



HAL
open science

Quantification des processus responsables de l'accélération des glaciers émissaires par méthodes inverses

Cyrille Mosbeux

► **To cite this version:**

Cyrille Mosbeux. Quantification des processus responsables de l'accélération des glaciers émissaires par méthodes inverses. Autre. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAI085 . tel-01688570

HAL Id: tel-01688570

<https://theses.hal.science/tel-01688570>

Submitted on 19 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **2MGE : Matériaux, Mécanique, Génie civil, Electrochimie**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Cyrille MOSBEUX

Thèse dirigée par **Olivier GAGLIARDINI**
et codirigée par **Fabien GILLET-CHAULET**

préparée au sein de l' **Institut des Géosciences de l'Environnement**
dans l'École doctorale **IMEP2 - Ingénierie - Matériaux, Mécanique,
Environnement, Energétique, Procédés, Production**

Quantification des processus responsables de l'accélération des glaciers émissaires par méthodes inverses

Thèse soutenue publiquement le **5 décembre 2016**,
devant le jury composé de :

M. Eric BLAYO

Professeur, LJK, Grenoble, Président

M. Patrick HEIMBACH

Professeur, Université du Texas, Austin, Rapporteur

M. Frank PATTYN

Professeur, Université Libre de Bruxelles, Rapporteur

Mme Frédérique RÉMY

Directrice de Recherche, LEGOS, Toulouse, Examinatrice

M. Olivier GAGLIARDINI

Professeur, LGGE, Grenoble, Directeur de thèse

M. Fabien GILLET-CHAULET

Chercheur, LGGE, Grenoble, Co-Directeur de thèse



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Gag et Fabien, pour la confiance qu'ils m'ont accordée pendant ces trois ans mais également la disponibilité dont ils ont toujours fait preuve lorsque j'avais besoin d'eux. Merci aussi aux autres chercheurs avec qui j'ai pu discuter au détour d'un couloir ou lors de réunions. Travailler auprès d'eux m'a permis d'apprendre énormément de choses et aura plus que certainement participé à faire croître mon goût pour la recherche.

Merci à Frank pour son accueil lors de mes visites à Bruxelles.

Je voudrais également remercier tous les amis que j'ai pu me faire à Grenoble et particulièrement Thomas et Julien pour les innombrables heures passées ensemble au laboratoire (pour des discussions parfois très scientifiques et parfois moins), à la salle d'escalade, en rocher ou en montagne. J'ai passé de super moments avec vous. Merci aussi à tous les autres doctorants ou non-permanents (Luc, Charles, Hélène, Olivier, Ilann, Laure, Alexis, Etienne, ...) du LGGE et au soutien de certains pendant les derniers mois de thèse!

Merci à mes proches (papa, maman, b-m,...) pour m'avoir encouragé toutes ces années, et ce déjà bien avant la thèse. Merci de m'avoir toujours soutenu et cru en moi!

Enfin, je voudrais remercier tout particulièrement ma femme, Laura, qui m'a soutenu pendant ces trois ans malgré les 800 km qui nous séparaient. Je sais que cela n'a pas été facile tous les jours pour elle mais elle a toujours su m'écouter quand j'en avais besoin. Tu es la meilleure!

Résumé

Le réchauffement climatique actuel a une conséquence directe sur la perte de masse des calottes polaires. Reproduire les mécanismes responsables de cette perte de masse et prévoir la contribution des calottes à l'élévation du niveau des océans d'ici la fin du siècle est dès lors l'un des défis majeurs de la modélisation de l'écoulement des calottes polaires. Les modèles d'écoulement permettent de réaliser de telles prévisions mais ces simulations, à court terme, sont très sensibles à leur état initial habituellement construit à partir d'observations de terrain. Malheureusement, certains paramètres comme le frottement entre la glace et le socle rocheux ainsi que la topographie basale sont souvent méconnus à cause du manque d'observations directes ou des larges incertitudes liées à ces observations. Améliorer la connaissance de ces deux paramètres à la fois pour le Groenland et l'Antarctique est donc un pré-requis pour réaliser des projections fiables. Les méthodes d'assimilation de données et les méthodes inverses permettent alors de surmonter ce problème.

Cette thèse présente deux algorithmes d'assimilation de données permettant de mieux contraindre simultanément le frottement basal et la topographie basale à partir d'observations de surface. L'un des algorithmes est entièrement basé sur la méthode adjointe tandis que le second se base sur une méthode cyclique couplant l'inversion du frottement basal avec la méthode adjointe et l'inversion de la géométrie basale à l'aide de la relaxation newtonienne. Les deux algorithmes ont été implémentés dans le modèle d'écoulement de glace éléments finis *Elmer/Ice* et testés dans une expérience jumelle qui montre une nette amélioration de la connaissance des deux paramètres recherchés. L'application des deux algorithmes à la région de la Terre de Wilkes réduit l'incertitude liée aux conditions basales en permettant, par exemple, d'obtenir plus de détails sur la géométrie basale en comparaison avec les modèles numériques de terrain habituels. De plus la reconstruction simultanée du frottement et de la géométrie basale permet de réduire significativement les anomalies de divergence de flux habituellement obtenues lors de l'inversion du frottement seul. Nous étudions finalement l'impact des conditions basales ainsi inversées sur des simulations pronostiques afin de comparer la capacité des deux algorithmes à mieux contraindre la contribution future des calottes polaires à l'augmentation du niveau des océans.

Abstract

The current global warming has direct consequences on ice-sheet mass loss. Reproducing the responsible mechanisms and forecasting the potential ice-sheets contribution to 21st century sea level rise is one of the major challenges in ice-sheet and ice flow modelling. Ice flow models are now routinely used to forecast the potential ice-sheets contribution to sea level rise. Such short term simulations are very sensitive to model initial state, usually build from field observations. However, some parameters, such as the basal friction between ice-sheet and bedrock as well as the basal topography, are still badly known because of a lack of direct observations or large uncertainty on measurements. Improving the knowledge of these two parameters for Greenland and Antarctica is therefore a prerequisite for making reliable projections. Data assimilation and inverse methods have been developed in order to overcome this problem.

This thesis presents two different assimilation algorithms to better constrain simultaneously basal friction and basal elevation parameters using surface observations. The first algorithm is entirely based on adjoint method while the second algorithm uses a cycling method coupling inversion of basal friction with adjoint method and inversion of basal topography with nudging method. Both algorithms have been implemented in the finite element ice-sheet and ice flow model *Elmer/Ice* and tested in a twin experiment showing a clear improvement of both parameters knowledge. The application of both algorithms to regions such as the Wilkes Land in Antarctica reduces the uncertainty on basal conditions, for instance providing more details to the basal geometry when compared to usual DEM. Moreover, the reconstruction of both basal elevation and basal friction significantly decreases ice flux divergence anomalies when compared to classical methods where only friction is inferred. We finally study the impact of such inversion on prognostic simulation in order to compare the efficiency of the two algorithms to better constrain future ice-sheet contribution to sea level rise.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	6
1 Introduction et contexte	11
1.1 L'élévation du niveau des mers et ses enjeux	11
1.2 Bilan de masse des calottes	14
1.2.1 Comment s'écoulent les calottes ?	14
1.2.2 Accélération de la perte de masse des glaciers émissaires	17
1.3 Enjeux de la thèse : mieux connaître le présent pour mieux simuler l'avenir	18
1.3.1 Les modèles d'hier et d'aujourd'hui	18
1.3.2 Les modèles et leurs incertitudes	20
1.3.3 Objectifs et grandes lignes de cette thèse	23
2 Acquisition de données	25
2.1 Altitude de surface	25
2.2 Variations d'épaisseur	27
2.3 Vitesses d'écoulement de surface	28
2.4 Épaisseur de glace et topographie basale	29
2.5 Accumulation et bilan de masse de surface	30
2.6 Conclusion	31
3 Mécanique et écoulement de la glace	33
3.1 Le mouvement des glaciers	33
3.1.1 Déformation visco-plastique de la glace	34
3.1.1.1 La glace à toutes les échelles	34
3.1.1.2 La relation constitutive de la glace : loi de Glen	35
3.1.2 Mouvement basal	37
3.1.2.1 Glissement sur un socle rigide	37
3.1.2.2 Socle basal déformable	40
3.1.3 Paramétrisation du mouvement basal dans les modèles d'écoulement de calottes	41
3.2 Modèles d'écoulement	42
3.2.1 Modèle de Stokes	42

3.2.1.1	Conditions limites	43
3.2.1.2	Évolution de la géométrie	45
3.2.2	Modèles d'ordre intermédiaire	46
3.2.3	Modèle shallow shelf(y) approximation (SSA)	47
3.2.4	Modèle shallow ice approximation	48
3.3	Modèle numérique d'écoulement : éléments finis	49
3.3.1	Principes de base	49
3.3.1.1	La forme variationnelle	50
3.3.1.2	Discrétisation	50
3.3.1.3	Assemblage	51
3.3.1.4	Résolution	51
3.3.2	Application aux problèmes d'écoulement	53
3.3.3	Elmer/Ice	54
3.4	Conclusion	54
4	Initialisation des modèles en glaciologie	57
4.1	Inversion et assimilation de données	58
4.2	Approches variationnelles du problème inverse	59
4.2.1	Méthode adjointe	60
4.2.1.1	Calcul du gradient	60
4.2.1.2	Descente du gradient	62
4.2.1.3	En résumé	62
4.2.1.4	Implémentation de l'adjoint dans Elmer/Ice	63
4.2.1.5	Régularisation	64
4.2.1.6	Application à l'inversion des conditions basales	65
4.2.2	Autres méthodes	67
4.2.2.1	Approche Bayésienne et lien avec les méthodes variationnelles	67
4.2.2.2	Méthode de Robin	68
4.3	Relaxation newtonienne : une autre approche	69
4.4	Inversion simultanée du frottement et de la géométrie basale	71
4.5	Conclusion	72
5	Comparaison de deux méthodes d'assimilation de données	73
5.1	Méthodologie mise en place	74
5.1.1	Modèle direct	74
5.1.2	Fonctions coût	75
5.1.3	Application de la méthode adjointe	76
5.1.3.1	Régularisation de la solution	76
5.1.4	Adaptation de la relaxation newtonienne	76
5.1.5	Algorithmes Exploités	78
5.1.5.1	Adjoint de deux paramètres (ATP)	78

5.1.5.2	Cycles Adjoint-Relaxation Newtonienne (ANC)	79
5.1.5.3	Adjoint pour le frottement seulement (AFO)	80
5.2	Validation des méthodes développées sur une expérience jumelle	80
5.2.1	Construction d'une expérience jumelle réaliste	80
5.2.1.1	Expérience de Référence	80
5.2.1.2	Création d'un ensemble d'observations	81
5.2.1.3	Erreur initiale	82
5.2.2	Résultats	83
5.2.2.1	Résultats de l'adjoint de deux paramètres (ATP)	84
5.2.2.2	Résultats du cycle adjoint-relaxation newtonienne (ANC)	86
5.2.3	Analyse de sensibilité : fonctionnement des algorithmes dans un cas non-stationnaire	89
5.2.4	Divergence de flux lors d'un pronostique	92
5.2.5	Conclusions et perspectives de cette première expérience	95
6	Application des méthodes inverses sur la Terre de Wilkes	99
6.1	Présentation de la région de la Terre de Wilkes	100
6.2	Observations et paramètres utilisés pour cette étude	101
6.2.1	Observations de surface	101
6.2.2	Observations basales	102
6.2.3	Autres paramètres	103
6.3	Modèle direct, maillage et conditions limites	103
6.4	Modèles Inverses	104
6.4.1	Modification des méthodes ATP et ANC	104
6.4.1.1	Modifications des fonctions coût optimisées	105
6.4.1.2	Modifications de l'algorithme de relaxation newtonienne	105
6.4.2	Vers une approche ensembliste	106
6.5	Résultats	108
6.5.1	Résultats lors d'une inversion du frottement seul	108
6.5.2	Sélection d'un ensemble de solutions optimales pour l'ATP	110
6.5.3	Sélection d'un ensemble de solutions optimales pour l'ANC	114
6.5.4	Analyse des sous-ensembles de solutions	115
6.5.4.1	Solutions de géométrie basale z_b	115
6.5.4.2	Solutions de frottement basal	121
6.5.4.3	Étude d'impact sur une simulation pronostique	125
6.6	Discussion générale et Conclusions	129
7	Conclusions et Perspectives	131
7.1	Conclusions	131
7.2	Perspectives	133
A	Présentation de l'algorithme quasi-Newtonien M1QN3	135

Chapitre 1

Introduction et contexte

1.1 L'élévation du niveau des mers et ses enjeux

Le niveau des océans par rapport à la surface terrestre a toujours fluctué au cours du temps et à différentes échelles, comme en témoignent notamment les traces d'anciens rivages marins actuellement submergés ou immergés. Ainsi, à l'échelle de millions d'années, les océans se sont souvent élevés et abaissés de plusieurs centaines de mètres. Ces impressionnants changements passés s'expliquent principalement par les mouvements des plaques tectoniques modifiant la géométrie des bassins marins. Au cours de l'époque Quaternaire, les changements de niveau des océans étaient principalement dus à l'échange de masse entre les calottes glaciaires et les océans. Pendant les périodes glaciaires, plus froides, les calottes gagnaient de la masse au détriment des océans et le niveau des mers s'abaissait tandis que pendant les périodes interglaciaires, plus chaudes, les calottes perdaient de la masse et le niveau des mers augmentait (Lambeck et Chappell, 2001).

Ces grands changements climatiques sont principalement dus à des modifications de l'insolation de la surface terrestre en raison des variations des paramètres orbitaux de la Terre. Par ailleurs, les variations du taux de gaz carbonique (CO_2) dans l'atmosphère auraient notablement amplifié ces changements climatiques. L'étude d'archives glaciaires (carottes de glaces) prélevées en Antarctique et au Groenland, véritables témoins du climat passé, montrent ainsi une forte corrélation entre le taux de CO_2 et la température terrestre (Barnola *et al.*, 1987).

L'installation de marégraphes le long de certains littoraux dès la fin du 19^{ème} siècle ainsi que les observations satellites au cours des dernières décennies ont permis d'observer les variations récentes du niveau des mers. Les études se basant sur ces mesures montrent que le niveau des mers s'est significativement élevé au cours du siècle dernier, malgré une forte variabilité inter-annuelle. Les tendances mesurées par différentes études pour la période 1880-

2012 sont présentées à la Figure 1.1. Selon le dernier rapport du GIEC¹ (Hartmann *et al.*, 2013), cette augmentation du niveau des mers serait étroitement liée à l'augmentation de 0.85 °C de la température moyenne sur Terre observée au cours de la même période (Hartmann *et al.*, 2013).

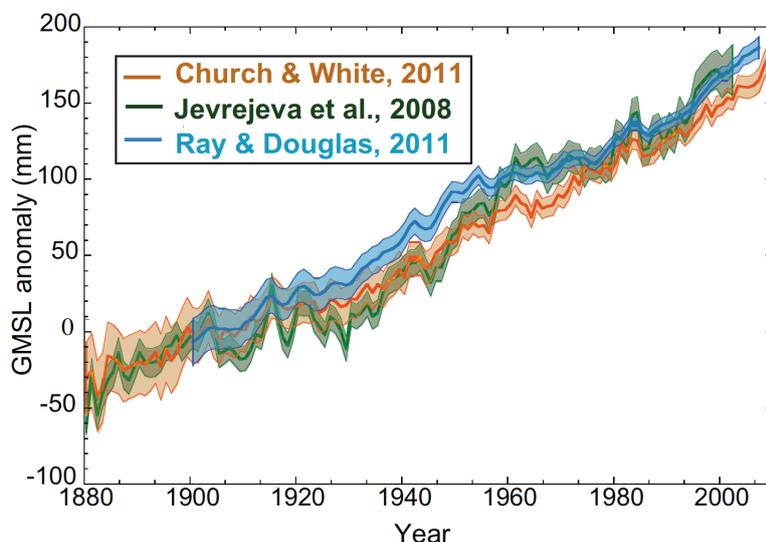


FIGURE 1.1 – Anomalie moyenne d'élévation des océans entre 1880 et 2010 (en mm) par rapport à l'élévation moyenne entre 1900 et 1905. Reconstruction à partir de marégraphes et selon trois approches différentes (Rhein *et al.*, 2013).

En effet, le réchauffement climatique actuel est à l'origine de deux processus distincts entraînant tous deux une élévation du niveau des mers. D'une part, sous l'effet de la chaleur, les océans se dilatent par expansion thermique. D'autre part, l'augmentation de température entraîne un accroissement de la fonte du stock de glace terrestre qui recouvre près de 10 % de la surface du globe. Ce stock se compose, d'une part, de glaciers de montagnes et de glaciers continentaux qui forment des systèmes glaciaires à petite échelle et, d'autre part, de calottes polaires² et glaciaires qui forment de grands plateaux glacés dont les pentes s'accroissent vers les côtes et sont constitués de nombreux glaciers. Parmi ces derniers, les deux calottes polaires actuellement présentes sur Terre, le Groenland et l'Antarctique, représentent à elles seules, plus de 90 % du stock de glace sur Terre et forment donc d'incroyables contributeurs potentiels à la montée du niveau des océans. Leur contribution actuelle semble d'ailleurs s'accroître, comme en témoigne la Figure 1.2 représentant les variations du niveau des mers observées entre 1961 et 2008 (Church *et al.*, 2011). Ces observations montrent ainsi que le Groenland a très probablement contribué à une augmentation de $0.09 \pm 0.11 \text{ mm a}^{-1}$ du niveau des mers durant la période 1992–2001 et $0.59 \pm 0.17 \text{ mm a}^{-1}$ entre 2002 et 2011. La contribution de l'Antarctique serait, quant à elle, passée de $0.08 \pm 0.19 \text{ mm a}^{-1}$ entre 1992 et 2002 à $0.4 \pm 0.2 \text{ mm a}^{-1}$ entre 2002 et 2011 (Church *et al.*, 2013). La contribution

1. Groupe d'Experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat, également connu sous le nom d'IPCC (*Intergovernmental Panel on Climate Change*)

2. calottes dont la surface est supérieure à 50 000 km² au contraire des calottes glaciaires qui sont plus petites

des deux calottes polaires combinées avoisinerait ainsi un millimètre par an, soit un tiers de l'augmentation annuelle totale actuelle d'environ 3 mm a^{-1} (Church et White, 2011; Nicholls et Cazenave, 2010).

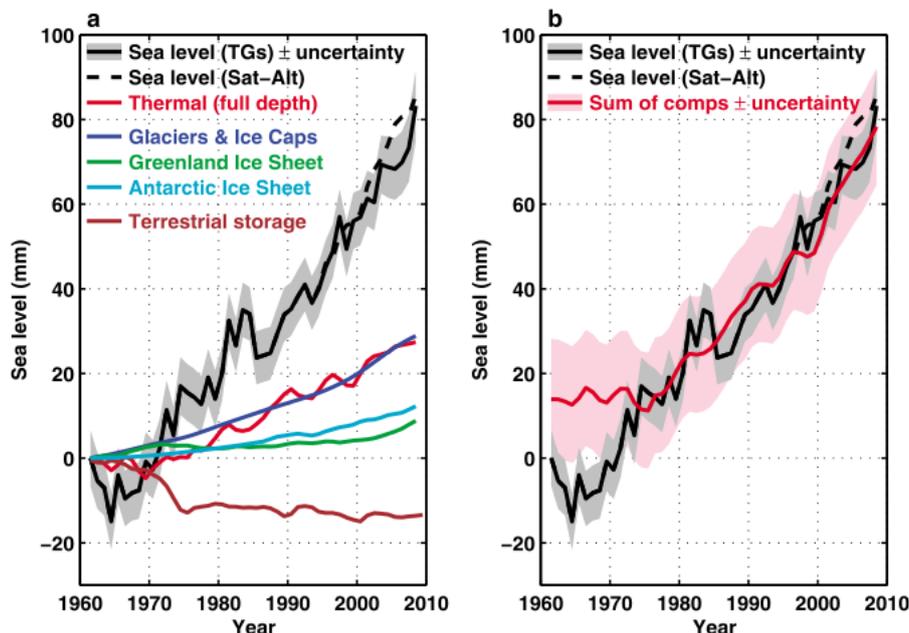


FIGURE 1.2 – Variation globale du niveau des mers entre 1961 et 2008. (a) Niveau des mers observé en utilisant les marégraphes sur les côtes et îles (le nuage grisé représente l'incertitude estimée) et les données de satellites altimétriques (lignes en pointillés). Les différentes sources sont également représentées. (b) Données observées du niveau des mers et somme de la contribution estimée des différentes sources. Les incertitudes estimées sont également représentées par les nuages gris et rose (Church *et al.*, 2011).

L'étude des calottes polaires et de leurs caractéristiques est donc une discipline très importante dans le contexte du réchauffement climatique et de ses conséquences. En effet, l'augmentation du niveau moyen des mers engendrée par la fonte des calottes peut avoir un réel impact, à moyen et long terme, sur l'homme et son environnement. Certaines études comme celle de Pfeffer *et al.* (2008) estiment ainsi qu'une hausse du niveau des mers de 80 cm d'ici la fin du siècle semble être un scénario des plus plausibles. Toujours selon Pfeffer *et al.*, cette estimation pourrait même monter à 2 m si tous les facteurs influençant celle-ci venaient à s'accélérer de manière extrême. Dans les deux cas, les calottes polaires figurent parmi les contributeurs majeurs à cette élévation des mers puisque la contribution de chacune d'elles atteindrait 20 % de l'élévation totale, voire respectivement 25 et 30 % pour le Groenland et l'Antarctique dans le cas le plus pessimiste, soit l'équivalent d'une élévation moyenne de 60 cm du niveau des océans d'ici la fin du siècle. Si cette dernière estimation semble être à relativiser, les résultats les plus modérés de Pfeffer *et al.* sont rejoints par des études plus récentes comme celle de Ritz *et al.* (2015) qui estime que la contribution de l'Antarctique à l'augmentation du niveau des mers pourrait atteindre jusqu'à 30 cm d'ici à l'horizon 2100.

Ces différents scénarios pourraient avoir un impact majeur sur notre société et de nom-

breuses études se sont penchées sur les risques et implications socioéconomiques qu'ils induisent. D'un point de vue économique, selon [Hallegatte *et al.* \(2013\)](#), une augmentation de 20 cm du niveau des mers d'ici 2050 nécessiterait le déploiement de plus de 50 milliards de dollars par an pour endiguer la montée des eaux et limiter les coûts liés aux inondations dans les 137 plus grandes villes côtières du monde. Ce coût est évidemment non-linéaire et une augmentation plus importante engendrerait des coûts encore beaucoup plus élevés. Plus important, d'un point de vue humain, la montée du niveau des mers pourrait également entraîner la destruction de nombreuses îles situées dans les océans Indien et Pacifique ainsi que les Caraïbes mais également de zones côtières comme les côtes africaines ou indiennes où la population tend à se densifier et manque de moyens d'adaptation ([Nicholls et Cazenave, 2010](#)). Au total, selon [Nicholls *et al.* \(2011\)](#), une augmentation de 2 m du niveau des mers nécessiterait le déplacement de 187 millions³ de personnes vivant proches des côtes, soit près de 2,4 % de la population mondiale d'ici la fin du siècle, si aucun moyen de défense contre l'élévation du niveau des mers n'était mis en place.

1.2 Bilan de masse des calottes

1.2.1 Comment s'écoulent les calottes ?

Les calottes polaires sont formées par la lente transformation de la neige en glace par densification. La glace se déforme alors comme un fluide visqueux sous l'effet de son propre poids et s'écoule jusqu'aux marges de la calotte. La vitesse d'écoulement de la glace varie suivant la géométrie de la surface et les conditions à l'interface avec le socle rocheux. La surface quasiment plane au centre des calottes engendre des vitesses d'écoulement très lentes qui augmentent vers les côtes. Là, la glace est essentiellement drainée dans des fjords et vallées glaciaires où les vitesses peuvent atteindre plusieurs milliers de mètres par an ([Rignot *et al.*, 2011c](#)). Ainsi, l'écoulement est assez lent au centre des calottes et s'accélère en certaines zones côtières appelées glaciers émissaires. Ces glaciers contrôlent plus de 80 % de la décharge de l'Antarctique ([Pritchard *et al.*, 2012](#)). Les Figures 1.3 et 1.4 montrent les vitesses d'écoulement de surface en Antarctique et au Groenland. On y voit particulièrement bien les glaciers émissaires où les vitesses sont considérablement plus élevées qu'au centre des calottes.

Le bilan de masse des calottes polaires est contrôlé par le bilan de masse de surface, la fonte sous glaciaire et la décharge de glace dans l'océan. Le bilan de masse de surface peut se décomposer en un terme d'accumulation qui inclut tous les processus apportant de la masse en surface (précipitations neigeuses, apport de neige transportée par le vent,) et un terme d'ablation qui inclut tous les processus qui engendrent une perte de masse en surface (fonte, évaporation, neige soufflée par le vent).

3. Ces chiffres sont corroborés par d'autres études plus récentes comme celle de [Hauer *et al.* \(2016\)](#) qui se concentre sur le territoire des États-Unis.

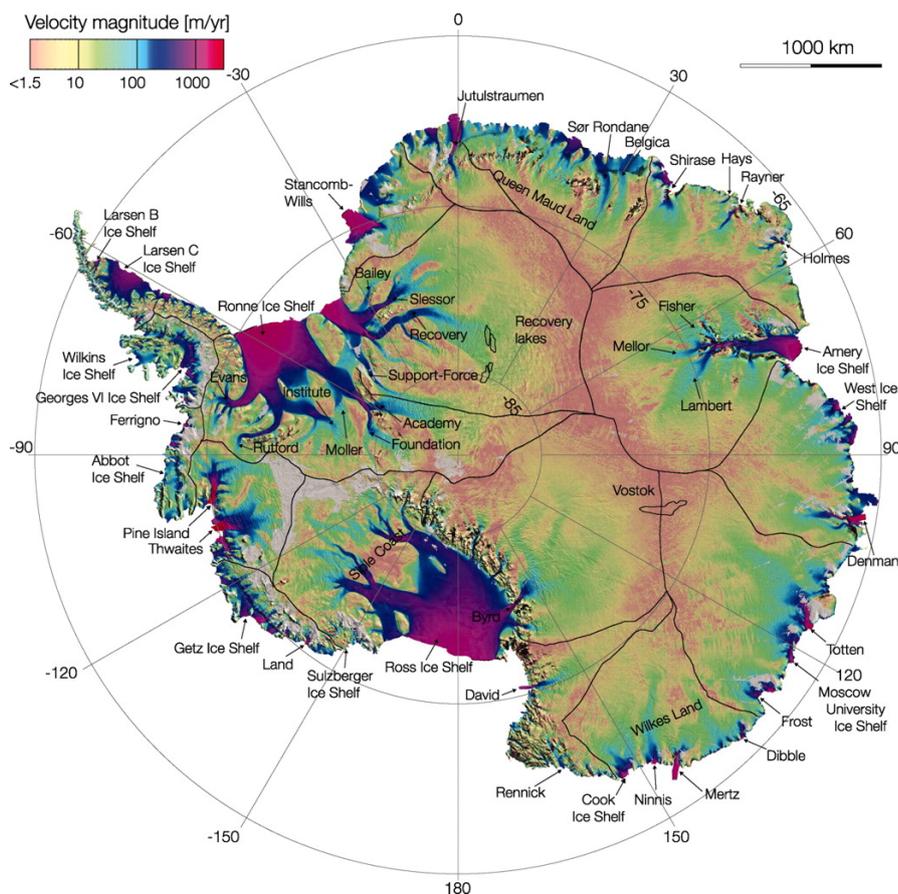


FIGURE 1.3 – Antarctique : carte de vitesses de surface obtenues à partir de données satellites d’interférométrie radar. Les lignes noires délimitent les principaux bassins versants (Rignot *et al.*, 2011c).

En Antarctique, alors que la calotte gagne de la masse par accumulation de neige en surface, la perte de masse se fait principalement via des échanges avec l’océan. La décharge de la glace vers l’océan a lieu lorsque les glaciers émissaires se mettent à flotter. Ce phénomène survient lorsque la poussée hydrostatique engendrée par l’océan surpasse le poids de la couche de glace, formant de vastes plateformes flottantes. Ces plateformes, aussi appelées *ice shelves*, entourent 45 % de la côte et peuvent s’étendre sur plusieurs centaines de kilomètres (Allison *et al.*, 2011). Celles-ci peuvent échanger de la masse avec l’océan et l’atmosphère (accumulation ou ablation) et perdent de la masse par vèlage, c’est à dire par fracturation le long de la ligne de front de la plateforme, formant ainsi des icebergs. Ces plateformes étant déjà à la flottaison, elles participent déjà à l’augmentation du niveau des mers et une variation de leur masse n’entraîne donc pas de variation du niveau des mers. Par contre, ces plateformes jouent un rôle régulateur sur l’écoulement des glaciers situés en amont et leur retrait vers l’intérieur des terres peut impacter l’écoulement de ces glaciers. En effet, nombre de ces plateformes sont enclavées dans des baies et jouent un rôle d’arc-boutant sur la partie amont par transmission des contraintes latérales engendrées par le frottement de la glace sur les bords rocheux et d’éventuelles zones de friction entre la base de la couche de glace et des hauts-fonds (Dupont

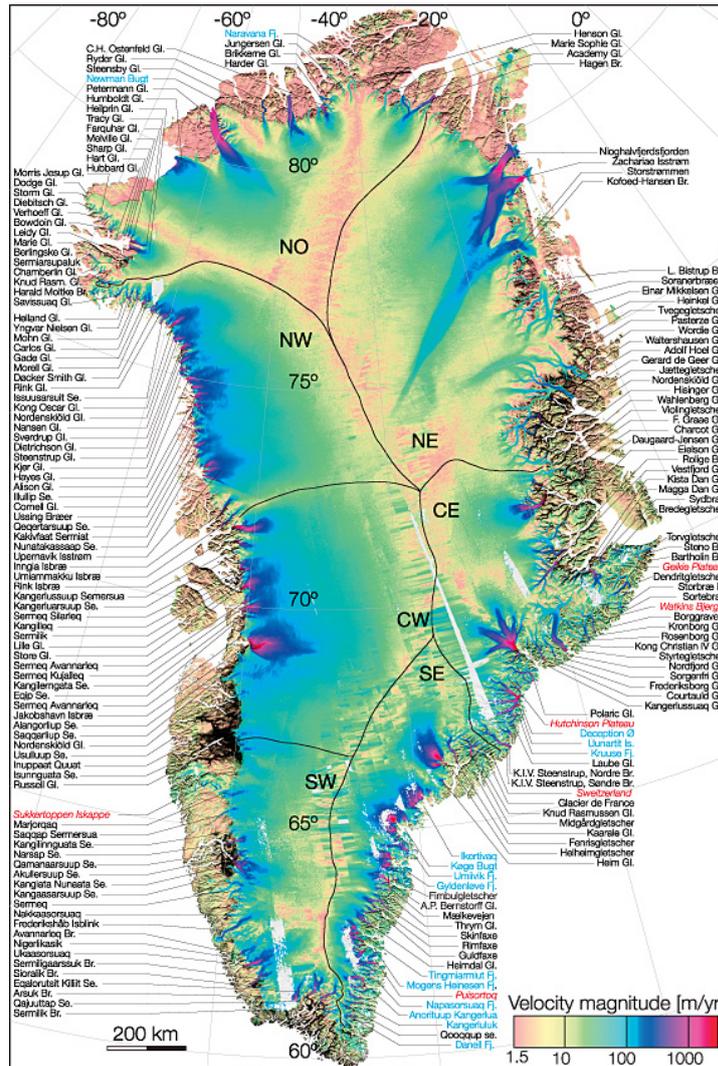


FIGURE 1.4 – Groenland : Carte de vitesses de surface obtenues à partir de données satellites d'interférométrie radar (Rignot et Mouginot, 2012).

et Alley, 2005; Gagliardini *et al.*, 2010; Gudmundsson, 2013; Fürst *et al.*, 2016). La ligne séparant ces plateformes flottantes de la glace posée sur le socle rocheux s'appelle la ligne d'échouage, elle sépare donc la glace qui contribue déjà au niveau des mers (par principe d'Archimède) de celle qui n'y contribue pas ou pas encore.

Au Groenland, la perte de masse se glace se fait aussi bien par ablation de surface que par échange avec l'océan, soit 50 % de perte en surface et 50 % de perte par échange avec l'océan (Cuffey et Paterson, 2010). Les *ice shelves* sont également beaucoup plus rares et s'étendent sur des distances beaucoup plus faibles. Aussi, au Groenland, l'essentiel du drainage de la glace vers la mer se concentre dans des fjords⁴ où la vitesse de la glace s'accroît fortement par rapport au reste de la calotte.

4. vallées en "U" formées par l'érosion de la roche engendrée par le mouvement du glacier et envahies par la mer lors du retrait du glacier.

Les différents processus discutés ci-dessus sont illustrés à la Figure 1.5 représentant une portion de calotte polaire.

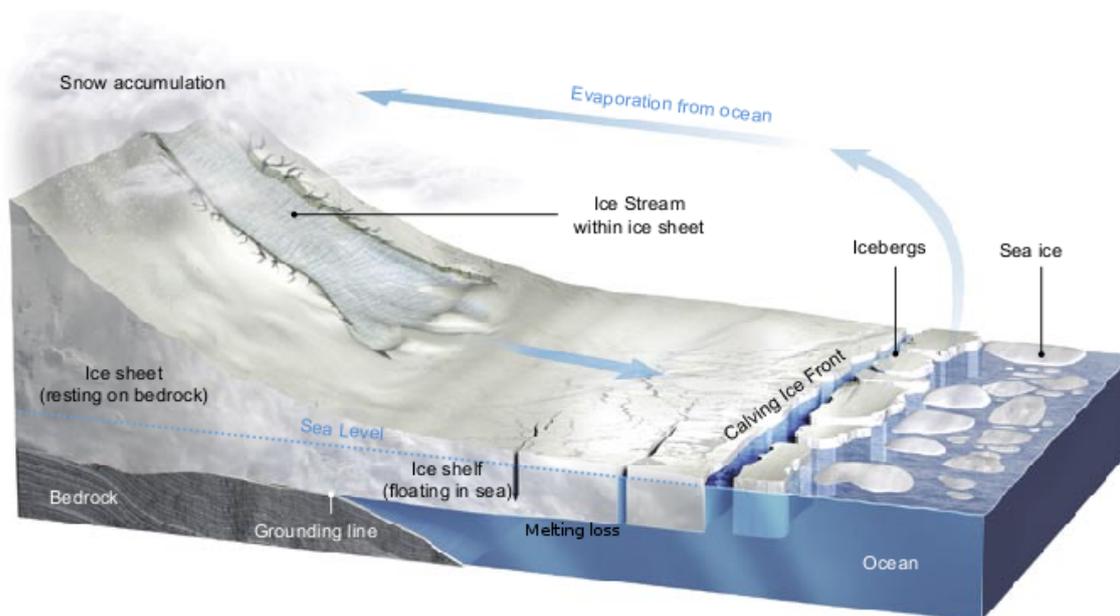


FIGURE 1.5 – Représentation schématique du système de décharge de la calotte vers l'océan via la ligne d'échouage ("*grounding line*" en anglais). Image modifiée d'après [Bell \(2008\)](#).

1.2.2 Accélération de la perte de masse des glaciers émissaires

Comme nous l'avons vu précédemment, le climat terrestre fluctue continuellement et à des échelles de temps différentes. Ces variations climatiques ont un fort impact sur les calottes glaciaires. En effet, les glaciers émissaires sont particulièrement vulnérables face aux changements climatiques. Au cours des dernières décennies, ces glaciers ont perdu de la masse par échange avec l'atmosphère ainsi qu'avec l'océan. Cette perte de masse (par fonte de surface, fonte basale et décharge de glace dans l'océan), que ne peut compenser l'accumulation neigeuse annuelle sur les calottes, a tendance à s'accroître comme le montre la Figure 1.6 tirée d'une étude de [Rignot *et al.* \(2011a\)](#). On n'y voit notamment que l'ablation de surface et la décharge de glace dans l'océan ont augmenté au Groenland entre 1992 et 2009. En Antarctique, si la tendance sur l'accumulation/ablation de surface est moins claire, on remarque également une augmentation de la décharge de glace vers l'océan au cours de la même période. D'autres études ont également mis en évidence la perte de masse des calottes polaires au cours des dernières décennies ainsi qu'un amincissement des glaciers émissaires ([Rignot *et al.*, 2008](#); [Pritchard *et al.*, 2009](#); [Flament et Rémy, 2012](#); [Shepherd *et al.*, 2012](#); [Seo *et al.*, 2015](#); [Harig et Simons, 2015, 2016](#)). En particulier, on peut constater une accélération de la fonte et du vèlage des glaciers émissaires, entraînant un retrait de la ligne d'échouage de ces derniers vers l'intérieur des terres. Le paragraphe suivant illustre ces changements avec trois cas concrets.

Sur la partie ouest de l'Antarctique et plus précisément dans la péninsule, la brusque

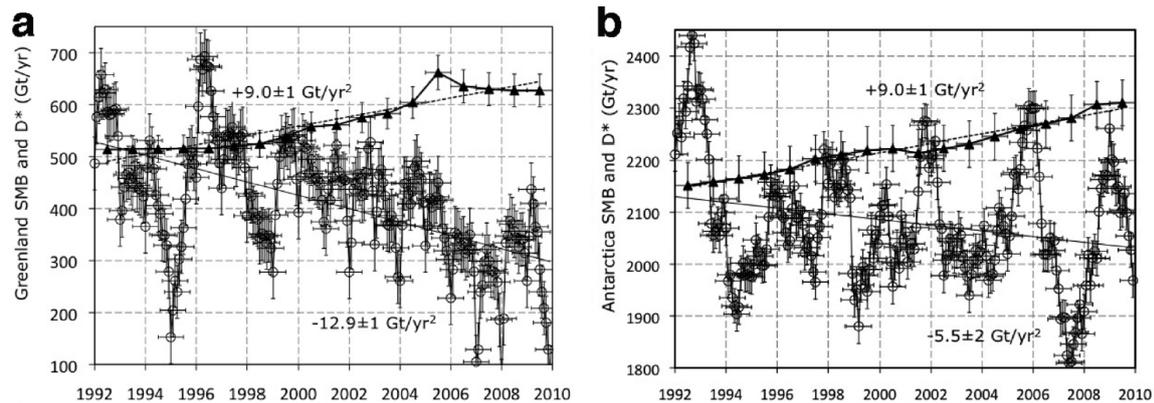


FIGURE 1.6 – Bilan de masse de surface mensuel, SMB (cercles), et décharge de glace tenant compte du retrait de la ligne d'échouage, D^* (triangles noirs), en millions de tonnes par an pour la période 1992-2009, pour (a) le Groenland et (b) l'Antarctique. Les taux d'accélération (droites en trait plein et pointillé) sont déterminés par régression linéaire des données. (Rignot *et al.*, 2011a).

rupture de la partie flottante du glacier du Larsen B en janvier 1995 a provoqué une forte augmentation des vitesses d'écoulement de la plupart de ses glaciers tributaires (Scambos *et al.*, 2004). La Figure 1.7 montre les retraits successifs du front du Larsen B ainsi que les augmentations de vitesse de ses principaux glaciers tributaires. De même, le glacier de Pine Island, toujours en Antarctique de l'Ouest, a considérablement accéléré ces dernières années et participerait actuellement à deux tiers de la perte de masse de l'Antarctique de l'Ouest (Shepherd *et al.*, 2012). Enfin, d'autres études (Joughin *et al.*, 2004, 2008, 2014) ont montré qu'au Groenland, le glacier Jakobshavn Isbrae s'est aminci substantiellement entre 1991 et 1997 et que cet amincissement, accompagné d'une forte accélération des vitesses d'écoulement, s'est accentué à partir de 1997. Le glacier Jakobshavn peut ainsi atteindre jusqu'à 17 km a^{-1} en vitesse de pointe (Joughin *et al.*, 2014). La Figure 1.8 montre par exemple le net changement entre les vitesses d'écoulement du glacier en 1992 et en 2000 (Joughin *et al.*, 2004).

1.3 Enjeux de la thèse : mieux connaître le présent pour mieux simuler l'avenir

1.3.1 Les modèles d'hier et d'aujourd'hui

Les premiers modèles numériques de calottes glaciaires ont vu le jour vers le milieu des années 70 avec les travaux de quelques pionniers comme ceux de Mahaffy (1976) qui appliqua son modèle à la calotte de glace de Barnes, située au centre de l'île de Baffin au Canada, ou encore ceux de Jenssen (1977) qui modélisa le Groenland. Dans les années 90, notamment grâce à l'amélioration constante des moyens de calcul, suivirent des travaux plus ambitieux (Huybrechts, 1990; Letréguilly *et al.*, 1991; Ritz *et al.*, 1996) modélisant l'Antarctique et le

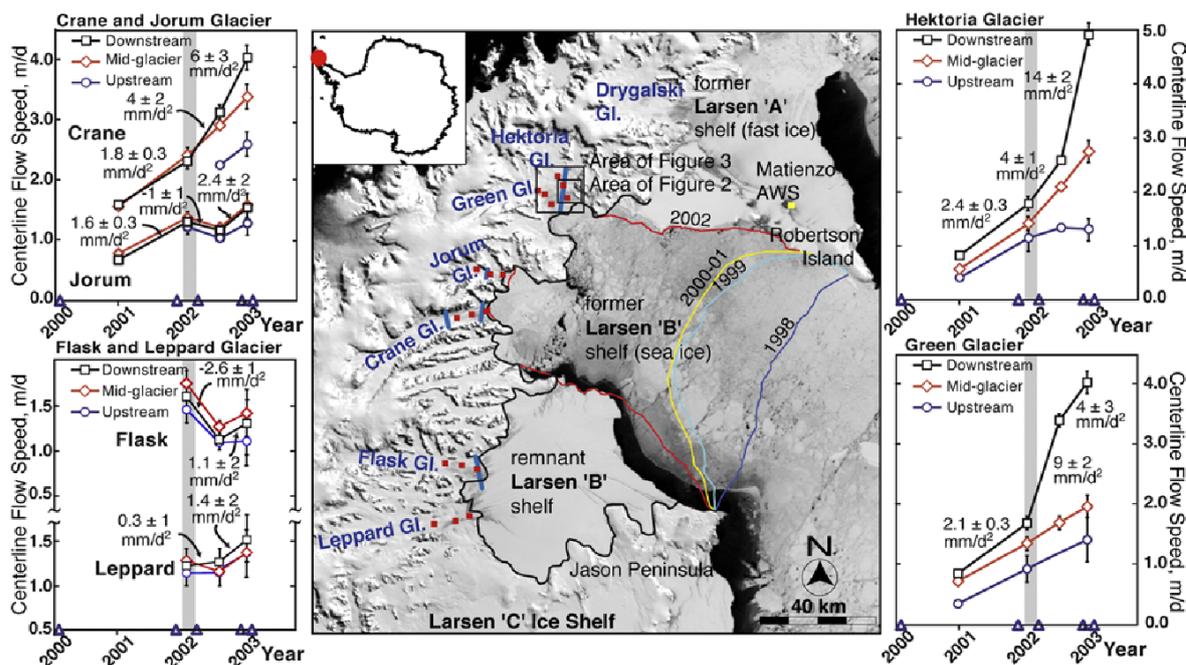


FIGURE 1.7 – Évolutions successives du front de la plateforme flottante du Larsen B et accélération de ses principaux glaciers tributaires. Les lignes de fronts pour différentes années sont tracées en couleur sur la carte centrale. Les graphiques latéraux reprennent les valeurs d'accélération (à l'amont, au milieu et à l'aval) des différents glaciers tributaires du Larsen B au fur à mesure du temps (Scambos *et al.*, 2004).

Groenland en prenant notamment en compte le couplage thermo-mécanique. La motivation essentielle au développement de ces modèles numériques résidait alors dans la reconstruction des grandes variations de l'extension des calottes polaires lors du quaternaire et la compréhension des mécanismes à l'origine de ces changements. Ces simulations remontaient alors à plusieurs dizaines ou centaines de milliers d'années avant notre ère pour arriver jusqu'à notre époque afin de simuler les grands changements paléo-climatiques et reproduire l'extension des régions recouvertes de glace par le passé.

Ces modèles devaient également être efficaces et les longues périodes simulées, ainsi que les ordinateurs moins puissants qu'à l'heure actuelle, nécessitaient d'utiliser une résolution spatiale de plusieurs dizaines de kilomètres reproduisant particulièrement mal la géométrie des glaciers émissaires (d'une dimension inférieure ou similaire à la taille de maille). De plus, cette faible résolution spatiale allait de paire avec une résolution temporelle de quelques dizaines d'années et une physique relativement simplifiée ne permettant pas de représenter et quantifier des changements dans l'extension et la dynamique des calottes à l'échelle du siècle. Ces modèles ne reproduisaient donc que partiellement la géométrie et les vitesses d'écoulement actuelles des calottes et n'étaient souvent pas capables de reproduire des événements brefs tels que les accélérations de perte de masse observées au cours des dernières décennies ou la dynamique de la ligne d'échouage.

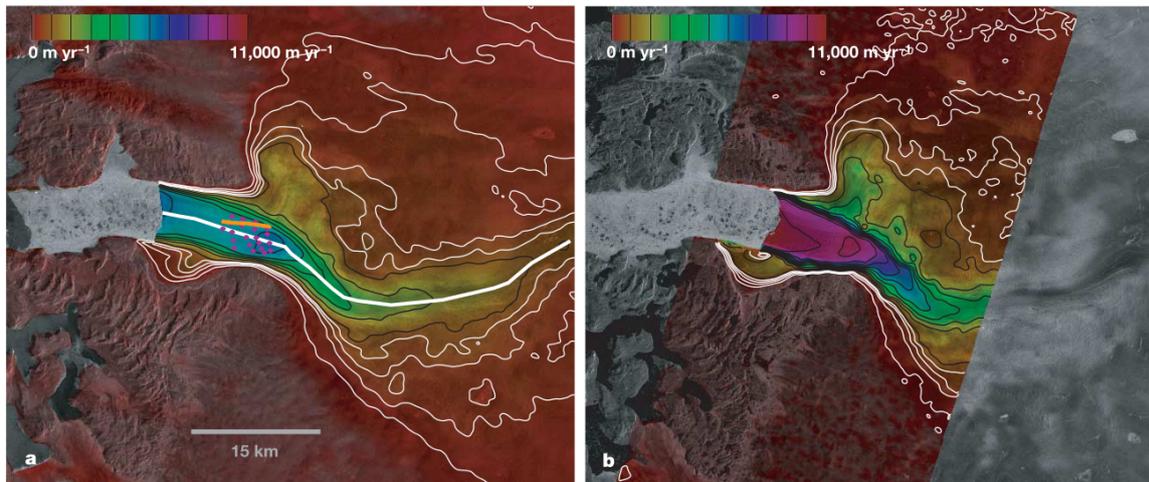


FIGURE 1.8 – Vitesses d'écoulement du glacier de Jakobshavn en 1992 (a) et 2000 (b). Les lignes noires sont des iso-contours de vitesse tous les 1000 m a^{-1} et les lignes blanches tous les 200 m a^{-1} (Joughin *et al.*, 2004).

Le développement de nouveaux modèles à plus haute résolution et prenant en compte des processus physiques plus complexes était donc nécessaire pour simuler la perte de masse actuelle des calottes polaires et leur évolution au cours du siècle à venir (Gillet-Chaulet et Durand, 2010). Une nouvelle génération de modèles d'écoulement de calottes est alors apparue au cours de la dernière décennie (par exemple Larour *et al.* (2012); Gagliardini *et al.* (2013)). De nombreux acteurs du monde de la modélisation d'écoulement glaciaire ont ainsi tenté de reproduire au mieux les mécanismes responsables de l'accélération des glaciers émissaires, comme en témoignent les travaux menés dans le cadre de projets scientifiques tels que *SeaRISE*⁵ (Nowicki *et al.*, 2013a,b) ou encore *ice2sea* (Gillet-Chaulet *et al.*, 2012; Shannon *et al.*, 2013; Edwards *et al.*, 2014).

1.3.2 Les modèles et leurs incertitudes

La mise en place d'expériences d'inter-comparaison a également permis de tester la validité des différents modèles proposés par la communauté. L'expérience ISMIP⁶ (Pattyn *et al.*, 2008), par exemple, avait pour objectif de tester la capacité des différents modèles d'écoulement de glace existants (basés sur des équations d'écoulement plus ou moins complexes) à reproduire correctement les champs de vitesses et de contraintes pour une géométrie de glacier donnée. Dans le même esprit, les expériences MISMIP⁷ (Pattyn *et al.*, 2012) et MISMIP3D⁸ (Pattyn *et al.*, 2013) ont permis de tester la capacité des modèles à reproduire la dynamique de la ligne d'échouage. Ces expériences ont ainsi aidé à améliorer les modèles, analyser leur aptitude à reproduire ces processus et mieux quantifier l'incertitude liée aux

5. Sea-level Response to Ice Sheet Evolution

6. Ice Sheet Model Intercomparison Project

7. Marine Ice Sheet Model Intercomparison Project

8. Marine Ice Sheet Model Intercomparison Project for planview models (3D)

projections réalisées avec ceux-ci.

Outre la sensibilité au modèle utilisé, ces projections sont assez sensibles à l'état initial du modèle qui est à l'origine d'une grande partie de l'incertitude sur la réponse du modèle (Aðalgeirsdóttir *et al.*, 2014). Il est donc nécessaire d'avoir un état initial aussi proche que possible de la réalité pour obtenir des projections fiables et réduire leur incertitude. En ce sens, l'arrivée de la télédétection vers la fin des années 90 et la multiplication des observations est une aubaine pour mieux calibrer les modèles et reproduire au mieux l'état actuel du Groenland et de l'Antarctique ou d'un glacier.

Malheureusement, ces observations restent peu nombreuses dans ces régions reculées, aussi bien spatialement que temporellement et sont entachées d'erreurs parfois conséquentes, si bien que certains paramètres sont mal contraints voire parfois inconnus. C'est par exemple le cas du frottement entre le socle rocheux et la glace qui n'est pas directement mesurable mais qui joue un rôle majeur sur l'écoulement de la glace. Les méthodes inverses permettent de pallier ce problème en utilisant des données plus facilement mesurables comme les vitesses d'écoulement en surface. Le principe consiste alors à retrouver les valeurs de frottement qui correspondent au mieux à ces vitesses de surface (Morlighem *et al.*, 2010; Jay-Allemand *et al.*, 2011; Schäfer *et al.*, 2012; Gillet-Chaulet *et al.*, 2012). Ces méthodes ont fait leurs preuves et sont capables de reconstruire un frottement engendrant des vitesses assez fidèles aux observations à un instant donné et pour une géométrie donnée. Néanmoins, les incertitudes restantes sur les autres paramètres du modèle engendrent des divergences de flux de glace non-physiques (Seroussi *et al.*, 2011) qui se traduisent par des variations de surface excessivement élevées lorsqu'on laisse évoluer dans le temps les modèles selon leur propre physique. Ce phénomène est parfaitement illustré par Gillet-Chaulet *et al.* (2012) dans leur étude sur la contribution du Groenland à l'élévation du niveau des mers où l'on remarque bien les variations anormales de surface (plusieurs dizaines voire centaines de mètres par an) lorsqu'on laisse évoluer la surface après l'étape d'inversion du frottement. Évidemment, ces anomalies de divergence de flux sont transitoires et s'estompent lorsqu'on laisse évoluer le modèle suffisamment longtemps, comme le montre la Figure 1.9. Une solution simple consiste donc à laisser évoluer le modèle jusqu'à atteindre des taux de variation de surface physiquement acceptables avant de réaliser une projection. C'est ce qu'on appelle la relaxation. Celle-ci se fait néanmoins au détriment de la précision de l'altitude et des vitesses de surface modélisées qui peuvent s'écarter significativement des observations durant cette phase.

Parmi les paramètres les plus mal contraints après le frottement basal, on retrouve la topographie basale qui dérive de mesures d'épaisseur de glace, généralement obtenues par observations radars aéroportées. Ces mesures sont souvent trop peu nombreuses en raison du coût et des difficultés de mise en place des campagnes de terrain. Les lignes de vols sont donc souvent distantes de plusieurs dizaines de kilomètres, distances bien supérieures à la résolution de maille nécessaire pour modéliser la dynamique des glaciers émissaires (Durand *et al.*, 2011). Les mesures radars sont également associées à de fortes incertitudes. En effet, le

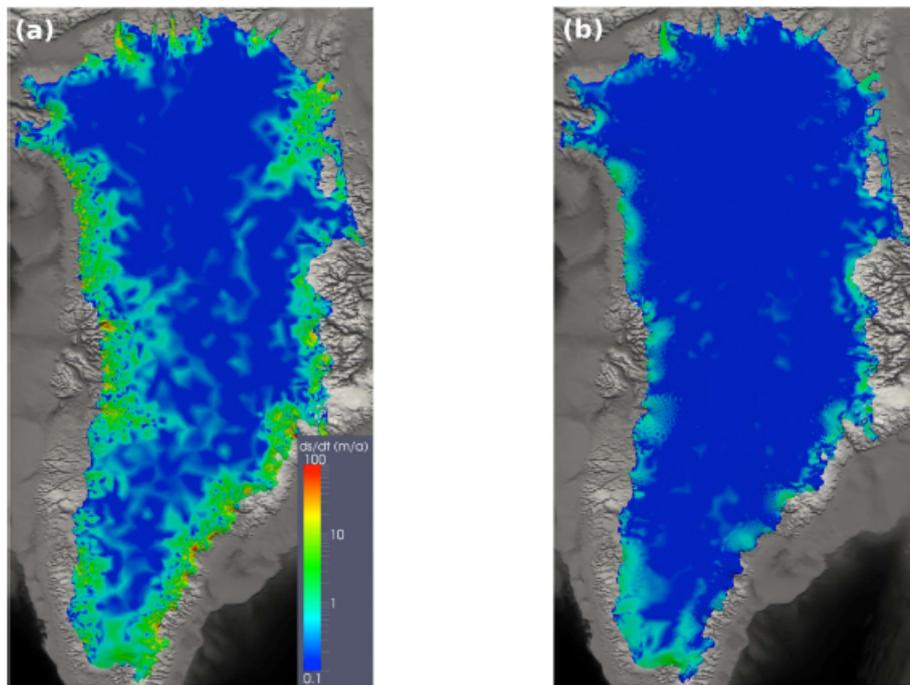


FIGURE 1.9 – Taux de variation de la surface libre du Groenland suite à l'inversion du frottement basal après (a) 1 an et (b) 50 ans de relaxation (Gillet-Chaulet *et al.*, 2012).

signal radar s'atténue au fur et à mesure qu'il pénètre dans la glace, phénomène accentué par la présence éventuelle d'eau incluse dans la glace ou en surface tandis que des parasites de surface comme des crevasses ou des échos ambigus dans les vallées enclavées peuvent masquer le signal basal (Jezek *et al.*, 2013). De plus, les modèles numériques standards d'altitude de topographie basale pour l'Antarctique (Fretwell *et al.*, 2013) et le Groenland (Bamber *et al.*, 2013) sont souvent produits par interpolation et sont peu adaptés pour extrapoler la solution dans les zones dépourvues d'observations (Morlighem *et al.*, 2014). Ces modèles numériques de terrain (MNT) de terrain affichent d'ailleurs des incertitudes moyennes allant de quelques dizaines de mètres à quelques centaines de mètres selon la distance aux observations et la variabilité topographique locale. Ces incertitudes sont, par exemple, dix fois plus élevées (voire plus) que celles observées sur l'élévation de la surface (Fretwell *et al.*, 2013). La Figure 1.10, montre les incertitudes associées aux deux grands modèles numériques de socle rocheux pour le Groenland et l'Antarctique. Les zones de plus faibles incertitudes, correspondant aux lignes de vol et leurs alentours, y sont particulièrement visibles.

