



HAL
open science

Étude de mesures non-uniformément hyperboliques pour les applications méromorphes

Franck Nguyen van Sang

► **To cite this version:**

Franck Nguyen van Sang. Étude de mesures non-uniformément hyperboliques pour les applications méromorphes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Sorbonne Paris Cité, 2015. Français. NNT : 2015USPCD066 . tel-01690393

HAL Id: tel-01690393

<https://theses.hal.science/tel-01690393>

Submitted on 23 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 13
« INSTITUT GALILÉE »

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES PURES

présentée et soutenue publiquement

par

Franck Nguyen Van Sang

le 16 décembre 2015

**Étude de mesures
non-uniformément hyperboliques
pour les applications méromorphes**

Directeurs :

Henry DE THÉLIN Professeur, Université Paris 13 Directeur principal
Tien-Cuong DINH Professeur, UPMC Co-directeur

JURY

Julien BARRAL Professeur, Université Paris 13
Henry DE THÉLIN Professeur, Université Paris 13
Christophe DUPONT Professeur, Université Rennes 1
Viet-Anh NGUYEN Maître de Conférences, Université Paris Sud
Gabriel VIGNY Maître de Conférences, UPJV

Rapporteurs :

Nessim SIBONY Professeur, Université Paris Sud
Christophe DUPONT Professeur, Université Rennes 1

Remerciements

Cette thèse met un terme à trois années de doctorat, qui furent somme toute assez inégales. Mon investissement et ma motivation furent tous les deux mis à rude épreuve.

La première année fut l'année de la découverte et de l'initiation à un domaine que je ne connaissais pas jusque là : la dynamique méromorphe. S'en suivent alors deux années où s'alternent le bon et le moins bon sur le plan de la recherche individuelle.

Cependant, en dépit de cela, mon directeur de thèse Henry De Thélin a toujours répondu présent et, de par ses conseils avisés et sa gentillesse, m'a remis en selle à plusieurs reprises. Nos rendez-vous du mercredi et nos échanges de mails ont souvent été enrichissants, et m'ont toujours apporté les réponses dont j'avais besoin.

Cette thèse n'aurait sans aucun doute pas abouti sans sa bienveillance, c'est pourquoi mes remerciements les plus sincères lui sont adressés en premier lieu : merci à toi Henry !

En second lieu, je tiens à remercier Tien-Cuong Dinh de m'avoir introduit à la dynamique et d'avoir bien voulu accepter de me co-diriger.

Je remercie également les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font par leur présence : Julien Barral, Christophe Dupont, Viet-Anh Nguyen et Gabriel Vigny.

J'adresse également mes remerciements aux rapporteurs, Nessim Sibony et Christophe Dupont, d'avoir bien voulu évaluer cette thèse.

Enfin, j'en profite pour remercier ma famille et mes amis pour leur écoute et leur soutien tout au long de ces trois années.

**ÉTUDE DE MESURES NON-UNIFORMÉMENT HYPERBOLIQUES POUR
LES APPLICATIONS MÉROMORPHES**

RÉSUMÉ

Nous montrons un résultat du type Closing Lemma pour les mesures non uniformément hyperboliques associées à des applications méromorphes. Nous prouvons aussi qu'il est possible d'approximer la dynamique de telles mesures par des codages du type Bernoulli.

**STUDY OF NONUNIFORMLY HYPERBOLIC MEASURES FOR
MEROMORPHIC MAPS**

ABSTRACT

We prove a Closing Lemma for nonuniformly hyperbolic measures of meromorphic maps. We prove also a theorem of approximation of the dynamics of such measures by Bernoulli coding maps.

Mots-clés : dynamique complexe, Closing Lemma, entropie, approximation par des horsehoes.

Institut Galilée, UMR 7539, Université Paris XIII,
99 Avenue Jean Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France.

Introduction

Soit X une variété Riemannienne lisse compacte de dimension k et $f : X \rightarrow X$ un difféomorphisme de classe $C^{1+\alpha}$.

On considère μ une mesure de probabilité invariante par f , ergodique et hyperbolique (c'est-à-dire que ses exposants de Lyapounov sont non nuls).

Un résultat majeur, obtenu par A. Katok (voir [12]), est la construction dans ce contexte d'orbites périodiques. C'est le Closing Lemma : sous certaines hypothèses, lorsqu'un point x et son itéré $f^m(x)$ (avec $m \geq 1$) sont proches, on peut trouver un point périodique près de x . Ce résultat est crucial pour approximer le système dynamique par des horseshoes (voir A. Katok et L. Mendoza dans [13]).

L'objet de cette thèse est d'étendre ces théorèmes en dynamique méromorphe.

Soit donc X une variété complexe compacte de dimension k et $f : X \rightarrow X$ une application méromorphe dominante. Nous noterons I son ensemble d'indétermination.

On considère μ une mesure de probabilité qui vérifie $\int \log d(x, I) d\mu(x) > -\infty$. On suppose μ invariante par f , ergodique et hyperbolique, c'est-à-dire que ses exposants de Lyapounov vérifient :

$$\chi_1 \geq \dots \geq \chi_{m_0} > 0 > \chi_{m_0+1} \geq \dots \geq \chi_k \text{ pour un } 1 \leq m_0 \leq k-1.$$

Sous ces hypothèses, en suivant la stratégie d'A. Katok (voir [12]), nous démontrons le Closing Lemma (voir le chapitre 2 et le théorème 5).

Ensuite, grâce à la démonstration de ce résultat, nous pouvons approcher la dynamique de μ par des ensembles qui sont codés par des Bernoulli. Plus précisément, on a :

Théorème 1. *On suppose en plus que $h_\mu(f) > 0$.*

Alors pour tout $\rho > 0$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_{k_0} \in C^0(X, \mathbb{R})$ on a :

1. *Il existe $n \geq 1$ et un codage :*

$$\begin{array}{ccc}
\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}} \\
S_0 \downarrow & & \downarrow S_0 \\
\Lambda_0 & \xrightarrow{f^n} & \Lambda_0
\end{array}$$

où $N = e^{h_\mu(f)n - \rho n}$, $f^n \circ S_0 = S_0 \circ \sigma$, σ est le décalage à droite et S_0 est continue. De plus $\nu_0 = (S_0)_* \lambda_0$ (où λ_0 est la mesure de Bernoulli) est une mesure invariante par f^n et d'entropie métrique supérieure ou égale à $n(h_\mu(f) - \rho)$.

2. $h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_0}) \geq h_\mu(f) - \rho$ (où ici $\Lambda_0 = S_0(\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}})$).
3. Si on note $\Lambda = \Lambda_0 \cup f(\Lambda_0) \cup \dots \cup f^{n-1}(\Lambda_0)$, on a que Λ est contenu dans un ρ -voisinage de $\text{supp}(\mu)$ et la mesure

$$\nu = \frac{1}{n}(\nu_0 + f_*\nu_0 + \dots + (f^{n-1})_*\nu_0),$$

portée par Λ , est f -invariante et vérifie :

$$\forall i = 1, \dots, k_0 \quad \left| \int \varphi_i d\nu - \int \varphi_i d\mu \right| < \rho.$$

Remarque. Dans le théorème précédent, si on sait de plus que f est inversible et que $\int \log d(x, I(f^{-1})) d\mu(x) > -\infty$ (où $I(f^{-1})$ est l'ensemble d'indétermination de f^{-1}), alors S_0 est un homéomorphisme et Λ est un horseshoe comme dans le cas des difféomorphismes (voir [13]).

Signalons que l'hypothèse $\int \log d(x, I) d\mu(x) > -\infty$ est assez faible et qu'elle est naturelle pour faire de la théorie de Pesin. Lorsque f est inversible et que μ est plus régulière, typiquement une mesure SRB (voir la condition 1.1 de [14]), il existe aussi des résultats d'approximation des systèmes dynamiques dits singuliers (voir [14]) qui se basent sur l'approche de Pesin (voir [17]).

Ce type de théorème est aussi vrai pour les applications avec singularités lorsque tous les exposants de Lyapounov sont strictement positifs (voir [11]).

Par ailleurs, il existe aussi des résultats de codage par des Bernoulli pour la mesure d'entropie maximale d'un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ (voir [1] et [6]).

Le Closing Lemma de notre thèse est à comprendre en tant que fermeture d'une orbite sans changement de l'application f . Il y a aussi des théorèmes en dynamique holomorphe où l'orbite est fermée en faisant varier f (voir [8] et [9]).

Voici maintenant le plan de notre thèse : dans un premier chapitre nous faisons des rappels sur la théorie de Pesin et sur les théorèmes de transformées de graphes

que nous utiliserons. Dans le second, nous donnons un énoncé précis du Closing Lemma et nous le démontrons. Le troisième chapitre est consacré à la preuve du théorème 1, c'est-à-dire à l'approximation du système dynamique par des Bernoulli.

Sommaire

1	Théorie de Pesin et transformées de graphes	13
1.1	Théorème d'Oseledets et théorie de Pesin	13
1.2	Transformées de graphes	16
2	Le Closing Lemma	21
2.1	Cadre et énoncé du théorème	21
2.2	Preuve du Closing Lemma	22
2.2.1	Démonstration de l'existence du point périodique z	22
2.2.2	Démonstration du deuxième point du Closing Lemma	35
2.2.3	Démonstration de l'hyperbolicité de z	36
3	Approximation par des Bernoulli	49
3.1	Construction du $\hat{y} \in \Lambda_\delta$ avec de la récurrence	50
3.2	Construction du codage	53
3.3	Propriétés du codage	63
	Bibliographie	71

SOMMAIRE

Chapitre 1

Théorie de Pesin et transformées de graphes

Dans ce chapitre nous rappelons la théorie de Pesin ainsi que les théorèmes de transformées de graphes.

1.1 Théorème d'Oseledets et théorie de Pesin

Soit X une variété complexe compacte de dimension k et $f : X \rightarrow X$ une application méromorphe dominante. On notera I son ensemble d'indétermination.

On munit X d'une famille de cartes $(\tau_x)_{x \in X}$ qui vérifient $\tau_x(0) = x$, τ_x est définie sur une boule $B(0, \epsilon_0) \subset \mathbb{C}^k$ avec ϵ_0 indépendant de x et la norme de la dérivée première et seconde de τ_x sur $B(0, \epsilon_0)$ est majorée par une constante indépendante de x . Pour construire ces cartes il suffit de partir d'une famille finie (U_i, ψ_i) de cartes de X et de les composer par des translations.

On considère une probabilité μ telle que $\int \log d(x, I) d\mu(x) > -\infty$. On la suppose aussi invariante par f et ergodique. On note $\Omega = X \setminus \bigcup_{i \geq 0} f^{-i}(I)$. Comme μ ne charge pas I et qu'elle est invariante par f , μ est une mesure de probabilité sur Ω .

On définit l'extension naturelle :

$$\widehat{\Omega} := \{\widehat{x} = (\dots, x_0, \dots, x_n, \dots) \in \Omega^{\mathbb{Z}}, f(x_n) = x_{n+1}\}.$$

Dans cet espace, f induit une application \widehat{f} qui est le décalage à droite. Si on note π la projection canonique $\pi(\widehat{x}) = x_0$ alors μ se relève en une unique probabilité $\widehat{\mu}$ invariante par \widehat{f} qui vérifie $\pi_* \widehat{\mu} = \mu$.

Dans toute la suite, on notera $f_x = \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$ qui est définie au voisinage de 0 quand x n'est pas dans I . Le cocycle auquel nous allons appliquer la théorie de

Pesin est :

$$\begin{aligned} A : \widehat{\Omega} &\longrightarrow M_k(\mathbb{C}) \\ \widehat{x} &\longrightarrow Df_x(0) \end{aligned}$$

où $M_k(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées $k \times k$ à coefficients dans \mathbb{C} et $\pi(\widehat{x}) = x$. Grâce à l'hypothèse d'intégrabilité de la fonction $\log d(x, I)$, on a (voir le lemme 8 de [4])

$$\int \log^+ \|A(\widehat{x})\| d\widehat{\mu}(\widehat{x}) < +\infty.$$

Il en découle que l'on a un théorème du type Oseledets (voir [10] et [18] ainsi que le théorème 2.3 de [16], le théorème 6.1 dans [7] et [15]) :

Théorème 2. *Il existe des réels $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l \geq -\infty$, des entiers m_1, \dots, m_l et un ensemble $\widehat{\Gamma}$ de mesure pleine pour $\widehat{\mu}$ tels que pour $\widehat{x} \in \widehat{\Gamma}$ on ait une décomposition de \mathbb{C}^k de la forme $\mathbb{C}^k = \bigoplus_{i=1}^l E_i(\widehat{x})$ où les $E_i(\widehat{x})$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension m_i qui vérifient :*

- 1) $A(\widehat{x})E_i(\widehat{x}) \subset E_i(\widehat{f}(\widehat{x}))$ avec égalité si $\lambda_i > -\infty$.
- 2) Pour $v \in E_i(\widehat{x}) \setminus \{0\}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A(\widehat{f}^{n-1}(\widehat{x})) \cdots A(\widehat{x})\| = \lambda_i.$$

Si de plus, $\lambda_i > -\infty$, on a la même limite quand n tend vers $-\infty$.

Pour tout $\gamma > 0$, il existe une fonction $C_\gamma : \widehat{\Gamma} \longrightarrow GL_k(\mathbb{C})$ telle que pour $\widehat{x} \in \widehat{\Gamma}$:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_\gamma^{\pm 1}(\widehat{f}^n(\widehat{x}))\| = 0$ (on parle de fonction tempérée).
- 2) $C_\gamma(\widehat{x})$ envoie la décomposition standard $\bigoplus_{i=1}^l \mathbb{C}^{m_i}$ sur $\bigoplus_{i=1}^l E_i(\widehat{x})$.
- 3) La matrice $A_\gamma(\widehat{x}) = C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x}))A(\widehat{x})C_\gamma(\widehat{x})$ est diagonale par bloc $(A_\gamma^1(\widehat{x}), \dots, A_\gamma^l(\widehat{x}))$ où chaque $A_\gamma^i(\widehat{x})$ est une matrice carrée $m_i \times m_i$ et

$$\forall v \in \mathbb{C}^{m_i} \quad \text{on a } e^{\lambda_i - \gamma} \|v\| \leq \|A_\gamma^i(\widehat{x})v\| \leq e^{\lambda_i + \gamma} \|v\|$$

si $\lambda_i > -\infty$ et

$$\forall v \in \mathbb{C}^{m_i} \quad \|A_\gamma^l(\widehat{x})v\| \leq e^{-4\gamma} \|v\|$$

si $\lambda_l = -\infty$.

Pour le dernier point, voir la remarque après le théorème 14 de [3].

Notons maintenant $g_{\widehat{x}}$ la lecture de f_x dans les cartes C_γ c'est-à-dire $g_{\widehat{x}} = C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x})) \circ f_x \circ C_\gamma(\widehat{x})$ où $\pi(\widehat{x}) = x$.

Nous allons construire des cartes de Pesin qui seront adaptées pour montrer le Closing Lemma.

Proposition 1.1.1. *Il existe un ensemble $\widehat{\Gamma}'$ de mesure pleine pour $\widehat{\mu}$ et une application mesurable $r : \widehat{\Gamma}' \rightarrow]0, 1]$ tels que pour tout $\widehat{x} \in \widehat{\Gamma}'$ on ait $e^{-\gamma} \leq \frac{r(\widehat{f}(\widehat{x}))}{r(\widehat{x})} \leq e^\gamma$ et*

- 1) $g_{\widehat{x}}(0) = 0$.

- 2) $Dg_{\widehat{x}}(0) = A_\gamma(\widehat{x})$.

- 3) $g_{\widehat{x}}(w)$ est holomorphe pour $\|w\| \leq r(\widehat{x})$ et on a $\|D^2g_{\widehat{x}}(w)\| \leq \frac{1}{r(\widehat{x})}$ pour $\|w\| \leq r(\widehat{x})$.

En particulier, si on note $g_{\widehat{x}}(w) = Dg_{\widehat{x}}(0)w + h(w)$, on a $\|Dh(w)\| \leq \frac{1}{r(\widehat{x})}\|w\|$ pour $\|w\| \leq r(\widehat{x})$.

Preuve. On se place sur $\widehat{\Gamma}$. Les deux premiers points proviennent du théorème précédent.

La démonstration de la troisième propriété est basée sur la proposition 8 de [2] (voir aussi la proposition 10 de [4]). On reprend les notations de [4].

On a l'existence d'une constante $\epsilon_1 > 0$ telle que $g_{\widehat{x}}(w)$ est holomorphe pour $\|w\| \leq \frac{\epsilon_1 d(x, I)^p}{\|C_\gamma(\widehat{x})\|}$. De plus, pour $\|w\| \leq \frac{\epsilon_1 d(x, I)^p}{\|C_\gamma(\widehat{x})\|}$, on a $Dg_{\widehat{x}}(w) = C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x})) \circ Df_x(C_\gamma(\widehat{x})(w)) \circ C_\gamma(\widehat{x})$, ce qui donne la majoration :

$$\|D^2g_{\widehat{x}}(w)\| \leq \|C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x}))\| \|D^2f_x(C_\gamma(\widehat{x})(w))\| \|C_\gamma(\widehat{x})\|^2.$$

Comme dans la preuve de la proposition 10 de [4], en utilisant que $\|D^2f(x)\| \leq Cd(x, I)^{-p}$ (voir le lemme 2.1 de [5]) et que l'image par τ_x du segment $[0, C_\gamma(\widehat{x})(w)]$ vit dans la boule $B(x, K\|C_\gamma(\widehat{x})(w)\|)$ où K est une constante qui ne dépend que de X , on a (toujours pour $\|w\| \leq \frac{\epsilon_1 d(x, I)^p}{\|C_\gamma(\widehat{x})\|}$) :

$$\begin{aligned} \|D^2g_{\widehat{x}}(w)\| &\leq C\|C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x}))\| \|C_\gamma(\widehat{x})\|^2 d(\tau_x([0, C_\gamma(\widehat{x})(w)]), I)^{-p} \\ &\leq C(1 - K\epsilon_1)^{-p} \|C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x}))\| \|C_\gamma(\widehat{x})\|^2 d(x, I)^{-p} \\ &\leq 2C\|C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x}))\| \|C_\gamma(\widehat{x})\|^2 d(x, I)^{-p}. \end{aligned}$$

Notons maintenant (avec $x = \pi(\widehat{x})$) :

$$\alpha(\widehat{x}) = \max \left(1, \frac{\|C_\gamma(\widehat{x})\|}{\epsilon_1 d(x, I)^p}, 2C\|C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x}))\| \|C_\gamma(\widehat{x})\|^2 d(x, I)^{-p} \right).$$

Comme $\int \log d(\pi(\widehat{x}), I) d\widehat{\mu}(\widehat{x}) = \int \log d(x, I) d\mu(x) > -\infty$, le théorème de Birkhoff implique qu'il existe un ensemble de mesure pleine \mathcal{A} pour $\widehat{\mu}$ sur lequel :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log d(\pi(\widehat{f}^i(\widehat{x})), I) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log d(\pi(\widehat{f}^{-i}(\widehat{x})), I) \\ &= \int \log d(\pi(\widehat{x}), I) d\widehat{\mu}(\widehat{x}) > -\infty. \end{aligned}$$

Classiquement, cela implique que pour $\widehat{x} \in \mathcal{A}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log d(\pi(\widehat{f}^n(\widehat{x})), I) = 0.$$

Comme les $\|C_\gamma(\widehat{x})\|$ sont aussi tempérées, on obtient que $\alpha(\widehat{x})$ est une fonction tempérée sur $\widehat{\Gamma}' = \widehat{\Gamma} \cap \mathcal{A}$.

Par le lemme S.2.12 dans [13], il existe une fonction $\alpha_\gamma \geq \alpha$ qui vérifie $e^{-\gamma} \leq \frac{\alpha_\gamma(\widehat{f}(\widehat{x}))}{\alpha_\gamma(\widehat{x})} \leq e^\gamma$ pour tout $\widehat{x} \in \widehat{\Gamma}'$.

On pose alors $r(\widehat{x}) = \frac{1}{\alpha_\gamma(\widehat{x})}$ (qui est plus petit que 1). On a $e^{-\gamma} \leq \frac{r(\widehat{f}(\widehat{x}))}{r(\widehat{x})} \leq e^\gamma$ pour tout $\widehat{x} \in \widehat{\Gamma}'$, la fonction $g_{\widehat{x}}(w)$ est holomorphe pour $\|w\| \leq r(\widehat{x}) = \frac{1}{\alpha_\gamma(\widehat{x})} \leq \frac{1}{\alpha(\widehat{x})} \leq \frac{\epsilon_1 d(x, I)^p}{\|C_\gamma(\widehat{x})\|}$ et enfin :

$$\|D^2 g_{\widehat{x}}(w)\| \leq 2C \|C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x}))\| \|C_\gamma(\widehat{x})\|^2 d(x, I)^{-p} \leq \alpha(\widehat{x}) \leq \alpha_\gamma(\widehat{x}) = \frac{1}{r(\widehat{x})}$$

pour $\|w\| \leq r(\widehat{x})$. C'est ce que l'on voulait démontrer. \diamond

1.2 Transformées de graphes

Nous utiliserons les théorèmes de transformées de graphes en avant et en arrière par des applications non inversibles.

Commençons par la transformée de graphe en avant (voir le paragraphe 4 de [2]).

On se place dans \mathbb{C}^k et dans la suite $\|\cdot\|$ désignera la norme Euclidienne et $B_l(0, R)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{C}^l .

On considère :

$$g(X, Y) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y)) = (AX + R(X, Y), BY + U(X, Y))$$

avec $(X, 0) \in E_1$ (abscisses), $(0, Y) \in E_2$ (ordonnées) et $A : \mathbb{C}^{k_1} \rightarrow \mathbb{C}^{k_1}$, $B : \mathbb{C}^{k_2} \rightarrow \mathbb{C}^{k_2}$ des applications linéaires avec $k = k_1 + k_2$. On suppose que $g : B_k(0, R_0) \rightarrow$

$B_k(0, R_1)$ est holomorphe avec $R_0 \leq R_1$, $g(0) = 0$ et $\max(\|DR(Z)\|, \|DU(Z)\|) \leq \delta$ sur $B_k(0, R_0)$.

On supposera aussi A inversible, $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ et on note $\xi = 1 - \|B\|\|A^{-1}\| \in]0, 1]$.

Nous utiliserons la version raffinée suivante du théorème de la transformée de graphe (voir le paragraphe 4 de [2]) :

Théorème 3. *Soit $\{(X, \phi(X)), X \in D\}$ un graphe dans $B_k(0, R_0)$ au-dessus d'une partie D de E_1 qui vérifie $Lip(\phi) \leq \gamma_0 \leq 1$.*

Si $\delta\|A^{-1}\|(1 + \gamma_0) < 1$ alors l'image par g de ce graphe est un graphe au-dessus de $\pi_0(g(\text{graphe de } \phi))$ où π_0 est la projection sur les abscisses. Par ailleurs, si $(X, \psi(X))$ désigne ce nouveau graphe, on a :

$$\|\psi(X_1) - \psi(X_2)\| \leq \frac{\|B\|\gamma_0 + \delta(1 + \gamma_0)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0)} \|X_1 - X_2\|$$

qui est inférieur à $\gamma_0\|X_1 - X_2\|$ si $\delta \leq \epsilon(\gamma_0, \xi)$.

Enfin, si de plus $B_{k_1}(0, \alpha) \subset D$ et $\|\phi(0)\| \leq \beta$, alors $\pi_0(g(\text{graphe de } \phi))$ contient $B_{k_1}(0, (\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\alpha - \delta\beta)$ et $\|\Psi(0)\| \leq (1 + \gamma_0)(\|B\|\beta + \delta\beta + \|D^2g\|_{B_k(0, R_0)}\beta^2)$ (si $\delta \leq \epsilon(\gamma_0, \xi)$).

Preuve. Il s'agit de reprendre la preuve de [2] et de modifier juste la fin.

Tout est identique jusqu'à la ligne 11 p.102 sauf qu'ici les graphes sont au-dessus des abscisses.

