



HAL
open science

Equations intégrales Espace-Temps pour le système de Maxwell. Application au calcul de la Surface Equivalente Radar

Agnès Pujols

► **To cite this version:**

Agnès Pujols. Equations intégrales Espace-Temps pour le système de Maxwell. Application au calcul de la Surface Equivalente Radar. Physique mathématique [math-ph]. Université de Bordeaux, 1991. Français. NNT: . tel-01701019

HAL Id: tel-01701019

<https://theses.hal.science/tel-01701019>

Submitted on 5 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 682

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Agnès PUJOLS

*Equations intégrales Espace-Temps pour le système de
Maxwell
Application au calcul de la Surface Equivalente Radar*

Soutenue le 31 Octobre 1991 devant la commission d'Examen:

M.	B. HANOZET	Professeur, Université BORDEAUX I	<i>Président</i>
MM.	A. BACHELOT J. GAY T. HA DUONG Y. HAUGAZEAU	Professeur, Université BORDEAUX I Ingénieur, C.E.A./C.E.S.T.A. Professeur, Université de COMPIEGNE Professeur, Université BORDEAUX I	} <i>Examineurs</i>

- Rapport CEA-R-5587 -

Centre d'Etudes Scientifiques et Techniques d'Aquitaine
Service Informatique
Section Informatique Scientifique

EQUATIONS INTEGRALES ESPACE-TEMPS
POUR LE SYSTEME DE MAXWELL
APPLICATION AU CALCUL DE LA SURFACE
EQUIVALENTE RADAR

par

Agnès PUJOLS

- Février 1992 -

ISSN 0429 - 3460

à mes parents
à mon frère

RIEN NE VAUT UNE
GROSSE BONNE THESE
POUR DORMIR!



PUJ'LZ

© 1991 United Feature Syndicate, Inc



Cette thèse a été effectuée sous la direction du Professeur A. Bachelot du Département Mathématiques Appliquées de l'Université Bordeaux I et de Monsieur J. Gay Ingénieur de Recherche au CEA/CESTA.

Je suis très heureuse de témoigner ma gratitude à Alain Bachelot qui a guidé mes premiers pas en recherche et m'a fait profiter sans compter de ses compétences scientifiques. Je n'oublie pas sa grande gentillesse, sa constante disponibilité et ... son humour (vache folle et mouton tremblotant ...).

Je tiens à remercier le CEA pour m'avoir permis de vivre pendant 3 ans une expérience numérique enrichissante au Service Informatique du CESTA et pour m'avoir accordé une bourse de doctorat CEA-Industrie (BDCI). Je remercie également la CISI d'avoir accepté d'en être le partenaire.

J'exprime mes très vifs remerciements à:

– Monsieur B. Hanouzet qui s'est toujours intéressé à mes travaux et me fait l'honneur de présider ce jury.

– Monsieur T. Ha Duong qui m'a été d'un grand secours pour la partie B de cette thèse et a bien voulu juger cette étude.

– Monsieur Y. Haugazeau qui a suivi avec intérêt ce travail et a accepté avec beaucoup de gentillesse la lourde tâche de rapporteur.

– Monsieur J. Gay dont les remarques pertinentes sont à l'origine de nombreuses améliorations du code EOLE et pour l'aide précieuse qu'il a apporté pour le financement de cette thèse.

Je remercie également:

– tous les membres de la Section Informatique Scientifique du CEA/CESTA et plus particulièrement Messieurs J.J Bouquet et J.M Bouquin pour l'aide efficace qu'ils m'ont apporté.

– Eliane Becache pour sa collaboration amicale.

– Patrick Joly pour m'avoir accueilli à son séminaire.

– Madame Jaubert et Monsieur Ymbourg qui ont effectué le tirage de cette thèse.



SOMMAIRE

-

Introduction p. 1

Partie A: Diffraction par un obstacle inhomogène

Introduction p. 7

Chapitre I: Le problème perturbé p. 9

I-1 Espace d'énergie finie- Opérateur $U(t)$ p. 11

I-2 Décroissance de l'énergie locale p. 20

I-3 Opérateurs d'onde p. 30

I-4 Controlabilité de l'obstacle p. 35

Chapitre II: Représentation intégrale du noyau de diffraction p. 48

I-1 Cas de l'obstacle homogène p. 49

I-2 Cas de l'obstacle inhomogène p. 67

Partie B: Equations intégrales espace-temps en électromagnétisme

Introduction p. 81

Préliminaires p. 82

Chapitre I: Equations intégrales espace-temps en dimension 2+1 p.89

I-1 Problème de Dirichlet p. 90

I-1 Problème dissipatif p. 105

Chapitre II: Equations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell en dimension 3+1 p. 127

II-1 Espaces p. 128

II-2 Le problème en fréquence p. 138

II-3 Le problème en temps p. 150

II-4 Discrétisation - Les schémas p. 154

Partie C: Expérimentation numérique

Introduction		p.174
Chapitre I: Méthodes numériques		p.175
I-1 Schémas numériques		p. 175
I-2 Calcul des matrices M^k	p. 181	
I-3 Calcul des matrices de base F^k	p.187	
Chapitre II: Résultats numériques		p.220
II-1 Mise en oeuvre numérique		p. 220
II-2 Tests numériques		p. 224
Annexe		p.233
Références bibliographiques		p.241

INTRODUCTION

Cette étude porte sur les aspects théoriques et numériques d'une approche dépendant du temps du problème de calcul de la Surface Equivalente Radar (SER).

L'idée directrice qui guide cette étude est que le cadre naturel du problème de la diffraction d'une onde par un obstacle est celui des phénomènes *d'évolution*. On sait, par exemple, que l'optique géométrique, la T.G.D., les notions de rayons captifs et de rayons rampants sont élucidées grâce à l'analyse microlocale de la propagation des singularités d'une onde dépendant du temps. Puisque les informations les plus fines sur les aspects théoriques du problème de la diffraction ont été obtenues par des méthodes dépendant du temps, on peut espérer que des techniques de ce genre s'avèrent fructueuses dans l'étude numérique de la diffraction, et en particulier, dans le calcul de la S.E.R.

La partie A de ce travail est consacrée à l'étude du problème mixte pour l'équation des ondes en présence d'un obstacle inhomogène, composé d'un corps réfléchissant ou absorbant recouvert d'une couche de matériau transparent ou dissipatif. En employant la théorie abstraite de la diffraction développée par Lax et Phillips [16], [17], nous avons montré l'existence de l'opérateur de diffraction. Dans le cas d'un obstacle sans couche [21] ou un obstacle transparent [24], le noyau de diffraction admet une représentation intégrale espace-temps. Nous avons trouvé une formulation intégrale similaire pour l'obstacle inhomogène. Cette représentation nous a permis d'établir le lien entre le noyau de diffraction et l'amplitude de diffusion. Nous en avons déduit un procédé de calcul dépendant du temps de l'amplitude de diffraction. Nous donnons également des conditions suffisantes sur l'obstacle pour qu'aucune onde incidente ne soit totalement absorbée en temps fini.

L'emploi des équations intégrales dans un domaine espace-temps est courant dans l'étude de la diffraction d'ondes électromagnétiques en régime transitoire: on peut citer par exemple les travaux de Bennett et Weeks [4], Jecko [14] et Miller, Poggio et Burke [25]. Tous ces auteurs utilisent des méthodes de discrétisation par collocations. Or l'analyse mathématique des propriétés de ces méthodes pose des problèmes difficiles, en particulier en ce

qui concerne la stabilité. Néanmoins leur expérimentation numérique a donné de bons résultats. La méthode des équations intégrales espace-temps, introduite par A. Bamberger et T. Ha Duong [1], [12] pour le problème de la diffraction d'ondes acoustiques dans \mathbb{R}^3 , permet de démontrer des résultats de stabilité et de convergence sur les schémas qu'elle engendre. Par ailleurs, les expériences numériques de Y. Ding [9] sur le problème de Neumann pour l'équation des ondes dans \mathbb{R}^3 et celles de E. Becache [5], [6] dans le cas d'ondes en milieu élastique ont montré l'efficacité de cette approche. Aussi nous avons développé dans la partie B une formulation analogue pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par un cylindre infini (problème 2D+1) et un obstacle borné (problème 3D+1). Après discrétisation par une méthode d'éléments finis en espace et en temps, nous avons obtenu des schémas de calcul des courants constructifs, stables et convergents.

La partie C présente l'étude numérique du problème 2D+1, dans le cas où l'obstacle cylindrique est un conducteur parfait. On a pu comparer nos résultats à ceux du code harmonique BENOUE du CEA-CESTA grâce à un principe d'amplitude limite: les calculs de courant et de SER (Surface Equivalente Radar) donnés par la méthode intégrale espace-temps sont conformes avec ceux obtenus dans le cas fréquentiel. On a montré que nos schémas étaient stables en simulant la diffraction d'une impulsion brève. Ainsi peut-on espérer développer à l'aide de cette méthode un code de calcul efficace pour les problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques.

Partie A

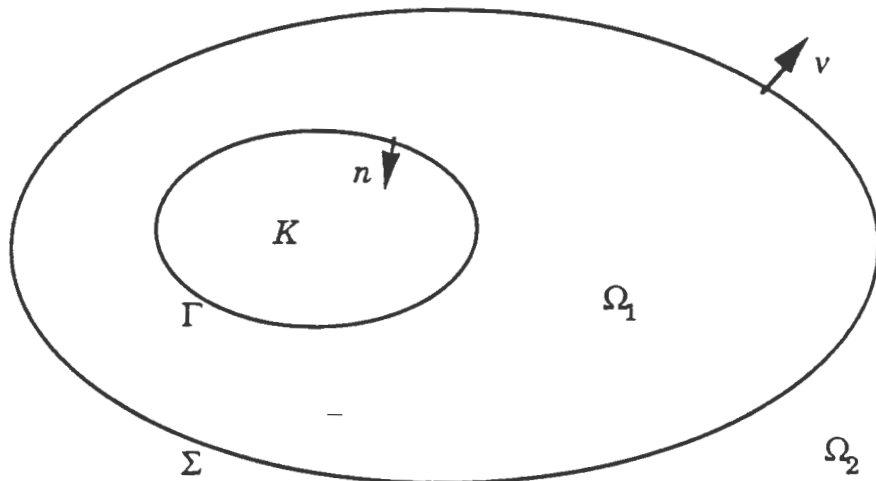
**DIFFRACTION PAR UN OBSTACLE
INHOMOGENE**

INTRODUCTION

La théorie de la diffraction par un obstacle homogène d'une onde dépendant du temps a été développée par Lax et Philipps (1967, 1973) [16]. Un progrès important fut accompli en 1977 par A. Majda [21] qui obtint une représentation intégrale du noyau de diffraction. La première partie de cette étude a consisté à étendre ces résultats au cas d'un obstacle homogène composé d'un corps réfléchissant ou absorbant, recouvert d'une couche d'un matériau transparent ou dissipatif. Nous avons établi l'existence de l'opérateur de diffraction S et une représentation intégrale de son noyau. Nous donnons également des conditions suffisantes sur les caractéristiques de l'obstacle pour que celui-ci soit *controlable*, c'est-à-dire qu'aucune onde incidente ne soit totalement absorbée en temps fini. Nous montrons enfin que le calcul de l'amplitude de diffraction se ramène à celui des traces des ondes incidentes périodiques dépendant du temps sur la frontière de l'obstacle sur un intervalle de temps suffisamment long.

Le Problème perturbé

Nous considérons le problème de la diffraction d'une onde u par un obstacle immobile \mathcal{O} c'est-à-dire un compact de l'espace \mathbb{R}^3 . L'obstacle est éventuellement inhomogène et composé d'un corps K recouvert d'une couche $\bar{\Omega}_1$ d'un matériau transparent ou dissipatif, au sein duquel les ondes peuvent se propager à des vitesses différentes et en perdant de l'énergie. On désigne par Ω_2 l'espace libre environnant, c'est-à-dire le complémentaire de \mathcal{O} dont on note Σ la frontière.



$$\mathcal{O} = K \cup \bar{\Omega}_1, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \Gamma = \partial K, \quad \Sigma = \partial \Omega_2$$

\vec{n} normale à Γ extérieure à Ω_1

\vec{v} normale à Σ extérieure à Ω_1

Les unités étant choisies pour que la vitesse de propagation soit 1 dans l'espace libre, l'onde u vérifie l'équation des ondes en dehors de l'obstacle i.e dans Ω_2 :

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0$$

On suppose que u satisfait les conditions de transmission à l'interface Σ de l'obstacle et de l'espace libre :

$$u_1 = u_2$$

$$\partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2$$

où u_i et $\partial_\nu u_i$ sont les traces sur Σ de u et de sa dérivée normale, restreint à Ω_i .

Dans la couche Ω_1 , la vitesse de propagation $c(x) < 1$ dépend a priori du point $x \in \Omega_1$ et on introduit l'indice de réfraction $r(x) = c^{-2}(x) > 0$. La couche peut être dissipative et il apparaît alors un terme d'amortissement dans l'équation faisant intervenir un paramètre de conductivité $\beta(x) \geq 0$ (loi d'Ohm dans le cas de l'électromagnétisme) :

$$r(x)\partial_t^2 u - \Delta_x u + \beta(x)\partial_t u = 0$$

Si la conductivité β est nulle, la couche est dite transparente.

A la surface Γ du corps K , l'onde vérifie une condition aux limites qui dépend de la nature de Γ et que l'on note symboliquement :

$$\mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0.$$

Si le corps K est réfléchissant, on distingue le cas de la surface libre modélisée par la condition de Dirichlet :

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

et le cas de la surface rigide pour lequel on impose la condition de Neumann :

$$\partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma;$$

on peut aussi considérer le cas mêlé :

$$\partial_n u + \gamma(x)u = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \gamma(x) \geq 0,$$

où γ est une fonction régulière positive sur Γ .

Si la surface de K est absorbante, u satisfait une condition aux limites dissipative (de type Robin ou d'impédance en électromagnétisme) :

$$\partial_n u + \alpha(x)\partial_t u + \gamma(x)u = 0 \text{ sur } \Gamma$$

où $\alpha(x) \geq 0$, $\gamma(x) \geq 0$ sont des fonctions définies sur Γ .

Dans le cas de la condition de Dirichlet on ne fait aucune hypothèse de régularité sur Γ , dans les autres cas on suppose que Γ est régulière.

On définit l'énergie $E(u(t))$ d'une onde u à l'instant t :

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{r}(x) |\partial_t u(t, x)|^2 + |\nabla_x u(t, x)|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \gamma(x) |u(t, x)|^2 d\Gamma(x)$$

où $\tilde{r}(x) = 1$ dans Ω_2 et $\tilde{r}(x) = r(x)$ dans Ω_1 . Si le corps K est réfléchissant et la couche Ω_1 transparente, l'énergie totale de u est conservée, soit la quantité $E(u(t))$ est indépendante du temps t . Dans le cas contraire (la surface Γ est absorbante ou la couche Ω_1 est dissipative), il y a dissipation d'énergie, c'est-à-dire que l'énergie décroît au cours du temps

$$E(u(t)) \leq E(u(s)), \quad 0 \leq s \leq t$$

il peut même arriver que l'obstacle absorbe toute l'énergie de certaines ondes incidentes qui s'annulent alors en temps fini. De telles ondes sont dites évanescentes et on parle d'obstacle non contrôlable.

L'opérateur reliant les données initiales $(u(0), \partial_t u(0))$ aux données au temps t , $(u(t), \partial_t u(t))$, où u est la solution du problème de Cauchy écrit ci-dessus, est noté $U(t)$. Dans le cas où l'énergie est conservée, on montre que ces opérateurs forment un groupe unitaire dans la norme énergie. Dans le cas où l'énergie est dissipée, la famille d'opérateurs $U(t)$ définis sur l'espace des données d'énergie finie est un semi-groupe de contraction.

En employant les techniques de Lax-Phillips ([16] pour le cas conservatif, [17] pour le cas dissipatif), on prouve la décroissance de l'énergie locale: l'énergie contenue dans tout voisinage sphérique de l'obstacle tend vers 0 quand le temps tend vers l'infini pour toute solution d'énergie finie. Une conséquence de ce résultat est l'existence des opérateurs d'onde qui permettent de comparer le comportement des solutions de l'équation des ondes dans l'espace vide (i.e sans obstacle) et des solutions du système perturbé.

1- Espace d'énergie finie-Opérateur $U(t)$

On étudie les solutions du problème mixte:

$$(P) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Omega_2 \\ (r(x)\partial_t^2 - \Delta) u + \beta(x)\partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Omega_1 \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Sigma \\ \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Sigma \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Gamma \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = (f_1, f_2) = f \end{cases}$$

où la notation $\mathbb{R}_t^{(+)}$ signifie qu'on prend \mathbb{R}_t lorsque le corps K est réfléchissant et la couche Ω_1 transparente, sinon on choisit \mathbb{R}_t^+ . On fait les hypothèses suivantes sur les fonctions r , β , γ et α , ces deux dernières apparaissant dans la condition aux limites dissipative:

($\mathcal{H}1$) Les fonctions r et β sont analytiques dans Ω_1 , continues sur $\bar{\Omega}_1$ et $r(x) > 0$, $\beta(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}_1$.

($\mathcal{H}2$) les fonctions définies sur Γ , α et γ , sont \mathcal{C}^∞ et positives

On note $E_R(u(t))$ l'énergie contenue dans l'ouvert $\Omega \cap B(0, R) = \{x \in \Omega / |x| < R\}$ d'une solution u de (P) considérée au temps t :

$$E_R(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \cap B(0,R)} (\tilde{\gamma}(x) |\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla_x u(t,x)|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \gamma(x) |u(t,x)|^2 d\Gamma(x)$$

THEOREME 1-1: Soit $u \in \mathcal{E}^2(\mathbb{R}_t^+ \times \Omega)$ une solution du problème (P). Alors on a l'inégalité suivante, pour tout $R > 0$ tel que $B(0,R) \supset \Omega_1 \cup K$

$$(1-1) \quad E_R(u(t)) \leq E_{R+T}(u(0)) \quad , \quad \forall T > 0$$

Preuve

De façon classique, on multiplie l'équation suivante par $\partial_t u$

$$(\tilde{\gamma}(x) \partial_t^2 - \Delta)u + \tilde{\beta}(x) \partial_t u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega$$

où $\tilde{\beta}$ a été définie presque partout sur Ω par:

$$\tilde{\beta}(x) = 0 \quad , \quad x \in \Omega_2 \quad , \quad \tilde{\beta}(x) = \beta(x) \quad , \quad x \in \Omega_1$$

Puis on intègre sur le domaine espace-temps G

$$G = \{(x, t) \in \Omega \times [0, T] / |x| \leq R + T - t\} .$$

Des intégrations par parties et l'emploi de la formule de Green amène à l'identité:

$$\begin{aligned} E_R(u(t)) - E_{R+T}(u(0)) = & - \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma} \alpha(x) |\partial_t u(t,x)|^2 d\Gamma(x) dt + \int_G \tilde{\beta}(x) |\partial_t u(t,x)|^2 dx dt \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{|x|=R+T-t} [|\nabla_x u(t,x)|^2 + |\partial_t u(t,x)|^2 - 2\partial_t u(t,x) \partial_n u(t,x)] dS_{t,x} \right. \end{aligned}$$

Il est clair, d'après les hypothèses sur α et β , que le membre de droite de cette égalité est négatif. Le théorème en résulte. ~~☞~~

On introduit l'espace d'énergie finie H des fonctions $f = (f_1, f_2)$ telles que $f_1 \in H_1$ et $f_2 \in L^2_{\gamma}(\Omega)$. L'espace H_1 est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, suivant que la condition sur le bord \mathcal{B} est une condition de type Dirichlet ou une condition mixte, pour la norme:

$$\|f_1\|_{H_1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla f_1(x)|^2 dx \quad \text{si } \mathcal{B}f = f_1|_{\Gamma} \text{ ou } \mathcal{B}f = \partial_n f_1|_{\Gamma}$$

$$\|f_1\|_{H_1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla f_1(x)|^2 dx + \int_{\Gamma} \gamma(x) |f_1|^2 d\Gamma(x) \quad \text{si } \mathcal{B}f = (\partial_n f_1 + \alpha f_2 + \gamma f_1)|_{\Gamma} \quad (\gamma > 0)$$

Si \mathcal{B} désigne une condition aux limites de Dirichlet, on voit que $H_1 = BL_0^1(\Omega)$ sinon $H_1 = BL^1(\Omega)$ où $BL^1(\Omega)$ et $BL_0^1(\Omega)$ ne sont autres que les espaces dits de Beppo-Levi. On définit la norme énergie par:

$$\|f\|^2 = \|f_1\|_{H_1}^2 + \|(\tilde{r})^{1/2} f_2\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et le produit correspondant sera noté $(\cdot, \cdot)_H$.

Pour démontrer que les opérateurs $U(t)$ forment un groupe unitaire (cas conservatif) ou un semi-groupe de contraction (cas dissipatif) dans la norme énergie, on passe par l'étude du générateur infinitésimal A de $U(t)$ restreint à un espace $D(A)$ bien défini. Alors $U(t) = e^{tA}$ est bien défini et nous fournit une solution faible de (P) pour des données initiales d'énergie finie.

1-1. Cas conservatif

On s'intéresse ici au cas d'une couche Ω_1 transparente soit $\beta(x) = 0, \forall x \in \Omega_1$ et la condition aux limites \mathcal{B} préserve l'énergie:

$$\mathcal{B}(u, \partial_t u) = u|_{\Gamma} \text{ ou } \mathcal{B}(u, \partial_t u) = \partial_n u|_{\Gamma}$$

On résout le problème (P) en considérant $u(t, x)$ comme une fonction définie sur \mathbb{R}_t à valeurs dans un espace vectoriel. On écrit l'équation

$$(\tilde{r}(x) \partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega$$

sous la forme:

$$\frac{dV}{dt} - AV = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t$$


où on a posé $V(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ avec l'opérateur A défini comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{r}^{-1} \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

de domaine $D(A) = \{f = (f_1, f_2) \in H / \Delta f_1 \in L^2(\Omega), f_2 \in H_1, \mathcal{B}(f_1, f_2) = 0\}$. On remarque que l'on a incorporé la condition aux limites dans la définition du domaine de A (on est redondant quand $\mathcal{B}(u, \partial_t u) = u|_{\Gamma}$ puisque cette condition est déjà dans l'espace H) et que tout f dans $D(A)$ vérifie les conditions de transmission.

THEOREME 1-2: Si $f \in D(A)$ alors $\partial_x^2 f_1$ et $\partial_x f_2$ appartiennent à $L^2(\Omega)$.

Preuve

C'est une conséquence de la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques (voir Lions-Magenes [20], tome I, chap. 2). 

THEOREME 1-3: *A est anti-autoadjoint.*

Preuve

On procède en trois étapes: on montre d'abord que $D(A)$ est dense dans H puis on prouve que A est anti-symétrique, enfin on conclut en disant que l'adjoint de A , A^* , est un prolongement de $-A$.

i) $D(A)$ est dense dans H

Dans le cas où \mathcal{B} est une condition aux limites de Dirichlet, il suffit de noter que $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \subset D(A)$. Si \mathcal{B} est une condition aux limites de Neumann, puisque $\mathcal{D}_n(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \subset D(A)$, on en déduit la densité de $D(A)$ dans H .

ii) A est anti-symétrique

Soit f dans $D(A)$. On choisit, suivant la condition sur Γ , g dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ ou dans $\mathcal{D}_n(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Alors on a:

$$(Af, g) = (\nabla f_2, \nabla g_1)_{L^2(\Omega)} + (\Delta f_1, g_2)_{L^2(\Omega)}$$

En appliquant la formule de Green, on trouve que:

$$(Af, g) = (\nabla f_2, \nabla g_1)_{L^2(\Omega)} - (\nabla f_1, \nabla g_2)_{L^2(\Omega)}$$

De même on calcule:

$$\begin{aligned} (f, Ag) &= (\nabla f_1, \nabla g_2)_{L^2(\Omega)} + (f_2, \Delta g_1)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\nabla f_1, \nabla g_2)_{L^2(\Omega)} - (\nabla f_2, \nabla g_1)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

On a donc obtenu pour tout f dans $D(A)$ et pour tout g dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{D}_n(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ la relation:

$$(1-2) \quad (Af, g) = -(f, Ag)$$

Soit maintenant g dans $D(A)$. Puisque $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{D}_n(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ (suivant la condition aux limites) est dense dans $D(A)$ pour la norme du graphe

$$\| \|f\| \|^2 = \|f\|^2 + \|Af\|^2$$

il existe une suite de fonctions g_k dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{D}_n(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ qui converge vers g pour k tendant vers l'infini et qui vérifie:

$$(Af, g_k) = -(f, Ag_k)$$

En passant à la limite sur k , on a l'égalité (1-2) pour tout $(f, g) \in D(A) \times D(A)$.

iii) A^* est un prolongement de $-A$

Soit g un élément quelconque de $D(A^*)$ et $h = A^*g$, $h \in H$. Il faut vérifier que $g \in D(A)$ et que $A^*g = -Ag$. Puisque $h = A^*g$, on a pour toute fonction f dans $D(A)$:

$$(1-3) \quad (Af, g) = (f, h)$$

En particulier, on peut écrire (1-3) pour $f = (f_1, 0)$:

$$(1-4) \quad (\Delta f_1, g_2)_{L^2(\Omega)} = (\nabla f_1, \nabla h_1)_{L^2(\Omega)}$$

On choisit f_1 de la façon suivante: soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, l'application

$$\psi \longmapsto \int_{\Omega} \varphi \bar{\psi} dx$$

est sesquilinéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{D}_n(\bar{\Omega})$ dans \mathbb{C} . Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $BL_0^1(\Omega)$ et $\mathcal{D}_n(\bar{\Omega})$ est dense dans $BL^1(\Omega)$, on peut prolonger l'application définie ci-dessus à tout H_1 . Alors d'après le théorème de représentation de Riesz il existe un unique élément f_1 de H_1 tel que:

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ ou } \mathcal{D}_n(\bar{\Omega}), \int_{\Omega} \varphi \bar{\psi} dx = (f_1, \psi)_{H_1}$$

ce qui implique $\varphi = -\Delta f_1$ au sens des distributions. En substituant dans (1-4) Δf_1 par $-\varphi$ et en utilisant

$$(\varphi, h_1)_{L^2(\Omega)} = (\nabla f_1, \nabla h_1)_{L^2(\Omega)}$$

on trouve que

$$-(\varphi, g_2)_{L^2(\Omega)} = (\varphi, h_1)_{L^2(\Omega)}$$

et donc

$$(1-5) \quad h_1 = -g_2$$

Si maintenant on choisit $f = (0, f_2)$ avec $f_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{D}_n(\bar{\Omega})$ tel que f vérifie (1-3), on a:

$$(1-6) \quad (\nabla f_1, \nabla g_2)_{L^2(\Omega)} = (f_2, \tilde{r} h_2)_{L^2(\Omega)}$$

Par conséquent, l'égalité

$$(1-7) \quad -\Delta g_1 = \tilde{r} h_2$$

est satisfaite au sens des distributions. Dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet, les équations (1-5) et (1-7) et le fait que $h = A^*g \in H$ nous fournissent directement la conclusion soit $g \in D(A)$, $A^*g = -Ag$. Si $\mathcal{B}f = \partial_n f_1$ alors on doit de

plus vérifier que $\partial_n g_1 = 0$ au sens des distributions puisque la conditions sur le bord Γ n'est pas contenue dans l'espace H_1 contrairement à ce qui se passe dans le cas Dirichlet. Reprenons les deux égalités (1-6) et (1-7). Comme

$h_2 \in L^2_{\tilde{\gamma}}(\Omega)$, $\Delta g_1 \in L^2(\Omega)$, en remplaçant $\tilde{\gamma} h_2$ dans (1-6) par $-\Delta g_1$ on a:

$$(\nabla f_1, \nabla g_2)_{L^2(\Omega)} = (f_2, -\Delta g_1)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f_2 \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

On en déduit que $\partial_n g_1 = 0$ au sens $\mathcal{D}'(\Gamma)$.

L'opérateur A génère, d'après le théorème de Stone, un groupe d'opérateurs unitaires $U(t) = e^{tA}$ tels que:

a) $\forall f \in H$, $t \mapsto U(t)f$ est une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, H)$

b) $\forall f \in D(A)$, $t \mapsto U(t)f$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_t, H) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$ et on a:

$$\frac{d}{dt} U(t)f = A U(t)f = U(t)Af$$

THEOREME 1-4: Pour toute donnée initiale f dans $D(A)$, il existe une unique solution u de (P), $u(t, x) = [U(t)f]_1(x)$ telle que:

$$(1-8) \quad (u, \partial_t u) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_t, H) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$$

Preuve


La propriété b) des opérateurs $U(t)$ nous donne l'existence d'une solution au problème (P). Il reste donc à vérifier l'unicité d'une telle solution. Celle-ci provient de l'inégalité d'énergie (1-1). En effet, la condition de régularité (1-8) et le théorème 1-2 permettent d'écrire la formule de Green utilisée dans la démonstration du théorème 1-1 pour u .

On peut ajouter un résultat de régularité.

PROPOSITION 1-1: Si $f \in \bigcap_k D(A^k)$ alors $u_{i, \Omega_i} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega}_i)$ pour $i = 1$ ou 2 où $u(t, \cdot) = [U(t)f]_1$.

Preuve

Si $f \in \bigcap_k D(A^k)$ alors $U(t)f \in \bigcap_k D(A^k)$. Le théorème 1-2 de régularité elliptique et le théorème d'inclusion de Sobolev impliquent que u est dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Et puisque u vérifie:

$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_2)$, $r(x)\partial_t^2 u - \Delta_x u + \beta(x)\partial_t u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_1)$
on a la régularité $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega}_i)$ pour la restriction de u à Ω_i . 

1-2. Cas dissipatif

On s'intéresse maintenant au problème qui vérifie une condition de dissipation d'énergie: si la couche est transparente ($\beta(x)=0$), la condition sur le bord Γ est dissipative:

$$\partial_n u + \alpha(x)\partial_t u + \gamma(x)u = 0 \quad \text{avec } \alpha(x) > 0 \text{ et } \gamma(x) \geq 0, \forall x \in \Gamma$$

si au contraire la couche est dissipative ($\beta \neq 0$) alors l'onde diffractée u peut vérifier une condition aux limites de Dirichlet:

$$u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma$$

ou une condition mixte:

$$\partial_n u + \alpha(x)\partial_t u + \gamma(x)u = 0 \quad \text{avec } \alpha(x) \geq 0 \text{ et } \gamma(x) \geq 0, \forall x \in \Gamma.$$

Le problème (P) étant ainsi précisé, on veut exprimer la solution de ce problème de données initiales f par l'action d'un semi-groupe de contraction. Dans ce but, on définit l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{r}^{-1}\Delta & -\tilde{\beta}/\tilde{r} \end{pmatrix}$$

de domaine $D(A) \subset H$ déterminé comme la fermeture dans la norme du graphe de l'ensemble X

$$X = \{f = (f_1, f_2) \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \mathcal{B}f = 0\}$$

De façon plus explicite on a

$$D(A) = \{f \in H / \Delta f_1 \in L^2(\Omega), f_2 \in H_1 \text{ et } \mathcal{B}f = 0\}$$

La théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques nous donne le théorème suivant.

