



HAL
open science

Lois d'échelles et propriétés statistiques multifractales de la topographie des planètes

François Landais

► **To cite this version:**

François Landais. Lois d'échelles et propriétés statistiques multifractales de la topographie des planètes. Planétologie et astrophysique de la terre [astro-ph.EP]. Université Paris Saclay (COMUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLS453 . tel-01699851

HAL Id: tel-01699851

<https://theses.hal.science/tel-01699851>

Submitted on 2 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLS453

THESE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY
PREPAREE A
L'UNIVERSITE PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE N° 579

Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)

Spécialité : Structure et évolution de la Terre et des autres planètes

Par

M. François Landais

Lois d'échelles et propriétés statistiques
multifractales de la topographie des planètes

Thèse présentée et soutenue à Orsay, le 24 novembre 2017 :

Composition du Jury :

Mme Valérie Ciarletti	Professeur, LATMOS	Présidente
M. Pascal Allemand	Professeur, UCB Lyon	Rapporteur
Mme Ioulia Tchiguirinskaia	Directrice de recherche, HM&Co	Rapporteur
M. Haucke Hussman	Professeur, DLR	Examineur
M. Laurent Jorda	Astronome, LAM	Examineur
M. Frédéric Schmidt	Maitre de conférence, UPSUD	Directeur de thèse
M. Shaun Lovejoy	Professeur, McGill	Invité

Titre : Lois d'échelles et propriétés statistiques multifractales de la topographie des planètes

Mots clés : surface, système solaire, géométrie, rugosité, fractale

Résumé : Au cours des 20 dernières années, le développement des méthodes de télédétection et le succès des missions spatiales ont considérablement enrichi nos connaissances des surfaces planétaires révélant une immense diversité de morphologies. La topographie est le reflet de l'interaction et de la compétition entre des processus géologiques internes et des processus externes dont les modalités sont variables d'un corps à l'autre. En particulier, des informations précieuses sur la nature des processus et sur les lois générales qui contrôlent la formation et l'évolution des paysages sont enregistrées dans le champ topographique. Nous analysons dans cette thèse la topographie en tant que champ statistique multi-échelle. Nous rapportons les résultats d'une étude comparative des propriétés statistiques de la topographie des principaux corps du système solaire (la Terre, la Lune, Mercure, Vénus et Mars) en nous appuyant sur le volume croissant de données altimétriques issus de mesures directes et de techniques indirectes telle que la photogrammétrie. Notre approche est centrée sur la notion de loi d'échelle qui vise à

caractériser les symétries du champ en traduisant le caractère auto-similaire des surfaces naturelles : un zoom sur une image est similaire à l'image dans son ensemble. Nous mettons en œuvre plusieurs méthodes d'analyse de données pour contraindre les propriétés dites "multifractales" afin de dégager le meilleur modèle statistique capable de décrire la topographie dans différents contextes. Nous proposons de nouveaux indicateurs de rugosité à l'échelle globale, régionale et locale. Nous montrons qu'en dépit de leurs diversités, les surfaces du système solaire respectent des lois statistiques similaires que nous explicitons. En particulier nous montrons que la topographie d'un corps tellurique respecte en général des lois multifractales pour les échelles supérieures à 10-20 km et présente une structure statistique différente pour les échelles inférieures. Nous discutons de l'origine géophysique de ces propriétés statistiques. Enfin nous proposons une méthode pour générer des topographies synthétiques sphériques dont les propriétés statistiques sont similaires aux topographies planétaires du système solaire.

Title : Scaling laws and multifractal statistical properties of planetary topography

Keywords : surface, solar system, geometry, roughness, fractal

Abstract :

Over the past 20 years, the development of remote sensing methods and the success of space missions have considerably enriched our knowledge of planetary surfaces revealing an immense diversity of morphologies. Topography is caused by the interaction and the competition between internal geological processes and external processes whose modalities are variable from one planetary body to the other. In particular, precise information on the nature of processes and general laws controlling the formation and evolution of landscapes is recorded in the topographic field. In this thesis, we analyze topography as a multi-scale statistical field. We report the results of a comparative study of the statistical properties of the topography of the main bodies of the solar system (Earth, Moon, Mercury, Venus and Mars) based on the increasing volume of altimetric data, from direct measurements and indirect techniques such as photogrammetry. Our

approach focuses on the notion of scaling law which aims to characterize the symmetries of the field by translating the self-similar nature of natural surfaces : any zoom is statistically similar to the initial image. We use several methods of analyzing so-called "multifractal" properties in order to derive the best statistical model capable of describing the topography in different contexts. We propose new indicators of roughness at the global, regional and local scale. We show that in spite of their diversity, the surface of the solar system respects similar statistical laws. In particular, we show that the overall topography of a planetary body generally respects multifractal laws for scales greater than 10-20 km and presents a different statistical structure for the lower scales. We discuss the geophysical origin of these statistical properties. Finally, we propose a method for generating spherical synthetic topographies whose statistical properties are similar to the topographies in the solar system.



Cette thèse a été préparée au laboratoire de Géosciences de l'Université Paris Sud (GEOPS), unité mixte de recherche (UMR) numéro 8148, et au sein de l'école doctorale SMEMAG (Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences).



ADRESSE DU LABORATOIRE:

GEOPS Géosciences Paris Sud
Université Paris Sud, bâtiment 509
Rue du Belvédère
91405 Orsay

SITES INTERNET :

<http://geops.geol.u-psud.fr>

INFORMATIONS SUR CE DOCUMENT :

Ce document a été produit sous le logiciel libre LyX. La version numérique contient des liens hypertexte internes permettant de faciliter la navigation, ainsi que des liens externes.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier chaleureusement Frédéric Schmidt qui a imaginé ce sujet et m'a donné l'occasion de plonger pendant 3 ans au coeur de questions passionnantes. C'est grâce à sa constante bonne humeur et à sa générosité que ce manuscrit a pu voir le jour. Merci d'avoir été toujours disponible et patient malgré les difficultés que ne manquent pas de survenir pendant une thèse.

Un grand merci à Shaun Lovejoy qui a suivi de près l'avancée de mes travaux depuis Montreal. Nos échanges récurrents ont été des étapes indispensables dans le cheminement de ce projet. Merci également de m'avoir accueilli à McGill pour quelques jours qui resteront un excellent souvenir.

Ce travail n'aurait pas été possible sans la participation active de nombreuses personnes. Je remercie en particulier Sebastien Graveleau et Stéphane Bonnet dont l'implication a été déterminante. Nos échanges m'ont permis de découvrir un vaste champ d'application pour les outils multifractals.

Je souhaite remercier toute l'équipe de géomorphologie planétaire pour son accueil et pour l'excellente ambiance qui règne au bâtiment 509. Merci à notre chef d'équipe François Costard, aux permanents Laure, Sylvain, Hellène, Antoine et Julien. Merci en particulier à Chiara toujours présente pour nous tirer d'un mauvais pas informatique. Un grand merci à Chantal pour son professionnalisme et sa gentillesse. Quand à ceux qui ont

eut avec moi la chance de vivre l'aventure d'une thèse, Kelly, Anthony, François et Jin-Jin, ce fut un véritable plaisir de partager avec vous le fameux «bureaux des thésards».

Je remercie bien sur ma famille très présente pour leurs encouragements constants et leur soutien indéfectible.

Enfin merci à toi Clarisse qui partage ma vie depuis sept ans et me donne le courage de tout entreprendre.

Table des matières

Résumé-Abstract	4
Adresse du laboratoire GEOPS	5
1 La topographie	19
1.1 Les surfaces du système solaire	19
1.1.1 Introduction	19
1.1.2 Les enjeux de la géomorphologie planétaire	20
1.1.2.1 Evolution des paysages	22
1.1.2.2 Topographie et signature de la vie	24
1.1.2.3 Planétologie comparée	25
1.1.2.4 Lien entre la topographie et les propriétés des roches	26
1.1.2.5 Topographie et dynamique interne	27
1.2 Topographie	28
1.2.1 Géodésie, géoïde	28
1.2.1.1 Forme approximative d'un corps céleste	28
1.2.1.2 Référentiel géodésique (ou ellipsoïde de référence ou datum)	30
1.2.1.3 Gravité	31
1.2.1.4 Géoïde	32
1.2.1.5 Topographie	33
1.2.2 Formalisme	33
1.2.3 Méthodes de mesure	36
1.2.3.1 Altimétrie Lidar ou Radar	36
1.2.3.2 Extraction de la topographie à partir d'image	36

1.3	Jeux de données planétaires	39
1.3.1	La Terre	40
1.3.2	Mars	41
1.3.3	La Lune	43
1.3.4	Vénus	45
1.3.5	Mercure	46
1.4	Etude quantitative de la topographie	48
1.4.1	Indicateurs classiques	48
1.4.1.1	Paramètres géométriques	48
1.4.1.2	Paramètres statistiques	49
1.4.2	Lois d'échelle	51
1.4.2.1	Principe général	51
1.4.2.2	Loi d'échelle de la densité spectrale de puissance	52
1.5	Conclusion	57
2	Théorie des fractales et multifractales	59
2.1	La notion de fractale	59
2.1.1	Exemples d'objets fractals	60
2.1.1.1	Le flocon de Koch	60
2.1.1.2	La poussière de Cantor	61
2.1.2	Auto-similarité	62
2.1.3	La longueur des côtes	63
2.1.4	Dimensions fractales	65
2.1.4.1	La dimension « du compas »	65
2.1.4.2	La dimension « box counting »	65
2.1.4.3	La dimension d'homothétie	66
2.1.4.4	La dimension de Hausdorff	66
2.1.5	Fractale aléatoire	67
2.1.6	Codimension fractale	68

2.1.7	Fractales naturelles en géoscience	69
2.1.7.1	Réseaux de rivières	70
2.1.7.2	La distribution des cratères sur une surface planétaire . . .	71
2.1.7.3	Autres exemples	74
2.2	Champ monofractal	74
2.2.1	Le champ topographique	74
2.2.2	Auto-affinité	75
2.2.3	Mouvement brownien fractionnaire (fBm)	76
2.3	Champ multifractal	77
2.3.1	Introduction	79
2.3.2	le modèle β	79
2.3.3	Le modèle α	82
2.3.4	Propriétés statistiques des cascades multiplicatives	84
2.3.5	Propriétés d'un champ multifractal	86
2.3.5.1	Singularités	86
2.3.5.2	Moments statistiques	87
2.3.5.3	Transformations de Legendre	87
2.4	Champs multifractals continus	89
2.4.1	Cascade continue en échelle	89
2.4.2	Flux fractionnairement intégré FIF	89
2.4.3	Universalité	91
2.4.4	Marche aléatoire multifractale	91
2.5	Conclusion	92
3	La topographie est elle fractale, multifractale ?	95
3.1	Lien entre la densité spectrale et le fBm	96
3.2	Etudes fractales de la topographie	97
3.2.1	La méthode du compas	98
3.2.2	La méthode du box-counting	99

3.2.3	Le variogramme	99
3.2.4	Bilan de l'interprétation monofractale	102
3.2.5	Vers une interprétation multifractale	103
3.3	Analyse multifractale	104
3.3.1	Introduction	104
3.3.2	Analyse des moments du flux («trace moment»)	107
3.3.3	Analyse des fluctuations d'altitude	109
3.3.4	Densité spectrale de puissance d'un champ multifractal	111
3.4	Bilan	111
3.4.1	Methodologie	111
3.4.2	Conclusions	112
4	Analyse comparative des topographies planétaires	113
4.1	Modèle statistique	114
4.1.1	Les paramètres multifractals universels α et C_1	115
4.1.2	Bassin d'attraction	115
4.2	Jeux de données	116
4.3	Analyse globale de Mars	117
4.3.1	Format et qualité des données	117
4.3.2	Fonctions de structures	118
4.3.3	Fluctuations de Haar	119
4.3.4	Densité spatiales de fluctuations	121
4.3.5	Adaptation de la méthode de Haar	122
4.3.5.1	Test sur des séries synthétiques :	124
4.3.6	Moments d'ordre 1 et 2 par la méthode de Haar	126
4.3.7	Analyse	126
4.3.7.1	Régression classique	127
4.3.7.2	Régression bayésienne	127
4.3.7.3	Estimations des paramètres multifractals	129

4.3.7.4	Densité spectrale de puissance	131
4.3.7.5	Cohérence entre les deux approches	132
4.3.8	Utilisation des cartes interpolées	134
4.3.9	Analyse du flux de la topographie martienne	135
4.4	Analyse globale des corps du Système Solaire	136
4.4.1	Fluctuations de Haar	138
4.4.1.1	Observations générales	140
4.4.1.2	Comportement d'échelle	141
4.4.1.3	Multifractalité	141
4.4.2	Propriétés du flux	142
4.4.2.1	Comportement d'échelle	142
4.4.2.2	Multifractalité	143
4.4.3	Conclusions de l'analyse globale	143
4.5	Analyse régionale et locale	150
4.5.1	Quadrangle : échelle « régionale »	150
4.5.2	Fenêtre glissante : échelle « locale »	151
4.5.3	Interprétations	151
4.5.3.1	Mars	151
4.5.3.2	La Lune	153
4.5.4	Conclusions	155
5	Simulations multifractales sphériques	161
5.1	Contexte	161
5.2	Présentation du modèle FIF sphérique	162
5.2.1	Rappel de la procédure $1D$	163
5.2.1.1	Génération de la cascade multifractale	164
5.2.1.2	Intégration de la cascade	168
5.2.2	Simulation sphérique	168
5.2.2.1	Harmonique sphérique et échantillonnage cartographique . .	168

TABLE DES MATIÈRES

5.2.2.2	Convolution sur la sphère	169
5.2.2.3	Noyau de convolution	170
5.2.3	Validation	171
5.3	Résultats	172
5.3.1	Représentation	172
5.3.2	Quelques exemples	172
5.3.3	Distribution des océans/continents d'une exoplanète	175
5.4	Conclusion et perspectives	177
6	Synthèses et perspectives	181
6.1	Synthèse des résultats	182
6.2	Interprétation	183
6.3	Perspectives	185
6.3.1	Géologie, géophysique	185
6.3.2	Téledétection	187
	Annexe	191
	Table des figures	195
	Bibliographie	204
	Article	225
	Résumé-Abstract	228

Introduction

Les missions spatiales qui se sont succédées au cours des 20 dernières années ont révolutionné nos connaissances sur les corps telluriques du système solaire. Alors que la Terre peut être observée *in situ*, l'étude des autres corps repose principalement sur les technologies de la télédétection spatiale. Le développement des méthodes altimétriques a permis d'appréhender l'immense diversité des morphologies naturelles, reflet de l'interaction et de la compétition entre divers processus géologiques internes et externes à l'oeuvre à la surface des corps et dont certains n'ont pas d'analogie terrestre. Comprendre leur nature, leurs modalités et leur rôle dans l'origine et l'évolution des reliefs dans une telle variété de contextes est un défi majeur qui dépendra de notre capacité à extraire l'information enfouie dans les volumes considérables de données brutes de télédétection. Il est clair que cet objectif ne peut être atteint sans l'élaboration de méthodes statistiques innovantes visant à réduire la complexité des comportements naturels en dégagant des indicateurs pertinents.

Comment sont distribuées les pentes à la surface d'un corps tellurique ? Comment décrire la rugosité d'une surface naturelle ? Peut-on dégager un cadre statistique cohérent, avec un nombre réduit de paramètres d'intérêt, applicable à tous les corps du système solaire ? L'objectif principal du travail présenté dans cette thèse est d'apporter des éléments de réponse à ces questions. Prenant le contre-pied de la plupart des indicateurs statistiques usuels qui visent à caractériser les reliefs en séparant les échelles d'observations, nous souhaitons valider un modèle multi-échelle à même de refléter la variabilité du champ topographique dans son ensemble sur une base globale, régionale et locale. Si un tel modèle existe, il permettra :

- de réaliser un exercice de planétologie comparée multi-échelle pour les corps planétaires.
- de définir des nouveaux indicateurs de rugosité multi-échelle.
- d'apporter des informations précieuses sur les mécanismes qui président à la création et à l'évolution des paysages en projetant un nouvel éclairage sur les problématiques actuelles de la géomorphologie planétaire.
- d'étudier les modalités de réflexion et de transmission des ondes électromagnétiques par une surface naturelle quelconque dont dépend la plupart des mesures de télédétection (par exemple la photométrie et la spectroscopie pour le rayonnement électromagnétique visible, infra-rouge ou radar)
- de développer des algorithmes de simulations statistiquement réalistes adaptés aux géométries complexes des corps telluriques (planètes, satellites, astéroïdes, comètes)

La stratégie mise en oeuvre dans cette thèse repose sur des développements théoriques récents dans le domaine de l'analyse multifractale, une approche générale et multidisciplinaire qui vise à décrire les propriétés statistiques de tout système complexe présentant une grande variabilité sur une large gamme d'échelles.

La structure du manuscrit est la suivante. Dans un chapitre introductif, nous commençons par rappeler les enjeux qui ont motivé ce travail en détaillant les questions fondamentales liées à la topographie, avant de présenter l'ensemble des concepts liés à la définition et à la mesure du champ topographique par télédétection. Nous incluons dans cette section une description complète des jeux de données disponibles dans le système solaire ainsi qu'un tour d'horizon des indicateurs de rugosité classiquement utilisés pour caractériser les reliefs. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des concepts théoriques appliquées dans cette thèse. Nous y introduisons la notion de géométrie fractale, de propriétés multifractales et présentons deux cadres statistiques multi-échelle candidats pour modéliser la distribution des pentes à la surface d'un corps. Après un troisième chapitre retraçant la manière dont ces concepts ont été historiquement appliqués aux surfaces géo-

logiques, nous présentons dans le chapitre 4, les résultats de notre analyse comparative des topographies du Système Solaire sur une base globale, régionale et locale. Le dernier chapitre présente un algorithme permettant de générer des topographies sphériques dont les propriétés statistiques sont réalistes d'après les conclusions du chapitre 4.

Chapitre 1

La topographie

1.1 Les surfaces du système solaire

1.1.1 Introduction

Les planètes se forment par accréation progressive dans le disque protoplanétaire, un nuage de poussière en rotation rapide autour d'une étoile. Commençons par résumer les théories existantes de la formation du système solaire (*Lissauer, 1993*). Au fil des collisions aléatoires et sous l'effet de la gravité, la matière initialement dispersée se rassemble pour former des corps de plus en plus massifs. Les éléments légers comme l'hydrogène et l'hélium sont rejetés loin du centre et forment les planètes gazeuses. A proximité de l'étoile, les corps accrétés sont principalement constitués de métaux et de roches silicatées. L'énergie considérable accumulée par les impacts successifs combinée à celle de la pression gravitationnelle interne qui augmente, provoque la fonte des différents éléments qui constituent le corps en formation. Sous l'effet de la force de gravité, les matériaux les plus lourds (métaux) plongent vers le centre formant un noyau massif tandis que les matériaux plus légers (silicates ou gaz) forment autour de lui une enveloppe appelée manteau. Dans le cas d'un manteau silicaté, ce dernier peut se différencier pour former une croûte superficielle, plus légère. Dans notre système solaire, les quatre plus grands corps sont des planètes géantes gazeuses sans surface solide (Jupiter, Uranus, Neptune et Saturne). Tous les autres corps (planètes telluriques, astéroïdes, lunes, comètes...) ont une surface solide

(roche ou glace) qui se déforme sous l'action de processus complexes en interaction les uns avec les autres. Dans cette thèse nous nous focalisons sur ces corps solides pour lesquels la notion de topographie a un sens. Si les surfaces solides des corps planétaires sont très largement étudiées, c'est en premier lieu parce qu'elles constituent avec l'atmosphère la partie qui se prête la mieux à l'observation qu'il s'agisse de la Terre ou d'un autre corps. C'est évidemment notre planète qui offre le plus de possibilités d'études. Les innombrables formations géologiques (volcans, failles, chaînes de montagnes...) peuvent être observées de près, les roches prélevées et datées pour dégager des schémas d'évolution géologique. La Terre cependant a le « désavantage » d'être recouverte à 70% par de l'eau liquide. Les fonds marins restent aujourd'hui encore assez mal connus au regard des connaissances accumulées sur les parties émergées. Au fil des siècles, les méthodes pour déterminer la forme des reliefs ont pu se développer et ont été considérablement améliorées par les technologies modernes (voir paragraphe 1.2.3). L'ensemble des études visant à caractériser les types de reliefs, à en expliquer l'origine, et à prédire leur évolution constitue le domaine de la géomorphologie (pris ici dans son acception la plus large), dans lequel s'inscrit cette thèse.

1.1.2 Les enjeux de la géomorphologie planétaire

Quelles sont les forces qui modèlent un paysage ? Que peut nous apprendre l'observation d'une surface planétaire sur les processus qui ont déterminé son évolution au cours des temps géologiques ? Les mécanismes impliqués dans l'évolution des surfaces sont multiples et leurs interactions complexes. Sur Terre, la morphologie des reliefs est dominée par deux grands processus : la tectonique des plaques (*Le Pichon, 1968*) qui induit des déplacements de la croûte et l'érosion (*Kirchner et al., 2001*) générée par le ruissellement de l'eau liquide sur les pentes, le vent et la gravité. Ces phénomènes donnent naissance à des chaînes de montagnes (plis, bassins versant, réseaux de rivières, failles). Mais d'autres grands mécanismes interviennent directement ou indirectement dans l'évolution des reliefs parmi lesquels le volcanisme (*Hauber et al., 2009*), la cratérisation (*Melosh, 1989*), le climat (*Gosz and Sharpe, 1989*), les processus éoliens (*Howard, 2000*), la topographie

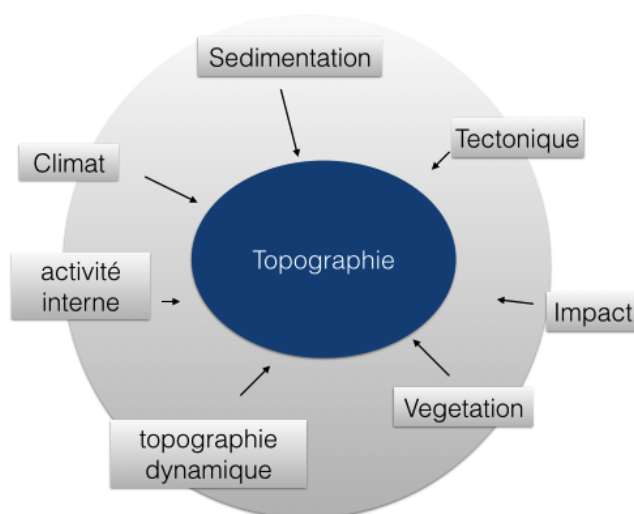


FIGURE 1.1 – Processus participant à la création des reliefs à la surface d'une planète

dynamique (*Ricard et al.*, 1984) ou encore le développement de la vie (*Dietrich and Perron*, 2006). En fonction du contexte propre à chaque corps, l'importance relative des processus est variable. Sur Terre, les morphologies résultant du processus de cratérisation par impacts sont entièrement effacées lors du resurfaçage induit par le coulisement des plaques tectoniques (*Neukum and Ivanov*, 1994b). La surface de la Lune au contraire est couverte de cratères en l'absence d'atmosphère et de dynamique interne. Les processus géologiques passés ou présents laissent des traces évidentes ou discrètes dans la topographie d'une surface. Avec l'appui d'outils numériques de plus en plus performants et d'un volume croissant de données, les études portant sur la formation et l'évolution des paysages sont aujourd'hui en plein essor. L'objectif à long terme du travail entrepris dans cette thèse est d'apporter un nouvel éclairage aux questions posées aujourd'hui dans le domaine de la géomorphologie en proposant de nouveaux outils statistiques descriptifs s'appuyant sur des concepts encore relativement peu appliqués aux surfaces planétaires (fractal, multifractal). Nous commençons donc par rappeler les problématiques liées à la topographie débattues dans la littérature récente.

1.1.2.1 Evolution des paysages

La topographie des paysages terrestres fait ressortir deux types de morphologies complémentaires (*Moglen et al.*, 1998; *Davis*, 1892) : les crêtes et les vallées (voir figure 1.2). Les crêtes sont des domaines convexes présentant des écoulements divergents. Elles alternent avec des vallées concaves où les écoulements sont convergents et s'organisent en réseaux de rivières. Ces deux morphologies sont associées à des processus de transport sédimentaire distincts. Dans les vallées, les sédiments sont principalement transportés par le ruissellement de l'eau liquide dans les rivières (*Howard*, 1994) alors que les dômes concaves des crêtes résultent de la dispersion des sédiments par différents mécanismes (*Furbish et al.*, 2007). La transition spatiale entre ces deux morphologies se produit à une certaine échelle. La nature de cette transition et la valeur de l'échelle critique constituent une question fondamentale qui fait débat (*Shaler*, 1899; *Izumi and Parker*, 1995; *Hovius*, 1996; *Talling et al.*, 1997; *Perron et al.*, 2008). Elle pourrait être associée à une vitesse minimale d'écoulement nécessaire pour détacher les sédiments (*Montgomery and Dietrich*, 1989) ou à une compétition entre le phénomène de diffusion dominant sur les crêtes et le phénomène d'advection (incision fluviale) dominant dans les vallées (*Perron et al.*, 2009). Les expériences en laboratoire de *Sweeney et al.* (2015) ont confirmé que la compétition entre ces deux processus joue un rôle clef dans la transition entre crêtes et vallées. Le champ topographique peut être efficacement modélisé par l'équation différentielle non-linéaire de diffusion-advection (*Howard*, 1994) :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = U + D\nabla^2 z - K(PA)^m S^n \quad (1.1)$$

avec z le champ d'élévation, U le taux de soulèvement modélisant le déplacement tectonique, D la diffusivité des pentes, K une constante liée à la puissance du courant, A l'aire drainée, S la pente, P le taux de précipitation et (m, n) deux constantes positives. Quand le terme $D\nabla^2 z$ est dominant, la topographie est régulée par les déstabilisation de pentes (crête). Quand le dernier terme (advection) domine, elle présente les morphologies générées par les écoulements de surface (vallée). Le rapport suivant (nombre de Peclet)

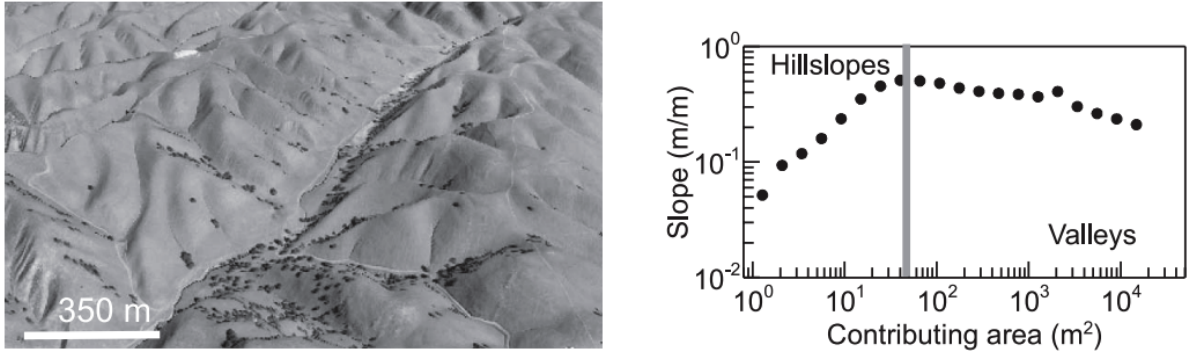


FIGURE 1.2 – Topographie de Gabilan Mesa, Californie et analyse statistique des pentes en fonction de l’aire drainée (reproduit depuis (*Sweeney et al.*, 2015)). Le graphe de droite fait ressortir deux régimes correspondant à la compétition entre phénomènes advectifs et diffusifs et l’échelle caractéristique de transition entre l’aspect convexe des crêtes et l’aspect concave des vallées.

permet de quantifier le poids relatif de ces deux contributions :

$$P_e = \frac{KL^{2m+1}}{D} \quad (1.2)$$

où L est une échelle horizontale. La valeur particulière de L qui entraîne $P_e = 1$ traduit l’équilibre entre les phénomènes advectifs et diffusifs et correspond donc à l’échelle de transition L_c entre crête et vallée. La figure 1.2 montre sur un exemple de topographie terrestre comment cette échelle peut être déterminée en analysant les statistiques de la topographie. La pente moyenne est représentée en fonction de l’aire drainée. Cet indicateur permet de distinguer statistiquement les deux régimes (advectif et diffusif). Dans le cas des crêtes, la pente augmente avec l’aire drainée. Cette tendance s’inverse pour les vallées avec une transition claire. Dans cette thèse, nous allons présenter des outils reposant sur les propriétés d’échelle de la topographie. En permettant une description plus fine des propriétés statistiques, nous devrions être en mesure d’apporter de nouveaux indicateurs pour étudier cette dichotomie crête/vallée. Le développement des méthodes numériques d’évolution des reliefs (*Braun and Willett*, 2013) et les expériences de géomorphologie en laboratoire (*Graveleau et al.*, 2008; *Bonnet and Crave*, 2003) offrent un large champ d’application potentiel pour tester ces indicateurs.

1.1.2.2 Topographie et signature de la vie

Sur Terre, la végétation joue un rôle clef dans l'érosion des sols. Des travaux ont été menés pour quantifier son rôle (*Toy et al.*, 2002) mais il demeure difficile d'évaluer dans quelle mesure les chaînes de montagnes terrestres seraient différentes si la vie ne s'était pas ou peu développée. L'architecture des réseaux de rivières présenterait-elle les mêmes caractéristiques ? Le rôle des facteurs biotiques (végétation, vie animale) reste globalement peu étudié (*Istanbulluoglu and Bras*, 2005) en dépit du caractère omniprésent de la végétation à la surface de la terre. (*Dietrich and Perron*, 2006) posent les principales questions liées à cette thématique : Comment les facteurs biotiques influencent l'érosion et le transport des sédiments et quelles sont les morphologies visibles pouvant en témoigner ? Ces facteurs peuvent-ils altérer les modalités du climat ainsi que celles des processus tectoniques dont le rôle est déterminant dans l'évolution des reliefs ? Comment seraient modifiés les paysages terrestres en l'absence de végétation ? Les auteurs font le bilan des réponses et des hypothèses relatives à ces questions en comparant le cas de la Terre à celui de Vénus et de Mars, planètes qui ne présentent aujourd'hui aucun signe de développement biotique. Après avoir passé en revue les lois de transports géomorphiques en explicitant pour chacune les mécanismes biotiques pouvant jouer un rôle (voir table 1 de *Dietrich and Perron*, 2006), les auteurs concluent qu'en l'absence de vie, une Terre abiotique présenterait probablement les mêmes formations de surface. Ces dernières cependant pourraient présenter des propriétés statistiques différentes (hauteurs des montagnes, relation entre la pente et l'aire drainée, sinuosité des rivières...). La figure 1.3 reproduite depuis *Dietrich and Perron* (2006) montrent une analyse de la relation entre la pente locale et l'aire drainée de trois topographies terrestres qui diffèrent principalement par la présence ou l'absence de végétation. Plusieurs variables (loi de puissance, intensité des pentes) semblent pertinentes pour distinguer efficacement et de manière statistique les régions où la vie s'est développée. Dans cette thèse, nous appliquons à la topographie de nouveaux outils statistiques potentiellement capables de discriminer plus finement la contribution avérée des facteurs biotiques.

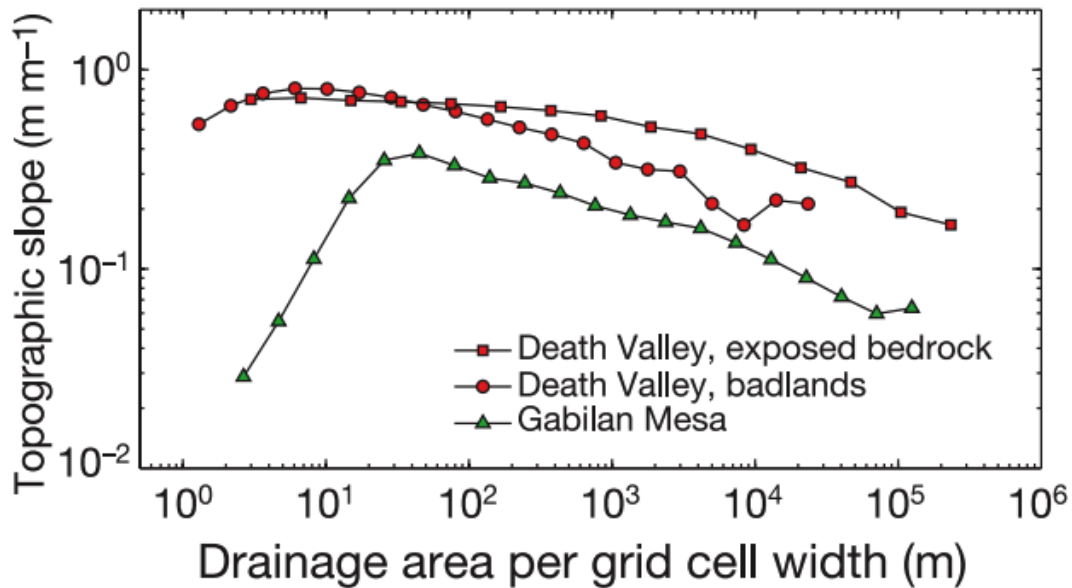


FIGURE 1.3 – Analyse de la relation entre la pente locale et l’aire drainée de trois topographies qui diffèrent principalement par la présence ou l’absence de végétation (reproduite depuis *Dietrich and Perron 2006*)

1.1.2.3 Planétologie comparée

Les données topographiques des corps du système solaire ont permis le développement d’analyses comparatives des signatures topographiques issues de planètes différentes. Les images de résolution croissante obtenues par les missions spatiales ont révélé une immense diversité de surfaces. Dans certains cas, il est difficile, voir impossible de retracer leur histoire. Alors que sur Terre, le mouvement des plaques tectoniques joue un rôle central, ce processus n’est pas ou peu actif sur Mars (*Phillips et al., 2001; Bouley et al., 2016*) ou sur les corps glacés comme Titan (*Collins et al., 2009*) et Pluton (*Moore et al., 2016*). La connaissance de la topographie d’un corps permet d’accéder à des informations sur l’histoire de la surface quand cette dernière est ou à été soumise à l’érosion par un fluide, étant donné l’interaction très forte entre les bassins de drainage et les reliefs. Ainsi les réseaux de rivières observés sur Mars (*Irwin et al., 2005*) offrent des informations précieuses sur son histoire. Il en va de même pour Titan dont la surface est façonnée par des écoulements d’hydrocarbures (*Burr et al., 2013*). La comparaison des réseaux de drainages terrestres à ceux visibles sur Mars et Titan (*Black et al., 2017*) révèle des

différences frappantes dans leur relation avec le champ topographique. En quantifiant la « conformité du réseau de drainage à la topographie », les auteurs constatent que la Terre fait figure d'exception : la direction des rivières terrestres n'est pas corrélée avec la topographie à grande échelle (faible conformité topographique). La corrélation est meilleure dans le cas de Mars et Titan. En d'autres termes, la majorité des rivières terrestres semble s'écouler le long des contours des grandes variations d'altitude contrairement aux deux autres corps. La figure 1.4 reproduite depuis *Black et al. (2017)* montre comment l'indicateur de conformité varie avec l'échelle. Cette distinction statistique entre des morphologies semblables de plusieurs corps peut donner lieu à de nombreuses interprétations sur les processus et l'histoire des surfaces. La mauvaise conformité topographique terrestre à grande échelle peut être liée à la tectonique active tandis que la bonne conformité constatée à grande échelle sur Mars suggère que les grandes longueurs d'onde des reliefs martiens ont été façonnées avant la formation des réseaux de rivières. La conformité relativement faible sur les petites échelles peut s'expliquer par le processus de cratérisation actif bien après la fin des écoulements à la surface de Mars. En résumé, les questions fondamentales sur l'évolution et l'origine des paysages soulevées par cette étude font clairement ressortir l'importance de considérer la topographie comme un champ statistique où toutes les échelles doivent être prises en compte. Les indicateurs développés dans cette thèse ont justement la particularité de proposer un cadre statistique multi-échelle. Nous verrons s'ils peuvent apporter de nouveaux éléments comparatifs pour les topographies du système solaire.

1.1.2.4 Lien entre la topographie et les propriétés des roches

Les roches résistent plus ou moins à l'érosion. En particulier, la dureté des roches est communément considérée comme le facteur le plus important dans les modalités de ce processus. Les géomorphologues considèrent généralement que la dureté du granit résistant à l'érosion explique sa prédominance dans les reliefs élevés au détriment des roches moins résistantes qui s'érodent plus facilement et sont entraînées vers le bas des pentes. De manière générale, les plus hauts reliefs sont effectivement constitués par les roches les

plus solides (*Nyblade and Sleep, 2003; Stubner et al., 2013; Tenzer et al., 2011; Zappone and Bruijn, 2012*). Les travaux de *Braun et al. (2014)* montrent cependant l'importance du rôle joué par la densité relative des roches dans la formation des hauts reliefs. La suppression d'une partie de la masse rocheuse par érosion tend à faire baisser le niveau moyen. Cependant, le déficit de masse qui en résulte donne lieu au phénomène de rebond isostatique. Ce dernier induit un soulèvement qui s'oppose à la décroissance des reliefs. La modélisation physique du phénomène d'isostasie ne fait intervenir que la densité du matériel érodé en surface ρ_s et celle de l'asthénosphère à la profondeur où se produit la compensation isostatique ρ_a . Le taux d'abaissement $\frac{dh}{dt}$ de la surface est relié au taux d'érosion $\frac{dE}{dt}$ par la formule :

$$\frac{dh}{dt} = \left(-1 - \frac{\rho_s}{\rho_a} \right) \frac{dE}{dt}$$

Cette relation montre que si ρ_s tend vers 0, l'effet de l'érosion est exactement compensé par le rebond isostatique. *Braun et al. (2014)* ont observé sur des simulations numériques l'impact de la densité et de la dureté du matériel érodé. Ils ont constaté que ces deux propriétés des roches induisent des signatures topographiques spécifiques. Leur analyse fournit de précieux éléments pour répondre dans différents contextes à la question fondamentale : l'élévation d'un champ topographique est-elle contrôlée par la densité ou par la dureté des roches érodées ? En décrivant finement les propriétés statistiques des surfaces, les indicateurs innovants que nous présentons dans cette thèse pourraient permettre à leur tour de définir des critères pour répondre à cette question.

1.1.2.5 Topographie et dynamique interne

La topographie d'un corps est largement dominée par les processus de surface mais l'activité interne d'une planète peut également participer à son évolution globale. Pour les corps du système solaire qui ne peuvent pas être étudiés par des procédés sismographiques, la topographie (couplée avec la gravité) est une observable majeure pour contraindre la structure interne (*Wieczorek, 2007*) et retracer l'histoire de la planète. *Newman and Tur-*

cotte (1990) ont utilisé la topographie et le champ de gravité martien pour contraindre l'épaisseur moyenne de la croûte, ses variations globales d'épaisseur ainsi que la densité relative du manteau. Dans le même esprit, *Simons et al.* (1994) ont étudié la stabilité de la topographie crustale de Vénus et *Barnett et al.* (2002) les variations d'épaisseur de la lithosphère élastique. Le cas de Mercure a été traité par *Smith et al.* (2012). D'autres corps ont également pu être abordés malgré des données topographiques partielles (*Nimmo et al.*, 2003; *Giese et al.*, 2007; *Nimmo et al.*, 2010). Ces études portent sur les couches internes les plus superficielles (croûte, lithosphère). Cependant, les couches plus profondes pourraient également influencer les caractéristiques à grande échelle du géoïde et de la topographie. Les travaux de *Steinberger et al.* (2010) suggèrent, en s'appuyant sur les données disponibles pour la Terre, Mars et Venus, que les grandes longueurs d'onde du champ pourraient être principalement déterminées par des phénomènes sub-lithosphériques (dynamique du manteau). Le lien entre la convection mantellique, la topographie et le géoïde a été étudié en détail par *Golle* (2012). Si les processus internes d'un corps jouent un rôle dans l'aspect d'une surface, ils pourraient laisser une signature statistique. Ces études justifient donc l'importance de caractériser au mieux les statistiques de la topographie.

1.2 Topographie

Le concept de topographie est indissociable de celui de géodésie (*Heiskanen and Moritz*, 1967) qui a pour objet la détermination précise (i) de la forme et (ii) du champ de pesanteur d'un corps céleste.

1.2.1 Géodésie, géoïde

1.2.1.1 Forme approximative d'un corps céleste

La forme d'une planète est en première approximation une sphère. Cette figure s'explique par les lois de la gravitation universelle de Newton. Un corps céleste suffisamment massif tend vers un état d'équilibre dit hydrostatique. En l'absence de rotation, il occupe un volume dont les contours sont sphériques de manière analogue à un volume d'eau liquide

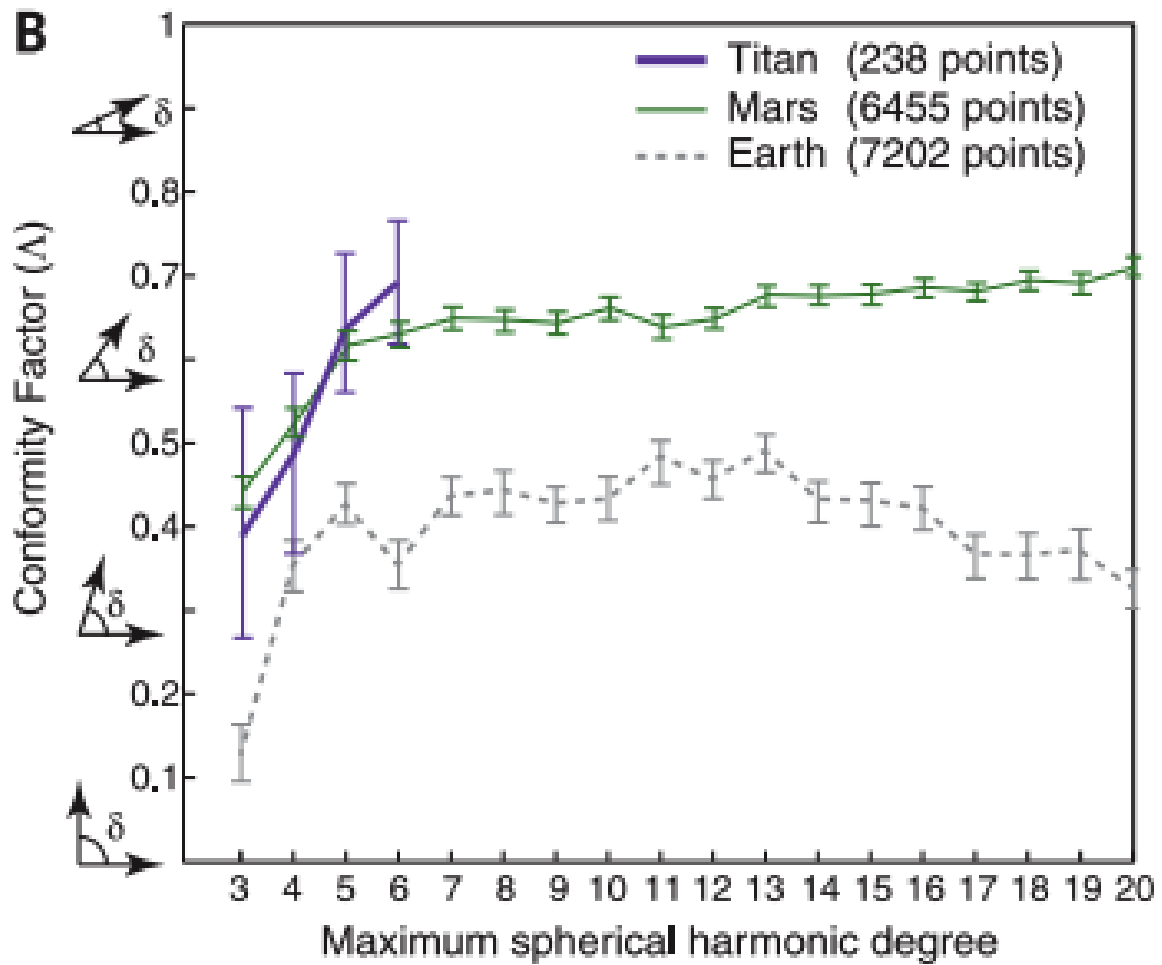


FIGURE 1.4 – Conformité topographique pour 3 corps du système solaire. Le cas de la Terre fait figure d’exception. Voir *Black et al.* (2017) pour les détails de la définition de l’indicateur.

qui en l'absence de pesanteur prend la forme d'une sphère. A l'échelle des temps géologiques, les corps telluriques se déforment comme des liquides. C'est en règle générale la masse de l'objet céleste qui détermine si l'équilibre isostatique peut être atteint ou non. Ainsi, les 4 planètes telluriques du système solaire ont une apparence sphérique de même que la Lune, les quatre grands satellites de Jupiter (Ganymède, Callisto, Io et Europe), les planètes naines Ceres et Pluton etc... Cependant, les observations montrent que la sphère n'est au mieux qu'une approximation des contours réels d'un corps céleste. L'écart constaté peut s'expliquer au premier ordre par le mouvement de rotation du corps autour de son axe. L'effet centrifuge qui en résulte a une contribution nulle au niveau des pôles et maximale à l'équateur, déformant le corps qui tend à s'aplatir au pôle. La figure théorique résultant de la rotation d'un corps est un ellipsoïde. Ainsi pour la Terre qui effectue un tour complet sur elle-même en 24 heures, l'écart entre le rayon équatorial et polaire est d'environ 20 km. Cette différence est négligeable dans le cas de Mercure dont la période de rotation est beaucoup plus longue (88 jours).

1.2.1.2 Référentiel géodésique (ou ellipsoïde de référence ou datum)

Les contours réels d'un corps sont plus complexes qu'un ellipsoïde en raison d'éventuelles hétérogénéités de masse dans le manteau, de la rigidité de la croûte et des processus géologiques complexes actifs à la surface. Caractériser la forme d'un corps nécessite de définir un système de référence appelé référentiel géodésique pour identifier chaque point de la surface. Il y a plusieurs manières de procéder. L'approche la plus basique est celle qui consiste à réduire le référentiel géodésique à un simple repère cartésien dont le centre coïncide avec le centre de masse de la planète. A chaque point de la surface est alors associé un triplet de coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou son équivalent en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Dans ce repère géocentrique qui ne s'appuie sur aucune forme géométrique pré-supposée, les angles θ et ϕ représentent respectivement la latitude et la longitude géocentrique. Mais le plus souvent les référentiels géodésiques s'appuient sur un modèle d'ellipsoïde choisi pour ajuster au mieux la forme de la planète. Le même point est alors représenté dans un autre repère orthogonal (r', θ', ϕ') . La latitude géographique

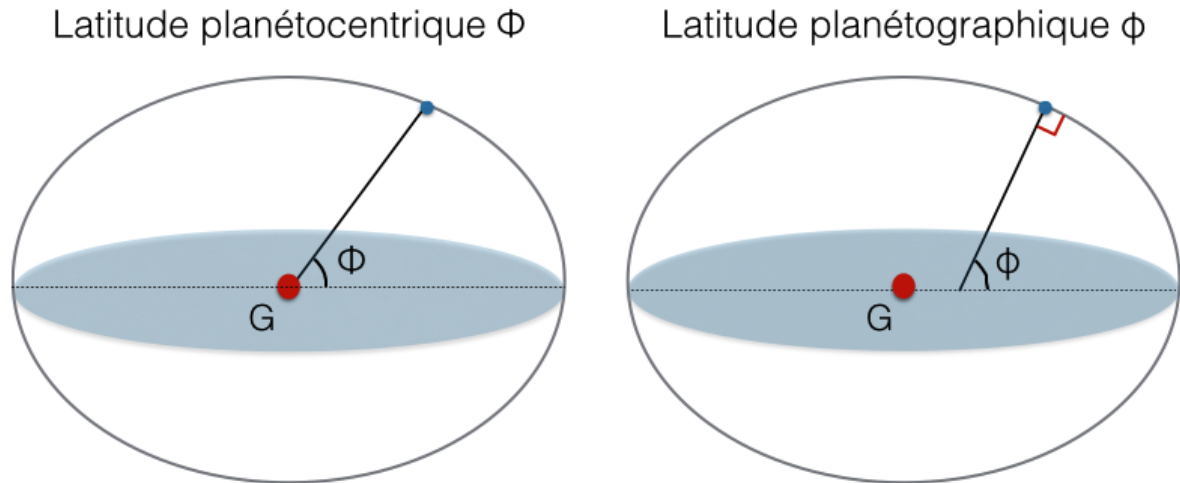


FIGURE 1.5 – définition de la latitude

θ' est définie comme l'angle entre la direction (d) perpendiculaire à l'ellipsoïde et le plan équatorial. Il est à noter que le passage du repère sphérique au repère ellipsoïdal est non trivial et nécessite d'être calculé numériquement par itération. La figure 1.5 illustre la différence entre les deux référentiels qui s'amplifie avec l'ellipticité du corps. Historiquement, plusieurs pays disposent de leur propre référentiel géodésique local en choisissant un ellipsoïde de référence tangent à leur surface. Aujourd'hui, les référentiels géodésiques sont devenus globaux grâce au développement des techniques satellitaires bien que certains référentiels locaux conservent leurs usages pour certains territoires. Le référentiel communément utilisé sur Terre (notamment par le système GPS) est WGS 84 (World Geodetic System). En France, il remplace depuis 1984 la Nouvelle Triangulation de la France (NTF) qui reposait sur des mesures géométriques et plus de 70000 repères géodésiques.

1.2.1.3 Gravité

Un corps massif génère un champ de gravité \vec{g} en tout point de l'espace qui l'environne. Dans le cas d'un corps sphérique et homogène, ce champ peut être calculé théoriquement. Il est proportionnel à la masse M du corps et décroît avec le carré de la distance r au centre de masse :

$$\vec{g}(r) = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \quad (1.3)$$

G est la constante universelle de gravitation et \vec{u}_r un vecteur unitaire radial. Dans le cas d'un corps quelconque, le champ de gravité est plus complexe. Sa forme exacte dépend de la distribution des masses à l'intérieur du corps et des irrégularités des reliefs. Il peut être mesuré sans difficulté en tout point de la surface à l'aide d'un gravimètre. Cependant, une carte représentant la mesure gravimétrique en tout point de la surface n'est pas pertinente puisque la gravité perd en intensité avec l'altitude de manière significative ($\sim 0.309 \text{ mgal.m}^{-1}$). On préfère donner l'écart entre le champ de gravité estimée sur une équipotentielle de pesanteur et sa valeur théorique pour un ellipsoïde homogène. Il s'agit de l'anomalie « à l'air libre ». A titre d'exemple, la figure 1.10a cartographie dans le cas de la Terre la répartition des anomalies de gravité à l'air libre. La carte montre des variations de l'ordre 400 mGal à l'échelle de la planète. Ces variations assez faibles au regard des larges fluctuations du relief terrestre peuvent s'expliquer par le phénomène de compensation isostatique.

1.2.1.4 Géoïde

A la surface d'un corps, le champ de gravité n'est pas uniforme. En revanche, il est possible de définir des surfaces équipotentielles de pesanteur pour lesquelles la somme du potentiel de gravité et du potentiel de rotation est constant. Par définition, deux points de l'espace appartenant à la même surface équipotentielle sont à la même altitude. Sur Terre, les océans définissent naturellement une surface équipotentielle de pesanteur. Le niveau moyen des mers est donc communément choisi pour fixer le niveau 0 de l'altitude. Cette notion est applicable à tous les corps (la présence d'océan n'est pas indispensable). La surface sélectionnée pour servir de référence est appelée géoïde. La figure 1.10b montre les ondulations du géoïde terrestre par rapport à l'ellipsoïde de référence WGS84. On constate sans surprise que la surface s'éloigne sensiblement d'un ellipsoïde (forme qu'elle prendrait si la Terre était elle-même ellipsoïdale et parfaitement homogène) avec des écarts

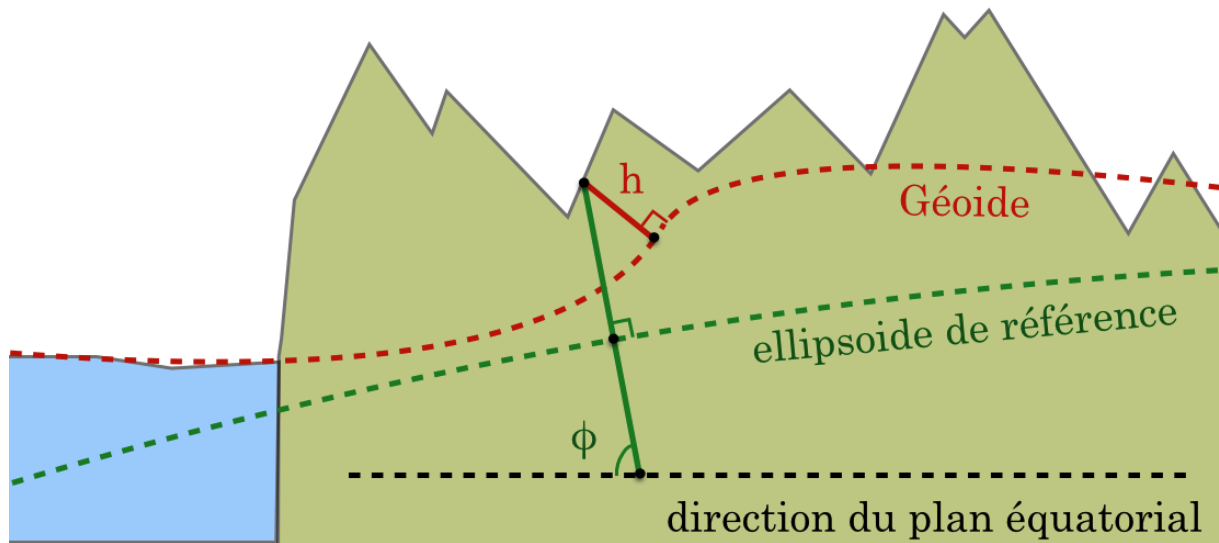


FIGURE 1.6 – Définition de la topographie

relatifs de l'ordre de la centaine de mètres entre les points les plus éloignés du globe.

1.2.1.5 Topographie

La géométrie exacte d'un corps dans l'espace et la connaissance détaillée du géoïde permettent enfin de définir la notion de topographie. Le champ topographique est la donnée pour tout point de la surface de la distance qui le sépare du géoïde dans la direction normale à ce dernier. La figure 1.6 illustre cette définition en représentant d'une part l'ellipsoïde sur lequel s'appuie le référentiel géodésique choisi, et d'autre part les ondulations du géoïde. La figure 1.11 représente la topographie terrestre.

1.2.2 Formalisme

La forme d'une planète, le champ topographique et le géoïde sont des champs qui associent à chaque couple de latitude-longitude (θ, ϕ) une grandeur scalaire. Pour exprimer ces champs, les harmoniques sphériques (*Blackburn, 1986*) constituent une base orthogonale de fonctions sphériques qui s'impose naturellement. Ces fonctions particulières se décomposent en un produit de 3 facteurs faisant chacun intervenir une seule des 3 variables sphériques (r, θ, ϕ) .

$$V(r, \theta, \phi) = A(r)B(\phi)C(\theta) \quad (1.4)$$

La condition du laplacien nul (nécessaire pour un champ en dehors des sources) entraîne :

$$A(r) \sim (r^l + r^{-(l+1)}) \quad K(\phi) \sim e^{im\phi} \quad C(\theta) \sim P_{lm}(\cos\theta) \quad (1.5)$$

Les fonctions P_{lm} sont les polynômes de Legendre :

$$P_{lm}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2(l-m)!}{(l+m)!} \frac{(-1)^m}{2^l l!}} (1 - \cos\theta)^{m/2} \frac{\partial^{l+m} (\cos^2\theta - 1)^l}{\partial (\cos\theta)^{l+m}} \quad (1.6)$$

Elles ne sont définies que pour des valeurs de l entières et positives et des valeurs de m entières et comprises entre $-l$ et l . $P_{lm}(\cos\theta)$ est donc un produit de sinus et cosinus à la puissance l et m . Plus les valeurs du degré l et de l'ordre m sont élevées, plus les $P_{lm}(\cos\theta)$ (resp. $e^{im\phi}$) oscillent rapidement en latitude (resp. longitude). Pour aborder un champ scalaire qui ne dépend pas de la variable r (c'est le cas de la topographie), nous pouvons nous contenter des harmoniques surfaciques en ignorant le facteur radial :

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = C_{lm} P_{lm}(\theta) e^{im\phi} \quad (1.7)$$

Les coefficients C_{lm} sont des facteurs de normalisation. La figure 1.7 représente les premiers harmoniques surfaciques. Chaque harmonique s'appuie sur une surface qui enveloppe la sphère en associant à chaque orientation une intensité. Le tout premier harmonique ($l = 0$ et $m = 0$) est un champ uniforme. Les suivants présentent des ondulations en longitude et latitude dont la fréquence augmente avec la valeur de m et l . Par analogie avec l'analyse de Fourier qui permet de décomposer un champ classique ($1D$ ou $2D$) sur une base de *sinus* et de *cosinus*, une fonction sphérique $h(\theta, \phi)$ peut être décomposée sur la base des harmoniques sphériques :

$$h(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.8)$$

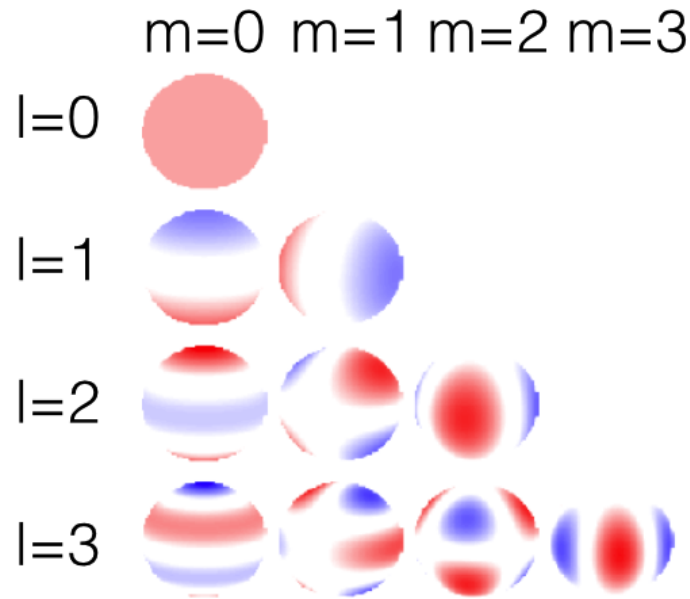


FIGURE 1.7 – Représentation des harmoniques sphériques surfaciques pour les premiers degrés (jusqu'à $l = 3$). L'alternance de couleurs rouge, bleue et blanche montre les maxima, minima et passages à zéro de ces fonctions enveloppées sur une sphère.

Chaque coefficient f_{lm} définit une intensité appliquée à un harmonique en fonction des fluctuations du champ à différentes échelles. A titre d'exemple, les grandes variations d'altitude Nord-Sud du champ topographique de Mars (dichotomie martienne) se reflètent dans l'intensité du coefficient f_{10} , parfois noté C_{10} . A chaque degré correspond une longueur d'onde caractéristique par analogie avec la décomposition en série de Fourier :

$$\lambda_l = \frac{2\pi R}{l} \quad (1.9)$$

où R est le rayon du corps considéré. L'équation 1.8 permet de reconstruire un champ h sous forme de carte (latitude-longitude) à partir de son développement en harmoniques sphériques. Plusieurs procédés de projections cartographiques peuvent être utilisés pour représenter h sur un plan. Pour les cartes de ce chapitre, nous utilisons la projection elliptique dite de Mollweide qui respecte la conservation des surfaces au détriment de la conservation des angles.

1.2.3 Méthodes de mesure

Nous rappelons à présent les méthodes à mettre en oeuvre pour mesurer le champ topographique.

1.2.3.1 Altimétrie Lidar ou Radar

La forme d'un corps céleste est le plus souvent mesurée à l'aide d'une technique de télédétection active appelé Lidar (Light Detection And Ranging). Le concept du Lidar repose sur celui du Laser pour collecter des informations à distance depuis un satellite en orbite, un avion, un drone ou depuis le sol. Le système de mesure embarqué sur un support en mouvement est constitué d'un émetteur Laser et d'un récepteur. Le laser génère une série d'impulsions en direction de la cible. Une partie du signal est alors réfléchi en direction du récepteur. Le temps nécessaire à l'onde lumineuse pour parcourir la distance aller-retour peut être convertie en distance, connaissant la vitesse de propagation. Afin que les mesures d'élévation soient correctement géoréférencées, la position et l'orientation (attitude) du système de mesure doivent être connues tout au long de son déplacement (voir figure 1.8). Sur Terre, le système de positionnement par satellite (GPS) permet de connaître la position d'un drone ou d'un avion avec une précision centimétrique permettant des campagnes de mesures locales. Dans le cas d'un satellite en orbite autour d'une autre planète, l'erreur sur la position de la sonde peut être grande et générer des incertitudes. La technique du Lidar repose sur l'utilisation d'ondes lumineuses (visible, ultra-violet ou infra-rouge). La longueur d'onde du rayonnement étant de l'ordre du micron, la méthode est très sensible à la présence éventuelle de nuage dans l'atmosphère. En fonction des caractéristiques du milieu, il peut être plus efficace d'utiliser un rayonnement électromagnétique de grande longueur d'onde (radar) capable de traverser les nuages (voir l'exemple de la Terre, section 1.3.1 et de Vénus, section 1.3.4).

1.2.3.2 Extraction de la topographie à partir d'image

Le principe de la mesure directe par altimétrie (radar ou lidar) a l'inconvénient d'être limité à la trace du satellite et exige donc une longue période d'acquisition pour cartogra-

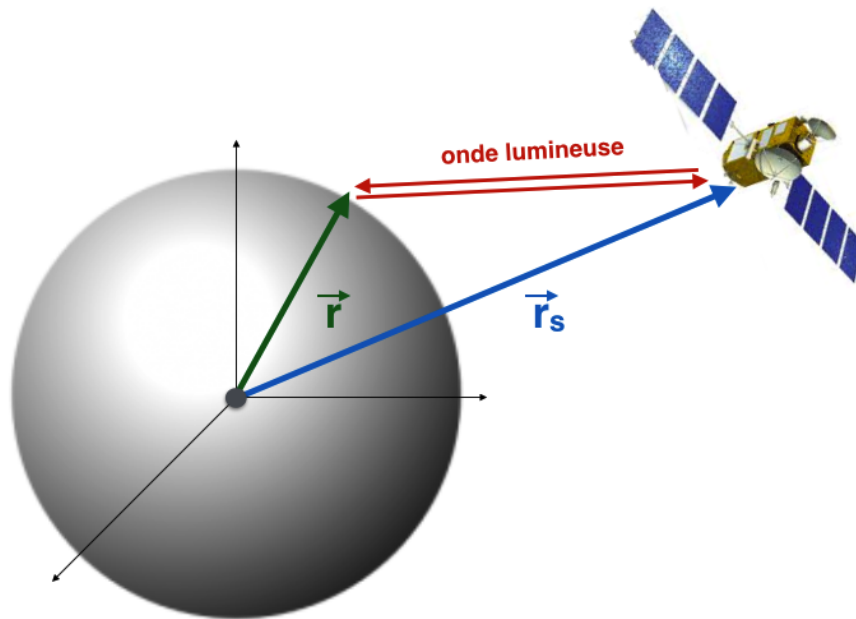


FIGURE 1.8 – Principe de l'altimétrie laser ou radar

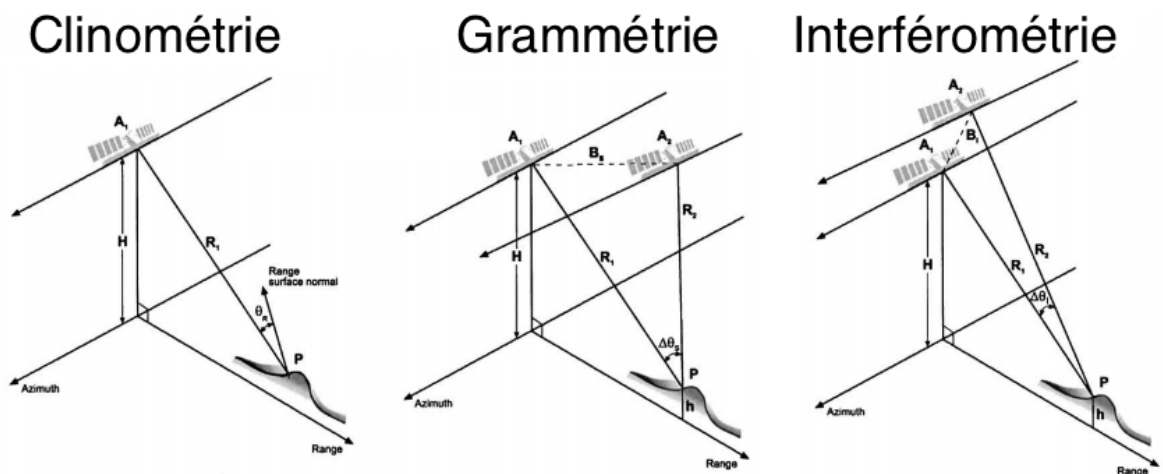
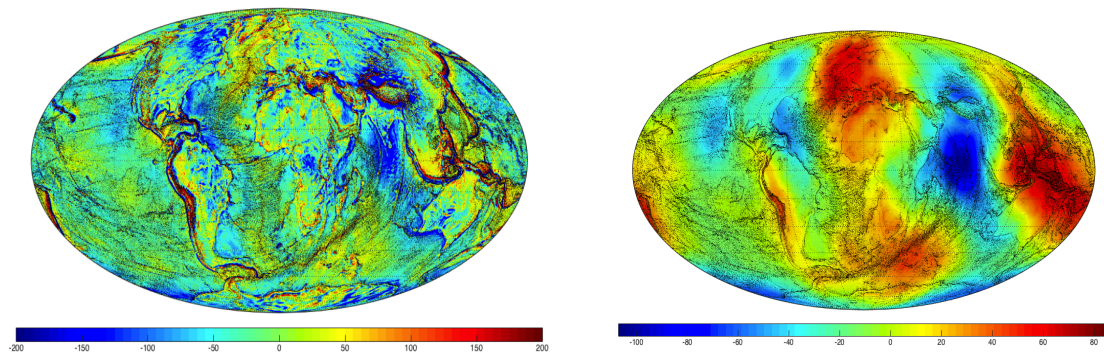


FIGURE 1.9 – Schéma de principe des 3 méthodes indirectes (Clinométrie, (photo)grammétrie, interférométrie) permettant d'estimer le relief à partir d'images (optique ou radar).

phier la forme globale d'une planète (voir les cas de Mars, section 1.3.2 et la Lune, section 1.3.3). De manière indirecte, il est possible d'extraire des informations sur les reliefs à partir d'images optiques ou radar. Certaines techniques sont applicables aux deux types d'images : la clinométrie et la grammétrie. Nous mentionnons également une méthode propre au radar : l'interférométrie.

