$$\begin{aligned} & pV(\xi_0^{(r)}) \\ < \min \left(\left\{ v\left(\sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{k_0} \dots \binom{B_r(i)}{k_r} a_i \xi_{0,i}^{(r+1)}\right) - v\left(\sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{k'_0} \dots \binom{B_r(i)}{k'_r} a_i \xi_{0,i}^{(r+1)}\right) ; \right. \right. \\ & \left. \left. \bar{k}, \bar{k}' \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1} \right\} \cap \mathbb{Q}_+^* \right). \end{aligned}$$

Alors d'après le lemme 3.3.20, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on aurait,

$$\begin{aligned} & v\left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_{j,i}\right) \\ &= \min_{\bar{k} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} \left(v\left((\xi_j^{(0)} - 1)^{k_0} \dots (\xi_j^{(r)} - 1)^{k_r} \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{k_0} \dots \binom{B_r(i)}{k_r} a_i \xi_{j,i}^{(r+1)} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Quitte à extraire une sous-suite de $(\bar{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, le minimum est toujours atteint pour le même multi-indice \bar{k} . En notant alors $\alpha = v\left(\sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{k_0} \dots \binom{B_r(i)}{k_r} a_i \xi_{0,i}^{(r+1)}\right)$, on aurait que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v\left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_{j,i}\right) &= \alpha + v\left((\xi_j^{(0)} - 1)^{k_0} \dots (\xi_j^{(r)} - 1)^{k_r} \right) \\ &= \alpha + \sum_{i=0}^r k_i V(\xi_j^{(i)}). \end{aligned}$$

D'après la stricte décroissance des suites $(V(\xi_j^{(0)}))_{j \in \mathbb{N}}, \dots, (V(\xi_j^{(r)}))_{j \in \mathbb{N}}$, on en déduirait que la suite $(v(\sum_{i=1}^n a_i \xi_{j,i}))_{j \in \mathbb{N}}$ serait strictement décroissante, ce qui absurde. \square

Théorème 3.3.22. *Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$. L'ensemble*

$$\{v(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i) ; \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{U}, \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \neq 0\}$$

admet un maximum.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. \square

3.3.3 Maximum sur certains ensembles algébriques

On va démontrer dans cette sous-section une proposition qui sera au coeur de l'axiomatisation de la théorie de la structure $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$. Avant de présenter cette proposition commençons par quelques notations utiles pour formuler le résultat.

Notations. 1. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on notera $\tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$ des polynômes linéaires en les Z_i .

2. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, tout $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$ où $P(X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{k=1}^n P_k(X_1, \dots, X_m, Y) Z_k$, tout $\bar{B} = (B_0, \dots, B_r) \in \mathcal{P}_n^{r+1}$ et tout $\bar{j} = (j_0, \dots, j_r) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}$, on notera

$$P_{\bar{B}, \bar{j}}(X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n) := \sum_{k=1}^n \binom{B_0(k)}{j_0} \dots \binom{B_r(k)}{j_r} P_k(X_1, \dots, X_m, Y) Z_k.$$

3. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$, on notera

$$A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}}) := \{y \in \mathbb{C}_p ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}.$$

4. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, on notera $\mathbb{U}_{\varepsilon} := \{\xi \in \mathbb{U} ; V(\xi) > \varepsilon\}$.

Avec ces notations on peut reformuler le lemme 3.3.18 de la façon suivante :

Lemme 3.3.23. *Pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}_p^n$, tout $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{U}^n$, tout $y \in \mathbb{C}_p$, tout $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$ et tout $r \in \mathbb{N}$ on a*

$$P(\bar{x}, y, \bar{\xi}) = \sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r)} - 1)^{j_r} P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{x}, y, \overline{\xi^{(r+1)}}),$$

où $\bar{B} = (B_{\xi^{(0)}}, \dots, B_{\xi^{(r)}})$.

On peut maintenant énoncer la proposition :

Proposition 3.3.24. *Soient $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$, $\bar{a} \in \mathbb{C}_p^m$ et $x \in \mathbb{C}_p$. L'ensemble $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$ admet un maximum, si pour tout $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, tout $\bar{B} \in \mathcal{P}_n^{r+1}$, tout $\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}$, et tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}^n$, il existe $y_0 \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$, tel que pour tout $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x-y) > v(x-y_0)$, on ait $v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{\xi}))$.*

Le reste de cette section va être consacré à la démonstration de cette proposition.

Lemme 3.3.25. *Soient $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$, $\bar{a} \in \mathbb{C}_p^m$, $x \in \mathbb{C}_p$. S'il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que l'ensemble $\{v(x-y) ; y \in \mathbb{C}_p, \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}_\varepsilon^n, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$ soit infini alors $x \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$.*

Démonstration. Soit (s'il en existe) $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, tel que l'ensemble $\{v(x-y) ; y \in \mathbb{C}_p, \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}_\varepsilon^n, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$ soit infini. Notons $P^{(i)}$ et d respectivement le i -ème polynôme dérivé et le degré de P vu comme polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m, Z_1, \dots, Z_n][Y]$. D'après la formule de Taylor, pour tout $y \in \mathbb{C}_p$, $P(\bar{a}, y, \bar{z}) = \sum_{i=0}^d P^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{z})(y-x)^i$. D'après la proposition 3.3.16, l'ensemble

$$\{v(P^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})) ; i \in \llbracket 0, d \rrbracket, \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\bar{\xi}) > \varepsilon\}$$

est fini. Comme l'ensemble

$$\{v(x-y) ; y \in \mathbb{C}_p, \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}_\varepsilon^n, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$$

est infini, il existe $y \in \mathbb{C}_p$ et $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_\varepsilon^n$ tels que $P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0$ et que pour tout $i, j \in \llbracket 0, d \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $(P^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi}), P^{(j)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})) \neq (0, 0)$ on ait $v(P^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})(x-y)^i) \neq v(P^{(j)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})(x-y)^j)$. On en déduit que

$$v(P(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = \min_{0 \leq i \leq d} \left(v(P^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})(x-y)^i) \right).$$

Or $P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0$, donc en particulier $P(\bar{a}, x, \bar{\xi}) = 0$. □

Lemme 3.3.26. *Soient $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$, $\bar{a} \in \mathbb{C}_p^m$ et $x \in \mathbb{C}_p$. Si l'ensemble $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$ n'a pas de maximum alors il existe $\eta \in \mathbb{Q}_+^*$ et $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, l'ensemble*

$$\{v(x-y) ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\xi^{(r)}) \leq \varepsilon, V(\xi^{(r+1)}) > \eta, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$$

soit cofinal dans $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$.

Démonstration. Comme pour tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}^n$, $V(\xi^{\tilde{n}}) = \infty$, pour tout $\mu \in \mathbb{Q}_+^*$ on a

$$\{v(x-y) ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\xi^{\tilde{n}}) > \mu, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\} = \{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}.$$

On en déduit qu'il existe un plus petit entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, tel qu'il existe $\eta \in \mathbb{Q}_+^*$, tel que l'ensemble

$$\{v(x-y) ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\xi^{\tilde{k}}) > \eta, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$$

soit cofinal dans $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$. Comme l'ensemble $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$ n'a pas de maximum $x \notin A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ (car sinon ∞ serait un maximum). Donc d'après le lemme précédent, pour tout $\mu \in \mathbb{Q}_+^*$, l'ensemble $\{v(x-y) ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}_\mu^n, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$ est fini, donc n'est pas cofinal dans $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$, ainsi $k \neq 0$. Posons $r = k - 1$. Par définition de r , pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, l'ensemble

$$\{v(x-y) ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\xi^{\tilde{r}}) > \varepsilon, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$$

n'est pas cofinal dans $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$. On en déduit que l'ensemble

$$\{v(x-y) ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\xi^{\tilde{r}}) \leq \varepsilon, V(\xi^{\tilde{r+1}}) > \eta, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$$

est cofinal dans $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$. \square

Lemme 3.3.27. Soient $P, Q \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$, $\bar{a} \in \mathbb{C}_p^m$, $x \in \mathbb{C}_p$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Supposons que l'ensemble $\{v(x-y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$ est infini. Supposons de plus pour tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_\varepsilon^n$, il existe $y_0 \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$, tel que pour tout $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x-y) \geq v(x-y_0)$, on ait, $v(Q(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = v(Q(\bar{a}, x, \bar{\xi}))$. Alors il existe $y_0 \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$, tel que pour tout $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x-y) \geq v(x-y_0)$ et tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_\varepsilon^n$, on ait $v(Q(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = v(Q(\bar{a}, x, \bar{\xi}))$.

Démonstration. Notons $Q^{(i)}$ et d respectivement le i -ème polynôme dérivé et le degré de Q vu comme polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m, Z_1, \dots, Z_n][Y]$. D'après la proposition 3.3.16, l'ensemble $\left\{ \left(v(Q^{(0)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})), \dots, v(Q^{(d)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})) \right) ; \bar{\xi} \in \mathbb{U}_\varepsilon^n \right\}$ est fini. Notons N son cardinal. Soient $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_N$ des éléments de \mathbb{U}_ε^n tels que

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(v(Q^{(0)}(\bar{a}, x, \bar{\xi}_i)), \dots, v(Q^{(d)}(\bar{a}, x, \bar{\xi}_i)) \right) ; i \in \llbracket 1, N \rrbracket \right\} = \\ & \left\{ \left(v(Q^{(0)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})), \dots, v(Q^{(d)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})) \right) ; \bar{\xi} \in \mathbb{U}_\varepsilon^n \right\}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ il existe $y_j \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ tel que pour tout $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x - y) \geq v(x - y_j)$ on ait $v(Q(\bar{a}, y, \bar{\xi}_j)) = v(Q(\bar{a}, x, \bar{\xi}_j))$. D'après la formule de Taylor, pour tout $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$, $Q(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = \sum_{i=0}^d Q^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})(y - x)^i$. Comme l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$ est infini, il existe y'_0 tel que pour tout $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x - y) \geq v(x - y'_0)$ on ait $v(Q(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = \min_{0 \leq i \leq d} \left(v(Q^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})(x - y)^i) \right)$. Soit $y_0 \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ tel que $v(x - y_0) \geq v(x - y'_0)$ et $v(x - y_0) \geq v(x - y_j)$ pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soient $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x - y) \geq v(x - y_0)$ et $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_{\varepsilon}^n$. Par construction il existe $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que pour $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ on ait $v(Q^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})) = v(Q^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi}_j))$, alors

$$\begin{aligned} v(Q(\bar{a}, y, \bar{\xi})) &= \min_{0 \leq i \leq d} \left(v(Q^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi})(x - y)^i) \right) \\ &= \min_{0 \leq i \leq d} \left(v(Q^{(i)}(\bar{a}, x, \bar{\xi}_j)(x - y)^i) \right) \\ &= v(Q(\bar{a}, x, \bar{\xi}_j)) \\ &= v(Q(\bar{a}, x, \bar{\xi})). \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 3.3.24. Supposons par l'absurde que cela ne soit pas le cas. Alors il existerait $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$, $\bar{a} \in \mathbb{C}_p^m$, et $x \in \mathbb{C}_p$, tels que, l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$ n'admette pas de maximum, et que, pour tout $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, tout $\bar{B} \in \mathcal{P}_n^{r+1}$, tout $\bar{j} \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket^{r+1}$ et tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}^n$, il existe $y_0 \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$, tel que pour tout $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x - y) \geq v(x - y_0)$, on ait $v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{\xi}))$. D'après le lemme 3.3.26, il existerait $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ et $\eta \in \mathbb{Q}_+^*$, tels que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, l'ensemble

$$\{v(x - y) ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\xi^{(r)}) \leq \varepsilon, V(\xi^{(r+1)}) > \eta, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$$

soit cofinal dans $\{v(x - y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$. D'autre part, comme les ensembles \mathcal{P}_n^{r+1} et $\llbracket 0, p - 1 \rrbracket^{r+1}$ sont finis, d'après le lemme 3.3.27 appliqué à $Q = P_{\bar{B}, \bar{j}}$, il existerait $y_0 \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ tel que pour tout $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x - y) \geq v(x - y_0)$, tout $\bar{B} \in \mathcal{P}_n^{r+1}$, tout $\bar{j} \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket^{r+1}$ et tout $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_{\eta}^n$, on ait $v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{\xi}))$. Soit maintenant $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que,

$$p\varepsilon < \min \left(\left\{ v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{\xi})) - v(P_{\bar{B}', \bar{j}'}(\bar{a}, x, \bar{\xi})) ; \bar{B}, \bar{B}' \in \mathcal{P}_n^{r+1}, \right. \right. \\ \left. \left. \bar{j}, \bar{j}' \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket^{r+1}, \bar{\xi} \in \mathbb{U}_{\eta}^n \right\} \cap \mathbb{Q}_+^* \right).$$