THEOREME 1-5: *Pour tout f dans $D(A)$ on a:*

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{|\eta|=2} |\partial_x^\eta f_1|^2 + \sum_{|\xi|=1} |\partial_x^\xi f_2|^2 \right) dx \leq Cste (\|f\|^2 + \|Af\|^2)$$

Pour montrer que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction, on prouve ce qui suit.

THEOREME 1-6: A est un opérateur maximal dissipatif de domaine dense dans H .

Preuve

Il est clair que X est dense dans H . Puisque $X \subset D(A)$, $D(A)$ est dense dans H . Il est facile de voir que l'opérateur A est dissipatif. En effet on a:

$$\forall f, g \in D(A) \quad (Af, g) + (f, Ag) = -2 \int_{\Gamma} \alpha |f_2|^2 d\Gamma - 2 \int_{\Omega_1} \beta |f_2|^2 dx \leq 0$$

Il reste à montrer que A est maximal dissipatif. Pour cela, il suffit que l'image de $A - Id$ soit H . On va procéder comme V. Petkov [28] en deux étapes: d'abord prouver que $Im(A - Id)$ est fermé puis que $Im(A - Id)$ est dense dans H .

L'opérateur A étant dissipatif, on a pour tout f dans $D(A)$

$$\|f\|^2 \leq \operatorname{Re}((Id - A)f, f)$$

soit

$$\|f\| \leq \|(A - Id)f\|$$

Or A est un opérateur fermé donc $Im(A - Id)$ est fermé. On considère maintenant le problème:

$$(1-9) \quad \begin{cases} (A - Id)\Phi = h \\ \partial_n \Phi_1 + \gamma \Phi_1 + \alpha \Phi_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \Phi_1/\Omega_1 = \Phi_1/\Omega_2, \partial_\nu \Phi_1/\Omega_1 = \partial_\nu \Phi_1/\Omega_2 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

avec $h = (h_1, h_2)$ dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Comme $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans H , l'ensemble $Im(A - Id)$ sera dense dans H s'il existe une solution Φ de (1-9) dans $D(A)$. On est ramené à résoudre le problème:

$$(1-10) \quad \begin{cases} (\Delta - (\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}))\Phi_1 = (\tilde{\gamma} + \tilde{\beta})h_1 + \tilde{\gamma}h_2 \text{ dans } \Omega \\ \partial_n \Phi_1 + (\gamma + \alpha)\Phi_1 = -\alpha h_1 \text{ sur } \Gamma \\ \Phi_1/\Omega_1 = \Phi_1/\Omega_2, \partial_\nu \Phi_1/\Omega_1 = \partial_\nu \Phi_1/\Omega_2 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

Soit $l(\varphi) = ((\tilde{\gamma} + \tilde{\beta})h_1 + \tilde{\gamma}h_2, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\alpha h_1, \varphi)_{L^2(\Gamma)}$. On introduit la norme:

$$[\varphi]^2 = \int_{\Omega} (|\nabla \varphi|^2 + (\tilde{\gamma} + \tilde{\beta})|\varphi|^2) dx + \int_{\Gamma} (\alpha + \gamma)|\varphi|^2 d\Gamma$$

et on considère l'espace H_1' fermeture de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ pour la norme $[\cdot]$. La forme linéaire l est continue dans H_1' d'où, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe g dans H_1' tel que:

$$l(\varphi) = [g, \varphi] = \int_{\Omega} (\nabla g \cdot \nabla \bar{\varphi} + (\tilde{\gamma} + \tilde{\beta})g\bar{\varphi}) dx + \int_{\Gamma} (\alpha + \gamma)g\bar{\varphi} d\Gamma$$

Si on prend φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors

$$(1-11) \quad f = -\Delta g + (\tilde{\gamma} + \tilde{\beta})g \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Si on choisit maintenant φ dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, on obtient au sens des distributions

$$(\alpha + \gamma)g + \partial_n g = -\alpha h_1$$

On a donc obtenu une solution faible de (1-9). Puisque $f \in L^2(\Omega)$, on déduit de (1-11) que $\Delta g \in L^2(\Omega)$. Alors on a trouvé une solution de (1-9) dans $D(A)$:


$$\Phi_1 = g, \quad \Phi_2 = g + h_1$$

On en tire la conclusion du théorème 1-6. 

THEOREME 1-7: *L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $U(t) = e^{tA}$. De plus si f est une donnée dans $D(A)$, le problème (P) admet une unique solution $(u(t), \partial_t u(t)) = U(t)f$ telle que:*

$$(1-12) \quad (u, \partial_t u) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t^+, D(A)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_t^+, H)$$

Preuve

On utilise les mêmes arguments que dans le cas conservatif. Les propriétés d'un semi-groupe de contraction nous permettent de dire que pour f dans $D(A)$, $[U(t)f]_1$ est solution du problème (P) et vérifie la condition de régularité (1-12). L'unicité d'une telle solution provient du fait qu'on peut écrire l'inégalité d'énergie (1-1). 

On peut écrire l'équivalent de la proposition 1-1, qui se démontre de la même façon.

PROPOSITION 1-2: *Si $f \in \bigcap_k D(A^k)$ alors $u_{i\Omega_i} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \bar{\Omega}_i)$ pour $i = 1$ ou 2 où $u(t, \cdot) = [U(t)f]_1$.*

2- Décroissance de l'énergie locale

Le problème de la diffraction conduit à l'étude du comportement asymptotique de l'onde quand le temps t tend vers l'infini. En particulier, l'énergie locale $E_R(u(t))$ d'une solution $u(t) = [U(t)f]_1$ du problème (P) d'énergie finie tend vers zéro quand t tend vers l'infini. La preuve de cette décroissance d'énergie locale utilise le fait que, sous les hypothèses $\mathcal{H}1$ et $\mathcal{H}2$, il n'existe pas d'onde périodique en temps de la forme $[U(t)f]_1$ d'énergie finie et la propriété de précompacité suivante:

THEOREME 2-1: *L'ensemble $\{f \in H / \|f\| + \|Af\| \leq 1\}$ est précompact pour toute norme d'énergie locale $\|\cdot\|_R$ avec $R > \rho$ (ρ tel que $B(0, \rho) \supset K \cup \overline{\Omega}_1$)*

On a défini l'énergie locale sur $B(0, R)$, $R > \rho$ pour $f = (f_1, f_2) \in H$ par:

$$(2-1) \quad \|f\|_R^2 = \int_{\Omega_1} (|\nabla f_1(x)|^2 + r(x)|f_2(x)|^2) dx \\ + \int_{\Omega_2 \cap B(0, R)} (|\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2) dx + \int_{\Gamma} \gamma(x) |f_1(x)|^2 d\Gamma(x)$$

Preuve

Le théorème 1-2 ou 1-5 montre que:

$$\|f_2\|_{H^1(\Omega \cap B(0, R))} \leq C, \quad \|f_1\|_{H^2(\Omega \cap B(0, R))} \leq C'$$

Le théorème de compacité de Rellich permet de conclure. 

Dans le cas général on note H_b l'espace de Hilbert engendré par les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres purement imaginaires et on désigne par H_b^\perp l'orthogonal de H_b sur H . On montre qu'alors $H_b^\perp = H$.

2-1. Propriétés spectrales de A

On fait d'abord quelques rappels sur l'équation des ondes dans l'espace libre. Pour plus de détails, on renvoie à [16] ou [28].

On introduit la norme énergie de $f=(f_1, f_2) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$(2-2) \quad \|f\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2) dx$$

L'espace des données d'énergie finie H_0 est défini comme étant le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ pour la norme (2-2). On a donc $H_0 = BL^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$.

On désigne par $U_0(t)$ l'opérateur reliant les données initiales aux états aux temps t de la solution du problème libre:

On étudie les solutions du problème mixte:

$$(P_0) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = (f_1, f_2) = f \end{cases}$$

Les opérateurs $\{U_0(t), t \in \mathbb{R}\}$ forment un groupe unitaire sur H_0 dont le générateur infinitésimal est noté A_0 :

$$(2-3) \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

De plus nous énonçons une proposition dont nous aurons besoin par la suite:

PROPOSITION 2-1: *Soit une donnée f d'énergie finie ($f \in H_0$). On suppose que pour tout réel σ non nul, on a:*

$$(A_0 - i\sigma)f = 0 \text{ pour } |x| > r.$$

Alors $f(x) = 0$ pour $|x| > r$.

Nous utilisons ces rappels dans la démonstration du théorème suivant:

THEOREME 2-2: *Si la frontière Σ et les fonctions r et β sont analytiques, A ne possède pas de valeur propre purement imaginaire.*

Preuve

Commençons par prouver que 0 n'est pas une valeur propre. Soit f un vecteur propre associé à la valeur propre 0 alors sa seconde composante f_2 s'annule tandis que sa première composante f_1 est une fonction harmonique

qui satisfait soit une condition aux limites de Dirichlet homogène soit la condition mixte:

$$\partial_n f_1 + \gamma f_1 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

D'autre part, f appartient au domaine de l'opérateur A donc en particulier $f_1 \in H_1$. Dans le cas d'une condition au bord de type Dirichlet, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans H_1 , on choisit une suite de fonctions $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers f_1 sinon on prend $\varphi_k \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. On écrit la formule de Green:

$$\int_{\Omega} \Delta f_1 \cdot \bar{\varphi}_k dx = - \int_{\Omega} \nabla f_1 \cdot \nabla \bar{\varphi}_k dx + \int_{\Gamma} \partial_n f_1 \cdot \bar{\varphi}_k d\Gamma(x)$$

Bien sûr si $\mathcal{B}(f_1, 0) = f_1/\Gamma$ ou $\mathcal{B}(f_1, 0) = \partial_n f_1/\Gamma$, le dernier terme s'annule. On a donc:

$$(f_1, \varphi_k)_{H_1} = 0$$

En passant à la limite, on en déduit que:

$$\|f_1\|_{H_1} = 0$$

Dans le cas d'une condition de Dirichlet, la conclusion $f_1 = 0$ est immédiate. Dans le cas d'une condition mixte, l'espace H_1 est inclus $W^1(\Omega)$ (voir pour la définition [8]). Comme $\nabla f_1 = 0$ soit $f_1 = Cste$, le comportement à l'infini des fonctions de $W^1(\Omega)$ impose que $f_1 = 0$.

Il reste à vérifier maintenant que pour $\sigma \neq 0$, le complexe $i\sigma$ n'est pas une valeur propre de A . Soit f une fonction de $D(A)$ vérifiant:

$$(2-4) \quad Af = i\sigma f$$

et soit χ une fonction \mathcal{C}^∞ qui s'annule au voisinage de $\Omega_1 \cup K$ et qui vaut 1 pour tout $|x| > \rho$. On pose $g = \chi f$ alors g est défini partout, est d'énergie finie soit $g \in H_0$ et satisfait:

$$(A_0 - i\sigma)g = h$$

avec h nulle pour $|x| > \rho$. La proposition 2-1 implique que $g = 0$ pour $|x| > \rho$, donc $f = 0$ pour $|x| > \rho$. Dans l'ouvert Ω_2 , la première composante de f est solution de l'équation elliptique:

$$(\Delta + \sigma^2)f_1 = 0$$

et d'autre part $f_2 = i\sigma f_1$. Les solutions d'une telle équation sont analytiques dans Ω_2 , il s'ensuit que f s'annule dans Ω_2 . Regardons ce qu'il se passe dans Ω_1 . L'égalité (2-4) nous donne:

$$(2-5) \quad \begin{cases} (\Delta + \sigma^2 r(x) - i\sigma \beta(x))f_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ f_2 = i\sigma f_1 \text{ dans } \Omega_1 \end{cases}$$

et puisque $f \in D(A)$, on a aussi les conditions de transmission:

$$f_1 = 0, \partial_\nu f_1 = 0 \text{ sur } \Sigma$$

De (2-4) et de l'analyticité de r et β , on tire que f est analytique dans Ω_1 . On va distinguer deux cas: le cas conservatif ($\beta(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_1$) et le cas dissipatif ($\beta \neq 0$). On commence par le premier de ces cas.

On note:

$$P(x, \partial)g = \Delta g + \sigma^2 \tilde{r}(x) \Pi_{\Omega_1}(x)g \text{ dans } \Omega$$

où Π_{Ω_1} désigne la fonction caractéristique de Ω_1 . Soit un point x_0 de la frontière Σ . Il existe un voisinage de x_0 , \mathcal{V} , tel que la fonction \tilde{r} restreint à ce voisinage soit analytique. On pose alors:

$$Q(x, \partial) = \Delta + \sigma^2 \tilde{r} \text{ dans } \mathcal{V}, \quad Q(x, \partial) = P(x, \partial) \quad \forall x \in \Omega_1 \cap \mathcal{V}$$

Puisque $f \in D(A)$, sa première composante f_1 est telle que $Qf_1 \in L^2(\mathcal{V})$. D'autre part, f_1 est nulle dans Ω_2 donc:

$$Qf_1 \cdot \Pi_{\Omega_2 \cap \mathcal{V}} = 0$$

L'équation (2-5) avec $\beta = 0$ entraîne que:

$$Qf_1 \cdot \Pi_{\Omega_1 \cap \mathcal{V}} = 0$$

D'où Qf_1 est nul sur \mathcal{V} et f_1 est nulle sur $\Omega_2 \cap \mathcal{V}$. Le théorème d'Holmgren (avec coefficients analytiques) dit alors qu'il existe un voisinage de x_0 , \mathcal{W} , tel que $f_1|_{\mathcal{W}} = 0$. On en déduit que f s'annule aussi dans Ω_1 .

Passons maintenant au cas dissipatif. En multipliant (2-5) par \bar{f}_1 et en intégrant sur Ω_1 , une simple formule de Green donne:

$$(2-6) \quad -\int_{\Omega_1} |\nabla f_1|^2 dx + \int_{\Gamma} \partial_n f_1 \cdot \bar{f}_1 d\Gamma = \int_{\Omega_1} i\sigma(\beta(x) + i\sigma r(x)) |f_1|^2 dx$$

Sachant que, sur le bord Γ , on a:

$$\partial_n f_1 + \gamma f_1 + i\sigma \alpha f_1 = 0$$

en remplaçant dans l'identité (2-6) $\partial_n f_1$ par $-(\gamma f_1 + i\sigma \alpha f_1)$ on obtient:

$$-\int_{\Omega_1} |\nabla f_1|^2 dx + \int_{\Gamma} (\gamma |f_1|^2 + i\sigma \alpha |f_1|^2) d\Gamma = \int_{\Omega_1} i\sigma(\beta(x) + i\sigma r(x)) |f_1|^2 dx$$

En prenant les parties réelle et imaginaire de l'équation ci-dessus, on trouve les deux égalités suivantes:

$$\int_{\Omega_1} |\nabla f_1|^2 dx + \int_{\Gamma} \gamma |f_1|^2 d\Gamma = \sigma^2 \int_{\Omega_1} |f_1|^2 dx$$

$$\int_{\Omega_1} \beta(x) |f_1|^2 dx = - \int_{\Gamma} \alpha |f_1|^2 d\Gamma$$

Les fonctions β et α étant positives, on tire de la deuxième égalité que:

$$\beta(x) |f_1|^2 = 0 \text{ dans } \Omega_1, \quad \alpha(x) |f_1|^2 = 0 \text{ sur } \Gamma$$

On en déduit que f_1 s'annule sur le support de β . Or β est une fonction analytique dans Ω_1 par l'hypothèse $\mathcal{K}1$ et $\beta \neq 0$ donc son support est Ω_1 tout entier. Puisqu'on a démontré dans la première partie de cette démonstration que f_1 est analytique dans Ω_1 , f_1 est nulle dans Ω_1 donc f_2 l'est aussi.

2-2. Décroissance de l'énergie locale

Les théorèmes 2-1 et 2-2 permettent de démontrer que l'énergie locale décroît faiblement:

$$\text{THEOREME 2-3:} \quad \forall f \in H, \forall R \geq \rho \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\|_R = 0$$

Preuve

Dans le cas où $\{U(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe unitaire sur H , la démonstration de Lax et Phillips reste valable: si l'énergie ne décroît pas alors une partie de celle-ci reste piégée par l'obstacle et cette partie se comporte comme l'énergie d'une solution de l'équation des ondes dans un domaine borné, auquel cas il existe des solutions $U(t)f$ périodiques en temps ce qui est contraire au fait que $H_b^\perp = H$ (théorème 2-2).

Dans le cas dissipatif, on obtient la décroissance de l'énergie locale pour $f \in H_b^\perp$ grâce à ce corollaire du théorème de RAGE pour les semi-groupes de contraction:

COROLLAIRE 2-1: *Il existe une suite $\{t_k\}, t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ telle que :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (U(t_k)f, g)_H = 0 \quad \forall f \in H_b^\perp, \forall g \in H.$$

En effet en démontrant que:

$$\forall f \in D(A) \cap H_b^\perp \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\|_R = 0$$

On démontre le théorème 2-3 puisque $D(A) \cap H_b^\perp$ est dense dans H_b^\perp et $H_b^\perp = H$. Le corollaire 2-1 nous donne l'existence d'une suite $t_k, t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ telle que $U(t_k)f$ converge faiblement vers 0 dans H . D'autre part, on a:

$$\|U(t_k)f\| + \|AU(t_k)f\| \leq \|f\| + \|Af\| < +\infty$$

$U(t)f$ étant à contraction et f appartenant à $D(A)$. D'après le théorème 2-1, l'ensemble $\{U(t_k)f, k \geq 1\}$ est précompact dans la norme $\|\cdot\|_R$. Donc il existe une sous-suite $\{t_{m_k}\}$ convergeant vers l'infini telle que:

$$U(t_{m_k})f \xrightarrow[m_k \rightarrow +\infty]{} h \quad \text{en norme } \|\cdot\|_R$$

La convergence faible de $\{U(t_{m_k})f\}$ implique que $h=0$. ~~☹~~

On définit les espaces de données rentrantes (D_-^a) ou sortantes (D_+^a) par:

$$(2-7) \quad D_\pm^a = \{f \in H_0 / [U_0(t)f](x) = 0 \text{ pour } |x| \leq \pm t + a\} \quad a > 0$$

Si $\rho > 0$ est tel que $B(0, \rho) \supset K \cup \overline{\Omega}_1$ alors les éléments de D_\pm^ρ s'annulent dans $B(0, \rho)$. On voit que D_+^ρ et D_-^ρ sont des sous-espaces de H . Il est clair que A et A_0 agissent de la même façon sur des fonctions nulles dans la boule $B(0, \rho)$. En conséquence de quoi, $U(t)$ et $U_0(t)$ coïncident sur D_+^ρ et $U^*(t)$ (adjoint de $U(t)$) et $U_0(-t)$ coïncident sur D_-^ρ pour tout $t \geq 0$. Dans le cas conservatif, $U^*(t) = U(-t)$. On en déduit les propriétés suivantes:

PROPOSITION 2-2: $\{U(t)\}$ vérifie les conditions suivantes:

$$(2-8) \quad \begin{cases} (i) U(t)D_+^\rho \subset D_+^\rho, U^*(t)D_-^\rho \subset D_-^\rho \quad t \geq 0 \\ (ii) \bigcap_{t \geq 0} U(t)D_+^\rho = \bigcap_{t \geq 0} U^*(t)D_-^\rho = \{0\} \\ (iii) D_+^\rho \perp D_-^\rho \end{cases}$$

Dans le cas conservatif, les mêmes démonstrations que celles de Lax et Phillips pour le problème de Dirichlet montrent la propriété:

$$\overline{\bigcup_t U(t)D_+^\rho} = H$$

équivalent à la décroissance de l'énergie locale. Une telle propriété ne peut pas s'écrire pour $U(t)$ et $U^*(t)$ dans le cas dissipatif. Au lieu de cela, on peut écrire une propriété analogue. Soit P_+^ρ la projection orthogonale sur l'orthogonal de D_+^ρ dans H .

THEOREME 2-4: Pour tout f dans H

$$(2-9) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} P_+^0 U(t)f = 0$$

Cette propriété exprime le fait que les solutions perturbées $U(t)f$ sont asymptotiquement sortantes.

Preuve

Dans le cas conservatif, on se sert de la remarque faite ci-dessus. Il reste à prouver que $\overline{\cup_t U(t)D_+^0} = H$ implique (2-9). Soit donc un élément f de H . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_+ dans D_+^0 et T tels que:

$$\|f - U(T)f_+\| < \varepsilon$$

On décompose $P_+^0 U(t)f$ sous la forme:

$$P_+^0 U(t)f = P_+^0 (U(t)f - U(t)U(T)f_+) + P_+^0 U(t+T)f_+$$

Pour $t+T \geq 0$, la solution perturbée $U(t+T)f_+$ est dans D_+^0 et donc:

$$P_+^0 U(t+T)f_+ = 0$$

Comme de plus pour tout $t \geq 0$

$$\|P_+^0 (U(t)f - U(t)U(T)f_+)\| \leq \varepsilon$$

on en déduit le théorème.

Dans le cas dissipatif, la démonstration demande plus d'effort. On suit la démonstration de [17]. D'abord on remarque qu'il suffit de prouver (2-9) pour f dans un sous-ensemble dense de H . On choisit ici $AD(A)$. En effet, $AD(A)$ est dense dans H parce que 0 n'est pas une valeur propre de A ni de son adjoint A^* (démonstration identique à celle du théorème 2-2). Comme cas particulier du théorème 2-3, on a:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\|_{4\rho} = 0 \quad \forall f \in H$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$, il existe $\tau(\varepsilon)$ suffisamment grand tel que:

$$(2-10) \quad \|U(\tau)Ag\|_{4\rho} < \varepsilon \quad \forall g \in D(A)$$

L'inégalité d'énergie (1-1) donne:

$$\|U(t)d\|_{\rho} \leq \|d\|_{4\rho} \quad \forall d \in H, 0 \leq t \leq 3\rho$$

En appliquant ce résultat à $U(\tau)Ag$ et en tenant compte de (2-10), il s'ensuit que:

$$(2-11) \quad \|U(t)Ag\|_{\rho} < \varepsilon \quad \forall g \in D(A), \tau \leq t \leq \tau + 3\rho$$

On note $U(t)Ag = (w(t, \cdot), \partial_t w(t, \cdot))$. Soit ξ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$\xi(x) = 1 \text{ pour } |x| > \rho \text{ et } \xi(x) = 0 \text{ pour } |x| < \rho' \text{ où } \rho' < \rho \text{ tel que } B(0, \rho') \supset K \cup \overline{\Omega}_1$$

On pose $v = \xi w$ alors $(v, \partial_t v) \in H_0$ et vérifie :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)v = q \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \\ v(0, \cdot) = \xi g_2, \partial_t v(0, \cdot) = \xi(\tilde{r}^{-1} \Delta g_1 - \tilde{\beta} / \tilde{r} g_2) \end{cases}$$

avec $q = -w \Delta \xi - 2 \nabla w \cdot \nabla \xi$. On a :

$$\| P_+^{\rho} U(t)Ag \| \leq \| P_+^{\rho} (v, \partial_t v) \| + \| P_+^{\rho} (1 - \xi)(w, \partial_t w) \|$$

Or P_+^{ρ} agit comme l'identité sur les données à support dans la boule ouverte $B(0, \rho)$ d'où :

$$\| P_+^{\rho} U(t)Ag \| \leq \| P_+^{\rho} (v, \partial_t v) \| + C \| U(t)Ag \|_{\rho}$$

L'inégalité (2-11) nous amène à :

$$\| P_+^{\rho} U(t)Ag \| \leq \| P_+^{\rho} (v, \partial_t v) \| + C \varepsilon, \quad \tau \leq t \leq \tau + 3\rho$$

Reste à vérifier que :

$$\| P_+^{\rho} (v, \partial_t v) \| \leq C' \varepsilon.$$

Puisque $(v, \partial_t v) \in H_0$ et plus précisément

$$(v(t), \partial_t v(t)) = U_0(t)(\xi Ag)$$

on va employer la représentation par translation de $\{U_0(t)\}$. Cette application, notée \mathcal{R} , est basée sur la représentation des solutions u de l'équation des ondes dans l'espace libre en une superposition d'ondes planes :

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} k(x, \omega - t, \omega) d\omega$$

où $k(s, \omega)$ est une fonction définie pour $s \in \mathbb{R}$ et $\omega \in S^2$, la sphère unité. Les données initiales de u , $f = (f_1, f_2)$ sont données par :

$$(2-12) \quad f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} k(x, \omega, \omega) d\omega, \quad f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} -\partial_s k(x, \omega, \omega) d\omega$$

On définit la représentation par translation de f , $\mathcal{R}f = k$ par (2-12). L'application \mathcal{R} s'écrit en fonction de la transformée de Radon

$$Rg(s, \theta) = \int_{x \cdot \theta = s} g(x) dS(x)$$

comme suit :

$$(2-13) \quad (\mathcal{R}f)(s, \omega) = k(s, \omega) = \frac{1}{4\pi} \{-\partial_s^2 Rf_1(s, \omega) + \partial_s Rf_2(s, \omega)\}$$

On rappelle brièvement les propriétés de \mathcal{R} (voir [16]):

$$(2-14) \quad \begin{cases} (i) \mathcal{R} \text{ est une application unitaire de } H_0 \text{ sur } L^2(\mathbb{R} \times S^2) \\ (ii) \mathcal{R} U_0(t) = T_t \mathcal{R} \text{ où } T_t \text{ est la translation par rapport à } s \text{ de } t \\ (iii) \mathcal{R} D_+^\rho = L^2(-\infty, -\rho[\times S^2), \mathcal{R} D_-^\rho = L^2(] \rho, +\infty[\times S^2) \end{cases}$$

On vérifie facilement que:

$$(2-15) \quad \mathcal{R} A_0 = -\partial_s \mathcal{R}$$

Ces rappels étant faits, on appelle m le représentant par translation de $(v, \partial_t v)$ et l celui de $(0, q)$. Puisque v vérifie $\square v = q$, on a d'après (2-15):

$$(2-16) \quad (\partial_t + \partial_s) m = l$$

Grâce aux propriétés (2-14), on voit que:

$$\|P_+^\rho(v, \partial_t v)\| = \|m(t)\|_{L^2(]-\infty, \rho[\times S^2)}$$

Notre but est donc d'estimer la norme $L^2(]-\infty, \rho[\times S^2)$ de $m(t)$. On choisit $t = \tau + 3\rho$. On a:

$$\|m(\tau + 3\rho)\|_{L^2(]-\infty, \rho[\times S^2)} = \int_{S^2} \int_{-\infty}^{-\rho} |m(s, \tau + 3\rho, \omega)|^2 ds d\omega + \int_{S^2} \int_{-\rho}^{\rho} |m(s, \tau + 3\rho, \omega)|^2 ds d\omega$$

Or on remarque que le support de l est dans $[-\rho, \rho] \times S^2$ car q s'annule dans $B(0, \rho)$. D'où pour $s < -\rho$, m vérifie $(\partial_t + \partial_s) m = 0$ donc m est constante le long des caractéristiques soit:

$$m(s, t, \omega) = m(s-t, 0, \omega) \text{ pour } s < -\rho$$

La première partie de la norme de m à calculer s'écrit:

$$\int_{S^2} \int_{-\infty}^{-\rho} |m(s, \tau + 3\rho, \omega)|^2 ds d\omega = \int_{S^2} \int_{-\infty}^{-\tau - 4\rho} |m(s, 0, \omega)|^2 ds d\omega$$

Il est clair que cette intégrale tend vers 0 quand τ tend vers l'infini. Pour estimer

$$I = \int_{S^2} \int_{-\rho}^{\rho} |m(s, \tau + 3\rho, \omega)|^2 ds d\omega$$

on écrit la solution de (2-16) pour $s \in]-\rho, \rho[$ comme suit:

$$m(s, t, \omega) = m(-\rho, t-s-\rho, \omega) + \int_0^{\rho+s} l(\tau'-\rho, t+\tau'-s-\rho, \omega) d\tau'$$

d'où pour $t = \tau + 3\rho$:

$$m(s, \tau + 3\rho, \omega) = m(-\rho, \tau-s+2\rho, \omega) + \int_0^{\rho+s} l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega) dt$$

Or on a :

$$m(-\rho, \tau-s+2\rho, \omega) = m(s-\tau-3\rho, 0, \omega)$$

En se servant de ce qui précède, on majore I par :

$$C \left\{ \int_{S^2} \int_{-\rho}^{\rho} |m(s-\tau-3\rho, 0, \omega)|^2 ds d\omega + \int_{S^2} \int_{-\rho}^{\rho} \left| \int_0^{\rho+s} l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega) dt \right|^2 ds d\omega \right.$$

On voit, via le changement de variables $s' = s - \tau - 3\rho$, que la première de ces deux intégrales tend vers 0 quand τ tend vers l'infini. On s'intéresse maintenant à la seconde intégrale soit :

$$\left\| \int_0^{\rho+s} l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega) dt \right\|_{L^2([- \rho, \rho]_s \times S^2_\omega)}$$

Pour $t \in [0, \rho+s]$ on a les inégalités :

$$\tau + 2\rho - s \leq \tau + 2\rho - s + t \leq \tau + 3\rho .$$

On en déduit la majoration suivante :

$$\int_0^{\rho+s} |l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega)| dt \leq (\rho+s) \sup_{t \in [\tau+2\rho-s, \tau+3\rho]} \|l(\cdot, t, \omega)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Sachant que s appartient à $[-\rho, \rho]$, on a :

$$\int_0^{\rho+s} |l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega)| dt \leq 2\rho \sup_{t \in [\tau+\rho, \tau+3\rho]} \|l(\cdot, t, \omega)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

et comme $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, on en conclut que :

$$\int_0^{\rho+s} |l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega)| dt \leq C 2\rho \sup_{t \in [\tau+\rho, \tau+3\rho]} \{ \|l(\cdot, t, \omega)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_s l(\cdot, t, \omega)\|_{L^2(\mathbb{R})} \}$$

La fonction l étant le représentant par translation de $(0, q)$

$$\|l(\cdot, t, \omega)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_s l(\cdot, t, \omega)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|(0, q(t))\|_0 + \|A_0(0, q(t))\|_0 .$$

On rappelle que $q = -w \Delta \xi - 2\nabla w \cdot \nabla \xi$ où w est la première composante de $U(t)Ag$. Il est facile de voir que :

$$\|(0, q(t))\|_0 \leq C (\|U(t)g\|_\rho + \|U(t)Ag\|_\rho)$$

et

$$(2-17) \quad \|A_0(0, q(t))\|_0 = \|\nabla q\|_{L^2(B(0, \rho))}$$

La théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques nous permet de majorer (2-17) par $\|A U(t)g\|_\rho$ soit $\|U(t)Ag\|_\rho$ puisque g appartient à $D(A)$. On a donc obtenu :

$$\int_0^{\rho+s} |l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega)| dt \leq C\rho \sup_{t \in [\tau+\rho, \tau+3\rho]} \{ \|U(t)g\|_\rho + \|U(t)Ag\|_\rho \}$$

En employant à nouveau le fait que la vitesse de propagation est finie, on a:

$$\int_0^{\rho+s} |l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega)| dt \leq C\rho (\|U(\tau)g\|_{4\rho} + \|U(\tau)Ag\|_{4\rho})$$

et comme pour τ assez grand

$$\|U(\tau)g\|_{4\rho} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|U(\tau)Ag\|_{4\rho} < \varepsilon$$

on a démontré que:

$$\left\| \int_0^{\rho+s} l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega) dt \right\|_{L^2(-\rho, \rho] \times S_\omega^2} \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0$$



Remarque

Si on ne savait pas que $H_b^\perp = H$, les théorèmes 2-3 et 2-4 resteraient valables pour tout f dans H_b^\perp .