Ces incertitudes sur la géométrie basale peuvent également affecter la dynamique des glaciers émissaires et, par extension, le bilan de masse des calottes. Par exemple, Durand *et al.* (2011) ont montré qu'une incertitude dans la géométrie basale à proximité de la ligne d'échouage peut fortement influencer la dynamique de celle-ci, jouant notamment un rôle tantôt stabilisateur tantôt déstabilisateur sur la ligne d'échouage selon la forme du socle. Dans le même esprit, Sun *et al.* (2014) ont étudié la sensibilité de la dynamique de certains *ice shelves* en Antarctique en fonction de l'incertitude sur la géométrie du socle rocheux et

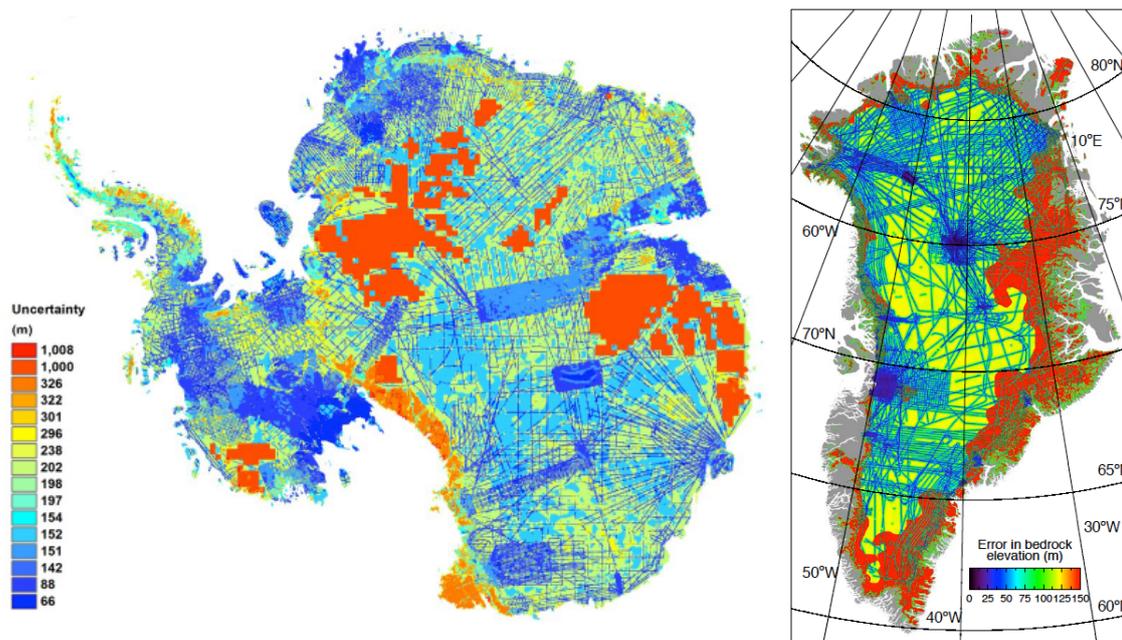


FIGURE 1.10 – Incertitude associée à l’élévation du socle rocheux en (a) Antarctique (Fretwell *et al.*, 2013) et au (b) Groenland (Bamber *et al.*, 2013)

ont montré une influence significative sur le retrait de la ligne d’échouage dans certaines régions. En outre, un socle rocheux avec une pente rétrograde (remontant par rapport au sens de l’écoulement) engendre très souvent une instabilité de la ligne d’échouage. En effet, lorsque une ligne d’échouage d’un glacier à l’équilibre (flux à travers la ligne d’échouage compensé par l’accumulation en amont) est située dans une zone d’inflexion du socle rocheux, un léger retrait vers la zone rétrograde engendre un épaissement de la colonne de glace à la ligne d’échouage. Cet épaissement engendre à son tour un accroissement du flux à la ligne d’échouage (Schoof, 2007). Cette dernière est alors forcée de reculer. L’épaisseur de glace augmentant encore au fur et à mesure qu’on descend la pente rocheuse, la ligne d’échouage reculera jusqu’à atteindre un nouvel équilibre nécessairement situé sur une pente descendante (dans le sens de l’écoulement). Notons toutefois que l’effet arc-boutant des parois latérales des *ice shelves* enclavés, dont nous avons discuté à la section 1.2.1, peut avoir un effet stabilisateur sur la ligne d’échouage malgré la présence d’une pente rétrograde (Gudmundsson, 2013).

1.3.3 Objectifs et grandes lignes de cette thèse

Les incertitudes liées à la topographie basale influencent donc fortement la réponse des modèles. L’amélioration de la connaissance des conditions basales des glaciers émissaires est dès lors primordiale pour réduire l’incertitude liée aux projections de l’augmentation future du niveau des mers. Cette amélioration peut évidemment passer par une multiplication des campagnes d’observations sur les glaciers émissaires pour accroître la densité des lignes de vol. Néanmoins, comme nous l’avons vu, ces campagnes sont coûteuses et difficiles à mettre en

place. Une autre solution est d’utiliser la théorie des méthodes inverses et plus généralement de l’assimilation de données, à l’instar de ce qui se fait pour le frottement, pour mieux contraindre la géométrie basale en fonction d’observations de surface obtenues par images satellites ou aéroportées.

Dans ce cadre, **cette thèse se propose de développer et appliquer des méthodes d’inversion et d’assimilation de données permettant de reconstruire simultanément la topographie et le frottement à la base des glaciers tout en satisfaisant à la fois les observations disponibles et la physique du modèle d’écoulement utilisé.**

Le chapitre 2 présente un rapide état des lieux des observations généralement utilisées pour la modélisation des calottes polaires ainsi que les incertitudes liées à chacune d’elles.

Le chapitre 3 de ce manuscrit présente les grands principes à l’origine du mouvement et de l’écoulement des glaciers, décrivant ainsi les diverses théories apparues au cours du temps. Suit une présentation des modèles mathématiques habituellement utilisés en modélisation glaciaires puis une brève présentation de la méthode des éléments finis permettant de traduire ces équations analytiques de manière numérique ainsi que du modèle d’écoulement *Elmer/Ice* utilisé dans cette thèse et basé sur cette méthode.

Le chapitre 4 fait l’état de l’art des méthodes d’inversion et des méthodes d’assimilation de données sur lesquelles se basent les glaciologues pour reconstruire les paramètres les plus mal contraints des modèles d’écoulements. Une attention plus particulière sera accordée aux méthodes sur lesquelles se basent les travaux de thèses présentés dans les chapitres 5 et 6.

Le chapitre 5 présente les méthodes d’inversion implémentées dans le logiciel *Elmer/Ice* au cours de cette thèse permettant de reconstruire à la fois le frottement et la topographie basale d’un glacier. Cette présentation théorique est suivie d’une application numérique basée sur une expérience jumelle construite à partir d’une ligne de flux passant par le fjord du glacier du *Jakobshavn Isbrae* à l’ouest du Groenland et permettant de valider les méthodes implémentées. Cette présentation théorique ainsi que cette application font l’objet d’un article paru en 2016 dans le journal *Geoscientific Model Development* sous le nom de *Comparison of adjoint and nudging methods to initialise ice sheet model basal conditions* (Mosbeux *et al.*, 2016).

Le dernier chapitre s’attache à la reconstruction des conditions basales de la *Terre de Wilkes* en Antarctique de l’Ouest à partir des algorithmes présentés au chapitre 5. Cette étude permet notamment d’étudier l’efficacité de ces algorithmes dans un cas réel ainsi que l’impact que peut avoir une telle reconstruction lorsqu’elle est utilisée pour initialiser une simulation pronostique.

Chapitre 2

Acquisition de données

Sommaire

2.1	Altitude de surface	25
2.2	Variations d'épaisseur	27
2.3	Vitesses d'écoulement de surface	28
2.4	Épaisseur de glace et topographie basale	29
2.5	Accumulation et bilan de masse de surface	30
2.6	Conclusion	31

A la fin du chapitre précédent, nous avons discuté de l'incertitude liée aux modèles d'écoulement et aux projections d'évolution des calottes polaires réalisées avec ceux-ci. L'objectif de ce chapitre est de présenter les données disponibles pour alimenter les modèles ainsi que leurs incertitudes.

2.1 Altitude de surface

Les mesures de topographie de surface des calottes polaires sont généralement obtenues par satellite. On peut distinguer deux processus de mesure d'altitude de surface des calottes polaires : l'altimétrie radar et l'altimétrie laser qui possèdent chacune leurs avantages et inconvénients.

L'altimétrie radar est caractérisée par une empreinte au sol relativement large, créée par l'écartement de l'onde radar qui grandit avec la distance parcourue entre le satellite et le sol. Celle-ci permet donc de couvrir des zones assez larges à chaque passage du satellite mais au détriment de la résolution verticale. Les satellites ERS-1, ERS-2 (*European Remote Sensing-(1,2)*) dont le premier fût lancé en 1991 et Envisat (*Environmental satellite*) lancés

par l'ESA¹ embarquent notamment ce type d'instrument.

L'altimétrie laser ne présente pas ce problème d'écartement et possède ainsi une meilleure précision verticale mais une moins bonne résolution spatiale. Parmi les satellites embarquant ce type d'instrument, on citera ICESat (*Ice, Cloud, and land Elevation Satellite*) lancé par la NASA², qui fut opérationnel de 2003 à 2010 et dont le successeur ICESat-2 devrait être lancé en 2017.

Ces différentes mesures peuvent être traitées et combinées afin de créer des MNT qui pourront alors être utilisés dans les modèles d'écoulement. Griggs et Bamber (2009) proposent ainsi un MNT de la surface topographique de l'Antarctique avec une résolution kilométrique. Les erreurs d'altitude associées à ce modèle sont estimées entre 1 et 2 m pour les régions les plus plates comme sur les *ice shelves* ou au centre de la calotte mais peuvent rapidement atteindre des valeurs de 15 à 40 m (voire plus) lorsque les pentes s'accroissent comme près des côtes ou dans les régions montagneuses.

Pour le Groenland, le MNT de surface le plus utilisé possède également une résolution kilométrique mais date de plus de 10 ans (Bamber *et al.*, 2001) et affiche des erreurs rms estimées à quelques mètres (± 7 m) sur une grande partie de la calotte mais pouvant atteindre quelques centaines de mètres sur les côtes. Scambos et Haran (2002) ont proposé une version améliorée de ce modèle en y ajoutant une série d'images à plus haute résolution, permettant de diminuer sensiblement les erreurs dans certaines zones. En outre, Howat *et al.* (2014) ont montré que les erreurs associées au modèle de surface de Bamber *et al.* (2001) étaient sous estimées et seraient en réalité 3 fois plus importantes (± 21.8 m). Howat *et al.* (2014) ont ainsi récemment proposé un MNT de surface du Groenland beaucoup plus précis, estimant l'erreur rms à (± 9.1 m). Ce modèle affiche également une résolution horizontale bien meilleure de 30 m.

Ces modèles numériques de surface sont généralement reconstruits à partir d'images obtenues à différentes époques. Le MNT de Howat *et al.* (2014), par exemple, se base sur des images satellites acquises entre 1999 et 2002 à moindre résolution pour obtenir un premier modèle de surface qui est ensuite amélioré avec des observations à haute résolution acquises via altimétrie laser entre 2003 et 2009. Le modèle de surface est finalement une approximation de l'élévation moyenne sur la période 2003-2009. Nous ne disposons donc pas d'une représentation de l'état de la surface à un moment précis. Or, certaines zones d'écoulement rapide présentent des changements d'altitude de surface de plusieurs mètres par an qui affectent sensiblement la géométrie lorsqu'on les cumule sur plusieurs années, ce qui ajoute une incertitude supplémentaire à l'état initial des modèles. Notons toutefois qu'une correction est parfois appliquée afin de tenir compte du caractère non contemporain des données utilisées. C'est par exemple le cas du MNT de surface sur l'Antarctique de Griggs et Bamber (2009) qui est construite à partir d'observations ICESat obtenues entre 2003 et 2008 et de données

1. European Spatial Agency

2. National Aeronautics and Space Administration

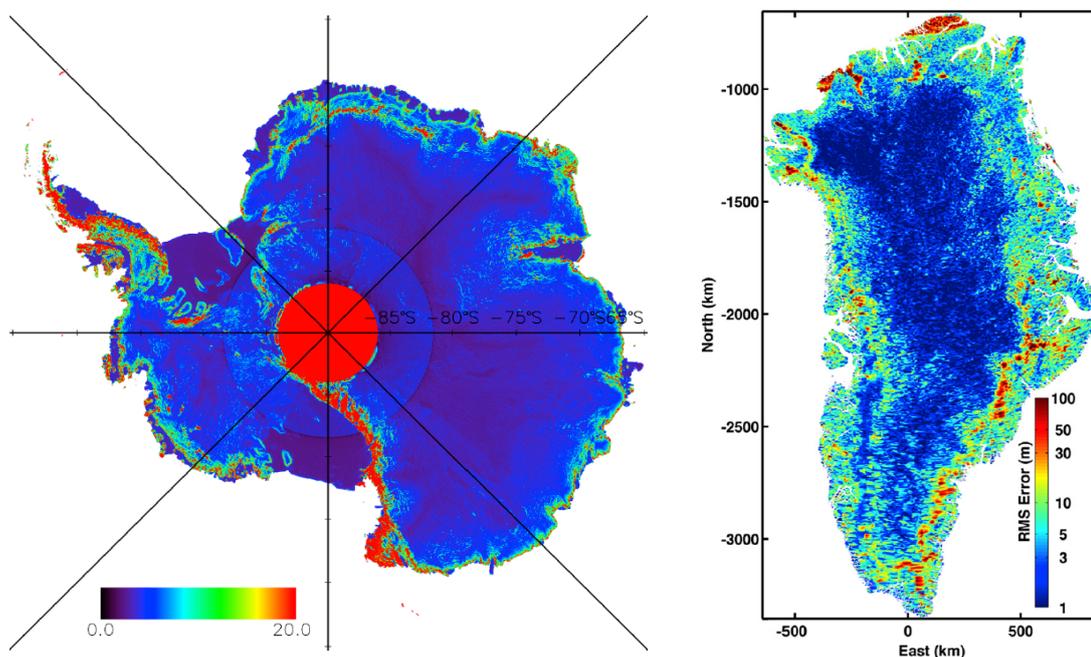


FIGURE 2.1 – Estimation de l'incertitude sur la surface topographique pour les MNT de l'Antarctique (à gauche, Griggs et Bamber (2009)) et du Groenland (à droite, Howat *et al.* (2014)).

radar ERS de 1994-1995 auxquelles est appliquée une correction à partir des tendances de variations de surface estimées par Davis *et al.* (2005) sur la période 1992-2003 (Bamber *et al.*, 2009).

2.2 Variations d'épaisseur

Les variations annuelles d'épaisseur de glace ne sont pas mesurées en elles-mêmes mais peuvent être déduites de séries temporelles de mesures d'altitude de surface. Les travaux de Pritchard *et al.* (2009) ont ainsi permis de quantifier les variations annuelles de surface (et par extension d'épaisseur de glace) de l'Antarctique et du Groenland à partir de mesures récoltées par IceSat entre 2003 et 2007. Dans le même esprit, Flament et Rémy (2012) ont utilisé les mesures récoltées sur l'Antarctique entre 2002 et 2010 par Envisat dont la couverture spatiale et temporelle est plus importante (cf. Figure 2.2).

Cependant, l'étendue relativement restreinte des séries temporelles utilisées dans les deux études (5 et 8 ans) est parfois trop faible pour compenser les variations inter-annuelles d'accumulation de neige et du névé liées aux conditions météorologiques. Dans certaines zones, ces dernières dominent donc les variations d'altitude de surface observées par rapport à celles liées à un changement de la dynamique d'écoulement. Notons également que l'incertitude liée aux mesures est parfois importante puisque le rapport signal sur bruit est souvent supérieur

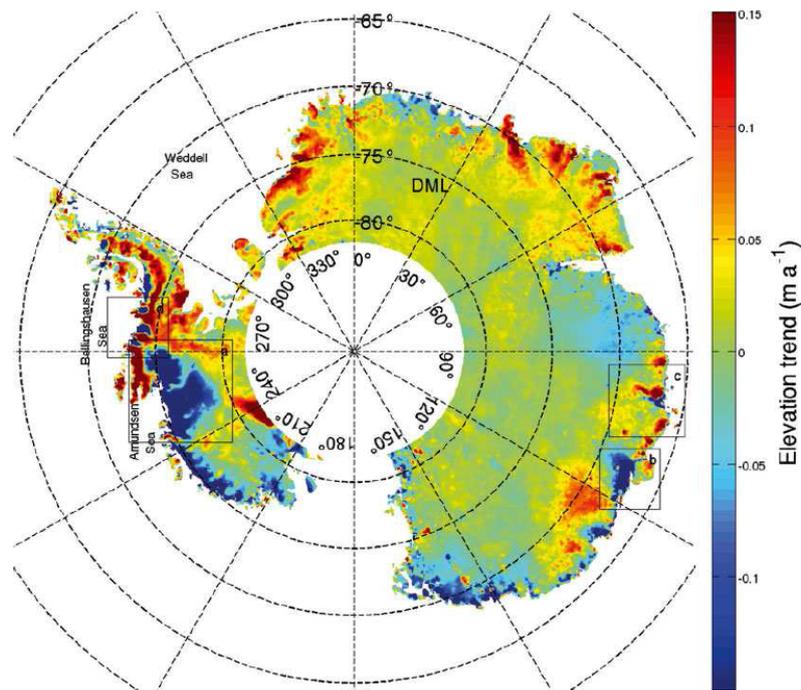


FIGURE 2.2 – Variation annuelle d'épaisseur de glace en Antarctique pour la période 2002-2010 (Flament et Rémy, 2012).

à 1 (Flament et Rémy, 2012).

2.3 Vitesses d'écoulement de surface

Les vitesses d'écoulement de la glace en surface ont d'abord été mesurées par imagerie optique (Bindschadler et Scambos, 1991). L'utilisation de l'interférométrie radar a cependant rapidement supplanté cette première méthode (Goldstein et Engelhardt, 1993).

En effet, les images radar peuvent être traitées pour en déduire le champ de déplacement horizontal (et vertical) de la surface des calottes et donc les vitesses d'écoulement de la glace en surface. De manière simplifiée, le principe consiste à utiliser deux images de la même zone à des instants différents qui, une fois traitées, permettent de calculer les déplacements ayant eu lieu entre la prise des deux images (Goldstein et Engelhardt, 1993).

Les dernières cartes synthétisant ces données à l'échelle des calottes polaires sont celles de Rignot *et al.* (2011c) pour l'Antarctique et Rignot et Mouginot (2012) pour le Groenland. Celles-ci sont présentées sur les Figures 1.3 et 1.4 aux pages 15 et 16 dans le chapitre introductif. La précision de ces cartes varie notamment en fonction des régions, du capteur ayant acquis l'image dans cette zone, du mode de traitement et du moment de l'acquisition. Ces sources d'imprécision engendrent des erreurs sur la norme des vitesses et sur leur direction. L'erreur estimée sur la norme varie de 1 m a^{-1} à plus de 17 m a^{-1} tandis que l'erreur sur la

direction varie entre 0.5 degrés pour les régions les plus rapides et 20 degrés, voire plus, dans les régions les plus lentes (Rignot *et al.*, 2011c; Rignot et Mouginot, 2012).

Enfin, notons encore une fois que les vitesses d'écoulement retranscrites d'une zone à l'autre ne sont pas nécessairement représentatives d'une même année. La période d'acquisition des données utilisées pour créer les cartes de vitesses de Rignot *et al.* (2011c) et Rignot et Mouginot (2012) reste toutefois beaucoup plus faible que pour les MNT de surface puisque la majorité de celles-ci sont issues de mesures acquises entre 2007 et 2009.

2.4 Épaisseur de glace et topographie basale

Les observations d'épaisseur de glace et celles de topographie basale sont intimement liées puisque les secondes sont déduites des premières et d'un MNT de surface. Celles-ci sont principalement obtenues à partir de mesures radar aéroportées mais également par gravimétrie et par tomographie sismique (Smith *et al.*, 2007).

Les premiers MNT d'épaisseur de glace et de topographie basale à l'échelle des calottes polaires datent du début des années 2000 avec la formation du consortium *BEDMAP* (Bamber *et al.*, 2001; Lythe et Vaughan, 2001). Ces modèles intégraient l'ensemble des mesures d'épaisseur de glace collectées depuis les années 50 sur les deux calottes polaires. Ces mesures restaient cependant éparses et leur précision ainsi que celle des GPS permettant de les localiser pouvaient avoir un impact conséquent sur la fiabilité des modèles produits (Lythe et Vaughan, 2001).

Depuis, de nombreuses campagnes de mesures, plus précises et surtout bien mieux localisées (à quelques mètres près) grâce aux GPS actuels, ont été menées. On citera l'opération *IceBridge* menée par la NASA qui a débuté en 2009 et embarque des instruments radars capables de mesurer l'épaisseur de glace. Ces nombreuses mesures ont ainsi été ajoutées aux précédentes afin d'obtenir des MNT plus fiables comme ceux proposés par Le Brocq *et al.* (2010) ou Timmermann *et al.* (2010). Les derniers modèles en date, les plus utilisés actuellement dans les modèles de calottes polaires, sont ceux de Bamber *et al.* (2013) pour le Groenland et Fretwell *et al.* (2013) pour l'Antarctique (souvent présenté comme *Bedmap2*, successeur de *Bedmap*). Ces derniers, représentés à la Figure 2.3, sont bien plus précis que leurs aînés puisque le nombre de données intégrées est 10 à 20 fois supérieur aux modèles des années 2000.

Malgré ces améliorations significatives l'épaisseur et la géométrie basale des calottes polaires restent parmi les paramètres les plus mal-contraints des modèles d'écoulement. En effet, si ces MNT se présentent sous la forme d'une grille régulière avec une résolution de 1 km, de nombreuses zones restent peu couvertes avec des observations parfois éloignées de plusieurs dizaines de kilomètres. Par exemple, seulement 36 % de la carte de l'Antarctique possèdent au moins un point de mesure tous les 5 km tandis que 17 % contiennent moins

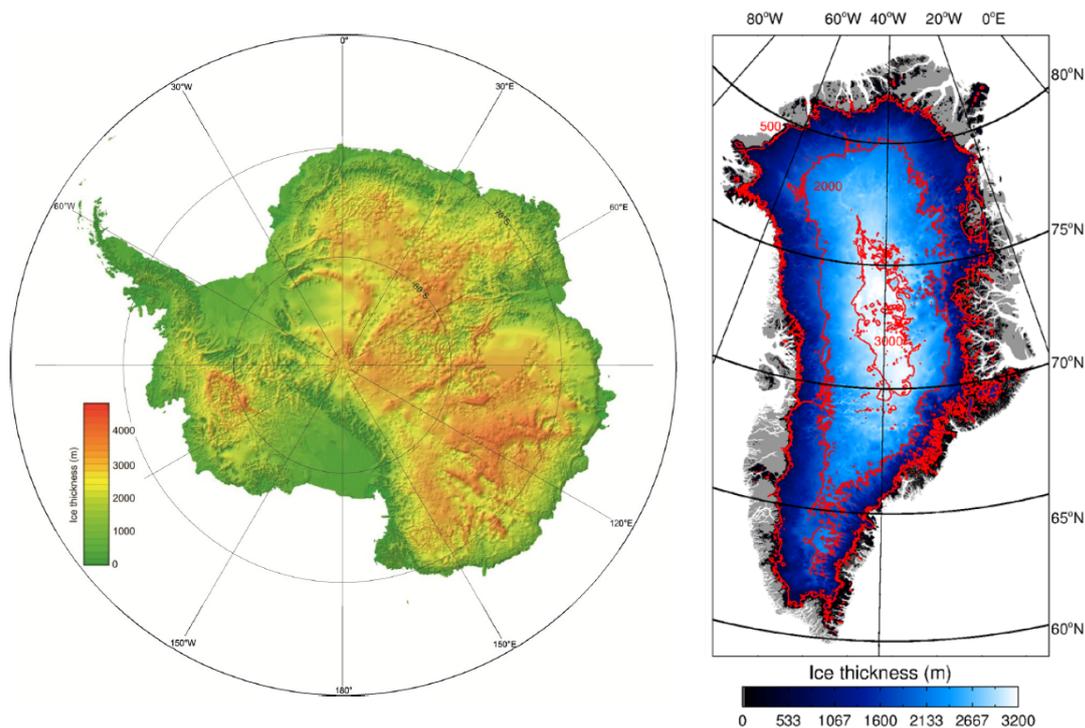


FIGURE 2.3 – Dernières cartes d'épaisseur produites pour l'Antarctique (à gauche, [Fretwell et al. \(2013\)](#)) et le Groenland (à droite, [Bamber et al. \(2013\)](#)).

d'un point tous les 20 km. L'incertitude sur la carte restituée atteint rapidement plusieurs centaines de mètres lorsqu'on s'écarte des observations, où l'erreur d'observation est estimée à quelques dizaines de mètres. La Figure 1.10 déjà présentée en introduction à la page 23 montre les cartes d'incertitudes pour le Groenland et l'Antarctique avec des valeurs allant de quelques dizaines à plusieurs centaines de mètres.

2.5 Accumulation et bilan de masse de surface

Les cartes de bilan de masse de surface sont souvent issues de modèles numériques atmosphériques. Certaines se basent néanmoins sur l'interpolation de mesures *in situ* relativement peu nombreuses et parfois entachées d'erreurs importantes. Ces dernières, comme celle de [Arthern et al. \(2006\)](#), diffèrent alors significativement de celles produites par les modèles. [Genthon et al. \(2009\)](#) ont cependant montré que cette différence pouvait être fortement diminuée en ne comparant les modèles qu'aux données *in situ* les plus fiables sélectionnées suite à un contrôle de qualité par [Magand et al. \(2007\)](#). Les dernières cartes de bilan de masse de surface de l'Antarctique issues de différents modèles ([Lenaerts et al., 2012](#); [Agosta et al., 2013](#)) sont ainsi beaucoup plus en accord avec les données *in situ* sélectionnées.

2.6 Conclusion

Nous avons vu que de nombreuses observations sont disponibles pour la modélisation des calottes polaires. Celles-ci peuvent être utilisées par les modèles d'écoulement présentés au chapitre suivant afin d'initialiser ces derniers et les faire correspondre au mieux à l'état actuel observé des calottes.

Ces champs d'observations sont néanmoins entachés d'erreurs et souvent asynchrone afin de couvrir l'ensemble des calottes. Ils représentent donc un état moyen du champ observé sur une période donnée plutôt qu'une représentation à un instant précis, ajoutant une incertitude quant à l'adéquation des données d'un même champ entre-elles.

Aussi, les différentes cartes de données sont parfois issues de périodes bien différentes. Ce constat est particulièrement important dans le cas de l'utilisation des méthodes inverses introduites au chapitre 4 puis appliquées aux chapitres 5 et 6. En effet, il n'est pas rare pour un modélisateur d'utiliser, par exemple, des données de vitesses et d'altitude de surface séparées par près d'une dizaine d'années. Le champ de vitesses ainsi observé n'est pas vraiment synchrone avec le champ d'altitude de surface, ce qui est particulièrement problématique dans les zones rapides où des changements importants ont pu avoir lieu sur la période séparant l'acquisition des deux champs. Les différentes observations contraignant les modèles ne sont donc pas toujours cohérentes entre elles et les erreurs affichées sur les cartes ne constituent dès lors qu'une borne inférieure qu'il sera souvent difficile à atteindre lorsqu'on optimise les modèles pour reproduire au mieux les observations.

Chapitre 3

Mécanique et écoulement de la glace

Sommaire

3.1	Le mouvement des glaciers	33
3.1.1	Déformation visco-plastique de la glace	34
3.1.2	Mouvement basal	37
3.1.3	Paramétrisation du mouvement basal dans les modèles d'écoulement de calottes	41
3.2	Modèles d'écoulement	42
3.2.1	Modèle de Stokes	42
3.2.2	Modèles d'ordre intermédiaire	46
3.2.3	Modèle shallow shelf(y) approximation (SSA)	47
3.2.4	Modèle shallow ice approximation	48
3.3	Modèle numérique d'écoulement : éléments finis	49
3.3.1	Principes de base	49
3.3.2	Application aux problèmes d'écoulement	53
3.3.3	Elmer/Ice	54
3.4	Conclusion	54

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au comportement mécanique des glaciers. Pour ce faire, nous présenterons les grands mécanismes qui gouvernent le mouvement des glaciers puis nous poursuivrons en présentant les équations régissant la dynamique de ceux-ci en repartant de la théorie générale de Navier-Stokes.

3.1 Le mouvement des glaciers

C'est seulement au 18^{ème} siècle que la communauté scientifique a commencé à s'intéresser aux glaciers et à la façon dont ils se meuvent. Le naturaliste Suisse Johann Jacob

Scehchzer (1672- 1733) fut le premier à avancer une théorie appelée "théorie de dilatation" selon laquelle un glacier s'étend sous l'effet de l'eau de fusion qui s'écoule dans les fissures et crevasses du glacier avant de s'y dilater en regelant. Cette théorie a ensuite été reprise en 1819 par le géologue allemand Toussaint von Charpentier (1779-1847) et puis par le suisse Louis Agassiz (1807-1873), lui aussi géologue. Ce dernier publia un ouvrage nommé "Études sur les glaciers" en 1840. Pendant ce temps, une autre théorie développée par Altmann (1751) et Gruner (1760) suggérait que les glaciers ne s'étendaient pas par dilatation mais glissaient, tel un solide rigide, sur leur socle rocheux sous l'effet de leur propre poids et par fusion de la glace le long de leurs flancs. Plus tard, le physicien écossais James David Forbes (1809-1868) démontra qu'aucune de ces deux théories n'était exacte. En effet, selon lui, l'augmentation de contraintes engendrées par la dilatation de la glace au sein des crevasses n'était pas suffisante pour causer une expansion de celles-ci et, à fortiori, du glacier. De même, pour lui, la théorie du glissement ne pouvait notamment pas expliquer la capacité des glaciers à se mouvoir autour d'obstacles et sur des socles tortueux. Forbes fut ainsi le premier à avancer que les glaciers avaient un comportement visco-plastique mais ne put le prouver (Rémy et Testut, 2006).

Si leurs idées ont été revues et corrigées au fil du temps, ces pionniers de la glaciologie ont posé les bases nécessaires à la compréhension des trois grands mécanismes à l'origine du mouvement des glaciers et, par extension, des calottes polaires :

1. la déformation visco-plastique
2. le glissement basal sur le socle
3. la déformation d'une éventuelle couche de sédiment entre le socle rocheux et le glacier

3.1.1 Déformation visco-plastique de la glace

Ce premier mécanisme traduit la déformation ductile de la glace sous l'effet d'une contrainte. Notons toutefois que lorsque les contraintes deviennent trop importantes ou sont appliquées trop brusquement, la glace peut se fracturer. La glace adopte alors un comportement fragile. C'est ce phénomène qui est à l'origine des crevasses visibles sur les glaciers. L'étude de ce comportement ne rentre néanmoins pas dans le cadre de cette thèse et nous ne tiendrons donc compte que du comportement ductile de la glace. Pour comprendre les mécanismes physiques qui conduisent à cette déformation, il faut revenir à la structure même de la glace.

3.1.1.1 La glace à toutes les échelles

La glace est un matériau polycristallin formé de mono-cristaux à structure cristallographique hexagonale où les atomes d'oxygène sont arrangés selon des couches appelées plans basaux. La majorité de la déformation visco-plastique du mono-cristal de glace s'effectue par

mouvements de dislocation selon ces plans basaux, induisant un fort comportement anisotrope de la glace. [Duval \(1984\)](#) a ainsi démontré que la résistance au cisaillement selon les plans basaux est au moins 60 fois plus faible que la résistance selon les plans non-basaux. Le comportement du polycristal de glace dépend alors du comportement individuel de chacun des mono-cristaux et de leurs interactions.

A l'échelle macroscopique, celle qui nous intéresse dans le cadre de cette thèse, les différents mouvements de dislocation se traduisent par le fluage de la glace dans son ensemble. Ainsi, sous l'effet d'une contrainte constante, la glace se déforme au cours du temps, elle s'écoule. Ce phénomène peut être décomposé en 3 grandes étapes ([Paterson, 1994](#)) représentées à la Figure 3.1 :

1. Le **fluage primaire** : sous l'effet d'une charge, les grains ayant une orientation favorable se déforment par glissement selon les plans basaux. Les contraintes sont ensuite transférées aux autres grains et la vitesse de déformation diminue peu à peu.
2. Le **fluage secondaire** (ou stationnaire) : la glace se déforme à vitesse constante. Cette phase, très courte dans la glace, correspond également à la vitesse de déformation minimale atteinte par la glace et apparaît généralement vers 1 % de déformation.
3. Le **fluage tertiaire** : la vitesse de déformation commence à ré-augmenter en raison de l'apparition de la recristallisation par migration pour finalement se stabiliser.

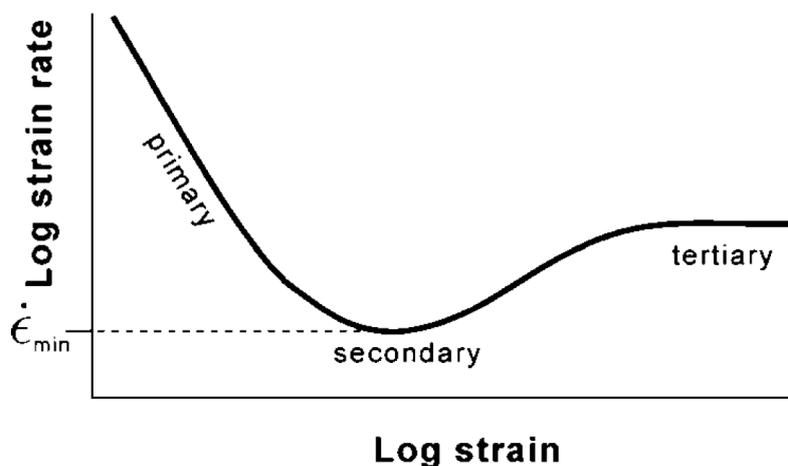


FIGURE 3.1 – Courbe de fluage du matériau glace présentant le logarithme du taux de déformation en fonction du logarithme de la déformation elle-même ([Cuffey et Paterson, 2010](#)).

3.1.1.2 La relation constitutive de la glace : loi de Glen

Le comportement visco-plastique de la glace, dont nous venons de discuter, peut être traduit mathématiquement par la **loi de Glen** ([Glen, 1955](#)) qui décrit le fluage secondaire, généralement considéré comme le mode de déformation des glaciers et calottes glaciaires.

Celle-ci relie le taux de déformation aux contraintes déviatoires appliquées selon l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.1)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes déviatoires tandis que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est le tenseur des taux de déformation défini comme :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

avec u_i les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$. La viscosité effective η dans (3.1) est donnée par :

$$\eta = \frac{1}{2} (EA)^{-1/n} \mathbf{I}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2}^{(1-n)/n} \quad (3.3)$$

où E est un facteur d'amplification, $\mathbf{I}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}/2}$ est le second invariant du tenseur des déformations et n est l'exposant de Glen. A est la fluidité et est fonction de la température selon la loi d'Arrhenius (3.4) :

$$A = A_0 e^{-Q/(RT)} \quad (3.4)$$

avec A_0 une fluidité de référence, T la température en Kelvin, Q l'énergie d'activation et R la constante des gaz parfaits.

Les différentes valeurs de A_0 , Q et n dans la loi de *Glen* (3.1) sont généralement issues d'expériences de laboratoire qui ne peuvent que partiellement représenter des conditions réelles. Il reste donc une incertitude sur la valeur de ces paramètres. En particulier, l'expérience montre que l'exposant n peut prendre des valeurs très différentes allant de 1 à 5 selon les auteurs et les expériences ([Weertman, 1983](#); [Gillet-Chaulet et al., 2011](#)). La glace est donc un fluide non-newtonien, ce qui signifie que la vitesse de déformation n'est pas directement proportionnelle aux contraintes appliquées. Classiquement, une valeur intermédiaire $n = 3$ est généralement utilisée dans les modèles d'écoulement.

En outre, la loi de *Glen* est une loi isotrope qui ne peut donc représenter le caractère anisotropie de la glace. L'expérience montre que les modèles ont tendance à produire des vitesses trop importantes sur les parties flottantes et trop faibles sur les parties posées. Le facteur d'amplification E de l'équation (3.3) est alors utilisé de façon empirique pour corriger la loi de *Glen* et faire correspondre aux mieux le modèle avec les observations en utilisant des valeurs supérieures à 1 lorsque la glace est posée et inférieure à 1 lorsque la glace est flottante. [Ma et al. \(2010\)](#) ont montré que ces valeurs empiriques s'avèrent compatibles avec l'effet macroscopique de l'anisotropie de la glace. En effet, sur les parties posées des calottes, où les contraintes de cisaillement dominant, l'anisotropie favorise la déformation de la glace ($E > 1$) alors qu'elle la défavorise dans les parties flottantes où les contraintes longitudinales dominant ($E < 1$). Des lois plus complexes ont été proposées pour prendre en compte le

comportement anisotrope de la glace plutôt que de recourir à un paramètre empirique tel que E (par exemple Gillet-Chaulet *et al.* (2005, 2006); Ma *et al.* (2010)) mais elles restent difficiles à appliquer dans les modèles de grande échelle.

3.1.2 Mouvement basal

Lorsque la base du glacier est au point de fusion, le mouvement basal peut être engendré soit par le glissement de la glace sur un socle rigide et imperméable, soit par déformation du socle lui-même, soit par combinaison de ces deux processus. Ces mécanismes sont très importants dans la dynamique glaciaire et sont les principaux contributeurs aux mouvements de nombreux glaciers. Il y a plus de 60 ans, McCall (1952) avait observé que près de 90 % du mouvement de surface du glacier de *Vesl-Skautbreen*, petit glacier de cirque en Norvège, était dû au glissement basal.

3.1.2.1 Glissement sur un socle rigide

Lorsque la base est au point de fusion, le glacier glisse sur le socle rocheux. La vitesse de glissement est modulée par le frottement qui dépend entre autre de la rugosité du socle et de la présence d'eau à l'interface roche-glace.

Weertman (Weertman, 1957), intrigué par cette capacité d'un glacier à glisser sur son socle malgré la surface très irrégulière de ce dernier, fut le premier à s'intéresser aux mécanismes à l'origine de ce glissement. Il proposa alors un modèle capable d'expliquer le processus de glissement d'un glacier dont l'interface glace-socle avoisine le point de fusion de la glace. Selon lui, seuls deux grands mécanismes pouvaient expliquer ce phénomène.

Le premier mécanisme invoqué est la fusion de la glace sous pression. Le socle glaciaire étant formé de nombreuses protubérances, l'augmentation de pression induite sur la face amont de celles-ci engendre une diminution du point de fusion de la glace. Un gradient de pression se crée et la glace fondue tend à se déplacer vers des zones de basse pression où elle va regeler. Ce processus de gel-dégel permet alors au glacier de glisser sur son socle (cf. Figure 3.2).

Le second mécanisme avancé par Weertman est l'augmentation du taux moyen de déformation de la glace près du socle sous l'effet de la concentration des contraintes. Un tel phénomène permet alors à la glace de surpasser les obstacles.

Selon Weertman, aucun de ces deux mécanismes ne pouvait expliquer, à lui seul, les vitesses de glissement parfois importantes rencontrées dans la nature et seule une combinaison des deux serait une explication valable. En réalité, même combinés, ceux-ci ne peuvent expliquer les fortes vitesses de glissement souvent atteintes (seules les vitesses inférieures à 10 m a^{-1} peuvent être expliquées par la théorie de Weertman). Un autre bémol à cette théorie est qu'elle ne pouvait expliquer les variations journalières de vitesses observées dans la nature.

Cette théorie a été reprise et, peu à peu, améliorée par Weertman lui-même et de nombreux autres auteurs (Nye, 1969; Kamb, 1970). Celle-ci permettait, au vu de la faible taille des rugosités (3 à 50 cm) par rapport à l'épaisseur des glaciers (plusieurs centaines de mètres), de paramétrer le mouvement de la glace par dessus ces obstacles sous la forme d'une loi de glissement basal à l'échelle d'un glacier. Cette loi, appelée **loi de Weertman**, relie la contrainte tangentielle τ_b et la vitesse de glissement u_b selon :

$$\tau_b + \beta |u_b|^{\frac{1}{m}-1} u_b = 0 \quad (3.5)$$

avec β et m des constantes positives.

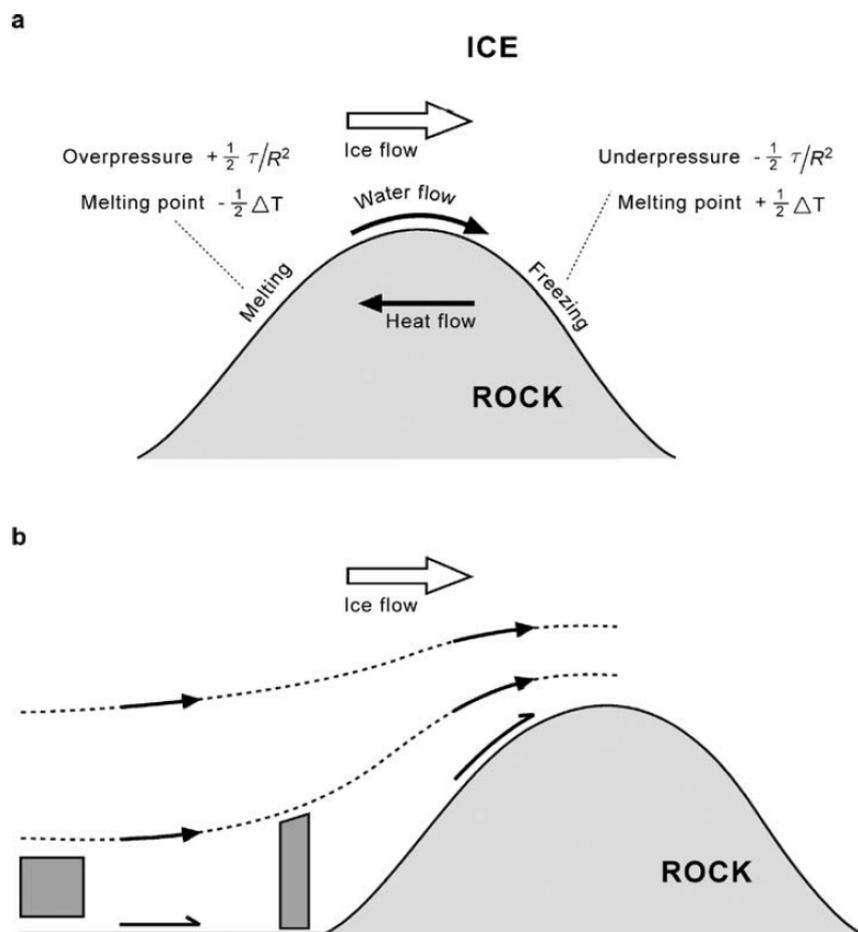


FIGURE 3.2 – (a) Illustration du mécanisme de gel-dégel d'un glacier glissant sur une bosse dans le socle rocheux. (b) Mécanisme de déformation de la glace sous l'effet des concentrations de contraintes induites par la bosse. Les lignes pointillées représentent les lignes de flux tandis que les quadrilatères représentent un volume de glace qui se comprime à l'approche d'une bosse (Cuffey et Paterson, 2010).

En réalité, la théorie de Weertman et ses diverses améliorations ne tenaient compte que de l'eau venant de la fonte de la glace basale sous l'effet du processus de gel-dégel ou

de la chaleur engendrée par le frottement et le flux géothermique. Elle ne supposait alors que la présence d'un très mince film d'eau entre la glace et le socle. Lliboutry (1968) a alors proposé une théorie élargie reprenant la théorie de Weertman. Selon lui, le glissement basal est bien rendu possible par la présence d'eau à l'interface glace-roche, sans quoi la glace resterait simplement collée au socle rocheux, mais seule la présence de cavité sous-glaciaires permettrait d'atteindre des vitesses de glissement supérieures à 20 m a^{-1} . Ces cavités apparaissent à l'aval de certains obstacles du socle rocheux. Suite à leur ouverture, celles-ci sont remblayées par de l'eau ainsi que de la glace de regel qui vient se coller au socle. Lliboutry poursuit alors sa théorie en distinguant deux cas limites qui se succèdent sous forme cyclique :

1. Les cavités sont isolées les unes des autres et nous nous trouvons dans le cas d'un *régime hydraulique autonome*. L'eau ne circule pas et la pression au sein des cavités, pour une vitesse de glissement donnée, s'ajuste de manière à minimiser le frottement.
2. Les cavités communiquent entre elles et permettent à l'eau de circuler sous une pression donnée. On parle alors de *régime hydraulique connecté*.

Ainsi, lorsqu'une cavité sub-glaciaire est inter-connectée, son volume reste relativement constant. Avec le temps, les cavités sont progressivement remblayées par la glace de regel qui, collée au socle rocheux, est incapable de se mouvoir. Ensuite, cette dernière fusionne avec le glacier qui est en mouvement et une nouvelle cavité non-inter-connectée apparaît près du socle. Sous l'effet de la pression d'eau, celle-ci grandit jusqu'à atteindre une autre cavité, formant ainsi un réseau inter-connecté. Le cycle peut alors recommencer.

Plus le nombre et la taille des cavités augmentent, plus la surface de contact entre le glacier et le socle diminue, diminuant ainsi la rugosité du socle rocheux. Cette diminution de rugosité entraîne alors une augmentation du glissement basal. Notons également qu'une grande quantité d'eau de surface produite par la fusion des premières couches de glace ou encore par l'intermédiaire des précipitations atmosphériques peut être acheminée vers la base du glacier et éventuellement contribuer à augmenter la taille des cavités ou à lubrifier le socle rocheux.

La taille des cavités est principalement contrôlée par la pression effective locale N :

$$N = \sigma_{nn} - p_w \quad (3.6)$$

avec σ_{nn} la contrainte normale à la surface de la cavité et p_w la pression de l'eau dans la cavité. Le frottement étant lui même lié à la présence de ces cavités, la loi de frottement doit être une relation représentant la contrainte de cisaillement basale comme une fonction de la vitesse \mathbf{u}_b , comme (3.5), et de la pression effective N (où σ_{nn} peut être approximé par la pression cryostatique) :

$$\boldsymbol{\tau}_b + f(\mathbf{u}_b, N) = 0 \quad (3.7)$$

où les cavités s'agrandissent au fur et à mesure que N tend vers zéro, réduisant le frottement

à la base du glacier. La fonction $f(\mathbf{u}_b, N)$ dans (3.7) devrait donc décroître en même temps que N .

De nombreuses lois paramétriques plus ou moins complexes ont été développées à partir de (3.7) et sont encore développées à l'heure actuelle (Bindschadler, 1983; Schoof, 2005; Gagliardini *et al.*, 2007). Ces différentes lois tentent ainsi de définir au mieux la fonction $f(\mathbf{u}_b, N)$ permettant de faire le lien entre τ_b d'une part et \mathbf{u}_b et N d'autre part. Elles demandent néanmoins de connaître la valeur de N qui reste difficilement mesurable et nécessite donc d'introduire un module hydrologique au sein des modèles d'écoulement. De plus, ces lois reposent sur des paramètres supplémentaires par rapport à une loi de *Weertman*, paramètres souvent mal contraints.

3.1.2.2 Socle basal déformable

En réalité, de nombreux glaciers reposent sur des sédiments déformables appelés till¹. C'est par exemple le cas de nombreux fleuves de glace en Antarctique de l'Ouest dont les vitesses d'écoulement très élevées semblent être dues à la présence d'une couche de till déformable.

Les premiers modèles de socles déformables constitués de till faisaient l'hypothèse d'un fluide visqueux ou d'un fluide de Bingham² (MacAyeal, 1992). Ces modèles se basaient sur les observations de Boulton et Hindmarsh (1987) effectuées sur des till récupérés près du front du glacier Islandais *Breidamerkurjökull* montrant que les couches de till pouvaient, sous certaines conditions, se déformer par cisaillement.

Des études de laboratoire sur des échantillons de till récupérés par carottage au niveau de l'*Ice Stream B* (Kamb, 1991) ont cependant montré qu'après une brève période d'ajustement des contraintes, une couche de till cisillée atteint rapidement sa limite élastique τ^* , essentiellement indépendante de la vitesse de déformation. Le till se comporte donc comme un matériau parfaitement plastique et la déformation prend la forme d'un glissement le long du plan de cisaillement. Ce plan de cisaillement ne peut supporter une contrainte supérieure à la limite τ^* qui peut être décrite par un critère de Mohr-Coulomb (Iverson *et al.*, 1998; Tulaczyk *et al.*, 2000; Cuffey et Paterson, 2010; Iverson, 2010) tel que :

$$\tau^* = c + N \tan \phi \quad (3.8)$$

où c représente la cohésion apparente du till, ϕ l'angle de frottement du matériaux et N la pression effective au sein de la couche de till. Un tel comportement serait rendu possible par une haute pression d'eau (eau de fonte engendrée par le frottement de la glace sur le socle,

1. équivalent des moraines glaciaires : accumulation de débris de roches qui sont entraînés puis abandonnés par les glaciers. La taille des particules au sein des till varient de quelques millièmes de mm (argiles) à plusieurs cm voire dizaines de cm (gros clastes).

2. fluide se comportant comme un solide sous faibles contraintes et adoptant le comportement d'un fluide visqueux au delà d'une contrainte seuil.

par le flux géothermique et l'apport d'eau de surface). En effet, si la pression d'eau augmente suffisamment pour accroître la pression de pores, le taux de déformation du till augmente, ce qui accroît encore la fonte basale. Cette nouvelle arrivée d'eau de fonte permet encore d'augmenter la pression d'eau et la pression de pores, à moins d'être suffisante pour élargir les canaux qui constituent le système poreux (Alley *et al.*, 1987; Kamb, 1991). Évidemment, ce phénomène dépend de la perméabilité et des propriétés mécaniques de la couche de till. En effet, si la couche est très perméable, l'eau de fonte à l'interface till-glace pénètre facilement sous le glacier et le lit reste stable. Par contre, si le lit est peu perméable à l'eau, la pression hydrostatique à la base du glacier peut engendrer la déformation du lit de till (Boulton et Hindmarsh, 1987; Tulaczyk *et al.*, 2000; Boulton *et al.*, 2001).

De nombreuses études se sont attelées à mieux comprendre et modéliser le comportement des tills. Ceux-ci forment cependant un mélange complexe d'eau et de particules rigides et les modèles dépendent de nombreux paramètres qui varient en fonction de la nature des particules et de leur comportement en présence d'eau. L'implémentation de ces processus dans des modèles d'écoulement glaciaires à large échelle reste donc difficile puisqu'au delà du surcoût numérique engendré, cela demande d'introduire de nombreux paramètres supplémentaires mal contraints.

Malgré leur complexité, l'impact de ces processus sur le déplacement basal peut toutefois être représenté sous la forme d'une loi relativement simple telle que celle de *Weertman* comme nous le discutons dans la section suivante.

3.1.3 Paramétrisation du mouvement basal dans les modèles d'écoulement de calottes

Comme nous l'avons vu, le déplacement basal dépend de nombreux processus physiques ainsi que de la nature du socle rocheux lui-même. L'établissement d'une seule loi de frottement représentant l'ensemble de ces processus est donc difficile, tant les processus sont complexes et varient en fonction des zones étudiées mais également du temps. Ainsi, les modèles de calottes adoptent généralement la forme la plus simple de loi de frottement : celle de *Weertman* (Weertman, 1957), dont nous avons déjà discuté et dont l'expression la plus courante est donnée en (3.5) Malgré qu'elle ait été développée pour représenter le déplacement de la glace par fluage le long de petites rugosités, cette loi permet de simuler une large gamme de processus en fonction de la valeur de β et m . En effet, de faibles valeurs de m permettent de représenter le glissement sur un socle rigide voire une déformation visqueuse des tills (Hindmarsh, 1997) tandis qu'une déformation parfaitement plastique des tills peut être représentée lorsque $m \rightarrow \infty$.