Ensuite, on a :

$$\|\lambda(X_1) - \lambda(X_2)\| \geq (\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\|X_1 - X_2\|.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \|\lambda(X) - \lambda(0)\| &\geq (\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\|X\| \\ &= (\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\alpha \text{ si } X \in \partial B(0, \alpha). \end{aligned}$$

Mais $\lambda(0) = A0 + R(0, \phi(0))$ est de norme inférieure à :

$$\|R(0, \phi(0))\| = \|R(0, \phi(0)) - R(0, 0)\| \leq \delta\|\phi(0)\| \leq \delta\beta.$$

On en déduit que $\pi_0(g(\text{graphe de } \phi))$ contient $B_{k_1}(0, (\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\alpha - \delta\beta)$. C'est la modification que l'on voulait montrer.

◇

Nous utiliserons aussi la transformée de graphe en arrière dans le cas non-inversible (voir [7] théorème 6.4).

Théorème 4. *Soit $(\phi(Y), Y)$ un graphe dans $B_k(0, R_0)$ au-dessus de $B_{k_2}(0, \alpha)$ qui vérifie $\|\phi(0)\| \leq \beta$ et $Lip(\phi) \leq \gamma_0 \leq 1$ pour un certain $\beta \leq \alpha \leq R_0/4$. Soit $\gamma > 0$ tel que $e^{2\gamma} < \frac{3}{2}$.*

On suppose que :

$$\gamma_0(1 - \xi) + 2\delta(1 + \gamma_0)\|A^{-1}\| \leq 1 \quad \text{et}$$

$$(\gamma_0\|B\| + \delta(1 + \gamma_0))(\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))^{-1} \leq e^{-\gamma}\gamma_0 \quad \text{et}$$

$$(\|B\| + 2\delta)e^{2\gamma} + \delta \leq 1 \quad \text{et} \quad \delta(1 + \gamma_0) \leq \min\{(\|A^{-1}\|^{-1} - \gamma_0\|B\|)/2, \|A^{-1}\|^{-1} - e^{2\gamma}\}.$$

Alors il existe $\psi : B_{k_2}(0, \alpha e^{2\gamma}) \rightarrow \mathbb{C}^{k_1}$ avec $Lip(\psi) \leq e^{-\gamma}\gamma_0$, $\|\psi(0)\| \leq \beta e^{-2\gamma}$ et $g(\text{graphe}(\psi)) \subset \text{graphe}(\phi)$.

Preuve. Il s'agit d'une légère adaptation de la preuve du théorème 6.4 dans [7]. Nous en reprenons aussi les notations.

Soit $Y \in B_{k_2}(0, \alpha e^{2\gamma})$ et

$$L_{\beta e^{-2\gamma}} = \{(X, Y), \|X\| \leq \|Y\| + \beta e^{-2\gamma}\}.$$

Tout d'abord, on a $L_{\beta e^{-2\gamma}} \subset B_k(0, R_0)$ car pour $(X, Y) \in L_{\beta e^{-2\gamma}}$

$$\begin{aligned} \|(X, Y)\| &\leq \|X\| + \|Y\| \leq 2\|Y\| + \beta e^{-2\gamma} \leq 2\alpha e^{2\gamma} + \alpha \\ &\leq \frac{R_0}{2}e^{2\gamma} + \frac{R_0}{4} < R_0. \end{aligned}$$

Ensuite, toujours pour $(X, Y) \in L_{\beta e^{-2\gamma}}$, on a :

$$\begin{aligned} \|g_2(X, Y)\| &\leq \|B\|\|Y\| + \|U(X, Y)\| = \|B\|\|Y\| + \|U(X, Y) - U(0, 0)\| \\ &\leq \|B\|\|Y\| + \delta\|(X, Y)\| \leq \|B\|\|Y\| + \delta\|X\| + \delta\|Y\| \\ &\leq (\|B\| + 2\delta)\|Y\| + \delta\beta e^{-2\gamma} < (\|B\| + 2\delta)\alpha e^{2\gamma} + \delta\alpha \leq \alpha \end{aligned}$$

car $(\|B\| + 2\delta)e^{2\gamma} + \delta \leq 1$.

On en déduit que $\|g_2(X, Y)\| < \alpha$ pour tout $(X, Y) \in L_{\beta e^{-2\gamma}}$. En particulier, si on note :

1.2. TRANSFORMÉES DE GRAPHES

$$U = \{Y \in B_{k_2}(0, R_0) , g_2(L_{\beta e^{-2\gamma}}) \subset B_{k_2}(0, \alpha)\},$$

on a $B_{k_2}(0, \alpha e^{2\gamma}) \subset U$.

Soit $Y \in B_{k_2}(0, \alpha e^{2\gamma})$ fixé. On veut trouver $(X, Y) \in L_{\beta e^{-2\gamma}}$ avec $\phi(g_2(X, Y)) = g_1(X, Y)$. C'est équivalent à trouver $(X, Y) \in L_{\beta e^{-2\gamma}}$ avec :

$$\Lambda_Y(X) = A^{-1} [\phi(g_2(X, Y)) - (g_1(X, Y) - AX)] = X.$$

Pour cela montrons d'abord que $\Lambda_Y : \overline{B_{k_1}(0, \|Y\| + \beta e^{-2\gamma})} \rightarrow \overline{B_{k_1}(0, \|Y\| + \beta e^{-2\gamma})}$. Pour $X \in \overline{B_{k_1}(0, \|Y\| + \beta e^{-2\gamma})}$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Lambda_Y(X)\| &\leq \|A^{-1}\| [\|\phi(g_2(X, Y)) - \phi(0)\| + \|\phi(0)\| + \|g_1(X, Y) - AX\|] \\ &\leq \|A^{-1}\| [\gamma_0(\|B\|\|Y\| + \|U(X, Y)\|) + \beta + \|R(X, Y)\|] \\ &\leq \|A^{-1}\| [\gamma_0(\|B\|\|Y\| + \delta\|X\| + \delta\|Y\|) + \beta + \delta\|X\| + \delta\|Y\|] \\ &\leq \|A^{-1}\| [\gamma_0(\|B\|\|Y\| + 2\delta\|Y\|) + \gamma_0\delta\beta e^{-2\gamma} + \beta + 2\delta\|Y\| + \delta\beta e^{-2\gamma}] \\ &= \|A^{-1}\| [(\gamma_0\|B\| + 2\delta(1 + \gamma_0))\|Y\| + \beta(1 + \delta(1 + \gamma_0)e^{-2\gamma})]. \end{aligned}$$

Mais $\gamma_0\|B\| + 2\delta(1 + \gamma_0) \leq \|A^{-1}\|^{-1}$ et $e^{2\gamma} + \delta(1 + \gamma_0) \leq \|A^{-1}\|^{-1}$, d'où

$$\|\Lambda_Y(X)\| \leq \|A^{-1}\| [\|A^{-1}\|^{-1}\|Y\| + \beta e^{-2\gamma}\|A^{-1}\|^{-1}] \leq \|Y\| + \beta e^{-2\gamma}.$$

C'est ce que l'on voulait.

Maintenant, en suivant mot pour mot la preuve de [7], on a que Λ_Y est une contraction ce qui donne l'existence et l'unicité d'un point fixe dans $\overline{B_{k_1}(0, \|Y\| + \beta e^{-2\gamma})}$ que l'on note $\Psi(Y)$.

Ensuite, toujours en suivant [7] et en utilisant l'hypothèse

$$(\gamma_0\|B\| + \delta(1 + \gamma_0))(\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))^{-1} \leq e^{-\gamma}\gamma_0,$$

on a $Lip(\psi) \leq e^{-\gamma}\gamma_0$.

Enfin, comme $\Lambda_0 : \overline{B_{k_1}(0, \beta e^{-2\gamma})} \rightarrow \overline{B_{k_1}(0, \beta e^{-2\gamma})}$, on obtient que $\|\psi(0)\| \leq \beta e^{-2\gamma}$. Cela termine la démonstration. ◇

Chapitre 2

Le Closing Lemma

2.1 Cadre et énoncé du théorème

On commence par donner le cadre du théorème. On utilisera les notations et les résultats du chapitre 1.

Soit μ une mesure de probabilité avec $\int \log d(x, I) d\mu(x) > -\infty$. On la suppose invariante par f , ergodique et hyperbolique, c'est-à-dire que ses exposants de Lyapounov vérifient :

$$\chi_1 \geq \dots \geq \chi_{m_0} > 0 > \chi_{m_0+1} \geq \dots \geq \chi_k \text{ pour un } 1 \leq m_0 \leq k-1.$$

Comme les exposants de Lyapounov ne dépendent pas du choix des cartes pour X , on peut supposer que μ ne charge pas le bord des cartes (U_i, ψ_i) .

On fixe $\gamma > 0$ petit devant les exposants de Lyapounov avec $4\gamma < \chi_{m_0} - \chi_{m_0+1}$ et on applique le théorème d'Oseledets avec ce γ .

Soit $0 < \delta < \frac{1}{6}$. Pour $\epsilon_0 > 0$ suffisamment petit, la masse pour μ d'un ϵ_0 -voisinage des bords des cartes qui recouvrent X (pour une métrique fixée sur X) est plus petite que $\frac{\delta}{2}$.

On note V_{ϵ_0} ce voisinage et on a $\widehat{\mu}(\pi^{-1}(V_{\epsilon_0}^c)) = \mu(V_{\epsilon_0}^c) \geq 1 - \frac{\delta}{2}$.

Par le théorème de Lusin, on peut trouver un ensemble Λ_δ compact, inclus dans $\pi^{-1}(V_{\epsilon_0}^c)$ avec $\widehat{\mu}(\Lambda_\delta) \geq 1 - \delta$ et $\widehat{x} \mapsto C_\gamma^{\pm 1}(\widehat{x})$, $\widehat{x} \mapsto r(\widehat{x})$ continues sur Λ_δ .

On fixe une métrique standard sur $\widehat{\Omega}$ qui vérifie $d(\widehat{x}, \widehat{y}) \geq d(\pi(\widehat{x}), \pi(\widehat{y}))$ pour tout $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{\Omega}$ et on a alors le théorème :

Théorème 5 (Closing Lemma). *Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que si $\widehat{x} \in \Lambda_\delta$, $\widehat{f}^m(\widehat{x}) \in \Lambda_\delta$ pour un certain $m \geq 1$ avec $d(\widehat{x}, \widehat{f}^m(\widehat{x})) < \eta$ alors il existe $z \in X$ tel que :*

1. $f^m(z) = z$,
2. $d(f^i(x), f^i(z)) \leq \epsilon \max(e^{-\gamma i}, e^{-\gamma(m-i)})$ pour $0 \leq i \leq m$ (où $x = \pi(\hat{x})$),
3. z est hyperbolique.

2.2 Preuve du Closing Lemma

2.2.1 Démonstration de l'existence du point périodique z

Pour démontrer le Closing Lemma, nous suivons l'approche d'A. Katok (voir [12]). Ce qui change c'est que f n'est pas inversible et qu'il y a un ensemble d'indétermination I sur lequel f n'est même pas définie. Pour surmonter ces difficultés, nous utiliserons des transformées de graphes par des applications non inversibles (voir le théorème 4) et des cartes de Pesin qui prennent en compte I .

Soit $0 < \gamma_0 < \frac{1}{5}$ fixé suffisamment petit pour que $\gamma_0 < e^{\frac{\gamma}{4}} - 1$, $\gamma_0 < 1 - e^{-\frac{\gamma}{2}}$ et $\gamma_0 e^{\chi_1 + \gamma} + e^{-4\gamma} < e^{-\frac{7}{2}\gamma}$.

Λ_δ est compact, donc il existe $r_0 > 0$ tel que :

$$\forall \hat{x} \in \Lambda_\delta, r(\hat{x}) \geq r_0 \text{ et } r_0 \leq \|C_\gamma(\hat{x})^{\pm 1}\| \leq \frac{1}{r_0}.$$

Dans un premier temps, nous faisons des transformées de graphes en avant et en arrière dans des boîtes de taille $hr(\hat{f}^i(\hat{x}))$ avec h suffisamment petit (nous préciserons à quel point au fur et à mesure).

1) Poussées en avant de graphes à partir de x par $g_{\hat{x}}, g_{\hat{f}(\hat{x})}, \dots, g_{\hat{f}^{m-1}(\hat{x})}$:

Soit $\hat{x} \in \Lambda_\delta$. On note $E_u(\hat{x})$ la somme directe de tous les $E_i(\hat{x})$ correspondants aux exposants strictement positifs et $E_s(\hat{x})$ la somme directe des $E_i(\hat{x})$ avec des exposants strictement négatifs.

On a $\dim E_u(\hat{x}) = k_1$ et $\dim E_s(\hat{x}) = k_2 = k - k_1$.

Pour i compris entre 0 et $m - 1$, on se place dans le repère :

$$C_\gamma^{-1}(\hat{f}^i(\hat{x}))E_u(\hat{f}^i(\hat{x})) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\hat{f}^i(\hat{x}))E_s(\hat{f}^i(\hat{x}))$$

et on a :

Lemme 2.2.1. *Soit $(X, \phi(X))$ un graphe au-dessus de $B_{k_1}(0, \alpha) \subset C_\gamma^{-1}(\hat{f}^i(\hat{x}))E_u(\hat{f}^i(\hat{x}))$*

où $\alpha = hr(\hat{f}^i(\hat{x}))$, $\beta = \|\phi(0)\| \leq hr(\hat{f}^i(\hat{x}))$ et $Lip(\phi) \leq \gamma_0$.

Alors l'image par $g_{\hat{f}^i(\hat{x})}$ de ce graphe est un graphe $(X, \psi(X))$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{i+1}(\hat{x}))E_u(\hat{f}^{i+1}(\hat{x}))$ au moins pour $\|X\| \leq hr(\hat{f}^{i+1}(\hat{x}))e^\gamma$ et $\|\psi(0)\| \leq e^{-2\gamma}\beta$, $Lip(\psi) \leq \gamma_0 e^{-\gamma}$.

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

Preuve. Si $\chi_{m_0+1} = -\infty$, les calculs qui vont suivre restent valables en remplaçant χ_{m_0+1} par -5γ .

Dans le repère précédent $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ s'écrit (voir le chapitre 1.1) :

$$g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X, Y) = (AX + R(X, Y), BY + U(X, Y))$$

avec $(A, B) = \text{diag}(A_\gamma^1(\widehat{f}^i(\widehat{x})), \dots, A_\gamma^l(\widehat{f}^i(\widehat{x})))$. On a $\|A^{-1}\|^{-1} \geq e^{\chi_{m_0}-\gamma}$ et $\|B\| \leq e^{\chi_{m_0+1}+\gamma}$ et pour $\|(X, Y)\| \leq 5hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$

$$\max(\|DR(X, Y)\|, \|DU(X, Y)\|) \leq \frac{1}{r(\widehat{f}^i(\widehat{x}))} \|(X, Y)\| \leq 5h.$$

On applique le théorème de la transformée de graphe en avant avec $R_0 = 5hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$.

Tout d'abord, le graphe $(X, \phi(X))$ est bien dans $B_k(0, R_0)$ car

$$\|\phi(X)\| \leq \|\phi(0)\| + \gamma_0 \|X\| \leq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))\gamma_0 + hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \leq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))(\gamma_0+1) \leq 2hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})).$$

Ensuite, pour les hypothèses du théorème on a d'une part

$$\delta \|A^{-1}\| (1 + \gamma_0) \leq 5he^{-\chi_{m_0}+\gamma} \times 2 < 1$$

pour h petit par rapport à γ et d'autre part

$$\frac{\|B\|\gamma_0 + \delta(1 + \gamma_0)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0)} \leq \frac{\gamma_0 e^{\chi_{m_0+1}+\gamma} + 6h}{e^{\chi_{m_0}-\gamma} - 6h} \leq e^{-\gamma}\gamma_0$$

toujours pour h petit car $4\gamma < \chi_{m_0} - \chi_{m_0+1}$.

Le théorème permet alors d'affirmer que l'image par $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ du graphe de ϕ est un graphe $(X, \psi(X))$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))E_u(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))$ qui contient $B_{k_1}(0, t)$ avec :

$$\begin{aligned} t &\geq (\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\alpha - \delta\beta \geq (e^{\chi_{m_0}-\gamma} - 6h)hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})) - 5h \times hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \\ &\geq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))(e^{\chi_{m_0}-\gamma} - 6h - 5h) \geq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \underbrace{(e^{4\gamma} - 11h)}_{>e^{2\gamma} \text{ si } h \ll \gamma} \text{ car si on veut } e^{\chi_{m_0}-\gamma} \geq e^{4\gamma}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est supérieure à $hr(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))e^\gamma$ car $\frac{r(\widehat{f}^i(\widehat{x}))}{r(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))} \geq e^{-\gamma}$.

Enfin on a :

$$\begin{aligned}
 \|\psi(0)\| &\leq (1 + \gamma_0)(\|B\|\beta + \delta\beta + \|D^2g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}\|_{B(0,R_0)}\beta^2) \\
 &\leq e^{\frac{\gamma}{2}}(e^{\chi_{m_0+1}+\gamma} + 5h + \frac{1}{r(\widehat{f}^i(\widehat{x}))}hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})))\beta \\
 &\leq e^{\frac{\gamma}{2}}(e^{-4\gamma} + 5h + h)\beta \text{ car si on veut } e^{\chi_{m_0+1}+\gamma} \leq e^{-4\gamma} \\
 &\leq e^{-2\gamma}\beta \text{ si } h \ll \gamma.
 \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du lemme. \diamond

On applique maintenant ce lemme de la manière suivante.

On part d'un graphe $(X, \phi_0(X))$ dans le repère $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x}) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_s(\widehat{x})$ avec $\phi_0(X) = 0$ pour $\|X\| \leq hr(\widehat{x})$.

En poussant en avant par $g_{\widehat{x}}$ on obtient un graphe $(X, \phi_1(X))$ au moins pour $\|X\| \leq hr(\widehat{f}(\widehat{x}))e^\gamma$ avec $\|\phi_1(0)\| = 0 \leq hr(\widehat{f}(\widehat{x}))e^{-\gamma}$ et $Lip(\phi_1) \leq \gamma_0e^{-\gamma}$.

Dans ce graphe on ne garde que la partie pour $\|X\| \leq hr(\widehat{f}(\widehat{x}))$ (on fait un cut-off) et on recommence en prenant l'image par $g_{\widehat{f}(\widehat{x})}$. Après m étapes (poussées successives par $g_{\widehat{x}}, g_{\widehat{f}(\widehat{x})}, \dots, g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})}$), on obtient un graphe $(X, \phi_m(X))$ dans le repère :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^m(\widehat{x}))E_u(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^m(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$$

au moins pour $\|X\| \leq hr(\widehat{f}^m(\widehat{x}))e^\gamma$ avec $\|\phi_m(0)\| = 0 \leq hr(\widehat{f}^m(\widehat{x}))e^{-\gamma}$ et $Lip(\phi_m) \leq \gamma_0e^{-\gamma}$.

On veut maintenant remettre le graphe $(X, \phi_m(X))$ obtenu dans le repère initial :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x}) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_s(\widehat{x})$$

afin de recommencer l'opération.

Remarque. On va le faire en supposant seulement que $\|\phi_m(0)\| \leq hr(\widehat{f}^m(\widehat{x}))e^{-\gamma}$ (et non $\|\phi_m(0)\| = 0$) car cela nous sera utile dans la suite.

Cela revient à prendre l'image de $(X, \phi_m(X))$ par l'application :

$$C(X, Y) := C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))(X, Y).$$

Par définition, Λ_δ ne contient pas des points de $\pi^{-1}(V_{\epsilon_0})$. En particulier, si $\widehat{x}, \widehat{y} \in \Lambda_\delta$ avec $d(\widehat{x}, \widehat{y}) < \eta < \epsilon_0$ on a $d(x, y) \leq d(\widehat{x}, \widehat{y}) < \epsilon_0$, c'est-à-dire que x et y sont dans une même carte.

On peut supposer que la famille $(\tau_x)_x$ est choisie de sorte que dans ce cas $\tau_x^{-1} \circ \tau_y$ soit juste une translation (on rappelle que τ_x est la composée $\psi \circ t_x$ où ψ est une

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

carte et t_x une translation). On supposera que les $(\tau_x)_x$ vérifient cette propriété dans la suite.

Comme $d(\hat{x}, \hat{f}^m(\hat{x})) < \eta < \epsilon_0$, on a $\tau_x = \psi \circ t_x$ et $\tau_{f^m(x)} = \psi \circ t_{f^m(x)}$.

On en déduit qu'il existe un vecteur a_m tel que $\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}(w) = w + a_m$, ce qui permet de simplifier l'expression de C sous la forme :

$$C(w) = g_1(w) + C_\gamma^{-1}(\hat{x})a_m$$

où $g_1(w) = C_\gamma^{-1}(\hat{x})C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x}))(w)$.

Commençons par prendre l'image du graphe $(X, \phi_m(X))$ par g_1 . On a :

$$\begin{aligned} g_1(w) &= C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ C_\gamma(\hat{x})w + C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ (C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x})) - C_\gamma(\hat{x}))w \\ &= w + C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ (C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x})) - C_\gamma(\hat{x}))w \end{aligned}$$

avec $\|C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ (C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x})) - C_\gamma(\hat{x}))\| \leq \frac{1}{r_0} \|C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x})) - C_\gamma(\hat{x})\|$.

Par ailleurs $\hat{y} \mapsto C_\gamma(\hat{y})$ est continue sur le compact Λ_δ , donc y est uniformément continue. En particulier, il existe une fonction $\epsilon(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ telle que l'on ait l'implication suivante :

$$(d(\hat{z}, \hat{y}) \leq \eta \text{ avec } \hat{z}, \hat{y} \in \Lambda_\delta) \implies \frac{1}{r_0} \|C_\gamma(\hat{z}) - C_\gamma(\hat{y})\| \leq \epsilon(\eta).$$

Pour η petit par rapport à γ et γ_0 l'image du graphe $(X, \phi_m(X))$ par g_1 va être un graphe $(X, \psi_m^1(X))$. En effet, g_1 s'écrit sous la forme $g_1(X, Y) = (AX + CY, BY + DX)$ avec $\|A^{-1}\|^{-1} \geq 1 - \epsilon(\eta)$, $\|B\| \leq 1 + \epsilon(\eta)$, $\|C\| \leq \epsilon(\eta)$ et $\|D\| \leq \epsilon(\eta)$.

Si on reprend les notations du théorème de la transformée de graphe on a donc :

$$\begin{aligned} \delta \|A^{-1}\| (1 + \gamma_0) &\leq \epsilon(\eta) \times \frac{1}{1 - \epsilon(\eta)} \times 2 \quad \underbrace{\leq}_{\text{pour } \eta \text{ petit}} \quad 1 \quad \text{et} \\ \frac{\|B\| \gamma_0 e^{-\gamma} + \delta(1 + \gamma_0)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0)} &\leq \frac{(1 + \epsilon(\eta))e^{-\gamma} \gamma_0 + 2\epsilon(\eta)}{1 - \epsilon(\eta) - 2\epsilon(\eta)} \quad \underbrace{\leq}_{\text{pour } \eta < \gamma, \gamma_0} \quad \gamma_0. \end{aligned}$$

Les hypothèses de ce théorème étant vérifiées, on obtient un graphe $(X, \psi_m^1(X))$ avec $Lip(\psi_m^1) \leq \gamma_0$ au moins au-dessus de $B_{k_1}(0, t)$ avec :

$$t \geq (1 - \epsilon(\eta) - 3\epsilon(\eta))e^\gamma hr(\hat{f}^m(\hat{x})) = (1 - 4\epsilon(\eta))e^\gamma hr(\hat{f}^m(\hat{x})).$$

Mais $r(\hat{f}^m(\hat{x})) \geq e^{-\frac{\gamma}{4}} r(\hat{x})$ si η est petit par rapport à γ .