3- Opérateurs d'onde

Les principaux outils pour comparer le comportement des solutions du problème perturbé (P) à celles du problème non perturbé (P_0) sont les opérateurs d'onde. Soit u_- un signal émis à un instant t_0 , u_- étant solution de (P_0), nulle au voisinage de l'obstacle avant un certain temps $t_i \geq t_0$. A un instant postérieur à t_i , cette onde va rencontrer l'obstacle et être diffractée par lui. On note alors u l'onde solution de (P) coïncidant avec u_- dans le passé:

$$u(t, x) = u_-(t, x) \quad t \leq t_i \quad x \in \Omega_2$$

On définit alors l'opérateur d'onde W_- qui, au signal émis u_- associe l'onde diffractée u :

$$W_- : u_- \longrightarrow u$$

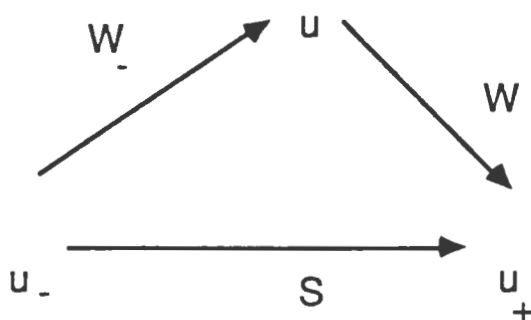
Par densité de l'ensemble de ces ondes incidentes dans l'espace des solutions de (P_0) d'énergie finie H_0 , on prolonge W_- à tout cet espace. Comme l'obstacle a une influence très petite sur la solution quand $|t|$ est grand (théorème de décroissance de l'énergie locale), on en déduit l'existence d'une onde u_+ solution de (P_0) asymptote à u dans le futur:

$$E(u(t) - u_+(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ quand } t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

Cette propriété permet d'identifier u_+ au signal reçu et d'introduire l'opérateur W :

$$W: u \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u_+$$

L'opérateur S qui relie u_- à u_+ est appelé l'opérateur de diffraction et il contient toutes les informations sur le phénomène de la diffraction d'une onde par un obstacle. En particulier, on en déduira l'amplitude de diffusion. On résume ces résultats par le diagramme suivant:



3-1. Cas conservatif

La théorie de Lax et Phillips développée dans le cas du problème de Dirichlet pour un obstacle sans couche va s'appliquer dans notre cas.

Soit \mathcal{J}_0 un opérateur linéaire continu de H_0 dans H tel que:

$$(3-1) \quad \mathcal{J}_0 / D_+^p \oplus D_-^p = Id / D_+^p \oplus D_-^p$$

On considère les opérateurs W_+ et W_- :

$$W_{\pm} f = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t) \mathcal{J}_0 U_0(t) f \quad f \in H_0$$

où on prend la limite forte dans H .

THEOREME 3-1: Les opérateurs d'onde W_+ , W_- existent pour tout \mathcal{J}_0 vérifiant (3-1) et sont indépendants du choix de \mathcal{J}_0 .

Preuve

On prouve seulement l'existence de W_- , celle de W_+ se démontrant de la même façon. Soit $f = U_0(s)g$ avec $g \in D_-^p$ alors on a:


$$U(t)\mathcal{J}_0 U_0(-t)f = U(t)\mathcal{J}_0 U_0(s-t)g, \quad t \geq 0$$

Une conséquence de $U(-t)D_-^p = U_0(-t)D_-^p$ pour $t \geq 0$ est que pour $t \geq s$

$$U(t)\mathcal{J}_0 U_0(-t)f = U(s)g$$

Donc la limite de $U(t)\mathcal{J}_0 U_0(-t)f$ existe pour tout f de la forme $U_0(s)g$ ($g \in D_-^p$).

Or $\bigcup_t U_0(t)D_-^p = H_0$. Puisque $U(t)\mathcal{J}_0 U_0(-t)f$ est uniformément borné pour tout t la convergence sur un ensemble dense implique la convergence partout.

D'après ce qui précède, il est clair que W_- ne dépend pas de \mathcal{J}_0 . 

PROPOSITION 3-1: Les opérateurs W_+ , W_- ont les propriétés suivantes:

$$(i) U(t)W_{\pm} = W_{\pm} U_0(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(ii) W_+ = Id \text{ sur } D_+^p, \quad W_- = Id \text{ sur } D_-^p$$

Preuve

La propriété (i) se déduit facilement du fait que si $f = U_0(s)g$ avec $g \in D_+^p$ alors $W_+f = U(s)g$. La propriété (ii) provient de :

$$U(-t)D_-^p = U_0(-t)D_-^p \text{ et } U(t)D_+^p = U_0(t)D_+^p, \quad t \geq 0$$



THEOREME 3-2: Les opérateurs d'onde W_+ et W_- sont des isométries de H_0 sur H .

Preuve

Pour démontrer que $\|W_+f\| = \|f\|_0$ pour tout f dans H_0 , on choisit f telle que son support soit dans la boule $B(0, R)$. Alors $U_0(R+\rho)f$ appartient à D_+^p et $W_+f = U(-R-\rho)U_0(R+\rho)f$ ce qui implique que $\|W_+f\| = \|f\|_0$ pour ce sous-

ensemble dense de H_0 . La surjectivité de W_+ découle des propriétés (i) et (ii) de la proposition 3-1 et de la décroissance de l'énergie locale: en effet, on voit facilement que $U(t)D_+^p$ est inclus dans l'image de W_+ pour tout t et la propriété $\overline{\bigcup_t U(t)D_+^p} = H$, conséquence du théorème 2-3 dans le cas conservatif, permet de conclure à $H \subset \text{Im } W_+$ d'où $H = \text{Im } W_+$. Un argument similaire s'applique à W_- .



Ainsi l'opérateur de diffraction S

$$S = W_+^{-1} W_-$$

est bien défini et est une isométrie de H_0 sur H . De plus on démontre sans problème la:

PROPOSITION 3-2: *L'opérateur S a la propriété : $S U_0(t) = U_0(t) S$*

3-2. Cas dissipatif

Lax et Phillips ont développé une théorie abstraite [17] pour des opérateurs dissipatifs afin de démontrer l'existence des opérateurs:

$$(3-2) \quad W_- = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) \mathcal{J}_0 U_0(-t) f \quad f \in H_0$$

$$(3-3) \quad W = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_0(-t) \mathcal{J} U(t) f \quad f \in H$$

où \mathcal{J} et \mathcal{J}_0 sont des applications de H dans H_0 et H_0 dans H respectivement, bien choisies. Ce qui va nous occuper est donc la vérification des hypothèses de cette théorie. Mais rappelons d'abord les axiomes utilisés par Lax et Phillips:

$(\mathcal{A}_1) \{U_0(t)\}$ est un groupe d'opérateurs unitaires agissant sur l'espace de Hilbert H_0 . Il existe deux sous-espaces fermés D_+ et D_- tels que:

$$(i) U_0(-t)D_- \subset D_- , U_0(t)D_+ \subset D_+ , t \geq 0$$

$$(ii) \cap U_0(t)D_- = \{0\} , \cap U_0(t)D_+ = \{0\}$$

$$(iii) \overline{\bigcup_t U_0(t)D_\pm} = H_0$$

$(\mathcal{A}_2)\{U(t)\}$ est un semi-groupe d'opérateurs de contraction agissant sur l'espace H . Si on note $D_+^a = U_0(a)D_+$ et $D_-^a = U_0(-a)D_-$ ($a \geq 0$) alors il existe un réel $\rho > 0$ tel que H contient D_+^ρ et D_-^ρ et:

$$(i) U^*(t)D_-^\rho \subset D_-^\rho, U(t)D_+^\rho \subset D_+^\rho, t \geq 0$$

$$(ii) \cap U^*(t)D_-^\rho = \{0\}, \cap U(t)D_+^\rho = \{0\}$$

(iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_+^\rho U(t)f = 0, \forall f \in H$ où P_+^ρ est la projection orthogonale sur $(D_+^\rho)^\perp$ dans H .

(\mathcal{A}_2) $U(t)$ et $U_0(t)$ sont reliés par les conditions :

$$U(t)D_+^\rho = U_0(t)D_+^\rho, U^*(t)D_-^\rho = U_0(-t)D_-^\rho, t \geq 0$$

Soient \mathcal{J} et \mathcal{J}_0 deux applications linéaires continues telles que:

$$\mathcal{J}_0: H_0 \rightarrow H$$

$$\mathcal{J}: H \rightarrow H_0$$

et satisfaisant (3-1) c'est-à-dire agissant comme l'identité sur la partie commune de H et $H_0, D_+^\rho \oplus D_-^\rho$. La théorie abstraite permet de conclure à l'existence de W_- et W pour toutes fonctions \mathcal{J} et \mathcal{J}_0 décrites ci-dessus et de dire que W_- et W sont indépendants du choix de \mathcal{J} et \mathcal{J}_0 .

En appliquant cette théorie à $U_0(t) = e^{tA_0}$ où A_0 est défini en (2-3), les espaces D_+ et D_- étant D_+^0 et D_-^0 définis en (2-7) et à $U(t) = e^{tA}$, la proposition 2-1 et le théorème 2-4 donnant les conditions (\mathcal{A}_2) (i)-(iii), on obtient l'existence des opérateurs d'onde W_- et W ainsi que celle de $W_+ = W^*$.

THEOREME 3-3: Les opérateurs W_- et W sont définis de H_0 dans H et H dans H_0 respectivement et sont indépendants de \mathcal{J} et \mathcal{J}_0 .

Les opérateurs ainsi définis ont des propriétés similaires à celles énoncées dans le cas conservatif.

PROPOSITION 3-2: Les opérateurs W_- et W vérifient:

$$(i) W_- U_0(t) = U(t) W_-, W U(t) = U_0(t) W, t \geq 0$$

$$(ii) W_- = Id \text{ sur } D_-^\rho, W = Id \text{ sur } D_+^\rho$$

L'opérateur de diffraction S s'écrit alors:

$$S = W W_-$$

THEOREME 3-4: *L'opérateur S est défini de H_0 dans H_0 et vérifie:*

$$\|S\|_{\mathcal{L}(H_0)} \leq 1$$

$$S U_0(t) = U_0(t) S, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

4- Controlabilité de l'obstacle

On s'intéresse ici au problème:

$$(P) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega_2 \\ (r(x) \partial_t^2 - \Delta) u + \beta(x) \partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega_1 \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Sigma \\ \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Sigma \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Gamma \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = (f_1, f_2) = f \end{cases}$$

avec les fonctions r, β, γ, α vérifiant en outre les conditions $(\mathcal{H}1)$ et $(\mathcal{H}2)$ énoncées précédemment. On étudie les solutions évanescentes de ce problème (P) . Une solution $U(t)f$ de (P) est dite évanescente si, sa donnée initiale étant non nulle, il existe un temps fini $T_0 > 0$ tel que:

$$(4-1) \quad U(t)f = 0, \quad t \geq T_0$$

Il y a un lien étroit entre l'existence de solutions évanescentes, la controlabilité de l'obstacle et les opérateurs d'onde.

DEFINITION 4-1: *L'obstacle est dit controlable si l'ensemble*

$$B^p = \{f \in H \mid U(t)f \perp D_+^p \oplus D_-^p, \quad \forall t \geq 0\}$$

est réduit à $\{0\}$.

Dans le cas d'un obstacle sans couche, Majda et Georgiev ont étudié les solutions évanescentes pour l'équation des ondes dissipative et les systèmes dissipatifs hyperboliques. On étend les propriétés trouvées dans [22], [10] et [11] au cas de l'obstacle avec une couche.

4-1. Existence des solutions évanescentes

Dans le paragraphe 2, on a noté H_b l'espace engendré par les fonctions propres du générateur A de $U(t)$ associées aux valeurs propres purement imaginaires et H_b^\perp son orthogonal dans H .

THEOREME 4-1: Soit $f \in H_b^\perp$. Si r et β admettent un prolongement analytique dans $\tilde{\Omega}_1 \supset \bar{\Omega}_1$ où $\tilde{\Omega}_1$ est un ouvert connexe régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1) il existe $\rho_1 > 0$ tel que $f \in B^{\rho_1}$

2) il existe $\rho_1 > 0$ tel que $f \perp D_-^{\rho_1}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\| = 0$

3) $U(t)f$ est une solution évanescente

où $\rho_1 > 0$ est tel que $B(0, \rho_1) \supset \bar{\Omega}_1 \cup K$.

Remarque

l'équivalence des conditions 1) et 3) nous permet de dire que l'obstacle n'est pas contrôlable s'il existe des solutions évanescentes du problème.

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin des deux lemmes suivants. Le premier est dû à Lax et Phillips.

LEMME 4-1: Soit $l \in L^2(\mathbb{R} \times S^2)$ tel que $l(s, \omega) = 0$ pour $|s| > r$. Alors

$$\mathcal{R}^{-1}l(x) = 0 \text{ pour } |x| > r$$

si et seulement si:

$$[s^v Y_m(\omega), l(s, \omega)] = 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$$

pour Y_m harmonique sphérique d'ordre $m \geq v$.

On a noté [. , .] le produit scalaire $L^2(\mathbb{R} \times S^2)$.

LEMME 4-2: Soit $f \perp D_-^{\rho_1}$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\| = 0$ alors:

$$(4-2) \quad \text{supp}_x(U(t)f) \subset \{x \in \Omega / |x| \leq \rho_1\}$$

où on a choisi $\rho_1 > 0$ tel que $\partial\Omega_2 \supset \{x / |x| < \rho_1/2\}$.

Preuve du lemme 4-2

Soit θ la fonction de troncature définie par:

$$\theta(x) = 1 \text{ si } |x| \geq \rho_1, \quad \theta(x) = 0 \text{ si } |x| \leq \rho_1/2$$

On va démontrer (4-2) pour $f \in D(A)$, la densité de $D(A)$ dans H permettant de conclure. Soit donc $f \in D(A)$. On pose $(u_0(t, \cdot), \partial_t u_0(t, \cdot)) = \theta(x)U(t)f$. Pour obtenir (4-2), il suffit de montrer que:

$$(4-3) \quad \text{supp}_x(\theta(x)U(t)f) \subset \{x \in \Omega / |x| \leq \rho_1\}$$

L'onde u_0 vérifie:

$$\square u_0 = g \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3$$

avec $g = -v \Delta \xi - 2 \nabla v \cdot \nabla \xi$ où $v(t, \cdot) = [U(t)f]_1$. Si on note:

$$h(s, t, \omega) = \mathcal{R}((u_0(t, x), \partial_t u_0(t, x))(s, \omega))$$

$$l(s, t, \omega) = \mathcal{R}((g(t, x), \partial_t g(t, x))(s, \omega))$$

on a:

$$(\partial_t + \partial_s) h(s, t, \omega) = l(s, t, \omega)$$

Pour prouver (4-3) on va utiliser le lemme 4-1 en montrant que:

$$a) \quad h(s, t, \omega) = 0 \text{ pour } |s| > \rho_1$$

$$b) \quad h \text{ vérifie } [s^\nu Y_m(\omega), h(s, t, \omega)] = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, m \geq \nu$$

Puisque $g(t, x) = 0$ pour $|x| \geq \rho_1$, le représentant par translation $l(s, t, \omega) = 0$ pour $|s| \geq \rho_1$. On déduit de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par h que:

$$\forall t_1 \geq 0 \quad h(s, t, \omega) = h(s - t + t_1, t_1, \omega) \quad , \quad t > t_1, \quad s - t + t_1 \geq \rho_1$$

On écrit la norme $L^2(\mathbb{R} \times S^2)$ de h sous la forme:

$$\int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(s, t, \omega)|^2 ds d\omega = \int_{S^2} \int_{-\infty}^{\rho_1 + t - t_1} |h(s, t, \omega)|^2 ds d\omega + \int_{S^2} \int_{\rho_1 + t - t_1}^{+\infty} |h(s, t, \omega)|^2 ds d\omega$$

Il vient alors:

$$\int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(s, t, \omega)|^2 ds d\omega \geq \int_{S^2} \int_{\rho_1}^{+\infty} |h(s, t_1, \omega)|^2 ds d\omega$$

Or la norme $\|h(t)\|_{L^2(\mathbb{R} \times S^2)}$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Ceci est évident puisque $\|h(t)\|_{L^2(\mathbb{R} \times S^2)} = \|\theta U(t)f\|_0$ et par hypothèse la limite de $\|U(t)f\|$ est 0 quand $t \rightarrow \infty$. De sorte que:

$$\int_{S^2} \int_{\rho_1}^{+\infty} |h(s, t_1, \omega)|^2 ds d\omega = 0$$

On obtient donc que $h(s, t_1, \omega)$ est nul pour $s > \rho_1$ et $t_1 \geq 0$. Il reste à montrer que $h(s, t_1, \omega) = 0$ pour $s < -\rho_1$ pour prouver a). Comme $(\partial_t + \partial_s)h(s, t, \omega) = 0$ pour $s < -\rho_1$, on a:

$$h(s, t_1, \omega) = h(s - t_1, 0, \omega), \quad \forall s < -\rho_1$$

Or $h(s - t_1, 0, \omega)$ est le représentant par translation de $(\theta f)(x)$ au point $(s - t_1, \omega)$. Puisque f est orthogonal à $D_-^{\rho_1}$ et $\text{supp}_x (1 - \theta(x)) \subset B(0, \rho_1)$, θf est aussi orthogonal à $D_-^{\rho_1}$. Ceci montre que:

$$h(s - t_1, 0, \omega) = \mathcal{R}(\theta f(x))(s - t_1, \omega) = 0, \quad s < -\rho_1 + t_1, \quad \forall t_1 \geq 0$$

En particulier

$$h(s - t_1, 0, \omega) = 0, \quad s < -\rho_1$$

ce qui prouve a). Vérifions maintenant que:

$$[s^v Y_m(\omega), h(s, t, \omega)] = 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}, m \geq v$$

Puisque $g(t, x) = 0$ pour $|x| \geq \rho_1$ et $l(s, t, \omega) = 0$ pour $|s| \geq \rho_1$, le lemme 4-1 donne:

$$[s^v Y_m(\omega), l(s, t, \omega)] = 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}, m \geq v$$

Il en résulte que:

$$\int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t h(s, t, \omega) s^v Y_m(\omega) ds d\omega = - \int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_s h(s, t, \omega) s^v Y_m(\omega) ds d\omega$$

d'où en intégrant par parties le second membre de cette égalité et en tenant compte de l'étape a), on en déduit que, pour tout $v \leq m$:

$$(4-4) \quad \int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t h(s, t, \omega) s^v Y_m(\omega) ds d\omega = v \int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s, t, \omega) s^{v-1} Y_m(\omega) ds d\omega$$

On va procéder par récurrence sur v . Commençons par le cas $v=0$. On intègre en temps l'égalité (4-4) avec donc $v=0$ ce qui donne:

$$\int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s, t_0, \omega) Y_m(\omega) ds d\omega = 0, \quad \forall t_0 \geq 0$$

De l'étape $v=0$, on en déduit pour $v=1$ que:

$$\int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t h(s, t, \omega) s Y_m(\omega) ds d\omega = 0 .$$

La même démonstration que précédemment nous permet de conclure à:

$$\int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s, t_0, \omega) s Y_m(\omega) ds d\omega = 0 , \quad \forall t_0 \geq 0$$

Le passage de l'étape v à l'étape $v+1$ se fait de la même façon. Ceci montre le point b). Le lemme 4-1 permet de conclure. ~~✎~~

Preuve du théorème 4-1

Puisque $U(t)f \perp D_+^{\rho_1}$, on a $P_+^{\rho_1} U(t)f = U(t)f$ pour tout $t \geq 0$. Grâce au théorème 2-4, il est évident que 1) implique 2).

Supposons qu'il existe $\rho_1 > 0$ tel que $f \perp D_+^{\rho_1}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\| = 0$. Le lemme 4-2 montre que $\text{supp}_x(U(t)f) \subset \{x \in \Omega / |x| \leq \rho_1\}$. Comme Ω_2 a une seule composante et que Σ est régulière, on voit que tout point $y \in \Omega_2 \cap B(0, \rho_1)$ peut être connecté à un point fixe x_0 de $\{x / |x| > \rho_1\}$ pour un chemin polygonal P_y restant dans Ω_2 de longueur totale inférieure à L_0 (indépendant de y). Soit la boule de centre y et de rayon r , $B(y, r) = \{x / |x - y| < r\}$. On note $x_1, x_2, \dots, x_N = y$ les points formant le chemin P_y . Sans perte de généralité, on peut supposer que, pour un réel $\varepsilon > 0$

$$B(x_0, r_0) \subset \{x / |x| > \rho_1\} \text{ avec } r_0 = 2|x_0 - x_1| \leq \varepsilon$$

$$B(x_i, \varepsilon) \subset \Omega_2 \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

et de plus, si on note $r_i = 2|x_{i+1} - x_i|$, $i = 1, \dots, N-1$

$$\sum_{j=0}^{N-1} r_j \leq 2L_0 \text{ avec } r_{N-1} \leq r_{N-2} \leq \dots \leq r_1 \leq r_0$$

Puisque $u(t, x) = [U(t)f]_1(x) = 0$ pour $|x| > \rho_1$ et $t > 0$, on a:

$$u(t, x) = 0 \text{ pour } |x - x_0| < r_0 \text{ et } t > 0$$

Le théorème d'Holmgren convexe (voir [15]) montre qu'alors

$$u(t, x) = 0 \text{ pour } |x - x_0| < r_0 + \frac{r_1}{2} \text{ et } t > \frac{r_1}{2}$$

Comme $\{x / |x - x_1| < r_1\}$ est inclus dans $\{x / |x - x_0| < r_0 + \frac{r_1}{2}\}$ on en déduit que

$$u(t, x) = 0 \text{ pour } |x - x_1| < r_1 \text{ et } t > \frac{r_1}{2}$$

On applique de nouveau le théorème d'Holmgren:

$$u(t,x)=0 \text{ pour } |x-x_1| < r_1 + \frac{r_2}{2} \text{ et } t > \frac{r_1+r_2}{2}$$

ce qui implique que:

$$u(t,x)=0 \text{ pour } |x-x_2| < r_2 \text{ et } t > \frac{r_1+r_2}{2}$$

et ainsi de suite. On arrive alors à:

$$u(t,x)=0 \text{ pour } |x-x_{N-1}| < r_{N-1} \text{ et } t > (r_1+r_2+\dots+r_{N-1})/2$$

En utilisant l'inclusion $\{x/|x-y| < \frac{r_{N-1}}{2}\} \subset \{x/|x-x_{N-1}| < r_{N-1}\}$ on trouve:

$$u(t,x)=0 \text{ pour } |x-x_{N-1}| < \frac{r_{N-1}}{2} \text{ et } t > (r_1+r_2+\dots+r_{N-1})/2$$

D'après le choix des r_j , on a $(r_1+r_2+\dots+r_{N-1})/2 \leq L_0$. Finalement on a démontré que, pour tout $t \geq L_0$, la solution $u(t,x)$ s'annule pour tout x de Ω_2 . Pour que $U(t)f$ soit évanescence, il faut que

$$u(t,x)=0 \quad \forall x \in \Omega_1, \forall t \geq T_0$$

C'est pour montrer cette propriété que nous avons besoin de l'hypothèse supplémentaire sur les fonctions r et β . On note (\tilde{P}) le problème suivant:

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \tilde{\Omega}_2 \\ (r_0(x)\partial_t^2 - \Delta)u + \beta_0(x)\partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \tilde{\Omega}_1 \\ u|_{\tilde{\Omega}_1} = u|_{\tilde{\Omega}_2} \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \partial\tilde{\Omega}_2 \\ \partial_\nu u|_{\tilde{\Omega}_1} = \partial_\nu u|_{\tilde{\Omega}_2} \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \partial\tilde{\Omega}_2 \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Gamma \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = (f_1, f_2) = f \end{cases}$$

où $\tilde{\Omega}_2 = \Omega_2 \setminus \tilde{\Omega}_1$ et r_0, β_0 sont les prolongements analytiques de r et β dans $\tilde{\Omega}_1$. De la même façon qu'on a défini A , on définit \tilde{A} le générateur infinitésimal du semi-groupe de contraction $\tilde{U}(t)$ associé au problème (\tilde{P}) . La solution $U(t)f$ satisfaisant :

$$[U(t)f](x) = 0 \quad x \in \Omega_2, t \geq T_0$$

coïncide avec $\tilde{U}(t)f$ pour $t \geq T_0$. On pose, pour $\varepsilon > 0$:

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \tilde{U}(\tau)f d\tau$$

On vérifie facilement que:

$$i) f_\varepsilon \in D(A)$$

$$ii) f_\varepsilon \longrightarrow f \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$iii) \tilde{U}(t)f_\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

$$iv) [\tilde{U}(t)f_\varepsilon](x) = 0, \quad \forall x \in \Omega_2, \quad t \geq T_0$$

La propriété *iii*) implique que $\tilde{U}(t)f_\varepsilon$ est une fonction presque périodique: il existe une suite $(\sigma_j)_j$ de réels telle que:

$$\tilde{U}(t)f_\varepsilon = \sum_j a_j e^{i\sigma_j(t-T_0)} \quad (\text{convergence en norme})$$

$$a_j = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T e^{i\sigma_j t} \tilde{U}(t)f_\varepsilon dt$$

D'après la propriété *iv*) on a $a_j|_{\Omega_2} = 0$. D'autre part, \tilde{A} étant un générateur fermé, les relations *i*) et *iii*) montrent que a_j est solution du problème:

$$(\tilde{A} + i\sigma_j) a_j = 0$$

Par régularité analytique de la solution d'un problème elliptique, $a_j|_{\tilde{\Omega}_1}$ est analytique. Or on a vu que $a_j|_{\Omega_2} = 0$ et comme $\tilde{\Omega}_2$ est non vide, on conclut que $a_j \equiv 0$ dans $\tilde{\Omega}_1$. Par suite $\tilde{U}(t)f_\varepsilon$ est nul dans $\tilde{\Omega}_1$ et donc $U(t)f = 0$ pour $t \geq T_0$. Ce qui achève la démonstration de 2) implique 3).

Nous allons voir maintenant que si $U(t)f$ est une solution évanescence alors il existe $\rho_1 > 0$ tel que $f \in B^{\rho_1}$. Soit $T_0 > 0$ tel que :

$$U(t)f = 0 \quad t \geq T_0$$

alors le support de $U(t)f$ est compact pour tout t dans $[0, T_0[$. On peut donc trouver un réel $\rho_1 > 0$ tel que $[U(t)f](x) = 0$ pour $|x| \geq \rho_1$. Soit g une donnée dans $D_+^{\rho_1} \oplus D_-^{\rho_1}$ alors g s'annule dans la boule $B(0, \rho_1)$ de sorte que:

$$(U(t)f, g)_H = 0$$

c'est-à-dire que $U(t)f \perp D_+^{\rho_1} \oplus D_-^{\rho_1}$. ~~☞~~

4-2. Lien avec les opérateurs d'onde

On rappelle que les opérateurs d'onde W_+ et W_- sont définis comme suit:

$$W_{\pm} f = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t) \mathcal{S}_0 U_0(t) f \quad f \in H_0$$

où on a choisi l'application \mathcal{S}_0 linéaire continu de H_0 dans H vérifiant (3-1) et telle que \mathcal{S}_0 soit l'adjoint de l'application \mathcal{S} définie précédemment.

THEOREME 4-2: $\overline{\text{Im } W_-} = H_b^{\perp} \ominus H_{\infty}^-$, $\overline{\text{Im } W_+} = H_b^{\perp} \ominus H_{\infty}^+$
 où $H_{\infty}^- = \{f \in H / \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\| = 0\}$, $H_{\infty}^+ = \{f \in H / \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U^*(t)f\| = 0\}$

Preuve

Montrons d'abord l'inclusion:

$$(4-5) \quad \overline{\text{Im } W_-} \subset H_b^{\perp} \ominus H_{\infty}^-$$

Soit ψ une donnée dans H_b telle que $A\psi = i\lambda\psi$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque A est le générateur d'un semi-groupe de contraction, $A^*\psi = -i\lambda\psi$. On a:

$$(W_- f, \psi)_H = \lim_{t \rightarrow +\infty} (U(t_k) \mathcal{S}_0 U_0(-t_k) f, \psi)_H$$

où on a pris une suite t_k tendant vers l'infini telle que $U_0(-t_k)f$ converge faiblement vers 0 dans H_0 . Comme

$$(W_- f, \psi)_H = \lim_{t \rightarrow +\infty} (U_0(-t_k) f, \mathcal{S} U^*(t_k) \psi)_0$$

on en déduit que $(W_- f, \psi)_H = 0$. La généralisation à tout ψ de H_b ne pose aucun problème. On a le même résultat pour $\psi \in H_{\infty}^-$. Ce qui prouve (4-5) pour W_- . La démonstration est analogue pour W_+ .

Examinons maintenant l'opérateur

$$\mathcal{A} f = W_+ W f$$

Ecrivons de façon plus explicite \mathcal{A} . On a, d'après la définition de \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} f = \lim_{t \rightarrow +\infty} U^*(t) \mathcal{S}_0 U_0(t) W f$$

Or on peut écrire $U^*(t) \mathcal{S}_0 U_0(t) W f$ sous la forme:

$$U^*(t) \mathcal{S}_0 U_0(t) W f = -U^*(t) \mathcal{S}_0 U_0(t) [U_0(-t) \mathcal{S} U(t) f - W f] + U^*(t) \mathcal{S}_0 \mathcal{S} U(t) f$$

donc:

$$\mathcal{A}f = \lim_{t \rightarrow +\infty} U^*(t) \mathcal{I}_0 \mathcal{I} U(t) f \quad (\mathcal{I} = \mathcal{I}_0^*)$$

L'opérateur \mathcal{A} envoie $H_b^\perp \ominus H_\infty^+$ dans $H_b^\perp \ominus H_\infty^+$. Si l'on considère la restriction de \mathcal{A} à cet espace, puisque:

$$(U^*(t) \mathcal{I}_0 \mathcal{I}_0^* U(t))^* = U^*(t) \mathcal{I}_0 \mathcal{I}_0^* U(t)$$

on a:

$$(Im \mathcal{A} / H_b^\perp \ominus H_\infty^+)^{\perp} = Ker \mathcal{A} / H_b^\perp \ominus H_\infty^+$$

Soit $f \in Ker \mathcal{A} / H_b^\perp \ominus H_\infty^+$ alors:

$$0 = (\mathcal{A}f, f)_H = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\|^2$$

c'est-à-dire $f \in H_\infty^+$ d'où $f = 0$. On en conclut donc que $\overline{Im \mathcal{A}} = H_b^\perp \ominus H_\infty^+$ ce qui implique que $\overline{Im W_+} = H_b^\perp \ominus H_\infty^+$. En prouvant l'existence de l'opérateur W_-^* :

$$W_-^* f = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_0(t) \mathcal{I} U^*(t) f, \quad f \in H$$

par la théorie abstraite de Lax et Phillips [17], on démontre de façon similaire que:

$$\overline{Im W_-} = H_b^\perp \ominus H_\infty^-$$



On va voir que les espaces H_∞^- et H_∞^+ sont liés à l'existence des solutions évanescentes.