Par cofinalité de

$$\{v(x - y) ; \exists \bar{\xi} \in \mathbb{U}^n, V(\bar{\xi}^{(r)}) \leq \varepsilon, V(\bar{\xi}^{(r+1)}) > \eta, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}$$

dans $\{v(x - y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$, il existerait $y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$ et $\bar{\xi} \in \mathbb{U}^n$ tels que $V(\bar{\xi}^{(r)}) \leq \varepsilon, V(\bar{\xi}^{(r+1)}) > \eta, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0$ et $v(x - y) > v(x - y_0)$. On aurait alors, que pour tout $\bar{B} \in \mathcal{P}_n^{r+1}$ et tout $\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}$, $v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, y, \bar{\xi}^{(r+1)})) = v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{\xi}^{(r+1)}))$. Soit $\bar{B} = (B_{\bar{\xi}^{(0)}}, \dots, B_{\bar{\xi}^{(r)}})$. Alors d'après le lemme 3.3.23, on aurait,

$$P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = \sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, y, \bar{\xi}^{(r+1)}) (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r)} - 1)^{j_r}$$

et

$$P(\bar{a}, x, \bar{\xi}) = \sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{\xi}^{(r+1)}) (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r)} - 1)^{j_r}.$$

D'après le lemme 3.3.20, on aurait,

$$v(P(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = \min_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} \left(v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, y, \bar{\xi}^{(r+1)})) (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r)} - 1)^{j_r} \right)$$

et

$$v(P(\bar{a}, x, \bar{\xi})) = \min_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} \left(v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{\xi}^{(r+1)})) (\xi^{(0)} - 1)^{j_0} \dots (\xi^{(r)} - 1)^{j_r} \right).$$

On en déduirait que $v(P(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = v(P(\bar{a}, x, \bar{\xi}))$. Comme $P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0$, on aurait aussi $P(\bar{a}, x, \bar{\xi}) = 0$, donc x appartiendrait à $A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})$, ce qui impliquerait que l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$ admettrait un maximum (qui serait ∞), ce qui est absurde. Donc l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in A_{\mathbb{U}}(P_{\bar{a}})\}$ admet un maximum. \square

3.4 Présentation du résultat

Notre but va être de donner une axiomatisation complète de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$. Par commodité, on donnera une axiomatisation de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ pour pouvoir distinguer ces deux sous-groupes de \mathbb{U} de nature très différente par rapport à la valuation. Comme on verra que $\mathbb{U}_{\bar{p}}$ et \mathbb{U}_p sont définissables dans la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$, il est clair que l'on peut déduire une axiomatisation complète de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$ d'une axiomatisation complète de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$. Il est facile de voir que \mathbb{U}_p est l'ensemble défini par $\{z \in \mathbb{U} ; v(x - 1) > 0\}$. Le fait que $\mathbb{U}_{\bar{p}}$ soit définissable fait l'objet du lemme qui suit.

Lemme 3.4.1. *Le groupe $\mathbb{U}_{\bar{p}}$ est définissable sans paramètres dans les structures $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}, |, +, \times, 0, 1)$ et $(\mathbb{Q}_p^{alg}, \mathbb{U}, |, +, \times, 0, 1)$.*

Démonstration. Comme $\mathbb{U}_{\bar{p}}$ est le relèvement de Teichmüller de \mathbb{F}_p^{alg} dans $W(\mathbb{F}_p^{alg})$, d'après le lemme 2.1.4, l'ensemble $\{v(1+z_1+z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{U}_{\bar{p}}\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Comme l'équation $1+z_1+z_2$ a des solutions où les deux termes sont différents de 0 dans \mathbb{F}_p^{alg} , l'ensemble $\{v(1+z_1+z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{U}_{\bar{p}}\}$ n'est pas réduit à 0. Notons $N := \{v(1+z_1+z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{U}_{\bar{p}}\} \cap (\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$. Si $p \neq 3$, on va montrer que

$$\mathbb{U}_{\bar{p}} = \{x \in \mathbb{U} ; \exists y \in \mathbb{U}, v(1+x+y) \in N\}.$$

Si $p = 3$, on va montrer que

$$\mathbb{U}_{\bar{p}} \cup \{j, j^2\} = \{x \in \mathbb{U} ; \exists y \in \mathbb{U}, v(1+x+y) \in N\}.$$

Comme l'ensemble $\{j, j^2\}$ est définissable, dans tous les cas $\mathbb{U}_{\bar{p}}$ sera définissable. Il est clair que $\mathbb{U}_{\bar{p}} \cup \{j, j^2\} \subseteq \{x \in \mathbb{U} ; \exists y \in \mathbb{U}, v(1+x+y) \in N\}$ (et que si $p \neq 3$, $\{j, j^2\} \subseteq \mathbb{U}_{\bar{p}}$). Prouvons l'inclusion inverse. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_{\bar{p}}$ et $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{U}_p$ avec $(\xi_1, \xi_2) \neq (1, 1)$. On va voir que $v(1+z_1\xi_1+z_2\xi_2) \notin N$, sauf si on a simultanément $p = 3$, $z_1 = z_2 = 1$, $\{\xi_1, \xi_2\} = \{j, j^2\}$, cela prouvera le lemme.

1er cas : $v(1+z_1+z_2) = 0$. Alors $v(1+z_1\xi_1+z_2\xi_2) = 0$, donc $v(1+z_1\xi_1+z_2\xi_2) \notin N$.

2nd cas : $v(1+z_1+z_2) \neq 0$. Quitte à faire une permutation on peut supposer que $V(\xi_1) \leq V(\xi_2)$. D'après le lemme 3.3.3, il existe $l \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $\xi_2 = \xi_1^l \xi_2'$ avec $V(\xi_1) < V(\xi_2)$. Alors

$$\begin{aligned} & 1 + z_1\xi_1 + z_2\xi_2 \\ &= 1 + z_1\xi_1 + z_2\xi_1^l \xi_2' \\ &= (1 + z_1\xi_1 + z_2\xi_2') + z_1(\xi_1 - 1) + z_2\xi_2'(\xi_1^l - 1) \\ &= (1 + z_1 + z_2\xi_2') + (z_1 + lz_2\xi_2')(\xi_1 - 1) + \sum_{k=2}^l \binom{l}{k} z_2\xi_2'(\xi_1 - 1)^k \quad \text{d'après le lemme 3.3.11} \\ &= (1 + z_1 + z_2) + z_2(\xi_2' - 1) + (z_1 + lz_2)(\xi_1 - 1) + lz_2(\xi_2' - 1)(\xi_1 - 1) + \sum_{k=2}^l \binom{l}{k} z_2\xi_2'(\xi_1 - 1)^k. \end{aligned}$$

1er sous-cas : $l = 0$. En utilisant la décomposition ci-dessus on voit facilement que $v(1+z_1\xi_1+z_2\xi_2) = v(\xi_1 - 1) < 1$. En particulier $v(1+z_1\xi_1+z_2\xi_2) \notin N$.

2ème sous-cas : $l = 1$. Comme $v(1+z_1+z_2) > 0$, on a $v(z_1+z_2) = 0$. En utilisant la décomposition ci-dessus on voit facilement que $v(1+z_1\xi_1+z_2\xi_2) = v(\xi_1 - 1) < 1$. En particulier $v(1+z_1\xi_1+z_2\xi_2) \notin N$.

3ème sous cas : $l \geq 2$ et $2v(\xi_1 - 1) < 1$. On a $v(\binom{l}{2} z_2\xi_2'(\xi_1 - 1)^2) =$

$2v(\xi_1 - 1) < 1$. En utilisant la décomposition ci-dessus on voit facilement que $v(1 + z_1\xi_1 + z_2\xi_2) = \min(v(z_1 + lz_2) + v(\xi_1 - 1), 2v(\xi_1 - 1)) < 1$. En particulier $v(1 + z_1\xi_1 + z_2\xi_2) \notin N$.

4ème sous-cas : $l \geq 2$ et $2v(\xi_1 - 1) \geq 1$. Comme $l \geq 2$ on a $p \geq 3$. Comme $v(\xi_1 - 1) \leq \frac{1}{p-1}$, on a nécessairement $l = 2$, $p = 3$, et $(\xi_1, \xi_2) = (j, j^2)$ ou $(\xi_1, \xi_2) = (j^2, j)$. Quitte à faire une permutation on peut supposer que $(\xi_1, \xi_2) = (j, j^2)$. Alors

$$1 + z_1\xi_1 + z_2\xi_2 = (1 + z_1 + z_2) + (z_1 + 2z_2)(j - 1) + z_2(j - 1)^2.$$

Si $v(z_1 + 2z_2) = 0$, alors $v(1 + z_1j + z_2j^2) = v(j - 1) = \frac{1}{2}$. En particulier, $v(1 + z_1j + z_2j^2) \notin N$.

Si $v(z_1 + 2z_2) > 0$, comme $v(1 + z_1 + z_2) > 0$, on a $v(1 - z_2) > 0$. On en déduit que $z_2 = 1$ car $res_{\mathbb{U}_p}$ est injective. De même, il vient ensuite que $z_1 = 1$. \square

Dans la suite on travaillera avec le langage $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{div} \cup \{G_{\bar{p}}, G_p\}$, où $G_{\bar{p}}$ et G_p sont des symboles de prédicats unaires. Par commodité on notera G l'ensemble constitué des produits d'un élément de $G_{\bar{p}}$ et d'un élément de G_p .

Afin de faciliter la lecture nous regroupons ici toutes les notations et conventions que nous utiliserons par la suite, dont certaines ont déjà été introduites précédemment.

Notations et conventions. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on notera \mathcal{P}_n l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en p ensembles.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute partition $B = (B_0, \dots, B_{p-1}) \in \mathcal{P}_n$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on notera $B(i)$ l'élément de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $i \in B_{B(i)}$.

3. On utilisera la convention $\binom{i}{j} = 0$ si $i < j$.

4. Pour tout $g \in G_p$ on notera $V(g) := v(g - 1)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G_p^m$ on notera $V(\bar{g}) := \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (V(g_i))$.

6. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on notera $\tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$ des polynômes linéaires en les Z_i .

7. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, tout $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$ où $P(X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{k=1}^n P_k(X_1, \dots, X_m, Y)Z_k$, tout $\bar{B} = (B_0, \dots, B_r) \in \mathcal{P}_n^{r+1}$ et tout $\bar{j} = (j_0, \dots, j_r) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}$, on notera

$$P_{\bar{B}, \bar{j}}(X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n) := \sum_{k=1}^n \binom{B_0(k)}{j_0} \dots \binom{B_r(k)}{j_r} P_k(X_1, \dots, X_m, Y)Z_k.$$

8. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, tout $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$, toute \mathcal{L} -structure $(M, G_{\bar{p}}, G_p)$ et tout $\bar{a} \in M^m$, on notera

$$A_G(P_{\bar{a}}) := \{y \in M ; \exists \bar{\xi} \in G, P(\bar{a}, y, \bar{\xi}) = 0\}.$$

9. On notera $\mathcal{L}_{G_{\bar{p}}} := \mathcal{L}_{div} \cup \{G_{\bar{p}}\}$.
10. On notera $\mathcal{L}_{G_p, V} := \{1, \cdot, ^{-1}\} \cup \{|V|\}$, où $\{1, \cdot, ^{-1}\}$ désigne le langage des groupes multiplicatifs et où $|V|$ désigne un symbole de prédicat binaire.
11. Pour toute \mathcal{L} -structure $(M, G_{\bar{p}}, G_p)$ on notera $\Gamma_{V, G, 0} := \{0\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma_{V, G, n} := \left\{ \sum_{i=1}^n k_i V(g_i) ; k_1, \dots, k_n \in \llbracket -\bar{p} + 1, \bar{p} - 1 \rrbracket, g_1, \dots, g_n \in G_p^*, V(g_1) < \dots, V(g_n) \right\}$$

et

$$\Gamma_{V, G} := \cup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_{V, G, i}.$$

On va s'intéresser à la \mathcal{L} -théorie T constituée des axiomes suivants :

1. les axiomes des corps valués algébriquement clos de caractéristique $(0, p)$,
2. les axiomes de $T_{G_{\bar{p}}}$ (où $T_{G_{\bar{p}}}$ est la théorie introduite dans la section 2 du chapitre 2),
3. la série des axiomes relatifs à G_p suivants :
 - (a) les axiomes exprimant que G_p est un sous-groupe multiplicatif divisible,
 - (b) l'axiome exprimant que G_p est clos par racines p -ièmes, c'est-à-dire :

$$\forall x, y, \left(x \in G_p \wedge y^p = x \right) \implies y \in G_p,$$

- (c) l'axiome

$$\forall x \in G_p^*, 0 < V(x) < v(p),$$

- (d) l'axiome

$$\forall x, y \in G_p, (V(x) < V(y) \implies V(x^p) \leq V(y)) \wedge (x^p \neq 1 \implies V(x^p) = pV(x)),$$

- (e) l'axiome

$$\forall x, \left(0 < v(x) < 1 \right) \implies \left(\exists y \in G_p^*, V(y) \leq v(x) < pV(y) \right),$$

(f) l'axiome

$$\forall x, y \in G_p, \left(V(x) = V(y) \wedge x \neq 1 \right) \implies \left(\bigvee_{i=1}^{p-1} V(x) < V(xy^k) \right),$$

4. le schéma d'axiomes qui exprime la proposition 3.3.24, c'est-à-dire, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_m, Y, Z_1, \dots, Z_n]$, l'axiome qui exprime que pour tout \bar{a} et tout x , l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in A_G(P_{\bar{a}})\}$ admet un maximum si, pour tout $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, tout $\bar{B} \in \mathcal{P}_n^{r+1}$, tout $\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}$, et tout $\bar{\xi} \in G^n$, il existe $y_0 \in A_G(P_{\bar{a}})$, tel que pour tout $y \in A_G(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x - y) > v(x - y_0)$, on ait $v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, y, \bar{\xi})) = v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{\xi}))$.