En effet, $\widehat{x} \mapsto r(\widehat{x})$ est uniformément continue sur Λ_δ et on peut donc supposer que :

$$(d(\widehat{x}, \widehat{y}) < \eta \text{ avec } \widehat{x}, \widehat{y} \in \Lambda_\delta) \implies |r(\widehat{x}) - r(\widehat{y})| \leq (1 - e^{-\frac{\gamma}{4}})r_0$$

ce qui donne :

$$r(\widehat{y}) \geq r(\widehat{x}) - (1 - e^{-\frac{\gamma}{4}})r_0 \geq r(\widehat{x}) - (1 - e^{-\frac{\gamma}{4}})r(\widehat{x}) = e^{-\frac{\gamma}{4}}r(\widehat{x}).$$

On a donc $t \geq (1 - 4\epsilon(\eta))e^\gamma h e^{-\frac{\gamma}{4}}r(\widehat{x}) > h e^{\frac{\gamma}{4}}r(\widehat{x})$ si $\eta \ll 1$.

Enfin comme g_1 est linéaire,

$$\begin{aligned} \|\psi_m^1(0)\| &\leq (1 + \gamma_0)(1 + \epsilon(\eta) + \epsilon(\eta))h e^{-\gamma}r(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \\ &\leq e^{\frac{\gamma}{4}}(1 + 2\epsilon(\eta))h e^{-\gamma}r(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \leq e^{-\frac{\gamma}{2}}(1 + 2\epsilon(\eta))hr(\widehat{x}) \end{aligned}$$

car comme précédemment on a $r(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \leq e^{\frac{\gamma}{4}}r(\widehat{x})$.

Ainsi, $\|\psi_m^1(0)\| \leq e^{-\frac{\gamma}{4}}hr(\widehat{x})$ si $\eta \ll \gamma$.

Il reste désormais à translater ce graphe par $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})a_m$ (on rappelle que $C(w) = g_1(w) + C_\gamma^{-1}(\widehat{x})a_m$).

Le vecteur $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})a_m$ s'écrit (t_1, t_2) donc l'image de $(X, \psi_m^1(X))$ est :

$$(X', \psi_m(X')) := (X + t_1, \psi_m^1(X) + t_2)$$

où $\psi_m(X') = \psi_m^1(X) + t_2 = \psi_m^1(X' - t_1) + t_2$.

C'est donc un graphe au-dessus d'une partie de l'axe des abscisses $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x})$. De plus, $Lip(\psi_m) = Lip(\psi_m^1) \leq \gamma_0$ et c'est un graphe au moins au-dessus de $B(0, hr(\widehat{x})e^{\frac{\gamma}{4}} - \|C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\|\|a_m\|)$.

Mais en utilisant que $a_m = \overrightarrow{\psi^{-1}(x)\psi^{-1}(f^m(x))}$, on a :

$$\|C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\|\|a_m\| \leq \frac{1}{r_0}\|\psi^{-1}(f^m(x)) - \psi^{-1}(x)\| \underset{\text{si } \eta \ll h, r_0}{\leq} \frac{h^2 r_0^2}{r_0} = h^2 r_0 \leq h^2 r(\widehat{x}).$$

D'où $hr(\widehat{x})e^{\frac{\gamma}{4}} - \|C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\|\|a_m\| \geq hr(\widehat{x})(e^{\frac{\gamma}{4}} - h) > hr(\widehat{x})$ si $h \ll \gamma$.

Enfin :

$$\begin{aligned} \|\psi_m(0)\| &= \|\psi_m^1(-t_1) + t_2\| \leq \|\psi_m^1(-t_1) - \psi_m^1(0)\| + \|\psi_m^1(0)\| + \|t_2\| \\ &\leq \gamma_0\| -t_1\| + \|t_2\| + e^{-\frac{\gamma}{4}}hr(\widehat{x}) \leq (1 + \gamma_0)\|C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\|\|a_m\| + e^{-\frac{\gamma}{4}}hr(\widehat{x}) \\ &\leq e^{\frac{\gamma}{4}}h^2r(\widehat{x}) + e^{-\frac{\gamma}{4}}hr(\widehat{x}) \leq hr(\widehat{x})(he^{\frac{\gamma}{4}} + e^{-\frac{\gamma}{4}}) \leq hr(\widehat{x}) \text{ pour } h \ll \gamma. \end{aligned}$$

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

On a donc bien récupéré un graphe avec les bonnes estimées pour pouvoir recommencer tout le processus (voir le lemme précédent) avec $(X, \psi_m(X))$ à la place de $(X, \phi_0(X))$.

On notera B_0 le graphe initial $(X, \phi_0(X))$, B_1 le graphe obtenu $(X, \psi_m(X))$ et ainsi de suite. On a ainsi construit une suite $(B_j)_j$ de graphes.

On va maintenant faire la même chose en tirant en arrière.

2) Tirés en arrière de graphes à partir de $f^m(x)$ par $g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})}, \dots, g_{\widehat{x}}$:

Par hypothèse $\widehat{f}^m(\widehat{x}) \in \Lambda_\delta$. Pour le lemme qui suit, on se place dans le repère :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))E_u(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x})) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))$$

(pour i compris entre 0 et $m - 1$).

Lemme 2.2.2. *Soit $(\psi(Y), Y)$ un graphe au-dessus de $B_{k_2}(0, \alpha) \subset C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))$ où $\alpha = hr(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))$, $\beta = \|\psi(0)\| \leq hr(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x}))$, $Lip(\psi) \leq \gamma_0$.*

Alors il existe un graphe $(\phi(Y), Y)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$ pour au moins $\|Y\| \leq e^{2\gamma}\alpha$ avec $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(\text{graphe } \phi) \subset \text{graphe } \psi$, $\|\phi(0)\| \leq e^{-2\gamma}\beta$ et $Lip(\phi) \leq e^{-\gamma}\gamma_0$.

Preuve. Si $\chi_{m_0+1} = -\infty$, les calculs qui vont suivre restent valables en remplaçant χ_{m_0+1} par -5γ . Dans le repère :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x}))E_u(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$$

$g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ s'écrit :

$$g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X, Y) = (AX + R(X, Y), BY + U(X, Y))$$

où $(A, B) = \text{diag}(A_\gamma^1(\widehat{f}^i(\widehat{x})), \dots, A_\gamma^l(\widehat{f}^i(\widehat{x})))$, $\|A^{-1}\|^{-1} \geq e^{\chi_{m_0+1}}$ et $\|B\| \leq e^{\chi_{m_0+1} + \gamma}$.

Comme dans la démonstration du lemme précédent, on a pour $\|(X, Y)\| \leq 5hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})) = R_0$:

$$\max(\|DR(X, Y)\|, \|DU(X, Y)\|) \leq 5h.$$

On a aussi :

$$\beta \leq \alpha \leq e^\gamma hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \leq \frac{R_0}{4}.$$

La deuxième inégalité vient du fait que $r(\widehat{f}^{i+1}(\widehat{x})) \leq e^\gamma r(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$. La dernière découle de $4e^\gamma \leq 5$ (qui est vraie pour γ suffisamment petit).

On peut alors appliquer le théorème de la transformée de graphe en arrière. En effet, on a :

$$\gamma_0(1 - \xi) + 2\delta(1 + \gamma_0)\|A^{-1}\| \leq \gamma_0 + 6h \times 2 \times e^{-\chi_{m_0} + \gamma} \leq \gamma_0 + 12h < 1$$

car $\gamma_0 < \frac{1}{5}$ et h petit. Ensuite,

$$\frac{\gamma_0\|B\| + \delta(1 + \gamma_0)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0)} \leq \frac{\gamma_0 e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} + 6h}{e^{\chi_{m_0} - \gamma} - 6h} < e^{-\gamma} \gamma_0$$

si $h \ll \gamma, \gamma_0$ car $e^{\chi_{m_0+1} + \gamma - \chi_{m_0} + \gamma} \leq e^{-2\gamma}$. Puis,

$$(\|B\| + 2\delta)e^{2\gamma} + \delta \leq (e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} + 10h)e^{2\gamma} + 5h < 1$$

pour $h \ll \gamma$ car $e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} \leq e^{-4\gamma}$. Enfin, d'une part,

$$\delta(1 + \gamma_0) \leq 6h < \frac{\|A^{-1}\|^{-1} - \gamma_0\|B\|}{2}$$

car $\|A^{-1}\|^{-1} - \gamma_0\|B\| \geq e^{\chi_{m_0} - \gamma} - \gamma_0 e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} \geq e^{4\gamma} - \gamma_0 \geq e^{2\gamma} > 12h$ par l'hypothèse faite sur γ_0 au début et le fait que $e^{2\gamma} > 12h$ pour h petit. D'autre part,

$$\|A^{-1}\|^{-1} - e^{2\gamma} \geq e^{\chi_{m_0} - \gamma} - e^{2\gamma} \geq e^{4\gamma} - e^{2\gamma} > 6h$$

aussi. Ce qui achève la démonstration du lemme. \diamond

On va maintenant appliquer ce lemme. On commence par se placer dans le repère :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^m(\widehat{x}))E_u(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^m(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$$

et on part de $(\psi_m(Y), Y)$ avec $\psi_m \equiv 0$ et $Y \in B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^m(\widehat{x})))$.

Par le lemme précédent, on a l'existence d'un graphe $(\psi_{m-1}(Y), Y)$ avec

$$g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})}(\text{graphe } \psi_{m-1}) \subset \text{graphe } \psi_m,$$

$Lip(\psi_{m-1}) \leq \gamma_0 e^{-\gamma}$ et ce graphe est défini au moins pour $\|Y\| \leq e^{2\gamma} hr(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$, c'est-à-dire au moins pour $\|Y\| \leq e^\gamma hr(\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x}))$. De plus $\|\psi_{m-1}(0)\| = 0 \leq e^{-2\gamma} hr(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \leq e^{-\gamma} hr(\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x}))$.

Dans ce graphe on ne garde que la partie pour $\|Y\| \leq hr(\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x}))$ (on fait un cut-off) et on recommence avec $g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})}$.

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

Après m étapes (tirés en arrière successifs par $g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})}, g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})}, \dots, g_{\widehat{x}}$), on obtient un graphe $(\psi_0(Y), Y)$ dans le repère :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x}) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_s(\widehat{x})$$

au moins pour $\|Y\| \leq e^{2\gamma}hr(\widehat{f}(\widehat{x}))$ (donc au moins pour $\|Y\| \leq e^\gamma hr(\widehat{x})$), $\|\psi_0(0)\| = 0 \leq e^{-2\gamma}hr(\widehat{f}(\widehat{x})) \leq e^{-\gamma}hr(\widehat{x})$ et $Lip(\psi_0) \leq e^{-\gamma}\gamma_0$.

On veut maintenant remettre ce graphe dans le repère initial :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^m(\widehat{x}))E_u(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^m(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$$

afin de recommencer l'opération.

On va le faire en supposant seulement $\|\psi_0(0)\| \leq e^{-\gamma}hr(\widehat{x})$ et non pas 0 car cela nous servira pour les étapes suivantes.

On prend l'image de $(\psi_0(Y), Y)$ par C^{-1} . Par les mêmes arguments que précédemment, l'image de $(\psi_0(Y), Y)$ est un graphe $(\phi_0(Y), Y)$ au moins pour $\|Y\| \leq hr(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$, avec $Lip(\phi_0) \leq \gamma_0$ et $\|\phi_0(0)\| \leq hr(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$.

Ce sont les bonnes estimées pour pouvoir recommencer le processus avec $(\phi_0(Y), Y)$ à la place de $(\psi_m(Y), Y)$.

On note A_0 le graphe initial $(\psi_m(Y), Y)$, A_1 celui obtenu $(\phi_0(Y), Y)$. On a donc construit de cette manière une suite de graphes $(A_l)_{l \geq 0}$.

Nous noterons aussi A_l^0 le graphe obtenu juste avant de prendre l'image par C^{-1} et créer A_{l+1} . Le graphe A_l^0 est dans le repère $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x}) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_s(\widehat{x})$.

Les ensembles B_j et A_l^0 se coupent en un seul point (voir la démonstration de la proposition S.3.7 dans [13] car $\gamma_0^2 < 1$).

Pour $l, j \geq 0$, on pose :

$$z_{l,j} = \tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(B_j \cap A_l^0).$$

Le lemme suivant énonce des propriétés de la suite $(z_{l,j})_{l,j}$.

Lemme 2.2.3. *La suite $(z_{l,j})_{l,j}$ vérifie :*

1. $f^m(z_{l,j}) = z_{l-1,j+1}$ pour $l \geq 1, j \geq 0$.
2. $\|C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z_{l_1,j}) - C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z_{l_2,j})\| \leq e^{-\gamma} \|C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z_{l_1-1,j+1}) - C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z_{l_2-1,j+1})\|$ pour $l_1, l_2 \geq 1$ et $j \geq 0$.
3. $\|C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z_{l,j_1}) - C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z_{l,j_2})\| \geq e^\gamma \|C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z_{l-1,j_1+1}) - C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z_{l-1,j_2+1})\|$ pour $j_1, j_2 \geq 0$ et $l \geq 1$.

Preuve. On commence par la :

Démonstration du point 1 :

Par construction des A_l^0 , on a pour $l \geq 1$:

$$g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x}}(A_l^0) \subset A_l \subset B_{k_1}(0, he^\gamma r(\widehat{f}^m(\widehat{x}))) \times B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^m(\widehat{x})))$$

et pour $i = 0, \dots, m-1$:

$$g_{\widehat{f}^{i-1}(\widehat{x})} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x}}(A_l^0) \subset B_{k_1}(0, hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))) \times B_{k_2}(0, he^\gamma r(\widehat{f}^i(\widehat{x})))$$

(car $\|\psi_i(Y)\| \leq \|\psi_i(Y) - \psi_i(0)\| + \|\psi_i(0)\| \leq \gamma_0 e^{-\gamma} e^\gamma hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})) + he^{-\gamma} r(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \leq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$).

Les abscisses de ces ensembles sont donc dans la partie que l'on garde quand on fait le cut-off pour le poussé en avant, c'est-à-dire dans la construction des B_j .

En particulier, $C_\gamma(\widehat{x})^{-1} \tau_x^{-1} \tau_{f^m(x)} C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x})) (g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \tau_x^{-1} z_{l,j}))$ est dans $A_{l-1}^0 \cap B_{j+1}$. D'où

$$\{C_\gamma(\widehat{x})^{-1} \tau_x^{-1} f^m(z_{l,j})\} = A_{l-1}^0 \cap B_{j+1} = \{C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \tau_x^{-1} z_{l-1,j+1}\}.$$

Donc $f^m(z_{l,j}) = \tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x}) C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \tau_x^{-1} z_{l-1,j+1} = z_{l-1,j+1}$.

Ce qui achève la démonstration du point 1.

Passons aux points 2 et 3 du lemme. Leurs démonstrations utiliseront les deux lemmes suivants :

Lemme 2.2.4. *Notons B_j^i pour $i = 0, \dots, m$ les étapes intermédiaires (après cut-off) entre B_j et B_{j+1} lorsque l'on fait les cut-off successifs. En particulier, pour $i = 1, \dots, m-1$, B_j^i est un graphe $(X, \psi(X))$ dans le repère :*

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x})) E_u(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x})) E_s(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$$

au moins au-dessus de $B_{k_1}(0, hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))) \subset C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x})) E_u(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$, $Lip(\psi) \leq \gamma_0 e^{-\gamma}$ et $\|\psi(0)\| \leq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})) e^{-\gamma}$ (pour $i = 0$ ce sont les mêmes estimées sans les $e^{-\gamma}$ et pour $i = m$ c'est $B_{k_1}(0, hr(\widehat{f}^m(\widehat{x})) e^\gamma$ au lieu de $B_{k_1}(0, hr(\widehat{f}^m(\widehat{x})))$).

$B_j^0 = B_j$ et $C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \tau_x^{-1} \tau_{f^m(x)} C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x})) B_j^m \supset B_{j+1}$ (cut-off).

Alors si $z_1, z_2 \in B_j^i$ ($i = 0, \dots, m-1$) on a :

$$\|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(z_1) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(z_2)\| \geq e^{2\gamma} \|z_1 - z_2\|.$$

Preuve. On a vu au précédemment (voir lemme 2.2.1) que $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ s'écrit :

$$g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X, Y) = (AX + R(X, Y), BY + U(X, Y))$$

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

où $(A, B) = \text{diag}(A_\gamma^1(\widehat{f}^i(\widehat{x})), \dots, A_\gamma^l(\widehat{f}^i(\widehat{x})))$, $\|A^{-1}\|^{-1} \geq e^{\chi_{m_0} - \gamma}$, $\|B\| \leq e^{\chi_{m_0+1} + \gamma}$ et $\max(\|DR(X, Y)\|, \|DU(X, Y)\|) \leq 5h$ pour $\|(X, Y)\| \leq 5hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$.
Notons $(X, \phi(X))$ le graphe qui représente B_j^i . On a $z_1 = (X_1, \phi(X_1))$ et $z_2 = (X_2, \phi(X_2))$.

D'où $\|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X_1, \phi(X_1)) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X_2, \phi(X_2))\|$ est supérieur à

$$\begin{aligned} & \|A(X_1 - X_2)\| - \|R(X_1, \phi(X_1)) - R(X_2, \phi(X_2))\| \\ & - \|U(X_1, \phi(X_1)) - U(X_2, \phi(X_2))\| - \|B\|\|\phi(X_1) - \phi(X_2)\| \\ & \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|X_1 - X_2\| - 5h(1 + \gamma_0)\|X_1 - X_2\| - 5h(1 + \gamma_0)\|X_1 - X_2\| \\ & - \gamma_0 e^{\chi_{m_0+1} + \gamma}\|X_1 - X_2\| \geq (e^{\chi_{m_0} - \gamma} - 12h - \gamma_0 e^{\chi_{m_0+1} + \gamma})\|X_1 - X_2\| \end{aligned}$$

(on a utilisé que $\|AX\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|X\|$). Or :

$$e^{\chi_{m_0} - \gamma} - \gamma_0 e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} \geq e^{4\gamma} - \gamma_0 e^{-4\gamma} \underset{\gamma_0 \ll \gamma}{\geq} e^{3\gamma},$$

donc pour $h \ll \gamma, \gamma_0$ on a :

$$e^{\chi_{m_0} - \gamma} - \gamma_0 e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} - 12h \geq e^{3\gamma} - 12h \geq e^{\frac{5\gamma}{2}}.$$

De plus, $\|z_1 - z_2\| \leq (1 + \gamma_0)\|X_1 - X_2\| \leq e^{\frac{\gamma}{4}}\|X_1 - X_2\|$ ce qui donne :

$$\|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X_1, \phi(X_1)) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X_2, \phi(X_2))\| \geq e^{\frac{5\gamma}{2}}\|X_1 - X_2\| \geq e^{2\gamma}\|z_1 - z_2\|.$$

Cela achève la démonstration. \diamond

Lemme 2.2.5. Notons A_i^j pour $i = 0, \dots, m$ les étapes intermédiaires (après cut-off) entre A_i et A_{i+1} lorsque l'on fait les cut-off successifs. En particulier, pour $i = 1, \dots, m-1$, A_i^i est un graphe $(\phi(Y), Y)$ dans le repère

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x}))E_u(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \bigoplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$$

au moins au-dessus de $B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))) \subset C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$ avec $\text{Lip}(\phi) \leq \gamma_0 e^{-\gamma}$ et $\|\phi(0)\| \leq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))e^{-\gamma}$ (pour $i = m$ ce sont les mêmes estimées sans les $e^{-\gamma}$ et pour $i = 0$ c'est $B_{k_2}(0, hr(\widehat{x})e^\gamma)$ au lieu de $B_{k_2}(0, hr(\widehat{x}))$).

A_l^0 est le même que défini précédemment et $A_l^m = A_l$

Alors si $z_1, z_2 \in A_l^i$ ($i = 0, \dots, m-1$) on a :

$$\|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(z_1) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(z_2)\| \leq e^{-2\gamma}\|z_1 - z_2\|.$$

Preuve. On reprend les mêmes notations que dans le lemme précédent.

Notons $(\phi(Y), Y)$ le graphe qui représente A_j^i . On a $z_1 = (\phi(Y_1), Y_1)$ et $z_2 = (\phi(Y_2), Y_2)$. D'où :

$$\begin{aligned} & \|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(\phi(Y_1), Y_1) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(\phi(Y_2), Y_2)\| \\ & \leq \|A\| \|\phi(Y_1) - \phi(Y_2)\| + \|R(\phi(Y_1), Y_1) - R(\phi(Y_2), Y_2)\| \\ & + \|U(\phi(Y_1), Y_1) - U(\phi(Y_2), Y_2)\| + \|B\| \|Y_1 - Y_2\| \\ & \leq e^{\chi_1 + \gamma} \gamma_0 \|Y_1 - Y_2\| + 5h(1 + \gamma_0) \|Y_1 - Y_2\| + 5h(1 + \gamma_0) \|Y_1 - Y_2\| \\ & + e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} \|Y_1 - Y_2\| \leq (\gamma_0 e^{\chi_1 + \gamma} + 12h + e^{\chi_{m_0+1} + \gamma}) \|Y_1 - Y_2\|. \end{aligned}$$

Or :

$$\gamma_0 e^{\chi_1 + \gamma} + e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} \leq \gamma_0 e^{\chi_1 + \gamma} + e^{-4\gamma} \underbrace{\leq}_{\gamma_0 \ll \gamma} e^{-\frac{7\gamma}{2}}.$$

Donc pour $h \ll \gamma, \gamma_0$, on a $\gamma_0 e^{\chi_1 + \gamma} + 12h + e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} \leq e^{-3\gamma}$.

De plus $\|z_1 - z_2\| \geq (1 - \gamma_0) \|Y_1 - Y_2\| \geq e^{-\gamma} \|Y_1 - Y_2\|$ ce qui donne :

$$\|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(\phi(Y_1), Y_1) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(\phi(Y_2), Y_2)\| \leq e^{-3\gamma} \|Y_1 - Y_2\| \leq e^{-2\gamma} \|z_1 - z_2\|.$$

C'est ce que l'on voulait démontrer. ◇

Utilisons maintenant ces deux lemmes pour montrer les points 2 et 3 du lemme 2.2.3.

Démonstration du point 2 :

On a vu que pour $i = 0, \dots, m-1$, on a $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z_{l_1, j}))$ dans la partie que l'on garde quand on fait le cut-off pour construire B_{j+1} , c'est-à-dire qu'il est dans B_j^{i+1} . En particulier, par le lemme 2.2.4 on a :

$$\begin{aligned} & \|g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l_1, j}) - g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l_2, j})\| \\ & \geq e^{2\gamma m} \|C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l_1, j} - C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l_2, j}\|. \end{aligned}$$

Or :

$$\tau_{f^m(x)} \circ C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \circ g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l_1, j}) = f^m(z_{l_1, j}) = z_{l_1-1, j+1}$$

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

par le premier point du lemme 2.2.3.

Donc si on note $C = C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x}))$, on a :

$$\begin{aligned} & \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l_1,j} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l_2,j}\| \\ & \leq e^{-2\gamma m} \|C^{-1}(C \circ g_{\hat{f}^{m-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}}(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l_1,j})) \\ & \quad - C^{-1}(C \circ g_{\hat{f}^{m-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}}(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l_2,j}))\| \\ & \leq e^{-2\gamma m} \|DC^{-1}\| \times \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l_1-1,j+1} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l_2-1,j+1}\|. \end{aligned}$$

Or $C^{-1}(w) = C_\gamma^{-1}(\hat{f}^m(\hat{x}))C_\gamma(\hat{x})w + C_\gamma^{-1}(\hat{f}^m(\hat{x}))b_m$, donc $DC^{-1} = C_\gamma^{-1}(\hat{f}^m(\hat{x}))C_\gamma(\hat{x})$ ce qui implique $\|DC^{-1}\| \leq e^\gamma$ si $\eta \ll \gamma$.

On en déduit le point 2 du lemme 2.2.3.