THEOREME 4-3: Soit $f \in H, f \neq 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1) $U(t)f$ est une solution évanescente.

2) $f \perp Im W_+, f \in H_b^\perp, f \perp D_{-1}^{\rho_1}$ pour un $\rho_1 > 0$.

Preuve

On commence par montrer que 2) implique 1). Puisque $\overline{Im W_+} = H_b^\perp \ominus H_\infty^+$, la donnée $f \perp Im W_+$ appartient à H_∞^+ c'est-à-dire:

$$(4-6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f\| = 0$$

Comme par hypothèse $f \perp D_{-1}^{\rho_1}$ pour un $\rho_1 > 0$, on utilise le théorème 4-1 pour conclure.

Passons à la démonstration de $1) \Rightarrow 2)$. Toujours d'après le théorème 4-1, il existe $\rho_1 > 0$ tel que $f \perp D_{-1}^{\rho_1}$ et f vérifie (4-6). On décompose f sous la forme:

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \perp H_b, \quad f_2 \in \overline{H_b}$$

où $\overline{H_b}$ est la fermeture de l'espace H_b . Si on montre que:

$$(4-7) \quad \|U(t)g\| = \|g\|, \quad \forall g \in \overline{H_b}$$

comme $H_{\perp b}$ et $\overline{H_b}$ sont invariants par $U(t)$, la propriété (4-6) donne:

$$f = f_1 \perp H_b \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)f_1\| = 0$$

Soit $f \perp \text{Im } W_+$. Démontrons donc (4-7). Lorsque g est un vecteur propre de A tel que $Ag = i\lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$, le résultat est immédiat. Soit $g = \sum_{k=1}^n a_k g_k$ avec $Ag_k = i\lambda_k g_k$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et les valeurs propres sont différentes deux à deux. Appliquons $U(t)$ à g :

$$U(t)g = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k t} g_k$$

alors la norme de $U(t)g$ est égale à:

$$\left[\sum_{k,j=1}^n a_k a_j e^{i(\lambda_k - \lambda_j)t} (g_k, g_j)_H \right]^{1/2}$$

Or pour deux valeurs propres (purement imaginaires) différentes, le produit dans H des vecteurs propres associés est nul. Ainsi la norme de $U(t)g$ s'écrit:

$$\|U(t)g\|^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \|g_k\|^2$$

On en déduit (4-7) pour tout g dans H_b . Soit $g \in \overline{H_b}$ alors il existe une suite $(g_n)_n$ de fonctions de H_b telle que g_n converge dans H d'où $(U(t)g_n)_n$ converge vers $U(t)g$ dans H . D'après ce qui précède,

$$\|U(t)g_n\| = \|g_n\| \longrightarrow \|g\|$$

ce qui prouve (4-7). 

4-3. Condition suffisante de controlabilité

On a vu (théorème 4-1) que la controlabilité de l'obstacle était lié aux solutions évanescents du problème (P). Majda a démontré dans [22] une condition suffisante de controlabilité du système:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u + c(x)\partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega \\ \partial_n u + \gamma(x)\partial_t u + \sigma(x)u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Gamma \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = (f_1, f_2) = f \end{cases}$$

Nous reprenons ses démonstrations afin d'établir une condition suffisante de controlabilité du problème (P) avec $\beta(x)=0, \forall x \in \Omega_1$ (couche transparente). En particulier, sachant que r est analytique, on démontre de façon identique, en remplaçant l'opérateur \square par $\square_r = r\partial_t^2 - \Delta$, la proposition suivante:

PROPOSITION 4-1: *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

i) Ω est un ouvert borné

ii) $\partial\Omega, \alpha, \gamma$ et r sont des fonctions réelles analytiques

iii) $\alpha(x) \neq 1, \forall x \in \partial\Omega$

alors on peut trouver un nombre fixe $\delta_0 > 0$ et un ensemble de fonctions $\{\Phi_j\}$ analytiques réelles dense dans $L^2(\Omega)$ tel que le problème

$$\begin{cases} (r(x)\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } [t_1, t_1 + \delta_0] \times \Omega \\ \partial_n v - \alpha(x)\partial_t v + \gamma(x)v = 0 \text{ sur } [t_1, t_1 + \delta_0] \times \Gamma \\ (v(t_1, \cdot), \partial_t v(t_1, \cdot)) = (0, \Phi_j) \end{cases}$$

admet une solution \mathcal{E}^2 définie dans $[t_1, t_1 + \delta_0] \times \bar{\Omega}$. De plus v satisfait:

$$v(t_1)_{|\partial\Omega} = 0 \quad , \quad \partial_n v(t_1) + \gamma v(t_1)_{|\partial\Omega} = 0$$

On se sert de cette proposition pour démontrer le théorème suivant:

THEOREME 4-4: *Si $\alpha, \gamma, r, \Gamma$ et Σ sont analytiques, $\alpha(x) \neq 1, \forall x \in \Gamma$, il n'existe pas de solutions évanescents.*

Preuve

Supposons qu'il existe une solution évanescence c'est-à-dire qu'il existe f dans H et $T_0 = \inf\{t > 0 / U(t)f = 0\}$. Le théorème 4-1 et le lemme 4-1 montrent qu'il y a un réel $\rho_1 > 0$ tel que:

$$\text{supp}_x (U(t)f) \subset \Omega \cap B(0, \rho_1) = \Omega_{\rho_1}$$

Pour démontrer que l'ensemble

$$H(T_0) = \{g / U(t)g = 0, t \geq T_0\}$$

est réduit à $\{0\}$, il suffit de montrer que $\bigcap_{n \geq 1} D(A^n) \cap H(T_0) = \{0\}$. On suppose donc que $U(t)f \in \bigcap_{n \geq 1} D(A^n)$. On en déduit que:

$$U(t)f \in \mathcal{C}^2([0, T_0], D(A))$$

soit $u(t, x) = [U(t)f]_1(x) \in \mathcal{C}^2([0, T_0], H^2(\Omega_{\rho_1}))$. On note v la solution du problème défini dans la proposition 4-1 avec $\Omega = \Omega_1$, $t_1 = T_0 - \varepsilon_1$ où ε_1 est un réel strictement positif tel que $\varepsilon_1 < \delta_0$. Puisque $u(T_0, x)$ s'annule dans Ω_2 et $u(t, \cdot)$ est solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}_t^+ \times \Omega_2$, pour $t \in [0, T_0]$, il existe R tel que $u(t, x) = 0$ pour $x \in \Omega_2$ et $|x| \geq R$. Dans Ω_1 , $u(T_0) = 0$. Le théorème d'Holmgren permet de trouver $\varepsilon_2 > 0$ tel que $u(T_0 - \varepsilon_2, x) = 0$ pour $x \in \Omega_1 \cap \{|x| \leq R'\}$ où R' tel que $B(0, R') \subset \Omega_1$. Soit $R_1 \geq R$, on a l'inégalité d'énergie:

$$E_{R_1}(u(T_0)) \geq E_{R_1 - T_0 + t}(u(t)), \quad \forall t \in [T_0 - \varepsilon_2, T_0]$$

Or $E_{R_1}(u(T_0)) = 0$ donc $u(t, x) = 0$ pour $x \in \Omega \cap \{|x| \leq R_1\}$ et $t \in [T_0 - \varepsilon_2, T_0]$. En particulier, $u(T_0 - \varepsilon_2, x) = 0$, $\forall x \in \Omega_2$ et $u(t)_{/\Sigma} = \partial_\nu u(t)_{/\Sigma} = 0$ pour $t \in [T_0 - \varepsilon_2, T_0]$. On choisit maintenant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On a:

$$\int_{T_0 - \varepsilon}^{T_0} \int_{\Omega_1} [v(r(x)\partial_t^2 - \Delta)u - u(r(x)\partial_t^2 - \Delta)v] dx dt = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_{T_0 - \varepsilon}^{T_0} \int_{\Omega_1} [v(r(x)\partial_t^2 - \Delta)u - u(r(x)\partial_t^2 - \Delta)v] dx dt &= \int_{\Omega_1} r(x)[v\partial_t u - u\partial_t v]_{t=T_0 - \varepsilon}^{T_0} \\ &\quad - \int_{T_0 - \varepsilon}^{T_0} \int_{\partial\Omega_1} (v\partial_n u - u\partial_n v) dS dt \end{aligned}$$

Puisque $u(t)_{/\Sigma} = \partial_\nu u(t)_{/\Sigma} = 0$ pour $t \in [T_0 - \varepsilon, T_0]$, seul reste le terme sur Γ qui vaut d'après les conditions aux limites vérifiées par u et v :

$$-\int_{T_0 - \varepsilon}^{T_0} \int_{\partial\Omega_1} (v\partial_n u - u\partial_n v) dS dt = \int_{T_0 - \varepsilon}^{T_0} \int_{\Gamma} \alpha(x)(v\partial_t u - u\partial_t v) d\Gamma dt$$

soit après intégration en temps, puisque $u(T_0)=0$ et $v(T_0-\varepsilon)=0$ sur Γ :

$$-\int_{T_0-\varepsilon}^{T_0} \int_{\partial\Omega_1} (v \partial_n u - u \partial_n v) dS dt = \int_{\Gamma} \alpha(x) [uv]_{t=T_0-\varepsilon}^{T_0} d\Gamma = 0$$

Finalemment il reste:

$$\int_{\Omega_1} r(x) u(T_0-\varepsilon, x) \Phi_j(x) dx = 0 \Rightarrow u(T_0-\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega_1$$

Comme on a vu que $u(T_0-\varepsilon)=0$ dans Ω_2 , ceci contredit le choix de T_0 . 

Représentation du noyau de diffraction

On rappelle qu'on a montré l'existence de l'opérateur de diffraction S dans le cas d'un obstacle avec une couche (chapitre I). De plus, S vérifie la propriété

$$(1) \quad S U_0(t) = U_0(t) S, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

On définit à l'aide de la représentation par translation de $\{U_0(t)\}$ donnée par l'application unitaire \mathcal{R} (voir chapitre I,(2-12)-(2-13)), l'opérateur \tilde{S} borné dans $L^2(\mathbb{R} \times S^2)$:

$$\tilde{S} = \mathcal{R} S \mathcal{R}^{-1}$$

D'après (1), l'opérateur \tilde{S} commute avec les translations T_t et donc est un opérateur à noyau $S^\#$:

$$\tilde{S} k(s, \omega) = k(s, \omega) + \iint S^\#(s-s', \omega, \theta) k(s', \theta) ds' d\theta$$

On appelle $S^\#$ le noyau de diffraction. A.Majda [21] obtint le premier une représentation intégrale du noyau de diffraction dans le cas d'un obstacle sans couche pour des conditions aux limites préservant l'énergie. En premier lieu, on rappelle cette formulation intégrale de $S^\#$ pour un obstacle homogène, réfléchissant ou absorbant. La méthode de [21], [24] n'étant plus utilisable lorsque le problème est dissipatif, on lui préfère la méthode plus générale exposée par V.Petkov [28], [29]. Ensuite on établit le lien entre $S^\#$ et l'amplitude de diffraction. Pour finir, nous étendons ces résultats au cas d'un obstacle inhomogène qui nous a occupé dans le chapitre I.

1- Cas d'un obstacle homogène

On se propose d'établir une formule de représentation du noyau de diffraction (dans le cas où bien sûr l'opérateur de diffraction S existe) pour le problème perturbé suivant:

$$(1-1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Omega \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Gamma \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = (f_1, f_2) = f \end{cases}$$

où l'ouvert Ω est l'extérieur d'un compact de \mathbb{R}^3 , Γ sa frontière et \mathcal{B} désigne la condition aux limites. On a repris les notations du chapitre I en ce qui concerne $\mathbb{R}_t^{(+)}$. On note $U(t)$ l'opérateur correspondant à la solution perturbée u et A son générateur infinitésimal: $\{U(t)\}$ peut être soit un groupe d'opérateurs unitaires dans $H = H_1 \times L^2(\Omega)$, espace des données d'énergie finie, soit un semi-groupe de contraction.

On montre que $S^\#$ est déterminé par la diffraction des ondes planes incidentes $\delta(t-x.\omega)$ où δ est la mesure de Dirac en 0 sur \mathbb{R} . Pour toute direction ω fixée, on prouve l'existence d'une onde plane "distordue" $w(t, x, \omega)$ solution en un sens faible de l'équation des ondes hors de l'obstacle, de la condition sur le bord Γ et de:

$$w(t, x, \omega) = \delta(t-x.\omega) \quad , \quad t < -\rho$$

où ρ est le rayon de la boule englobant l'obstacle. Le noyau de diffraction est alors donné, sous des hypothèses que nous précisons par la suite, par la formule de représentation intégrale:

$$(1-2) \quad \begin{aligned} S^\#(s, \omega, \theta) = & \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\Gamma} \delta'(t+s-x.\omega) \partial_\nu w_d(t, x, \theta) \\ & + (v_x \cdot \omega) \delta''(t+s-x.\omega) w_d(t, x, \theta) dt d\Gamma(x) \end{aligned}$$

où ν désigne la normale à Γ extérieure à Ω et $w_d(t, x, \theta) = w(t, x, \theta) - \delta(t-x.\theta)$.

Cette formulation permet d'établir une localisation du support de $S^\#$:

$$\text{supp}_s S^\#(s, \omega, \theta) \subset]-\infty, \max_{x \in \Gamma} (x \cdot (\theta - \omega))]$$

L'analyse du support singulier de $S^\#$ a été abordée par de nombreux auteurs dans le cas d'un obstacle sans couche ou d'un obstacle transparent (Majda [23], Petkov [30], Taylor [32]). Dans le cas d'une condition \mathcal{B} conservative, Majda [21] a montré, par les techniques de l'analyse microlocale de la

propagation des singularités, que si l'obstacle ne piège pas de rayons le noyau $S^\#$ et l'onde w_d sont à décroissance rapide.

Le noyau $S^\#$ étant une distribution tempérée par rapport à s , on peut prendre sa transformée de Fourier $\hat{S}^\#$. A un facteur près, on trouve alors l'amplitude de diffraction a :

$$\hat{S}^\#(-\sigma, \omega, \theta) = \frac{i\sigma}{2\pi} a(\sigma, \omega, \theta)$$

On montre que le calcul de a se ramène à celui des traces d'ondes incidentes périodiques dépendant du temps sur la frontière de l'obstacle (quand celui-ci est non captif) sur un intervalle de temps suffisamment long.

Pour démontrer (1-2), on a besoin de connaître le profil asymptotique d'une onde solution du problème non perturbée (P_0).

1-1. Profil asymptotique

Les notations sont les mêmes que dans le chapitre I. Soit $u_0(t, x)$ une solution de (P_0) d'énergie finie et soit k le représentation par translation de la donnée initiale ($u_0(0, x), \partial_t u_0(0, x)$). On suppose que $k \in \mathcal{C}_{comp}^1(\mathbb{R} \times S^2)$. Alors le comportement asymptotique de u_0 s'écrit:

$$(1-3) \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} t \partial_t u_0(t, (t+s)\theta) = -k(s, \theta) \quad , \quad \forall \theta \in S^2$$

$$(1-4) \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} t \theta \cdot \nabla u_0(t, (t+s)\theta) = k(s, \theta) \quad , \quad \forall \theta \in S^2$$

la convergence étant uniforme pour s dans un intervalle borné. On démontre le théorème suivant:

THEOREME 1-1: *Pour tout f dans H_0 , la solution de (P_0) $U_0(t)f = (u_0(t, x), \partial_t u_0(t, x))$ vérifie:*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \partial_t u_0(t, x) + \frac{1}{r} k(r-t, \frac{x}{r}) \right|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \partial_t u_0(t, x) - \frac{1}{r} k(-r-t, -\frac{x}{r}) \right|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$

De même on a:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla u_0(t, x) - \frac{1}{r^2} x \cdot k(r-t, \frac{x}{r}) \right|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla u_0(t, x) - \frac{1}{r^2} x \cdot k(-r-t, -\frac{x}{r}) \right|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$

Preuve

Quitte à régulariser ensuite, on suppose que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ avec $\text{supp } f \subset B(0, a)$ d'où le représentant par translation $\mathcal{R}f = k \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)$ et $k(s, \theta) = 0$ pour $|s| > a$. D'après (1-3), on a:

$$\int_{S^2} \int_{-a}^a |(t+s) \partial_t u_0(t, (t+s)\theta) + k(s, \theta)|^2 ds d\theta \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$$

Soit en faisant le changement de variable $r = t+s$:

$$\int_{S^2} \int_{-a+t}^{a+t} |r \partial_t u_0(t, r\theta) + k(r-t, \theta)|^2 dr d\theta \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$$

On traite le cas $t \rightarrow +\infty$, le cas $t \rightarrow -\infty$ se traitant de façon analogue. Puisque $f(x) = 0$ pour $|x| > a$ et que dans l'espace libre, aucun signal ne se propage à une vitesse plus petite que l'unité, on a pour $t \geq a$:

$$u_0(t, x) = 0, \quad |x| < t-a \Rightarrow k(r-t, \theta) = 0, \quad r < t-a$$

Donc l'intégrale

$$\int_{S^2} \int_0^{t-a} |r \partial_t u_0(t, r\theta) + k(r-t, \theta)|^2 dr d\theta$$

est nulle. On en déduit que:

$$\int_{S^2} \int_0^{a+t} |r \partial_t u_0(t, r\theta) + k(r-t, \theta)|^2 dr d\theta \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$$

D'autre part, le principe d'Huygens donne $\partial_t u_0(t, x) = 0$, $|x| \geq a+t$ d'où $k(r-t, \theta) = 0$, $r < t+a$ d'où:

$$\int_{S^2} \int_{a+t}^{\infty} |r \partial_t u_0(t, r\theta) + k(r-t, \theta)|^2 dr d\theta = 0$$

ce qui permet de conclure à:

$$\int_{S^2} \int_0^{\infty} |r \partial_t u_0(t, r\theta) + k(r-t, \theta)|^2 dr d\theta \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$$

On pose alors $x = r\theta$ ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t u_0(t, x) + \frac{1}{r} k(r-t, \frac{x}{r})|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Sachant que $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} t \theta \cdot \nabla u_0(t, (t+s)\theta) = k(s, \theta)$, on démontre de même que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0(t, x) - \frac{1}{r^2} x \cdot k(r-t, \frac{x}{r})|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0(t, x) - \frac{1}{r^2} x \cdot k(-r-t, -\frac{x}{r})|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$



1-2. Représentation intégrale de $S^\#$

Soit $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)$ tel que k s'annule pour $|s| > a$. On pose:

$$(1-5) \quad k = \mathcal{R}f, \quad U_0(t)f = (\alpha(t), \partial_t \alpha(t))$$

On considère le problème:

$$(P_\alpha) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ (u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) = (\alpha(t, \cdot), \partial_t \alpha(t, \cdot)) \text{ pour } t \leq -(\rho + a) \end{cases}$$

Soient les quatre conditions suivantes:

(H_1) *l'opérateur de diffraction S existe*

(H_2) *Toute solution u de (P_α) est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega})$*

(H_3) *Le problème (1-1) admet une unique solution dans $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t^{(+)}, D(A))$*

(H_4) *Si $\psi \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ alors $U^*(t)\psi \in (\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}_t^{(+)} \times \bar{\Omega}))^2$*

où l'espace $\mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \Delta f \in \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{B}(f, 0) = 0\}$

On introduit maintenant la notion d'onde plane "distordue". Soit le problème de Cauchy suivant:

$$(1-6) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)\Gamma_0 = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega \\ \mathcal{B}(\Gamma_0, \partial_t \Gamma_0) = -\mathcal{B}(d(t-x, \omega), d'(t-x, \omega)) \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ \Gamma_0(t, \cdot) = 0 \text{ pour } t \leq -\rho \end{cases}$$

où la fonction d est définie par:

$$d(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

THEOREME 1-2: *L'onde plane "distordue" w est définie par:*

$$(1-7) \quad w(t, x, \omega) = \partial_t^3 \Gamma_0(t, x, \omega) + \delta(t-x, \omega)$$

où Γ_0 est solution de (1-6). On a:

$$(1-8) \quad w(t+s, x, \omega) \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_x)) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_s, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2 \times \Omega_x))$$

et toute solution u de (P_α) s'écrit sous la forme:

$$(1-9) \quad u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \langle w(t+s, x, \omega), k(s, \omega) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)}$$

où k est donné en (1-5).

Pour démontrer la propriété de régularité $w(t+s, x, \omega) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_x))$, on a besoin des deux lemmes:

LEMME 1-1: Pour tout θ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_t)$ et tout ψ dans $\mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction :

$$(s, \omega) \longmapsto \left(\int \theta(t) \mathcal{G}^s(t) dt, \psi \right)_H$$

est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2)$, où on a noté

$$\mathcal{G}^s(t, \cdot, \omega) = \int_{-\infty}^t U(t-\tau)(0, q(\tau+s, \cdot, \omega)) d\tau$$

LEMME 1-2: Soit $F^s(t, x, \omega) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times S_\omega^2, H)$. On suppose que:

$$\text{supp}_x F^s(t, \cdot, \omega) \subset \{x \in \Omega / |x| \leq R + |t|\}$$

où R est un réel positif indépendant de t et ω . De plus, pour tout θ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_t)$ et ψ dans $\mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction

$$(s, \omega) \longmapsto \left(\int \theta(t) F^s(t, \cdot, \omega) dt, \psi \right)_H$$

est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2)$. Alors $F^s(t, x, \omega) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_x))$.

Preuve du théorème 1-2

Introduisons la fonction de troncature $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \rho_1$ et $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq \rho > \rho_1$ où ρ_1 a été choisi tel que l'obstacle soit contenu dans la boule $B(0, \rho_1)$. Soit $q(t, x, \omega)$ la fonction dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2, H_{comp}^1(\Omega))$ définie par:

$$(1-10) \quad q(t, x, \omega) = -2 \nabla \chi(x) \cdot \nabla_x (d(t-x, \omega)) - \Delta \chi(x) \cdot d(t-x, \omega)$$

Alors, d'après l'hypothèse (H_3) , la fonction G donnée par:

$$(G(t, \cdot, \omega), \partial_t G(t, \cdot, \omega)) = \int_{-\infty}^t U(t-\tau)(0, q(\tau, \cdot, \omega)) d\tau$$

est l'unique solution dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2, \mathcal{D}(A))$ du problème:

$$(1-11) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) G = q \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega \\ \mathcal{B}(G, \partial_t G) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ G(t, \cdot) = 0 \text{ pour } t \leq -\rho \end{cases}$$

Ainsi on résoud (1-6) en posant:

$$\Gamma_0(t, x, \omega) = -\chi(x) d(t-x, \omega) + G(t, x, \omega)$$

et la même condition (H_3) nous permet de dire que c'est l'unique solution de (1-6). Montrons maintenant la propriété (1-8). D'après ce qui précède, l'onde plane w s'écrit aussi:

$$(1-12) \quad w(t, x, \omega) = (1 - \chi(x)) d(t - x \cdot \omega) + \partial_t^3 G(t, x, \omega)$$

On établit d'abord que $w(t+s, x, \omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_s, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2 \times \Omega_x))$. Pour cela, il suffit de montrer que $t \mapsto \|G(t, \cdot, \omega)\|_{H_1}$ est à croissance lente pour $t \rightarrow +\infty$ (on rappelle que $H = H_1 \times L^2(\Omega)$). D'après l'expression (1-10) de $q(t, x, \omega)$, on démontre aisément que:

$$\|q(t, \cdot, \omega)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1+t^2)$$

La norme de G est majorée par:

$$\int_{-\infty}^t \|q(\tau, \cdot, \omega)\|_{L^2(\Omega)} d\tau$$

Or $q(\tau, \cdot, \omega)$ s'annule pour $\tau < -\rho$ donc:

$$\|G(t, \cdot, \omega)\|_{H_1} \leq C \int_{-\rho}^t \|q(\tau, \cdot, \omega)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \leq C'(1+t)^3$$

Ceci prouve que $G(t, x, \omega) \in \mathcal{E}^0(S_\omega^2, \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t, H_1))$. D'où la "seconde moitié" du résultat (1-8). La propriété $w(t+s, x, \omega) \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_x))$ se démontre en deux étapes. En premier lieu, il est facile de voir que:

$$(1 - \chi(x)) \delta(t+s-x \cdot \omega) \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_x))$$

puisque, pour toute fonction θ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_t)$, on a:

$$\langle (1 - \chi(x)) \delta(t+s-x \cdot \omega), \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_t)} = (1 - \chi(x)) \theta(x \cdot \omega - s)$$

La seconde étape consiste en l'application des lemmes 1-1 et 1-2. Si on prend

$$F^s(t, x, \omega) = (G(t+s, x, \omega), \partial_t G(t+s, x, \omega)) = \mathcal{S}^s(t)$$

dans le lemme 1-2, on en tire que:

$$\partial_t^3 G(t+s, x, \omega) \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_x))$$

ce qu'il fallait prouver.

Il reste à montrer que toute solution u de (P_α) s'écrit sous la forme (1-9) au sens des distributions c'est-à-dire que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t \times \Omega_x)$ on a:

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_t \times \Omega)} = \frac{1}{2\pi} \langle w(t+s, x, \omega), k(s, \omega) \otimes \varphi(t, x) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2 \times \mathbb{R}_t \times \Omega)}$$

Puisque le problème perturbé (P) admet une unique solution dans $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t^{(+)}, D(A))$, pour prouver que $u(t, x) = u_1(t, x)$ où:

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \langle w(t+s, x, \omega), k(s, \omega) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)}$$

il suffit de montrer que:

$$(1-13) \quad (u_1, \partial_t u_1) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$$

et que u_1 est solution du problème (P_α) . L'onde plane "distordue" w se représentant sous la forme (1-12), on regarde tout d'abord:

$$\langle (1-\chi(x)) \delta(t+s-x.\omega), k(s, \omega) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_s \times S^2)} = (1-\chi(x)) \int_{S^2} k(x.\omega-t, \omega) d\omega$$

Comme $1-\chi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est nul au voisinage de l'obstacle et $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2)$, il est clair que:

$$(1-\chi(x)) \left(\int_{S^2} k(x.\omega-t, \omega) d\omega, \int_{S^2} \partial_s k(x.\omega-t, \omega) d\omega \right) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$$

D'autre part on a vu que $(G(t+s, x, \omega), \partial_t G(t+s, x, \omega)) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t, D(A)))$.

Or on a:

$$\partial_t^k G(t+s, x, \omega) = \partial_s^k G(t+s, x, \omega), \quad k \in \mathbb{N}$$

donc $(\partial_t^3 G(t+s, x, \omega), \partial_t^4 G(t+s, x, \omega)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t, D(A)))$. On en conclut qu'on a bien (1-13). La vérification de $\square u_1 = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_x)$ et celle de $\mathcal{B}(u_1, \partial_t u_1) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Gamma_x)$ sont immédiates grâce à (1-11). En notant que pour tout s tel que $|s| \leq a$ et pour tout $t \leq -(\rho+a)$, la somme $t+s$ est inférieure à $-\rho$ on trouve que:

$$u_1(t, \cdot) = \frac{1}{2\pi} \langle \delta(t+s-x.\omega), k(s, \omega) \rangle \quad \text{pour } t \leq -(\rho+a)$$

Or l'onde libre α est une superposition d'ondes planes $k(x.\omega-t, \omega)$:

$$\alpha(t, x) = \frac{1}{2\pi} \langle \delta(t+s-x.\omega), k(s, \omega) \rangle$$

Donc $u_1(t)$ coïncident avec $\alpha(t)$ pour $t \leq -(\rho+a)$. 

Preuve du lemme 1-1

Comme $q(t+s, x, \omega)$ est une somme finie de termes du type $\varphi(x) f(t+s-x.\omega)$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on va faire l'étude dans le cas d'un seul terme:

$$q^s(t, x, \omega) = \varphi(x) f(t+s-x.\omega)$$

Puisque $q^s(t, x, \omega) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times S_\omega^2, L_{comp}^2(\Omega))$, on a $\mathcal{S}^s(t, x, \omega) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times S_\omega^2, H)$. Soient $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t)$ et $\psi \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, on peut écrire:

$$\left(\int \theta(t) \mathcal{S}^s(t) dt, \psi \right)_H = \int \theta(t) \int_{-\infty}^t ((0, q^s(\tau, \cdot, \omega)), U^*(t-\tau) \psi)_H d\tau dt$$

On note $v(t, x) = [U^*(t)\psi]_1(x)$. Par (H_4) , $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \bar{\Omega})$. On a ainsi:

$$\begin{aligned} (\int \theta(t) \mathcal{F}^s(t) dt, \psi)_H &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \varphi(x) f(t+s-x.\omega) \bar{v}(t-\tau, x) dx d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s+x.\omega) \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \varphi(x) f(t) \bar{v}(t-\tau, x) dx d\tau dt \end{aligned}$$

Le théorème de Lebesgue assure que cette fonction de ω et s est \mathcal{C}^∞ . 

Preuve du lemme 1-2

Soit $u \in H$ tel que $\text{supp } u \subset \{|x| \leq R_1\}$. On choisit $\chi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ valant 1 sur un voisinage du support de u . Pour $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ on construit f_1 solution de:

$$\begin{cases} \Delta f_1 = \varphi_1 \text{ dans } \Omega \\ \mathcal{B}(f_1, 0) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

On sait que $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. On pose $\psi = (-\chi f_1, \bar{\varphi}_2) \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ et en particulier appartient à H . On a alors:

$$\langle u_1, \varphi_1 \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)} = \langle u_1, \Delta f_1 \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)}$$

Le choix de χ impose que:

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla f_1 dx = - \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla \psi_1 dx$$

Puisque $u_1 \in H_1$, on a $u_1 \in BL_0^1(\Omega)$ dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet sinon $u_1 \in BL_{comp}^1(\Omega)$ donc la formule de Green s'applique, ce qui donne:

$$\langle u_1, \Delta f_1 \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)} = (u_1, \varphi_1)_{H_1}$$

D'où l'égalité:

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)} = (u, \psi)_H$$

Appliquons ce résultat à $u = \int \theta(t) F^s(t, \cdot, \omega) dt$ de sorte que:

$$\langle \int \theta(t) F^s(t, \cdot, \omega) dt, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2)$$



Le résultat (1-9) va permettre d'obtenir la représentation intégrale du noyau $S^\#$.