La loi de *Weertman* doit être vue comme une paramétrisation de l'impact sur l'écoulement (vitesse basale) des processus détaillés dans les sections 3.1.2.1 et 3.1.2.2 et non pas comme une véritable représentation physique de ces processus complexes et difficilement ob-

servables. C'est finalement cette loi qui sera utilisée dans les travaux de thèse qui suivent. Les valeurs de β et m restent néanmoins difficile à estimer et peuvent fortement varier (spatialement et temporellement) en fonction des conditions basales. Nous verrons plus tard que les méthodes inverses sont un excellent moyen de contraindre ces paramètres. L'objectif de cette thèse étant de mieux quantifier les processus responsables de l'accélération des glaciers émissaires, quantifier de tels paramètres, fait évidemment partie des travaux présentés dans ce manuscrit.

3.2 Modèles d'écoulement

Les modèles d'écoulement en glaciologie se basent sur la mécanique des fluides et découlent des équations de Navier-Stokes. Dans cette section, nous montrerons donc comment arriver aux modèles classiquement utilisés en glaciologie à partir des équations de Navier-Stokes.

3.2.1 Modèle de Stokes

Classiquement, l'écoulement d'un fluide newtonien est régi par les équations de Navier-Stokes. Ce système d'équations repose sur deux grands principes : le principe de continuité ou de conservation de la masse et le principe de conservation de la quantité de mouvement. Sous leur forme différentielle, ces deux principes peuvent s'écrire

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}) = 0 \quad (3.9)$$

$$\rho_i \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} - 2\rho_i \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} \quad (3.10)$$

où ρ_i est la densité de la glace, $\nabla \cdot$ est l'opérateur divergence, \mathbf{g} désigne la force de pesanteur, $2\rho_i \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$ est la force de Coriolis et $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy rassemblant le tenseur déviatorique $\boldsymbol{\tau}$ et la pression isotrope p .

Lorsque nous observons les équations (3.9) et (3.10) plus précisément, nous remarquons que certaines simplifications peuvent être effectuées. Premièrement, la densité de la glace peut être considérée constante spatialement et temporellement : la glace est un fluide incompressible. Aussi, lorsque nous nous intéressons aux mouvements des glaciers, nous remarquons que les effets visqueux l'emportent sur les effets inertiels. La force de Coriolis ainsi que la dérivée lagrangienne $\frac{d}{dt}$ peuvent donc être négligées devant les termes de gravité et de viscosité et le système d'équations devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} = 0 \quad (3.12)$$

De plus, la loi de Glen (3.1) permet de faire le lien entre contraintes appliquées et taux de déformation (fonction de \mathbf{u}) et ainsi, de réduire le nombre d'inconnues. Le système d'équations formé par (3.11) et (3.12) constitue alors les **équations de Stokes** et permet de déterminer les champs de vitesses et de pression pour une géométrie donnée.

Le modèle de Stokes résout donc les équations de Stokes sans approximation. En glaciologie, ce modèle est souvent appelé *full-Stokes* par rapport aux autres modèles présentés après, qui se basent sur différentes approximations de ce dernier. Cette équation vectorielle présentée en (3.12) peut se réécrire sous la forme d'un système de 3 équations scalaires (selon les axes x, y, z) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho_i g \end{cases} \quad (3.13)$$

En utilisant la relation constitutive de la glace (3.1) liant contraintes et déformations, elles-même liées aux vitesses (u, v, w) selon la relation (3.2), le système d'équations (3.13) peut se réécrire sous la forme d'un système de 3 équations à 4 inconnues (u, v, w, p) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_i g \end{cases} \quad (3.14)$$

où la viscosité effective η introduit une non-linéarité puisqu'elle dépend du gradient de vitesse selon (3.3). A ce système, vient s'ajouter l'équation de continuité (3.11) pouvant se réécrire :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

et permettant de fermer le système.

3.2.1.1 Conditions limites

La résolution du système de Stokes donné aux équations (3.14) et (3.15), comme tout système d'équations aux dérivées partielles, nécessite d'imposer des conditions aux limites.

Celles-ci constituent des contraintes sur les valeurs que prendra la solution sur les bords du domaine d'étude. Dans le cas d'une calotte glacière, trois frontières sont à considérer : la surface supérieure du glacier ou surface libre, la surface basale et le front du glacier.

Condition sur la surface supérieure

La surface supérieure du glacier est en contact avec l'atmosphère, les contraintes sur cette surface peuvent donc être considérées nulles :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.16)$$

Conditions sur la surface inférieure

Dans le cas où la glace reste posée sur son socle, la glace se meut sur celui-ci, soit par frottement (cf. section 3.1.2.1), soit par déformation du socle lui-même (cf. section 3.1.2.2). Les lois de frottement vues précédemment peuvent alors être introduites sous forme de conditions limites sur la surface basale :

$$\boldsymbol{\tau}_b = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = f(\mathbf{u}_b, N) \quad (3.17)$$

$f(\mathbf{u}_b, N)$ peut représenter des lois de frottement de différentes complexités pouvant être utilisées dans les modèles.

A cette condition, vient s'ajouter une condition de non pénétrabilité de la glace dans le socle sous la forme :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.18)$$

Dans le cas de la glace flottante, le frottement est absent et les contraintes de cisaillement sont donc nulles. Les conditions limites sous l'*ice shelf* prennent alors la forme :

$$\boldsymbol{\tau}_b = 0 \quad (3.19)$$

et

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = p_w \mathbf{n} \quad (3.20)$$

où $p_w = \rho_w g(z_{sl} - z)$ avec z_{sl} le niveau de la mer.

Condition au front

Au front du glacier, l'eau exerce une pression sur celui-ci (la pression de l'air étant négligeable). Cette pression est proportionnelle à la hauteur de glace sous l'eau et la condition limite prend la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \max(0, p_w \mathbf{n}) \quad (3.21)$$

3.2.1.2 Évolution de la géométrie

Le système de Stokes permet donc de calculer les champs de vitesses et de pression pour une géométrie donnée. Lorsqu'on veut modéliser l'évolution d'un glacier dans le temps, il est alors nécessaire d'ajouter des équations pour l'évolution de ses différentes surfaces.

Évolution de la surface supérieure

La surface supérieure du glacier reste évidemment en contact avec l'atmosphère et est donc libre d'évoluer au cours du temps. Cette évolution peut dépendre des conditions climatiques à la surface représentées sous la forme d'un terme d'accumulation/ablation de surface $a_s(x, y, t)$ permettant de retirer ou d'ajouter localement de la masse au système et pouvant évoluer temporellement. Cette évolution peut être représentée par une équation de transport basée sur le principe de conservation de la masse (3.11). Il s'agit d'une condition cinématique prenant la forme :

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s = a_s \quad (3.22)$$

où z_s représente la surface supérieure du glacier, a_s le terme d'accumulation ($a_s > 0$) / ablation ($a_s < 0$) de surface et u_s, v_s, w_s les trois composantes du vecteur vitesse en surface.

Une démonstration rigoureuse permettant d'obtenir la relation (3.22) est présentée dans [Greve et Blatter \(2009\)](#) et [Morlighem \(2011\)](#).

Évolution de la surface inférieure

La surface basale des glaciers émissaires reste posée sur son socle rocheux tant que la pression glaciostatique reste supérieure à la pression d'eau. Au delà de la ligne d'échouage, la pression d'eau devient telle que la glace se met à flotter. La ligne d'échouage sépare donc la surface basale en deux zones différentes.

Ainsi, sur les plateformes flottantes, la surface basale peut évoluer au cours du temps, notamment en fonction du taux de fonte ou de re-gel à sa surface. Cette évolution peut alors être définie par une équation de transport similaire à (3.22) :

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b = a_b \quad (3.23)$$

où z_b représente la surface basale, a_b le terme de fonte ($a_b > 0$) / accrétion basale ($a_b < 0$) sur celle-ci et u_b, v_b, w_b les trois composantes de la vitesse basale. Notons que cette expression reste vraie dans les zones posées puisque le glacier peut potentiellement se décrocher du socle rocheux (cavités d'eau). Dans ce cas, la formule (3.23) s'accompagne d'une condition supplémentaire de non pénétrabilité de la glace dans le socle.

Évolution de l'épaisseur

Il est également possible d'intégrer l'équation de continuité (3.11) sur l'épaisseur afin d'obtenir l'équation d'évolution de l'épaisseur :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}H)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}H)}{\partial y} = a \quad (3.24)$$

où \bar{u} et \bar{v} représentent les vitesses u et v moyennées sur l'épaisseur et $a = a_s - a_b$. Cette équation est typiquement utilisée pour les modèles intégrés sur l'épaisseur comme le modèle *SSA* présenté à la section 3.2.3.

3.2.2 Modèles d'ordre intermédiaire

En glaciologie, la résolution d'un système *full-Stokes* demande d'importantes ressources de calcul et peut donc être lourde dans le cas de grands domaines d'étude (étude à l'échelle de la calotte groenlandaise ou antarctique entière par exemple). Certains auteurs ont donc proposé des versions simplifiées de ce système d'équations afin de réduire le temps de calcul.

Ces modèles simplifiés se basent notamment sur le fait que les calottes polaires ont une épaisseur très faible par rapport à leur étendue, ce qui se traduit par un **faible rapport d'aspect** ($\sim 10^{-3}$). Ce faible rapport d'aspect permet de négliger les gradients horizontaux de vitesses verticales dans (3.14).

Ils font également appel à l'**approximation hydrostatique** qui suppose un équilibre vertical parfait entre la force de pression et la force gravitationnelle. Ceci revient à négliger les dérivées horizontales des contraintes de cisaillement σ_{zx} et σ_{zy} par rapport à la dérivée de

la contrainte verticale σ_{zz} dans l'équation (3.13)_z. L'équation (3.13)_z se résume alors à :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho_i g \quad (3.25)$$

où σ_{zz} est égal à la pression hydrostatique. Notons tout de même que l'utilisation de modèles de Stokes basés sur (3.13) reste nécessaire dans certains cas précis. [Morlighem et al. \(2010\)](#) ont ainsi montré que malgré le fait que l'approximation hydrostatique (3.25) est généralement valable presque partout, σ_{zz} et la pression hydrostatique $\rho_i g H$ peuvent différer de quelques pourcents lorsque la pente du socle rocheux s'accroît. Ce phénomène, appelé "*bridging effect*" et déjà mis en avant par [Van Der Veen et Whillans \(1989\)](#), s'explique par le fait que lorsque le socle rocheux remonte (dans le sens de l'écoulement), la contrainte verticale exercée par celui-ci est légèrement plus élevée que la pression hydrostatique et pousse la glace vers l'amont (et inversement).

Le modèle *Blatter-Pattyn* proposé par [Blatter \(1995\)](#) et [Pattyn \(2003\)](#) est certainement le plus connu des modèles d'ordre intermédiaire. Il se base sur les deux seules hypothèses de faible rapport d'aspect et de l'approximation hydrostatique, permettant ainsi de négliger les termes inférieurs de deux ordres de grandeur par rapport aux autres termes dans les équations de Stokes (3.13). Notons enfin que malgré l'absence de vitesses verticales dans le système d'équations résultant de ces hypothèses, celui-ci reste 3D puisque les vitesses horizontales continuent à dépendre de z . En outre, les vitesses verticales peuvent être déduites à partir des vitesses horizontales.

Certaines hypothèses supplémentaires permettent de réduire encore la complexité des équations. Les sections suivantes présentent ainsi des modèles plus simples comme les modèles *shallow-shelf(y) approximation* et *shallow-ice approximation* qui sont, comme nous le verrons, des modèles respectivement 2D et 1D contrairement au modèle 3D de Stokes plus coûteux et nécessitant typiquement des ressources de calcul 100 fois plus importantes ([Morlighem et al., 2010](#)).

3.2.3 Modèle shallow shelf(y) approximation (SSA)

Les zones d'écoulement rapide comme les plateformes flottantes (*ice shelves*) où le frottement basal est inexistant et les fleuves de glace (*ice streams*) où le frottement reste très faible ne sont pas dominées par le cisaillement vertical mais plutôt par l'étirement longitudinal. Les contraintes de cisaillement vertical étant négligeables, les vitesses d'écoulement horizontales peuvent être considérées constantes selon la verticale. Cette hypothèse, additionnée à l'hypothèse hydrostatique (3.25) permet d'intégrer verticalement les équations de Stokes et d'obtenir un système 2D plan :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(2H\eta \left(2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \tau_{b,x} = \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(H\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2H\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \tau_{b,y} = \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial y} \end{cases} \quad (3.26)$$

où H représente l'épaisseur de glace, η la viscosité effective moyennée sur l'épaisseur, z_s l'élévation de la surface du glacier tandis que les termes $\tau_{b,i}$ sont les contraintes basales tangentielles pouvant être décrites par une loi de frottement telle que (3.5) linéaire ou non ou de type (3.7). Notons que dans le cas d'une plateforme flottante, aucun frottement ne s'applique sur la surface inférieure du glacier et $\tau_{b,i} = 0$ comme dans le système de Stokes.

Dans ce système, la topographie basale ne représente donc pas une limite du domaine, la ligne de front du glacier reste la seule limite naturelle d'une calotte. Une condition de Neumann résultant de la différence entre la pression de la glace et la pression de l'eau y est appliquée :

$$\begin{aligned} 4H\eta \frac{\partial u}{\partial x} n_x + 2H\eta \frac{\partial v}{\partial y} n_x + H\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y &= \frac{1}{2} (\rho_i g H^2 - \rho_w g H_0^2) n_x \\ 4H\eta \frac{\partial v}{\partial y} n_y + 2H\eta \frac{\partial v}{\partial x} n_y + H\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x &= \frac{1}{2} (\rho_i g H^2 - \rho_w g H_0^2) n_y \end{aligned} \quad (3.27)$$

où ρ_w représente la pression de l'eau, H_0 l'épaisseur de glace sous le niveau de la mer et n_x et n_y les deux composantes horizontales du vecteur unité normal au front.

Ce type d'approximation, proposé par [Morland \(1987\)](#) et [MacAyeal \(1989\)](#), porte le nom de **shallow shelf approximation (SSA)** et forme donc une alternative efficace au modèle de Stokes dans les zones d'écoulement rapide telles que les glaciers émissaires auxquels nous nous intéressons dans cette thèse. Une grande partie des travaux présentés dans ce manuscrit utilisent ainsi les équations de la *SSA* comme modèle direct.

3.2.4 Modèle shallow ice approximation

Dans les parties posées des calottes glaciaires, suffisamment loin du dôme, et dans les zones pas trop pentues ([Le Meur et al., 2004](#)), on considère que le cisaillement vertical prédomine sur les autres contraintes. Cette hypothèse est à la base du modèle **shallow ice approximation (SIA)** ([Hutter, 1983](#)). Celui-ci est donc uniquement valable dans les zones où le frottement de la glace sur le socle est élevé, entraînant un écoulement est assez lent. Par conséquent, ce type d'écoulement n'est pas représentatif des glaciers émissaires où le glissement basal est plus important (ou sur les *ice shelves* où le frottement est inexistant), induisant des vitesses d'écoulement beaucoup plus élevées. Nous ne détaillerons donc pas les équations de la *SIA* dont les équations sont par exemple décrites en détail dans [Greve et Blatter \(2009\)](#). Remarquons toutefois qu'avec les hypothèses de la *SIA*, le profil vertical de

vitesse ne dépend que de l'épaisseur et de la pente locale de surface et que les composantes de vitesses horizontales peuvent être calculées indépendamment l'une de l'autre, réduisant le modèle à une seule dimension.

Notons finalement que d'autres modèles proposent de coupler *SIA* et *SSA* sans augmenter significativement le coût numérique. [Bueller et Brown \(2009\)](#) proposent ainsi un modèle hybride utilisant une moyenne pondérée des solutions de vitesses *SSA* et *SIA* pour calculer les vitesses d'écoulement horizontales d'un glacier.

3.3 Modèle numérique d'écoulement : éléments finis

Le système de Stokes ainsi que ses diverses approximations forment la base des modèles d'écoulement glaciaire. Sous leur forme analytique, ces équations ne peuvent être résolues que pour des cas simples. Lorsque le modèle étudié devient plus complexe comme dans le cas de glaciers réels ou de calottes glaciaires entières, il n'est plus possible de résoudre ces équations de manière analytique. Dans ce cas, on a généralement recours aux méthodes numériques qui permettent d'approximer le système exact en le décomposant en une série de problèmes plus simple. Cette approche constitue la base des **éléments finis**. L'avantage de cette méthode réside notamment dans le fait que, contrairement à la méthode des différences finies (ou même celle des volumes finis), celle-ci permet de nombreuses libertés au niveau de la forme du maillage.

3.3.1 Principes de base

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser le domaine sur lequel le système d'équations aux dérivées partielles doit être résolu. Cette discrétisation se fait par décomposition du domaine Ω en un nombre M d'éléments de forme relativement simple et dont les sommets constituent les nœuds d'un maillage. Ainsi, chaque élément possède n nœuds auxquels sont associés un certain nombre de degrés de liberté constituant les inconnues du système à résoudre. Un exemple de maillage à éléments triangulaires pour la région de Wilkes en Antarctique est donnée à la Figure 3.3.

Le but est alors de chercher une solution approchée de la solution exacte d'un système continu d'équations $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ défini par morceaux sur des sous-domaines Ω_m de Ω tel que :

$$\bigcup \Omega_m = \Omega \quad m = 1, \dots, M \quad (3.28)$$

Un champ local $\mathcal{G}_m(\boldsymbol{x})$ sur chaque sous-domaine Ω_m (ou élément m) peut alors être déterminé par un nombre fini de valeurs du champ en chaque nœud de celui-ci et par des fonctions d'interpolation entre ces nœuds.

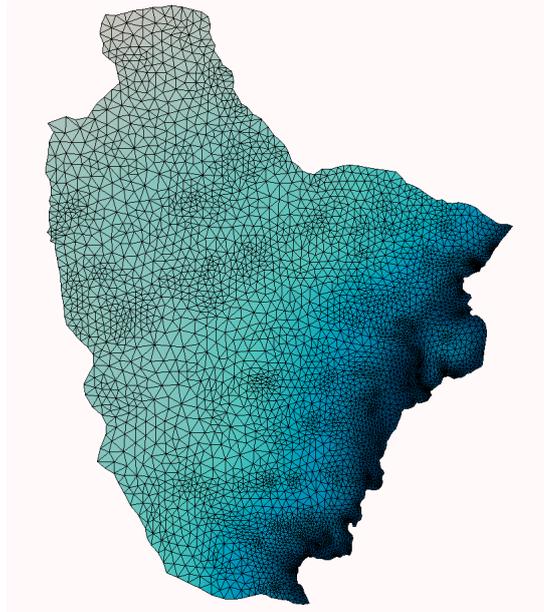


FIGURE 3.3 – Maillage à éléments triangulaires réalisé pour la région de Wilkes en Antarctique.

3.3.1.1 La forme variationnelle

La méthode des éléments finis se base sur la formulation variationnelle des équations à résoudre. Cette approche consiste à obtenir une forme variationnelle pour un élément m du domaine. On multiplie alors le problème à résoudre $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ par une fonction ϕ appelée fonction de pondération et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \mathcal{G}(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad \forall \phi(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathcal{G}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.29)$$

3.3.1.2 Discrétisation

Après obtention de la forme variationnelle (3.29), il s'agit de satisfaire l'équation non pas pour toutes les valeurs de $\phi(\mathbf{x})$ mais pour un nombre i de valeurs ϕ_i . Ces fonctions peuvent être choisies de différentes manières (aboutissant à des solutions approchées différentes), sous la seule condition qu'elles conduisent à un système d'équations algébriques à solution unique. Ce système, résolu en chaque élément du domaine, prend alors la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.30)$$

où $\tilde{\mathbf{K}}$ est la matrice de rigidité de l'élément (matrice locale), \mathbf{x} est le vecteur contenant les inconnues en chaque nœud de l'élément et \mathbf{f} la matrice contenant les différentes forces nodales appliquées à l'élément.

3.3.1.3 Assemblage

L'assemblage consiste, comme son nom l'indique, à assembler les systèmes d'équations locaux en un système global qui pourra alors être résolu. Ce système global à N inconnues, dans le cas où l'on a une seule inconnue x par nœud, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Notons que ce système est généralement singulier et nécessite donc l'ajout de conditions limites (cf. section 3.2.1.1) afin de pouvoir calculer une solution unique.

3.3.1.4 Résolution

La résolution du système (3.31) peut se faire par une méthode directe ou itérative. Les **méthodes directes** sont généralement utilisées pour des systèmes relativement petits, i.e quelques centaines d'inconnues. Le principe repose alors sur l'inversion de la matrice \mathbf{K} du système (3.31). Parmi les méthodes directes, la méthode de Gauss est la plus connue.

Les **méthodes itératives** sont généralement utilisées pour résoudre des systèmes de plus grande taille. Dans ce cas le système (3.31) est réécrit sous la forme :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.32)$$

On part d'une solution initiale \mathbf{x}_0 que l'on améliore par étapes successives où l'on détermine une nouvelle solution \mathbf{x}_n en minimisant :

$$\|\mathbf{K}\mathbf{x}_n - \mathbf{f}\| \quad (3.33)$$

Pour ce faire, on se base généralement sur une méthode de descente de gradient et la solution du problème \mathbf{x}_n est souvent déterminée lorsque la variation de (3.33) d'une étape à l'autre devient inférieure à une valeur ε dépendant de la précision désirée.

D'autre part, dans notre cas, la loi de *Glen* (3.1), où la viscosité de la glace dépend des vitesses de déformation, entraîne une non-linéarité du système (3.32) qui devient :

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.34)$$

où la matrice \mathbf{K} dépend de la solution \mathbf{x} . Le système doit alors être résolu via des méthodes itératives.

Les méthodes itératives utilisées dans *Elmer/Ice* (cf. 3.3.3) sont principalement celles de Picard et de Newton.

3.3.1.4.1 Méthode de Picard

L'algorithme de Picard est aussi appelé algorithme du point fixe. Considérons l'équation (3.34) sous la forme $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$ où l'on cherche à trouver \mathbf{x} et \mathbf{x}_0 une solution initiale donnée. On peut alors calculer une solution \mathbf{x}_{n+1} au système linéaire :

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f} \quad (3.35)$$

telle que $\mathbf{G}(\mathbf{x}_{n+1})$ converge vers zéro et où \mathbf{x}_{n+1} est la $n + 1$ ième solution calculée à partir de la n ième solution \mathbf{x}_n . L'algorithme est alors effectué jusqu'à une valeur de $n = N_{max}$ ou jusqu'à obtenir une valeur $|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n| < \varepsilon$ choisie au préalable.

3.3.1.4.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton utilise le principe de descente de gradient. Si l'on considère le même problème ($\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) que pour la méthode de Picard, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n) + (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n)\mathbf{J}(\mathbf{x}_n) \quad (3.36)$$

où \mathbf{J} est le jacobien de \mathbf{G} et la solution \mathbf{x}_{n+1} s'écrit :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{x}_n) \quad (3.37)$$

La résolution de ce problème nécessite donc le calcul de la matrice jacobienne \mathbf{J} et la résolution du système linéaire :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1}\delta\mathbf{x}_{n+1} = -\mathbf{G}(\mathbf{x}_n) \quad (3.38)$$

où $\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$.

La solution \mathbf{x}_{n+1} est alors une meilleure solution à ($\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) que \mathbf{x}_n et, comme pour Picard, l'algorithme est itéré jusqu'à une valeur de $n = N_{max}$ ou jusqu'à une valeur $|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n| < \varepsilon$.

La méthode de Newton est extrêmement rapide par rapport à celle de Picard mais nécessite une initialisation \mathbf{x}_0 relativement proche de la solution que l'on cherche. En effet, utiliser la méthode à partir d'un point quelconque peut conduire à des résultats numériquement instables et une divergence de l'algorithme. Cette méthode est donc généralement utilisée après quelques itérations de Picard afin de partir d'une solution plus proche de la solution exacte.

3.3.2 Application aux problèmes d'écoulement

Ainsi, la résolution de n'importe quel problème par la méthode des éléments finis nécessite d'écrire le problème sous une forme variationnelle du type (3.29). Si nous reprenons le système d'équations *SSA* (3.14) en ne considérant qu'une seule ligne de flux Γ_s parallèle à l'axe x pour alléger les équations, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(4H\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \tau_{b,x} = \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (3.39)$$

où nous considérons le frottement sous une forme linéaire telle que $\tau_{b,x} = \beta u$. Considérons également une condition limite de Dirichlet ($u = c$ où c est une constante positive) au départ de la ligne de flux ($x = x_{\text{initial}}$) et une condition de Neumann telle que (3.27) au front ($x = x_{\text{final}}$).

Nous pouvons alors multiplier (3.39) par une fonction ϕ définie sur un espace de dimension infinie et intégrer le premier terme par partie sur la ligne de flux Γ_s représentant un éventuel glacier. On obtient alors :

$$\int_{\Gamma_s} \left(4H\eta \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta u \phi \right) dx = \left[4H\eta \frac{\partial u}{\partial x} \phi \right]_{x_{\text{initial}}}^{x_{\text{final}}} - \int_{\Gamma_s} \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \phi dx \quad (3.40)$$

où le premier terme du membre de droite permet de contraindre la solution aux bords du domaine via les conditions limites imposées. Si nous considérons maintenant ϕ dans un sous espace de dimension finie tel que $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ et que nous approximations u par une somme discrète telle que

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j \quad (3.41)$$

Le système (3.40) peut alors se réécrire

$$\sum_{j=1}^n u_j \int_{\Gamma_s} 4H\eta \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Gamma_s} \beta \phi_j \phi_i = \int_{\Gamma_s} \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \phi_i \quad (3.42)$$

auquel viennent s'ajouter les contraintes sur la solution aux bords du domaine. Cette formulation (3.42) représente alors un système de n équations pour autant d'inconnues u_j , permettant

de résoudre le système global (3.31).

3.3.3 Elmer/Ice

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse se basent sur le logiciel *Elmer/Ice*, une extension du modèle numérique éléments finis Elmer. Elmer est un logiciel libre développé par le CSC en Finlande³ et contient un code multi-physique depuis lequel il est possible de développer de nouveaux modules tels que celui d'*Elmer/Ice* tout en bénéficiant de la structure d'Elmer ainsi que des modules déjà intégrés.

Cette extension s'oriente vers la résolution de problèmes d'écoulement en glaciologie et est principalement utilisée pour la modélisation de calottes glaciaires bien qu'ayant été utilisée pour modéliser l'écoulement de glaciers de montagne (Le Meur *et al.*, 2004; Gagliardini *et al.*, 2011; Réveillet *et al.*, 2015, par exemple).

A l'heure actuelle, *Elmer/Ice* est capable de résoudre des problèmes d'écoulement divers en utilisant une variété de modèles comme celui de la *SIA*, de la *SSA* ou encore celui de Stokes. Le module de Stokes intégré à *Elmer/Ice* fut d'ailleurs le seul capable de résoudre l'ensemble des différents tests proposés par *ISMIP-HOM* (Gagliardini et Zwinger, 2008; Pattyn *et al.*, 2008) et fait office de référence pour les expériences *MISMIP3D* grâce à son traitement efficace de la dynamique de la ligne d'échouage (Favier *et al.*, 2012; Gudmundsson *et al.*, 2012; Favier *et al.*, 2014).

Depuis peu, *Elmer/Ice* propose également un module tenant compte de la mécanique de l'endommagement et de la rupture de la glace, permettant ainsi d'étudier la formation de crevasses et leur propagation jusqu'au vêlage (Krug *et al.*, 2014).

Enfin, *Elmer/Ice* intègre des modules d'assimilation de données (ou méthodes d'inversion) permettant de reconstruire différents paramètres mal-contraints. Nous pouvons ainsi citer la méthode de Robin associée au modèle direct de Stokes et la méthode adjointe associée à Stokes ou à la *SSA* qui ont été utilisées par de nombreux auteurs pour reconstruire le frottement basal (Jay-Allemand *et al.*, 2011; Gillet-Chaulet *et al.*, 2012; Fürst *et al.*, 2016).

Le lecteur intéressé par une description plus détaillée des capacités d'*Elmer/Ice* pourra se référer à Gagliardini *et al.* (2013)⁴.

3.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons vu les grands principes à l'origine du mouvement des glaciers : la déformation visco-plastique de la glace et le mouvement basal. Nous avons également vu que le mouvement basal a lieu soit par glissement de la glace sur son propre

3. <http://www.csc.fi/elmer/>

4. ou au site web de *Elmer/Ice* : <http://elmerice.elmerfem.org>

socle, soit par déformation plastique du socle lui-même lorsqu'il est constitué de sédiments déformables comme des tills.

La plupart des modèles d'écoulement glaciaire se basent sur des lois paramétriques comme celle de Weertman (3.5) pour tenir compte de ce frottement et reproduire les vitesses d'écoulement de la glace de la manière la plus fiable. Cette loi introduit deux paramètres particulièrement mal contraints (β et m) puisqu'on ne dispose quasiment d'aucune mesure de ceux-ci et qu'ils peuvent varier radicalement selon la zone étudiée.

Au delà de ces deux paramètres, nous avons également vu que les modèles d'écoulement dépendent notamment de la topographie de surface et de la topographie basale (et par conséquent de l'épaisseur de glace). Si nous avons vu au chapitre 2 que la topographie de surface des calottes polaires est observée de manière relativement précise, il n'en va pas de même pour la topographie basale z_b qui reste parmi les paramètres les moins bien contraints de par la densité relativement faible et la précision des observations.

Il en résulte donc que les conditions basales des calottes polaires (frottement et géométrie) sont souvent mal contraintes et sont à l'origine de fortes incertitudes sur les projections d'évolution des calottes au cours des prochains siècles. Le chapitre suivant est ainsi consacré aux méthodes inverses qui permettent de reconstruire ces paramètres et sur lesquelles se basent les travaux de thèse présentés aux chapitres 5 et 6.

Chapitre 4

Initialisation des modèles en glaciologie

Sommaire

4.1	Inversion et assimilation de données	58
4.2	Approches variationnelles du problème inverse	59
4.2.1	Méthode adjointe	60
4.2.2	Autres méthodes	67
4.3	Relaxation newtonienne : une autre approche	69
4.4	Inversion simultanée du frottement et de la géométrie basale . .	71
4.5	Conclusion	72

Nous avons conclu le chapitre précédent en remarquant que les modèles d'écoulement de calottes polaires se basent sur de nombreux paramètres d'entrée dont certains, comme la géométrie du socle rocheux, sont associés à une incertitude importante, atteignant souvent plusieurs centaines de mètres. D'autres paramètres sont même non mesurables comme les paramètres entrant en jeu dans les lois de frottement.

Ces paramètres peuvent cependant être reconstruits (ou améliorés) de manière indirecte en utilisant la théorie de l'inversion ou l'assimilation de données qui consistent à déterminer la cause d'un phénomène en connaissant la conséquence, s'opposant ainsi au problème direct qui permet de trouver la conséquence d'un phénomène en connaissant la cause.

Dans un premier temps, ce chapitre s'attardera donc sur la théorie générale de l'inversion et de l'assimilation de données. Nous nous concentrerons surtout sur les approches variationnelles de ces problèmes et plus précisément sur l'une des méthodes de résolution, la méthode adjointe, tout en évoquant plus brièvement d'autres méthodes.

Nous introduirons également une méthode d'assimilation de données peu utilisée en gla-

ciologie, le *nudging* ou relaxation Newtonienne, ne consistant pas directement en un problème inverse et ayant été adaptée à la reconstruction de la géométrie basale dans ce travail de thèse.

Ce chapitre s'intéressera également aux différentes études ayant eu recours aux méthodes inverses pour contraindre le frottement basal et la topographie basale.

4.1 Inversion et assimilation de données

La plupart du temps, les problèmes physiques que nous rencontrons consistent à déterminer les effets ou les conséquences, tout en connaissant les causes. Ce type de problème où tous les paramètres sont connus a priori s'appelle problème direct : une solution est obtenue suite à la résolution d'un système d'équations parfaitement défini. Celui-ci s'exprime sous la forme suivante où l'objectif est de déterminer \mathbf{d} en connaissant \mathbf{p} :

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{d} \quad (4.1)$$

où \mathbf{d} est un vecteur solution, \mathbf{p} un vecteur contenant les paramètres du modèle et \mathcal{G} un opérateur direct représentant les équations du modèle et permettant de relier la solution et les paramètres.

Malheureusement, les problèmes rencontrés dans la nature ne sont pas toujours parfaitement connus. En effet, souvent certains paramètres d'entrée du modèle ne sont pas facilement mesurables de manière directe. Dans le cas de l'étude des glaciers, les paramètres tels que le frottement de la glace sur le socle rocheux, la topographie basale ou encore la viscosité de la glace ne sont pas facilement mesurables de manière directe ou ne sont disponibles que localement. De plus, lorsque l'information est disponible, celle-ci est souvent entachée d'erreurs ou partielle. Dans ce cas, il est utile de considérer le problème dans l'autre sens et de se servir de mesures \mathbf{d}^{obs} des effets (ou conséquences) disponibles sur le terrain afin de remonter aux causes. Cette approche s'appelle le **problème inverse** et se définit mathématiquement comme :

$$\mathbf{p} = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{d}^{obs}) \quad (4.2)$$

L'**assimilation de données** est une discipline consistant à combiner au mieux les résultats obtenus par un modèle physique, dynamique ou non, et des observations issues du système physique modélisé. En gardant les notations données ci-dessus, un problème d'assimilation de données peut ainsi être décrit comme la recherche d'une solution \mathbf{p}_t à un instant t tout en disposant d'observations \mathbf{d}_t^{obs} et d'un opérateur d'observation \mathcal{G}_t :

$$\mathcal{G}_t(\mathbf{p}_t) = \mathbf{d}_t^{obs} \quad (4.3)$$

où la solution est sujette au modèle dynamique $\mathbf{p}_{t+1} = \mathcal{M}_{t+1}(\mathbf{p}_t)$. Dans le cas d'un système non dynamique, le problème inverse (4.2) et le problème d'assimilation de données (4.3) deviennent équivalents.

Qu'il s'agisse d'inversion ou d'assimilation de données, ces problèmes sont souvent mal contraints. En effet, les modèles permettant de reproduire un phénomène physique de façon mathématique ne peuvent prendre en compte tous les paramètres du système et ne sont dès lors, qu'une approximation du système réel. Les observations du système réel peuvent également être entachées d'erreurs. Ces problèmes sont donc bien souvent mal posés au sens d'Hadamard (1902). Ils se confrontent alors à des problèmes d'existence, d'unicité et d'instabilité :

- **Existence** : il n'existe peut-être aucune solution exacte au problème. Ceci peut-être dû à des approximations dans le modèle utilisé pour passer des données aux paramètres de celui-ci ou, plus simplement, à des erreurs sur les données (bruit, précision des mesures,...)
- **Unicité** : la solution n'est pas nécessairement unique. Autrement dit, il peut exister plusieurs jeux de paramètres résolvant parfaitement l'équation (4.1).
- **Instabilité** : les procédés d'inversion sont souvent instables et un faible changement sur les données (erreur, bruit) peut engendrer un changement considérable de la solution. Dans ce cas, on parle de problèmes mal-conditionnés.

4.2 Approches variationnelles du problème inverse

Ainsi, les équations (4.2) et (4.3) ne possèdent généralement pas de solution exacte. Une solution consiste alors à minimiser une fonction coût J , mesurant l'écart entre les résultats \mathbf{d} du modèle direct et les observations \mathbf{d}^{obs} , par rapport au paramètre recherché. En assimilation de données, on parle plus particulièrement de **méthodes variationnelles**. Le problème peut alors s'écrire

$$\min_{\mathbf{p}} J(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p}} \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}^{obs}\| = \min_{\mathbf{p}} \|\mathbf{d} - \mathbf{d}^{obs}\| \quad (4.4)$$

où \mathbf{p} contient ce qu'on appelle les **variables de contrôle**. L'objectif est alors d'obtenir une valeur de J aussi petite que possible, signifiant que le modèle est aussi proche que possible des observations.

Une contrainte est souvent ajoutée à ce problème de minimisation afin de le rendre bien posé. Cette contrainte peut prendre la forme d'un *a priori* sur la solution et permet notamment d'améliorer la stabilité du problème et assurer l'unicité de la solution. On parlera de terme d'ébauche ou de terme de régularisation (cette notion est abordée dans la section 4.2.1.5).

La résolution d'un problème tel que (4.4) nécessite souvent le calcul du gradient J par rapport au paramètre \mathbf{p} . Le lien entre J et \mathbf{p} pouvant être complexe, ce calcul peut être difficile. Une solution simple consiste à réaliser un calcul de taux d'accroissement permettant de calculer une dérivée directionnelle. Ceci requiert néanmoins d'effectuer un calcul pour chaque direction de perturbation possible, ce qui devient vite irréalisable lorsque les paramètres vivent dans des espaces de grande dimension comme c'est le cas en météorologie ou en océanographie mais également en glaciologie. D'autres méthodes plus efficaces ont ainsi vu le jour pour résoudre ce problème.

4.2.1 Méthode adjointe

Cette première méthode permet de résoudre des problèmes du type de (4.4) en utilisant la théorie de l'adjoint. Les travaux de thèse présentés dans les chapitres suivants se basant notamment sur cette méthode, celle-ci est présentée de manière plus détaillée¹ que les deux méthodes évoquées par la suite.

L'utilisation des méthodes inverses en glaciologie remonte aux années 90 avec les travaux de [Macayeal \(1993\)](#) qui adapta la théorie des méthodes de contrôle ou méthodes variationnelles, déjà utilisées dans d'autres sciences de la terre comme l'océanographie pour retrouver des traceurs ([Wunsch, 1988](#)), à un modèle d'écoulement glaciaire. Le but de ces travaux était d'améliorer, par le biais d'un tutoriel, les techniques pour faire correspondre un paramètre du modèle aux observations de terrain. [Macayeal](#) s'intéressa plus particulièrement à l'estimation du frottement basal. Il utilisa alors une expérience jumelle afin de vérifier le bon fonctionnement de la méthode. Celle-ci consistait à construire un cas synthétique de glacier en décrivant tous les paramètres avant d'y appliquer un modèle direct *SSA*, associé à une loi de frottement (3.5) dans sa version linéaire, pour calculer un champ de vitesses d'écoulement. Il s'affranchit ensuite du paramètre de frottement basal (correspondant exactement au champ de vitesse modélisé) et tenta alors de retrouver la meilleure estimation de la friction basale, c'est-à-dire celle qui, une fois appliquée au modèle, reproduit au mieux le champ de vitesses obtenu préalablement et considéré comme une observation.

4.2.1.1 Calcul du gradient

Afin de présenter la méthode adjointe sous une forme générale, considérons l'équation (4.1) sous la forme d'une fonction implicite telles que le sont les équations d'écoulement généralement utilisées en glaciologie :

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = 0 \tag{4.5}$$

1. Cette section se base notamment sur la présentation de l'adjoint réalisée dans la thèse de Mathieu Morlighem (2011) : *Ice sheet properties inferred by combining numerical modeling and remote sensing data.*

où \mathcal{G} peut donc représenter n'importe quelles équations d'écoulement (*SSA, full-Stokes,...*) ou un problème physique quelconque.

La méthode de contrôle, ou méthode adjointe, repose sur la minimisation d'une fonction coût du type (4.4). Dans le cas de [Macayeal \(1993\)](#) cette fonction coût mesure la différence entre le champ de vitesses modélisé et le champ de vitesses observé. Nous pouvons exprimer cette fonction comme dans l'expression (4.4), celle-ci prend alors la forme générale :

$$J_0 = (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}) \quad (4.6)$$

où :

- les variables d'état contenues dans $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{p})$ sont liées aux paramètres contenus dans \mathbf{p} par le modèle direct d'écoulement $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = 0$, rendant complexe le lien entre les deux et le calcul du gradient difficile.
- \mathbf{R}^{-1} est l'inverse de la matrice de covariance permettant de tenir compte des statistiques d'erreur disponibles sur \mathbf{d}_{obs} . En pratique, comme nous l'avons déjà suggéré au chapitre 2, les statistiques d'erreur disponibles pour les observations de calottes polaires sont souvent sous-estimées tandis que la corrélation entre les données d'un même champ est souvent indisponible. De plus, ces statistiques, lorsqu'elles sont disponibles ne tiennent pas compte de la corrélation croisée entre les différents champs observés. La matrice de covariance \mathbf{R} est donc difficile à évaluer et gardée égale à l'unité ($\mathbf{R} = \mathbf{I}$).

Le problème peut alors être vu comme un problème de minimisation sous contrainte, le modèle direct faisant office de contrainte et étant introduit sous la forme Lagrangienne :

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p}) = J = J_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \quad (4.7)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un multiplicateur de Lagrange solution du modèle adjoint au modèle direct d'écoulement $\mathcal{G}(\mathbf{p})$. Nous pouvons alors calculer la dérivée de (4.7) par rapport au paramètre \mathbf{p} pour une perturbation $\delta\mathbf{p}$:

$$J'(\mathbf{p}) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} + \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \delta \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} \quad (4.8)$$

La minimisation de la fonction $J(\mathbf{p})$ requiert donc que la dérivée (4.8) soit nulle, ce qui nécessite que la variation de celle-ci par rapport aux variations de \mathbf{d} , \mathbf{p} et $\boldsymbol{\lambda}$ soit nulle.

Or, si nous reprenons le premier terme de l'équation (4.8) et que nous l'égalons à 0, nous pouvons réécrire :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial J_0}{\partial \mathbf{d}} + \frac{\partial \mathcal{G}^T}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (4.9)$$

formant le **système adjoint** possédant une solution $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{p})$.

De même, le second terme peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{G} = 0 \quad (4.10)$$

nous donnant la solution du **système direct** (4.5).

Les deux premiers termes de l'expression (4.8) sont donc nuls lorsque \mathbf{d} et $\boldsymbol{\lambda}$ satisfont respectivement le système direct (4.5) et le système adjoint (4.9). Dès lors, l'annulation du gradient de la fonction coût J par rapport au paramètre \mathbf{p} pour une direction $\delta\mathbf{p}$ est donné par l'annulation du dernier terme, tel que :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (4.11)$$

permettant ainsi de trouver le minimum de la fonction J .

4.2.1.2 Descente du gradient

En pratique, l'annulation de (4.11) se fait par une méthode numérique itérative de descente de gradient (en partant d'une solution initiale \mathbf{p}_0) :

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - n_k d_{\mathbf{p}} J(\mathbf{p}_k) \quad (4.12)$$

où n_k est un paramètre positif désignant la taille du pas pour chaque itération k . La définition de ce paramètre peut-être faite selon diverses méthodes. Le plus simple est de garder un pas constant tout au long des itérations mais celui-ci peut être difficile à estimer et une valeur trop élevée entraînerait une divergence de l'algorithme tandis qu'une trop faible demanderait un nombre d'itérations trop important. Une autre solution plus efficace est d'optimiser la taille de n_k . La méthode de Newton permet notamment d'optimiser cette dernière afin de converger plus rapidement vers la solution. Dans ce dernier cas, la direction de descente dépend alors du gradient de la fonction coût et de sa dérivée seconde, la matrice Hessienne. En réalité la matrice Hessienne à l'étape $k + 1$ est souvent approximée à partir des différents gradients en $k, k - 1, \dots$. On parle alors de **méthode quasi-Newtonienne**. Une présentation brève du fonctionnement de l'algorithme M1QN3 ([Gilbert et Lemaréchal, 1989](#)), notamment utilisé dans les modules d'inversion de *Elmer/Ice*, peut être trouvée en annexe.

4.2.1.3 En résumé

Les étapes successives de résolution d'un problème inverse via la méthode adjointe peuvent être synthétisées comme suit :

1. Choix d'une solution initiale \mathbf{p}_0
2. Boucle jusqu'à un critère d'arrêt défini :
 - Résolution du système direct : $\mathcal{G}(\mathbf{p}_k, \mathbf{d}) = 0$
 - Calcul de la fonction coût J
 - Résolution du système adjoint : $\frac{\partial J_0}{\partial \mathbf{d}} + \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{p}_k, \mathbf{d})^T}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\lambda} = 0$
 - Calcul du gradient $J'(\mathbf{p}_k)$
 - Descente du gradient
 - Obtention d'une solution \mathbf{p}_{k+1}
3. Sortie si le critère d'arrêt est satisfait.

4.2.1.4 Implémentation de l'adjoint dans Elmer/Ice

Deux méthodes peuvent être envisagées pour obtenir l'adjoint d'un système direct. La première solution est d'effectuer la dérivation analytique du problème continu puis de le discrétiser. L'autre solution est d'effectuer directement la dérivation du système discrétisé (cf. section 3.3 pour une présentation de la discrétisation par la méthode des éléments finis). Il a cependant été montré que dans de nombreux cas, ces deux solutions n'amenaient pas aux mêmes résultats et qu'il était préférable d'effectuer une différentiation du problème direct discret.

En théorie, la dérivation d'un adjoint du système discret peut être réalisée via des outils de différentiation automatique mais le formalisme d'*Elmer* (présence de nombreux pointeurs, taille du code) exclu la possibilité d'utiliser ce genre d'outils. La différentiation est donc effectuée à la main pour les parties du code qui le nécessitent. Le code adjoint ainsi obtenu conduit à une estimation du gradient bien meilleure que celle découlant d'une dérivation du problème continu.

Lors de la présentation des différents modèles d'écoulement (modèle de Stokes, *SSA*,...) au chapitre 3, nous avons remarqué qu'une non-linéarité apparaissait pour des valeurs de $n > 1$ dans l'équation (3.3) signifiant que la viscosité de la glace dépend du taux de déformation (et donc des vitesses). Nous avons également vu qu'un tel problème non-linéaire pouvait être traité de manière itérative, par exemple via un algorithme de Picard. En théorie, le code adjoint devrait tenir compte des différentes itérations pour calculer le gradient le plus précisément possible (Martin et Monnier, 2013). En glaciologie, cependant, on émet souvent l'hypothèse d'un opérateur de Stokes auto-adjoint² (Macayeal, 1993; Morlighem *et al.*, 2010; Gillet-Chaulet *et al.*, 2012) qui consiste à ne pas tenir compte de la dépendance de la viscosité par rapport au champ de vitesses (ce qui n'est en théorie valable que lorsque $n = 1$ dans l'équation (3.3) et ainsi ne tenir compte que de la dernière itération du système direct pour

2. un opérateur auto-adjoint est un opérateur dont l'adjoint est égal à lui-même. Dans le cas d'une opérateur réel, cela signifie qu'il est égal à sa transposée

la dérivation du système adjoint. Cette approximation peut nuire à la précision du gradient calculé comme le montre les travaux de [Martin et Monnier \(2013\)](#) ou [Goldberg et Sergienko \(2010\)](#) comparant les résultats d'un adjoint complet (tenant compte de toutes les itérations lors de la résolution du système direct) à ceux d'un adjoint incomplet (ne tenant compte que de la dernière itération) dans le cadre d'une résolution du système direct avec un algorithme de Picard. [Petra et al. \(2012\)](#) ont cependant montré que lorsque la non-linéarité du système direct était traitée avec un algorithme de Newton, le système reste auto-adjoint pour des valeurs $n > 1$, permettant ainsi un calcul précis du gradient sans dériver chaque étape de l'algorithme itératif. *Elmer/Ice* étant équipé d'un algorithme de Newton, seule la dernière étape de l'algorithme nécessite donc d'être dérivée. Le code adjoint ainsi développé a été validé sur des tests standards en comparant les gradients obtenus par la méthode adjointe avec ceux calculés par différence finie, montrant généralement un écart de moins de 0.1 %.

4.2.1.5 Régularisation

La régularisation consiste à poser des contraintes additionnelles lors de l'optimisation d'un vecteur de paramètres \mathbf{p} . Ces contraintes permettent alors de stabiliser les problèmes inverses qui sont souvent mal-conditionnés et donc instables. Elles permettent notamment de s'affranchir de la partie des données correspondant à du bruit ou éventuellement à des erreurs de mesure. Une des méthodes de régularisation les plus utilisées est celle de Tikhonov ([Tikhonov, 1943](#)).

Cette contrainte s'ajoute à la fonction coût initiale J_0 sous la forme d'un terme de régularisation $\mathcal{R}(\mathbf{p})$. Nous obtenons alors la fonction coût totale suivante :

$$J_{\text{tot}} = J_0 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{p}) \quad (4.13)$$

où λ^3 est un nombre positif appelé paramètre de régularisation qui permet de donner plus ou moins de poids au terme de régularisation.

La forme la plus répandue de $\mathcal{R}(\mathbf{p})$ en glaciologie consiste à pénaliser les trop fortes variations spatiales du paramètre \mathbf{p} recherché. La fonction $\mathcal{R}(\mathbf{p})$ s'écrit alors :

$$J_{\text{reg}} = \|\nabla \mathbf{p}\| \quad (4.14)$$

La minimisation du gradient de \mathbf{p} permet ainsi de réduire les trop fortes variations spatiales de ce dernier et donc, de lisser plus ou moins le modèle en fonction de la valeur de λ .

Si l'on possède un a priori sur la valeur du vecteur paramètre \mathbf{p} , issu d'observations de terrain ou de connaissances plus empiriques, il est également possible d'introduire une

3. Ce paramètre n'est pas à confondre avec la solution du système adjoint de Stokes λ

contrainte prenant la forme suivante :

$$J_b = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_b\| \quad (4.15)$$

mesurant l'écart entre la solution a priori \mathbf{p}_b et \mathbf{p} et où, à l'instar de (4.13), la fonction J_b peut être pondérée par un paramètre λ permettant de forcer plus ou moins la fonction à suivre son a priori.

Il est important de garder à l'esprit que ces termes de régularisation entraînent un biais dans le modèle qui ne reproduit donc plus exactement l'information correspondant aux observations accompagnées de bruit. L'objectif est donc de choisir un paramètre λ permettant de s'affranchir du bruit sans perdre la partie pertinente des observations.

La connaissance du niveau de bruit $\varepsilon = |\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{d}_{\text{vrai}}|$ permet en théorie de choisir une valeur λ telle que :

$$J_0 \simeq \varepsilon \quad (4.16)$$

à la fin de l'inversion. En pratique, comme nous l'avons vu, le niveau de bruit ε sur les données en glaciologie est souvent méconnu et les statistiques d'erreurs ne tiennent bien souvent compte que de la précision de l'instrument.

Une autre solution, souvent adoptée en glaciologie (Morlighem *et al.*, 2010; Jay-Allemand *et al.*, 2011; Gillet-Chaulet *et al.*, 2012), repose sur le concept de *courbe en L* (Hansen, 1992; Hansen et O'Leary, 1993). Celle-ci consiste à tracer les valeurs de J_0 obtenues pour différentes valeurs de λ en abscisse et celles de $\mathcal{R}(\mathbf{p})$ en ordonnée. Si suffisamment de valeurs différentes de λ sont testées, on peut alors tracer une courbe passant par les différents points $(J_0, \mathcal{R}(\mathbf{p}))$. Cette courbe prend généralement la forme d'un *L* et la valeur optimale de λ est considérée comme celle correspondant à la zone de courbure maximale de ce *L* (cf. Figure 4.1). En effet, cette position permet de reproduire au mieux les données de terrain (vitesses observées par exemple) tout en minimisant $\mathcal{R}(\mathbf{p})$. En théorie, la zone de courbure maximale peut être calculée. En pratique, celle-ci reste difficile à définir et son choix est souvent sujet à interprétation.

4.2.1.6 Application à l'inversion des conditions basales

Inversion du frottement

Depuis les travaux de Macayeal (1993), beaucoup d'auteurs se sont intéressés à la méthode adjointe en vue de reconstruire les paramètres de frottement basal qui restent parmi les paramètres les plus mal contraints dans les modèles d'écoulement glaciaire en raison de l'absence de mesures directes de ceux-ci.

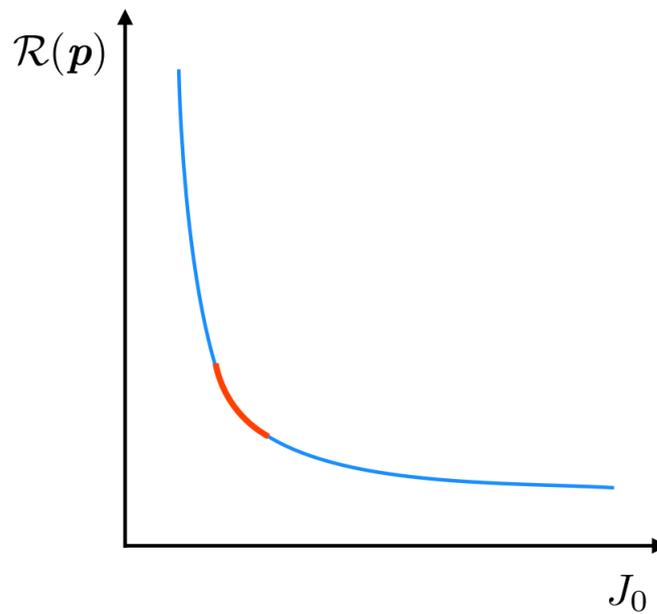


FIGURE 4.1 – Représentation idéalisée d’une *courbe en L* avec rupture (coude en orange) correspondant à des valeurs de λ optimales. λ augmente au fur et à mesure que la solution se déplace vers la droite

Dans ce cas, comme [Macayeal](#), le problème se résume généralement à minimiser la fonction coût (5.1) mesurant l’écart entre les vitesses observées ($\mathbf{d}_{\text{obs}} = \mathbf{u}_{\text{obs}}$) et modélisées ($\mathbf{d} = \mathbf{u}$) par rapport à un champ de paramètres \mathbf{p} se résumant à un champ scalaire β au sein d’une loi de frottement du type (3.5) et pour un m donné. [Morlighem et al. \(2010\)](#) ont notamment généralisé la méthode adjointe à un modèle de Stokes pour reconstruire le frottement basal dans la région du glacier de l’île du Pin en Antarctique de l’Ouest. [Morlighem et al. \(2013b\)](#) étendent la méthode à l’échelle de l’Antarctique. [Gillet-Chaulet et al. \(2012\)](#) ont également utilisé la méthode adjointe pour le modèle de Stokes (développée sous *Elmer/Ice*) afin de reconstruire le frottement basal sur l’ensemble du Groenland. Cette reconstruction, basée une nouvelle fois sur les vitesses de surface observées ([Joughin et al., 2010](#)), permis notamment de définir un champ de frottement basal de référence avant d’étudier l’influence d’une éventuelle lubrification du socle rocheux sur le bilan de masse global du Groenland en diminuant le frottement basal.