Clinométrie Cette méthode consiste à interpréter les variations de luminosité apparentes sur une image pour en déduire la valeur locale des pentes (*Horn and Brooks, 1989*). La réflectivité d'un pixel dépend de l'orientation locale de la surface par rapport à la source lumineuse (lumière du soleil, émission radar) et de l'angle d'observation de l'image (position du capteur). Si la réponse du capteur en fonction de ces paramètres est correctement modélisée, il est possible d'inverser la valeur de la pente locale à partir de l'image. Par intégration, la topographie peut être estimée. Initialement proposée sur des images visibles et adaptée aux images radar (*Horn and Brooks, 1989; Wildey, 1984*), cette méthode permet d'estimer la topographie à partir d'une seule image. Relativement peu précise, elle n'est plus ou peu utilisée.

Photogrammétrie Le principe de la photogrammétrie (*Wolf and Dewitt, 2000*) ou de la radargrammétrie (*Raggam et al., 1987*) repose sur l'acquisition de deux images (optique ou radar) représentant une même scène avec des géométries différentes. Les deux images constituent un couple stéréoscopique dont la combinaison permet de reconstituer les reliefs, par analogie avec le principe de la vision humaine. Les pixels sont identifiés deux à deux par corrélation automatique. La distance apparente entre les positions d'une paire de pixels (parallaxe) permet de remonter à l'altitude du lieu imagé. Malgré sa simplicité de principe, cette approche stéréoscopique est complexe à mettre en oeuvre et nécessite d'importants moyens de calcul. Elle constitue néanmoins la méthode la plus utilisée pour générer des modèles numériques de terrain quand des mesures directes ne sont pas disponibles.



(a) Anomalies « à l'air libre » en mGal du champ de gravité terrestre estimées à partir du modèle de gravité EGM2008 (*Pavlis et al.*, 2012)

(b) Géoïde terrestre en mètres estimé à partir du modèle de gravité EGM2008 sans la composante ellipsoïdale (*Pavlis et al.*, 2012)

FIGURE 1.10 – Anomalies à l'air libre et géoïde terrestre.

Interférométrie radar La méthode d'interférométrie radar InSAR (*Zebker and Goldstein*, 1986) est une alternative possible. Elle a permis de cartographier les zones émergées terrestres (*Rabus et al.*, 2003) avec une excellente résolution en seulement une dizaine de jours (voir paragraphe 1.3.1). Le principe est de combiner deux images radar d'une même scène observée avec des angles de vue différents afin de comparer la phase entre les paires de pixels. Grâce à la cohérence du signal, la phase du signal retour est liée à la distance parcourue par l'onde. Elle dépend aussi de la nature de la cible qui peut introduire une différence de phase quelconque mais le fait d'avoir deux images de la même cible permet de s'affranchir de cette inconnue. La différence de phase qui résulte du changement de la position du satellite peut être convertie en élévation du lieu considéré.

1.3 Jeux de données planétaires

Nous présentons dans cette section les jeux de données complets (ou quasi complets) de la topographie des principaux corps du système solaire : La Terre, Mars, la Lune, Vénus et Mercure. Nous n'aborderons pas les cas de Titan (*Kirk et al.*, 2005) et Io (*White et al.*, 2014) car les données disponibles sont insuffisantes sur une base globale.

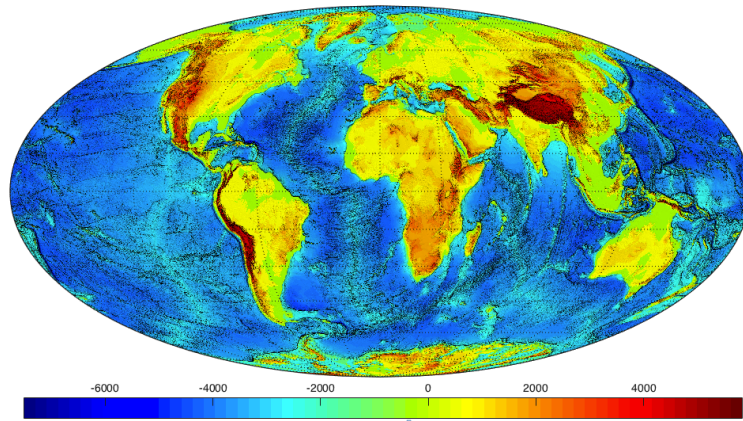
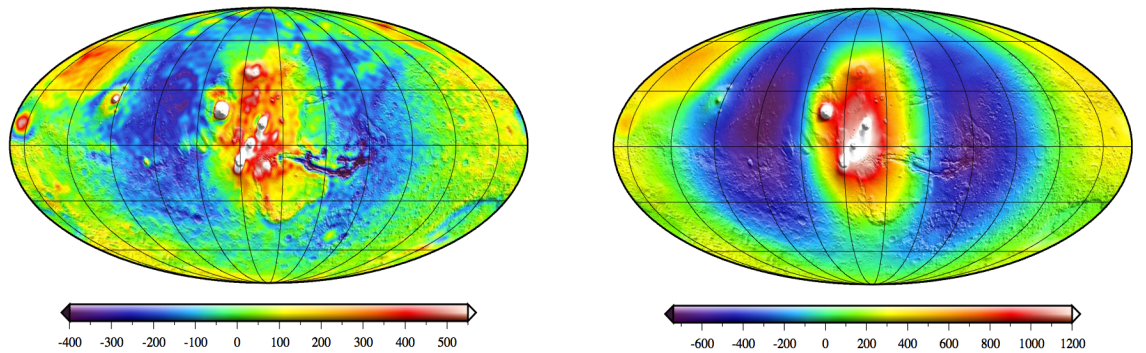


FIGURE 1.11 – Topographie globale de la Terre en mètres (ETOPO1, *Amante and Eakins*, 2009)

1.3.1 La Terre

Gravité La gravité terrestre, dont la connaissance est indispensable pour connaître la topographie à l'échelle globale a été mesurée sur Terre par de nombreuses méthodes : campagnes de mesures au sol, altimétrie des océans, analyse des trajectoires de satellite. Le modèle EGM96 (*Lemoine et al.*, 1998) a été le premier à combiner des informations locales avec les variations globales détectées par les méthodes satellitaires. Développé jusqu'au degré $l = 360$ (soit une résolution d'une centaine de kilomètres, voir équation 1.9), il est largement utilisé. Deux missions spatiales dédiées, CHAMP (*Reigber et al.*, 2005b) et GRACE (*Tapley et al.*, 2004), ont permis de construire des modèles plus performants (*Reigber et al.*, 2005a; *Tapley et al.*, 2005). Actuellement, le modèle de gravité le plus complet est EGM2008 (*Pavlis et al.*, 2012) qui multiplie par 6 la résolution du modèle EGM96 ($l > 2000$). La figure 1.10a montre les anomalies de gravité à l'air libre de la Terre dans le cadre du modèle EGM2008. La figure 1.10b donne un aperçu du géoïde.

Topographie La topographie de la Terre est celle pour laquelle nous disposons du plus grand volume d'informations mais reste paradoxalement difficile à caractériser sur une base globale. Malgré des campagnes de mesures nombreuses, certaines zones, notamment les zones océaniques restent assez mal contraintes. De plus, la multiplicité des systèmes de référencement, variables d'un pays à l'autre a longtemps rendu difficile la combinaison



(a) Anomalies radiales à l'air libre en mGal du champ de gravité de Mars, mgm1025 (*Lemoine et al.*, 2001). Reproduit depuis *Wieczorek* (2007).

(b) Géoïde martien (ou Aéroïde) en mètres, mgm1025 (*Lemoine et al.*, 2001) sans la composante ellipsoïdale. Reproduit depuis *Wieczorek* (2007).

FIGURE 1.12 – Anomalies à l'air libre et géoïde de Mars.

des cartes topographiques locales. Des progrès spectaculaires ont été réalisés au cours des dernières décennies. En 2000, les zones émergées ont été cartographiées depuis l'espace dans le cadre la mission SRTM (Shuttle Radar Topography Missions, *Rabus et al.*, 2003) par la méthode d'interférométrie radar. 80% de la surface est alors couverte avec un échantillonnage horizontal de 30 mètres et une précision verticale de 16 mètres. Le géoïde servant de référence pour la topographie SRTM dérive de gravité EGM96 (*Lemoine et al.*, 1998). Récemment, un jeu de données moins bien résolu (1 minute d'arc) mais global, incluant les fonds marins, a été construit en combinant les données SRTM avec différentes sources de données bathymétriques (ETOPO1, *Amante and Eakins* 2009). La figure 1.11 donne un aperçu des traits caractéristiques de la topographie terrestre marqués par la dichotomie entre océan et continent et les effets de la tectonique des plaques.

1.3.2 Mars

Au cours des dernières décennies, l'exploration spatiale a considérablement fait évoluer notre connaissance de Mars. Historiquement, les premiers modèles topographiques ont été élaborés à partir d'images radar depuis la Terre ou par des méthodes stéréoscopiques (*Esposito et al.*, 1992). En 1997, la mission Mars Global Surveyor place en orbite autour

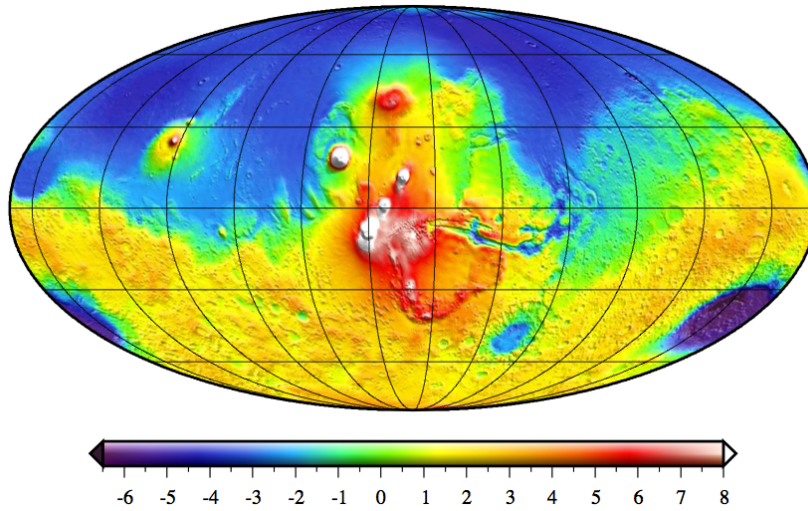


FIGURE 1.13 – Topographie de Mars en km calculée à partir des mesures de la forme de Mars par MOLA (*Smith et al.*, 2001b) et du modèle de géoïde martien mgm1025 (*Lemoine et al.*, 2001).

de Mars l’altimètre laser MOLA (*Smith et al.*, 2001b). Le volume de données altimétriques accumulées au cours de 4 années d’opérations a permis une cartographie globale de la planète avec une résolution d’environ $300m$, faisant de Mars une planète globalement mieux cartographiée que la Terre. La taille du faisceau laser est d’environ $168m$ au sol et l’erreur sur la distance mesurée d’une dizaine de mètres. L’incertitude augmente sensiblement avec la rugosité des terrains survolés et souffre des imprécisions sur la connaissance de la position radiale de la sonde. Cette source d’erreur peut être réduite localement en exploitant le croisement des orbites et la multiplicité des mesures d’altitude en un point donné. Ainsi, l’exploitation des mesures de MOLA (*Smith et al.*, 2001a) a permis de mesurer les variations temporelles de l’épaisseur de la fine couche de CO_2 dans les régions polaires ($\sim 1m$).

Gravité Alors que sur Terre, la topographie est traditionnellement définie comme la hauteur au-dessus du niveau des mers, cette approche est impossible sur Mars en l’absence d’eau liquide. Le géoïde martien est par convention la surface équipotentielle dont le niveau de référence est la moyenne du potentiel au niveau de l’équateur à un rayon de 3396 km. Cette surface de référence s’écarte d’environ 2 km de l’ellipsoïde de révolution et peut donc sensiblement impacter les fluctuations de topographie à grande échelle. Les

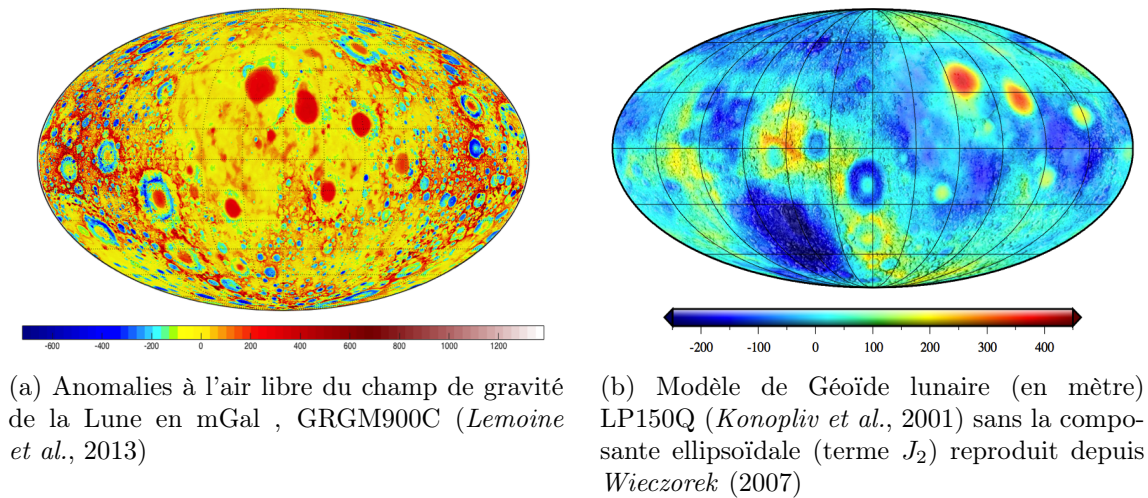


FIGURE 1.14 – Anomalies à l'air libre et géoïde de la Lune.

figures 1.12a et 1.12b montrent respectivement les anomalies radiales de gravité à l'air libre et le géoïde martien dans le cadre du modèle mgm1025 (*Lemoine et al.*, 2001) développé à l'ordre 80 (résolution de 250 kilomètres)

Topographie La figure montre la topographie déduite des mesures de MOLA (*Smith et al.*, 2001b). Un des traits les plus frappants à grande échelle est la dichotomie crustale qui oppose les terrains peu élevés et relativement plats de l'hémisphère nord aux zones très cratérisées de l'hémisphère sud. La topographie fait également ressortir des grands bassins d'impact (Hellas, Agyre, Isidis), la province volcanique d'Elysium et le canyon de Valles Marineris. Le point le plus élevé est le sommet du volcan Olympus Mons qui culmine à 21 km au-dessus du niveau de référence.

1.3.3 La Lune

Gravité La connaissance du champ de gravité de la Lune et de sa topographie est longtemps restée incomplète à cause de sa rotation synchrone qui masque en permanence une des faces pour un observateur terrestre. Des modèles de gravité existent néanmoins depuis les missions Appolo, Clementine et Lunar Prospector mais la mission GRAIL (*Zuber*

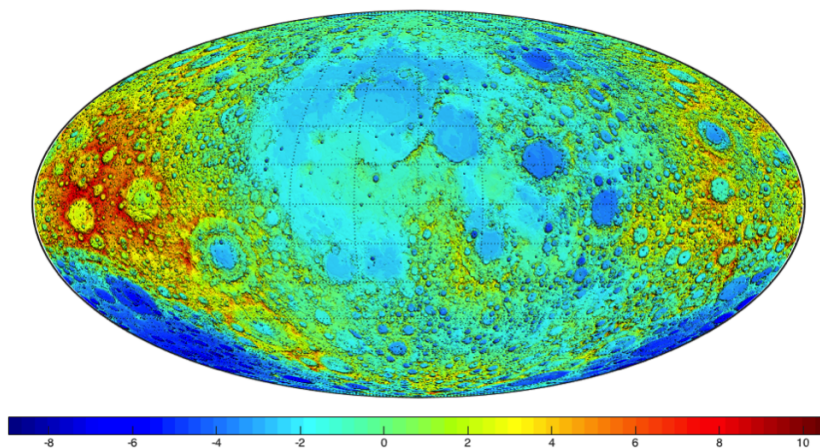


FIGURE 1.15 – Topographie de la Lune en kilomètres, calculée à partir des mesures de la forme de la Lune par LOLA (*Smith et al.*, 2010) et du modèle de Géoïde lunaire LP150Q

et al., 2013) lancée en 2011 a permis d'élaborer le modèle très détaillé en vigueur aujourd'hui *GRGM900C* (*Lemoine et al.*, 2013). A l'instar de la mission terrestre GRACE, GRAIL est constitué de deux satellites de trajectoires similaires, l'un précédant l'autre de quelques kilomètres. Les variations de vitesse relative entre les deux satellites induites par les fluctuations fines du champ de gravité lunaire permettent d'inverser le champ beaucoup plus efficacement que les méthodes classiques de suivi d'orbite simple. La figure 1.14a montre les anomalies radiales à l'air libre du champ de gravité lunaire dérivant du modèle *GRGM900C* (*Smith et al.*, 2012) élaboré jusqu'à l'ordre 900. La figure 1.14b est une représentation du géoïde dérivant du modèle plus ancien LP150Q (*Konopliv et al.*, 2001) largement suffisant pour servir de niveau de référence à la topographie.

Topographie Comme Mars, la Lune a fait l'objet d'une cartographie globale très précise lors de la mission LRO (Lunar Reconnaissance Orbiter) avec un altimètre laser dédié (LOLA, *Smith et al.*, 2010). Avec une précision verticale 3.5 fois supérieur à celle de MOLA et 32 fois plus de mesures à chaque seconde, les performances de LOLA ont permis de reconstruire la surface de la Lune avec une précision de 40 mètres. La figure 1.15 montre la topographie construite en combinant les données LOLA et le modèle de géoïde *GLGM - 3*. Bien qu'étant un corps différencié, la Lune présente une surface aux caractéristiques très différentes de la Terre ou Mars en l'absence d'atmosphère, d'érosion

et de tectonique. La topographie de la lune est très largement dominée par le processus de cratérisation, présentant notamment le plus grand bassin d'impact du système solaire localisé au pôle sud. Des zones plus lisses et plus basses (les mers lunaires) d'origines volcaniques occupent néanmoins une surface importante de l'hémisphère nord. On note que les ondulations du géoïde lunaire sont plus importantes que dans le cas terrestre avec une amplitude (~ 700 mètres) et que les fluctuations de la topographie sont comparables à celle de notre planète (~ 20 kilomètres).

1.3.4 Vénus

La topographie de Vénus n'est pas connue avec une précision aussi satisfaisante mais des jeux de données sont tout de même disponibles grâce aux missions Pioneer, Venera 15 et 16 et surtout Magellan (*Saunders and Pettengill, 1991*) en orbite de 1990 à 1994. Pour traverser l'atmosphère très dense où se condensent des nuages opaques d'acide sulfurique, la méthode privilégiée est l'altimétrie radar. Une carte topographique globale de Vénus d'une résolution de 5×5 km (*Ford and Pettengill, 1992; Ford et al., 2014*) a pu être générée à partir des données de la mission Magellan. Elle comporte néanmoins un certain nombre de trous, comme le montre la figure 1.17. Les cartes des figures 1.16a et 1.16b montrent respectivement la répartition des anomalies de gravité et le géoïde de Vénus dans le cadre du modèle de gravité *SHG120* (*McNamee et al., 1993*). La topographie de Vénus, relativement plate, est dominée par de vastes plaines peu élevées, des plateaux de type continental et quelques dômes volcaniques. Contrairement à la Terre, elle montre peu de signes d'activité tectonique. Recouverte en grande partie par des roches volcaniques, sa surface est peu cratérisée, comme celle de la Terre, et donc récente. Par ailleurs, son atmosphère épaisse la protège efficacement du bombardement météoritique.

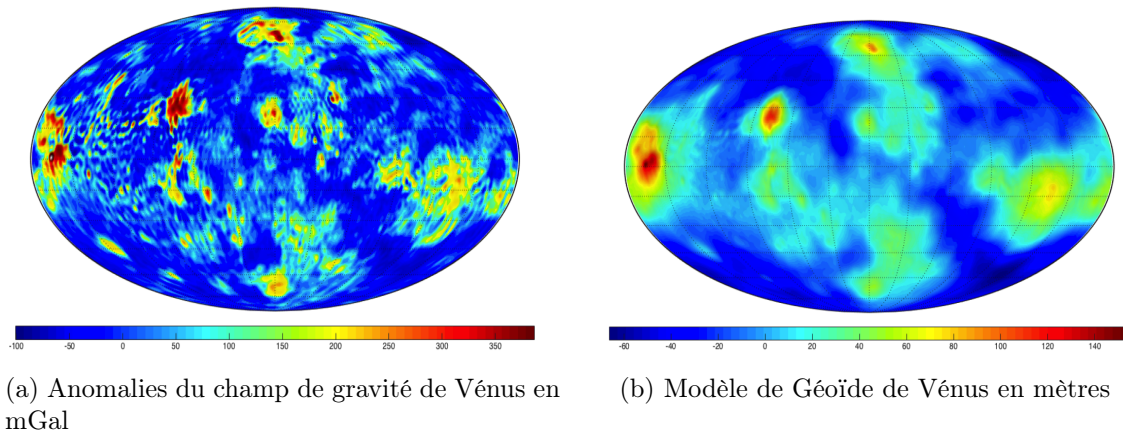


FIGURE 1.16 – Anomalies à l’air libre et géoïde de Vénus.

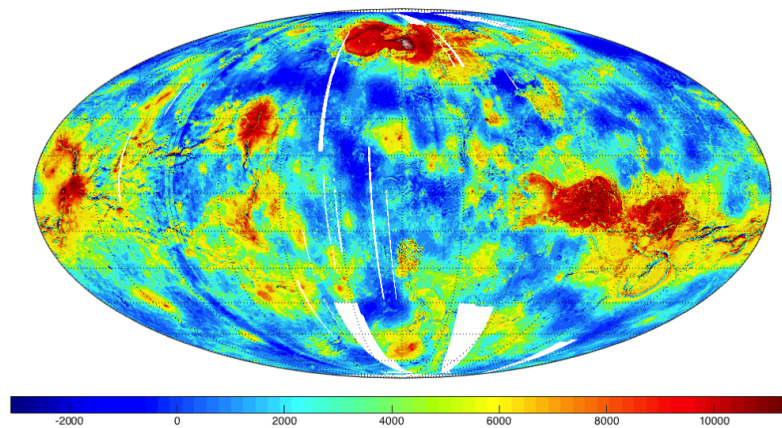
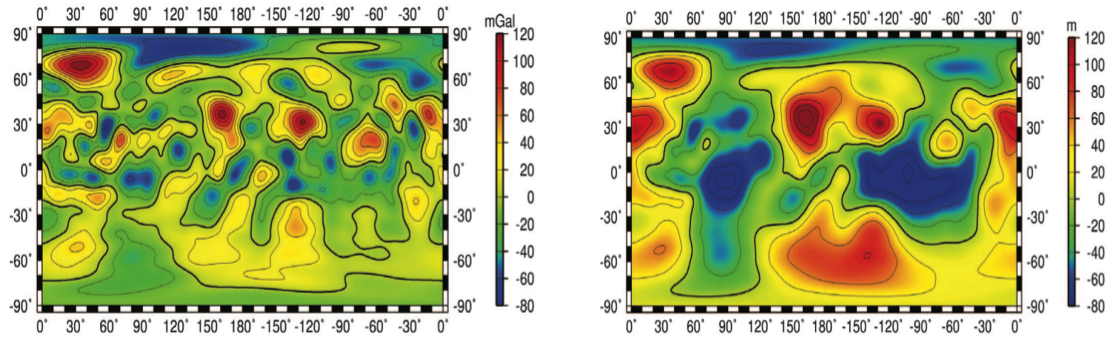


FIGURE 1.17 – Topographie de Venus en mètres (voir (*Ford et al.*, 2014))

1.3.5 Mercure

Les données disponibles pour Mercure ont été collectées par la mission MESSENGER équipée de l’altimètre laser MLA (*Zuber et al.*, 2012). Le suivi de la trajectoire de la sonde a permis de constituer un modèle de gravité développé jusqu’au degré 20 (*Smith et al.* 2012, voir figure 1.18). En raison de l’excentricité de l’orbite, seul l’hémisphère nord a pu être cartographié par altimétrie LASER avec une résolution d’environ 5 kilomètres. L’utilisation de paires d’images stéréoscopiques a finalement permis d’élaborer une carte globale de la topographie de Mercure (*Solomon et al.*, 2001; *Hawkins et al.*, 2007). Elle est représentée sur la figure 1.19. A l’instar de la Lune, le processus de cratérisation domine très largement la topographie globale de Mercure. Les voisinages des deux pôles sont en moyenne moins élevés que les régions équatoriales. Localement, certaines formations



(a) Anomalies du champ de gravité de la Mer-
cure en mGal reproduit depuis *Smith et al.*
(2012) .

(b) Modèle de Géoïde pour Mercure en mètres
reproduit depuis *Smith et al.* (2012) .

FIGURE 1.18 – Anomalies à l’air libre et géoïde de Mercure.

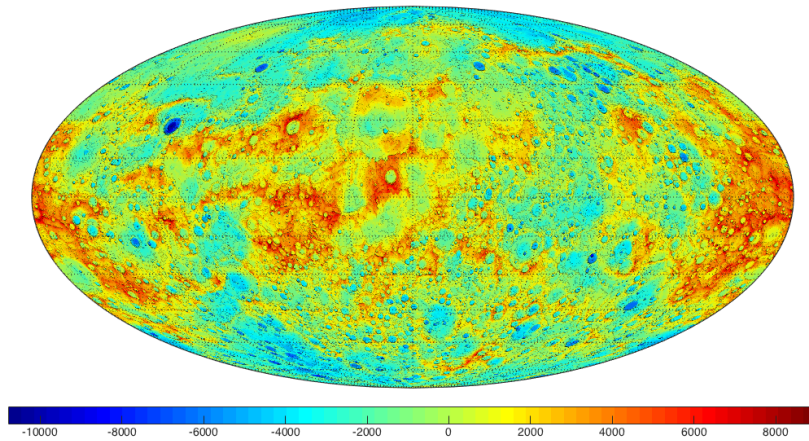


FIGURE 1.19 – Topographie globale de Mercure en mètres (*Solomon et al.*, 2001; *Hawkins et al.*, 2007).

semblent être d’origine volcaniques ou tectoniques

	Terre	Mars	Lune	Vénus	Mercure
Rayon	6 371 km	3 390 km	1 737 km	6 052 km	2 440 km
Résolution topographie globale	1.2 km	300 m	60 m	5 km	600m
Résolution gravité	15 km	250 km	12 km	1800 km	700 km

TABLE 1.1 – Caractéristiques des corps et des jeux de données disponibles

1.4 Etude quantitative de la topographie

Nous avons vu que si des corps comme Mars et la Lune restent moins bien connus que la Terre, leur topographie est mieux échantillonnée sur une base globale que celle de la planète bleue. Cette accumulation de données sur les topographies du système solaire a conduit de nombreux auteurs à considérer les reliefs du point de vue géométrique et statistique afin d'extraire le plus d'informations possible sur des corps où la moindre donnée demande des investissements considérables. Dans ce type d'analyse, le champ topographique modélisant la surface est considéré comme une fonction mathématique dont les propriétés peuvent être analysées.

1.4.1 Indicateurs classiques

L'information brute contenue dans un jeu de données peut être abordée en mettant en oeuvre plusieurs méthodes de complexité variable. La diversité des techniques appliquées dans la littérature étant très vaste, il est impossible d'être exhaustif dans ce manuscrit. Le lecteur peut se rapporter à *Olaya (2009)* pour un recensement des approches possibles que nous nous contentons de survoler dans cette section.

1.4.1.1 Paramètres géométriques

En premier lieu, des paramètres géométriques peuvent être évalués localement. En tant que fonction mathématique, un champ topographique $Z(x, y)$ est dérivable et son gradient peut être évalué en tout point. La pente locale est définie par :

$$pente = \arctan \|\text{grad}(Z(x, y))\|$$

Cet indicateur permet de quantifier de manière basique les reliefs d'une surface. Il peut être associé à des paramètres physiques comme le taux d'érosion du sol, son degré d'humidité ou la vitesse d'écoulement d'un fluide à la surface. La pente locale est communément utilisée pour représenter les MNT en reliefs ombrés en la combinant avec un autre paramètre, l'azimut correspondant à l'angle de la direction normale à la surface

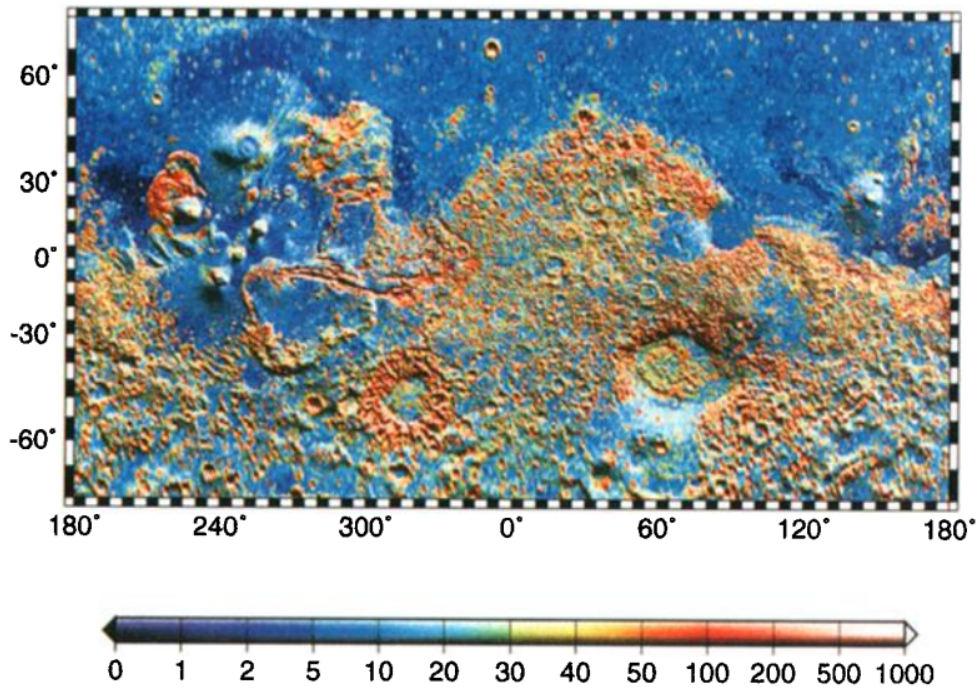
par rapport à une direction de référence. Ce nouvel indicateur apporte des informations complémentaires sur la direction attendue des écoulements ou le taux d'insolation. Il est également possible d'utiliser les dérivées secondes pour estimer localement la courbure verticale ou tangentielle du champ afin de faire ressortir les formes concaves ou convexes des reliefs.

1.4.1.2 Paramètres statistiques

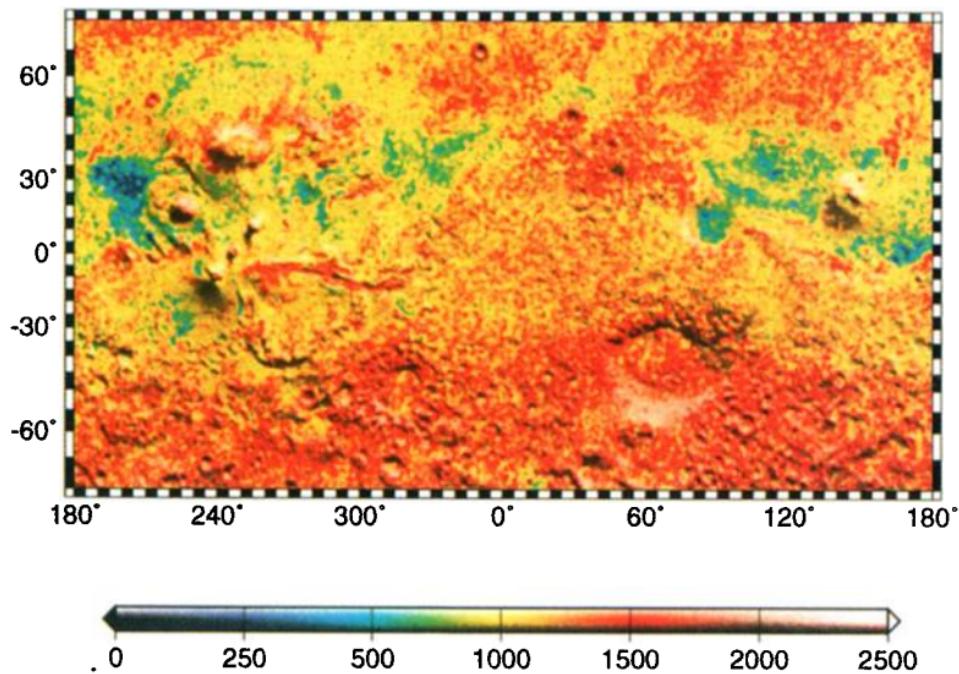
Des paramètres statistiques peuvent également être évalués comme la moyenne ou l'écart-type (moment d'ordre 1 et 2) des grandeurs évoquées ci-dessus (élévation, pente, azimuth...) sur une région donnée. Ces paramètres sont communément utilisés pour chercher la signature d'unités géologiques. Le principe général est de déplacer une fenêtre de taille Δx (à une ou deux dimensions) en estimant une grandeur statistique à l'intérieur de cette fenêtre (*Hobson, 1972; Olaya, 2009*). Cette approche vise à caractériser la notion de rugosité d'une surface. De nombreux indicateurs plus élaborés que la moyenne ou l'écart-type sont communément utilisés. Nous pouvons citer la gamme de valeurs (Ruggedness) proposé par *Melton (1965)* qui consiste à donner sur la fenêtre considérée l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur ou encore l'index de rugosité défini par *Hobson (1972)* (TRI, terrain ruggedness index) qui évalue l'écart-type entre l'élévation d'un point et ceux qui l'entourent dans une fenêtre glissante de taille fixée :

$$TRI(x, y) = std(h(x, y) - h_{fen\hat{e}tre}) \quad (1.10)$$

Sur Mars, *Aharonson et al. (2001)* ont proposé plusieurs indicateurs pour caractériser localement les propriétés de la topographie martienne en utilisant une fenêtre glissante (de 35 km). Après avoir pointé du doigt les limites de l'écart-type des pentes qui n'est pertinent que si la distribution est gaussienne (ce qui rarement le cas de la topographie), les auteurs montrent qu'il peut être avantageusement remplacé par la pente médiane obtenue à partir de la distribution cumulée des pentes : la pente médiane est celle pour



(a) Echelle interquartile locale en mètres dans une fenêtre glissante de 35 kilomètres. Reproduit depuis *Aharonson et al.* (2001).



(b) Longueur de décorrélation locale en mètres dans une fenêtre glissante de 35 kilomètres. Reproduit depuis *Aharonson et al.* (2001).

FIGURE 1.20 – Indicateurs locaux.

laquelle la probabilité cumulée vaut 0.5. Moins sensible aux fluctuations extrêmes, cet indicateur est plus robuste. Plutôt que de considérer les pentes, *Aharonson et al.* (2001) ont testé l'échelle inter-quartile (figure 1.20a) définie comme la différence entre le 3^{ème} (Q_3) et le 1^{er} (Q_1) quartile de la distribution des élévations :

$$R = \frac{N}{2N - 1}(Q_3 - Q_1) \quad (1.11)$$

en notant N le nombre de points dans la fenêtre. Par construction, cet indicateur vise à caractériser la composante verticale de la topographie. La composante horizontale peut être évaluée en calculant la longueur de décorrélation l (figure 1.20b) estimée à partir de la fonction d'auto-covariance Γ (*Aharonson et al.*, 2001) :

$$\Gamma(L\Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-L} (h_k - \bar{h})(h_{k+L} - \bar{h}) \quad (1.12)$$

où Δ est l'intervalle d'échantillonnage du champ, N le nombre de mesures dans la fenêtre et \bar{h} la moyenne du champ dans la fenêtre. Par définition, la longueur de décorrélation est telle $\Gamma(l) = \frac{1}{2}\Gamma(0)$. Les avantages et les inconvénients de ces estimateurs et leurs aptitudes à caractériser les unités géologiques sont discutés par *Aharonson et al.* (2001) et *Kreslavsky and Head* (1999).

1.4.2 Lois d'échelle

1.4.2.1 Principe général

Les indicateurs statistiques mentionnés plus haut sont définis à une échelle donnée ou visent à définir des grandeurs caractéristiques pour la topographie. En augmentant la distance entre les points considérés, la valeur des estimateurs change, reflétant les spécificités des morphologies dominantes à chaque échelle d'observation. Ainsi, *Kreslavsky and Head* (1999) proposent d'évaluer la pente médiane locale de la topographie martienne en considérant des lignes de bases de longueurs variables. Quant à la longueur de décorrélation, elle s'appuie implicitement sur l'hypothèse que la topographie contient une

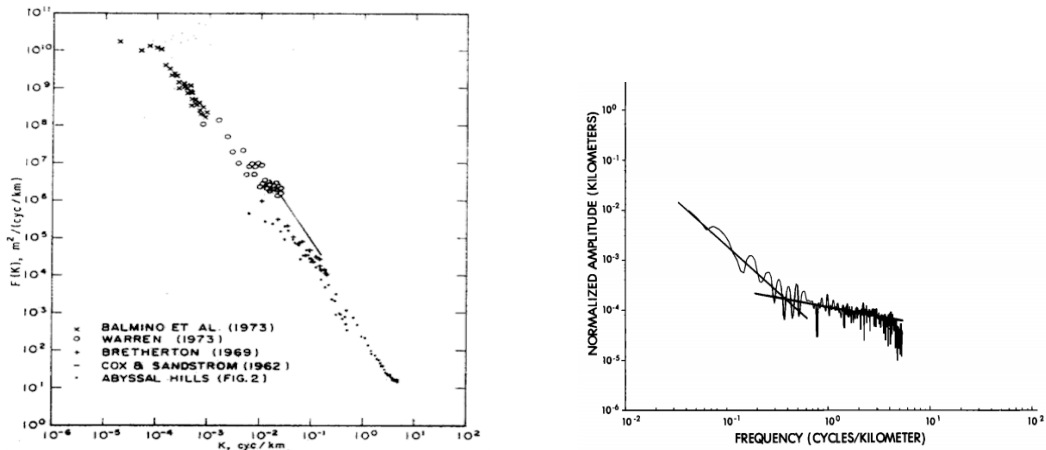
échelle caractéristique au-delà de laquelle les fluctuations d'altitude sont décorréées. Or, les processus qui façonnent la topographie, de même que les morphologies qui en résultent n'ont pas toujours de dimensions caractéristiques apparentes. Du moins, cette question fait débat (voir paragraphe 1.1.2.1). L'exemple typique est donné par la cratérisation qui produit des impacts similaires à toutes les échelles. Il en va de même pour les volcans, les réseaux de failles etc... qui présentent généralement un caractère auto-similaire. Nous développons dans le chapitre suivant cette notion d'auto-similarité généralement associée aux surfaces naturelles. La dépendance des indicateurs vis-à-vis de l'échelle et l'absence de longueur caractéristique suggère d'introduire des paramètres descriptifs définis indépendamment de l'échelle. Contrairement aux indicateurs classiques, ils ne sont valides que si la topographie présente une symétrie d'échelle. Cette dernière se manifeste sous forme d'une loi de puissance :

$$I(\Delta x) \sim \Delta x^p \quad (1.13)$$

où I est une grandeur statistique (par exemple le RMS de pentes) dépendant de l'échelle Δx et p un nombre. Le paramètre p caractérise alors le comportement d'échelle de la topographie (le symbole \sim signifie une proportionnalité entre les deux grandeurs). A contre-courant de l'approche par des indicateurs classiques définis à une échelle donnée, la mise en évidence, l'exploitation et l'interprétation des lois d'échelle dans le sens défini ci-dessus est au coeur de nos préoccupations dans le cadre de cette thèse. Historiquement, c'est par l'intermédiaire de la densité spectrale de puissance que les propriétés d'échelle de la topographie ont été constatées et étudiées. Nous rassemblons ci-dessous plusieurs résultats d'études précédentes qui montrent l'ubiquité de ce comportement pour une surface naturelle.

1.4.2.2 Loi d'échelle de la densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance est un outil permettant naturellement d'explicitier le comportement d'échelle de la topographie. Par l'intermédiaire de la transformée de Fou-



(a) Spectre composite obtenu en rassemblant les contributions de plusieurs études (*Balmino et al.*, 1973; *Warren*, 1973; *Bretherton*, 1969; *Cox and Sandstrom*, 1962; *Stevens*, 1972; *Krause and Menard*, 1965). Reproduit depuis *Bell* (1975).

(b) Spectre d'un profil bathymétrique de 50 kilomètre de la plaine abyssale *Tufts*. Deux comportements d'échelle distincts. Reproduit depuis *Fox and Hayes* (1985)

FIGURE 1.21 – Etudes terrestre de densité spectrale de puissance

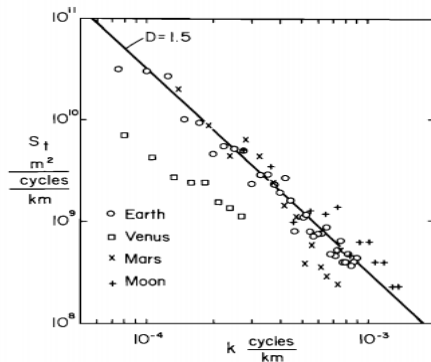
rier, il décompose le signal topographique en fréquences spatiales qui jouent le rôle des échelles. Rappelons que la densité spectrale d'un champ topographique $h(x, y)$ est le carré de la transformée de Fourier :

$$P(k) = \|TF(h(x, y))\|^2 \quad (1.14)$$

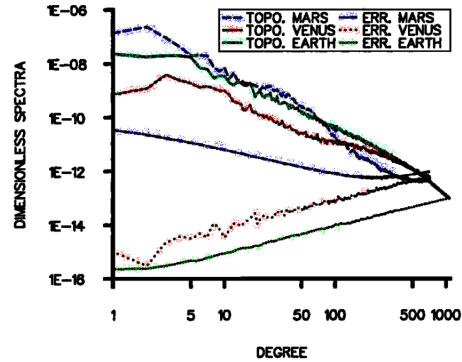
Résultats terrestres

En remarquant que l'amplitude des termes du développement en harmoniques sphériques de la topographie terrestre estimée par *Prey* (1922) dépend essentiellement du degré du développement, *Vening Meinesz* (1951); *Heiskanen and Vening Meinesz* (1958) proposent de caractériser chaque degré n par la variance de ses ordres azimutaux. Le graphe en $\log - \log$ de cet indicateur en fonction de n fait alors apparaître une décroissance linéaire. Ce résultat suggère que la densité spectrale de puissance de la topographie respecte une loi d'échelle conforme à l'équation :

$$P(k) \sim k^{-\beta} \quad (1.15)$$



(a) Harmoniques sphérique du champ topographique pour Mars, Venus et La Terre et la Lune. $\beta \approx 2$. Reproduite depuis (Turcotte, 1987).



(b) Harmoniques sphérique du champ topographique pour Mars, Venus et La Terre. $\beta = 2.02 + 0.001$ pour la Terre, $\beta = 1.47 + 0.003$ pour Venus et $\beta = 2.38 + 0.09$ pour Mars. Reproduit depuis (Balmino, 1993).

FIGURE 1.22 – Analyse comparative des corps du système solaire

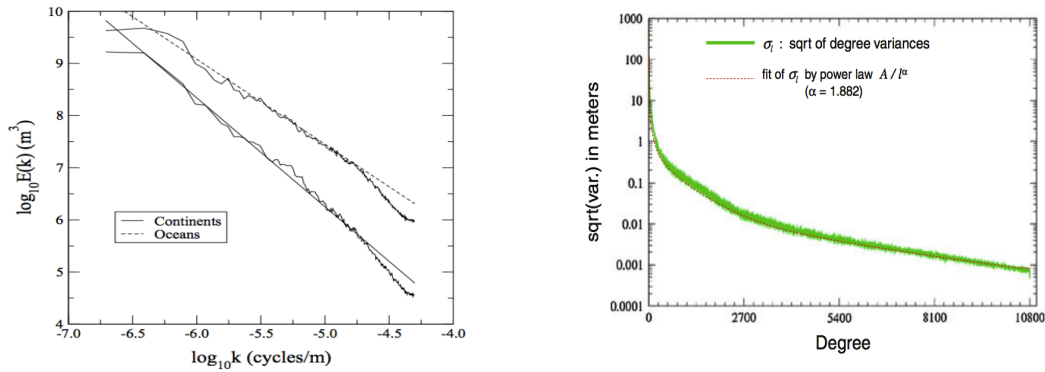
Le paramètre β établit un lien remarquable entre les échelles. En rassemblant les mesures bathymétriques de plusieurs études (Warren, 1973; Cox and Sandstrom, 1962; Stevens, 1972; Krause and Menard, 1965), les profils topographiques de Bretherton (1969) et le développement en harmoniques sphériques de la topographie terrestre de Balmino et al. (1973), Bell (1975) constate que la densité spectrale respecte globalement une loi de puissance avec $\beta \approx 2$ (voir figure 1.21a). Malgré la diversité des contextes géologiques participant au spectre composite de Bell (1975), la symétrie d'échelle est valable sur 5 ordres de grandeurs (de ~ 1 km à ~ 10000 km). Les auteurs proposent alors d'interpréter cette dépendance quadratique en modélisant la topographie par une distribution aléatoire de collines pour lesquelles l'énergie nécessaire à leur formation se répartit uniformément sur toutes les tailles possibles. Bien que permettant d'expliquer la valeur empirique de β , la validité de ce modèle en terme de morphologie se réduit aux collines abyssales et ne peut rendre compte des structures déterministes qui façonnent la topographie.

La valeur $\beta = 2$ va dans le sens de plusieurs analyses bathymétriques (Smith et al., 1965; Neidell, 1966; Clay and Leong, 1974). Bell (1979) confirme sa validité à des échelles inférieures au kilomètre (en mentionnant la question de l'anisotropie des propriétés statistiques) mais d'autres études diffèrent sensiblement par leurs conclusions. Les spectres compilés par Marsh (1964) font ressortir des valeurs de $\beta \approx 3$ tandis que l'analyse de

Horton et al. (1962) portant sur la topographie d'un lac conduit même à $\beta \approx 0$. Plus récemment, *Berkson and Matthews* (1984) étudient les statistiques des fonds marins en considérant plusieurs régions géologiquement distinctes. Ils concluent que la valeur de β varie de 1 à 5 suivant le contexte. Les auteurs interprètent cette large gamme de valeurs possibles par la multiplicité et la diversité des processus en compétition. *Fox and Hayes* (1985) montrent sur des profils bathymétriques que la densité spectrale de puissance respecte des lois d'échelle par morceaux en identifiant des gammes distinctes et une transition autour de 1 kilomètre (voir figure 1.21b). Les deux segments sont alors interprétés comme le reflet de différents processus en identifiant le régime des basses fréquences aux phénomènes tectoniques et volcanologiques et celui des hautes fréquences à la sédimentation.

Gibert et al. (1989) constatent également une transition entre deux régimes autour de 100 kilomètres ($\beta \approx 1$ à grande échelle et $\beta \approx 3$ à petite échelle) sur des spectres bathymétriques de l'Atlantique sud. Sur une base plus globale, *Rapp* (1989) trouve $\beta \approx 2$ à partir d'un développement de la topographie terrestre en harmonique sphérique complet jusqu'à l'ordre 180. Dans le même esprit, *Gagnon et al.* (2006) constatent en combinant plusieurs jeux de données (global, régional et local) que la valeur $\beta = 2$ est pertinente de 50 centimètres à 20000 kilomètres. En analysant séparément les continents et les océans, *Gagnon et al.* (2006) trouvent des valeurs distinctes : $\beta = 2.09$ pour les continents et $\beta = 1.63$ pour les océans (figure 1.23a). Le spectre terrestre développé récemment jusqu'à un ordre très élevé (> 10000) par *Balmino et al.* (2012) (figure 1.23b) est lui aussi compatible avec la valeur $\beta = 2$. En résumé, les études mentionnées dans ce paragraphe font ressortir un large spectre de valeurs possibles pour β avec cependant une prédominance de la valeur $\beta = 2$ quand l'analyse est menée sur une base globale.

Planétologie Avec le développement des missions spatiales, une première étude groupée des corps telluriques est proposée par *Bills and Koblrick* (1985), qui associent le spectre de Vénus aux résultats de *Bills and Ferrari* (1977, 1978) pour la Lune et Mars et ceux de *Balmino et al.* (1973) pour la Terre. Bien que limitée aux tous premiers ordres du

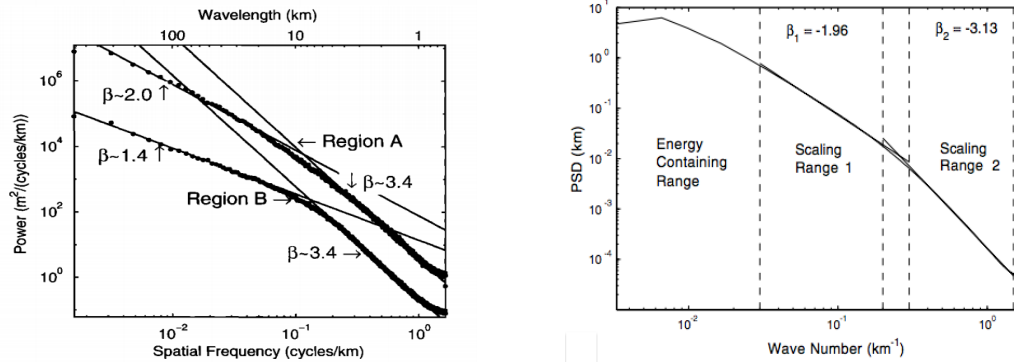


(a) Spectre terrestre en séparant océan et continent. Deux comportements distincts sont constatés. $\beta_{continents} = 2.09$ et $\beta_{océans} = 1.63$. Reproduit depuis *Gagnon et al. (2006)*.

(b) Racine carré de la variance des harmoniques sphériques en fonction du degré. Source de donnée : ETOPO1 (*Amante and Eakins, 2009*). Reproduit depuis *Balmino et al. (2012)*.

FIGURE 1.23 – Etudes terrestres de densité spectrale de puissance

développement en harmoniques sphériques, l'analyse de *Bills and Koblrick (1985)* met en évidence une similarité surprenante entre les spectres des quatre corps malgré la diversité des environnements propres à chaque planète. Ainsi, la cratérisation intense de la surface lunaire, les édifices volcaniques martiens et les processus tectoniques terrestres semblent produire les mêmes spectre. Ces résultats soulignent la faible dépendance aux détails des statistiques d'un champ topographique dans le cadre d'une analyse globale. Pour chaque corps, l'équation 1.15 semble vérifiée avec $\beta \approx 2$. Les travaux de *Turcotte (1987)*; *Balmino (1993)* (figure 1.22a et 1.22b) confirment ce résultat en comparant les quatre corps avec un développement en harmonique sphérique plus poussé (voir également *Kucinskis and Turcotte (1994)* pour une étude détaillée de Vénus). Le cas de Mars est développé par *Aharonson et al. (2001)* en exploitant les données de l'altimètre MOLA (*Smith et al., 2001b*). L'analyse de deux régions martiennes géologiquement distinctes (figure 1.24a) montre que la valeur de β pour des échelles supérieures à 10 kilomètres est proche de 2 sur l'exemple d'un terrain fortement cratérisé de l'hémisphère sud. Elle est plus faible sur la même gamme dans les plaines de l'hémisphère nord ($\beta \approx 1.4$). Pour les deux régions, une transition entre deux régimes distincts est identifiée autour de 10 kilomètres. A petite échelle, la valeur de β est plus élevée et semble indépendante du contexte géologique ($\beta \approx 3.4$ dans les deux cas). Les auteurs proposent d'interpréter cette transition par la



(a) Spectre de deux régions martiennes. Région A : terrains cratérisés de l'hémisphère sud. Région B: plaine lisse de l'hémisphère nord. Reproduit depuis *Aharonson et al.* (2001).

(b) Spectre global de la topographie martienne. Reproduit depuis (*Nikora and Goring, 2004*). Transition cohérente avec *Aharonson et al.* (2001).

FIGURE 1.24 – Etudes terrestres de densité spectrale de puissance

compétition entre la cratérisation et l'érosion. *Malamud and Turcotte* (2001) constatent une transition semblable en se focalisant sur la topographie du pôle nord Martien. *Nikora and Goring* (2004) enrichissent cette analyse en étudiant systématiquement le spectre de la topographie martienne sur une fenêtre glissante de $5^\circ \times 5^\circ$ (figure 1.24b). Ils confirment la transition détectée par *Aharonson et al.* (2001) et *Malamud and Turcotte* (2001). La valeur de β sur la gamme des grandes échelles est en moyenne [2.2–2.4] contre 3.8 à petite échelle. La surface très cratérisée de la Lune est examinée en détail par *Rosenburg et al.* (2015). En simulant le processus de cratérisation, les auteurs montrent le lien entre la valeur de β et les modalités de ce processus.

1.5 Conclusion

La plupart des études citées dans la section précédente relèvent le comportement d'échelle de la topographie par l'intermédiaire de la densité spectrale de puissance sans proposer de cadre statistique pouvant rendre compte de cette symétrie particulière. Nous allons voir dans le chapitre 2 comment les lois d'échelle peuvent être interprétées dans le cadre conceptuel des fractales (*Mandelbrot and Pignoni, 1983*). Ce paradigme permet de définir des objets dont les propriétés géométriques semblent en accord avec celles de nombreuses

formations géomorphologiques (chaînes de montagnes, réseaux de rivières, cratères...). Il donne lieu à des modèles dont la large variabilité pourrait être statistiquement compatible avec celle d'un champ topographique. Dans le chapitre 3, nous retraçons l'histoire de l'application de ces concepts à la topographie en explicitant les limites du cadre dit « monofractal » au profit d'une interprétation « multifractale ».

Chapitre 2

Théorie des fractales et multifractales

Nous avons vu dans le chapitre précédent que des lois d'échelle sont généralement vérifiées par la densité spectrale de puissance de la topographie d'une surface planétaire. Nous souhaitons à présent apporter des éléments théoriques sur les lois d'échelles et présenter le cadre statistique considéré dans cette thèse. Nous allons voir dans ce chapitre que les figures fractales et les champs multifractals sont des constructions mathématiques qui ont justement des symétries d'échelles particulières. Nous illustrerons nos propos avec des exemples de même nature que le champ topographique.

2.1 La notion de fractale

La notion de fractale a été introduite par Benoit Mandelbrot (*Mandelbrot, 1967*) pour rendre compte notamment des lois d'échelles constatées par *Richardson (1961)* sur la longueur des côtes continentales et des frontières entre nations. Le concept a également permis d'intégrer dans un cadre unifié divers objets mathématiques. Nous présentons ci-dessous quelques-uns de ces objets qui, malgré leur caractère exotique, permettent idéalement d'introduire les propriétés généralement associées aux fractales naturelles.

2.1.1 Exemples d'objets fractals

2.1.1.1 Le flocon de Koch

La figure géométrique du flocon de Koch se construit itérativement. A partir d'un triangle équilatéral de périmètre unité, chaque segment est divisé en 3 parties de longueur égale et la partie centrale est remplacée par un nouveau triangle. L'opération est répétée indéfiniment sur chaque nouveau segment et génère une figure géométrique très irrégulière dont les propriétés diffèrent de celles des objets classiques de la géométrie euclidienne (voir figure 2.1a). La courbe du flocon de Koch possède des détails à toutes les échelles et sa longueur n'est pas définie. Elle augmente avec le nombre d'itérations n sans converger vers une longueur donnée. En effet, la longueur L_n en fonction de n suit une loi de puissance :

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (2.1)$$

Les objets géométriques simples (segment, carré) peuvent être caractérisés par la donnée de quelques grandeurs caractéristiques (côté, rayon, angle). Par ailleurs, on leur associe une dimension d'espace ($d = 1$ pour une droite, $d = 2$ pour un cercle). Le flocon de Koch n'a pas de longueur caractéristique et la dimension qui lui est associée ($d = 1$) ne rend pas compte de son caractère qui tend à remplir l'espace bi-dimensionnel sous-jacent. Il existe un moyen alternatif de concevoir la dimension de cette figure en remarquant son comportement d'échelle. Son périmètre L_{flocon} dépend de la longueur Δx de la règle utilisée pour effectuer la mesure. Avec $\Delta x = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ on a $L_{flocon} = 1, \frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots$. La figure 2.1b représente la longueur mesurée du flocon de Koch en fonction de la règle $\Delta x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. On vérifie que :

$$L_{flocon}(\Delta x) = \Delta x^{1 - \frac{\ln(3)}{\ln(4)}} \quad (2.2)$$

La quantité $p = 1 - \frac{\ln(3)}{\ln(4)}$ est le coefficient directeur de la droite représentant L_{flocon} en fonction de Δx . Il caractérise un comportement d'échelle. Une première estimation de la dimension fractale est donnée par la formule $D_{flocon} = 1 - p = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26$. Cette

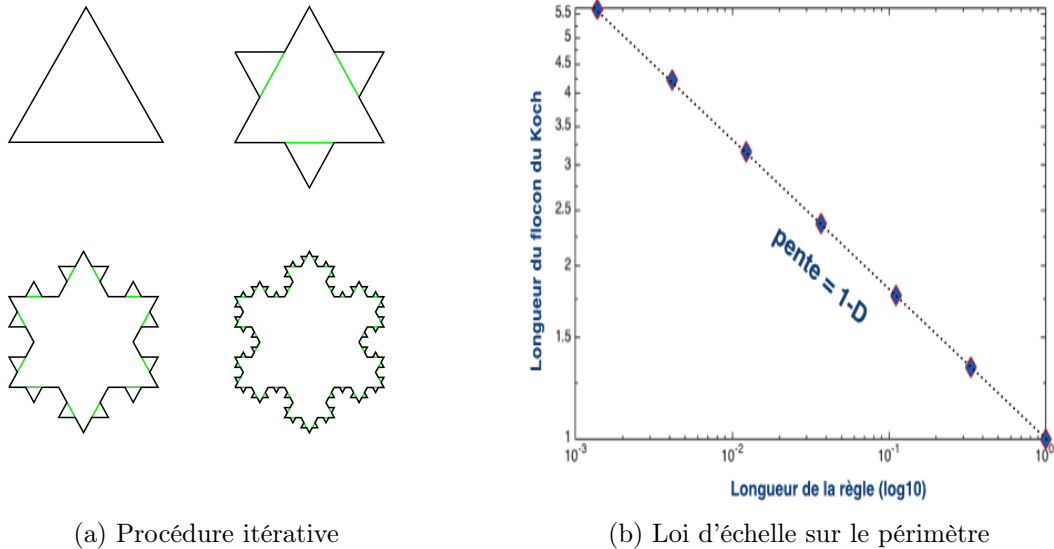


FIGURE 2.1 – Flocon de KOCH

formule traduit le fait qu'à chaque itération, 4 nouveaux segments apparaissent (nombre d'homothéties), 3 fois plus petits (rapport d'homothétie). Avec une dimension fractale comprise entre 1 et 2, le flocon n'est ni un segment (de dimension 1), ni un plan (de dimension 2) mais se situe « entre les deux ». On vérifie aisément qu'en remplaçant le flocon par une figure géométrique classique, la même méthode conduit à $D = 1$. La dimension fractale ainsi définie coïncide donc avec celle de la dimension d'espace habituelle pour des figures géométriques classiques.

2.1.1.2 La poussière de Cantor

Il s'agit d'une autre exemple d'ensemble géométrique fractal. Il peut être construit et analysé de la même manière. A partir d'un segment unité, on divise le segment en trois parties avant de supprimer la section centrale. Cette opération est répétée sur les 2 parties restantes et ainsi de suite. A l'inverse du flocon, la figure générée par cette procédure est constituée de segments infinitésimaux dont la longueur cumulée diminue avec le nombre d'itérations. En utilisant une règle de longueur variable Δx , on trouve à nouveau que la longueur mesurée en fonction de Δx respecte une loi de puissance : $L_{poussière}(\Delta x) = \Delta x^{1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$. On en déduit une dimension fractale :

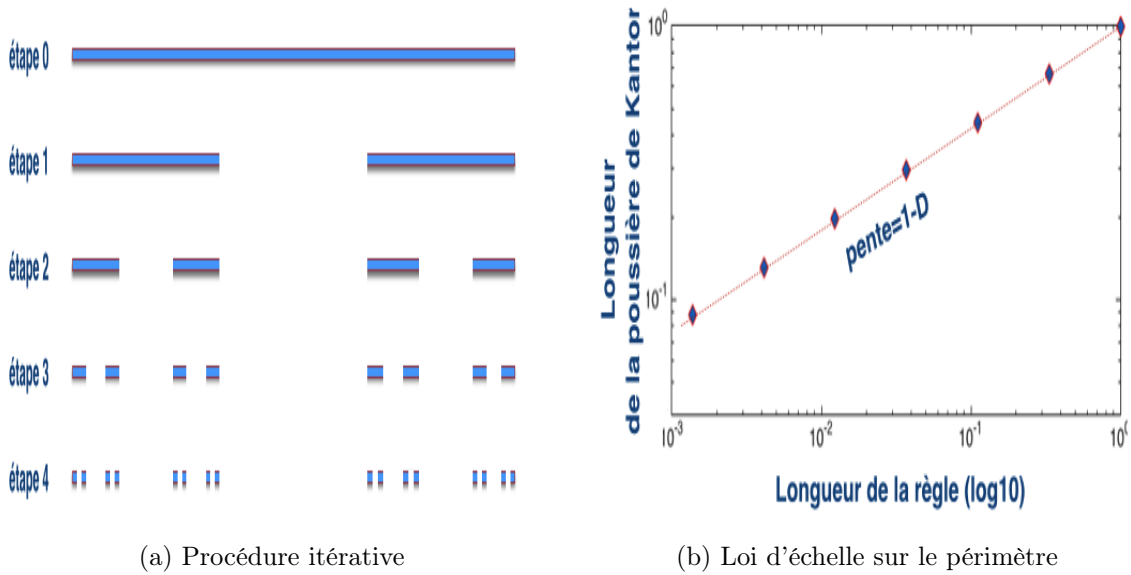


FIGURE 2.2 – Poussière de Cantor

$$D_{poussière} = 1 - p_{poussière} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.63 \quad (2.3)$$

Cette dimension fractale est inférieure à 1. A chaque itération, 2 nouveaux segments apparaissent (nombre d'homothéties), 3 fois plus petits (rapport d'homothétie). Ce nouvel exemple illustre l'intérêt de recourir à une dimension fractale pour caractériser les géométries complexes. La poussière de Cantor est une collection de segments infiniment fins quand le nombre d'itérations tend vers l'infini. Sa dimension topologique est donc nulle, identique à celle d'un point dont elle diffère pourtant notablement. Le fait d'avoir introduit une dimension fractale permet de rendre compte de sa structure particulière plus complexe qu'un point géométrique.

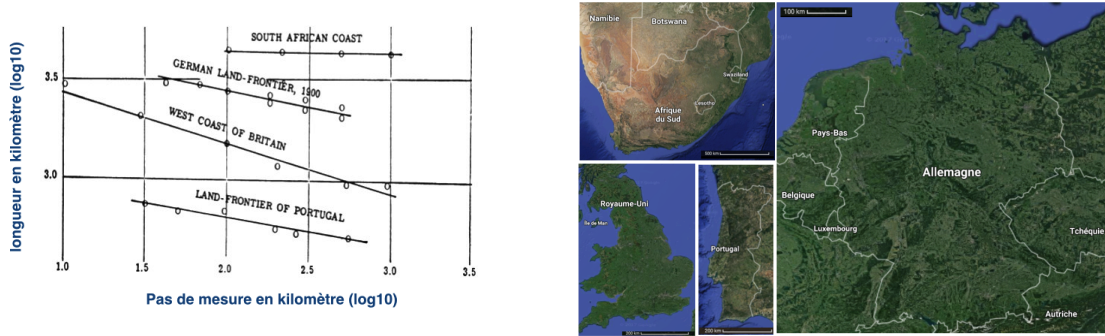
2.1.2 Auto-similarité

Les objets évoqués ci-dessus sont définis par des procédures itératives simples. Cette simplicité se reflète dans leur apparence. Un zoom sur un détail de la courbe de Koch fait apparaître une forme de base similaire à la forme initiale. Il en va de même pour la poussière de Cantor. En d'autres termes, chaque portion de l'objet est une version réduite de l'objet complet. Cette propriété est appelée auto-similarité. La dimension

fractale vise à quantifier le degré de complication induit par la procédure itérative. Pour ces cas particuliers, elle peut se déduire directement des paramètres d'homothéties utilisés pour définir les itérations (voir paragraphe 2.1.4).

2.1.3 La longueur des côtes

La notion de dimension fractale approchée de manière intuitive dans les exemples précédents peut être envisagée dans le cas d'un objet naturel familier : les côtes délimitant les terres émergées des océans. Dans son célèbre article fondateur, *Mandelbrot (1967)* se demande quelle est la longueur des côtes de Bretagne. Il met alors en lumière les résultats passés inaperçus de Lewis Richardson qui se posait une question similaire quelques années plus tôt, dans le cadre d'une étude portant sur les mécanismes des conflits armés (*Richardson, 1961*). En essayant d'estimer la longueur des frontières entre les nations, Richardson constate que la valeur trouvée dépend de l'unité de mesure choisie. En effet, un pas de mesure de quelques mètres donne une longueur plus grande qu'un pas de plusieurs kilomètres. Le phénomène s'explique par la prise en compte de détails fins révélés par les pas de mesure resserrés. Ce cas fait écho à celui du flocon de Koch dont la longueur par construction n'est pas définie et augmente quand décroît la taille de la règle de mesure. De plus, Richardson constate que la dépendance entre la longueur mesurée et la taille du pas est une loi de puissance (voir figure 2.3a) à l'instar du flocon de Koch et de la poussière de Cantor. Reprenant à son compte les observations empiriques de Richardson, Mandelbrot propose d'interpréter les côtes et les frontières comme des objets fractals à part entière au même titre que les deux abstractions mathématiques avec cependant une différence majeure : l'aspect statistique nécessaire dans le cas des contours naturels. En effet, les détails d'une ligne de côte ne peuvent être au mieux que statistiquement similaires à l'aspect global de la courbe. En admettant l'hypothèse de Mandelbrot, la dimension fractale de ces contours naturels peut être évaluée à partir des lois d'échelles constatées par Richardson sur la longueur $L_{\text{contour}}(\Delta x)$ et reproduites sur la figure 2.3a. La dimension fractale est donnée par :



(a) Exemples de longueurs de côtes et de frontières (reproduit depuis *Richardson* (1961)) (b) Côtes et frontières analysées par *Richardson* (1961)

FIGURE 2.3 – Lois d'échelle de *Richardson* (1961).