Démonstration du point 3 :

Pour $i = 0, \dots, m-1$, on a $g_{\hat{f}^i(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}}(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,j_1})$ dans A_l^{i+1} (par construction des A_l^i) d'où par le lemme 2.2.5 :

$$\begin{aligned} & \|g_{\hat{f}^{m-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}}(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,j_1}) - g_{\hat{f}^{m-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}}(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,j_2})\| \\ & \leq e^{-2\gamma m} \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,j_1} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,j_2}\|. \end{aligned}$$

Or :

$$\tau_{f^m(x)} \circ C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x})) \circ g_{\hat{f}^{m-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}}(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,j_1}) = f^m(z_{l,j_1}) = z_{l-1,j_1+1}.$$

D'o , si on note toujours $C = C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x}))$, on a :

$$\begin{aligned} & \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z_{l-1,j_1+1}) - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z_{l-1,j_2+1})\| \\ & = \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}f^m(z_{l,j_1}) - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}f^m(z_{l,j_2})\| \\ & = \|C \circ g_{\hat{f}^{m-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}}(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,j_1}) - C \circ g_{\hat{f}^{m-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}}(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,j_2})\| \\ & \leq \|DC\| e^{-2\gamma m} \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z_{l,j_1}) - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z_{l,j_2})\|. \end{aligned}$$

Comme précédemment on a $DC(w) = C_\gamma^{-1}(\hat{x})C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x}))w$ avec $\|DC\| \leq e^\gamma$ si $\eta \ll \gamma$, d'où le point 3 du lemme 2.2.3.

Cela termine la démonstration du lemme 2.2.3.

◇

On continue la démonstration de l'existence du point z et on va utiliser le lemme 2.2.3 pour cela.

L'idée est de démontrer que la suite $(z_{l+1,l})_l$ converge vers un point périodique de f .

Par le lemme 2.2.3, on a

$$\begin{aligned} & \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l+1,l} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l}\| \\ & \leq e^{-\gamma l} \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{1,2l} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{0,2l}\| \leq 2hr(\hat{x})e^{-\gamma l} \end{aligned}$$

car $C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{1,2l}$ et $C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{0,2l}$ sont dans B_{2l} .

De même :

$$\begin{aligned} & \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l+1} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l}\| \\ & \leq e^{-\gamma l} \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{2l,1} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{2l,0}\| \leq 2hr(\hat{x})e^{-\gamma l}, \end{aligned}$$

et pour $l \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l-1} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l}\| \\ & \leq e^{-\gamma(l-1)} \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{2l-1,0} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{2l-1,1}\| \leq 2hr(\hat{x})e^{-\gamma(l-1)}. \end{aligned}$$

En combinant ces inégalités, on obtient :

$$\|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l+1,l} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l-1}\| \leq 4hr(\hat{x})e^{-\gamma(l-1)}.$$

Cela implique que la suite $(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l+1,l})_{l \geq 0}$ est une suite de Cauchy de \mathbb{C}^k .

En effet, si $q \geq l$ on a :

$$\begin{aligned} & \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{q+1,q} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l+1,l}\| \\ & \leq \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{q+1,q} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{q,q-1}\| + \dots \\ & + \|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l+2,l+1} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l+1,l}\| \leq \sum_{i \geq l} 4he^{-\gamma i} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

La suite $(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l+1,l})_l$ converge donc vers un point que l'on note $C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z$.

De plus,

$$\|C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l+1,l} - C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l+1}\| \leq 2hr(\hat{x})e^{-\gamma l} + 2hr(\hat{x})e^{-\gamma l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$$

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

ce qui montre que $z_{l,l+1} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} z$ aussi.

Montrons que le point z obtenu vérifie $f^m(z) = z$.

Pour $i = 0, \dots, m-1$ le point $g_{\widehat{f}^{i-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l+1,l})$ est dans l'ensemble $B_{k_1}(0, hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))) \times B_{k_2}(0, e^\gamma hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})))$ sur lequel $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ est continue. Ainsi,

$$f^m(z_{l+1,l}) = \tau_{f^m(x)} C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x})) g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}} C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \tau_x^{-1}(z_{l+1,l}) \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} f^m(z).$$

Comme $f^m(z_{l+1,l}) = z_{l,l+1} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} z$, on obtient bien que $f^m(z) = z$.

Cela termine donc la démonstration du point 1 du Closing Lemma, c'est-à-dire l'existence du point périodique z .

2.2.2 Démonstration du deuxième point du Closing Lemma

Il s'agit d'estimer la distance entre $f^i(x)$ et $f^i(z)$ pour $i = 0, \dots, m$.

On se place dans le repère $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x}) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_s(\widehat{x})$ et on note $y_l := B_0 \cap A_l^0$.

Pour $i = 0, \dots, m-1$, on a :

$$\begin{aligned} & \|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l+1})\| \\ & \leq \|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l+1}) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(y_l)\| + \|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(y_l)\|. \end{aligned}$$

Mais $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(y_l) \in g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(A_l^0)$ est dans la partie que l'on garde quand on fait le cut-off pour construire B_1 (voir le début de la démonstration du lemme 2.2.3), il est donc dans B_0^{i+1} . Par le lemme 2.2.4, on a donc pour $i = 0, \dots, m-1$:

$$\begin{aligned} & \|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(y_l)\| = \|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(0) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(y_l)\| \\ & \leq e^{-2\gamma(m-i-1)} \|g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(0) - g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(y_l)\| \\ & \leq e^{-2\gamma(m-i-1)} \times 2hr(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \leq 2he^{-2\gamma(m-i-1)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, par le lemme 2.2.5, on a aussi pour $i = 0, \dots, m-1$:

$$\begin{aligned} & \|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l+1}) - g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(y_l)\| \\ & \leq e^{-2\gamma i} \|C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l+1} - y_l\| \leq 2hr(\widehat{x})e^{-2\gamma i} \leq 2he^{-2\gamma i}. \end{aligned}$$

En combinant les deux inégalités, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z_{l,l+1})\| &\leq 2he^{-2\gamma(m-i-1)} + 2he^{-2\gamma i} \\ &\leq 4h \max(e^{-2\gamma i}, e^{-2\gamma(m-i-1)}). \end{aligned}$$

On fait tendre l vers l'infini, et par continuité (comme précédemment), on obtient :

$$\|g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z)\| \leq 4h \max(e^{-2\gamma i}, e^{-2\gamma(m-i-1)}).$$

Maintenant comme $f^i(z) = \tau_{f^i(x)} \circ C_\gamma(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \circ g_{\widehat{f}^{i-1}(\widehat{x})} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z)$ et $f^i(x) = \tau_{f^i(x)} \circ C_\gamma(\widehat{f}^i(\widehat{x}))(0)$, par le théorème des accroissements finis, on a pour $i = 0, \dots, m$:

$$d(f^i(x), f^i(z)) \leq C(X)\|C_\gamma(\widehat{f}^i(\widehat{x}))\| \times \|g_{\widehat{f}^{i-1}(\widehat{x})} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}z)\|.$$

Mais $\|C_\gamma(\widehat{f}^i(\widehat{x}))\| \leq e^{\gamma i}\|C_\gamma(\widehat{x})\| \leq \frac{e^{\gamma i}}{r_0}$ car $\|C_\gamma(\widehat{x})\|$ est tempérée et $\widehat{x} \in \Lambda_\delta$. De même, comme $\widehat{f}^m(\widehat{x}) \in \Lambda_\delta$, on a $\|C_\gamma(\widehat{f}^i(\widehat{x}))\| \leq e^{\gamma(m-i)}\|C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))\| \leq \frac{e^{\gamma(m-i)}}{r_0}$.

On obtient donc, pour $i = 0, \dots, m$,

$$\begin{aligned} d(f^i(x), f^i(z)) &\leq C(X)\|C_\gamma(\widehat{f}^i(\widehat{x}))\|4h \max(e^{-2\gamma(i-1)}, e^{-2\gamma(m-i)}) \\ &\leq C(X)e^{2\gamma}\|C_\gamma(\widehat{f}^i(\widehat{x}))\|4h \max(e^{-2\gamma i}, e^{-2\gamma(m-i)}) \leq \frac{C(X)e^{2\gamma}4h}{r_0} \max(e^{-\gamma i}, e^{-\gamma(m-i)}). \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre h suffisamment petit pour que $\frac{C(X)4he^{2\gamma}}{r_0} < \epsilon$ et on obtient l'estimée que l'on voulait.

Il reste le point 3 du Closing Lemma à montrer, c'est-à-dire que z est hyperbolique.

2.2.3 Démonstration de l'hyperbolicité de z

Nous allons montrer que $Df^m(z)$ a m_0 valeurs propres de module supérieur à e^γ et $k - m_0$ valeurs propres de module inférieur à $e^{-\gamma}$ (on compte avec multiplicité).

Pour cela on va construire des variétés stables et instables en z à partir des suites $(B_j)_j$ et $(A_l)_l$ précédentes. Commençons par la variété instable.

On se place dans le repère $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x}) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_s(\widehat{x})$ et on note G_h l'ensemble des graphes de fonctions holomorphes $(X, \psi(X))$ au-dessus de $\overline{B_{k_1}(0, hr(\widehat{x}))} \subset C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x})$ avec $Lip(\psi) \leq \gamma_0$ et $\|\psi(0)\| \leq hr(\widehat{x})$. Les B_j sont dans G_h par construction.

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

On munit G_h de la métrique suivante :

$$d(\text{graphe } \phi, \text{graphe } \psi) = \max_{t \in B_{k_1}(0, hr(\hat{x}))} \|\phi(t) - \psi(t)\|.$$

Par le théorème d'Ascoli, (G_h, d) est relativement compact (on a une famille équicontinue car $Lip(\psi) \leq \gamma_0$ et $\|\psi(t)\| \leq \|\psi(0)\| + \|\psi(t) - \psi(0)\| \leq hr(\hat{x}) + \gamma_0 \|t\| \leq hr(\hat{x})(1 + \gamma_0)$).

Une limite uniforme de fonctions holomorphes étant holomorphe, (G_h, d) est même compact. On a alors :

Lemme 2.2.6. $(B_j)_j$ est une suite de Cauchy de (G_h, d) . En particulier il existe $B \in G_h$ tel que $B_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} B$.

Preuve. Comme dans la fin de la preuve de l'existence de z , il suffit de démontrer que :

$$\forall j \geq 0, d(B_j, B_{j+1}) \leq e^{-\gamma j} d(B_0, B_1) \leq e^{-\gamma j} 3hr(\hat{x}).$$

Pour cela il est suffisant de voir que :

$$\forall j \geq 0, d(B_{j+1}, B_{j+2}) \leq e^{-\gamma} d(B_j, B_{j+1}).$$

Dans le repère $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^i(\hat{x}))E_u(\hat{f}^i(\hat{x})) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{f}^i(\hat{x}))E_s(\hat{f}^i(\hat{x}))$, on considère pour $i = 0, \dots, m-1$, l'ensemble G_h^i des graphes de fonctions holomorphes $(X, \psi(X))$ au-dessus de $B_{k_1}(0, hr(\hat{f}^i(\hat{x})))$ avec $Lip(\psi) \leq \gamma_0$ et $\|\psi(0)\| \leq hr(\hat{f}^i(\hat{x}))$ muni de la distance d_i définie par :

$$d_i(\text{graphe } \phi, \text{graphe } \psi) = \max_{t \in B_{k_1}(0, hr(\hat{f}^i(\hat{x})))} \|\phi(t) - \psi(t)\|.$$

On a $d_0 = d$. On considère aussi G_h^m l'ensemble des graphes de fonctions holomorphes $(X, \psi(X))$ au-dessus de $B_{k_1}(0, e^\gamma hr(\hat{f}^m(\hat{x})))$ avec $Lip(\psi) \leq \gamma_0$ et $\|\psi(0)\| \leq hr(\hat{f}^m(\hat{x}))$ muni de la distance d_m définie par :

$$d_m(\text{graphe } \phi, \text{graphe } \psi) = \max_{t \in B_{k_1}(0, e^\gamma hr(\hat{f}^m(\hat{x})))} \|\phi(t) - \psi(t)\|.$$

Les B_j^i ($i = 0, \dots, m$) sont dans G_h^i .

On a pour $i = 0, \dots, m-1$ et $j \geq 0$:

$$d_{i+1}(B_j^{i+1}, B_{j+1}^{i+1}) \leq e^{-2\gamma} d_i(B_j^i, B_{j+1}^i).$$

En effet $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X, Y) = (AX + R(X, Y), BY + U(X, Y))$ avec $\|A^{-1}\|^{-1} \geq e^{\chi_{m_0} - \gamma}$, $\|B\| \leq e^{\chi_{m_0+1} + \gamma}$ et $\max(\|DR(X, Y)\|, \|DU(X, Y)\|) \leq 5h$ pour $\|(X, Y)\| \leq 5hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$.
 Donc si on note $(X, \phi_1(X))$ le graphe de B_j^i , $(X, \psi_1(X))$ le graphe image par $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ qui contient B_j^{i+1} , $(X, \phi_2(X))$ le graphe de B_{j+1}^i et $(X, \psi_2(X))$ le graphe image par $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ qui contient B_{j+1}^{i+1} , on a :

$$\begin{aligned} & \|\psi_1(AX + R(X, \phi_1(X))) - \psi_2(AX + R(X, \phi_1(X)))\| \\ & \leq \|\psi_1(AX + R(X, \phi_1(X))) - \psi_2(AX + R(X, \phi_2(X)))\| \\ & \quad + \|\psi_2(AX + R(X, \phi_2(X))) - \psi_2(AX + R(X, \phi_1(X)))\|. \end{aligned}$$

Mais $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X, \phi_1(X)) = (AX + R(X, \phi_1(X)), B\phi_1(X) + U(X, \phi_1(X)))$ est un point de $(X, \psi_1(X))$ (et de même en remplaçant ϕ_1 par ϕ_2 et ψ_1 par ψ_2), d'où :

$$\begin{aligned} & \|\psi_1(AX + R(X, \phi_1(X))) - \psi_2(AX + R(X, \phi_1(X)))\| \\ & \leq \|B\phi_1(X) + U(X, \phi_1(X)) - B\phi_2(X) - U(X, \phi_2(X))\| \\ & \quad + \gamma_0 \|R(X, \phi_2(X)) - R(X, \phi_1(X))\| \\ & \leq \|B\| \|\phi_1(X) - \phi_2(X)\| + 5h \|\phi_1(X) - \phi_2(X)\| + \gamma_0 5h \|\phi_1(X) - \phi_2(X)\| \\ & \leq (e^{\chi_{m_0+1} + \gamma} + 5h(1 + \gamma_0)) \|\phi_1(X) - \phi_2(X)\| \leq e^{-2\gamma} \|\phi_1(X) - \phi_2(X)\|. \end{aligned}$$

B_j^{i+1} et B_{j+1}^{i+1} sont des sous-parties de $(X, \psi_1(X))$ et $(X, \psi_2(X))$ d'où :

$$\forall i = 0, \dots, m-1, \forall j \geq 0, d_{i+1}(B_j^{i+1}, B_{j+1}^{i+1}) \leq e^{-2\gamma} d_i(B_j^i, B_{j+1}^i).$$

On obtient ainsi :

$$d_m(B_j^m, B_{j+1}^m) \leq e^{-2\gamma m} d_0(B_j^0, B_{j+1}^0) = e^{-2\gamma m} d(B_j, B_{j+1}).$$

Il faut maintenant passer de B_j^m à B_{j+1} .

On a B_{j+1} qui est le cut-off de $C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1} \circ \tau_{f^m(x)} \circ C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))(B_j^m)$.

On reprend les notations utilisées à savoir $C = C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1} \circ \tau_{f^m(x)} \circ C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$ qui s'écrit $C(w) = g_1(w) + C_\gamma^{-1}(\widehat{x})a_m$ avec $g_1(w) = C_\gamma^{-1}(\widehat{x})C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))w$.

On a $g_1(X, Y) = (AX + CY, BY + DX)$ avec $\|A^{-1}\|^{-1} \geq 1 - \epsilon(\eta)$, $\|B\| \leq 1 + \epsilon(\eta)$, $\|C\|, \|D\| \leq \epsilon(\eta)$. En notant $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})a_m = (t_1, t_2)$, on peut écrire,

$$C(X, Y) = (t_1 + AX + CY, t_2 + BY + DX).$$

Si on reprend le calcul précédent avec C à la place de $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$, $(X, \phi_1(X))$ pour B_j^m , $(X, \phi_2(X))$ pour B_{j+1}^m et $(X, \psi_1(X)), (X, \psi_2(X))$ les images respectives de ces graphes par C , on a :

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

$$\begin{aligned}
& \|\psi_1(t_1 + AX + C\phi_1(X)) - \psi_2(t_1 + AX + C\phi_1(X))\| \\
& \leq \|\psi_1(t_1 + AX + C\phi_1(X)) - \psi_2(t_1 + AX + C\phi_2(X))\| \\
& + \|\psi_2(t_1 + AX + C\phi_2(X)) - \psi_2(t_1 + AX + C\phi_1(X))\| \\
& \leq \|B\phi_1(X) + DX - DX - B\phi_2(X) + t_2 - t_2\| + \gamma_0\|C\|\|\phi_1(X) - \phi_2(X)\| \\
& \leq (\|B\| + \gamma_0\|C\|)\|\phi_1(X) - \phi_2(X)\| \leq (1 + \epsilon(\eta) + \gamma_0\epsilon(\eta))\|\phi_1(X) - \phi_2(X)\| \\
& \leq e^\gamma\|\phi_1(X) - \phi_2(X)\| \text{ pour } \eta \ll \gamma, \gamma_0.
\end{aligned}$$

Comme B_{j+1} et B_{j+2} sont inclus dans $(X, \psi_1(X))$ et $(X, \psi_2(X))$, on obtient :

$$d(B_{j+1}, B_{j+2}) \leq e^\gamma d_m(B_j^m, B_{j+1}^m) \leq e^\gamma e^{-2\gamma m} d(B_j, B_{j+1}) \leq e^{-\gamma} d(B_j, B_{j+1}).$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. La suite $(B_j)_j$ converge donc vers $B \in G_h$.

Remarquons aussi que de la même façon, les B_j^i convergent quand $j \rightarrow +\infty$ vers $B^i \in G_h^i$ pour $i = 0, \dots, m$ (cela découle des inégalités que l'on vient de montrer).

◇

Passons maintenant à la variété stable.

Dans le repère $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_u(\hat{x}) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s(\hat{x})$, on note G_v l'ensemble des graphes de fonctions holomorphes $(\phi(Y), Y)$ au-dessus de $\overline{B_{k_2}(0, he^{\gamma r}(\hat{x}))} \subset C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s(\hat{x})$ pour lesquels $Lip(\phi) \leq \gamma_0$ et $\|\phi(0)\| \leq hr(\hat{x})$. Les A_l^0 sont dans G_v .

On munit G_v de la métrique :

$$d(\text{graphe } \phi, \text{graphe } \psi) = \max_{t \in \overline{B_{k_2}(0, he^{\gamma r}(\hat{x}))}} \|\phi(t) - \psi(t)\|.$$

Comme précédemment, par le théorème d'Ascoli, (G_v, d) est compact.

On a alors :

Lemme 2.2.7. $(A_l^0)_l$ est une suite de Cauchy de (G_v, d) . En particulier il existe $A^0 \in G_v$ avec $A_l^0 \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} A^0$.

Preuve. On va montrer que :

$$\forall l \geq 1, d(A_l^0, A_{l+1}^0) \leq e^{-\gamma} d(A_{l-1}^0, A_l^0)$$

et cela impliquera le résultat comme au lemme précédent.

Dans le repère $C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x}))E_u(\widehat{f}^i(\widehat{x})) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^i(\widehat{x}))E_s(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$, on considère, pour $i = 1, \dots, m$, l'ensemble G_v^i des graphes de fonctions holomorphes $(\phi(Y), Y)$ au-dessus de $B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})))$ avec $Lip(\phi) \leq \gamma_0$ et $\|\phi(0)\| \leq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$ muni de la distance d_i définie par :

$$d_i(\text{graphe } \phi, \text{graphe } \psi) = \max_{t \in B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})))} \|\phi(t) - \psi(t)\|.$$

Les A_l^i sont dans G_v^i par construction pour $i = 1, \dots, m$. De plus, on a (en notant $d_0 = d$)

$$\forall i = 0, \dots, m-1 \text{ et } \forall l \geq 0, d_i(A_l^i, A_{l+1}^i) \leq e^{-2\gamma} d_{i+1}(A_l^{i+1}, A_{l+1}^{i+1}).$$

En effet comme dans le lemme précédent $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X, Y) = (AX + R(X, Y), BY + U(X, Y))$ avec $\|A^{-1}\|^{-1} \geq e^{\chi_{m_0} - \gamma}$, $\|B\| \leq e^{\chi_{m_0+1} + \gamma}$ et $\max(\|DR(X, Y)\|, \|DU(X, Y)\|) \leq 5h$ pour $\|(X, Y)\| \leq 5hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$.

Donc si on note $(\phi_1(Y), Y)$ le graphe de A_l^i , $(\psi_1(Y), Y)$ son graphe image par $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ qui est inclus dans A_l^{i+1} , $(\phi_2(Y), Y)$ le graphe de A_{l+1}^i et $(\psi_2(Y), Y)$ son graphe image par $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ qui est inclus dans A_{l+1}^{i+1} , on a :

$$\begin{aligned} & \|\psi_1(BY + U(\phi_1(Y), Y)) - \psi_2(BY + U(\phi_1(Y), Y))\| \\ & \geq \|\psi_1(BY + U(\phi_1(Y), Y)) - \psi_2(BY + U(\phi_2(Y), Y))\| \\ & \quad - \|\psi_2(BY + U(\phi_2(Y), Y)) - \psi_2(BY + U(\phi_1(Y), Y))\|. \end{aligned}$$

$g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(\phi_1(Y), Y)$ est un point de $(\psi_1(Y), Y)$ (et de même en remplaçant ϕ_1 par ϕ_2 et ψ_1 par ψ_2) d'où la quantité précédente est supérieure à

$$\begin{aligned} & \|A\phi_1(Y) + R(\phi_1(Y), Y) - A\phi_2(Y) - R(\phi_2(Y), Y)\| - \gamma_0 5h \|\phi_1(Y) - \phi_2(Y)\| \\ & \geq \|A(\phi_1(Y) - \phi_2(Y))\| - (1 + \gamma_0) 5h \|\phi_1(Y) - \phi_2(Y)\| \\ & \geq (e^{\chi_{m_0} - \gamma} - 5h(1 + \gamma_0)) \|\phi_1(Y) - \phi_2(Y)\| \\ & \geq e^{2\gamma} \|\phi_1(Y) - \phi_2(Y)\| \quad \text{car } (e^{\chi_{m_0} - \gamma} - 5h(1 + \gamma_0)) \geq e^{2\gamma}. \end{aligned}$$

L'image de A_l^i par $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}$ est incluse dans A_l^{i+1} d'où :

$$\forall i = 0, \dots, m-1 \text{ et } \forall l \geq 0, d_{i+1}(A_l^{i+1}, A_{l+1}^{i+1}) \geq e^{2\gamma} d_i(A_l^i, A_{l+1}^i).$$

On obtient ainsi :

$$d_0(A_l^0, A_{l+1}^0) \leq e^{-2\gamma m} d_m(A_l^m, A_{l+1}^m).$$

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

Si $C^{-1} = C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \circ \tau_{f^m(x)}^{-1} \circ \tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})$, on a $C^{-1}(A_{l-1}^0) \supset A_l = A_l^m$ (car on fait un cut-off) d'où :

$$\begin{aligned} d_0(A_l^0, A_{l+1}^0) &= d(A_l^0, A_{l+1}^0) \leq e^{-2\gamma m} d_m(A_l^m, A_{l+1}^m) \\ &\leq e^{-2\gamma m} d_m(C^{-1}(A_{l-1}^0), C^{-1}(A_l^0)) \\ &\leq e^\gamma e^{-2\gamma m} d(A_{l-1}^0, A_l^0) \text{ (exactement comme au lemme précédent)} \\ &\leq e^{-\gamma} d(A_{l-1}^0, A_l^0). \end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. ◇

Remarquons aussi que les A_l^i convergent quand $l \rightarrow +\infty$ vers A^i dans G_v^i pour $i = 0, \dots, m$ par les inégalités que l'on a prouvées.

Rappelons que le point $z_{l,l+1}$ vérifie $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z_{l,l+1}) \in B_{l+1} \cap A_l^0$. En particulier quand $l \rightarrow +\infty$ on a $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z) \in B \cap A^0$.

B et A^0 sont des graphes de fonctions holomorphes comme limites uniformes de fonctions holomorphes.

On va maintenant utiliser ces deux ensembles pour montrer que z est hyperbolique.