Remarque 3.4.2. D'après l'axiome 3.c, pour tout $g \in G_p$, $v(g) = 0$. En particulier, pour tout $g \in G_p$, $V(g) = V(g^{-1})$. En effet,

$$\begin{aligned} V(g) &= v(g - 1) \\ &= v(g(1 - g^{-1})) \\ &= v(1 - g^{-1}) \\ &= V(g^{-1}). \end{aligned}$$

D'après l'axiome 2 de $T_{G_{\bar{p}}}$ et l'axiome 3.c, $G_{\bar{p}} \cap G_p = \{1\}$. On peut ainsi pour tout élément g de G définir de façon unique sa composante g_p sur G_p et sa composante $g_{\bar{p}}$ sur $G_{\bar{p}}$. De même que dans le cas des racines de l'unité, on peut étendre V à G en posant $V(g) = V(g_p)$ pour tout $g \in G$.

On va maintenant s'attacher à démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.4.3. *La \mathcal{L} -théorie T est complète et la structure $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ en est un modèle.*

Commençons par montrer la partie facile du théorème, c'est-à-dire montrer que $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ est un modèle de T . D'après le théorème 2.2.1, $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ est modèle des schémas d'axiomes 1 et 2. Il est clair que $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ est modèle de 3.b et il est facile de vérifier que cette structure est aussi modèle de 3.a, c'est-à-dire que \mathbb{U}_p est divisible. D'après les lemmes 3.3.1 et 3.3.3, $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ est modèle des axiomes 3.c, 3.d, 3.e, et 3.f. D'après la proposition 3.3.24, $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ est modèle du schéma d'axiome 4. Ainsi $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ est bien un modèle de T .

Remarque 3.4.4. $(\mathbb{Q}_p^{alg}, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ et $(W(\mathbb{F}_p)^{alg}, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ sont aussi des modèles de T .

3.5 Préliminaires sur les modèles de T

Dans toute cette sous-section $(M, G_{\bar{p}}, G_p)$ désignera un modèle de T .

3.5.1 Théorie complète de G_p en tant que groupe valué

Définition 3.5.1. *Un groupe valué (H, V) est un groupe abélien H (noté ici multiplicativement), muni d'une application V , qui va de H dans un ensemble ordonné tel que :*

1. pour tous $x, y \in H, V(xy) \geq \min(V(x), V(y))$,
2. pour tout $x \neq 1, V(x) < V(1)$,
3. pour tout $x \in H, V(x) = V(x^{-1})$.

Remarque 3.5.2. Si (H, V) est un groupe valué alors pour tous $x, y \in H$ tel que $V(x) \neq V(y)$ on a $V(xy) = \min(V(x), V(y))$.

Remarque 3.5.3. L'égalité $xy - 1 = (x - 1)(y - 1) + (x - 1) + (y - 1)$, l'axiome 3.c, et la remarque 3.5.2, entraînent que (G_p, V) est un groupe valué.

Soit $T_{G_p, V}$ la $\mathcal{L}_{G_p, V}$ théorie constituée :

1. des axiomes des groupes valués,
2. des axiomes exprimant que le groupe est divisible,
3. de l'axiome exprimant qu'il existe exactement p éléments d'ordre p ,
4. de l'axiome exprimant que $V(x^p)$ est le successeur de $V(x)$, c'est-à-dire ;

$$\forall x, y \left(V(x) < V(y) \right) \implies \left(V(x^p) \leq V(y) \right) \wedge \forall x, \left(x \neq 1 \right) \implies \left(V(x^p) \neq V(x) \right),$$

5. de l'axiome :

$$\forall x, y, \left(V(x) = V(y) \wedge x \neq 1 \right) \implies \left(\bigvee_{k=1}^{p-1} V(x) < V(xy^k) \right).$$

Il est clair que G_p muni de la relation $x|_V y \iff V(x) \leq V(y)$ est un modèle de $T_{G_p, V}$. Notre but maintenant va être de montrer que $T_{G_p, V}$ est une théorie complète. Par abus de langage on notera ici \mathbb{U}_p , le groupe \mathbb{U}_p enrichi de la relation $x|_V y \iff \text{ord}(x) \leq \text{ord}(y)$.

Remarque 3.5.4. 1. Pour tout entier k premier à p , on a, $V(x) = V(x^k)$. Si $x = 1$ le résultat est trivial, sinon il existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tels que $uk + vp = 1$, ainsi $V(x) \geq \min(V(x^{uk}), V(x^{vp})) \geq \min(V(x^k), V(x^p))$. Comme, d'après l'axiome 4, $V(x) < V(x^p)$, on en déduit que $V(x) \geq V(x^k)$, donc $V(x) = V(x^k)$.

2. D'après la remarque 3.5.2 et l'axiome 5, on a,

$$T_{G_p, V} \models \forall x \neq 1, \forall y, \left(V(x) < V(y) \right) \iff \left(\bigwedge_{k=1}^{p-1} V(x) = V(xy^k) \right).$$

3. D'après l'axiome 4, et le premier point de la remarque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a,

$$T_{G_p, V} \models \forall x, y, \left(x^k \neq 1 \wedge y^k \neq 1 \right) \implies \left((V(x) = V(y)) \iff (V(x^k) = V(y^k)) \right).$$

Proposition 3.5.5. *Le théorie $T_{G_p, V}$ est complète et \mathbb{U}_p est une sous-structure de tout modèle.*

Démonstration. Comme $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U}_{\bar{p}}, \mathbb{U}_p)$ est un modèle de T , \mathbb{U}_p est un modèle de $T_{G_p, V}$ et il est clair qu'il est sous-structure de tout modèle. Pour montrer que $T_{G_p, V}$ est complète, on va en considérer deux modèles, H et H' , \aleph_1 -saturés, et montrer que la famille \mathfrak{H} des $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -isomorphismes partiels entre H et H' , dont le domaine est un sous-groupe dénombrable contenant \mathbb{U}_p , est non-vide et a la propriété de va-et-vient. Par symétrie il est suffisant de montrer le va.

\mathfrak{H} est non-vide car (\mathbb{U}_p, V) se plonge dans tout modèle de $T_{G_p, V}$.

Soit $f : L \rightarrow L'$ un élément de \mathfrak{H} .

On va montrer dans un premier temps que l'on peut prolonger f en un élément de \mathfrak{H} dont le domaine est la clôture divisible de L . Si L n'est pas divisible alors il existe $x \in H \setminus L$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^k \in L$ et $x^j \notin L$ pour $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Alors $f(x^k) \in L'$ et comme H' est divisible il existe $x' \in H'$ tel que $x'^k = f(x^k)$, $x' \notin L'$ car sinon on aurait $x \in L$. Comme tout élément du groupe $\langle L, x \rangle$, engendré par L et x , s'écrit de façon unique sous la forme $x^i l$ avec $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et $l \in L$, on peut prolonger f en un isomorphisme de groupe g de domaine $\langle L, x \rangle$ en posant $g(x^i l) = x'^i f(l)$ pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et tout $l \in L$. D'après la remarque 3.5.4.2, pour montrer que g est un isomorphisme de groupe valué il suffit de montrer que g respecte l'égalité de valuation. Pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ et tout $l \in L$ (respectivement tout $l' \in L'$) on a $(x^i l)^k \neq 1$ (respectivement $(x'^i l')^k \neq 1$), donc pour tous $l_1, l_2 \in L$ et tous $i_1, i_2 \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ on a, d'après la remarque 3.5.4.3, appliquée plusieurs fois, les équivalences,

$$\begin{aligned} V(x^{i_1} l_1) = V(x^{i_2} l_2) &\iff V\left((x^{i_1} l_1)^k\right) = V\left((x^{i_2} l_2)^k\right) \\ &\iff V\left(f\left((x^{i_1} l_1)^k\right)\right) = V\left(f\left((x^{i_2} l_2)^k\right)\right) \\ &\iff V\left(g\left(x^{i_1} l_1\right)^k\right) = V\left(g\left(x^{i_2} l_2\right)^k\right) \\ &\iff V\left(g\left(x^{i_1} l_1\right)\right) = V\left(g\left(x^{i_2} l_2\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi g est un isomorphisme de groupe valué de domaine $\langle L, x \rangle$ qui prolonge f , c'est donc un élément de \mathfrak{H} . Par un argument de chaîne on voit qu'il existe un élément de \mathfrak{H} qui prolonge f et dont le domaine est la clôture divisible de L dans H .

On suppose à partir de maintenant que L est divisible. Soit $x \in H \setminus L$, on va montrer que l'on peut prolonger f en un élément de \mathfrak{H} de domaine $\langle L, x \rangle$ en faisant une disjonction de cas.

1er cas : $V(\langle L, x \rangle) \neq V(L)$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $l_0 \in L$, tels que, $V(x^n l_0) \notin V(L)$. Posons $y := x^n l_0$. Alors par \aleph_1 -saturation, il existe $y' \in H'$ tel pour tout $l \in L$, on ait $V(y) \leq V(l) \iff V'(y') \leq V'(f(l))$. En particulier $y' \notin L'$ et on peut prolonger f en un isomorphisme de groupe g de domaine $\langle L, y \rangle$ en posant $g(y^i l) = y'^i f(l)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $l \in L$. Remarquons que si $V(y) < V(l)$, alors d'après l'axiome 4, $V(y) \leq V(l^{\frac{1}{p}})$, où $l^{\frac{1}{p}}$ désigne une racine p -ième de l . Comme $V(y) \notin V(L)$, $V(y) < V(l^{\frac{1}{p}})$, donc d'après la remarque 3.5.4.3, $V(x^p) < V(l)$ (car $x^p \neq 1$). D'où, pour tout $i \in \mathbb{Z}^*$, $V(x^i) < V(l)$. On en déduit immédiatement que pour tous $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}$, et tous $l_1, l_2 \in L$, on a,

$$V(y^{i_1} l_1) = V(y^{i_2} l_2) \iff V(g(y^{i_1} l_1)) = V(g(y^{i_2} l_2)).$$

Donc g est un élément de \mathfrak{H} de domaine $\langle L, y \rangle$. D'après ce que nous avons prouvé ci-dessus, on peut prolonger g en un élément de \mathfrak{H} dont le domaine est la clôture divisible de $\langle L, y \rangle$. Or x appartient à la clôture divisible de $\langle L, y \rangle$ donc il existe un élément de \mathfrak{H} qui prolonge g et dont le domaine contient x .

2ème cas : $V(\langle L, x \rangle) = V(L)$. Introduisons les formules $\varphi_{k_1, k_2}(y, l_1, l_2) := V(y^{k_1} l_1) = V(y^{k_2} l_2)$, l'ensemble de formules

$$A := \{\varphi_{k_1, k_2}(y, l_1, l_2) ; l_1, l_2 \in L, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, H \models \varphi_{k_1, k_2}(x, l_1, l_2)\},$$

et les sous-ensembles de $V(H)$, $B := \{V(xl) ; l \in L\}$ et $C := \{V(x^k l) ; l \in L, k \in \mathbb{Z}\}$. On va commencer par montrer que B n'a pas de maximum et qu'il est cofinal dans C . Supposons par l'absurde que B possède un maximum. Alors, il existerait $m \in L$, tel que pour tout $l \in L$, on ait $V(xm) \geq V(xl)$. Mais par hypothèse, il existe $l' \in L$ tel que $V(xm) = V(l')$, donc d'après l'axiome 5, il existerait $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $V(xm l'^k) > V(xm)$ (car $xm \neq 1$), ce qui est absurde, donc B n'a pas de maximum. Soient $k \in \mathbb{Z}^*$, $l \in L$ et $l^{\frac{1}{k}}$ un élément de L tel que $(l^{\frac{1}{k}})^k = l$. Notons $r := v_p(k)$. Alors, $V(x^k l) = V((x l^{\frac{1}{k}})^k)$, et d'après la remarque 3.5.4.1, $V(x^k l) = V((x l^{\frac{1}{k}})^{p^r})$. Comme B n'a pas de maximum, il existe $l_1, \dots, l_{r+1} \in L$ tels que, $V(x l_1^{\frac{1}{k}}) < V(x l_1) < \dots < V(x l_{r+1})$. On en déduit, d'après l'axiome 4, que $V(x^k l) < V(x l_{r+1})$. Donc B est cofinal dans C . On va maintenant montrer que A est finiment réalisable dans L . Soient $l_1, \dots, l_{2n} \in L$ et $k_1, \dots, k_{2n} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$H \models \varphi_{k_1, k_2}(x, l_1, l_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{k_{2n-1}, k_{2n}}(x, l_{2n-1}, l_{2n}).$$

Si $(k_1, \dots, k_{2n}) = (0, \dots, 0)$ alors pour tout $l \in L$ on a

$$H \models \varphi_{k_1, k_2}(l, l_1, l_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{k_{2n-1}, k_{2n}}(l, l_{2n-1}, l_{2n}).$$