	$p_{contour}$	$D_{contour}$
côte sud-africaine	-0.01	1.01
côte ouest britannique	-0.24	1.24
frontière allemande	-0.20	1.20
frontière du Portugal	-0.19	1.19

TABLE 2.1 – Dimension fractale mesurée dans différents cas (*Richardson*, 1961)

$$D_{contour} = 1 - p_{contour} \quad (2.4)$$

où $p_{contour}$ est le coefficient directeur estimé par régression linéaire de $L_{contour}(\Delta x)$.

La table 2.1 reproduit les valeurs de dimensions fractales estimées pour les quatre exemples choisis par *Richardson* (1961). On constate que dans le cas de l'Afrique du sud, la valeur estimée est proche de 1. En effet, les côtes sud-africaines présentent peu d'aspérités. Cet aspect lisse se traduit par une dimension fractale proche de la dimension topologique. Au contraire, la côte ouest britannique a une dimension fractale non-entière de l'ordre de 1.24. Cette valeur plus élevée reflète la présence de fortes aspérités. Plus la dimension fractale s'éloigne de la dimension topologique, plus la courbe est irrégulière et rugueuse.

2.1.4 Dimensions fractales

Il y a de nombreuses définitions possibles pour une dimension fractale, toutes visant à caractériser la manière dont une figure géométrique remplit l'espace. Nous en donnons ici un bref aperçu (*Falconer*, 2003) :

2.1.4.1 La dimension « du compas »

La méthode de mesure par une règle ou un compas d'ouverture variable utilisée par *Richardson* (1961) conduit à l'estimation de la dimension fractale dite «du compas» :

$$D_{div} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\log(N_\varepsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} \quad (2.5)$$

où N_ε est le nombre de points nécessaires pour parcourir la figure avec un espacement constants ε .

2.1.4.2 La dimension « box counting »

Plus générale, la dimension fractale par « comptage de boîtes » ou dimension fractale de Minkowski a l'avantage de n'être pas limitée aux lignes unidimensionnelles. Elle peut s'appliquer à n'importe quelle forme géométrique complexe comme par exemple le triangle de Sierpinsky (voir figure 2.4). Le principe est de compter le nombre de boîtes d'une taille fixée permettant de recouvrir complètement l'objet en faisant varier la taille des boîtes. La dimension fractale est alors donnée par :

$$D_{box-counting} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} \quad (2.6)$$

avec $N(\varepsilon)$ le nombre de boîtes de taille ε nécessaires pour couvrir l'objet. A l'instar de la dimension du compas, cette dimension peut être calculée à partir d'une régression linéaire en log-log sur le nombre de boîtes nécessaires en fonction de ε . Elle est très utilisée parce que simple à mettre en oeuvre.

2.1.4.3 La dimension d'homothétie

Dans le cas d'objets géométriques définis à partir d'homothéties internes, la dimension fractale est simplement donnée par le rapport :

$$D_{hom} = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})} \quad (2.7)$$

où N est le nombre d'homothéties appliquées à chaque itération et r le rapport d'homothétie.

2.1.4.4 La dimension de Hausdorff

La dimension fractale de Hausdorff est la plus rigoureuse mathématiquement mais aussi la plus difficile à mettre en oeuvre (*Hausdorff*, 1918). Considérons une figure fractale (par exemple le triangle de Serpinsky de la figure 2.4). En fixant des disques de rayon ε et un nombre réel quelconque d , on se propose de recouvrir intégralement la figure par des disques de rayon au plus ε . Il y a d'innombrables façons de le faire. Pour chaque combinaison numérotée i on définit la quantité :

$$A_i = \sum_m \varepsilon_m^d \quad (2.8)$$

Parmi toutes les combinaisons possibles (d et ε donné), certaines permettent de faire en sorte que la valeur de A soit minimale. On se focalise alors sur cette valeur :

$$M(d, \varepsilon) = \min_i(A_i) \quad (2.9)$$

Quand ε tend vers 0, la valeur de $M(d, \varepsilon)$ tend vers la mesure de Hausdorff $H(d)$:

$$H(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(d, \varepsilon) \quad (2.10)$$

En fonction du choix de d , cette mesure ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou ∞ . La dimension fractale de Hausdorff D_H est la valeur particulière de d pour laquelle la mesure $H(d)$ passe subitement de 0 à ∞ .



FIGURE 2.4 – Triangle de Sierpinsky et box counting. Cette figure est définie de manière itérative à partir d'un triangle équilatéral initialement plein. Dans un premier temps, une portion triangulaire de côté 2 fois inférieur est enlevée au centre du grand triangle. Puis à chaque itération cette opération est répétée sur les portions triangulaires restantes. Le rapport d'homothétie étant clairement défini ($r = 1/2$) de même que le nombre d'homothétie par itération ($N = 3$), la dimension fractale d'homothétie est $\ln(3)/\ln(2) \approx 1.58$. Il est également possible d'évaluer la dimension de « box-counting » : il faut un seul carré pour couvrir la figure initiale, 3 carrés 2 fois plus petits pour couvrir la 1ère itération, 12 carrés 4 fois plus petits pour le seconde itération. Le rapport de la définition 2.6 est donc égal à $\ln(3)/\ln(2)$. On retrouve la dimension d'homothétie.

- $d < D_H$: quand ε tend vers 0, la prolifération des disques l'emporte sur la pondération de chaque rayon et $H(d) \rightarrow \infty$
- $d > D_H$: quand ε tend vers 0, la pondération sur le rayon des disques l'emporte sur la prolifération des disques et $H(d) \rightarrow 0$

On peut vérifier que cette définition très générale de la dimension fractale englobe les dimensions usuelles ainsi que celle des objets fractals introduits précédemment.

2.1.5 Fractale aléatoire

Evoqué plus haut, un trait fondamental des courbes naturelles des côtes est leur aspect aléatoire. De manière illustrative, il est possible de modifier la procédure itérative du flocon de Koch de la façon suivante afin d'introduire une part d'aléa dans sa structure. A chaque itération, les nouveaux triangles sont orientés aléatoirement dans un sens où dans l'autre. Cette manipulation ne modifie pas la dimension fractale de la figure mais son aspect final (figure 2.5) présente un caractère aléatoire. Le nombre de boîtes de largeur ε nécessaire pour couvrir le flocon de Koch classique est :

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_c} \quad (2.11)$$

en notant D_c la dimension fractale par « comptage de boîte ». Dans le cas aléatoire, cette

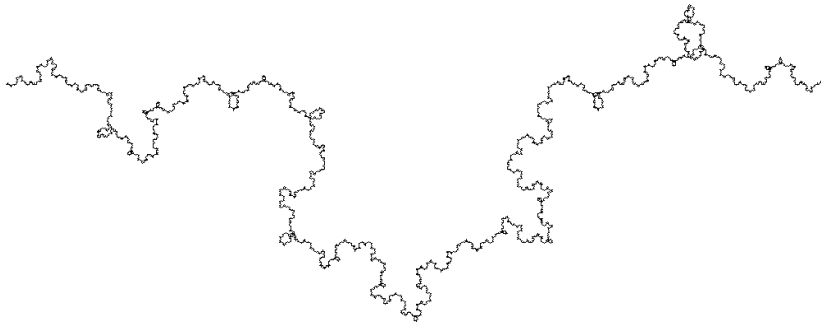


FIGURE 2.5 – Flocon de Koch aléatoire

relation est toujours valable mais porte sur la moyenne statistique de N_ε :

$$\langle N(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{-D_c} \quad (2.12)$$

Ainsi les frontières du Portugal et de l'Allemagne (table 2.1) ont des dimensions fractales similaires mais leurs détails sont distincts au même titre que deux réalisations du flocon de Koch aléatoires.

2.1.6 Codimension fractale

On préfère parfois substituer à la dimension fractale, une autre quantité qui lui est associée : la codimension fractale C . Géométriquement, il s'agit de l'écart entre la dimension topologique d et la dimension fractale D de l'ensemble géométrique :

$$C = d - D \quad (2.13)$$

Pour des figures fractales aléatoires (celles qui nous intéressent le plus), la codimension détermine le comportement d'échelle de la probabilité $P_r(\varepsilon)$ qu'une boîte de taille ε intercepte la figure :

$$P_r(\varepsilon) = \frac{\langle N(\varepsilon) \rangle}{N_{total}(\varepsilon)} \quad (2.14)$$

où $N_{total}(\varepsilon)$ est le nombre total de boîtes de taille ε permettant de paver l'espace complet.

Puisque ce dernier varie comme ε^{-d} , nous avons :

$$P_r(\varepsilon) \sim \varepsilon^{d-D} \sim \varepsilon^C$$

Par construction, C est positive et $P_r(\varepsilon)$ diminue avec ε . En prenant des boîtes de tailles décroissantes, on réduit les chances d'intercepter la figure fractale (contrairement à une figure géométrique classique)

2.1.7 Fractales naturelles en géoscience

Afin d'illustrer les considérations théoriques précédentes, nous présentons ici des exemples de champ naturel en géoscience qui peuvent être assimilés à des fractales. Un ensemble de point fractals a l'une ou plusieurs des caractéristiques suivantes :

- L'objet a des détails à toutes les échelles (ou sur une grande gamme d'échelle)
- Les détails ressemblent à l'ensemble (auto-similarité)
- Il résulte d'une procédure itérative en se dupliquant lui-même d'échelle en échelle.
- Il est trop complexe pour être décrit dans sa totalité par les figures géométriques familières (cercle, carré, segment)
- Il possède une dimension fractale différente de la dimension topologique

Plusieurs champs géologiques sont potentiellement des objets fractals. Nous avons déjà évoqué la géométrie des zones côtières mais d'autres phénomènes naturels sont susceptibles de vérifier l'une ou l'autre des propriétés de cette liste. Nous en donnons un bref tour d'horizon. De manière générale, les géologues doivent systématiquement préciser l'échelle quand ils discutent une photographie de roche ou une formation géologique. La figure 2.6 illustre le risque de confusion en l'absence de précision sur l'échelle. Les roches photographiées de la figure 2.6 présentent des détails très similaires malgré des ordres de grandeurs différents. On retrouve cette propriété d'auto-similarité.

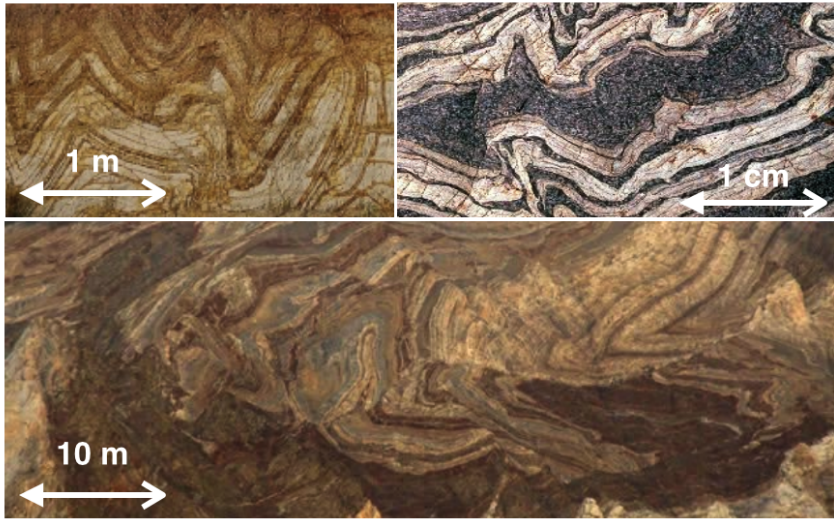


FIGURE 2.6 – Exemple de roches présentant des motifs similaires malgré la différence d'échelle.

2.1.7.1 Réseaux de rivières

Les réseaux hydrographiques ramifiés sont un exemple frappant de fractales naturelles. La figure 2.7 représente un réseau d'écoulement ancien à la surface de Mars. Son aspect auto-similaire ressort distinctement. Les sources donnent lieu à des écoulements modestes qui se rejoignent progressivement pour former les grands fleuves. Les trajectoires sinueuses des petits chenaux s'apparentent à des versions réduites de celles des grandes rivières traduisant une symétrie d'échelle. Le lien avec les fractales peut être établi en remarquant que les courbes modélisant les écoulements sont des lignes uni-dimensionnelles dont les nombreuses ramifications finissent par recouvrir une « fraction » du plan. Largement abordées dans la littérature (*Tarboton et al.*, 1988; *Reis*, 2006), les lois d'échelle des réseaux hydrographiques sont généralement modélisées de la façon suivante. Les branches sont d'abord classées les unes en fonctions des autres. Les ruisseaux provenant directement des sources constituent l'ordre 0, ils se rejoignent pour former des cours d'eau d'ordre 1 et ainsi de suite. Les grands fleuves correspondent à des ordres très élevés. En notant L_i la longueur moyenne des cours d'eau d'ordre i , on définit le ratio R_L par :

$$R_L = \frac{L_i}{L_{i-1}} \quad (2.15)$$

En notant N_i le nombre moyen de cours d'eau d'ordre i , on pose :

$$R_B = \frac{N_{i-1}}{N_i} \quad (2.16)$$

Le fait que ces deux ratios soient définis pour un réseau hydrographique donné constitue les lois de Horton (*Horton, 1932*). La valeur de R_L (respectivement R_B) est typiquement égale à 2 (respectivement 4) (*Rinaldo, 1997*). Nous voyons que le réseau peut s'identifier à une figure géométrique construite itérativement à partir d'un fleuve qui donne naissance à R_B versions de lui-même R_L fois plus petites. A l'instar du flocon de Koch ou de la poussière de Cantor, la dimension fractale d'homothétie s'exprime alors :

$$D_H = \frac{\ln(R_B)}{\ln(R_L)} \quad (2.17)$$

Elle est en général proche de la dimension topologique d'un plan ($d=2$). Un réseau hydrographique, s'il se prolongeait à des échelles infiniment fines, recouvrirait le support dans son intégralité. Cette contradiction illustre le fait que la validité des propriétés fractales attribuées à un objet naturel est toujours limitée à une gamme finie d'échelle. La symétrie d'échelle n'est plus valable au-delà d'une échelle limite qui existe nécessairement pour un objet naturel. Par ailleurs, en plus de cette complexité structurelle, les lignes qui constituent les portions de rivières ne sont ni des droites, ni des arcs de cercles : de même que pour les côtes de Bretagne, leur caractère sinueux est également fractal. La dimension correspondante peut-être évaluée par la méthode du compas de (*Richardson, 1961*) ou par la méthode des boîtes. Les réseaux hydrographiques sont donc doublement fractals.

2.1.7.2 La distribution des cratères sur une surface planétaire

Le processus de cratérisation est un exemple-type illustrant le concept d'auto-similarité. Sur la figure 2.8a, nous observons les impacts à la surface de la Lune sur un quadrangle largement dominé par ce processus. Les reliefs ombrés calculés à partir des données altimétriques de l'instrument LOLA (*Smith et al., 2010*) font ressortir les contours des

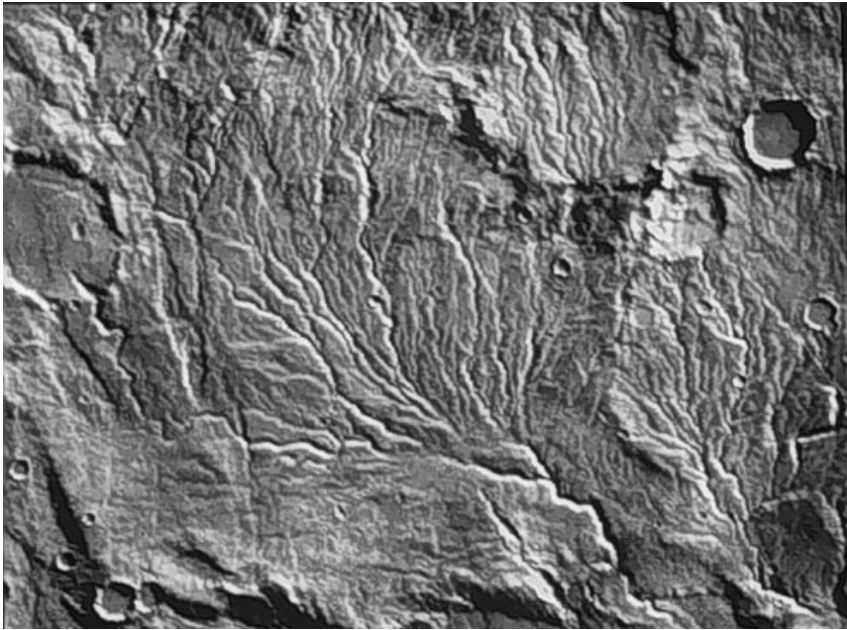


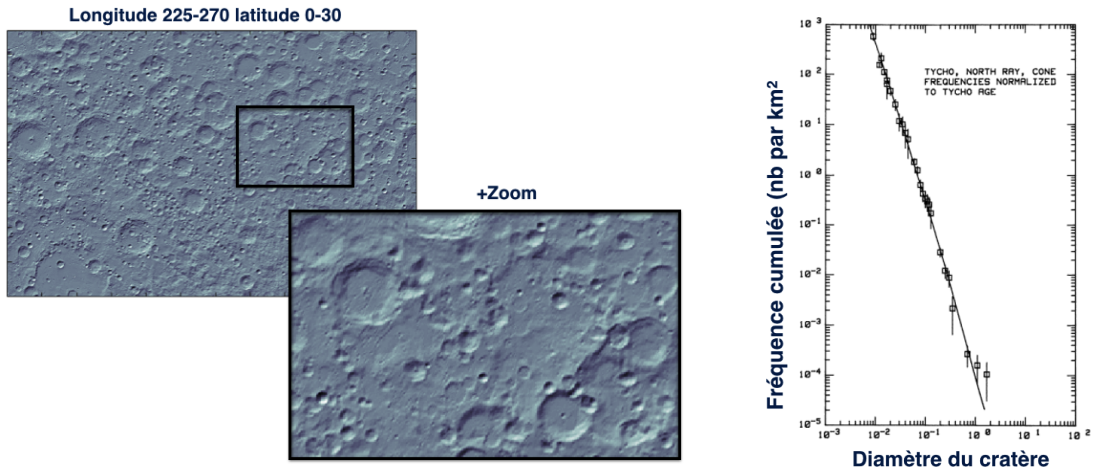
FIGURE 2.7 – Architecture fractale d’un réseau d’écoulement ancien à la surface de Mars

cratères. La distribution des points d’impact est spatialement uniforme mais on remarque immédiatement l’existence de cratères de tailles très variées. Les petits cratères sont plus nombreux que les grands. La figure 2.8b (*Neukum and Ivanov, 1994a*) montre que la distribution des diamètres estimée dans une région donnée suit approximativement une loi d’échelle de la forme :

$$N(D) \sim s^{-\alpha} \tag{2.18}$$

où $N(s)$ est le nombre cumulé de cratères de taille inférieure à s . Le paramètre α détermine les proportions des populations de cratères de tailles données. Sur la Lune, il est environ égale à 3 (*Neukum and Ivanov, 1994a*) traduisant une diminution rapide du nombre de cratère avec leur taille. La forme en loi de puissance a des implications importantes. En effet, considérons deux sous-populations de cratères : ceux dont le diamètre est égal à s_r et ceux dont le diamètre est λ fois plus grand que s_r . On a :

$$N(s_r) \sim s_r^{-\alpha} \tag{2.19}$$



(a) Zone cratérisée à la surface de la Lune (à partir de l'instrument LOLA). Un zoom sur un détail de la surface fait ressortir les propriétés auto-similaires de la distribution des cratères. Ce constat confère au processus de cratérisation un caractère fractal même s'il ne s'inscrit pas dans le cadre géométrique présenté dans ce chapitre (Smith *et al.*, 2010)

(b) Fréquence de cratères pour différentes régions lunaires jeunes, normalisée par rapport à la fréquence de la population de cratères localisés sur le cratère Tycho, sous l'hypothèse d'un flux d'impact constant (reproduite d'après Neukum and Ivanov (1994a)).

FIGURE 2.8 – Aspect fractal du processus de cratérisation sur la Lune (détails à toutes les échelles et loi d'échelle sur la distribution des cratères)

$$N(\lambda s_r) \sim (\lambda s_r)^{-\alpha} \quad (2.20)$$

Donc :

$$\frac{N(\lambda s_r)}{N(s_r)} \sim \lambda^{-\alpha} \quad (2.21)$$

Le rapport entre les nombres de représentants des deux populations ne dépend pas du diamètre de référence. Il dépend seulement du ratio λ qui définit la transformation d'échelle. La loi de puissance implique donc une invariance d'échelle. C'est en ce sens que le processus de cratérisation est considéré comme fractal même s'il n'entre pas dans le cadre conceptuel géométrique défini plus haut. Notons que la topographie résultant du processus de cratérisation a des détails à toutes les échelles et présente un caractère auto-similaire (Lovejoy *S.*, 1985).

2.1.7.3 Autres exemples

De nombreux phénomènes géophysiques présentent un caractère fractal. Nous pouvons mentionner la nature auto-similaire de la répartition des failles et des fractures sur les surfaces naturelles largement documentée dans la littérature (*Barton and La Pointe*, 2012; *Scholz*, 2002; *Sornette et al.*, 1990) ainsi que la distribution complexe des épacentres de séismes (*Geilikman et al.*, 1990). Il en va de même pour les phénomènes atmosphériques qui fournissent de nombreux exemples : structures fractale des nuages (*Schertzer and Lovejoy*, 1987), variabilité des séries temporelles de pluie (*Lovejoy S.*, 1985; *Gires et al.*, 2011), de vent et de température (*Schmitt et al.*, 1992b).

2.2 Champ monofractal

2.2.1 Le champ topographique

Nous considérons à présent la forme mathématique du champ topographique. Il s'agit d'un champ scalaire à deux dimensions qui associe à chaque couple de coordonnées (x, y) une élévation $h(x, y)$. Cette définition ne prend pas en compte les effets de non-sphéricité du corps et les éventuelles formes complexes (grottes). Afin d'appliquer les notions développées dans la section 2.1, nous pouvons considérer ce champ comme un nuage de points $h(x, y, z)$ définissant une surface dans l'espace à 3 dimensions. La topographie est alors une figure géométrique de dimension topologique égale à 2. Sa dimension fractale (comprise entre 2 et 3) peut être évaluée par la méthode des boîtes (« box counting ») en comptant le nombre $N(\varepsilon)$ de cubes de côté ε permettant d'enfermer la surface et de chercher une loi d'échelle $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$. Cette technique a été utilisée (*Ai et al.*, 2014) pour analyser la surface des roches fracturées à très petites échelles (voir figure 2.9). Les auteurs ont trouvé des dimensions fractales de l'ordre de 2.1, légèrement supérieures à la dimension topologique, soit des surfaces de faible rugosité. Dans la suite de cet exposé, nous illustrerons nos propos avec des champs dont la dimension topologique est égale à 2 et donc la dimension fractale est comprise entre 2 et 3 par analogie avec le champ

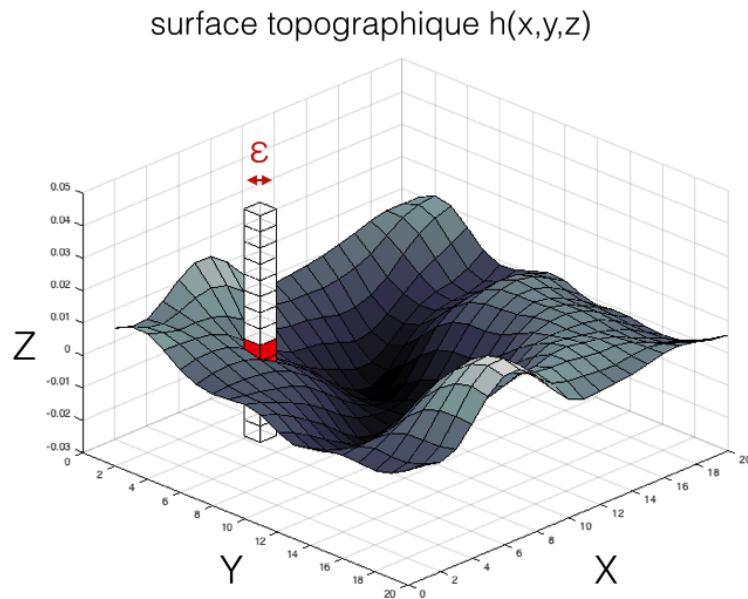


FIGURE 2.9 – Illustration de la méthode par comptage de boîte applicable à un champ topographique. A ε fixé, on compte le nombre de boîtes qui interceptent la surface 3D. Le comptage doit être effectué pour différentes valeurs de ε .

topographique. Le cadre théorique est cependant valide pour des champs de dimensions quelconques (par exemple $3D+$ temps pour le champ de pluie).

2.2.2 Auto-affinité

L'apparence d'une ligne de côte auto-similaire est statistiquement invariante par un zoom dans les deux directions du plan. Ses propriétés fractales sont isotropes, aucune direction n'étant privilégiée. Il en va différemment du champ topographique. En règle générale, plus le facteur de grossissement est grand, plus les fluctuations relatives du champ sont intenses. A échelle humaine, la surface de notre planète est rugueuse alors qu'elle semble lisse vue de l'espace. Par conséquent, les détails ne sont pas statistiquement similaires mais seulement statistiquement semblables à un facteur près. On parle d'auto-affinité (*Mandelbrot*, 1985). La direction verticale z joue un rôle particulier. Pour un champ auto-affine $h(x, y)$, on a $h(ax, ay) = a^{-H}h(x, y)$. La dimension fractale est alors donnée par l'expression $D = 3 - H$.

2.2.3 Mouvement brownien fractionnaire (fBm)

Le mouvement brownien fractionnaire ou Fractional Brownian Motion (fBm) (*Kolmogorov*, 1940; *Mandelbrot and Ness*, 1968) est un modèle générique permettant de fabriquer des surfaces auto-affines. Les simulations de Mandelbrot obtenues en implémentant le fBm grâce aux performances des premiers ordinateurs ont marqué les esprits. La figure 2.11 montre un exemple de surface fractale obtenue par ce processus. Nous donnons dans ce paragraphe un bref aperçu des fondements mathématiques du fBm. Le mouvement brownien fractionnaire est défini en introduisant le paramètre de Hurst H :

$$h(\vec{r}) \sim \int d\vec{r}' \frac{\phi(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^{2-(1+H)}} \quad (2.22)$$

avec ϕ un bruit blanc gaussien. Cette formule généralise la notion d'intégration à des ordres non entiers. On montre que la distribution des incréments d'élévation Δh d'une surface *fBm* respecte une loi d'échelle :

$$\Delta h \stackrel{d}{=} \phi \Delta x^H \quad (2.23)$$

où H est l'exposant de Hurst et φ un bruit blanc gaussien (le symbole $\stackrel{d}{=}$ signifie égalité au sens des distributions). La valeur particulière $H = 0.5$ correspond au cas particulier du mouvement brownien standard. Les objets à 1 ou 2 dimensions générés par ce processus sont fractals au sens géométrique introduit dans la section 2.1. La dimension fractale est donnée par la relation :

$$D = d + 1 - H \quad (2.24)$$

en notant d la dimension topologique. Le fBm peut être qualifié de monofractal dans la mesure où il ne dépend que d'un seul paramètre. Les figures 2.11 et 2.16 montrent plusieurs exemples de champ fBm 1D et 2D. Nous pouvons à présent reprendre l'exemple précédent de la topographie millimétrique des roches fracturées (*Ai et al.*, 2014). Une dimension fractale de l'ordre de 2.1 est compatible avec un mouvement brownien fractionnaire 2D

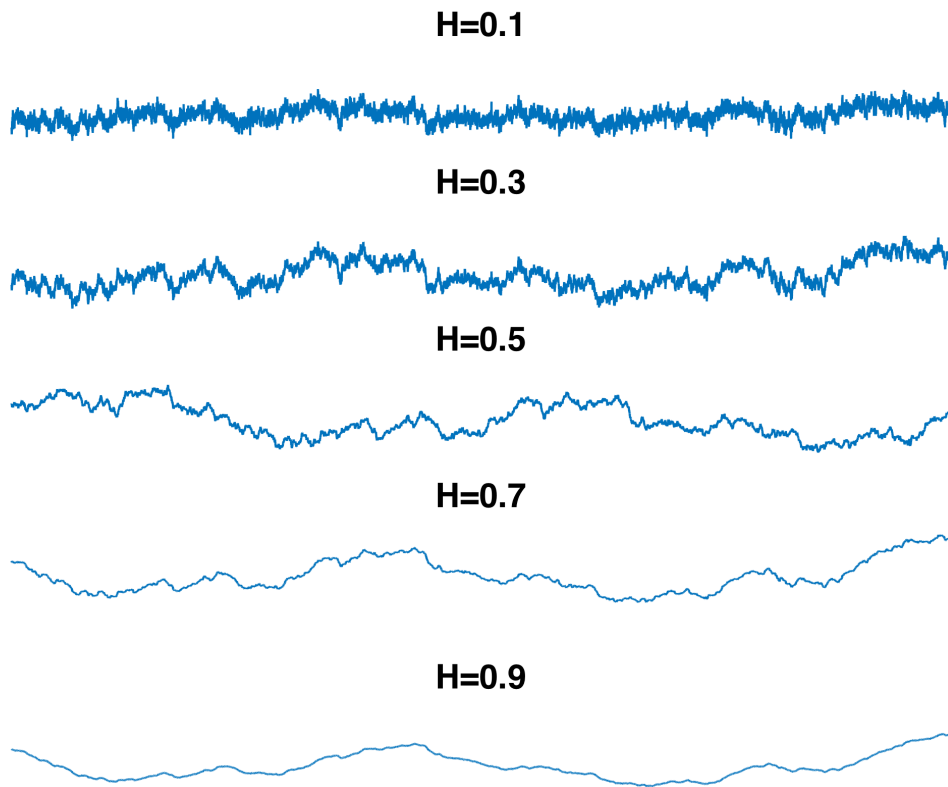


FIGURE 2.10 – Exemple de réalisation 1D du fBm pour différentes valeurs de l'exposant de Hurst. Plus la valeur de H est élevée, plus la courbe est lisse (mémoire à long terme) (*Mandelbrot and Ness, 1968*)

paramétré par $H \sim 0.9$.

2.3 Champ multifractal

Le modèle monofractal du fBm génère des champs spatialement homogènes (figure 2.11). Nous introduisons à présent les propriétés plus flexibles des cascades multiplicatives. La table 2.2 résume les notations principales utilisées dans cette section.

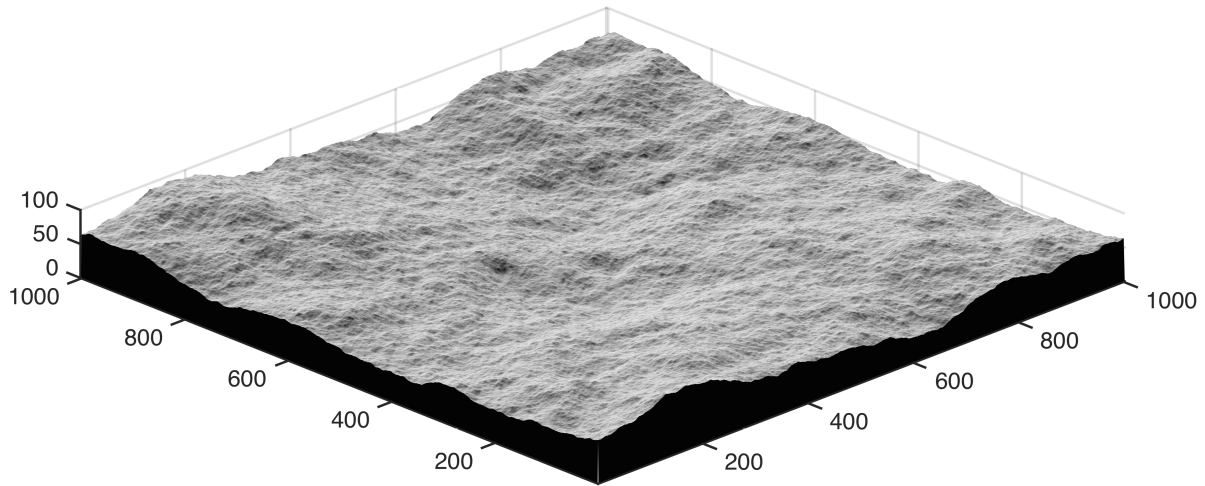


FIGURE 2.11 – Exemple d’un champ topographique fractal 2D générée par la méthode fBm (*Mandelbrot and Ness, 1968*)

Notation	Définition
ϕ	Cascade multiplicative
$(\phi_n)_{ij}$	Energie d’un vortex d’ordre n à la position (i, j)
L	Dimension de la grille
n	Itération de la cascade
λ	Résolution à la $n^{\text{ième}}$ itération ($\lambda = 2^n$)

TABLE 2.2 – Notations de la section 2.3.

2.3.1 Introduction

Le champs multifractals ont été introduits dans le contexte des turbulences atmosphériques et des cascades d'énergie (*Richardson, 2007; Kolmogorov, 1941*). Bien que notre objectif soit de décrire des champs topographiques, nous allons dans un premier temps nous intéresser aux phénomènes atmosphériques pour introduire la notion de cascade multiplicative. L'atmosphère est un système physique complexe dont il est difficile de capturer le comportement global. Les tempêtes sont des événements localisés qui concentrent une grande énergie et une grande humidité dans des zones réduites tandis que d'autres zones sont beaucoup plus calmes (on parle d'intermittence). A l'intérieur même des régions où les phénomènes violents se produisent, on constate que l'énergie se répartit encore de manière hétérogène (éclairs, averses soudaines). Une manière de concevoir le problème est de considérer que l'énergie se transmet des grandes échelles vers les petites échelles à travers des vortex turbulents. La figure 2.12 montre la formation d'un vortex de vent dans l'atmosphère. Il se scinde en 2 autres tourbillons de tailles plus modestes. Ce phénomène est à l'origine du concept de cascades multiplicatives *Yaglom (1966)* pour décrire comment l'énergie est transmise à travers les échelles. Ce domaine d'étude est encore très actif actuellement (*Cardesa et al., 2017*). Nous allons voir que la géométrie fractale peut servir de support à un premier modèle de cascade (modèle β , *Mandelbrot 1974; Frisch et al. 1978*). Nous décrivons ensuite un exemple de modèle multifractal (modèle α , *Schertzer and Lovejoy 1984*). Ce modèle va nous permettre d'introduire la notion de propriétés multifractales, au coeur de nos préoccupations dans le cadre de cette thèse.

2.3.2 le modèle β

Le modèle β (*Mandelbrot, 1974; Frisch et al., 1978*) définit une cascade ϕ sur un support fractal. Initialement, un seul vortex couvre tout l'espace (voir figure 2.13). A la première itération de la cascade, l'aire initiale est subdivisée en 4 carrés de côté 2 fois inférieurs qui définissent l'endroit où peuvent se former les vortex-fils qui naissent du vortex initial. Le phénomène se répète indéfiniment en divisant à chaque fois par 2 la tailles des em-

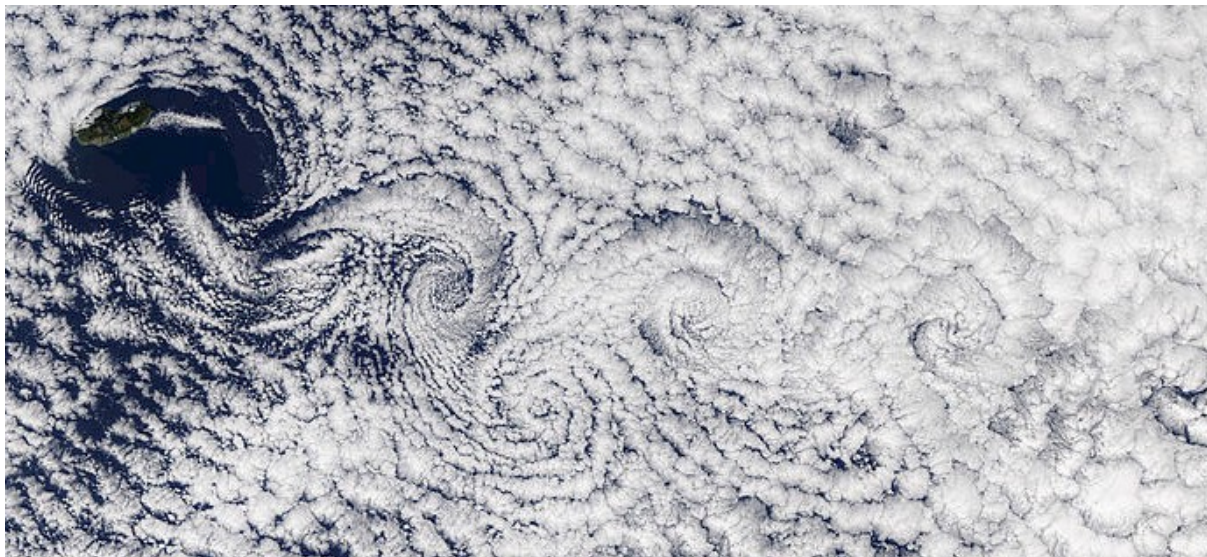


FIGURE 2.12 – Formation de vortex turbulents dans l’atmosphère au-dessus des côtes africaines

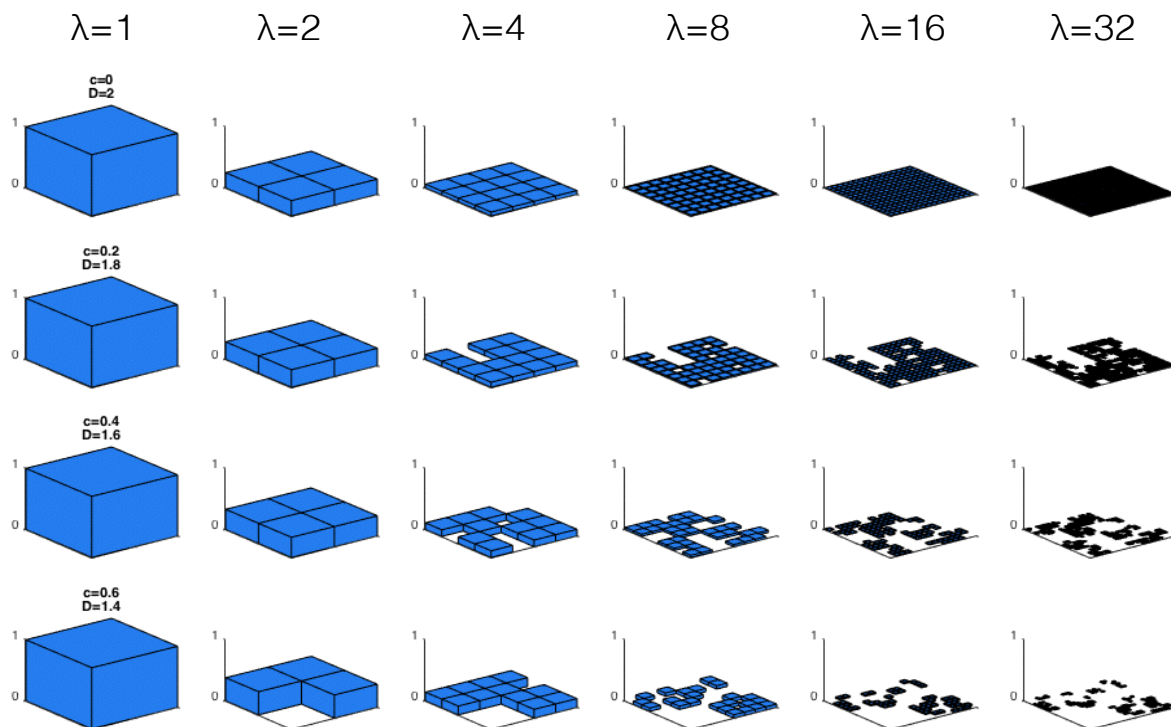


FIGURE 2.13 – Implémentation du modèle β (Mandelbrot, 1974; Frisch et al., 1978) pour plusieurs valeurs de codimensions fractales (c varie de 0 à 0.9). La hauteur des rectangles modélise l’énergie répartie dans les vortex au fil des itérations. Plus c est élevé, plus le support du champ final est clairsemé. La codimension c détermine la dimension fractale du support de la cascade ($D = 2 - c$)

placements. Si 4 vortex se forment à chaque subdivision, le support n'est pas fractal. Si seulement m emplacements donnent lieu à un vortex ($m < 4$), le support est fractal de dimension :

$$D = \ln(m)/\ln(2) \quad (2.25)$$

Cette configuration confère au champ son caractère intermittent. Par ailleurs, il est nécessaire que l'énergie E_n contenue dans un vortex d'ordre n se répartisse équitablement dans les vortex d'énergie E_{n+1} . On vérifie que c'est le cas si $E_{n+1} = kE_n$ avec :

$$k = 2^{-D} \quad (2.26)$$

La proportion p d'emplacements occupés lors d'une subdivision peut s'exprimer en faisant intervenir la codimension fractale $c = 2 - D$:

$$p = 2^{-c} \quad (2.27)$$

Dans cette construction déterministe, la (co)dimension fractale du support ne peut prendre que des valeurs discrètes déterminées par le choix du nombre entier de vortex m conservés à chaque étape. On peut remédier à cette limitation en introduisant un caractère probabiliste. A chaque itération, nous n'exigeons plus d'avoir exactement m nouveaux éléments mais seulement de faire en sorte que leur nombre moyen soit égal à m . En notant μ le coefficient multiplicatif appliqué à l'énergie d'un vortex :

$$\begin{aligned} Pr(\mu = k) &= 2^{-c} \\ Pr(\mu = 0) &= 1 - 2^{-c} \end{aligned} \quad (2.28)$$

On note que μ est une variable aléatoire binomiale. En faisant intervenir la résolution $\lambda = 2^n$, la probabilité qu'un emplacement d'ordre n soit occupé par un vortex vaut :

$$P(\lambda) = \lambda^{-c} \quad (2.29)$$

Cette expression montre que c est la codimension fractale du support de la cascade (voir paragraphe 2.1.6). Sa valeur détermine le nombre moyen m de vortex créés à chaque subdivision. Le caractère stochastique de cette approche est satisfaisant pour modéliser des processus réels. La figure 2.13 montre quelques exemples de cascades obtenues par le modèle β . On constate que plus c est élevé, plus le support du champ final est clairsemé. Bien que simpliste, il rend compte de la propriété d'intermittence, capitale pour un champ atmosphérique. Cependant, l'option binaire déterminant le devenir d'un vortex (vie ou mort) et l'équi-répartition de l'énergie entre tous les individus d'un même ordre n'est pas satisfaisante. Ces propriétés ne permettent pas de modéliser l'accumulation massive d'énergie dans des lieux très localisés se produisant communément dans l'atmosphère. Le modèle β peut être qualifié de monofractal dans la mesure où ses propriétés d'échelles sont entièrement déterminées par l'équation 2.29 à l'aide d'une unique (co)dimension fractale. Nous introduisons à présent la notion de propriétés multifractales avec l'exemple canonique du modèle α .

2.3.3 Le modèle α

La cascade du modèle α (*Schertzer and Lovejoy, 1984*) se présente de la même manière avec un vortex initial dont l'énergie est répartie itérativement dans des vortex d'ordres supérieurs positionnés sur une grille de plus en plus fine. D'une itération à l'autre, aucun emplacement n'est laissé vide. On se contente d'atténuer ou d'amplifier l'énergie disponible en la multipliant par un coefficient $k_1 = 2^{\gamma_-}$ (inférieur à 1) ou $k_2 = 2^{\gamma_+}$ (supérieur à 1). Les équations 4.16 sont remplacées par :

$$\begin{aligned} P(\mu = k_1) &= 2^{-c} \\ P(\mu = k_2) &= 1 - 2^{-c} \end{aligned} \tag{2.30}$$

μ est à nouveau une variable aléatoire respectant une loi binomiale. La conservation de l'énergie impose une contrainte sur γ_+ et γ_- . Seul l'un des deux peut être choisi de manière quelconque :

$$2^{-c}2^{\gamma_+} + (1 - 2^{-c})2^{\gamma_-} = 1 \quad (2.31)$$

Dans ce modèle, la grandeur c n'est plus la codimension du support de la cascade. En effet puisqu'aucune maille de la grille n'est inoccupée, la dimension fractale du support se confond avec la dimension topologique et sa codimension est nulle. En revanche, c correspond à la codimension du support des vortex qui ne subissent que des amplifications. Le cas particulier du modèle β est retrouvé quand γ_- tend vers $-\infty$. Il est clair que ce processus permet de générer une variabilité plus grande que le modèle β puisqu'il n'interdit pas à certains vortex d'être amplifiés indéfiniment sur les plus petites mailles de la grille entraînant l'occurrence de valeurs extrêmes. Nous allons maintenant expliciter ses propriétés multifractales. La cascade à la résolution $\lambda = 2^n$ est donnée par une collection d'individus d'énergie ϕ_n^{ij} (i et j repère la position de l'individu sur la grille, voir figure 2.14). L'équation probabiliste 2.29 du modèle β n'a pas d'équivalent puisque l'énergie d'un vortex peut prendre n'importe quelle valeur positive. En notant N_- le nombre d'atténuations et N_+ le nombre d'amplifications ayant conduit à un niveau d'énergie particulier ϕ_n^{ij} , nous pouvons écrire :

$$\phi_n^{ij} = 2^\gamma \quad (2.32)$$

avec :

$$\gamma = N_+\gamma_+ + N_-\gamma_- \quad (2.33)$$

Les combinaisons infinies de couples (N_+, N_-) offrent un large éventail de possibilités pour les valeurs de ϕ_n^{ij} . Il s'agit d'une loi de Bernoulli. En exploitant les propriétés de cette loi, il est possible (*Lovejoy and Shertzer, 2013*) d'exprimer la probabilité pour que l'énergie ϕ_n^{ij} d'un vortex soit supérieure à une valeur seuil λ^γ :

$$P(\phi_n^{ij} > \lambda^\gamma) \sim \lambda^{-C(\gamma)} \quad (2.34)$$

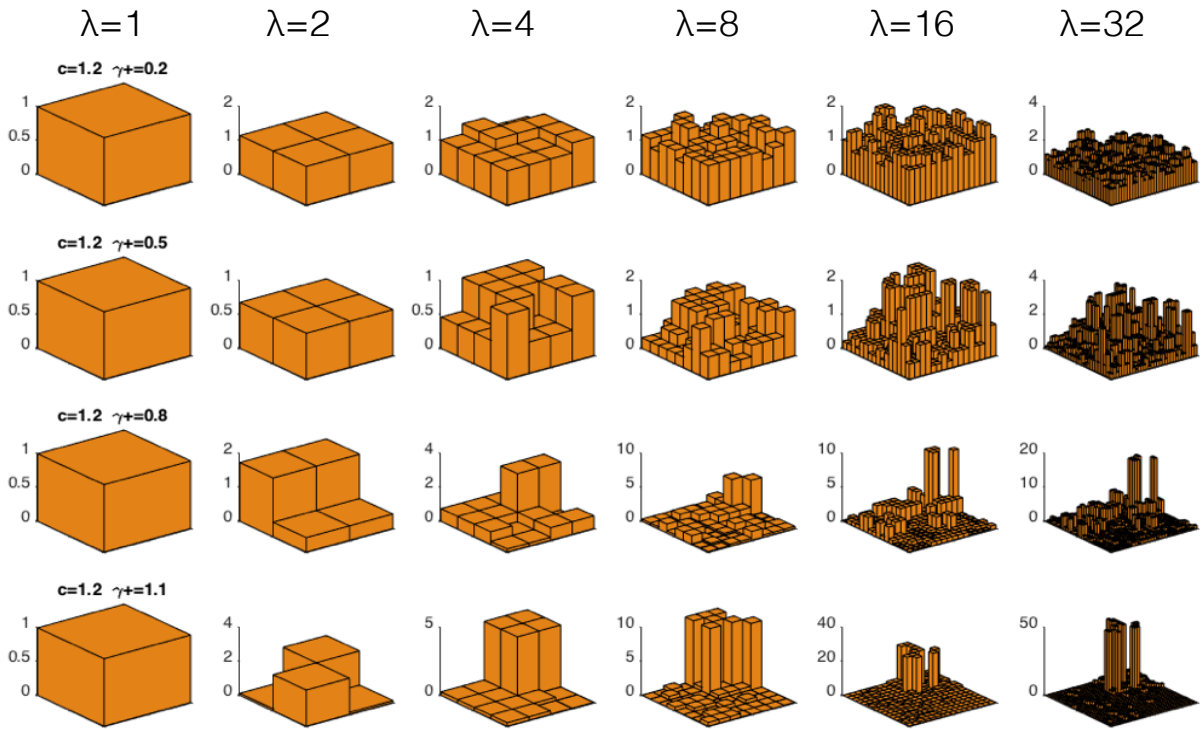


FIGURE 2.14 – Implémentation du modèle α (*Schertzer and Lovejoy, 1984*) avec $c = 1.2$ et γ^+ variant de 0.2 à 1.1. La hauteur des rectangles modélise l'énergie ϕ_n^{ij} répartie dans les vortex au fil des itérations. Plus γ^+ est élevé, plus le support du champ final présente des valeurs extrêmes (intermittence).

Il s'agit de lois d'échelle. La fonction $C(\gamma)$ est positive, convexe et croissante. La formule 2.34 montre qu'en fixant un seuil quelconque γ , l'ensemble des individus dont l'énergie est supérieure à λ^γ sont répartis sur un support géométrique fractal de codimension $C(\gamma)$. En fixant un autre seuil γ' , le support correspondant a une autre codimension fractale $C(\gamma')$. Ainsi chaque seuil définit un support de (co)dimension fractale différente. La cascade est dite «multifractale».

2.3.4 Propriétés statistiques des cascades multiplicatives

Nous avons décrit les cascades multiplicatives des modèles α et β en terme de probabilité. Quelles sont les propriétés statistiques d'un vortex d'énergie ϕ_n^{ij} ? Pour respecter la conservation de l'énergie :

$$\langle \phi_n^{ij} \rangle = 1 \tag{2.35}$$

Afin de décrire complètement les propriétés des ϕ_n^{ij} , nous devons expliciter le comportement de l'ensemble des moments statistiques définis par :

$$m_q = \langle (\phi_n^{ij})^q \rangle \quad (2.36)$$

Nous pouvons écrire :

$$m_q = \langle \left(\prod \mu_i \right)^q \rangle \quad (2.37)$$

où la série μ_i représente l'ensemble des variables aléatoires dont le produit a conduit au niveau d'énergie ϕ_n^{ij} . Puisque les μ_i sont indépendants, on a :

$$m_q = \langle \prod \mu_i^q \rangle = \prod \langle \mu_i^q \rangle \quad (2.38)$$

De plus la moyenne individuelle de $\langle \mu_i^q \rangle$ est indépendante de l'itération considérée :

$$m_q = \langle \mu^q \rangle^n \quad (2.39)$$

Les moments statistiques respectent donc des lois d'échelles de la forme :

$$m_q = \lambda^{K(q)} \quad (2.40)$$

avec :

$$K(q) = \log_2 \langle \mu^q \rangle \quad (2.41)$$

La forme de la fonction $K(q)$ ne dépend que de la variable aléatoire μ qui caractérise le choix du modèle. La table 2.3 donne la forme de $K(q)$ pour les modèles α et β ainsi que pour le modèle dit log-normal (*Kolmogorov*, 1962) obtenu en remplaçant la loi binomiale par une loi log-normale. Le modèle monofractal β est caractérisé par une fonction $K(q)$ linéaire. Les deux autres modèles sont multifractales avec des fonctions $K(q)$ incurvées. En particulier le modèle log-normale confère à la fonction $K(q)$ une forme quadratique.

	modèle β	modèle α	modèle log-normale
	(Mandelbrot, 1974)	(Schertzer and Lovejoy, 1984)	(Kolmogorov, 1962)
Loi	binomiale	binomiale	log-normale
Propriétés	$K(q) = C_1(q - 1)$	$K(q) = \log_2(2^{-c}2^{q\gamma^+} + (1 - 2^{-c})2^{q\gamma^-})$	$K(q) = C_1(q^2 - q)$
$K(q)$	monofractal	multifractal	multifractal

TABLE 2.3 – modèles de cascade

2.3.5 Propriétés d'un champ multifractal

Le modèle α (Schertzer and Lovejoy, 1984) nous a permis de présenter les propriétés d'une cascade multifractale dans un cas particulier. Le terme « multifractal » vient des travaux de Frisch and Parisi (1985) dans le domaine des turbulences. Nous considérons à présent le cas général d'un champ multifractal non conservatif. Nous le notons $h(x, y)$ en référence au champ topographique (voir figure 2.15). La distribution des incréments Δh respecte l'équation :

$$\Delta h \stackrel{d}{=} \phi^a \Delta x^H \tag{2.42}$$

où le flux sous-jacent ϕ est une cascade multifractale et a une valeur de puissance du flux. La paramètre H traduit l'aspect non-conservatif du champ. S'il est nul, le champ est une cascade pure. Nous résumons ci-dessous les propriétés de ϕ (en généralisant le cas du modèle α).

2.3.5.1 Singularités

En tant que cascade multiplicative, ϕ présente des fluctuations de plus en plus larges quand la résolution λ augmente. . En fixant un seuil quelconque γ_{seuil} , l'ensemble des valeurs du champs supérieures à $\lambda^{\gamma_{seuil}}$ sont réparties sur un support fractal :

$$P(\gamma > \gamma_{seuil}) \sim \lambda^{-C(\gamma_{seuil})} \tag{2.43}$$

La fonction de codimension $C(\gamma)$ (Schertzer and Lovejoy, 1987), positive, croissante et convexe, caractérise les propriétés multifractales de ϕ . Elle est liée à la fonction des dimensions fractales par la relation :

$$D(\gamma) = d - c(\gamma) \quad (2.44)$$

en notant d la dimension de l'espace.

2.3.5.2 Moments statistiques

Les moments statistiques du flux ϕ respectent des lois d'échelle :

$$\boxed{\langle \phi_\lambda^q \rangle \sim \lambda^{K(q)}} \quad (2.45)$$

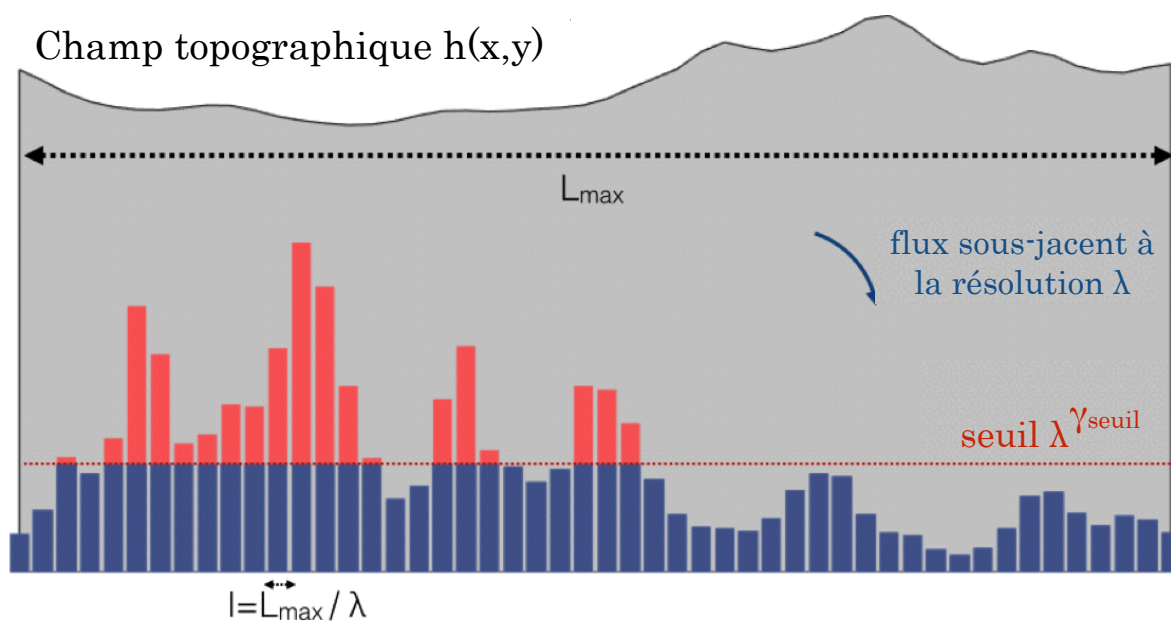
$K(q)$ est la fonction d'échelle des moments.

2.3.5.3 Transformations de Legendre

La description des propriétés de ϕ peut donc se faire soit par l'intermédiaire de la probabilité des singularités (équation 2.43), soit par l'intermédiaire des moments statistiques (équation 2.45). Ces deux descriptions sont en réalité équivalentes. A chaque ordre q correspond un et un seul seuil de singularité γ . Intuitivement, il est clair qu'en prenant un ordre de moment élevé, la moyenne de la relation 2.45 sera dominée par les fluctuations supérieures à un certain seuil. Cette correspondance se traduit par une transformation de Legendre (*Frisch and Parisi, 1985; Halsey et al., 1986; Fraysse, 2005*) entre $K(q)$ et $c(\gamma)$.

$$K(q) = \max_{\gamma} (q\gamma - c(\gamma)) \quad (2.46)$$

$$c(\gamma) = \max_q (q\gamma - K(q)) \quad (2.47)$$



$$P(\gamma > \gamma_{\text{seuil}}) \sim \lambda^{-c(\gamma_{\text{seuil}})}$$

$$\langle \phi_{\lambda}^q \rangle \sim \lambda^{K(q)}$$

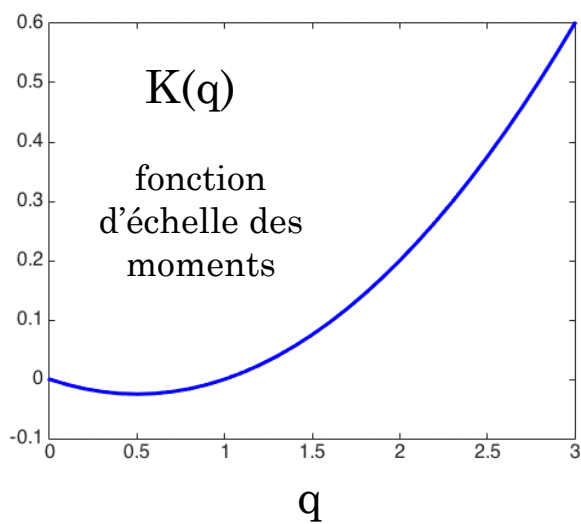
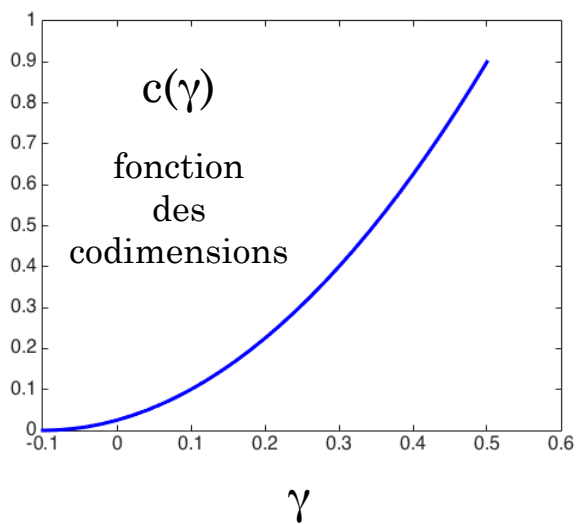


FIGURE 2.15 – Illustration des propriétés d'un champ topographique multifractal respectant l'équation 2.42

2.4 Champs multifractals continus

2.4.1 Cascade continue en échelle

Les cascades introduites dans la section précédente sont discrètes en échelle. Le ratio d'échelle $\lambda_0 = 2$ entre deux étapes de la cascade restreint la validité du comportement d'échelle à certaines valeurs discrètes de λ . Pour être adapté à un modèle de champ topographique, la cascade doit être continue en échelle. Considérons une cascade ϕ développée jusqu'au ratio λ et notons n le nombre d'étapes nécessaires pour passer de la plus grande échelle à la plus petite. En considérant une position (x, y) sur la cascade :

$$\phi_\lambda(x, y) = \prod_{i=1}^n \mu_i(x, y) \quad (2.48)$$

On a :

$$\log \phi_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^n \log \mu_i(x, y) \quad (2.49)$$

Pour rendre la cascade continue en échelle, le principe est de faire tendre le nombre d'itération n vers l'infini pour que le ratio d'échelle λ_0 tende vers 1 (densification). Après cette densification, $\log \phi_\lambda(x, y)$ est une somme infinie de variables aléatoires $\log \mu_i(x)$ d'après l'équation 2.49. Elle appartient à la catégorie des variables aléatoires *infinitement divisible* (noté ID). Par conséquent, une cascade continue en échelle doit respecter une loi log-1D.

2.4.2 Flux fractionnairement intégré FIF

Ce paragraphe présente une classe particulière de loi log-1D permettant de générer des cascades continues en échelle : les multifractales universelles (*Schertzer and Lovejoy, 1987; Schmitt et al., 1992a; Schertzer et al., 1997*). Le flux $\phi(x, y)$ est construit à partir d'un générateur Γ obtenu en sommant des variables aléatoires α -stable (voir section 5.2.1 pour une description détaillée de la procédure) :

$$\phi(x, y) = e^{\Gamma(x, y)} \quad (2.50)$$

La fonction ϕ qui respecte une loi $\log-ID$ est une cascade multifractale dont les propriétés statistiques sont données par la fonction d'échelle de moments $K(q)$ ou la fonction des codimensions $c(\gamma)$:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \quad (2.51)$$

$$c(\gamma) = C_1 \left(\frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (2.52)$$

avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$. Les fonctions $K(q)$ et $c(\gamma)$ sont liées par une transformation de Legendre (*Frisch and Parisi, 1985; Halsey et al., 1986*). Elles constituent deux descriptions équivalentes (l'une probabiliste et l'autre statistique) des propriétés du flux. Chaque seuil de singularité γ est associé à un et un seul moment statistique d'ordre q . En particulier la singularité γ_{mean} qui contribue le plus à la moyenne (moment d'ordre 1) est telle que $\gamma_{mean} = K'(1) = C_1$ ce qui entraîne $c(\gamma_{mean}) = C_1$. Le paramètre C_1 est donc la codimension de la moyenne. Si C_1 est faible, le support des éléments qui contribue de manière significative à la moyenne n'est pas fractal ($D = d - C = 2$). Quand C_1 est élevé, la moyenne est dominée par quelques fluctuations extrêmes réparties sur un support fractal de dimension $D < 2$. Nous voyons que C_1 contrôle l'aspect intermittent du champ mais ne lui confère pas ses propriétés multifractales puisqu'il ne concerne que la moyenne. C'est le paramètre α qui détermine le degré de multifractalité. Le cas $\alpha = 2$ donne une forme quadratique à $K(q)$ conforme au modèle log-normal. $\alpha = 0$ entraîne au contraire la même dépendance linéaire que le modèle monofractal β . Une valeur quelconque de α (entre 0 et 2) définit la courbure de la fonction $K(q)$. Le flux est élevé à la puissance a et la dépendance en H de l'équation 2.42 est obtenue de la même manière que pour le fBm en intégrant fractionnairement la quantité ϕ^a :

$$h(\vec{r}) = \int \frac{\phi^a(\vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^{2-H}} d\vec{r}' \quad (2.53)$$

La figure 2.16 montre un champ synthétique 2D obtenu en implémentant le FIF (avec $C_1 = 0.1$, $\alpha = 1.8$, $H = 0.5$). La représentation de la surface en relief ombré montre que la rugosité varie avec l'altitude. Chaque ligne de contour à altitude constante a une dimension fractale différente reflétant la multiplicité des dimensions fractales du flux sous-jacent. Les régions basses sont lisses. Au contraire, les régions hautes sont escarpées. Le paramètre global H ne coïncide avec l'exposant de Hurst du fBm que dans le cas $C_1 = 0$. Il peut cependant s'interpréter de la même façon en terme de rugosité globale du champ : plus H est élevé, plus l'apparence du champ synthétique est lisse. Dans le cadre de cette étude, nous considérons une version simplifiée du FIF (*Montera et al.*, 2011) pour laquelle $a = 1$. Nous discutons des limitations liées à ce choix dans le paragraphe 3.3.3.

2.4.3 Universalité

Parmi toutes les classes possibles, celle des multifractales universelles a l'avantage d'être stable et attractive. En effet, la forme donnée par l'équation 2.51 repose sur un développement théorique inspiré du théorème central limite (*Schertzer and Lovejoy*, 1987; *Lovejoy*, 1991) qui établit que la somme de variables aléatoires indépendantes tend vers une variable gaussienne quelles que soient les spécificités propres à chaque loi initiale. De manière analogue, un grand nombre de processus multifractals qui se superposent confèrent au champ total des propriétés multifractales universelles.