Inversion de la topographie basale

Dans leur étude de 2011, [Morlighem et al.](#) appliquent la méthode adjointe à l’équation de conservation de la masse intégrée sur l’épaisseur présentée en (3.24) afin de reconstruire l’épaisseur de glace et, par extension, la géométrie basale d’un glacier Groenlandais. En 2014, [Morlighem et al.](#) étendent l’utilisation de la méthode à tout le Groenland, montrant des différences significatives (fjords plus profonds,...) entre leur topographie basale reconstruite et celle de [Bamber et al. \(2013\)](#) souvent prise comme référence en modélisation.

La méthode utilise donc l'équation de conservation de la masse (3.24) permettant de déterminer H en fonction des vitesses et du bilan de masse. Une fonction coût du type (4.6) mesurait alors l'écart entre l'épaisseur de glace observée (\mathbf{d}_{obs} se résume à un champ scalaire H_{obs}) et l'épaisseur de glace modélisée (\mathbf{d} se résume à un champ scalaire H) et était minimisée par rapport à 3 variables de contrôle : les vitesses d'écoulement moyennées sur l'épaisseur $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ et le bilan de masse apparent $\dot{a} = a - \partial H / \partial t$ (permettant d'inclure les variations d'épaisseur et traiter les instationnarités). Selon notre formalisme, le vecteur paramètre était donc $\mathbf{p} = (\bar{\mathbf{u}}, \dot{a})$, dont dépend directement le paramètre H recherché. Le bilan de masse apparent \dot{a} et les vitesses moyennes $\bar{\mathbf{u}}$ étaient initialisés à partir des observations puis optimisés et autorisés à varier dans une gamme de valeurs tenant compte de l'erreur d'observation afin de minimiser l'écart entre l'épaisseur H et les observations H_{obs} . Reproduire le champ de vitesses observé n'était alors pas un objectif en soit et celui-ci ne servait qu'à initialiser les vitesses moyennées sur l'épaisseur. Ainsi, si cette approche permet d'équilibrer la divergence de flux avec le bilan de masse de surface, elle ne garantit pas que les vitesses optimisées soient solution de la conservation de la quantité de mouvement. Il n'est donc pas certain qu'un modèle initialisé avec un socle rocheux tel que celui de [Morlighem et al. \(2014\)](#) réduise les problèmes de divergence non-physique habituellement rencontrés lors de la relaxation des modèles.

4.2.2 Autres méthodes

4.2.2.1 Approche Bayésienne et lien avec les méthodes variationnelles

Une autre approche utilisée pour la résolution des problèmes inverses rencontrés en glaciologie repose sur les méthodes bayésiennes ([Raymond et Gudmundsson, 2009](#); [Pralong et Gudmundsson, 2011](#); [Brinkerhoff et al., 2016](#)). Cette approche permet d'obtenir un ensemble d'estimations du ou des paramètres recherchés auquel est associée une probabilité d'existence.

L'assimilation de données bayésienne dérive du théorème de Bayes permettant de calculer la probabilité d'une solution connaissant certaines contraintes sur celle-ci. Dans le cas du problème $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = 0$ introduit plus haut, ceci revient à calculer la probabilité $P(\mathbf{p} | (\mathbf{d}, \mathbf{p}_b))$ d'une solution \mathbf{p} connaissant les mesures \mathbf{d} et éventuellement un a priori \mathbf{p}_b et pouvant s'écrire, par la règle de Bayes :

$$P(\mathbf{p} | (\mathbf{d}, \mathbf{p}_b)) = \frac{P(\mathbf{p} | \mathbf{p}_b) P(\mathbf{d} | (\mathbf{p}))}{P(\mathbf{d})} \quad (4.17)$$

où $P(\mathbf{p} | \mathbf{p}_b)$ représente la probabilité d'une solution \mathbf{p} étant donné un a priori \mathbf{p}_b et $P(\mathbf{d} | (\mathbf{p}))$ la probabilité d'obtenir \mathbf{d} lorsqu'on applique un paramètre \mathbf{p} au système $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = 0$.

En considérant que les erreurs de mesures sur \mathbf{d} et l'incertitude sur l'a priori \mathbf{p}_b ont une distribution Gaussienne, on peut montrer que chercher le maximum de probabilité (4.17)

revient à minimiser la fonction suivante :

$$J(\mathbf{p}) = (\mathbf{d} - \mathcal{G}(\mathbf{p}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{d} - \mathcal{G}(\mathbf{p})) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_b) \quad (4.18)$$

où \mathbf{R} et \mathbf{B} représentent respectivement les matrices de covariance d'erreurs d'observation et d'ébauche. On remarque alors que l'expression (4.18) s'approche de la fonction coût introduite en (4.6) additionnée à une régularisation du type de (4.15) et à laquelle on associe une covariance d'erreur \mathbf{B} .

Cette approche fût adoptée par [Raymond et Gudmundsson \(2009\)](#) afin de reconstruire le frottement basal et le socle rocheux à partir d'observations de la topographie et des vitesses de surface avec un modèle de Stokes. Le calcul de gradient repose sur des fonctions de transfert analytiques décrivant la réponse en surface de perturbations basales ([Gudmundsson, 2003](#)). La méthode fut ensuite étendue à un cas non-linéaire et appliquée au *Rutfordt ice-stream* en Antarctique de l'Ouest par [Pralong et Gudmundsson \(2011\)](#).

La méthode affiche cependant deux inconvénients. (1) Puisqu'elle repose sur des fonctions de transfert analytiques de faibles perturbations, il n'est pas certain que les résultats obtenus dans le cas de fortes perturbations basales soient satisfaisants. (2) Dans le cas réel du *Rutfordt ice-stream*, la matrice de covariance était alors estimée grâce à des variogrammes empiriques⁴ mais ne tenait pas compte d'une éventuelle corrélation croisée entre les variables de deux champs d'observations différents.

4.2.2.2 Méthode de Robin

La méthode de Robin a été introduite en glaciologie par [Arthern et Gudmundsson \(2010\)](#). Celle-ci se base également sur la minimisation d'une fonction coût mesurant l'écart entre observations et modèle et s'applique à n'importe quel modèle acceptant des conditions aux limites de Dirichlet, de Neumann et de Robin. La méthode avait été initialement proposée par [Kohn et Vogelius \(1984\)](#) afin de déterminer la conductivité thermique d'un matériau à partir de mesures aux frontières.

Dans l'étude de [Arthern et Gudmundsson](#), l'objectif était de retrouver le champ de viscosité et le champ de frottement basal correspondant aux vitesses observées en surface. L'optimisation de ces deux paramètres repose alors sur la résolution et comparaison des solutions pour un problème direct de Neumann et un problème direct de Dirichlet.

Par exemple, si l'on s'intéresse à la recherche du paramètre de frottement β (ou éventuellement la viscosité) dans le cas d'un système de Stokes, l'objectif est de chercher le champ de valeurs β qui minimise l'écart entre :

4. Un variogramme est un concept utilisé en géostatistique permettant d'évaluer la dépendance de deux observations en fonction de la distance qui les sépare.

1. le problème naturel de Neumann que nous avons introduit en (3.16) imposant des contraintes nulles à la surface sans pour autant vérifier les vitesses de surface observées
2. un problème de Dirichlet où les observations de surface sont imposées comme condition limite sur la surface supérieure.

Ce problème peut être résolu par minimisation d'une fonction coût par rapport au paramètre recherché et pouvant s'écrire :

$$J_{\text{Robin}} = \int_{\Gamma_s} (\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^D) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^N - \boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (4.19)$$

où N et D font respectivement référence aux solutions du problème de Neumann et de Dirichlet et pour laquelle il est possible de calculer analytiquement le gradient par rapport à β (et la viscosité η). Le minimum de J_{Robin} est alors obtenu par l'annulation de cette dérivée.

La méthode de Robin a été utilisée dans plusieurs études depuis sa première introduction en glaciologie. On citera notamment celle de [Jay-Allemand et al. \(2011\)](#) étudiant la variabilité temporelle du frottement basal du *Variogated Glacier* en Alaska, celle de [Schäfer et al. \(2012\)](#) étudiant le frottement basal de la calotte de *Vestfonna* au Svalbard ou encore l'étude de [Gillet-Chaulet et al. \(2012\)](#) comparant notamment les résultats obtenus lors de l'inversion du frottement via la méthode adjointe et la méthode de Robin.

L'avantage de la méthode réside dans la facilité du calcul du gradient de J_{Robin} puisqu'il ne nécessite pas la résolution du système adjoint. Elle présente cependant plusieurs désavantages vis-à-vis de la méthode adjointe utilisée dans ce travail de thèse. En effet, le gradient de la fonction coût est dérivé analytiquement pour le cas (3.3) linéaire, c'est-à-dire pour un modèle d'écoulement linéaire. Dans un cas non-linéaire, nous ne disposons donc que d'une approximation du vrai gradient, ce qui peut nuire à la convergence. La fonction coût utilisée ne permet pas non plus d'incorporer d'éventuelles erreurs d'observation comme on peut le faire dans la méthode adjointe sous la forme d'une matrice de covariance. Enfin la méthode de Robin n'est applicable qu'à un nombre limité de problèmes puisqu'elle nécessite de pouvoir intégrer le paramètre recherché au sein d'une condition de Robin. Celle-ci convient donc pour la recherche du paramètre de frottement mais pas pour la recherche de paramètres tels que l'épaisseur de glace ou la topographie du socle rocheux.

4.3 Relaxation newtonienne : une autre approche

La modélisation permet souvent de représenter des processus qui ne sont pas facilement mesurables sur le terrain ou dont l'échelle ne permet pas une étude en laboratoire. En principe, si les conditions initiales et les conditions aux limites ainsi que les paramètres du modèle sont proches de la réalité, le modèle retranscrira relativement bien celle-ci et permettra une étude du processus physique modélisé. Cependant, si le modèle est mal initialisé ou n'intègre pas

bien certains processus physiques, celui-ci peut donner un résultat assez éloigné de la réalité : le modèle ne représente plus le processus voulu.

Une solution à ce problème est de contraindre le modèle là où l'on possède des données en le forçant à suivre plus ou moins les observations. Notons que cette contrainte permet également de faire évoluer le modèle plus rapidement vers la solution voulue.

La **relaxation newtonienne**, également appelée **nudging**, utilise ce principe. De l'anglais *to nudge* signifiant pousser, cette méthode d'assimilation de données permet de pousser le modèle vers les observations. Elle fut d'abord utilisée dans les années 70 en météorologie (par exemple [Hoke et Anthes, 1976](#)) et plus tard en océanographie ([Verron, 1992](#); [Blayo et al., 1994](#)) pour contraindre les modèles prédictifs à partir d'un jeu de données. Elle permettait au modèle de suivre sa propre physique pendant un temps donné et de le rappeler périodiquement vers des observations disponibles.

Cette contrainte est ainsi introduite dans les équations d'état du modèle via un terme de rappel aux observations. Si nous considérons à nouveau un problème dynamique de type :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{M}(\mathbf{x}) \quad (4.20)$$

où \mathbf{x} est un vecteur à n composantes pour lequel on dispose d'une série d'observations contenues dans un vecteur \mathbf{x}_{obs} à m composantes. La relaxation newtonienne consiste alors à faire évoluer \mathbf{x} selon :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{M}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{obs}}) \quad (4.21)$$

avec \mathbf{K} une matrice ($m \times n$) contrôlant le degré de rappel aux observations et parfois appelée matrice de gain.

Pour le *nudging* simple, la matrice de rappel \mathbf{K} est souvent choisie de manière empirique. Il est toutefois possible d'optimiser celle-ci, on parle alors de *nudging* optimal ([Vidard et al., 2003](#)). Cette méthode utilise une approche variationnelle en minimisant une fonction coût dépendant de l'écart entre \mathbf{x} et \mathbf{x}_{obs} par rapport à \mathbf{K} . Ceci peut alors être fait via la méthode adjointe. Cette optimisation se fait évidemment au prix d'un coût de calcul plus important que pour le *nudging* simple.

Une autre approche pour optimiser la matrice \mathbf{K} est d'utiliser un filtre de Kalman afin de corriger celle-ci à chaque itération temporelle. Plus précisément, cette méthode se décompose en deux grandes étapes. Une étape de prédiction qui utilise l'état estimé du système à une itération précédente pour en déduire une estimation de l'état courant. Celle-ci est alors suivie d'une étape de mise à jour où les observations sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise. Cette méthode a notamment été appliquée en glaciologie par [Bonan et al. \(2014\)](#) qui ont développé un filtre de Kalman d'ensemble dans

le cadre d'une expérience jumelle avec un modèle *SIA* de calotte polaire. La méthode reste cependant très coûteuse en temps et ressources de calcul puisqu'elle nécessite de corriger \mathbf{K} à chaque itération. De plus, cette méthode suppose que la matrice de covariance d'erreurs d'observation associée au vecteur \mathbf{x}_{obs} est parfaitement connue, ce qui est loin d'être le cas en glaciologie.

De manière générale, le *nudging* n'a été que très peu exploité en glaciologie. Une approche sensiblement différente mais basée sur le principe d'une évolution de modèle sous contrainte a été proposée par [van Pelt *et al.* \(2013\)](#) pour reconstruire la géométrie basale d'un glacier à partir d'un a priori. Celle-ci consiste en un algorithme itératif mesurant l'écart entre l'altitude de surface prédite par le modèle et la surface observée afin de corriger la géométrie basale. Dans le même esprit, nous pouvons également noter les travaux de [Pollard et DeConto \(2012\)](#) qui recourent à un principe similaire mais pour reconstruire le frottement basal.

4.4 Inversion simultanée du frottement et de la géométrie basale

Au cours des sections précédentes, nous avons essentiellement évoqué des études se basant sur les méthodes inverses pour contraindre soit le frottement seul, soit la géométrie du socle rocheux seule. Plusieurs études se sont cependant intéressées au problème adressé dans cette thèse : l'inversion simultanée du frottement (plus précisément le coefficient de frottement β dans (3.5) pour une valeur de m donnée) et de la géométrie du socle rocheux z_b .

Déjà en 2003, [Thorsteinsson *et al.* \(2003\)](#) avaient développé une méthode inverse utilisant les vitesses et les variations de surface pour reconstruire la géométrie basale z_b ainsi que le frottement en utilisant les solutions analytiques de [Gudmundsson \(2003\)](#) pour le transfert de faibles perturbations basales jusqu'à la surface. Ces travaux ont alors été étendus à un approche Bayésienne par [Pralong et Gudmundsson \(2011\)](#) dont nous avons déjà discuté à la section 4.2.2.1.

Plus récemment, [Goldberg et Heimbach \(2013\)](#) ont développé l'adjoint de la conservation de la quantité de mouvement (pour un modèle intégré sur l'épaisseur de [Goldberg \(2011\)](#)) pour inverser simultanément le frottement et la géométrie basale à partir des vitesses de surface observées et ont validé leur méthode sur des cas synthétiques. [Perego *et al.* \(2014\)](#) ont appliqué une méthode similaire sur la totalité du Groenland. Ces derniers ont montré, à l'instar de [Pralong et Gudmundsson \(2011\)](#) et leur approche Bayésienne, que l'ajout d'une fonction coût mesurant l'écart entre variations de surface observées et mesurées (ajoutant une contrainte tel que $\mathbf{d}_{\text{obs}} = (\mathbf{u}_{\text{obs}}, (\partial H / \partial t)_{\text{obs}})$ permettait d'améliorer les performances de la méthode en diminuant notamment les anomalies de divergence de flux mises en avant par [Seroussi *et al.* \(2011\)](#) et évoquées dans l'introduction.

4.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons décrit différentes méthodes d'inversion ou d'assimilation de données qui permettent notamment de mieux contraindre les conditions basales des calottes polaires. Nous nous sommes donc particulièrement intéressés aux différentes méthodes qui ont été employées jusqu'à nos jours pour contraindre le frottement basal et la géométrie du socle rocheux.

Nous nous sommes tout d'abord concentrés sur les méthodes variationnelles en présentant trois méthodes ayant été explorées en glaciologie par différents auteurs : la méthode adjointe, la méthode de Robin et les méthodes bayésiennes (dans leur forme variationnelle). Si nous nous intéressons à l'intérêt des différentes méthodes dans le cadre de l'inversion simultanée du socle rocheux et du frottement basal, nous remarquons que la méthode de Robin offre un intérêt plus limité que les deux autres puisque, de par son implémentation, elle ne permet d'adresser qu'un nombre réduit de problèmes (elle ne permet notamment pas d'inverser le socle rocheux) et n'offre pas la souplesse de la méthode adjointe dans la construction de sa fonction coût. La méthode adjointe est certainement la méthode la plus utilisée actuellement en glaciologie, que ce soit pour contraindre le frottement ou la géométrie basale, voire les deux à la fois. Les méthodes bayésiennes, si elle sont séduisantes par leur approche probabiliste permettant d'évaluer la probabilité d'existence de la solution, semblent toutefois encore peu exploitées pour résoudre ce genre de problème. Enfin, nous avons particulièrement insisté sur la méthode adjointe sur laquelle se base une partie des travaux présentés aux chapitres 5 et 6.

Ce chapitre a également mis en évidence le nombre d'études s'étant déjà intéressées au frottement basal ou à la géométrie du socle rocheux voire les deux. Ces études se sont souvent montrées efficaces pour reconstruire des conditions basales en accord avec les observations de surface. Cependant, peu se sont intéressées à l'impact de ces solutions lorsqu'elles sont utilisées pour initialiser des simulations pronostiques. Cet aspect reste pourtant important pour mieux quantifier l'incertitude sur les simulations liée à l'initialisation des modèles.

Les travaux de thèse présentés dans les deux prochains chapitres sont consacrés à l'inversion des conditions basales (frottement et géométrie du socle) et leur impact dans le cadre de simulations pronostiques. Deux méthodes sont explorées. La première, entièrement basée sur la méthode adjointe, se rapproche des travaux de [Perego et al. \(2014\)](#) ou ceux de [Goldberg et Heimbach \(2013\)](#). La seconde méthode se base sur une toute autre approche de résolution, le *nudging* ou relaxation newtonienne (dans sa version simple) que nous avons introduit dans ce chapitre et que nous adapterons à notre problème. Le chapitre 5 présente les méthodes développées ainsi que les expériences ayant permis de valider celles-ci et compare l'efficacité des deux méthodes. Le chapitre 6 présente une application de ces deux méthodes à un cas réel. On y propose également une approche permettant de quantifier l'incertitude liée aux paramètres reconstruits.

Chapitre 5

Comparaison de deux méthodes d'assimilation de données pour initialiser les conditions basales d'un modèle de calotte glaciaire

Sommaire

5.1	Méthodologie mise en place	74
5.1.1	Modèle direct	74
5.1.2	Fonctions coût	75
5.1.3	Application de la méthode adjointe	76
5.1.4	Adaptation de la relaxation newtonienne	76
5.1.5	Algorithmes Exploités	78
5.2	Validation des méthodes développées sur une expérience jumelle	80
5.2.1	Construction d'une expérience jumelle réaliste	80
5.2.2	Résultats	83
5.2.3	Analyse de sensibilité : fonctionnement des algorithmes dans un cas non-stationnaire	89
5.2.4	Divergence de flux lors d'un pronostique	92
5.2.5	Conclusions et perspectives de cette première expérience	95

Dans ce chapitre, nous explorons deux algorithmes différents pour reconstruire simultanément le frottement basal et la topographie de surface à partir de différentes observations, le but étant ainsi de fournir le meilleur état initial possible pour un modèle d'écoulement de calotte polaire. Plus précisément, l'objectif des deux algorithmes est de trouver un champ

de paramètres $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$, β étant le coefficient de frottement de la loi de frottement basal (3.5) supposée linéaire ($m=1$ dans (3.5)) et z_b l'élévation du socle rocheux. Pour cela, on dispose d'observations du champ de vitesses et du champ de variations d'épaisseur ainsi que d'observations ponctuelles du socle rocheux z_b . Notons qu'avec l'hypothèse d'une loi de frottement (3.5) linéaire, le cisaillement basal, qui conditionne le mouvement basal, prend la forme $\tau_b = \beta \mathbf{u}$. Ce dernier devrait toutefois être indépendant de m puisque nous inversons le frottement pour une géométrie donnée.

Le premier algorithme se base entièrement sur la méthode adjointe (cf. section 4.2.1) pour la reconstruction des deux paramètres de \mathbf{p} . Cet algorithme est ainsi similaire à ceux proposés par [Goldberg et Heimbach \(2013\)](#) et [Perego et al. \(2014\)](#). Le second algorithme mis en place se base sur le même principe mais pour le traitement du coefficient de frottement seulement. La topographie basale, quant à elle, est traitée via un algorithme de relaxation newtonienne aussi appelé *nudging* (cf. section 4.3) adapté à notre problème. Dans les deux cas, le modèle direct utilisé est fourni par les équations de conservation de la quantité de mouvement auquel s'ajoute le principe de conservation de la masse.

Les deux algorithmes présentés sont ensuite appliqués dans le cadre d'une expérience jumelle afin de tester l'efficacité de la méthode en comparant les solutions de frottement et de socle rocheux aux solutions de référence ainsi que leur impact sur une projection d'évolution du glacier.

5.1 Méthodologie mise en place

5.1.1 Modèle direct

En théorie, les deux méthodes inverses développées dans les sections qui suivent peuvent être appliquées à n'importe quel modèle direct d'écoulement, quel que soit sa complexité. Cependant, si l'utilisation d'un modèle de Stokes pour inverser le frottement basal à l'aide de la méthode adjointe ne pose pas de problème et est déjà implémenté dans *Elmer/Ice*, quelques difficultés apparaissent lors de l'application de la même méthode pour reconstruire la géométrie du socle rocheux. En effet, dans le cas d'un modèle de Stokes ou d'un autre modèle 3D, la géométrie du problème dépend du paramètre optimisé. Un changement de géométrie du socle rocheux au cours de l'optimisation engendre alors un changement de la géométrie du domaine, ce qui complique la dérivation des fonctions coût. Le modèle direct utilisé pour les deux méthodes développées ici est donc un modèle *SSA* présenté dans la section 3.2.3 et implémenté dans *Elmer/Ice*. Dans ce cas, le socle rocheux apparaît comme une variable d'état du modèle et changer celui-ci n'implique pas de changement de géométrie du domaine, ce qui facilite la dérivation des fonctions coûts. La relaxation newtonienne ne présente évidemment pas ce problème puisque l'inversion du socle rocheux ne repose pas sur la dérivation des fonctions coûts par rapport à celui-ci, permettant donc d'appliquer la méthode

à n'importe quel modèle direct sans difficulté.

Le modèle direct utilisé comprend donc l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.26), pour laquelle on considère une loi de frottement linéaire telle que $\boldsymbol{\tau}_b = \beta \mathbf{u}$, permettant d'obtenir une solution $\mathbf{u} = (u, v)$. L'équation de continuité intégrée sur l'épaisseur (3.24) de glace vient s'ajouter au système.

5.1.2 Fonctions coût

La recherche du vecteur paramètre $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ se base sur la minimisation de l'écart entre les différentes observations de surface d'une part et leur équivalent modèle d'autre part. En pratique, une première fonction coût mesurant l'écart entre vitesses observées (\mathbf{u}_{obs}) et vitesses modélisées (\mathbf{u}) peut être construite :

$$J_v = \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} (|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{obs}}|)^2 d\Omega \quad (5.1)$$

où Ω_s représente le domaine du glacier et où $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\beta, z_b)$ dépend directement des deux paramètres recherchés selon l'équation (3.26) décrivant le modèle direct *SSA*. Dans le cas où nous disposons d'observations de variations d'épaisseur, une seconde fonction coût peut être ajoutée à celle-ci en mesurant l'écart entre les variations d'épaisseur modélisées $\partial H / \partial t$ et les variations d'épaisseur observées $(\partial H / \partial t)_{\text{obs}}$ (cf. section sur les observations de calottes polaires 2.2) :

$$J_{\text{div}} = \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{\text{obs}} \right]^2 d\Omega \quad (5.2)$$

où $\partial H / \partial t = a - \partial(uH) / \partial x - \partial(vH) / \partial y$ mesure l'écart entre le bilan de masse a et la divergence de flux et est calculé selon l'équation (3.24) (où les vitesses horizontales \mathbf{u} sont équivalentes aux vitesses horizontales intégrées sur l'épaisseur $\bar{\mathbf{u}}$ dans le cas d'un modèle *SSA*). On notera ici que $\partial H / \partial t$ dépend donc directement de l'épaisseur H et donc de $z_b = z_s - H$ mais également, de manière indirecte, de β qui impacte le champ de vitesse $\mathbf{u}(\beta, z_b)$.

Les équations (5.1) et (5.2) peuvent être réécrites pour tenir compte des statistiques d'erreurs via un coefficient de pondération. Nous avons cependant vu que de telles estimations d'erreurs sont rarement disponibles, nous n'introduisons donc pas ce coefficient dans nos différentes expériences et garderons la même pondération pour l'ensemble des observations d'une même fonction coût.

5.1.3 Application de la méthode adjointe

La recherche du vecteur paramètre $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ peut se faire en minimisant les fonctions coût J_v et J_{div} par rapport à \mathbf{p} , le minimum pouvant être obtenu via un algorithme itératif de descente de gradient. Comme nous l'avons vu, les fonctions coûts J_v et J_{div} dépendent indirectement de \mathbf{p} rendant le calcul des gradients complexes. La méthode adjointe introduite au chapitre 4 permet alors de calculer les gradients.

Les observations de vitesses et de taux de variation d'épaisseur de glace étant souvent entachées de bruit, nous ajoutons donc différentes fonctions de régularisation aux fonctions coût basées sur les observations (cf. section 4.2.1.5).

5.1.3.1 Régularisation de la solution

Nous utiliserons deux fonctions de régularisation différentes au cours des expériences présentées dans ce chapitre. La première mesure les variations spatiales d'un paramètre p_i de \mathbf{p} afin de pénaliser les trop fortes variations qui seraient non-physiques, favorisant ainsi les solutions plus lisses :

$$J_{\text{reg}_{p_i}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_i}{\partial y} \right)^2 d\Omega \quad (5.3)$$

Cette fonction de régularisation sera utilisée pour le coefficient de frottement dans les travaux présentés dans ce chapitre et au chapitre 6. La seconde mesure l'écart entre un a priori sur la solution (basé sur des connaissances empiriques ou sur des mesures disponibles) et la solution elle-même :

$$J_{b_{p_i}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{1}{\sigma_p^2} (p_i - p_{i,b})^2 d\Omega \quad (5.4)$$

où $p_{i,b}$ est un a priori sur la i ème variable (elle même définie sous la forme d'un champ sur l'ensemble du domaine Ω_s) de \mathbf{p} et σ_p est une variable permettant de mettre plus ou moins de poids sur l'a priori.

Le calcul du gradient de ces deux fonctions est évidemment beaucoup plus facile que les deux précédents puisque les fonctions J_{reg_i} et J_{b_i} dépendent directement de la variable p_i .

5.1.4 Adaptation de la relaxation newtonienne

La méthode exploitée ici se base sur la relaxation newtonienne (ou *nudging*) afin de reconstruire le meilleur état possible de la topographie basale (z_b) à partir de mesures de celle-ci et de mesures de variations d'épaisseur de glace.

Au chapitre précédent, nous avons décrit le *nudging* comme un algorithme permettant de contraindre un modèle à rester proche des observations au cours du temps. L'utilisation d'une telle méthode pour effectuer une optimisation diagnostique, qui plus est d'un paramètre figé dans le temps (aux échelles qui nous intéressent on peut considérer que le socle rocheux n'évolue pas), peut paraître étrange. Cette idée est en réalité fondée sur l'usage habituel des phases de relaxation dans les modèles (cf. chapitre 1) pour atténuer les anomalies de divergences de flux ($\partial H/\partial t$ excessifs) suite à l'inversion du frottement basal seul. En effet, par définition, la solution stationnaire de l'équation de continuité (3.24) où a est remplacé par un bilan de masse de surface apparent $a - (\partial H/\partial t)_{\text{obs}}$ est le minimum de J_{div} . Une solution alternative à la méthode adjointe présentée à la section précédente pour minimiser J_{div} est donc de laisser le modèle évoluer selon :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = a - \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{\text{obs}} \quad (5.5)$$

où les variations $\partial H/\partial t = \partial z_s/\partial t - \partial z_b/\partial t$ et où nous supposons $\partial z_s/\partial t = 0$ (nous estimons que l'altitude de surface est suffisamment bien connue et que les variations d'épaisseur sont entièrement dues à une mauvaise définition de la topographie basale).

Évidemment, durant cette étape, z_b peut substantiellement dévier des observations. La relaxation newtonienne peut alors être utilisée pour remédier à ce problème en contraignant l'épaisseur à rester aussi proche que possible des observations via un terme de rappel ajouté à l'équation (5.5), permettant de réécrire celle-ci sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = a - \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{\text{obs}} - k(H - H_{\text{obs}}) \quad (5.6)$$

où le coefficient k représente l'amplitude du rappel aux observations en chaque nœud du modèle. En pratique, nous savons que les cartes de socle rocheux deviennent rapidement moins fiables lorsqu'on s'éloigne des observations. Nous définissons donc k sous la forme d'une Gaussienne fonction de la distance aux observations telle que le rappel soit maximal lorsque l'observation est proche et décroisse dès lors qu'on s'en éloigne :

$$k = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{obs}}|}{\sigma} \right)^2} \quad (5.7)$$

où σ représente l'écart-type de la Gaussienne, \mathbf{x}_{obs} la position de l'observation la plus proche par rapport à la position courante \mathbf{x} où l'on résout (5.6).

La relaxation newtonienne permet ainsi d'obtenir une solution z_b faisant le compromis entre la physique du modèle et les observations.

5.1.5 Algorithmes Exploités

Nous disposons maintenant de deux méthodes permettant de construire deux algorithmes d'inversion différents, l'un basé entièrement sur la méthode adjointe et l'autre à la fois sur l'adjoint et sur la relaxation newtonienne.

Avant de présenter ces deux algorithmes, précisons enfin que pour éviter d'obtenir des valeurs de β négatives lors de l'inversion du frottement, ce qui n'aurait pas de sens physique, nous utilisons le changement de variable suivant :

$$\beta = 10^\alpha \tag{5.8}$$

Nous ferons dès lors aussi bien référence au paramètre α qu'au paramètre β lorsque nous parlerons des paramètres optimisés.

5.1.5.1 Adjoint de deux paramètres (ATP)

Cet algorithme se base simplement sur la méthode adjointe pour reconstruire à la fois z_b et β .

Outre les fonctions J_v et J_{div} , les fonctions (5.3) et (5.4) nous permettent d'ajouter certaines contraintes sur la solution. Suivant de nombreuses études ([Jay-Allemand et al., 2011](#); [Gillet-Chaulet et al., 2012](#); [Fürst et al., 2015](#)), nous appliquons (5.3) au paramètre β afin de lisser la solution et éviter des variations trop brusques de β . Les mesures de z_b le long des lignes de vols permettent également de construire un a priori sur la solution et contraindre la solution à rester proche de celui-ci via (5.4). Ceci nous permet de construire une fonction coût totale :

$$J_{ATP}(\alpha, z_b) = J_v + \lambda_{div} J_{div} + \lambda_\alpha J_{reg_\alpha} + \lambda_{z_b} J_{b_{z_b}} \tag{5.9}$$

où λ_{div} , λ_α et λ_{z_b} permettent de donner plus ou moins de poids à une fonction vis-à-vis des autres. La recherche d'un état optimal pour ces trois paramètres peut résulter d'une approche similaire à ce qui est fait avec la *courbe en L* quand il n'existe qu'un seul paramètre de régularisation à identifier. Les valeurs J_v , J_{div} , J_{reg_α} et J_{z_b} peuvent alors être comparées pour une série de triplets (λ_{div} , λ_α et λ_{z_b}).

Pour cet algorithme, on se réfèrera dorénavant à l'acronyme **ATP** (de l'anglais *Adjoint for Two Parameters*) utilisé dans l'article dédié à la présentation de ces méthodes ([Mosbeux et al., 2016](#)).

5.1.5.2 Cycles Adjoint-Relaxation Newtonienne (ANC)

Dans cet algorithme, deux étapes sont répétées successivement. A partir d'un état initial $\mathbf{p}_0 = (\beta_0, z_{b,0})$, on alterne des étapes d'inversion et *denudding* jusqu'à atteindre un critère de convergence. L'étape d'inversion par la méthode adjointe repose ainsi sur la minimisation de la fonction coût totale :

$$J_{\text{ANC}}(\alpha) = J_v + \lambda_{\text{div}} J_{\text{div}} + \lambda_\alpha J_{\text{reg}_\alpha}. \quad (5.10)$$

permettant, suite à une $i + 1$ ème étape, d'obtenir une solution $\beta_{i+1} = 10^{\alpha_{i+1}}$. La topographie basale $z_{b,j}(\beta_{i+1})$ peut ensuite être optimisée au cours d'une $j + 1$ ème étape en résolvant (5.6) pour une période T . La période T doit être optimisée afin de n'être ni trop longue ni trop courte, permettant une réduction suffisante de J_{div} sans pour autant obtenir une solution trop proche de la stationnarité. En effet, une solution stationnaire signifierait que la $j + 1$ ème solution $z_{b,j+1}(\beta_{i+1})$ serait parfaitement adaptée à β_{i+1} , diminuant fortement l'optimisation à l'étape suivante. Le choix de T , à l'instar des paramètres de régularisation, impacte donc directement la solution $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ obtenue à la fin de l'algorithme cyclique et la sensibilité de \mathbf{p} à la valeur de T doit être étudiée.

L'algorithme cyclique peut finalement être arrêté lorsque les solutions β_n et $z_{b,n}$ n'évoquent plus d'une étape à l'autre. En pratique, cette condition est considérée remplie lorsque les changements sur J_v et J_{div} entre deux cycles sont inférieurs à 1%. Le principe de l'algorithme est schématisé à la Figure 5.1.

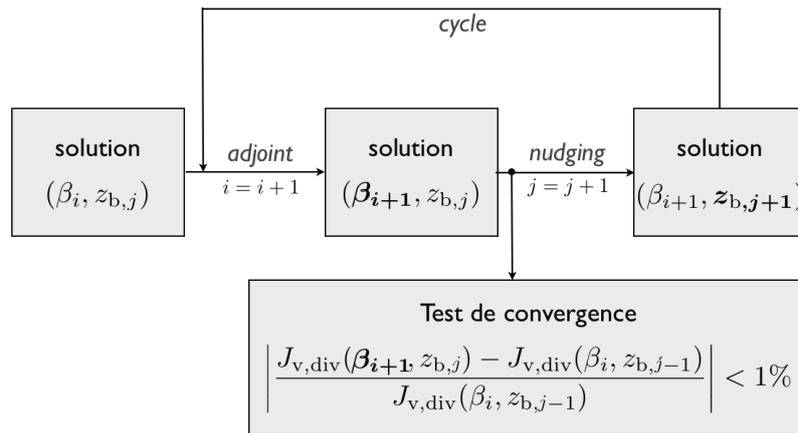


FIGURE 5.1 – Schéma de l'algorithme cyclique adjoint-relaxation newtonienne (ANC) à partir d'une solution $\beta_i, z_{b,j}$. Les caractères en gras (β_{i+1} et $z_{b,j+1}$) indiquent le résultat correspondant à l'étape courante (adjoint ou *nudging*). L'algorithme est arrêté une fois le critère d'arrêt satisfait.

Pour cet algorithme, on se référera dorénavant à l'acronyme **ANC** (de l'anglais *Adjoint-Nudging Cycles*) également utilisé dans l'article dédié à la présentation de ces méthodes.

5.1.5.3 Adjoint pour le frottement seulement (AFO)

Enfin, présentons rapidement un dernier algorithme basé sur la méthode adjointe et consistant à inverser uniquement le coefficient de frottement β . Ce type d'inversion se base habituellement sur la minimisation d'une fonction composée de la fonction coût (5.1) et d'une fonction de régularisation (4.14), prenant alors la forme :

$$J_{AFO}(\alpha) = J_v + \lambda_\alpha J_{\text{reg}_\alpha} \quad (5.11)$$

où λ_α peut être choisi via une *courbe en L* classique.

Nous ferons référence à cet algorithme sous le nom de **AFO** (acronyme anglais de *Adjoint for Friction Only*).

5.2 Validation des méthodes développées sur une expérience jumelle

Le but des travaux et résultats présentés dans les sections qui suivent est de tester la validité des deux algorithmes d'assimilation proposés. Pour ce faire, une expérience jumelle, où tous les paramètres sont parfaitement connus, est créée afin de construire un système de référence. De là, certaines informations du système seront dégradées, l'objectif étant alors de reconstruire le système dans un état aussi proche que possible de celui de référence.

5.2.1 Construction d'une expérience jumelle réaliste

5.2.1.1 Expérience de Référence

Le cas de référence est construit à partir d'une ligne de courant du glacier du *Jakobshavn* situé dans la partie ouest du Groenland et passant par son fjord. Ce glacier est l'un des trois plus grands glaciers émissaires du Groenland et possède l'un des plus grands bassins versant de la côte ouest (Bindschadler, 1984). C'est également l'un des glaciers les plus rapides du Groenland avec une vitesse supérieure à 13 km a⁻¹ au niveau de son terminus (Joughin et al., 2008, 2014).

La ligne de courant étudiée parcourt le glacier du front de glace jusqu'aux limites du bassin versant, s'étendant ainsi sur 550 km. La topographie basale de référence est tirée des données de Bamber et al. (2013) tandis que le coefficient de frottement basal β est inversé à partir des vitesses de surface observées (Joughin et al., 2010). Une relaxation de la surface est ensuite effectuée jusqu'à obtenir un cas stationnaire ($\partial H/\partial t = 0$) qui sera utilisé comme référence pour les expériences inverses. Cette relaxation est réalisée avec un bilan de masse (a dans l'équation (3.24)) ajusté afin de tenir compte de la convergence (notamment au niveau

du fjord) ou divergence de flux latérale à l'écoulement. Notons que la robustesse de l'inversion sera également testée dans des cas non-stationnaires créés à partir de perturbations de ce cas de référence.

La géométrie est discrétisée en une série de 500 éléments linéaires dont la taille diminue au fur et à mesure qu'on s'approche du front du glacier, permettant d'avoir une résolution accrue dans les zones où les vitesses d'écoulement sont plus élevées. La taille des éléments varie ainsi entre 2 km dans la partie amont de la ligne de flux et 400 m dans la partie aval.

Le modèle étant 1D, des conditions limites doivent être appliquées aux deux extrémités de la ligne de courant. Une condition limite de Neumann tenant compte de la pression d'eau au front du glacier en contact avec l'océan est appliquée à la fin de la ligne de courant selon (3.16). Une condition de Dirichlet est appliquée au départ de la ligne de courant qui constitue la limite du bassin versant du Jakobshavn en imposant une vitesse nulle $u = 0$.

Notons finalement que les résultats présentés se concentrent sur les 100 premiers km en partant du front du glacier, région correspondant à des vitesses d'écoulement supérieures à 100 m a^{-1} où le modèle direct utilisé (*SSA*) est plus approprié. Les deux algorithmes ont néanmoins été appliqués sur l'ensemble de la ligne de flux.

5.2.1.2 Création d'un ensemble d'observations

Différentes observations synthétiques sont générées à partir de ce cas de référence en dégradant l'information initiale et/ou en l'échantillonnant. Ces différentes observations ainsi qu'une représentation du cas de référence sont données à la Figure 5.2.

Vitesses de surface

Les vitesses de surface sont considérées observées à la même résolution spatiale que les vitesses de référence mais en y ajoutant un bruit blanc gaussien avec une moyenne nulle ($\mu = 0$) et un écart-type $\sigma = 50 \text{ m a}^{-1}$, donnant une erreur moyenne d'observation au sens des moindres carrés (erreur rms) égale à 47.8 m a^{-1} . Les vitesses observées, les vitesses de référence et la différence (en valeur absolue) entre les deux sont présentées à la Figure 5.2c.

Bilan de masse et taux de variation d'épaisseur

Le bilan de masse a et les variations d'épaisseur de glace $(\partial H \partial t)_{\text{obs}}$ sont considérés parfaitement connus pour l'ensemble des expériences réalisées. Notons également que nous négligeons la fonte ou l'accumulation basale ($a = a_s$).

Observations d'élévation de surface et de géométrie basale

L'élévation de surface est également considérée parfaitement connue.

La topographie basale, par contre, n'est considérée connue que tous les 10 km, simulant ainsi les lignes de vols radar utilisées dans les cartes de topographie basale comme celle de [Bamber *et al.* \(2013\)](#) pour le Groenland. Comme pour les vitesses observées, un bruit blanc gaussien avec une moyenne nulle et un écart type $\sigma = 50$ m est ajouté à cet ensemble de données, induisant une erreur rms de 62.4 m sur les 55 observations ($\text{rms} = \sqrt{\sum_{i=1}^{55} (z_{b,i} - z_{b,i}^{\text{obs}})^2 / 55}$) disséminées le long de la ligne d'écoulement du même ordre que l'erreur moyenne évaluée le long des lignes de vols ([Fretwell *et al.*, 2013](#); [Bamber *et al.*, 2013](#)). Ces données sont ensuite interpolées linéairement afin de définir une solution a priori pour z_b et pouvant être utilisée pour les deux méthodes d'assimilation (voir Figure 5.2a).

Autres paramètres du modèle

La fluidité de la glace A dans l'équation (3.3), permettant de calculer la viscosité η dans l'équation (3.26), est considérée parfaitement connue et correspond à celle utilisée dans l'expérience de référence.

De manière réaliste, nous considérons qu'aucune mesure du coefficient de frottement β n'est disponible. Une bonne première approximation des contraintes de cisaillement basal peut cependant être donnée par une hypothèse du type *SIA* en estimant que celle-ci n'est fonction que du poids de glace et de la pente de surface, tel que :

$$\tau_b(x) = \beta_{\text{ini}}(x)|u(x)| = \rho_i g H(x) |\partial_x z_s(x)| \quad (5.12)$$

où $H(x)$, $\partial_x z_s(x)$ et $u(x)$ représentent respectivement l'épaisseur de glace, la pente de surface et la vitesse de surface en un point x du glacier. Le cisaillement basal de référence τ_b et son a priori τ_{ini} sont présentés à la Figure 5.2b.

5.2.1.3 Erreur initiale

La valeur du coefficient de frottement β et celle de τ_b étant intimement liées, l'erreur initiale sur le frottement peut être évaluée via l'erreur moyenne initiale sur la contrainte de cisaillement basal. Nous définissons alors celle-ci selon :

$$\varepsilon_{\tau_b} = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} \frac{|\tau_b| - |\tau_{b,\text{ref}}|}{|\tau_{b,\text{ref}}|} d\Gamma, \quad (5.13)$$

où $\tau_{b,\text{ref}}$ est la contrainte de cisaillement basal de référence et L la longueur de la ligne de courant. L'erreur relative sur τ_b avec β_{ini} est de 394 %.

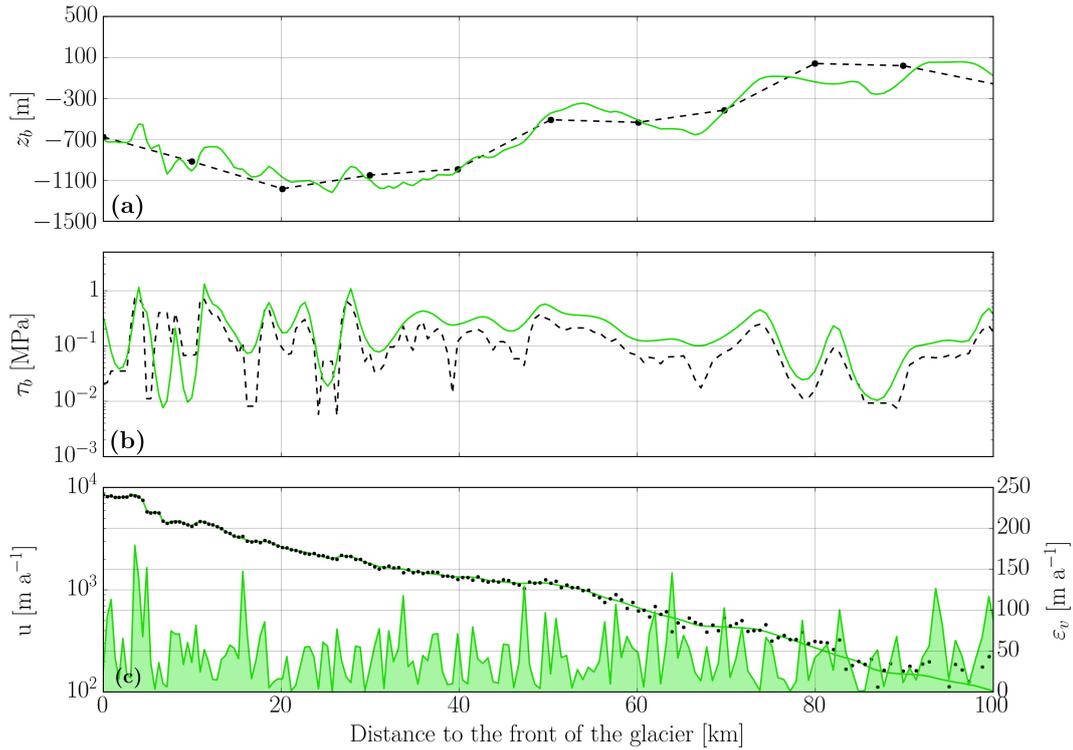


FIGURE 5.2 – Référence (lignes en trait plein) et état initial (lignes en pointillés) pour (a) la géométrie du socle rocheux z_b , (b) le cisaillement basal estimé $\tau_b = \beta u$ et (c) les vitesses de surface. En (a), les observations synthétiques disponibles tous les 10 km sont représentées par les cercles noirs pleins. En (c), les vitesses observées sont représentées par des cercles noirs tandis que l'aire verte sous la courbe représente la différence en valeur absolue entre les vitesses observées et celles de référence (ε_v , axe de droite).

Les erreurs rms sur les vitesses de surface ($\text{rms}_u = \sqrt{2J_v/L}$) et le taux de variation d'épaisseur ($\text{rms}_{\text{div}} = \sqrt{2J_{\text{div}}/L}$) de glace entre le cas de référence (sans erreur) et l'état initial défini ci-dessus sont respectivement égales à 761 et 357 m a^{-1} .

Les différentes statistiques d'erreurs présentées ici pourront être comparées avec les erreurs après l'inversion de β et z_b à l'aide des deux algorithmes ANC et ATP ainsi qu'après l'inversion de β seulement (AFO) afin d'évaluer leurs performances.

5.2.2 Résultats

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus avec les algorithmes ATP et ANC ainsi qu'une analyse critique de ceux-ci. Les erreurs avant inversion (cf. section 5.2.1.3) et après inversion avec l'ATP et l'ANC sont présentées au tableau 5.1.

	erreur d'observation	état initial	AFO	ATP ($\lambda_{\text{div}} = 1$)	ANC
rms_u [m a ⁻¹]	47.8	761	43.3	49.7	46.1
rms_{div} [m a ⁻¹]	0	357	147.8	19.2	15.8
ε_{τ_b} [%]	-	394	36	25	30

TABLE 5.1 – Tableau récapitulatif des performances de l’ATP et l’ANC ainsi que l’AFO (inversion du frottement seul) par rapport à l’a priori sur la solution utilisé pour initialiser les deux algorithmes.

5.2.2.1 Résultats de l’adjoint de deux paramètres (ATP)

Le choix des paramètres de régularisation optimaux nécessite de tester de nombreuses valeurs pour chacun des paramètres λ_{div} , λ_α et λ_{z_b} . Pour cette expérience jumelle, les fonctions coût J_v (5.1) et J_{div} (5.2) ayant un poids similaire, nous garderons $\lambda_{\text{div}} = 1$ afin de ne pas favoriser la minimisation de l’une des fonctions coût vis-à-vis de l’autre.

Les deux autres paramètres de régularisation sont optimisés via un ensemble de 255 paires (λ_α , λ_{z_b}). L’erreur sur les différentes fonctions coût après 500 itérations (permettant une bonne minimisation de J_v et J_{div}) pour chacune des paires peut alors être représentée *courbe en L* et présentée à la Figure 5.3. Celle-ci montre que les paires optimisant bien l’écart sur les vitesses (rms_u faible) permettent également d’optimiser l’écart entre taux de variation d’épaisseur de glace observés et modélisés (rms_{div} faible). La Figure 5.3b montre également que les valeurs de J_{z_b} les plus faibles, correspondant à de très faibles changements de z_b par rapport à la solution initiale (l’a priori sur z_b), ne permettent pas d’optimiser les vitesses ou le taux de variation d’épaisseur de glace. La relation entre J_{reg_α} et les erreurs rms_u et rms_{div} (Figure 5.3a) est cependant moins claire et ne permet pas de retirer une véritable tendance.

Les deux graphiques montrent également une forte densité de points pour des valeurs rms_u et rms_{div} assez faibles. La paire ($\lambda_\alpha = 10^{11}$, $\lambda_{z_b} = 10^7$) semble néanmoins sortir du lot en faisant le compromis entre bonne reproduction des observations et régularisation. En effet, parmi les points présentant les rms_u et rms_{div} les plus faibles, c’est le point offrant une régularisation suffisante du coefficient de frottement α pour s’affranchir du bruit sur les observations de vitesses (J_{reg_α} intermédiaire) tout en s’écartant le moins de l’a priori sur z_b (J_{z_b} faible). La descente du gradient pour cet optimum est ensuite relancée jusqu’à 3000 itérations, permettant de minimiser encore un peu J_v et J_{div} . L’optimisation simultanée de β et z_b pour le couple ($\lambda_\beta = 10^{11}$, $\lambda_{z_b} = 10^7$) permet finalement d’obtenir un erreur rms_u de 49.7 m a⁻¹ (contre 55.7 m a⁻¹ après 500 itérations) très proche de l’erreur rms d’observation (47.8 m a⁻¹) sans sur-ajuster les données. L’erreur rms_{div} est également fortement diminuée suite à l’inversion puisqu’elle atteint 19.2 m a⁻¹ (20.2 m a⁻¹ après 500 itérations) contre 357 m a⁻¹ pour l’état initial, soit une réduction d’un facteur 20.

Lorsque l’on s’intéresse aux contraintes de cisaillement basal ($\tau_b = \beta u$), on remarque que l’erreur relative moyenne mesurée le long de la ligne d’écoulement selon (5.13) est de seulement 25 % par rapport à la contrainte de référence $\tau_{b,\text{ref}}$, soit une diminution de plus

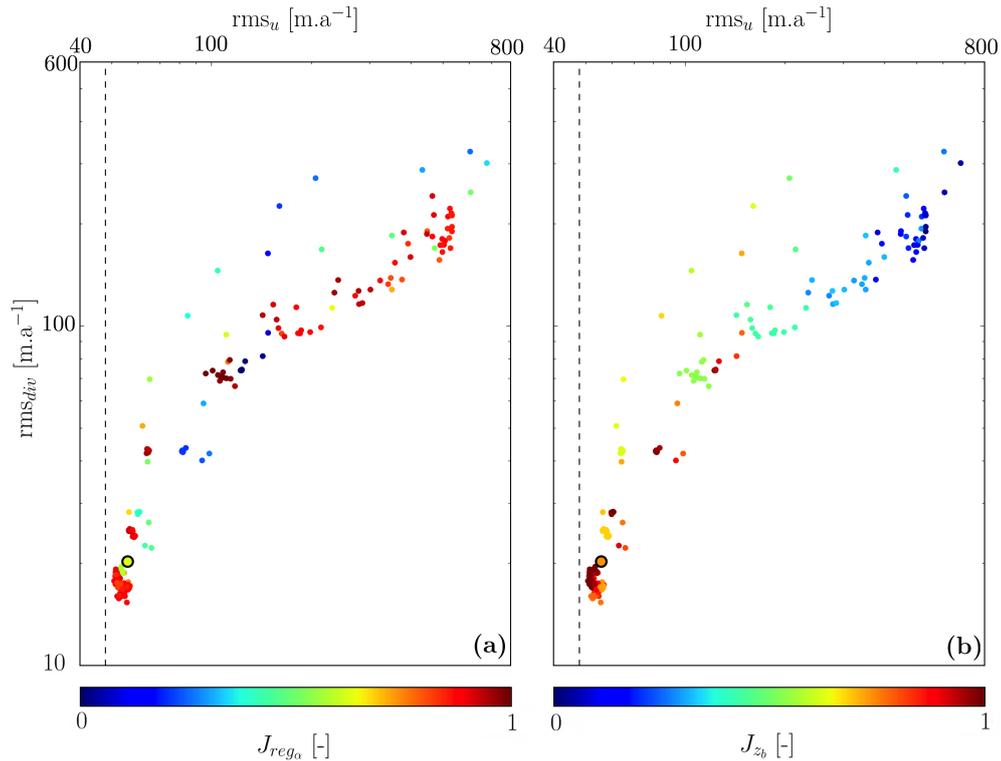


FIGURE 5.3 – Erreur moyenne sur le taux de variation d'épaisseur (rms_{div}) en fonction de l'erreur sur les vitesses (rms_u) pour les 255 paires de paramètres de régularisation (λ_α , λ_{z_b}). L'échelle de couleur représente la valeur des fonctions de régularisation normalisées (a) J_{reg_α} and (b) J_{z_b} (0 correspond à la plus faible valeur et 1 à la plus haute valeur obtenue pour les 255 paires). La paire optimale choisie ($\lambda_\alpha = 10^{11}$, $\lambda_{z_b} = 10^7$) est entourée d'un bord noir. L'erreur rms d'observation sur les vitesses est tracée en pointillé.

d'un facteur 10 par rapport à l'erreur commise avec les valeurs a priori β_{ini} et $z_{b,b}$. On remarque seulement une contrainte basale sur-estimée près du front du glacier (3 zones dans les 10 premiers kilomètres) en raison d'un coefficient β très faible. Ces sur-estimations n'ont cependant pas d'impact significatif sur l'écoulement puisqu'en dessous d'une certaine valeur de β , la contrainte τ_b devient négligeable si bien que le glissement est quasi-parfait et qu'une diminution additionnelle de β (et donc de τ_b) n'aura pas d'influence. Un raisonnement similaire s'applique lorsque le frottement est tel que le glacier ne glisse quasiment plus et où une augmentation de β n'aura pas non plus d'impact sur l'écoulement.