Si $(k_1, \dots, k_{2n}) \neq (0, \dots, 0)$, comme B est cofinal dans C , il existe $l \in L$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ avec $k_i \neq 0$ on ait $V(x^{k_i} l_i) < V(xl)$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $V(x^{k_i} l_i) = V(l^{-k_i} l_i)$, donc

$$H \models \varphi_{k_1, k_2}(l^{-1}, l_1, l_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{k_{2n-1}, k_{2n}}(l^{-1}, l_{2n-1}, l_{2n}).$$

A est donc finiment réalisable dans L . On en déduit que

$$A' := \{ \varphi_{k_1, k_2}(y, f(l_1), f(l_2)) ; l_1, l_2 \in L, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, H \models \varphi_{k_1, k_2}(x, l_1, l_2) \}$$

est finiment réalisable dans L' . Par \aleph_1 -saturation il existe $x' \in H'$ tel que pour tous $h_1, h_2 \in H$ et tous $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ on ait

$$V(x^{k_1} l_1) = V(x^{k_2} l_2) \iff V(x' f(l_1)) = V(x' f(l_2)).$$

On peut alors prolonger f en un isomorphisme de groupe valué g de domaine $\langle L, x \rangle$ (donc $g \in \mathfrak{K}$) en posant $g(x^i l) = x^i f(l)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $l \in L$. \square

3.5.2 Extension de la notion de V -longueur aux modèles de T et conséquences

Lemme 3.5.6. *Soient $g_1 \in G_p^*$ et $g_2 \in G_p$. Si $V(g_1) \leq V(g_2)$, alors il existe un unique couple $(k, g'_2) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \times G_p$ tel que $V(g_1) < V(g'_2)$ et $g_2 = g_1^k g'_2$.*

Démonstration. On va commencer par montrer l'existence. Si $V(g_1) < V(g_2)$ alors le couple $(0, g_2)$ convient. Si $V(g_1) = V(g_2)$, comme $V(g_1) = V(g_1^{-1})$, il existe d'après l'axiome 3.f de T , $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $V(g_2 g_1^{-k}) > V(g_1)$, alors le couple $(k, g_2 g_1^{-k})$ convient. Montrons maintenant l'unicité. Soient (k, g'_2) et (k', g''_2) deux couples qui conviennent. Alors $g_1^{k-k'} = g''_2 g'_2{}^{-1}$. Comme $V(g_1) < V(g''_2 g'_2{}^{-1})$, d'après la remarque 3.5.4.1, $k - k' \in p\mathbb{Z}$, d'où $k = k'$, puis $g'_2 = g''_2$. \square

Ce lemme qui est l'analogie du lemme 3.3.3 permet de définir, comme dans le cas des racines de l'unité, \tilde{g} et la suite $(\overline{g^{(r)}})_{r \in \mathbb{N}}$ pour tout $\bar{g} \in G_p^n$. Comme tout élément de G se décompose de façon unique en un produit d'un élément de G_p et d'un élément de $G_{\bar{p}}$, on peut étendre ces notions, comme dans le cas des racines de l'unité, à G tout entier.

Remarque 3.5.7. Pour tout $\bar{g} \in G$, \tilde{g} est un élément de G_p .

De façon analogue au lemme 3.3.8, on montre le :

Lemme 3.5.8. *Pour tout $\bar{g} \in G_p^n$ on a $\overline{g^{(n)}} = \bar{1}$.*

Ce lemme permet d'étendre la notion de V -longueur à tous les modèles de T .

De façon analogue aux lemmes 3.3.18 et 3.3.20, on montre les :

Lemme 3.5.9. *Pour tout $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in M^n$, tout $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ et tout $r \in \mathbb{N}$ on a*

$$\sum_{i=1}^n x_i g_i = \sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{r+1}} (g^{\tilde{0}} - 1)^{j_0} \dots (g^{\tilde{r}} - 1)^{j_r} \left(\sum_{i=1}^n \binom{B_{g^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{g^{(r)}}(i)}{j_r} x_i g_i^{(r+1)} \right).$$

et

Lemme 3.5.10. *Soient $g_0, \dots, g_n \in G$ et $(a_{\bar{j}})_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1}} \in M$. Si*

$$pV(g_n) \leq \min \left(\{v(a_{\bar{j}}) - v(a_{\bar{j}'}); \bar{j}, \bar{j}' \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1}\} \cap \Gamma_{M,+}^* \right)$$

et si $V(g_0) < \dots < V(g_n)$, alors

$$v \left(\sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1}} a_{\bar{j}} (g_0 - 1)^{j_0} \dots (g_n - 1)^{j_n} \right) = \min_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^{n+1}} v \left(a_{\bar{j}} (g_0 - 1)^{j_0} \dots (g_n - 1)^{j_n} \right).$$

Remarque 3.5.11. Soit $g \in G$. Si g_p n'est pas une racine de l'unité, alors d'après les axiomes 3.c et 3.d de T (page 78), pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $nV(g) < 1$.

Lemme 3.5.12. $\mathbb{Q}(G_p)/v = \mathbb{F}_p$ et $\Gamma_{\mathbb{Q}(G_p)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^n(p-1)} \mathbb{Z} + \Gamma_{V,G}$.

Démonstration. On va commencer par montrer que $\mathbb{Q}(G_p)/v = \mathbb{F}_p$. Soient $\bar{a} \in \mathbb{Q}^n$ et $\bar{g} \in G_p^n$ tels que $v(\sum_{i=1}^n a_i g_i) = 0$. Si $\bar{g} \in \mathbb{U}_p^n$, d'après le lemme 3.3.2, on a $\sum_{i=1}^n a_i g_i / v \in \mathbb{F}_p$. Si $\bar{g} \notin \mathbb{U}_p^n$, on note r le plus petit entier tel que $\bar{g}^{(r)} \in \mathbb{U}_p^n$. Alors d'après le lemme 3.5.9,

$$\sum_{i=1}^n a_i g_i = \sum_{\bar{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^r} (g^{\tilde{0}} - 1)^{j_0} \dots (g^{\tilde{r-1}} - 1)^{j_{r-1}} \sum_{i=1}^n \binom{B_{g^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{g^{(r-1)}}(i)}{j_{r-1}} a_i g_i^{(r)}.$$

Comme pour tout $l \in \mathbb{N}$ on a $lV(g^{\tilde{r-1}}) < 1$, on a d'après le lemme 3.5.10,

$$v \left(\sum_{i=1}^n a_i g_i \right) = \min_{\bar{j}} \left(v \left((g^{\tilde{0}} - 1)^{j_0} \dots (g^{\tilde{r-1}} - 1)^{j_{r-1}} \sum_{i=1}^n \binom{B_{g^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{g^{(r-1)}}(i)}{j_{r-1}} a_i g_i^{(r)} \right) \right).$$

De l'égalité $v(\sum_{i=1}^n a_i g_i) = 0$ on déduit que le minimum est atteint uniquement pour $\bar{j} = \bar{0}$. Alors $\sum_{i=1}^n a_i g_i / v = \sum_{i=1}^n a_i g_i^{(r)} / v$, d'où $\sum_{i=1}^n a_i g_i / v \in \mathbb{F}_p$. Montrons maintenant que $\Gamma_{\mathbb{Q}(G_p)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^n(p-1)} \mathbb{Z} + \Gamma_{V,G}$. L'inclusion \supseteq est clair. Réciproquement, soient $\bar{a} \in \mathbb{Q}^n$ et $\bar{g} \in G^n$. Si $\bar{g} \in \mathbb{U}_p^n$ alors

$v(\sum_{i=1}^n a_i g_i) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^n(p-1)} \mathbb{Z}$ d'après le lemme 3.3.2. Si $\bar{g} \notin \mathbb{U}_p$, notons r le plus petit entier tel que $\bar{g}^{(r)} \in \mathbb{U}_p^n$. Alors, comme précédemment on a

$$v\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) = \min_{\bar{j}} \left(v(g^{(\tilde{0})-1})^{j_0} \dots (g^{(\tilde{r-1})-1})^{j_{r-1}} \sum_{i=1}^n \binom{B_{g^{(0)}}(i)}{j_0} \dots \binom{B_{g^{(r-1)}}(i)}{j_{r-1}} a_i g_i^{(r)} \right).$$

□

3.5.3 Valuation de $\mathbb{Q}(G)$ et $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -formules

Dans cette sous-section notre but sera de montrer le lemme suivant :

Lemme 3.5.13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $\theta_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \dots, \theta_N(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ des \mathcal{L}_{div} -formules sans quantificateurs et $\psi_1(\bar{x}, \bar{y}), \dots, \psi_N(\bar{x}, \bar{y})$ des $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -formules sans quantificateurs tels que, pour tout modèle M de T et tous $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ vérifiant $\Gamma_{\mathbb{Q}(\bar{a})} = \mathbb{Z}$ et $\Gamma_{\mathbb{Q}(\bar{b})} = \mathbb{Z}$, on ait*

$$M \models \forall \bar{g}, \bar{h} \in G^n, v\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) < v\left(\sum_{i=1}^n b_i h_i\right) \iff \bigvee_{i=1}^N \theta_i(\bar{a}, \bar{g}_p, \bar{b}, \bar{h}_p) \wedge \psi_i(\bar{g}_p, \bar{h}_p).$$

Pour y arriver nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes préparatoires.

Lemme 3.5.14. *Soient $g_1, \dots, g_{n+1} \in G$ et $q_1, \dots, q_{n+1} \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket$. Si $V(g_1) < \dots < V(g_{n+1}) < V(1)$ alors on a*

1. $|\sum_{i=1}^n q_i V(g_i)| < V(g_{n+1})$,
2. $(q_{n+1} - 1)V(g_{n+1}) < \sum_{i=1}^{n+1} q_i V(g_i) < (q_{n+1} + 1)V(g_{n+1})$,
3. $\sum_{i=1}^{n+1} q_i V(g_i) \neq 0$ si $(q_1, \dots, q_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$.

Démonstration. 1) Comme $g_{n+1} \neq 1$, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a $V(g_i) \leq$

$\frac{1}{p}V(g_{i+1})$, d'où $V(g_i) \leq \frac{1}{p^{n+1-i}}V(g_{n+1})$. Alors,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n q_i V(g_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |q_i| V(g_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (p-1) V(g_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (p-1) \frac{1}{p^{n+1-i}} V(g_{n+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{p^i (p-1)}{p^{n+1}} V(g_{n+1}) \\ &\leq \frac{p^n - 1}{p^n} V(g_{n+1}) \\ &< V(g_{n+1}). \end{aligned}$$

2) C'est une conséquence directe de 1).

3) Supposons que $(q_1, \dots, q_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$. Notons r le plus grand entier tel que $q_r \neq 0$. Si $r = 1$ le résultat est immédiat. Sinon d'après 2, on a, $(q_r - 1)V(g_r) < \sum_{i=1}^n q_i V(g_i) < (q_r + 1)V(g_r)$, on en déduit immédiatement que $\sum_{i=1}^{n+1} q_i V(g_i) \neq 0$. \square

Lemme 3.5.15. Soient $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ et $q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_m \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Si $V(g_1) < \dots < V(g_n)$ et si $V(h_1) < \dots < V(h_m)$ alors $\sum_{i=1}^n q_i V(g_i) = \sum_{i=1}^m r_i V(h_i)$ si et seulement si $m = n$ et $q_i = r_i$ et $V(g_i) = V(h_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Démonstration. Supposons que $\sum_{i=1}^{n+1} q_i V(g_i) = \sum_{i=1}^{m+1} r_i V(h_i)$. On peut réécrire la somme $\sum_{i=1}^{n+1} q_i V(g_i) - \sum_{i=1}^{m+1} r_i V(h_i)$ sous la forme $\sum_{i=1}^k s_i V(\eta_i)$ avec $1 \leq k \leq n+m$, $\eta_1, \dots, \eta_k \in G$, $V(\eta_1) < \dots < V(\eta_k)$, $s_1, \dots, s_k \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket$. Comme $\sum_{i=1}^k s_i V(\eta_i) = 0$, on a d'après le lemme précédent que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $s_i = 0$. On en déduit que $m = n$, $q_i = r_i$ et $V(g_i) = V(h_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. \square

Lemme 3.5.16. Pour tous $q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_m \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ il existe une

$\mathcal{L}_{G_p, V}$ -formule sans quantificateurs $\varphi_{\bar{q}, \bar{r}}(\bar{x}, \bar{y})$ telle que :

$$T \models \forall \bar{g} \in G_p^n, \forall \bar{h} \in G_p^m, \left(V(g_1) < \dots < V(g_n) \wedge V(h_1) < \dots < V(h_m) \right) \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^n q_i V(g_i) \leq \sum_{i=1}^m r_i V(h_i) \iff \varphi_{\bar{q}, \bar{r}}(\bar{g}, \bar{h}) \right).$$

Démonstration. Il est suffisant de traiter le cas où $(q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_m) = (0, \dots, 0)$ et les cas où $q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_m \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Si $(q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_m) = (0, \dots, 0)$, la formule $\varphi_{\bar{0}, \bar{0}}(\bar{x}, \bar{y}) := \forall z, z = z$ convient. Si $q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_m \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on va raisonner par cas.