2.4.4 Marche aléatoire multifractale

Nous mentionnons sans entrer dans les détails que d'autres modèles de simulations multifractales continus existent., comme par exemple la marche aléatoire multifractale. Le lecteur peut se référer à *Schmitt and Marsan* (2001); *Barral and Mandelbrot* (2002) pour connaître le principe et les paramètres de ce modèle que nous abordons ici de manière purement illustrative. La figure 2.17 montre le résultat d'une simulation de marche aléatoire

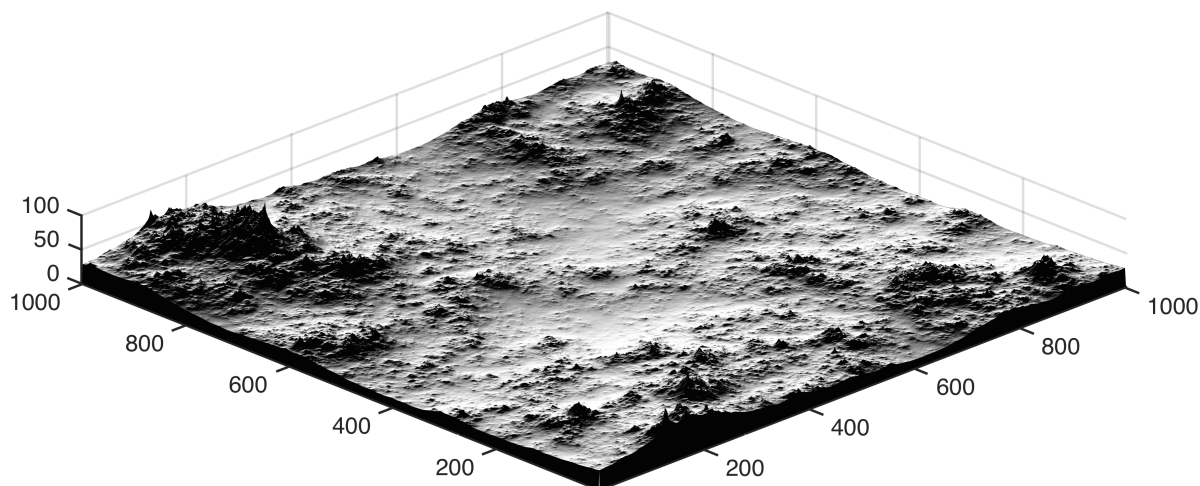


FIGURE 2.16 – Exemple de champ topographique multifractal généré par la méthode du FIF (*Schertzer and Lovejoy, 1987; Schmitt et al., 1992a; Schertzer et al., 1997*). On constate que certaines zones sont lisses et d’autres rugueuses (intermittence). A chaque niveau d’altitude correspond une dimension fractale différente.

multifractale. Parmi les différences importantes avec les simulations du FIF, on remarque que la rugosité n’est pas corrélée avec l’altitude.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps introduit la notion de figure fractale géométrique puis celle de propriétés multifractales pour un champ scalaire. Nous avons présenté deux modèles statistiques du champ topographique en justifiant leur pertinence. L’un est monofractal (fBm) et l’autre multifractal (FIF). Nous allons maintenant discuter des études de la topographie visant spécifiquement à interpréter les lois d’échelle de la topographie des surfaces naturelles dans le cadre de ces modèles statistiques.

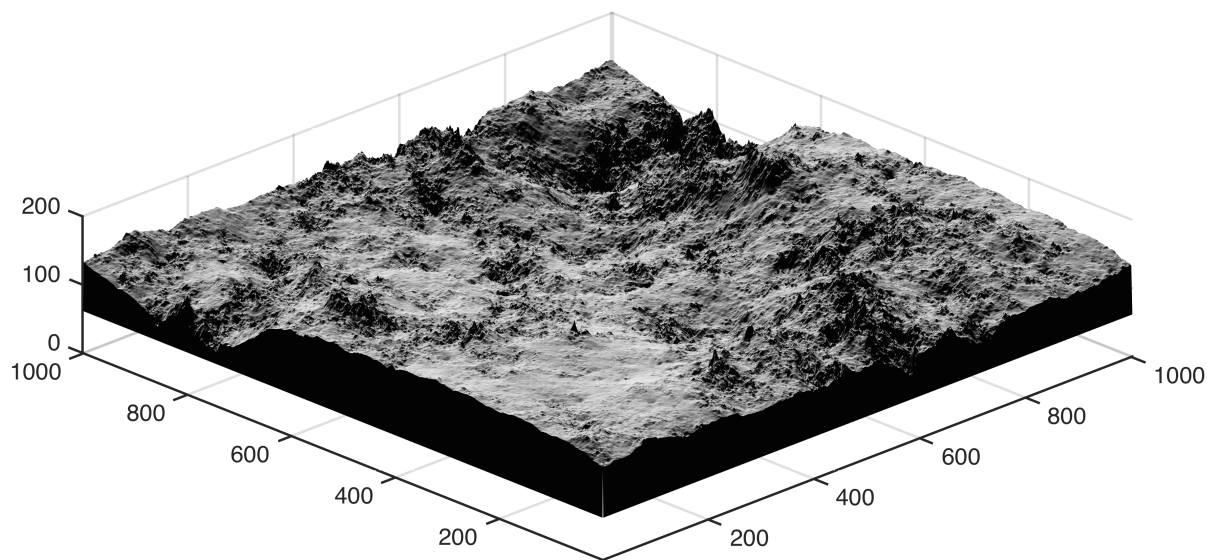


FIGURE 2.17 – Exemple de champ topographique multifractal généré à partir d’une marche aléatoire multifractale (*Schmitt and Marsan, 2001; Barral and Mandelbrot, 2002*). La valeur de H est 0.8. Le paramètre de multifractalité est choisi pour correspondre à $C_1 = 0.1$ dans le cas de *FiF* (Le paramètre α du FIF n’a pas d’équivalent). Comme dans le cas du FIF on note l’alternance de zones lisses et rugueuses.

Chapitre 3

La topographie est elle fractale, multifractale ?

Les objets fractals et les champs multifractals ont des propriétés semblables aux formes rencontrées dans la nature (auto-similarité, auto-affinité, loi de puissance, intermittence). Comme le flocon de Koch, la topographie a des détails à toutes les échelles, du moins sur une large gamme. D'autre part, les phénomènes auto-similaires que nous avons évoqués comme la cratérisation, le développement des réseaux hydrographiques, les champs temporels de pluies qui alimentent les rivières, les réseaux de failles contribuent à façonner la topographie. Il est donc naturel de supposer qu'ils lui transmettent leur caractère fractal. Nous avons présenté deux modèles statistiques pour le champ topographique : le modèle monofractal du Mouvement Brownien Fractionnaire (fBm, *Kolmogorov* (1940); *Mandelbrot and Ness* (1968), voir section 2.2.3) et le modèle multifractal du Flux Fractionnairement Intégré (FIF, *Schertzer and Lovejoy* (1987); *Schmitt et al.* (1992a); *Schertzer et al.* (1997), voir section 2.4.2). Dans ce chapitre, nous rappelons comment les idées de Mandelbrot ont été confrontées à la topographie des surfaces naturelles.

3.1 Lien entre la densité spectrale et le fBm

La plupart des études statistiques mentionnées dans le chapitre 1 (section 1.4.2.2) ne mentionnent pas le lien potentiel entre le comportement d'échelle de la densité spectrale et l'aspect fractal de la topographie. Rappelons que le caractère auto-similaire des lignes de côtes identifié par *Richardson* (1961) a conduit *Mandelbrot* (1967) à introduire la notion de dimension fractionnaire. Il propose finalement le terme «fractal» (*Mandelbrot*, 1975, 1979a) pour caractériser ces formes géométriques dont la dimension de Hausdorff (*Hausdorff*, 1918) est supérieure à la dimension topologique. Dans le célèbre essai «the fractal geometry of nature», *Mandelbrot and Pignoni* (1983) reprennent les arguments déjà avancés par *Mandelbrot* (1979a); *Goodchild* (1982) qui suggèrent de considérer la topographie comme une fractale géométrique. L'argument principal est le réalisme frappant des topographies synthétiques générées en implémentant le mouvement brownien fractionnaire (*Kolmogorov* 1940; *Mandelbrot and Ness* 1968, voir section 2.2.3). Dans le cadre de ce modèle, les statistiques des différences d'altitude Δh entre deux points quelconques séparés par une distance Δx ne font intervenir qu'un seul paramètre :

$$\Delta h \stackrel{d}{=} \phi \Delta x^H \quad (3.1)$$

H est l'exposant de Hurst et ϕ est bruit blanc brownien. L'équation 3.1 traduit le caractère auto-affine d'une surface fBm dont la section par un plan horizontal définit des contours géométriques auto-similaires. Puisque seules les propriétés statistiques du champ sont imposées, toutes les morphologies (tendances, positions des maxima et minima) sont aléatoires. La relation 3.1 établit un lien entre les échelles de même nature que l'équation 3.2 avec la densité spectrale de puissance P :

$$P(k) \sim k^{-\beta} \quad (3.2)$$

De fait, la densité spectrale d'un fBm respecte une loi d'échelle. Son coefficient β est relié à H , D et C (codimension fractale) par les relations (*Voss*, 1991; *Mandelbrot*, 1991) :

$$C = H = 3 - D \quad \beta = 2H + 1 \quad (3.3)$$

Etant donnée la dimension topologique d'une surface, sa dimension fractale D peut être comprise entre 2 et 3. Si $D = 2$, la surface est parfaitement lisse. Au contraire si $D = 3$, son irrégularité est telle qu'elle « remplit » tout l'espace. H est donc dans l'intervalle $[0, 1]$, et β dans l'intervalle $[1, 3]$. Ainsi, la plupart des analyses mentionnées dans le chapitre 1 (section 1.4.2.2) sont statistiquement compatibles avec les surfaces auto-affines du fBm. L'estimation de β peut alors être considérée comme une mesure indirecte de la dimension fractale de la surface :

$$D = \frac{5}{2} - \frac{\beta}{2} \quad (3.4)$$

La valeur typique $\beta = 2$ correspond à une dimension $D = 2.5$ et à un exposant de Hurst $H = 0.5$. Cette valeur particulière est associée au mouvement brownien standard. Si le champ topographique est statistiquement conforme au fBm, alors un profil de topographie $1D$ obtenu en coupant le champ $2D$ par un plan vertical est également un fBm dont la dimension fractale est plus faible d'une unité. Nous passons maintenant en revue les études explicitement fractales de la topographie qui se sont données pour objectif de comparer les propriétés statistiques des surfaces à celle du fBm en appliquant différentes méthodes.

3.2 Etudes fractales de la topographie

Suite aux travaux de Mandelbrot, de nombreuses études se sont donc focalisées sur l'aspect fractal de la topographie. L'objectif n'est alors pas seulement de constater un comportement d'échelle mais également de le confronter à un cadre statistique précis. Hormis l'étude de la densité spectrale, plusieurs approches sont possibles. Nous avons introduit au chapitre précédent, la méthode du compas de Richardson et la technique du « box counting ». Une autre méthode communément utilisée, le variogramme, s'appuie spécifi-

quement sur les propriétés auto-affines du mouvement brownien fractionnaire (équation 3.1).

3.2.1 La méthode du compas

Les travaux de *Richardson* (1961) ont joué un rôle déterminant dans le développement des idées de *Mandelbrot* (1967). La méthode du compas dont il est l'initiateur (voir section 2.1.3) est la plus ancienne technique utilisée pour extraire la dimension fractale d'une surface. Elle peut s'appliquer à n'importe quel contour défini en coupant la topographie par un plan horizontal.

Méthode :

1. On choisit une échelle l et une altitude s
2. Le champ est coupé par un plan horizontal à l'altitude s et la ligne des contours est déterminée.
3. On déplace un compas d'ouverture l le long du contour en comptant le nombre $n(l)$ de pas nécessaires.
4. Le graph en $\log - \log$ de $n(l)$ en fonction de l permet d'estimer la dimension fractale ($\text{pente} = 1 - D$).

En analysant les contours d'une île (côtes, ligne de niveau, lacs), *Goodchild* (1982) montre leur caractère auto-similaire. Il trouve cependant des dimensions fractales augmentant avec l'altitude (de 1.1 à 1.3) ce qui est incompatible avec le modèle du fBm. Au contraire la figure 3.1a reproduite depuis *Culling and Datko* (1987) obtenue dans le cadre d'une analyse par la méthode du compas montre des statistiques cohérentes avec le FbM : la dimension des contours ne dépend pas de l'altitude. D'autres analyses donnent des résultats assez contrastés (*Kent and Wong*, 1982; *Muller*, 1986; *Aviles et al.*, 1987; *Roy et al.*, 1987; *Carr and Benzer*, 1991; *Bruno et al.*, 1992). Le lecteur peut consulter les revues de *Klinkenberg and Goodchild* (1992); *Klinkenberg* (1994) pour un bilan des aspects techniques de la méthode du compas et des résultats obtenus par cette méthode.

3.2.2 La méthode du box-counting

A l'instar de la méthode du compas, cette technique vise généralement à caractériser la dimension d'un contour linéaire. Elle est cependant plus facile à implémenter. Le principe appliqué à la topographie est le suivant :

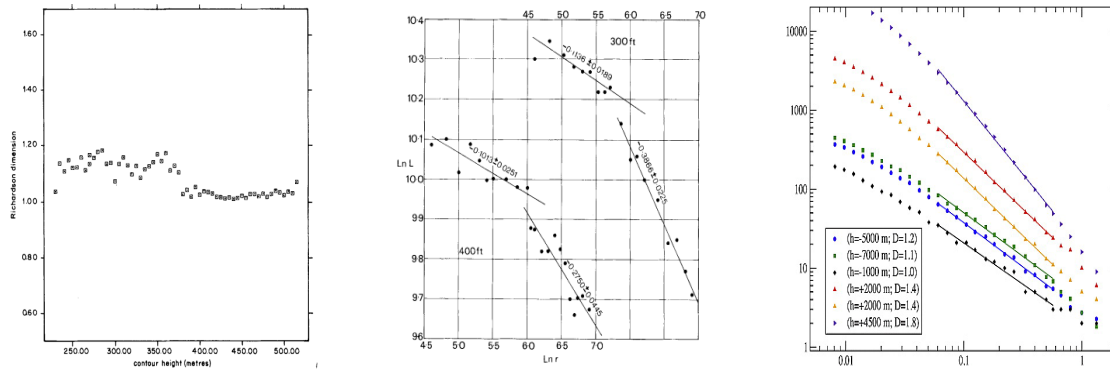
Méthode :

1. On choisit une échelle l et une altitude s
2. La grille d'élévation topographique est moyennée sur des cellules de largeur l .
3. Le champ topographique est coupé par un plan horizontal à l'altitude s .
4. Les cellules dont l'élévation est inférieure à s sont codées en noir, les autres en blanc
5. On compte le nombre $n(l)$ de cellules noires adjacentes à au moins une cellule blanche
6. Le graph en $\log - \log$ de $n(l)$ en fonction de l permet d'estimer la dimension fractale ($\text{pente} = 1 - D$).

Plusieurs études (*Barenblatt et al.*, 1984; *Okubo and Aki*, 1987; *Aviles et al.*, 1987; *Turcotte*, 1989) ont testé cette approche (voir la revue de *Klinkenberg* (1994) pour une discussion détaillée). Plus récemment, la méthode a été appliquée sur une base locale et globale dans une étude de la topographie terrestre : la figure 3.1c reproduite d'après *Baldassarri et al.* (2008) montre que la dimension fractale estimée par comptage de boîtes varie clairement avec l'altitude, loin des prédictions du fBm. Les auteurs constatent également que la dimension varie localement. Cette dernière observation en fait un indicateur géométrique potentiellement pertinent pour caractériser la signature statistique de différents processus mais constitue également un écart au modèle du fBm.

3.2.3 Le variogramme

Le variogramme s'applique directement sur le champ $2D$ sans passer par des sections horizontales. En s'appuyant sur les propriétés statistiques verticales du champ (*ie* les



(a) Analyse d'une région terrestre : la dimension fractale (méthode du *compas*) indépendante du contour choisi (espacement vertical : 5 mètres). Cohérent avec le *fBm*. Reproduit depuis *Culling and Datko* (1987).

(b) Analyse d'une région terrestre : la méthode du *compas* révèle deux gammes d'échelles distinctes. Reproduit depuis *Culling and Datko* (1987).

(c) Etude globale des contours de la topographie terrestre par la méthode de *comptage des boites*. Chaque altitude à sa propre dimension fractale. Incohérent avec le *fBm*. Reproduit depuis *Baldassarri et al.* (2008).

FIGURE 3.1 – méthodes du *compas* et *comptage de boites*

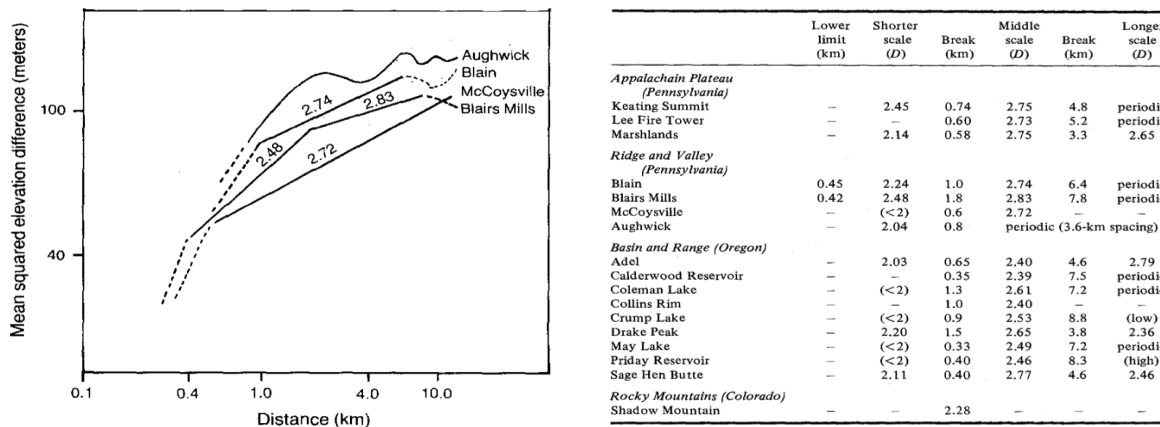
différences d'altitude), le variogramme est intrinsèquement lié au modèle du *fBm* puisque il prétend mesurer l'unique dimension fractale du champ par l'intermédiaire de l'exposant de Hurst H . Le variogramme est construit à partir de la moyenne du carré des différences d'élévation Δh pour plusieurs distances Δx . Si le champ est conforme au *fBm*, la dimension fractale D peut être estimée à partir d'une régression linéaire :

$$\langle \Delta h^2 \rangle \sim \Delta l^{2H} \quad (3.5)$$

Méthode :

1. Sur une grille topographique, plusieurs paires de points sont tirés aléatoirement.
2. Pour chaque pair, la distance Δl ainsi que la différence d'altitude Δh sont estimées.
3. Les paires sont rangées dans des classes d'échelle afin d'effectuer la moyenne quadratique $m(l)$ de l'équation 3.5 pour différentes valeurs de Δl .
4. Le graph en *log-log* de $m(l)$ en fonction de l permet d'estimer la dimension fractale par l'intermédiaire de l'exposant de Hurst (*penne* = $2H$).

Faisant suite aux travaux de *Burrough* (1981), *Mark and Aronson* (1984) appliquent la méthode du variogramme sur plusieurs quadrangles topographiques du territoire des Etats-Unis avec une résolution de 30 mètres et une grande variété de contextes géologiques. La figure 3.2a reproduit depuis *Mark and Aronson* (1984) montre sur quelques exemples comment varie la racine de la variance (écart-type) en fonction de l'échelle (représentation logarithmique). Les auteurs constatent qu'il est rarement pertinent d'effectuer une régression unique sur l'ensemble de la gamme d'échelle disponible. Au contraire, il est nécessaire de restreindre « à la main » l'analyse aux gammes pouvant faire l'objet d'une régression. Les graphes de la figure 3.2a montrent que dans certains cas, la corrélation linéaire est tout simplement insuffisante. La topographie échappe alors complètement au modèle du fBm. Dans d'autre cas, la loi d'échelle est valable sur une certaine gamme. En règle générale, au moins deux régimes distincts coexistent. Du point de vue géologique, l'identification de l'échelle de transition entre deux segments présente un grand d'intérêt. La figure 3.2b qui récapitule les résultats de *Mark and Aronson* (1984) montre que la transition se produit autour de 1 kilomètre. La gamme des petites échelles est globalement caractérisée par une dimension proche de 2 (terrain lisse). Au contraire, la dimension associée aux grandes échelles est plus élevée ($\sim 2.5 - 2.7$). Dans certaines configurations, les auteurs trouvent des pentes correspondant à des dimensions < 2 , non cohérentes avec l'interprétation fractale. Bien qu'une transition entre deux gammes ne soit pas attendue dans le cadre du fBm, *Mandelbrot* (1979b); *Goodchild* (1980) ont proposé de généraliser le modèle pour générer des comportements d'échelle par morceau mais sans faire de proposition concrète. Dans le même esprit, *Culling and Datko* (1987) étudient les variogrammes de 15 terrains. Ils constatent que l'estimation de D par cette méthode (≈ 2.15) est cohérente avec celle obtenue par la méthode du compas. La question de l'anisotropie des propriétés statistiques est abordée par *Klinkenberg and Goodchild* (1992). Les auteurs présentent des variogrammes angulaires sur une cinquantaine de champs topographiques et constatent que l'estimation de D ainsi que l'échelle de transition peut varier considérablement suivant l'angle d'observation.



(a) Variogrammes de quatre MNT de la province «Ridge and Valley» en Pennsylvannie. Dans un souci de clarté, seules les droites de régressions sont représentées; les pointillés correspondent à des segments ne pouvant être ajustés par une régression linéaire. Les nombres sur les segments en traits plein correspondent à des dimension fractales estimées. Reproduit depuis *Mark and Aronson* (1984).

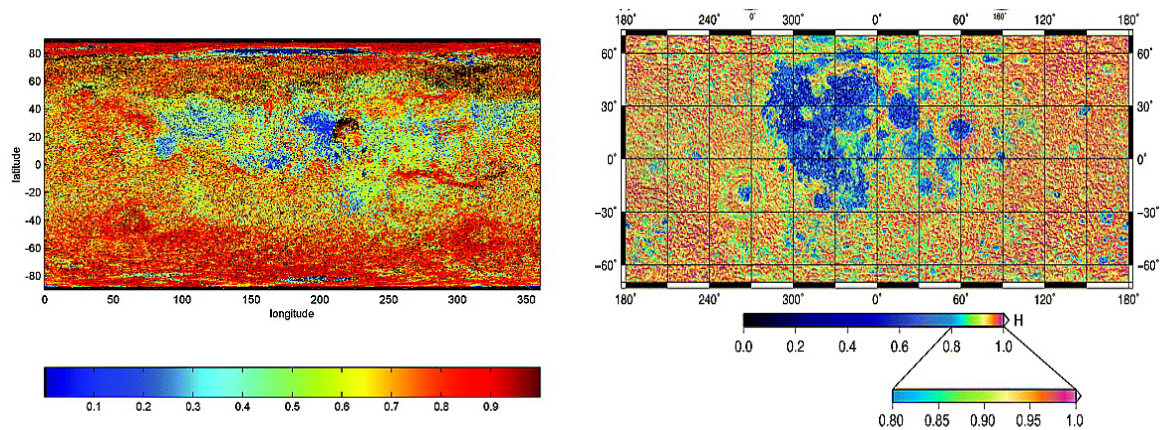
(b) Dimensions fractales et gammes d'échelle estimée par la méthode du variogramme sur différentes régions. Reproduit depuis *Mark and Aronson* (1984). Une transition à généralement lieu en distinguant deux gamme d'échelles

FIGURE 3.2 – Variogramme

3.2.4 Bilan de l'interprétation monofractale

Quelle que soit la méthode utilisée, l'étude statistique des reliefs fait généralement ressortir des lois d'échelles. Cependant, la confrontation avec le modèle fBm est loin d'être satisfaisante, d'une part parce que les lignes de niveaux d'un champ topographique réel requièrent le plus souvent des dimensions fractales différentes et d'autre part parce que l'anisotropie révélée par le variogramme est rarement négligeable. De plus, la topographie réelle semble au mieux pouvoir être considérée comme une juxtaposition de zones fractales plus ou moins homogènes sans cohérence globale. Par conséquent, l'identification de la topographie d'un corps à une réalisation du fBm semble très réductrice. Plusieurs auteurs (*Xu et al.*, 1993; *Klinkenberg*, 1994; *Gallant et al.*, 1994) ont discuté en détails des succès et des limites de l'approche monofractale mais l'enthousiasme initial suscité par les idées de Mandelbrot s'est considérablement atténué. Il n'en demeure pas moins que les paramètres H , β ou D peuvent être évalués.

Le paramètre H en particulier est communément utilisé pour caractériser la rugosité d'une surface. Il apporte potentiellement des informations précieuses sur les processus



(a) Etude de Mars. Exposant de Hurst local estimé sur des profils de 30 km. Reproduit depuis *Orosei et al.* (2003).

(b) Etude de la Lune. Exposant de Hurst local estimé sur des pixels $0.5^\circ \times 0.5^\circ$. Reproduit depuis *Rosenburg et al.* (2011)

FIGURE 3.3 – Exposant de Hurst par la méthode du variogramme

qui sous-tendent la topographie, que cette dernière soit correctement intégrée dans un modèle fractal ou non. Dans une étude de la topographie martienne, *Orosei et al.* (2003) reprennent le principe des contributions de *Plaut and Garneau* (1999); *Garneau and Plaut* (2000) pour estimer les variations locales de H afin de caractériser la rugosité de la surface martienne pour des applications radars. La carte de la figure 3.3a montre des valeurs allant de 0 à 1 soit toute la gamme permise par le fBm. Le paramètre H a fait l'objet d'autres études récentes en planétologie. La topographie de la Lune (*Smith et al.*, 2010) étudiée par *Rosenburg et al.* (2011) présente des valeurs de H très proches de 1 et une dichotomie entre les highlands cratérisés et les maria volcaniques plus lisses. Mentionnons également les résultats de *Cheng et al.* (2001) sur l'astéroïde éros, de *Susorney et al.* (2017) sur Mercure, l'analyse fractale des lacs de Titan de *Sharma and Byrne* 2010 et les résultats terrestres de *Labarre et al.* (2017).

3.2.5 Vers une interprétation multifractale

Suite à l'échec relatif de l'interprétation monofractale, le modèle du fBm a été progressivement abandonné. En contrepartie, quelques études ont proposé de pallier ses limitations en appliquant les concepts multifractals (*Lavallee et al.*, 1993; *Gagnon et al.*, 2003, 2006; *Landais et al.*, 2015; *Deliege et al.*, 2016). Nous avons vu dans le chapitre précédent que la

notion d'intermittence héritée du domaine des turbulences atmosphériques (*Richardson*, 2007; *Kolmogorov*, 1941) pouvait être appliquée à la topographie. Il suffit pour cela de remplacer l'équation 3.1 par :

$$\Delta h \stackrel{d}{=} \varphi \Delta l^H \quad (3.6)$$

où φ est une cascade multifractale. Sa capacité à générer des valeurs extrêmes promet des variations d'altitudes Δh beaucoup complexes. De plus, la multiplicité des dimensions fractales associées aux différents seuils de singularité semble adaptée pour interpréter certains des résultats mentionnés plus haut. Nous avons introduit dans le chapitre 2 (section 2.4.2) la méthode standard permettant de générer un champ statistique conforme à cette équation : le flux fractionnairement intégré (FIF).

3.3 Analyse multifractale

3.3.1 Introduction

Pour illustrer les limites de l'interprétation géométrique et la nécessité de recourir à la notion de multifractale, considérons le flux sous-jacent φ de la topographie, défini par l'équation 3.6. Le flux normalisé ϕ' à la plus petite résolution peut être approché par :

$$\phi' = \frac{\phi}{\langle \phi \rangle} = \frac{\Delta h}{\langle \Delta h \rangle} \quad (3.7)$$

Dans le cas d'un mouvement brownien fractionnaire, ϕ' est par définition une simple distribution gaussienne. Nous considérons deux cas de topographies réelles représentées par des champs scalaires à deux dimensions. Le premier cas provient d'une région martienne située dans l'hémisphère sud (*Smith et al.*, 2001b). Il s'agit d'une plaine s'étendant au sud des volcans de la région de Tharsis. Le terrain est relativement plat à grande échelle mais la topographie est marquée par les vestiges de nombreux écoulements volcaniques et quelques cratères. La figure 3.4 permet de visualiser l'allure du champ et montre également le flux dans la direction des longitudes. On constate la présence de nombreux «pics»

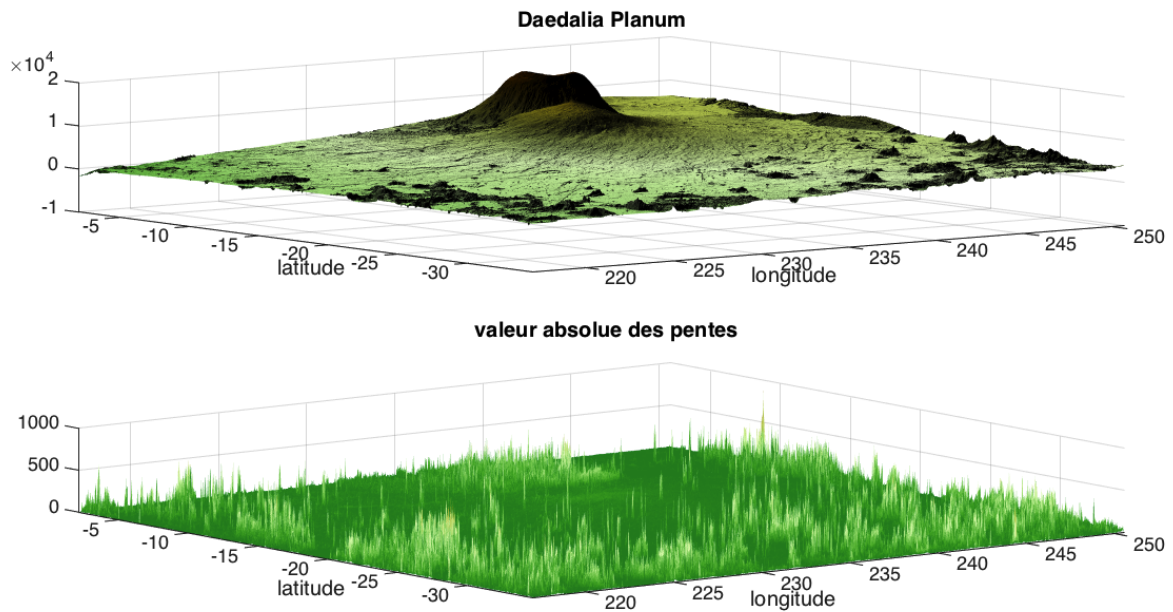


FIGURE 3.4 – Topographie d’une région de Mars (Daedalia Planum, *Smith et al.* (2001b)) et le flux dans la direction des longitudes. Le flux révèle la présence de comportements locaux extrêmes qui n’ont pas d’interprétation possible dans le cadre géométrique des fractals

révélant des comportements locaux extrêmes. Cet aspect est impossible à reproduire avec un fBm. En effet, dans le cas du mouvement brownien standard, l’incrément respecte une distribution gaussienne qui interdit les grands écarts entre deux points adjacents du champ. Le flux du champ synthétique fBm représenté sur la figure 3.6 n’est visiblement pas compatible avec cet exemple martien. Au contraire, la simulation FiF de la figure 3.7 semble plus satisfaisante. Un autre exemple est donné par le quadrangle lunaire très fortement cratérisé défini par l’intervalle de latitude (resp. longitude) $0-30^\circ$ (resp. $225^\circ-270^\circ$) et représenté sur la figure 3.5 (*Smith et al.*, 2010). Malgré sa très grande superficie, le champ semble être entièrement conditionné par le processus de cratérisation et présente un caractère homogène. Le flux correspondant est lui aussi très homogène, comparé à l’exemple martien et semble cette fois pouvoir coïncider avec le flux gaussien d’un fBm (figure 3.6). Il demeure que dans le cas martien où la topographie résulte de processus plus complexes, l’allure du flux conduit à rejeter l’interprétation géométrique fractale pour privilégier un point de vue multifractal. Nous présentons ci-dessous les méthodes à mettre en oeuvre pour quantifier les propriétés statistiques du flux.

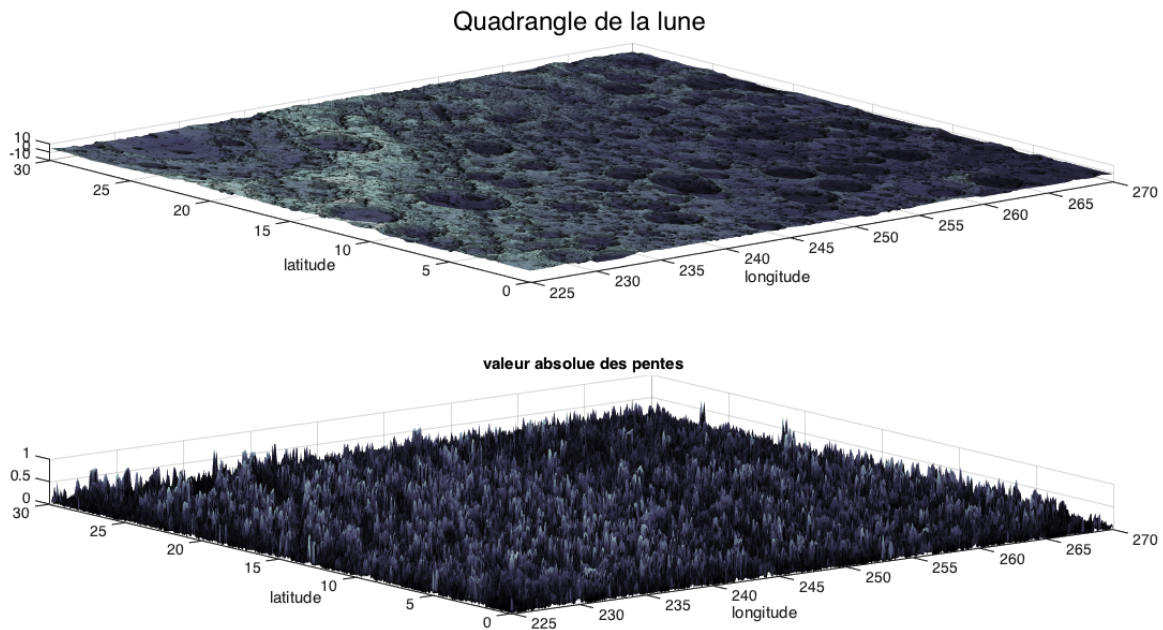


FIGURE 3.5 – Topographie d’une quadrangle de la Lune (*Smith et al.*, 2010) et le flux dans la direction de longitude. Le flux est homogène, indiquant que la topographie lunaire sur ce quadrangle pourrait être statistiquement décrite par un mouvement brownien fractionnaire

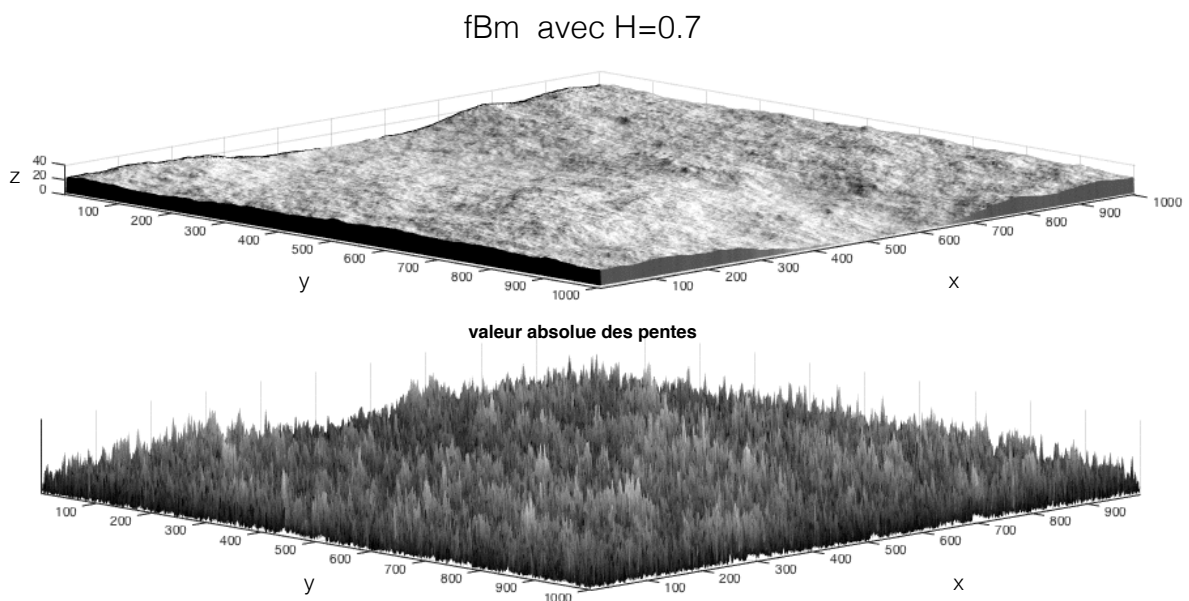


FIGURE 3.6 – Pour comparaison : topographie synthétique fBm avec $H = 0.7$ et le flux dans la direction x.

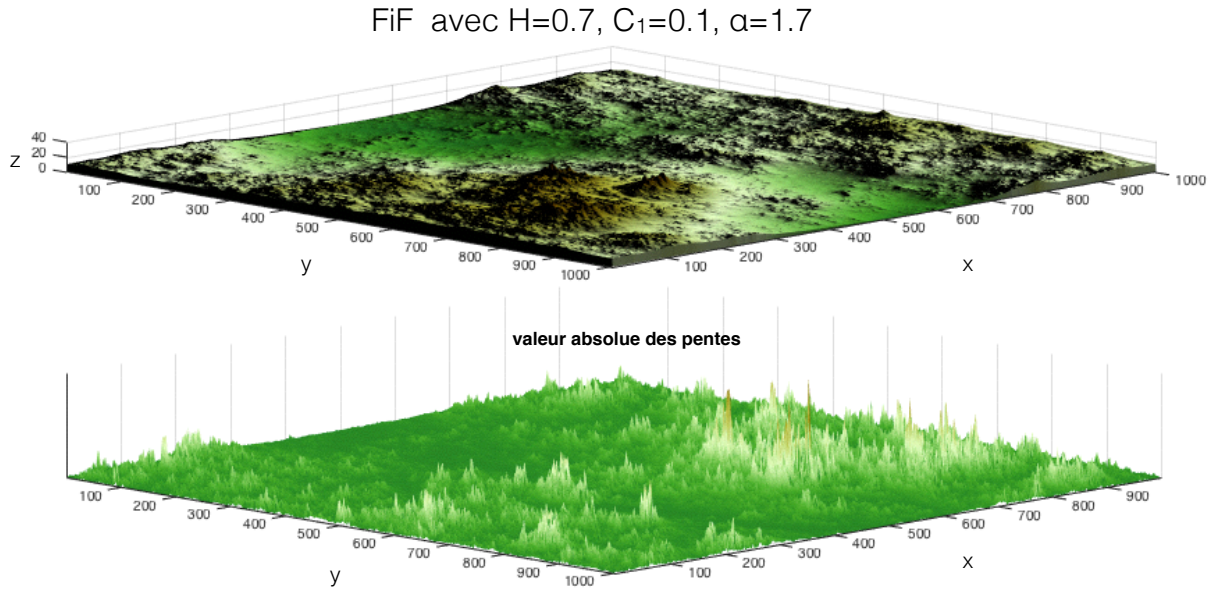


FIGURE 3.7 – Pour comparaison : topographie synthétique FIF avec $H = 0.7$, $C_1 = 0.1$, $\alpha = 1.7$ et le flux dans la direction x .

3.3.2 Analyse des moments du flux («trace moment»)

Principe général : Par souci de clarté, nous nous limitons au cas de l'étude d'un profil uni-dimensionnel. La procédure se généralise sans difficulté à un champ $2D$. Un profil topographique échantillonné h_i conforme au modèle du FIF résulte de l'intégration fractionnaire (d'ordre H) d'une cascade multifractale ϕ . Nous avons détaillé au chapitre précédent les propriétés statistiques remarquables d'une telle cascade aux différents stades de son développement de la plus grande vers la plus petite échelle. Pour rappel :

$$\langle \phi_\lambda^q \rangle \sim \lambda^{K(q)} \quad (3.8)$$

ou λ est la résolution et $K(q)$ la fonction d'échelle des moments. Pour vérifier les propriétés du flux à partir d'un profil échantillonné, il est nécessaire de s'affranchir de la dépendance en H . Rigoureusement, il faudrait procéder à une dérivation fractionnaire d'ordre H . Cette opération est délicate car d'une part la valeur de ce paramètre ne peut être estimée avec précision et d'autre part, l'implémentation numérique de l'intégration fractionnaire est difficile à mettre en oeuvre. Le flux échantillonné à la plus petite résolution ϕ_i peut

cependant être approché de manière satisfaisante (*Lavallee et al.*, 1993) en considérant les premières différences du champ :

$$\phi_i \approx \frac{h(i+1) - h(i)}{\langle h(i+1) - h(i) \rangle} \quad (3.9)$$

Le dénominateur est un facteur de normalisation. Sous cette forme, le flux sous-jacent peut être analysé en dégradant progressivement la résolution. Pratiquement, les étapes sont les suivantes (*Tessier et al.*, 1993). Dans un premier temps, ϕ_i est moyennée sur des intervalles de plus en plus grands correspondant à des ratios d'échelle λ de plus en plus petits. Cette opération consiste à remonter les étapes de la cascade en sens inverse de son développement théorique afin de déterminer les quantités ϕ_λ intervenant dans la relation 3.8. La cascade ainsi reconstituée (« dressed cascade ») n'a pas tout à fait les mêmes propriétés statistiques que la cascade réelle (« bare cascade ») (*Schertzer and Lovejoy*, 1987; *Schertzer*, 1992). La première génère plus de valeurs extrêmes que la seconde. A partir d'un certain ordre critique q_D ces valeurs extrêmes font diverger les moments d'ordre $q > q_D$. Il est donc nécessaire de limiter l'analyse aux ordres peu élevés pour éviter de rencontrer ces moments divergents. On moyenne ensuite les quantités $\langle \phi_\lambda^q \rangle$ pour différentes valeurs de q afin d'obtenir une estimation des moments. La dernière étape consiste à normaliser par la moyenne (moment statistique d'ordre 1).

Mise en œuvre : Plusieurs auteurs (*Lavallee et al.*, 1993; *Lovejoy et al.*, 1995; *Gagnon et al.*, 2003, 2006) ont étudié la topographie terrestre en appliquant cette méthode à différents jeux de données. La figure 3.8a montre les résultats d'une analyse globale de la topographie terrestre (*Gagnon et al.*, 2006). Plusieurs MNT sous formes de cartes rectangulaires sont traités dans cette étude. La méthode « trace moment » est appliquée en considérant chaque ligne et colonne comme un profil topographique uni-dimensionnel. Les propriétés statistiques $2D$ sont obtenues en moyennant les ϕ_λ^q issus de tous les profils. La figure 3.8a montre la dépendance linéaire en représentation logarithmique de plusieurs moments vis à vis de l'échelle (sur une large gamme). En effectuant des régressions sur chaque moment empirique, les auteurs peuvent représenter la fonction d'échelle des

moments $K(q)$ (figure 3.8b). Ils constatent qu'elle est non nulle, convexe et clairement courbée au voisinage de la moyenne. Les statistiques de la topographie terrestre sont donc multifractales. Ce résultat confirme que le modèle du mouvement brownien fractionnaire dont les propriétés sont purement monofractales ($K(q) = 0$) n'est pas adapté à la topographie terrestre. De plus les auteurs ont montré que la classe des multifractales universelles était adaptée en estimant la valeur des paramètres ($C_1 \approx 0.1$ et $\alpha \approx 1.7$).

3.3.3 Analyse des fluctuations d'altitude

Nous décrivons maintenant une approche plus générale visant à mettre en évidence les propriétés multifractales d'un profil topographique h . Elle repose sur la manière de définir les fluctuations d'altitudes à différentes échelles. La définition la plus courante est la suivante :

$$\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x)$$

On définit les fonctions de structures d'ordre q en généralisant le principe du variogramme 3.5 :

$$\langle \Delta h^q \rangle \sim \Delta l^{\xi(q)} \quad \text{avec} \quad \xi(q) = qH - K(q)$$

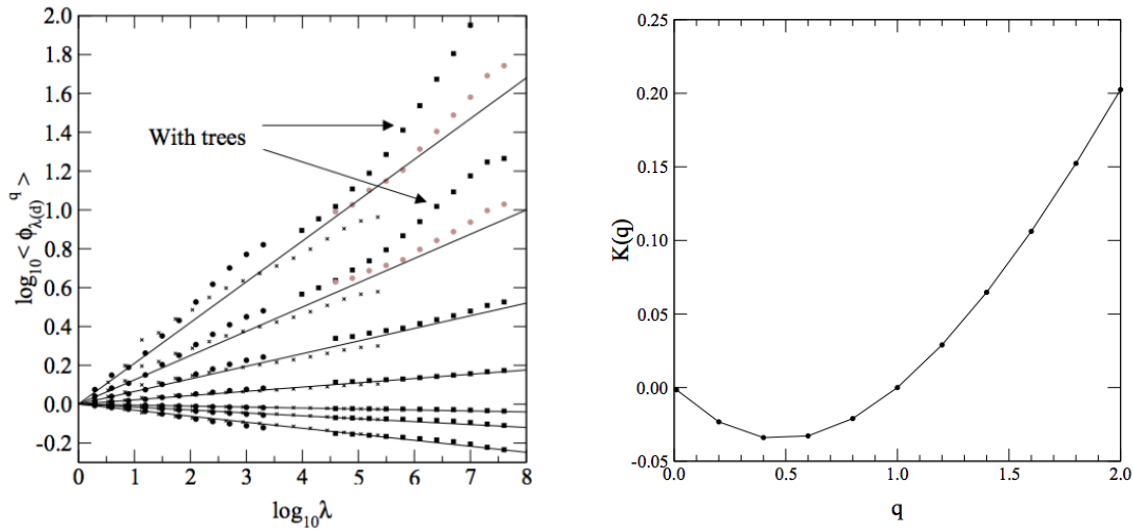
Pour une multifractale universelle, $\xi(q)$ est incurvée au voisinage de la moyenne et $K_a(q) = K(aq) - qK(a)$ avec :

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q)$$

En posant $a = 1$, on a simplement :

$$K_q(q) = K(q)$$

Sans restriction sur la valeur de a , une infinité de couple de paramètre (H, a) peuvent conduire aux mêmes fonctions de structures (Mezmate, 2014). Cette ambiguïté (appelée équifinalité) n'est pas sans conséquence sur les résultats. Dans le cas de la topographie,



(a) Analyse des moments du flux de la topographie terrestre globale obtenu en compilant les résultats sur différents jeux de données terrestres. L'échelle max est 20000 kilomètres. Plusieurs moments statistiques sont évalués ($q = 2.18, 1.77, 1.44, 1.17, 0.04, 0.12$) et présente tous un comportement d'échelle distincts.

(b) Fonction d'échelle de moment $K(q)$ obtenue à partir des régression linéaires de la méthode *trace moment* sur le jeu de donnée globale ETOPO5. La courbure autour du moment d'ordre 1 indique des propriétés multifractales

FIGURE 3.8 – Etude multifractale de la topographie terrestre, reproduit depuis *Gagnon et al.* (2006)

nous ne disposons pas d'hypothèse physique justifiant le choix d'une valeur particulière pour a d'où la simplification $a = 1$. Avec cette hypothèse, les autres paramètres peuvent être déterminés de manière unique afin de décrire géométriquement les fonctions de structure, au détriment de l'interprétation physique.

Afin d'analyser un champ par ses fluctuations, la procédure est la même que pour le variogramme sauf que plusieurs moments sont à considérer pour représenter la fonction ξ . Cette technique est équivalente à une décomposition du signal en coefficients d'ondelettes en utilisant la forme d'ondelette la plus basique (dite « du pauvre homme »). Les études multifractales ont classiquement recours à des formes d'ondelettes plus complexes qui permettent des estimations plus stables (ondelettes de Haar, de Daubechies, du chapeau mexicain). Nous développerons au chapitre suivant le principe de l'ondelette de Haar que nous avons appliqué dans différents contextes. *Deliege et al.* (2016) ont appliqué la méthode des «wavelet leader» (*Jaffard, 2004*) à la surface de Mars pour analyser les propriétés multifractales locales la topographie. Nous reviendrons plus loin sur leur résultats.

3.3.4 Densité spectrale de puissance d'un champ multifractal

A l'instar du fBm, la densité spectrale de puissance d'un champ multifractal respecte une loi d'échelle :

$$P(k) \sim k^{-\beta} \quad (3.10)$$

En tant que carré de la transformée de Fourier, la densité spectrale peut être associée au moment d'ordre 2 de la distribution des pentes. On montre par le théorème de Wiener-Khintchine (*Lovejoy and Shertzer, 2013*) que l'expression théorique de β fait intervenir la grandeur $K(2)$ qui caractérise la variance des statistiques de la cascade sous-jacente. La relation 3.3 devient :

$$\beta = 2H + 1 - K(2) \quad (3.11)$$

3.4 Bilan

3.4.1 Methodologie

A la lumière des travaux résumés plus haut, trois étapes sont nécessaires pour réaliser une analyse fractale d'un champ $h(x, y)$:

Etape 1 : Mettre en évidence des propriétés d'échelle vérifiées par $h(x, y)$ en choisissant une méthode (densité spectrale de puissance, méthode du compas, comptage de boîte, variogramme généralisé, trace-moment...). Après avoir identifié une ou plusieurs gammes d'échelle permettant des régressions linéaire fiables, il est possible d'estimer des exposants d'échelle ($H, \beta, D, \xi(q), K(q)$)

Etape 2 : Confronter les résultats à des modèle statistiques pour tester leur validité. Pour une topographie monofractale, le modèle de mouvement brownien fractionnaire fBm

est satisfaisant. Les statistiques du champ peuvent être caractérisées par l'exposant de Hurst en examinant la fonction de structure d'ordre 2 (variogramme). Si la topographie est multifractale, plusieurs modèles peuvent être testés pour ajuster les données (log-normal, multifractale universelle...).

3.4.2 Conclusions

Aujourd'hui la plupart des études visant à décrire le comportement d'échelle d'un champ topographique se contentent de mettre en oeuvre l'étape 1. Les travaux de *Aharonson et al.* (2001); *Nikora and Goring* (2004) visent à caractériser le comportement local et régional de la topographie martienne sans relier le paramètre β de la densité spectrale à un modèle fractal. Les quelques études explicitement «fractales» se satisfont également de cette première étape. *Cheng et al.* (2001); *Orosei et al.* (2003); *Rosenburg et al.* (2011); *Susorney et al.* (2017) utilisent le paramètre H issu de la méthode du variogramme en l'identifiant à l'exposant de Hurst du fBm sans vérifier que les étapes 2 et 3 sont compatibles avec des statistiques monofractales. Faisant figure d'exception, les travaux de *Gagnon et al.* (2006) sur la topographie terrestre mettent en oeuvre les 3 étapes. L'aspect multifractal de la topographie martienne a été étudié par *Deliege et al.* (2016) mais les auteurs n'ont considéré que les deux premières étapes en regardant la courbure de la fonction ξ sans chercher à appliquer un modèle multifractal. En dépit de leurs résultats satisfaisants, nous constatons donc que les études multifractales de la topographie sont remarquablement peu nombreuses. La question de l'origine physique des propriétés multifractales qui reste aujourd'hui sans réponse sera discutée dans les prochains chapitres. Durant cette thèse, notre objectif est de mettre en évidence dans de plusieurs contextes la validité de cette méthodologie afin d'identifier la signature statistique de différents processus et leur lien possible avec la multifractalité.

Chapitre 4

Analyse comparative des topographies planétaires

A contre courant de la plupart des études récentes qui se focalisent sur les propriétés d'échelles locales des surfaces du système solaire, nous souhaitons dans un premier temps comparer les propriétés d'échelle globales des principaux corps telluriques. Depuis les travaux de *Turcotte* (1987); *Balmino* (1993); *Balmino et al.* (2012), la validité globale des lois d'échelle de la topographie d'un corps a été négligée au profit d'études locales et régionales. Ce désintérêt s'explique par le large éventail de valeurs constatées localement pour les exposants d'échelle. Cette diversité s'est avérée féconde pour caractériser la rugosité des surfaces et rechercher la signature locale de divers processus mais semble incompatible avec le principe de l'analyse globale qui est de fondre l'intégralité des données topographiques d'un corps dans un seul cadre statistique. Pourtant, les densités spectrales globales de la topographie (*Turcotte*, 1987; *Balmino*, 1993; *Balmino et al.*, 2012) révèlent des comportements d'échelle cohérents sur de larges gammes. Loin d'être biaisées par le mélange aveugle de données d'élévation provenant de régions géologiquement distinctes, les analyses globales conduisent pour chaque corps à des exposants stables. Bien que l'analyse semi-globale de la topographie terrestre obtenue en dissociant les zones océaniques des zones continentales conduise à des estimations distinctes ($H \approx 0.66$ sur les océans et $H \approx 0.46$ sur les continents, *Gagnon et al.*, 2006), les zones de transition

entre océans et continents respectent également des lois d'échelle cohérentes ($H = 0.77$, *Gagnon et al.*, 2006). Ce résultat montre que l'analyse globale qui mélange océans et continents est également pertinente bien qu'à cheval sur deux zones ayant des comportements d'échelle distincts. De même, le spectre terrestre détaillé de *Balmino et al.* (2012) appuie l'idée d'un comportement d'échelle général qui s'affranchit des spécificités locales du terrain. Que traduit cet ordre global qui semble être imposé à la topographie de chaque planète en dépit de la diversité remarquable des surfaces planétaires ? Quelles informations tirées des exposants d'échelles globaux ? Sont-ils déterminés par le ou les processus géologique(s) dominant(s) à la surface de chaque planète ? Avant de proposer des réponses à ces interrogations, le problème doit être posé de manière descriptive : quel est le bon modèle statistique pour décrire la topographie d'un corps dans son ensemble ?

4.1 Modèle statistique

Nous avons rappeler les limites du mouvement brownien fractionnaire monofractal (fBm, section 2.2.3). Il n'explique ni les variations locales de H ou β , ni la multiplicité des dimensions fractales généralement associées aux lignes de niveaux. L'analyse de *Gagnon et al.* (2006) a finalement prouvé la non-adéquation du fBm avec les statistiques de la topographie terrestre en regardant le comportement de plusieurs moments statistiques. En contrepartie, les auteurs proposent le modèle multifractal du «flux Fractionnairement Intégré» (FIF, section 2.4.2) et montrent sa bonne adéquation dans le cas de la Terre. Le modèle a deux avantages majeurs que nous explicitons dans les paragraphes suivants. D'une part, il réduit la généralité de la fonction d'échelle des moments. Avec la simplification de la puissance du flux $a = 1$, seuls deux paramètres sont nécessaires : α dans l'intervalle $[0; 2]$ et $C_1 > 0$. D'autre part, la forme de $K(q)$ correspond au bassin d'attraction « des multifractales universelles » (*Schertzer and Lovejoy*, 1987; *Lovejoy*, 1991) :

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \quad (4.1)$$

4.1.1 Les paramètres multifractals universels α et C_1

Dans la littérature, le modèle généralement invoqué pour décrire un comportement multifractal est le celui dit «log-normal» qui fixe $\alpha = 2$ en faisant varier C_1 . Nous donnons en annexe (page 191) plusieurs illustrations de champ 2D construit suivant le modèle du FIF en faisant varier les valeurs de C_1 et α dans la gamme attendue pour un champ topographique. Nous nous contentons de rappeler ici les traits principaux du champ contrôlés par ces deux paramètres. Quand $C_1 \approx 0$ toutes les valeurs du flux contribuent de manière équitable à sa valeur moyenne. Le champ dont la rugosité est spatialement homogène peut être assimilé au fBm. Quand C_1 est élevé (> 0.1), seulement quelques valeurs du flux contribuent de manière significative à la moyenne. Le champ résultant est visuellement lisse par endroit et rugueux dans d'autres. Ce trait fondamental des séries multifractales (appelé *intermittence*) est clairement nécessaire pour prétendre modéliser les surfaces planétaires dont la rugosité présente sauf rares exceptions des variations locales conséquentes. La valeur du degré de multifractalité α contrôle la hiérarchie des extrêmes. La valeur maximale $\alpha = 2$ est celle qui traduit l'organisation la plus complexe avec une large gamme de valeurs extrêmes présentes dans le champ. Visuellement, la topographie synthétique correspondante est composée de « montagnes » de hauteurs très variées. Quand le degré de multifractalité baisse ($\alpha < 2$), cette hiérarchie tend à se simplifier. Les zones lisses deviennent plus homogènes et les « montagnes » se ressemblent. La limite $\alpha = 0$ (irréaliste pour décrire la topographie) est une version continue du modèle monofractal β qui définit une hiérarchie d'extrêmes triviale où toutes les valeurs du flux à une résolution donnée sont égales entre elles ou nulles. Le champ est alors intermittent mais pas multifractal.

4.1.2 Bassin d'attraction

Etant données la complexité et la diversité des processus générant la topographie et la multiplicité des modes d'interaction non linéaires imaginables, il est raisonnable de penser que si la surface a des propriétés multifractales, elles doivent converger vers le bassin

Notation	Définition
h	Champ topographique discrétisé
L	Echelle maximale
Δx	Echelle considérée
λ	Résolution $\lambda=L/\Delta x$
$\Delta h = \phi \Delta x^H$	Distribution des Incréments d'altitude
$\langle \Delta h^q \rangle$	Fonction de structure d'ordre q
H	Exposant d'échelle de $\langle \Delta h \rangle$
$\xi(q)$	Exposant d'échelle de $\langle \Delta h^q \rangle$
ϕ_λ	Cascade multifractale dégradée à la résolution λ
$\langle \phi_\lambda \rangle^q$	Moment empirique d'ordre q de la cascade à la résolution λ
$K(q)$	Exposant d'échelle du moment d'ordre q
C_1	Codimension de la moyenne $C_1 > 0$
α	Degré de multifractalité $0 < \alpha < 2$

TABLE 4.1 – Notations du modèle du flux fractionnairement intégré (FIF)

d'attraction des multifractales universelles (*Schertzer and Lovejoy, 1987; Lovejoy, 1991*) dont les propriétés sont stables et attractives (section 2.4.2). Cette hypothèse est particulièrement justifiée dans le cas d'une analyse globale mêlant toutes les données topographiques d'un corps. Faisant suite aux travaux de *Gagnon et al. (2006)*, nous allons tester la validité de ce modèle sur différents jeux de données globaux.

4.2 Jeux de données

La présentation des jeux de données topographiques disponibles pour chaque corps a été donnée dans notre premier chapitre (section 1.3). Elle montre que la qualité et la quantité de données est variable d'un corps à l'autre. Malgré ces disparités, 5 corps telluriques de notre système solaire peuvent faire l'objet d'une analyse globale : *La Terre, Vénus, Mars, la Lune, et Mercure*. La table 4.2 résume les principales caractéristiques des jeux de données disponibles sous forme de carte. Dans les cas de Mars, la Lune et Mercure (hémisphère nord), les données sont issues de mesures directes par altimétrie laser. Pour la Terre, il s'agit d'une carte d'élévation combinant de nombreuses sources de données. Les topographies de Vénus et de l'hémisphère sud de Mercure sont obtenues par des procédés stéréoscopiques. Nous nous focalisons dans un premier temps sur le cas de Mars.

	source	radius (km)	Resolution	min scale	max scale
Terre	<i>Amante and Eakins (2009)</i>	6371	60 pix/deg	1 853 m	20 015 km
Vénus	<i>Ford et al. (2014)</i>	6052	22 pix/deg	4.6 km	19000 km
Mars	<i>Smith et al. (2001b)</i>	3390	128 pix/deg	462 m	10 650 km
Lune	<i>Smith et al. (2010)</i>	1737	512 pix/deg	40m	5 457 km
Mercure	<i>Hawkins et al. (2007)</i>	2240	64 pix/deg	665 m	7037 km

TABLE 4.2 – Caractéristiques des jeux de données

4.3 Analyse globale de Mars

Dans le cadre de notre étude, les données de l’altimètre laser MOLA (*Smith et al., 2001b*) ont fait l’objet d’une attention particulière. Nous développons ci-dessous les méthodologies possibles pour mettre en évidence des propriétés globales et s’assurer de la fiabilité des estimations. L’orbite quasi-polaire de la sonde a permis une cartographie presque complète de la planète. Seules les zones polaires (*latitude* > 88°) ne sont pas couvertes.

4.3.1 Format et qualité des données

Les données altimétriques étant enregistrées au fur et à mesure de leur acquisition (altitude et coordonnées spatiales), de longues séries d’élévations Nord-Sud sont disponibles. La figure 4.1 montre un exemple de profil uni-dimensionnel construit à partir d’une série temporelle correspondant à une journée de mesures altimétriques le long de la trace de l’instrument. Le profil visite plusieurs fois chaque pôle et des régions équatoriales assez variées. La distance entre deux interceptions successives de l’équateur est d’environ 1500 kilomètres, permettant une faible redondance spatiale entre deux orbites successives. Plusieurs centaines de profils (~ 770) semblables à celui de la figure 4.1 sont disponibles dans la base de données et peuvent être traités conjointement dans le cadre d’une analyse globale.

La précision verticale de l’instrument MOLA est d’une dizaine de mètres et la taille du faisceau au sol d’environ 150 mètres. Les points sont espacés d’environ 300 mètres. Cependant, la présence éventuelle de nuages entre le capteur et la surface et quelques dysfonctionnements aléatoires occasionnent des intervalles de distances plus grands. La

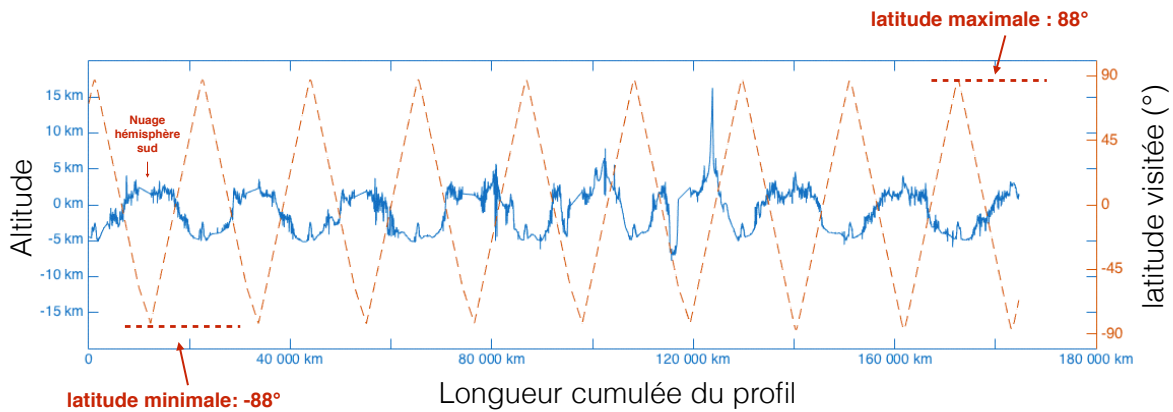


FIGURE 4.1 – Exemple de trajectoire MOLA parcourant plusieurs fois la circonférence de Mars. Le laser balaye la surface dans la direction Nord/Sud. Seules les latitudes supérieures (resp. inférieures) à 88° (resp. -88°) ne sont pas couvertes. Le profil complet fait ressortir des trous récurrents (ici au pôle sud) imputables à la présence occasionnelle de nuages. La base de données MOLA contient ~ 770 profils semblables à celui-ci.

figure 4.3a montre la distribution des distances entre points consécutifs estimée à partir de toutes les données disponibles. Dans la grande majorité des cas, l'intervalle est proche de 300 mètres. De temps en temps, il manque un point ($\sim 1\%$) voir plusieurs ($< 0.1\%$). La distribution révèle aussi quelques intervalles de grandes tailles vraisemblablement causés par des nuages. Les anomalies sont donc rares mais peuvent néanmoins introduire un biais dans l'analyse statistique en fonction de la méthode choisie pour analyser les données. Nous devons en tenir compte.

4.3.2 Fonctions de structures

Rappelons que l'approche la plus naturelle pour extraire les propriétés d'échelle globales est de calculer les fonctions de structure $S_q(\Delta x)$ à partir de profils unidimensionnels :

$$S_q(\Delta x) = \langle |\Delta h(x, \Delta x)|^q \rangle \quad (4.2)$$

où $\Delta h(x, \Delta x)$ est la différence d'élévation entre deux points séparés de Δx :

$$\Delta h(x, \Delta x) = h(x + \Delta x) - h(x) \quad (4.3)$$

Si la topographie est multifractale (section 2.3.5), chaque fonction de structure respecte

une loi d'échelle :

$$S_q(\Delta x) \sim \Delta x^{\zeta(q)} \quad \text{avec} \quad \zeta(q) = qH - K(q) \quad (4.4)$$

L'irrégularité des traces MOLA ne pose pas de problème pour évaluer ces fonctions. Pour chaque série, on évalue d'abord la valeur absolue des différences d'altitude $|\Delta h|$ entre points consécutifs. L'échelle Δx associée à chaque fluctuation est déterminée en calculant la distance sur la sphère à partir des coordonnées sphériques. On dégrade progressivement les données en ne gardant qu'un point sur 2, 4, 8... Après chaque réduction, les $|\Delta h|$ entre points consécutifs sont estimées ainsi que les Δx correspondants. Cette procédure permet d'accumuler des fluctuations d'altitude associées à des échelles variées. Nous les classons ensuite par échelle en définissant des intervalles logarithmiques constants centrés sur les écarts attendus (300m, 600m, 1200m, 2400m...). Après une mise en commun des contributions de toutes les séries disponibles, on effectue la moyenne d'ensemble des $|\Delta h|^q$ pour chaque catégorie d'échelle afin d'évaluer les fonctions de structure. La figure 4.4 montre le comportement empirique de ces fonctions pour les ordres $q = 1$ et $q = 2$ (courbes bleues) en représentation logarithmique. Le graphe fait clairement ressortir des comportements d'échelle (tendance linéaire en log-log) que nous discutons dans le paragraphe 4.3.7.

4.3.3 Fluctuations de Haar

Nous avons vu au chapitre précédent que plusieurs approches sont possibles pour décrire les fluctuations d'un champ. Tout dépend de la valeur de H attendue. Si $0 < H < 1$, les fonctions de structure sont suffisantes. A l'extérieur de cet intervalle, elles ne sont pas appropriées. Un bruit blanc par exemple ($H = -0.5$) ne peut être analysé par l'intermédiaire de ces fonctions.