Le socle rocheux z_b est bien reconstruit dans les 50 premiers kilomètres en amont du front du glacier. L'écart par rapport au socle de référence augmente néanmoins plus en amont où les vitesses d'écoulement sont beaucoup plus faibles et ont donc un poids moins important dans la fonction J_v , diminuant l'optimisation de la solution dans ces régions. Notons que ce phénomène pourrait être atténué via l'utilisation d'une fonction coût logarithmique permettant d'accroître le poids relatif des zones de plus faibles vitesses au sein de la fonction coût (Morlighem *et al.*, 2010) mais en augmentant le risque de modéliser une partie du bruit dans ces zones où ce dernier est relativement élevé vis-à-vis des observations.

A l’instar de [Perego *et al.* \(2014\)](#), nous avons testé l’influence de la fonction J_{div} dans la fonction coût totale (5.9) en réalisant la même expérience mais sans J_{div} (en posant $\lambda_{\text{div}} = 0$, c’est à dire sans intégrer les observations $\partial H/\partial t$ lors de l’inversion) afin d’évaluer son impact sur l’inversion. Les résultats de cette nouvelle optimisation sont présentés à la Figure 5.4 au coté des résultats précédents. Les résultats montrent que l’absence de J_{div} affecte légèrement la reconstruction de β avec une erreur relative moyenne sur τ_b de 31 % pour l’ensemble de la ligne de flux par rapport aux 25 % obtenus dans le cas tenant compte de J_{div} . Ce phénomène avait déjà été remarqué par [Perego *et al.* \(2014\)](#) dans l’une de leur expérience. Par contre, la reconstruction de z_b est beaucoup moins bonne et montre des variations spatiales excessives qui n’étaient pas présentes lors de l’optimisation de J_{div} . L’optimisation de cette dernière a donc un effet de régularisation conséquent sur la solution z_b et permet d’améliorer très sensiblement la solution inverse.

Les tests précédents ont été réalisés sans aucun bruit sur les observations de variation d’épaisseur $(\partial H/\partial t)_{\text{obs}}$. Nous avons donc effectué quelques tests afin d’évaluer l’impact de la présence de bruit sur ces observations. Ces tests montrent que ce bruit a peu d’impact sur l’optimisation même pour un écart-type aussi important que $\sigma = 50 \text{ m a}^{-1}$. De même, l’introduction d’un biais systématique du même ordre de grandeur que a n’impacte pas non plus significativement l’optimisation. Une analyse plus précise de l’impact d’un tel bruit est effectuée à la section 5.2.3.

5.2.2.2 Résultats du cycle adjoint-relaxation newtonienne (ANC)

Les deux étapes distinctes de l’ANC, répétées de manière cyclique, dépendent ici de différents paramètres qu’il est donc nécessaire d’optimiser. En effet, les étapes d’optimisation de $\alpha = \log(\beta)$ dépendent des valeurs de λ_α et λ_{div} . Le paramètre λ_{div} est gardé égal à 1 comme pour l’ATP tandis que $\lambda_\alpha = 5 \times 10^9$, valeur choisie selon un *une courbe en L* classique permettant de lisser α au maximum sans impacter la valeur de J_v . Les étapes de relaxation newtonienne dépendent de deux autres paramètres, le temps de relaxation T et la valeur de l’écart-type σ choisie pour k dans l’équation (5.7).

La période T de relaxation newtonienne influence le degré d’évolution de J_v et J_{div} après chaque cycle puisqu’au cours de celle-ci J_{div} aura tendance à diminuer. Ceci est parfaitement illustré par la Figure 5.5 qui montre une claire diminution de rms_{div} au fur et à mesure que la durée de T augmente. Cependant, durant cette étape de *nudging*, aucune contrainte n’est imposée sur les vitesses qui peuvent s’écarter significativement des observations. Une évolution importante de la topographie du socle (liée à une longue période T), diminuant fortement J_{div} se fait donc souvent au détriment de l’optimisation des vitesses, entraînant une augmentation de rms_u . Or, une trop grande évolution du champ de vitesses signifierait que la solution z_b issue de cette étape de *nudging* ne correspond pas aux vitesses observées. Ainsi, la Figure 5.5b montre que rms_{div} diminue au fur et à mesure que T augmente pour des périodes allant de 0 à 1 an, atteignant une valeur minimale de 15.8 m a^{-1} lorsque $T = 1 \text{ a}$. Pour des

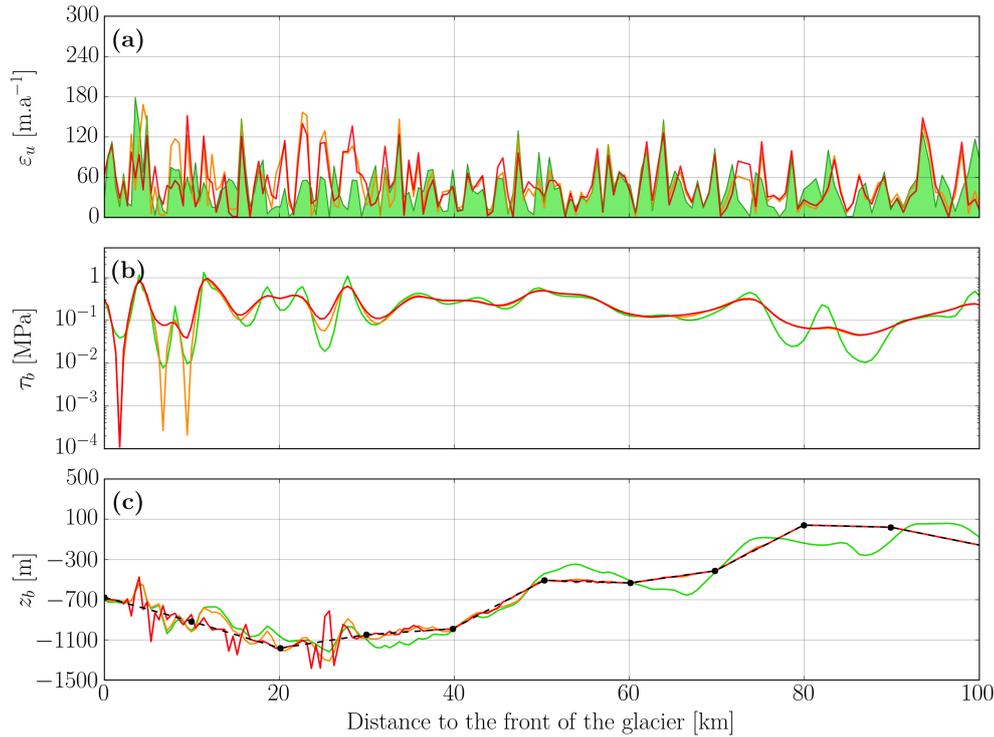


FIGURE 5.4 – Résultats de l'ATP avec (en orange) et sans optimisation (en rouge) de J_{div} . (a) Différence absolue entre vitesses observées et modélisées, (b) traction basale estimée et (c) topographie basale estimée. L'aire en vert représente le bruit ajouté à la solution de vitesses de référence pour créer nos observations de vitesses. Les courbes vertes représentent les solutions de référence et les courbes noires en pointillé représentent les solutions initiales.

périodes $T > 1$ a, rms_{div} a tendance à osciller et à ne plus descendre. Il est plus difficile de corréler T et rms_u et de déduire l'impact réel qu'engendreraient des périodes T trop longues sur l'erreur rms_u . En effet, dans tous les cas, l'erreur rms_u obtenue reste inférieure à l'erreur d'observation, ce qui indique que les vitesses modélisées restent toujours bien optimisées et reproduisent même une part de bruit. Notons néanmoins que ce sur-ajustement des données est très léger (rms_u au maximum 1.9 m a^{-1} sous la valeur rms du bruit d'observation) et, comme nous le verrons plus tard, impacte peu la solution $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$. Il semblerait donc que même dans le cas de longues périodes de relaxation newtonienne, la méthode ne perd pas le contrôle sur l'optimisation des vitesses. A la vue de ces résultats, une période $T = 1$ a semble optimale dans notre cas puisqu'elle permet à z_b d'évoluer suffisamment, impactant donc significativement l'erreur rms_{div} , tout en gardant une erreur rms_u faible.

Différentes valeurs d'écart-type σ pour le coefficient de rappel k ont également été testées afin de mesurer leur impact sur le *nudging*. Il en ressort que des valeurs supérieures à 1 km sont excessives et induisent un rappel trop important lorsqu'on s'éloigne des observations. Ceci conduit à un socle rocheux trop loin du socle de référence dès la première période de *nudging* et engendrant des valeurs rms_u et rms_{div} extrêmement élevées. Des valeurs inférieures à 1 km ont un impact moins important sur le résultat final. Un graphique traçant rms_u et

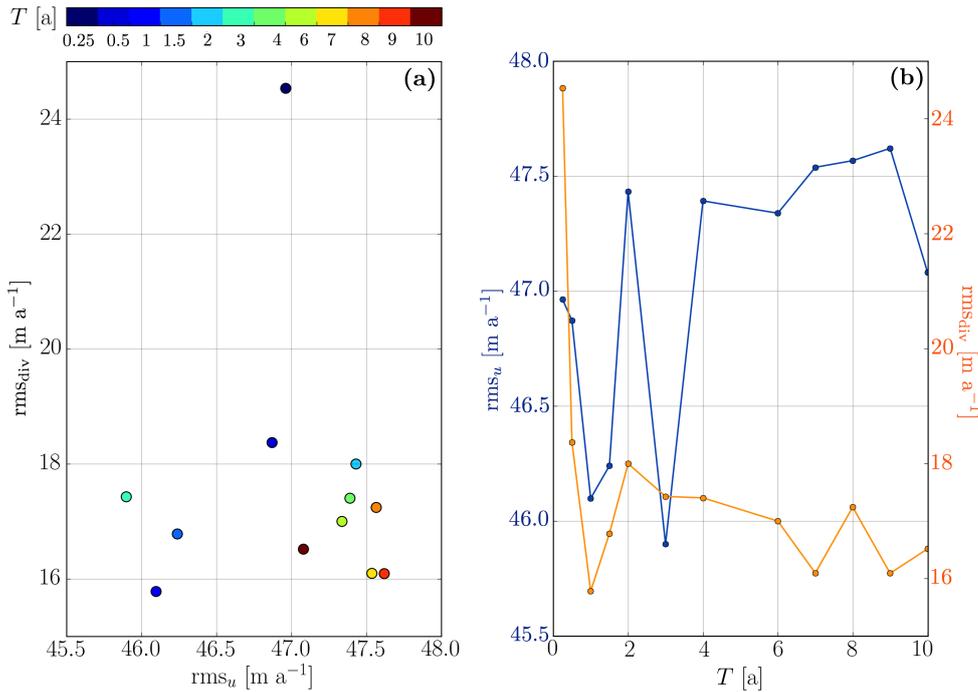


FIGURE 5.5 – Erreur rms_u et rms_{div} en fonction de la période de nudging T . (a) La couleur des points représente l'étendue de la période T . (b) La courbe bleue correspond à l'erreur rms_u et la courbe orange à l'erreur rms_{div} tandis que les points correspondent aux différentes valeurs testées

rms_{div} en fonction de σ (pour des valeurs inférieures ou égales à 1 km, soit 1/10 ème de l'écart entre les observations z_b) est montré à la Figure 5.6. La valeur de 1 km est celle qui optimise au mieux J_{div} et donne donc la valeur rms_{div} la plus faible. C'est donc cette valeur qui a été adoptée pour le résultat de l'ANC présenté à la Figure 5.7.

Le résultat de l'ANC (obtenu avec les valeurs de paramètres $\lambda_\alpha = 5 \times 10^9$, $\lambda_{div} = 1$, $T=1$ a et $\sigma = 1000$ m) montre une bonne adéquation avec les vitesses observées avec une valeur rms_u de 46.1 m a⁻¹. Cette valeur légèrement en dessous de l'erreur d'observation implique, comme nous l'avons déjà dit, un léger sur-ajustement par rapport aux données. Le champ de vitesses reproduit donc une petite partie du bruit blanc ajouté aux observations de vitesses. Ce sur-ajustement est certainement dû au fait que λ_α a été optimisée via une *courbe en L* pour la première optimisation du frottement. La valeur $\lambda_\alpha = 5 \times 10^9$ ne varie donc pas au cours des cycles et ne correspond sans doute plus parfaitement à un optimal pour les cycles d'inversion suivants. La Figure 5.7a montre cependant que malgré ce sur-ajustement, les vitesses modélisées permettent généralement de s'affranchir du bruit puisque la distribution de l'erreur absolue (ε_u) sur les vitesses modélisées coïncide généralement avec celle de l'erreur d'observation. L'erreur rms_{div} est également bien diminuée et atteint 15.8 m a⁻¹.

Cette bonne minimisation des erreurs rms_u et rms_{div} permet de très bien reproduire le frottement avec une contrainte basale τ_b présentant un écart de 30 % par rapport à $\tau_{b,ref}$ malgré quelques variations excessives dans certaines zones. De même, la géométrie du socle

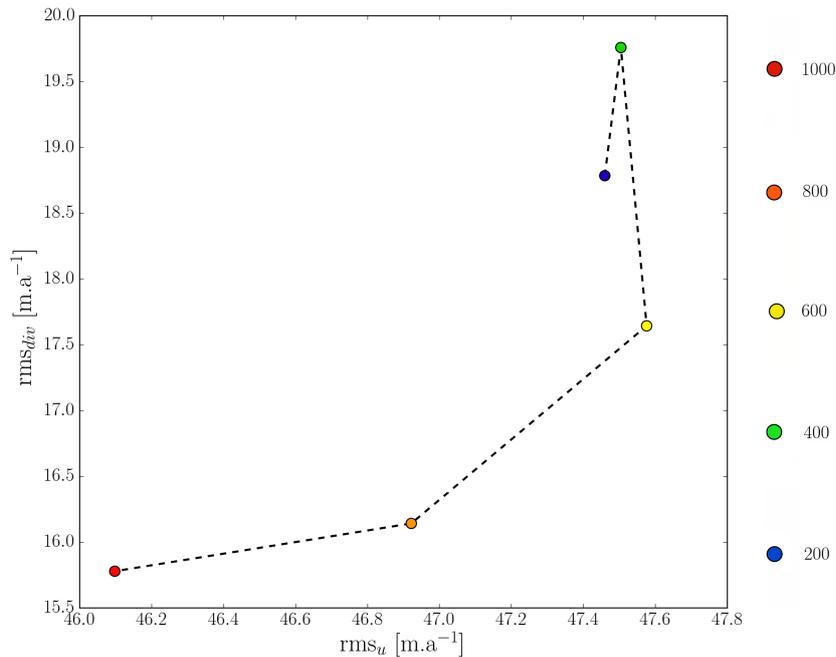


FIGURE 5.6 – Erreur rms_u et rms_{div} en fonction de l'écart-type σ (200 m, 400 m, 600 m, 800 m, 1000 m) du coefficient de rappel k utilisé pour le *nudging*.

rocheux z_b est très bien reproduite sur la quasi totalité des 100 premiers kilomètres en partant du front. Cette nouvelle géométrie est aussi plus proche de celle de référence que ne l'est celle obtenue via l'ATP. Ce dernier constat met en avant la sensibilité de l'algorithme ANC par rapport à celle de l'ATP dans les régions les plus lentes. Notons cependant que z_b s'écarte significativement de $z_{b,ref}$ entre 80 et 100 km par rapport au front du glacier où β est également moins bien résolu.

Enfin, comme pour l'ATP, nous avons testé l'influence de la présence de bruit sur les observations $(\partial H/\partial t)_{obs}$. On remarque que la présence d'un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type $\sigma = 50 \text{ m a}^{-1}$ sur les observations $(\partial H/\partial t)_{obs}$ n'a pas d'impact significatif sur la reconstruction de β et z_b . Par contre, la présence d'un biais systématique sur $(\partial H/\partial t)_{obs}$ a un impact direct sur les étapes de *nudging* créant finalement un biais sur la solution z_b proportionnel au biais introduit sur les observations de variation d'épaisseur, ce qui n'était pas le cas de l'ATP. L'ANC est donc plus sensible à ce type d'erreur d'observation que l'ATP comme le montre les résultats obtenus à la section 5.2.3.

5.2.3 Analyse de sensibilité : fonctionnement des algorithmes dans un cas non-stationnaire

L'objectif de cette section est de tester l'efficacité de l'algorithme sur des cas non-stationnaires, c'est-à-dire lorsque $(\partial H/\partial t)_{obs} \neq 0$ et donc d'initialiser un modèle de glacier qui serait en déséquilibre à un instant t donné à partir d'observations de celui-ci au même instant.

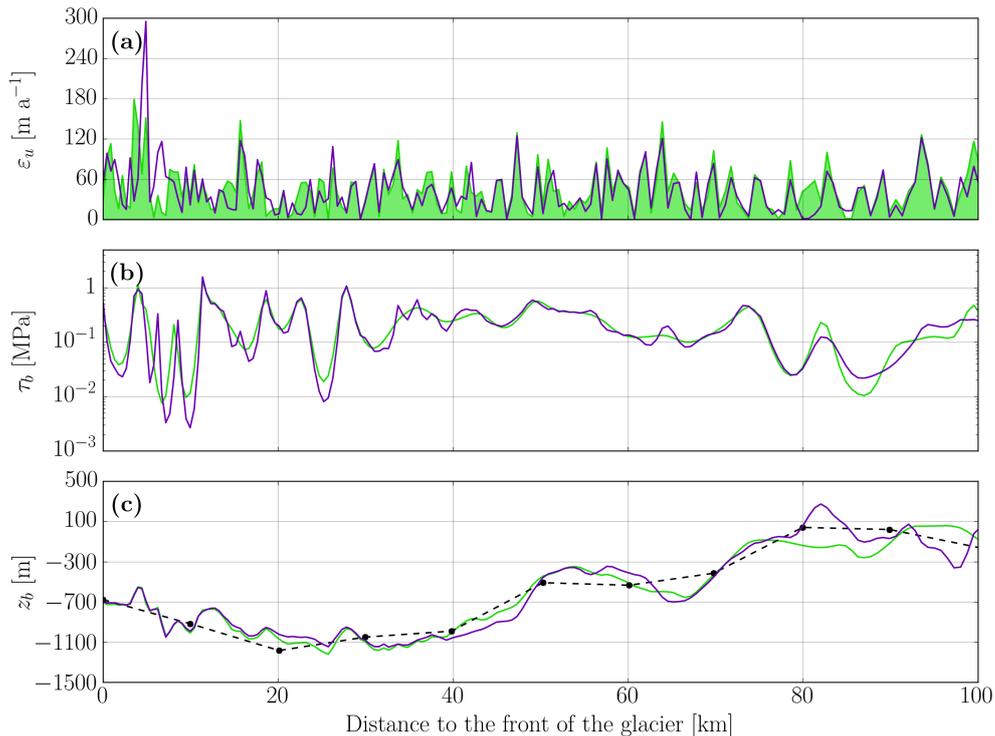


FIGURE 5.7 – Résultats de l’ANC (violet) : **(a)** différence absolue entre vitesses observées et modélisées, **(b)** traction basale estimée et **(c)** topographie basale estimée. L’aire en vert représente le bruit ajouté à la solution de vitesses de référence pour créer nos observations de vitesses. Les courbes vertes représentent les solutions de référence et les courbes noires en pointillé représentent les solutions initiales.

L’instationnarité du glacier est ici créée en modifiant le coefficient de frottement de référence (correspondant au cas à l’équilibre). Le coefficient β_{ref} est ainsi multiplié par 2, 3, 4, 5 et 10. Cette augmentation du coefficient de frottement engendre un déséquilibre du glacier qui induit une augmentation de l’épaisseur de glace et une diminution des vitesses d’écoulement. Nous laissons alors le glacier évoluer durant 5 ans (pour les 5 cas de perturbation) selon l’équation d’évolution du bilan de masse (3.24), permettant d’obtenir des $(\partial H/\partial t)_{\text{obs}}$ du même ordre de grandeur que le bilan de masse de surface a (cf. Figure 5.8) et appliquons l’ATP et l’ANC à partir de ces nouvelles configurations de glacier pour retrouver β et z_b .

Les résultats de l’optimisation via l’ATP et l’ANC pour les 5 cas de perturbation sont respectivement illustrés aux Figures 5.9 et 5.10. Les deux méthodes donnent des erreurs rms assez similaires sur les vitesses et le taux de variation d’épaisseur. L’erreur rms_u varie ainsi de 47.8 à 52.3 m a^{-1} pour l’ATP et 45.9 à 47.2 m a^{-1} pour l’ANC tandis que l’erreur rms_{div} varie de 12.7 à 21.8 m a^{-1} pour l’ATP et 12.5 à 21.5 m a^{-1} pour l’ANC, en fonction de l’amplitude de la perturbation.

Dans les deux cas, le coefficient de frottement β est bien reproduit avec des erreurs relatives moyennes sur τ_b , évaluées selon l’équation (5.13), allant de 20 à 28 % pour l’ATP et de 22 à 30 % pour l’ANC. Les deux algorithmes permettent également d’améliorer z_b par

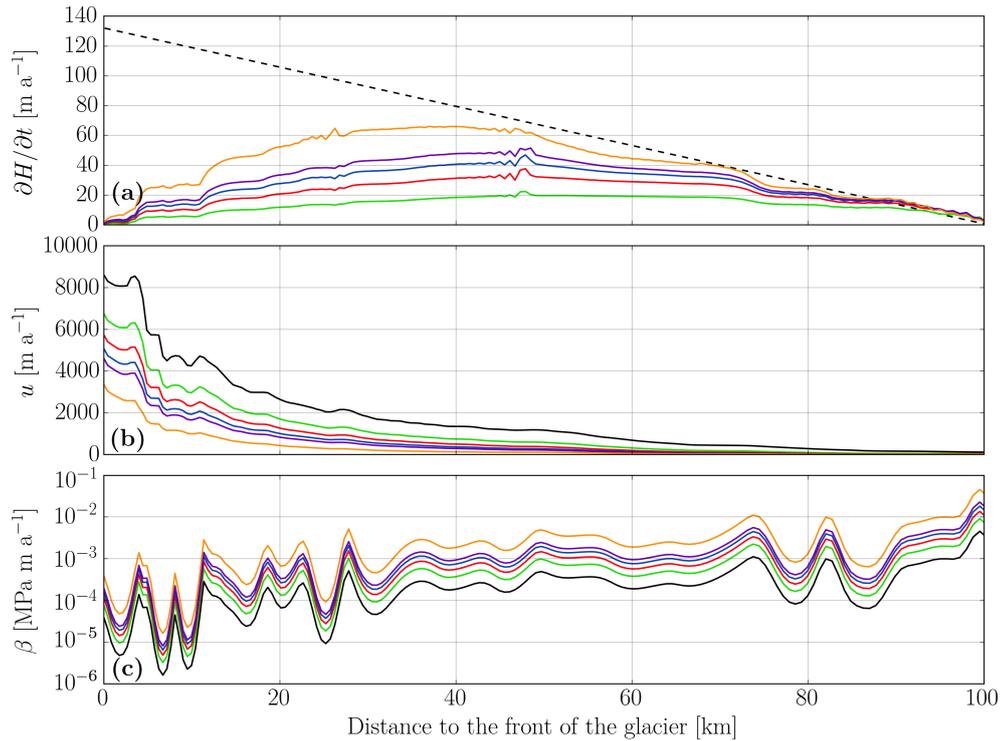


FIGURE 5.8 – 5 nouveaux cas de référence construits à partir de perturbations du cas de référence (courbes noires en trait plein) durant 5 ans en augmentant le coefficient de frottement : $\beta = 2 \times \beta_{ref}$ (vert), $\beta = 3 \times \beta_{ref}$ (rouge), $\beta = 4 \times \beta_{ref}$ (bleu), $\beta = 5 \times \beta_{ref}$ (violet) et $\beta = 10 \times \beta_{ref}$ (orange). Nouvelles références pour (a) le taux de variation d'épaisseur et le bilan de masse de surface (trait noir en pointillé), (b) les vitesses (représentées sans bruit d'observation) et (c) le coefficient de frottement β .

rapport à l'a priori malgré une tendance à sur-estimer l'amplitude des fosses et des bosses du socle, correspondant généralement à une sous-estimation de l'amplitude des variations de β . Ceci souligne une nouvelle fois la difficulté de reconstruire des paramètres aussi étroitement liés que β et z_b à partir de données de surface. En effet, [Goldberg et Heimbach \(2013\)](#) et [Gudmundsson et Raymond \(2008\)](#) ont montré que des épaisseurs de glace plus importantes que celles de référence étaient généralement compensées par un frottement basal accru par rapport à celui de référence.

Enfin, nous avons testé l'impact qu'aurait l'absence de $(\partial H/\partial t)_{obs}$ sur nos deux algorithmes pour un cas en déséquilibre comme ceux qui viennent d'être présentés. Une telle absence de données peut également être vue comme un biais sur les observations. Nous effectuons donc les mêmes simulations que précédemment mais en utilisant des valeurs $(\partial H/\partial t)_{obs} = 0$. Ces tests montrent que dans tous les cas, l'ATP et l'ANC permettent de bien reproduire les vitesses observées. Les contraintes de cisaillement basal sont également proches de celles de référence avec une erreur moyenne relative $\tau_{b, rel}$ oscillant entre 20 et 36 % selon la perturbation et l'algorithme (ATP ou ANC). L'impact sur le socle rocheux reproduit est par contre très différent selon la méthode utilisée. La Figure 5.11a montre que l'ATP reste peu sensible lorsque les observations $(\partial H/\partial t)_{obs}$ sont laissées à zéro. Ceci s'explique par le fait

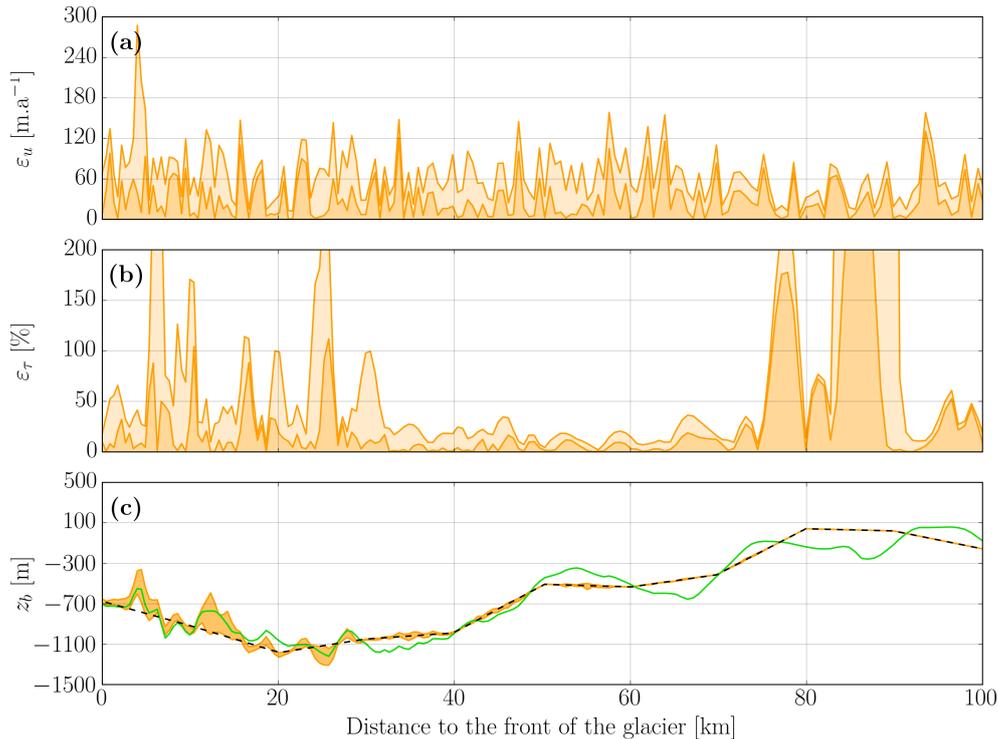


FIGURE 5.9 – Ensemble des valeurs obtenues pour l’algorithme ATP à partir d’une inversion pour chacun des 5 cas de perturbations du coefficient de frottement β . **(a, b)** Différence absolue minimale (aires en orange sombre) et maximale (aire en orange clair) entre les vitesses observées et modélisées, **(b)** Erreur minimale et maximale relative sur τ_b , **(c)** Ensemble des valeurs obtenues pour la géométrie basale z_b (aire orange). La ligne verte représente la référence pour z_b et la ligne noire en pointillé l’a priori sur la solution (solution initiale pour l’inversion).

que $(\partial H/\partial t)_{\text{obs}}$ est assez faible vis à vis des $(\partial H/\partial t)$ modélisés. Un biais sur les observations, même très important, n’a donc que peu d’influence sur la fonction coût J_{div} . L’ANC se montre par contre beaucoup plus sensible, comme en atteste la Figure 5.11 b. Le biais sur $(\partial H/\partial t)_{\text{obs}} = 0$ impacte directement la solution z_b après chaque cycle de relaxation. Ainsi, après chaque cycle d’une durée T , z_b est reproduit avec un biais similaire à $(\partial H/\partial t) \times T$ et la solution z_b descend par rapport à la solution de référence. Notons toutefois que ce phénomène dû à l’intégration de $(\partial H/\partial t)_{\text{obs}} = 0$ dans l’équation (5.6) est fortement accentué par la configuration de notre cas de référence. En effet, les cas perturbés présentent des variations d’épaisseur importantes par rapport à l’épaisseur de glace (rapport atteignant parfois $\sim 1/10$). Dans un cas réel, où ces variations sont beaucoup plus faibles (rapport de $\sim 1/1000$), l’impact d’un biais sur $(\partial H/\partial t)_{\text{obs}}$ (même important) serait donc beaucoup plus faible.

5.2.4 Divergence de flux lors d’un pronostique

L’ATP et l’ANC nous ont permis d’obtenir une solution $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ à partir d’observations de surface à un temps t donné complétées par quelques observations ponctuelles de z_b .

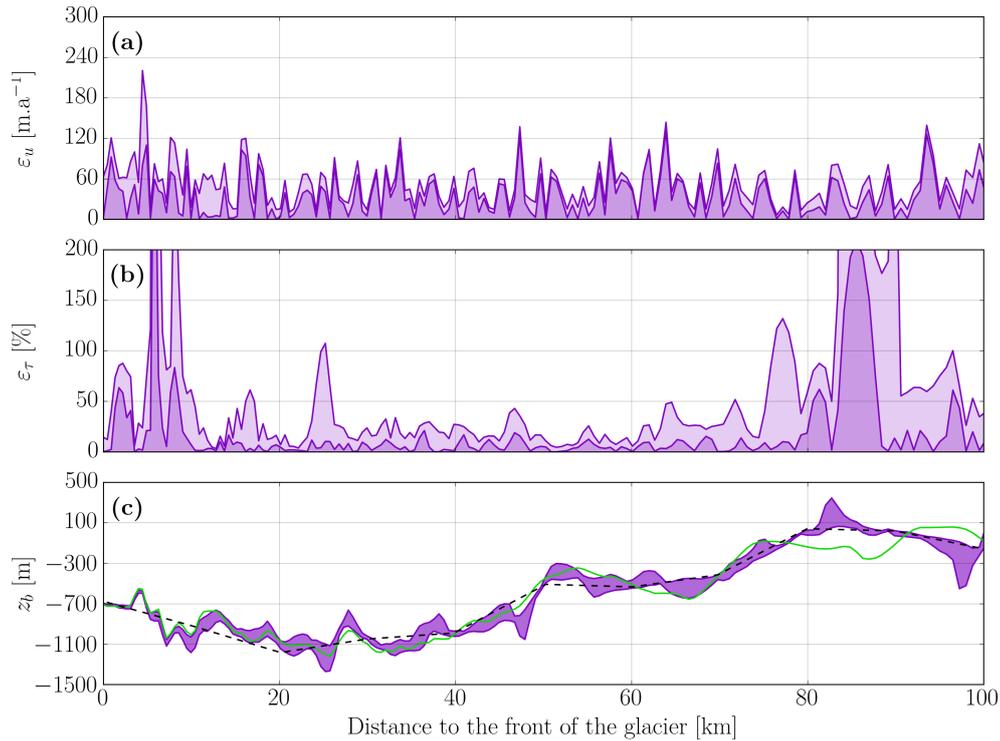


FIGURE 5.10 – Résultats similaires à la Figure 5.9 mais pour l'algorithme ANC.

Nous avons montré que les solutions \mathbf{p} obtenues permettent de reproduire les observations de surface à l'erreur d'observation près. L'objectif de cette dernière section est d'étudier la dérive dans le temps du modèle initialisé à partir des états initiaux \mathbf{p} issus de l'ATP et de l'ANC.

La solution de référence pour cette expérience a été construite à partir du glacier à l'équilibre ($\beta = \beta_{\text{ref}}$ et $z_b = z_{b,\text{ref}}$), dont la topographie de surface et les vitesses ne varient pas si on impose le même forçage constant dans le temps. Nous pouvons alors évaluer la dérive des modèles initialisés avec l'ATP et l'ANC en comparant l'évolution du taux de variation d'épaisseur $\partial H/\partial t$ au cours du temps ainsi que l'erreur sur la surface z_s après 10 années de simulation. Ce type de test permet ainsi d'évaluer la qualité des solutions inverses β et z_b pour lesquelles, dans la perspective d'un cas réel, nous ne connaissons pas la solution de référence.

Afin de comparer les performances des deux algorithmes par rapport à ceux généralement utilisés pour initialiser les modèles d'écoulement, les résultats obtenus avec l'ATP et l'ANC sont comparés à ceux obtenus avec un troisième état initial où l'on initialise que β en gardant z_b égal à l'a priori. Notons au passage que ce troisième algorithme, déjà présenté à la section 5.1.5.3 n'optimise donc pas J_{div} .

Cette inversion du frottement, pour une valeur λ_α optimisée via le critère de la *courbe en L*, permet d'atteindre une erreur rms_u de 43.3 m a^{-1} relativement inférieure aux erreurs obtenues pour l'ATP et l'ANC mais également inférieure à l'erreur rms d'observation sur les vitesses. Comme pour l'ANC, les vitesses modélisées sont donc sur-ajustées aux observations et reproduisent une part de bruit d'observation. Notons néanmoins que, ce sur-ajustement reste

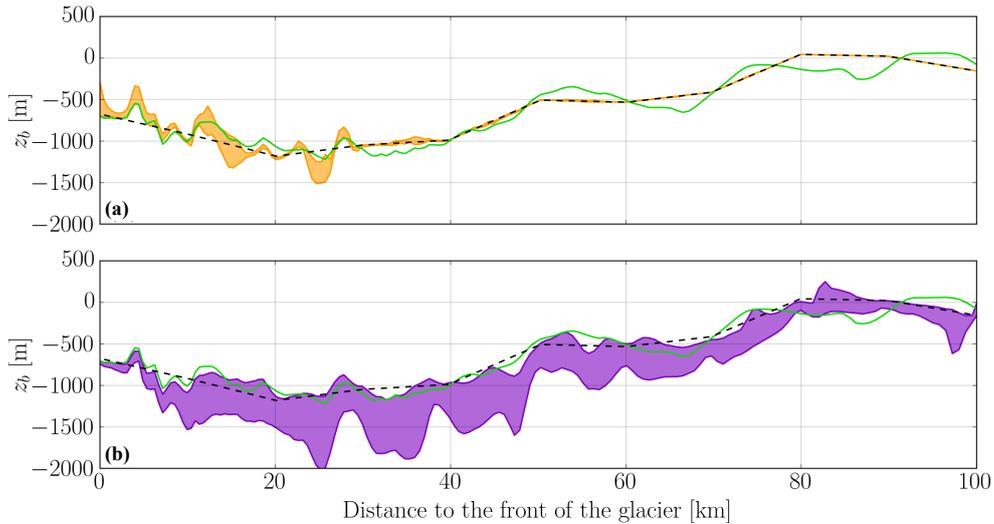


FIGURE 5.11 – Enveloppe des solutions de socle rocheux z_b obtenues pour les 5 cas perturbés lorsqu'aucune observation $(\partial H/\partial t)_{\text{obs}} \neq 0$ n'est disponible pour l'inversion avec (a) l'ATP (b) l'ANC.

assez faible vis à vis du bruit d'observation et peut s'expliquer par l'absence de la fonction coût J_{div} dans (5.11) qui joue un rôle de régularisation sur la solution même lors de l'inversion du frottement seulement. Une telle optimisation engendre une erreur relative moyenne $\varepsilon_{\tau_b, \text{ref}}$ de 36 % ce qui est assez similaire aux performances de l'ATP et l'ANC. L'erreur rms_{div} est cependant beaucoup plus élevée qu'avec les deux autres algorithmes (ATP et ANC) puisqu'elle s'élève à 147.8 m a^{-1} .

On remarque à la Figure 5.12 que les $\partial H/\partial t$ après 1 an sont plus faibles pour l'ATP et l'ANC que pour AFO. Ce constat s'accroît après 10 ans. Ces $\partial H/\partial t$ plus faibles engendrent évidemment un moins grand écart ε_s par rapport à la surface de référence. On remarque ainsi que l'erreur sur la surface demeure inférieure à 20 m quasi tout le long des 100 premiers km pour l'ATP et l'ANC alors que l'algorithme AFO donne des écarts globalement au dessus de 20 m et dépassant parfois 50 m. La Figure 5.13 compare finalement l'élévation de surface après 10 ans de relaxation à partir des solutions initiales issues de l'ATP, l'ANC et l'AFO. Cette figure illustre la capacité de l'ATP et l'ANC à reproduire les variations à petite échelle présentes sur la surface de référence (engendrées par les variations sur le socle rocheux) qui tendent à disparaître avec l'état initial AFO qui utilise une solution trop lisse du socle rocheux.

Les deux algorithmes développés et étudiés au cours de cette thèse montrent donc une diminution substantielle des anomalies de divergence de flux après initialisation du modèle ainsi que de l'erreur sur la surface après 10 ans par rapport aux algorithmes n'incluant que le frottement dans les paramètres inversés.

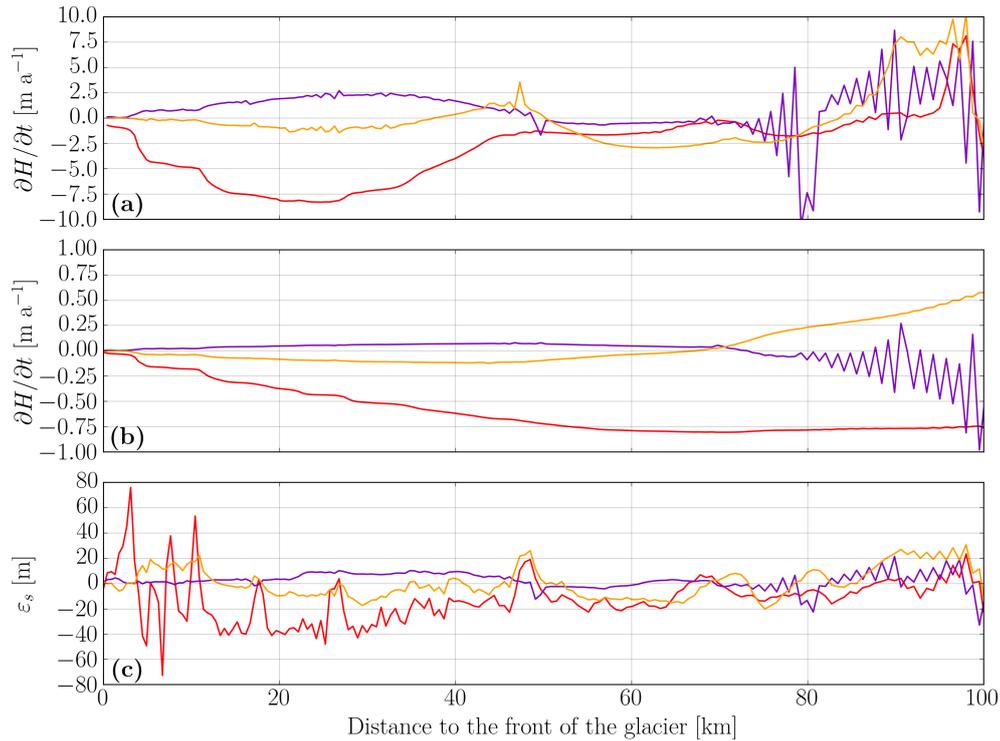


FIGURE 5.12 – Évolution de $\partial H/\partial t$ après 1 an (a), 10 ans (b) de simulation et (c) erreur ε_s sur la surface après 10 ans. Les lignes oranges et violettes donnent respectivement les résultats de l'ATP et l'ANC tandis que la courbe en rouge donne les résultats de AFO.

5.2.5 Conclusions et perspectives de cette première expérience

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté et testé deux méthodes d'assimilation de données différentes pour reconstruire les conditions basales d'un glacier. Nous nous sommes plus particulièrement intéressé à deux paramètres assez mal contraints dans les modèles d'écoulement de glace : la topographie basale z_b et le coefficient de frottement β généralement intégré dans les lois de frottement comme l'expression (3.5).

L'optimisation de ces deux paramètres repose principalement sur la connaissance de données plus facilement mesurables et synchrones : les vitesses d'écoulement en surface et les taux de variations d'épaisseur de glace. Les algorithmes nécessitent également quelques mesures locales de z_b afin de définir un a priori sur la solution. L'objectif étant alors de minimiser l'écart entre ces observations et leur équivalent modèle. En effet, l'expérience montre que si l'utilisation des seules vitesses de surface est généralement suffisante pour reconstruire le coefficient β , la reconstruction d'un second paramètre comme la topographie basale z_b nécessite plus d'information pour distinguer l'impact de chacun des paramètres sur l'écoulement. Cette information supplémentaire est alors apportée via les taux de variations d'épaisseur de glace.

A l'instar de nombreuses études comme [Morlighem *et al.* \(2010\)](#), [Gillet-Chaulet *et al.* \(2012\)](#) ou encore [Morlighem *et al.* \(2013a\)](#), les deux algorithmes mis en place se basent sur la méthode adjointe que nous avons déjà présentée au chapitre 4 pour reconstruire β . La

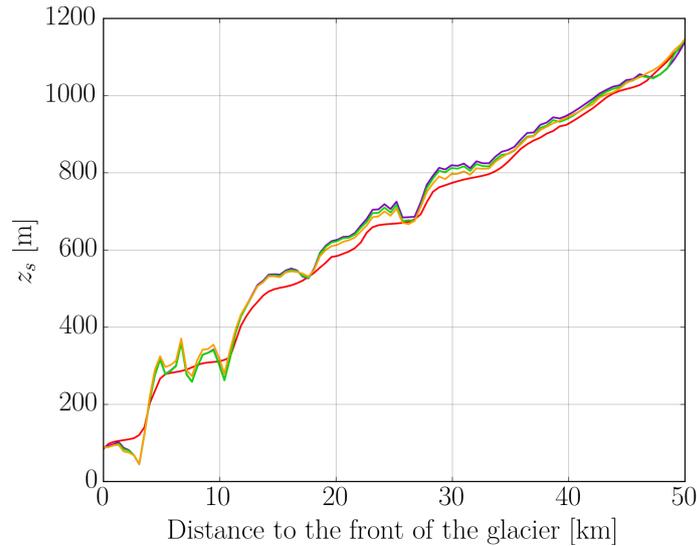


FIGURE 5.13 – Altitude de surface z_s après 10 ans de simulation pour trois états initiaux différents : avec la solution de l’ATP (orange), avec la solution de l’ANC (violet) et avec la solution de AFO (rouge). La ligne verte représente la surface de référence. La figure se focalise sur les 50 premiers km avant le front du glacier.

reconstruction de z_b , par contre, est traitée de façon différente selon l’algorithme. En effet, l’ATP se base également sur la méthode ajoutée pour reconstruire ce second paramètre et s’inscrit dans les travaux de [Goldberg et Heimbach \(2013\)](#) et [Perego et al. \(2014\)](#) tandis que l’algorithme ANC utilise une méthode de relaxation newtonienne (*nudging*) adaptée à l’équation de la conservation de la masse.

L’expérience jumelle construite à partir d’une ligne de courant du glacier groenlandais du *Jakobshavn Isbrae* montre que les deux algorithmes sont capables de reproduire le coefficient β et par extension les contraintes de cisaillement basal τ_b avec une bonne précision. En ce sens, les algorithmes montrent également des performances très proches. Si les deux algorithmes reproduisent également bien la géométrie basale z_b dans les zones d’écoulement rapide, l’ATP semble par contre moins efficace que l’ANC dans les zones plus lentes où z_b ne semble plus capable de s’écarter de son a priori. L’ANC ne souffre pas de ce problème et reconstruit efficacement z_b sur presque tout le profil étudié.

Au cours de l’expérience menée, nous avons également testé l’impact des paramètres reconstruits lorsqu’ils sont utilisés pour initialiser un modèle pronostique. Les simulations transitoires menées sur 10 ans montrent des résultats encourageants puisqu’on peut noter une nette réduction des anomalies de divergence de flux par rapport à ce qu’on obtient lors de l’inversion plus classique du frottement seul. Une telle amélioration permet alors d’obtenir une surface beaucoup plus proche de la surface de référence après 10 ans. En effet, l’intégration d’observations de variation d’épaisseur via l’optimisation de la divergence durant l’inversion à l’aide de l’adjoint ou via la relaxation newtonienne permet de régulariser la solution de manière physique, ce qui améliore significativement les résultats. Les analyses de sensibilité

menées sur les deux algorithmes permettent également de mettre en avant leur capacité à prendre en compte des cas instationnaires, ce qui est particulièrement intéressant au vu du grand nombre de glaciers émissaires (à la fois au Groenland et en Antarctique) perdant de la masse.

Les résultats obtenus sur cette expérience synthétique sont donc très encourageants quant à l'application de l'ATP et l'ANC à des cas réels. L'efficacité de l'ANC ouvre également la porte à l'inversion du socle rocheux dans des modèles 3D (non intégrés sur l'épaisseur) où l'inversion du socle rocheux entraîne une modification de la géométrie du domaine, compliquant ainsi l'application de la méthode adjointe. Fort de ces résultats, le prochain chapitre est donc consacré à l'application des deux algorithmes à un cas réel. Celui-ci traite plus particulièrement la *Terre de Wilkes* en Antarctique qui demeure une zone relativement peu surveillée à l'heure actuelle et un important contributeur potentiel à l'élévation du niveau des océans.

Chapitre 6

Application des méthodes inverses à un cas réel : la Terre de Wilkes en Antarctique de l'Est

Sommaire

6.1	Présentation de la région de la Terre de Wilkes	100
6.2	Observations et paramètres utilisés pour cette étude	101
6.2.1	Observations de surface	101
6.2.2	Observations basales	102
6.2.3	Autres paramètres	103
6.3	Modèle direct, maillage et conditions limites	103
6.4	Modèles Inverses	104
6.4.1	Modification des méthodes ATP et ANC	104
6.4.2	Vers une approche ensembliste	106
6.5	Résultats	108
6.5.1	Résultats lors d'une inversion du frottement seul	108
6.5.2	Sélection d'un ensemble de solutions optimales pour l'ATP	110
6.5.3	Sélection d'un ensemble de solutions optimales pour l'ANC	114
6.5.4	Analyse des sous-ensembles de solutions	115
6.6	Discussion générale et Conclusions	129

Le chapitre précédent s'intéressait à deux méthodes d'assimilation de données développées au cours de cette thèse ainsi que leur application dans un cas synthétique. Ce chapitre est consacré à l'application de ces deux méthodes à un cas réel. Pour ce faire, nous nous intéressons plus particulièrement à une région spécifique de l'Antarctique : la *Terre de Wilkes*. L'objectif de ce chapitre est donc de trouver, à l'aide des algorithmes ATP et ANC, un champ



FIGURE 6.1 – L’USS Vincennes près des côtes Antarctiques en 1840 (par Charles Wilkes).

de paramètre $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ qui minimise l’écart entre les champs de données observés et leur équivalent modèle.

6.1 Présentation de la région de la Terre de Wilkes

La *Terre de Wilkes*, baptisée ainsi d’après l’explorateur et officier de marine américain Charles Wilkes qui en aperçut la côte en janvier 1840 à bord de l’USS Vincennes (Figure 6.1), se situe en Antarctique de l’Est et s’étend sur près de 2.6×10^6 km². La région forme un grand bassin versant, visible sur la Figure 6.2, possédant de nombreux glaciers émissaires qui se terminent en de vastes plate-formes flottantes : le glacier Totten, le glacier de l’Université de Moscou ou encore le glacier Frost.

Le bilan de masse de la *Terre de Wilkes*, comme pour le reste de l’Antarctique de l’Est, a longtemps été considéré à l’équilibre voire légèrement positif (Shepherd *et al.*, 2012). En effet, entre 1990 et 2012, plus de 65 % des glaciers émissaires de cette zone ont avancé sur la mer à une vitesse moyenne proche de 20 m a^{-1} . Certaines analyses récentes montrent cependant que la *Terre de Wilkes* affichait un comportement opposé pendant la même période puisque 74% de ses glaciers émissaires ont vu leur front reculer de plus de 60 m a^{-1} . La Terre de Wilkes est ainsi la seule région montrant une perte de masse significative et un retrait de ses glaciers émissaires en Antarctique de l’Est (Miles *et al.*, 2016). Cette perte de masse semble principalement liée à une fonte sous les *ice shelves*. Greenbaum *et al.* (2015) ont par exemple montré l’existence d’une cavité bien plus profonde sous l’*ice shelf* de Totten que celle estimée par *Bedmap2* permettant une meilleure circulation océanique sous celle-ci et donc, potentiellement, une plus forte fonte basale.

La *Terre de Wilkes* reste néanmoins une zone peu surveillée et améliorer la connaissance

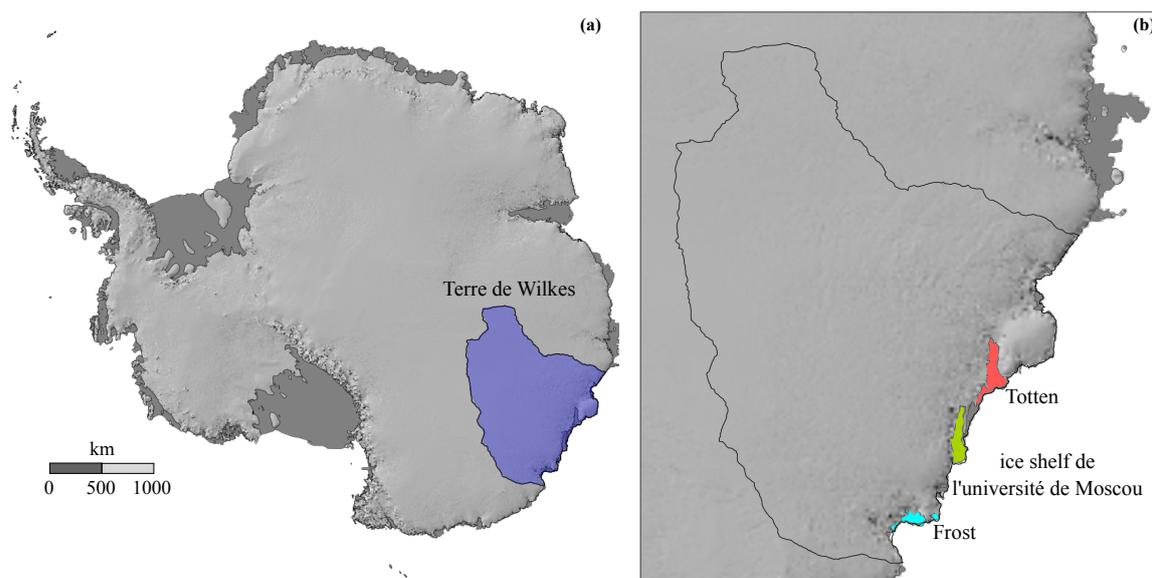


FIGURE 6.2 – (a) Carte de l’Antarctique avec la zone de de Wilkes en bleu. (b) Agrandissement sur la zone de Wilkes où les *ice shelves* de Totten, de l’Université de Moscou et de Frost sont respectivement dessinés en rouge, vert et bleu turquoise.

des conditions basales dans cette région - notamment la définition du socle rocheux - est primordial pour déceler d’éventuelles sources d’instabilités futures des glaciers émissaires dues à la forme du socle rocheux. En effet, rappelons que de faibles perturbations (bosses et fosses) de la géométrie basale peuvent jouer un rôle important sur la stabilité de la ligne d’échouage (Durand *et al.*, 2011). De même, la présence de pentes rétrogrades sur le socle rocheux, comme nous l’avons évoqué au chapitre 1, peut également jouer un rôle important puisqu’une telle pente favorise grandement une instabilité et un retrait de la ligne d’échouage. Une connaissance plus précise de la topographie basale dans cette zone aux données parfois éparses permettrait donc d’améliorer la qualité des projections d’évolution de cette partie de la calotte Antarctique.