LEMME 1-3: Soit u la solution du problème (P_α) où α est déterminé par (1-5). Soit $l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2)$ le représentant par translation d'une donnée g tel que $\text{supp}_s l \subset [-b, b]$. Si on note:

$$U_0(t)g = (\zeta(t), \partial_t \zeta(t))$$

alors pour tout $\tau > \rho + \max(a, b)$, on a

$$(1-14) \int_{\Omega} \{ \nabla(u - \alpha)(\tau, x) \cdot \nabla \zeta(\tau, x) + (\partial_t u - \partial_t \alpha)(\tau, x) \partial_t \zeta(\tau, x) \} dx = \int_{\Sigma_\tau} \{ \partial_\nu u \partial_t \zeta - \partial_\nu (\partial_t \zeta) u \} d\Sigma$$

où $\Sigma_\tau = (\mathbb{R} \cap \{|t| < \tau\}) \times \Gamma$.

Preuve

Puisque ζ et u sont solutions de l'équation des ondes dans l'espace libre et dans Ω respectivement, on a:

$$0 = \zeta \square u - u \square \zeta = \partial_t (\zeta \partial_t u - u \partial_t \zeta) + \nabla (u \nabla \zeta - \zeta \nabla u) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega$$

Soit le domaine espace-temps $Q_\tau = (\mathbb{R} \cap \{|t| < \tau\}) \times \Omega$. Comme $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \bar{\Omega})$ et $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$, on peut intégrer l'identité ci-dessus sur Q_τ :

$$0 = \int_{Q_\tau} \{ \partial_t (\zeta \partial_t u - u \partial_t \zeta) + \nabla (u \nabla \zeta - \zeta \nabla u) \} dx dt$$

La première intégrale donne après intégration en temps:

$$\int_{Q_\tau} \partial_t (\zeta \partial_t u - u \partial_t \zeta) dt dx = \int_{\Omega} (\zeta \partial_t u - u \partial_t \zeta)(\tau, x) dx - \int_{\Omega} (\zeta \partial_t u - u \partial_t \zeta)(-\tau, x) dx$$

tandis que la deuxième se transforme en:

$$\int_{Q_\tau} \nabla (u \nabla \zeta - \zeta \nabla u) dx dt = \int_{\Sigma_\tau} \nu_x \cdot \{ u \nabla \zeta - \zeta \nabla u \} d\Sigma(t, x)$$

où ν désigne la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω . D'où finalement:

$$(1-15) \quad 0 = \int_{\Omega} (\zeta \partial_t u - u \partial_t \zeta)(\tau, x) dx - \int_{\Omega} (\zeta \partial_t u - u \partial_t \zeta)(-\tau, x) dx + \int_{\Sigma_\tau} \{ u \partial_\nu \zeta - \zeta \partial_\nu u \} d\Sigma$$

En procédant de même pour les ondes libres α et ζ , on trouve que:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R} \cap \{|t| < \tau\})} (\zeta \square \alpha - \alpha \square \zeta) dx dt$$

soit:

$$(1-16) \quad 0 = \int_{\mathbb{R}^3} (\zeta \partial_t \alpha - \alpha \partial_t \zeta)(\tau, x) dx - \int_{\mathbb{R}^3} (\zeta \partial_t \alpha - \alpha \partial_t \zeta)(-\tau, x) dx$$

le terme intégral contenant $\nabla(\alpha \nabla \zeta - \zeta \nabla \alpha)$ s'annule puisque quand $|x| \rightarrow \infty$, $\alpha(t, x)$ et $\zeta(t, x)$ tendent vers 0 et $|\alpha|$ et $|\zeta|$ restent bornés. L'onde $u_1(t)$ coïncidant avec $\alpha(t)$ pour $t \leq -(\rho+a)$, le temps τ étant choisi supérieur à $\rho+a$, on a $u = \alpha$ et $\partial_t u = \partial_t \alpha$ en $t = -\tau$. On a aussi:

$$\zeta(t, x) = 0 \text{ pour } |x| \leq |t| - b \Rightarrow \zeta(t, x) = 0 \text{ pour } |x| \leq \rho, |t| \geq \tau$$

En tenant compte de ces remarques et en soustrayant (1-15) à (1-16), on obtient:

$$\int_{\Omega} (\partial_t u - \partial_t \alpha)(\tau, x) \zeta(\tau, x) - (u - \alpha)(\tau, x) \partial_t \zeta(\tau, x) dx = \int_{\Sigma_\tau} \{ \zeta \partial_\nu u - u \partial_\nu \zeta \} d\Sigma$$

On remplace alors ζ par $\partial_t \zeta$ et sachant que $\partial_t^2 \zeta = \Delta \zeta$, on a:

$$\int_{\Omega} (\partial_t u - \partial_t \alpha)(\tau, x) \partial_t \zeta(\tau, x) - (u - \alpha)(\tau, x) \Delta \zeta(\tau, x) dx = \int_{\Sigma_\tau} \{ \partial_t \zeta \partial_\nu u - u \partial_\nu \partial_t \zeta \} d\Sigma$$

La formule de Green donne:

$$\int_{\Omega} (u - \alpha)(\tau, x) \Delta \zeta(\tau, x) dx = - \int_{\Omega} \nabla(u - \alpha)(\tau, x) \cdot \nabla \zeta(\tau, x) dx + \int_{\Gamma} (u - \alpha)(\tau, x) \partial_\nu \zeta(\tau, x) d\Gamma$$

Comme $\zeta(\tau, x) = 0$, $|x| \leq \rho$, le terme sur Γ est nul. On en déduit (1-14). 

L'opérateur de diffraction S , puisqu'il existe par hypothèse, est donné par:

$$S f' = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_0(-t) \mathcal{J} U(2t) \mathcal{J}_0 U_0(-t) f' \quad f' \in H_0$$

où \mathcal{J} et \mathcal{J}_0 sont des applications de H dans H_0 et H_0 dans H respectivement, vérifiant:

$$\mathcal{J}_0 / D_+^{\rho} \oplus D_-^{\rho} = Id / D_+^{\rho} \oplus D_-^{\rho} \quad , \quad \mathcal{J} / D_+^{\rho} \oplus D_-^{\rho} = Id / D_+^{\rho} \oplus D_-^{\rho}$$

Dans le cas conservatif, il est facile de voir que:

$$(1-17) \quad S f = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_0(-t) \mathcal{J} (u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot))$$

où u est la solution de (P_α) . En effet, si on note g' la donnée initiale de $(u, \partial_t u)$, la condition $u = \alpha$ et $\partial_t u = \partial_t \alpha$ pour $t \leq -(\rho+a)$ implique que:

$$g' = U(-t) U_0(t) f \quad , \quad t \leq -(\rho+a)$$

soit $g' = W_- f$ où W_- est l'opérateur défini par:

$$W_- f' = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) \mathcal{J}_0 U_0(-t) f' \quad f' \in H_0$$

Dans le cas dissipatif, on construit une solution u de (P_α) comme suit. On note

$$\tilde{u}(t, x, T) = U(t) U_0(-T) f \quad \text{où } T \geq \rho+a$$

alors \tilde{u} est solution du problème:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) \tilde{u} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega \\ \mathcal{B}(\tilde{u}, \partial_t \tilde{u}) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ (\tilde{u}(t, \cdot), \partial_t \tilde{u}(t, \cdot)) = (\alpha(t, \cdot), \partial_t \alpha(t, \cdot)) \text{ pour } t \leq T - (\rho + a) \end{cases}$$

La dernière égalité provient du fait que $U_0(-s)f \in D_-^\rho$ pour tout $s \geq \rho + a$. Si on pose $u(t, x) = \tilde{u}(t+T, x, T)$ alors u est solution de (P_α) . L'unicité de la solution de (P_α) implique que:

$$(u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) = U(t)U(T)U_0(-T)f$$

soit de nouveau

$$(u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) = U(t)W_-f$$

Il en résulte la même conclusion que dans le cas conservatif à savoir l'égalité (1-17).

LEMME 1-4: L'opérateur $\tilde{S} = \mathcal{R} S \mathcal{R}^{-1}$ vérifie

$$(1-18) \int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{S}k(s, \omega) - k(s, \omega)) l(s, \omega) ds d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_t} \{ \partial_\nu u \partial_t \zeta - \partial_\nu (\partial_t \zeta) u \} d\Gamma dt$$

Preuve

L'expression (1-17) de l'opérateur de diffraction S en fonction de la solution u de (P_α) montre qu'il existe $h = Sf$ dans H_0 tel que:

$$(1-19) \lim_{t \rightarrow +\infty} \| \mathcal{I}_0 U_0(t)h - (u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) \| = 0$$

Soit m le représentant par translation de h alors $\tilde{S}k = m$. On peut définir un profil asymptotique pour $(u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot))$ grâce à (1-19) et au théorème 1-1 donnant le profil asymptotique de $U_0(t)h$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \partial_t u(t, x) + \frac{1}{r} m(r-t, \frac{x}{r}) \right|^2 dx &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_{\Omega} \left| \nabla u(t, x) - \frac{1}{r^2} x \cdot m(r-t, \frac{x}{r}) \right|^2 dx &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On fait alors tendre τ vers l'infini dans l'égalité (1-14) du lemme 1-3 ce qui donne:

$$\int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_t} \{ \partial_\nu u \partial_t \zeta - \partial_\nu (\partial_t \zeta) u \} d\Gamma dt = 2 \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} (m-k)(r-\tau, \frac{x}{r}) l(r-\tau, \frac{x}{r}) dx$$

Or pour $\tau > \rho + b$, on a:

$$l(r-\tau, \frac{x}{r})=0 \text{ pour } r < -b+\tau < \rho$$

L'intégrale sur Ω dans le terme limite se transforme en une intégrale sur tout \mathbb{R}^3 . On peut donc passer en coordonnées polaires $x = r \omega$ et en faisant le changement de variable $s = r - \tau$, on trouve:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{-\tau}^{+\infty} \int_{S^2} (m-k)(s, \frac{x}{r}) l(s, \frac{x}{r}) ds d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_t} \{ \partial_\nu u \partial_t \zeta - \partial_\nu (\partial_t \zeta) u \} d\Gamma dt$$

soit encore (1-18).

THEOREME 1-3: *Le noyau de diffraction $S^\#$ admet la représentation:*

$$S^\#(s, \omega, \theta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\Gamma} \delta'(t+s-x.\omega) \partial_\nu w_d(t, x, \theta) + (v_x.\omega) \delta''(t+s-x.\omega) w_d(t, x, \theta) dt d\Gamma(x)$$

où w_d est la différence entre l'onde plane distordue w et $\delta(t-x.\theta)$.

Preuve

La représentation de u peut se décomposer en deux parties:

$$(1-20) \quad u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \langle \delta(t+s-x.\omega), k(s, \omega) \rangle + \frac{1}{2\pi} \langle w_d(t+s, x, \omega), k(s, \omega) \rangle$$

soit, en fonction de l'onde libre α :

$$u(t, x) = \alpha(t, x) + \frac{1}{2\pi} \langle w_d(t+s, x, \omega), k(s, \omega) \rangle$$

En remplaçant u par son expression ci-dessus dans (1-18), on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{S}k(s, \omega) - k(s, \omega)) l(s, \omega) ds d\omega &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_t} \partial_\nu \alpha(t, x) \partial_t \zeta(t, x) \\ &- \partial_\nu (\partial_t \zeta)(t, x) \alpha(t, x) d\Gamma(x) dt + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_t} \partial_\nu \langle w_d(t+s', x, \theta), k(s', \theta) \rangle_{s', \theta} \partial_t \zeta(t, x) \\ &- \partial_\nu (\partial_t \zeta)(t, x) \langle w_d(t+s', x, \theta), k(s', \theta) \rangle_{s', \theta} d\Gamma(x) dt \end{aligned}$$

Comme $0 = \partial_t \zeta \square \alpha - \alpha \square \partial_t \zeta$ dans $\mathbb{R}_t \times \Omega$, on vérifie facilement que

$$\int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_t} \partial_\nu \alpha(t, x) \partial_t \zeta(t, x) - \partial_\nu (\partial_t \zeta)(t, x) \alpha(t, x) d\Gamma(x) dt = 0$$

En remplaçant maintenant $\partial_t \zeta$ par sa représentation

$$\partial_t \zeta(t, x) = \frac{1}{2\pi} \langle \delta'(t+s-x.\omega), l(s, \omega) \rangle$$

et en notant $\tilde{S}k(s, \omega) - k(s, \omega) = \langle \tilde{S}^\#(s, \omega, s', \theta), k(s', \theta) \rangle_{s', \theta}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2)$, on a la représentation pour les produits $\mathcal{D}(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}_{s'} \times S_\theta^2)$

$$\begin{aligned} \tilde{S}^\#(s, \omega, s', \theta) = & \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_t} \partial_\nu w_d(t+s', x, \theta) \delta'(t+s-x, \omega) \\ & + (v_x \cdot \omega) \delta''(t+s-x, \omega) w_d(t+s', x, \theta) d\Gamma(x) dt \end{aligned}$$

Par le théorème du noyau de Schwartz, $\tilde{S}^\#$ est alors déterminé sur tout $\mathcal{D}(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2 \times \mathbb{R}_{s'} \times S_\theta^2)$. On définit alors le noyau de diffraction $S^\#$ par:

$$\tilde{S}^\#(s, \omega, s', \theta) = S^\#(s-s', \omega, \theta)$$



La formule (1-2) de représentation de $S^\#$ est comprise au sens des distributions: pour φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_s)$, on a:

$$\begin{aligned} \langle S^\#(s, \omega, \theta), \varphi(s) \rangle_s = & -\frac{1}{8\pi^2} \langle \partial_\nu w_d(t, x, \theta), \varphi'(x, \omega-t) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_t \times \Gamma)} \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \langle (v_x \cdot \omega) w_d(t, x, \theta), \varphi''(x, \omega-t) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_t \times \Gamma)} \end{aligned}$$

1-3. Exemples

On donne ici des exemples simples de problèmes ayant les quatre propriétés (H_1) – (H_4) et donc, dont le noyau de diffraction admet la représentation intégrale (1-2).

Le premier cas conservatif qu'on regarde est le problème mixte (1-1) avec une condition de Dirichlet. Cet exemple a été traité par Lax et Phillips qui ont montré les deux conditions (H_1) et (H_3) . Quant aux deux conditions restantes soit (H_2) et (H_4) , elles résultent du fait que la donnée initiale f est dans $\bigcap_k D(A^k)$ et que $\psi \in \mathcal{D}_{\mathcal{Q}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ appartient aussi à ce même espace. Commençons par démontrer la première assertion. On rappelle que dans ce cas $H_1 = BL_0^1(\Omega)$. La donnée f est telle que $U_0(t)f \in D_-^\rho$ pour tout $t \leq -(\rho+a)$. On en déduit que $g' = W_- f$. D'autre part, d'après les propriétés de la représentation par translation \mathcal{R} , on a:

$$\mathcal{R}(A_0^k f) = (-1)^k \partial_s^k \mathcal{R}f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)$$

ce qui prouve que $A_0^k U_0(-t)f \in H_0$. Comme les opérateurs A et A_0 coïncident sur Ω et que $A^k g' = U(t)A^k U_0(-t)f$, on a bien $g' \in \bigcap_k D(A^k)$. En ce qui concerne la deuxième assertion, en notant que $\mathcal{D}_{\mathcal{A}, \Delta}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$, le résultat est immédiat.

Si l'on remplace la condition de Dirichlet par une condition de Neumann, on a toujours l'existence de l'opérateur S et l'unicité de la solution de (1-1) dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$. De même si l'on démontre que $g' \in \bigcap_k D(A^k)$, la solution u de (P_α) est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega})$ et si $\psi \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \subset \bigcap_k D(A^k)$, $U^*(t)\psi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega}))^2$. Écrivons ce qu'est le domaine de A^k :

$$D(A^k)$$

$$= \{f = (f_1, f_2) \in BL^1(\Omega) \times L^2(\Omega) = H / A^p f \in H \text{ pour } 1 \leq p \leq k \text{ et } \partial_n \Delta^j f_1 = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \forall 0 \leq j \leq [\frac{k}{2}], \partial_n \Delta^j f_2 = 0 \text{ sur } \Gamma, \forall 0 \leq j \leq [\frac{k+1}{2}] - 1\}$$

Il est clair que l'espace $\mathcal{D}_{\mathcal{A}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ est inclus dans $D(A^k)$ pour tout $k \geq 1$. Quant à la donnée g' , on montre comme précédemment que $U_0(-t)f \in D(A_0^k)$ pour $t \geq \rho + a$ et $k \geq 1$ et comme $U_0(-t)f$ s'annule au voisinage de l'obstacle, $U_0(-t)f \in D(A^k)$. On peut donc écrire:

$$A^k U(t)U_0(-t)f = U(t)A^k U_0(-t)f \in H$$

et par définition de $U(t)$, la première composante de $A^k g'$ vérifie la condition aux limites, ceci pour tout entier k .

Donnons un exemple d'équation des ondes dissipative. On considère la condition sur le bord Γ :

$$\mathcal{B}(u, \partial_t u) = \partial_n u + \alpha \partial_t u$$

où n est la normale à Γ extérieure à Ω et α est une fonction positive. On trouve les démonstrations de (H_1) et (H_3) dans la littérature ([16], [28]). Rappelons que la solution de (P_α) a été construite à partir d'une solution de (1-1):

$$(u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) = U(t)U(T)U_0(-T)f, \quad T \geq \rho + a$$

Puisque $U_0(-T)f \in \bigcap_k D(A^k)$ alors $U(t)U_0(-T)f \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \bar{\Omega}))^2$ donc $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega})$ et l'espace $\mathcal{D}_{\mathcal{A}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ a été choisi pour qu'il soit inclus dans tous les $D(A^{*k})$.

1-4. Amplitude de diffraction

Pour mettre en évidence le lien entre la théorie de la diffraction dépendant du temps et l'amplitude de diffraction, il suffit de considérer la transformée de Fourier de $S^\#$ par rapport à s . Le noyau $S^\#$ étant une distribution tempérée par rapport à s , on peut en prendre la transformée de Fourier:

$$\hat{S}^\#(-\sigma, \omega, \theta) = \langle S^\#(s, \omega, \theta), e^{i\sigma s} \rangle$$

La représentation intégrale de $S^\#$ donne alors la relation:

$$\hat{S}^\#(-\sigma, \omega, \theta) = \frac{i\sigma}{8\pi^2} \int_{\Gamma} e^{i\sigma x \cdot \omega} [(v_x \cdot \omega) i\sigma \hat{w}_d(\sigma, x, \theta) - \partial_\nu \hat{w}_d(\sigma, x, \theta)] d\Gamma(x) = \frac{i\sigma}{2\pi} a(\sigma, \omega, \theta)$$

où a est l'amplitude de diffraction et on a noté \hat{w}_d la transformée de Fourier de w_d :

$$\hat{w}_d(\sigma, x, \theta) = \int e^{-i\sigma t} w_d(t, x, \theta) dt$$

L'onde \hat{w}_d est solution du problème harmonique:

$$(P^\sigma) \quad \begin{cases} \Delta_x \hat{w}_d + \sigma^2 \hat{w}_d = 0, x \in \Omega \\ \hat{\mathcal{B}} \hat{w}_d = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \hat{w}_d(\sigma, x, \omega) = \frac{e^{i\sigma|x|}}{|x|} \frac{a(\sigma; \omega; -x/|x|)}{|x|} + o\left(\frac{e^{i\sigma|x|}}{|x|}\right), |x| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

où $\hat{\mathcal{B}}$ est obtenue en remplaçant ∂_t par $i\sigma$ dans l'expression de \mathcal{B} soit:

$$\hat{\mathcal{B}}v = \alpha(x) i\sigma v(x) + \partial_n v(x) + \gamma(x) v(x), \quad x \in \Gamma \text{ ou } \hat{\mathcal{B}}v = v$$

Le comportement à l'infini de \hat{w}_d n'est autre que la condition de radiation rentrante de Sommerfeld. Elle exprime la propriété d'incidence:

$$w_d(t, \cdot) = 0, \quad t \leq -\rho$$

et fait apparaître l'amplitude de diffraction pour une fréquence σ , une incidence ω et une direction d'observation θ .

Le calcul de l'amplitude de diffraction se ramène donc, soit à évaluer \hat{w}_d loin de l'obstacle et à appliquer:

$$a(\sigma, \omega, \theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{e^{i\sigma r}}{r} \hat{w}_d(\sigma, -r\theta, \omega)$$

soit à évaluer \hat{w}_d et $\partial_\nu \hat{w}_d$ sur Γ et utiliser la représentation intégrale de $a(\sigma, \omega, \theta)$.

Une procédure classique consiste à résoudre le problème en fréquence (P^σ) pour déterminer l'amplitude de diffraction. La théorie de la diffraction hyperbolique suggère des approches dépendants du temps: calculer \hat{w}_d en résolvant le problème d'évolution sur un intervalle de temps suffisamment grand pour certaines ondes incidentes, impulsions brèves ou oscillations entretenues. La méthode des impulsions brèves consiste à approcher l'onde incidente $\delta(t-x.\omega)$ par une impulsion brève $\varphi_j(t-x.\omega)$ où φ_j est une approximation régulière de δ . On calcule w_j du problème (1-1) et coïncidant avec φ_j dans le passé:

$$w_j(t,x) = \varphi_j(t-x.\omega) , t \leq -\rho$$

On évalue l'amplitude de diffraction à l'aide de l'onde diffractée w_j^d :

$$w_j^d(t,x) = w_j(t,x) - \varphi_j(t-x.\omega)$$

en calculant, soit le noyau de diffraction par sa représentation intégrale dont on prend ensuite la transformée de Fourier, soit en calculant la transformée de Fourier de w_j^d ce qui permet de calculer $a(\sigma, \omega, \theta)$.

On propose une seconde méthode évitant la régularisation de distributions singulières. Dans le cas d'un obstacle sans piège, on peut évaluer l'amplitude de diffraction en approchant \hat{w}_d par une méthode de type "amplitude limite".

Comme on a montré l'existence de l'onde plane "distordue" w , on montre l'existence d'une solution faible de (1-1) notée $u_{\sigma, \omega}(t, x)$, où $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\omega \in S^2$ sont fixés, telle que:

$$u_{\sigma, \omega}(t, x) = e^{i\sigma(t-x.\omega)} Y(t-x.\omega) , t \leq -\rho$$

où Y désigne la distribution de Heaviside. On note $u_{\sigma, \omega}^d$ l'onde diffractée définie par:

$$u_{\sigma, \omega}^d(t, x) = u_{\sigma, \omega}(t, x) - e^{i\sigma(t-x.\omega)} Y(t-x.\omega)$$

Le représentant par translation de la donnée initiale distribution:

$$e^{-i\sigma x.\omega} (Y(-x.\omega), i\sigma Y(-x.\omega) + \delta(-x.\omega))$$

est donné par:

$$(1-21) \quad k_{\sigma, \omega}(s, \theta) = 2\pi e^{-i\sigma s} Y(-s) \otimes \delta_\omega(\theta)$$

On voit facilement que:

$$\text{supp } k_{\sigma, \omega} \subset]-\infty, 0] \times S_\theta^2$$

$$\text{supp } \text{sing } k_{\sigma, \omega} \subset \{0\} \times S_\theta^2$$

Sous les deux hypothèses suivantes:

\mathbb{H}_1 – *Décroissance exponentielle de l'énergie locale:*

$$\forall R > \rho, \exists C, \alpha > 0 / \forall f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^2, \text{supp } f \subset B(0, R), \|U(t)f\|_R \leq C e^{-\alpha t}, \forall t \geq 0$$

\mathbb{H}_2 – *Propagation des singularités: les rayons portant les singularités de $w_d(t, \cdot)$ se propagent vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$.*

Majda [21] a montré qu'il existait $T_R > 0$ pour $R > \rho$ tel que l'onde diffractée w_d , différence entre l'onde plane distordue w et $\delta(t-x.\omega)$ vérifie:

$$w_d \in \mathcal{C}^\infty([T, +\infty[\times (\bar{\Omega} \cap B(0, R)) \times S_\theta^2)$$

$$\text{supp } w_d(t, x, \theta) \subset [-\rho, +\infty[\times S_\theta^2, \forall x \in \bar{\Omega} \cap B(0, R)$$

et il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que:

$$(1-22) \quad |w_d(t, x, \theta)| \leq C e^{-\alpha t}, \forall t \geq T_1 > T$$

On en déduit que:

$$(1-23) \quad \text{supp } w_d(t+, x, \cdot) \cap \text{supp } k_{\sigma, \omega} = \text{compact de } \mathbb{R}_s \times S_\theta^2$$

et pour $t \geq T + \varepsilon$ où ε est un réel strictement positif:

$$(1-24) \quad \text{supp } \text{sing } w_d(t+, x, \cdot) \cap \text{supp } \text{sing } k_{\sigma, \omega} = \emptyset$$

Ces deux propriétés permettent de définir le crochet de dualité:

$$\langle k_{\sigma, \omega}(s, \theta), w_d(t+s, x, \theta) \rangle_{s, \theta}, \quad t \geq T + \varepsilon, x \in \bar{\Omega} \cap B(0, R)$$

On obtient alors une représentation analogue à celle trouvée pour l'onde w_d :

$$(1-25) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \cap B(0, R), \forall t \geq T + \varepsilon, u_{\sigma, \omega}^d(t, x) = \frac{1}{2\pi} \langle k_{\sigma, \omega}(s, \theta), w_d(t+s, x, \theta) \rangle_{s, \theta}$$

on montre le résultat suivant:

THEOREME 1-4: *On suppose que les hypothèses \mathbb{H}_1 et \mathbb{H}_2 sont vérifiées. Alors pour tout $R > \rho$, il existe $C, \alpha > 0$ tels que:*

$$\forall x \in \bar{\Omega} \cap B(0, R), |e^{-i\sigma t} u_{\sigma, \omega}^d(t, x) - \hat{w}_d(\sigma, x, \omega)| \leq C e^{-\alpha t}, \forall t \geq T_2$$

Preuve

Ceci est une conséquence de la formule de représentation (1-25) et de la décroissance exponentielle (1-22) de w_d . En effet remplaçons $k_{\sigma, \omega}$ par (1-21) dans (1-25). On trouve:

$$u_{\sigma, \omega}^d(t, x) = \int_{-\infty}^0 e^{-i\sigma s} w_d(t+s, x, \omega) ds, \quad x \in \bar{\Omega} \cap B(0, R), \quad t \geq T + \varepsilon$$

soit après changement de variable

$$u_{\sigma, \omega}^d(t, x) = e^{i\sigma t} \int_{-\infty}^t e^{-i\sigma s} w_d(s, x, \omega) ds$$

Ainsi on a:

$$\hat{w}_d(\sigma, x, \omega) - e^{-i\sigma t} u_{\sigma, \omega}^d(t, x) = - \int_t^{+\infty} e^{-i\sigma s} w_d(s, x, \omega) ds$$

En prenant $T_2 = \max(T + \varepsilon, T_1)$ et en tenant compte de (1-22), on en déduit que:

$$|e^{-i\sigma t} u_{\sigma, \omega}^d(t, x) - \hat{w}_d(\sigma, x, \omega)| \leq C e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq T_2, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \cap B(0, R)$$

Ce théorème nous montre que, si l'obstacle ne piège pas de rayons, l'erreur fait par une troncature temporelle au niveau des transformées de Fourier est exponentiellement petite. Ceci nous donne un procédé de calcul de l'amplitude de diffraction:

$$a(\sigma, \omega, \theta) \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{i\sigma(x \cdot \omega - t)} [(v_x \cdot \omega) i\sigma u_{\sigma, \theta}^d(t, x) - \partial_\nu u_{\sigma, \theta}^d(t, x)] d\Gamma(x)$$

pour t suffisamment grand.

2- Cas d'un obstacle inhomogène

On revient ici au problème mixte du chapitre I:

$$(P) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Omega_2 \\ (r(x) \partial_t^2 - \Delta) u + \beta(x) \partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Omega_1 \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Sigma \\ \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Sigma \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^{(+)} \times \Gamma \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = (f_1, f_2) = f \end{cases}$$

On a démontré qu'alors les opérateurs d'ondes W et W_- existaient

$$W_- f = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) \mathcal{I}_0 U_0(-t) f, \quad f \in H_0,$$

$$W f = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_0(-t) \mathcal{I} U(t) f, \quad f \in H$$

ainsi que l'opérateur de diffraction S :

$$S = W W_-$$

On généralise la formule de représentation du noyau de diffraction $S^\#$ obtenue dans le cas d'un obstacle sans couche au cas de l'obstacle inhomogène du chapitre I. En reprenant les étapes du paragraphe ci-dessus, tout en ignorant en partie ce qui se passe dans la couche (sauf pour l'onde plane "distordue"), on montre que le noyau de diffraction s'écrit en fonction des traces sur Σ de l'onde w_d :

$$S^\#(s, \omega, \theta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\Sigma} \delta'(t+s-x.\omega) \partial_\nu w_d(t, x, \theta) + (v_x \cdot \omega) \delta''(t+s-x.\omega) w_d(t, x, \theta) dt d\Gamma(x)$$

où $w_d(t, x, \theta) = w(t, x, \theta) - \delta(t-x.\theta)$, l'onde w vérifiant (P) avec:

$$w(t, x, \theta) = \delta(t-x.\theta) \quad \text{pour } t \leq -\rho$$

2-1. Cas conservatif

Rappelons que dans le cas conservatif, la couche Ω_1 est transparente et la condition aux limites \mathcal{B} est soit de type Dirichlet soit de type Neumann. Le problème considéré est donc:

$$(2-1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_2 \\ (r(x)\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_1 \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = f' \end{cases}$$

Soit $\alpha(t, x)$ l'onde solution de l'équation des ondes dans l'espace libre $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3$ de donnée initiale f choisie telle que son représentant par translation k soit dans $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)$ et de support dans la boule $B(0, a)$ ($a > 0$). Puisque l'opérateur d'onde W_- existe, on pose

$$g' = W_- f$$

Alors il est facile de démontrer que $u(t) = [U(t)g']_1$, solution par définition de (2-1) avec $f' = g'$, vérifie:

$$(u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) = (\alpha(t, \cdot), \partial_t \alpha(t, \cdot)), \quad t \leq -(\rho + a)$$


où ρ est le rayon de la boule englobant l'obstacle $K \cup \bar{\Omega}_1$.

LEMME 2-1: L'onde u est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega}_2)$

Preuve

On a démontré dans le chapitre I que si $f \in \cap_k D(A^k)$ alors $u_{i\Omega_i} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega}_i)$ pour $i = 1$ ou 2 (proposition 1-2). Vérifions alors que $g' \in \cap_k D(A^k)$. La définition de f implique que :

$$g' = U(t)U_0(-t)f, \quad t \geq \rho + a$$

Puisque les opérateurs A et A_0 coïncident sur Ω_2 , que $U_0(-t)f \in \cap_k D(A_0^k)$ et s'annule au voisinage de l'obstacle, on en déduit que $g' \in \cap_k D(A^k)$. 

A partir de cette solution particulière de (2-1), on construit la représentation intégrale de $S^\#$.

LEMME 2-2: Soit g une donnée d'énergie finie, de représentant par translation $l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2)$ tel que $\text{supp}_s l \subset [-b, b]$. On note $\zeta(t) = [U_0(t)g]$ alors pour tout $\tau > \rho + \max(a, b)$, on a

$$\int_{\Omega_2} \{ \nabla(u-\alpha)(\tau, x) \cdot \nabla \zeta(\tau, x) + (\partial_t u - \partial_t \alpha)(\tau, x) \partial_t \zeta(\tau, x) \} dx = \int_{\Sigma_\tau} \{ \partial_\nu u \partial_t \zeta - \partial_\nu (\partial_t \zeta) u \} d\Sigma$$

où $\Sigma_\tau = (\mathbb{R} \cap \{|t| < \tau\}) \times \Sigma$.