Cela va se faire en deux étapes : tout d'abord nous construisons des espaces invariants $E_u(z)$ et $E_s(z)$ puis dans une deuxième étape nous estimerons les valeurs propres de $Df^m(z)$ dessus.

Construction de sous-espaces invariants :

On a $g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(\tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(A_l^0)) \subset A_l^m$ et

$A_l^m \subset C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \circ \tau_{f^m(x)}^{-1} \circ \tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(A_{l-1}^0)$ ce qui implique :

$$\tau_{f^m(x)} \circ C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x})) \circ g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(\tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(A_l^0)) \subset \tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(A_{l-1}^0).$$

En passant à la limite sur l , on obtient $f^m(\tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(A^0)) \subset \tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(A^0)$ (et $z = f^m(z) \in f^m(\tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(A^0))$).

En particulier si on note $E_s(z)$ l'espace tangent à $\tau_x \circ C_\gamma(\widehat{x})(A^0)$ en z , on a :

$$Df^m(z)(E_s(z)) \subset E_s(z).$$

On verra que si 0 est valeur propre de $Df^m(z)$, l'inclusion $Df^m(z)(E_s(z)) \subset E_s(z)$ peut être stricte.

Faisons un raisonnement analogue pour l'espace $E_u(z)$.

Dans la suite, on note $\Delta_0 = \overline{B_{k_1}(0, hr(\widehat{x}))} \times \overline{B_{k_2}(0, e^\gamma hr(\widehat{x}))}$, pour $i = 1, \dots, m-1$, $\Delta_i = \overline{B_{k_1}(0, hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})))} \times \overline{B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^i(\widehat{x})))}$ et $\Delta_m = \overline{B_{k_1}(0, e^\gamma hr(\widehat{f}^m(\widehat{x})))} \times \overline{B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^m(\widehat{x})))}$. En passant à la limite sur les B_j on a :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))(g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})}(\dots(g_{\widehat{f}(\widehat{x})}(g_{\widehat{x}}(B) \cap \Delta_1) \cap \Delta_2) \dots) \cap \Delta_m) \cap \Delta_0 = B$$

(cut-off successifs).

Le point $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z)$ est dans B , ensuite $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))$ est dans l'intérieur de Δ_{i+1} pour $i = 0, \dots, m-1$ et $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))$ est dans l'intérieur de Δ_0 .

On peut donc trouver un voisinage U de $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z)$ tel que $g_{\widehat{f}^i(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(U) \subset \Delta_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, m-1$ et $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(U) \subset \Delta_0$.

En particulier :

$$C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(U \cap B) \subset B$$

ce qui implique que $f^m(\tau_x C_\gamma(\widehat{x})(U \cap B)) \subset \tau_x C_\gamma(\widehat{x})(B)$.

Si on note $E_u(z)$ l'espace tangent à z en $\tau_x C_\gamma(\widehat{x})(B)$, on a comme précédemment :

$$Df^m(z)E_u(z) \subset E_u(z).$$

Remarque. On verra qu'ici on a une égalité, c'est-à-dire que $Df^m(z)$ est un isomorphisme de $E_u(z)$ dans lui-même.

Estimation des valeurs propres de $Df^m(z)$:

Soit v un vecteur tangent à A^0 au point $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z)$ avec $v \neq 0$.

On note $g = g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}$ et on va évaluer $\|Dg(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))v\|$.

Supposons dans un premier temps que cette quantité est non nulle. On a :

$$\begin{aligned} & \|Dg(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))v\| \\ &= \|Dg_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})}(g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))D(g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z)))(v)\| \\ &= \frac{\|Dg_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})}(g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))D(g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z)))(v)\|}{\|D(g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z)))(v)\|} \\ & \times \|D(g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(C_\gamma^{-1}(\widehat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z)))(v)\|, \end{aligned}$$

puis on recommence ce que l'on vient de faire avec $g_{\widehat{f}^{m-2}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}$ au lieu de $g_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}$. Après m fois on a :

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

$$\|Dg(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))v\| = \frac{\|Dg_{\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})}(Z_{m-1})(U_{m-1})\|}{\|U_{m-1}\|} \times \dots \times \frac{\|Dg_{\widehat{x}}(Z_0)(U_0)\|}{\|U_0\|} \|U_0\| \quad (2.1)$$

avec $Z_i = g_{\widehat{f}^{i-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}} C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z)$ et $U_i = D(g_{\widehat{f}^{i-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}})(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)$ pour $i = 0, \dots, m-1$.

Maintenant on a :

$$g_{\widehat{f}^{i-1}(\widehat{x})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}}(A^0) \subset A^i = \lim_{l \rightarrow +\infty} A_l^i \text{ par construction.}$$

Cela signifie que U_i est tangent à A^i au point Z_i .

A^i est un graphe de la forme $(\phi^i(Y), Y)$ avec $\|Y\| \leq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$ pour $i = 1, \dots, m$ et $\|Y\| \leq e^\gamma hr(\widehat{x})$ pour $i = 0$. On a aussi $Lip(\phi^i) \leq \gamma_0$ pour $i = 0, \dots, m$. Le vecteur U_i est donc de la forme $U_i = (D\phi^i(Y)\alpha_i, \alpha_i)$.

On a alors $\|Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)(U_i)\| \leq e^{-2\gamma}\|U_i\|$. En effet, pour $\|(X, Y)\| \leq 5hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$:

$$Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X, Y)(w_1, w_2) = (Aw_1 + DR(X, Y)(w_1, w_2), Bw_2 + DU(X, Y)(w_1, w_2))$$

d'où :

$$\|Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)(w_1, w_2)\| \leq \|A\|\|w_1\| + 10h\|(w_1, w_2)\| + \|B\|\|w_2\|$$

avec $(w_1, w_2) = U_i$. Mais $\|w_1\| = \|D\phi^i(Y)\alpha_i\| \leq \gamma_0\|\alpha_i\| = \gamma_0\|w_2\|$ et donc :

$$\begin{aligned} \|Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)(w_1, w_2)\| &\leq (\gamma_0\|A\| + 10h(1 + \gamma_0) + \|B\|)\|w_2\| \\ &\leq (\gamma_0 e^{X_1 + \gamma} + 10h(1 + \gamma_0) + e^{X_{m_0+1} + \gamma})\|w_2\| \leq e^{-3\gamma}\|w_2\| \end{aligned}$$

(voir la démonstration du lemme 2.2.5 pour la dernière inégalité).

Cette dernière quantité est bien plus petite que $e^{-2\gamma}\|U_i\|$ car

$$\|U_i\| \geq \|w_2\| - \|w_1\| \geq (1 - \gamma_0)\|w_2\| \geq e^{-\gamma}\|w_2\|.$$

Si on reprend l'équation (2.1), on obtient ainsi

$$\|Dg(C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z))v\| \leq e^{-2\gamma m}\|v\|.$$

C'est aussi vrai si le membre de gauche est nul.

Considérons encore $C = C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$. On a :

$$\begin{aligned}
 & \|D(C \circ g)(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)\| \\
 & \leq \|DC(g \circ C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z))\| \|Dg(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)\| \\
 & \leq \|C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x}))\| e^{-2\gamma m} \|v\| \\
 & \leq e^{\gamma-2\gamma m} \|v\| \quad \text{car } \eta \ll \gamma \\
 & \leq e^{-\gamma} \|v\|.
 \end{aligned}$$

Maintenant on va itérer cette inégalité. Pour cela, on remarque que :

$$(C \circ g)(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z)) = C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1} \circ f^m(z) = C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z)$$

et $(C \circ g)(A^0) \subset C(A^m) \subset A^0$.

On peut donc recommencer et par une formule du même type que celle de l'équation (2.1), on a pour $k \geq 1$:

$$\|D(\underbrace{C \circ g \circ \dots \circ C \circ g}_{k \text{ fois}})(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z))(v)\| \leq e^{-\gamma k} \|v\|.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
 & D(C \circ g \circ \dots \circ C \circ g)(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z))v \\
 & = D(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1} \circ f^{mk} \circ \tau_x \circ C_\gamma(\hat{x}))(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z))v \\
 & = D(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1})(f^{mk}(z)) \circ Df^{mk}(z) \circ D(\tau_x \circ C_\gamma(\hat{x}))(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z))v,
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 & \|D(C \circ g \circ \dots \circ C \circ g)(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z))v\| \\
 & \geq \|D(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1})(z)^{-1}\|^{-1} \times \|Df^{mk}(z) \circ D(\tau_x \circ C_\gamma(\hat{x}))(C_\gamma^{-1}(\hat{x}) \circ \tau_x^{-1}(z))v\|.
 \end{aligned}$$

Soit $w \in E_s(z)$. Par définition de $E_s(z)$, w s'écrit $w = D(\tau_x \circ C_\gamma(\hat{x}))(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)$ avec v tangent à A^0 en $C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)$. D'où :

$$\|Df^{mk}(z)w\| \leq \|D(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1})(z)^{-1}\| e^{-\gamma k} \|v\| \leq C(X, r_0) e^{-\gamma k} \|w\|.$$

Donc $Df^m(z)$ est contractante sur $E_s(z)$ et ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à $e^{-\gamma}$.

Passons à $E_u(z)$. Soit v un vecteur tangent à B au point $C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)$ avec $v \neq 0$. Notons $Z_i = g_{\hat{f}^{i-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}} C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)$ et $U_i = D(g_{\hat{f}^{i-1}(\hat{x})} \circ \dots \circ g_{\hat{x}})(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)$ pour $i = 1, \dots, m-1$.

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

On commence par estimer $\|Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)U_i\|$.

Si U est un petit voisinage de $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}(z)$ on a :

$$g_{\widehat{f}^{i-1}(\widehat{x})} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x}}(U \cap B) \subset B^i = \lim_{j \rightarrow +\infty} B_j^i \text{ pour } i = 0, \dots, m.$$

En particulier U_i est tangent à B^i en Z_i .

Comme B^i est un graphe du type $(X, \psi^i(X))$ avec $\|X\| \leq hr(\widehat{f}^i(\widehat{x}))$ pour $i = 0, \dots, m-1$, $\|X\| \leq e^\gamma hr(\widehat{f}^m(\widehat{x}))$ pour $i = m$ et que $Lip(\psi^i) \leq \gamma_0$ pour $i = 0, \dots, m$, le vecteur U_i est de la forme $U_i = (\alpha_i, D\psi^i(X)\alpha_i)$.

On a alors :

$$\|Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)U_i\| \geq e^{2\gamma}\|U_i\|.$$

En effet :

$$Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(X, Y)(w_1, w_2) = (Aw_1 + DR(X, Y)(w_1, w_2), Bw_2 + DU(X, Y)(w_1, w_2)),$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \|Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)(w_1, w_2)\| \\ & \geq \|Aw_1\| - \|DR(Z_i)(w_1, w_2)\| - \|B\|\|w_2\| - \|DU(Z_i)(w_1, w_2)\| \\ & \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|w_1\| - 5h\|(w_1, w_2)\| - \|B\|\|w_2\| - 5h\|(w_1, w_2)\|. \end{aligned}$$

Or $U_i = (\alpha_i, D\psi^i(X)\alpha_i) = (w_1, w_2)$ donc $\|w_2\| \leq \gamma_0\|\alpha_i\| = \gamma_0\|w_1\|$, et ainsi

$$\begin{aligned} & \|Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)(w_1, w_2)\| \\ & \geq e^{\chi_{m_0} - \gamma}\|w_1\| - 5h(1 + \gamma_0)\|w_1\| - e^{\chi_{m_0+1} + \gamma}\gamma_0\|w_1\| - 5h(1 + \gamma_0)\|w_1\| \\ & = (e^{\chi_{m_0} - \gamma} - 10h(1 + \gamma_0) - \gamma_0 e^{\chi_{m_0+1} + \gamma})\|w_1\|. \end{aligned}$$

Comme $\|(w_1, w_2)\| \leq (1 + \gamma_0)\|w_1\|$ on obtient :

$$\|Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)U_i\| \geq \frac{e^{\chi_{m_0} - \gamma} - 10h(1 + \gamma_0) - \gamma_0 e^{\chi_{m_0+1} + \gamma}}{1 + \gamma_0} \times \|U_i\| \geq e^{2\gamma}\|U_i\|$$

(voir la preuve du lemme 2.2.4 pour la dernière inégalité).

Remarquons que cela implique aussi que $Dg_{\widehat{f}^i(\widehat{x})}(Z_i)(U_i) = U_{i+1}$ est non nul si $U_i \neq 0$.

En particulier, comme $U_0 = v \neq 0$, on a $U_i \neq 0$ pour $i = 0, \dots, m-1$.
 Maintenant, si on utilise la formule de l'équation (2.1), on a :

$$\|Dg(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))v\| \geq e^{2\gamma m}\|v\|,$$

et si on compose par $C = C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}\tau_{f^m(x)}C_\gamma(\hat{f}^m(\hat{x}))$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|D(C \circ g)(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))v\| \\ &= \|DC(g \circ C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)) \circ Dg(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))v\| \\ &\geq \|DC(g \circ C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))^{-1}\|^{-1} e^{2\gamma m}\|v\| \\ &= \|C_\gamma^{-1}(\hat{f}^m(\hat{x})) \circ C_\gamma(\hat{x})\|^{-1} e^{2\gamma m}\|v\| \geq e^{-\gamma} e^{2\gamma m}\|v\| \quad \text{si } \eta \ll \gamma \\ &\geq e^\gamma\|v\|. \end{aligned}$$

On va itérer cette inégalité.

Pour cela, on remarque $C \circ g(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)) = C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)$ et si W_1 est un voisinage suffisamment petit de $C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)$, on a $C \circ g(B \cap W_1) \subset B \cap U$.

On peut donc recommencer ce que l'on vient de faire. En itérant k fois le procédé (quitte à prendre W_k à chaque fois), on a par une formule du même type que celle de l'équation (2.1) :

$$\|D(C \circ g \circ \dots \circ C \circ g)(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)\| \geq e^{\gamma k}\|v\|.$$

Ensuite comme précédemment :

$$\begin{aligned} & D(C \circ g \circ \dots \circ C \circ g)(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v) \\ &= D(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)) \circ Df^{mk}(z)(D(\tau_x \circ C_\gamma(\hat{x}))(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \|D(C \circ g \circ \dots \circ C \circ g)(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)\| \\ &\leq \|D(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))\| \times \|Df^{mk}(z)(D(\tau_x \circ C_\gamma(\hat{x}))(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v))\|. \end{aligned}$$

Soit $w \in E_u(z)$. Par définition $w = D(\tau_x \circ C_\gamma(\hat{x}))(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))(v)$ avec v tangent à B en $C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z)$. Donc $e^{\gamma k}\|v\| \leq \|D(C_\gamma^{-1}(\hat{x})\tau_x^{-1}(z))\|\|Df^{mk}(z)w\|$ ou encore $e^{\gamma k}\|w\| \leq C(X, r_0)\|Df^{mk}(z)w\|$. En particulier, $Df^m(z)$ est dilatante sur $E_u(z)$ et ses valeurs propres sont de module supérieur ou égal à e^γ .

Cela termine la démonstration du Closing Lemma.

Faisons deux remarques supplémentaires :

2.2. PREUVE DU CLOSING LEMMA

1. Tout d'abord comme $Df^m(z)|_{E_u(z)}$ est dilatante, $Df^m(z)$ est un isomorphisme de $E_u(z)$ dans lui-même. On a donc $Df^m(z)E_u(z) = E_u(z)$.
2. L'inclusion $Df^m(z)E_s(z) \subset E_s(z)$ peut être stricte. En effet $\text{Ker}Df^m(z) \subset E_s(z)$ (pour le voir faire une décomposition de $v \in \text{Ker}Df^m(z)$ dans une base composée de vecteurs de $E_s(z)$ et $E_u(z)$).

CHAPITRE 2. LE CLOSING LEMMA

Chapitre 3

Approximation par des Bernoulli

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème 1. Nous allons pour cela suivre la méthode d'A. Katok et L. Mendoza (voir [13]). Comme dans le Closing Lemma, ce qui change c'est que f n'est pas inversible et possède un ensemble d'indétermination.

On garde les γ , δ et ϵ_0 du chapitre 2. Soit $\rho > 0$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_{k_0} \in C^0(X, \mathbb{R})$.

On fixe $0 < r < 1$ petit de sorte que $0 < r < \rho$ et $\frac{h_\mu(f)}{1+r} - 3r > h_\mu(f) - \rho$.

On choisit ensuite $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $d(x, y) < \epsilon$ implique $|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \frac{r}{2}$ pour $i = 1, \dots, k_0$. C'est possible car les fonctions φ_i sont uniformément continues (X est compact).

Par le théorème de Brin-Katok, si on note

$$B_m(x, \epsilon) = \{y \in X, d(f^p(x), f^p(y)) < \epsilon \text{ pour } p = 0, \dots, m-1\},$$

on a

$$h_\mu(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{m \rightarrow +\infty} -\frac{1}{m} \log \mu(B_m(x, \epsilon)) \text{ pour } \mu - \text{presque tout } x.$$

On pose :

$$\Gamma_{\epsilon, m_0} = \{x, \forall m \geq m_0 \mu(B_m(x, \epsilon)) \leq e^{-h_\mu(f)m+rm}\}.$$

Si ϵ est assez petit, on a :

$$1 - \frac{\delta}{2} \leq \mu \left(\left\{ x, \liminf_{m \rightarrow +\infty} -\frac{1}{m} \log \mu(B_m(x, \epsilon)) \geq h_\mu(f) - \frac{r}{2} \right\} \right) \leq \mu(\cup_{m_0} \Gamma_{\epsilon, m_0})$$

donc $\mu(\Gamma_{\epsilon, m_0}) \geq 1 - \delta$ si m_0 est assez grand.

Dans la suite on considère le γ_0 (qui était petit par rapport à γ), le h et le η du Closing Lemma et de sa preuve. On mettra des conditions un peu plus fortes sur ces

quantités que l'on aurait pu supposer dans la démonstration du Closing Lemma si on voulait.

Voici maintenant le plan de la preuve :

Dans un premier temps, on va construire $\hat{y} \in \Lambda_\delta$ avec beaucoup de récurrence autour de lui. Ensuite nous utiliserons ce point pour fabriquer le codage et vérifier les trois points du théorème.

3.1 Construction du $\hat{y} \in \Lambda_\delta$ avec de la récurrence

Les $\{B(\hat{y}, \eta), \hat{y} \in \Lambda_\delta\}$ forment un recouvrement de Λ_δ qui est compact : on peut donc trouver un sous-recouvrement fini $\cup_{i=1}^t B(\hat{y}_i, \eta)$.

Soit ξ une partition finie de l'extension naturelle \hat{X} , plus fine que $(\Lambda_\delta, \hat{X} \setminus \Lambda_\delta)$ et telle que le diamètre des éléments de ξ soit plus petit que la constante de Lebesgue du recouvrement de Λ_δ par $\cup_{i=1}^t B(\hat{y}_i, \eta)$.

On note :

$$\Lambda_{\delta, m'_0} = \left\{ \hat{x} \in \Lambda_\delta, \forall m \geq m'_0 \text{ on a } \hat{f}^q(\hat{x}) \in \xi(\hat{x}) \text{ pour un } q \in [m, m(1+r)] \text{ et } \forall i = 1, \dots, k_0 \text{ on a } \left| \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \varphi_i \circ \pi(\hat{f}^l(\hat{x})) - \int \varphi_i d\mu \right| < \frac{r}{2} \right\}.$$

Lemme 3.1.1. *Pour m'_0 assez grand, on a $\hat{\mu}(\Lambda_{\delta, m'_0}) \geq 1 - 2\delta$.*

Preuve. Les fonctions $\varphi_i \circ \pi$ sont continues sur \hat{X} , donc par le théorème de Birkhoff, on a sur un ensemble de masse 1 pour $\hat{\mu}$:

$$\frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \varphi_i \circ \pi(\hat{f}^l(\hat{x})) \xrightarrow{m} \int \varphi_i \circ \pi d\hat{\mu}(\hat{x}) = \int \varphi_i d\mu.$$

Cela implique que

$$\bigcup_{m_1} \left\{ \hat{x}, \forall m \geq m_1, \forall i = 1, \dots, k_0 \text{ on a } \left| \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \varphi_i \circ \pi(\hat{f}^l(\hat{x})) - \int \varphi_i d\mu \right| < \frac{r}{2} \right\}$$

est de mesure 1 pour $\hat{\mu}$.

Si m_1 est assez grand on a donc :

3.1. CONSTRUCTION DU $\widehat{Y} \in \Lambda_\delta$ AVEC DE LA RÉCURRENCE

$$\widehat{\mu} \left(\left\{ \widehat{x}, \forall m \geq m_1, \forall i = 1, \dots, k_0 \text{ on a } \left| \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \varphi_i \circ \pi(\widehat{f}^l(\widehat{x})) - \int \varphi_i d\mu \right| < \frac{r}{2} \right\} \right) \geq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Soit maintenant $C \in \xi$ avec $C \subset \Lambda_\delta$. On suppose que $\widehat{\mu}(C) > 0$.

Si on applique le théorème de Birkhoff à la fonction $\widehat{x} \rightarrow \chi_C(\widehat{x})$ (qui vaut 1 sur C et 0 ailleurs), on a :

$$\frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \chi_C(\widehat{f}^l(\widehat{x})) \xrightarrow{m} \int \chi_C(\widehat{x}) d\widehat{\mu}(\widehat{x}) = \widehat{\mu}(C)$$

sur un ensemble de masse 1 pour $\widehat{\mu}$.

Cela signifie en particulier que :

$$\bigcup_{m_2} \left\{ \widehat{x}, \forall m \geq m_2 \text{ on a } \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \chi_C(\widehat{f}^l(\widehat{x})) < \widehat{\mu}(C) \left(1 + \frac{r}{3}\right) \text{ et } \frac{1}{[m(1+r)] + 1} \sum_{l=0}^{[m(1+r)]} \chi_C(\widehat{f}^l(\widehat{x})) > \widehat{\mu}(C) \left(1 - \frac{r}{3}\right) \right\}$$

est de mesure 1 pour $\widehat{\mu}$.

Si $m_2 = m_2(C)$ est assez grand, on a donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\Gamma(C)) &= \widehat{\mu} \left(\left\{ \widehat{x} \in C, \forall m \geq m_2 \text{ on a } \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \chi_C(\widehat{f}^l(\widehat{x})) < \widehat{\mu}(C) \left(1 + \frac{r}{3}\right) \text{ et } \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{[m(1+r)] + 1} \sum_{l=0}^{[m(1+r)]} \chi_C(\widehat{f}^l(\widehat{x})) > \widehat{\mu}(C) \left(1 - \frac{r}{3}\right) \right\} \right) \geq \widehat{\mu}(C) - \frac{\delta}{2\text{card}\xi}. \end{aligned}$$

Si \widehat{x} est dans $\Gamma(C)$ et si $\widehat{f}^l(\widehat{x}) \notin C$ pour $l = m, \dots, [m(1+r)]$ (avec $m \geq m_2$), on a :

$$(1+r) \left(1 - \frac{r}{3}\right) \widehat{\mu}(C) < \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{[m(1+r)]} \chi_C(\widehat{f}^l(\widehat{x})) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \chi_C(\widehat{f}^l(\widehat{x})) < \widehat{\mu}(C) \left(1 + \frac{r}{3}\right),$$

d'où :

$$(1+r)\left(1-\frac{r}{3}\right) < 1 + \frac{r}{3} \implies \frac{r}{3} < \frac{r^2}{3}, \text{ ce qui est absurde.}$$

Cela signifie que pour $\hat{x} \in \Gamma(C)$ on a : $\forall m \geq m_2(C)$, $\hat{x} \in C$ et il existe $q \in [m, m(1+r)]$ avec $\hat{f}^q(\hat{x}) \in C = \xi(\hat{x})$. Soit

$$m_2 = \max_{C \in \xi, C \subset \Lambda_\delta, \hat{\mu}(C) > 0} m_2(C).$$

L'ensemble $\{\hat{x} \in \Lambda_\delta, \forall m \geq m_2 \text{ il existe } q \in [m, m(1+r)] \text{ avec } \hat{f}^q(\hat{x}) \in \xi(\hat{x})\}$ contient donc $\bigcup_{C \in \xi, C \subset \Lambda_\delta, \hat{\mu}(C) > 0} \Gamma(C)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\{\hat{x} \in \Lambda_\delta, \forall m \geq m_2 \text{ il existe } q \in [m, m(1+r)] \text{ avec } \hat{f}^q(\hat{x}) \in \xi(\hat{x})\}) \\ \geq \hat{\mu}(\Lambda_\delta) - \frac{\delta}{2} \geq 1 - \frac{3\delta}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi si $m'_0 = \max(m_1, m_2)$, on a :

$$\hat{\mu}(\Lambda_{\delta, m'_0}) \geq 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{3\delta}{2} = 1 - 2\delta$$

car Λ_{δ, m'_0} contient

$$\left\{ \hat{x}, \forall m \geq m_1, \forall i = 1, \dots, k_0 \text{ on a } \left| \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \varphi_i \circ \pi(\hat{f}^l(\hat{x})) - \int \varphi_i d\mu \right| < \frac{r}{2} \right\}$$

intersecté avec

$$\left\{ \hat{x} \in \Lambda_\delta, \forall m \geq m_2 \text{ il existe } q \in [m, m(1+r)] \text{ avec } \hat{f}^q(\hat{x}) \in \xi(\hat{x}) \right\}.$$

Cela démontre le lemme. ◇

Maintenant on a $\mu(\pi(\Lambda_{\delta, m'_0}) \cap \Gamma_{\epsilon, m_0}) \geq 1 - 3\delta$. Pour $m \geq \max(m_0, m'_0)$, soit E_m un ensemble (m, ϵ) -séparé de cardinal maximal dans $\pi(\Lambda_{\delta, m'_0}) \cap \Gamma_{\epsilon, m_0}$.