6.2 Observations et paramètres utilisés pour cette étude

L’étude présentée dans ce chapitre se base sur de nombreuses données, que ce soit pour alimenter le modèle direct ou les algorithmes d’inversion utilisés. Cette section donne donc un aperçu détaillé des données utilisées.

6.2.1 Observations de surface

Le modèle d’élévation de surface utilisé est tiré de *Bedmap2* (Fretwell *et al.*, 2013) et possède donc une résolution spatiale de 1 km tandis que les observations de vitesses utilisées sont celles de Rignot *et al.* (2011c) issues de mesures d’interférométrie radar récoltées entre

2006 et 2011 et déjà présentées au chapitre 2 avec une résolution de 450 m. Notons que certaines zones de la région (en gris) ne sont pas couvertes par ces observations de vitesses comme le montre la Figure 6.3a.

Comme au chapitre précédent, les deux algorithmes d'inversion utilisent les observations de variations d'épaisseur de glace. Pour ce faire, nous utiliserons la tendance de variations d'épaisseur issue des traces satellites Envisat sur la région pour la période 2002-2010 (Flament et Rémy, 2012) et également présentées au chapitre 2. Ces tendances le long des traces satellites, pour la *Terre de Wilkes*, sont présentées à la Figure 6.3b.

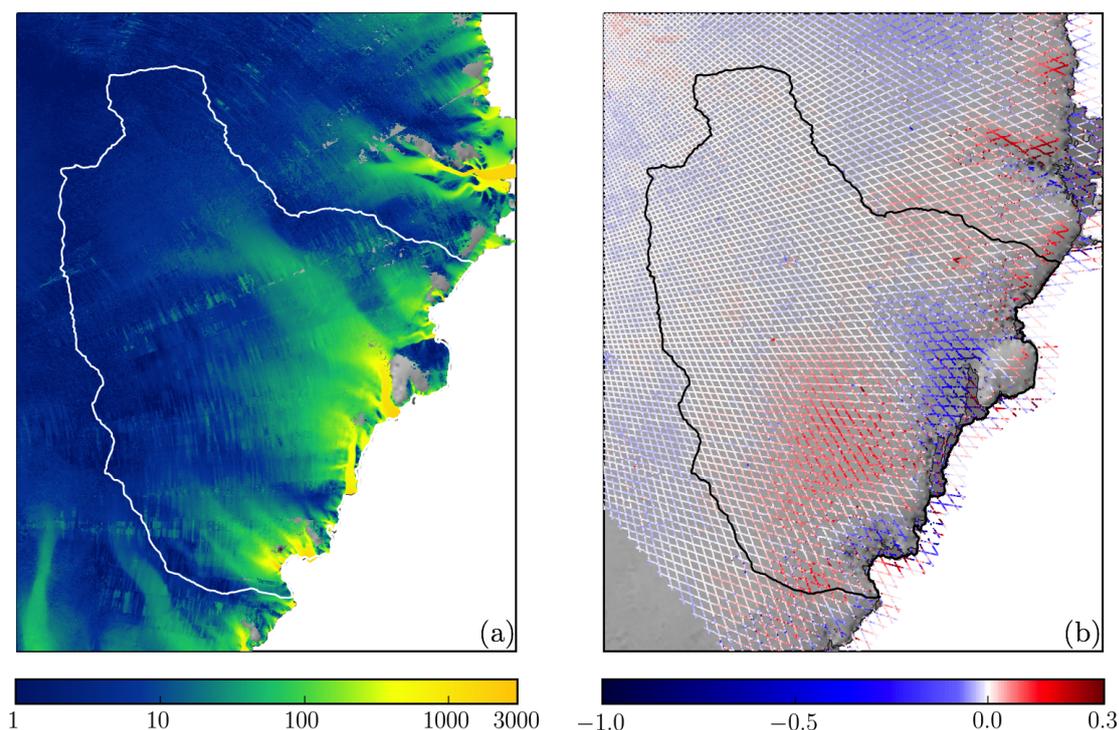


FIGURE 6.3 – (a) Observations de vitesses d'écoulement de surface [m a^{-1}] (Rignot et Mouginot, 2012) et (b) de variations d'épaisseur de glace [m a^{-1}] (Flament et Rémy, 2012) pour la région de Wilkes. La ligne blanche continue en (a) et la ligne noire en (b) correspondent aux limites du domaine.

6.2.2 Observations basales

Les deux algorithmes utilisent également des données d'épaisseur de glace le long des lignes de vols afin de contraindre la solution de géométrie basale le long de celles-ci. Ces données sont principalement issues des données brutes utilisées dans *Bedmap1* et *Bedmap2*¹. Plus particulièrement, ces données d'épaisseur le long des lignes de vols permettent d'obtenir l'altitude du socle rocheux pour les parties posées et l'altitude de la base des *ice shelves*

1. Une partie de ces données est disponible sur le site du National Snow and Ice Data Center à l'adresse <https://nsidc.org/>. Certaines lignes de vol de l'Opération Ice Brigade ne sont cependant pas disponibles sur le site et nous ont été directement fournies par Ducan Young que nous tenons à remercier ici.

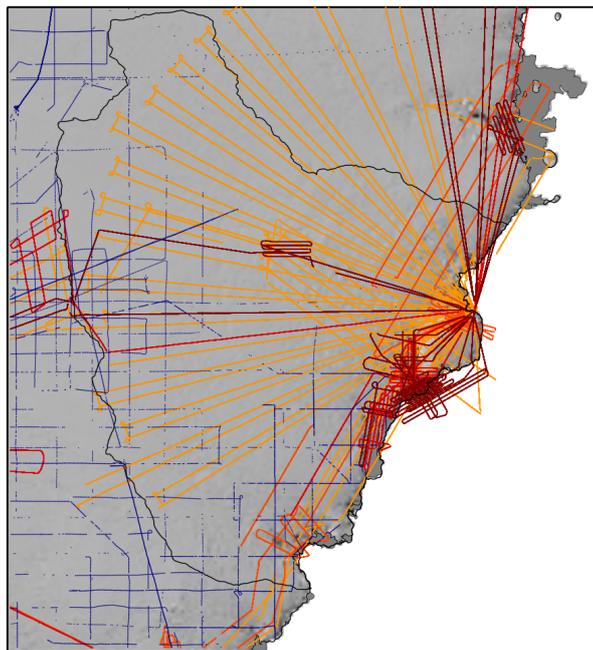


FIGURE 6.4 – Lignes de vols contenant des données d’altitude basale de la couche de glace. Les lignes de vol en bleu foncé sont principalement celles utilisées dans *Bedmap1*. Une partie des lignes de vols allant de l’orange au rouge ont été utilisées dans *Bedmap2* tandis que d’autres, plus récentes (rouge foncé ou sur les *ice shelves*) ne sont pas présentes dans *Bedmap2*.

pour les parties flottantes. Notons que *Bedmap2*, contrairement à notre étude, n’utilise pas les données d’épaisseur sur les *ice shelves* et se base sur les travaux de [Griggs et Bamber \(2011\)](#) pour déduire une épaisseur de glace à l’équilibre hydrostatique à partir d’observations de l’élévation de surface obtenues par altimétrie radar. Les différentes lignes de vols utilisées dans cette étude sont représentées à la Figure 6.4.

6.2.3 Autres paramètres

Le champ de température utilisé pour calculer la fluidité de la glace dans l’équation (3.3) moyennée sur l’épaisseur de glace est issu des travaux de [Van Liefferinge et Pattyn \(2013\)](#).

Enfin le bilan de masse de surface utilisé est issu de simulations effectuées à l’aide du Modèle Atmosphérique Régional (MAR) et moyennées sur la période 1979-2014 (C. Agosta, communication personnelle).

6.3 Modèle direct, maillage et conditions limites

Le modèle direct utilisé pour l’expérience présentée dans ce chapitre repose sur les équations de la *SSA* (cf. section 3.2.3), pour lesquelles, comme nous l’avons vu au chapitre précédent, le développement d’un adjoint pour l’inversion de l’épaisseur (ou la géométrie

basale) est plus simple. Nous avons également vu que ce choix permet de réduire le temps de calcul par rapport à un modèle 3D, ce qui devient utile au vu de l’approche ensembliste (cf. section 6.4.2) pour laquelle nous avons opté et qui demande d’effectuer de nombreuses simulations.

Les limites du domaine² d’étude sont définies selon les lignes de crêtes obtenues d’après les données ICESat ainsi que la ligne de front des glaciers (Zwally *et al.*, 2012). La condition de Neumann (3.27) est appliquée au front du glacier en contact avec l’océan tandis qu’une condition de Dirichlet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ est appliquée sur le reste de la frontière. Le maillage éléments finis est optimisé via le logiciel YAMS (Frey et Alauzet, 2005) afin de légèrement raffiner la solution dans les zones où les gradients de vitesses sont les plus forts. Le maillage 2D plan utilisé est alors constitué de 46 193 nœuds constituant les sommets d’éléments triangulaires de 1 à 2 km de côté, pour un domaine d’une superficie totale d’environ 1.1×10^6 km². Cette faible différence entre les mailles les plus petites et les plus grandes permet de garder une résolution satisfaisante sur l’ensemble du domaine et d’éviter de trop lisser la solution dans les zones où, par exemple, de nombreuses observations d’élévation basale sont disponibles.

Les états initiaux pour l’inversion du frottement basal et de la géométrie basale sont construits de la même manière que dans l’expérience jumelle présentée au chapitre précédent. Ainsi, puisqu’aucune observation du frottement basal n’est disponible, l’état initial β_{ini} pour le coefficient β se base une nouvelle fois sur l’approximation (5.12) adaptée à un problème 2D afin de calculer une valeur β_{ini} en chaque nœud du maillage. Les champs d’épaisseur et d’élévation de surface utilisés sont interpolés par la méthode des voisins naturels (Sibson *et others*, 1981) sur le maillage éléments finis tandis que la pente de surface est obtenue en calculant le gradient de surface. De façon similaire, l’état initial z_b est construit par interpolation sur le maillage éléments finis (toujours selon la méthode des voisins naturels) des observations disponibles le long des lignes de vols. Nous n’utilisons donc pas la grille *Bedmap2* dans les expériences reconstruisant la géométrie basale.

6.4 Modèles Inverses

6.4.1 Modification des méthodes ATP et ANC

La recherche des solutions de frottement et de géométrie basale se base sur les algorithmes ATP et ANC présentés au chapitre précédent en y ajoutant de légères modifications pour convenir aux particularités d’un cas réel. Le principe général de chaque méthode restant le même, nous ne présentons ici que les modifications ayant été effectuées.

2. les limites du bassin peuvent être trouvée à l’adresse http://icesat4.gsfc.nasa.gov/cryo_data/ant_grn_drainage_systems.php

6.4.1.1 Modifications des fonctions coût optimisées

Au chapitre précédent, les deux fonctions coût basées sur des observations de surface, J_V (5.1) et J_{div} (5.2), étaient définies de manière continue sur le domaine. Le champ de vitesses observé était également considéré continu et une observation de vitesse était disponible en chaque nœud du maillage. Dans notre cas réel, les observations de vitesses sont issues d'une grille régulière avec une résolution de 450 m. Cette grille régulière étant différente du maillage éléments finis de notre modèle (non régulier), les observations de vitesses ne sont donc pas nécessairement localisées sur les nœuds du maillage. Deux options sont alors possibles, soit on interpole les observations sur le maillage éléments finis, soit on calcule l'écart entre vitesses observées et modélisées aux points d'observation. Dans le premier cas, le champ de vitesse interpolé n'est alors pas exactement équivalent au champ observé au départ (lui même issu d'une interpolation de données brutes sur la grille régulière engendrant également quelques approximations). Afin d'éviter de telles approximations, nous préférons alors la seconde option permettant de comparer le modèle et les observations précisément où se situe l'observation. Nous utiliserons donc ici une fonction coût $J_{V,\text{discret}}$ mesurant l'écart entre vitesses observées et modélisées en chaque point d'observation. Celle-ci prend alors la forme :

$$J_{V,\text{discret}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\text{obs}}} (|\mathbf{u}_{i,\text{obs}} - \mathbf{u}_i|)^2 \quad (6.1)$$

où N_{obs} représente le nombre d'observations de vitesses $\mathbf{u}_{i,\text{obs}}$ disponibles sur le domaine et où \mathbf{u}_i est la vitesse modèle interpolée au point d'observation i à partir des fonctions de base de l'élément contenant cette observation.

La fonction de régularisation $J_{b_{z_b}}$, mesurant l'écart entre l'a priori sur z_b et la solution elle-même, est également modifiée selon le même principe. L'écart entre la solution z_b et l'a priori n'est plus calculé que le long des lignes de vols qui constituent une série de mesures ponctuelles. La fonction coût prend alors la forme :

$$J_{z_b,\text{discret}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M_{\text{obs}}} (|z_{b,i}^{\text{obs}} - z_{b,i}|)^2 \quad (6.2)$$

où M_{obs} est le nombre d'observations ponctuelles d'élévation basale disponibles sur le domaine et $z_{b,i}$ l'altitude basale interpolée au point d'observation $z_{b,i}^{\text{obs}}$.

6.4.1.2 Modifications de l'algorithme de relaxation newtonienne

L'étape de *nudging* utilisée dans l'algorithme ANC a également subi une légère modification afin d'utiliser au mieux les données disponibles. En effet, au chapitre précédent, à l'équation (5.6), le terme de rappel calculé en chaque nœud du maillage éléments finis était

proportionnel à l'écart entre épaisseur observée et modélisée au point d'observation le plus proche, tout en tenant compte de la distance entre l'observation et le nœud selon (5.7). L'algorithme ne tenait donc compte que d'une seule observation pour calculer le coefficient de rappel en un nœud du maillage. Ce terme de rappel convenait relativement bien à notre cas synthétique où peu d'observations d'épaisseur étaient disponibles et où nous construisions un a priori par simple interpolation linéaire entre ces observations.

Dans le cas de la *Terre de Wilkes* nous avons à disposition de nombreuses observations plus ou moins éloignées les unes des autres. Dans tous les cas, nous voulons tirer parti de l'ensemble des observations jugées suffisamment proches d'un nœud pour calculer un terme de rappel propre à celui-ci. Pour chaque nœud, nous définissons alors un voisinage contenant les observations jugées suffisamment proches. Le voisinage d'un nœud n , que nous noterons $\mathcal{V}(n)$, est défini de façon arbitraire comme l'ensemble des observations disponibles dans les éléments contenant ce nœud. Une représentation d'un tel voisinage est donné à la Figure 6.5. L'équation de relaxation newtonienne prend alors la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = a - \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{\text{obs}} - \frac{1}{N_{\mathcal{V}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{V}}} k_i (H - H_{\text{obs},i}) \quad (6.3)$$

où $N_{\mathcal{V}}$ représente le nombre de points dans le voisinage du nœud sur lequel s'applique l'équation et où k_i dépend de la distance entre le nœud et l'observation i selon la même loi qu'en (5.7), c'est-à-dire :

$$k_i = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i,\text{obs}}|}{\sigma} \right)^2} \quad (6.4)$$

où \mathbf{x} est la coordonnée du nœud n et où plus la valeur de σ est grande plus le poids relatif donné aux observations les plus lointaines augmente.

6.4.2 Vers une approche ensembliste

Jusqu'à présent, nous avons vu que les méthodes inverses utilisées en glaciologie cherchent généralement à déterminer le meilleur état initial possible. L'expérience jumelle développée au chapitre précédent se basait sur le même principe, nous cherchions à trouver le meilleur état initial possible pour le frottement basal et l'altitude du socle rocheux en déterminant les meilleures valeurs pour les paramètres de régularisation (λ_{β} , λ_{div} , λ_{z_b}) ou encore la meilleure période de *nudging* (T) parmi un ensemble de valeurs. Le choix était basé sur des critères objectifs, minimiser l'écart entre les observations et leur équivalent modèle ou encore l'écart entre un a priori sur la solution et la solution elle-même. Dans le cas de l'expérience jumelle du chapitre précédent, un tel choix reposait sur le fait de trouver une solution minimisant au mieux les fonctions coût J_v , J_{div} , $J_{\text{reg}_{\beta}}$ et J_{z_b} . On pouvait ensuite comparer le frottement et

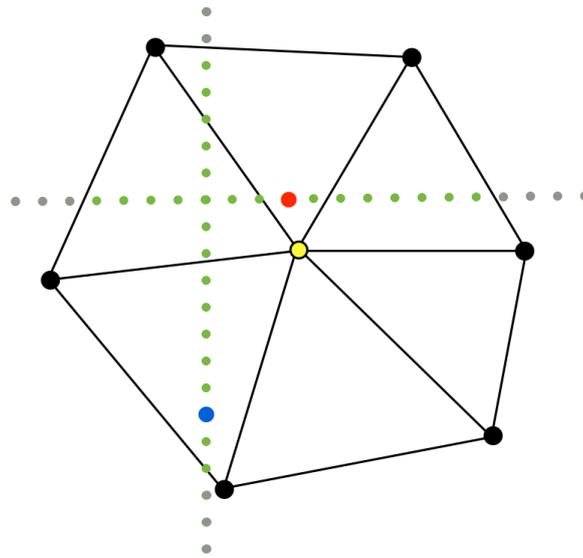


FIGURE 6.5 – Représentation des éléments (dans le cas d'éléments triangulaires) constituant le voisinage $\mathcal{V}(n)$ d'un nœud n (en jaune) et des $N_{\text{obs}} = 31$ observations (en vert) contenues dans ce voisinage (les observations en gris ne font pas partie du voisinage $\mathcal{V}(n)$). L'observation représentée en rouge a un poids supérieur à l'observation représentée en bleu selon (6.4).

la topographie basale obtenus à la solution de référence afin de voir si l'algorithme trouvait une solution proche de la réalité.

Dans un cas réel, nous n'avons évidemment pas accès à une solution de référence pour vérifier si l'algorithme a bien fonctionné. Nous ne pouvons donc nous baser que sur l'écart entre les observations et leur équivalent modèle. Dans ce contexte, en utilisant une approche similaire à celle de l'expérience jumelle, les paramètres de régularisation (ou les paramètres entrant en jeu pour le *nudging*) optimaux sont définis comme ceux minimisant au mieux J_v , J_{div} et J_{z_b} . Nous verrons cependant que, bien souvent, une solution aura tendance à privilégier la minimisation d'une des fonctions coût au détriment des autres. Il devient dès lors difficile de choisir la solution optimale et savoir s'il est plus judicieux de privilégier une solution assurant que les vitesses modélisées s'ajustent au mieux aux vitesses observées ou une solution privilégiant un écart minimum entre la divergence de flux et le bilan de masse de surface.

Pour pallier ce problème, nous proposons une approche alternative. Celle-ci consiste à étudier l'évolution des champs de vitesses et d'altitude de surface lorsque le modèle direct est initialisé avec chacune des solutions de coefficient de frottement β et de géométrie basale z_b issues de valeurs de régularisation différentes. Pour ce faire, nous laissons évoluer le modèle selon l'équation d'évolution de l'épaisseur (3.24) corrigée avec un bilan de masse apparent permettant de garder, en théorie, le cas stationnaire :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = a + \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{\text{obs}} \quad (6.5)$$

Notons que lors de cette évolution, nous ne traitons pas la dynamique de la ligne d'échouage et ne tenons pas compte de la flottaison des *ice shelves*. Les conditions à la base sont donc identiques à celles utilisées pour le problème inverse.

Dans cette configuration, la solution initiale $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ idéale serait la solution pour laquelle la surface et le champ de vitesses restent exactement stationnaires. En pratique, les différentes solutions $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ auront tendance à voir leurs vitesses d'écoulement ou leur surface s'écarter plus ou moins de la référence, les solutions les plus plausibles étant donc celles qui s'en écartent le moins. La durée de la simulation pronostique à partir des différents états initiaux construits par inversion est de 50 ans. Gillet-Chaulet *et al.* (2012) montrent notamment que, dans le cas de leur étude du Groenland, une telle période de relaxation permet d'atteindre des variations d'épaisseur physiquement acceptables, c'est-à-dire n'excédant pas quelques mètres. C'est donc également sur des périodes de cet ordre de grandeur que les différentes incertitudes sur le modèle impactent le plus une solution pronostique. Nous verrons par la suite que, dans notre cas, cette période permet également d'atteindre des taux de variations d'épaisseur n'excédant pas quelques mètres.

6.5 Résultats

6.5.1 Résultats lors d'une inversion du frottement seul

Effectuons d'abord une première inversion du coefficient β seul afin de pouvoir comparer ce résultat avec les solutions issues de l'ATP et l'ANC. La géométrie basale utilisée est alors celle de *Bedmap2* interpolée via la méthode des voisins naturels sur le maillage à éléments finis. Dans le cas où seul β est recherché, nous utilisons la méthode AFO présentée au chapitre précédent mais en intégrant la fonction coût $J_{v, \text{discret}}$. La fonction coût totale prend alors la forme :

$$J_{\text{AFO}} = J_{v, \text{discret}} + \lambda_{\alpha} J_{\text{reg}_{\alpha}} \quad (6.6)$$

où nous avons déjà dit que la valeur de λ_{α} optimale peut être choisie selon le principe de la *courbe en L* (cf. Figure 6.6). On remarque que le choix du paramètre λ_{α} idéal dépend du mode de représentation de la *courbe en L*. Une vision logarithmique de la *courbe en L* étant souvent préférée dans les études s'intéressant au coefficient de frottement (Jay-Allemand *et al.*, 2011; Gillet-Chaulet *et al.*, 2012; Morlighem *et al.*, 2013a), nous optons pour la valeur optimale $\lambda_{\alpha} = 10^{-3}$ qui permet d'atteindre la valeur rms_u de 22.7 m a^{-1} (donnée par $\sqrt{2J_{v, \text{discret}}/N_{\text{obs}}}$). Notons que cette valeur est assez similaire à l'erreur obtenue dans d'autres études utilisant les vitesses de surfaces pour contraindre un problème inverse (Morlighem, 2011; Fürst *et al.*, 2015).

Si l'on s'intéresse maintenant à l'écart entre la divergence de flux et le bilan de masse

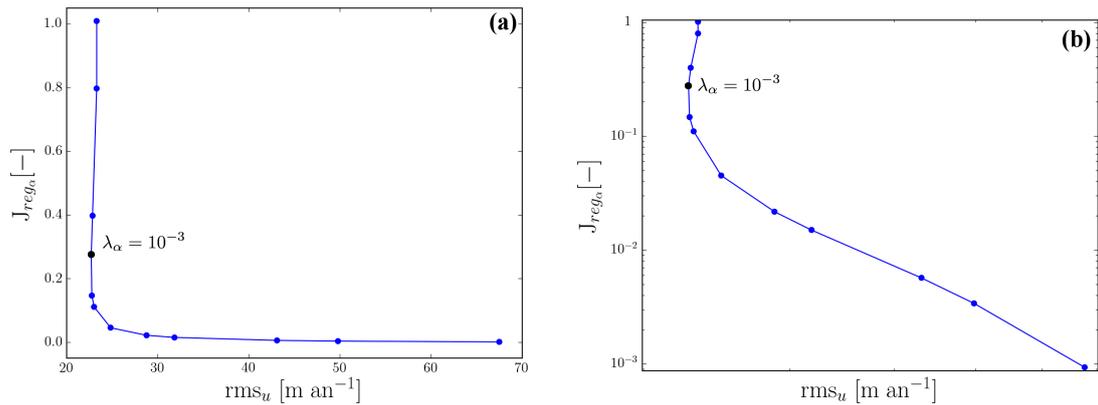


FIGURE 6.6 – (a) Courbe en L obtenue pour différentes valeurs de λ_α lors de l'inversion du frottement seul. L'axe des abscisses montre l'erreur rms_u équivalente à J_v et l'axe des ordonnées la valeur de la fonction coût J_{reg_α} en poids relatif par rapport à la valeur maximale J_{reg_α} obtenue sans régularisation ($\lambda_\alpha = 0$). (b) Même graphique à l'échelle logarithmique.

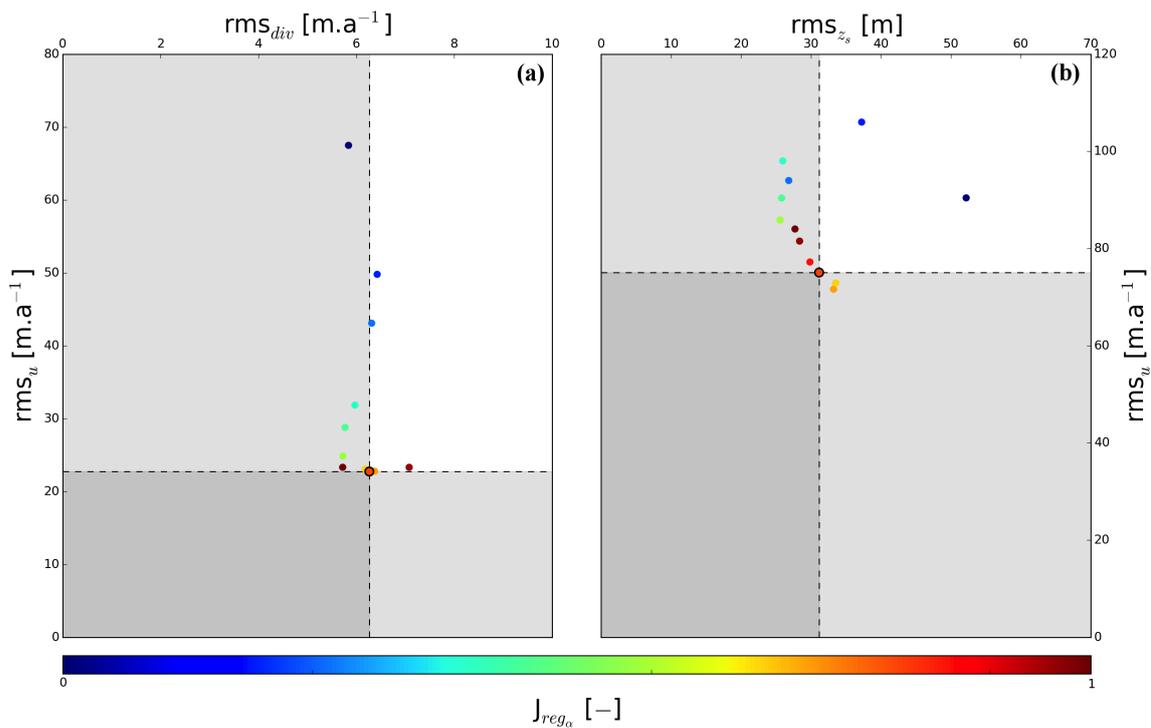


FIGURE 6.7 – (a) Erreur rms_u en fonction de rms_{div} pour les différentes inversions du frottement seul. (b) Erreur rms_u et rms_{zs} après 50 ans de relaxation. L'échelle de couleur représente la valeur de J_{reg_α} en valeur relative (0 correspond à la valeur la plus faible et 1 à la valeur la plus élevée). Le point correspondant à $\lambda_\alpha = 10^{-3}$ est entouré en noir. Les zones en gris clair représentent l'espace des solutions ayant une erreur rms plus faible que celle pour $\lambda_\alpha = 10^{-3}$ sur l'un des champs mesurés et la zone gris foncé représente l'espace des solutions présentant une erreur rms plus faible sur les deux champs mesurés.

apparent a posteriori, on remarque que l'erreur $\text{rms}_{\text{div}} = 6.2 \text{ m a}^{-1}$ (donnée par $\sqrt{2J_{\text{div}}/\Omega_s}$ où Ω_s représente la surface du domaine) calculée pour la solution correspondant au point optimal de la *courbe en L* est relativement faible vis à vis des autres solutions tout en affichant l'erreur rms_u la plus faible, comme le montre la Figure 6.7a. On remarque également que les solutions les plus régularisées (valeurs J_{reg_α} faibles), si elles engendrent une erreur rms_u très importante, n'impactent pas significativement l'erreur rms_{div} .

La Figure 6.7b montre que si nous utilisons les différents champs de valeurs du coefficient de frottement β obtenus par inversion comme états initiaux avant d'effectuer une relaxation selon l'équation (6.5) pendant 50 ans, les erreurs rms_u augmentent rapidement (quel que soit l'état initial utilisé) et atteignent des valeurs allant jusqu'à 70 m a^{-1} . On remarque que les solutions les plus mauvaises au départ en terme de rms_u restent les plus mauvaises après 50 ans. Il est cependant difficile de corrélérer l'erreur rms_{div} après inversion avec l'erreur rms_{z_s} après 50 ans. La solution jugée optimale via la *courbe en L* ($\lambda_\alpha = 10^{-3}$) présente finalement une solution intermédiaire entre erreur sur les vitesses ($\text{rms}_u \simeq 75 \text{ m a}^{-1}$) et sur la surface ($\text{rms}_{z_s} \simeq 31 \text{ m}$) après 50 ans par rapport à l'ensemble des solutions initiales étudiées.

6.5.2 Sélection d'un ensemble de solutions optimales pour l'ATP

L'ATP, décrite dans la section 5.1.5.1, permet d'obtenir une solution $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ dépendant de trois paramètres de régularisation ($\lambda_\beta, \lambda_{\text{div}}, \lambda_{z_b}$) qui vont donner plus ou moins de poids à $J_v, J_{\text{div}}, J_{\text{reg}_\beta}$ et J_{z_b} . Nous testons donc un ensemble de 216 triplets, construits à partir de 6 valeurs différentes pour chacun des paramètres de régularisation, afin de balayer au mieux l'espace des solutions et sélectionner les solutions les plus pertinentes selon l'approche ensembliste proposée à la section 6.4.2. Les valeurs précises données aux différents λ sont fournies au tableau 6.1. On remarquera les valeurs plus faibles données à λ_{z_b} en raison du poids important de J_{z_b} .

λ_β	λ_{div}	λ_{z_b}
1	1	10^{-5}
10^1	10^1	10^{-4}
10^2	10^2	10^{-3}
10^3	10^3	10^{-2}
10^4	10^4	10^{-1}
10^5	10^5	1

TABLE 6.1 – Tableau récapitulatif des différentes valeurs des coefficients de pondérations $\lambda_\beta, \lambda_{\text{div}}, \lambda_{z_b}$ utilisés avec l'algorithme ATP.

La Figure 6.8a montre que les 216 triplets ($\lambda_\beta, \lambda_{\text{div}}, \lambda_{z_b}$) permettent de balayer un large ensemble de solutions minimisant tantôt l'écart entre vitesses observées et vitesses modélisées et tantôt l'écart entre variations d'épaisseur observées et modélisées. Sur cette figure, les zones en gris clair représentent les espaces de solutions meilleurs que l'inversion du frottement seul (AFO) soit en terme de rms_u soit en terme de rms_{div} soit les deux (zone en gris foncé). Si

certaines solutions minimisent mieux à la fois les erreurs rms_u et rms_{div} , on remarque que les solutions optimales en terme de rms_u entraînent souvent une erreur rms_{div} plus importante. Le contraire est également vrai puisque les solutions présentant une rms_{div} très faible sont généralement moins optimales en terme de rms_u . Ceci met évidemment en avant la difficulté de minimiser à la fois J_v et J_{div} . En outre, considérer la Figure 6.8 comme une simple *courbe en L* permettant de choisir une solution optimisant au mieux rms_u et rms_{div} n'est pas nécessairement idéal puisque, comme nous l'avons dit à la section 6.4.2, il est difficile de savoir s'il est plus judicieux de privilégier une meilleure optimisation de J_v au détriment de J_{div} ou l'inverse. Il est très difficile de sélectionner une seule solution optimale parmi les 216 triplets testés, ce qui met clairement en évidence la nécessité d'une approche ensembliste pour une application ne pouvant pas être validée par rapport à une solution de référence.

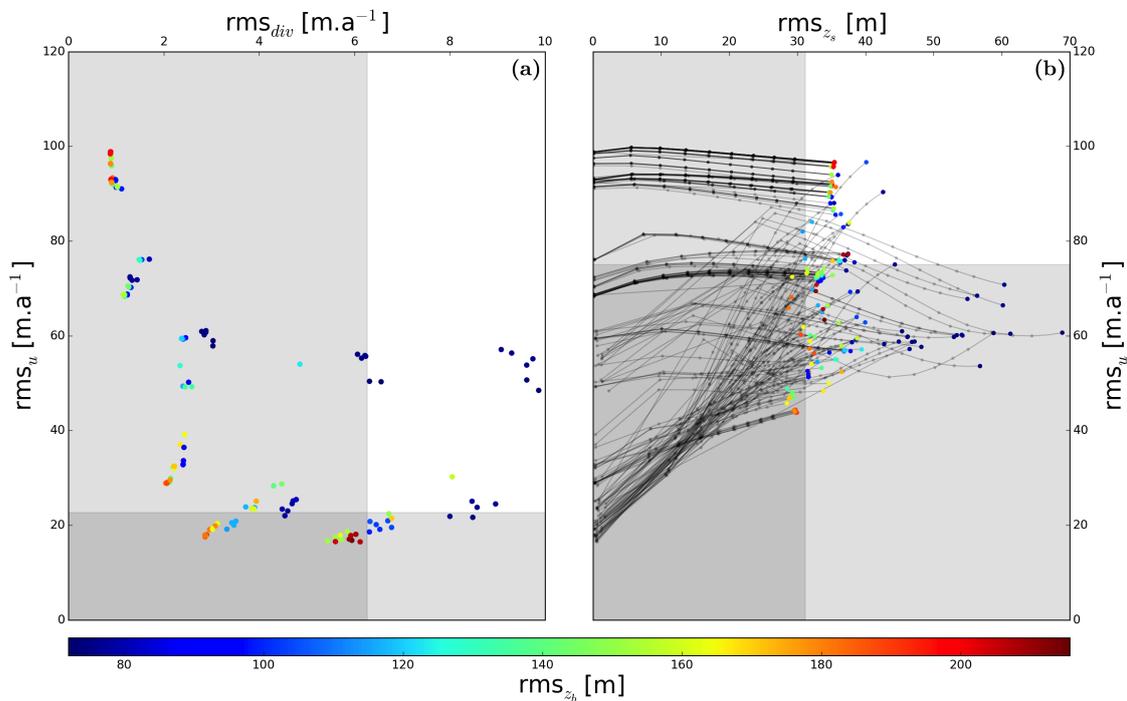


FIGURE 6.8 – (a) Erreur rms_u en fonction de rms_{div} pour un ensemble de 211 triplets (λ_β , λ_{div} , λ_{z_b}). (b) Évolution de l'erreur rms_u et rms_{z_s} sur une période de 50 ans. Les courbes grises représentent l'évolution pour chaque triplet (de la gauche vers la droite, un point gris tous les 5 ans). Les aires en gris clair représentent l'ensemble des valeurs inférieures aux erreurs rms obtenues en inversant le frottement seul (défini par la solution optimale sur la Figure 6.7). L'aire gris foncé en (a) représente l'espace de solutions pour lequel les solutions minimisent mieux à la fois rms_u et rms_{div} après inversion. L'aire en gris foncé en (b) représente le même espace mais en terme de rms_u et rms_{z_s} après 50 ans de relaxation, espace appelé $\Omega_{opt, ATP}$. Les couleurs des points correspondent à l'erreur rms_{z_b} en mètres.

La Figure 6.8b montre l'évolution des solutions au cours du temps en terme d'erreur sur les vitesses et sur la surface lors d'une relaxation sur 50 ans selon (6.5). Les zones en gris clair sur cette figure représentent les espaces de solutions meilleurs que l'inversion du frottement seul (AFO) après 50 ans de relaxation soit en terme de rms_u soit en terme de

rms_{div} soit les deux (zone gris foncé qui définit l'espace optimal des solutions $\Omega_{\text{opt, ATP}}$ dont nous discutons un peu plus loin). Notons que sur les 216 triplets testés, 5 ont divergé en affichant des valeurs de vitesses et d'épaisseur irréalistes après quelques années de relaxation. Pour les 211 solutions restantes, on remarque que les états initiaux présentés à la Figure 6.8a affichant une faible erreur rms_u sont ceux qui engendrent les plus importantes évolutions (à la fois en terme de variations sur les vitesses et sur la surface) lorsqu'on les relaxe. Au contraire, certaines solutions affichant des valeurs rms_u un peu plus importantes au départ restent plus stables dans le temps et aboutissent à une surface et des vitesses plus proches des observations après 50 ans. Une solution optimale d'un point de vue diagnostique (c'est à dire diagnostiquée optimale après inversion) s'avère donc parfois moins bonne lorsque l'on s'intéresse à son impact sur une projection.

La Figure 6.9 présente une analyse des solutions obtenues en fonction de la valeur des trois paramètres de régularisation. Sur les Figures a, b et c, plus les points de couleur sont ordonnés, plus il est possible de tirer des conclusions sur l'impact sur la solution de la fonction coût associée au paramètre de régularisation étudié. On remarque ainsi que c'est la valeur de λ_{div} qui impacte le plus la solution. En effet, la Figure 6.9a montre une classification claire des solutions en fonction de λ_{div} . Ainsi, les valeurs les plus fortes conduisent logiquement à des valeurs rms_{div} faibles et permettent donc de diminuer les anomalies de divergence de flux. Cela se fait néanmoins au détriment du champ de vitesses qui s'éloigne des observations lorsque λ_{div} augmente. L'évolution des solutions au cours du temps, présentée à la Figure 6.9d, montre cependant qu'une erreur rms_{div} réduite ne garantit pas nécessairement une moindre évolution de la surface (rms_{z_s} faible). Ce constat est renforcé par la large dispersion des solutions présentant des erreurs rms_{div} assez faibles amenant finalement à des erreurs rms_{z_s} très variées après 50 ans.

La Figure 6.9b montre que, pour une même valeur λ_{div} (une même couleur sur la Figure 6.9a), des valeurs de λ_{z_b} trop importantes sont souvent à l'origine de solutions $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ engendrant des erreurs rms_u et rms_{div} plus importantes. La Figure 6.8b montre que ces fortes valeurs de λ_{z_b} ont tendance à logiquement produire des solutions dont la géométrie basale z_b reste très proche des mesures le long des lignes de vols et que ces solutions sont généralement les plus mauvaises en terme d'erreur rms_{z_s} après 50 ans. Les solutions s'écartant un peu plus des observations z_b semblent généralement meilleures. Une solution sur-ajustée aux observations $z_{b,\text{obs}}$ aura tendance à créer une surface basale bruitée (reproduisant une partie des erreurs d'observations le long des lignes de vol), ce qui impactera la surface supérieure et les vitesses d'écoulement. Un tel sur-ajustement des observations basales aura également tendance à engendrer de forts gradients sur la solution entre deux zones proches mais présentant des densités d'observations très différentes (zones riches en observations proches de zones pauvres voire sans observation). Enfin, notons que l'évolution des erreurs rms_u et rms_{z_s} au cours du temps n'est pas linéaire. En effet, comme le montre la Figure 6.7b, si l'erreur sur la surface (rms_{z_s}) ne fait qu'augmenter au cours du temps, l'erreur sur les vitesses (rms_u) peut d'abord augmenter avant de diminuer (et voire augmenter à nouveau).

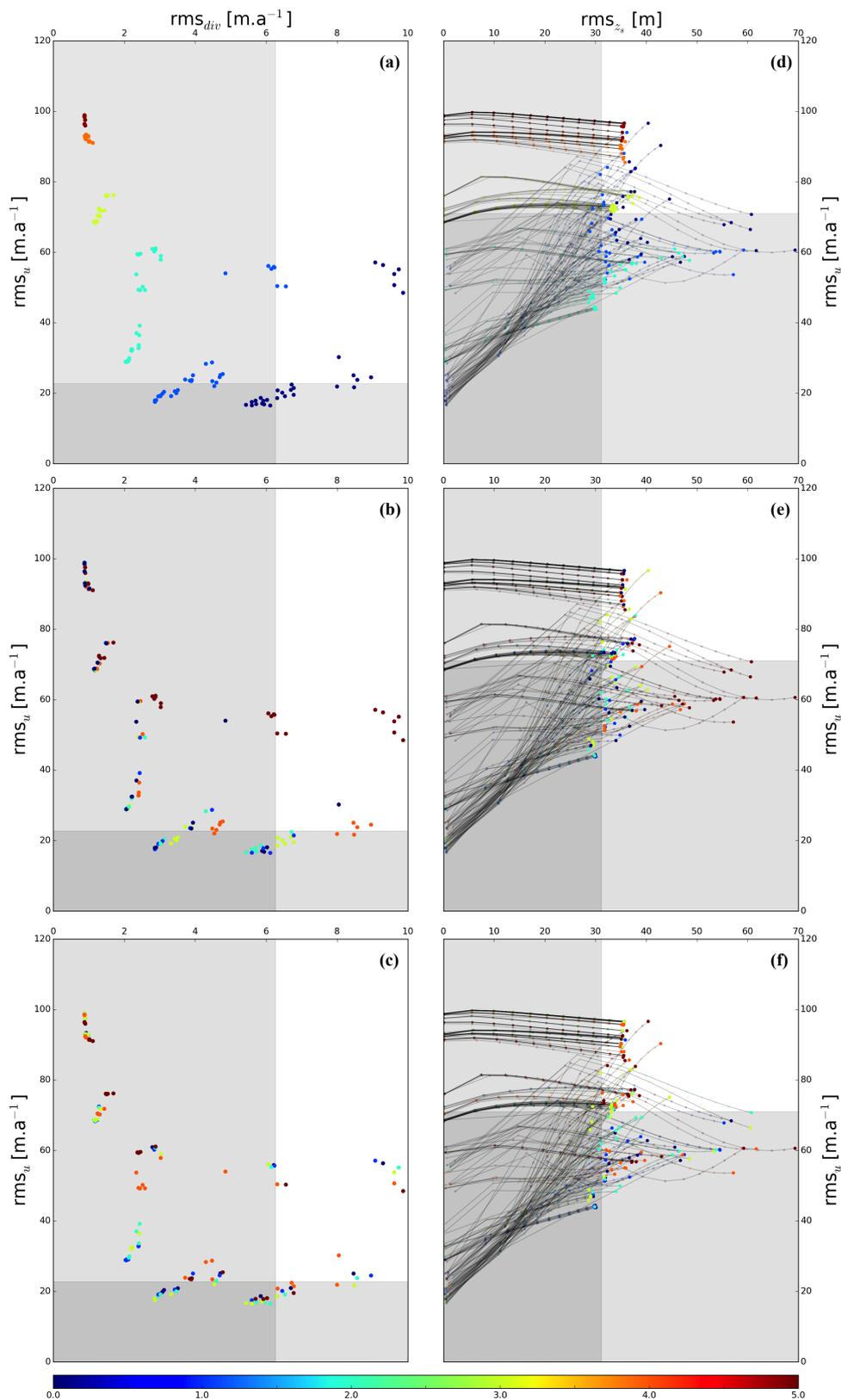


FIGURE 6.9 – Erreur rms_u en fonction de rms_{div} pour un ensemble de 211 triplets avec une échelle de couleur représentant l'intensité relative (0 pour le poids le plus faible et 1 pour le poids le plus élevé) de (a) λ_{div} , (b) λ_{z_b} , (c) λ_β . L'évolution des erreurs rms_u et rms_{z_s} sur une période de 50 ans est mise en vis-à-vis en (d), (e) et (f) avec la même échelle de couleur.

L'impact de λ_β semble moins clair (que ce soit pour la distribution des solutions après inversion ou après 50 ans) et il est difficile de tirer une réelle tendance. La Figure 6.9c montre toutefois que les valeurs λ_β intermédiaires permettent souvent de réduire l'erreur rms_u et l'erreur rms_{div} pour un λ_{div} donné.

Une telle variété de solutions initiales $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ nous amène à nous demander quelles solutions sont pertinentes et apportent une réelle information sur l'incertitude de la solution \mathbf{p} et quelles solutions s'écartent trop des observations pour être jugées réalistes. Il est difficile de privilégier une solution présentant une surface proche de la référence mais dont les vitesses s'éloignent fortement des observations et inversement. Il est également difficile de juger à partir de quand les valeurs rms_u ou rms_{z_s} peuvent être considérées excessives et irréalistes et définir ainsi des bornes supérieures de solutions acceptables. Une borne supérieure pour rms_{z_s} peut néanmoins être déduite d'un postulat simple : une solution \mathbf{p}_{ATP} doit permettre de réduire les anomalies de divergence de flux par rapport à une méthode plus classique où seul le coefficient de frottement β est inversé (comme l'expérience jumelle du chapitre précédent tend à le montrer). Une telle solution \mathbf{p}_{ATP} doit donc minimiser l'évolution de la surface par rapport à la surface observée lors d'une phase de relaxation. De façon similaire, nous pouvons fixer une borne sur rms_u en ne tenant compte que des solutions affichant une erreur rms_u inférieure à celle obtenue après 50 ans de relaxation à partir de l'inversion de β seul. Une telle définition nous permet alors de définir un sous-ensemble de solutions optimales $\Omega_{\text{ATP, opt}}$ (correspondant aux solutions situées dans la zone en gris foncé sur la Figure 6.7b).

On peut ainsi dénombrer 20 états initiaux $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ affichant à la fois des erreurs $\text{rms}_u < 75 \text{ m a}^{-1}$ et $\text{rms}_{z_s} < 31 \text{ m}$ après 50 ans de relaxation et faisant donc partie de $\Omega_{\text{opt, ATP}}$. Sur ces 20 états initiaux seulement 6 faisaient partie des 27 solutions \mathbf{p} pouvant être diagnostiquées meilleures que la solution d'inversion de frottement seul (AFO) directement après inversion, c'est à dire affichant une erreur $\text{rms}_u < 22.7 \text{ m}$ et une erreur $\text{rms}_{\text{div}} < 6.2 \text{ m a}^{-1}$. On remarque notamment, sur les Figures 6.9a et d, qu'une grande partie des solutions correspondant à un poids λ_{div} de 10^3 ne semblait pas idéale après inversion au vu de leur erreur rms_u mais sont parmi les solutions qui évoluent le moins en terme d'erreur rms_u et rms_{z_s} lorsqu'on les relaxe. Ceci montre encore une fois l'intérêt de l'approche mise en œuvre pour désigner un ensemble de solutions optimales $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ qui affectera le moins possible les projections d'évolution de la zone étudiée.

6.5.3 Sélection d'un ensemble de solutions optimales pour l'ANC

Comme pour l'ATP, nous avons cherché à adopter une vision ensembliste de l'ANC en effectuant une série de simulations en variant certains paramètres de l'algorithme. Nous nous sommes restreint à jouer sur les deux paramètres qui semblaient avoir le plus d'impact sur la solution, λ_α pour les étapes d'inversion de β et T le temps de relaxation newtonienne à chaque cycle, gardant une valeur $\sigma = 1000 \text{ m}$ dans (6.4) et une valeur de λ_{div} constante pour toutes les simulations. Cet exercice s'est néanmoins montré moins efficace que pour l'ATP

puisque, dans de nombreux cas, les paramètres choisis ont amené l'ANC à diverger après quelques cycles. De manière générale, les périodes de relaxation newtonienne supérieures à 1.5 ans avaient toutes tendance à diverger après quelques cycles. Cette divergence est liée à un mauvais contrôle de l'évolution de l'épaisseur dans certaines zones mal contraintes par le *nudging* en raison d'une trop faible densité d'observations.

Balayer l'espace des solutions s'est donc avéré plus difficile que pour l'ATP et sur plus de 50 simulations menées seules 18 ont permis d'obtenir une solution $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$. Une analyse des erreurs rms_u et rms_{div} après inversion et des erreurs rms_u et rms_{z_s} après 50 ans de relaxation montre que ces 18 solutions présentent des écarts aux observations très similaires. On constate ainsi que l'ANC a tendance à présenter des erreurs sur les vitesses relativement plus élevées que l'ATP et l'inversion du frottement seul. La méthode permet cependant d'atteindre des valeurs rms_{div} très faibles après inversion (cf. Figure 6.10a), ce qui amène à des erreurs rms_{z_s} après 50 ans souvent plus faibles que les deux algorithmes précédents (cf. Figure 6.10b). Un tel comportement de l'ANC peut s'expliquer par l'absence de contrôle sur les vitesses lors des phases de relaxation, entraînant des écarts que les étapes d'inversion de β ne peuvent réduire aussi bien qu'avec l'ATP et l'inversion du frottement seul.

Aucune solution ANC n'étant meilleure que l'inversion du frottement seul à la fois en terme d'écart aux vitesses et d'écart sur la surface après 50 ans, nous ne pouvons définir notre ensemble de simulations optimales avec les deux mêmes bornes que pour l'ATP. Nous limiterons donc l'ensemble par une seule borne $\text{rms}_{z_s} < 31 \text{ m an}^{-1}$. L'ensemble de solutions optimales $\Omega_{\text{opt,ANC}}$ se limite alors à 14 solutions $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ (4 des 18 solutions initiales ayant conduit à des valeurs rms_u extrêmes au cours de la relaxation).

6.5.4 Analyse des sous-ensembles de solutions

L'analyse des erreurs rms sur l'ensemble des solutions nous a permis d'écarter les moins vraisemblables et garder uniquement un sous-ensemble $\Omega_{\text{opt,ATP}}$ pour l'algorithme ATP et un sous-ensemble $\Omega_{\text{opt,ANC}}$ pour l'algorithme ANC. Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ de ces deux sous-ensembles ainsi qu'à la distribution spatiale des écarts aux vitesses et à la surface observée après 50 ans de relaxation.

6.5.4.1 Solutions de géométrie basale z_b

Intéressons nous dans un premier temps à la géométrie basale z_b issue de la moyenne des solutions $\Omega_{\text{opt,ATP}}$ et $\Omega_{\text{opt,ANC}}$ dont les résultats sont présentés sur les Figures 6.11 et 6.12. On y remarque que ces solutions moyennes $\Omega_{\text{opt,ATP}}$ et $\Omega_{\text{opt,ANC}}$ diffèrent notablement de *Bedmap2* en certains endroits, différences pouvant atteindre plusieurs centaines de mètres. Afin de mieux mettre en évidence les différences entre l'ATP et l'ANC et *Bedmap2*, nous nous concentrerons sur trois zones affichant des géométries basales notablement différentes selon qu'on s'intéresse à $z_{b,\text{ATP}}$ (géométrie moyenne pour $\Omega_{\text{opt,ATP}}$), $z_{b,\text{ANC}}$ (géométrie moyenne

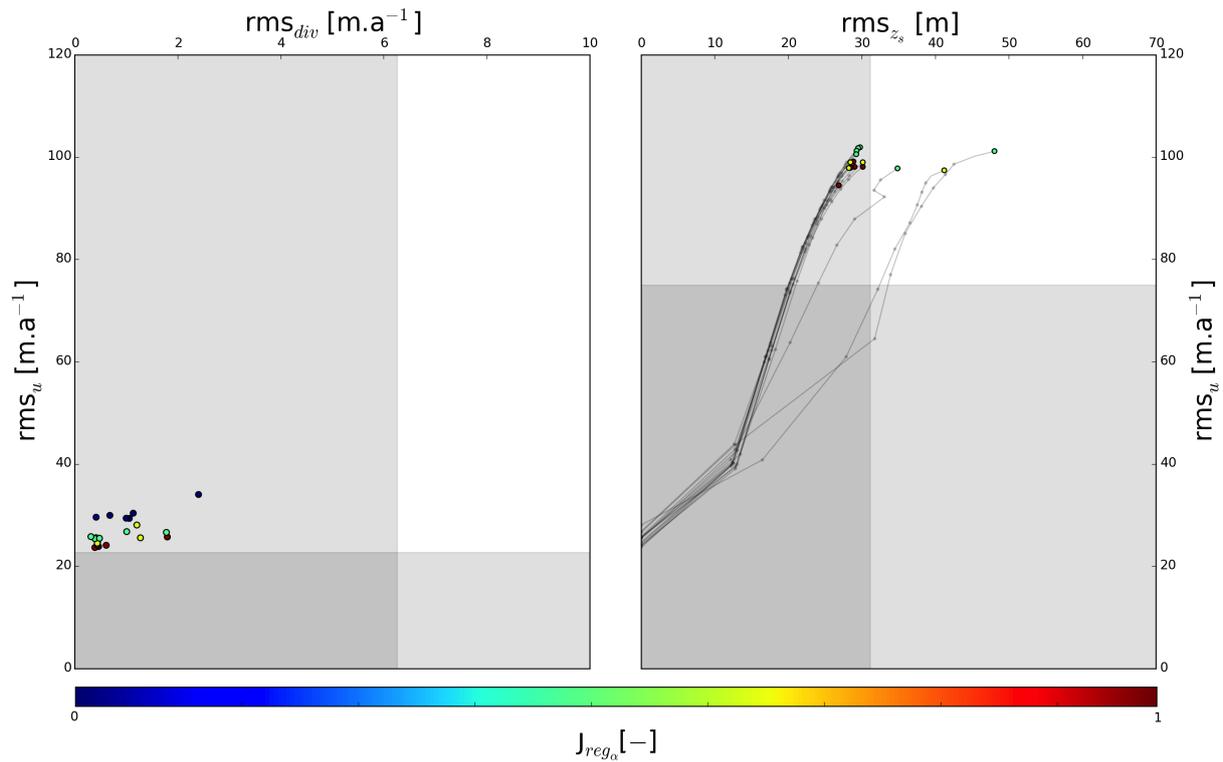


FIGURE 6.10 – (a) Erreur rms_u en fonction de rms_{div} pour différentes valeurs de λ_α et T avec l’algorithme ANC. (b) Évolution de l’erreur rms_u et rms_{z_s} sur une période de 50 ans, les courbes grises représentent l’évolution pour chaque couple (λ_α, T) tandis que les points gris représentent la valeur des erreurs tous les 5 ans. Les aires en gris clair représentent l’ensemble des valeurs inférieures aux erreurs rms obtenues en inversant le frottement seulement et l’aire en gris foncé représente l’espace de solutions pour lequel les solutions minimisent mieux à la fois rms_u et rms_{div} . La couleur des points correspond à l’erreur de J_{reg_α} en valeur relative (0 étant la valeur la plus faible et 1 la valeur à plus élevée)

pour $\Omega_{opt, ANC}$ et $z_{b, Bedmap2}$ (géométrie issue de *Bedmap2*). Ces trois zones sont encadrées sur les Figures 6.11 et 6.12 et présentées à la Figure 6.13.