Preuve

Puisque u est solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R} \times \Omega_2$, il suffit de reprendre la démonstration du lemme 1-3 (lemme similaire au lemme 2-2 dans le cas de l'obstacle sans couche) en remplaçant l'ouvert Ω par Ω_2 . ~~✂~~

L'hypothèse essentielle pour démontrer le lemme 1-4 est qu'il existe $h \in H_0$ tel que :

$$(2-2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \| \mathcal{I}_0 U_0(t)h - (u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) \| = 0$$

et $\tilde{S}k = \mathcal{R}h$. D'après la définition de u , on voit que:

$$Sf = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_0(-t) \mathcal{I} (u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot))$$

ce qui nous permet de trouver $h = Sf$ vérifiant (2-2). La preuve du lemme qui suit est alors similaire à celle du lemme 1-4, via le changement de Ω par Ω_2 .

LEMME 2-3: L'opérateur $\tilde{S} = \mathcal{R} S \mathcal{R}^{-1}$ vérifie

$$(2-3) \quad \int_{S^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{S}k(s, \omega) - k(s, \omega)) l(s, \omega) ds d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \int_{\mathbb{R}_t} \{ \partial_\nu u \partial_t \zeta - \partial_\nu (\partial_t \zeta) u \} d\Gamma dt$$

L'étape suivante consiste en la représentation par translation de u en fonction de l'onde plane "distordue" w associé à (2-1). On introduit pour cela le problème suivant:

$$(2-4) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma_0 = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_2 \\ (r(x) \partial_t^2 - \Delta) \Gamma_0 = -(r(x) \partial_t^2 - \Delta) d(t-x, \omega) \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_1 \\ \Gamma_0|_{\Omega_1} = \Gamma_0|_{\Omega_2} \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \partial_\nu \Gamma_0|_{\Omega_1} = \partial_\nu \Gamma_0|_{\Omega_2} \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \mathcal{B}(\Gamma_0, \partial_t \Gamma_0) = -\mathcal{B}(d(t-x, \omega), d'(t-x, \omega)) \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ \Gamma_0(t, \cdot) = 0 \text{ pour } t \leq -\rho \end{cases}$$

où la fonction d est définie par:

$$d(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

THEOREME 2-1: *L'onde plane "distordue" w est définie par:*

$$(2-5) \quad w(t, x, \omega) = \partial_t^3 \Gamma_0(t, x, \omega) + \delta(t-x.\omega)$$

où Γ_0 est solution de (2-4).

La définition (2-5) nous permet de dire que w est une solution faible de (2-1) vérifiant:

$$w(t, x, \omega) = \delta(t-x.\omega) \quad \text{pour } t \leq -\rho.$$

Preuve

On procède comme dans le cas d'un obstacle sans couche. On choisit une fonction de troncature telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \rho_1$ et $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq \rho$ avec $\rho > \rho_1$ et ρ_1 étant pris tel que $B(0, \rho_1) \supset K \cup \overline{\Omega}_1$. On pose:

$$q(t, x, \omega) = -2 \nabla \chi(x) \cdot \nabla_x (d(t-x.\omega)) - \Delta \chi(x) \cdot d(t-x.\omega), \quad \forall x \in \Omega_2$$

alors $q \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2, H_{comp}^1(\Omega_2))$ et :

$$Q(t, x, \omega) = q(t, x, \omega), \quad \forall x \in \Omega_2 \quad \text{et} \quad Q(t, x, \omega) = 0, \quad \forall x \in \Omega_1$$

On sait que le problème (2-1) admet une unique solution dans $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$ donc l'onde G donnée par:

$$(G(t, \cdot, \omega), \partial_t G(t, \cdot, \omega)) = \int_{-\infty}^t U(t-\tau)(0, Q(\tau, \cdot, \omega)) d\tau$$

est l'unique solution dans $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2, D(A))$ de :

$$(P_G) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) G = q \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_2 \\ (r(x) \partial_t^2 - \Delta) G = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_1 \\ G|_{\Omega_1} = G|_{\Omega_2} \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \partial_\nu G|_{\Omega_1} = \partial_\nu G|_{\Omega_2} \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \mathcal{B}(G, \partial_t G) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ G(t, \cdot) = 0 \text{ pour } t \leq -\rho \end{cases}$$

alors l'unique solution de (2-4) dans $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$ est donnée par:

$$\Gamma_0(t, x, \omega) = -\chi(x)d(t-x.\omega) + G(t, x, \omega)$$

L'onde plane w existe et s'écrit aussi:

$$(2-6) \quad w(t, x, \omega) = (1 - \chi(x))d(t-x.\omega) + \partial_t^3 G(t, x, \omega)$$

On vérifie facilement en s'inspirant du cas de l'obstacle homogène la proposition suivante:

PROPOSITION 2-1: *L'onde plane "distordue" w vérifie:*

$$(2-7) \quad w(t+s, x, \omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_s, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2 \times \Omega_x))$$

On définit au sens des distributions

$$(2-8) \quad u_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \langle w(t+s, x, \omega), k(s, \omega) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)}$$

Comme w est une solution faible de (2-1), l'onde u_1 l'est aussi. Le fait que $w(t, x, \omega) = \delta(t-x.\omega)$ pour $t \leq -\rho$ implique que $u_1(t, \cdot) = \alpha(t, \cdot)$ pour $t \leq -\rho$. De façon similaire au cas sans couche, on montre que $(u_1(t), \partial_t u_1(t)) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$ et donc:

THEOREME 2-2: *La solution u se représente sous la forme:*

$$(2-9) \quad u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \langle w(t+s, x, \omega), k(s, \omega) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)}$$

En remplaçant u par u_1 et ζ par sa représentation par translation dans (2-3), on montre grâce au théorème du noyau de Schwartz la formule de représentation de $S^\#$:

THEOREME 2-3: *Le noyau de diffraction $S^\#$ admet la représentation:*

$$(2-10) \quad S^\#(s, \omega, \theta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\Sigma} \delta'(t+s-x.\omega) \partial_\nu w_d(t, x, \theta) \\ + (v_x \cdot \omega) \delta''(t+s-x.\omega) w_d(t, x, \theta) dt d\Gamma(x)$$

où $w_d(t, x, \theta) = w(t, x, \theta) - \delta(t-x.\theta)$.

La formule (2-10) est comprise au sens des distributions.

PROPOSITION 2-2: Si la fonction \tilde{r} est $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, l'onde plane "distordue" w vérifie:

$$w(t+s, x, \omega) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2, \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega_x))$$

La preuve de cette proposition est une conséquence immédiate des lemmes 1-1 et 1-2 toujours valables dans le cas d'un obstacle avec une couche, l'hypothèse supplémentaire intervenant dans le lemme 1-2.

Preuve du lemme 1-1

La fonction ψ de $\mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ appartient à $\cap_k D(A^k)$ et comme $A^* = -A$, elle appartient aussi à $\cap_k D(A^{*k})$. Ceci montre que $U^*(t)\psi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega}_2))^2$. Or on a:

$$\left(\int \theta(t) \mathcal{G}^s(t) dt, \psi \right)_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) \int_{-\infty}^t \int_{\Omega_2} q(\tau+s, \cdot, \omega) [U^*(t-\tau)\psi]_2(x) dx d\tau dt$$

on conclut aisément que cette fonction est \mathcal{C}^∞ en s et ω . ~~✂~~

Preuve du lemme 1-2

Soit $u(s, x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) F^s(t, x, \omega) dt$. Alors $\text{supp}_x u \subset \{|x| \leq R_1\}$ où $R_1 > R$. On choisit $\chi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telle que $\chi = 1$ sur le support de u . Soit f_1 la solution de:

$$\begin{cases} \Delta f_1 = \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \mathcal{B}(f_1, 0) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

alors $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ et donc $\chi f_1 \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega)$. On en déduit que:

$$\langle u_1, \varphi_1 \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla f_1 dx = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla (-\chi f_1) dx$$

Donc si on pose $\bar{\psi}_1 = -\chi f_1$, on obtient:

$$\langle u_1, \varphi_1 \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)} = (u_1, \psi_1)_{H_1}$$

Soient $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\bar{\psi}_2 = (1/\tilde{r})\varphi_2$. Alors $\psi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ puisque $\tilde{r} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. On a donc:

$$\langle u_2, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)} = (u_2, \tilde{r}\psi_2)_{L^2(\Omega)}$$

Par hypothèse $(u, \psi)_H$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_s \times S_\omega^2)$, il est de même de $\langle u, \psi \rangle$.

2-2. Cas dissipatif

On appelle cas dissipatif le cas où Ω_1 est une couche dissipative. Le problème mixte correspondant est:

$$(2-11) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega_2 \\ (r(x)\partial_t^2 - \Delta)u + \beta(x)\partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega_1 \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Sigma \\ \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Sigma \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Gamma \\ (u(0, \cdot), \partial_t u(0, \cdot)) = f' \end{cases}$$

où la fonction β n'est pas nulle. Comme dans le cas précédent, on choisit une solution du problème libre $\alpha(t) = [U(t)f]_1$ telle que f ait son représentant par translation $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)$ tel que k s'annule pour $|s| > a$. Soit T un temps supérieur à $(\rho+a)$, on pose:

$$\tilde{u}(t, x, T) = U(t)U_0(-T)f$$

alors \tilde{u} vérifie:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega_2 \\ (r(x)\partial_t^2 - \Delta)u + \beta(x)\partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega_1 \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Sigma \\ \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Sigma \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Gamma \\ (u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) = (\alpha(t, \cdot), \partial_t \alpha(t, \cdot)) \text{ pour } t \leq T - (\rho+a) \end{cases}$$

On fait une translation de T unités:

$$u(t, x) = \tilde{u}(t+T, x, T) = U(t+T)U_0(-T)f$$

alors $u(t)$ est solution du problème:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_2 \\ (r(x)\partial_t^2 - \Delta)u + \beta(x)\partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_1 \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ (u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot)) = (\alpha(t, \cdot), \partial_t \alpha(t, \cdot)) \text{ pour } t \leq -(\rho+a) \end{cases}$$

Comme on l'a déjà remarqué, $W_-f = U(T)U_0(-T)f$ donc $u(t)$ n'est autre que $[U(t)W_-f]_1$, ce qui prouve que u est indépendant du choix de T .

LEMME 2-4: L'onde u est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \bar{\Omega}_2)$

Preuve

Il suffit de montrer que l'onde $\tilde{u}_{/\Omega_2}$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \bar{\Omega}_2)$ soit que $U_0(-T)f$ appartient à $D(A^k)$ pour tout $k \geq 1$. Ceci est une conséquence du choix de f .

Puisqu'on n'a pas besoin de ce qui se passe dans Ω_1 et qu'on a toujours

$$Sf = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_0(-t) \mathcal{J}(u(t, \cdot), \partial_t u(t, \cdot))$$

les démonstrations des lemmes 2-2 et 2-3 ne changent pas. Il reste à représenter l'onde plane "distordue" w , construite à partir d'une solution du problème:

$$(2-12) \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t^2 - \Delta) \Gamma_0 = 0, \mathbb{R}_t \times \Omega_2 \\ (r(x) \partial_t^2 - \Delta) \Gamma_0 + \beta(x) \partial_t \Gamma_0 = -(r(x) \partial_t^2 - \Delta) d(t-x, \omega) - \beta(x) \partial_t d(t-x, \omega), \mathbb{R}_t \times \Omega_1 \\ \Gamma_0|_{\Omega_1} = \Gamma_0|_{\Omega_2}, \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \partial_\nu \Gamma_0|_{\Omega_1} = \partial_\nu \Gamma_0|_{\Omega_2}, \mathbb{R}_t \times \Sigma \\ \mathcal{B}(\Gamma_0, \partial_t \Gamma_0) = -\mathcal{B}(d(t-x, \omega), d'(t-x, \omega)), \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ \Gamma_0(t, \cdot) = 0 \text{ pour } t \leq -\rho \end{array} \right.$$

THEOREME 2-4: L'onde plane "distordue" w est définie par:

$$w(t, x, \omega) = \partial_t^3 \Gamma_0(t, x, \omega) + \delta(t-x, \omega)$$

où Γ_0 est solution de (2-12).

Preuve

En choisissant la même fonction χ de troncature que dans la preuve du théorème 2-1, on définit une solution Γ_0 de (2-12) :

$$\Gamma_0(t, x, \omega) = -\chi(x) d(t-x, \omega) + G(t, x, \omega)$$

où l'onde G est donnée par:

$$(G(t, \cdot, \omega), \partial_t G(t, \cdot, \omega)) = \int_{-\infty}^t U(t-\tau)(0, Q(\tau, \cdot, \omega)) d\tau$$

avec:

$$Q(t, x, \omega) = \begin{cases} q(t, x, \omega) = -2 \nabla \chi(x) \cdot \nabla_x (d(t-x, \omega)) - \Delta \chi(x) \cdot d(t-x, \omega) ; x \in \Omega_2 \\ 0, x \in \Omega_1 \end{cases}$$

Puisque $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2, H_{comp}^1(\Omega_2))$, l'onde Γ_0 est dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t \times S_\omega^2, D(A))$. Le problème (2-11) ayant une unique solution dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t^+, D(A))$, le problème (2-12) admet une unique solution dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$. En effet, soit v une solution de (2-12) avec $d(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et telle que $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t, D(A))$. Alors pour tout $T \geq \rho$, $v(t-T, \cdot)$ est solution de (2-11) avec $f' = 0$. Donc $v(t-T, \cdot) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Or $v(t, \cdot) = 0$ pour $t \leq -\rho$ ce qui implique que v est nul partout. L'onde Γ_0 est donc l'unique solution de (2-12) et w s'écrit aussi sous la forme:

$$w(t, x, \omega) = (1 - \chi(x))d(t-x, \omega) + \partial_t^3 G(t, x, \omega)$$



La proposition 2-1 reste valable dans le cas dissipatif. De même on vérifie sans peine le théorème suivant:

THEOREME 2-5: *La solution $u(t) = [U(t)W_{-f}]_1$ se représente sous la forme:*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times S^2)} w(t+s, x, \omega), k(s, \omega) ds$$

Cette représentation de u , le lemme 2-3 et le théorème du noyau de Schwartz nous permettent de conclure au:

THEOREME 2-6: *Le noyau de diffraction $S^\#$ se représente sous la forme (2-10).*

On peut démontrer de façon semblable la proposition 2-2 en introduisant dans les démonstrations des lemmes 1-1 et 1-2 les modifications suivantes. On n'a plus bien sûr $A^* = -A$. L'opérateur A^* est donné par:

$$A^* = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{r}^{-1} \Delta & \tilde{\beta} / \tilde{r} \end{pmatrix}$$

et son domaine diffère de celui de A par la condition sur le bord Γ si \mathcal{B} est une condition dissipative: si $f \in D(A)$ alors $\partial_n f_1 + \gamma f_1 + \alpha f_2 = 0$ tandis que si $f \in D(A^*)$ alors $\partial_n f_1 + \gamma f_1 - \alpha f_2 = 0$. L'espace $\mathcal{D}_{\mathcal{B}, \Delta}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ est inclus aussi bien dans $\bigcap_k D(A^k)$ que $\bigcap_k D(A^{*k})$. On a donc le lemme 1-1. Quant au lemme 1-2, on a toujours l'hypothèse supplémentaire $\tilde{r} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Si la condition \mathcal{B} est dissipative il se rajoute un terme de bord dans la formule de Green:

$$\langle u_1, \varphi_1 \rangle_{\mathcal{G}, \mathcal{G}(\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla f_1 dx + \int_{\Gamma} u_1 \partial_n f_1 d\Gamma$$

Comme f_1 vérifie $\partial_n f_1 = -\gamma f_1$ et que la produit dans H_1 contient le terme de bord $\int_{\Gamma} \gamma f_1 u_1 d\Gamma$, on a bien:

$$\langle u_1, \varphi_1 \rangle_{\mathcal{G}, \mathcal{G}(\Omega)} = (u_1, \psi_1)_{H_1}$$

Remarque

Un obstacle inhomogène est toujours captif. On ne sait donc pas estimer le critère de décroissance de l'énergie locale et de convergence de $e^{-i\sigma t} u_{\sigma, \omega}^d(t, x)$ vers $\hat{w}_d(\sigma, x, \omega)$.



Partie B

**EQUATIONS INTEGRALES ESPACE-TEMPS
EN ELECTROMAGNETISME**

INTRODUCTION

On s'intéresse au problème de la diffraction d'ondes électromagnétiques par un objet. Nous considérons deux cas d'obstacle: l'obstacle cylindrique infini réfléchissant ou absorbant (problème $2D+1$) et l'obstacle borné parfaitement conducteur (problème $3D+1$). De façon générale, le problème vérifié par le champ diffracté (E_d, H_d) s'écrit, les unités étant choisies pour que la vitesse de propagation du signal dans le vide soit 1:

$$(P_+) \quad \begin{cases} -\partial_t E_d + \text{rot} H_d = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \partial_t H_d + \text{rot} E_d = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \text{div} E_d = \text{div} H_d = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \mathcal{B}(E_d, H_d) = -\mathcal{B}(E_i, H_i), & \text{sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ E_d(t, x) = H_d(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_+ \end{cases}$$

où (E_i, H_i) désigne l'onde incidente, Ω_+ est le complémentaire de l'obstacle $\overline{\Omega_-}$ de frontière Γ et \mathcal{B} dénote la condition aux limites. Deux types de conditions sur le bord $\Gamma \times \mathbb{R}_t$ sont abordées:

– conservatives: $\mathcal{B}(E, H) = \vec{n} \wedge E_{/\Gamma}$ ou $\mathcal{B}(E, H) = \vec{n} \wedge H_{/\Gamma}$

– dissipatives: $\mathcal{B}(E, H) = \vec{n} \wedge E_{/\Gamma} - \alpha \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge H_{/\Gamma})$ avec α fonction positive la normale à Γ dirigée vers l'intérieur de Ω_+ étant notée \vec{n} . On ne considère la condition dissipative que dans le cas du problème à deux dimensions d'espace.

Le but de cette partie étant d'évaluer les traces du champ (E_d, H_d) sur $\Gamma \times \mathbb{R}_t$, une méthode d'équations intégrales dépendant du temps semble particulièrement indiquée.

La méthode des équations intégrales espace-temps a été introduite par A. Bamberger et T. Ha Duong (1986, 1987) [1] pour l'étude de la diffraction des ondes acoustiques. Cette méthode est basée sur l'emploi des potentiels retardés de surface. Dans le cas des équations de Maxwell, ces potentiels permettent de caractériser le champ diffracté par des courants et des charges définis sur la surface Γ de l'objet. Ces courants et ces charges inconnus sont solutions d'une équation intégrale sur $\Gamma \times \mathbb{R}_t$. La discrétisation de la formulation variationnelle espace-temps associée conduit à des schémas numériques *stables* et *converge*nts.

Avant d'aborder l'étude des problèmes de Dirichlet et dissipatif en dimension $2+1$, on introduit des généralités et des définitions communes aux problèmes $2D+1$ et $3D+1$.

Préliminaires

1. Discrétisation d'une équation de convolution

On expose ici des généralités sur la discrétisation en temps d'une équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. On traite le cas d'un modèle simple sachant que les résultats obtenus se généralisent aux cas plus compliqués des équations intégrales qui nous occupent par la suite.

On présente deux méthodes d'approximation variationnelle: la première, appelée discrétisation P_0 , conduit à un schéma numérique explicite constructif, l'autre, appelée discrétisation P_1 , donne un schéma non constructif: en effet, on voit clairement qu'il manque une étape d'initialisation (en temps) pour que le schéma devienne constructif.

Soit le problème suivant:

Soient h donné dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, de support dans $[0, +\infty[$ et K dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, de support dans $[0, +\infty[$ et de régularité suffisante i.e $K \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$.

Trouver f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, de support dans $[0, +\infty[$ telle que:

$$(1) \quad \forall t \geq 0 \quad \int_0^t K(t-s)f(s)ds = h(t)$$

A (1) on associe le problème variationnel:

$$(2) \quad \forall \varphi \in L^2_{loc}([0, +\infty[) \quad \int_0^\infty \varphi(t) \left(\int_0^t K(t-s)f(s)ds \right) dt = \int_0^\infty \varphi(t) h(t) dt$$

On recherche la solution f sous la forme:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j \gamma_j(t), \quad f_j \in \mathbb{R}, j \geq 0$$

où la fonction γ_j est la fonction caractéristique de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}[$ avec $t_j = j\Delta t$, $\Delta t > 0$ étant le pas de temps.

On fait deux choix pour la fonction test φ : le premier consiste à prendre φ constante par morceaux, le second à la choisir polynômiale de degré 1 sur chaque intervalle de temps. Dans le premier cas, on dira qu'on fait une discrétisation de type P_0 , dans le second cas, une discrétisation de type P_1 .

On commence par la discrétisation de type \mathbb{P}_0 . Alors le problème approché s'écrit : trouver $f_j, j \geq 0$, telles que

$$\int_0^\infty \gamma_i(t) \left(\int_0^t K(t-s) \sum_{j=0}^\infty f_j \gamma_j(s) ds \right) dt = \int_0^\infty \gamma_i(t) h(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(t) dt$$

Si on note I_i la premier membre de l'égalité ci-dessus, on a:

$$I_i = \sum_{j=0}^\infty f_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_0^t K(t-s) \gamma_j(s) ds \right) dt$$

Sachant que l'on a:

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}[, s \leq t < t_{i+1} , \gamma_j(s) = 0 \text{ pour } j \geq i+1$$

on en déduit que:

$$I_i = \sum_{j=0}^i f_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{[0,t] \cap [t_j, t_{j+1}[} K(t-s) ds dt$$

Pour $i \geq 1$, on découpe la somme en deux parties:

$$I_i = \sum_{j=0}^{i-1} f_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_{j+1}}^{t_j} K(t-s) ds dt + f_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t K(t-s) ds dt$$

Pour $i = 0$, on a:

$$I_0 = f_0 \int_0^{\Delta t} \int_0^t K(t-s) ds dt$$

Or pour tout i , l'intégrale I_i est égale au second membre:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} h(t) dt = \Delta t \int_0^1 h(t_i + \tau \Delta t) dt$$

et donc si l'on pose

$$M_k = \Delta t \int_0^1 \int_0^\tau K(\Delta t(\tau-s+k)) ds d\tau \text{ pour } k \geq 0$$

$$h_i = \int_0^1 h(t_i + \tau \Delta t) dt$$

on obtient le système linéaire permettant de calculer les coefficients $f_j, j \geq 0$:

$$\begin{aligned} M_0 f_0 &= h_0 \\ M_0 f_1 + M_1 f_0 &= h_1 \\ &\dots \\ &\dots \\ M_0 f_n + M_1 f_{n-1} + \dots + M_n f_0 &= h_n \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

On passe maintenant à la discrétisation de type \mathbb{P}_1 . On choisit la fonction test φ comme suit:

$$\varphi(t) = \beta_i(t) \text{ où } \beta_i(t) = \begin{cases} t-t_i, & t \in (t_i, t_{i+1}) \\ t_{i+2}-t, & t \in (t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad i \geq 0$$

Le problème variationnel (2) devient alors:

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} \beta_i(t) \left(\int_0^t K(t-s) \sum_{j=0}^{\infty} f_j \gamma_j(s) ds \right) dt = \int_{t_i}^{t_{i+2}} \beta_i(t) h(t) dt$$

soit:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i) \left(\int_0^t K(t-s) \sum_{j=0}^{\infty} f_j \gamma_j(s) ds \right) dt + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (t_{i+2}-t) \left(\int_0^t K(t-s) \sum_{j=0}^{\infty} f_j \gamma_j(s) ds \right) dt \\ = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i) h(t) dt + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (t_{i+2}-t) h(t) dt \end{aligned}$$

Si à nouveau on note I_i le membre de gauche de l'égalité précédente, on a:

$$\begin{aligned} I_i = \sum_{j=0}^i f_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i) \int_{[0,t] \cap [t_j, t_{j+1}[} K(t-s) ds dt \\ + \sum_{j=0}^{i+1} f_j \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (t_{i+2}-t) \int_{[0,t] \cap [t_j, t_{j+1}[} K(t-s) ds dt \end{aligned}$$

Pour $i \geq 1$, on procède comme dans le cas de la discrétisation de type \mathbb{P}_0 , soit:

$$\begin{aligned} I_i = \sum_{j=0}^{i-1} f_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i) \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t-s) ds dt + f_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i) \int_{t_i}^t K(t-s) ds dt \\ + \sum_{j=0}^i f_j \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (t_{i+2}-t) \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t-s) ds dt + f_{i+1} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (t_{i+2}-t) \int_{t_{i+1}}^t K(t-s) ds dt \end{aligned}$$

En regroupant les f_j , on trouve:

$$\begin{aligned} I_i = \sum_{j=0}^{i-1} f_j \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i) \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t-s) ds dt + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (t_{i+2}-t) \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t-s) ds dt \right\} \\ + f_i \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i) \int_{t_i}^t K(t-s) ds dt + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (t_{i+2}-t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} K(t-s) ds dt \right\} \\ + f_{i+1} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (t_{i+2}-t) \int_{t_{i+1}}^t K(t-s) ds dt . \end{aligned}$$

Pour $i=0$, on a:

$$\begin{aligned} I_0 = f_0 \left\{ \int_0^{\Delta t} t \int_0^t K(t-s) ds dt + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} (2\Delta t - t) \int_0^{\Delta t} K(t-s) ds dt \right\} \\ + f_1 \int_{\Delta t}^{2\Delta t} (2\Delta t - t) \int_{\Delta t}^t K(t-s) ds dt . \end{aligned}$$

En faisant les changements de variables appropriés et en posant:

$$M_0 = \Delta t^2 \int_0^1 (1-t) \int_0^\tau K(\Delta t(\tau-s)) ds d\tau$$

$$M_k = \Delta t^2 \left[\int_0^1 t \int_0^1 K(\Delta t(\tau-s+k)) ds d\tau + \int_0^1 (1-t) \int_0^1 K(\Delta t(\tau-s+k+1)) ds d\tau \right], k \geq 1$$

$$h_i = \int_0^1 [t h(t_i + \tau \Delta t) + (1-t) h(t_{i+1} + \Delta t t)] dt$$

on obtient le système:

$$\begin{aligned} M_0 f_1 + M_1 f_0 &= h_0 \\ M_0 f_2 + M_1 f_1 + M_2 f_0 &= h_1 \\ \dots \\ \dots \\ M_0 f_n + M_1 f_{n-1} + \dots + M_n f_0 &= h_n \\ \text{etc...} \end{aligned}$$

On constate que le schéma obtenu, contrairement au cas \mathbb{P}_0 , n'est pas constructif: on ne peut pas calculer à chaque pas de temps t_n une nouvelle inconnue f_n à partir des autres $f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_0$ puisqu'il manque l'étape d'initialisation permettant de calculer la première inconnue f_0 .

2. Les espaces $\mathcal{X}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, E)$

On rappelle le cadre fonctionnel en temps, défini par Ha-Duong [12], nécessaire à la construction de formulations variationnelles espace-temps bien posées des équations intégrales étudiées après ce chapitre.

Les espaces $\mathcal{X}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, E)$ étant des sous-espaces de distributions Laplace transformables, on fait quelques rappels sur cette transformation.

Soient E un espace de Banach et T une distribution sur \mathbb{R} à valeurs dans E . On suppose que cette distribution est causale, i.e:

$$(3) \quad \text{supp } T(t) \subset [0, +\infty[,$$

et qu'il existe un réel $\sigma_0 = \sigma_0(T)$ tel que $e^{-\sigma_0 t} T$ soit une distribution tempérée:

$$(4) \quad e^{-\sigma t} T \in \mathcal{S}'(E) , \forall \sigma \geq \sigma_0 .$$

On peut alors définir la transformée de Laplace de T , notée $\hat{T}(\omega)$,

$$(5) \quad \hat{T}(\omega) = \langle T, e^{i\omega t} \rangle = \mathcal{F}(e^{-\sigma t} T)(-\eta) .$$

On dira qu'une distribution vérifiant (3) et (4) est "Laplace transformable".

PROPOSITION 1: Pour qu'une fonction $g(\omega)$ holomorphe dans un demi-plan $\{Im \omega \geq \sigma_0\}$ soit la transformée de Laplace d'une distribution T Laplace transformable, il faut et il suffit qu'elle soit majorée en module par un polynôme en $|\omega|$ sur un demi-plan $\{Im \omega \geq \sigma_1\}$, $\sigma_1 > \sigma_0$:

$$\exists \sigma_1 > \sigma_0, \exists k \in \mathbb{N}, \exists C > 0 / |g(\omega)| \leq C(1+|\omega|)^k$$

Pour toutes fonctions f et g dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ Laplace transformables, on a la formule de Parseval:

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \hat{f}(\omega) \bar{\hat{g}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} f(t) \bar{g}(t) dt, \quad \forall \sigma \geq \max(\sigma_0(f), \sigma_0(g))$$

On suppose maintenant que E est un espace de Hilbert. Soient s et σ dans \mathbb{R} , $\sigma > 0$. On définit l'espace $\mathcal{X}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, E)$ des distributions Laplace transformables telles que:

$$e^{-\sigma t} \Lambda^s f \in L^2(\mathbb{R}_t; E)$$

où:

$$\widehat{\Lambda^s f}(\omega) = (-i\omega)^s \hat{f}(\omega)$$

On munit cet espace de la norme hilbertienne:

$$|f|_{\sigma, s, E} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} \|\Lambda^s f\|_E^2 dt \right)^{1/2}$$

En appliquant la formule de Parseval (6), on voit que la quantité

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_E^2 d\omega \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme $|f|_{\sigma, s, E}$.

On remarque que pour $s=k$ entier, l'opérateur Λ^s est l'opérateur de dérivation d'ordre k par rapport à t . D'autre part, on a l'inclusion:

$$\mathcal{X}_\sigma^{s+1}(\mathbb{R}^+, E) \subset \mathcal{X}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, E)$$

plus précisément

$$|f|_{\sigma, s, E} \leq \frac{1}{\sigma} |f|_{\sigma, s+1, E}$$

3. Inégalités dans $\mathcal{H}^m(\Delta t, \mathbb{R})$

Les espaces $\mathcal{H}^m(\Delta t, \mathbb{R})$ ont été introduit par Ha-Duong pour approcher les fonctions de $\mathcal{H}_\sigma^k(\mathbb{R}^+, E)$ pour un espace de Hilbert E séparable, pour k entier. Soit f dans $\mathcal{H}_\sigma^k(\mathbb{R}^+, E)$. Puisque E est un espace de Hilbert séparable, il existe une base hilbertienne $(w_i)_{i \in I}$. Donc on peut écrire f sous la forme:

$$f(t, x) = \sum_{i \in I} \alpha_i(t) w_i(x)$$

où la fonction α_i est dans $\mathcal{H}_\sigma^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. En donnant une approximation de α_i , on approche donc f . Soit maintenant un réel $\Delta t > 0$. Les espaces approchant $\mathcal{H}_\sigma^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ sont notés $\mathcal{H}^m(\Delta t, \mathbb{R})$ avec $m \geq k$ et définis par:

$$\mathcal{H}^m(\Delta t, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{H}_\sigma^m(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) / f|_{]k\Delta t, (k+1)\Delta t[} \in \mathbb{P}_m \}$$

où \mathbb{P}_m est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m . On rappelle les inégalités et les résultats d'interpolation dans ces espaces.