Si $x \in E_m$, on a $\mu(B_m(x, \epsilon)) \leq e^{-h_\mu(f)m+rm}$. Le cardinal de E_m est donc supérieur à $(1 - 3\delta)e^{h_\mu(f)m-rm}$.

Pour $q = m, \dots, [(1+r)m]$, on pose $V_q = \{x \in E_m, \hat{f}^q(\hat{x}) \in \xi(\hat{x})\}$ où \hat{x} est un point de Λ_{δ, m'_0} qui se projette sur x .

Soit n qui maximise le cardinal de V_q . On a :

$$\text{card } V_n \geq \frac{(1 - 3\delta)e^{h_\mu(f)m - rm}}{rm + 1} \geq (1 - 3\delta)e^{h_\mu(f)m - 2rm} \geq \frac{1}{2}e^{h_\mu(f)m - 2rm}.$$

Soit $x \in V_n$. On a $\widehat{f}^n(\widehat{x}) \in \xi(\widehat{x})$ et alors $d(\widehat{x}, \widehat{f}^n(\widehat{x})) \leq \text{diam}(\xi(\widehat{x}))$ qui est lui-même plus petit que la constante de Lebesgue du recouvrement de Λ_δ par $\cup_{i=1}^t B(\widehat{y}_i, \eta)$.

En particulier il existe $i \in \{1, \dots, t\}$ tel que \widehat{x} et $\widehat{f}^n(\widehat{x})$ sont dans $B(\widehat{y}_i, \eta)$.

Soit i qui maximise le nombre de $x \in V_n$ qui vérifient cette propriété. On notera $\widehat{y} = \widehat{y}_i$, $y = \pi(\widehat{y})$, et N le nombre de $x \in V_n$ avec \widehat{x} et $\widehat{f}^n(\widehat{x})$ dans $B(\widehat{y}, \eta)$. On a $N \geq \frac{e^{h_\mu(f)m - 2rm}}{2t}$.

C'est le point $\widehat{y} \in \Lambda_\delta$ que l'on voulait construire.

Remarquons que $\frac{e^{h_\mu(f)m - 2rm}}{2t} \geq e^{h_\mu(f)m - 3rm}$ si on prend m grand et que ce nombre est supérieur à $e^{h_\mu(f)\frac{n}{1+r} - 3rn}$ car $m \leq n \leq (1+r)m$.

On a donc $N \geq e^{h_\mu(f)n - \rho n}$ grâce à l'hypothèse faite sur r au début. En particulier, quitte à réduire le nombre de points, on prendra dans la suite $N = e^{h_\mu(f)n - \rho n}$ et nous noterons x_1, \dots, x_N les x de V_n tels que \widehat{x} et $\widehat{f}^n(\widehat{x})$ sont dans $B(\widehat{y}, \eta)$.

Par construction x_1, \dots, x_N sont dans $\pi(\Lambda_{\delta, m'_0})$ et nous appellerons $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_N$ des points de Λ_{δ, m'_0} qui se projettent sur eux (et qui vérifient $\widehat{x}_i, \widehat{f}^n(\widehat{x}_i)$ dans $B(\widehat{y}, \eta)$).

Nous allons maintenant utiliser ces points pour construire le codage.

3.2 Construction du codage

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Pour $\eta > 0$ petit, on a :*

pour tout $\widehat{x}, \widehat{y} \in \Lambda_\delta$ avec $d(\widehat{x}, \widehat{y}) < \eta$, si $(X, \psi(X))$ est un graphe au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})E_u(\widehat{y})$ (dans le repère $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})E_u(\widehat{y}) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{y})E_s(\widehat{y})$) pour $\|X\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}}r(\widehat{y})h$ (respectivement $\|X\| \leq e^\gamma r(\widehat{y})h$) avec $\|\psi(0)\| \leq e^{-\frac{\gamma}{2}}r(\widehat{y})h$ (respectivement $\|\psi(0)\| \leq e^{-\gamma}r(\widehat{y})h$) et $\text{Lip}(\psi) \leq \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}}$ (respectivement $\text{Lip}(\psi) \leq \gamma_0 e^{-\gamma}$) alors l'image de ce graphe par $C = C_\gamma^{-1}(\widehat{x})\tau_x^{-1}\tau_y C_\gamma(\widehat{y})$ est un graphe $(X, \phi(X))$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\widehat{x})E_u(\widehat{x})$ pour au moins $\|X\| \leq r(\widehat{x})h$ (respectivement $\|X\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}}r(\widehat{x})h$) avec $\|\phi(0)\| \leq r(\widehat{x})h$ (respectivement $\|\phi(0)\| \leq e^{-\frac{3\gamma}{4}}r(\widehat{x})h$) et $\text{Lip}(\phi) \leq \gamma_0$ (respectivement $\text{Lip}(\phi) \leq \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}}$).

Preuve. C'est exactement ce que l'on a fait dans la démonstration du Closing Lemma (voir après le lemme 2.2.1). Il suffit de remplacer $\widehat{f}^m(\widehat{x})$ par \widehat{y} et de mettre des conditions un peu plus fortes sur les γ_0 , h et η . Ces conditions pouvaient être supposées dans le Closing Lemma si on voulait. \diamond

Remarque. On a un lemme du même type en remplaçant $E_u(\hat{x})$ et $E_u(\hat{y})$ respectivement par $E_s(\hat{x})$ et $E_s(\hat{y})$ et des graphes $(\phi(Y), Y)$ au lieu de $(X, \psi(X))$.

Le codage va être construit à partir de graphes provenant de transformées de graphes en arrière et en avant.

Commençons par ceux construits par des tirés en arrière.

On se place dans le repère $C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_u(\hat{y}) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_s(\hat{y})$ pour le \hat{y} construit dans le paragraphe précédent.

Soit \mathcal{A}^0 l'ensemble constitué de l'union des graphes d'applications holomorphes $(\psi(Y), Y)$ au-dessus de $C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_s(\hat{y})$ avec $\|Y\| \leq hr(\hat{y})e^{\frac{\gamma}{2}}$, $\psi(Y) = \text{constante}$, $\|\psi(0)\| \leq hr(\hat{y})e^{-\frac{\gamma}{2}}$ et $Lip(\psi) = 0 \leq \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}}$.

L'image de ces graphes par $C_i = C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}_i))\tau_{f^n(x_i)}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})$ (pour $i = 1, \dots, N$) sont des graphes $(\phi(Y), Y)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}_i))E_s(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ pour au moins $\|Y\| \leq hr(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ avec $\|\phi(0)\| \leq hr(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ et $Lip(\phi) \leq \gamma_0$ grâce à la remarque précédente car $d(\hat{f}^n(\hat{x}_i), \hat{y}) < \eta$ et $\hat{f}^n(x_i) \in \xi(\hat{x}_i) \subset \Lambda_\delta$, $\hat{y} \in \Lambda_\delta$.

Ensuite on tire en arrière ces graphes $(\phi(Y), Y)$ par $g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}, \dots, g_{\hat{x}_i}$ (voir le lemme 2.2.2). On obtient à la fin des graphes $(\phi_0(Y), Y)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)E_s(\hat{x}_i)$ pour au-moins $\|Y\| \leq e^\gamma hr(\hat{x}_i)$, $\|\phi_0(0)\| \leq e^{-\gamma} hr(\hat{x}_i)$ et $Lip(\phi_0) \leq e^{-\gamma}\gamma_0$.

Maintenant, on remet ces graphes dans le repère initial $C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_u(\hat{y}) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_s(\hat{y})$ c'est-à-dire que l'on prend leur image par $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}\tau_{x_i} C_\gamma(\hat{x}_i)$.

Comme $d(\hat{x}_i, \hat{y}) < \eta$, la remarque précédente implique que l'on obtient des graphes $(\psi_0(Y), Y)$ pour au moins $\|Y\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})$ avec $\|\psi_0(0)\| \leq e^{-\frac{3\gamma}{4}} hr(\hat{y})$ et $Lip(\psi_0) \leq e^{-\frac{\gamma}{2}}\gamma_0$.

Ce sont exactement les mêmes conditions qu'au départ (c'est-à-dire que l'on pourra recommencer le procédé avec un \hat{x}_j pas nécessairement égal au \hat{x}_i), sauf qu'en plus on a $\|\psi_0(0)\| \leq e^{-\frac{3\gamma}{4}} hr(\hat{y})$.

Grâce à cette marge, si on prend $\|Y\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})$ on a (quitte à supposer que γ_0 est suffisamment petit pour que $e^{-\frac{3\gamma}{4}} + \gamma_0 < e^{-\frac{\gamma}{2}}$) :

$$\|\psi_0(Y)\| \leq \|\psi_0(0)\| + \|\psi_0(Y) - \psi_0(0)\| \leq e^{-\frac{3\gamma}{4}} hr(\hat{y}) + \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}} \|Y\| < hr(\hat{y})e^{-\frac{\gamma}{2}}$$

c'est-à-dire que les graphes $(\psi_0(Y), Y)$ ne sortent de $B_{k_1}(0, e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})) \times B_{k_2}(0, e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y}))$ que par le bord $B_{k_1}(0, e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})) \times \partial B_{k_2}(0, e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y}))$. Ce sont des graphes verticaux.

Notons $\mathcal{A}_1^0, \dots, \mathcal{A}_N^0$ les ensembles constitués de l'union de ces graphes obtenus pour $i = 1, \dots, N$. On a donc $\mathcal{A}_i^0 \subset \mathcal{A}^0$. On notera aussi \mathcal{A}_i l'image de \mathcal{A}_i^0 par $\tau_y \circ C_\gamma(\hat{y})$.

On a alors :

3.2. CONSTRUCTION DU CODAGE

Lemme 3.2.2. *Les ensembles $\overline{\mathcal{A}}_i$ sont disjoints pour $i = 1, \dots, N$.*

Preuve. Soit $z \in \mathcal{A}_i$. Pour $l = 0, \dots, n-1$ on a :

$$\begin{aligned} & \|g_{\widehat{f}^l(\widehat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}_i} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}(z)\| \\ & \leq \|g_{\widehat{f}^l(\widehat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}_i} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}(z) - g_{\widehat{f}^l(\widehat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}_i}(y)\| + \|g_{\widehat{f}^l(\widehat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}_i}(y)\| \end{aligned}$$

où y est le point d'intersection entre le graphe de la forme $(\phi_0(Y), Y)$ précédent qui contient $C_\gamma^{-1}(\widehat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}(z)$ et le plan complexe horizontal $(X, 0)$ pour $\|X\| \leq hr(\widehat{x}_i)$.

On obtient donc (voir le paragraphe 2.2.2) :

$$\|g_{\widehat{f}^l(\widehat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}_i} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}(z)\| \leq 4h \max(e^{-2\gamma l}, e^{-2\gamma(n-l)}).$$

Par continuité cette inégalité est encore vraie si $z \in \overline{\mathcal{A}}_i$.

Ainsi, toujours par le paragraphe 2.2.2,

$$d(f^l(z), f^l(x_i)) \leq \frac{C(X)e^{2\gamma}4h}{r_0} \max(e^{-\gamma l}, e^{-\gamma(n-l)})$$

car $\widehat{f}^n(\widehat{x}_i) \in \xi(\widehat{x}_i) \subset \Lambda_\delta$.

Si h est assez petit, on a donc :

$$d(f^l(z), f^l(x_i)) \leq \frac{\epsilon}{4} \text{ pour } l = 0, \dots, n.$$

Comme les points x_i sont (m, ϵ) -séparés, ils sont (n, ϵ) -séparés car $n \geq m$. En particulier si $i \neq j$ il existe l compris entre 0 et n avec $d(f^l(x_i), f^l(x_j)) \geq \epsilon$.

Si on avait un point $z \in \overline{\mathcal{A}}_i \cap \overline{\mathcal{A}}_j$ on aurait alors :

$$\epsilon \leq d(f^l(x_i), f^l(x_j)) \leq d(f^l(x_i), f^l(z)) + d(f^l(z), f^l(x_j)) \leq 2 \times \frac{\epsilon}{4}$$

ce qui est absurde.

Les ensembles $\overline{\mathcal{A}}_i$ sont donc bien disjoints et cela démontre le lemme. \diamond

Les graphes qui constituent l'ensemble \mathcal{A}_j^0 vérifient les mêmes conditions qu'au départ. On peut donc recommencer le processus par rapport à \widehat{x}_i , c'est-à-dire que l'on passe ces graphes dans le repère $C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^n(\widehat{x}_i))E_u(\widehat{f}^n(\widehat{x}_i)) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^n(\widehat{x}_i))E_s(\widehat{f}^n(\widehat{x}_i))$ puis on tire en arrière par $g_{\widehat{f}^{n-1}(\widehat{x}_i)}, \dots, g_{\widehat{x}_i}$ et on repasse dans le repère initial, à savoir $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})E_u(\widehat{y}) \oplus C_\gamma^{-1}(\widehat{y})E_s(\widehat{y})$.

On obtient ainsi, en faisant varier i et j , N^2 ensembles \mathcal{A}_{ij}^0 (avec le même type de notation que précédemment).

On a alors :

Lemme 3.2.3. $\mathcal{A}_{ij}^0 \subset \mathcal{A}_i^0$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, N$.

Preuve. Soit $z \in \mathcal{A}_{ij}^0$. Par construction z appartient à un graphe $(\psi_0(Y), Y)$ au-dessus de $B_{k_2}(0, hr(\hat{y})e^{\frac{\gamma}{2}}) \subset C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_s(\hat{y})$.

Soit B un plan complexe parallèle à $C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_u(\hat{y})$ et qui passe par z .

B est un graphe $(X, \phi(X))$ au-dessus de $B_{k_1}(0, hr(\hat{y})e^{\frac{5\gamma}{2}})$ avec ϕ constante (donc $Lip(\phi) = 0$) et $\|\phi(0)\| \leq hr(\hat{y})e^{\frac{\gamma}{2}}$.

Par le lemme 3.2.1 (en remplaçant h par $e^{\frac{3\gamma}{2}}h$) l'image de B par $C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})$ est un graphe B_0 de la forme $(X, \phi_0(X))$ au moins pour $\|X\| \leq e^\gamma hr(\hat{x}_i)$ avec $\|\phi_0(0)\| \leq e^{\frac{3\gamma}{4}} hr(\hat{x}_i)$ et $Lip(\phi_0) \leq \gamma_0$.

Maintenant on peut pousser en avant ce graphe par $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$ comme dans le lemme 2.2.1 avec $e^\gamma h$ à la place de h . A chaque étape on fait aussi le cut-off (pour $\|X\| \leq he^\gamma r(\hat{f}^l(\hat{x}_i))$).

A la fin on obtient un graphe B_n de la forme $(X, \phi_n(X))$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}_i))E_u(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ qui contient $B(0, hr(\hat{f}^n(\hat{x}_i))e^{2\gamma})$ avec $\|\phi_n(0)\| \leq e^{-\frac{\gamma}{4}} hr(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ et $Lip(\phi_n) \leq \gamma_0 e^{-\gamma}$.

Pour $l = 0, \dots, n$, notons :

$$z_l = g_{\hat{f}^{l-1}(\hat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\hat{x}_i}(C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})(z)).$$

Par construction de \mathcal{A}_{ij}^0 , z_l est dans un graphe $(\psi'_l(Y), Y)$ avec au pire $\|Y\| \leq e^\gamma hr(\hat{f}^l(\hat{x}_i))$, $\|\psi'_l(0)\| \leq hr(\hat{f}^l(\hat{x}_i))$ et $Lip(\psi'_l) \leq \gamma_0$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \|\psi'_l(Y)\| &\leq \|\psi'_l(0)\| + \|\psi'_l(Y) - \psi'_l(0)\| \\ &\leq hr(\hat{f}^l(\hat{x}_i)) + \gamma_0 e^\gamma hr(\hat{f}^l(\hat{x}_i)) \leq e^\gamma hr(\hat{f}^l(\hat{x}_i)) \end{aligned}$$

car γ_0 est petit par rapport à γ .

Le point z_l est donc dans la partie de B_l que l'on garde quand on fait les cut-off.

Maintenant, quand on prend l'image du dernier graphe $(X, \phi_n(X))$ par

$C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}\tau_{f^n(x_i)} C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ on obtient un graphe \tilde{B} de la forme $(X, \tilde{\phi}(X))$ au moins au-dessus de $B(0, hr(\hat{y})e^\gamma)$ avec $\|\tilde{\phi}(0)\| \leq hr(\hat{y})$ et $Lip(\tilde{\phi}) \leq \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}}$ (toujours par le lemme 3.2.1 avec $e^{\frac{3\gamma}{4}}h$ au lieu de h).

Par définition de \mathcal{A}_{ij}^0 ,

$$\tilde{z}_n = C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}\tau_{f^n(x_i)} C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}_i))(z_n) \in \mathcal{A}_j^0 \subset \mathcal{A}^0.$$

3.2. CONSTRUCTION DU CODAGE

Le point \tilde{z}_n appartient donc à un graphe $\tilde{\Delta}$ qui constitue l'ensemble \mathcal{A}^0 . Ce graphe $\tilde{\Delta}$ fait partie des graphes que l'on utilise pour construire \mathcal{A}_i^0 via le processus qui utilise $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$.

Soit Δ le graphe de \mathcal{A}_i^0 issu de $\tilde{\Delta}$ via ce procédé.

Δ est un graphe $(\psi(Y), Y)$ au-dessus de $B(0, hr(\hat{y})e^{\frac{\gamma}{2}}) \subset C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_s(\hat{y})$ avec $\|\psi(0)\| \leq e^{-\frac{\gamma}{2}}hr(\hat{y})$ et $Lip(\psi) \leq \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}}$. Δ coupe donc B en un unique point que l'on note z' .

Montrons que $z = z'$: cela impliquera que $z \in \mathcal{A}_i^0$ et terminera la démonstration du lemme.

Supposons que $z \neq z'$.

Leurs images par $C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})$ donnent deux points z_0 et z'_0 distincts de B_0 .

Comme précédemment les points $z'_l = g_{\hat{f}^{l-1}(\hat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\hat{x}_i}(C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})(z'_l))$ restent dans la partie de B_l que l'on garde quand on fait le cut-off (par construction de \mathcal{A}_i^0).

De plus, par un résultat du même type que le lemme 2.2.4 on a :

$$\|g_{\hat{f}^{l-1}(\hat{x}_i)}(z_{l-1}) - g_{\hat{f}^{l-1}(\hat{x}_i)}(z'_{l-1})\| \geq e^{2\gamma}\|z_{l-1} - z'_{l-1}\| \text{ pour tout } l = 1, \dots, n.$$

Par récurrence cela donne que, pour $l = 0, \dots, n$, le point z_l est distinct de z'_l . En particulier $z_n \neq z'_n$. Mais $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}\tau_{f^n(x_i)}C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}_i))(z'_n)$ est dans $\tilde{\Delta} \cap \tilde{B}$ qui est réduit à $\tilde{z}_n = C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}\tau_{f^n(x_i)}C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}_i))(z_n)$.

On obtient ainsi la contradiction recherchée. \diamond

A la deuxième génération on a donc construit N^2 ensembles \mathcal{A}_{ij}^0 avec $\mathcal{A}_{ij}^0 \subset \mathcal{A}_i^0$ pour $j = 1, \dots, N$. On va maintenant itérer le processus.

On part de \mathcal{A}_{ij}^0 qui rappelons le provient de \mathcal{A}_j^0 via le procédé qui utilise $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$.

\mathcal{A}_{ij}^0 contient N ensembles \mathcal{A}_{jil}^0 pour $l = 1, \dots, N$. Si on applique le processus aux graphes de \mathcal{A}_{jl}^0 (via $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$), on obtient un ensemble que l'on note \mathcal{A}_{ijl}^0 ($l = 1, \dots, N$). Ils vérifient $\mathcal{A}_{ijl}^0 \subset \mathcal{A}_{ij}^0$ par le même raisonnement que $\mathcal{A}_{ij}^0 \subset \mathcal{A}_i^0$.

Et on continue le procédé.

A la $(l+1)$ -ème génération on a N^{l+1} ensembles $\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0$ avec $w_i = 1, \dots, N$.

$\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0$ est constitué de graphes $(\psi(Y), Y)$ avec $\|Y\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}}hr(\hat{y})$, $\|\psi(0)\| \leq e^{-\frac{3\gamma}{4}}hr(\hat{y})$ et $Lip(\psi) \leq \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}}$.

Ces graphes proviennent des graphes de $\mathcal{A}_{w_{-1} \dots w_{-l}}^0$ via le procédé qui utilise $g_{\widehat{x_{w_0}}}, \dots, g_{\widehat{f}^{n-1}(x_{w_0})}$.

Comme précédemment on a $\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0 \subset \mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l+1}}^0$ pour tout $w_0, \dots, w_{-l} \in \{1, \dots, N\}$ et $l \geq 0$.

De plus on a :

Lemme 3.2.4. *Les N^{l+1} ensembles $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ sont disjoints.*

Preuve. On démontre le lemme avec une récurrence sur l .

Pour $l = 0$, c'est déjà fait. Supposons la propriété vraie au rang $l - 1$ avec $l \geq 1$.

Au rang l considérons deux ensembles $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ et $\overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l}}^0}$ avec $(w_0, \dots, w_{-l}) \neq (w'_0, \dots, w'_{-l})$.

On distingue les deux cas suivants :

- si $(w_0, \dots, w_{-l+1}) \neq (w'_0, \dots, w'_{-l+1})$ alors on a $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l+1}}^0}$ et $\overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l+1}}^0}$ qui sont disjoints par hypothèse de récurrence. Comme $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0} \subset \overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l+1}}^0}$ et $\overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l}}^0} \subset \overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l+1}}^0}$ on obtient que les deux ensembles $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ et $\overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l}}^0}$ sont disjoints.

- si $(w_0, \dots, w_{-l+1}) = (w'_0, \dots, w'_{-l+1})$ alors nécessairement $w_{-l} \neq w'_{-l}$. Par hypothèse de récurrence, $\overline{\mathcal{A}_{w_{-1} \dots w_{-l}}^0}$ et $\overline{\mathcal{A}_{w'_{-1} \dots w'_{-l}}^0}$ sont disjoints.

Comme $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ vient de $\overline{\mathcal{A}_{w_{-1} \dots w_{-l}}^0}$ via le processus qui utilise $g_{\widehat{x_{w_0}}}, \dots, g_{\widehat{f^{n-1}(x_{w_0})}}$ et que $\overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l}}^0}$ vient de $\overline{\mathcal{A}_{w'_{-1} \dots w'_{-l}}^0}$ via le même procédé car $w_0 = w'_0$, on en déduit que $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ est disjoint de $\overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l}}^0}$.