1er cas : $q_n < r_m$. Si $V(g_n) \leq V(h_m)$, alors d'après le lemme 3.5.14, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i V(g_i) &< (q_n + 1)V(g_n) \\ &\leq (q_n + 1)V(h_m) \\ &\leq r_m V(h_m) \\ &\leq \sum_{i=1}^m r_i V(h_i). \end{aligned}$$

Si $V(h_m) < V(g_n)$ alors $pV(h_m) \leq V(g_n)$, d'où, par le lemme 3.5.14

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m r_i V(h_i) &< (r_m + 1)V(h_m) \\ &\leq pV(h_m) \\ &\leq V(g_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^n q_i V(g_i) \quad \text{car } q_n \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{i=1}^n q_i V(g_i) \leq \sum_{i=1}^m r_i V(h_i) \iff V(g_n) \leq V(h_m)$, on peut donc prendre $\varphi_{\bar{q}, \bar{r}}(\bar{x}, \bar{y}) := V(x_n) \leq V(y_m)$.

2ème cas : $q_n > r_m$. D'après le 1er cas, on a, $\sum_{i=1}^m r_i V(h_i) \leq \sum_{i=1}^n q_i V(g_i) \iff V(h_m) \leq V(g_n)$. D'où $\sum_{i=1}^n q_i V(g_i) < \sum_{i=1}^m r_i V(h_i) \iff V(g_n) < V(h_m)$.

Or d'après le lemme 3.5.15, $\sum_{i=1}^m r_i V(h_i) \neq \sum_{i=1}^n q_i V(g_i)$ puisque $q_n \neq r_m$.

Ainsi $\sum_{i=1}^n q_i V(g_i) \leq \sum_{i=1}^m r_i V(h_i) \iff V(g_n) < V(h_m)$, on peut donc prendre $\varphi_{\bar{q}, \bar{r}}(\bar{x}, \bar{y}) := V(x_n) < V(y_m)$.

3ème cas : $q_n = r_m$. Si $V(g_n) < V(h_m)$ alors $pV(g_n) \leq V(h_m)$, d'où, par

le lemme 3.5.14

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i V(g_i) &< (r_m + 1)V(g_n) \\ &\leq pV(g_n) \\ &\leq V(h_m) \\ &\leq \sum_{i=1}^m r_i V(h_i) \quad \text{car } r_m \neq 0. \end{aligned}$$

On montre de même que si $V(g_n) > V(h_m)$ alors $\sum_{i=1}^n q_i V(g_i) > \sum_{i=1}^m r_i V(h_i)$.

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i V(g_i) \leq \sum_{i=1}^m r_i V(h_i) &\iff \\ \left[V(g_n) < V(h_m) \vee \left(V(g_n) = V(h_m) \wedge \sum_{i=1}^{n-1} q_i V(g_i) \leq \sum_{i=1}^{m-1} r_i V(h_i) \right) \right]. \end{aligned}$$

En répétant avec la formule $\sum_{i=1}^{n-1} q_i V(g_i) \leq \sum_{i=1}^{m-1} r_i V(h_i)$ ce qui vient d'être fait, on voit facilement qu'il existe une $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -formule sans quantificateurs $\varphi_{\bar{q}, \bar{r}}(\bar{x}, \bar{y})$ telle que $\sum_{i=1}^n q_i V(g_i) \leq \sum_{i=1}^m r_i V(h_i) \iff \varphi_{\bar{q}, \bar{r}}(\bar{g}, \bar{h})$. \square

Lemme 3.5.17. *Il existe une \mathcal{L}_{div} -formule sans quantificateurs $\tau(\bar{x}, \bar{y})$, telle que, pour tout modèle M de T , tous $\bar{a}, \bar{b} \in M^p$ vérifiant $\Gamma_{\mathbb{Q}(\bar{a})} = \mathbb{Z}$, et $\Gamma_{\mathbb{Q}(\bar{b})} = \mathbb{Z}$ et toutes racines primitive p -ièmes de l'unité ζ et ξ , on ait*

$$M \models v\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i \zeta^i\right) < v\left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i \xi^i\right) \iff \tau(\bar{a}, \bar{b}).$$

Démonstration. Posons $a'_i = a_i - a_{p-1}$ et $b'_i = b_i - b_{p-1}$ pour tout $i \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$.

Comme ζ est une racine primitive p -ième de l'unité on a $\zeta^{p-1} = -\sum_{i=0}^{p-2} \zeta^i$,

d'où $\sum_{i=0}^{p-1} a_i \zeta^i = \sum_{i=0}^{p-2} a'_i \zeta^i$, de même $\sum_{i=0}^{p-1} b_i \xi^i = \sum_{i=0}^{p-2} b'_i \xi^i$. D'après le lemme 3.5.9, on a,

$$\sum_{i=0}^{p-2} a'_i \zeta^i = \sum_{j=0}^{p-2} \left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} a'_i \right) (\zeta - 1)^j \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p-2} b'_i \xi^i = \sum_{j=0}^{p-2} \left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} b'_i \right) (\zeta - 1)^j.$$

Par hypothèse, pour tout $j \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$, $v\left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} a'_i\right) \in \mathbb{Z}$, et comme $v(\zeta - 1) = \frac{1}{p-1}$, on a

$$\begin{aligned} v\left(\sum_{i=0}^{p-2} a'_i \zeta^i\right) &= \min_{j \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket} \left(v\left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} a'_i (\zeta - 1)^j\right) \right) \\ &= \min_{j \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket} \left(v\left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} a'_i\right) + \frac{j}{p-1} \right), \end{aligned}$$

de même,

$$v\left(\sum_{i=0}^{p-2} b'_i \xi^i\right) = \min_{j \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket} \left(v\left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} b'_i\right) + \frac{j}{p-1} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} v\left(\sum_{i=0}^{p-2} a'_i \zeta^i\right) &< v\left(\sum_{i=0}^{p-2} b'_i \xi^i\right) \\ \iff \min_{j \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket} \left(v\left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} a'_i\right) + \frac{j}{p-1} \right) &< \min_{j \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket} \left(v\left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} b'_i\right) + \frac{j}{p-1} \right). \end{aligned}$$

Ainsi la formule $\tau(\bar{x}, \bar{y})$ définie par

$$\tau(\bar{x}, \bar{y}) := \min_{j \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket} \left(v\left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} (x_i - x_{p-1})\right) + \frac{j}{p-1} \right) < \min_{j \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket} \left(v\left(\sum_{i=0}^{p-2} \binom{i}{j} (y_i - y_{p-1})\right) + \frac{j}{p-1} \right)$$

convient. \square

Démonstration du lemme 3.5.13. Pour tout $\bar{g} \in G^n$ on définit $l'(\bar{g})$ comme étant le plus petit entier r tel que $V(\bar{g}^{(r)}) \geq \frac{1}{p-1}$, c'est-à-dire le plus petit entier r tel que, $g_{p,1}^{(r)}, \dots, g_{p,n}^{(r)}$ soient tous des racines p -ièmes de l'unité. Comme $l(\bar{g}) \leq n$ on a $l'(\bar{g}) \leq n$ pour tout $\bar{g} \in G^n$. Il est clair que pour tout $\bar{B} = (B_0, \dots, B_n) \in \mathcal{P}_n^{n+1}$ et tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe une $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -formule sans quantificateurs qui exprime que $l'(\bar{g}) = r$ et que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $B_i = B_{\bar{g}^{(i)}}$. Ainsi, pour prouver le lemme, il est suffisant de montrer que pour tous $r, s \in \llbracket 0, n \rrbracket$, tous $\bar{B} = (B_0, \dots, B_n), \bar{B}' = (B'_0, \dots, B'_n) \in \mathcal{P}_n^{n+1}$, il existe une \mathcal{L}_{div} -formule sans quantificateurs $\theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$, et une $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -formule sans quantificateurs $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, telles que pour tout modèle M de T , tous $\bar{g}, \bar{h} \in G^n$ vérifiant $l'(\bar{g}) = r$, $l'(\bar{h}) = s$, $B_i = B_{\bar{g}^{(i)}}$, et $B'_i = B'_{\bar{h}^{(i)}}$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et tous $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ vérifiant $\Gamma_{\mathbb{Q}(\bar{a})} = \mathbb{Z}$ et $\Gamma_{\mathbb{Q}(\bar{b})} = \mathbb{Z}$, on ait

$$M \models v\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) < v\left(\sum_{i=1}^n b_i h_i\right) \iff \theta(\bar{a}, \bar{g}_p, \bar{b}, \bar{h}_p) \wedge \psi(\bar{g}_p, \bar{h}_p).$$

Fixons $r, s \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\overline{B} = (B_0, \dots, B_n), \overline{B}' = (B'_0, \dots, B'_n) \in \mathcal{P}_n^{n+1}$ et M un modèle de T . Soient $\overline{a}, \overline{b} \in M^n$ et $\overline{g}, \overline{h} \in G^n$ vérifiant les conditions ci-dessus. On va raisonner dans le cas où r et s sont différents de 0, les cas où $r = 0$ ou $s = 0$ se traitent de façon analogue. D'après le lemme 3.5.9, on a,

$$\sum_{i=1}^n a_i g_i = \sum_{\vec{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^r} (g^{\tilde{0}} - 1)^{j_0} \dots (g^{\tilde{r-1}} - 1)^{j_{r-1}} \sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{j_0} \dots \binom{B_{r-1}(i)}{j_{r-1}} a_i g_i^{(r)},$$

et

$$\sum_{i=1}^n b_i h_i = \sum_{\vec{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^s} (h^{\tilde{0}} - 1)^{j_0} \dots (h^{\tilde{s-1}} - 1)^{j_{s-1}} \sum_{i=1}^n \binom{B'_0(i)}{j_0} \dots \binom{B'_{s-1}(i)}{j_{s-1}} b_i h_i^{(s)}.$$

Pour alléger les notations dans la suite de la démonstration on notera

$$\left(\frac{\overline{B}}{\vec{j}}\right) \overline{a g^{(r)}} := \sum_{i=1}^n \binom{B_0(i)}{j_0} \dots \binom{B_{r-1}(i)}{j_{r-1}} a_i g_i^{(r)}$$

et

$$\left(\frac{\overline{B}'}{\vec{j}}\right) \overline{b h^{(r)}} := \sum_{i=1}^n \binom{B'_0(i)}{j_0} \dots \binom{B'_{r-1}(i)}{j_{r-1}} b_i h_i^{(r)}.$$

Comme $\left(\frac{\overline{B}}{\vec{j}}\right) \overline{a g^{(r)}} = \left(\frac{\overline{B}}{\vec{j}}\right) \overline{a g_p g_p^{(r)}}$, $\Gamma_{\mathbb{Q}(\overline{a}, g_p^{(r)})} = \frac{1}{p-1} \mathbb{Z}$, $\Gamma_{\mathbb{Q}(\overline{a}, g_p)} = \mathbb{Z}$, et comme $V(\overline{g^{(r-1)}}) \leq \frac{1}{p(p-1)}$, d'après le lemme 3.5.10,

$$v\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) = \min_{\vec{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^r} \left(v\left((g^{\tilde{0}} - 1)^{j_0} \dots (g^{\tilde{r-1}} - 1)^{j_{r-1}} \left(\frac{\overline{B}}{\vec{j}}\right) \overline{a g^{(r)}} \right) \right).$$

On montre de même que

$$v\left(\sum_{i=1}^n b_i h_i\right) = \min_{\vec{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^s} \left(v\left((h^{\tilde{0}} - 1)^{j_0} \dots (h^{\tilde{s-1}} - 1)^{j_{s-1}} \left(\frac{\overline{B}'}{\vec{j}}\right) \overline{b h^{(r)}} \right) \right).$$

Alors,

$$\begin{aligned} v\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) < v\left(\sum_{i=1}^n b_i h_i\right) &\iff \\ \left(\min_{\vec{j}} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}}{\vec{j}}\right) \overline{a g^{(r)}} \right) \right) < \min_{\vec{k}} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}'}{\vec{k}}\right) \overline{b h^{(r)}} \right) \right) \right) &\vee \\ \left(\min_{\vec{j}} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}}{\vec{j}}\right) \overline{a g^{(r)}} \right) \right) = \min_{\vec{k}} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}'}{\vec{k}}\right) \overline{b h^{(r)}} \right) \right) \wedge \min_{\vec{j} \in I_{\overline{B}}} \left(\sum_{l=0}^{r-1} j_l V(g^{\tilde{l}}) \right) < \min_{\vec{k} \in I_{\overline{B}'}} \left(\sum_{l=0}^{s-1} k_l V(h^{\tilde{l}}) \right) \right) & \end{aligned}$$

où $I_{\overline{B}}$ désigne l'ensemble des \overline{j}' tels que $v\left(\left(\frac{\overline{B}}{\overline{j}'}\right)\overline{ag}^{(r)}\right) = \min_{\overline{j} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^r} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}}{\overline{j}}\right)\overline{ag}^{(r)}\right)\right)$,
 et $I_{\overline{B}'}$ désigne l'ensemble des \overline{k}' tels que $v\left(\left(\frac{\overline{B}'}{\overline{k}'}\right)\overline{ag}^{(r)}\right) = \min_{\overline{k} \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^s} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}'}{\overline{k}}\right)\overline{ag}^{(r)}\right)\right)$.
 D'après le lemme précédent, les formules du type

$$\min_{\overline{j}} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}}{\overline{j}}\right)\overline{ag}^{(r)}\right)\right) < \min_{\overline{k}} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}'}{\overline{k}}\right)\overline{bh}^{(r)}\right)\right)$$

et

$$\min_{\overline{j}} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}}{\overline{j}}\right)\overline{ag}^{(r)}\right)\right) = \min_{\overline{k}} \left(v\left(\left(\frac{\overline{B}'}{\overline{k}}\right)\overline{bh}^{(r)}\right)\right),$$

sont équivalentes à des \mathcal{L}_{div} -formules sans quantificateurs, et d'après le lemme 3.5.16 les formules du type

$$\min_{\overline{j} \in I_{\overline{B}}} \left(\sum_{l=0}^{r-1} j_l V(g^{(l)})\right) < \min_{\overline{k} \in I_{\overline{B}'}} \left(\sum_{l=0}^{s-1} k_l V(h^{(l)})\right),$$

sont équivalentes à des $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -formules sans quantificateurs, ce qui montre le lemme. \square

3.5.4 Répartition de $\Gamma_{V, G}$ dans Γ_M

Le but de cette sous-section sera de montrer le lemme suivant :

Lemme 3.5.18. *Soient $\gamma \in \Gamma_M$, $k, m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Si l'ensemble $\{\alpha \in \frac{k}{m}\Gamma_{V, G, n} ; \alpha \leq \gamma\}$ est non-vide, il admet un maximum, et si l'ensemble $\{\beta \in \frac{k}{m}\Gamma_{V, G, n} ; \beta \geq \gamma\}$ est non-vide, il admet un minimum.*

Remarque 3.5.19. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_{V, G, n}$ est symétrique par rapport à 0, p -divisible, possède un maximum qui est $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i}$, et un minimum qui est $-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i}$.