On a vu que l'on avait l'inclusion $\mathcal{H}_\sigma^{s+1}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \subset \mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ pour s dans \mathbb{R} , soit:

$$|f|_{\sigma, s} \leq C_\sigma |f|_{\sigma, s+1}$$

la norme $|f|_{\sigma, s}$ désignant la norme de f dans $\mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Si on se restreint aux espaces $\mathcal{H}^m(\Delta t, \mathbb{R})$, on a des inégalités inverses:

PROPOSITION 2: Pour tout $s > 0$, il existe $\Delta t_0 > 0$ et $C > 0$ telles que:

$$|f|_{\sigma, 0} \leq C \Delta t^{-s} |f|_{\sigma, -s}, \quad \forall f \in \mathcal{H}^m(\Delta t, \mathbb{R})$$

pour tout $\Delta t < \Delta t_0$.

On désigne maintenant l'opérateur d'interpolation $r_{\Delta t}$ de $\mathcal{H}_\sigma^m(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}^m(\Delta t, \mathbb{R})$ ($k < m$) par:

$$(7) \quad (r_{\Delta t} f)(t) = f(t_n) + (t - t_n) f'(t_n) + \dots + \frac{(t - t_n)^k}{k!} f^{(k)}(t_n), \quad t \in (t_n, t_{n+1})$$

PROPOSITION 3: Pour $0 \leq k < m$, on a l'estimation:

$$|f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, 0} \leq C_k \Delta t^{k+1} |f|_{\sigma, k+1}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_\sigma^m(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$$

Il est facile de voir que:

$$|f - r_{\Delta t} f|_{\sigma,-1} \leq C_k \Delta t^{k+2} |f|_{\sigma,k+1}$$

$$|f - r_{\Delta t} f|_{\sigma,2} \leq C_k \Delta t^{k-1} |f|_{\sigma,k+1}$$

inégalités dont nous aurons besoin par la suite.

Equations intégrales espace-temps en dimension 2+1

Le problème de diffraction est à deux dimensions lorsque l'onde et l'obstacle présentent une symétrie commune: symétrie de translation, symétrie de rotation. On se limite au premier cas: on étudie la diffraction d'une onde plane par un obstacle cylindrique infini. De plus, on suppose que le vecteur de propagation du champ incident est dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et que l'onde incidente est de polarisation TM, c'est-à-dire que le champ électrique est parallèle à l'axe du cylindre. Alors le champ diffracté reste de la même polarisation. Pour être plus précis, si on note Oz l'axe du cylindre, les champs incidents et diffractés sont donc indépendants de la variable z et ont la forme:

$$E(t, X) = (0, 0, E_z(t, x, y)) \quad , \quad H(t, X) = (H_x(t, x, y), H_y(t, x, y), 0)$$

Si on note u la troisième composante du champ électrique diffracté et u_i celle du champ électrique incident, l'onde u est solution du problème mixte:

$$(P_+) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \mathcal{B}(u, \partial_t u) = g \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ u(t, x) = \partial_t u(t, x) = 0, t \leq 0, x \in \Omega_+ \end{cases}$$

où Ω_+ désigne cette fois-ci un ouvert extérieur de \mathbb{R}^2 , qui n'est autre que le complémentaire de la section du cylindre, la frontière Γ en étant le contour et g est donné par $u_i : g = -\mathcal{B}(u_i, \partial_t u_i)$

Les conditions aux limites \mathcal{B} de Dirichlet ou de Neumann correspondent aux conditions au bord de l'obstacle 3D conservatives $\vec{n} \wedge E_{/\Gamma}$, $\vec{n} \wedge H_{/\Gamma}$ tandis que la condition dissipative:

$$\mathcal{B}(u, \partial_t u) = \alpha \partial_t u_{/\Gamma} - \partial_\nu u_{/\Gamma}$$

correspond à la condition d'impédance $\vec{n} \wedge E_{/\Gamma} - \alpha \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge H_{/\Gamma})$ où ν est la normale à Γ dirigée vers l'intérieur de Ω_+ .

Nous donnons successivement les formulations variationnelles construites par la méthode de Bamberger-Ha Duong pour les problèmes de Dirichlet et dissipatif. Dans les deux cas, les schémas numériques associés que nous présentons sont nouveaux.

1-Problème de Dirichlet

Dans ce paragraphe, nous reprenons les résultats obtenus par Ha-Duong dans le cas de la diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle borné tridimensionnel. La généralisation au cas bidimensionnel n'occasionnant pas de changements dans les principaux résultats, nous nous contenterons de les énoncer et nous renvoyons à [1] pour plus de précisions.

Les schémas numériques obtenus par la méthode d'équations intégrales espace-temps développée par Bamberger et Ha-Duong sont stables et convergents mais ne sont pas constructifs. En vue de l'implémentation numérique de ce problème numérique dans la partie C, on construit un schéma constructif, qui reste stable.

1-1. Equation intégrale espace-temps

L'onde diffractée u est solution du problème mixte suivant:

$$(P_+) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ u_+ = -u^i_{|\Gamma} = g \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ u(t, x) = \partial_t u(t, x) = 0, t \leq 0, x \in \Omega_+ \end{cases}$$

où l'on a noté u^i l'onde incidente, Ω_+ un ouvert extérieur de \mathbb{R}^2 de complémentaire borné $\overline{\Omega_-}$, de frontière Γ .

Si on associe à ce problème extérieur le problème intérieur (P_-) de même donnée sur le bord

$$(P_-) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_- \\ u_- = g \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ u(t, x) = \partial_t u(t, x) = 0, t \leq 0, x \in \Omega_- \end{cases}$$

il est bien connu que la solution u de (P_-) et (P_+) se représente par un potentiel retardé de simple couche:

$$(1-1) \quad u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_0^{t-|x-y|} \frac{p(\tau, y)}{((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(y), x \in \Gamma, t > 0$$

La densité p de ce potentiel est le saut de la dérivée normale de u à travers Γ :

$$p = \partial_n u_- - \partial_n u_+$$

où n est la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω_- . Si p est suffisamment régulière, le potentiel (1-1) admet une trace notée Sp et l'on peut écrire la condition aux limites de Dirichlet:

$$(1-2) \quad g = Sp$$

soit de façon plus explicite:

$$g(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_0^{t-|x-y|} \frac{p(\tau, y)}{((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(y), \quad x \in \Gamma, t > 0$$

1-2. Formulation variationnelle espace-temps

Le problème est de calculer p , la trace de l'onde incidente u^i étant connue. Pour cela, on construit une formulation variationnelle espace-temps de l'équation intégrale (1-2) dont la forme bilinéaire est coercive. L'intérêt d'une formulation variationnelle du problème (P_+) est de conduire à des approximations numériques stables de la solution p .

Jusqu'à présent, les égalités obtenues ont été considérées d'un point de vue formel. Maintenant on voudrait travailler dans un cadre lié à l'énergie. Dans les espaces spatio-temporels du type Lions-Magenes [11], on ne sait pas démontrer un théorème de compacité de l'opérateur intégral S et donc on n'a pas de théorème d'existence pour (1-2) (voir chapitre 4 de [12]). En fait, il faudrait étudier l'opérateur

$$g \longmapsto [\partial_n u]_{\Gamma}$$

directement en temps. Or cette étude s'avère difficile: en effet, l'opérateur de Neumann pour l'équation des ondes dans le cas d'un ouvert borné est un pseudo-différentiel mais malheureusement, il appartient à la classe exotique $OPS_{1/3, 2/3}^1$ d'opérateurs pour lesquels les propriétés de continuité sur les espaces de Sobolev sont inconnues. Dans le cas d'un demi-espace, Lebeau et Schatzman [18] ont démontré des propriétés de continuité et de positivité pour l'opérateur de Neumann qui n'est même plus dans ce cas un opérateur pseudo-différentiel. Mais dans le cas d'un ouvert borné, le problème est ouvert.

Puisqu'on ne sait pas travailler directement en temps, la méthode de Bamberger-Ha Duong, employée dans toute cette partie, étudie le problème en fréquence via l'utilisation de la transformée de Fourier-Laplace en temps, ce

qui est loisible puisque les fonctions considérées sont nulles pour des temps négatifs. On est donc amené à considérer l'équation intégrale:

$$(1-3) \quad \hat{g}(\omega, x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(\omega |x-y|) \hat{p}(\omega, y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma$$

pour une fréquence ω complexe dans le demi-plan $\{Im \omega > 0\}$. On a noté $\hat{f}(\omega, \cdot)$ la transformée de Fourier-Laplace en temps de $f(t, \cdot)$ et $H_0^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0. Soit S_ω l'opérateur intégral apparaissant dans le membre de droite de (1-3) alors $(S\hat{p})(\omega, \cdot) = S_\omega \hat{p}(\omega, \cdot)$ et on a:

PROPOSITION 1-1: Pour $Im \omega > 0$, S_ω est un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Il vérifie la relation de coercivité suivante:

$$\Re \langle \varphi, -i\omega S_\omega \varphi \rangle \geq C \min(\sigma, 1) \frac{|\varphi|_{-1/2, \Gamma}^2}{|\omega|}, \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

et la majoration:

$$|S_\omega \varphi|_{1/2, \Gamma} \leq C \frac{1}{\sigma} \max\left(1, \frac{1}{\sigma^2}\right) |\omega| |\varphi|_{-1/2, \Gamma}, \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

Remarque

Les normes dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ sont notées respectivement $|\cdot|_{1/2, \Gamma}$ et $|\cdot|_{-1/2, \Gamma}$ tandis que les crochets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignent le produit de dualité $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma)$.

Il est clair d'autre part que \hat{p} est l'unique solution du problème variationnel: trouver $\hat{p} \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$(1-4) \quad \langle \varphi, -i\omega S_\omega \hat{p} \rangle = \langle \varphi, -i\omega \hat{g} \rangle, \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

Pour exploiter ces résultats en fréquence, on se place dans le cadre fonctionnel en temps du premier chapitre c'est-à-dire dans les espaces $\mathcal{X}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, E)$. L'existence et l'unicité de la solution p de l'équation intégrale (1-2) se déduit de celle de (1-3).

THEOREME 1-1: Si la donnée $u_\Gamma^i \in \mathcal{X}_\sigma^2(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma))$ pour $\sigma > 0$, l'équation intégrale (1-2) admet une unique solution $p \in \mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$. De façon plus générale, on a:

$$(1-5) \quad |p|_{\sigma, s-1, -1/2} \leq C_\sigma |g|_{\sigma, s+1, 1/2}, \quad \forall \sigma > 0$$

Remarque

La notation $|\cdot|_{\sigma,s,-1/2}$ (resp. $|\cdot|_{\sigma,s,1/2}$) désigne la norme dans $\mathcal{X}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$ (resp. $\mathcal{X}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma))$).

En intégrant sur $\mathbb{R}+i\sigma$ l'égalité (1-4) , on obtient par la formule de Parseval la formulation variationnelle espace-temps pour p :

$$(1-6) \quad \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle \varphi(t, \cdot), S \partial_t p(t, \cdot) \rangle dt = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle \varphi(t, \cdot), \partial_t g(t, \cdot) \rangle dt$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$$

et la proposition 1-1 donne les propriétés de l'opérateur S :

PROPOSITION 1-2: *L'opérateur S est linéaire continu de $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$ dans $\mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma))$ et définit une forme bilinéaire coercive:*

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle \varphi(t, \cdot), S \partial_t \varphi(t, \cdot) \rangle dt \geq C_\sigma |\varphi|_{\sigma,-1/2,-1/2}^2$$

Cette forme bilinéaire est étroitement liée à l'énergie de u , $E(u(t))$ définie par:

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} (|\nabla u(t, x)|^2 + |u(t, x)|^2) dx$$

En effet, on a:

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle p(t, \cdot), S \partial_t p(t, \cdot) \rangle dt = 2\sigma \int_0^\infty e^{-2\sigma t} E(u(t)) dt$$

Avant de commencer la discrétisation du problème variationnel (1-6) faisons quelques remarques sur les résultats de régularité en temps. On peut voir dans (1-5) qu'ils ne sont pas optimaux. Cette méthode, qui découple le temps et l'espace, ne permet pas de l'améliorer. Toutefois le cadre fonctionnel $\mathcal{X}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, E)$ choisi est très pratique dans la partie discrétisation.

1-3. Discrétisation

On emploie une méthode d'éléments finis en espace et en temps pour résoudre le problème variationnel (1-6). On définit des sous-espaces $\mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$ de $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$ où \tilde{V}_h est un sous-espace de dimension finie $H^{-1/2}(\Gamma)$ et on a le problème approché suivant: trouver $p_{h\Delta t}$ dans $\mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$ tel que

$$a(p_{h\Delta t}, \varphi) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \varphi(t, x) \partial_t g_{h\Delta t}(t, x) d\gamma(x) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$$

où la forme bilinéaire a est définie par:

$$a(p, \varphi) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \varphi(t, x) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\partial_t p(\tau, y)}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt$$

et $\partial_t g_{h\Delta t}$ est l'approximation de $\partial_t g$ dans $\mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$.

Cette méthode variationnelle conduit à des schémas stables et convergents mais non constructifs:

$$\sum_{k=0}^n M^{n-k} A^k = B^n, \quad n \geq m_2 \geq 1$$

où les vecteurs A^k sont les inconnues et les vecteurs B^n sont donnés.

Nous allons donner le choix des éléments finis en commençant par ceux en espace.

Discrétisation en espace

La frontière Γ étant régulière, on peut la découper en p morceaux fermés Γ_i tels que:

$$a) \bigcup_{i=1}^p \Gamma_i = \Gamma$$

b) $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ est un point ou l'ensemble vide pour $i \neq j$

c) $\Gamma_i = F([s_i, s_{i+1}])$ où F est une application régulière de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 , diffeomorphisme de $[0, l]$ sur Γ (l est la longueur de Γ si s désigne l'abscisse curviligne).

On a choisi les réels s_i tels que $s_i - s_{i-1} = h$. Pour h suffisamment petit, tout point de Γ est défini de façon unique en fonction du paramètre t :

$$x = F_i(t) \text{ où } t \in [0, 1]$$

Chaque arc de courbe Γ_i est approché par un arc de courbe polynômial de degré l (voir pour plus de détails [19]). Par exemple, le segment d'extrémités celles de Γ_i est l'interpolé d'ordre 1 de Γ_i . On note $x_h = F_{ih}(t)$, $t \in [0, 1]$ l'équation paramétrique de Γ_{ih} . Ainsi la surface approchée Γ_h de Γ est formée des p arcs polynômiaux Γ_{ih} . D'autre part, on construit l'espace V_h des fonctions définies sur Γ_h dont la restrictions à chacun des Γ_{ih} ($1 \leq i \leq p$) est un polynôme en t de degré inférieur ou égal à m_1 ($m_1 \geq 0$). De façon plus précise, si on note \mathbb{P}_{m_1} l'espace de ces polynômes on a:

$$\forall q_h \in V_h \quad q_h \circ F_{ih} \in \mathbb{P}_{m_1}$$

Soit l'espace de dimension finie N_h approchant $H^{-1/2}(\Gamma)$

$$\tilde{V}_h = \{ \tilde{q} / \tilde{q} = q \circ P^{-1} \text{ où } q \in V_h \}$$

où on a noté P^{-1} l'application bijective $F_{ih} \circ F_i^{-1}$ de Γ sur Γ_h .

Le problème approché s'écrit alors: trouver $p_h \in \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, \tilde{V}_h)$ tel que

$$a(p_h, \varphi) = \int_0^\infty -2\sigma t \int_\Gamma \varphi(t, x) \partial_t g_h(t, x) d\gamma(x) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, \tilde{V}_h)$$

Si on note $(\varphi_j^h)_{j=1, \dots, N_h}$ une base de l'espace \tilde{V}_h , on peut écrire p_h sous la forme:

$$p_h(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_j^h(x) \alpha_j(t), \quad \alpha_j \in \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$$

les nouvelles inconnues étant maintenant les $\alpha_j, j=1, \dots, N_h$.

Passons à la discrétisation en temps.

Discrétisation en temps

On choisit une subdivision régulière $\{t_n = n \Delta t, n \geq 0\}$ de l'axe des temps positifs où $\Delta t > 0$. La discrétisation en temps consiste à approcher les fonctions de $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ par celles de $\mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \mathbb{R})$ avec $m_2 \geq 1$. On approche donc la solution du problème variationnel exact (1-6) par $p_{h\Delta t}$ dans $\mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$

$$p_{h\Delta t}(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_j^h(x) \alpha_{j\Delta t}(t), \quad \alpha_{j\Delta t} \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \mathbb{R})$$

solution du problème variationnel approché :

$$(1-7) \quad a(p_{h\Delta t}, \varphi) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \varphi(t, x) \partial_t g_{h\Delta t}(t, x) d\gamma(x) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$$

On prend plus particulièrement $m_2 = 1$. On donnera par la suite des indications pour traiter le cas $m_2 > 1$ sachant que les idées employées ci-dessous restent les mêmes. La fonction test φ est choisie de la façon suivante:

$$\varphi(t, x) = \beta_{\Delta t}^n(t) \varphi_j^h(x), \quad n \geq 1, j = 1, \dots, N_h$$

la fonction $\beta_{\Delta t}^n$ étant donnée par:

$$\beta_{\Delta t}^n(t) = \begin{cases} t - t_{n-1} & \text{pour } t \in [t_{n-1}, t_n[\\ t_{n+1} - t & \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

En remplaçant dans (1-7) et en explicitant la forme bilinéaire a , on obtient un système à N_h équations et N_h inconnues:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{N_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\alpha'_{l\Delta t}(\tau)}{2\pi((t-\tau)^2-|x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\
& + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-2\sigma t} (t-t_{n-1}) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\alpha'_{l\Delta t}(\tau)}{2\pi((t-\tau)^2-|x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\
& = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \partial_t g_{h\Delta t}(t, x) d\gamma(x) dt \\
(1-8) \quad & + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-2\sigma t} (t-t_{n-1}) \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \partial_t g_{h\Delta t}(t, x) d\gamma(x) dt, \quad \forall j=1, \dots, N_h
\end{aligned}$$

Puisque $\alpha_{l\Delta t} \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \mathbb{R})$, $\alpha'_{l\Delta t}$ est une constante sur chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}[$ qu'on note α_l^n .

PROPOSITION 1-3: *Le système (1-8) peut s'écrire sous la forme:*

$$(1-9) \quad \sum_{k=0}^n M^{n-k} A^k = B^n, \quad n \geq 1$$

où les vecteurs A^k sont les inconnues $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_{N_h}^k)^t$ et les vecteurs B^n sont définis à partir de $g_{h\Delta t}$.

Preuve

Le membre de gauche de (1-8) donne $\sum_{k=0}^n M^{n-k} A^k$ ou plus précisément:

$$a(p_{h\Delta t}, \beta_{\Delta t}^n \varphi_j^h) = e^{-2\sigma t_n} \sum_{k=0}^n (M^{n-k} A^k)_j$$

On va indiquer les principes de la démonstration. Considérons par exemple l'intégrale

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \iint_{|x-y| \leq t} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\alpha'_{l\Delta t}(\tau)}{2\pi((t-\tau)^2-|x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt$$

sachant que l'autre intégrale se traitera de façon identique. La première étape consiste à décomposer l'ensemble $\{(x, y) \in \Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t\}$ pour $t \in (t_n, t_{n+1})$ en $n+1$ morceaux de la forme $\{(x, y) \in \Gamma \times \Gamma / t-t_{p+1} \leq |x-y| \leq t-t_p\}$. On a donc $n+1$ intégrales du type:

$$I_p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \iint_{t-t_{p+1} \leq |x-y| \leq t-t_p} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\alpha'_{l\Delta t}(\tau)}{2\pi((t-\tau)^2-|x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt$$

Maintenant on découpe l'intégrale $\int_0^{t-|x-y|}$ pour $t-|x-y| \in (t_p, t_{p+1})$

$$\int_0^{t-|x-y|} \dots d\tau = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dots d\tau + \int_{t_p}^{t-|x-y|} \dots d\tau$$

On écrit alors que $\alpha_{l\Delta t}^k$ est une constante sur chaque intervalle (t_k, t_{k+1}) et on regroupe tous les α_l^k , $k=0, \dots, n$ qui figurent dans les intégrales I_p . Comme on a :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{2\pi((t-\tau)^2-|x-y|^2)^{1/2}} d\tau = \frac{1}{2\pi} [\text{Argch}\left(\frac{t-t_{k+1}}{|x-y|}\right) - \text{Argch}\left(\frac{t-t_k}{|x-y|}\right)]$$

$$\int_{t_p}^{t-|x-y|} \frac{1}{2\pi((t-\tau)^2-|x-y|^2)^{1/2}} d\tau = \frac{1}{2\pi} \text{Argch}\left(\frac{t-t_p}{|x-y|}\right)$$

on trouve moyennant le changement de variable $s=t-t_n$ pour $t \in]t_n, t_{n+1}[$ et $s=t-t_{n-1}$ pour $t \in]t_{n-1}, t_n[$:

$$a(p_{h\Delta t}, \beta_{\Delta t}^n, \varphi_j^h) = e^{-2\sigma t_n} \sum_{l=1}^{N_h} \sum_{k=0}^n M_{jl}^{n-k} a_l^k$$

où les éléments de matrice M_{jl}^k sont :

$$M_{jl}^k = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \left[\iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_k} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch}\left(\frac{s+t_k}{|x-y|}\right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \right.$$

$$\left. - \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-1}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch}\left(\frac{s+t_{k-1}}{|x-y|}\right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right] ds$$

$$+ e^{2\sigma \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} s \left[\iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-1}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch}\left(\frac{s+t_{k-1}}{|x-y|}\right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right.$$

$$\left. - \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-2}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch}\left(\frac{s+t_{k-2}}{|x-y|}\right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right] ds \}, k \geq 1$$

et :

$$M_{jl}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch}\left(\frac{s}{|x-y|}\right) d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

Le second membre de (1-8) donne :

$$e^{-2\sigma t_n} B_j^n = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \left\{ (\Delta t - s) \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \partial_t g_{h\Delta t}(s+t_n, x) d\gamma(x) \right.$$

$$\left. + s e^{2\sigma \Delta t} \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \partial_t g_{h\Delta t}(s+t_{n-1}, x) d\gamma(x) \right\} ds$$

D'où le schéma (1-9) . 

Remarque

Contrairement à ce qui se passe dans le cas du problème de Dirichlet 3D, les matrices M^k ne s'annulent pas pour un k suffisamment grand (dans le cas 3D, il suffisait que $k > [\frac{\text{diam}(\Gamma)}{\Delta t}] + 1$ où $[x]$ est la partie entière de x). Il est facile de voir que c'est à cause de l'intégrale $\int_0^{t-|x-y|} \dots d\tau$ qui est due au fait qu'en dimension deux, on n'a plus le principe de Huygens.

LEMME 1-1: La matrice M^0 est symétrique définie positive pour Δt assez petit.

Preuve

On sait que, pour tout $m_1 \geq 0$, l'espace approché \tilde{V}_h est inclus dans $L^2(\Gamma)$. Donc on peut appliquer le théorème A? de l'annexe:


$$\frac{1}{2\pi s} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch}\left(\frac{s}{|x-y|}\right) d\gamma(x) d\gamma(y) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(x) d\gamma(x) + O(s)$$

et donc pour Δt petit :

$$M_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \varphi_i^h(x) d\gamma(x) \right) \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) s ds \right) + O(\Delta t^4)$$

soit

$$M_{ij}^0 = \frac{\Delta t^3}{12} \left(\int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \varphi_i^h(x) d\gamma(x) \right) (1 + O(\Delta t))$$

Donc pour Δt suffisamment petit, la matrice $(M^0 / \Delta t^3)$ est équivalente à la matrice des produits $L^2(\Gamma)$ des fonctions de base $\varphi_j^h, j=1, \dots, N_h$ de l'espace \tilde{V}_h . Cette matrice est définie positive et de plus très creuse si les supports des fonctions φ_j^h sont petits. 

Pour écrire les schémas numériques d'ordre m_2 supérieur à 1, on pose :

$$\alpha_{l\Delta t}^{(m_2)}(t) = a_l^n, t \in [t_n, t_{n+1}[$$

alors on intègre pour trouver $\alpha'_{l\Delta t}$:

$$\alpha'_{l\Delta t}(t) = \frac{a_l^n}{(m_2 - 1)!} (t - t_n)^{m_2 - 1} + \{\text{termes de degré } m_2 - 1 \text{ en } a_l^p, p \leq n-1\}, t \in [t_n, t_{n+1}[$$

Les fonctions test sont prises comme étant les $m_2 - 1$ primitives des fonctions test $\beta_{\Delta t}^n$ du cas $m_2 = 1$. En remplaçant dans la formulation variationnelle (1-7), on obtient un système matriciel de la forme:

$$\sum_{k=0}^n M^{n-k} A^k = B^n, \quad n \geq m_2$$

Les schémas ainsi obtenus sont stables et convergents. Comme le fait d'être en dimension deux ne change en rien les démonstrations, on se contente d'énoncer les résultats:

THEOREME 1-2: *Si $\partial_t g_{h\Delta t}$ est une approximation consistante de $\partial_t g$ dans $\mathcal{X}_{\sigma}^{1/2}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma))$, la solution $p_{h\Delta t}$ du problème discrétisé vérifie:*

$$|p_{h\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq Cste, \quad h, \Delta t \rightarrow 0$$

Remarque

La constante *Cste* qui apparaît ici dépend de σ . En effet, elle est égale à l'inverse de la constante de coercivité de la proposition 1-2, soit:

$$Cste = C \max\left(1, \frac{1}{\sigma}\right)$$

et donc si σ tend vers 0, la constante tend vers l'infini.

On a ensuite un théorème de convergence, toujours dans le cas de la surface exacte.

THEOREME 1-3: *On suppose que la solution p de l'équation intégrale (1-2) vérifie la condition de régularité :*

$$p \in \mathcal{X}_{\sigma}^2(\mathbb{R}^+, H^{m_1+1}(\Gamma)) \cap \mathcal{X}_{\sigma}^{m_2+1}(\mathbb{R}^+, L^2(\Gamma))$$

alors on a:

$$|p - p_{h\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq C \left\{ |g - g_{h\Delta t}|_{\sigma, 3/2, 1/2} + h^{m_1+1/2} |p|_{\sigma, 2, m_1+1} \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta t^{m_2-1/2}}{\sqrt{h}} |p|_{\sigma, m_2+1, 0} \right\}$$

Remarque

Dans la démonstration de la convergence, on utilise le fait que

$$|S_{\omega} f|_{L^2(\Gamma)} \leq C |f|_{L^2(\Gamma)}$$

où C est une constante indépendante de ω . On renvoie à la proposition A1 de l'annexe pour la démonstration de cette estimation.

2-4. Méthode de condensation

Réécrivons (1-9) sous la forme plus explicite:

$$(1-10) \quad \begin{bmatrix} M^1 & M^0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ M^2 & M^1 & M^0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^n & \dots & \dots & M^1 & M^0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^0 \\ A^1 \\ \vdots \\ A^{n-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

On voit alors clairement que le schéma n'est pas constructif: en effet, il manque une étape d'initialisation de A^0 pour résoudre à chaque pas de temps un système linéaire de la forme:

$$(1-11) \quad M^0 A^n = S^n$$

où S^n est un vecteur connu.

Numériquement le schéma (1-10) est difficile et lourd à implémenter. On va donc construire un schéma de type (1-11) pour tout temps t_n , $n \geq 0$.

La méthode de condensation que l'on emploie pour rendre le schéma (1-10) constructif consiste formellement à ajouter à la "diagonale" des matrices M^1 la "surdiagonale" des matrices M^0 pondérée d'un poids, soit à faire:

$$\bar{M}^1 = M^1 + e^{2\sigma\Delta t} M^0$$

ce qui donne:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ M^2 & \bar{M}^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^n & \dots & \dots & \bar{M}^1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^0 \\ \bar{A}^1 \\ \vdots \\ \bar{A}^{n-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Si on pose:

$$\bar{M}^k = M^k, \quad 2 \leq k, \quad B^n = \bar{B}^n, \quad 1 \leq n,$$

on a bien un schéma du type (1-11):

$$(1-12) \quad \overline{M}^1 \overline{A}^0 = \overline{B}^1, \quad \overline{M}^1 \overline{A}^n = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{M}^{n+1-k} \overline{A}^k + \overline{B}^{n+1}, \quad 1 \leq n$$

Pour que ce schéma soit constructif, il faut que la matrice qu'on a construite soit inversible. C'est ce que l'on démontre en remarquant que (1-12) découle d'un problème variationnel discret dont la forme bilinéaire, qui est une perturbation de la forme bilinéaire initiale a , reste coercive. Soit:

$$(1-13) \quad \begin{cases} p_{h\Delta t}(t, x) = \sum_{j=0}^{N_h} \varphi_j^h(x) \alpha_{j\Delta t}(t), \quad \alpha_{j\Delta t} \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \mathbb{R}) \\ \alpha'_{i\Delta t}(t) = a_i^n \text{ pour } t \in [t_n, t_{n+1}[\text{ où } \overline{A}^k = (a_1^k, \dots, a_{N_h}^k)^t \end{cases}$$

PROPOSITION 1-4: La fonction $p_{h\Delta t}$ de $\mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$ définie par (1-13) est l'unique solution du problème variationnel:

$$(1-14) \quad \begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t} \varphi(t, x) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\partial_t p_{h\Delta t}(\tau, y)}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\ & + \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \left(\left[\frac{t}{\Delta t} + 1 \right] \Delta t - t \right) \iint_{|x-y| \leq t - \left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t} \partial_t \varphi(t, x) \int_{\left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t}^{t-|x-y|} \frac{\partial_t p_{h\Delta t}(\tau, y)}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\ & = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \varphi(t, x) \partial_t g_{h\Delta t}(t, x) d\gamma(x) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h) \end{aligned}$$

où on a noté $[x]$ la partie entière de x :

$$x \in \mathbb{R}^+, \quad [x] \in \mathbb{N}, \quad [x] \leq x < [x] + 1.$$

Remarque

Le premier terme de (1-14) est $a(p_{h\Delta t}, \varphi)$. On a vu précédemment que:

$$a \left(\sum_{i=1}^{N_h} \varphi_i^h \alpha_{i\Delta t}, \beta_{\Delta t}^n \varphi_j^h \right) = e^{-2\sigma t_n} \sum_{k=0}^n (M^{n-k} \overline{A}^k)_j, \quad n \geq 1$$

avec $\alpha'_{i\Delta t}(t) = a_i^n$ pour $t \in (t_n, t_{n+1})$ et

$$\beta_{\Delta t}^n(t) = \begin{cases} t - t_{n-1} \text{ pour } t \in [t_{n-1}, t_n[\\ t_{n+1} - t \text{ pour } t \in [t_n, t_{n+1}[\\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Le second terme de (1-14) représente la forme bilinéaire ajoutée $a_{\Delta t}(p_{h\Delta t}, \varphi)$:

$$a_{\Delta t}(p_{h\Delta t}, \varphi) =$$

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \left(\left[\frac{t}{\Delta t} + 1 \right] \Delta t - t \right) \iint_{|x-y| \leq t - \left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t} \partial_t \varphi(t, x) \int_{\left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t}^{t-|x-y|} \frac{\partial_t p_{h\Delta t}(\tau, y)}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x, y) dt$$

Cette forme $a_{\Delta t}$ a été choisie pour que:

$$(1-15) \quad a_{\Delta t} \left(\sum_{i=0}^{N_h} \varphi_i^h \alpha_{i \Delta t}, \beta_{\Delta t}^n \varphi_j^h \right) = e^{-2\sigma t_n} (e^{2\sigma \Delta t} M^0 \bar{A}^{n-1} - M^0 \bar{A}^n)_j$$

Donc on a

$$(1-16) \quad a(p_{h \Delta t}, \varphi) + a_{\Delta t}(p_{h \Delta t}, \varphi) = e^{-2\sigma t_n} \left((e^{2\sigma \Delta t} M^0 + M^1) \bar{A}^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M^{n-k} \bar{A}^k \right)_j.$$

Il est alors facile de voir que $p_{h \Delta t}$ vérifiant (1-14), les inconnues \bar{A}^n sont solutions du système matriciel (1-12).