Définition : Les fluctuations de Haar (*Lovejoy and Schertzer, 2012*) permettent d'élargir la gamme de valeur permise pour H à l'intervalle $[-1; 1]$. L'équation 4.3 de-

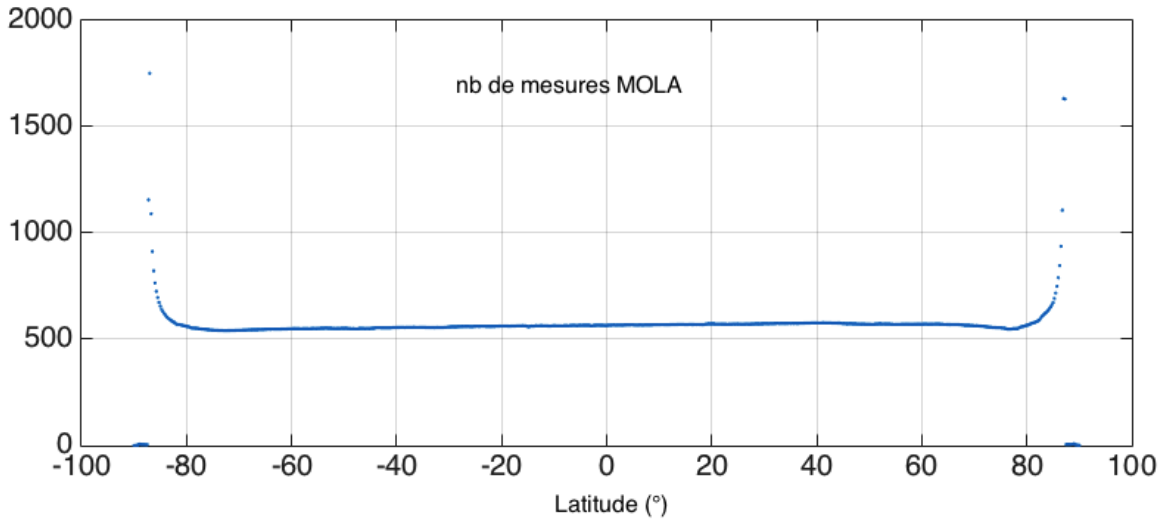


FIGURE 4.2 – Nombre moyen de mesures altimétriques de l’instrument MOLA par unité de longitude dans des bandes de latitudes de largeur 0.5° . On constate qu’il est approximativement constant. Aux voisinages proches des pôles, l’augmentation notable de la densité s’explique par la trajectoire tangentielle du satellite aux latitudes $\mp 88^\circ$. La correction de densité présentée dans le paragraphe 4.3.4 ne prend pas en compte cet effet.

vient :

$$\Delta h(x, \Delta x) = \frac{2}{\Delta x} \left(\int_x^{x+\frac{\Delta x}{2}} h(x') dx' - \int_{x+\frac{\Delta x}{2}}^{x+\Delta x} h(x') dx' \right) \quad (4.5)$$

Une fluctuation de Haar est estimée en séparant un intervalle Δx en deux segments équidistants pour évaluer la différence entre les moyennes des altitudes sur le premier et le second segment. Rappelons que ce procédé s’inscrit dans le cadre formel des ondelettes. Les fluctuations sont les coefficients de la décomposition du champ en considérant l’ondelette de Haar dont la fonction-mère Ψ est définie par morceaux :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= 1 \text{ si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \Psi(x) &= -1 \text{ si } -\frac{1}{2} < x < 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les fluctuations de Haar ont les mêmes propriétés statistiques que les premières différences sur l’intervalle $0 < H < 1$:

$$\zeta_{haar}(q) = \zeta(q) \quad (4.7)$$

Pour la topographie, la gamme de valeur attendue pour H est dans l'intervalle $[0; 1]$. Les fonctions de structures sont donc vraisemblablement suffisantes. Néanmoins, *Lovejoy and Schertzer* (2012) ont constaté que l'usage des fluctuations de Haar favorise la convergence rapide des indicateurs. Nous avons estimé les fluctuations de Haar (en prenant soin d'éviter les effets liés au manque de données, voir section 4.3.5) et leur moments statistiques à partir des profils MOLA afin de comparer les deux approches.

4.3.4 Densité spatiales de fluctuations

La géométrie particulière de l'orbite privilégie les régions polaires où la densité surfacique de points de mesures est plus élevée. L'évaluation des propriétés statistiques globales d'un corps peut être biaisée par cette sur-représentation des pôles. Nous devons tenir compte de cet effet indésirable. Parmi les fluctuations accumulées (quelque soit la méthode), celles localisées aux pôles sont plus nombreuses que celles issues des régions équatoriales. Si les zones polaires sont en moyenne plus (resp. moins) rugueuses qu'à l'équateur avec des pentes fortes (resp. faible), la moyenne et tous les moments statistiques seront sur-estimées (resp. sous-estimés). Pour déterminer la manière de corriger le biais potentiel, nous divisons la surface de Mars en N bandes de latitude d'ouverture $\delta\theta$ constantes. Considérons une bande quelconque à la colatitude θ . Son aire vaut $2\pi R^2 \sin(\theta) \frac{\pi}{N}$. Rapportée à l'aire totale de la sphère, la proportion couverte est :

$$A_\theta = \frac{1}{N} \frac{\pi}{2} \sin(\theta) \quad (4.8)$$

La trace du satellite implique que le nombre M de fluctuations disponibles à l'échelle Δx est globalement constant dans chaque bande (voir figure 4.2). Si $\delta\theta$ est petit, les fluctuations y sont réparties de manière homogène. La moyenne $\langle |\Delta h|^q \rangle_\theta$ des fluctuations de la bande peut donc être évalué de manière classique. La fonction de structure globale est ensuite obtenue en sommant les $\langle |\Delta h|^q \rangle_\theta$ sur toutes les bandes pondérés par la proportion d'aire correspondante.

$$S_q(\Delta x) = \sum_{\theta} A_{\theta} \langle |\Delta h|^q \rangle_{\theta} \quad (4.9)$$

Cette méthode permet d'attribuer une pondération faible aux régions sur-représentées. En pratique, il n'est pas nécessaire de calculer séparément les moyennes intermédiaires. En effet, en notant $(\Delta h)_{\theta,i}$ l'ensemble des fluctuations disponibles dans la bande repérée par θ :

$$\langle |\Delta h|^q \rangle_{\theta} = \frac{1}{M} \sum_i (\Delta h)_{\theta,i}^q \quad (4.10)$$

On a donc :

$$\langle |\Delta h|^q \rangle = \frac{1}{N \times M} \sum_{\theta} \frac{\pi}{2} \sin(\theta) \left| (\Delta h)_{\theta,i} \right|^q \quad (4.11)$$

Le produit $N \times M$ n'est autre que le nombre total de fluctuations. Nous en déduisons qu'il suffit d'appliquer un facteur $\frac{\pi}{2} \sin(\theta)$ à chaque fluctuation élevée à la puissance q avant de calculer les moyennes d'ensemble :

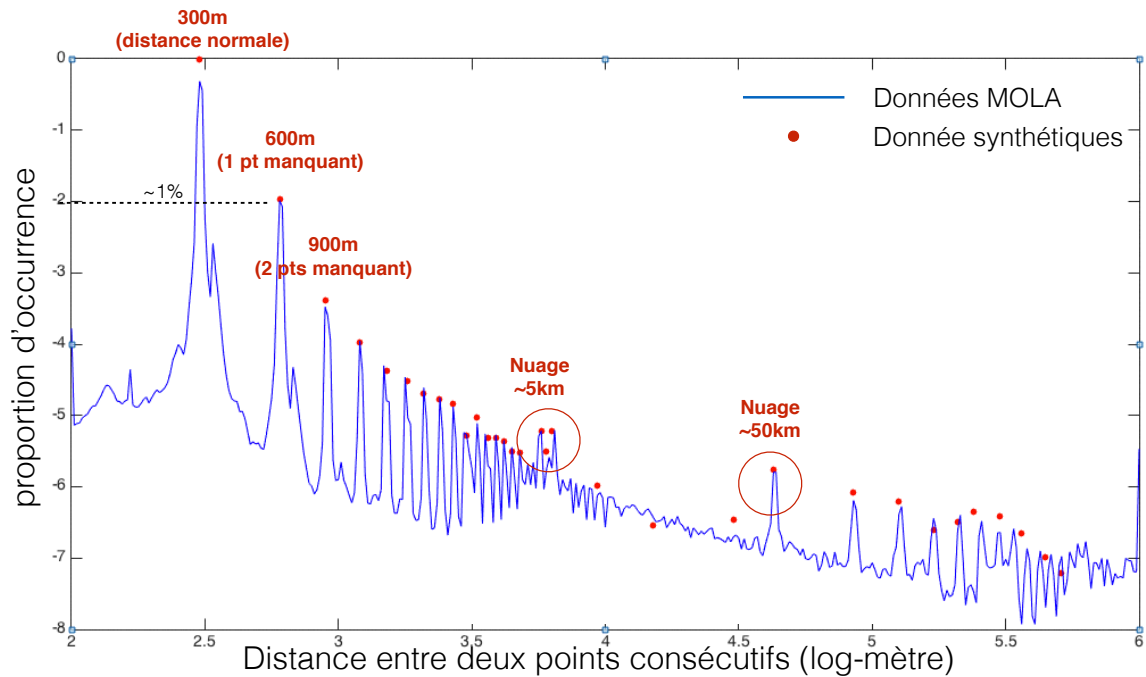
$$\langle |\Delta h|^q \rangle = \left\langle \frac{\pi}{2} \sin(\theta_i) |\Delta h_i|^q \right\rangle \quad (4.12)$$

Dans la suite, nous appliquerons systématiquement cette pondération.

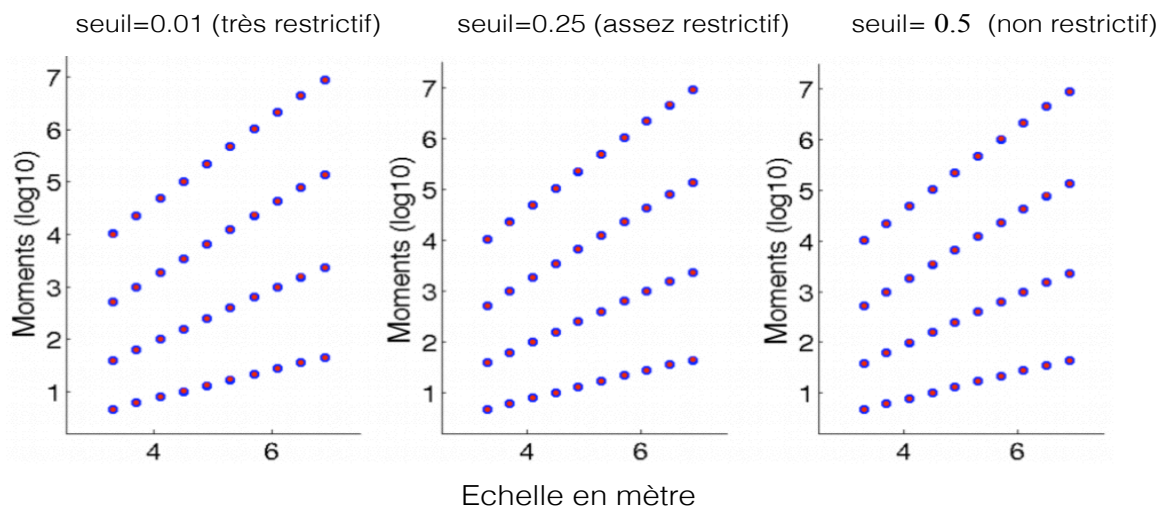
4.3.5 Adaptation de la méthode de Haar

Contrairement aux premières différences du paragraphe 4.3.2, l'irrégularité des données nécessite un traitement spécial pour appliquer la méthode de Haar. Pour chaque groupe de $2n$ points consécutifs, on évalue dans un premier temps la moyenne des n premiers points $\langle h_i \rangle_1, i = 1 \dots n$ et la moyenne des n derniers points $\langle h_i \rangle_2, i = n + 1 \dots 2n$. En accord avec l'équation 4.5, la fluctuation associée est donnée par :

$$\Delta h_{haar} = |\langle h_i \rangle_1 - \langle h_i \rangle_2| \quad (4.13)$$



(a) Comparaison entre la distribution des irrégularités effectives dans la base de données MOLA (en bleue) et celle introduite artificiellement dans les série synthétiques obtenues en implémentant le FIF (en rouge). La correspondance entre les maxima de la courbe bleue et les points rouges montre que l'irrégularité MOLA est bien reproduite dans les séries synthétiques. Ces dernières peuvent à présent être utilisées pour tester l'impact de l'irrégularité sur la méthode de Haar (voir figure 4.3b).



(b) Moment d'ordre statistique $q = 0,5$, $q = 1$, $q = 1,5$ et $q = 2$ estimés à partir de données synthétiques régulières et potentiellement biaisées par des données manquantes à différentes échelles. De gauche à droite, le seuil est $s = 0$, $s = 0.25$ et $s = 0.5$ du plus au moins restrictif. Les points bleus représentent les données synthétiques de référence. Les points rouges représentent des séries irrégulières. Les séries irrégulières sont correctement centrés à l'intérieur des points bleus, indépendamment du seuil avec des erreurs relatives inférieures à 0.1%. Par conséquent, le type d'irrégularité qui se produit dans les données réelles n'aura vraisemblablement aucun impact significatif sur la qualité de l'analyse Haar et notre analyse est non biaisée.

FIGURE 4.3 – Traitement de l'irrégularité MOLA

La distance cumulée entre les $2n$ points donne l'échelle Δx correspondante. Mais l'estimation de la formule 4.13 n'est valable que si les points sont régulièrement espacés. Dans le cas contraire, il est à priori nécessaire de rejeter les groupes de points incluant des écarts trop variables. La présence de trous dans les données se traduit par un déséquilibre entre la longueur des deux segments. Le critère suivant permet de juger de la régularité globale avant le calcul d'une fluctuation, en notant L_1 et L_2 la longueur des deux intervalles :

$$R = \left| \frac{1}{2} - \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right| \quad (4.14)$$

Si les points sont régulièrement espacés, $R \approx 0$. Dans le cas contraire, R est supérieur à 0 et vaut au maximum $\frac{1}{2}$. En fixant un seuil s pour le ratio R , il est possible d'exclure certaines fluctuations sans rejeter systématiquement le moindre écart à la régularité. Le choix d'un ratio non nul se justifie en remarquant qu'il n'est pas nécessaire de rejeter une fluctuation entre 2 points A et B séparés de 1000 kilomètres s'il manque seulement 1 ou quelques points dans l'intervalle AB .

4.3.5.1 Test sur des séries synthétiques :

Afin de choisir correctement le ratio à appliquer dans le cas des données martiennes, nous avons utilisé le modèle du *Flux Fractionnement intégré* (FIF) pour simuler des profils topographiques 1D ayant des propriétés proches de celles attendues pour les surfaces naturelles (*Gagnon et al.*, 2006). Les séries synthétiques générées sont des multifractales universelles avec $H = 0.5$, $\alpha = 1.7$ et $C1 = 0.1$. Nous utilisons la distribution empirique des anomalies des données MOLA (figure 4.3a) pour supprimer des points aléatoirement dans les séries synthétiques. Les points rouges de la figure 4.3a montrent la distribution des intervalles entre points consécutifs dans les séries synthétiques dégradées, en bon accord avec celle des séries réelles. La méthode de Haar est appliquée sur les séries irrégulières en évaluant 4 moments statistiques ($q = 0.5$, $q = 1$, $q = 1.5$ et $q = 2$) à différentes échelles et pour différentes valeurs du seuil de tolérance s . La figure 4.3b montre dans quelle

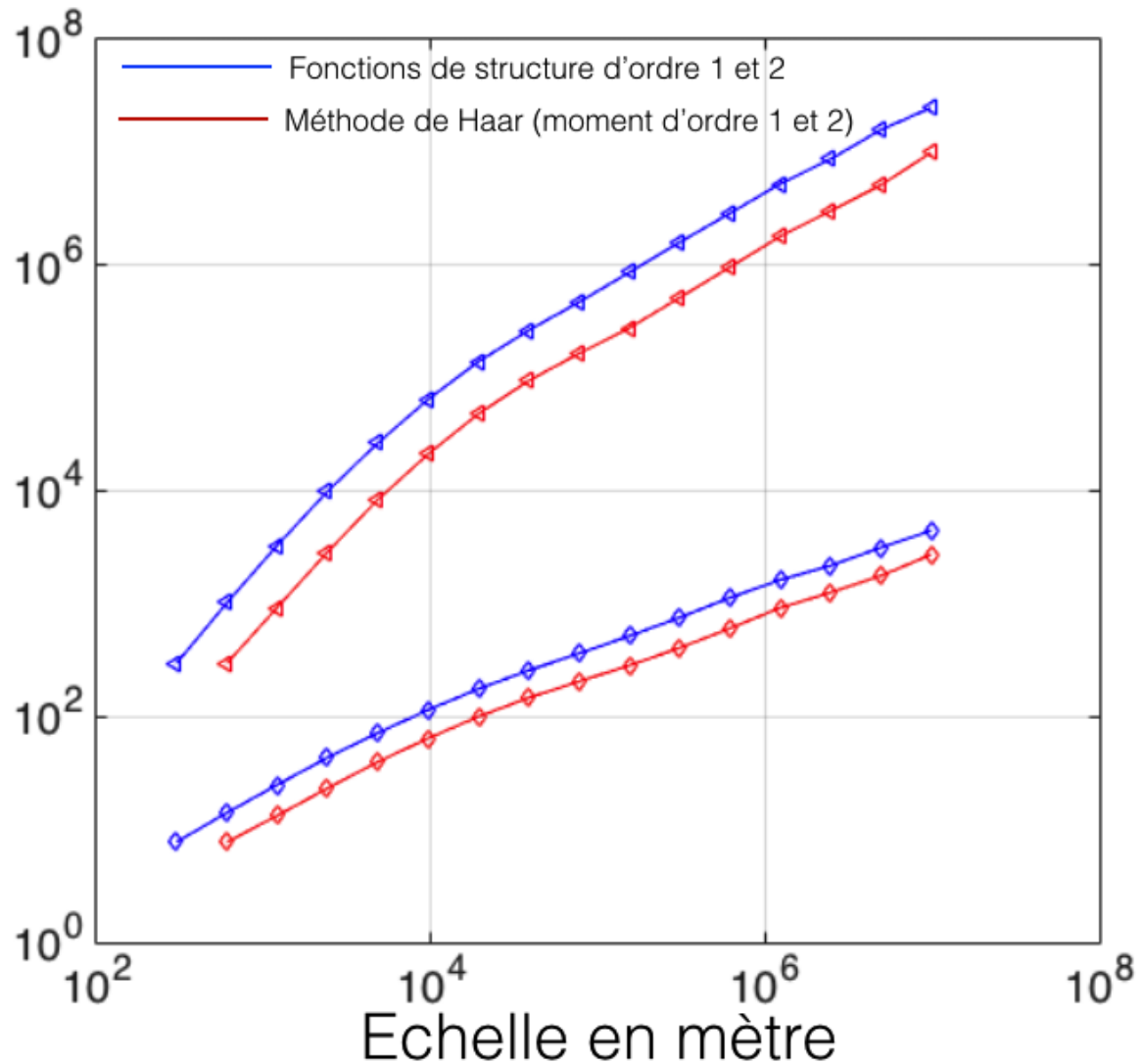


FIGURE 4.4 – Analyse globale de Mars. Comparaison entre les moments d'ordre 1 et 2 des fluctuations de Haar et les fonctions structures d'ordre 1 et 2 appliquée directement sur les traces MOLA

mesure les moments s'écartent du comportement attendu en fonction du seuil choisi. Il est clair que l'écart est négligeable même dans le cas du seuil le moins restrictif. Nous pouvons donc supposer que la méthode de Haar produira des résultats fiables dans le cas des données martiennes quel que soit le choix du ratio. Les anomalies sont suffisamment peu nombreuses pour ne pas biaiser l'analyse globale même sans correction. Nous fixons tout de même le ratio à 0.25 pour ne prendre aucun risque.

4.3.6 Moments d'ordre 1 et 2 par la méthode de Haar

La figure 4.4 montre la dépendance empirique en représentation logarithmique des moments d'ordre 1 et 2 de la distribution des fluctuations de Haar vis à vis de l'échelle (courbes rouges). On note que l'échelle minimale est deux fois plus grande dans le cas de l'analyse de Haar (600 mètres contre 300 mètres pour les fonctions de structure). Il s'agit d'une conséquence de la définition de ces fluctuations qui requiert de pouvoir séparer en deux l'intervalle Δx . Par construction, les fluctuations associées à l'échelle 600 mètres sont équivalentes aux premières différences associées à l'échelle 300 mètres. Elles n'impliquent donc pas de perte d'information et les deux premiers points de chaque courbe sont exactement à la même hauteur. Les autres points résultent d'un calcul différent qui dans le cas de Haar utilise de manière plus exhaustive les données disponibles. En effet, pour deux mesures d'élévation A et B séparées de Δx , la première différence ne repose que sur les extrémités du segment alors que la fluctuation de Haar correspondante utilise toute l'information disponible entre A et B . Ce point justifie la convergence rapide des statistiques par la méthode de Haar. L'examen des courbes révèle de grandes similarités entre l'analyse de Haar et les fonctions de structure, confirmant l'équivalence attendues de ces deux méthodes pour étudier le comportement d'échelle global. Si l'apport bénéfique des fluctuations de Haar n'est pas avéré sur les graphes de la figure 4.4, il sera potentiellement déterminant dans le cadre d'analyses régionales ou locales sur un volume de données plus faible. La valeur de H ainsi que les paramètres multifractals universels (α, C_1) peuvent être évalués en considérant plusieurs moments statistiques.

4.3.7 Analyse

La figure 4.4 met en évidence les propriétés d'échelle de la topographie. Cependant, il est impossible d'effectuer une régression linéaire sur toute la gamme disponible pour estimer les exposants $\zeta(1)$ et $\zeta(2)$. Le moment d'ordre 2 présente une augmentation rapide à petite échelle (H élevé) et continue d'augmenter avec une pente plus douce (H faible) à grande échelle. La même tendance est moins visible mais bien présente pour la moyenne.

Deux régimes distincts doivent donc être considérés avec une transition autour de 10 – 20 kilomètres. Afin d'étudier les propriétés multifractales, nous devons évaluer plusieurs moments statistiques d'ordres non entiers entre 0 et 2 afin de construire une estimation de la fonction $\xi(q)$. La figure 4.5a montre les moments des fluctuations de Haar pour des ordres allant $q = 0.1$ à $q = 2$ avec un pas de 0.1. Des régressions linéaire sont effectuées sur chaque moment et sur les deux gammes. Elles sont nécessaires pour construire la fonction $\zeta_1(q)$ (resp. $\zeta_2(q)$) pour la gamme de petite échelles (resp. grandes échelles). La figure 4.5b permet de visualiser $\zeta_1(q)$ et $\zeta_2(q)$ et révèle une différence importante entre les statistiques des 2 gammes. Alors que ζ_1 est linéaire, ζ_2 présente une courbure bien visible au voisinage de la moyenne ($q = 1$). Les propriétés statistiques globales de la topographie martienne sont donc multifractales à grande échelle et monofractale à petite échelle.

4.3.7.1 Régression classique

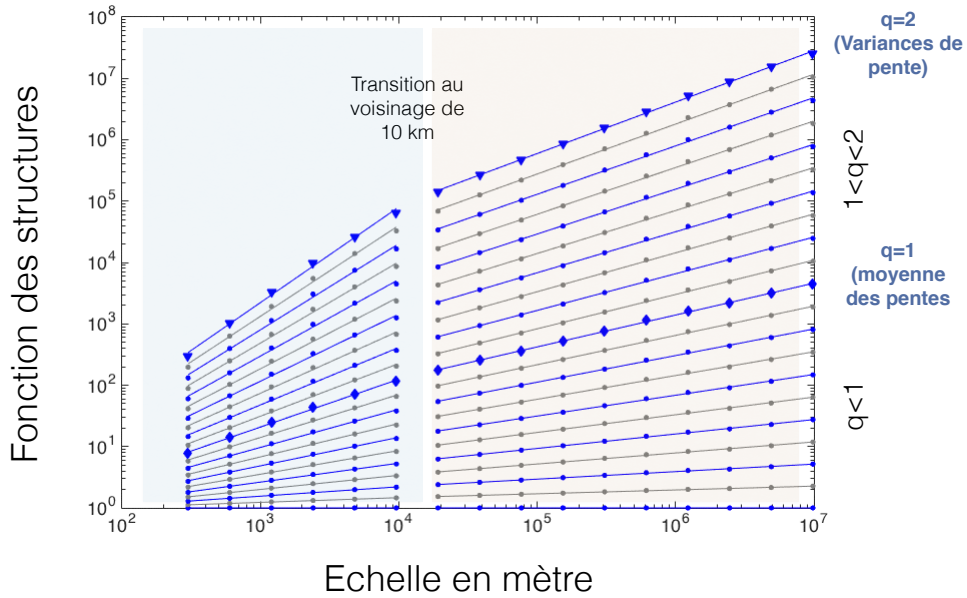
Nous souhaitons à présent estimer le meilleur jeu de paramètres (H, C_1, α) modélisant les données pour vérifier l'adéquation des multifractales universelles. Les paramètres pourraient être estimés de manière classique en effectuant des régressions sur les fonctions ζ_1 et ζ_2 au voisinage de la moyenne ($q = 1$) pour quantifier leur courbure intimement liée à α et C_1 *Lovejoy and Schertzer (2012)* par les formules théoriques :

$$H = \left. \frac{d\xi(q)}{dq} \right|_{q=1} \quad C_1 = \left. \frac{dK(q)}{dq} \right|_{q=1} \quad \alpha = -2 \left. \frac{d^2K(q)}{dq^2} \right|_{q=1} / \left. \frac{dK(q)}{dq} \right|_{q=1} \quad (4.15)$$

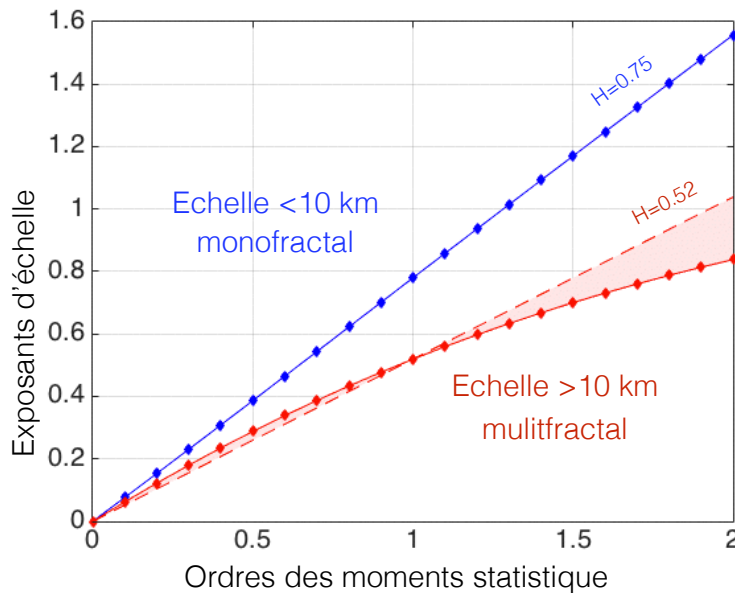
En pratique, on sélectionne quelques moments autour de la moyenne ($q = 1$) puis on effectue une régression par un polynome $P(q) = aq^2 + bq + c$. H est donné par $a + b + c$, $C_1 = H - 2a - b$ et $\alpha = -2a/C_1$.

4.3.7.2 Régression bayésienne

Les exposants d'échelle étant eux-même les produits de régressions linéaires, nous souhaitons éviter la méthode précédente qui ne permettra pas de juger de la qualité des estimations, d'autant plus que la composante multifractale est assez faible. En effet, la fonction



(a) Analyse globale de Mars. Représentation de 21 moments statistiques d'ordre comprise entre 0 et 2 avec un pas de 0.1. Chaque moment respecte une loi d'échelle par morceau avec 2 régimes distincts de part et d'autre d'une échelle de transition voisine de 10 – 20 kilomètres.



(b) Analyse globale de Mars : exposant d'échelle $\zeta(q)$ des fonctions de structure obtenue par régression des moment statistiques sur 2 gammes distinctes (petites et grande échelles avec une transition à 10 – 20 kilomètres). Deux comportements distincts sont mis en évidence.

FIGURE 4.5 – Analyse globale de Mars par la méthode de Haar

$\zeta_2(q)$ n'est que faiblement incurvée. Par conséquent, nous avons choisi d'appliquer le principe de l'inversion bayésienne (*Tarantola and Valette, 1982*) qui permet de construire une distribution de probabilité *a posteriori* des paramètres (moyenne, valeur la plus probable, écart-type) à partir des observations. En pratique, ces distributions peuvent être estimées de manière itérative en appliquant la règle de Metropolis pour construire une chaîne de Monte-Carlo (*Mosegaard and Tarantola, 1995*) qui contiendra les différents jeux de paramètres. Nous résumons ici les grandes lignes de cette technique, déjà utilisée au laboratoire GEOPS sur des problèmes de photométrie (*Schmidt and Fernando, 2015; Fernando et al., 2013*). Dans un premier temps, il est nécessaire d'évaluer la qualité des régressions linéaires individuelles de chaque moment. Cette étape permet d'attribuer à chaque point une incertitude empirique. Ces dernières seront d'autant plus élevées que la corrélation linéaire (le comportement d'échelle) est approximative. Le principe de l'inversion bayésienne est de tester successivement un grand nombre de jeux de paramètres en évaluant leur bonne adéquation avec les données. Pour différents couples (H, C_1, α) tirés au hasard, on calcule un modèle direct en appliquant les lois du FIF (équations 4.4 et 4.1). Les réalisations synthétiques sont ensuite comparées aux moments empiriques et un critère bayésien détermine si le modèle est un bon candidat ou non. Il repose sur une évaluation de la « distance » entre le modèle et les données couplées avec l'incertitude empirique associée à chaque point. Les jeux de paramètres acceptés sont rangés dans une chaîne qui converge vers la distribution souhaitée. Cette méthode va nous permettre d'associer des barres d'incertitudes réalistes aux estimations des paramètres.

4.3.7.3 Estimations des paramètres multifractals

Nous appliquons donc la méthode bayésienne pour estimer (H, C_1, α) dans le cas des fonctions de structures et de la méthode de Haar. Les graphes de la figure 4.6 montrent les distributions de probabilité *a posteriori* associées à chaque paramètre à partir des chaînes de Monte-Carlo finale. Nous constatons qu'il s'agit de distribution quasi-gaussienne. Le meilleur jeu de paramètres ainsi que les incertitudes associées peuvent donc être estimés à partir de la moyenne et de l'écart-type des chaînes de Monte-Carlo. La table 4.3 synthétise

gamme		H	C_1	α
$< 10 - 20km$	Fonctions de structure	0.796 ± 0.002	-0.015 ± 0.003	1.9 ± 0.4
	Méthode de Haar (trace)	0.756 ± 0.002	-0.013 ± 0.003	1.6 ± 0.4
	Méthode de Haar (carte)	0.773 ± 0.003	0.02 ± 0.006	1.7 ± 0.5
$> 10 - 20km$	Fonctions de structure	0.519 ± 0.001	0.108 ± 0.001	1.81 ± 0.04
	Méthode de Haar (trace)	0.526 ± 0.001	0.111 ± 0.002	1.89 ± 0.05
	Méthode de Haar (carte)	0.53 ± 0.001	0.110 ± 0.002	1.80 ± 0.06
Toute la gamme	Flux ϕ	NA	0.101 ± 0.001	1.81 ± 0.03

TABLE 4.3 – Estimations des paramètres multifractals par régression bayésienne pour les 3 méthodes (fonctions des structure, méthode de Haar, analyse du flux). Sur la gamme des grandes échelles, les valeurs de C_1 et α sont compatibles avec la classe des multifractales universelles. A petite échelle, la valeur de C_1 est proche de 0 et celle de α très incertaine (la valeur de α ne peut être estimée correctement quand C_1 tend vers 0)

les résultats. Elle montre que les deux méthodes conduisent à des estimations similaires.

- Grandes échelles ($> 10 - 20$ kilomètres)‡

Sur la gamme des grandes échelles , l'estimation de C_1 avoisine 0.10 dans les deux cas avec des incertitudes faibles. Cette valeur non négligeable confirme que les statistiques de la topographie sont multifractales sur cette gamme. Elle correspond par ailleurs à la valeur de ce paramètre qui produit les simulations les plus convaincantes du modèle FIF (voir annexe p.191). De plus elle est comparable à celle estimée par *Gagnon et al.* (2006) pour la topographie terrestre. La valeur estimée de α varie sensiblement d'une méthode à l'autre sans être incohérente (1.81 ± 0.04 et 1.89 ± 0.05) et reste proche de la valeur terrestre ($\alpha = 1.79 \pm 0.18$, *Gagnon et al.*, 2006). Enfin les deux méthode conduisent à une valeur de H proche de 0.5, classique pour les surface planétaires.

- Petites échelles ($< 10 - 20$ kilomètres)

La valeur de H est plus élevée dans les deux cas ($H \sim 0.75$). En interprétant ce paramètre comme un degré de lissage ($H = 1$ correspond à une topographie parfaitement lisse, non fractale, voir simulation en annexe, p.191), ce résultat suggère que la topographie est globalement plus lisse à petite échelle. Les estimations de C_1 conduisent à des valeurs très faibles et des valeurs de α mal contraintes à cause de la faible courbure de $\zeta(q)$.

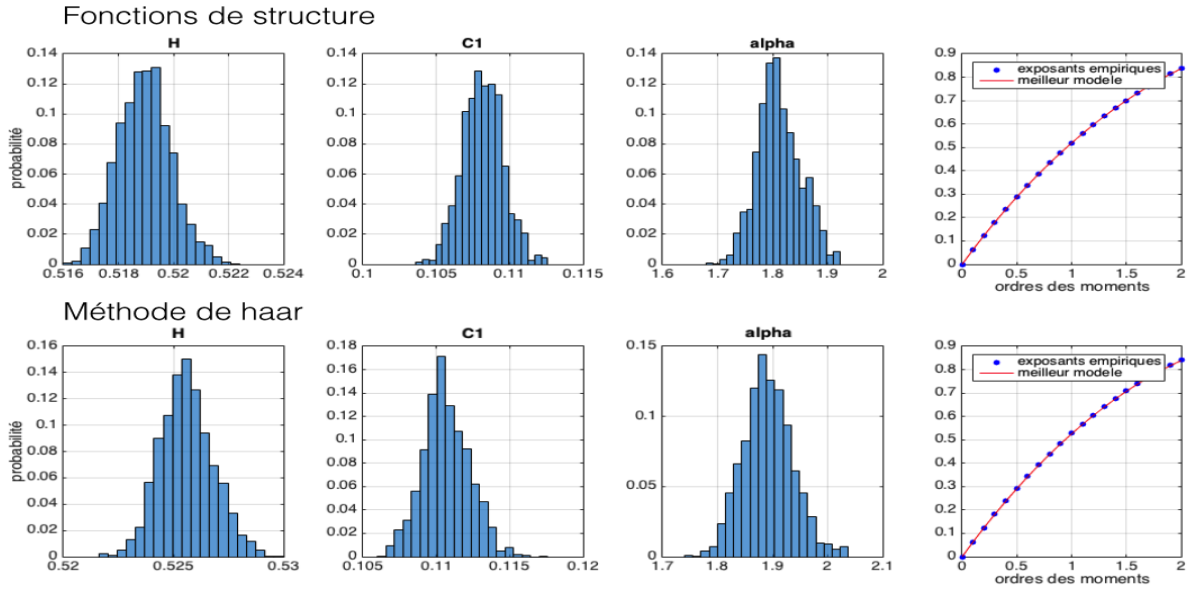


FIGURE 4.6 – Analyse multifractale de la topographie de Mars sur la gamme des grandes échelles ($> 10 - 20km$). Estimation des paramètres multifractals universels par régression bayésienne. Les histogrammes représentent la distribution de probabilité de chaque paramètre pour les deux méthodes. Le jeu de paramètres le plus probable est donné dans la table 4.3. Les graphes de droite représentent les exposants d'échelle empiriques superposés à la courbe de régression obtenue en prenant le jeu de paramètre le plus probable

4.3.7.4 Densité spectrale de puissance

La transition constatée au voisinage de $L = 20km$ n'est pas un résultat nouveau de cette étude. D'autres auteurs (*Aharonson et al.*, 2001; *Nikora and Goring*, 2004) ont constaté ce comportement remarquable en étudiant les lois d'échelle de la densité spectrale de puissance (section 1.4.2.2). Dans le cadre du modèle FIF, la densité spectrale respecte une loi d'échelle bien déterminée :

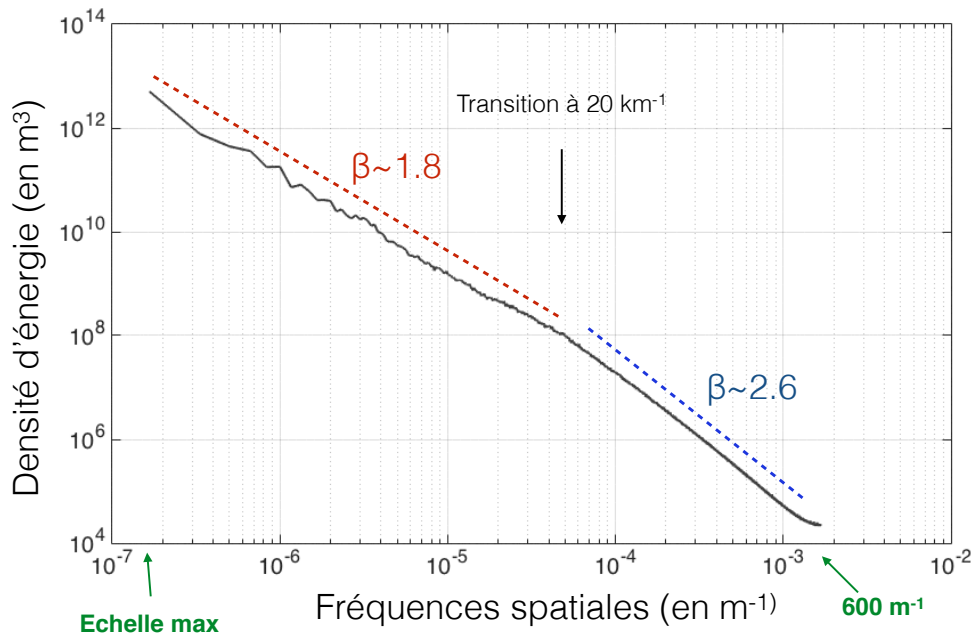
$$P(k) \sim k^{-\beta} \text{ avec } \beta = 2H + 1 - K(2) \quad (4.16)$$

Afin de vérifier la cohérence de notre résultat, nous avons évalué la densité spectrale globale de Mars à partir des mêmes profils unidimensionnels. L'algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT) requiert impérativement d'être appliqué à des séries régulières. Pour que l'analyse soit globale, nous souhaitons disposer d'un grand nombre de profils réguliers de 10000 kilomètres (soit 35000 points consécutifs). Pour construire un profil de

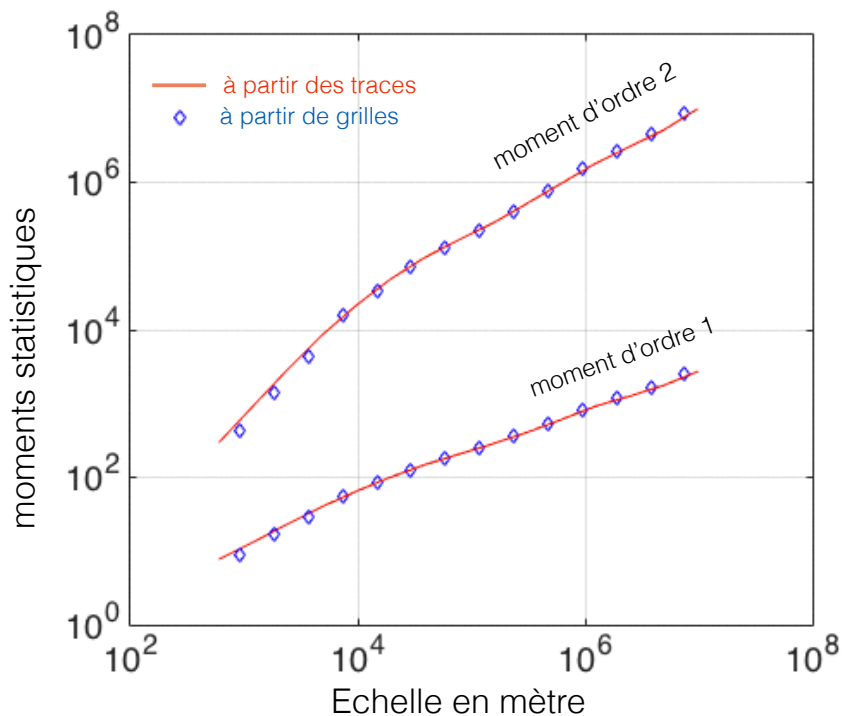
cette taille, les valeurs d'élévations sont parcourues dans l'ordre et enregistrées dans un vecteur jusqu'à tomber sur un trou de longueur supérieure à 1 kilomètre. Si le vecteur a au moins 35000 éléments, il est conservé. Les trous occasionnels de 600 mètres ou 900 mètres sont complétés par interpolation. En appliquant ce principe à toute la base de données, nous avons accumulé 1413 profils de la bonne longueur répartis sur tout le globe. Le carré de la transformée de Fourier est calculée pour chaque série et les fréquences spatiales sont moyennées pour obtenir un résultat global. La figure 4.7a montre le comportement d'échelle du spectre obtenu sur une gamme de fréquences spatiales allant de $600 m^{-1}$ (deux fois la fréquence d'échantillonnage) à environ $10000 km^{-1}$. La courbe fait ressortir deux comportements distincts associés à deux gammes de longueurs d'onde. La transition est cohérente avec celle détectée par les méthodes statistiques, au voisinage de $20 km^{-1}$. L'estimation de β par régression linéaire sur les deux portions donne $\beta_1 = 1.83 \pm 0.01$ (respectivement $\beta_2 = 2.57 \pm 0.002$) sur la gamme des grandes (respectivement courtes) longueurs d'onde.

4.3.7.5 Cohérence entre les deux approches

Nous pouvons à présent rapprocher les résultats des deux types d'analyse. La table 4.4 compare les valeurs de β déduites de la relation 4.16 à partir des estimations de H aux valeurs effectives de β_1 et β_2 . On constate que l'égalité 4.16 est remarquablement bien vérifiée pour la gamme des échelles supérieures à 20 kilomètres. Cette cohérence entre densité spectrale et fluctuations confirme la bonne adéquation du modèle du flux fractionnairement intégré (FIF) pour décrire les statistiques de la topographie martienne à grande échelle. En revanche, le résultat n'est pas satisfaisant à petite échelle. La faible valeur de $K(2) \approx 0$ qui découle de la dépendance quasi-linéaire des exposants vis à vis des moments (figure 4.5b) entraîne $\beta \neq 2H + 1$.



(a) Densité spectrale de puissance globale de la topographie martienne. Les basses fréquences spatiales à gauche sont déterminées par les variations de la topographie à grande échelles. Les hautes fréquences représentent les petites échelles. Deux comportements distincts sont visibles avec une transition à 20km^{-1}



(b) Comparaison entre la méthode de Haar appliquée à partir des traces au sol ou directement sur les cartes interpolées. Les différences sont mineures. Le moment d'ordre 1 (resp. ordre 2) est en m (resp. m^2)

FIGURE 4.7 – Mars : densité spectrale et comparaisons trace/carte.

		$K(2)$	$\beta = 2H + 1 - K(2)$
< 20km	Fonctions de structure	-0.02 ± 0.02	2.07 ± 0.02
	Méthode de Haar	-0.01 ± 0.02	2.06 ± 0.02
	Densité spectrale		2.57 ± 0.002
> 20km	Fonctions de structure	0.20 ± 0.01	1.83 ± 0.01
	Méthode de Haar	0.21 ± 0.02	1.84 ± 0.02
	Densité spectrale		1.81 ± 0.01

TABLE 4.4 – Comparaison entre les statistiques des fluctuations et la densité spectrale de puissance. On note que les résultats sont cohérents avec le le modèle multifractal du FiF $L > 20km$. La relation $\beta = 2H + 1 - K(2)$ est vérifiée de manière très satisfaisante. Sur la gamme des petites échelles, cette relation ne tient pas.

4.3.8 Utilisation des cartes interpolées

Dans la suite, nous souhaitons faire usage des cartes topographiques de différents corps mises à disposition dans la base de données PDS (Planetary Data System, <http://pds-geosciences.wustl.edu/>). Nous devons vérifier que l'adaptation des méthodes évoquées plus haut conduit à des résultats cohérents. Dans le cas de Mars, les cartes sont construites à partir des données MOLA. La plus précise contient 128 pixels par degré dans les deux directions soit une résolution de 460 mètres à l'équateur. En moyenne, 1 pixel sur 2 est correctement renseigné par une mesure MOLA avec une plus grande proportion de points manquants à l'équateur. Les autres emplacements sont complétés par interpolation. Une collection \mathcal{C} de 11520 profils uni-dimensionnels de longueur égale à la circonférence de Mars peut être constituée en considérant tous les couples de bandes de latitude complémentaires (lat et $lat + 180$) qui définissent des tours complets dans la direction Nord-Sud. Afin de vérifier que l'usage des cartes n'a pas d'influence notable sur les statistiques globales (biais lié à l'interpolation à petite échelle), nous appliquons une nouvelle fois la méthode de Haar sur cette collection de profils. La sur-représentation des pôles est traitée de la même manière que précédemment, en appliquant un facteur $\frac{\pi}{2} \sin(\theta)$ en fonction de la latitude du centre de chaque fluctuation. De plus, les séries sont permutées circulairement de manière aléatoire afin que les fluctuations à grande échelle ne soient pas toujours positionnées sur les pôles. La figure 4.7b montre que les deux méthodes conduisent sensiblement au même résultat avec quelques écarts à petite échelle. Les esti-

mations des paramètres multifractals par régression bayésienne conduisent cependant aux mêmes conclusions (voir table 4.3). L'analyse des fonctions des structure sur la carte est également cohérente avec la même analyse appliquée aux traces. Ce résultat montre qu'en raison du grand nombre de données disponibles pour l'analyse globale, nous pouvons nous contenter d'utiliser les cartes interpolées sans impacter significativement le résultat des estimations, même à petite échelle.

4.3.9 Analyse du flux de la topographie martienne

Nous nous focalisons maintenant sur les propriétés du flux sous-jacent ϕ . Rappelons que la structure statistique attendue est la suivante :

$$\Delta h = \phi \Delta x^H \quad (4.17)$$

Si la topographie est conforme au modèle FIF, alors ϕ a les propriétés d'une cascade multiplicative qui peut être analysée par la méthode « trace moment » (section 3.3.2). Pour mémoire, elle consiste à estimer le flux à la plus petite résolution avant de remonter les étapes de la cascade en moyennant progressivement les données sur des intervalles de longueur croissante. Les moments empiriques sont estimés à chaque étape. Cette méthode a l'avantage de se focaliser sur l'aspect multifractal de la topographie en s'affranchissant de la dépendance en H . Cependant, elle n'est applicable que sur des cartes régulières. Nous estimons donc le flux ϕ à partir de la collection de profil \mathcal{C} définie ci-dessus en estimant pour chaque série, les premières différences normalisées à la plus petite échelle. La figure 4.8a montre un exemple de profil martien appartenant à \mathcal{C} ainsi que le flux correspondant. Pour chaque cascade, on moyenne le flux sur des intervalles de plus en plus grands (des puissance de 2 de la résolution maximale) jusqu'à l'échelle de la planète. Les contributions individuelles de chaque cascade sont ensuite rassemblées pour effectuer des moyennes d'ensemble et analyser les propriétés d'échelle du flux global de la topographie martienne. Rappelons que nous attendons :

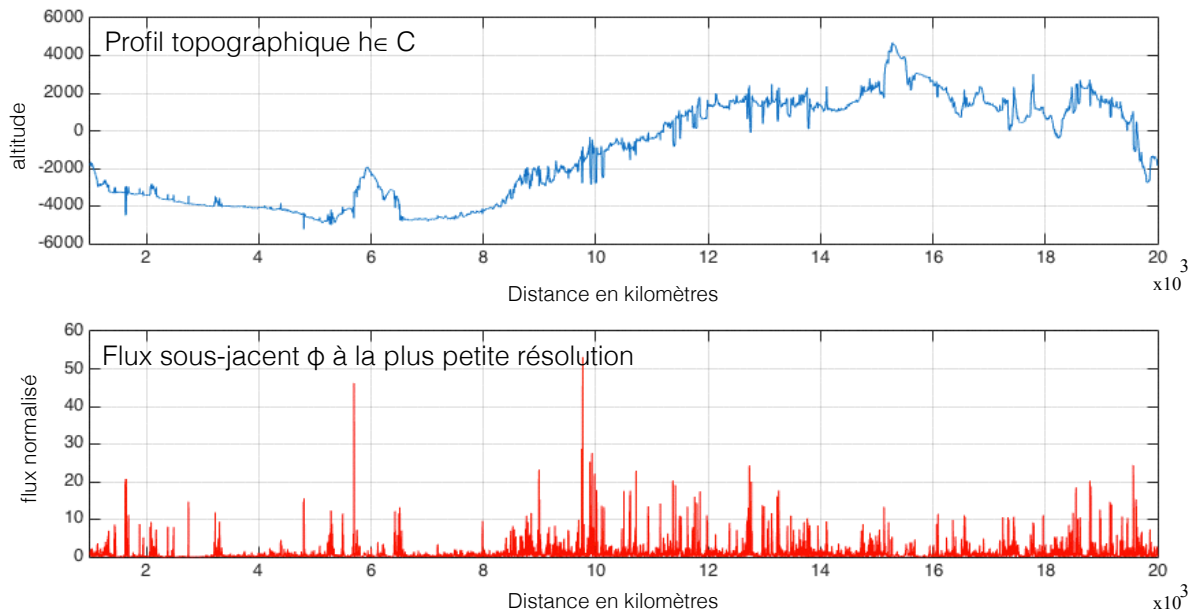
$$\langle \phi_{\Delta x}^q \rangle \sim \Delta x^{K(q)} \quad (4.18)$$

en notant Δx l'intervalle de distance sur lequel est moyenné le flux à chaque itération. De même que précédemment, nous avons estimé plusieurs moments statistiques échantillonnés entre 0 à 2 afin de construire $K(q)$. La figure 4.8b permet de visualiser le résultat obtenu. Chaque moment représenté sur cette figure présente un comportement d'échelle satisfaisant. Contrairement aux analyses précédente (fonction de structure, Haar, densité spectrale), aucune transition n'est discernable aux voisinage de $l = 10 - 20$ kilomètres. Nous appliquons à nouveau le principe de la régression bayésienne pour estimer les paramètres multifractals mais sans restreindre l'analyse à une gamme particulière. Le résultat des estimations est reporté dans la table 4.3. Nous constatons que les valeurs trouvées $C_1 = 0.101 \pm 0.001$ et $\alpha = 1.81 \pm 0.03$ sont tout à fait comparables aux estimations des analyses précédentes sur la gamme des grandes échelles. Ces nouveaux éléments confirment la validité du FIF pour décrire les statistiques de la topographie à grande échelle. En revanche, aucun comportement distinct n'est visible sur la gamme des échelles inférieures à 20 kilomètre en contradiction apparente avec les conclusions de l'analyse des fluctuations. Cette incohérence pourrait s'expliquer par le choix de l'hypothèse simplicatrice $a = 1$. Il n'en demeure pas moins que notre analyse met en évidence deux structures différentes à grande et petite échelle au delà de la variation de H (ou β) déjà relevée par des études antérieures *Gagnon et al. (2006)*; *Nikora and Goring (2004)*; *Deliege et al. (2016)*.

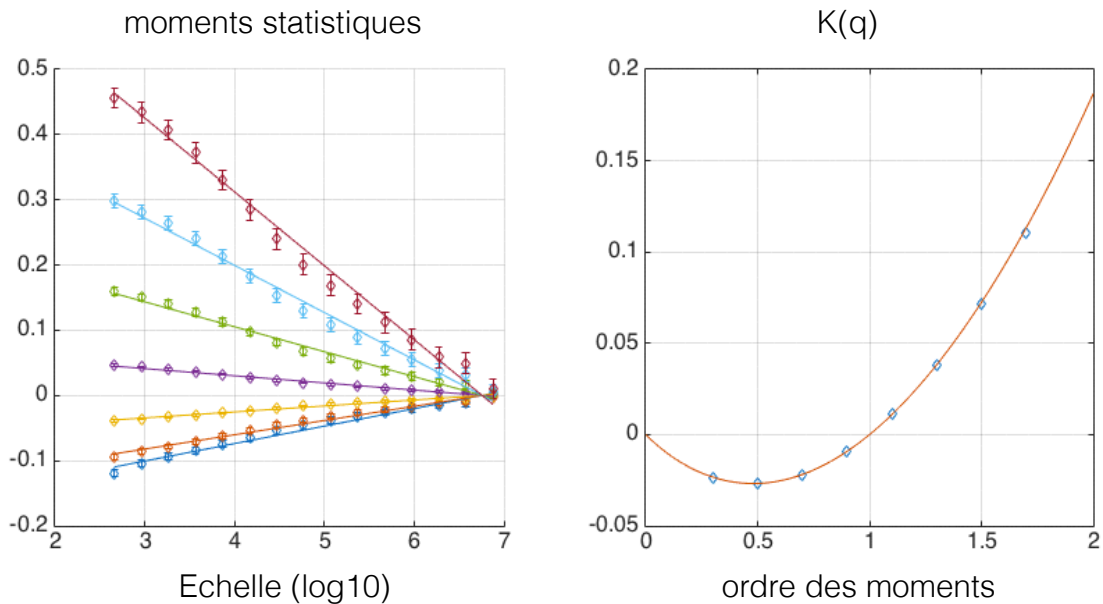
4.4 Analyse globale des corps du Système Solaire

L'analyse détaillée du cas de Mars avec l'implémentation de plusieurs méthode d'analyse nous permet maintenant d'aborder en simplifiant la procédure le cas des autres corps telluriques. Nous avons observé que :

1. Le choix de la définition des fluctuations n'est pas déterminant et conduit sensiblement aux même résultats. Nous nous focalisons désormais sur les fluctuations



(a) Exemple d'un profil de la collection \mathcal{C} (courbe bleue) et du flux sous-jacent à la plus petite résolution (courbe rouge). Si le flux résulte d'un cascade multiplicative, les moments statistiques peuvent être évalués à différentes échelles en moyennant sur des intervalles de longueur croissante.



(b) Moments statistiques du flux global de Mars estimées pour des moments d'ordre 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 et 1.9. La corrélation linéaire est satisfaisante sur toute la gamme d'échelle disponible 460m – 10000km. Le graphe de gauche montre la fonction empirique $K(q)$ correspondante et le meilleur modèle déterminé par inversion bayésienne.

FIGURE 4.8 – Analyse du flux de la topographie martienne

de Haar qui possèdent néanmoins de meilleures propriétés de convergence que les fonctions de structure.

2. L'usage des cartes interpolées à petite échelle n'introduit pas de biais significatif pour analyser les statistiques globales. Nous en ferons désormais systématiquement usage pour l'analyse globale des autres corps.

Dans le chapitre 1 (section 1.3), nous avons présenté en détail les jeux de données topographiques disponibles. Nous nous contentons ici de rappeler certains points importants. Les cartes topographiques des 5 corps ont des caractéristiques différentes qui sont résumées dans la table 4.2. Pour la Lune, les données de l'altimètre LOLA (*Smith et al.*, 2010) ont permis de générer une carte très précise, avec une résolution de 30 mètres à l'équateur. Les techniques présentées dans le cas de Mars ont été appliquées à ce jeu de données dont l'architecture est similaire (topographie disponible le long de la trace du satellite et carte interpolée). Pour Mercure, nous disposons seulement d'un jeu de données hybrides composé à partir de mesures altimétriques directes dans l'hémisphère nord et complété par un modèle d'élévation photogrammétrique de l'hémisphère sud (*Hawkins et al.*, 2007). La qualité de ce jeu de données qui ne résulte pas de mesures directes est difficile à évaluer. Paradoxalement, le dataset terrestre est l'un des moins précis dont nous disposons. Bien que les continents soient couverts avec une excellente résolution (STRM 45 mètres), les fonds marins restent mal cartographiés. La carte ETOPO1 est une carte composite dont la résolution est plafonnée par celle des océans. Nous traitons également le cas de Vénus (*Ford et al.*, 2014). La carte est incomplète et la résolution nettement inférieure (5 kilomètres) mais néanmoins suffisante pour intégrer Vénus dans notre analyse.

4.4.1 Fluctuations de Haar

Nous calculons les fluctuations de Haar en appliquant pour chaque planète la procédure définie au paragraphe 4.3.8. Les moments d'ordre 1 et 2 sont représentés sur la figure 4.9.

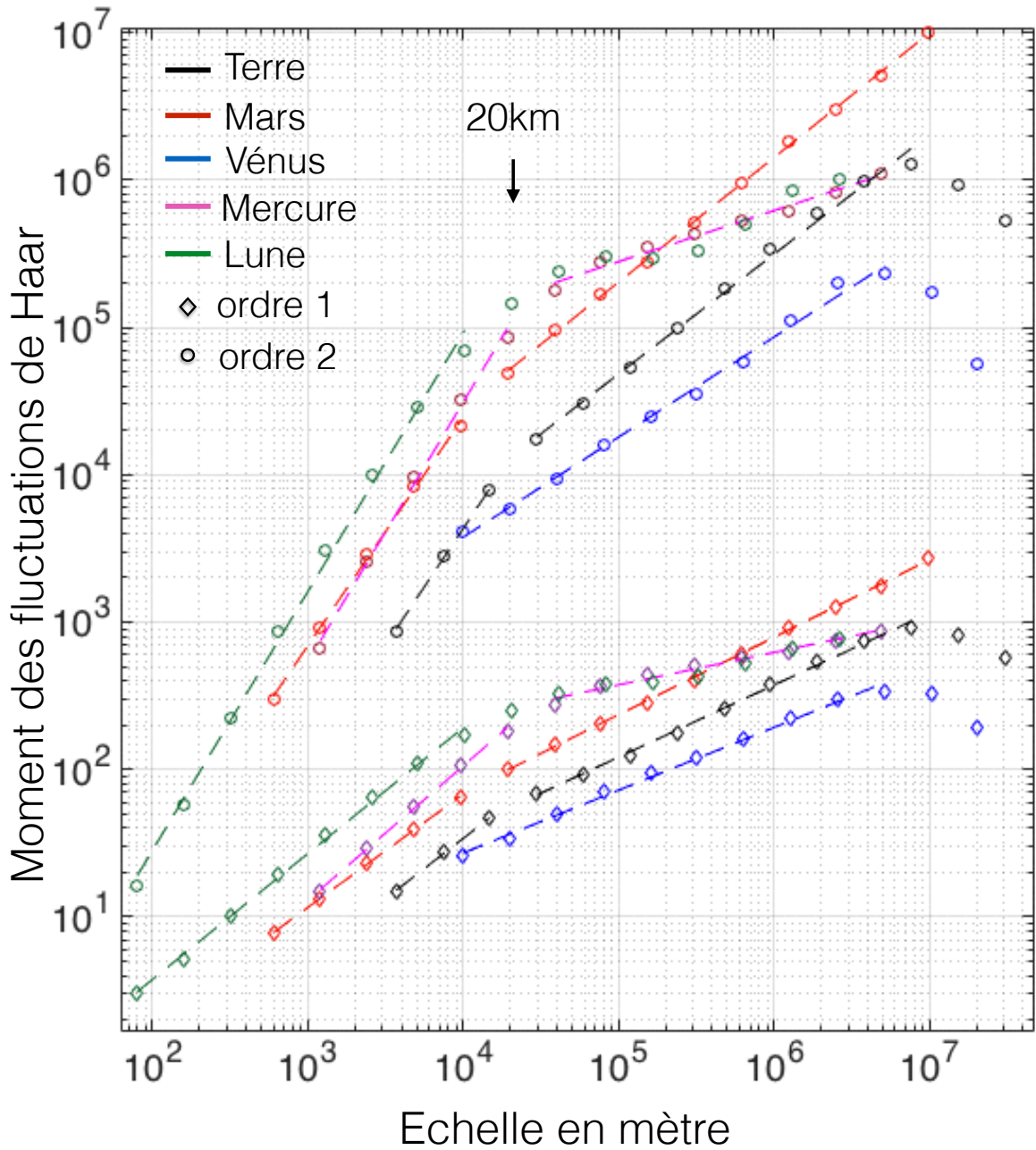


FIGURE 4.9 – Moyenne et moment d’ordre 2 des fluctuations de Haar de la topographie (moments d’ordre 1 et 2) pour différents corps du système solaire. Le moment d’ordre 1 (resp. ordre 2) est en m (resp. m^2)

4.4.1.1 Observations générales

Nous commençons par analyser de manière qualitative la moyenne des fluctuations de Haar représentée par des marqueurs diamants. La hauteur relative des courbes de la figure 4.9 permet de retrouver les traits caractéristiques de chaque corps. Les surfaces très cratérisées et peu actives de la Lune et Mercure génèrent d'importantes fluctuations à petites et moyennes échelles. En effet, les diamants verts et rouges de la figure 4.9 qui représentent respectivement les moyennes pour la Lune et Mercure, sont localisés au dessus de celles des autres corps jusqu'à $l < 700$ kilomètres. On note que les courbes de la Lune et de Mercure se confondent pour $l > 10 - 20$ kilomètres et diffèrent sensiblement pour les échelles inférieures avec des fluctuations jusqu'à 2 fois plus élevées pour la lune. Les valeurs moyennes des fluctuations de Mars dont la surface n'est que partiellement cratérisée sont comparables à celles de Mercure pour $l < 20$ kilomètres puis se détachent nettement aux échelles supérieures, faisant de Mars la planète la plus rugueuse à grande échelle avec des moyennes avoisinant 2.6 kilomètres à l'échelle de la planète (contre ~ 1 kilomètres pour Mercure et la Lune). Ces valeurs élevées reflètent probablement le trait le plus frappant de la topographie martienne : la dichotomie Nord-Sud qui se traduit par la coexistence de vastes régions d'altitudes très différentes dans les deux hémisphères. En l'absence de cratérisation, la surface terrestre présente une rugosité globale plus faible avec des moyennes environ 2 fois moins intenses que sur Mars mais la tendance est très similaire pour les deux corps. Néanmoins il existe une différence majeure : alors que les moyennes estimées pour Mars, Mercure et la Lune augmentent jusqu'à l'échelle maximale de la planète, celles de la Terre décroche vers $l = 10000$ kilomètres avec une amplitude maximale de ~ 1 kilomètre. Avec une circonférence comparable à celle de la Terre, la surface très lisse de Vénus conduit à des moyennes de fluctuations nettement plus basses, environ 2 fois inférieures à celle de notre planète. Comme dans le cas de cette dernière, les moyennes décrochent avant l'échelle maximale.

4.4.1.2 Comportement d'échelle

La figure 4.9 montre également le moment d'ordre 2 des fluctuations de Haar (marqueur rond) afin de faire ressortir plus distinctement les comportements d'échelles propres à chaque corps. La tendance observée dans le cas de Mars (section 4.3) se décline pour les autres corps avec des variantes notoires mais un point commun est frappant : la distinction entre deux régimes distincts commune à tous les corps avec une transition au voisinage de $L = 10 - 20$ kilomètres. Nous avons reporté en pointillée sur la figure les courbes de tendances associées aux deux gammes identifiées pouvant faire l'objet de régressions individuelles. La valeur de H du FIF en découle directement puisqu'il correspond à la pente du moment d'ordre 1 (voir table 4.5). Le cas de Vénus semble faire figure d'exception avec une seule gamme visible sans inflexion au voisinage de 10 kilomètres. Il s'agit cependant de l'échelle minimale disponible (au sens de Haar). Le comportement d'échelle de part et d'autre de la transition est variable d'un corps à l'autre. La Terre, Mars et Vénus ont un comportement similaire pour $L > 10 - 20km$ avec des valeurs de H proches de 0.5. Sur la même gamme, les valeurs de H associées à la Lune et Mercure sont nettement plus faibles $H \approx 0.2$. Sur la gamme des petites échelles, ce paramètre est systématiquement plus élevé. L'inflexion est similaire pour la Terre et Mars ($H = 0.7-0.8$) et plus marquée dans le cas de la Lune et Mercure ($H = 0.8 - 0.9$)

4.4.1.3 Multifractalité

Comme précédemment, nous allons mettre en évidence la présence ou l'absence de propriétés multifractales en évaluant plusieurs moments statistiques d'ordres non entiers entre 0 et 2 afin de construire une estimation de la fonction $\xi(q)$. La figure 4.10 synthétise les résultats des multiples régressions linéaires pour les différents corps et les deux gammes d'échelle. De même que précédemment, le principe de la régression bayésienne est appliqué pour chercher les meilleurs jeux de paramètres multifractals universels. La table 4.5 récapitule l'ensemble des estimations.

- Grandes échelles ($> 10 - 20$ kilomètres)

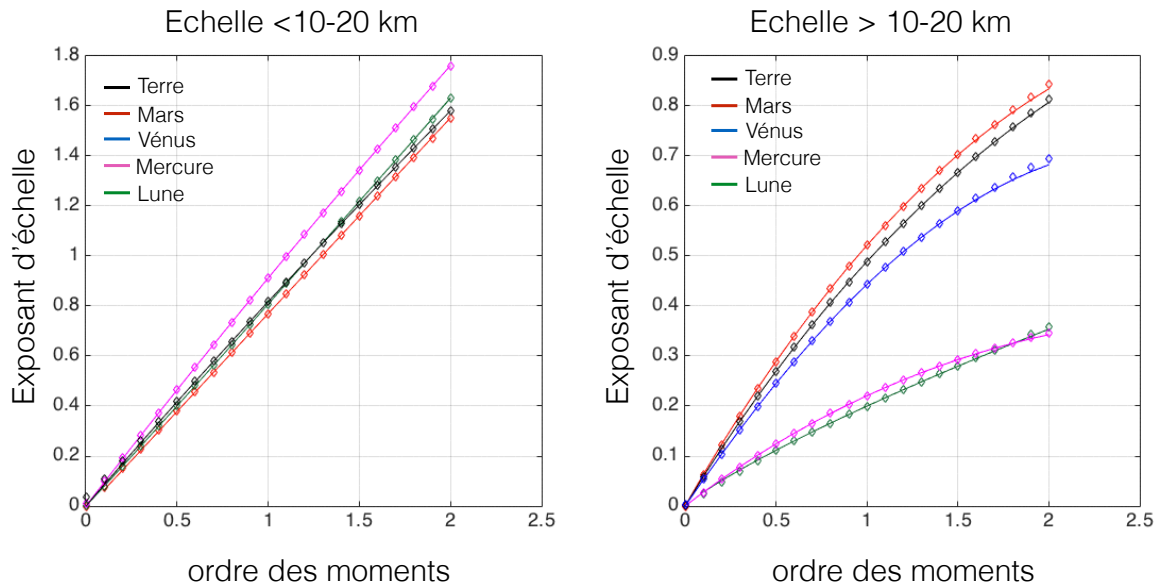


FIGURE 4.10 – Estimations des la fonction des exposants d'échelle $\xi(q)$ pour les deux gammes (inférieur et supérieur à 10 – 20 km)

La figure 4.10 permet de constater que la fonction $\xi(q)$ présente une courbure variable selon les corps. Sur la gamme des grandes échelles, l'estimation de C_1 avoisine 0.1 pour Mars, Vénus et La Terre révélant des propriétés multifractales assez similaires. Elle est plus faible pour Mercure ($C_1 \sim 0.06$) et la Lune ($C_1 \sim 0.03$).