Cela termine la démonstration du lemme. \diamond

On veut maintenant évaluer la distance entre les graphes d'un même ensemble $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ de la $(l + 1)$ -ème génération.

Pour cela, soit G_v l'ensemble des graphes de fonctions holomorphes $(\phi(Y), Y)$ au-dessus de $B_{k_2}(0, e^{\gamma/2} hr(\widehat{y}))$ avec $\|\phi(0)\| \leq e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\widehat{y})$ et $Lip(\phi) \leq \gamma_0$.

Les graphes qui constituent les $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ sont dans G_v .

Sur G_v on met la métrique :

$$d(\text{graphe } \phi, \text{graphe } \psi) = \max_{B_{k_2}(0, e^{\gamma/2} hr(\widehat{y}))} \|\phi - \psi\|.$$

On a alors :

Lemme 3.2.5. *Pour tout $l \geq 1$ et pour tout $w_0, \dots, w_{-l+1} \in \{1, \dots, N\}$ on a :*

$$\forall A_l^1, A_l^2 \text{ graphes qui constituent } \overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l+1}}^0}, \quad d(A_l^1, A_l^2) \leq 2he^{-2\gamma nl + 2\gamma l}.$$

Preuve. A_l^1 vient d'un graphe A_{l-1}^1 de $\overline{\mathcal{A}_{w_{-1} \dots w_{-l+1}}^0}$ qui vient d'un graphe A_{l-2}^1 de $\overline{\mathcal{A}_{w_{-2} \dots w_{-l+1}}^0}$, et ainsi de suite. On notera A_{l-p}^1 ($p = 0, \dots, l$) les graphes de $\overline{\mathcal{A}_{w_{-p} \dots w_{-l+1}}^0}$ qui font partie du processus pour construire A_l^1 . On fait de même pour A_l^2 .

3.2. CONSTRUCTION DU CODAGE

On a alors :

$$\forall p = 1, \dots, l, \quad d(A_p^1, A_p^2) \leq e^{-2\gamma n + 2\gamma} d(A_{p-1}^1, A_{p-1}^2).$$

En effet, pour passer de A_{p-1}^1 à A_p^1 et de A_{p-1}^2 à A_p^2 on prend tout d'abord les images de A_{p-1}^1 et A_{p-1}^2 par l'application $C_\gamma^{-1}(\widehat{f^n(x_{w_{-l+p}})})\tau_{f^n(x_{w_{-l+p}})}^{-1}\tau_y C_\gamma(\widehat{y})$.

Mais on a vu dans la démonstration du lemme 2.2.6 que comme $\widehat{f^n(x_{w_{-l+p}})}$ est très proche de \widehat{y} , cette opération multiplie la distance entre les graphes $d(A_{p-1}^1, A_{p-1}^2)$ par au plus e^γ . Ensuite, on tire en arrière par $g_{\widehat{f^{n-1}(x_{w_{-l+p}})}}, \dots, g_{\widehat{x_{w_{-l+p}}}}$. On a montré précédemment (voir la preuve du lemme 2.2.7) qu'à chaque étape la distance entre les graphes est divisée par au moins $e^{2\gamma}$.

Enfin à la dernière étape on prend l'image par $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}\tau_{x_{w_{-l+p}}}$ $C_\gamma(\widehat{x_{w_{-l+p}}})$ et là cela multiplie encore la distance par au plus e^γ .

En appliquant l'inégalité :

$$\forall p = 1, \dots, l, \quad d(A_p^1, A_p^2) \leq e^{-2\gamma n + 2\gamma} d(A_{p-1}^1, A_{p-1}^2),$$

on obtient :

$$d(A_l^1, A_l^2) \leq e^{-2\gamma nl + 2\gamma l} d(A_0^1, A_0^2) \leq e^{-2\gamma nl + 2\gamma l} \times 2e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\widehat{y}) \leq 2he^{-2\gamma nl + 2\gamma l}.$$

C'est ce que l'on voulait démontrer. ◇

Grâce à ce lemme on peut définir une application de $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ dans G_v de la façon suivante.

Soit $w = (w_0, w_{-1}, \dots, w_{-l}, \dots) \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. On prend A_l un graphe qui constitue $\mathcal{A}_{w_0 w_{-1} \dots w_{-l}}^0$ pour $l \geq 0$.

A_l est dans G_v et par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite (A_{l_j}) qui converge vers $A \in G_v$ (une limite uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe).

Montrons que $(A_l)_l$ converge aussi vers A .

Soit $\beta > 0$. Il existe j_0 tel que $d(A, A_{l_j}) < \frac{\beta}{2}$ si $j \geq j_0$. Ensuite

$$A_{l_j}^0 \subset \mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l_j}}^0 \subset \mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-j}}^0$$

donc $d(A_{l_j}, A_j) \leq 2he^{-2\gamma m(j+1) + 2\gamma(j+1)}$ en utilisant le lemme précédent. Cette quantité est plus petite que $\frac{\beta}{2}$ si $j \geq j_1$ (car $n \geq 3$ si on veut).

Pour $j \geq \max(j_0, j_1)$ on a donc :

$$d(A_j, A) \leq d(A_j, A_{l_j}) + d(A_{l_j}, A) < \beta.$$

La suite (A_j) converge vers A et on a donc bien défini une application :

$$\begin{aligned} \sigma_v : \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow G_v \\ w &\longrightarrow A \end{aligned}$$

Remarque. L'application σ_v est injective et on a même $\sigma_v(w) \cap \sigma_v(w') = \emptyset$ si $w \neq w'$.

En effet, soit $w, w' \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ avec $w \neq w'$. On considère l le plus petit entier avec $w_{-l} \neq w'_{-l}$. Soit $A_p \in \mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0$ et $A'_p \in \mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-p}}^0$ pour $p \geq 0$ (on a donc $A_p \longrightarrow \sigma_v(w)$ et $A'_p \longrightarrow \sigma_v(w')$).

Comme $w_{-l} \neq w'_{-l}$, les ensembles $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ et $\overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l}}^0}$ sont disjoints.

Or pour tout $p \geq l$, $A_p \subset \mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0 \subset \overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0}$ et $A'_p \subset \mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-p}}^0 \subset \overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l}}^0}$ donc $\sigma_v(w) \cap \sigma_v(w') = \emptyset$. En particulier σ_v est injective.

On refait maintenant ce que l'on a réalisé avec des transformées de graphes en avant.

Comme précédemment on se place dans le repère $C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_u(\hat{y}) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_s(\hat{y})$ pour le $\hat{y} \in \Lambda_\delta$ fixé.

On part de l'ensemble des graphes de la forme $(X, \phi(X))$ au-dessus de $C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_u(\hat{y})$ avec $\|X\| \leq hr(\hat{y})e^{\frac{\gamma}{2}}$, $\phi(X) = \text{constante}$, $\|\phi(0)\| \leq hr(\hat{y})e^{-\frac{\gamma}{2}}$ et $Lip(\phi) = 0 \leq \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}}$.

On notera \mathcal{B}^0 l'ensemble constitué par l'union de ces graphes.

L'image de ces graphes par $C_i = C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})$ (pour $i = 1, \dots, N$) sont des graphes $(X, \psi(X))$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)E_u(\hat{x}_i)$ pour au moins $\|X\| \leq hr(\hat{x}_i)$ avec $\|\psi(0)\| \leq hr(\hat{x}_i)$ et $Lip(\psi) \leq \gamma_0$ par le lemme 3.2.1 car $d(\hat{y}, \hat{x}_i) < \eta$.

Ensuite on pousse en avant ces graphes $(X, \psi(X))$ par $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$. On obtient à la fin des graphes $(X, \psi_n(X))$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}_i))E_u(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ pour au moins $\|X\| \leq e^\gamma hr(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ avec $\|\psi_n(0)\| \leq e^{-\gamma} hr(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ et $Lip(\psi_n) \leq e^{-\gamma} \gamma_0$ (voir le lemme 2.2.1).

Maintenant, on remet ces graphes dans le repère initial $C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_u(\hat{y}) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{y})E_s(\hat{y})$ c'est-à-dire que l'on prend leur image par $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}\tau_{f^n(\hat{x}_i)} C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$.

Comme $d(\hat{f}^n(\hat{x}_i), \hat{y}) < \eta$, on obtient des graphes $(X, \phi_n(X))$ pour au moins $\|X\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})$ avec $\|\phi_n(0)\| \leq e^{-\frac{3\gamma}{4}} hr(\hat{y})$ et $Lip(\phi_n) \leq e^{-\frac{\gamma}{2}} \gamma_0$ (toujours par le lemme 3.2.1).

Ce sont exactement les mêmes conditions qu'au départ (c'est-à-dire que l'on pourra recommencer le procédé avec un \hat{x}_j pas nécessairement égal au \hat{x}_i), sauf qu'en plus on a $\|\phi_n(0)\| \leq e^{-\frac{3\gamma}{4}} hr(\hat{y})$.

Grâce à cette marge, si on prend $\|X\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})$ on a :

$$\|\phi_n(X)\| \leq \|\phi_n(0)\| + \|\phi_n(X) - \phi_n(0)\| \leq e^{-\frac{3\gamma}{4}} hr(\hat{y}) + \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}} \|X\| < hr(\hat{y}) e^{-\frac{\gamma}{2}}$$

3.2. CONSTRUCTION DU CODAGE

c'est-à-dire que les graphes $(X, \phi_n(X))$ ne sortent de $B(0, e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})) \times B(0, e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y}))$ que par le bord $\partial B(0, e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})) \times B(0, e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y}))$. Ce sont des graphes horizontaux.

Notons $\mathcal{B}_1^0, \dots, \mathcal{B}_N^0$ les ensembles constitués de l'union de ces graphes obtenus pour $i = 1, \dots, N$. On a donc $\mathcal{B}_i^0 \subset \mathcal{B}^0$. On notera aussi \mathcal{B}_i l'image de \mathcal{B}_i^0 par $\tau_y \circ C_\gamma(\hat{y})$.

Ici les \mathcal{B}_i^0 ne sont pas forcément disjoints car f n'est pas a priori injective.

On recommence le processus. On fixe i et j dans $\{1, \dots, N\}$ et on considère les graphes de \mathcal{B}_j^0 . On les met dans le repère $C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)E_u(\hat{x}_i) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)E_s(\hat{x}_i)$ en appliquant C_i , puis on les pousse en avant par $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$ et on repasse dans le repère initial.

On note \mathcal{B}_{ij}^0 ($i, j = 1, \dots, N$) les N^2 ensembles ainsi obtenus. On a alors :

Lemme 3.2.6. $\mathcal{B}_{ij}^0 \subset \mathcal{B}_i^0$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$.

Preuve. Soit $z \in \mathcal{B}_{ij}^0$. Par construction z est dans un graphe de \mathcal{B}_{ij}^0 qui provient d'un graphe de \mathcal{B}_j^0 via le processus qui utilise $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$. En particulier,

$$z = C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}\tau_{f^n(x_i)}C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}_i))g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\hat{x}_i} \circ C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})(z_0)$$

où z_0 est dans un graphe de \mathcal{B}_j^0 .

Cela signifie que $C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})(z_0)$ et $g_{\hat{f}^l(\hat{x}_i)} \circ \dots \circ g_{\hat{x}_i} \circ C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)\tau_{x_i}^{-1}\tau_y C_\gamma(\hat{y})(z_0)$ (pour $l = 0, \dots, n-1$) et z sont toujours dans la partie du cut-off que l'on garde. Maintenant $z_0 \in \mathcal{B}_j^0 \subset \mathcal{B}^0$ donc z_0 appartient à un graphe de \mathcal{B}^0 . Quand on applique le processus à ce graphe de \mathcal{B}^0 via $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$ on obtient à la fin un graphe de \mathcal{B}_i^0 et le point z est dedans car les images successives de z_0 restent dans la partie du cut-off que l'on garde par la remarque précédente. On a donc $z \in \mathcal{B}_i^0$ et le lemme est démontré. \diamond

A la deuxième génération on a donc construit N^2 ensembles \mathcal{B}_{ij}^0 avec $\mathcal{B}_{ij}^0 \subset \mathcal{B}_i^0$. On va maintenant itérer le processus.

\mathcal{B}_j^0 contient N ensembles \mathcal{B}_{jl}^0 ($l = 1, \dots, N$). Si on applique le processus aux graphes de \mathcal{B}_{jl}^0 (via $g_{\hat{x}_i}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_i)}$), on obtient un ensemble que l'on note \mathcal{B}_{ijl}^0 . Comme précédemment, on a $\mathcal{B}_{ijl}^0 \subset \mathcal{B}_{ij}^0$ pour tout $i, j, l = 1, \dots, N$. Et on continue ainsi le procédé.

A la l -ème génération on a N^l ensembles $\mathcal{B}_{w_1 \dots w_l}^0$ avec $w_1, \dots, w_l = 1, \dots, N$.

$\mathcal{B}_{w_1 \dots w_l}^0$ est constitué de graphes $(X, \phi(X))$ avec $\|X\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})$, $\|\phi(0)\| \leq e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\hat{y})$ et $Lip(\phi) \leq \gamma_0 e^{-\frac{\gamma}{2}}$. Ces graphes proviennent de graphes de $\mathcal{B}_{w_2 \dots w_l}^0$ via le procédé qui utilise $g_{\hat{x}_{w_1}}, \dots, g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x}_{w_1})}$. On a encore $\mathcal{B}_{w_1 \dots w_l}^0 \subset \mathcal{B}_{w_1 \dots w_{l-1}}^0$ pour tout $l \geq 1$ et pour tout $w_1, \dots, w_l = 1, \dots, N$.

Comme expliqué plus haut, les $\mathcal{B}_{w_1 \dots w_l}^0$ ne sont pas nécessairement disjoints.

On veut maintenant évaluer la distance entre les graphes qui constituent un même ensemble $\mathcal{B}_{w_1 \dots w_l}^0$. Pour cela, soit G_h l'ensemble des graphes de fonctions holomorphes $(X, \phi(X))$ au-dessus de $\overline{B_{k_1}(0, hr(\widehat{y})e^{\gamma/2})}$ avec $\|\phi(0)\| \leq e^{-\gamma/2}hr(\widehat{y})$ et $Lip(\phi) \leq \gamma_0$.

Sur G_h on met la métrique :

$$d(\text{graphe } \phi, \text{graphe } \psi) = \frac{\max}{B_{k_1}(0, hr(\widehat{y})e^{\gamma/2})} \|\phi - \psi\|.$$

On a alors :

Lemme 3.2.7. *Pour tout $l \geq 1$ et tout $w_1, \dots, w_l = 1, \dots, N$ on a :*

$$\forall B_l^1, B_l^2 \text{ graphes qui constituent } \mathcal{B}_{w_1 \dots w_l}^0, \quad d(B_l^1, B_l^2) \leq 2he^{-2\gamma l + 2\gamma}.$$

Preuve. B_l^1 vient d'un graphe B_{l-1}^1 de $\mathcal{B}_{w_2 \dots w_l}^0$ qui vient d'un graphe B_{l-2}^1 de $\mathcal{B}_{w_3 \dots w_l}^0$, et ainsi de suite. On note B_p^1 pour $p = 0, \dots, l$ les graphes de $\mathcal{B}_{w_{l-p+1} \dots w_l}^0$ qui font partie du processus pour construire B_l^1 . On fait de même pour B_l^2 .

On a alors pour $p = 1, \dots, l$:

$$d(B_p^1, B_p^2) \leq e^{-2\gamma p + 2\gamma} d(B_{p-1}^1, B_{p-1}^2).$$

La démonstration est la même que dans le lemme 3.2.5, en utilisant ce que l'on a fait dans la preuve du lemme 2.2.6.

En particulier on a maintenant :

$$d(B_l^1, B_l^2) \leq e^{-2\gamma l + 2\gamma} d(B_0^1, B_0^2) \leq 2e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\widehat{y}) e^{-2\gamma l + 2\gamma} \leq 2he^{-2\gamma l + 2\gamma}.$$

Cela démontre le lemme. ◇

Grâce à ce lemme on peut définir une application de $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ dans G_h de la façon suivante.

Soit $w = (w_1, \dots, w_l, \dots) \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. On prend B_l un graphe qui constitue $\mathcal{B}_{w_1 \dots w_l}^0$ pour $l \geq 1$. B_l est dans G_h et par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite (B_{l_j}) qui converge vers $B \in G_h$. Alors comme pour les \mathcal{A}^0 , grâce au lemme précédent, on a aussi (B_l) qui converge vers B . Cela définit une application $\sigma_h : \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow G_h$ par $\sigma_h(w) = B$.

Si f n'est pas inversible, σ_h n'est pas a priori injective.

Par contre si f est inversible et $\int \log d(x, I(f^{-1})) d\mu(x) > -\infty$, comme dans le cas \mathcal{A}^0 , σ_h est injective (il suffit de prendre des $r(\widehat{x})$ adaptés à la fois pour f et f^{-1}).

Voici maintenant le codage que l'on cherchait :

3.3. PROPRIÉTÉS DU CODAGE

Soit $w = (\cdots w_{-l}, \cdots, w_0, w_1, \cdots, w_l, \cdots) \in \{1, \cdots, N\}^{\mathbb{Z}}$.

$(\cdots, w_{-l}, \cdots, w_0)$ définit un élément $A \in G_v$ (qui est égal à $\sigma_v(w_0, w_{-1}, \cdots, w_{-l}, \cdots)$) et $(w_1, \cdots, w_l, \cdots)$ définit un $B \in G_h$ (qui est $\sigma_h(w_1, \cdots, w_l, \cdots)$).

L'intersection de A avec B est composée d'un unique point (voir la démonstration de la proposition S.3.7 dans [13] car $\gamma_0^2 < 1$).

On notera $S_0(w)$ l'image de ce point par $\tau_y C_\gamma(\widehat{y})$. On a obtenu ainsi une application $S_0 : \{1, \cdots, N\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow X$. C'est le codage que l'on cherchait. Il s'agit maintenant de vérifier les propriétés du théorème 1.

3.3 Propriétés du codage

Montrons tout d'abord que l'on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \{1, \cdots, N\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{1, \cdots, N\}^{\mathbb{Z}} \\ S_0 \downarrow & & \downarrow S_0 \\ X & \xrightarrow{f^n} & X \end{array}$$

avec σ le décalage à droite et $f^n \circ S_0 = S_0 \circ \sigma$.

Soit $w = (\cdots, w_{-l}, \cdots, w_{-1}, w_0, w_1, \cdots) \in \{1, \cdots, N\}^{\mathbb{Z}}$.

$S_0(w) = \tau_y C_\gamma(\widehat{y})(A \cap B)$ avec $A = \lim A_l^0$ et $B = \lim B_l^0$ où A_l^0 est un graphe de $\mathcal{A}_{w_0 w_{-1} \cdots w_{-l}}^0$ (pour tout $l \geq 0$) et B_l^0 est un graphe de $\mathcal{B}_{w_1 \cdots w_l}^0$ (pour tout $l \geq 1$).

Pour $l \geq 1$, on a par construction $C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1} \tau_{f^n(x_{w_0})} C_\gamma(\widehat{f^n(x_{w_0})}) g_{\widehat{f^{n-1}(x_{w_0})}} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x_{w_0}}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x_{w_0}}) \tau_{x_{w_0}}^{-1} \tau_y C_\gamma(\widehat{y})(A_l^0)$ qui est inclus dans un graphe A_l^1 de $\mathcal{A}_{w_{-1} \cdots w_{-l}}^0$.

A_l^1 converge donc vers $\sigma_v(w_{-1}, \cdots, w_{-l}, \cdots)$ quand $l \rightarrow +\infty$.

Maintenant les $g_{\widehat{f^{p-1}(x_{w_0})}} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x_{w_0}}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x_{w_0}}) \tau_{x_{w_0}}^{-1} \tau_y C_\gamma(\widehat{y})(A_l^0)$ sont dans des boîtes $\overline{B_{k_1}(0, e^{-\gamma/2} hr(\widehat{f^p(x_{w_0})}))} \times \overline{B_{k_2}(0, hr(\widehat{f^p(x_{w_0})}))}$ pour $p = 1, \cdots, n-1$ grâce aux propriétés des graphes, $C_\gamma^{-1}(\widehat{x_{w_0}}) \tau_{x_{w_0}}^{-1} \tau_y C_\gamma(\widehat{y})(A_l^0)$ est dans la boîte $\overline{B_{k_1}(0, e^{-\gamma/2} hr(\widehat{x_{w_0}}))} \times \overline{B_{k_2}(0, e^\gamma hr(\widehat{x_{w_0}}))}$ et pour $p = n$ le point précédent est dans $\overline{B_{k_1}(0, e^{\gamma/2} hr(\widehat{f^n(x_{w_0})}))} \times \overline{B_{k_2}(0, hr(\widehat{f^n(x_{w_0})}))}$ (toujours par les propriétés des graphes et $1 + \gamma_0 \leq e^{\frac{\gamma}{2}}$).

En particulier, $g_{\widehat{f^{p-1}(x_{w_0})}} \circ \cdots \circ g_{\widehat{x_{w_0}}} C_\gamma^{-1}(\widehat{x_{w_0}}) \tau_{x_{w_0}}^{-1} \tau_y C_\gamma(\widehat{y})(A_l^0)$ vit dans un endroit où $g_{\widehat{f^p(x_{w_0})}}$ est holomorphe donc continue. On peut donc passer à la limite quand $l \rightarrow +\infty$ et on obtient que :

$$\begin{aligned} C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1} f^n(S_0(w)) &= C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1} \tau_{f^n(x_{w_0})} C_\gamma(\widehat{f^n(x_{w_0})}) g_{\widehat{f^{n-1}(x_{w_0})}} \circ \cdots \\ &\circ g_{\widehat{x_{w_0}}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x_{w_0}}) \tau_{x_{w_0}}^{-1} \tau_y C_\gamma(\widehat{y})(C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1}(S_0(w))) \end{aligned}$$

est dans $\sigma_v(w_{-1}, \dots, w_{-l}, \dots)$.

Par ailleurs on obtient aussi que :

$$g_{\widehat{f}^{p-1}(\widehat{x}_{w_0})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}_{w_0}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x}_{w_0}) \tau_{x_{w_0}}^{-1} \tau_y C_\gamma(\widehat{y}) (C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1}(S_0(w)))$$

se trouve dans $\overline{B_{k_1}(0, e^{-\gamma/2} hr(\widehat{f}^p(\widehat{x}_{w_0})))} \times \overline{B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^p(\widehat{x}_{w_0})))}$ pour $p = 1, \dots, n-1$, dans $\overline{B_{k_1}(0, e^{-\gamma/2} hr(\widehat{x}_{w_0}))} \times \overline{B_{k_2}(0, e^\gamma hr(\widehat{x}_{w_0}))}$ pour $p = 0$ et dans $\overline{B_{k_1}(0, e^{\gamma/2} hr(\widehat{f}^n(\widehat{x}_{w_0})))} \times \overline{B_{k_2}(0, hr(\widehat{f}^n(\widehat{x}_{w_0})))}$ pour $p = n$.

Soit (b_l) une suite de B_l^0 qui converge vers $C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1}(S_0(w))$. Par continuité pour l assez grand on a : $g_{\widehat{f}^{p-1}(\widehat{x}_{w_0})} \circ \dots \circ g_{\widehat{x}_{w_0}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x}_{w_0}) \tau_{x_{w_0}}^{-1} \tau_y C_\gamma(\widehat{y})(b_l)$ qui est au-dessus de $\overline{B_{k_1}(0, hr(\widehat{f}^p(\widehat{x}_{w_0})))}$ pour $p = 0, \dots, n-1$ et au-dessus de $\overline{B_{k_1}(0, e^\gamma hr(\widehat{f}^n(\widehat{x}_{w_0})))}$ pour $p = n$: ce sont donc des points qui sont dans la partie du cut-off que l'on garde quand on passe de B_l^0 à son successeur via le processus qui passe de $g_{\widehat{x}_{w_0}}, \dots, g_{\widehat{f}^{n-1}(\widehat{x}_{w_0})}$. Le successeur de B_l^0 est par définition un graphe B_l^1 qui constitue $\mathcal{B}_{w_0 w_1 \dots w_l}^0$.