Zone 1

La géométrie basale $z_{b, ATP}$ présente des fjords plus étroits et plus profonds au niveau du glacier Totten et du glacier de l’Université de Moscou que dans *Bedmap2* (ce qui peut être aisément observé sur la Figure 6.11c, pour lesquels des coupes en longueur et en largeur sont présentées sur les Figures 6.14b-e). Ce résultat semble en accord avec les résultats de [Morlighem et al. \(2014\)](#) sur le Groenland qui avaient également trouvé, à l’aide de leur méthode inverse basée sur la conservation de la masse, des fjords plus étroits et profonds que ceux visibles dans [Bamber et al. \(2013\)](#) (utilisant une méthode proche de celle utilisée pour *Bedmap2*). Notons cependant que ce résultat est à nuancer pour deux raisons. Premièrement, la surface basale moyenne issue de $\Omega_{opt, ATP}$ est parfois accompagnée d’un écart-type élevé, laissant penser que nos résultats (dans ces zones) sont assez sensibles aux paramètres de régularisation choisis. En outre, la solution $z_{b, Bedmap2}$ se trouve souvent à l’intérieur des bornes définies par l’écart-type

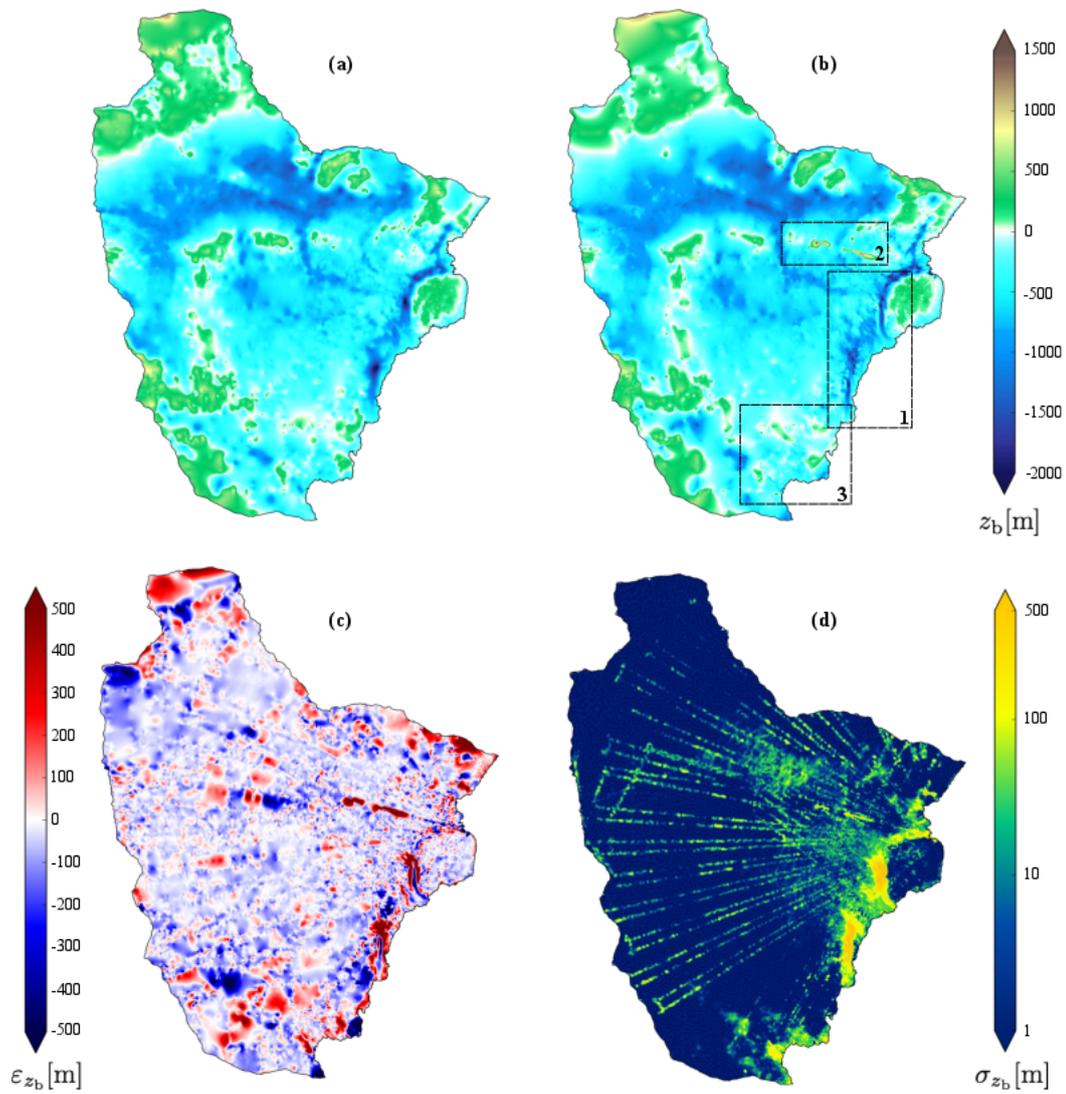


FIGURE 6.11 – Comparaison entre la géométrie basale de *Bedmap2* (a) et $z_{b,ATP}$ basée sur la moyenne de l'ensemble $\Omega_{opt, ATP}$ (b). La différence absolue ε_{z_b} est représentée en (c) où les zones bleutées sont les zones d'altitude moins élevées que *Bedmap2* et les zones en rouge les zones plus élevées. L'écart-type σ_{z_b} de l'ensemble $\Omega_{opt, ATP}$ est donné en (d). Les cadres (1), (2) et (3) sont agrandis à la Figure 6.13.

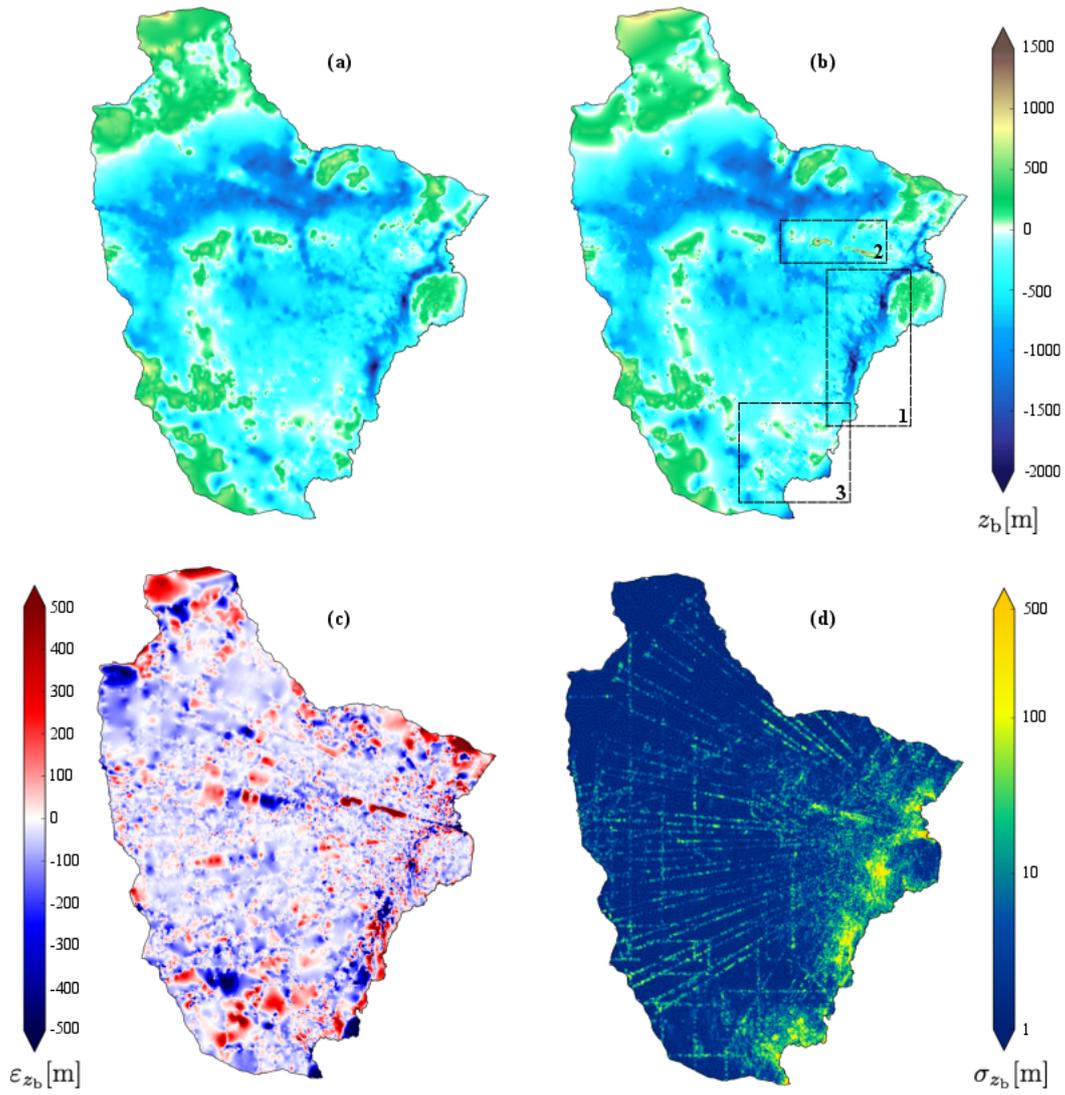


FIGURE 6.12 – Figure identique à la Figure 6.11 mais pour l'ensemble $\Omega_{\text{opt, ANC}}$ obtenu via la méthode ANC.

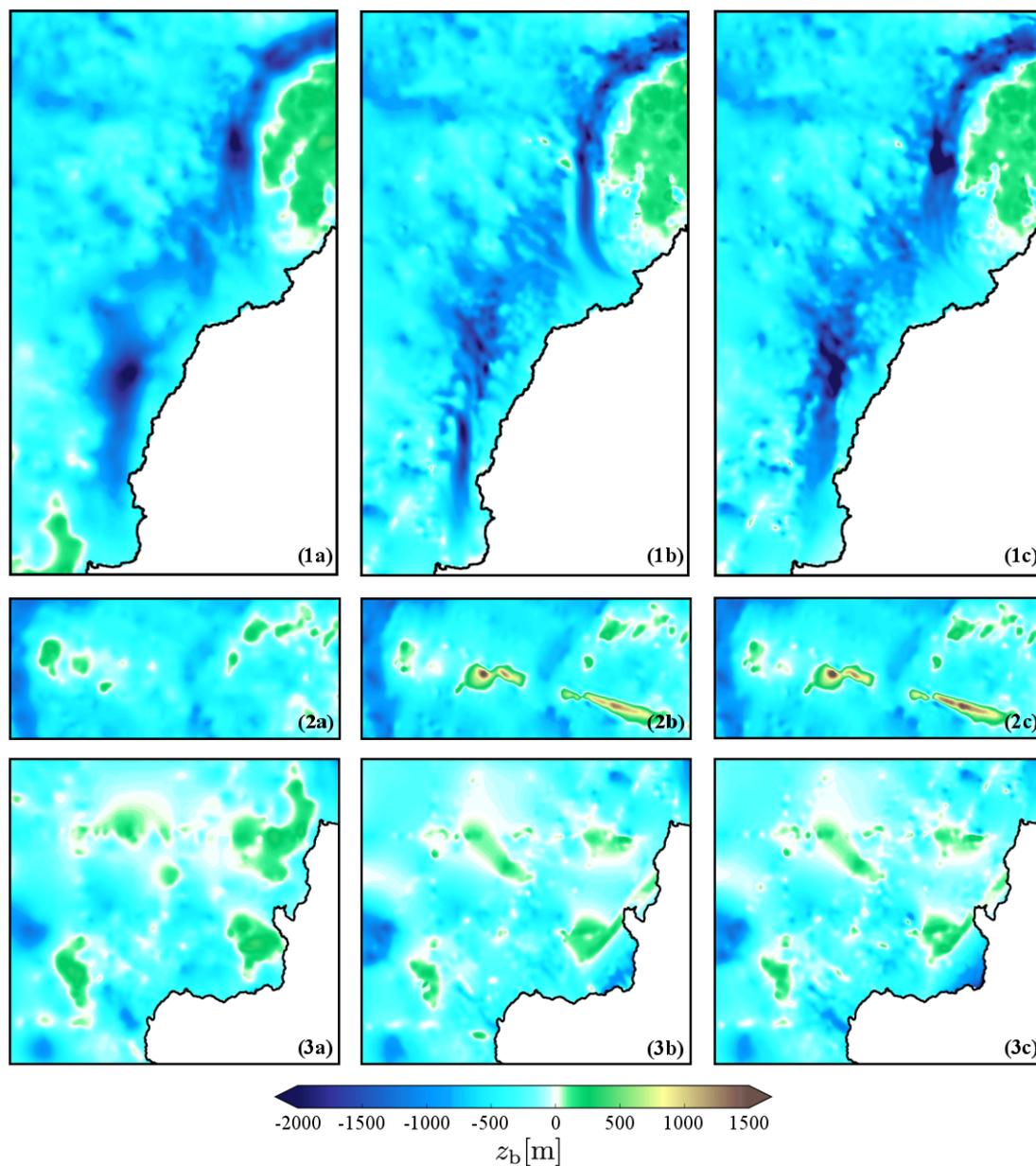


FIGURE 6.13 – Agrandissement sur les trois zones encadrées aux Figures 6.11 et 6.12. Les chiffres correspondent à la localisation des zones sur ces deux Figures : **(1)** Zones de Totten et de l’ice shelf de l’Université de Moscou, **(2)** zone présentant une ligne de crête avec les méthodes ATP et ANC, **(3)** alentours du glacier Frost. Les lettres correspondent aux 3 différentes géométries basales : **(a)** *Bedmap2*, **(b)** ATP et **(c)** ANC.

de l'ensemble $\Omega_{\text{opt, ATP}}$. Deuxièmement, certaines sections des coupes montrées se situent au delà de la ligne d'échouage où une fonte basale par interaction avec l'eau sous la cavité peut avoir lieu. Nos simulations ne tenant pas compte de la fonte sous les *ice shelves*, il est donc possible que nous surestimions la profondeur de la surface basale.

Comme le montre la Figure 6.12c, la géométrie $z_{\text{b,ANC}}$ présente également un fjord globalement plus profond et étroit au niveau du glacier de l'Université de Moscou. Le phénomène est cependant moins marqué que pour l'ATP. Aussi, la géométrie du fjord du glacier Totten ressemble davantage à celle de $z_{\text{b,Bedmap2}}$ comme le montre l'agrandissement sur la zone des glaciers Totten et Moscou présenté à la Figure 6.13.

L'agrandissement sur la zone de "Totten-Moscou *ice shelf*" montre également que les deux solutions $z_{\text{b,ATP}}$ et $z_{\text{b,ANC}}$ présentent un niveau de détails supérieur, détails lissés sur $z_{\text{b,Bedmap2}}$. L'ATP et l'ANC profitent ainsi de leur résolution spatiale supérieure à celle de $z_{\text{b,Bedmap2}}$ ainsi qu'à l'utilisation d'observations supplémentaires par rapport à *Bedmap2*.

Zone 2

On observe également une ligne de crête très marquée sur le socle moyen défini par les solutions $z_{\text{b,ATP}}$ et $z_{\text{b,ANC}}$. En comparaison, *Bedmap2* n'affiche pas cette crête. Une coupe à travers la structure (cf. Figure 6.14a et Figure 6.15a) semble montrer une alternance de zones beaucoup plus élevées et d'autres beaucoup plus profondes. Une comparaison de notre socle rocheux moyen avec les données disponibles aux abords de la crête montre que ce phénomène semble être dû à une ligne de vol radar présentant des observations d'altitude de socle rocheux parfois particulièrement élevées et sans doute très surestimées par endroit au vu de la surface qui ne présente pas de bosses et fosses à cet endroit. La ligne de vol rapportant ces observations étant intégrée dans la fonction coût a priori J_{z_b} , l'ATP et l'ANC ont tendance à reproduire cette information et construisent une ligne de crête sans doute inexistante tandis que *Bedmap2* n'en tient certainement pas compte. L'observation de la surface modélisée dans la zone après 50 ans de relaxation montre également de fortes différences avec la surface observée, ce qui incite une nouvelle fois à penser que les observations d'élévation du socle rocheux dans cette zone sont erronées ou tout du moins incohérentes avec les observations de surface. Les deux algorithmes d'inversion ne permettent pas toujours de s'affranchir de l'a priori sur la solution lorsque celui-ci est erroné. L'existence de données erronées dans les observations influence fortement la solution finale. Ce constat est particulièrement vrai dans la zone dont nous parlons, où peu d'autres données sont disponibles. Pour l'ANC peu de données sont dans le voisinage $\mathcal{V}(n)$ d'un nœud n du maillage et une observation erronée dans ce voisinage a un impact important sur le terme de rappel en ce nœud. On remarque que l'ATP permet de s'écarter un peu plus de ces observations extrêmes. L'écoulement relativement lent dans la région ne permet cependant pas de se détacher plus de l'a priori sur la solution. Une meilleure définition du socle rocheux dans la région nécessiterait donc de relancer les simulations en retirant ces données erronées. Une telle correction nécessite néanmoins d'effectuer une sélection au cas par cas afin de ne pas supprimer de données non-erronées.

Zone 3

Dans cette zone, qui se situe aux alentours du glacier Frost, $z_{b,ATP}$ et $z_{b,ANC}$ donnent des résultats très similaires avec moins de structures au dessus du niveau de la mer que pour $z_{b,Bedmap2}$ (certaines structures en vert présentes dans *Bedmap2* sont absentes sur $z_{b,ATP}$ et $z_{b,ANC}$), notamment aux alentours du glacier de Frost ainsi qu’au dessus de celui-ci. A l’échelle du domaine entier, les solutions $z_{b,ATP}$ et $z_{b,ANC}$ présentent respectivement 5.8 % et 6.7 % de surface en moins au dessus de la mer.

Finalement, nous pouvons remarquer que l’écart-type σ_{z_b} pour le sous-ensembles $\Omega_{opt, ATP}$ (cf. Figure 6.11c) est relativement faible dans les zones d’écoulement lent (à l’intérieur des Terres). La faible variabilité de solutions de l’ensemble $\Omega_{opt, ATP}$ dans les zones les plus lentes est due à la difficulté de l’algorithme à s’écarter de l’a priori, et donc d’optimiser la solution, lorsque les vitesses sont plus faibles et prennent moins de poids au sein de J_v (comportement de l’ATP déjà mis en avant dans l’expérience jumelle au chapitre 5). Nous observons néanmoins une plus forte variabilité de la solution le long des lignes de vols, ce qui s’explique par un rappel plus ou moins important vers les observations en fonction de la valeur λ_{z_b} lors de l’inversion. Les zones d’écoulement rapide (plus proches de la côte) par contre, offrent une variabilité importante avec des valeurs d’écart-types σ_{z_b} dépassant souvent 500 m (contre quelques dizaines de mètres voire moins ailleurs). Ceci montre notamment la sensibilité des solutions en fonction des paramètres de régularisation choisis, même pour des solutions faisant partie de $\Omega_{opt, ATP}$ et assurant pourtant des erreurs relativement faibles en terme d’écart aux observations de vitesses et de surface. La Figure 6.12c montre que les valeurs d’écart-types σ_{z_b} de l’ensemble $\Omega_{opt, ANC}$ sont généralement plus faibles que $\Omega_{opt, ATP}$. Ce résultat reste néanmoins difficile à interpréter puisque l’ensemble $\Omega_{opt, ANC}$ contient presque 3 fois moins de simulations que le premier, avec des solutions affichant des erreurs relativement similaires à la fois en terme de rms_u et rms_{z_s} .

6.5.4.2 Solutions de frottement basal

Intéressons nous maintenant au coefficient de frottement β et à la contrainte basale obtenus via l’ATP et l’ANC ainsi qu’avec l’inversion du frottement seul (AFO). Comme la géométrie basale, les solutions moyennes de coefficient de frottement sur $\Omega_{opt, ATP}$ et $\Omega_{opt, ANC}$ seront respectivement appelées β_{ATP} et β_{ANC} . La solution obtenue à partir de AFO sera référencée β_{AFO} . Effectuer une moyenne arithmétique de β sur les ensembles $\Omega_{opt, ATP}$ et $\Omega_{opt, ANC}$ est assez délicat tant les valeurs du coefficient de frottement s’étendent sur une large gamme (de $\beta \simeq 10^{-1}$ à $\beta \simeq 10^{-7}$). Une seule valeur élevée de β peut biaiser la moyenne tant son poids relatif sera élevé par rapport à une valeur faible. Nous effectuons donc une moyenne géométrique de β , moins sensible aux valeurs les plus élevées d’une série de données. Cette moyenne est en réalité équivalente à la moyenne arithmétique des logarithmes de β

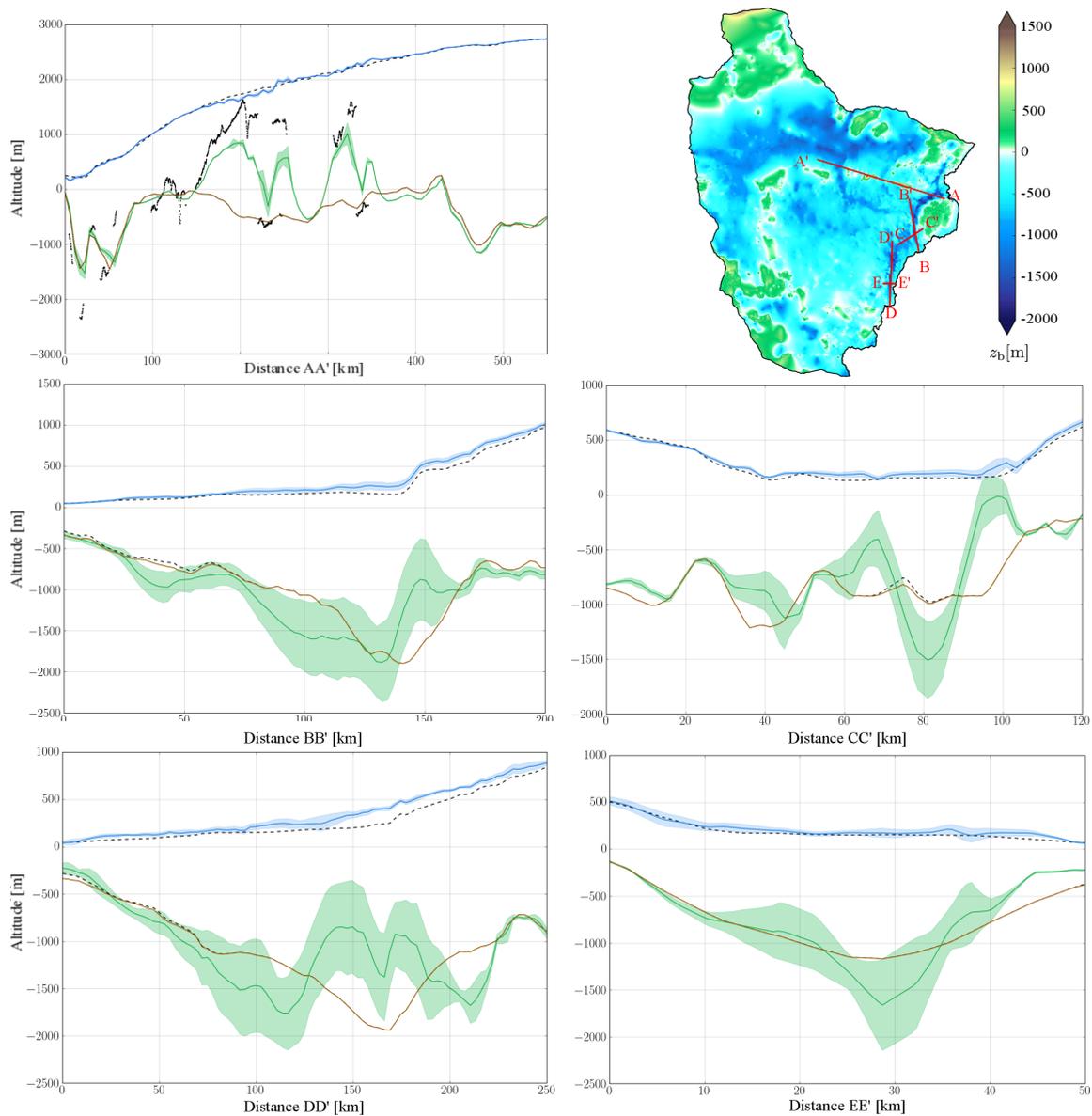


FIGURE 6.14 – Coupes sur différentes sections. La surface basale moyenne et l'écart-type sur $\Omega_{opt, ATP}$ sont respectivement représentés en vert et vert clair tandis que la surface supérieure moyenne et l'écart-type sur $\Omega_{opt, ATP}$ après 50 ans sont représentés respectivement en bleu et bleu clair. La surface basale et la surface supérieure de la couche de glace issues de *Bedmap2* sont représentées en pointillés noirs tandis que le socle rocheux de *Bedmap2* est présenté en brun. Les points sur la coupe AA' représentent les observations du socle rocheux relevées de part et d'autre de celle-ci.

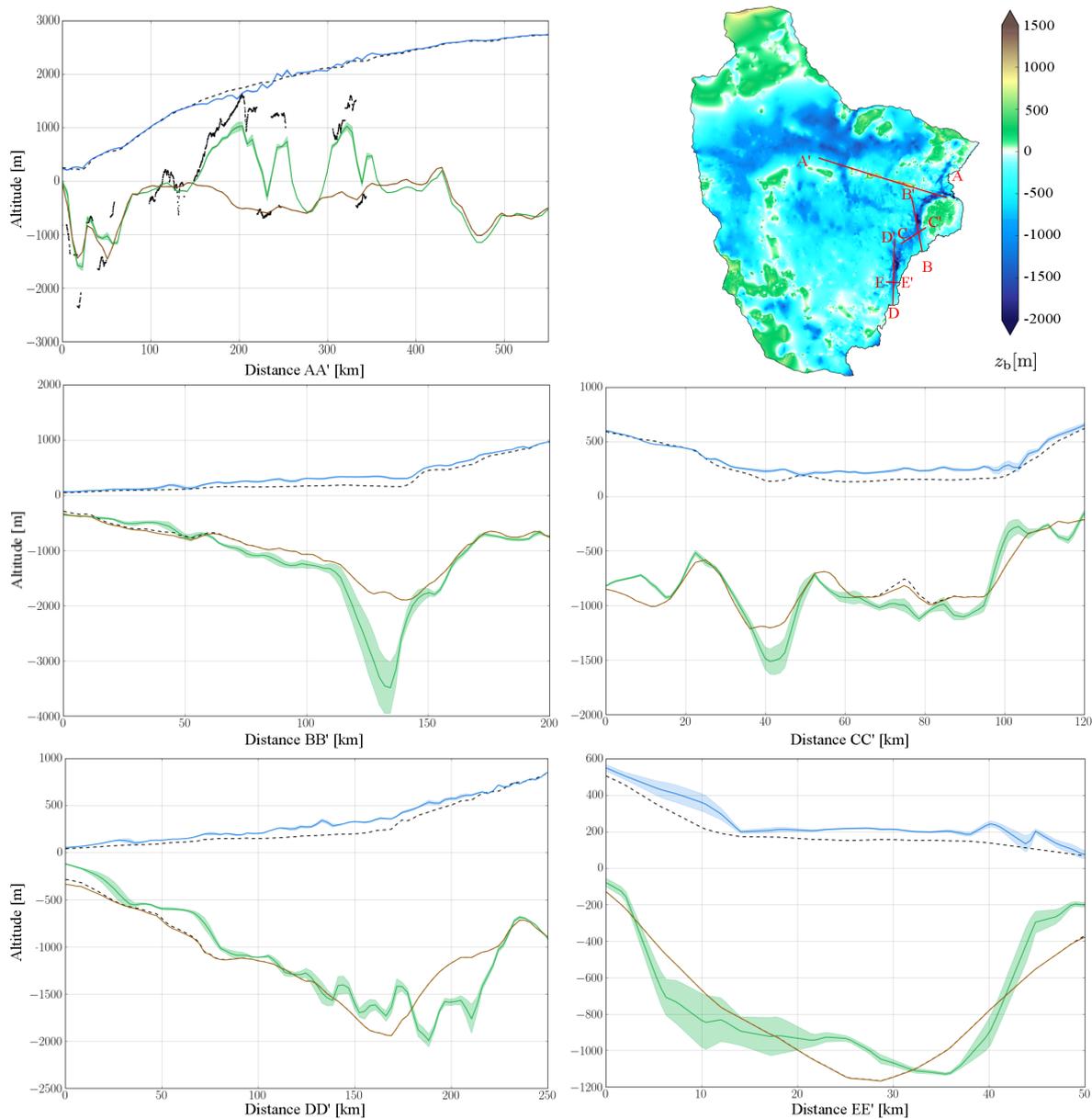


FIGURE 6.15 – Figure identique à la Figure 6.14 mais pour l’ANC.

($\alpha = \log(\beta)$) et est donnée par :

$$\beta_{\text{ATP/ANC}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_{\text{ATP/ANC}}} \log(\beta_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_{\text{ATP/ANC}}} \alpha_i \quad (6.7)$$

où $N_{\text{ATP/ANC}}$ représente le nombre de simulations i dans $\Omega_{\text{opt, ATP}}$ ou $\Omega_{\text{opt, ANC}}$.

Dans tous les cas, le coefficient β étant inversé sur tout le domaine, nous ne distinguons pas les zones flottantes et les zones posées. Le cisaillement basal sous les *ice shelves* n'est donc jamais réellement nul mais les valeurs de coefficient β (et par extension de τ_b) trouvées par les différents algorithmes dans ces zones restent généralement négligeables vis à vis de la glace posée.

La Figure 6.17 compare le champ de coefficient moyen β obtenu selon l'ATP et l'ANC ainsi que le champ optimal obtenu avec l'AFO. On remarque que ceux-ci sont généralement assez similaires malgré une tendance de l'ATP à fournir des valeurs β_{ATP} plus élevées que l'ANC et l'AFO dans des zones où celui-ci devrait être théoriquement nul, c'est à dire sous les *ice shelves*. On peut également noter que la limitation entre les zones de frottement élevé et les zones de frottement faible correspond généralement bien à la ligne d'échouage définie par interférométrie radar différentielle en mesurant le mouvement vertical des *ice shelves* en réponse aux marées (Rignot *et al.*, 2011b).

Afin de pouvoir mieux comparer nos résultats à cette ligne d'échouage, des tests ont été menés afin de déterminer en dessous de quelle valeur de coefficient de frottement l'impact du cisaillement basal devenait négligeable. Ces tests consistaient à imposer une valeur β_{seuil} pour toute valeur de β inférieure à celle-ci. Une valeur seuil très faible n'aura que peu d'impact sur l'écoulement tandis qu'une valeur seuil élevée impactera fortement l'écoulement. Nous cherchons alors la valeur β_{seuil} sous laquelle l'impact sur l'écoulement devient négligeable, c'est-à-dire sous laquelle la contrainte de cisaillement basal τ_b devient négligeable devant les autres termes du système d'équation (3.26). Ces tests montrent que sous une valeur de $\beta_{\text{seuil}} = 10^{-6.5} \text{ MPa m}^{-1}$, diminuer encore β n'a plus d'impact sur l'écoulement. En effet, sous cette valeur, une diminution de β entraîne des changements d'altitude de surface de moins de 0.02 % et de champ de vitesses de moins de 0.06% en moyenne sur l'ensemble de la zone étudiée après 50 ans de simulation. Ces tests, montrés à la Figure 6.16, n'ont cependant été menés que pour une simulation initialisée via AFO, c'est-à-dire pour un champ β_{AFO} optimal et la géométrie basale $z_{b, \text{Bedmpa2}}$. Cette valeur β_{seuil} est donc susceptible de changer légèrement pour d'autres états initiaux mais reste un bon indicateur de la valeur sous laquelle le cisaillement basal τ_b n'a quasiment plus aucun impact sur l'écoulement et pourrait donc potentiellement être utilisée pour définir la position de la ligne d'échouage.

En pratique, on constate que les valeurs de β_{ATP} sur les *ice shelves*, définis selon la ligne d'échouage de Rignot *et al.* (2011b), sont souvent sensiblement supérieures à $10^{-6.5} \text{ MPa m}^{-1}$, ce qui signifie que l'algorithme ATP crée un frottement fictif sur les *ice shelves* afin de pro-

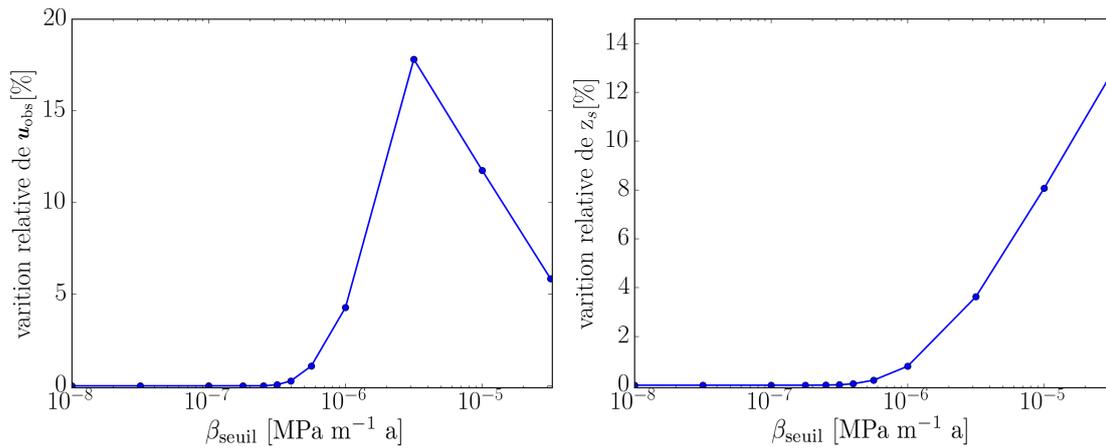


FIGURE 6.16 – Variations moyennes du champ de vitesses \mathbf{u} (a) et z_s (b) en fonction du seuil β_{seuil} imposé sur β .

duire des vitesses plus proches des observations. Ce phénomène pourrait être expliqué par une fluidité de la glace trop importante que l'algorithme tente de compenser par une augmentation du frottement basal. Le champ β_{ANC} est très similaire au champ β_{AFO} même si on retrouve une solution davantage lissée. La géométrie des zones de frottement très faible épouse souvent très bien la géométrie de la ligne d'échouage (notamment sur Totten et sur l'*ice shelf* de l'Université de Moscou malgré une tendance à trouver des valeurs de β non-négligeables ($> 10^{-6.5}$ MPa m⁻¹ a) lorsqu'on se rapproche de la ligne d'échouage.

6.5.4.3 Étude d'impact sur une simulation pronostique

Nous avons déjà montré que les erreurs rms_u et rms_{z_s} après 50 ans de relaxation à partir des états initiaux faisant partie du sous-ensemble $\Omega_{\text{opt, ATP}}$ sont plus faibles que lors de l'inversion du frottement seul. Dans le cas de l'ANC, le bilan est plus nuancé puisque seule l'erreur rms_{z_s} est réellement diminuée. Ces erreurs rms ne nous donnent néanmoins qu'une vision moyenne de l'erreur commise par rapport aux observations et deux erreurs rms similaires ne gagent pas d'une distribution spatiale similaire des erreurs. Cette section propose donc une étude de la distribution spatiale des erreurs sur les vitesses et sur la surface après 50 ans de relaxation. La Figure 6.18 compare les erreurs après 50 ans sur le champ de vitesses et sur le champ d'altitude de surface moyennés sur l'ensemble des simulations de $\Omega_{\text{opt, ATP}}$ et $\Omega_{\text{opt, ANC}}$ ainsi que l'erreur suite à l'initialisation avec l'optimum de AFO. L'erreur moyennée en un point du domaine sur la surface est alors calculée selon :

$$\varepsilon_{z_s, \text{ATP/ANC}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_{\text{ATP/ANC}}} (z_{s,i} - z_{s,\text{obs}}) \quad (6.8)$$

où $N_{\text{ATP/ANC}}$ représente le nombre de simulations au sein de $\Omega_{\text{opt, ATP}}$ ou de $\Omega_{\text{opt, ANC}}$, $z_{s,i}$ la surface de la i ème simulation et $z_{s,\text{obs}}$ la surface de référence. De même, l'erreur moyennée

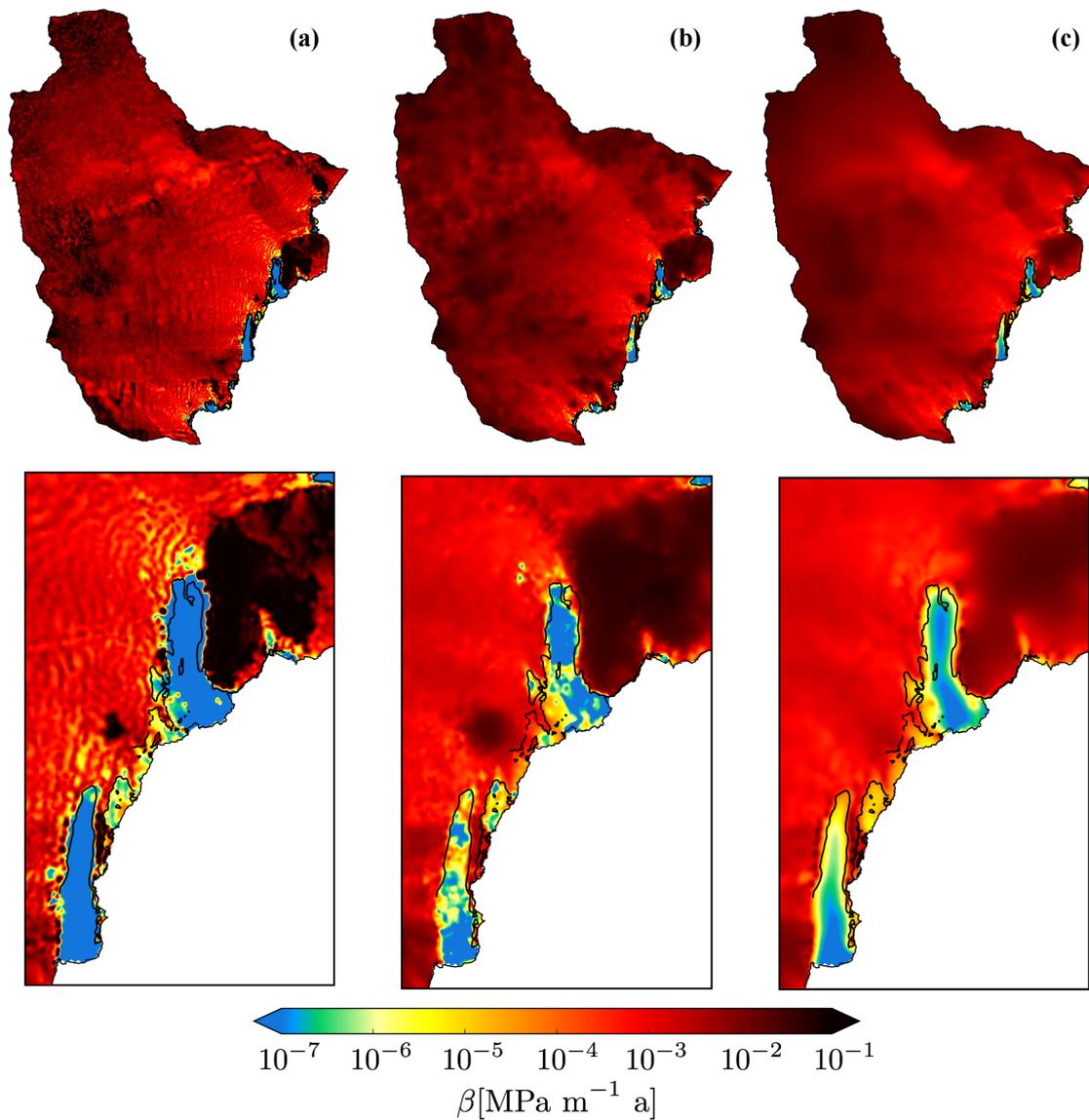


FIGURE 6.17 – Carte de coefficient de frottement β obtenu par (a) l'inversion du frottement seul, (b) avec l'ATP (moyenne sur l'ensemble $\Omega_{\text{opt, ATP}}$) et (c) avec l'ANC. La ligne d'échouage tirée des données InSAR (Rignot *et al.*, 2011c) est tracée en noir. Les images encadrées correspondent à un zoom sur les zones de Totten et du Moscow University Ice shelf pour chacun des trois cas.

sur les vitesses en un point est calculée selon :

$$\varepsilon_{\mathbf{u}_{\text{ATP/ANC}}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_{\text{ATP/ANC}}} (|\mathbf{u}_i| - |\mathbf{u}_{\text{obs},i}|) \quad (6.9)$$

où \mathbf{u}_i représente les vitesses modélisées et $\mathbf{u}_{\text{obs},i}$ les vitesses de référence au même point.

Lors de la comparaison de la distribution spatiale des erreurs sur les vitesses après relaxation à partir d'un état initial $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ tiré de l'ensemble $\Omega_{\text{opt, ATP}}$ et à partir de l'optimum de AFO, nous remarquons que la meilleure cohérence entre vitesses observées et vitesses modélisées est essentiellement visible dans les zones les plus rapides. L'ATP est cependant moins performant dans les zones moins rapides et présente un écart aux vitesses observées légèrement plus important que lorsqu'on inverse seulement le coefficient de frottement avec l'AFO. Enfin, d'une manière générale, l'inversion du frottement seul, l'ATP et l'ANC ont tendance à produire des vitesses plus élevées que les observations sur certains *ice shelves*, comme le montre la Figure 6.19 où les vitesses supérieures à 1000 m a^{-1} sont typiques des *ice shelves*. Ces vitesses plus élevées pourraient être engendrées par une trop faible rigidité de la glace. En effet, nous avons déjà vu au chapitre 3 que l'anisotropie avait tendance à rigidifier la glace sur les *ice shelves*. L'introduction d'un facteur d'amplification $E < 1$ dans (3.3), permettant de réduire la viscosité de la glace et simuler l'effet de l'anisotropie, pourrait ralentir l'écoulement de la glace et conduirait à des vitesses plus proches des observations. Notons que l'ATP présente toutefois des vitesses un légèrement plus faibles que les deux autres algorithmes grâce au frottement fictif ajouté sous les *ice shelves*.

L'augmentation moindre de l'erreur rms_{z_s} après 50 ans lors de l'utilisation de l'ATP par rapport à l'AFO, synonyme d'une surface plus proche de la surface observée, est également essentiellement visible dans les régions d'écoulement rapide. Cette meilleure cohérence avec la surface observée est particulièrement visible sur l'*ice shelf* du glacier Totten où la surface est très proche des observations, ce qui n'était pas le cas lors de l'inversion de β seul. L'ATP entraîne aussi une moins forte variabilité spatiale en terme d'erreur sur la surface. En effet, avec l'inversion du frottement seul, des zones présentant une surface plus élevée que la surface observée sont parfois très proches de zones présentant une surface moins élevée que la surface observée, sans doute signes d'anomalies importantes de divergence de flux, tandis que cette tendance est moins visible pour l'ATP. Enfin, on peut remarquer, qu'à la fois pour l'ATP et l'inversion du frottement seul, les zones affichant les erreurs sur la surface les plus importantes, coïncident souvent avec les zones moins riches en observations de vitesses et où l'inversion est donc mal contrainte. Ces erreurs ne semblent donc pas dues à une mauvaise performance des algorithmes mais plutôt au manque de données.

Les solutions $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ sur l'ensemble $\Omega_{\text{opt, ANC}}$ entraînent, comme nous l'avons déjà évoqué, une erreur rms sur le champ de vitesses assez élevée après 50 ans de relaxation. Comme pour les deux autres algorithmes d'inversion, cette erreur est essentiellement due à

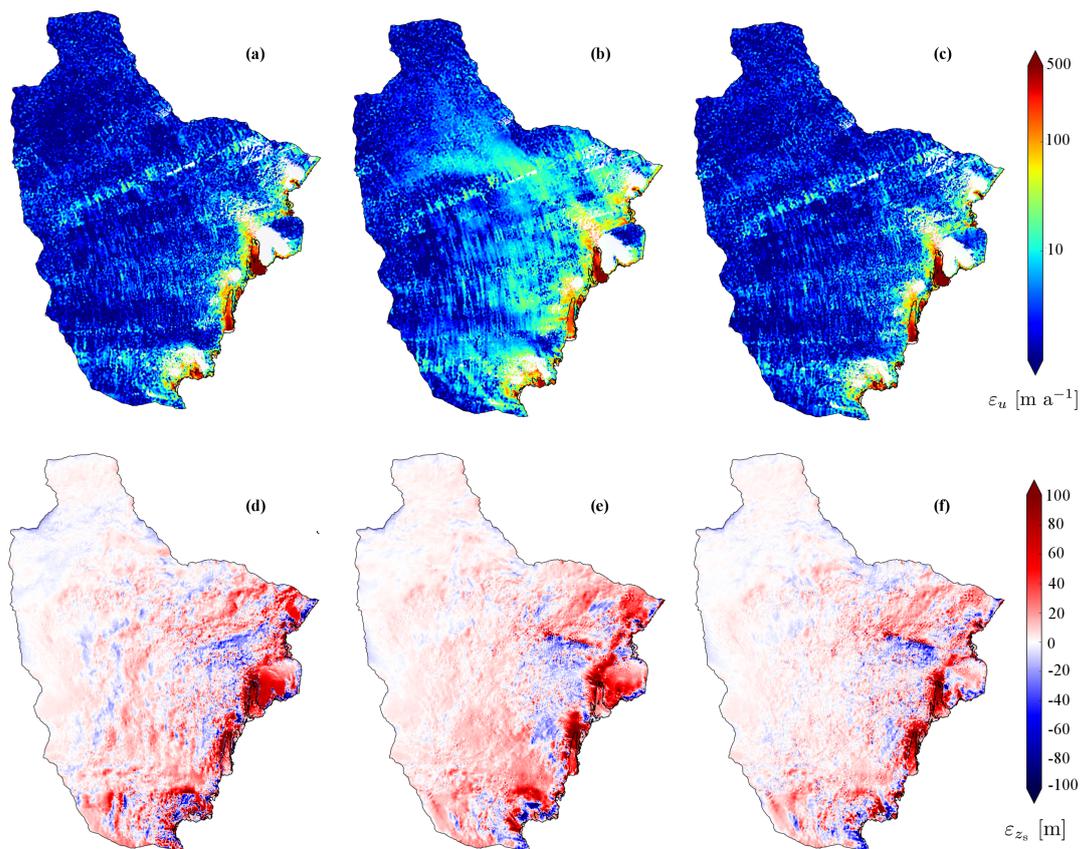


FIGURE 6.18 – Erreurs sur les vitesses ε_u et sur la surface ε_{zs} après 50 ans de relaxation. (a)-(d) Les erreurs $\varepsilon_{z_s, \text{AFO}}$ et $\varepsilon_{u_{\text{AFO}}}$ tirées de l'optimum de l'inversion du frottement seul, (b)-(e) les moyennes $\varepsilon_{z_s, \text{ATP}}$ et $\varepsilon_{u_{\text{ATP}}}$ issues de $\Omega_{\text{opt,ATP}}$ et (c)-(f) les moyennes $\varepsilon_{z_s, \text{ANC}}$ et $\varepsilon_{u_{\text{ANC}}}$ issues de $\Omega_{\text{opt,ANC}}$.

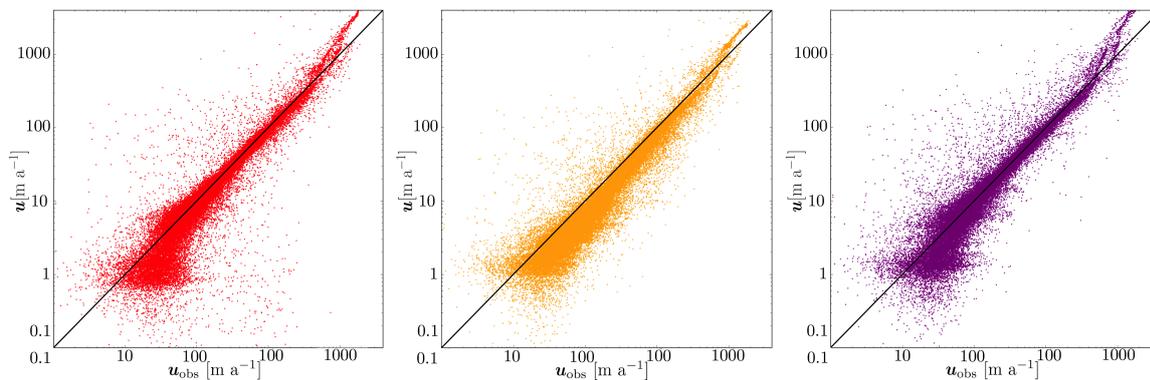


FIGURE 6.19 – Comparaison entre vitesses observées u_{obs} et vitesses modélisées u après 50 ans de relaxation pour (a) l'inversion du frottement seul (AFO), (b) ATP et (c) ANC. La ligne noire à 45° représente une adéquation parfaite entre les observations et le modèle.

des vitesses d'écoulement trop rapides sur les *ice shelves*. En revanche, les erreurs rms_{z_s} plus faibles que celles des deux autres méthodes sont particulièrement notables. En effet, si l'erreur sur l'altitude de surface sur les *ice shelves* n'est pas particulièrement moins élevée, on remarque que l'erreur sur la surface est beaucoup plus faible que pour les deux autres algorithmes dans les zones où aucune donnée de vitesses (zones en blanc sur les cartes d'erreurs de vitesses sur la Figure 6.18) n'était disponible pour contraindre l'inversion. Il semble donc que l'ANC est beaucoup moins sensible dans les zones sans observations où la solution \mathbf{p} s'adapte à la physique imposée par le modèle via l'équation (6.5).

6.6 Discussion générale et Conclusions

Au cours de ce chapitre, nous avons montré qu'il pouvait être difficile d'inverser une solution $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ permettant de minimiser à la fois l'écart entre vitesses observées et modélisées et les anomalies de divergence de flux. En effet, une solution \mathbf{p} permet généralement de mieux optimiser soit l'un soit l'autre. En outre, nous avons montré que des états initiaux $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ paraissant optimaux après inversion (rms_u et rms_{div} faibles) peuvent évoluer significativement lors d'une phase de relaxation et affecter ainsi une simulation pronostique tandis que des états initiaux a priori moins bons évoluent parfois moins. Ce sont alors ces états initiaux qui devraient être considérés comme optimaux et utilisés lors de simulations pronostiques.

Les résultats de l'ATP et de l'ANC sont relativement différents, aussi bien en terme d'états initiaux $\mathbf{p} = (\beta, z_b)$ fournis après inversion qu'au niveau de leur impact sur les projections, c'est-à-dire en terme d'erreur sur la surface et d'erreur sur les vitesses après 50 ans de relaxation.

On constate généralement que l'ANC a tendance à fournir des solutions z_b beaucoup plus proches de *Bedmap2* que les solutions de l'ATP. Ceci peut s'expliquer par le fonctionnement des deux algorithmes. En effet, la solution produite par l'ANC est très influencée par son premier cycle d'inversion du coefficient β à partir de l'a priori sur la solution $\mathbf{p} = (\beta_{\text{ini}}, z_{b,b})$ (où $z_{b,b}$ est fournie par interpolation des lignes de vols selon la méthode des plus proches voisins), produisant un champ β assez proche de celui offert par l'inversion du frottement seul à partir d'un état initial $\mathbf{p} = (\beta_{\text{ini}}, z_{b, \text{Bedmap2}})$.

Si l'on s'intéresse à l'impact des différents états initiaux \mathbf{p} après 50 ans, on remarque que l'ATP s'écarte moins des observations sur les *ice shelves*, ce qui incite à penser que les solutions \mathbf{p} sur les *ice shelves* sont meilleures que la solution fournie par l'ANC ou par *Bedmap2*. Une meilleure définition de l'épaisseur des *ice shelves* par rapport à *Bedmap2* est effectivement très plausible au vu du caractère confiné de ceux-ci. En effet, dans une telle configuration, l'équilibre hydrostatique n'est souvent pas respecté et les solutions d'épaisseur de [Griggs et Bamber \(2011\)](#) utilisées dans *Bedmap2* s'écartent souvent des observations radars.

Le constat contraire peut être fait sur les zones d'écoulement rapide, en amont des *ice shelves*, où l'ANC permet de fortement diminuer l'écart entre surface observée et surface modélisée après 50 ans. En outre, l'ANC semble capable de mieux s'accorder avec la surface observée dans les zones où l'on ne dispose pas d'observation de vitesses et où l'ATP et l'inversion du frottement seul ne sont pas capables de contraindre correctement le problème. De nouvelles simulations ANC avec un espace mieux échantillonné, à l'instar de l'ensemble optimal $\Omega_{\text{opt,ATP}}$, seraient néanmoins nécessaires pour analyser les capacités de l'ANC.

Chapitre 7

Conclusions et Perspectives

7.1 Conclusions

L'influence du réchauffement climatique sur l'évolution des calottes polaires et la contribution future de ces dernières à l'augmentation du niveau des mers sont une des préoccupations majeures pour les glaciologues. Dans ce cadre, de nombreux efforts ont été réalisés pour améliorer la compréhension des mécanismes qui impactent la dynamique des calottes et plus particulièrement des glaciers émissaires. Mieux comprendre ces mécanismes et les inclure dans les modèles d'écoulement de calottes permet évidemment d'améliorer la qualité des simulations pronostiques d'évolution des calottes et ainsi mieux quantifier la contribution du Groenland ou de l'Antarctique au niveau des mers d'ici la fin du siècle.