- Petites échelles (< 10 – 20 kilomètres)

La figure 4.10 montre des fonctions ξ au comportement beaucoup plus linéaire à l'image du cas de Mars avec des valeur de C_1 de l'ordre 0.01 – 0.02 et des valeur de α incertaines.

4.4.2 Propriétés du flux

Le flux-jacent est calculé pour chaque corps ainsi que divers moments entre $q = 0$ et $q = 2$ en appliquant la même procédure que pour Mars (voir paragraphe 4.3.9).

4.4.2.1 Comportement d'échelle

La figure 4.11 montre le comportement d'échelle de 8 moments empiriques du flux compris entre 0.3 et 1.9. L'aspect général des courbes conduit aux mêmes conclusions que le cas

de Mars. Aucune transition claire permettant de séparer deux régimes n'est détectable. Pour Mars et Vénus, la corrélation linéaire est satisfaisante de la plus petite à la plus grande échelle. Pour la Terre, les grandes échelles s'écartent sensiblement du comportement linéaire partir de $l = 10000$ kilomètres qui coïncide avec l'échelle de dérochage des fluctuations de Haar. Le flux des deux petits corps (Mercure et la Lune) présentent des moments dont la pente est plus faible. Ils sont plus resserrés autour de la moyenne avec une corrélation linéaire médiocre.

4.4.2.2 Multifractalité

Les régressions individuelles effectuées sur chaque moment permettent de construire les fonctions d'échelle empiriques associées à chaque corps $K(q)$, reportées sur la figure 4.12. Le meilleur jeu de paramètres multifractals universels est évalué par régression bayésienne (voir table 4.5) en accord avec la formule 4.1. Les traits pleins de la figure 4.12 permettent de juger de l'adéquation satisfaisante entre le jeu de paramètres obtenu et les pentes des moments empirique. Les résultats reportés dans la table 4.5 confirment le caractère nettement multifractal de Mars, Vénus et la Terre avec $C_1 \sim 0.1$ par opposition aux statistiques des petits corps qui tendent à être plus monofractals avec tout de même des valeurs de C_1 plus élevées que celles obtenues par l'analyse des fluctuations ($C_1 \sim 0.05$ pour la Lune et $C_1 \sim 0.08$ pour Mercure). Pour ce deux derniers cas, la faible corrélation linéaire des moments laisse cependant planer un doute sur la qualité des estimations. Les graphes de la figure 4.11d et 4.11e montrent que la détermination de l'intervalle d'échelle permettant une régression linéaire est ambigu. L'aspect relativement plat des moments à grandes échelles suggèrent que la symétrie pourrait être brisée avant l'échelle maximale. Il n'en demeure pas moins que l'aspect général des courbes confirme la nature différente des statistiques globales des 3 grandes planètes comparées à celle des petits corps.

4.4.3 Conclusions de l'analyse globale

Notre analyse statistique comparative de 5 corps telluriques permet désormais de juger de l'aptitude du FIF à décrire les surfaces naturelles (voir table 4.5 et figure 4.14) et suscite

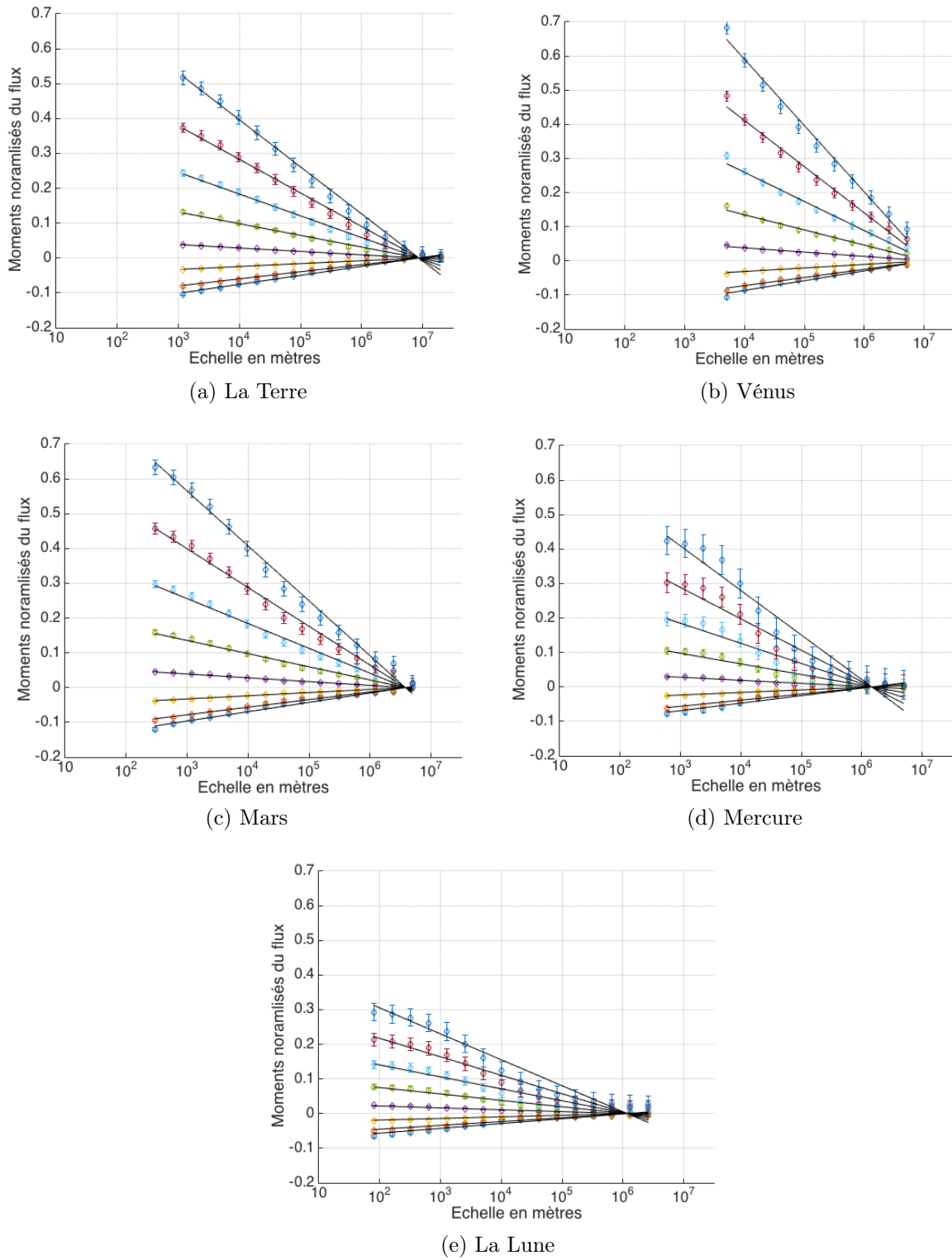


FIGURE 4.11 – Estimations des moments statistiques d’ordres 0.3, 0.5, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 et 1.9 du flux à différentes résolutions pour les 5 corps analysés

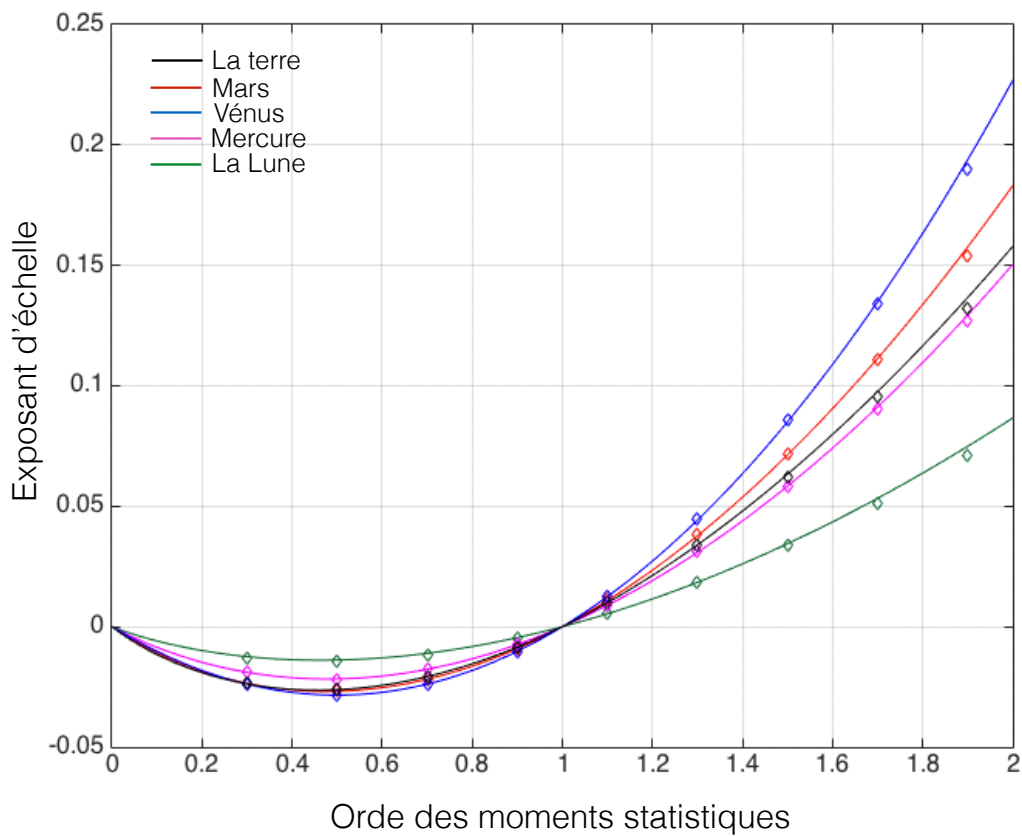


FIGURE 4.12 – Fonctions des exposants d'échelle du flux obtenues par régression linéaire des moments d'ordres 0.3, 0.5, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 et 1.9 pour les 5 corps étudiés. Les exposants empiriques sont représentés par des losanges. Les traits pleins correspondent au meilleur modèle déterminé par inversion bayésienne.

plusieurs interrogations.

Quelle est l'origine physique de la transition commune vers $L = 10 - 20$ kilomètres mise en évidence par l'analyse de Haar ? H est généralement interprété comme un indicateur de rugosité. Les simulations du FIF présentent un aspect lisse pour les valeurs de H élevées (voir annexe p.191) et paraissent au contraire rugueuses quand H est proche de 0. Les topographies planétaires ont donc tendance à devenir plus lisses vers les petites échelles. Dans certains contextes, la présence d'un régime caractérisé par une forte valeur de H peut être imputé à la mauvaise qualité des données. Par exemple, si un profil topographique irrégulier est complété par interpolation polynomiale, la moyenne des fluctuations risque d'être artificiellement faible à petite échelle et générer une transition vers des valeurs de H plus élevées. Nous avons cependant écarté l'hypothèse d'un tel biais dans le cas de Mars et la Lune en comparant la méthode rigoureuse des traces à celles des cartes interpolées. La transition a donc vraisemblablement une origine physique.

En dessous de 10 – 20 kilomètre, les différences d'altitudes diminuent plus rapidement quand l'échelle décroît. Nous faisons l'hypothèse que l'épaisseur élastique de la lithosphère est responsable de cette transition en s'opposant aux déformations suscitées par les différents processus de surface. La figure 4.13 schématise cette hypothèse. A des échelles inférieures à l'épaisseur élastique T_e , une modification de la surface (par exemple, suite à un impact formant un cratère) ne permet pas de générer une compensation isostatique. Le nouveau relief peut donc rester présent. Les pentes de facettes voisines ont tendance à être corrélées entre elles et donnent lieu à des fluctuations de topographie augmentant rapidement avec l'échelle (aspect structuré, H élevé). A des échelles supérieures à T_e , un changement du relief déclenche une compensation isostatique qui tend à s'opposer aux grandes variations du relief. Les pentes des facettes voisines ont tendance à être anti-corrélées et le profil topographique est d'apparence plus rugueuse. Le relief oscille autour d'une valeur moyenne. Dans cette configuration, les fluctuations d'altitude n'augmentent que faiblement avec l'échelle (H faible). La transition commune pourrait s'expliquer par la valeur moyenne de l'épaisseur élastique de la lithosphère comparable

Planète	méthode	gamme	H	C_1	α
Mars	Haar	$600m - 20km$	0.773 ± 0.003	0.02 ± 0.006	1.7 ± 0.5
		$20km - 10000km$	0.53 ± 0.001	0.110 ± 0.002	1.80 ± 0.06
	Flux	$300m - 10000km$	NA	0.101 ± 0.001	1.81 ± 0.03
Terre	Haar	$2km - 10km$	0.823 ± 0.004	0.01 ± 0.01	0.1 ± 0.2
		$20km - 5000km$	0.479 ± 0.001	0.093 ± 0.002	1.70 ± 0.08
	Flux	$2km - 5000km$	NA	0.0905 ± 0.0005	1.60 ± 0.01
Vénus	Haar	$10km - 5000km$	0.436 ± 0.002	0.109 ± 0.002	1.95 ± 0.08
	Flux	$10km - 5000km$	NA	0.1136 ± 0.001	1.99 ± 0.02
Mercure	Haar	$1km - 10km$	0.922 ± 0.003	0.026 ± 0.005	0.6 ± 0.2
		$20km - 5000km$	0.248 ± 0.002	0.059 ± 0.002	1.85 ± 0.1
	Flux	$1km - 5000km$	NA	0.081 ± 0.002	1.78 ± 0.03
Lune	Haar	$160m - 10km$	0.878 ± 0.002	0.02 ± 0.04	1.7 ± 0.3
		$20km - 5000km$	0.226 ± 0.002	0.03 ± 0.01	1.4 ± 0.1
	Flux	$80m - 5000km$	NA	0.050 ± 0.001	1.59 ± 0.05

TABLE 4.5 – Tableau récapitulatif des estimations des paramètres multifractals

pour les 5 corps (*Grott and Breuer, 2008; Barnett et al., 2002; Nimmo and Watters, 2004*).

Quelle est l'origine physique de la multifractalité à grande échelle ? La validité du FIF est satisfaisante pour Mars, Vénus et la Terre sur la gamme des grandes échelles. Non seulement les multifractales universelles permettent d'ajuster correctement les données mais de plus, les différentes méthodes utilisées convergent vers des paramètres H , α et C_1 cohérents. Les résultats sont plus ambigus pour les petits corps mais confèrent tout de même un aspect multifractal aux grandes longueurs d'onde des topographies de Mercure et de la Lune. Ce résultat suggère que les grandes échelles de la topographie sont dominées par un ou des processus qui exercent leur influence sur l'ensemble du globe. Nous proposons d'interpréter la multifractalité à grande échelle comme le reflet de l'activité interne des corps dont le lien avec les grandes longueurs d'onde de la topographie a fait l'objet de nombreuses études (*Nimmo et al., 2003; Giese et al., 2007; Nimmo et al., 2010*). Ainsi les planètes qui sont géologiquement actives ou qui présentent encore les marques d'une activité passée (la Terre, Vénus et Mars) ont des topographies plus multifractales que les petits corps sans activité interne (La lune et Mercure).

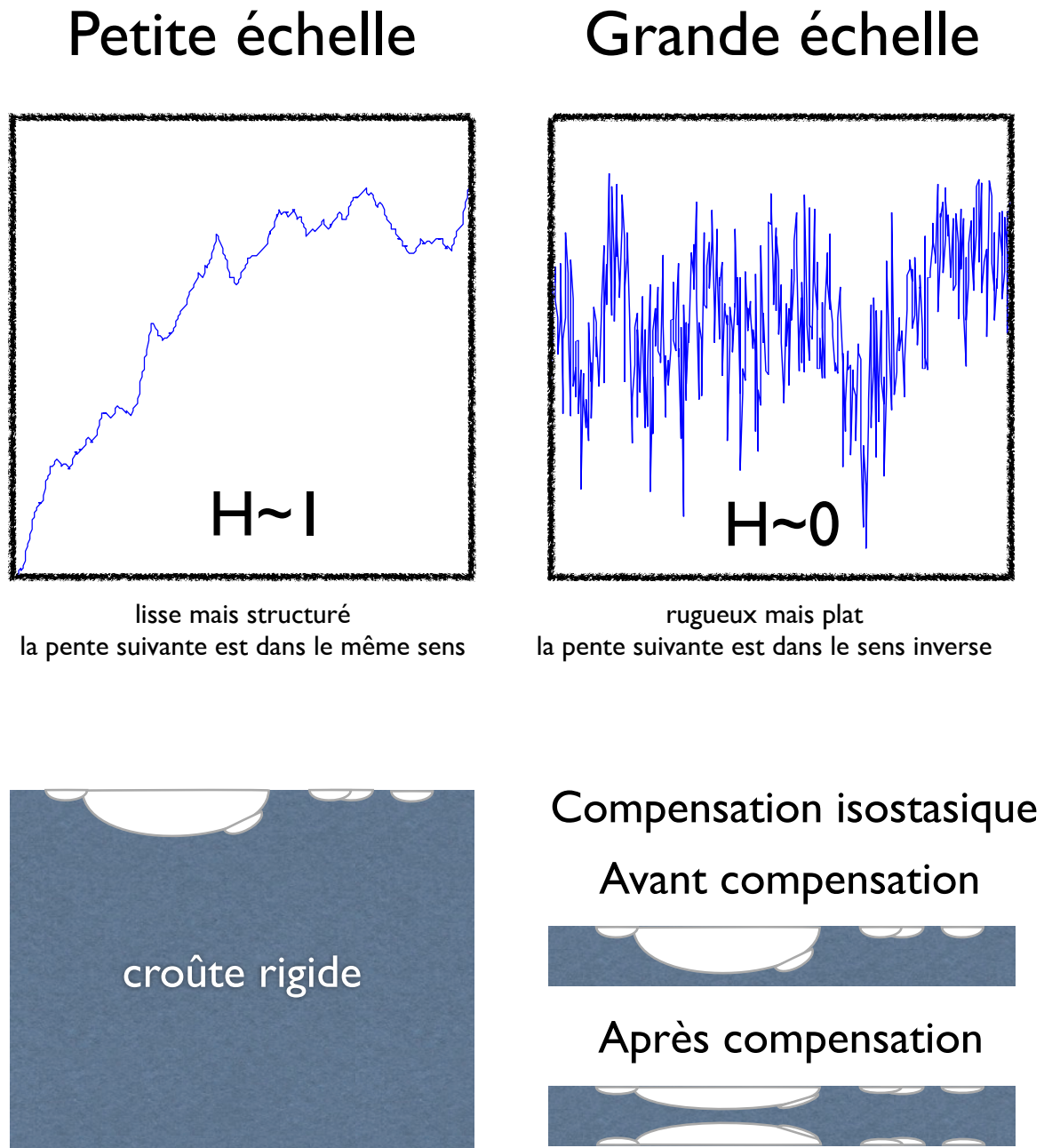


FIGURE 4.13 – Schéma de l'effet de la compensation isostatique sur la topographie. Les valeurs de H ont été exagérées pour faciliter la compréhension. Selon notre hypothèse, les deux régimes sont séparés par l'échelle correspondant à l'épaisseur élastique de la lithosphère.

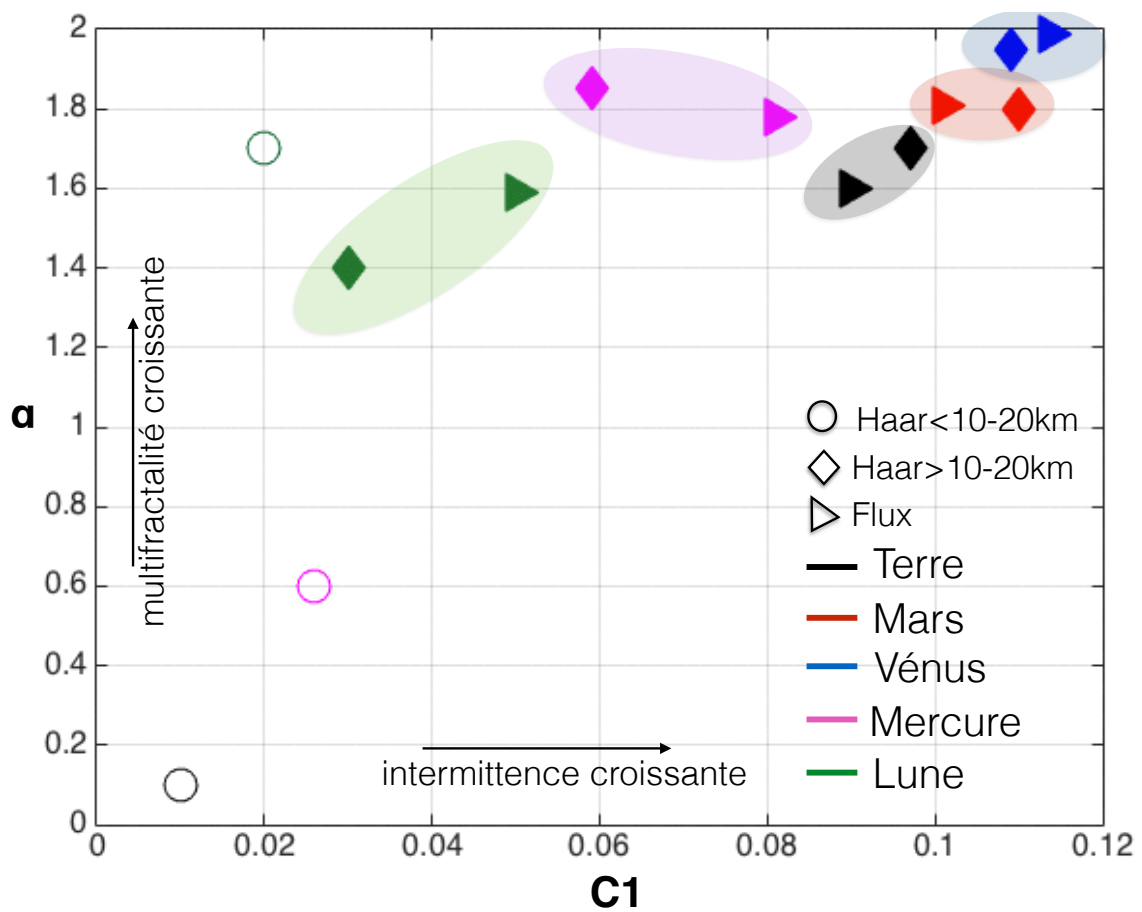


FIGURE 4.14 – Graphe récapitulatif des paramètres multifractals de la topographie de la Terre, Mars, Vénus, Mercure et la Lune, obtenus par différentes méthodes

4.5 Analyse régionale et locale

Nous présentons ci-dessous les résultats de travaux préliminaires visant à caractériser le comportement multifractal régional et local des topographies de Mars et de la Lune. Dans un premier temps, nous avons divisé la topographie en 28 grandes portions « régionales » : les quadrangles définis par l’USGS. Nous proposons ensuite une analyse locale en adoptant une stratégie de fenêtre glissante de $4^\circ \times 4^\circ$ avec un pas de 1° .

4.5.1 Quadrangle : échelle « régionale »

La surface de la sphère est divisée en 28 régions situées entre 65° et -65° de latitude. Il s’agit de 16 quadrangles couvrant chacun 15° en longitude entre -30° et 30° de latitude et 12 quadrangles couvrant chacun 60° en longitude entre (-30°) et (-65°) de latitude. La sélection des quadrangles se fait directement à partir des cartes *MOLA* et *LOLA*. Sur chaque région nous appliquons la méthode «trace moment» qui vise à caractériser les propriétés du flux. Nous renonçons dans cette section à l’estimation du paramètre H . Ce dernier a fait l’objet d’analyse régionales et locales par la technique classique du variogramme dans de nombreuses études. La seule analyse consacrée à l’aspect multifractal des statistiques locales d’une topographie planétaire (Mars) est celle de *Deliege et al.* (2016). Au sein d’un quadrangle, les bandes de latitudes sont analysées comme des profils uni-dimensionnels. Leur flux est estimé à la plus petite résolution puis dégradé pour estimer les moyennes d’ensembles de plusieurs moments statistiques. De même que pour l’analyse globale, nous nous limitons ainsi aux statistiques Nord-Sud, par simplicité, étant donnée la largeur variable des pixels dans la direction Est-Ouest. Les propriétés étant possiblement anisotropes dans certains quadrangles, il s’agit d’un point faible de ces travaux. La question de l’anisotropie n’a pas été abordée dans cette étude mais sera au coeur de futurs travaux. La figure 4.17 (resp. figure 4.18) montre le comportement d’échelle de 7 moments statistiques entre 0 et 2 pour chacun des quadrangles martiens (respectivement lunaires). La topographie associée est représentée en relief ombré. Les estimations de C_1 (resp. α) sont représentées en échelle de couleur sur les figures 4.19a et

4.19b.

4.5.2 Fenêtre glissante : échelle « locale »

Pour aborder les propriétés locales, nous utilisons une fenêtre glissante de $4^\circ \times 4^\circ$. Pour Mars, la fenêtre regroupe 512×512 points (235 kilomètres dans la direction Nord-Sud) contre 1024×1024 (41 kilomètres) pour la Lune. Les flux Nord-Sud et Est-Ouest sont estimés dans chaque fenêtre ainsi que les moments empiriques et les paramètres multifractals. La figure 4.15 montre un exemple de profil local lunaire et l'analyse correspondante. En déplaçant la fenêtre dans les deux directions avec un pas de 1° , nous pouvons construire une carte (180×360) des propriétés locales. La figure 4.21 (resp. 4.22) montre les cartes obtenues pour α et C_1 dans le cas de Mars (resp. la Lune)

4.5.3 Interprétations

Les analyses globales du flux de la topographie de la Lune et de Mars ont clairement fait ressortir le caractère plus multifractal de la planète rouge avec des valeurs de C_1 et α plus élevées (voir figure 4.14). Les estimations régionales des figures 4.19a et 4.19b montrent que cette tendance se confirme sur des zones plus restreintes.

4.5.3.1 Mars

Régional La majorité des quadrangles martiens conduisent à des estimations de C_1 proches de 0.1. La valeur maximale $C_1 \sim 0.16$ est obtenue dans le quadrangle du volcan Elysium (long. $[135; 180]$, lat. $[0; 30]$). Cette valeur élevée est probablement liée au contraste entre le relief imposant des édifices volcaniques et la topographie plus lisse environnante dominée par des écoulements de laves. Ce quadrangle a la particularité de présenter des traces d'écoulements volcaniques particulièrement jeunes. Les images haute résolution de Mars par la caméra HiRISE (*McEwen et al.*, 2007) suggèrent que ces écoulements se sont formés en l'espace de seulement quelques semaines lors d'intenses coulées de lave turbulentes (*Jaeger et al.*, 2010). Historiquement, les concepts multifractals

ont été justement introduits pour décrire la phénoménologie des fluides turbulents (voir section 2.3.1). Cet exemple montre le lien potentiel entre les statistiques de la topographie et la nature des processus qui lui ont donné naissance. De son côté, le quadrangle de Tharsis (long. $[-135; -90]$, lat. $[0; 30]$) qui inclut plusieurs volcans dont le plus grand du système solaire (Olympus) ne s'écarte pas de la valeur globale de C_1 . La valeur de α est assez variable d'un quadrangle à l'autre sans prédominance apparente de la valeur globale ($\alpha \sim 1.8$). Nous constatons que les quadrangles centrés sur les plaines peu cratérisées de l'hémisphère Nord présentent les valeurs de α les plus élevées. Les estimations sont d'ailleurs légèrement supérieures à la valeur maximale prévu par le FIF ($\alpha > 2$). Nous remarquons aussi la faible valeur $\alpha=1.6$ estimée dans le quadrangle d'Elysium qui est associé à la valeur maximale de C_1 .

Local La valeur typique $C_1 = 0.1$ domine largement les zones fortement cratérisées de l'hémisphère sud. Nous trouvons des valeurs plus élevées dans l'hémisphère Nord ($C_1 \sim 0.2$) en périphérie des édifices volcaniques du quadrangle d'Elysium (long. $[135; 180]$, lat. $[0; 30]$), dans les terrains jeunes du quadrangle d'Amazonis (long. $[-180; -145]$, lat. $[0; 30]$) ainsi que dans la plaine de Chryse (lat. 27° , long. -41°), une des plus basses régions martiennes qui porte des marques visibles d'écoulements passés. C_1 est globalement plus faible dans les plaines lisses correspondant aux latitudes élevées de l'hémisphère nord. Les dômes volcaniques et leurs alentours présentent des valeurs de C_1 particulièrement faibles avec certaines estimations proches de 0. Les variations locales de α attirent l'attention sur le système de canyon de Valles Marineris (lat. $-13, 7^\circ$, long. -60°) qui concentrent les plus faibles valeurs (proche de 1). De nombreuses estimations de α sont supérieures à la valeur limite prédite par le FIF. Cet écart suggère que la classe des multifractales universelles (qui décrit le comportement limite d'un grand nombre de processus multifractals se superposant) n'est pas toujours valable dans le cas d'une analyse locale. Notons cependant que les anomalies de α correspondent en général à des intermittences fortes ($C_1 > 0.2$). Par conséquent elles résultent peut-être d'un problème de convergence des indicateurs dans le cas d'une topographie trop intermittente. Cette hypothèse sera testée sur des

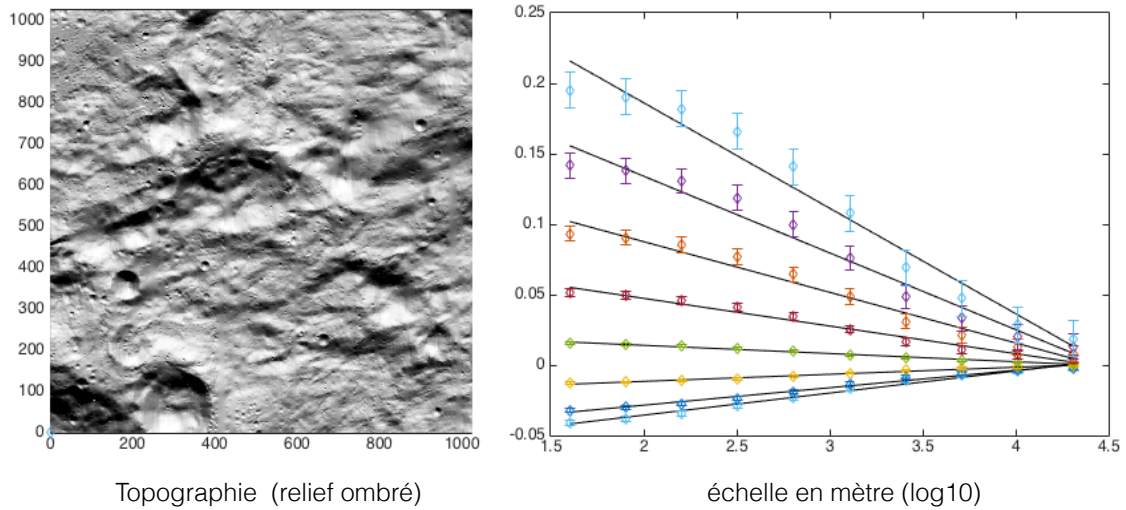


FIGURE 4.15 – Exemple de champ topographique local 1024×1024 (soit 41 kilomètres) extrait à partir de la base données LOLA. Le graphe de droite montre l'estimation de plusieurs moments empiriques du flux Nord-Sud.

séries synthétiques. La figure 4.16 permet de visualiser les distributions des valeurs locales de C_1 et α . La surface de Mars présente un large éventail de valeurs permises pour les deux paramètres relativement bien centré autour des valeurs estimées sur une base globale par la méthode « trace moment ».

4.5.3.2 La Lune

La plus grande simplicité des processus actifs à la surface de la lune se reflète dans l'analyse locale et régionale. La valeur $C_1 \sim 0.05$ constatée à l'échelle globale se retrouve dans la majorité des quadrangles lunaires. Les valeurs plus élevées $C_1 \sim 0.1$ sont distribuées dans les régions centrées sur les mer lunaire (Marias), des plaines basaltiques qui sont le vestiges de coulées volcaniques anciennes. Ces dernières sont beaucoup plus lisses que les terrains cratérisés environnant. C'est également dans les Marias que nous trouvons les valeurs maximales de α (~ 1.8). Le comportement local présente des tendance similaires : les mers lunaires ont des valeurs plus fortes de α et C_1 . L'examen détaillé des cartes locales révèle des corrélations intéressantes avec les unités géologiques lunaires. Nous constatons que les structures circulaires du plus grand cratère de la surface (Mare Orientale, lat. -19.4° , long. -92°) sont associées à des valeurs de C_1 distinctes. La portion centrale

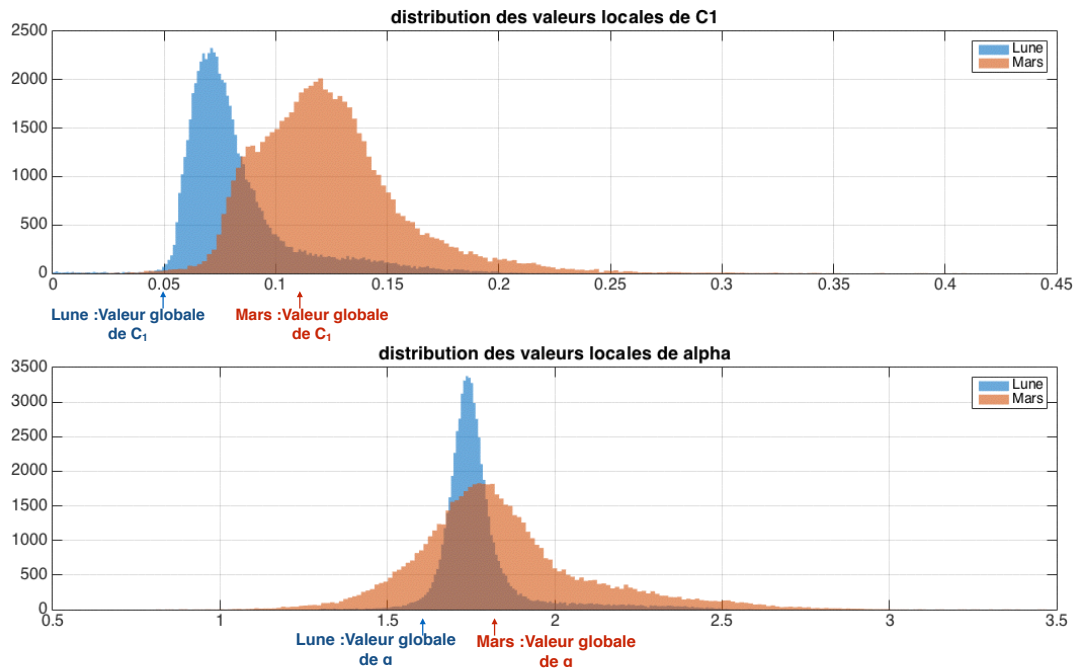


FIGURE 4.16 – Distribution des valeurs locales de α et C_1 pour Mars et la Lune. Les estimations globales de ces deux paramètres par la méthode « trace moment » sont rappelées sur le graphe.

composée d'une fine couche de basalte est caractérisée par $C_1 > 0.1$. La nappe d'éjecta environnante très rugueuse présente une intermittence homogène avec une valeur de C_1 proche de l'estimation globale ($C_1 \approx 0.05$). La valeur de α est homogène sur les différents anneaux (≈ 2) mais tend à être plus faible sur les remparts du cratère. Cette tendance est également visible sur les autres cratères d'impact. Comme pour la topographie de Mars, certaines estimations de α (dans les mers lunaires) sont supérieures à la valeur maximale permise par le FIF ($\alpha > 2$). La figure 4.16 permet de visualiser les distributions des valeurs locales de C_1 et α . Elles montrent que les estimations sont moins dispersées que dans le cas de Mars reflétant probablement la moindre diversité des processus à l'oeuvre à la surface de la Lune. On note cependant que les distributions ne sont pas centrées sur les valeurs globales obtenues par la méthode « trace moment ». Cet écart suggère que les statistiques globales sont dominées par quelques unités géologiques localisée (nappes d'éjectas rugueuses pour C_1 et rempart de cratères pour α)

4.5.4 Conclusions

Ces travaux préliminaires montrent le potentiel des paramètres α et C_1 pour caractériser de manière innovante la rugosité des surface naturelles. Les variations locales de ces paramètres reflètent des aspects statistiques de la topographie qui n'avaient pas encore été explorés et montrent de corrélations prometteuses avec les processus géologiques qui façonnent les surfaces (volcanisme, érosion, cratérisation). Afin de déterminer les processus contrôlant ces propriétés statistiques, nous souhaitons l'appliquer à des zones terrestres bien caractérisées, à des simulations numériques ainsi qu'à des expérimentations de laboratoire. Nous développons ces perspectives dans notre chapitre de conclusion. Le choix de la simplification de la puissance du flux $a = 1$ limite les interprétations physiques de notre analyse en se concentrant sur la description géométrique des fonctions de structure. Des travaux plus approfondis seront nécessaire pour contraindre les propriétés physiques du flux sous-jacent et lever l'ambiguïté sur l'estimation des paramètres.

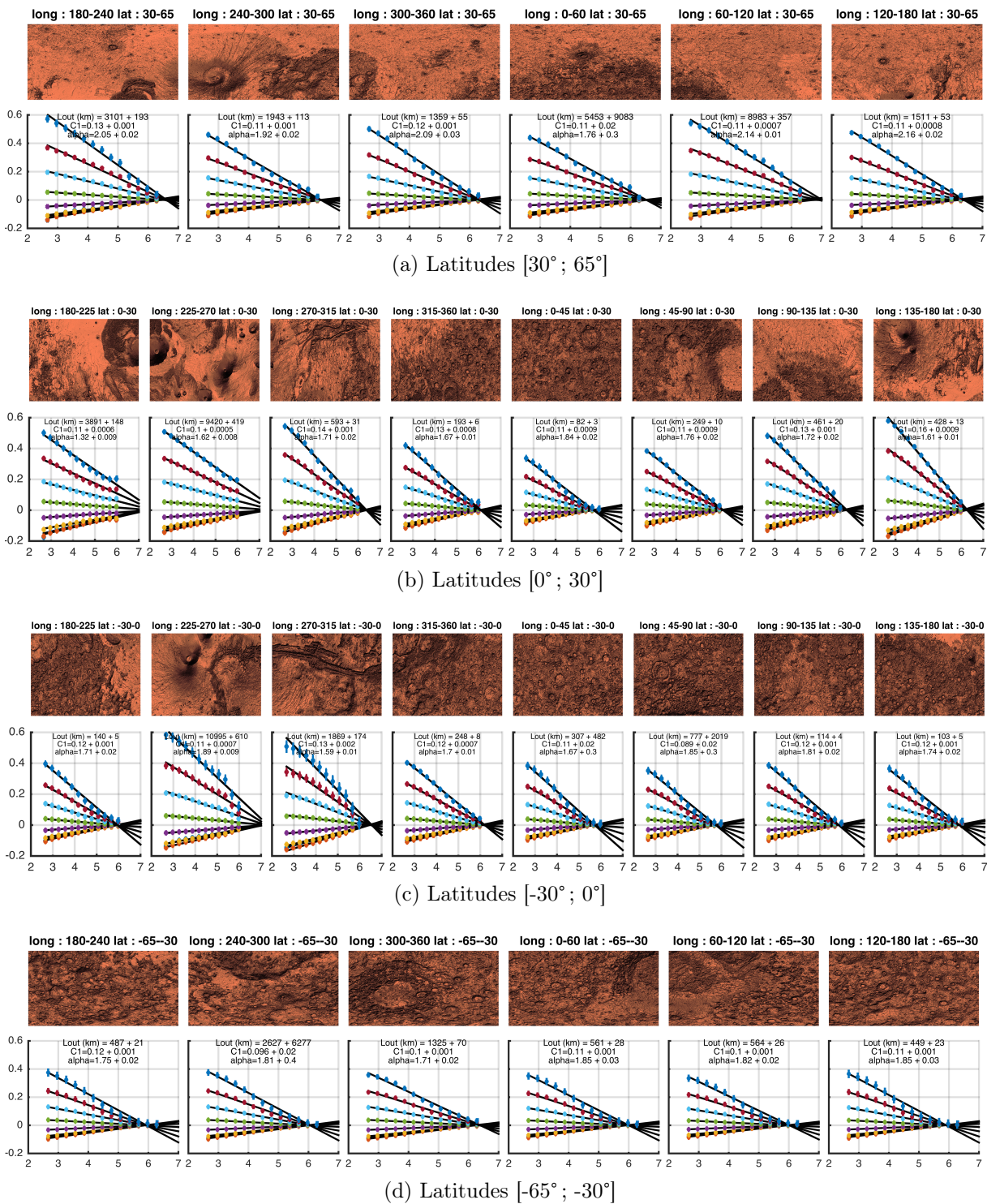


FIGURE 4.17 – Mars : Estimations de 7 moments statistiques d'ordre $q = \{0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7\}$ du flux Nord-Sud de la topographie martienne dans 28 quadrangles compris entre -65° et 65° de latitude. Pour chaque quadrangle, les paramètres multifractals sont estimés et reportés sur la figure. En plus de α et C_1 , nous donnons la valeur L_{out} de l'échelle externe qui correspond à l'identification de la plus grande échelle de la cascade. Il s'agit du point de convergence entre tous les moments empiriques.



FIGURE 4.18 – Lune : Estimations de 7 moments statistiques d'ordre $q = \{0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7\}$ du flux Nord-Sud de la topographie lunaire dans 28 quadrangles compris entre -65° et 65° de latitude. Pour chaque quadrangle, les paramètres multifractals sont estimés et reportés sur la figure. En plus de α et C_1 , nous donnons la valeur L_{out} de l'échelle externe qui correspond à l'identification de la plus grande échelle de la cascade. Il s'agit du point de convergence entre tous les moments empiriques.

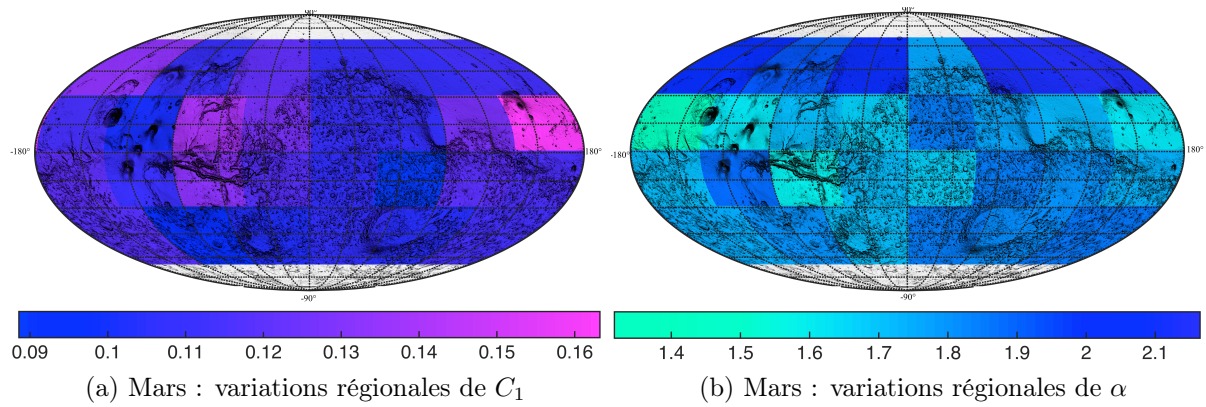


FIGURE 4.19 – Mars : variations régionales des paramètres multifractals estimées à partir des moments de la figure 4.17.

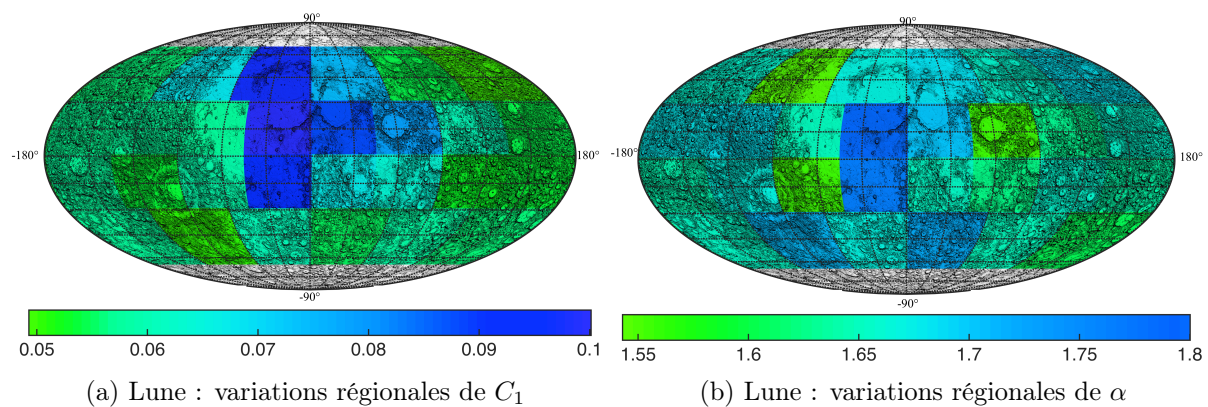


FIGURE 4.20 – Lune : variations régionales des paramètres multifractals estimées à partir des moments de la figure 4.18.

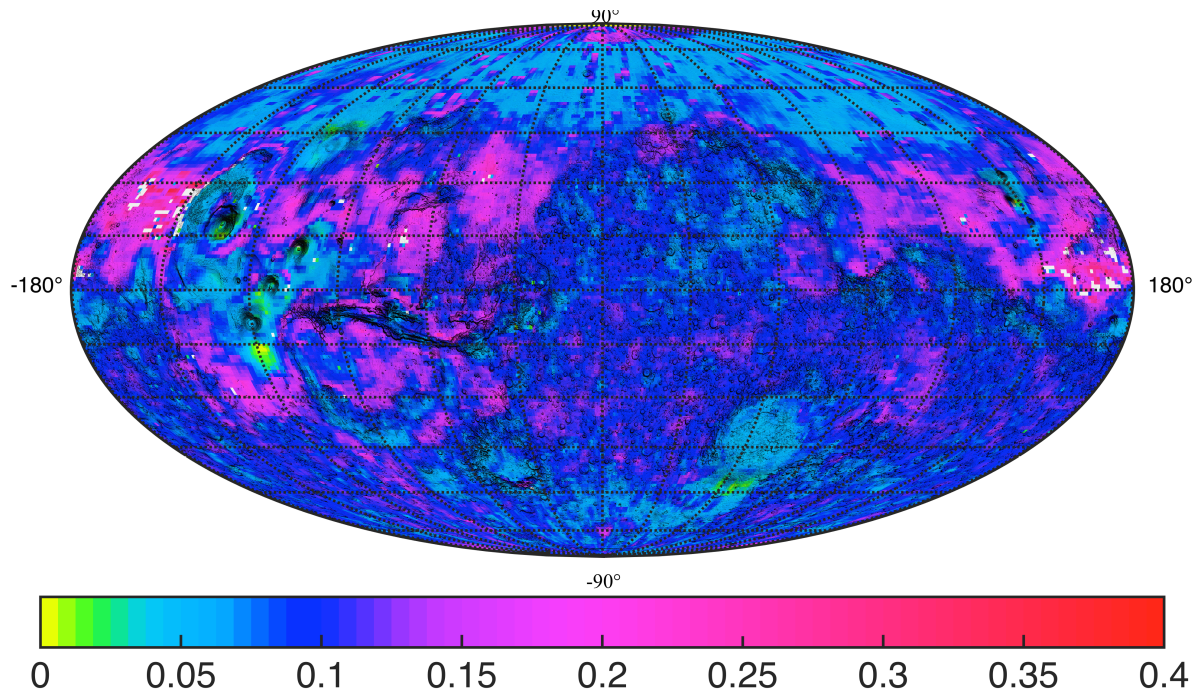
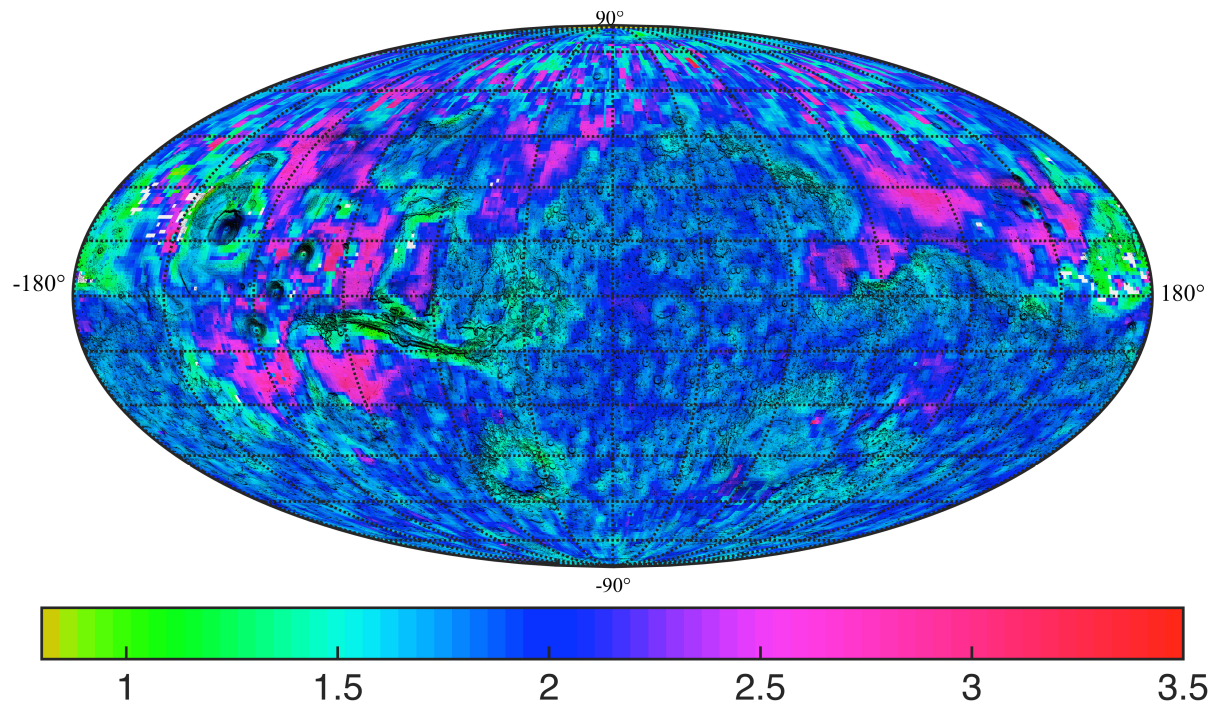
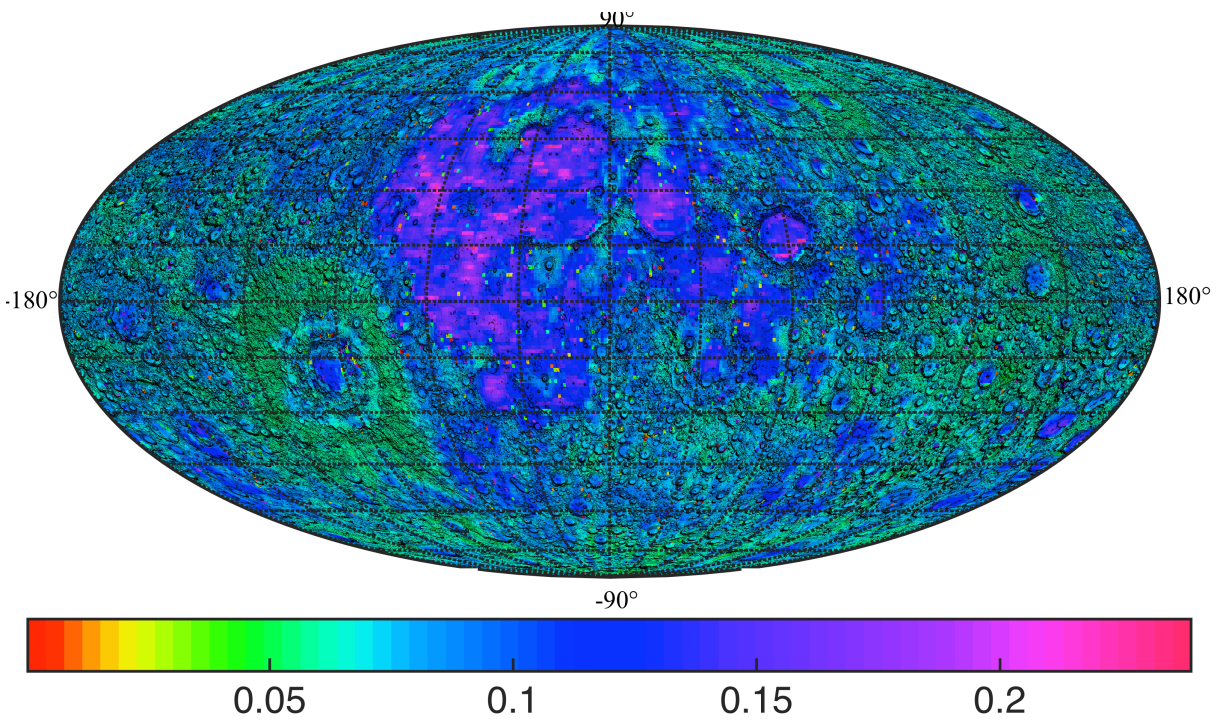
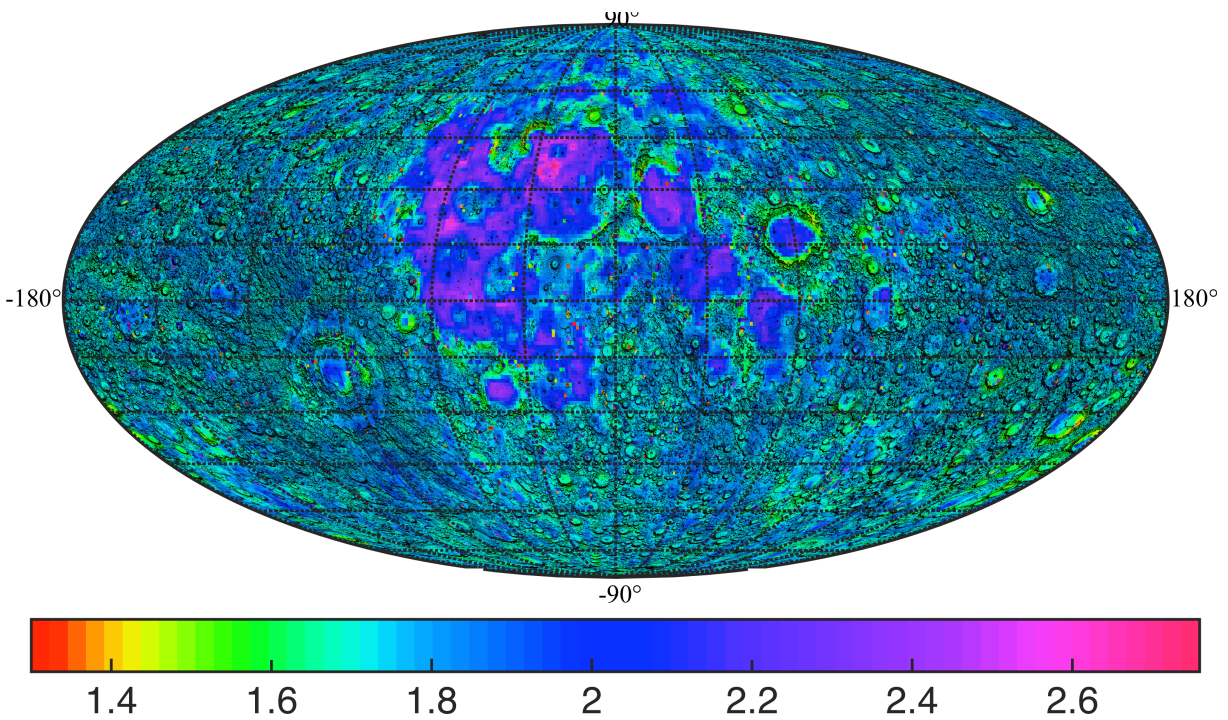
(a) Estimation locales de la valeur de C_1 .(b) Estimation locales de la valeur de α .

FIGURE 4.21 – Mars : Estimation locales de la valeur des paramètres multifractals universels. L'analyse est effectuée à partir des cartes MOLA avec un fenêtrage glissant de 512×512 points ($4^\circ \times 4^\circ$) et un pas de 128 points (1°). On obtient une carte de 173×360 estimations de la codimension C_1 représentée en utilisant la projection elliptique de *Mollweide*. Chaque estimation est issue d'une régression bayésienne.



(a) Estimations locales de la valeur de C_1 .



(b) Estimations locales de la valeur de α .

FIGURE 4.22 – Lune : estimations locales de la valeur des paramètres multifractals universels. L'analyse est effectuée à partir des cartes MOLA avec un fenêtrage glissant de 1024×1024 points ($4^\circ \times 4^\circ$) et un pas de 256 points (1°). On obtient une carte de 180×360 estimations de la codimension C_1 et du degré de multifractalité α représentée un utilisant la projection elliptique de *Mollweide*. Chaque estimation est issue d'une régression bayésienne.

Chapitre 5

Simulations multifractales sphériques

La bonne adéquation du modèle du flux fractionnairement intégré FIF avec les statistiques de la topographie des planètes à grandes échelles suggère d'adapter la procédure de simulation classiquement utilisée dans l'espace à deux dimensions en géométrie cartésienne à la géométrie sphérique des surfaces planétaires pour créer des champs synthétiques ayant des propriétés d'échelle réalistes. Ces champs peuvent trouver de nombreuses applications dans les différents domaines de la planétologie. En particulier, ils pourraient contribuer de manière significative à l'étude des exoplanètes qui constitue actuellement un domaine de recherche en plein essor.

5.1 Contexte

Chaque année, des corps de plus en plus petits sont découverts dans des systèmes lointains. Récemment, sept nouvelles planètes telluriques dont certaines situées dans la zone habitable ont été identifiées autour d'une étoile naine (*Gillon et al.*, 2017). La distance immense qui sépare ces corps de notre planète rend particulièrement difficile leur observation directe. Actuellement, seules les planètes géantes appartenant à la catégorie des « jupiters chauds » ont pu faire l'objet de mesures spatialement résolues (*Kalas et al.*, 2008; *Marois et al.*, 2008; *Lagrange et al.*, 2009). Pour les exoplanètes de tailles modestes, séparer leur image de celle de l'étoile représente un défi technologique majeur qui sera

potentiellement relevé par la prochaine génération de télescope spatiaux. Les premières images d'exoplanètes telluriques ne seront probablement pas résolues. Les informations sur le corps devront donc être déduites à partir des variations temporelles de luminosité d'un seul pixel. Pour anticiper les difficultés techniques relatives à cette contrainte, de nombreuses études portent sur la manière de caractériser les planètes telluriques par leur courbe de variabilité photométrique. En variant en couleurs et en intensité, cette dernière contient une information sur les propriétés de la surface et de l'atmosphère. Des modèles sont donc développés pour prédire les propriétés d'un corps en fonction des variations temporelles de cette courbe de lumière (*Ford et al.*, 2001; *Pallé et al.*, 2008). Ces modèles démontrent la sensibilité des mesures photométriques à de nombreux paramètres comme la couverture de glace, la proportion d'océan et la couverture nuageuse (*Williams and Gaidos*, 2008; *Cowan et al.*, 2009). De manière directe ou indirecte, ces processus dépendent des reliefs. La question du lien entre la topographie et la circulation atmosphérique globale des planètes a été abordée par de nombreuses études (*Blumsack*, 1971; *Herrnstein and Dowling*, 2007; *Zalucha*, 2010; *Pausata et al.*, 2011). Par ailleurs, il est avéré que les reliefs jouent un rôle dans la formation et l'évolution temporelle des nuages (*Houze*, 2012). Nous pensons donc qu'il est utile de disposer de topographies synthétiques statistiquement réalistes pour raffiner les prédictions des modèles existants. Dans ce chapitre, nous commençons par décrire le principe du FIF sphérique. Dans une seconde partie, nous décrivons les résultats et exploitons ces simulations pour proposer une étude statistique de la proportion océan/continent des surfaces multifractales sphériques.

5.2 Présentation du modèle FIF sphérique

Le modèle de simulation multifractale que nous utilisons dans ce chapitre est une adaptation du flux fractionnairement intégré (FIF, section 2.4.2, *Schertzer and Lovejoy* 1987; *Schmitt et al.* 1992a; *Schertzer et al.* 1997) à la géométrie sphérique des surfaces planétaires. Un travail préliminaire a été effectué par J. Tan étudiant d'été à McGill (*Lovejoy and Shertzer* 2013, p 174) mais le code développé n'est plus disponible. La procédure

reprend en les adaptant les étapes de la construction du modèle $2D$ cartésien qui permet de générer un relief artificiel pour lequel la codimension C_1 , le degré de multifractalité α et le degré de «lissage» H sont connus. Les différentes étapes à adapter sont les suivantes :

1. Génération d'un bruit de Levy homogène
2. Intégration fractionnaire pour construire le générateur Γ (cascade additive)
3. Exponentialisation du générateur pour créer une cascade multifractale universelle (α, C_1)
4. Intégration fractionnaire pour introduire la dépendance en H

En remplaçant le champ $2D$ par une carte de latitude-longitude avec un échantillonnage constant en radian, les étapes 1 et 3 de la procédure peuvent être transposées sans problème à une surface sphérique. Les étapes 2 et 4 qui reposent sur des intégrations fractionnaires sont plus difficiles à adapter. Dans l'espace cartésien, il s'agit de convolutions qui peuvent être calculées sans difficulté dans l'espace de Fourier. Sur une surface sphérique, la notion de convolution est plus ambiguë. Il est néanmoins possible de simplifier le problème en utilisant la base des harmoniques sphériques (*Lovejoy and Shertzer, 2013*). Cette section est consacrée à la description détaillée des points techniques et théoriques pour mener à bien cette adaptation.

5.2.1 Rappel de la procédure $1D$

La simulation du FIF repose sur plusieurs étapes que nous rappelons ci-dessous. L'objectif final est de générer un champ d'élévation h dont les propriétés statistiques sont données par :

$$\Delta h = \phi \Delta x^H$$

où ϕ est une cascade multifractale. Pour la classe des multifractales universelles, les moments d'ordre q respectent des lois d'échelle :

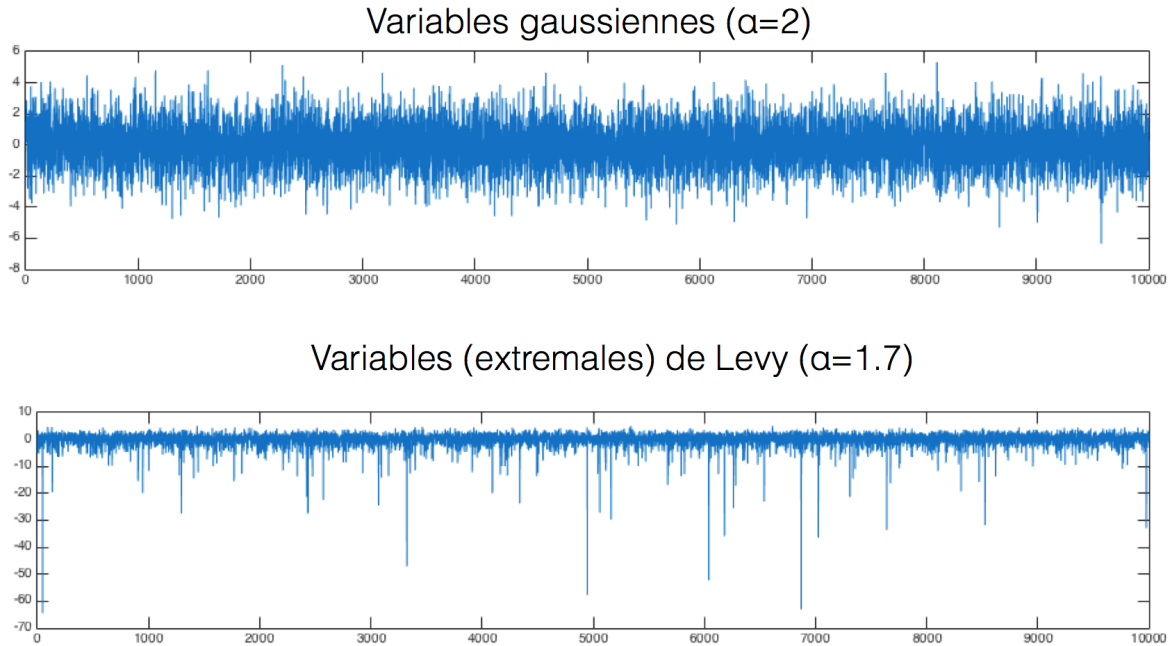


FIGURE 5.1 – Exemple à 1D de variables aléatoires gaussiennes ($\alpha=2$) et de Levy ($\alpha=1.7$). Contrairement aux variables gaussienne, les variables de Levy ont des valeurs extrêmes.

$$\langle \phi_\lambda \rangle^q \sim \lambda^{K(q)} \quad \text{avec} \quad K(q) = \frac{C1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \quad (5.1)$$

λ représente la résolution à chaque étape de la cascade. L'échelle correspondante est donnée par $l = \frac{L}{\lambda}$ en notant L l'échelle maximale.