2. $\Gamma_{V, G}$ n'est pas un groupe (car borné par $\frac{p}{p-1}$).

Lemme 3.5.20. *Soient $g_1, \dots, g_n \in G$ et $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$. Si $V(g_1) < \dots < V(g_n) < V(1)$ et si $\sum_{i=1}^n k_i V(g_i) \neq 0$, alors $V(g_1) \leq |\sum_{i=1}^n k_i V(g_i)|$.*

Démonstration. On va raisonner par induction sur n .

- Si $n = 1$, c'est trivial.

- Supposons maintenant l'hypothèse d'induction vraie jusqu'au rang n et montrons-la au rang $n + 1$. Si $\sum_{i=1}^{n+1} k_i V(g_i) = 0$, il n'y a rien à montrer.

Supposons maintenant que $\sum_{i=1}^{n+1} k_i V(g_i) \neq 0$. Notons r le plus grand entier de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $V(g_r) \leq mV(g_1)$. Alors il existe $K \in \mathbb{Z}^*$, tel que $\sum_{i=1}^r k_i V(g_i) = KV(g_1)$. Si $r = n+1$, ou si $\sum_{i=r+1}^{n+1} k_i V(g_i) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n+1} k_i V(g_i) = KV(g_1)$. Donc $V(g_1) \leq |\sum_{i=1}^{n+1} k_i V(g_i)|$. Si $r \neq n+1$ et si $\sum_{i=r+1}^{n+1} k_i V(g_i) \neq 0$, alors par hypothèse d'induction, $V(g_{r+1}) \leq |\sum_{i=r+1}^{n+1} k_i V(g_i)|$. Par définition de r , $(|K| + 1)V(g_1) < V(g_{r+1})$. D'où,

$$\begin{aligned} V(g_1) &\leq V(g_{r+1}) - |K|V(g_1) \\ &\leq |\sum_{i=r+1}^{n+1} k_i V(g_i)| - |K|V(g_1) \\ &\leq |\sum_{i=r+1}^{n+1} k_i V(g_i)| - |\sum_{i=1}^r k_i V(g_i)| \\ &\leq |\sum_{i=1}^{n+1} k_i V(g_i)|. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.5.21. *Soient $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$, $k_1, q_1 \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket \setminus \{0\}$ et $k_2, \dots, k_n, q_2, \dots, q_m \in \mathbb{Z}$. Si $V(g_1) < \dots < V(g_n) < V(1)$, si $V(h_1) < \dots < V(h_m) < V(1)$ et si $\sum_{i=1}^n k_i V(g_i) = \sum_{i=1}^m q_i V(h_i)$, alors $V(g_1) = V(h_1)$ et $k_1 \equiv q_1 \pmod{p}$.*

Démonstration. Commençons par montrer que $V(g_1) = V(h_1)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $V(g_1) \neq V(h_1)$. On peut sans perte de généralité supposer que $V(h_1) < V(g_1)$. On aurait $q_1 V(h_1) = \sum_{i=1}^n k_i V(g_i) - \sum_{i=2}^m q_i V(h_i)$. Alors d'une part, on aurait

$$|\sum_{i=1}^n k_i V(g_i) - \sum_{i=2}^m q_i V(h_i)| = |q_1|V(h_1) \leq (p-1)V(h_1) < V(h_1^p).$$

D'autre part, comme $q_1 \neq 0$, $|\sum_{i=1}^n k_i V(g_i) - \sum_{i=2}^m q_i V(h_i)|$ est aussi différent de

0, donc d'après le lemme 3.5.20, on aurait,

$$\min(V(g_1), V(h_2)) \leq \left| \sum_{i=1}^n k_i V(g_i) - \sum_{i=2}^m q_i V(h_i) \right|.$$

On en déduirait que $\min(V(g_1), V(h_2)) < V(h_1^p)$, ce qui est absurde. Donc $V(g_1) = V(h_1)$.

Notons r et s respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de $q_1 - k_1$ par p . On va raisonner par l'absurde en supposant que $r \neq 0$.

Comme $\sum_{i=1}^n k_i V(g_i) = \sum_{i=1}^m q_i V(h_i)$,

$$rV(g_1) = -sV(g_1^p) + \sum_{i=2}^n k_i V(g_i) - \sum_{i=2}^m q_i V(h_i).$$

Comme $r \neq 0$, $-sV(g_1^p) + \sum_{i=2}^n k_i V(g_i) - \sum_{i=2}^m q_i V(h_i) \neq 0$. On aurait alors

$$\begin{aligned} |r|V(g_1) &< V(g_1^p) \\ &\leq \left| -sV(g_1^p) + \sum_{i=2}^n k_i V(g_i) - \sum_{i=2}^m q_i V(h_i) \right| \quad \text{d'après le lemme 3.5.20.} \end{aligned}$$

Ce qui est absurde, donc $r = 0$. □

Définition 3.5.22. Soit $\gamma \in \Gamma_{V,G}^*$. On définit g_γ comme étant un élément de G^* , tel que pour tous $k_1, \dots, k_n \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket$ et tous $g_1, \dots, g_n \in G^*$, avec $V(g_1) < \dots < V(g_n)$ et $\gamma = \sum_{i=1}^n k_i V(g_i)$, on ait $V(g_1) = V(g_\gamma)$ (un tel g_γ existe bien d'après le lemme 3.5.21).

Remarque 3.5.23. Si γ n'est pas le maximum de $\Gamma_{V,G,n}$ on vérifie facilement que $\gamma + V(g_\gamma) \in \Gamma_{V,G,n}$. De même, on vérifie facilement que si γ n'est pas le minimum de $\Gamma_{V,G,n}$, $\gamma - V(g_\gamma) \in \Gamma_{V,G,n}$.

Définition 3.5.24. Pour tout $\gamma \in \Gamma_{V,G}$ on notera $p(\gamma)$ le plus petit entier r tel que $\gamma \in \Gamma_{V,G,r}$.

Lemme 3.5.25. Soient $\gamma \in \Gamma_{V,G}^*$ et $g \in G$. Posons $p(\gamma) = n$. Si $V(g) < V(g_\gamma)$ alors :

1. pour tout $k \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket \setminus \{0\}$, on a $\gamma + kV(g) \in \Gamma_{V,G,n+1}$ et $V(g_{\gamma+kV(g)}) = V(g)$,
2. pour tout $i, j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a $p(\gamma + iV(g)) = p(\gamma + jV(g))$,
3. pour tout $i, j \in \llbracket -p+1, 1 \rrbracket$, on a $p(\gamma + iV(g)) = p(\gamma + jV(g))$.

Démonstration. 1) trivial.

2) Soit $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Posons $p(\gamma + iV(g)) = r$. Il est clair que $r \neq 0$. Alors il existe $\gamma' \in \Gamma_{V,G}$, $i' \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket$ et $g' \in G$ tels que $p(\gamma') = r-1$, $V(g') < V(g_{\gamma'})$ et $\gamma + iV(g) = \gamma' + i'V(g')$. D'après le lemme 3.5.21, $V(g) = V(g')$ et $i' \equiv i \pmod{p}$. Pour $j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ fixé on a $\gamma + jV(g) = \gamma' + (i' - i + j)V(g)$, et comme $i' - i = 0$ ou $i' - i = -p$, $(i' - i + j) \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket$ donc $p(\gamma + jV(g)) \leq r$. On montre de façon symétrique que $p(\gamma + iV(g)) \leq p(\gamma + jV(g))$, d'où $p(\gamma + iV(g)) = p(\gamma + jV(g))$.

3) Se montre de la même façon que 2). \square

Lemme 3.5.26. *Soient $\gamma, \delta \in \Gamma_{V,G}^*$. Si $\gamma \neq \delta$ et si $|\gamma - \delta| < V(g_\gamma)$ alors $V(g_\delta) < V(g_\gamma)$.*

Démonstration. Comme $\gamma \neq \delta$, d'après le lemme 3.5.20, $\min(V(g_\delta), V(g_\gamma)) \leq |\gamma - \delta|$ et comme par hypothèse $|\gamma - \delta| < V(g_\gamma)$, on a $V(g_\delta) < V(g_\gamma)$. \square

Lemme 3.5.27. *Soient $\gamma, \gamma' \in \Gamma_{V,G}^*$ et $\alpha \in \Gamma_{V,G}$. Si $p(\alpha) \leq \min(p(\gamma), p(\gamma'))$, si α est compris entre γ et γ' au sens large, et si $|\gamma - \gamma'| \leq \min(V(g_\gamma), V(g_{\gamma'}))$, alors $\alpha = \gamma$ ou $\alpha = \gamma'$.*

Démonstration. Posons $n = \min(p(\gamma), p(\gamma'))$. Si $n = 0$ ou si $\gamma = \gamma'$ le résultat est trivial. On peut donc supposer sans perte de généralité que $n \neq 0$ et que $\gamma \neq \gamma'$. On va raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\alpha \in]\gamma, \gamma'[$ avec $p(\alpha) \leq n$. On peut supposer que α est tel que $p(\alpha)$ soit minimal. Posons $p(\alpha) = r$. On ne peut pas avoir $r = 0$ car sinon on aurait $\alpha = 0$, ce qui impliquerait que $|\gamma| < V(g_\gamma)$ ce qui entraînerait une contradiction d'après le lemme 3.5.20. Comme $r \neq 0$, il existerait $k \in \llbracket -p+1, p-1 \rrbracket \setminus \{0\}$ et $\alpha' \in \Gamma_{V,G,r-1}$ avec $V(g_\alpha) < V(g_{\alpha'})$ tels que $\alpha = \alpha' + kV(g_\alpha)$. Par minimalité de r , $\alpha' \notin]\gamma, \gamma'[$. Si $k > 0$ on aurait $\alpha' \leq \gamma < \alpha' + kV(g_\alpha)$, il existerait alors $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ tel que $\alpha' + qV(g_\alpha) \leq \gamma < \alpha' + (q+1)V(g_\alpha)$. Comme $r-1 < n$ on ne pourrait pas avoir $\alpha' = \gamma$ et comme d'après le lemme précédent $V(g_\alpha) < V(g_\gamma)$, on ne pourrait pas non plus avoir, d'après le lemme 3.5.21, $\alpha' + qV(g_\alpha) = \gamma$ pour $q \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On aurait alors $\alpha' + qV(g_\alpha) < \gamma < \alpha' + (q+1)V(g_\alpha)$. Posons $\alpha'' = \alpha' + (q+1)V(g_\alpha)$. D'après le lemme 3.5.25.1 on aurait $V(g_{\alpha''}) = V(g_\alpha)$, ce qui impliquerait que $\alpha'' - V(g_{\alpha''}) < \gamma < \alpha''$. Alors d'après le lemme précédent on aurait $V(g_\gamma) < V(g_{\alpha''})$, ce qui est en contradiction avec le fait que $V(g_\alpha) < V(g_\gamma)$. On montre de la même façon que le cas où $k < 0$ entraîne aussi une contradiction. \square

Lemme 3.5.28. *Soit $\gamma \in \Gamma_M$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, si l'ensemble $\{\alpha \in \Gamma_{V,G,n} ; \alpha \leq \gamma\}$ est non-vide, il admet un maximum, et si l'ensemble $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n} ; \beta \geq \gamma\}$ est non-vide, il admet un minimum.*

Démonstration. On a raisonner par induction sur n .

- Pour $n = 0$, $\Gamma_{V,G,0} = \{0\}$ et le résultat est trivial.

- Supposons le résultat vrai au rang n et montrons le au rang $n + 1$. Si $\gamma \in \Gamma_{V,G,n+1}$ le résultat est trivial. Dans la suite on supposera que $\gamma \notin \Gamma_{V,G,n+1}$ (cela permettra de remplacer plusieurs inégalités larges par des inégalités strictes). On va raisonner par cas.