On a $B_l^1 \rightarrow \sigma_h(w_0, w_1, \dots, w_l, \dots)$ et ainsi :

$$\begin{aligned} C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1} f^n(S_0(w)) &= C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1} \tau_{f^n(x_{w_0})} C_\gamma(\widehat{f}^n(\widehat{x}_{w_0})) g_{\widehat{f}^{n-1}(\widehat{x}_{w_0})} \circ \dots \\ &\circ g_{\widehat{x}_{w_0}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x}_{w_0}) \tau_{x_{w_0}}^{-1} \tau_y C_\gamma(\widehat{y}) (C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1}(S_0(w))) \end{aligned}$$

est dans $\sigma_h(w_0, w_1, \dots, w_l, \dots)$.

Si on fait le bilan on a que $C_\gamma^{-1}(\widehat{y}) \tau_y^{-1} f^n(S_0(w))$ est l'unique point de

$$\sigma_v(w_{-1}, \dots, w_{-l}, \dots) \cap \sigma_h(w_0, w_1, \dots, w_l, \dots).$$

En particulier cela signifie que :

$$f^n(S_0(w)) = \tau_y C_\gamma(\widehat{y})(\sigma_v(w_{-1}, \dots) \cap \sigma_h(w_0, \dots)) = S_0(\sigma(w))$$

où σ est le décalage à droite. C'est bien ce que l'on voulait démontrer.

Montrons maintenant que S_0 est continue. Sur $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ on met la métrique :

$$d(w, w') = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|w_i - w'_i|}{2^i} + \sum_{i=-\infty}^0 \frac{|w_i - w'_i|}{2^{-i}}.$$

Soit $\beta > 0$. Si p est suffisamment grand, on a $8he^{-2\gamma np + 2\gamma p} \leq \frac{\beta r_0}{C(X)}$.

Maintenant, si $d(w, w') < \frac{1}{2^{p+1}}$, on a forcément :

$$w_0 = w'_0, \dots, w_{-p} = w'_{-p}, w_1 = w'_1, \dots, w_p = w'_p.$$

3.3. PROPRIÉTÉS DU CODAGE

$\sigma_v(w_0, w_{-1}, \dots, w_{-l}, \dots)$ est limite de A_l^1 avec A_l^1 graphe de $\mathcal{A}_{w_0 w_{-1} \dots w_{-l}}^0$ pour $l \geq 0$.

Pour $l \geq p$ on a $A_l^1 \subset \mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}^0 \subset \mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0$. En prenant la limite quand l tend vers $+\infty$, on obtient que $\sigma_v(w_0, w_{-1}, \dots) \subset \overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0}$. Le point $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w))$ est donc dans $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0}$. De même $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w'))$ est dans $\overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-p}}^0}$ qui est égal à $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0}$.

Par un raisonnement similaire, $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w))$ et $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w'))$ sont dans $\overline{\mathcal{B}_{w_1 \dots w_p}^0}$.

Comme $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w))$ est dans $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0}$, il existe une suite de points de $\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0$ qui converge vers lui. Par définition la suite de points s'écrit $(\phi_l^1(Y_l), Y_l)$ où $\|Y_l\| \leq e^{\frac{\gamma}{2}} hr(\widehat{y})$, $Lip(\phi_l^1) \leq \gamma_0$ et $\|\phi_l^1(0)\| \leq e^{-\frac{\gamma}{2}} hr(\widehat{y})$.

Par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite $(\phi_{l_j}^1)$ qui converge uniformément vers ϕ^1 qui est dans G_v . Par ailleurs, si $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w)) = (X, Y)$, on a $Y_l \rightarrow Y$ et $\|\phi_{l_j}^1(Y) - \phi_{l_j}^1(Y_{l_j})\| \leq \gamma_0 \|Y - Y_{l_j}\| \rightarrow 0$ donc $\phi^1(Y) = X$ c'est-à-dire que $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w))$ appartient au graphe $(\phi^1(Y), Y)$ de G_v .

De même, $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w'))$ appartient à un graphe $(\phi^2(Y), Y)$ construit par le même procédé.

Par le lemme 3.2.5, on a $d(\text{graphe } \phi_l^1, \text{graphe } \phi_l^2) \leq 2he^{-2\gamma n(p+1)+2\gamma(p+1)}$ et ainsi, en passant à la limite sur l , on a $d(\text{graphe } \phi^1, \text{graphe } \phi^2) \leq 2he^{-2\gamma n(p+1)+2\gamma(p+1)}$.

De la même façon, $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w))$ appartient à un graphe $(X, \psi^1(X))$ de G_h (limite de graphes de $\mathcal{B}_{w_1 \dots w_p}^0$ et $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w'))$ est dans un graphe $(X, \psi^2(X))$ de G_h . On a aussi, en utilisant cette fois-ci le lemme 3.2.7 que $d(\text{graphe } \psi^1, \text{graphe } \psi^2) \leq 2he^{-2\gamma np+2\gamma p}$.

Le point d'intersection $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w))$ entre les graphes $(\phi^1(Y), Y)$ et $(X, \psi^1(X))$ est de la forme $(\phi^1(Y_1), Y_1)$ où Y_1 est l'unique point fixe de $\psi^1 \circ \phi^1 : B_{k_2}(0, e^{\gamma/2} hr(\widehat{y})) \rightarrow \overline{B_{k_2}(0, e^{\gamma/2} hr(\widehat{y}))}$ (voir la démonstration de la proposition S.3.7 dans [13] car on a $\gamma_0^2 < 1$). De même le point d'intersection $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})\tau_y^{-1}(S_0(w'))$ entre les graphes $(\phi^2(Y), Y)$ et $(X, \psi^2(X))$ est de la forme $(\phi^2(Y_2), Y_2)$ où Y_2 est l'unique point fixe de $\psi^2 \circ \phi^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|Y_1 - Y_2\| &= \|\psi^1 \circ \phi^1(Y_1) - \psi^2 \circ \phi^2(Y_2)\| \\ &\leq \|\psi^1 \circ \phi^1(Y_1) - \psi^2 \circ \phi^1(Y_1)\| + \|\psi^2 \circ \phi^1(Y_1) - \psi^2 \circ \phi^2(Y_2)\| \\ &\leq d(\text{graphe } \psi^1, \text{graphe } \psi^2) + \gamma_0 \|\phi^1(Y_1) - \phi^2(Y_2)\| \\ &\leq d(\text{graphe } \psi^1, \text{graphe } \psi^2) + \gamma_0 (\|\phi^1(Y_1) - \phi^2(Y_1)\| + \|\phi^2(Y_1) - \phi^2(Y_2)\|) \\ &\leq d(\text{graphe } \psi^1, \text{graphe } \psi^2) + \gamma_0 d(\text{graphe } \phi^1, \text{graphe } \phi^2) + \gamma_0^2 \|Y_1 - Y_2\|. \end{aligned}$$

D'où :

$$\|Y_1 - Y_2\| \leq \frac{d(\text{graphe } \psi^1, \text{graphe } \psi^2) + \gamma_0 d(\text{graphe } \phi^1, \text{graphe } \phi^2)}{1 - \gamma_0^2}.$$

De là on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \|C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}S_0(w) - C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}S_0(w')\| \leq \|Y_1 - Y_2\| + \|\phi^1(Y_1) - \phi^2(Y_2)\| \\ & \leq \|Y_1 - Y_2\| + \|\phi^1(Y_1) - \phi^2(Y_1)\| + \|\phi^2(Y_1) - \phi^2(Y_2)\| \\ & \leq (1 + \gamma_0)\|Y_1 - Y_2\| + d(\text{graphe } \phi^1, \text{graphe } \phi^2) \\ & \leq \frac{1}{1 - \gamma_0}(d(\text{graphe } \psi^1, \text{graphe } \psi^2) + d(\text{graphe } \phi^1, \text{graphe } \phi^2)). \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\|C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}S_0(w) - C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}S_0(w')\| \leq 8he^{-2\gamma np + 2\gamma p} \leq \frac{\beta r_0}{C(X)}$$

et par le théorème des accroissements finis, comme $\|C_\gamma(\hat{y})\| \leq \frac{1}{r_0}$, on a finalement :

$$d(S_0(w), S_0(w')) \leq \frac{C(X)}{r_0} \times \frac{\beta r_0}{C(X)} = \beta.$$

On a donc montré que S_0 est uniformément continue.

Remarque. Lorsque f est inversible et que l'on a en plus $\int \log d(x, I(f^{-1}))d\mu(x) > -\infty$, S_0 est un homéomorphisme de $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ sur son image.

En effet, tout d'abord S_0 est injective : si $w, w' \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ avec $w \neq w'$ on a soit $(\dots, w_{-l}, \dots, w_0) \neq (\dots, w'_{-l}, \dots, w'_0)$, soit $(w_1, \dots, w_l, \dots) \neq (w'_1, \dots, w'_l, \dots)$.

Dans le premier cas $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}S_0(w)$ et $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}S_0(w')$ sont respectivement dans $\sigma_v(w_0, \dots, w_{-l}, \dots)$ et $\sigma_v(w'_0, \dots, w'_{-l}, \dots)$ qui sont disjoints. On a donc $S_0(w) \neq S_0(w')$.

Dans le second cas, comme f est inversible et que $\int \log d(x, I(f^{-1}))d\mu(x) > -\infty$, on a aussi $\sigma_h(w_1, \dots, w_l, \dots)$ et $\sigma_h(w'_1, \dots, w'_l, \dots)$ qui sont disjoints et ainsi $S_0(w) \neq S_0(w')$.

Montrons, toujours sous l'hypothèse f inversible et $\int \log d(x, I(f^{-1}))d\mu(x) > -\infty$, que S_0^{-1} est continue sur $\Lambda_0 = S_0(\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}})$.

Soit $\beta > 0$. Si p est suffisamment grand on a $\frac{4N}{2^{p+1}} < \beta$. On a vu que les $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}}$ sont disjoints. Comme f est inversible et $\int \log d(x, I(f^{-1}))d\mu(x) > -\infty$, il en est de même pour les $\overline{\mathcal{B}_{w_1 \dots w_p}}$. Soit donc $\alpha > 0$ plus petit que la distance minimale entre deux $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}}$ et que la distance minimale entre deux $\overline{\mathcal{B}_{w_1 \dots w_p}}$.

Soit z et $z' \in \Lambda_0$ avec $d(z, z') < \frac{\alpha r_0}{C(X)}$.

3.3. PROPRIÉTÉS DU CODAGE

Comme on l'a vu quand on montrait que S_0 est continue, $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}(z) \in \overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0 \cap \mathcal{B}_{w_1 \dots w_p}^0}$ où $S_0^{-1}(z) = (\dots, w_{-p}, \dots, w_0, \dots, w_p, \dots)$. De même, $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}(z') \in \overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-p}}^0 \cap \mathcal{B}_{w'_1 \dots w'_p}^0}$ où $S_0^{-1}(z') = (\dots, w'_{-p}, \dots, w'_0, \dots, w'_p, \dots)$.

Par le théorème des accroissement finis,

$$\|C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}(z) - C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}(z')\| < \frac{C(X)}{r_0} \times \frac{\alpha r_0}{C(X)} = \alpha$$

car $\|C_\gamma^{-1}(\hat{y})\| \leq \frac{1}{r_0}$.

On en déduit que $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}(z)$ et $C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}(z')$ ne peuvent pas être dans deux $\overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-p}}^0}$ ou dans deux $\overline{\mathcal{B}_{w_1 \dots w_p}^0}$ différents.

On a donc $w_0 = w'_0, \dots, w_{-p} = w'_{-p}$ et $w_1 = w'_1, \dots, w_p = w'_p$.

En particulier

$$\begin{aligned} d(S_0^{-1}(z), S_0^{-1}(z')) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|w_i - w'_i|}{2^i} + \sum_{i=-\infty}^0 \frac{|w_i - w'_i|}{2^{-i}} \\ &\leq \sum_{i=p+1}^{+\infty} \frac{N}{2^i} + \sum_{i=-\infty}^{-p-1} \frac{N}{2^{-i}} \\ &\leq \frac{N}{2^{p+1}} \times 2 + \frac{N}{2^{p+1}} \times 2 \leq \frac{4N}{2^{p+1}} < \beta. \end{aligned}$$

L'application S_0^{-1} est donc uniformément continue sur Λ_0 .

Revenons au cas général.

Pour terminer la démonstration du premier point du théorème 1 il reste à étudier la mesure $\nu_0 = (S_0)_* \lambda_0$ (où λ_0 est la mesure de Bernoulli sur $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$). On a :

$$(f^n)_* \nu_0 = (f^n)_* (S_0)_* \lambda_0 = (f^n \circ S_0)_* \lambda_0 = (S_0 \circ \sigma)_* \lambda_0 = (S_0)_* \lambda_0 = \nu_0.$$

C'est donc une mesure (f^n) -invariante. Calculons maintenant $h_{\nu_0}(f^n)$.

Soit $\alpha > 0$ la distance minimale entre deux $\overline{\mathcal{A}_i}$ pour $i = 1, \dots, N$. On a

Lemme 3.3.1. *Pour tout $z_1 \in \overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}}$ et $z_2 \in \overline{\mathcal{A}_{w'_0 \dots w'_{-l}}}$ avec $(w_0, \dots, w_{-l}) \neq (w'_0, \dots, w'_{-l})$, les points z_1 et z_2 sont $(l+1, \alpha)$ -séparés pour f^n .*

Preuve. On considère deux points z_1, z_2 comme ci-dessus et soit p le plus petit entier avec $w_{-p} \neq w'_{-p}$ ($0 \leq p \leq l$).

On a vu au début du paragraphe 3.3 que :

$$C_\gamma^{-1}(\hat{y})\tau_y^{-1}f^n\tau_y C_\gamma(\hat{y})(\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}^0) \subset \mathcal{A}_{w_{-1}\dots w_{-l}}^0$$

c'est-à-dire $f^n(\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}) \subset \mathcal{A}_{w_{-1}\dots w_{-l}}$.

Ainsi $f^{np}(\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}) \subset \mathcal{A}_{w_{-p}\dots w_{-l}} \subset \mathcal{A}_{w_{-p}}$ et de la même façon $f^{np}(\mathcal{A}_{w'_0\dots w'_{-l}}) \subset \mathcal{A}_{w'_{-p}\dots w'_{-l}} \subset \mathcal{A}_{w'_{-p}}$. Par continuité $f^{np}(\overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}}) \subset \overline{\mathcal{A}_{w_{-p}}}$ et $f^{np}(\overline{\mathcal{A}_{w'_0\dots w'_{-l}}}) \subset \overline{\mathcal{A}_{w'_{-p}}}$.

On a donc $d(f^{np}(z_1), f^{np}(z_2)) \geq \alpha$ et c'est ce que l'on voulait démontrer. \diamond

Si $w \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$, on a vu que pour $l \geq 0$, on a $S_0(w) \in \overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}}$.

Le support de ν_0 est donc inclus dans

$$\bigcup_{w_0, \dots, w_{-l}=1, \dots, N} \overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \nu_0(\overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}}) &= \lambda_0(S_0^{-1}(\overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}})) \\ &= \lambda_0(\{w', w'_0 = w_0, \dots, w'_{-l} = w_{-l}\}) \text{ car les } \overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}} \text{ sont disjoints} \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^{l+1}. \end{aligned}$$

Soit $z \in \bigcup_{w_0, \dots, w_{-l}=1, \dots, N} \overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}}$. On a $z \in \overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}}$ pour un certain $(w_0, \dots, w_{-l}) \in \{1, \dots, N\}^{l+1}$ et donc, par le lemme précédent, si on note :

$$B_{l+1}(f^n, \alpha, z) = \{y \in X, d(f^{np}(z), f^{np}(y)) < \alpha \text{ pour } p = 0, \dots, l\},$$

on a :

$$\begin{aligned} \nu_0(B_{l+1}(f^n, \alpha, z)) &= \nu_0\left(B_{l+1}(f^n, \alpha, z) \cap \bigcup_{w_0, \dots, w_{-l}=1, \dots, N} \overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}}\right) \\ &= \nu_0(B_{l+1}(f^n, \alpha, z) \cap \overline{\mathcal{A}_{w_0\dots w_{-l}}}) \leq \left(\frac{1}{N}\right)^{l+1}. \end{aligned}$$

Par le théorème de Brin-Katok, on a :

$$h_{\nu_0}(f^n) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \limsup_{l \rightarrow +\infty} -\frac{1}{l+1} \log \nu_0(B_{l+1}(f^n, \alpha, z))$$

3.3. PROPRIÉTÉS DU CODAGE

pour ν_0 presque tout point (car comme λ_0 est ergodique, ν_0 l'est aussi grâce à la relation $f^n \circ S_0 = S_0 \circ \sigma$).

Si $z \in \bigcap_{l \geq 0} \bigcup_{w_0, \dots, w_{-l}=1, \dots, N} \overline{\mathcal{A}_{w_0 \dots w_{-l}}}$ (qui est de masse 1 pour ν_0), on a pour tout $l \geq 0$:

$$-\frac{1}{l+1} \log \nu_0(B_{l+1}(f^n, \alpha, z)) \geq -\log \frac{1}{N} = \log N,$$

ce qui implique $h_{\nu_0}(f^n) \geq \log N = h_\mu(f)n - \rho n$. C'est que l'on voulait démontrer.

Il reste à démontrer les points 2 et 3 du théorème 1.

Tout d'abord, $h_{top}(f|_{\Lambda_0}) \geq h_{top}((f^n)|_{\Lambda_0}) \times \frac{1}{n}$ car un ensemble (l, α) -séparé pour f^n est $(ln - n + 1, \alpha)$ -séparé pour f .

Ensuite on a (par exemple en utilisant le théorème de Brin-Katok), $h_{top}((f^n)|_{\Lambda_0}) \geq h_{\nu_0}(f^n) \geq h_\mu(f)n - \rho n$. On a donc $h_{top}(f|_{\Lambda_0}) \geq h_\mu(f) - \rho$. C'est ce que l'on voulait.

Passons au dernier point.

On note $\Lambda = \Lambda_0 \cup f(\Lambda_0) \cup \dots \cup f^{n-1}(\Lambda_0)$.

Soit $z \in \Lambda_0$. On a $z = S_0(w)$ avec $w = (\dots, w_{-l}, \dots, w_0, \dots, w_l, \dots) \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$.

$z \in \overline{\mathcal{A}_{w_0}}$ et on a vu dans la démonstration du lemme 3.2.2 que $d(f^l(z), f^l(x_{w_0})) \leq \frac{\epsilon}{4}$ pour $l = 0, \dots, n$. Le point x_{w_0} est dans le support de μ si on veut (on peut toujours intersecter $\pi(\Lambda_{\delta, m'_0}) \cap \Gamma_{\epsilon, m_0}$ par le support de μ si on le souhaite).

Cela signifie que Λ est inclus dans un $\frac{\epsilon}{4}$ -voisinage de support de μ . Si on prend $\frac{\epsilon}{4} < \rho$, on a donc la première partie du point 3.

Si $z \in \Lambda_0$, on a $z = S_0(w)$ et on a vu aussi que $g_{\widehat{f^l(x_{w_0})}}$ est continue au voisinage de $g_{\widehat{f^{l-1}(x_{w_0})}} \circ \dots \circ g_{\widehat{x_{w_0}}} \circ C_\gamma^{-1}(\widehat{x_{w_0}}) \tau_{x_{w_0}}^{-1}(z)$ pour $l = 0, \dots, n-1$. Cela implique que f est continue au voisinage de $f^l(S_0(w))$ pour $l = 0, \dots, n-1$.

On peut donc définir :

$$\nu = \frac{1}{n}(\nu_0 + f_*\nu_0 + \dots + (f^{n-1})_*\nu_0)$$

et on a :

$$f_*\nu = \frac{1}{n}(f_*\nu_0 + (f^2)_*\nu_0 + \dots + \underbrace{(f^n)_*\nu_0}_{=\nu_0}) = \nu.$$

La mesure ν est donc bien invariante par f et portée par Λ . Enfin, pour $i = 1, \dots, k_0$, on a

$$\begin{aligned}
 I &= \left| \int \varphi_i d\nu - \int \varphi_i d\mu \right| = \left| \int \varphi_i \frac{1}{n} d(\nu_0 + \dots + (f^{n-1})_* \nu_0) - \int \varphi_i d\mu \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n} \int \sum_{l=0}^{n-1} \varphi_i(f^l(x)) d\nu_0(x) - \int \varphi_i d\mu \right| = \left| \frac{1}{n} \int \sum_{l=0}^{n-1} \varphi_i(f^l(S_0(w))) d\lambda_0(w) - \int \varphi_i d\mu \right| \\
 &= \left| \int \left(\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi_i(f^l(S_0(w))) - \int \varphi_i d\mu \right) d\lambda_0(w) \right|.
 \end{aligned}$$

Mais pour $l = 0, \dots, n$, on a $d(f^l(S_0(w)), f^l(x_{w_0})) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. L'hypothèse faite au début implique donc que $|\varphi_i(f^l(S_0(w))) - \varphi_i(f^l(x_{w_0}))| < \frac{r}{2}$ pour $l = 0, \dots, n-1$.

D'où :

$$I \leq \int \left| \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi_i(f^l(x_{w_0})) - \int \varphi_i d\mu \right| d\lambda_0(w) + \frac{r}{2}.$$

Enfin par définition de Λ_{δ, m'_0} , on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi_i(f^l(x_{w_0})) - \int \varphi_i d\mu \right| < \frac{r}{2}$$

ce qui donne $I \leq r < \rho$ et cela termine la démonstration du théorème.

Bibliographie

- [1] J.-Y. Briend, *La propriété de Bernoulli pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$* , Ergodic Theory Dynam. Systems, **22** (2002), 323-327.
- [2] H. De Thélin, *Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes*, Invent. Math., **172** (2008), 89-116.
- [3] H. De Thélin, *Endomorphismes pseudo-aléatoires dans les espaces projectifs II*, J. Geom. Anal., **25** (2015), 204-225.
- [4] H. De Thélin, *Un théorème de semi-continuité pour l'entropie des applications méromorphes*, Math. Ann., **362** (2015), 1-23.
- [5] T.-C. Dinh et C. Dupont, *Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes*, J. Geom. Anal., **14** (2004), 613-627.
- [6] C. Dupont, *Bernoulli coding map and almost sure invariance principle for endomorphisms of \mathbb{P}^k* , Probab. Theory Related Fields, **146** (2010), 337-359.
- [7] C. Dupont, *Large entropy measures for endomorphisms of $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* , Israel J. Math., **192** (2012), 505-533.
- [8] J.E. Fornæss et N. Sibony, *The closing lemma for holomorphic maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **17** (1997), 821-837.
- [9] J.E. Fornæss et N. Sibony, *Closing lemma for holomorphic functions in \mathbb{C}* , Ergodic Theory Dynam. Systems, **18** (1998), 153-170.
- [10] G. Froyland, S. Lloyd et A. Quas, *Coherent structures and isolated spectrum for Perron-Frobenius cocycles*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **30** (2010), 729-756.
- [11] K. Gelfert, *Repellers for non-uniformly expanding maps with singular or critical points*, Bull. Braz. Math. Soc., **41** (2010), 237-257.
- [12] A. Katok, *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **51** (1980), 137-173.
- [13] A. Katok et B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encycl. of Math. and its Appl., vol. 54, Cambridge University Press, (1995).

BIBLIOGRAPHIE

- [14] A. Katok et J.-M. Strelcyn, *Invariant Manifolds, Entropy and Billiards ; Smooth Maps with Singularities*, avec la collaboration de F. Ledrappier et F. Przytycki, Lect. Notes Math., **1222** (1986).
- [15] R. Mañé, *Lyapounov exponents and stable manifolds for compact transformations*, Lecture Notes Math., **1007** (1983), 522-577.
- [16] S.E. Newhouse, *Entropy and volume*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **8** (1988), 283-299.
- [17] J.B. Pesin, *Characteristic Ljapunov exponents, and smooth ergodic theory*, Uspehi Mat. Nauk, **32** (1977), 55-112.
- [18] P. Thieullen, *Fibrés dynamiques asymptotiquement compacts. Exposants de Lyapounov. Entropie. Dimension*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **4** (1987), 49-97.