5.2.1.1 Génération de la cascade multifractale

Nous avons vu au chapitre 2 que les cascades multiplicatives continues en échelle sont construites à une résolution λ en prenant l'exponentiel de variables aléatoires infiniment divisibles :

$$\phi_\lambda = e^{\Gamma_l} \quad (5.2)$$

ϕ_λ est une cascade multiplicative développée à la résolution λ et Γ_λ est une série de variables infiniment divisibles. Les variables de Levy ont justement cette propriété d'infini divisibilité et peuvent donc être utilisées pour construire le générateur de la cascade. Sans entrer dans les détails mathématiques, nous nous contentons de rappeler que les variables

de Levy sont caractérisées par un paramètre α et diffèrent des variables gaussiennes par leur aptitude à générer des valeurs extrêmes (voir figure 5.1). Plus la valeur de α est faible, plus les valeurs extrêmes deviennent probables. Le cas $\alpha = 2$ correspond au cas gaussien classique. Les moments statistiques d'ordre q de l'exponentiel d'une variable extrémale de Levy γ_α sont donnés par (*Chambers et al.*, 1976) :

$$\langle e^{q\gamma_\alpha} \rangle = e^{\frac{q^\alpha}{\alpha-1}} \quad (5.3)$$

Ces expressions laissent déjà entrevoir une partie de la forme souhaitée pour $K(q)$. Afin de générer un cascade sur un segment de longueur L , la première étape consiste à tirer une série discrète unidimensionnelle $\gamma_\alpha(x_i)$ de variables aléatoires extrémales de Levy ou les x_i représentent la discrétisation spatiale de l'espace. Avec les notations du paragraphe 5.2.1 :

$$x_i = \left\{ -\frac{L}{2}, \dots, -\frac{2L}{\lambda}, -\frac{L}{\lambda}, \frac{L}{\lambda}, \frac{2L}{\lambda}, \dots, \frac{L}{2} \right\}$$

L'étape suivante s'appuie sur la propriété de stabilité des variables de Levy : la somme discrète B de plusieurs variables de Levy A_i est encore une variable de Levy associée à la même valeur de α . De plus, en notant a_i et b leurs amplitudes respectives, on a l'égalité :

$$b = \left(\sum a_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.4)$$

En exploitant cette propriété d'additivité, il est possible d'assembler linéairement les variables de Levy $\gamma_\alpha(x_i)$ de manière à conférer au générateur les bonnes statistiques. Cette assemblage s'écrit sous forme d'une convolution circulaire discrète par un noyau $g(x_i)$ dont la forme sera déterminante (voir figure 5.2) :

$$\Gamma_\lambda(x_i) = \sum_j g(x_i - x_j) \gamma_\alpha(x_j) \delta x \quad (5.5)$$

Avec $\delta x = \frac{L}{\lambda}$. La forme souhaitée pour $K(q)$ (équation 5.1) et la définition du générateur (équation 5.2) implique que la quantité $L = \log(e^{q\Gamma_\lambda})$ doit diverger logarithmiquement

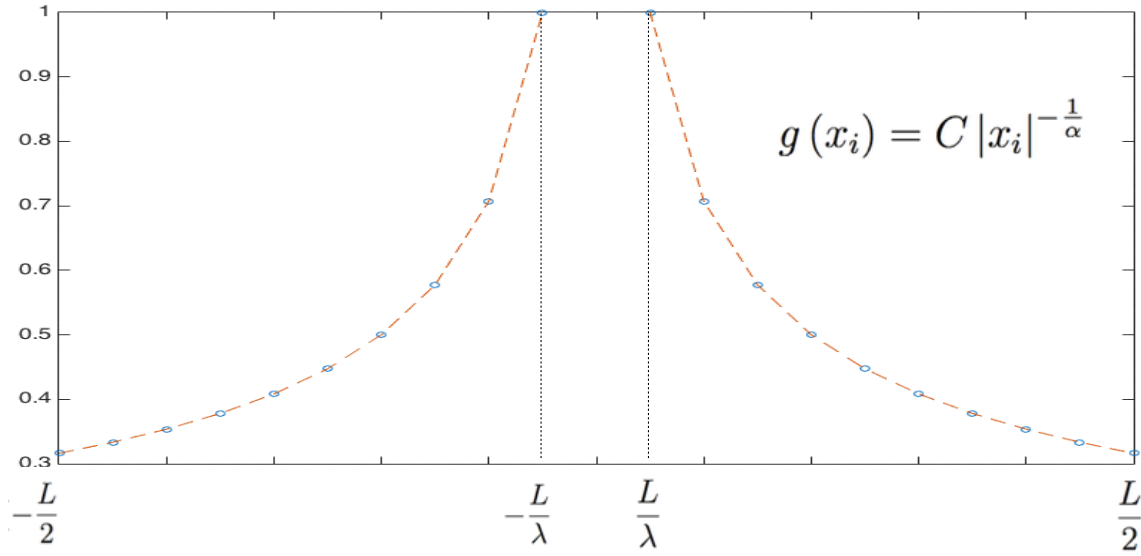


FIGURE 5.2 – Noyau de convolution ou singularité pour le FIF 1D. Le choix de C est déterminant.

avec la résolution λ :

$$L = \log \langle e^{q\Gamma_\lambda} \rangle \stackrel{requis}{=} \log(\lambda) K(q) \quad (5.6)$$

Puisque Γ_λ est une somme de variables de Levy d'amplitudes individuelles $g(x_i) \delta x$ (équation 5.5), son amplitude vaut $A = (\sum |g(x_i)|^\alpha \delta x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ d'après la règle d'additivité de l'équation 5.4. La quantité L est obtenue en appliquant les propriétés statistiques des variables de Levy (équation 5.3) :

$$L = \frac{q^\alpha}{\alpha - 1} A^\alpha$$

Nous voyons que la dépendance logarithmique de l'équation 5.6 est obtenu si $A^\alpha \sim \log(\lambda)$.

Cette condition est remplie en prenant :

$$g(x_i) = C |x_i|^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (5.7)$$

En effet, on a alors :

$$A^\alpha = \left(\sum |x_i|^{-1} \delta x^\alpha \right) = \delta x^{\alpha-1} \sum |x_i|^{-1} \delta x \quad (5.8)$$

La somme de l'expression ci dessus est une version discrète de l'intégrale :

$$2 \int_{\frac{L}{\lambda}}^L \frac{1}{x} dx = 2[\log \lambda]_{\frac{L}{\lambda}}^L = 2 \log \lambda \quad (5.9)$$

Nous avons donc bien la dépendance souhaitée ($\sim \log \lambda$). Avec un noyau défini par l'équation 5.7 , les statistiques de la cascade à la résolution λ sont données par :

$$\langle \phi_\lambda^q \rangle = \exp \left(2 \log \lambda \delta x^{\alpha-1} C^\alpha \frac{q^\alpha}{\alpha-1} \right) = \lambda^{2 \delta x^{\alpha-1} C^\alpha \frac{q^\alpha}{\alpha-1}} \quad (5.10)$$

Cette forme est proche de la relation recherchée (équation 5.1). Pour faire apparaître la dépendance souhaitée en C_1 , on ajuste la valeur de la constante C :

$$C = \left(\frac{C_1}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \delta x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (5.11)$$

afin d'avoir :

$$\langle \phi_\lambda^q \rangle = \lambda^{\frac{C_1}{\alpha-1} q^\alpha} \quad (5.12)$$

Numériquement, on génère une série de N valeurs en utilisant un pas d'intégration de 1 ($\lambda = N$, $\delta x = 1$, $C = (C_1/2)^{1/\alpha}$). La convolution discrète 5.5 est calculée dans l'espace de Fourier en multipliant la FFT de $g(x_i)$ et $\gamma_\alpha(x_i)$ avant de prendre la FFT inverse pour estimer $\Gamma(x_i)$. Formellement il s'agit d'une intégration fractionnaire. La cascade multifractale à la plus petite résolution est obtenue en prenant l'exponentiel de $\Gamma(x_i)$:

$$\phi(x_i) = \exp \Gamma(x_i) \quad (5.13)$$

La dernière étape consiste à normaliser la cascade à la résolution λ par sa valeur moyenne pour donner à $K(q)$ sa forme définitive (équation 5.1).

5.2.1.2 Intégration de la cascade

A partir de la cascade multifractale ϕ , le champ final est obtenu en effectuant une intégration fractionnaire d'ordre H . Il s'agit à nouveau d'une convolution circulaire dont l'implémentation ne pose pas de problème dans l'espace de Fourier :

$$h(x_i) = \sum_j g(x_i - x_j) \phi(x_j) \delta x \quad \text{avec} \quad g(x_i) = x_i^{-(1-H)} \quad (5.14)$$

Cette étape est analogue à la procédure de génération du fBm qui consiste à intégrer fractionnairement un bruit blanc gaussien. Nous donnons en annexe (p.191) plusieurs exemples de topographies synthétiques 2D obtenues par cette procédure en faisant varier la valeur des paramètres H , α et C_1 dans la gamme attendue pour la topographie.

5.2.2 Simulation sphérique

Nous avons donc abordé dans cette thèse le problème l'implémentation de l'adaptation de la procédure standard à la géométrie sphérique afin de générer des topographies synthétiques de planètes. La procédure détaillée dans le cas le plus simple (1D) se généralise sans difficulté au cas (2D). Le passage à la géométrie sphérique en revanche soulève plusieurs questions (*Lovejoy and Shertzer 2013*, p 174) :

1. Comment effectuer des convolutions sur la sphère ?
2. Quel forme doit avoir le noyau de convolution du générateur ?

5.2.2.1 Harmonique sphérique et échantillonnage cartographique

Nous avons choisi de travailler sur l'espace usuel en géoscience : une carte échantillonnée avec des pas constants de latitude et de longitude. Cet échantillonnage n'est pas le plus approprié sur la sphère car il n'est pas équidistant (incorrect au sens de Nyquist) mais il a l'avantage d'être facilement représentable sur une carte et largement utilisé en géoscience. Nous utilisons des toolbox matlab (https://github.com/csdms-contrib/slepian_alpha/blob/master/xyz2plm.m) pour trans-

former un champ dans l'espace latitude/longitude $Z(\theta, \phi)$ en coefficients d'harmoniques sphériques Ω_{lm} et inversement.

$$Z(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l \Omega_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.15)$$

5.2.2.2 Convolution sur la sphère

La convolution d'une fonction A par une fonction B dans l'espace cartésien consiste à translater B en tout point de l'espace en évaluant pour chaque point « le recouvrement » des deux fonctions. Ce concept ne se transpose pas naturellement aux sphères car la notion de translation sur une surface sphérique est ambiguë. En effet la rotation d'un objet sur la sphère appliquée aux coordonnées sphériques de chacun de ses points déforme les proportions de cet objet du fait de la singularité inévitable que constituent les pôles. Les seules fonctions qu'il est naturel de déplacer sur une sphère sont les fonctions dites « zonale ». Pour une telle fonction f , il existe un repère sphérique où l'expression de f ne dépend de la colatitude θ . Ces fonctions peuvent aisément être positionnées en un point quelconque M de la sphère. De fait, deux fonctions ne peuvent être convoluées simplement que si l'une d'entre elles (celle qui sera déplacée) est zonale. Cette restriction ne pose pas de problème dans notre cas puisque le noyau de $g(\theta, \phi)$ que nous souhaitons convoluer avec un bruit $\gamma_{\alpha}(\theta, \phi)$ est invariant par rotation. Il suffit donc de centrer g sur le pôle nord afin qu'il ne dépende que de la colatitude θ . La fonction $g(\theta)$ comme toute fonction sphérique peut se décomposer sur la base des harmoniques (voir section 1.2.2) :

$$g(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l \sigma_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.16)$$

L'invariance par rotation d'angle ϕ , entraîne que tous les coefficients des harmoniques d'ordre $m > 0$ sont nuls. La formule se simplifie :

$$g(\theta) = \sum \sigma_l Y_{l,0}(\theta, \phi) \quad (5.17)$$

Le bruit $\gamma_{\alpha}(\theta, \phi)$ peut lui aussi se décomposer sur la même base. Cette fois, tous les

coefficients (notés u_{lm}) sont non nuls :

$$\gamma_\alpha(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l u_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.18)$$

Nous disposons d'un résultat théorique pour convoluer $\gamma_\alpha(\theta, \phi)$ et $g(\theta)$. Par analogie avec l'analyse de Fourier, il suffit de multiplier les coefficients dans l'espace des harmoniques sphériques avec une pondération dépendante du degré (*Driscoll and Healy, 1994*) :

$$g(\theta) \star \gamma_\alpha(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sigma_l u_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.19)$$

Avec la formule 5.19, nous sommes donc en mesure d'effectuer des convolutions isotropes sur la sphère. Nous devons maintenant choisir correctement le noyau de convolution pour obtenir des statistiques multifractales universelles.

5.2.2.3 Noyau de convolution

Nous travaillons désormais sur une grille de latitude-longitude discrétisée avec un pas constant en radian dans les deux directions:

$$\delta\phi = \delta\theta = \frac{\pi}{N} \quad (5.20)$$

En notant N le nombre d'échantillon dans la direction Nord-Sud. Les deux directions sont discrétisées de la sorte : $\theta_i = \{\frac{\pi}{\lambda}, \frac{2\pi}{\lambda}, \frac{3\pi}{\lambda}; \dots, \pi\}$ et $\phi_i = \{0, \frac{\pi}{\lambda}, \frac{2\pi}{\lambda}; \dots, 2\pi\}$. Par analogie avec le cas $1D$, nous cherchons le noyau zonal $g(\theta_i)$ qui permettra à la quantité Q suivante de diverger logarithmiquement avec λ .

$$Q = \sum_{i,j} |g(\theta_i)|^\alpha \sin^\alpha(\theta) \delta\theta^\alpha \delta\phi^\alpha \quad (5.21)$$

Nous proposons de prendre :

$$g(\theta_i) = C \theta_i^{-\frac{1}{\alpha}} \sin^{-1} \theta_i \text{ entre } 0 \text{ et } \pi/2 \quad (5.22)$$

Ainsi :

$$Q = \sum_{i,j} \theta_i^{-1} \delta \theta^\alpha \delta \phi^\alpha = \delta \theta^{1-\alpha} \delta \phi^{1-\alpha} \sum_{i,j} \theta_i^{-1} \delta \theta \delta \phi \quad (5.23)$$

Comme tout à l'heure, la somme est une version discrète de l'intégrale :

$$2\pi \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\pi/2} \frac{1}{\theta} d\theta = 2\pi [\log \lambda]_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\pi/2} = 2\pi (\log \lambda - \log 2) \quad (5.24)$$

Le choix de g conduit bien à la dépendance logarithmique souhaitée. Pour introduire le paramètre C_1 , on ajuste la constante C :

$$C = C_1^{\frac{1}{\alpha}} (2\pi)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\pi}{N} \right)^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}} \quad (5.25)$$

Après l'exponentialisation du générateur, la deuxième convolution est implémentée de la même manière en utilisant le noyau zonal θ^{2-H} par analogie avec le cas $2D$ cartésien. Cette étape est moins sensible puisqu'elle n'exige aucune normalisation particulière

5.2.3 Validation

L'algorithme décrit précédemment a été implémenté sous MATLAB. Les convolutions sphériques ont chacune été validées sur des cas simples (exemple : convolutions de calottes sphériques). Les performances de l'algorithme global ont été testées en appliquant la procédure «trace moment» sur des exemples de champs synthétiques sphériques de taille 1000×2000 pour 3 valeurs de α (2.0, 1.9 et 1.7) :

1. On effectue $N = 30$ tirages T_i aléatoires différents (initialisation).
2. On calcule la 1ère convolution puis l'exponentialisation avec 20 valeurs de C_1 différentes échantillonnée de 0 à 0.3.
3. La cascade obtenue est analysée par la méthode «trace moment»

La figure 5.3 montre que les paramètres estimés sont identiques aux paramètres d'entrées avec une tolérance acceptable, dû au bruit numérique et au nombre limité d'échantillons.

5.3 Résultats

5.3.1 Représentation

Les champs générés par le modèle sont des cartes d'élévation avec un échantillonnage constant en latitude-longitude (voir exemple sur la figure 5.4). Pour illustrer les propriétés statistiques de ces champs, nous construisons des modèles 3D en représentant les variations d'altitude sur une sphère de rayon fixé. Par ailleurs, nous calculons les textures de reliefs ombrés en utilisant une direction d'éclairage fixe dans l'espace. Le corps synthétique est finalement visualisé en enveloppant les textures sur la surface 3D (voir figure 5.4). Ce traitement permet de vérifier l'adéquation des champs synthétiques à la géométrie souhaitée et met en évidence les variations locales de rugosité propres aux champs multifractals. Sur toutes les illustrations, la topographie est volontairement exagérée pour expliciter les propriétés du champ.

5.3.2 Quelques exemples

La figure 5.5 montre les effets d'une variation de H (interprétée ici comme « degré de lissage ») sur l'aspect global de la topographie ($\alpha = 1.9$ et $C_1 = 0.1$ constant). Les corps synthétiques ayant une faible valeur de H présentent peu de fluctuations d'altitude à grande échelle. Par conséquent leur forme se rapproche d'une sphère régulière avec une texture rugueuse à petite échelle. Quand H augmente, ce rapport tend à s'inverser : de larges variations d'altitudes dominent les grandes échelles en déformant le corps qui présente par ailleurs une texture plus lisse. Précisons que la déformation apparente des objets de la figure 5.5 n'est pas seulement liée à H . Elle résulte aussi de l'exagération de la topographie et du choix du rayon de base. Une planète peut avoir une valeur de H élevée et être sphérique en apparence. La figure 5.6 illustre les effets de la variation de C_1 ($\alpha = 1.9$ et $H = 0.5$ constant). Nous voyons que la codimension de la moyenne

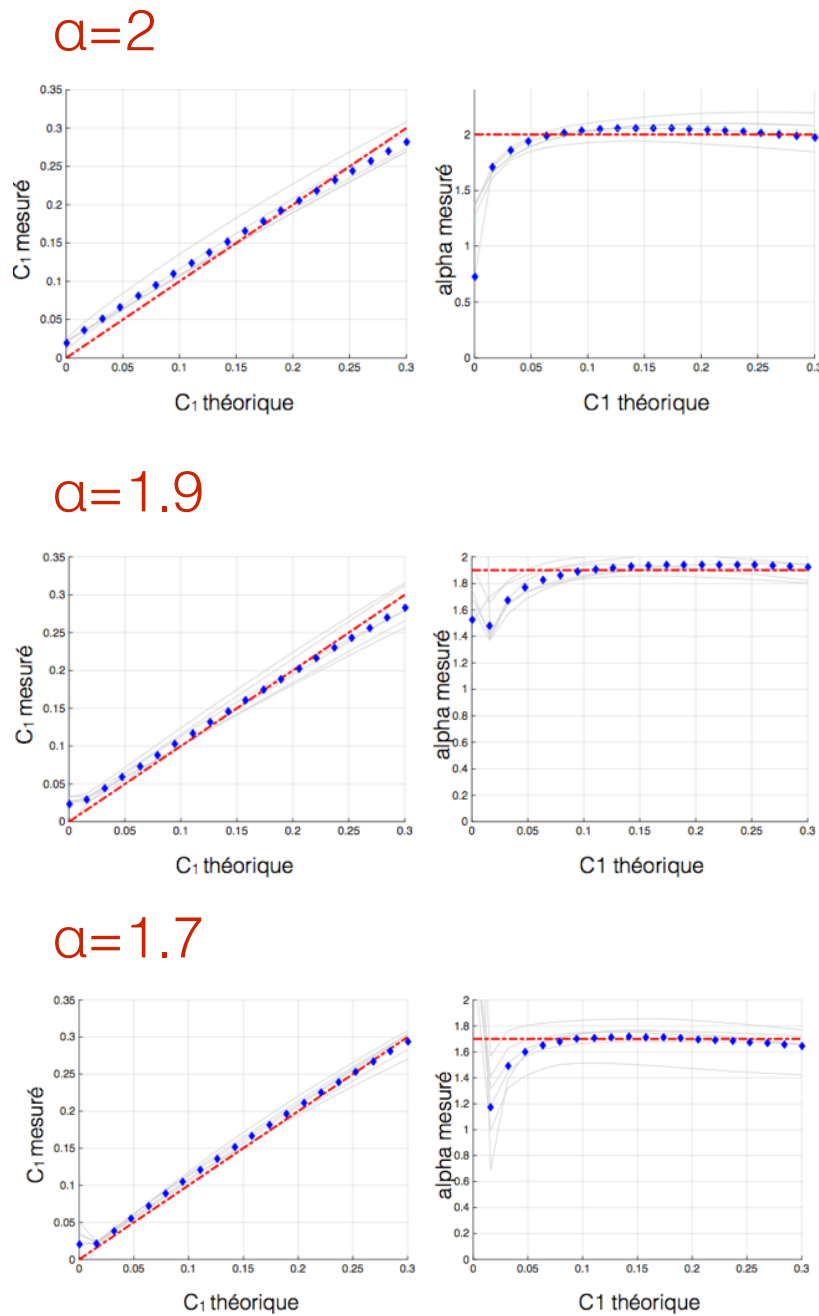


FIGURE 5.3 – Validation des performances de l’algorithme sphérique. La courbe rouge est la courbe théorique. Les courbes grise sont obtenues à partir de groupes de 8 tirages indépendants 1000×2000 . Chaque point gris est une estimation de C_1 (resp. α), obtenue après avoir regroupé pour chaque valeur théorique de C_1 les fluctuations d’un groupe de 8 tirages indépendants. Les losanges bleus représentent l’estimation de C_1 (resp. α) utilisant toutes les simulations disponibles (moyenne globale)

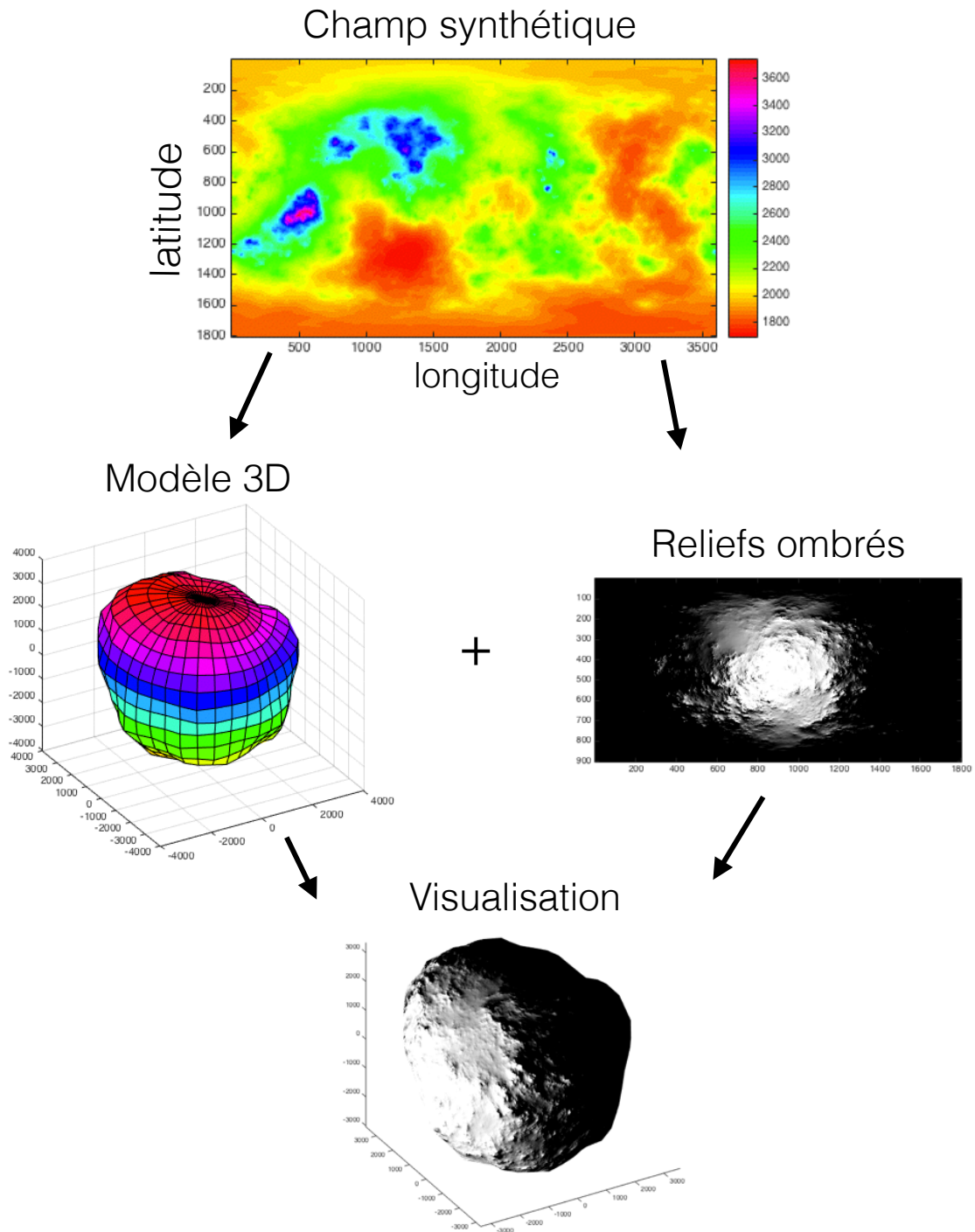


FIGURE 5.4 – Procédure permettant de visualiser en 3 dimensions les sorties du modèle de simulations sphériques. Les données d’élévations sont utilisées pour construire un modèle 3D. Les reliefs ombrés sont calculés puis enveloppés sur la surface 3D. Cette visualisation permet de mettre en évidence les variations locales de rugosité propres aux champs multifractals.

C_1 introduit de l'*intermittence* dans la rugosité locale. Quand $C_1 = 0$, la rugosité du champ est spatialement homogène avec une texture monotone sur toute la sphère. Au contraire la valeur $C_1 = 0.1$ entraîne la juxtaposition de zones lisses et rugueuses. Ces quelques exemples montrent le potentiel des simulations multifractales sphériques pour modéliser la forme de différents corps (planètes, astéroïdes, comètes...). Les exemples de la figure 5.5 présentent quelques artefacts à petite échelle (à peine visibles) qui sont la conséquence de problèmes numériques inhérents à l'algorithme de décomposition sur la base des harmoniques sphériques. Par ailleurs, la topographie synthétique est lissée à petite échelle avec une valeur de H biaisée sur environ un ordre de grandeur.

5.3.3 Distribution des océans/continents d'une exoplanète

Pour estimer les propriétés des surfaces d'exoplanètes synthétiques, nous avons effectué une analyse statistique des océans et des continents obtenue à partir de 500 champs topographiques multifractals simulés avec une résolution spatiale de 1° en utilisant le jeu de paramètres estimés sur la gamme des grandes échelles terrestres ($H = 0.5, \alpha = 1.7, C_1 = 0.1$). Afin d'étudier la proportion d'océans et de continents sur un relief synthétique, nous devons d'abord définir le niveau de la mer. Nous choisissons de le caractériser par un paramètre s (pour *sea level*) qui représente différents quantiles de la distribution des élévations. Par exemple, $s = 0.5$ est l'altitude médiane et $s = 0.9$ signifie que 90% de la surface est recouverte d'eau. Les océans et les continents sont respectivement définis comme des zones déconnectées situées au-dessous ou au-dessus du niveau de la mer s (Voir la figure 5.8 pour des exemples visuels).

Sur la figure 5.7, nous avons tracé la taille moyenne du plus grand continent et du plus grand océan en fonctions de s , sur les 500 échantillons. Nous constatons que les simulations produisent typiquement un grand océan ou un grand continent avec une taille proche de l'aire maximale disponible. Ce résultat signifie qu'il est improbable d'obtenir deux grandes zones déconnectées. Cependant, pour des valeurs très petites (respectivement très grandes) de s , la surface disponible est répartie entre plusieurs petits océans (respectivement petits continents). A titre de vérification, nous appliquons la même ana-

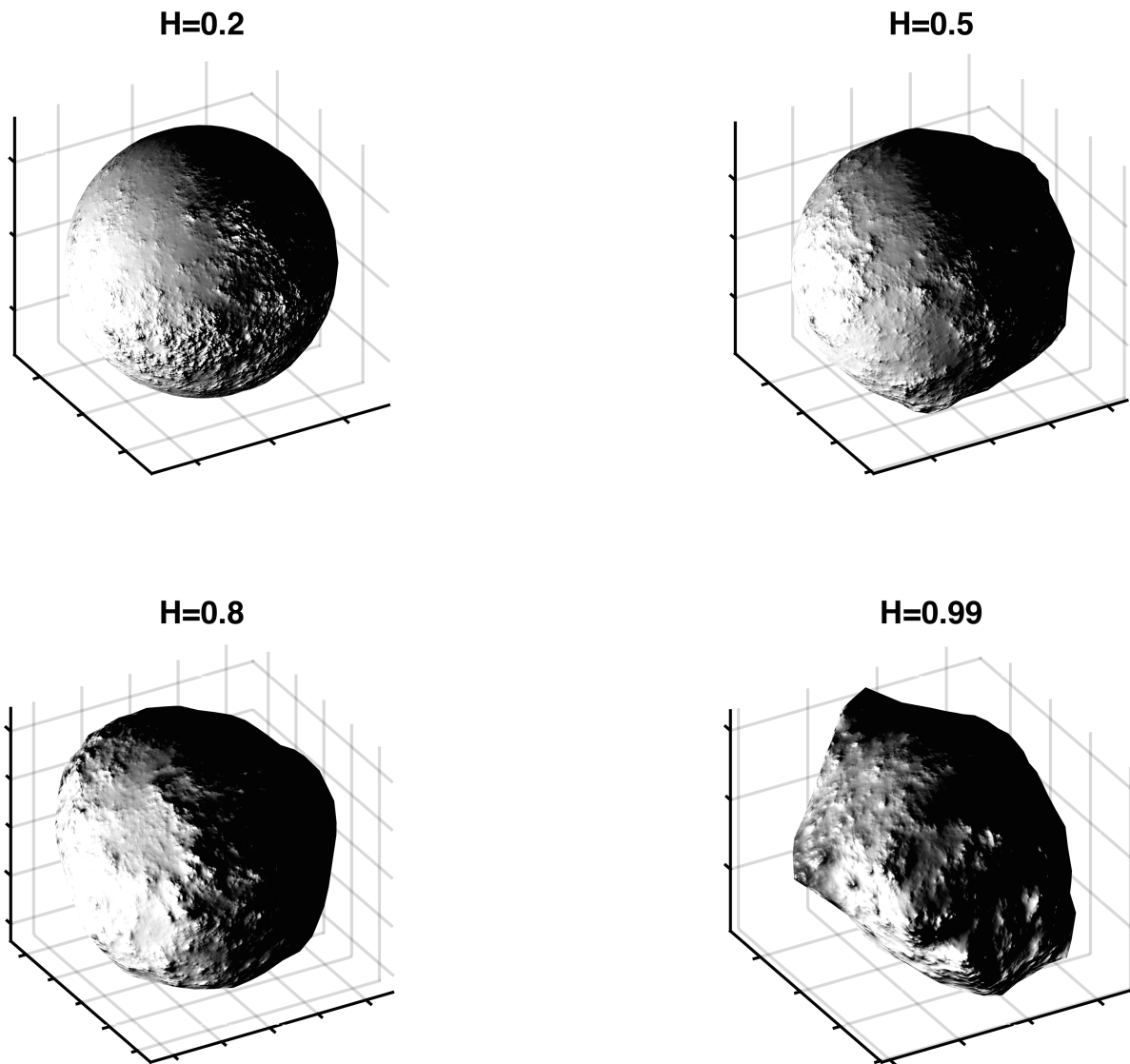


FIGURE 5.5 – Simulations sphériques 1800×3600 pour différentes valeurs de H ($\alpha = 1.9$ et $C = 0.1$ constants). H varie de 0.2 à 0.99. Les corps synthétiques ayant une faible valeur de H présentent peu de fluctuations d'altitude à grande échelle et sont rugueux à petite échelle. Par conséquent leur forme se rapproche d'une sphère régulière avec une texture rugueuse. Quand H augmente, ce rapport tend à s'inverser : de larges variations d'altitudes ressortent à grande échelle en déformant le corps qui présente par ailleurs une texture plus lisse.

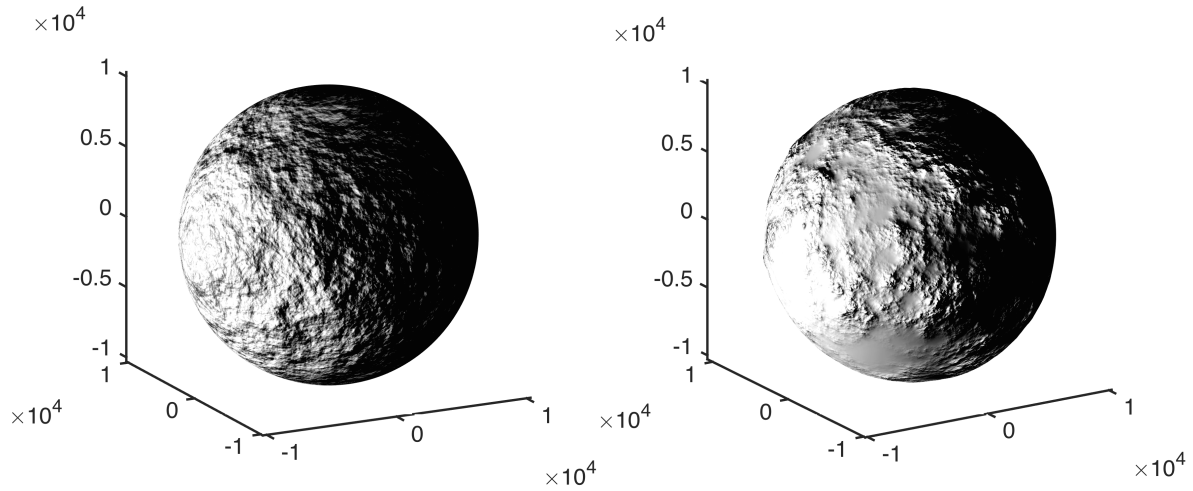


FIGURE 5.6 – Simulations sphériques 1800×3600 pour deux valeurs de C_1 ($\alpha = 1.9$ et $H = 0.5$ constants). De gauche à droite C_1 vaut 0 et 0.1. La simulation monofractale de gauche ($C_1 = 0$) est caractérisée par une rugosité spatialement homogène. Au contraire, la simulation multifractale de droite montre une alternance de zones lisses et rugueuses

lyse sur la topographie réelle de la Terre basée sur ETOPO1 (*Amante and Eakins, 2009*). Le point correspondant se positionne de manière satisfaisante à proximité de ceux obtenus par des simulations multifractales.

5.4 Conclusion et perspectives

Ces topographies numériques synthétiques pourront être intégrées au développement de simulations réalistes du climat d'exoplanètes dans différents contextes en intégrant les rôles des nuages et des interactions surface/atmosphère. En particulier, les exoplanètes en verrouillage gravitationnel sont soumises à des instabilités climatiques (*Kite et al., 2011*). Nos résultats suggèrent qu'il ne peut y avoir 2 océans majeurs non liés de chaque côté du globe. Si la face sombre est trop froide et la face éclairée trop chaude pour permettre la présence d'eau à l'état liquide, la topographie pourrait conduire à un glacier global, en chassant continuellement les éléments volatils de la face éclairée vers la face sombre. Cet état dynamique devrait augmenter considérablement la présence d'eau liquide au niveau du terminateur avec des conséquences sur l'habitabilité.

Par construction les propriétés statistiques de toutes nos simulations sont isotropes. La

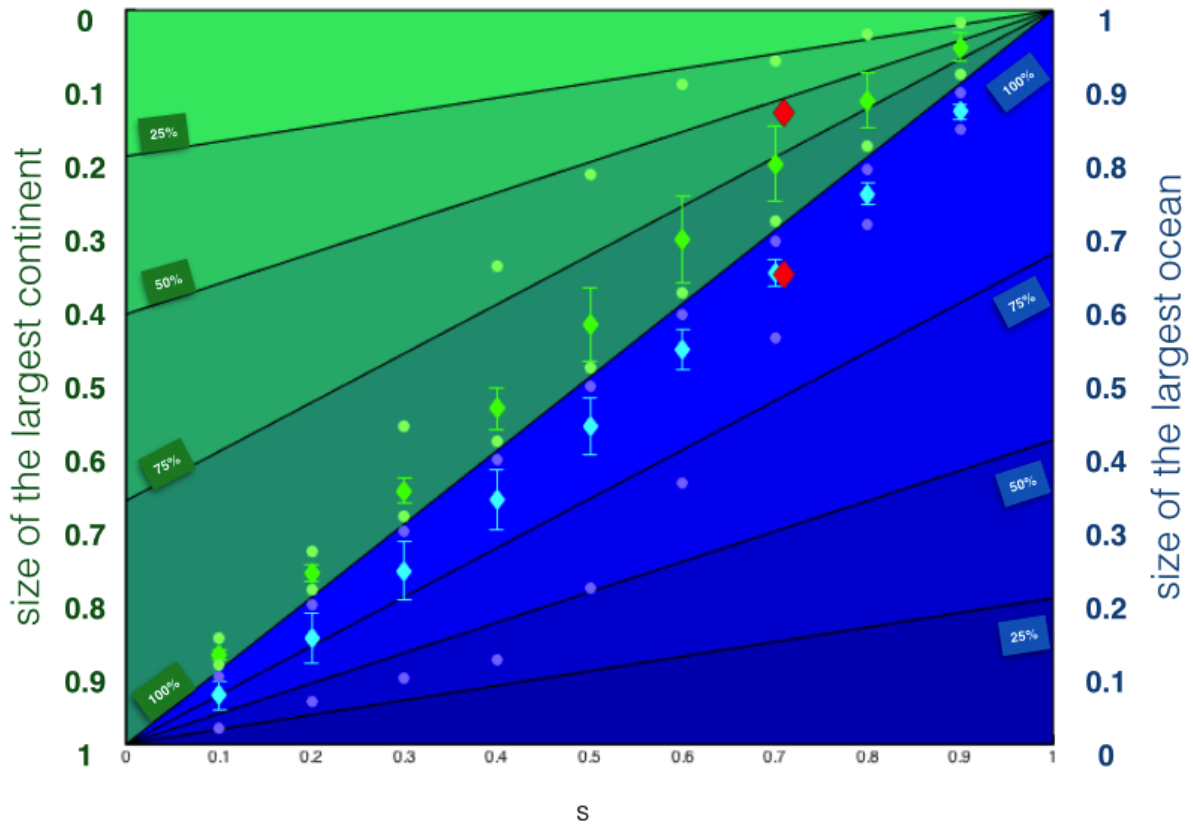


FIGURE 5.7 – Relation océan/continent. Taille (en proportion de la surface totale) du plus grand continent (resp. océan) pour différentes valeurs du niveau de la mer s . Les marqueurs bleu (resp. Vert) représentent les tailles moyennes et l'écart type, tandis que les cercles représentent la valeur minimale et maximale dans chaque cas. Les différentes lignes en bleu (respectivement vert) correspondent aux proportions de la superficie restante couverte par l'océan (respectivement continents). Ces résultats rassemblent les données de 500 topographies synthétiques multifractales sphériques avec le jeu de paramètre ($H = 0.5, \alpha = 1.9, C1 = 0.1$). Les diamants rouges représentent le cas de la Terre

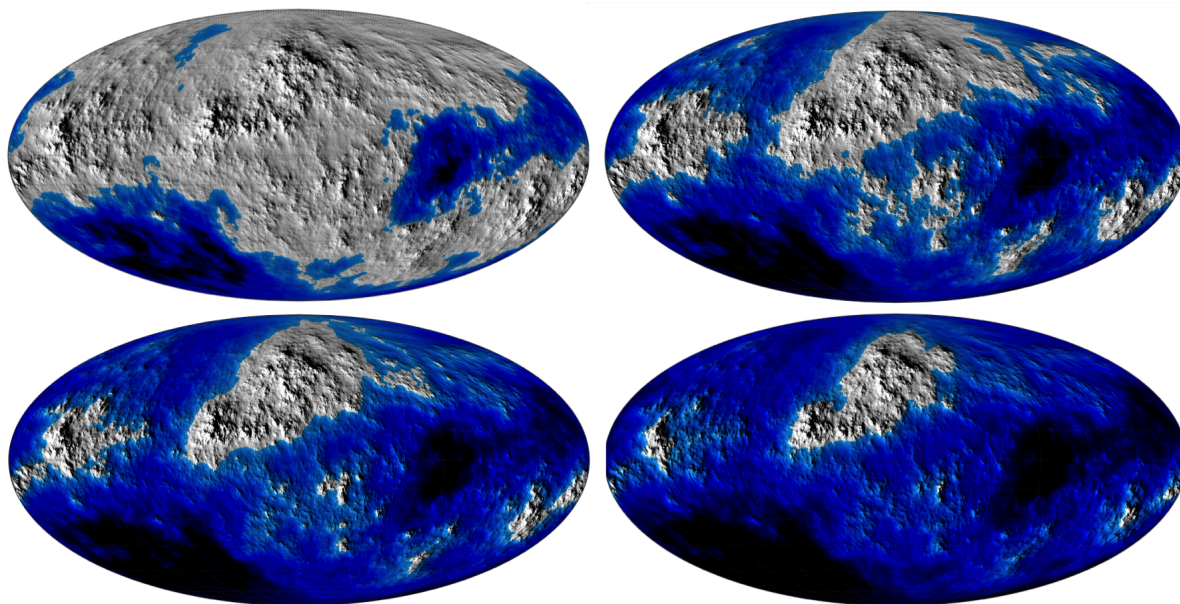


FIGURE 5.8 – Topographies synthétiques multifractales sphériques avec le jeu de paramètres ($H = 0.5, \alpha = 1.9, C_1 = 0.1$). La fraction de la surface couverte par l’océan s augmente progressivement.

procédure utilisée peut être modifiée pour générer des topographies anisotropes mais pose un certain nombre de problèmes techniques que nous n’avons pas encore traités. L’anisotropie ajoute des degrés de liberté qui rendent le problème plus complexe à la fois dans la génération mais aussi dans la détermination des paramètres sur les données réelles. Pour traiter cette question, nous avons envisagé d’adapter le formalisme de l’invariance d’échelle généralisée (GSI, *Schertzer, 2011*). Le principe général est d’introduire une anisotropie en modifiant la forme du noyau de convolution appliqué au bruit de Levy. Sa forme jusque là invariante par rotation est rendue plus complexe. Dans le cadre de ce formalisme très flexible, les propriétés statistiques ne sont plus symétriques par rotation mais conservent une symétrie généralisée par l’intermédiaire d’opérateurs de changement d’échelle plus complexes. Ces derniers peuvent être linéaires ou non-linéaires, offrant une large palette de comportement anisotrope avec relativement peu de paramètres additionnels. Nos tentatives pour transposer ce formalisme sur la sphère se sont heurtées aux contraintes de la convolution sphérique qui requiert un noyau isotrope. Nous avons cependant dégagé des pistes alternatives pour traiter ces questions techniques qui seront abordées dans une prochaine étude.

Chapitre 6

Synthèses et perspectives

Nous résumons dans ce chapitre les résultats obtenus et proposons également des perspectives de recherche à la lumière de nos conclusions. Nous avons confronté les jeux de données topographiques de La Terre, Mars, Venus, Mercure et la Lune au modèle multifractal à 3 paramètres (H, α, C_1) du flux fractionnairement intégré (FiF) sur une base globale, régionale et locale. Le cas de Mars a d'abord été étudié en détail pour évaluer l'impact de biais éventuels liés à la qualité des données et à la convergence statistique. Dans un second temps, deux méthodes d'analyses multifractales ont été systématiquement appliquées aux cartes topographiques des 5 corps à l'échelle globale. La première méthode (de Haar) repose sur la notion de fluctuation d'altitude que nous avons définie par l'intermédiaire des ondelettes de Haar. Elle permet une évaluation des paramètres H , α et C_1 . La seconde méthode «trace moment» se focalise sur les propriétés du flux sous-jacent identifié à une cascade multifractale et conduit à une nouvelle estimation de α et C_1 . Le modèle FiF n'est valable que si les deux méthodes conduisent à des estimations cohérentes. En résumé, l'utilisation des jeux de données disponibles nous a permis (1) d'étudier de manière transversale les propriétés statistiques des reliefs planétaires (2) de valider un modèle statistique multi-échelle (3) de proposer une méthode de simulation de topographie sphérique conforme au surface planétaire.

6.1 Synthèse des résultats

Le calcul des fluctuations de Haar a conduit à des estimations globales de H pour les 5 corps. Ce paramètre est parfois identifié à un degré de «lissage» dans la mesure où les surfaces associées à des grandes valeurs de H ont une apparence lisse (voir annexe page 191). Il s'agit toutefois d'une vision réductrice du rôle de H . Plus rigoureusement, il quantifie l'augmentation de la rugosité avec l'échelle. Pour chaque corps, nous avons constaté que l'évaluation des moments des fluctuations de Haar permet des estimations fiables de H à condition de distinguer deux gammes d'échelles avec une transition au voisinage de 10 – 20 kilomètres. Cette tendance se dessine clairement pour la Terre, Mars, Mercure et La Lune. La faible résolution des données disponibles pour Venus ne permet pas d'explorer les petites échelles et donc de trancher sur la présence d'un régime distinct pour $l < 10 - 20km$. A grande échelle, les estimations de H font ressortir deux groupes. D'un côté Mars, Venus et la Terre avec des valeurs de H voisines de $\sim 0.4 - 0.5$ et de l'autre Mercure et la Lune avec des valeurs beaucoup plus faibles (~ 0.2). Dans le cas de Lune, la corrélation linéaire n'est que faiblement satisfaisante. La valeur de H correspondante doit être considérée avec précaution. Sur la gamme $< 10 - 20km$, les estimations de H ne sont disponibles que pour la Terre, Mars, La Lune et Mercure et sont systématiquement plus élevées $\sim 0.8 - 0.9$.

Les topographies de La Terre, Mars et Vénus sont multifractales sur la gamme des grande échelles $> 10 - 20km$. Les deux méthodes conduisent à des estimations concordantes des paramètres $\alpha \sim 1.6 - 2$ et $C_1 \sim 0.1$. Par ordre croissant de multifractalité (α) et d'intermittence (C_1), nous trouvons : La Terre, Mars et Venus. Les cas de Mercure et la Lune sont plus ambigus. Les régressions (de moins bonne qualité) conduisent à des résultats sensiblement différents d'une méthode à l'autre. Nous trouvons néanmoins des propriétés multifractales pour ces deux corps mais nettement moins marquées que pour les grandes planètes. Sur la gamme des petites échelles ($l < 10 - 20km$), la méthode de Haar conduit systématiquement à des valeurs de C_1 proches de 0 (pas d'intermittence). L'hypothèse arbitraire sur la valeur de la puissance du flux ($a = 1$) considérée dans cette

étude pose un problème d'interprétation des résultats à petite échelle étant donné la valeur élevée de H (champ très fortement non conservatif) que nous aborderons dans une étude prochaine. Avec la méthode «trace moment», nous n'avons détecté aucun comportement spécial dans la gamme des petites échelles suggérant que les propriétés multifractales du flux sont stables sur pratiquement toute la gamme disponible.

Les jeux de données topographiques de la Lune et Mars sont suffisamment détaillés pour permettre de mener l'analyse multifractale sur une base régionale et locale. Nous avons estimé les paramètres (α, C_1) sur des quadrangles puis à l'aide d'une fenêtre glissante de $4^\circ \times 4^\circ$. Nous avons obtenu des variations locales des paramètres multifractals qui s'éloignent sensiblement des estimations globales. Cette diversité révèle la présence de processus de cascades hétérogènes sur la planète. Le comportement global, à l'instar la gaussienne du théorème central limite, semble être au mieux un comportement asymptotique. Ce résultat démontre l'hétérogénéité des propriétés statistiques des surfaces planétaires et appuie la nécessité d'analyser la topographie à l'échelle locale.

Nous avons implémenté et validé les performances d'un algorithme de simulation sphérique. Les topographies synthétiques générées par cette procédure sont des multifractales universelles statistiquement conforme aux topographies réelles des principaux corps sur la gamme des grandes échelles. Elles nous ont permis de réaliser une analyse statistique de la distribution des océans et continents d'une planète multifractale.

6.2 Interprétation

Des études précédentes (*Aharonson et al.*, 2001; *Nikora and Goring*, 2004) ont observé la même transition à 10 km sur le spectre de puissance de la topographie martienne. Notre contribution a permis de la généraliser aux principaux corps du système solaire. Dans le cas de Mars, l'interprétation suivante a été proposée pour expliquer ce phénomène : les impacts météoritiques très nombreux à la surface de Mars transmettent à la topographie son caractère fractal en générant des cratères dont la distribution en taille suit

une loi d'échelle (*Aharonson et al.*, 2001). Ce processus serait à l'origine de la forte valeur de H constatée à petite échelle. Les cratères de petites tailles étant statistiquement plus fréquents et constamment renouvelés, les petites échelles sont à l'équilibre statistique et reflètent pleinement le caractère (mono)fractal du processus. Au contraire, les impacts modifiant les grandes échelles sont rares. Les quelques exemples de grands bassins d'impacts sont peu nombreux et les structures associées sont érodées voir pratiquement effacées. Les grandes longueurs d'onde de la topographie ne reflètent donc pas seulement le processus de cratérisation mais la compétition de ce dernier avec les phénomènes de diffusion liés à l'érosion. Le domaine des grandes échelles peut alors être modélisé par le modèle diffusif de *Edwards and Wilkinson* (1982) qui prédit une décroissance quadratique de la densité spectrale de puissance ($\beta = 2$) compatible avec nos résultats. Cette hypothèse ne permet pas d'expliquer la structure multifractale des statistiques de Mars pour la gamme des grande échelles. Par ailleurs, les surfaces de la Lune et de Mercure sont largement dominées par le processus de cratérisation et peu exposées à l'érosion en l'absence d'atmosphère. La transition observée n'est donc pas imputable à ce processus. Sur Terre, la cratérisation n'est pas suffisamment active pour influencer les statistiques de la topographie à petites échelles. Le modèle n'est donc pas satisfaisant pour expliquer la similarité des comportements statistiques entre les différents corps mise en évidence par notre étude. Nous proposons une interprétation différente pour la transition constatée. L'épaisseur élastique de la lithosphère T_e contrôle la compensation isostatique des reliefs et est sensiblement identique pour les 5 corps. Les variations d'altitudes associées à des échelles inférieures à T_e ne sont pas compensées contrairement aux variations associées à des échelles supérieures T_e . Les deux régimes constatés pourraient être le reflet de cette grandeur caractéristique associée à la lithosphère. A petite échelle, les changement de topographie, comme les cratères (creux) ou les éjectas (bosses) ont un effet constructif (forte valeur de H). A grande échelle, la compensation isostatique a tendance à effacer les structures (faible valeur de H).

Le résultat principal de notre étude est que les 3 grandes planètes (Mars, Vénus et la

Terre) ont des topographies multifractales à grande échelle ($l > 10 - 20km$). A ce jour, aucun modèle physique n'est en mesure d'expliquer ce comportement. Les grandes longueurs d'onde de la topographie étant influencées par la dynamique interne des corps, la multifractalité pourrait être le reflet des mouvements de convection intenses dans le manteau. Ce phénomène, appelé « topographie dynamique » (*Ricard et al., 1984*), est susceptible de créer des intermittences à grande échelle de manière similaire aux processus atmosphériques. Cette interprétation est une piste à explorer pour expliquer la présence de propriétés multifractales sur Venus, Mars et La Terre dont l'activité interne est ou a été intense par opposition aux corps sans activité interne (Lune et Mercure).

6.3 Perspectives

Les travaux réalisés dans cette thèse peuvent donner lieu à deux champs d'application. Le premier consiste à développer et étayer les observations faites sur les différents corps afin d'apporter des éléments de réponses aux questions scientifiques fondamentales liées à la topographie qui touchent de manière transversale à la géologie et à la géophysique. Le second est plus technique et vise à tirer profit d'une connaissance optimale des propriétés statistiques des reliefs pour améliorer le traitement de données de télédétection (photogrammétrie, photométrie, spectroscopie, radar)

6.3.1 Géologie, géophysique

Le volume croissant de données disponibles devrait permettre prochainement d'étendre à d'autres corps le principe de l'analyse globale (Titan, Io, Pluton, comète 67P, Ceres, etc...). Le fait d'inclure ces nouveaux corps nous permettra de compléter cet exercice de planétologie comparée.

Nos résultats locaux concernant Mars et la Lune sont limités par la résolution des cartes topographiques résultant de mesures altimétriques. Les propriétés statistiques à des échelles inférieures pourront être explorées en appliquant des méthodes similaires sur des modèles

numériques de terrain locaux construits à partir d'images stéréoscopiques. En particulier, l'imageur CaSSIS de la mission Exomars/TGO (ESA) doté d'un bras articulé pour observer la même cible sous des angles différents devrait permettre de cartographier efficacement plusieurs zones de la topographie martienne avec une excellente résolution (5m). Grâce aux techniques photogrammétriques, il sera possible dès 2018 d'avoir accès en routine à des modèles numériques de terrains (MNT) de 10 m sur Mars. Les outils développés dans cette thèse seront facilement adaptables à l'étude de ces jeux de données et devraient permettre une meilleure compréhension des symétries d'échelle sur les petites longueurs d'onde en se focalisant sur des unités et des processus géologiques.

Certains jeux de données topographiques terrestres (acquis notamment par l'intermédiaire de drones) fournissent des observations locales dont la résolution est centimétrique, voir millimétrique. Ces données constitueront une base solide pour identifier l'effet de processus géologiques de manière ciblée (érosion, sédimentation, volcanisme, tectonique,...).

Notre hypothèse sur l'origine physique de la transition (épaisseur élastique de la lithosphère) sera testée en examinant l'échelle de transition sur une base régionale et locale. L'épaisseur élastique varie sensiblement à la surface d'une planète. Si notre hypothèse est juste, l'échelle de transition devrait être différente suivant le lieu considéré. L'étude des comportements locaux de la densité spectrale de la topographie martienne (*Nikora and Goring, 2004*) a révélé des transitions proches de 10km quelque soit la localisation. Nous verrons si la méthode de Haar conduit à des observations similaires.

Nous n'avons pas abordé dans ce manuscrit la question de l'anisotropie des propriétés statistiques de la topographie. Il est clair que certaines formations géologiques sont anisotropes (chaines de montagnes, canyon, failles). L'analyse globale des principaux corps n'est probablement pas influencée par la restriction à des profils Nord-Sud mais les analyses régionales sont potentiellement biaisées (notamment le quadrangle martien centré sur le système de canyon de Valles Marineris orientées Est-Ouest. Pour les analyses locales, nous avons pris soin de combiner les profils de longitude et de latitude dans chaque fenêtre mais cette méthode ne traite que partiellement la question de l'anisotropie. Plus

rigoureusement, les fonctions de structures angulaires peuvent être estimées en classant les fluctuations en fonction de leur orientation. En revanche la méthode de Haar est plus délicate à adapter pour cette finalité.

La compréhension de l'origine des propriétés multifractales de la topographie pourrait être améliorée en exploitant des données expérimentales de laboratoire. En effet, il est possible de créer des conditions reproductibles, de compétitions entre phénomènes simples bien quantifiés. Dans le cadre d'une étude préliminaire, nous avons entrepris pendant cette thèse une analyse statistique de topographies expérimentales obtenues en laboratoire (*Graveleau et al.*, 2008; *Bonnet and Crave*, 2003). Ces expériences visent à reproduire les morphologies naturelles qui résultent de la compétition entre érosion et processus tectoniques (surrection, compression). Plusieurs MNT expérimentaux sont générés en faisant varier les paramètres associés aux processus (taux de pluie, vitesse de surrection/compression). Les outils développés dans cette thèse ont été appliqués à ces modèles réduits de topographie pour estimer la valeur des paramètres H , α et C_1 à différents stades d'évolution des reliefs. Nos résultats préliminaires sont encourageants et suggèrent qu'il pourrait exister un lien entre l'état d'équilibre de la topographie et les propriétés multifractales du champ. Les propriétés statistiques du champ seraient multifractales pour une topographie hors-équilibre et monofractal quand l'état d'équilibre est atteint. Par ailleurs nous avons noté que les propriétés statistiques sont plus stables quand l'analyse est menée individuellement sur les bassins versants. Nous développerons prochainement cette étude qui vise à caractériser les stades d'évolution des reliefs à travers les propriétés statistiques de la topographie.

6.3.2 Télédétection

Nous pensons que les outils développés dans cette thèse pourront être déterminants dans le processus de validation de modèle numérique de terrain par photogrammétrie (notamment Exomars/Cassis). Compte tenu de la complexité et la lourdeur des techniques utilisées pour calculer un MNT à partir d'un couple d'images stéréoscopiques, il est diffi-

cile d'estimer de manière réaliste les erreurs/incertitudes sur le calcul de l'élévation. Nous avons validé dans cette thèse un cadre statistique très général pour les propriétés des surfaces naturelles. Comme nos résultats indiquent que les champs topographiques réels sont en général multifractals, nous proposons d'exploiter les propriétés statistiques du champ pour détecter et quantifier les éventuels artefacts générés par la procédure. Cette dernière pourrait provoquer des modifications de la valeur de H (lissage à petite échelle), une disparition ou une exagération des propriétés multifractales et d'intermittence. Nous sommes donc en mesure de proposer des nouveaux indicateurs de qualité de la construction de MNT, afin d'identifier les biais et d'améliorer les techniques.

La rugosité d'une surface influence la réflexion et la diffusion des ondes électromagnétiques sur une large gamme d'échelle. Par conséquent la complexité des surfaces naturelles rend difficile l'analyse des données de télédétection. Plusieurs modèles s'attachent à décrire la photométrie (la répartition de l'énergie diffusée dans plusieurs directions) de manière classique, à une échelle donnée. Par exemple, dans le modèle de Hapke (*Hapke*, 1984), surtout utilisé dans le domaine visible/proche infrarouge, la tangente des angles θ entre la normale aux facettes et la direction verticale est supposée suivre une distribution gaussienne. Dans le cas d'une topographie multifractale, les statistiques de θ suivent une distribution log-levy suggérant que l'hypothèse de rugosité du modèle Hapke est incorrecte. La nature fractale de la topographie est habituellement prise en compte pour l'exploitation des mesures radar par l'intermédiaire du paramètre H (*Shepard et al.*, 2001; *Orosei et al.*, 2003). En revanche, la nature multifractale et intermittente de la distribution des pentes est généralement ignorée. Nous avons démontré que le cadre multifractal universel est le plus à même de décrire la rugosité d'une surface. Partant de ce postulat, les simulations multifractales du FiF peuvent être mise à contribution pour évaluer l'influence de différents types de topographie sur les statistiques des ombres projetées et les réflexions multiples d'une surface naturelle. Dans une prochaine étude, nous souhaitons appliquer les procédures de ray-tracing à des surfaces synthétiques FiF pour déterminer l'impact des propriétés multifractales sur la réflexion et la diffusion des rayons lumineux. Les conclu-

sions de cette étude devraient permettre de prédire de manière plus réaliste la photométrie d'une surface naturelle.

Enfin, les simulations multifractales sphériques paramétrées par H , α et C_1 sont aptes à reproduire de manière statistiques la morphologie de corps très divers (planètes, astéroïdes, comètes). En particulier, elle offrent un large terrain d'investigation pour évaluer le rôle potentiel de la topographie dans le signal provenant d'une exoplanète. Elles serviront de point de départ à de futures études visant à caractériser la réponse photométrique globale des corps non résolus en rotation, couplées à des hypothèses réalistes sur leurs climat et la présence éventuelle d'océan en surface.

CHAPITRE 6. SYNTHÈSES ET PERSPECTIVES

Annexe : Illustration du FiF

Le modèle du Flux Fractionnement Intégré (FiF) résulte de l'intégration fractionnaire d'une cascade multifractale (*Schertzer and Lovejoy 1987; Kida 1991; Schmitt et al. 1992a; Schertzer et al. 1997*, voir section 2.4.2). Les 3 paramètres du modèle H (degré de lissage entre 0 et 1), C_1 (degré d'intermittence > 0) et α (degré de multifractalité entre 0 et 2) offrent un large éventail de configuration possible. Nous donnons dans ce chapitre un aperçu de la diversité des surfaces synthétiques résultant de ce modèle. La procédure que nous avons rappelé dans la section 5.2.1 est appliquée pour générer des champs 1000×1000 en faisant varier les 3 paramètres. Les reliefs ombrés sont calculées et représentés pour visualiser les variations de rugosité.

Variation de H , degré de lissage

Le paramètre H (figure 6.1) est l'ordre d'intégration fractionnaire de la cascade multifractale. Il contrôle le comportement d'échelle de la moyenne des fluctuations. Quand $H \rightarrow 0$, les différences d'altitude sont indépendantes de l'échelle. Le champ oscille rapidement autour de la valeur moyenne. Plus la valeur de H est élevée, plus le champ a une «mémoire à long-terme». Le sens de variation se maintient sur de grandes distances et donne au champ un aspect plus lisse. Plus qu'un degré de lissage, H quantifie l'augmentation de la rugosité avec l'échelle.

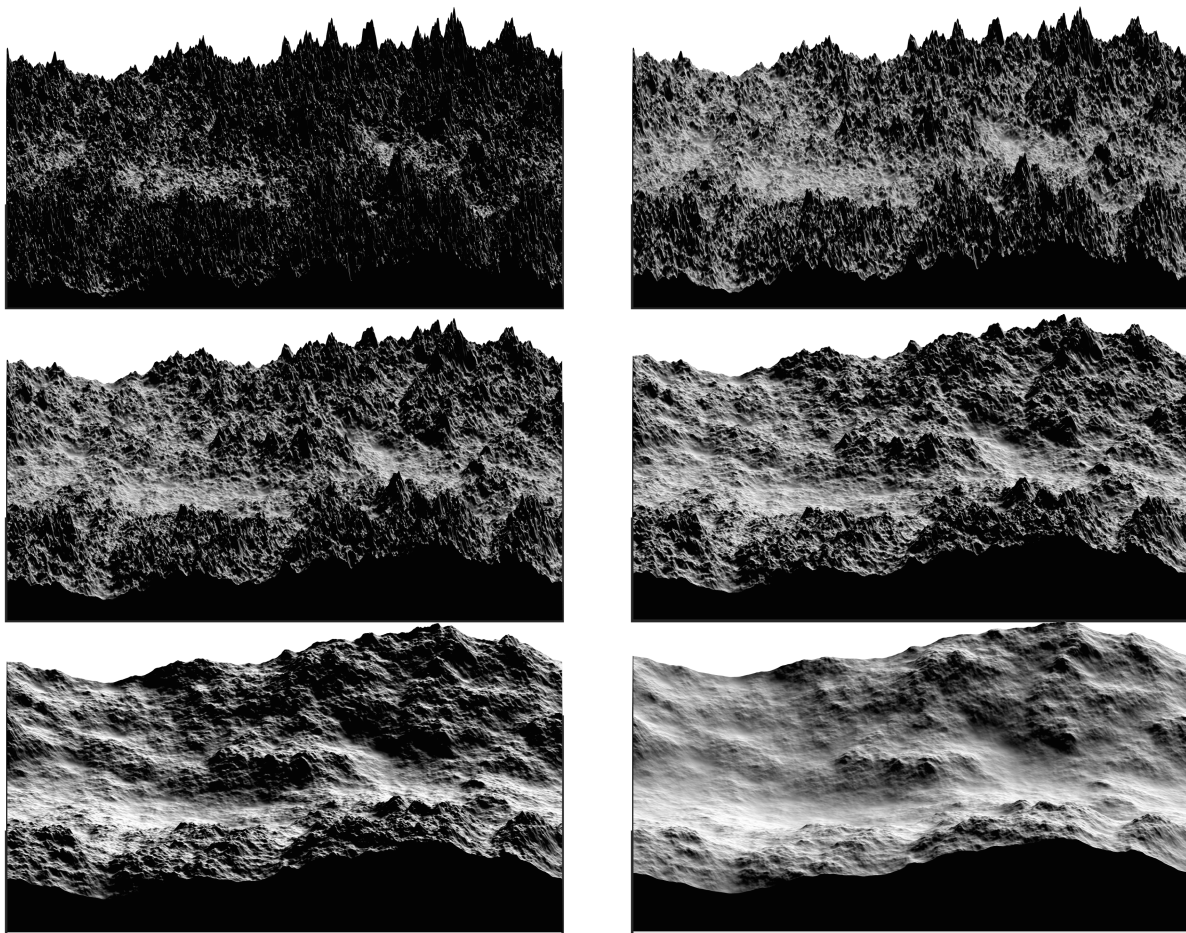


FIGURE 6.1 – Effet d'une variation de H sur une topographie synthétique FIF. De gauche à droite et de haut en bas : $H = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1 , du plus rugueux vers le plus lisse. $C_1 = 0.05$ et $\alpha = 2$.

Variation de C_1 , degré d'intermittence

Le paramètre C_1 contrôle l'intermittence du champ (figure 6.2). Dans le cas particulier $C_1 = 0$, la rugosité est spatialement homogène. Le champ définit alors une figure fractale géométrique similaire à un fBm. Quand C_1 augmente, des zones lisses et des zones rugueuses alternent. Quand C_1 est très élevée, la moyenne des fluctuations est dominée par quelques pentes extrêmes très localisées

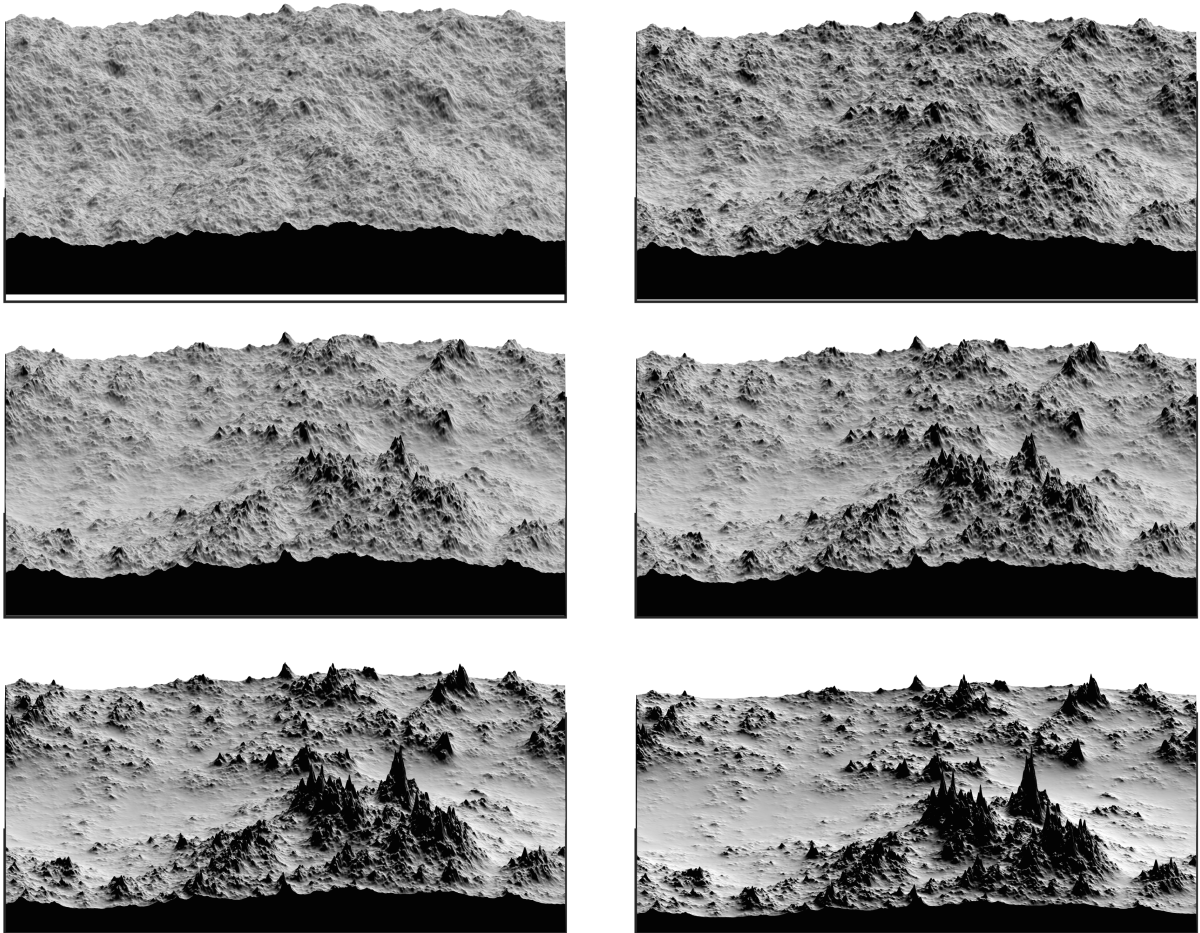


FIGURE 6.2 – Effet d'une variation de C_1 sur une topographie synthétique FIF. De gauche à droite et de haut en bas : $C_1 = 0, 0.03, 0.05, 0.75, 0.1$ et 0.15 , du moins intermittent vers le plus intermittent. $\alpha = 2$ et $H = 0.7$.