1^{er} cas : l'ensemble $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n} ; \beta > \gamma\}$ est vide. Si l'ensemble $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n+1} ; \beta > \gamma\}$ est vide, alors $\max(\Gamma_{V,G,n+1}) < \gamma$, et le résultat est trivial. On va donc supposer dans la suite que $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n+1} ; \beta > \gamma\}$ est non-vidé. Alors $\max(\Gamma_{V,G,n}) < \gamma$ et $\max(\Gamma_{V,G,n+1}) > \gamma$, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i} < \gamma < \sum_{i=0}^n \frac{1}{p^i}$. Donc $0 < \gamma - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i} < \frac{1}{p^n}$ et d'après l'axiome 3.f, il existe $g \in G$ tel que $V(g) < \gamma - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i} \leq pV(g)$, et comme $\gamma - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i} < \frac{1}{p^n}$ on a $V(g) \leq \frac{1}{(p-1)p^n}$. Ainsi il existe $q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i} + qV(g) < \gamma < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i} + (q+1)V(g)$. On vérifie alors facilement que $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i} + qV(g)$ est le maximum de $\{\alpha \in \Gamma_{V,G,n+1} ; \alpha < \gamma\}$ et que $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p^i} + (q+1)V(g)$ est le minimum de $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n+1} ; \beta > \gamma\}$.

2^{eme} cas : l'ensemble $\{\alpha \in \Gamma_{V,G,n} ; \alpha < \gamma\}$ est vide. Ce cas se traite de façon similaire au premier cas.

3^{eme} cas : les ensembles $\{\alpha \in \Gamma_{V,G,n} ; \alpha < \gamma\}$ et $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n} ; \beta > \gamma\}$ sont tous deux non-vides. Notons $\alpha := \max(\{\alpha \in \Gamma_{V,G,n} ; \alpha < \gamma\})$ et $\beta := \min(\{\beta \in \Gamma_{V,G,n} ; \beta > \gamma\})$. On va montrer le résultat dans le cas où $\gamma - \alpha \leq \beta - \gamma$, le cas où $\beta - \gamma \leq \gamma - \alpha$ se traitant de façon similaire. Commençons par remarquer que $p(\alpha) = p(\beta) = n$. En effet si $p(\alpha) < n$, il existerait d'après l'axiome 3.e, $g \in G$ tel que $V(g) < \gamma - \alpha$ et $V(g) < V(g_\alpha)$. Alors d'après le lemme 3.5.25.1, $\alpha + V(g) \in \Gamma_{V,G,n}$. Comme $\alpha + V(g) < \gamma$, l'hypothèse de maximalité de α serait contredite. On montre de même que $p(\beta) = n$. Comme $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n} ; \beta > \gamma\}$ est non-vidé, α n'est pas le maximum de $\Gamma_{V,G,n}$ donc d'après la remarque 3.5.23, $\alpha + V(g_\alpha) \in \Gamma_{V,G,n}$. Comme $\alpha < \alpha + V(g_\alpha)$, $\beta \leq \alpha + V(g_\alpha)$, d'où $0 < \gamma - \alpha < V(g_\alpha)$. Comme $V(g_\alpha) < 1$, on a $0 < \gamma - \alpha < 1$, donc d'après l'axiome 3.e il existe $g \in G$ tel que $V(g) < \gamma - \alpha \leq pV(g)$. Ainsi il existe $q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $\alpha + qV(g) < \gamma < \alpha + (q+1)V(g)$. Comme $V(g) < \gamma - \alpha$ on a $V(g) < V(g_\alpha)$. Posons $\alpha' = \alpha + qV(g)$ et $\alpha'' = \alpha + (q+1)V(g)$.

1^{er} sous-cas : $q \neq p-1$. Alors d'après le lemme 3.5.25.1, $\alpha', \alpha'' \in \Gamma_{V,G,n+1}$,

$p(\alpha') = p(\alpha'') = p(\alpha + V(g))$ et $V(g_{\alpha'}) = V(g_{\alpha''}) = V(g)$. Comme $\alpha < \alpha + V(g) < \gamma$, on ne peut pas avoir $p(\alpha + V(g)) \leq n$ par maximalité de α , donc $p(\alpha + V(g)) = n + 1$ et $p(\alpha') = p(\alpha'') = n + 1$. En appliquant le lemme précédent à α' et α'' , on a que α' est le maximum de $\{\alpha \in \Gamma_{V,G,n+1} ; \alpha < \gamma\}$ et que α'' est le minimum de $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n+1} ; \beta > \gamma\}$.

2^{ème} sous-cas : $q = p - 1$ et $pV(g) < V(g_\alpha)$. Comme dans le sous cas précédent on a $p(\alpha') = n + 1$ et $V(g_{\alpha'}) = V(g)$. Par le lemme 3.5.25.1 on a $\alpha'' \in \Gamma_{V,G,n+1}$ et $V(g_{\alpha''}) = pV(g)$. On ne peut pas avoir $p(\alpha'') \leq n$, car sinon par minimalité de β on aurait $\beta \leq \alpha''$, ce qui impliquerait que $\beta - \gamma \leq \alpha'' - \gamma$ et d'autre part l'inégalité $\alpha + (p - 1)V(g) < \gamma < \alpha + pV(g)$ impliquerait $\alpha'' - \gamma < \gamma - \alpha$, on en conclurait que $\beta - \gamma < \gamma - \alpha$, ce qui absurde par hypothèse. Ainsi $p(\alpha'') = n + 1$. En appliquant le lemme précédent à α' et α'' , on a que α' est le maximum de $\{\alpha \in \Gamma_{V,G,n+1} ; \alpha < \gamma\}$ et que α'' est le minimum de $\{\beta \in \Gamma_{V,G,n+1} ; \beta > \gamma\}$.

3^{ème} sous-cas : $q = p - 1$ et $pV(g) = V(g_\alpha)$. On va montrer que ce sous cas est impossible. Dans ce sous cas $\alpha'' = \alpha + V(g_\alpha)$, et comme α n'est pas le maximum de $\Gamma_{V,G,n}$, d'après la remarque 3.5.23, $\alpha'' \in \Gamma_{V,G,n}$ et par minimalité de β on aurait $\beta < \alpha''$. On montrerait comme dans le sous cas précédent que cela impliquerait que $\beta - \gamma < \gamma - \alpha$, ce qui absurde par hypothèse. \square

Démonstration du lemme 3.5.18. Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $\frac{m}{k}\gamma$. \square

3.6 Démonstration du théorème 3.4.3

3.6.1 Les structures de la forme $K(\mathbf{G})$

Dans toute cette sous-section $(M, G_{\bar{p}}, G_p)$ désignera un modèle de T et K un sous-corps dénombrable de M .

Lemme 3.6.1. *Soient $H \subseteq L$ des corps valués et $x \in L$. Alors $\Gamma_{H(x)}$ est engendrée par une quantité dénombrable d'éléments au-dessus de Γ_H .*

Démonstration. Si $\Gamma_{H(x)} = \Gamma_H$ le lemme est vide. Sinon il existe un polynôme $P_1 \in H[X]$ de plus petit degré d_1 tel que $v(P_1(x)) \notin \Gamma_H$. Si $v(H[x]) \subseteq v(P_1(x))\mathbb{Z} + \Gamma_H$, le lemme est montré. Sinon il existe un polynôme $P_2 \in H[X]$ de plus petit degré d_2 tel que $v(P_2(x)) \notin v(P_1(x))\mathbb{Z} + \Gamma_H$. Comme $v(P_2(x)) \notin \Gamma_H$, on a $d_1 \leq d_2$, et en effectuant la division euclidienne de P_2 par P_1 , on voit que $d_2 \neq d_1$, donc $d_1 < d_2$. En itérant le procédé on construit une suite de polynômes $(P_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in H[X]^{\mathbb{N}}$, éventuellement stationnaire, telle que $v(H[x]) \subseteq \sum_{i \in \mathbb{N}^*} v(P_i(x))\mathbb{Z} + \Gamma_H$, ce qui montre le lemme. \square

Lemme 3.6.2. *Il existe une suite $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Gamma_M^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\Gamma_{K(G)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i \mathbb{Z} + \Gamma_{V,G}.$$

Démonstration. Comme K est une extension dénombrable de \mathbb{Q} , c'est une conséquence directe du lemme 3.5.12 et du lemme précédent. \square

Lemme 3.6.3. *Soit $x \in M$. Alors il existe un ensemble (au plus) dénombrable cofinal dans $\{\alpha ; \alpha \in \Gamma_{K(G)alg}, \alpha < v(x)\}$ et un ensemble (au plus) dénombrable cofinal dans $\{\alpha ; \alpha \in \Gamma_{K(G)alg}, \alpha > v(x)\}$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il existe une suite $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Gamma_M^{\mathbb{N}}$ telle que $\Gamma_{K(G)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i \mathbb{Z} + \Gamma_{V,G}$. Comme $\Gamma_{K(G)alg}$ est la clôture divisible de $\Gamma_{K(G)}$ on a $\Gamma_{K(G)alg} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i \mathbb{Q} + \bigcup_{k,m \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{m} \Gamma_{V,G}$. Alors

$$\begin{aligned} \{\alpha \in \Gamma_{K(G)alg} ; \alpha < v(x)\} &= \bigcup_{\substack{l,n,k,m \in \mathbb{N}^* \\ a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Q}}} \left\{ \sum_{i=1}^l \gamma_i a_i + \beta ; \beta \in \frac{k}{m} \Gamma_{V,G,n}, \sum_{i=1}^l \gamma_i a_i + \beta < v(x) \right\} \\ &= \bigcup_{\substack{l,k,n,m \in \mathbb{N}^* \\ a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Q}}} \left\{ \sum_{i=1}^l \gamma_i a_i + \beta ; \beta \in \frac{k}{m} \Gamma_{V,G,n}, \beta < v(x) - \sum_{i=1}^l \gamma_i a_i \right\} \end{aligned}$$

Pour $l, n, k, m, a_1, \dots, a_n$ fixés, l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i=1}^l \gamma_i a_i + \beta ; \beta \in \frac{k}{m} \Gamma_{G,n}, \beta < v(x) - \sum_{i=1}^l \gamma_i a_i \right\}$$

est un translaté de l'ensemble

$$\left\{ \beta ; \beta \in \frac{k}{m} \Gamma_{G,n}, \beta < v(x) - \sum_{i=1}^l \gamma_i a_i \right\}.$$

D'après le lemme 3.5.18, s'il est non-vidé, il admet un maximum, que l'on notera $m_{l,n,k,m,a_1, \dots, a_n}$. Il est alors clair que l'ensemble $\{m_{l,n,k,m,a_1, \dots, a_n} ; l, n, k, m \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Q}\}$ est (au plus) dénombrable et cofinal dans $\{\alpha \in \Gamma_{K(G)alg} ; \alpha < v(x)\}$. On montre de même qu'il existe un ensemble (au plus) dénombrable cofinal dans $\{\alpha \in \Gamma_{K(G)alg} ; \alpha > v(x)\}$. \square

Lemme 3.6.4. *Soit $x \in M$. Si $K(G)^{alg}(x)$ est une extension immédiate de $K(G)^{alg}$ alors il existe une suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $K(G)^{alg}$ qui pseudo-converge vers x et qui n'a pas de pseudo-limite dans $K(G)^{alg}$.*

Démonstration. On va commencer par montrer qu'il n'existe aucun $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}, Y, (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}]$, et aucun $\bar{a} \in K$, tels que l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in$

$A_G(P_{\bar{a}})$ soit cofinal dans $\{v(x - y) ; y \in (K(G)^{alg})\}$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'un tel P et qu'un tel \bar{a} existent. Comme $K(G)^{alg}$ est algébriquement maximal, $K(G)^{alg}(x)$ est une extension immédiate de type transcendant de $K(G)^{alg}$. Donc pour tout polynôme $Q \in K(G)^{alg}[X]$, il existerait $y_0 \in A_G(P_{\bar{a}})$ tel que pour tout $y \in M$ vérifiant $v(x - y) > v(x - y_0)$, on ait $v(Q(x)) = v(Q(y))$. En particulier, pour tout $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, tout $\bar{B} \in \mathcal{P}_n^{r+1}$, tout $\bar{j} \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket^{r+1}$, et tout $\bar{g} \in G^n$, il existerait $y_0 \in A_G(P_{\bar{a}})$ tel que pour tout $y \in A_G(P_{\bar{a}})$ vérifiant $v(x - y) > v(x - y_0)$, on ait $v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, y, \bar{g})) = v(P_{\bar{B}, \bar{j}}(\bar{a}, x, \bar{g}))$. D'après l'axiome 4 de T , on en déduirait que l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in A_G(P_{\bar{a}})\}$ admettrait un maximum. Par cofinalité, l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in K(G)^{alg}\}$ admettrait aussi un maximum, ce qui est absurde. Il n'existe donc aucun $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}, Y, (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}]$, et aucun $\bar{a} \in K$, tels que l'ensemble $\{v(x - y) ; y \in A_G(P_{\bar{a}})\}$ soit cofinal dans $\{v(x - y) ; y \in (K(G)^{alg})\}$. Ainsi, pour tout $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}, Y, (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}]$, et tout $\bar{a} \in K$, il existe $y_{P, \bar{a}} \in K(G)^{alg}$ tel que, pour tout $y \in A_G(P_{\bar{a}})$, on ait $v(x - y_{P, \bar{a}}) > v(x - y)$. Comme K est dénombrable, l'ensemble $\{v(x - y_{P, \bar{a}}) ; P \in \tilde{\mathbb{Z}}[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}, Y, (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}], \bar{a} \in K\}$ est aussi dénombrable. Soit $y \in K(G)^{alg}$. Il existe $P \in \tilde{\mathbb{Z}}[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}, Y, (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ et $\bar{a} \in K$, tels que $y \in A_G(P_{\bar{a}})$. Alors $v(x - y_{P, \bar{a}}) > v(x - y)$. On en déduit que $\{v(x - y_{P, \bar{a}}) ; P \in \tilde{\mathbb{Z}}[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}, Y, (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}], \bar{a} \in K\}$ est cofinal dans $\{v(x - y) ; y \in (K(G)^{alg})\}$. \square

3.6.2 Démonstration du théorème 3.4.3

Démonstration du théorème 3.4.3. On va considérer deux modèles $(M, G_{\bar{p}}, G_p)$ et $(M', G'_{\bar{p}}, G'_p)$ de T , saturés de cardinalité \aleph_1 , et on va montrer que la famille \mathcal{F} des \mathcal{L} -isomorphismes partiels entre M et M' dont le domaine est de la forme $K(G)$, où K est un sous-corps dénombrable de M , est non-vide et à la propriété de va-et-vient.