Une forte incertitude reste malgré tout attachée à ces projections. En effet, celles-ci sont assez sensibles à l'état initial utilisé dans les modèles. Or, certains paramètres utilisés lors de l'initialisation de ces derniers sont particulièrement mal connus. C'est par exemple le cas du frottement entre le socle rocheux et la glace qui n'est pas directement mesurable mais joue un rôle majeur sur l'écoulement des calottes. La topographie basale est également assez mal contrainte dans les modèles puisque celle-ci n'est généralement mesurée que le long de lignes de vols qui sont parfois distantes de plusieurs dizaines de kilomètres et ensuite interpolées sur une grille régulière. Les modèles numériques de socle rocheux ainsi créés peuvent alors présenter des erreurs allant de plusieurs dizaines de mètres à plusieurs centaines de mètres. Les travaux présentés dans ce manuscrit de thèse ont donc pour objectif d'améliorer la connaissance de ces deux paramètres via l'assimilation de données ou les méthodes inverses.

Au cours des premiers chapitres, nous avons d'abord donné un aperçu des différentes observations disponibles sur les calottes polaires. Nous avons ainsi pu mettre en lumière les incertitudes liées à ces différentes observations et les erreurs potentielles qu'engendrent ces incertitudes lorsqu'on les utilise pour alimenter les modèles. Puis, nous avons passé en revue les mécanismes à l'origine du mouvement des glaciers : la déformation de la glace et le mouvement basal. Nous avons vu que le mouvement basal résultait de processus complexes mais qu'il

était néanmoins possible de représenter ce mouvement à l'aide d'une loi paramétrique relativement simple appelée loi de Weertman que nous utilisons par la suite et dont les paramètres peuvent être obtenus par inversion. Nous avons ensuite passé en revue les différents modèles d'écoulement utilisés en glaciologie avant d'introduire la méthode des éléments finis utilisées dans le modèle d'écoulement de glace *Elmer/Ice*. Nous nous sommes finalement intéressés aux méthodes inverses et à l'assimilation de données. De façon générale, nous avons vu que les méthodes inverses permettent de déterminer la cause d'un phénomène en en connaissant les conséquences. En glaciologie, ces méthodes peuvent donc être utilisées pour reconstruire le frottement basal et la géométrie basale des glaciers (difficilement mesurables) à partir d'observations de surface (plus facilement mesurables). Nous nous sommes alors concentré sur les méthodes variationnelles et plus particulièrement la méthode adjointe ainsi qu'une méthode peu utilisée en glaciologie malgré sa simplicité : la relaxation newtonienne (ou *nudging* en anglais). Ces deux méthodes sont à l'origine des algorithmes développés dans *Elmer/Ice* et appliqués à l'écoulement des calottes polaires au cours de cette thèse.

Les deux algorithmes développés reconstruisent le frottement à la base des glaciers ainsi que la topographie du socle rocheux à partir d'observations de vitesses de surface, de variations d'épaisseur et de données ponctuelles de géométrie basale. L'objectif est alors de trouver un frottement et une géométrie basale qui engendrent des vitesses et des variations d'épaisseur aussi proches que possible des observations tout en conservant un socle rocheux également proche des observations. Le premier algorithme se base uniquement sur la méthode adjointe pour reconstruire à la fois le frottement et la géométrie basale (algorithme ATP). Le second algorithme utilise la même méthode pour reconstruire le frottement mais utilise le principe de la relaxation newtonienne pour reconstruire la géométrie basale (algorithme ANC). Une première application de ces méthodes dans le cadre d'une expérience jumelle, permettant ainsi de vérifier la solution obtenue en la comparant à une solution de référence, a permis de valider les deux algorithmes et tester leur efficacité. Le cas synthétique construit à partir d'une ligne d'écoulement du glacier du Jakobshavn à l'ouest du Groenland, bien que simple, introduisait des erreurs d'observation afin de simuler au mieux des conditions réelles. Un bruit d'observation était ainsi ajouté sur les observations de vitesses de référence mais également sur les observations ponctuelles d'épaisseur. Les résultats obtenus se sont avérés très encourageants puisque les deux algorithmes développés ont pu reconstruire efficacement à la fois la géométrie basale et le frottement de référence. En outre, les deux algorithmes développés conduisent à une diminution des anomalies de divergence de flux qui apparaissent généralement lors de la relaxation des modèles initialisés en inversant uniquement le frottement basal.

Fort de ces résultats issus d'un cas synthétique, les deux algorithmes ont été appliqué à un cas réel. Cette application portait sur la Terre de Wilkes - vaste région d'Antarctique de l'Est - et avait donc pour but d'améliorer la connaissance de la géométrie basale et du frottement basal dans la région. Pour ce faire, nous nous sommes basés sur les données de vitesses d'écoulement de surface de [Rignot et al. \(2011c\)](#) et sur les données de variations d'élévation de

surface de (Flament et Rémy, 2012) ainsi que sur les observations de géométrie basale le long des lignes de vols issues de différentes campagnes d’observations. Évidemment, contrairement à l’expérience jumelle réalisée auparavant, dans ce cas, il n’est pas possible de vérifier la validité de la solution en la comparant à une solution de référence. On cherche alors habituellement les paramètres inversés (frottement et géométrie basale) qui coïncident le mieux avec les observations. Nos résultats montrent néanmoins que la solution peut significativement changer en fonction du poids donné aux différents paramètres contrôlant l’inversion. Certaines solutions ont alors tendance à mieux ajuster l’un ou l’autre des champs de surface observés (champs de vitesses ou de variations d’épaisseur) et il est donc difficile de sélectionner une seule solution (β, z_b) pour initialiser un modèle pronostique. Afin de mesurer l’impact des différents états initiaux (β, z_b) sur un tel modèle pronostique, nous avons proposé une approche ensembliste consistant à laisser évoluer les différents états initiaux au cours du temps et analyser cette évolution. Partant du postulat selon lequel les meilleurs états initiaux sont ceux qui impactent le moins la simulation pronostique et, à fortiori, moins qu’une solution issue de l’inversion plus classique du frottement seulement (à partir d’une géométrie basale z_b comme celle de *Bedmap2* (Fretwell et al., 2013) à laquelle est liée une incertitude importante), nous avons pu définir un ensemble de solutions (β, z_b) optimales. Les algorithmes développés ont montré le comportement attendu et déjà mis en avant dans l’expérience jumelle, restituant notamment une surface plus proche de la surface observée que ne le fait l’inversion du frottement seul. Notons finalement que l’approche ensembliste utilisée permet d’obtenir un frottement moyen et une géométrie basale moyenne ainsi qu’une incertitude sur ceux-ci (définie par l’écart-type des solutions inverses contenues dans l’ensemble de solution optimales). Ces résultats sont cependant à nuancer pour l’algorithme ANC pour lequel le faible nombre d’états initiaux ne permet pas réellement de conclure sur l’incertitude liée aux solutions moyennes.

7.2 Perspectives

De nombreuses pistes peuvent être explorées pour améliorer l’approche ensembliste que nous avons adoptée pour traiter le frottement basal et la géométrie basale de la Terre de Wilkes. En effet, dans cette approche, les simulations pronostiques conduites à partir des différents états initiaux (β, z_b) sont réalisées sans tenir compte de la dynamique de la ligne d’échouage et ne retranscrivent donc pas la complexité des processus qui y sont attachés. *Elmer/Ice*, comme d’autres modèles d’écoulement de glace de nouvelle génération, est toutefois capable de modéliser ces processus. Notons que les travaux présentés n’en restent pas moins valides puisqu’ils permettent bien de quantifier l’impact que peut avoir l’initialisation d’un modèle sur une simulation pronostique et de choisir un état initial idéal a posteriori. Intégrer la dynamique de la ligne d’échouage lors des simulations d’ensemble effectuées sur la Terre de Wilkes permettrait par contre de mieux quantifier l’impact des différents états initiaux sur de véritables projections et améliorer celles-ci. Les expériences menées sur la Terre de Wilkes ont également mis en lumière les problèmes que pouvaient engendrer certaines observations

erronées d'épaisseur de glace au sein des données utilisées pour contraindre l'inversion. Relancer des simulations sans ces données est également nécessaire pour améliorer les résultats obtenus.

Au chapitre 5, nous avons discuté de la facilité d'application de l'ANC dans le cadre de l'inversion de la géométrie basale dans des modèles 3D où, pour rappel, l'ATP débouche sur des problèmes d'optimisation de forme bien plus complexes. L'application de la méthode à un système de Stokes est donc une voie intéressante à explorer dans le contexte actuel où les capacités de calcul sont de plus en plus importantes et où les modèles 3D sont également de plus en plus utilisés (Gillet-Chaulet *et al.*, 2012; Seddik *et al.*, 2012; Favier *et al.*, 2014). Déterminer des paramètres optimaux pour l'ANC nécessite, toutefois de nombreux tests voire l'utilisation de l'approche ensembliste que nous avons exploitée au chapitre 6, ce qui reste très coûteux malgré les capacités de calculs sans cesse grandissantes. Dans ce cadre, une piste de résolution serait de réduire une première fois l'espace des paramètres entrant en compte dans l'inversion à l'aide du modèle *shallow-shelf(y) approximation* que nous avons utilisé avant de relancer des simulations 3D avec le nombre réduit de paramètres amenant à des solutions optimales.

Les travaux effectués au cours de cette thèse pourraient également être étendus à l'échelle du continent Antarctique et du Groenland. Le projet *InitMIP*¹ qui a récemment vu le jour et a pour but de comparer et évaluer les différentes méthodes utilisées pour initialiser les modèles de calottes polaires et estimer l'incertitude associée à ces initialisations montre d'ailleurs l'importance d'une telle application. Les méthodes développées pourraient aussi être exploitées pour inverser la topographie des nombreux glaciers et calottes glaciaires de plus petite taille pour lesquels on dispose de très peu de données et, notamment, mieux contraindre la relation entre l'aire des glaciers et leur volume.

Finalement notons que, si les travaux présentés dans ce manuscrit utilisent une loi de frottement de Weertman linéaire (exposant $m = 1$), ne demandant d'inverser que le coefficient de frottement β , les résultats des modèles sont très sensibles au coefficient m . En réalité, nous avons déjà vu que cet exposant pouvait prendre des valeurs très différentes en fonction du processus de frottement. Les travaux récents de Gillet-Chaulet *et al.* (2016) sur le glacier de Pine Island, se basant sur la méthode adjointe et l'assimilation de vitesses de surface entre 1996 et 2010, montrent que les accélérations constatées dans la région au cours de ces années correspondraient à une valeur $m \geq 5$. Mieux étudier les conditions basales, dans le cadre d'une loi de Weertman, passe donc également par l'étude de l'exposant m . L'inversion de ce troisième paramètre en plus du coefficient de frottement et de la géométrie du socle rocheux nécessiterait de nombreuses observations (notamment asynchrones) pour mieux distinguer l'impact des différents paramètres (sans quoi le problème risque d'être sous-conditionné) mais semble une perspective intéressante pour mieux contraindre les simulations pronostiques et quantifier les processus responsables de l'accélération des glaciers émissaires.

1. <http://www.climate-cryosphere.org/wiki/index.php?title=InitMIP>

Annexe A

Présentation de l'algorithme quasi-Newtonien M1QN3

M1QN3 est un algorithme itératif quasi-Newtonien permettant de rechercher le minimum d'une fonction f sur \mathfrak{R}^n (Gilbert et Lemaréchal, 1989). La recherche de ce minimum se base alors sur le calcul du gradient g de f et d'une direction de descente définie selon :

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{W}_k \mathbf{g}_k \quad (\text{A.1})$$

où \mathbf{W}_k est une approximation de l'inverse de la matrice Hessienne $\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)^{-1}$ de f et $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ le gradient de f à l'étape k .

La taille du pas de descente α_k le long de \mathbf{d}_k est alors déterminée par une procédure de recherche linéaire *mlis3* et la solution de l'itération suivante \mathbf{x}_{k+1} prend alors la forme :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (\text{A.2})$$

La recherche *mlis3* (Nocedal, 1980) se base sur le critère de *Wolfe* pour le choix de α_k , selon lequel le pas est satisfaisant lorsque :

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + C_1 \alpha_k \mathbf{d}_k^T \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (\text{A.3})$$

et

$$\mathbf{d}_k^T \nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) \geq C_2 \mathbf{d}_k^T \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (\text{A.4})$$

avec $0 < C_1 < C_2 < 1$. Le critère (A.3) assure que α_k permet de décroître suffisamment f . Le critère (A.4) assure que le taux d'accroissement de $f(\mathbf{x} + \alpha_k \mathbf{d}_k)$ en α_k est supérieur à C_2 .

Le calcul de l'approximation de la matrice Hessienne $\nabla^2 f(\mathbf{x}_{k+1})$ utilisé pour calculer \mathbf{d}_{k+1} est effectué via la méthode *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (*BFGS*) en utilisant les

différents gradients précédents $g(\mathbf{x}_{k-m})$ et les solutions \mathbf{x}_{k-m} (avec $m = 1, \dots, n$ et n dépendant du nombre d'itérations utilisé dans le calcul) pour mettre à jour la matrice Hessienne.

Bibliographie

- Agosta, C., Favier, V., Krinner, G., Gallée, H., Fettweis, X., and Genthon, C. (2013). High-resolution modelling of the Antarctic surface mass balance, application for the twentieth, twenty first and twenty second centuries. *Climate Dynamics*, **41**(11-12), 3247–3260.
- Alley, R. B., Blankenship, D. D., Bentley, C. R., and Rooney, S. T. (1987). Till beneath ice stream B : 3. Till deformation : Evidence and implications. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **92**(B9), 8921–8929.
- Allison, I., Bindoff, N. L., Bindshadler, R. A., Cox, P. M., de Noblet, N., England, M. H., Francis, J. E., Gruber, N., Haywood, A. M., Karoly, D. J., Kaser, G., Le Quere, C., Lenton, T. M., Mann, M. E., McNeil, B. I., Pitman, A. J., Rahmstorf, S., Rignot, E., Schellnhuber, H. J., Schneider, S. H., Sherwood, S. C., Somerville, R. C. J., Steffen, K., Steig, E. J., Visbeck, M., and Weaver, A. J. (2011). *The Copenhagen Diagnosis : Updating the World on the Latest Climate Science*. Elsevier, Oxford, UK.
- Arthern, R. J. and Gudmundsson, G. H. (2010). Initialization of ice-sheet forecasts viewed as an inverse Robin problem. *Journal of Glaciology*, **56**(197), 527–533.
- Arthern, R. J., Winebrenner, D. P., and Vaughan, D. G. (2006). Antarctic snow accumulation mapped using polarization of 4.3-cm wavelength microwave emission. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, **111**(D6), D06107.
- Aðalgeirsdóttir, G., Aschwanden, A., Khroulev, C., Boberg, F., Mottram, R., Lucas-Picher, P., and Christensen, J. (2014). Role of model initialization for projections of 21st-century Greenland ice sheet mass loss. *Biocontrol Science and Technology*, **60**(222), 782–794.
- Bamber, J. L., Layberry, R. L., and Gogineni, S. P. (2001). A new ice thickness and bed data set for the Greenland ice sheet : 1. Measurement, data reduction, and errors. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, **106**(D24), 33773–33780.
- Bamber, J. L., Gomez-Dans, J. L., and Griggs, J. A. (2009). A new 1 km digital elevation model of the Antarctic derived from combined satellite radar and laser data – Part 1 : Data and methods. *The Cryosphere*, **3**(1), 101–111.
- Bamber, J. L., Griggs, J. A., Hurkmans, R., Dowdeswell, J. A., Gogineni, S. P., Howat, I.,

- Mouginot, J., Paden, J., Palmer, S., and Rignot, E. (2013). A new bed elevation dataset for Greenland. *Cryosphere*, **7**(2).
- Barnola, J. M., Raynaud, D., Korotkevich, Y. S., and Lorius, C. (1987). Vostok ice core provides 160,000-year record of atmospheric CO₂. *Nature*, **329**(6138), 408–414.
- Bell, R. E. (2008). The Unquiet Ice. *Scientific American*, **298**(2), 60–67.
- Bindschadler, R. (1983). The Importance of Pressurized Subglacial Water in Separation and Sliding at the Glacier Bed. *Journal of Glaciology*, **29**(101), 3–19.
- Bindschadler, R. A. (1984). Jakobshavns Glacier drainage basin : A balance assessment. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, **89**(C2), 2066–2072.
- Bindschadler, R. A. and Scambos, T. A. (1991). Satellite-image-derived velocity field of an Antarctic ice stream. *Science*, **252**, 242–246.
- Blatter, H. (1995). Velocity and stress fields in grounded glaciers : a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. *Journal of Glaciology*, **41**(138), 333–344.
- Blayo, E., Verron, J., and Molines, J. M. (1994). Assimilation of TOPEX/POSEIDON altimeter data into a circulation model of the North Atlantic. *Journal of Geophysical Research*, **99**(C12), 24691.
- Bonan, B., Nodet, M., Ritz, C., and Peyaud, V. (2014). An ETKF approach for initial state and parameter estimation in ice sheet modelling. *Nonlin. Processes Geophys.*, **21**(2), 569–582.
- Boulton, G. S. and Hindmarsh, R. C. A. (1987). Sediment deformation beneath glaciers : Rheology and geological consequences. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **92**(B9), 9059–9082.
- Boulton, G. S., Dobbie, K. E., and Zatsepin, S. (2001). Sediment deformation beneath glaciers and its coupling to the subglacial hydraulic system. *Quaternary International*, **86**(1), 3–28.
- Brinkerhoff, D. J., Aschwanden, A., and Truffer, M. (2016). Bayesian Inference of Subglacial Topography Using Mass Conservation. *Cryospheric Sciences*, page 8.
- Bueler, E. and Brown, J. (2009). Shallow shelf approximation as a “sliding law” in a thermomechanically coupled ice sheet model. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **114**(F3), F03008.
- Church, J. A. and White, N. J. (2011). Sea-Level Rise from the Late 19th to the Early 21st Century. *Surveys in Geophysics*, **32**(4-5), 585–602.
- Church, J. A., White, N. J., Konikow, L. F., Domingues, C. M., Cogley, J. G., Rignot, E., Gregory, J. M., van den Broeke, M. R., Monaghan, A. J., and Velicogna, I. (2011). Revisiting the Earth’s sea-level and energy budgets from 1961 to 2008. *Geophysical Research Letters*, **38**(18), L18601.

- Church, J. A., Clark, P. U., Cazenave, A., Gregory, J. M., Jevrejeva, S., Levermann, A., Merri-
field, M. A., Milne, G. A., Nerem, R. S., Nunn, P. D., Payne, A. J., Pfeffer, W. T., Stammer,
D., and Unnikrishnan, A. S. (2013). Sea level change. Technical Report, P.M. Cambridge
University Press.
- Cuffey, K. M. and Paterson, W. S. B. (2010). *The Physics of Glaciers*. Academic Press.
- Davis, C. H., Li, Y., McConnell, J. R., Frey, M. M., and Hanna, E. (2005). Snowfall-Driven
Growth in East Antarctic Ice Sheet Mitigates Recent Sea-Level Rise. *Science*, **308**(5730),
1898–1901.
- Dupont, T. K. and Alley, R. B. (2005). Assessment of the importance of ice-shelf buttressing
to ice-sheet flow. *Geophysical Research Letters*, **32**(4), L04503.
- Durand, G., Gagliardini, O., Favier, L., Zwinger, T., and le Meur, E. (2011). Impact of
bedrock description on modeling ice sheet dynamics. *Geophysical Research Letters*, **38**(20),
L20501.
- Duval, P. (1984). Mécanismes de la déformation plastique de la glace polycristalline. *La
Houille Blanche*, (6-7), 499–504.
- Edwards, T. L., Fettweis, X., Gagliardini, O., Gillet-Chaulet, F., Goelzer, H., Gregory, J. M.,
Hoffman, M., Huybrechts, P., Payne, A. J., Perego, M., Price, S., Quiquet, A., and Ritz, C.
(2014). Effect of uncertainty in surface mass balance–elevation feedback on projections of
the future sea level contribution of the Greenland ice sheet. *The Cryosphere*, **8**(1), 195–208.
- Favier, L., Gagliardini, O., Durand, G., and Zwinger, T. (2012). A three-dimensional full
Stokes model of the grounding line dynamics : effect of a pinning point beneath the ice
shelf. *The Cryosphere*, **6**, 101– 112.
- Favier, L., Durand, G., Cornford, S. L., Gudmundsson, G. H., Gagliardini, O., Gillet-Chaulet,
F., Zwinger, T., Payne, A. J., and Le Brocq, A. M. (2014). Retreat of Pine Island Glacier
controlled by marine ice-sheet instability. *Nature Climate Change*, **4**(2), 117–121.
- Flament, T. and Rémy, F. (2012). Dynamic thinning of Antarctic glaciers from along-track
repeat radar altimetry. *Journal of Glaciology*, **58**(211), 830–840.
- Fretwell, P., Pritchard, H. D., Vaughan, D. G., Bamber, J. L., Barrand, N. E., Bell, R.,
Bianchi, C., Bingham, R. G., Blankenship, D. D., Casassa, G., Catania, G., Callens, D.,
Conway, H., Cook, A. J., Corr, H. F. J., Damaske, D., Damm, V., Ferraccioli, F., Forsberg,
R., Fujita, S., Gim, Y., Gogineni, P., Griggs, J. A., Hindmarsh, R. C. A., Holmlund, P.,
Holt, J. W., Jacobel, R. W., Jenkins, A., Jokat, W., Jordan, T., King, E. C., Kohler, J.,
Krabill, W., Riger-Kusk, M., Langley, K. A., Leitchenkov, G., Leuschen, C., Luyendyk,
B. P., Matsuoka, K., Mouginot, J., Nitsche, F. O., Nogi, Y., Nost, O. A., Popov, S. V.,
Rignot, E., Ripplin, D. M., Rivera, A., Roberts, J., Ross, N., Siegert, M. J., Smith, A. M.,
Steinhage, D., Studinger, M., Sun, B., Tinto, B. K., Welch, B. C., Wilson, D., Young, D. A.,

- Xiangbin, C., and Zirizzotti, A. (2013). Bedmap2 : improved ice bed, surface and thickness datasets for Antarctica. *The Cryosphere*, **7**(1), 375–393.
- Frey, P. J. and Alauzet, F. (2005). Anisotropic mesh adaptation for CFD computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(48–49), 5068–5082.
- Fürst, J. J., Durand, G., Gillet-Chaulet, F., Merino, N., Tavard, L., Mouginot, J., Gourmelen, N., and Gagliardini, O. (2015). Assimilation of Antarctic velocity observations provides evidence for uncharted pinning points. *The Cryosphere*, **9**(4), 1427–1443.
- Fürst, J. J., Durand, G., Gillet-Chaulet, F., Tavard, L., Rankl, M., Braun, M., and Gagliardini, O. (2016). The safety band of Antarctic ice shelves. *Nature Climate Change*, **6**(5), 479–482.
- Gagliardini, O. and Zwinger, T. (2008). The ISMIP-HOM benchmark experiments performed using the Finite-Element code Elmer. *The Cryosphere*, **2**(1), 67–76.
- Gagliardini, O., Cohen, D., Råback, P., and Zwinger, T. (2007). Finite-element modeling of subglacial cavities and related friction law. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **112**(F2), F02027.
- Gagliardini, O., Durand, G., Zwinger, T., Hindmarsh, R. C. A., and Le Meur, E. (2010). Coupling of ice-shelf melting and buttressing is a key process in ice-sheets dynamics. *Geophysical Research Letters*, **37**(14), L14501.
- Gagliardini, O., Gillet-Chaulet, F., Durand, G., Vincent, C., and Duval, P. (2011). Estimating the risk of glacier cavity collapse during artificial drainage : The case of Tête Rousse Glacier. *Geophysical Research Letters*, **38**(10), L10505.
- Gagliardini, O., Zwinger, T., Gillet-Chaulet, F., Durand, G., Favier, L., de Fleurian, B., Greve, R., Malinen, M., Martín, C., Råback, P., Ruokolainen, J., Sacchetti, M., Schäfer, M., Seddik, H., and Thies, J. (2013). Capabilities and performance of Elmer/Ice, a new-generation ice sheet model. *Geosci. Model Dev.*, **6**(4), 1299–1318.
- Genthon, C., Magand, O., Krinner, G., and Fily, M. (2009). Do climate models underestimate snow accumulation on the Antarctic plateau ? A re-evaluation of/from in situ observations in East Wilkes and Victoria Lands. *Annals of Glaciology*, **50**(50), 61–65.
- Gilbert, J. C. and Lemaréchal, C. (1989). Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Mathematical Programming*, **45**(1-3), 407–435.
- Gillet-Chaulet, F. and Durand, G. (2010). Glaciology : Ice-sheet advance in Antarctica. *Nature*, **467**(7317), 794–795.
- Gillet-Chaulet, F., Gagliardini, O., Meyssonier, J., Montagnat, M., and Castelnau, O. (2005). A user-friendly anisotropic flow law for ice-sheet modelling. *Journal of Glaciology*, **51**(172), 3–14.
- Gillet-Chaulet, F., Gagliardini, O., Meyssonier, J., Zwinger, T., and Ruokolainen, J. (2006).

- Flow-induced anisotropy in polar ice and related ice-sheet flow modelling. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **134**(1–3), 33–43.
- Gillet-Chaulet, F., Hindmarsh, R. C. A., Corr, H. F. J., King, E. C., and Jenkins, A. (2011). In-situ quantification of ice rheology and direct measurement of the Raymond Effect at Summit, Greenland using a phase-sensitive radar. *Geophysical Research Letters*, **38**(24), L24503.
- Gillet-Chaulet, F., Gagliardini, O., Seddik, H., Nodet, M., Durand, G., Ritz, C., Zwinger, T., Greve, R., and Vaughan, D. G. (2012). Greenland ice sheet contribution to sea-level rise from a new-generation ice-sheet model. *The Cryosphere*, **6**(6), 1561–1576.
- Gillet-Chaulet, F., Durand, G., Gagliardini, O., Mosbeux, C., Mouginot, J., Rémy, F., and Ritz, C. (2016). Assimilation of surface velocities between 1996 and 2010 to constrain the form of the basal friction law under Pine Island Glacier. *Geophysical Research Letters*, page 2016GL069937.
- Glen, J. W. (1955). The Creep of Polycrystalline Ice. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **228**(1175), 519–538.
- Goldberg, D. N. (2011). A variationally derived, depth-integrated approximation to a higher-order glaciological flow model. *Journal of Glaciology*, **57**(201), 157–170.
- Goldberg, D. N. and Heimbach, P. (2013). Parameter and state estimation with a time-dependent adjoint marine ice sheet model. *The Cryosphere*, **7**(6), 1659–1678.
- Goldberg, D. N. and Sergienko, O. V. (2010). Data assimilation using a hybrid ice flow model. *The Cryosphere Discussions*, **4**(4), 2201–2231.
- Goldstein, R. M. and Engelhardt, H. (1993). Satellite radar interferometry for monitoring ice sheet motion : Application to an Antarctic ice. *Science*, **262**(5139), 1525–1530.
- Greenbaum, J. S., Blankenship, D. D., Young, D. A., Richter, T. G., Roberts, J. L., Aitken, A. R. A., Legresy, B., Schroeder, D. M., Warner, R. C., van Ommen, T. D., and Siegert, M. J. (2015). Ocean access to a cavity beneath Totten Glacier in East Antarctica. *Nature Geoscience*, **8**(4), 294–298.
- Greve, R. and Blatter, H. (2009). *Dynamics of Ice Sheets and Glaciers*. Springer Science & Business Media.
- Griggs, J. and Bamber, J. (2011). Antarctic ice-shelf thickness from satellite radar altimetry. *Journal of Glaciology*, **57**(203), 485–498.
- Griggs, J. A. and Bamber, J. L. (2009). A new 1 km digital elevation model of Antarctica derived from combined radar and laser data - Part 2 : Validation and error estimates. *The Cryosphere*, **3**, 113–123.

- Gudmundsson, G. H. (2003). Transmission of basal variability to a glacier surface. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, **108**(B5).
- Gudmundsson, G. H. (2013). Ice-shelf buttressing and the stability of marine ice sheets. *The Cryosphere*, **7**(2), 647–655.
- Gudmundsson, G. H. and Raymond, M. (2008). On the limit to resolution and information on basal properties obtainable from surface data on ice streams. *The Cryosphere Discuss.*, **2**(3), 413–445.
- Gudmundsson, G. H., Krug, J., Durand, G., Favier, L., and Gagliardini, O. (2012). The stability of grounding lines on retrograde slopes. *The Cryosphere*, **6**, 1497–1505.
- Hallegatte, S., Green, C., Nicholls, R. J., and Corfee-Morlot, J. (2013). Future flood losses in major coastal cities. *Nature Climate Change*, **3**(9), 802–806.
- Hansen, P. (1992). Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve. *SIAM Review*, **34**(4), 561–580.
- Hansen, P. and O’Leary, D. (1993). The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **14**(6), 1487–1503.
- Harig, C. and Simons, F. J. (2015). Accelerated West Antarctic ice mass loss continues to outpace East Antarctic gains. *Earth and Planetary Science Letters*, **415**, 134–141.
- Harig, C. and Simons, F. J. (2016). Ice mass loss in Greenland, the Gulf of Alaska, and the Canadian Archipelago : Seasonal cycles and decadal trends : ARCTIC ICE MASS LOSS FROM GRACE. *Geophysical Research Letters*, **43**(7), 3150–3159.
- Hartmann, D. L., Klein Tank, A. M. G., Rusicucci, M., Alexander, L. V., Broenniman, B., Charabi, Y., Dentener, F. J., Dlugokencky, E. J., Easterling, D. R., Kaplan, A., Soden, B. J., Thorne, P. W., Wild, M., Zhai, P. M., and Kent, E. C. (2013). Observations : Atmosphere and Surface. In T. F. Stocker, D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S. K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex, and P. M. Midgley, editors, *Climate Change 2013 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*, pages 159–254. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hauer, M. E., Evans, J. M., and Mishra, D. R. (2016). Millions projected to be at risk from sea-level rise in the continental United States. *Nature Climate Change*.
- Hindmarsh, R. (1997). Deforming beds : Viscous and plastic scales of deformation. *Quaternary Science Reviews*, **16**(9), 1039–1056.
- Hoke, J. E. and Anthes, R. A. (1976). The Initialization of Numerical Models by a Dynamic-Initialization Technique. *Monthly Weather Review*, **104**(12), 1551–1556.
- Howat, I. M., Negrete, A., and Smith, B. E. (2014). The Greenland Ice Mapping Project

- (GIMP) land classification and surface elevation data sets. *The Cryosphere*, **8**(4), 1509–1518.
- Hutter, K. (1983). *Theoretical glaciology : material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*, volume 1. Springer.
- Huybrechts, P. (1990). A 3-D model for the Antarctic ice sheet : a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast. *Climate Dynamics*, **5**(2), 79–92.
- Iverson, N. R. (2010). Shear resistance and continuity of subglacial till : hydrology rules. *Journal of Glaciology*, **56**(200), 1104–1114.
- Iverson, N. R., Hooyer, T. S., and Baker, R. W. (1998). Ring-shear studies of till deformation : Coulomb-plastic behavior and distributed strain in glacier beds. *Journal of glaciology*, **44**(148), 634–642.
- Jay-Allemand, M., Gillet-Chaulet, F., Gagliardini, O., and Nodet, M. (2011). Investigating changes in basal conditions of Variegated Glacier prior to and during its 1982–1983 surge. *The Cryosphere*, **5**(3), 659–672.
- Jenssen, D. (1977). A Three-Dimensional Polar Ice-Sheet Model. *Journal of Glaciology*, **18**(80), 373–389.
- Jezek, K., Wu, X., Paden, J., and Leuschen, C. (2013). Radar mapping of Isunnguata Sermia, Greenland. *Journal of Glaciology*, **59**(218), 1135–1146.
- Joughin, I., Abdalati, W., and Fahnestock, M. (2004). Large fluctuations in speed on Greenland’s Jakobshavn Isbræ glacier. *Nature*, **432**(7017), 608–610.
- Joughin, I., Howat, I. M., Fahnestock, M., Smith, B., Krabill, W., Alley, R. B., Stern, H., and Truffer, M. (2008). Continued evolution of Jakobshavn Isbrae following its rapid speedup. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **113**(F4), F04006.
- Joughin, I., Smith, B. E., Howat, I. M., Scambos, T., and Moon, T. (2010). Greenland flow variability from ice-sheet-wide velocity mapping. *J. Glaciol.*, **56**(197), 415–430.
- Joughin, I., Smith, B. E., Shean, D. E., and Floricioiu, D. (2014). Brief Communication : Further summer speedup of Jakobshavn Isbræ. *The Cryosphere*, **8**(1), 209–214.
- Kamb, B. (1970). Sliding motion of glaciers : Theory and observation. *Reviews of Geophysics*, **8**(4), 673–728.
- Kamb, B. (1991). Rheological nonlinearity and flow instability in the deforming bed mechanism of ice stream motion. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **96**(B10), 16585–16595.
- Kohn, R. and Vogeliuss, M. (1984). Determining conductivity by boundary measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **37**(3), 289–298.

- Krug, J., Weiss, J., Gagliardini, O., and Durand, G. (2014). Combining damage and fracture mechanics to model calving. *The Cryosphere*, **8**(6), 2101–2117.
- Lambeck, K. and Chappell, J. (2001). Sea Level Change Through the Last Glacial Cycle. *Science*, **292**(5517), 679–686.
- Larour, E., Seroussi, H., Morlighem, M., and Rignot, E. (2012). Continental scale, high order, high spatial resolution, ice sheet modeling using the Ice Sheet System Model (ISSM). *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **117**(F1), F01022.
- Le Brocq, A. M., Payne, A. J., and Vieli, A. (2010). An improved Antarctic dataset for high resolution numerical ice sheet models (ALBMAP v1). *Earth System Science Data Discussions*, **3**(1), 195–230.
- Le Meur, E., Gagliardini, O., Zwinger, T., and Ruokolainen, J. (2004). Ice : from dislocations to icy satellites Glacier flow modelling : a comparison of the Shallow Ice Approximation and the full-Stokes solution. *Comptes Rendus Physique*, **5**(7), 709–722.
- Lenaerts, J. T. M., van den Broeke, M. R., van de Berg, W. J., van Meijgaard, E., and Kuipers Munneke, P. (2012). A new, high-resolution surface mass balance map of Antarctica (1979–2010) based on regional atmospheric climate modeling. *Geophysical Research Letters*, **39**(4), L04501.
- Létréguilly, A., Reeh, N., and Huybrechts, P. (1991). The Greenland ice sheet through the last glacial-interglacial cycle. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, **90**(4), 385–394.
- Lliboutry, L. (1968). General Theory of Subglacial Cavitation and Sliding of Temperate Glaciers. *Journal of Glaciology*, **7**(49), 21–58.
- Lythe, M. B. and Vaughan, D. G. (2001). BEDMAP : A new ice thickness and subglacial topographic model of Antarctica. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **106**(B6), 11335–11351.
- Ma, Y., Gagliardini, O., Ritz, C., Gillet-Chaulet, F., Durand, G., and Montagnat, M. (2010). Enhancement factors for grounded ice and ice shelves inferred from an anisotropic ice-flow model. *Journal of Glaciology*, **56**(199), 805–812.
- MacAyeal, D. R. (1989). Large-scale ice flow over a viscous basal sediment : Theory and application to ice stream B, Antarctica. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **94**(B4), 4071–4087.
- MacAyeal, D. R. (1992). Irregular oscillations of the West Antarctic ice sheet. *Nature*, **359**(6390), 29–32.
- Macayeal, D. R. (1993). A tutorial on the use of control methods in ice-sheet modeling. *Journal of Glaciology*, **39**(131), 91–98.

- Magand, O., Genthon, C., Fily, M., Krinner, G., Picard, G., Frezzotti, M., and Ekaykin, A. A. (2007). An up-to-date quality-controlled surface mass balance data set for the 90°–180°E Antarctica sector and 1950–2005 period. *Journal of Geophysical Research*, **112**(D12).
- Mahaffy, M. W. (1976). A three-dimensional numerical model of ice sheets : Tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories. *Journal of Geophysical Research*, **81**(6), 1059–1066.
- Martin, N. and Monnier, J. (2013). Of the gradient accuracy in Full-Stokes ice flow model : basal slipperiness inference. *The Cryosphere Discussions*, **7**(4), 3853–3897.
- McCall, J. G. (1952). The Internal Structure of a Cirque Glacier : Report on Studies of the Englacial Movements and Temperatures. *Journal of Glaciology*, **2**(12), 122–131.
- Miles, B. W. J., Stokes, C. R., and Jamieson, S. S. R. (2016). Pan-ice-sheet glacier terminus change in East Antarctica reveals sensitivity of Wilkes Land to sea-ice changes. *Science Advances*, **2**(5), e1501350.
- Morland, L. W. (1987). Unconfined Ice-Shelf Flow. In C. J. V. d. Veen and J. Oerlemans, editors, *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, number 4 in Glaciology and Quaternary Geology, pages 99–116. Springer Netherlands.
- Morlighem, M. (2011). *Ice sheet properties inferred by combining numerical modeling and remote sensing data*. phdthesis, Ecole Centrale Paris.
- Morlighem, M., Rignot, E., Seroussi, H., Larour, E., Ben Dhia, H., and Aubry, D. (2010). Spatial patterns of basal drag inferred using control methods from a full-Stokes and simpler models for Pine Island Glacier, West Antarctica. *Geophysical Research Letters*, **37**(14), L14502.
- Morlighem, M., Rignot, E., Seroussi, H., Larour, E., Ben Dhia, H., and Aubry, D. (2011). A mass conservation approach for mapping glacier ice thickness. *Geophysical Research Letters*, **38**(19), L19503.
- Morlighem, M., Rignot, E., Mouginot, J., Wu, X., Seroussi, H., Larour, E., and Paden, J. (2013a). High-resolution bed topography mapping of Russell Glacier, Greenland, inferred from Operation IceBridge data. *Journal of Glaciology*, **59**(218), 1015–1023.
- Morlighem, M., Seroussi, H., Larour, E., and Rignot, E. (2013b). Inversion of basal friction in Antarctica using exact and incomplete adjoints of a higher-order model. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **118**(3), 1746–1753.
- Morlighem, M., Rignot, E., Mouginot, J., Seroussi, H., and Larour, E. (2014). Deeply incised submarine glacial valleys beneath the Greenland ice sheet. *Nature Geoscience*, **7**(6), 418–422.
- Mosbeux, C., Gillet-Chaulet, F., and Gagliardini, O. (2016). Comparison of adjoint and nudging methods to initialise ice sheet model basal conditions.

- Nicholls, R. J. and Cazenave, A. (2010). Sea-Level Rise and Its Impact on Coastal Zones. *Science*, **328**(5985), 1517–1520.
- Nicholls, R. J., Marinova, N., Lowe, J. A., Brown, S., Vellinga, P., Gusmão, D. d., Hinkel, J., and Tol, R. S. J. (2011). Sea-level rise and its possible impacts given a ‘beyond 4°C world’ in the twenty-first century. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **369**(1934), 161–181.
- Nocedal, J. (1980). Updating quasi-Newton matrices with limited storage. *Mathematics of Computation*, **35**(151), 773–782.
- Nowicki, S., Bindshadler, R. A., Abe-Ouchi, A., Aschwanden, A., Bueler, E., Choi, H., Fastook, J., Granzow, G., Greve, R., Gutowski, G., Herzfeld, U., Jackson, C., Johnson, J., Khroulev, C., Larour, E., Levermann, A., Lipscomb, W. H., Martin, M. A., Morlighem, M., Parizek, B. R., Pollard, D., Price, S. F., Ren, D., Rignot, E., Saito, F., Sato, T., Seddik, H., Seroussi, H., Takahashi, K., Walker, R., and Wang, W. L. (2013a). Insights into spatial sensitivities of ice mass response to environmental change from the SeaRISE ice sheet modeling project I : Antarctica. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **118**(2), 1002–1024.
- Nowicki, S., Bindshadler, R. A., Abe-Ouchi, A., Aschwanden, A., Bueler, E., Choi, H., Fastook, J., Granzow, G., Greve, R., Gutowski, G., Herzfeld, U., Jackson, C., Johnson, J., Khroulev, C., Larour, E., Levermann, A., Lipscomb, W. H., Martin, M. A., Morlighem, M., Parizek, B. R., Pollard, D., Price, S. F., Ren, D., Rignot, E., Saito, F., Sato, T., Seddik, H., Seroussi, H., Takahashi, K., Walker, R., and Wang, W. L. (2013b). Insights into spatial sensitivities of ice mass response to environmental change from the SeaRISE ice sheet modeling project II : Greenland. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **118**(2), 1025–1044.
- Nye, J. F. (1969). A Calculation on the Sliding of Ice Over a Wavy Surface Using a Newtonian Viscous Approximation. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **311**(1506), 445–467.
- Paterson, W. S. B. (1994). *The Physics of Glaciers*. Butterworth-Heinemann.
- Pattyn, F. (2003). A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model : Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **108**(B8), 2382.
- Pattyn, F., Perichon, L., Aschwanden, A., Breuer, B., De Smedt, B., Gagliardini, O., Gudmundsson, G. H., Hindmarsh, R., Hubbard, A., Johnson, J. V., Kleiner, T., Konovalov, Y., Martin, C., Payne, A. J., Pollard, D., Price, S., Rückamp, M., Saito, F., Soucek, O., Sugiyama, S., and Zwinger, T. (2008). Benchmark experiments for higher-order and full Stokes ice sheet models (ISMIP-HOM). *The Cryosphere Discussions*, **2**(1), 111–151.
- Pattyn, F., Schoof, C., Perichon, L., Hindmarsh, R. C. A., Bueler, E., de Fleurian, B., Durand,

- G., Gagliardini, O., Gladstone, R., Goldberg, D., Gudmundsson, G. H., Huybrechts, P., Lee, V., Nick, F. M., Payne, A. J., Pollard, D., Rybak, O., Saito, F., and Vieli, A. (2012). Results of the Marine Ice Sheet Model Intercomparison Project, MISIMIP. *The Cryosphere*, **6**(3), 573–588.
- Pattyn, F., Perichon, L., Durand, G., Favier, L., Gagliardini, O., Hindmarsh, R. C., Zwinger, T., Albrecht, T., Cornford, S., Docquier, D., Fürst, J. J., Goldberg, D., Gudmundsson, G. H., Humbert, A., Hütten, M., Huybrechts, P., Jouvét, G., Kleiner, T., Larour, E., Martin, D., Morlighem, M., Payne, A. J., Pollard, D., Rückamp, M., Rybak, O., Seroussi, H., Thoma, M., and Wilkens, N. (2013). Grounding-line migration in plan-view marine ice-sheet models : results of the ice2sea MISIMIP3d intercomparison. *Journal of Glaciology*, **59**(215), 410–422.
- Perego, M., Price, S., and Stadler, G. (2014). Optimal initial conditions for coupling ice sheet models to Earth system models. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **119**(9), 1894–1917.
- Petra, N., Zhu, H., Stadler, G., Hughes, T. J., and Ghattas, O. (2012). An inexact Gauss–Newton method for inversion of basal sliding and rheology parameters in a non-linear Stokes ice sheet model. *Journal of Glaciology*, **58**(211), 889–903.
- Pfeffer, W. T., Harper, J. T., and O’Neel, S. (2008). Kinematic Constraints on Glacier Contributions to 21st-Century Sea-Level Rise. *Science*, **321**(5894), 1340–1343.
- Pollard, D. and DeConto, R. M. (2012). A simple inverse method for the distribution of basal sliding coefficients under ice sheets, applied to Antarctica. *The Cryosphere Discuss.*, **6**(2), 1405–1444.
- Pralong, M. R. and Gudmundsson, G. H. (2011). Bayesian estimation of basal conditions on Rutford Ice Stream, West Antarctica, from surface data. *Journal of Glaciology*, **57**(202), 315–324.
- Pritchard, H. D., Arthern, R. J., Vaughan, D. G., and Edwards, L. A. (2009). Extensive dynamic thinning on the margins of the Greenland and Antarctic ice sheets. *Nature*, **461**(7266), 971–975.
- Pritchard, H. D., Ligtenberg, S. R. M., Fricker, H. A., Vaughan, D. G., van den Broeke, M. R., and Padman, L. (2012). Antarctic ice-sheet loss driven by basal melting of ice shelves. *Nature*, **484**(7395), 502–505.
- Raymond, M. J. and Gudmundsson, G. H. (2009). Estimating basal properties of ice streams from surface measurements : a non-linear Bayesian inverse approach applied to synthetic data. *The Cryosphere*, **3**(2), 265–278.
- Rhein, M., Rintoul, S. R., Aoki, S., Campos, E., Chambers, D., Feely, R. A., Gulev, S., Johnson, G. C., Josey, S. A., Kostianoy, A., Mauritzen, C., Roemmich, D., and Talley, L. D. (2013). Observations : Ocean. In T. F. Stocker, D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S. K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex, and P. M. Midgley, editors, *Climate*

- Change 2013 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*, pages 255–316. Cambridge University Press.
- Rignot, E. and Mouginot, J. (2012). Ice flow in Greenland for the International Polar Year 2008–2009. *Geophysical Research Letters*, **39**(11), L11501.
- Rignot, E., Bamber, J. L., van den Broeke, M. R., Davis, C., Li, Y., van de Berg, W. J., and van Meijgaard, E. (2008). Recent Antarctic ice mass loss from radar interferometry and regional climate modelling. *Nature Geoscience*, **1**(2), 106–110.
- Rignot, E., Velicogna, I., van den Broeke, M. R., Monaghan, A., and Lenaerts, J. T. M. (2011a). Acceleration of the contribution of the Greenland and Antarctic ice sheets to sea level rise. *Geophysical Research Letters*, **38**(5), L05503.
- Rignot, E., Mouginot, J., and Scheuchl, B. (2011b). Antarctic grounding line mapping from differential satellite radar interferometry. *Geophysical Research Letters*, **38**(10), L10504.
- Rignot, E., Mouginot, J., and Scheuchl, B. (2011c). Ice Flow of the Antarctic Ice Sheet. *Science*, **333**(6048), 1427–1430.
- Ritz, C., Fabre, A., and Letréguilly, A. (1996). Sensitivity of a Greenland ice sheet model to ice flow and ablation parameters : consequences for the evolution through the last climatic cycle. *Climate Dynamics*, **13**(1), 11–23.
- Ritz, C., Edwards, T. L., Durand, G., Payne, A. J., Peyaud, V., and Hindmarsh, R. C. A. (2015). Potential sea-level rise from Antarctic ice-sheet instability constrained by observations. *Nature*, **528**(7580), 115–118.
- Rémy, F. and Testut, L. (2006). Mais comment s’écoule donc un glacier ? Aperçu historique. *Comptes Rendus Geoscience*, **338**(5), 368–385.
- Réveillet, M., Rabatel, A., Gillet-Chaulet, F., and Soruco, A. (2015). Simulations of changes to Glaciar Zongo, Bolivia (16° S), over the 21st century using a 3-D full-Stokes model and CMIP5 climate projections. *Annals of Glaciology*, **56**(70), 89–97.
- Scambos, T. A. and Haran, T. (2002). An image-enhanced DEM of the Greenland ice sheet. *Annals of Glaciology*, **34**(1), 291–298.
- Scambos, T. A., Bohlander, J. A., Shuman, C. A., and Skvarca, P. (2004). Glacier acceleration and thinning after ice shelf collapse in the Larsen B embayment, Antarctica. *Geophysical Research Letters*, **31**(18), L18402.
- Schoof, C. (2005). The effect of cavitation on glacier sliding. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **461**(2055), 609–627.
- Schoof, C. (2007). Ice sheet grounding line dynamics : Steady states, stability, and hysteresis. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **112**(F3), F03S28.

- Schäfer, M., Zwinger, T., Christoffersen, P., Gillet-Chaulet, F., Laakso, K., Pettersson, R., Pohjola, V. A., Strozzi, T., and Moore, J. C. (2012). Sensitivity of basal conditions in an inverse model : Vestfonna ice cap, Nordaustlandet/Svalbard. *The Cryosphere*, **6**(4), 771–783.
- Seddik, H., Greve, R., Zwinger, T., Gillet-Chaulet, F., and Gagliardini, O. (2012). Simulations of the Greenland ice sheet 100 years into the future with the full Stokes model Elmer/Ice. *Journal of Glaciology*, **58**(209), 427–440.
- Seo, K.-W., Wilson, C. R., Scambos, T., Kim, B.-M., Waliser, D. E., Tian, B., Kim, B.-H., and Eom, J. (2015). Surface mass balance contributions to acceleration of Antarctic ice mass loss during 2003–2013. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **120**(5), 2014JB011755.
- Seroussi, H., Morlighem, M., Rignot, E., Larour, E., Aubry, D., Ben Dhia, H., and Kristensen, S. S. (2011). Ice flux divergence anomalies on 79north Glacier, Greenland. *Geophysical Research Letters*, **38**(9), L09501.
- Shannon, S. R., Payne, A. J., Bartholomew, I. D., Broeke, M. R. v. d., Edwards, T. L., Fettweis, X., Gagliardini, O., Gillet-Chaulet, F., Goelzer, H., Hoffman, M. J., Huybrechts, P., Mair, D. W. F., Nienow, P. W., Perego, M., Price, S. F., Smeets, C. J. P. P., Sole, A. J., Wal, R. S. W. v. d., and Zwinger, T. (2013). Enhanced basal lubrication and the contribution of the Greenland ice sheet to future sea-level rise. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **110**(35), 14156–14161.
- Shepherd, A., Ivins, E. R., A, G., Barletta, V. R., Bentley, M. J., Bettadpur, S., Briggs, K. H., Bromwich, D. H., Forsberg, R., Galin, N., Horwath, M., Jacobs, S., Joughin, I., King, M. A., Lenaerts, J. T. M., Li, J., Ligtenberg, S. R. M., Luckman, A., Luthcke, S. B., McMillan, M., Meister, R., Milne, G., Mouginot, J., Muir, A., Nicolas, J. P., Paden, J., Payne, A. J., Pritchard, H., Rignot, E., Rott, H., Sørensen, L. S., Scambos, T. A., Scheuchl, B., Schrama, E. J. O., Smith, B., Sundal, A. V., Angelen, J. H. v., Berg, W. J. v. d., Broeke, M. R. v. d., Vaughan, D. G., Velicogna, I., Wahr, J., Whitehouse, P. L., Wingham, D. J., Yi, D., Young, D., and Zwally, H. J. (2012). A Reconciled Estimate of Ice-Sheet Mass Balance. *Science*, **338**(6111), 1183–1189.
- Sibson, R. and others (1981). A brief description of natural neighbour interpolation. *Interpreting multivariate data*, **21**, 21–36.
- Smith, A. M., Murray, T., Nicholls, K. W., Makinson, K., Aðalgeirsdóttir, G., Behar, A. E., and Vaughan, D. G. (2007). Rapid erosion, drumlin formation, and changing hydrology beneath an Antarctic ice stream. *Geology*, **35**(2), 127–130.
- Sun, S., Cornford, S. L., Liu, Y., and Moore, J. C. (2014). Dynamic response of Antarctic ice shelves to bedrock uncertainty. *The Cryosphere*, **8**(4), 1561–1576.
- Thorsteinsson, T., Raymond, C. F., Gudmundsson, G. H., Bindschadler, R. A., Vornberger, P.,

- and Joughin, I. (2003). Bed topography and lubrication inferred from surface measurements on fast-flowing ice streams. *Journal of Glaciology*, **49**(167), 481–490.
- Tikhonov, A. N. (1943). On the stability of inverse problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **39**(5), 195–198.
- Timmermann, R., Le Brocq, A., Deen, T., Domack, E., Dutrieux, P., Galton-Fenzi, B., Hellmer, H., Humbert, A., Jansen, D., Jenkins, A., Lambrecht, A., Makinson, K., Niederjasper, F., Nitsche, F., Nøst, O. A., Smedsrud, L. H., and Smith, W. H. F. (2010). A consistent data set of Antarctic ice sheet topography, cavity geometry, and global bathymetry. *Earth System Science Data*, **2**, 261–273.
- Tulaczyk, S., Kamb, W. B., and Engelhardt, H. F. (2000). Basal mechanics of Ice Stream B, west Antarctica : 1. Till mechanics. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **105**(B1), 463–481.
- Van Der Veen, C. and Whillans, I. (1989). Force Budget : I. Theory and Numerical Methods. *Journal of Glaciology*, **35**(119), 53–60.
- Van Liefferinge, B. and Pattyn, F. (2013). Using ice-flow models to evaluate potential sites of million year-old ice in Antarctica. *Clim. Past*, **9**(5), 2335–2345.
- van Pelt, W. J. J., Oerlemans, J., Reijmer, C. H., Pettersson, R., Pohjola, V. A., Isaksson, E., and Divine, D. (2013). An iterative inverse method to estimate basal topography and initialize ice flow models. *The Cryosphere*, **7**(3), 987–1006.
- Verron, J. (1992). Nudging satellite altimeter data into quasi-geostrophic ocean models. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, **97**(C5), 7479–7491.
- Vidard, P. A., Le Dimet, F.-X., and Piacentini, A. (2003). Determination of optimal nudging coefficients. *Tellus A*, **55**(1), 1–15.
- Weertman, J. (1957). On the Sliding of Glaciers. *Journal of Glaciology*, **3**(21), 33–38.
- Weertman, J. (1983). Creep deformation of ice. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **11**, 215.
- Wunsch, C. (1988). Transient tracers as a problem in control theory. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, **93**(C7), 8099–8110.
- Zwally, H. J., Giovinetto, M. B., Beckley, M. A., and Saba, J. L. (2012). Antarctic and Greenland drainage systems, GSFC cryospheric sciences laboratory. Available at icesat4.gsfc.nasa.gov/cryo_data/ant_grn_drainage_systems.php. Accessed March, **1**, 2015.