Variation de α , degré de multifractalité

Le paramètre α (figure 6.3) confère au champ ses propriétés multifractales. Plus sa valeur est élevée, plus la hiérarchie des valeurs extrêmes est complexe. Quand $\alpha = 2$ (la valeur

ANNEXE

maximale permise), le champ présente des reliefs de hauteurs variables dont la diversité reflète la multiplicité des dimensions fractales associées à chaque seuil d'altitude. Quand $\alpha < 2$, cette diversité tend à se simplifier avec des sommets dont la hauteur est semblable (homogénéisation des valeurs extrêmes).

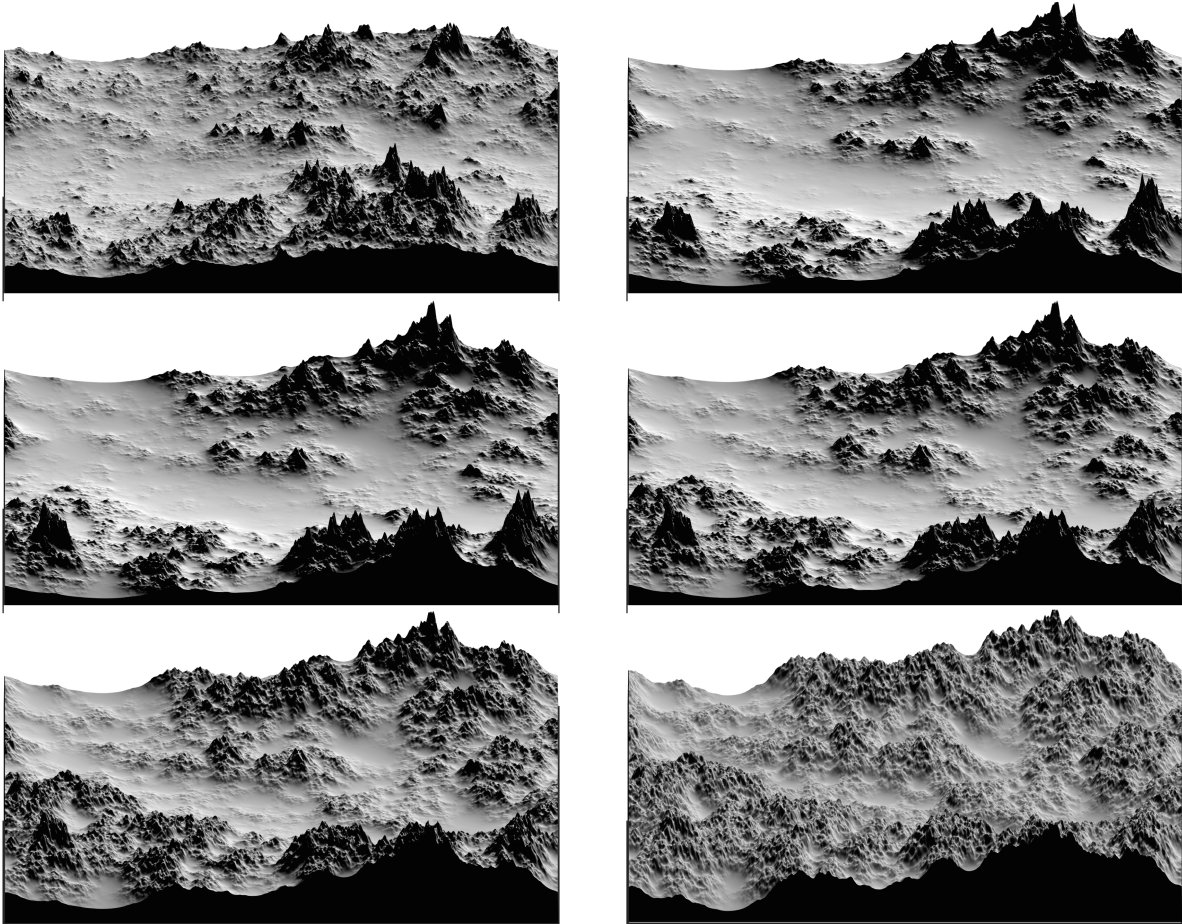


FIGURE 6.3 – Effet d'une variation de α sur une topographie synthétique FIF. De gauche à droite et de haut en bas : $\alpha = 2, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2$ et 1.01 , du plus multifractal vers le moins multifractal. $C_1 = 0.1$ et $H = 0.7$.

Table des figures

1.1	Processus participant à la création des reliefs à la surface d'une planète . . .	21
1.2	Topographie de Gabilan Mesa, Californie et analyse statistique des pentes en fonction de l'aire drainée (reproduit depuis (<i>Sweeney et al.</i> , 2015)). Le graphe de droite fait ressortir deux régimes correspondant à la compétition entre phénomènes advectifs et diffusifs et l'échelle caractéristique de transition entre l'aspect convexe des crêtes et l'aspect concave des vallées. . .	23
1.3	Analyse de la relation entre la pente locale et l'aire drainée de trois topographies qui diffèrent principalement par la présence ou l'absence de végétation (reproduite depuis <i>Dietrich and Perron</i> 2006)	25
1.4	Conformité topographique pour 3 corps du système solaire. Le cas de la Terre fait figure d'exception. Voir <i>Black et al.</i> (2017) pour les détails de la définition de l'indicateur.	29
1.5	définition de la latitude	31
1.6	Définition de la topographie	33
1.7	Représentation des harmoniques sphériques surfaciques pour les premiers degrés (jusqu'à $l = 3$). L'alternance de couleurs rouge, bleue et blanche montre les maxima, minima et passages à zéro de ces fonctions enveloppées sur une sphère.	35
1.8	Principe de l'altimétrie laser ou radar	37
1.9	Schéma de principe des 3 méthodes indirectes (Clinométrie, (photo)grammétrie, interférométrie) permettant d'estimer le relief à partir d'images (optique ou radar).	37

ANNEXE

1.10	Anomalies à l'air libre et géoïde terrestre.	39
1.11	Topographie globale de la Terre en mètres (ETOPO1, <i>Amante and Eakins</i> , 2009)	40
1.12	Anomalies à l'air libre et géoïde de Mars.	41
1.13	Topographie de Mars en km calculée à partir des mesures de la forme de Mars par MOLA (<i>Smith et al.</i> , 2001b) et du modèle de géoïde martien mgm1025 (<i>Lemoine et al.</i> , 2001).	42
1.14	Anomalies à l'air libre et géoïde de la Lune.	43
1.15	Topographie de la Lune en kilomètres, calculée à partir des mesures de la forme de la Lune par LOLA (<i>Smith et al.</i> , 2010) et du modèle de Géoïde lunaire LP150Q	44
1.16	Anomalies à l'air libre et géoïde de Vénus.	46
1.17	Topographie de Venus en mètres (voir (<i>Ford et al.</i> , 2014))	46
1.18	Anomalies à l'air libre et géoïde de Mercure.	47
1.19	Topographie globale de Mercure en mètres (<i>Solomon et al.</i> , 2001; <i>Hawkins</i> <i>et al.</i> , 2007).	47
1.20	Indicateurs locaux.	50
1.21	Etudes terrestre de densité spectrale de puissance	53
1.22	Analyse comparative des corps du système solaire	54
1.23	Etudes terrestres de densité spectrale de puissance	56
1.24	Etudes terrestres de densité spectrale de puissance	57
2.1	Flocon de KOCH	61
2.2	Poussière de Cantor	62
2.3	Lois d'échelle de <i>Richardson</i> (1961).	64

2.4 Triangle de Serpinsky et box counting. Cette figure est définie de manière itérative à partir d'un triangle équilatéral initialement plein. Dans un premier temps, une portion triangulaire de côté 2 fois inférieur est enlevée au centre du grand triangle. Puis à chaque itération cette opération est répétée sur les portions triangulaires restantes. Le rapport d'homothétie étant clairement défini ($r = 1/2$) de même que le nombre d'homothétie par itération ($N = 3$), la dimension fractale d'homothétie est $\ln(3)/\ln(2) \approx 1.58$. Il est également possible d'évaluer la dimension de « box-counting » : il faut un seul carré pour couvrir la figure initiale, 3 carrés 2 fois plus petits pour couvrir la 1ère itération, 12 carrés 4 fois plus petits pour le seconde itération. Le rapport de la définition 2.6 est donc égal à $\ln(3)/\ln(2)$. On retrouve la dimension d'homothétie. 67

2.5 Flocon de Koch aléatoire 68

2.6 Exemple de roches présentant des motifs similaires malgré la différence d'échelle. 70

2.7 Architecture fractale d'un réseau d'écoulement ancien à la surface de Mars 72

2.8 Aspect fractal du processus de cratérisation sur la Lune (détails à toutes les échelles et loi d'échelle sur la distribution des cratères) 73

2.9 Illustration de la méthode par comptage de boîte applicable à un champ topographique. A ε fixé, on compte le nombre de boîtes qui interceptent la surface 3D. Le comptage doit être effectué pour différentes valeurs de ε . 75

2.10 Exemple de réalisation 1D du fBm pour différentes valeurs de l'exposant de Hurst. Plus la valeur de H est élevée, plus la courbe est lisse (mémoire à long terme) (*Mandelbrot and Ness, 1968*) 77

2.11 Exemple d'un champ topographique fractal 2D générée par la méthode fBm (*Mandelbrot and Ness, 1968*) 78

2.12 Formation de vortex turbulents dans l'atmosphère au-dessus des côtes africaines 80

ANNEXE

2.13	Implémentation du modèle β (<i>Mandelbrot, 1974; Frisch et al., 1978</i>) pour plusieurs valeurs de codimensions fractales (c varie de 0 à 0.9). La hauteur des rectangles modélise l'énergie répartie dans les vortex au fil des itérations. Plus c est élevé, plus le support du champ final est clairsemé. La codimension c détermine la dimension fractale du support de la cascade ($D = 2 - c$)	80
2.14	Implémentation du modèle α (<i>Schertzer and Lovejoy, 1984</i>) avec $c = 1.2$ et γ^+ variant de 0.2 à 1.1. La hauteur des rectangles modélise l'énergie ϕ_n^{ij} répartie dans les vortex au fil des itérations. Plus γ^+ est élevé, plus le support du champ final présente des valeurs extrêmes (intermittence).	84
2.15	Illustration des propriétés d'un champ topographique multifractal respectant l'équation 2.42	88
2.16	Exemple de champ topographique multifractal généré par la méthode du FIF (<i>Schertzer and Lovejoy, 1987; Schmitt et al., 1992a; Schertzer et al., 1997</i>). On constate que certaines zones sont lisses et d'autres rugueuses (intermittence). A chaque niveau d'altitude correspond une dimension fractale différente.	92
2.17	Exemple de champ topographique multifractal généré à partir d'une marche aléatoire multifractale (<i>Schmitt and Marsan, 2001; Barral and Mandelbrot, 2002</i>). La valeur de H est 0.8. Le paramètre de multifractalité est choisi pour correspondre à $C_1 = 0.1$ dans le cas de <i>FiF</i> (Le paramètre α du FIF n'a pas d'équivalent). Comme dans le cas du FIF on note l'alternance de zones lisses et rugueuses.	93
3.1	méthodes du <i>compas</i> et <i>comptage de boites</i>	100
3.2	Variogramme	102
3.3	Exposant de Hurst par la méthode du variogramme	103

3.4 Topographie d’une région de Mars (Daedalia Planum, *Smith et al.* (2001b)) et le flux dans la direction des longitudes. Le flux révèle la présence de comportements locaux extrêmes qui n’ont pas d’interprétation possible dans le cadre géométrique des fractals 105

3.5 Topographie d’une quadrangle de la Lune (*Smith et al.*, 2010) et le flux dans la direction de longitude. Le flux est homogène, indiquant que la topographie lunaire sur ce quadrangle pourrait être statistiquement décrite par un mouvement brownien fractionnaire 106

3.6 Pour comparaison : topographie synthétique fBm avec $H = 0.7$ et le flux dans la direction x. 106

3.7 Pour comparaison : topographie synthétique FIF avec $H = 0.7$, $C_1 = 0.1$, $\alpha = 1.7$ et le flux dans la direction x. 107

3.8 Etude multifractale de la topographie terrestre, reproduit depuis *Gagnon et al.* (2006) 110

4.1 Exemple de trajectoire MOLA parcourant plusieurs fois la circonférence de Mars. Le laser balaye la surface dans la direction Nord/Sud. Seules les latitude supérieures (resp. inférieure) à 88° (resp. -88°) ne sont pas couvertes. Le profil complet fait ressortir des trous récurrents (ici au pôle sud) imputables à la présence occasionnelle de nuages. La base de donnée MOLA contient ~ 770 profils semblables à celui-ci. 118

4.2 Nombre moyen de mesures altimétriques de l’instrument MOLA par unité de longitude dans des bandes de latitudes de largeur 0.5° . On constate qu’il est approximativement constant. Aux voisinages proches des pôles, l’augmentation notoire de la densité s’explique par la trajectoire tangentielle du satellite aux latitudes $\mp 88^\circ$. La correction de densité présentée dans le paragraphe 4.3.4 ne prend pas en compte cet effet. 120

4.3 Traitement de l’irrégularité MOLA 123

ANNEXE

4.4	Analyse globale de Mars. Comparaison entre les moments d'ordre 1 et 2 des fluctuations de Haar et les fonctions structures d'ordre 1 et 2 appliquée directement sur les traces MOLA	125
4.5	Analyse globale de Mars par la méthode de Haar	128
4.6	Analyse multifractale de la topographie de Mars sur la gamme des grandes échelles ($> 10 - 20km$). Estimation des paramètres multifractals universels par régression bayésienne. Les histogrammes représentent la distribution de probabilité de chaque paramètre pour les deux méthodes. Le jeu de paramètres le plus probable est donné dans la table 4.3. Les graphes de droite représentent les exposants d'échelle empiriques superposés à la courbe de régression obtenue en prenant le jeu de paramètre le plus probable	131
4.7	Mars : densité spectrale et comparaisons trace/carte.	133
4.8	Analyse du flux de la topographie martienne	137
4.9	Moyenne et moment d'ordre 2 des fluctuations de Haar de la topographie (moments d'ordre 1 et 2) pour différents corps du système solaire. Le moment d'ordre 1 (resp. ordre 2) est en m (resp. m^2)	139
4.10	Estimations des la fonction des exposants d'échelle $\xi(q)$ pour les deux gammes (inférieur et supérieur à $10 - 20$ km)	142
4.11	Estimations des moments statistiques d'ordres 0.3, 0.5, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 et 1.9 du flux à différentes résolutions pour les 5 corps analysés	144
4.12	Fonctions des exposants d'échelle du flux obtenues par régression linéaire des moments d'ordres 0.3, 0.5, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 et 1.9 pour les 5 corps étudiés. Les exposants empiriques sont représentés par des losanges. Les traits pleins correspondent au meilleur modèle déterminé par inversion bayésienne.	145
4.13	Schéma de l'effet de la compensation isostasique sur la topographie. Les valeurs de H ont été exagérées pour faciliter la compréhension. Selon notre hypothèse, les deux régimes sont séparés par l'échelle correspondant à l'épaisseur élastique de la lithosphère.	148

4.14 Graphe récapitulatif des paramètres multifractals de la topographie de la Terre, Mars, Vénus, Mercure et la Lune, obtenus par différentes méthodes . 149

4.15 Exemple de champ topographique local 1024×1024 (soit 41 kilomètres) extrait à partir de la base données LOLA. Le graphe de droite montre l'estimation de plusieurs moments empiriques du flux Nord-Sud. 153

4.16 Distribution des valeurs locales de α et C_1 pour Mars et la Lune. Les estimations globales de ces deux paramètres par la méthode « trace moment » sont rappelées sur le graphe. 154

4.17 Mars : Estimations de 7 moments statistiques d'ordre $q = \{0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7\}$ du flux Nord-Sud de la topographie martienne dans 28 quadrangles compris entre -65° et 65° de latitude. Pour chaque quadrangle, les paramètres multifractals sont estimés et reportés sur la figure. En plus de α et C_1 , nous donnons la valeur L_{out} de l'échelle externe qui correspond à l'identification de la plus grande échelle de la cascade. Il s'agit du point de convergence entre tous les moments empiriques. 156

4.18 Lune : Estimations de 7 moments statistiques d'ordre $q = \{0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7\}$ du flux Nord-Sud de la topographie lunaire dans 28 quadrangles compris entre -65° et 65° de latitude. Pour chaque quadrangle, les paramètres multifractals sont estimés et reportés sur la figure. En plus de α et C_1 , nous donnons la valeur L_{out} de l'échelle externe qui correspond à l'identification de la plus grande échelle de la cascade. Il s'agit du point de convergence entre tous les moments empiriques. 157

4.19 Mars : variations régionales des paramètre multifractals estimées à partir des moments de la figure 4.17. 158

4.20 Lune : variations régionales des paramètres multifractals estimées à partir des moments de la figure 4.18. 158

4.21 Mars : Estimation locales de la valeur des paramètres multifractals universels. L'analyse est effectuée à partir des cartes MOLA avec un fenêtrage glissant de 512×512 points ($4^\circ \times 4^\circ$) et un pas de 128 points (1°). On obtient une carte de 173×360 estimations de la codimension C_1 représentée en utilisant la projection elliptique de *Mollweide*. Chaque estimation est issue d'une régression bayésienne. 159

4.22 Lune : estimations locales de la valeur des paramètres multifractals universels. L'analyse est effectuée à partir des cartes MOLA avec un fenêtrage glissant de 1024×1024 points ($4^\circ \times 4^\circ$) et un pas de 256 points (1°). On obtient une carte de 180×360 estimations de la codimension C_1 et du degré de multifractalité α représentée en utilisant la projection elliptique de *Mollweide*. Chaque estimation est issue d'une régression bayésienne. . . 160

5.1 Exemple à 1D de variables aléatoires gaussiennes ($\alpha=2$) et de Levy ($\alpha=1.7$). Contrairement aux variables gaussiennes, les variables de Levy ont des valeurs extrêmes. 164

5.2 Noyau de convolution ou singularité pour le FIF 1D. Le choix de C est déterminant. 166

5.3 Validation des performances de l'algorithme sphérique. La courbe rouge est la courbe théorique. Les courbes grises sont obtenues à partir de groupes de 8 tirages indépendants 1000×2000 . Chaque point gris est une estimation de C_1 (resp. α), obtenue après avoir regroupé pour chaque valeur théorique de C_1 les fluctuations d'un groupe de 8 tirages indépendants. Les losanges bleus représentent l'estimation de C_1 (resp. α) utilisant toutes les simulations disponibles (moyenne globale) 173

5.4 Procédure permettant de visualiser en 3 dimensions les sorties du modèle de simulations sphériques. Les données d'élévations sont utilisées pour construire un modèle 3D. Les reliefs ombrés sont calculés puis enveloppés sur la surface 3D. Cette visualisation permet de mettre en évidence les variations locales de rugosité propres au champs multifractals. 174

5.5 Simulations sphériques 1800×3600 pour différentes valeurs de H ($\alpha = 1.9$ et $C = 0.1$ constants). H varie de 0.2 à 0.99. Les corps synthétiques ayant une faible valeur de H présentent peu de fluctuations d'altitude à grande échelle et sont rugueux à petite échelle. Par conséquent leur forme se rapproche d'une sphère régulière avec une texture rugueuse. Quand H augmente, ce rapport tend à s'inverser : de larges variations d'altitudes ressortent à grande échelle en déformant le corps qui présente par ailleurs une texture plus lisse. 176

5.6 Simulations sphériques 1800×3600 pour deux valeurs de C_1 ($\alpha = 1.9$ et $H = 0.5$ constants). De gauche à droite C_1 vaut 0 et 0.1. La simulation monofractale de gauche ($C_1 = 0$) est caractérisée par une rugosité spatialement homogène. Au contraire, la simulation multifractale de droite montre une alternance de zones lisses et rugueuses 177

5.7 Relation océan/continent. Taille (en proportion de la surface totale) du plus grand continent (resp. océan) pour différentes valeurs du niveau de la mer s . Les marqueurs bleu (resp. Vert) représentent les tailles moyennes et l'écart type, tandis que les cercles représentent la valeur minimale et maximale dans chaque cas. Les différentes lignes en bleu (respectivement vert) correspondent aux proportions de la superficie restante couverte par l'océan (respectivement continents). Ces résultats rassemblent les données de 500 topographies synthétiques multifractales sphériques avec le jeu de paramètre ($H = 0.5, \alpha = 1.9, C_1 = 0.1$). Les diamants rouges représentent le cas de la Terre 178

ANNEXE

- 5.8 Topographies synthétiques multifractales sphériques avec le jeu de paramètres ($H = 0.5, \alpha = 1.9, C_1 = 0.1$). La fraction de la surface couverte par l'océan s augmente progressivement. 179
- 6.1 Effet d'une variation de H sur une topographie synthétique FIF. De gauche à droite et de haut en bas : $H = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1 , du plus rugueux vers le plus lisse. $C_1 = 0.05$ et $\alpha = 2$ 192
- 6.2 Effet d'une variation de C_1 sur une topographie synthétique FIF. De gauche à droite et de haut en bas : $C_1 = 0, 0.03, 0.05, 0.75, 0.1$ et 0.15 , du moins intermittent vers le plus intermittent. $\alpha = 2$ et $H = 0.7$ 193
- 6.3 Effet d'une variation de α sur une topographie synthétique FIF. De gauche à droite et de haut en bas : $\alpha = 2, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2$ et 1.01 , du plus multifractal vers le moins multifractal. $C_1 = 0.1$ et $H = 0.7$ 194

Bibliographie

- Aharonson, O., M. T. Zuber, and D. H. Rothman (2001), Statistics of mars' topography from the mars orbiter laser altimeter: Slopes, correlations, and physical models, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 106(E10), 23,723–23,735, doi:10.1029/2000JE001403.
- Ai, T., R. Zhang, H. Zhou, and J. Pei (2014), Box-counting methods to directly estimate the fractal dimension of a rock surface, *Applied Surface Science*, 314, 610 – 621, doi:https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2014.06.152.
- Amante, C., and B. Eakins (2009), Etopo1 1 arc-minute global relief model: Procedures, data sources and analysis., *NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24. National Geophysical Data Center, NOAA*.
- Aviles, C., C. Scholz, and J. Boatwright (1987), Fractal analysis applied to characteristic segments of the san andreas fault, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 92(B1), 331–344.
- Baldassarri, A., M. Montuori, O. Prieto-Ballesteros, and S. C. Manrubia (2008), Fractal properties of isolines at varying altitude revealing different dominant geological processes on earth, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 113(E9), n/a–n/a, doi:10.1029/2007JE003066.
- Balmino, G. (1993), The spectra of the topography of the earth, venus and mars, *Geophysical Research Letters*, 20(11), 1063–1066.
- Balmino, G., K. Lambeck, and W. M. Kaula (1973), A spherical harmonic analysis of the earth's topography, *Journal of Geophysical Research*, 78(2), 478–481, doi:10.1029/JB078i002p00478.
- Balmino, G., N. Vales, S. Bonvalot, and A. Briaais (2012), Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of bouguer and isostatic anomalies, *Journal of Geodesy*, 86(7), 499–520, doi:10.1007/s00190-011-0533-4.

ANNEXE

- Barenblatt, G., A. Zhivago, Y. P. Neprochnov, and A. Ostrovskiy (1984), The fractal dimension: a quantitative characteristic of ocean-bottom relief, *Oceanology*, *24*(6), 695–697.
- Barnett, D. N., F. Nimmo, and D. McKenzie (2002), Flexure of venusian lithosphere measured from residual topography and gravity, *Journal of Geophysical Research: Planets*, *107*(E2).
- Barral, J., and B. B. Mandelbrot (2002), Multifractal products of cylindrical pulses, *Probability Theory and Related Fields*, *124*(3), 409–430.
- Barton, C. C., and P. R. La Pointe (2012), *Fractals in petroleum geology and earth processes*, Springer Science & Business Media.
- Bell, T. (1979), Mesoscale sea floor roughness, *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers*, *26*(1), 65 – 76, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0198-0149\(79\)90086-4](http://dx.doi.org/10.1016/0198-0149(79)90086-4).
- Bell, T. H. (1975), Statistical features of sea-floor topography, *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, *22*, 883–892, doi:10.1016/0011-7471(75)90090-X.
- Berkson, J., and J. Matthews (1984), Statistical characterization of seafloor roughness, *IEEE journal of oceanic engineering*, *9*(1), 48–52.
- Bills, B. G., and A. J. Ferrari (1977), A lunar density model consistent with topographic, gravitational, librational, and seismic data, *Journal of Geophysical Research*, *82*(8), 1306–1314.
- Bills, B. G., and A. J. Ferrari (1978), Mars topography harmonics and geophysical implications, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *83*(B7), 3497–3508.
- Bills, B. G., and M. Kozubick (1985), Venus topography: A harmonic analysis, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *90*(B1), 827–836.
- Black, B. A., J. T. Perron, D. Hemingway, E. Bailey, F. Nimmo, and H. Zebker (2017), Global drainage patterns and the origins of topographic relief on earth, mars, and titan, *Science*, *356*(6339), 727–731.
- Blackburn, M. (1986), Spherical harmonics and tensors for classical field theory. by mn jones, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, *112*(473), 895–896.

- Blumsack, S. L. (1971), On the effects of topography on planetary atmospheric circulation, *Journal of the Atmospheric Sciences*, *28*(7), 1134–1143.
- Bonnet, S., and A. Crave (2003), Landscape response to climate change: Insights from experimental modeling and implications for tectonic versus climatic uplift of topography, *Geology*, *31*(2), 123–126.
- Bouley, S., D. Baratoux, I. Matsuyama, F. Forget, A. Séjourné, M. Turbet, and F. Costard (2016), Late tharsis formation and implications for early mars, *Nature*, *531*(7594), 344–347.
- Braun, J., and S. D. Willett (2013), A very efficient $O(n)$, implicit and parallel method to solve the stream power equation governing fluvial incision and landscape evolution, *Geomorphology*, *180–181*(0), 170 – 179, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.geomorph.2012.10.008>.
- Braun, J., T. Simon-Labric, K. E. Murray, and P. W. Reiners (2014), Topographic relief driven by variations in surface rock density, *Nature Geoscience*, *7*(7), 534.
- Bretherton, F. P. (1969), Momentum transport by gravity waves, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, *95*(404), 213–243.
- Bruno, B., G. Taylor, S. Rowland, P. Lucey, and S. Self (1992), Lava flows are fractals, *Geophysical Research Letters*, *19*(3), 305–308.
- Burr, D. M., S. A. Drummond, R. Cartwright, B. A. Black, and J. T. Perron (2013), Morphology of fluvial networks on titan: Evidence for structural control, *Icarus*, *226*(1), 742–759.
- Burrough, P. (1981), Fractal dimensions of landscapes and other environmental data, *Nature*, *294*(5838), 240–242.
- Cardesa, J. I., A. Vela-Martín, and J. Jiménez (2017), The turbulent cascade in five dimensions, *Science*, p. eaan7933.
- Carr, J. R., and W. B. Benzer (1991), On the practice of estimating fractal dimension, *Mathematical Geology*, *23*(7), 945–958.
- Chambers, J. M., C. L. Mallows, and B. Stuck (1976), A method for simulating stable random variables, *Journal of the american statistical association*, *71*(354), 340–344.

ANNEXE

- Cheng, A. F., et al. (2001), Laser altimetry of small-scale features on 433 eros from near-shoemaker, *Science*, 292(5516), 488–491.
- Clay, C., and W. K. Leong (1974), Acoustic estimates of the topography and roughness spectrum of the sea floor southwest of iberian peninsula, in *Physics of sound in marine sediments*, pp. 373–446, Springer.
- Collins, G. C., W. B. McKinnon, J. M. Moore, F. Nimmo, R. T. Pappalardo, L. M. Prockter, and P. M. Schenk (2009), Tectonics of the outer planet satellites, *Planetary Tectonics*, 11, 264.
- Cowan, N. B., et al. (2009), Alien maps of an ocean-bearing world, *The Astrophysical Journal*, 700(2), 915.
- Cox, C., and H. Sandstrom (1962), Coupling of internal and surface waves in water of variable depth, *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 18, 499–513.
- Culling, W., and M. Datko (1987), The fractal geometry of the soil covered landscape, *Earth Surface Processes and Landforms*, 12(4), 369–385.
- Davis, W. (1892), The convex profile of bad-land divides, *Science*, (508), 245–245.
- Deliege, A., T. Kleyntssens, and S. Nicolay (2016), *The Fractal Nature of Mars Topography Analyzed via the Wavelet Leaders Method*, pp. 1295–1298, Springer International Publishing, Cham.
- Dietrich, W. E., and J. T. Perron (2006), The search for a topographic signature of life, *Nature*, 439(7075), 411.
- Driscoll, J., and D. Healy (1994), Computing fourier transforms and convolutions on the 2-sphere, *Advances in Applied Mathematics*, 15(2), 202–250, doi:10.1006/aama.1994.1008.
- Edwards, S. F., and D. Wilkinson (1982), The surface statistics of a granular aggregate, in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 381, pp. 17–31, The Royal Society.
- Esposito, P. B., W. B. Banerdt, G. F. Lindal, W. L. Sjogren, M. A. Slade, B. G. Bills, D. E. Smith, and G. Balmino (1992), *Gravity and topography*, pp. 209–248.

- Falconer, K. (2003), *Fractal geometry, John Wiley Sons.*
- Fernando, J., F. Schmidt, X. Ceamanos, P. Pinet, S. Douté, and Y. Daydou (2013), Surface CO₂ reflectance of CO₂ Mars observed by CRISM/MRO: 2. Estimation of surface photometric properties in Gusev Crater and Meridiani Planum, *Journal of Geophysical Research (Planets)*, *118*, 534–559, doi:10.1029/2012JE004194.
- Ford, E., S. Seager, and E. Turner (2001), Characterization of extrasolar terrestrial planets from diurnal photometric variability, *arXiv preprint astro-ph/0109054*.
- Ford, P., F. Pettengill, G. Liu, and Q. J. (2014), Magellan global topography 4641m, *PDS GeoScience Node*.
- Ford, P. G., and G. H. Pettengill (1992), Venus topography and kilometer-scale slopes, *Journal of Geophysical Research: Planets*, *97*(E8), 13,103–13,114, doi:10.1029/92JE01085.
- Fox, C. G., and D. E. Hayes (1985), Quantitative methods for analyzing the roughness of the seafloor, *Reviews of Geophysics*, *23*(1), 1–48, doi:10.1029/RG023i001p00001.
- Fraysse, A. (2005), Resultats de genericite en analyse multifractale, Ph.D. thesis, Universite Paris XII Val de Marne.
- Frisch, U., and G. Parisi (1985), On the singularity structure of fully developed turbulence, ”.
- Frisch, U., P.-L. Sulem, and M. Nelkin (1978), A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, *87*(4), 719–736.
- Furbish, D. J., K. K. Hamner, M. Schmeeckle, M. N. Borosund, and S. M. Mudd (2007), Rain splash of dry sand revealed by high-speed imaging and sticky paper splash targets, *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, *112*(F1).
- Gagnon, J.-S., S. Lovejoy, and D. Schertzer (2003), Multifractal surfaces and terrestrial topography, *EPL (Europhysics Letters)*, *62*(6), 801.
- Gagnon, J.-S., S. Lovejoy, and D. Schertzer (2006), Multifractal earth topography, *Nonlinear Processes in Geophysics*, *13*(5), 541–570, doi:10.5194/npg-13-541-2006.

ANNEXE

- Gallant, J., I. Moore, M. Hutchinson, and P. Gessler (1994), Estimating fractal dimension of profiles: A comparison of methods, *Mathematical Geology*, 26(4), 455–481, doi:10.1007/BF02083489.
- Garneau, S., and J. Plaut (2000), Topographic and roughness characteristics of the vastitas borealis formation on mars described by fractal statistics.
- Geilikman, M., T. Golubeva, and V. Pisarenko (1990), Multifractal patterns of seismicity, *Earth and Planetary Science Letters*, 99(1-2), 127–132.
- Gibert, D., V. Courtillot, and J.-L. Olivet (1989), Seasat altimetry and the south atlantic geoid: 2. short-wavelength undulations, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 94(B5), 5545–5559, doi:10.1029/JB094iB05p05545.
- Giese, B., R. Wagner, G. Neukum, P. Helfenstein, and P. C. Thomas (2007), Tethys: Lithospheric thickness and heat flux from flexurally supported topography at ithaca chasma, *Geophysical Research Letters*, 34(21).
- Gillon, M., et al. (2017), Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star trappist-1, *Nature*, 542(7642), 456–460.
- Gires, A., I. Tchiguirinskaia, D. Schertzer, and S. Lovejoy (2011), Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle méso-nh et des données radar, *Hydrological Sciences Journal–Journal des Sciences Hydrologiques*, 56(3), 380–396.
- Golle (2012), Convection mantellique, topographie et géoïde sur mars et vénus, Ph.D. thesis.
- Goodchild, M. F. (1980), Fractals and the accuracy of geographical measures, *Mathematical Geology*, 12(2), 85–98.
- Goodchild, M. F. (1982), The fractional brownian process as a terrain simulation model, *Modeling and Simulation*, 13(113), 3–1137.
- Gosz, J. R., and P. J. Sharpe (1989), Broad-scale concepts for interactions of climate, topography, and biota at biome transitions, *Landscape Ecology*, 3(3), 229–243.

- Graveleau, F., S. Dominguez, and J. Malavieille (2008), A new analogue modelling approach for studying interactions between surface processes and deformation in active mountain belt piedmonts, in *GeoMod 2008 Third International Geomodelling Conference. Bolletino di Geofisica teorica ed applicata, Villa la Pietra, Firenze, Italy*, pp. 501–505.
- Grott, M., and D. Breuer (2008), The evolution of the martian elastic lithosphere and implications for crustal and mantle rheology, *Icarus*, *193*(2), 503–515.
- Halsey, T. C., M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman (1986), Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets, *Physical Review A*, *33*(2), 1141.
- Hapke, B. (1984), Bidirectional reflectance spectroscopy: 3. correction for macroscopic roughness, *Icarus*, *59*(1), 41–59.
- Hauber, E., J. Bleacher, K. Gwinner, D. Williams, and R. Greeley (2009), The topography and morphology of low shields and associated landforms of plains volcanism in the tharsis region of mars, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, *185*(1), 69–95.
- Hausdorff, F. (1918), Dimension und ausseres mass, *Mathematische Annalen*, *79*(1), 157–179, doi:10.1007/BF01457179.
- Hawkins, S. E., et al. (2007), The mercury dual imaging system on the messenger spacecraft, *Space Science Reviews*, *131*(1), 247–338.
- Heiskanen, W., and F. Vening Meinesz (1958), *The Earth and its Gravity Field*, McGraw-Hill.
- Heiskanen, W. A., and H. Moritz (1967), Physical geodesy, *Bulletin Géodésique (1946-1975)*, *86*(1), 491–492.
- Herrnstein, A., and T. Dowling (2007), Effects of topography on the spin-up of a venus atmospheric model, *Journal of Geophysical Research: Planets*, *112*(E4).
- Hobson, R. D. (1972), *Surface roughness in topography: a quantitative approach*, pp. 221–245, Harper & Row.
- Horn, B. K., and M. J. Brooks (1989), *Shape from shading*, MIT press.

ANNEXE

- Horton, C., A. Hoffman, and W. Hemphins (1962), Mathematical analysis of the microstructure of an area of the bottom of lake travis, *Texas J. Sci*, *14*, 131–142.
- Horton, R. E. (1932), Drainage-basin characteristics, *Eos, Transactions American Geophysical Union*, *13*(1), 350–361, doi:10.1029/TR013i001p00350.
- Houze, R. A. (2012), Orographic effects on precipitating clouds, *Reviews of Geophysics*, *50*(1), n/a–n/a, doi:10.1029/2011RG000365, rG1001.
- Hovius, N. (1996), Regular spacing of drainage outlets from linear mountain belts, *Basin Research*, *8*(1), 29–44.
- Howard, A. D. (1994), A detachment-limited model of drainage basin evolution, *Water resources research*, *30*(7), 2261–2285.
- Howard, A. D. (2000), The role of eolian processes in forming surface features of the martian polar layered deposits, *Icarus*, *144*(2), 267–288.
- Irwin, R. P., A. D. Howard, R. A. Craddock, and J. M. Moore (2005), An intense terminal epoch of widespread fluvial activity on early mars: 2. increased runoff and paleolake development, *Journal of Geophysical Research: Planets*, *110*(E12).
- Istanbulluoglu, E., and R. L. Bras (2005), Vegetation-modulated landscape evolution: Effects of vegetation on landscape processes, drainage density, and topography, *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, *110*(F2).
- Izumi, N., and G. Parker (1995), Inception of channelization and drainage basin formation: upstream-driven theory, *Journal of Fluid Mechanics*, *283*, 341–363.
- Jaeger, W., et al. (2010), Emplacement of the youngest flood lava on mars: A short, turbulent story, *Icarus*, *205*(1), 230–243.
- Jaffard, S. (2004), Wavelet techniques in multifractal analysis, *Tech. rep.*, PARIS UNIV (FRANCE).
- Kalas, P., J. R. Graham, E. Chiang, M. P. Fitzgerald, M. Clampin, E. S. Kite, K. Stapelfeldt, C. Marois, and J. Krist (2008), Optical images of an exosolar planet 25 light-years from earth, *Science*, *322*(5906), 1345–1348.

- Kent, C., and J. Wong (1982), An index of littoral zone complexity and its measurement, *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, *39*(6), 847–853.
- Kida, S. (1991), Log-stable distribution and intermittency of turbulence, *Journal of the Physical Society of Japan*, *60*(1), 5–8.
- Kirchner, J. W., R. C. Finkel, C. S. Riebe, D. E. Granger, J. L. Clayton, J. G. King, and W. F. Megahan (2001), Mountain erosion over 10 yr, 10 ky, and 10 my time scales, *Geology*, *29*(7), 591–594.
- Kirk, R., P. Callahan, R. Seu, R. Lorenz, F. Paganelli, R. Lopes, and C. Elachi (2005), Radar reveals titan topography.
- Kite, E. S., E. Gaidos, and M. Manga (2011), Climate instability on tidally locked exoplanets, *The Astrophysical Journal*, *743*(1), 41.
- Klinkenberg, B. (1994), A review of methods used to determine the fractal dimension of linear features, *Mathematical Geology*, *26*(1), 23–46.
- Klinkenberg, B., and M. F. Goodchild (1992), The fractal properties of topography: A comparison of methods, *Earth Surface Processes and Landforms*, *17*(3), 217–234, doi:10.1002/esp.3290170303.
- Kolmogorov, A. N. (1940), The wiener spiral and some other interesting curves in hilbert space, in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 26, pp. 115–118.
- Kolmogorov, A. N. (1941), The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers, in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 30, pp. 299–303.
- Kolmogorov, A. N. (1962), A refinement of previous hypothesis, *Journal of Fluid Mechanics*, (1).
- Konopliv, A., S. Asmar, E. Carranza, W. Sjogren, and D. Yuan (2001), Recent gravity models as a result of the lunar prospector mission, *Icarus*, *150*(1), 1 – 18, doi:http://dx.doi.org/10.1006/icar.2000.6573.
- Krause, D., and H. Menard (1965), Depth distribution and bathymetric classification of some sea-floor profiles, *Marine Geology*, *3*(3), 169–193.

ANNEXE

- Kreslavsky, M. A., and J. W. Head (1999), Kilometer-scale slopes on mars and their correlation with geologic units: Initial results from mars orbiter laser altimeter (mola) data, *Journal of Geophysical Research: Planets*, *104*(E9), 21,911–21,924, doi:10.1029/1999JE001051.
- Kucinskis, A. B., and D. L. Turcotte (1994), Isostatic compensation of equatorial highlands on venus, *Icarus*, *112*(1), 104–116.
- Labarre, S., C. Ferrari, and S. Jacquemoud (2017), Surface roughness retrieval by inversion of the hapke model: A multiscale approach, *Icarus*, *290*, 63–80.
- Lagrange, A.-M., et al. (2009), A probable giant planet imaged in the in the beta pictoris disk, *Astronomy & Astrophysics*, *493*(2), L21–L25.
- Landais, F., F. Schmidt, and S. Lovejoy (2015), Universal multifractal martian topography, *Nonlinear Processes in Geophysics*, *22*(6), 713–722, doi:10.5194/npg-22-713-2015.
- Lavallee, D., S. Lovejoy, D. Schertzer, and P. Ladoy (1993), Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. fractals in geography, *Eds. L. De Cola, N. Lam, 158-192, PTR, Prentice Hall*.
- Le Pichon, X. (1968), Sea-floor spreading and continental drift, *Journal of Geophysical Research*, *73*(12), 3661–3697.
- Lemoine, F. G., D. E. Smith, D. D. Rowlands, M. T. Zuber, G. A. Neumann, D. S. Chinn, and D. E. Pavlis (2001), An improved solution of the gravity field of mars (gmm-2b) from mars global surveyor, *Journal of Geophysical Research: Planets*, *106*(E10), 23,359–23,376, doi:10.1029/2000JE001426.
- Lemoine, F. G., et al. (1998), The development of the joint nasa gsfc and the nima geopotential model egm96, NASA/TP-1998-206861.
- Lemoine, F. G., et al. (2013), High-degree gravity models from grail primary mission data, *Journal of Geophysical Research: Planets*, *118*(8), 1676–1698, doi:10.1002/jgre.20118.
- Lissauer, J. J. (1993), Planet formation, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, *31*(1), 129–172, doi:10.1146/annurev.aa.31.090193.001021.

- Lovejoy, D. S., S. (1991), Our multifractal atmosphere: a unique laboratory for nonlinear dynamics, *Physics in Canada*.
- Lovejoy, S., and D. Schertzer (2012), Haar wavelets, fluctuations and structure functions: convenient choices for geophysics, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 19(5), 513–527, doi:10.5194/npg-19-513-2012.
- Lovejoy, S., and D. Shertzer (2013), *The Weather and Climate :Emergent Laws and Multifractal Cascades*, Cambridge.
- Lovejoy, S., D. Lavalée, D. Schertzer, and P. Ladoy (1995), The 11/2 law and multifractal topography: theory and analysis, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2(1), 16–22, doi:10.5194/npg-2-16-1995.
- Lovejoy S., B., Mandelbrot (1985), fractal properties of rain and a fractal model.
- Malamud, B. D., and D. L. Turcotte (2001), Wavelet analyses of mars polar topography, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 106(E8), 17,497–17,504, doi:10.1029/2000JE001333.
- Mandelbrot, B. (1967), How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension, *Science*, 156(3775), 636–638, doi:10.1126/science.156.3775.636.
- Mandelbrot, B. (1979a), Fractals: form, chance and dimension., *Fractals: form, chance and dimension.*, by Mandelbrot, BB. San Francisco (CA, USA): WH Freeman & Co., 16+ 365 p.
- Mandelbrot, B. (1979b), Fractals: form, chance and dimension., *Fractals: form, chance and dimension.*, by Mandelbrot, BB. San Francisco (CA, USA): WH Freeman & Co., 16+ 365 p.
- Mandelbrot, B. (1991), Self-affine fractal sets the basic fractal dimensions, *Dynamics of Fractal Surfaces*, p. 21.
- Mandelbrot, B. B. (1974), Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier, *Journal of Fluid Mechanics*, 62(2), 331–358.
- Mandelbrot, B. B. (1975), Stochastic models for the earth’s relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72(10), 3825–3828.

ANNEXE

- Mandelbrot, B. B. (1985), Self-affine fractals and fractal dimension, *Physica scripta*, 32(4), 257.
- Mandelbrot, B. B., and J. W. V. Ness (1968), Fractional brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review*, 10(4), 422–437, doi:10.1137/1010093.
- Mandelbrot, B. B., and R. Pignoni (1983), *The fractal geometry of nature*, vol. 173, WH freeman New York.
- Mark, D. M., and P. B. Aronson (1984), Scale-dependent fractal dimensions of topographic surfaces: an empirical investigation, with applications in geomorphology and computer mapping, *Mathematical Geology*, 16(7), 671–683.
- Marois, C., B. Macintosh, T. Barman, B. Zuckerman, I. Song, J. Patience, D. Lafrenière, and R. Doyon (2008), Direct imaging of multiple planets orbiting the star hr 8799, *Science*, 322(5906), 1348–1352.
- Marsh, H. W. (1964), Reflection and scattering of sound by the sea bottom. part i: Theory, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(10), 2003–2003, doi:10.1121/1.1939282.
- McEwen, A. S., et al. (2007), Mars reconnaissance orbiter’s high resolution imaging science experiment (hirise), *Journal of Geophysical Research: Planets*, 112(E5), n/a–n/a, doi:10.1029/2005JE002605, e05S02.
- McNamee, J. B., N. J. Borderies, and W. L. Sjogren (1993), Venus: Global gravity and topography, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 98(E5), 9113–9128, doi:10.1029/93JE00382.
- Melosh, H. J. (1989), *Impact cratering: A geologic process*.
- Melton, M. A. (1965), The geomorphic and paleoclimatic significance of alluvial deposits in southern arizona, *The Journal of Geology*, 73(1), 1–38, doi:10.1086/627044.
- Mezemat, Y. (2014), Analyse et modelisation multifractales des interactions ondes-turbulence-biologie dans un lac urbain, Ph.D. thesis, Universite Paris-Est.
- Moglen, G. E., E. A. Eltahir, and R. L. Bras (1998), On the sensitivity of drainage density to climate change, *Water Resources Research*, 34(4), 855–862.

- Montera, L., M. Jouini, S. Verrier, S. Thiria, and M. Crepon (2011), Multifractal analysis of oceanic chlorophyll maps remotely sensed from space, *Ocean Science*, 7(2), 219–229.
- Montgomery, D. R., and W. E. Dietrich (1989), Source areas, drainage density, and channel initiation, *Water Resources Research*, 25(8), 1907–1918.
- Moore, J. M., et al. (2016), The geology of pluto and charon through the eyes of new horizons, *Science*, 351(6279), 1284–1293.
- Mosegaard, K., and A. Tarantola (1995), Monte carlo sampling of solutions to inverse problems, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 100(B7), 12,431–12,447.
- Muller, J.-C. (1986), Fractal dimension and inconsistencies in cartographic line representations, *The Cartographic Journal*, 23(2), 123–130.
- Neidell, N. S. (1966), Spectral studies of marine geophysical profiles, *Geophysics*, 31(1), 122–134.
- Neukum, G., and B. Ivanov (1994a), Crater size distributions and impact probabilities on earth from lunar, terrestrial planeta, and asteroid cratering data, IIDO-Berichtsjahr=1994,.
- Neukum, G., and B. Ivanov (1994b), Crater size distributions and impact probabilities on earth from lunar, terrestrial-planet, and asteroid cratering data, *Hazards due to Comets and Asteroids*, 359.
- Newman, W. I., and D. L. Turcotte (1990), Cascade model for fluvial geomorphology, *Geophysical Journal International*, 100(3), 433–439, doi:10.1111/j.1365-246X.1990.tb00696.x.
- Nikora, V., and D. Goring (2004), Mars topography: bulk statistics and spectral scaling, *Chaos, Solitons & Fractals*, 19(2), 427 – 439, doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00054-7, fractals in Geophysics.
- Nimmo, F., and T. Watters (2004), Depth of faulting on mercury: Implications for heat flux and crustal and effective elastic thickness, *Geophysical research letters*, 31(2).
- Nimmo, F., B. Giese, and R. Pappalardo (2003), Estimates of europa’s ice shell thickness from elastically-supported topography, *Geophysical Research Letters*, 30(5).

ANNEXE

- Nimmo, F., B. Bills, P. Thomas, and S. Asmar (2010), Geophysical implications of the long-wavelength topography of reha, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 115(E10).
- Nyblade, A. A., and N. H. Sleep (2003), Long lasting epeirogenic uplift from mantle plumes and the origin of the southern african plateau, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 4(12).
- Okubo, P. G., and K. Aki (1987), Fractal geometry in the san andreas fault system, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 92(B1), 345–355.
- Olaya, V. (2009), Chapter 6 basic land-surface parameters, in *Geomorphometry Concepts, Software, Applications, Developments in Soil Science*, vol. 33, edited by T. Hengl and H. I. Reuter, pp. 141 – 169, Elsevier, doi:[https://doi.org/10.1016/S0166-2481\(08\)00006-8](https://doi.org/10.1016/S0166-2481(08)00006-8).
- Orosei, R., R. Bianchi, A. Coradini, S. Espinasse, C. Federico, A. Ferriccioni, and A. I. Gavrishin (2003), Self-affine behavior of martian topography at kilometer scale from mars orbiter laser altimeter data, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 108(E4), n/a–n/a, doi:10.1029/2002JE001883.
- Pallé, E., E. B. Ford, S. Seager, P. Montañés-Rodríguez, and M. Vazquez (2008), Identifying the rotation rate and the presence of dynamic weather on extrasolar earth-like planets from photometric observations, *The Astrophysical Journal*, 676(2), 1319.
- Pausata, F. S., C. Li, J. Wettstein, M. Kageyama, and K. H. Nisancioglu (2011), The key role of topography in altering north atlantic atmospheric circulation during the last glacial period, *Past climate variability: model analysis and proxy intercomparison*.
- Pavlis, N. K., S. A. Holmes, S. C. Kenyon, and J. K. Factor (2012), The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (egm2008), *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 117(B4), n/a–n/a, doi:10.1029/2011JB008916, b04406.
- Perron, J. T., J. W. Kirchner, and W. E. Dietrich (2008), Spectral signatures of characteristic spatial scales and nonfractal structure in landscapes, *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 113(F4).
- Perron, J. T., J. W. Kirchner, and W. E. Dietrich (2009), Formation of evenly spaced ridges and valleys.

- Phillips, R. J., et al. (2001), Ancient geodynamics and global-scale hydrology on mars, *Science*, 291(5513), 2587–2591.
- Plaut, J. J., and S. Garneau (1999), Mola-derived roughness data used to predict surface scattering for mars subsurface radar sounding.
- Prey, A. (1922), *Darstellung der Hohen-und Tiefenverhältnisse der Erde: Durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung...*, Weidmann.
- Rabus, B., M. Eineder, A. Roth, and R. Bamler (2003), The shuttle radar topography mission : a new class of digital elevation models acquired by spaceborne radar, *{ISPRS} Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 57(4), 241 – 262, doi:[https://doi.org/10.1016/S0924-2716\(02\)00124-7](https://doi.org/10.1016/S0924-2716(02)00124-7).
- Raggam, J., M. Buchroithner, and R. Mansberger (1987), Operational relief mapping using non-photographic spaceborne imagery, in *Proc. of the Willi Norberg Symposium*, pp. 99–107.
- Rapp, R. H. (1989), The decay of the spectrum of the gravitational potential and the topography for the earth, *Geophysical Journal International*, 99(3), 449–455, doi:[10.1111/j.1365-246X.1989.tb02031.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1989.tb02031.x).
- Reigber, C., R. Schmidt, F. Flechtner, R. Knig, U. Meyer, K.-H. Neumayer, P. Schwintzer, and S. Y. Zhu (2005a), An earth gravity field model complete to degree and order 150 from grace: Eigen-grace02s, *Journal of Geodynamics*, 39(1), 1 – 10, doi:<https://doi.org/10.1016/j.jog.2004.07.001>.
- Reigber, C., et al. (2005b), *Earth Gravity Field and Seasonal Variability from CHAMP*, pp. 25–30a new class of digital elevation acquire, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, doi:[10.1007/3-540-26800-6_4](https://doi.org/10.1007/3-540-26800-6_4).
- Reis, A. H. (2006), Constructal view of scaling laws of river basins, *Geomorphology*, 78(3-4), 201 – 206, doi:<https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2006.01.015>.
- Ricard, Y., L. FLEITOUT, and C. FROIDEVAUX (1984), Geoid heights and lithospheric stresses for a dynamic earth, in *Annales Geophysicae*, vol. 2, pp. 267–286.

ANNEXE

- Richardson, L. F. (1961), The problem of contiguity: An appendix to statistic of deadly quarrels, *General systems : yearbook of the Society for the Advancement of General Systems Theory*, 61, 139–187.
- Richardson, L. F. (2007), *Weather prediction by numerical process*, Cambridge University Press.
- Rinaldo, I. R.-I. (1997), *Fractal River Basins*, Cambridge University Press.
- Rosenburg, M. A., O. Aharonson, J. W. Head, M. A. Kreslavsky, E. Mazarico, G. A. Neumann, D. E. Smith, M. H. Torrence, and M. T. Zuber (2011), Global surface slopes and roughness of the moon from the lunar orbiter laser altimeter, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 116(E2), n/a–n/a, doi:10.1029/2010JE003716.
- Rosenburg, M. A., O. Aharonson, and R. Sari (2015), Topographic power spectra of cratered terrains: Theory and application to the moon, *Journal of Geophysical Research: Planets*, pp. n/a–n/a, doi:10.1002/2014JE004746.
- Roy, A. G., G. Gravel, and C. Gauthier (1987), Measuring the dimension of surfaces: A review and appraisal of different methods, in *Proceedings of the 8th International Symposium on Computer-Assisted Cartography (Auto-Carto 8)*, pp. 68–77.
- Saunders, R., and G. Pettengill (1991), Magellan: Mission summary, *Science*, 252(5003), 247–249, doi:10.1126/science.252.5003.247.
- Schertzer, D., and S. Lovejoy (1984), On the dimension of atmospheric motions, ”.
- Schertzer, D., and S. Lovejoy (1987), Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 92(D8), 9693–9714, doi:10.1029/JD092iD08p09693.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Chigirinskaya, and D. Marsan (1997), Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency, *Fractals*, 5(03), 427–471.
- Schertzer, S., D. Lovejoy (1992), Hard and soft multifractal processes, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 185(1), 187–194.

- Schertzer, S., D. Lovejoy (2011), Multifractals, generalized scale invariance and complexity in geophysics, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(12), 3417–3456, doi:10.1142/S0218127411030647.
- Schmidt, F., and J. Fernando (2015), Realistic uncertainties on hapke model parameters from photometric measurement, *Icarus*, 260, 73–93.
- Schmitt, F., and D. Marsan (2001), Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 20(1), 3–6.
- Schmitt, F., D. La Vallée, D. Schertzer, and S. Lovejoy (1992a), Empirical determination of universal multifractal exponents in turbulent velocity fields, *Physical review letters*, 68(3), 305.
- Schmitt, F., D. Lavalée, S. Lovejoy, D. Schertzer, and C. Hooge (1992b), Direct estimates of universal multifractal indices for wind and temperature fields, *Academie des Sciences Paris Comptes Rendus Serie Sciences Mathematiques*, 314, 749–754.
- Scholz, C. H. (2002), *The mechanics of earthquakes and faulting*, Cambridge university press.
- Shaler, N. (1899), Spacing of rivers with reference to hypothesis of baseleveling, *Geological Society of America Bulletin*, 10(1), 263–276.
- Sharma, P., and S. Byrne (2010), Constraints on titan topography through fractal analysis of shorelines, *Icarus*, 209(2), 723–737.
- Shepard, M. K., B. A. Campbell, M. H. Bulmer, T. G. Farr, L. R. Gaddis, and J. J. Plaut (2001), The roughness of natural terrain: A planetary and remote sensing perspective, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 106(E12), 32,777–32,795, doi:10.1029/2000JE001429.
- Simons, M., B. H. Hager, S. C. Solomon, et al. (1994), Global variations in the geoid/topography admittance of venus, *Science-AAAS-Weekly Paper Edition-including Guide to Scientific Information*, 264(5160), 798–803.
- Smith, D. E., M. T. Zuber, and G. A. Neumann (2001a), Seasonal variations of snow depth on mars, *Science*, 294(5549), 2141–2146, doi:10.1126/science.1066556.

ANNEXE

- Smith, D. E., et al. (2001b), Mars orbiter laser altimeter: Experiment summary after the first year of global mapping of mars, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 106(E10), 23,689–23,722, doi:10.1029/2000JE001364.
- Smith, D. E., et al. (2010), The lunar orbiter laser altimeter investigation on the lunar reconnaissance orbiter mission, *Space Science Reviews*, 150(1), 209–241, doi:10.1007/s11214-009-9512-y.
- Smith, D. E., et al. (2012), Gravity field and internal structure of mercury from messenger, *Science*, 336(6078), 214–217, doi:10.1126/science.1218809.
- Smith, S., T. Chase, W. Farrell, I. Taylor, and M. Weed (1965), Distribution and statistical analysis of sea-floor relief in the northeast pacific, *Tech. rep.*, WESTERN ELECTRIC CO INC NEW YORK.
- Solomon, S. C., et al. (2001), The messenger mission to mercury: Scientific objectives and implementation, *Planetary and Space Science*, 49(14), 1445–1465.
- Sornette, A., P. Davy, and D. Sornette (1990), Growth of fractal fault patterns, *Physical review letters*, 65(18), 2266.
- Steinberger, B., S. C. Werner, and T. H. Torsvik (2010), Deep versus shallow origin of gravity anomalies, topography and volcanism on earth, venus and mars, *Icarus*, 207(2), 564–577.
- Stevens, H. (1972), *Northeast Pacific Geophysical Survey*, National oceanic and atmospheric Administration.
- Stubner, K., et al. (2013), The giant shakh dara migmatitic gneiss dome, pamir, india-asia collision zone: 2. timing of dome formation, *Tectonics*, 32(5), 1404–1431.
- Susorney, H., O. Barnouin, C. Ernst, and P. Byrne (2017), The surface roughness of mercury from the mercury laser altimeter: Investigating the effects of volcanism, tectonism, and impact cratering, *Journal of Geophysical Research: Planets*.
- Sweeney, K., J. Roering, and C. Ellis (2015), Experimental evidence for hillslope control of landscape scale, *Science*, 349(6243), 51–53.

- Talling, P. J., M. D. Stewart, C. P. Stark, S. Gupta, and S. J. Vincent (1997), Regular spacing of drainage outlets from linear fault blocks, *Basin research*, *9*(4), 275–302.
- Tapley, B., et al. (2005), Ggm02 – an improved earth gravity field model from grace, *Journal of Geodesy*, *79*(8), 467–478, doi:10.1007/s00190-005-0480-z.
- Tapley, B. D., S. Bettadpur, J. C. Ries, P. F. Thompson, and M. M. Watkins (2004), Grace measurements of mass variability in the earth system, *Science*, *305*(5683), 503–505, doi:10.1126/science.1099192.
- Tarantola, A., and B. Valette (1982), Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion, *Reviews of Geophysics*, *20*(2), 219–232.
- Tarboton, D. G., R. L. Bras, and I. Rodriguez-Iturbe (1988), The fractal nature of river networks, *Water Resources Research*, *24*(8), 1317–1322, doi:10.1029/WR024i008p01317.
- Tenzer, R., P. Sirguey, M. Rattenbury, and J. Nicolson (2011), A digital rock density map of new zealand, *Computers & geosciences*, *37*(8), 1181–1191.
- Tessier, Y., S. Lovejoy, and D. Schertzer (1993), Universal multifractals: theory and observations for rain and clouds, *Journal of Applied Meteorology*, *32*(2), 223–250.
- Toy, T. J., G. R. Foster, and K. G. Renard (2002), *Soil erosion: processes, prediction, measurement, and control*, John Wiley & Sons.
- Turcotte, D. L. (1987), A fractal interpretation of topography and geoid spectra on the earth, moon, venus, and mars, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *92*(B4).
- Turcotte, D. L. (1989), Fractals in geology and geophysics, in *Fractals in geophysics*, pp. 171–196, Springer.
- Vening Meinesz, F. (1951), A remarkable feature of the earth topography.
- Voss, R. F. (1991), Random fractals: characterization and measurement, in *Scaling phenomena in disordered systems*, pp. 1–11, Springer.

ANNEXE

- Warren, B. A. (1973), Transpacific hydrographic sections at lats. 43 s and 28 s: the scorpio expedition, deep water, in *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, vol. 20, pp. 9–38, Elsevier.
- White, O. L., P. M. Schenk, F. Nimmo, and T. Hoogenboom (2014), A new stereo topographic map of io: Implications for geology from global to local scales, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 119(6), 1276–1301.
- Wieczorek, M. A. (2007), Gravity and topography of the terrestrial planets, *Planets and Moons*, pp. 165–206.
- Wildey, R. L. (1984), Topography from single radar images, *Science*, 224, 153–157.
- Williams, D. M., and E. Gaidos (2008), Detecting the glint of starlight on the oceans of distant planets, *Icarus*, 195(2), 927–937.
- Wolf, P. R., and B. A. Dewitt (2000), *Elements of Photogrammetry: with applications in GIS*, vol. 3, McGraw-Hill New York.
- Xu, T., I. D. Moore, and J. C. Gallant (1993), Fractals, fractal dimensions and landscapes, *Geomorphology*, 8(4), 245–262.
- Yaglom, A. (1966), The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulence characteristics in the inertial interval, in *Soviet Physics Doklady*, vol. 11, p. 26.
- Zalucha, A. M. (2010), The effect of topography on the martian atmospheric circulation and determining pluto’s atmospheric thermal structure from stellar occultations, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Zappone, A. S., and R. Bruijn (2012), The swiss atlas of physical properties of rocks (saphyr), *Rapport Annuel*.
- Zebker, H. A., and R. M. Goldstein (1986), Topographic mapping from interferometric synthetic aperture radar observations, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 91(B5), 4993–4999, doi:10.1029/JB091iB05p04993.
- Zuber, M. T., et al. (2012), Topography of the northern hemisphere of mercury from messenger laser altimetry, *Science*, 336(6078), 217–220.

Zuber, M. T., et al. (2013), Gravity field of the moon from the gravity recovery and interior laboratory (grail) mission, *Science*, 339(6120), 668–671.

ANNEXE

Publications

- Universal multifractal Martian topography, Landais, F., F. Schmidt, S. Lovejoy, 2015, *Nonlin. Processes Geophys. Discuss.*, 2, 1007–1031, doi:10.5194/npgd-2-1007-2015.
- Multifractal topography of several planetary bodies in the Solar System Landais, F., Schmidt, F., & Lovejoy, S. 2017 (Under review).
- Water Residence Time Distribution Estimation through 1D Deconvolution, Meresescu, Kowalski, Schmidt, Landais, submitted to *Computer and Geosciences*, 2017
- Topography of (exo)planet, Landais, Schmidt, and Lovejoy, in preparation

ANNEXE

Titre : Lois d'échelles et propriétés statistiques multifractales de la topographie des planètes

Mots clés : surface, système solaire, géométrie, rugosité, fractale

Résumé : Au cours des 20 dernières années, le développement des méthodes de télédétection et le succès des missions spatiales ont considérablement enrichi nos connaissances des surfaces planétaires révélant une immense diversité de morphologies. La topographie est le reflet de l'interaction et de la compétition entre des processus géologiques internes et des processus externes dont les modalités sont variables d'un corps à l'autre. En particulier, des informations précieuses sur la nature des processus et sur les lois générales qui contrôlent la formation et l'évolution des paysages sont enregistrées dans le champ topographique. Nous analysons dans cette thèse la topographie en tant que champ statistique multi-échelle. Nous rapportons les résultats d'une étude comparative des propriétés statistiques de la topographie des principaux corps du système solaire (la Terre, la Lune, Mercure, Vénus et Mars) en nous appuyant sur le volume croissant de données altimétriques issus de mesures directes et de techniques indirectes telle que la photogrammétrie. Notre approche est centrée sur la notion de loi d'échelle qui vise à

caractériser les symétries du champ en traduisant le caractère auto-similaire des surfaces naturelles : un zoom sur une image est similaire à l'image dans son ensemble. Nous mettons en œuvre plusieurs méthodes d'analyse de données pour contraindre les propriétés dites "multifractales" afin de dégager le meilleur modèle statistique capable de décrire la topographie dans différents contextes. Nous proposons de nouveaux indicateurs de rugosité à l'échelle globale, régionale et locale. Nous montrons qu'en dépit de leurs diversités, les surfaces du système solaire respectent des lois statistiques similaires que nous explicitons. En particulier nous montrons que la topographie d'un corps tellurique respecte en général des lois multifractales pour les échelles supérieures à 10-20 km et présente une structure statistique différente pour les échelles inférieures. Nous discutons de l'origine géophysique de ces propriétés statistiques. Enfin nous proposons une méthode pour générer des topographies synthétiques sphériques dont les propriétés statistiques sont similaires aux topographies planétaires du système solaire.

Title : Scaling laws and multifractal statistical properties of planetary topography

Keywords : surface, solar system, geometry, roughness, fractal

Abstract :

Over the past 20 years, the development of remote sensing methods and the success of space missions have considerably enriched our knowledge of planetary surfaces revealing an immense diversity of morphologies. Topography is caused by the interaction and the competition between internal geological processes and external processes whose modalities are variable from one planetary body to the other. In particular, precise information on the nature of processes and general laws controlling the formation and evolution of landscapes is recorded in the topographic field. In this thesis, we analyze topography as a multi-scale statistical field. We report the results of a comparative study of the statistical properties of the topography of the main bodies of the solar system (Earth, Moon, Mercury, Venus and Mars) based on the increasing volume of altimetric data, from direct measurements and indirect techniques such as photogrammetry. Our

approach focuses on the notion of scaling law which aims to characterize the symmetries of the field by translating the self-similar nature of natural surfaces : any zoom is statistically similar to the initial image. We use several methods of analyzing so-called "multifractal" properties in order to derive the best statistical model capable of describing the topography in different contexts. We propose new indicators of roughness at the global, regional and local scale. We show that in spite of their diversity, the surface of the solar system respects similar statistical laws. In particular, we show that the overall topography of a planetary body generally respects multifractal laws for scales greater than 10-20 km and presents a different statistical structure for the lower scales. We discuss the geophysical origin of these statistical properties. Finally, we propose a method for generating spherical synthetic topographies whose statistical properties are similar to the topographies in the solar system.