Commençons par montrer que \mathcal{F} est non-vide. On montre comme dans la démonstration du théorème 2.2.1 qu'il existe un $\mathcal{L}_{G_{\bar{p}}}$ -isomorphisme partiel h entre $\mathbb{Q}(G_{\bar{p}})$ et $\mathbb{Q}(G'_{\bar{p}})$. Comme $\Gamma_{\mathbb{Q}(G_{\bar{p}})} = \Gamma_{\mathbb{Q}(G'_{\bar{p}})} = \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{Q}(G_{\bar{p}}) \cap G_p = \{1\}$ et $\mathbb{Q}(G'_{\bar{p}}) \cap G'_p = \{1\}$, donc h respecte G_p et est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel. Comme G_p et G'_p sont des modèles de cardinalité \aleph_1 et \aleph_1 -saturés de $T_{G_p, V}$, qui est une théorie complète d'après la proposition 3.5.5, il existe un $\mathcal{L}_{G_p, V}$ -isomorphisme f de G_p sur G'_p . Soit k l'application définie sur $\mathbb{Q}(G_{\bar{p}}) \cup G_p$, par $k|_{\mathbb{Q}(G_{\bar{p}})} = h$ et $k|_{G_p} = f$. D'après le lemme 3.5.13 on peut prolonger k en un isomorphisme de corps valué entre $\mathbb{Q}(G)$ et $\mathbb{Q}(G')$ (toujours noté k). Comme $k(G_{\bar{p}}) = G'_{\bar{p}}$ et $k(G_p) = G'_p$, il est évident que k est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel, ce qui montre que \mathcal{F} est non-vide.

On va maintenant montrer que \mathcal{F} admet la propriété de va-et-vient. Par symétrie il est suffisant de montrer le va. Soit f un élément de \mathcal{F} de domaine $K(G)$. Comme G est inclus dans le domaine de f , tout isomorphisme de

corps valué qui étend f est un \mathcal{L} -isomorphisme partiel.

Comme M et M' sont algébriquement clos on peut étendre f à $K(G)^{alg}$. Soit $x \in M \setminus K(G)^{alg}$. D'après les axiomes de $T_{G_{\bar{p}}}$, $G_{\bar{p}}/v = M/v$, donc $K(G)^{alg}/v = M/v$, ainsi x ne peut pas être dans une extension résiduelle de $K(G)^{alg}$. Il y a alors seulement deux cas possibles, x est dans une extension immédiate de $K(G)^{alg}$, ou x est dans une extension purement valuationnelle de $K(G)^{alg}$, c'est-à-dire $K(G)^{alg}(x)/v = K(G)^{alg}/v$ et $\Gamma_{K(G)^{alg}(x)} \neq \Gamma_{K(G)^{alg}}$.

1^{er} cas : x est dans une extension immédiate de $K(G)^{alg}$. D'après le lemme 3.6.4, il existe une suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (K(G)^{alg})^{\mathbb{N}}$ qui pseudo-converge vers x et qui n'a pas de pseudo-limite dans $K(G)^{alg}$. Par \aleph_1 -saturation il existe $x' \in M'$ tel que x' soit une pseudo-limite de la suite $(f(y_i))_{i \in \mathbb{N}}$. On peut alors prolonger f en un isomorphe de corps valué noté g de domaine $K(G)^{alg}(x)$ et tel que $g(x) = x'$. La restriction de g à $K(G)(x)$ est un élément de \mathcal{F} qui prolonge f .

2^{eme} cas : x est dans une extension purement valuationnelle de $K(G)^{alg}$. D'après le lemme 3.6.3, il existe un ensemble dénombrable $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Gamma_{K(G)^{alg}}^{\mathbb{N}}$ cofinal dans $\{\alpha \in \Gamma_{K(G)^{alg}} ; \alpha < v(x)\}$ et un ensemble dénombrable $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Gamma_{K(G)^{alg}}^{\mathbb{N}}$ cofinal dans $\{\alpha \in \Gamma_{K(G)^{alg}} ; \alpha > v(x)\}$. Par \aleph_1 -saturation il existe $x' \in M'$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $f(\gamma_i) < v(x') < f(\delta_i)$. On peut alors prolonger f en un isomorphe de corps valué noté g , de domaine $K(G)^{alg}(x)$, et tel que $g(x) = x'$. La restriction de g à $K(G)(x)$ est un élément de \mathcal{F} qui prolonge f . \square

Bibliographie

- [AK65a] James Ax and Simon Kochen. Diophantine Problems Over Local Fields i. *American Journal of Mathematics*, 87 :605–630, 1965.
- [AK65b] James Ax and Simon Kochen. Diophantine Problems Over Local Fields ii. A complete set of axioms for p -adic number theory. *American Journal of Mathematics*, 87, 1965.
- [AK66] James Ax and Simon Kochen. Diophantine Problems Over Local Fields iii. Decidable fields. *Annals of Mathematics*, 83, 1966.
- [Bau82] Walter Baur. Die Theorie der Paare reell abgeschlossener Körper. *Monographies de l'Enseignement Mathématique*, 30 :25–34, 1982.
- [Cha] Zoé Chatzidakis. Théorie des Modèles des corps valués. disponible sur <http://www.math.ens.fr/~zchatzid/>.
- [dD] Lou Van den Dries. Notes on Valued Fields. disponible sur <http://www.math.uiuc.edu/People/vddries.html>.
- [dD99] Lou Van den Dries. On the elementary theory of rings of Witt vectors with a multiplicative set of representatives for the residue field. *Manuscripta Mathematica*, 98 :133–137, 1999.
- [dDG06] Lou Van den Dries and Ayhan Günaydin. The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group. *Proceedings of London Mathematical Society*, 93 :43–81, 2006.
- [dDG10] Lou Van den Dries and Ayhan Günaydin. Mann pairs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362 :2393–2414, 2010.
- [dDG11] Lou Van den Dries and Ayhan Günaydin. Definable sets in Mann pairs. *Communications in Algebra*, 39 :2752–2763, 2011.
- [Del88] Françoise Delon. Extensions séparées et immédiates de corps valués. *The Journal of Symbolic Logic*, 53 :421–428, 1988.
- [Del14] Françoise Delon. Élimination des quantificateurs dans les paires séparées purement résiduelles de corps valués algébriquement clos. In Gondard Delon, Dickmann, editor, *Séminaire de Structures Algébriques Ordonnés 2012-2013*, volume 89 of *Prépublications de l'Équipe de Logique Mathématique*. Université Denis Diderot-Paris 7, 2014.

- [Ers65] Yuri Ershov. On elementary theory of local field. *Algebra i Logika* 4, 2, 1965.
- [Gou13] Fernando Gouvêa. *p-adic Numbers, An Introduction*. Springer, 2 edition, 2013.
- [Haz09] Michiel Hazewinkel. *Handbook of Algebra*, chapter Witt Vectors. Part 1, pages 325–454. M. Hazewinkel, 2009.
- [HMRC] Ehud Hrushovski, Ben Martin, Silvain Rideau, and Ralf Cluckers. Definable equivalence relations and zeta functions of groups. arXiv :math/0701011.
- [Kei64] Jerome Keisler. Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields. *The Michigan Mathematical Journal*, 11 :71–81, 1964.
- [Lel90] Gérard Leloup. Théories Complètes De Paires De Corps Valués Henséliens. *Journal of Symbolic Logic*, 55 :323–339, 1990.
- [Man65] Henry Mann. On Linear Relations Between Roots of Unity. *Mathematika*, 12 :107–117, 1965.
- [Mar02] David Marker. *Model Theory : An Introduction*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2002.
- [Rib64] Paulo Ribenboim. *Théorie des valuations*. Les Presses de l'Université de Montréal, 1964.
- [Rid12] Silvain Rideau. Élimination des imaginaires dans les extensions finies de \mathbb{Q}_p . Master's thesis, École Normale Supérieure, Paris XI, 2012.
- [Rob77] Abraham Robinson. *Complete Theories. Studies in logic and the foundations of mathematics*, volume 46. North-Holland Publisher Co, 2 edition, 1977.
- [Ser97] Jean-Pierre Serre. *Corps Locaux*. Hermann, 3 edition, 1997.
- [Tei36] Oswald Teichmüller. Über die Struktur diskret bewerteter perfekter Körper. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pages 152–161, 1936.
- [TV96] John Tate and José Felipe Voloch. Linear Forms in p -adic Roots of Unity. *Journal International Mathematics Research Notices*, (12) :589–601, 1996.
- [Wit37] Ernst Witt. Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n . Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p . *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 176 :126–140, 1937.
- [Zil90] Boris Zilber. A note on the model theory of the complex field with roots of unity. <https://people.maths.ox.ac.uk/zilber/publ.html>, 1990.

Théorie des modèles d'expansions de corps valués : phénomènes de séparation

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude d'un point de vue modèle théorique de corps valués algébriquement clos enrichis d'un prédicat qui représente soit un sous-groupe multiplicatif soit un sous-corps. Nous donnons un résultat d'élimination partielle des quantificateurs pour les structures du type (M, G) , où M est un corps valué algébriquement clos et où G un sous-groupe multiplicatif sur lequel la valuation est injective.

Nous nous concentrons ensuite sur les corps valués de caractéristique mixte. Nous donnons une axiomatisation complète des structures valuées du type $(W(k)^{alg}, \tau(k))$, où k est un corps parfait de caractéristique p , où $W(k)^{alg}$ est la clôture algébrique du corps des vecteurs de Witt au-dessus de k , et où $\tau(k)$ est le relèvement de Teichmüller de k dans $W(k)$. Nous étudions ensuite les paires de corps valués fortement séparées et appliquons nos résultats pour donner une axiomatisation complète des structures valuées du type $(W(k)^{alg}, W(k))$.

Enfin, nous étudions la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$, où \mathbb{U} est le groupe des racines de l'unité. Nous développons un outil, la notion de V -longueur, qui nous permet de prouver que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$ fixés, l'ensemble $\{|\sum_{i=1}^n a_i \zeta_i|_p ; \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{U}, \sum_{i=1}^n a_i \zeta_i \neq 0\}$ admet un minimum non nul. Nous nous servons ensuite de ce type de résultat pour obtenir une axiomatisation complète de la structure valuée $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$.

Mots clés : théorie des modèles ; axiomatisation ; vecteurs de Witt ; relèvement de Teichmüller ; racines de l'unité.

Model theory of expansions of valued fields : separation phenomena

Abstract : This thesis is dedicated to the model theoretic study of algebraically closed valued fields equipped with a additional unary predicate for either a multiplicative subgroup or a subfield.

We give a result of relative quantifier elimination for structures of the kind (M, G) , where M is an algebraically closed valued field and G is a multiplicative subgroup on which the valuation is injective.

We then focus on valued fields of mixed characteristic. We give a complete axiomatization of valued structures of the kind $(W(k)^{alg}, \tau(k))$, where k is a perfect field of characteristic p , where $W(k)^{alg}$ is the algebraic closure of Witt's vectors field over k , and where $\tau(k)$ is the subgroup of Teichmüller's vectors. Then we study strongly separated extensions of valued fields and apply our results to obtain a complete axiomatization of structures of type $(W(k)^{alg}, W(k))$.

Finally, we study the valued structure $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$, where \mathbb{U} is the group of roots of unity. We develop the notion of V -length, which allows us to prove that, for any fixed $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_p$, the set $\{|\sum_{i=1}^n a_i \zeta_i|_p ; \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{U}, \sum_{i=1}^n a_i \zeta_i \neq 0\}$ has a non zero minimum. We use this kind of result to obtain a complete axiomatization of the valued structure $(\mathbb{C}_p, \mathbb{U})$.

Keywords : model theory ; axiomatization ; Witt's vectors ; Teichmüller's vectors ; roots of unity.

Image en couverture : Description très courte de l'image (facultative). Crédit image : xxx yyy.