La preuve de la proposition est une conséquence des deux lemmes suivants

LEMME 1-2: $\forall \varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h) \quad a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) \geq 0$ pour Δt assez petit.

Preuve du lemme 1-2

Puisque $\varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$, φ peut s'écrire

$$(1-17) \quad \varphi(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \varphi_j^h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_j^n \beta_{\Delta t}^n(t) \varphi_j^h(x)$$

avec $\alpha_j'(t) = \alpha_j^n$ pour $t \in [t_n, t_{n+1}[$. On a le lien entre les α_j^n et les α_j^n :

$$\begin{cases} \alpha_j^0 = \alpha_j^1 \\ \alpha_j^k = \alpha_j^{k+1} - \alpha_j^k \quad k \geq 1 \end{cases}$$

De la formule (1-15), on déduit:

$$a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \sum_{j=1}^{N_h} d_j^n (e^{2\sigma \Delta t} M^0 A^{n-1} - M^0 A^n)_j$$

d'où

$$\begin{aligned} a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_{n-1}} \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j^n (M^0 A^{n-1})_j - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j^n (M^0 A^n)_j \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j^0 (M^0 A^0)_j + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \sum_{j=1}^{N_h} (\alpha_j^{n+1} - \alpha_j^n) (M^0 A^n)_j \end{aligned}$$

soit

$$a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} (A^n)^t M^0 A^n.$$

La matrice M^0 étant définie positive pour Δt assez petit, on conclut à la positivité de $a_{\Delta t}$.

LEMME 1-3: La forme bilinéaire $a_{\Delta t}$ est continue sur $\mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h) \times \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$ pour Δt assez petit.

Preuve

On montre facilement que

$$a_{\Delta t}(p, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} (B^n)^t M^0 A^n .$$

où $p, \varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$ sont tels que

$$\partial_t p(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \varphi_j^h(x) , \quad \partial_t \varphi(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h(x) \quad t \in [t_n, t_{n+1}[$$

En explicitant M^0 , on a donc:

$$a_{\Delta t}(p, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \left\{ \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h(x) \cdot \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \varphi_j^h(y) \right. \\ \left. \times \frac{1}{2\pi} \text{Argch} \left(\frac{s}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) ds \right.$$

D'après le théorème A2 de l'annexe, on a pour toute fonction f dans $L^2(\Gamma)$

$$\left| \frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq s} f(y) \text{Argch} \left(\frac{s}{|x-y|} \right) d\gamma(y) \right|_{L^2(\Gamma)} \leq C |f|_{L^2(\Gamma)}$$

où la constante C est indépendante de s. D'où:

$$|a_{\Delta t}(p, \varphi)| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \left| \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) s ds \right)$$

soit

$$|a_{\Delta t}(p, \varphi)| \leq C \Delta t^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \right)^{1/2}$$

Or pour tout $\varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$ on a

$$|\varphi|_{\sigma, 1, 0} = \left(\frac{1 - e^{-2\sigma \Delta t}}{2\sigma} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \right)^{1/2}$$

on a donc pour Δt assez petit:

$$|a_{\Delta t}(p, \varphi)| \leq C \Delta t^2 |p|_{\sigma, 1, 0} |\varphi|_{\sigma, 1, 0}$$

et puisque:

$$\forall v \in \tilde{V}_h, |v|_{L^2(\Gamma)} \leq C h^{-1/2} |v|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

on a

$$|a_{\Delta t}(p, \varphi)| \leq C \frac{\Delta t^2}{h} |p|_{\sigma, 1, -1/2} |\varphi|_{\sigma, 1, -1/2} \quad \clubsuit$$

Preuve de la proposition 1-4

L'existence et l'unicité de $p_{h\Delta t}$ solution de (1-14) est la conséquence du théorème de Lax-Milgram puisque la forme bilinéaire $a + a_{\Delta t}$ est continue sur $\mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h) \times \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$ et vérifie la relation de coercivité suivante:

$$(1-18) \quad (a + a_{\Delta t})(\varphi, \varphi) \geq C |\varphi|_{\sigma, -1/2, -1/2}^2 \geq C \Delta t^3 |\varphi|_{\sigma, 1, -1/2}^2$$

et que la forme linéaire

$$\varphi \longmapsto \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \varphi(t, x) \partial_t g_{h\Delta t}(t, x) d\gamma(x) dt$$

est continue sur $\mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$. \clubsuit

La coercivité de la forme bilinéaire perturbée $a + a_{\Delta t}$ nous donne la stabilité du schéma et l'inversibilité de \overline{M}^1 .

THEOREME 1-4: *Si $\partial_t g_{h\Delta t}$ est une approximation consistante de $\partial_t g$ dans $\mathcal{X}_\sigma^{1/2}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma))$ alors le schéma est stable au sens suivant:*

$$|p_{h\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq Cste \quad , h \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$$

PROPOSITION 1-5: *La matrice \overline{M}^1 est définie positive pour Δt petit.*

Preuve

Soit $\varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$ tel que :

$$\varphi(t, x) = \beta_{\Delta t}^1 \sum_{j=1}^{N_h} b_j^1 \varphi_j^h(x)$$

L'égalité (1-16) donne

$$a(\varphi, \varphi) + a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) = e^{-2\sigma\Delta t} (e^{2\sigma\Delta t} M^0 A^0 + M^1 A^0)_j$$

où le vecteur $A^0 = (a_1^0, \dots, a_{N_h}^0)^t$ est défini par:

$$a_j^0 = b_j^1 \neq 0$$

Il en résulte que:

$$a(\varphi, \varphi) + a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) = e^{-2\sigma\Delta t} (A^0)^t \overline{M}^1 A^0.$$

On conclut grâce à la coercivité de $a + a_{\Delta t}$. \clubsuit

2-Problème dissipatif

On s'intéresse ici au problème de la diffraction par un obstacle à frontière absorbante. Ceci se traduit par une condition aux limites dissipative satisfaite par l'onde diffractée totale U :

$$\alpha \partial_t U - \partial_n U = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma$$

où α est une fonction régulière strictement positive sur la frontière Γ du domaine extérieur Ω_+ .

On va résoudre le problème extérieur pour l'onde diffractée u , différence entre l'onde totale U et l'onde incidente u^i :

$$(P_+) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \alpha \partial_t u_+ - \partial_n u_+ = -\alpha \partial_t u^i + \partial_n u^i \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ u(t, x) = \partial_t u(t, x) = 0, t \leq 0, x \in \Omega_+ \end{cases}$$

en lui associant le problème intérieur:

$$(P_-) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_- \\ \alpha \partial_t u_- + \partial_n u_- = -\alpha \partial_t u^i - \partial_n u^i \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ u(t, x) = \partial_t u(t, x) = 0, t \leq 0, x \in \Omega_- \end{cases}$$

On remarque que la condition aux limites du problème (P_-) diffère d'un signe de celle de (P_+) . Comme l'a montré Ha-Duong [12], [2] pour le problème harmonique (avec une fréquence réelle), ce changement de signe permet d'obtenir une formulation variationnelle bien posée qui se prête à une discrétisation par éléments finis. De même qu'au chapitre précédent, l'étude du problème en fréquence nous permet de construire une formulation variationnelle espace-temps dont la discrétisation donne des schémas stables et convergents.

2-1. Problème en fréquence

On commence par écrire le problème extérieur transformé:

$$(P_+^\omega) \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega_+) \\ (\Delta + \omega^2)u = 0 \text{ dans } \Omega_+ \\ \alpha i\omega u_+ + \partial_n u_+ = g \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

ainsi que le problème intérieur:

$$(P_-^\omega) \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega_-) \\ (\Delta + \omega^2)u = 0 \text{ dans } \Omega_- \\ -\alpha i\omega u_- + \partial_n u_- = f \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où ω est une fréquence complexe dans le demi plan ($Im \omega > 0$). La condition de radiation à l'infini qui assure l'unicité d'une solution au problème extérieur a été remplacé ici par la condition $u \in H^1(\Omega_+)$. On va d'ailleurs montrer que ces problèmes (P_\pm^ω) peuvent avoir au plus une solution.

THEOREME 2-1: *Etant donnés f et g dans $L^2(\Gamma)$, les problèmes (P_\pm^ω) ont respectivement au plus une solution.*

Preuve

Soient u_+ et u_- vérifiant (P_+^ω) et (P_-^ω) respectivement avec $g = f = 0$. Des formules de Green, on déduit :

$$(2-1) \quad \int_\Gamma \partial_n u_+ \cdot \overline{-i\omega u_+} d\gamma = \int_{\Omega_+} (-i\bar{\omega} |\nabla u_+|^2 + i\omega |\omega|^2 |u_+|^2) dx$$

$$(2-2) \quad \int_\Gamma \partial_n u_- \cdot \overline{-i\omega u_-} d\gamma = \int_{\Omega_-} (i\bar{\omega} |\nabla u_-|^2 - i\omega |\omega|^2 |u_-|^2) dx$$

Les conditions homogènes sur le bord Γ donnent:

$$\partial_n u_+ = -\alpha i\omega u_+$$

$$\partial_n u_- = \alpha i\omega u_-$$

On obtient donc:

$$-\int_\Gamma \alpha |\omega|^2 |u_+|^2 d\gamma = \int_{\Omega_+} (i\bar{\omega} |\nabla u_+|^2 - i\omega |\omega|^2 |u_+|^2) dx$$

$$-\int_\Gamma \alpha |\omega|^2 |u_-|^2 d\gamma = \int_{\Omega_-} (i\bar{\omega} |\nabla u_-|^2 - i\omega |\omega|^2 |u_-|^2) dx$$

Soit $\sigma > 0$ la partie imaginaire de la fréquence ω . En prenant la partie réelle des égalités ci-dessus, on trouve:

$$-\int_\Gamma \alpha |\omega|^2 |u_\pm|^2 d\gamma = \sigma \int_{\Omega_\pm} (|\nabla u_\pm|^2 + |\omega|^2 |u_\pm|^2) dx$$

ce qui implique que

$$\int_{\Omega_-} (|\nabla u_-|^2 + |\omega|^2 |u_-|^2) dx = \int_{\Omega_+} (|\nabla u_+|^2 + |\omega|^2 |u_+|^2) dx = 0$$

d'où le théorème. 

On prouve l'existence de solutions aux problèmes (P_{\pm}^{ω}) en passant par la représentation par potentiels de simple et double couches des solutions des équations de Helmholtz. En effet, toute solution u des équations de Helmholtz homogènes dans Ω_+ et Ω_- s'écrit:

$$(2-3) \quad u(x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(\omega |x-y|) p(y) d\gamma(y) - \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \partial_{n_x} (H_0^{(1)}(\omega |x-y|)) \varphi(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma$$

où les densités p et φ sont les sauts de u et $\partial_n u$ respectivement:

$$\varphi = u_- - u_+, \quad p = \partial_n u_- - \partial_n u_+$$

De plus, les études des problèmes de Dirichlet et Neumann en fréquence (voir chapitre précédent et [1]) dans le cas où ω est une fréquence complexe ont montré que si $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $p \in H^{-1/2}(\Gamma)$, l'onde u appartient à $H^1(\Omega_+) \cup H^1(\Omega_-)$. Plus précisément on a, si on note

$$v_1(x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(\omega |x-y|) p(y) d\gamma(y) = L_{\omega} p(x), \quad x \in \Gamma$$

$$v_2(x) = -\frac{i}{4} \int_{\Gamma} \partial_{n_x} (H_0^{(1)}(\omega |x-y|)) \varphi(y) d\gamma(y) = M_{\omega} \varphi(x), \quad x \in \Gamma$$

les inégalités obtenues par des formules de Green:

$$(2-4) \quad \|v_1\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega} \leq C_{\sigma} |\omega| |p|_{-1/2, \Gamma}$$

$$(2-5) \quad \|v_2\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega} \leq C_{\sigma} |\omega|^{3/2} |\varphi|_{-1/2, \Gamma}$$

où la quantité

$$\|u\|_{\Omega, \omega} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme équivalente à celle de $H^1(\Omega)$.

Donc s'il existe une solution u de (P_{\pm}^{ω}) , elle s'écrit sous la forme (2-3). Il reste à donner les conditions que doivent vérifier φ et p pour que l'onde u satisfasse les conditions aux limites dissipatives. Pour cela, on a besoin de connaître les traces sur Γ de u :

$$(2-6) \quad \begin{cases} u_+ = S_\omega p + (-\frac{I}{2} + K'_\omega) \varphi \\ u_- = S_\omega p + (\frac{I}{2} + K'_\omega) \varphi \\ \partial_n u_+ = (-\frac{I}{2} + K_\omega) p + D_\omega \varphi \\ \partial_n u_- = (\frac{I}{2} + K_\omega) p + D_\omega \varphi \end{cases}$$

où les opérateurs intégraux S_ω , K_ω , K'_ω et D_ω sont définis par:

$$S_\omega p(x) = \frac{i}{4} \int_\Gamma H_0^{(1)}(\omega |x-y|) p(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$K_\omega p(x) = \frac{i}{4} \int_\Gamma \partial_{n_x} (H_0^{(1)}(\omega |x-y|)) p(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$K'_\omega \varphi(x) = -\frac{i}{4} \int_\Gamma \partial_{n_y} (H_0^{(1)}(\omega |x-y|)) \varphi(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$D_\omega \varphi(x) = \frac{i}{4} \lim_{\substack{x' = x + \varepsilon n_x \\ \varepsilon \rightarrow 0}} n_x \cdot \nabla_{x'} \int_\Gamma n_y \cdot \nabla_{x'} (H_0^{(1)}(\omega |x'-y|)) \varphi(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma$$

la limite dans la dernière égalité étant à prendre au sens des distributions sur Γ .

En ajoutant et en retranchant les conditions aux limites sur Γ , on a:

$$\partial_n u_+ + \partial_n u_- - \alpha i \omega \varphi = f + g$$

$$p - \alpha i \omega (u_+ + u_-) = f - g$$

soit en écrivant les traces de u en fonction de f et p :

$$(2-7) \quad \begin{cases} 2(K_\omega p + D_\omega \varphi) - \alpha i \omega \varphi = f + g \\ p - 2\alpha i \omega (S_\omega p + K'_\omega \varphi) = f - g \end{cases}$$

Donc s'il existe une solution (φ, p) au système d'équations intégrales (2-7) et si (φ, p) est dans $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, l'onde $u = L_\omega p + M_\omega \varphi$ est solution de (P_\pm^ω) .

On se sert d'une formulation variationnelle de (2-7) pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations intégrales. En effet, si on multiplie la première équation de (2-7) par $(-i\omega \psi)$, la seconde par $(\frac{1}{\alpha} \bar{q})$ où ψ et q sont les fonctions test, si on ajoute les deux équations ainsi obtenues et si on intègre sur Γ , on obtient le problème variationnel suivant équivalent à (2-7):

$$(2-8) \quad a(\tilde{U}, \tilde{V}) = l(\tilde{V})$$

où l'on a noté $\tilde{U} = (\varphi, p)$ et $\tilde{V} = (\psi, q)$ et

$$\begin{aligned} a(\tilde{U}, \tilde{V}) &= |\omega|^2 \int_{\Gamma} \alpha \varphi \cdot \overline{\psi} d\gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{\alpha} p \cdot \overline{q} d\gamma + 2i\overline{\omega} \int_{\Gamma} K_{\omega} p \cdot \overline{\psi} d\gamma + 2i\overline{\omega} \int_{\Gamma} D_{\omega} \varphi \cdot \overline{\psi} d\gamma \\ &\quad - 2i\omega \int_{\Gamma} S_{\omega} p \cdot \overline{q} d\gamma - 2i\omega \int_{\Gamma} K'_{\omega} \varphi \cdot \overline{q} d\gamma \\ l(\tilde{V}) &= 2 \int_{\Gamma} [(f+g) \cdot \overline{-i\omega \psi} + \frac{1}{\alpha} (f-g) \cdot \overline{q}] d\gamma \end{aligned}$$

A cause de l'intégrale $\int_{\Gamma} \frac{1}{\alpha} p \cdot \overline{q} d\gamma$, on va se restreindre à prendre p, q dans $L^2(\Gamma)$.

THEOREME 2-2: *Si les données $f+g$ et $\frac{1}{\alpha}(f-g)$ sont respectivement dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $L^2(\Gamma)$ alors le problème variationnel (2-8) admet une unique solution $\tilde{U} = (\varphi, p)$ dans $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.*

Preuve

La forme antilinéaire l est clairement continue sur $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. En démontrant la continuité et la coercivité de la forme sesquilinéaire a sur $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, on prouve l'existence et l'unicité d'une solution à (2-8): il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram.

On commence par regarder la continuité de a . Il est connu que $S_{\omega}, K_{\omega}, K'_{\omega}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -1 sur Γ et D_{ω} un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 sur Γ . La continuité de a sur $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ s'en déduit. On va toutefois préciser la norme de a pour connaître sa dépendance en ω , ce qui nous permettra dans le paragraphe suivant d'estimer la régularité en temps des solutions du problème d'évolution. On rappelle l'estimation du chapitre précédent sur S_{ω} et celle qu'on trouve de façon similaire sur D_{ω} .

$$(2-9) \quad |S_{\omega} p|_{1/2, \Gamma} \leq C_{\sigma} |\omega| |p|_{-1/2, \Gamma}$$

$$(2-10) \quad |D_{\omega} \varphi|_{-1/2, \Gamma} \leq C_{\sigma} |\omega|^2 |\varphi|_{1/2, \Gamma}$$

D'autre part, on va établir les majorations des normes des opérateurs $\frac{I}{2} + K'_{\omega}$ et $\frac{I}{2} - K_{\omega}$.

Soit φ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et soit $v = M_\omega \varphi$ alors on a vu que v vérifie:

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2)v = 0 \text{ dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ [\partial_n v]_\Gamma = 0 \\ [v]_\Gamma = \varphi \end{cases}$$

De plus $v_- = (\frac{I}{2} + K'_\omega) \varphi$. En écrivant les formules de Green dans Ω_+ et Ω_- , on trouve:

$$\int_\Gamma \partial_n v_- \cdot \overline{-i\omega \varphi} d\gamma = \int_{\Omega_- \cup \Omega_+} (i\bar{\omega} |\nabla v|^2 - i\omega |\omega|^2 |v|^2) dx$$

soit, en prenant la partie réelle de cette égalité:

$$\sigma \int_{\Omega_- \cup \Omega_+} (|\nabla v|^2 + |\omega|^2 |v|^2) dx = \Re \int_\Gamma \partial_n v_- \cdot \overline{-i\omega \varphi} d\gamma$$

On majore le second membre par :

$$|\partial_n v_-|_{-1/2, \Gamma} |\omega| |\varphi|_{1/2, \Gamma}$$

et donc

$$\|v\|_{\Omega_-, \omega}^2 \leq \frac{|\omega|}{\sigma} |\varphi|_{1/2, \Gamma} |\partial_n v_-|_{-1/2, \Gamma}$$

Le théorème de trace implique que:

$$|v_-|_{1/2, \Gamma} \leq C_\sigma \|v\|_{\Omega_-, \omega}$$

En reprenant les deux dernières inégalités, on peut écrire:

$$(2-11) \quad |(\frac{I}{2} + K'_\omega) \varphi|_{1/2, \Gamma} \leq C_\sigma \frac{|\partial_n v_-|_{-1/2, \Gamma}}{\|v\|_{\Omega_-, \omega}} |\omega| |\varphi|_{1/2, \Gamma}$$

Réécrivons la formule de Green pour w dans $H^1(\Omega_-)$ relevant ψ donné dans $H^{1/2}(\Gamma)$:

$$\int_\Gamma \partial_n v_- \cdot \bar{\psi} d\gamma = \int_{\Omega_-} (\nabla v \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 v \cdot \bar{w}) dx$$

Pour tout ψ dans $H^{1/2}(\Gamma)$, on a donc:

$$|\int_\Gamma \partial_n v_- \cdot \bar{\psi} d\gamma| \leq \|v\|_{\Omega_-, \omega} \|w\|_{\Omega_-, \omega}$$

Le lemme de relèvement établi par Ha-Duong dans [12] (chap.5, lemme 1) nous donne:

$$\|v\|_{\Omega_-, \omega} \leq C_\sigma |\omega|^{1/2} |\psi|_{1/2, \Gamma}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$(2-12) \quad |\partial_n v_-|_{-1/2, \Gamma} \leq C_\sigma |\omega|^{1/2} \|v\|_{\Omega_-, \omega}$$

On déduit de (2-11) et (2-12) que:

$$(2-13) \quad |(\frac{I}{2} + K'_\omega) \varphi|_{1/2, \Gamma} \leq C_\sigma |\omega|^{3/2} |\varphi|_{1/2, \Gamma}.$$

On passe maintenant à la majoration de $\|\frac{I}{2} - K_\omega\|$. Si p est dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $v = L_\omega p$ alors $v \in H^1(\Omega_+) \cup H^1(\Omega_-)$ et vérifie:

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2)v = 0 \text{ dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ [\partial_n v]_\Gamma = p \\ [v]_\Gamma = 0 \end{cases}$$

avec $\partial_n v_+ = -(\frac{I}{2} - K_\omega)p$. Toujours grâce à la formule de Green, on obtient:

$$\Re \int_\Gamma p \cdot \overline{-i\omega u_+} d\gamma = \sigma \|v\|_{\Omega_- \cup \Omega_+, \omega}^2 \geq \sigma \|v\|_{\Omega_+, \omega}^2$$

soit encore

$$\|v\|_{\Omega_+, \omega}^2 \leq \frac{|\omega|}{\sigma} |v_+|_{1/2, \Gamma} |p|_{-1/2, \Gamma}$$

or le lemme de trace donne:

$$|v_+|_{1/2, \Gamma} \leq C_\sigma \|v\|_{\Omega_+, \omega}$$

et de façon similaire à la démonstration de (2-12), on a:

$$|\partial_n v_+|_{-1/2, \Gamma} \leq C_\sigma |\omega|^{1/2} \|v\|_{\Omega_+, \omega}$$

ce qui nous permet de conclure:

$$(2-14) \quad |(\frac{I}{2} - K_\omega)p|_{-1/2, \Gamma} \leq C_\sigma |\omega|^{3/2} |p|_{-1/2, \Gamma}$$

On réécrit la forme sesquilinéaire a de la façon suivante:

$$a(\tilde{U}, \tilde{V}) = b_1(p, q) + b_2(\varphi, \psi) + a_3(\tilde{U}, \tilde{V})$$

où on a choisi:

$$b_1(p, q) = \int_\Gamma \frac{1}{\alpha} p \cdot \bar{q} d\gamma - 2i\omega \int_\Gamma S_\omega p \cdot \bar{q} d\gamma$$

$$b_2(\varphi, \psi) = |\omega|^2 \int_\Gamma \alpha \varphi \cdot \bar{\psi} d\gamma + 2i\bar{\omega} \int_\Gamma D_\omega \varphi \cdot \bar{\psi} d\gamma$$

$$a_3(\tilde{U}, \tilde{V}) = 2i\bar{\omega} \int_{\Gamma} \left(\frac{I}{2} - K_{\omega} \right) p \cdot \bar{\psi} d\gamma - 2i\omega \int_{\Gamma} \left(\frac{I}{2} + K'_{\omega} \right) \varphi \cdot \bar{q} d\gamma + \int_{\Gamma} p \cdot \overline{-i\omega \psi} d\gamma \\ + \int_{\Gamma} i\omega \varphi \cdot \bar{q} d\gamma$$

En majorant chaque forme sesquilinéaire, b_1 grâce à (2-9), b_2 grâce à (2-10) et a_3 grâce à (2-14) et (2-13), on trouve que:

$$(2-15) \quad |a(\tilde{U}, \tilde{V})| \leq C_{\sigma} (|\omega| |p|_{0,\Gamma} + |\omega|^{3/2} |\varphi|_{1/2,\Gamma}) (|\omega| |q|_{0,\Gamma} + |\omega|^{3/2} |\psi|_{1/2,\Gamma}).$$

On démontre maintenant que la forme a est coercive sur $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. Pour cela, on utilise les formules de traces (2-6) pour $u = L_{\omega} p + M_{\omega} \varphi$ afin d'écrire a comme suit:

$$a(\tilde{U}, \tilde{U}) = |\omega|^2 \int_{\Gamma} \alpha |\varphi|^2 d\gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{\alpha} |p|^2 d\gamma + \int_{\Gamma} (\partial_n u_+ + \partial_n u_-) \cdot \overline{-i\omega(u_- - u_+)} d\gamma \\ - i\omega \int_{\Gamma} (u_+ - u_-) \cdot \overline{(\partial_n u_- - \partial_n u_+)} d\gamma$$

On pose :

$$I = \int_{\Gamma} (\partial_n u_+ \cdot \overline{i\omega u_+} - \partial_n u_- \cdot \overline{i\omega u_-}) d\gamma$$

$$J = \int_{\Gamma} (\partial_n u_- \cdot \overline{i\omega u_+} - \partial_n u_+ \cdot \overline{i\omega u_-}) d\gamma$$

alors il est facile de voir que $a(\tilde{U}, \tilde{U})$ s'exprime en fonction de I et J :

$$a(\tilde{U}, \tilde{U}) = |\omega|^2 \int_{\Gamma} \alpha |\varphi|^2 d\gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{\alpha} |p|^2 d\gamma + 2 \operatorname{Re} I + 2i \operatorname{Im} J$$

Les formules de Green (2-1) et (2-2) donnent:

$$I = \int_{\Omega_- \cup \Omega_+} (i\bar{\omega} |\nabla u|^2 - i\omega |\omega|^2 |u|^2) dx$$

On en déduit que:

$$\operatorname{Re} a(\tilde{U}, \tilde{U}) = |\omega|^2 \int_{\Gamma} \alpha |\varphi|^2 d\gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{\alpha} |p|^2 d\gamma + 2\sigma \|u\|_{\Omega_- \cup \Omega_+, \omega}^2.$$

Les théorèmes de trace dans les ouverts extérieur Ω_+ et intérieur Ω_- permettent d'écrire:

$$|\varphi|_{1/2,\Gamma} \leq C_{\sigma} \|u\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega}$$

D'où, sachant que la fonction α est bornée sur Γ , on a la relation de coercivité:

$$(2-16) \quad \operatorname{Re} a(\tilde{U}, \tilde{U}) \geq C_\sigma (|p|_{0,\Gamma}^2 + |\varphi|_{-1/2,\Gamma}^2) = C_\sigma \|\tilde{U}\|_H^2$$

où l'espace $H = H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ est muni de la norme $\|\cdot\|_H$.

On peut conclure par le théorème suivant:

THEOREME 2-3: *Si les données f et g vérifient*

$$f+g \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \frac{1}{\alpha} (f-g) \in L^2(\Gamma)$$

alors le système d'équations intégrales (2-7) admet une unique solution (φ, p) dans $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ et les problèmes (P_\pm^ω) en fréquence sont bien posés dans $H^1(\Omega_\pm)$.

2-2. Problème en temps

On rappelle les problèmes d'évolution (P_+) et (P_-) :

$$(P_\pm) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_\pm \\ \alpha \partial_t u_\pm \mp \partial_n u_\pm = -(\alpha \partial_t u^i \mp \partial_n u^i) \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ u(t, x) = \partial_t u(t, x) = 0, t \leq 0, x \in \Omega_\pm \end{cases}$$

THEOREME 2-4: *Pour tout $(\partial_n u^i, u^i)$ dans $\mathcal{H}_\sigma^{5/2}(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma))$, $\sigma > 0$, le problème (P_\pm) admet une unique solution u dans $\mathcal{H}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega_+ \cup \Omega_-))$ vérifiant l'estimation d'énergie:*

$$(2-17) \quad \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} (|\nabla u(t, x)|^2 + |u(t, x)|^2) dx dt \leq C_\sigma (|\partial_n u^i|_{\sigma, 5/2, -1/2}^2 + |u^i|_{\sigma, 5/2, 0}^2)$$

Preuve

L'existence et l'unicité proviennent de l'étude du problème en fréquence. En effet on remarque que u est solution de (P_\pm) dans $\mathcal{H}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega_+ \cup \Omega_-))$ si et seulement si sa transformée de Fourier-Laplace \hat{u} est solution de (P_\pm^ω) avec :

$$f+g = -2\partial_n \hat{u}^i \text{ et } f-g = 2\alpha i\omega \hat{u}^i$$

Or l'onde harmonique \hat{u} s'écrit de façon unique:

$$\hat{u} = L_\omega \hat{p} + M_\omega \hat{\varphi}, \quad \hat{p} = [\partial_n \hat{u}], \quad \hat{\varphi} = [\hat{u}]$$

Les relations (2-4) et (2-5) impliquent qu'alors \hat{u} dépend continûment de \hat{p} et de $\hat{\varphi}$:

$$\|\hat{u}\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega} \leq C_\sigma (|\omega| \|\hat{p}\|_{-1/2, \Gamma} + |\omega|^{3/2} \|\hat{\varphi}\|_{-1/2, \Gamma})$$

Si l'on note $\tilde{U} = (\hat{\varphi}, \hat{p})$, \tilde{U} est solution de

$$a(\tilde{U}, \tilde{U}) = l(\tilde{U})$$

La relation de coercivité (2-16) et la continuité de la forme anti-linéaire l donnent:

$$(2-18) \quad \|\tilde{U}\|_H \leq C |\omega| (\|\partial_n \hat{u}^i\|_{-1/2, \Gamma} + \|\hat{u}^i\|_{0, \Gamma})$$

On en déduit donc:

$$(2-19) \quad \|\hat{u}\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega} \leq C_\sigma |\omega|^{3/2} \|\tilde{U}\|_H \leq C_\sigma |\omega|^{5/2} (\|\partial_n \hat{u}^i\|_{-1/2, \Gamma} + \|\hat{u}^i\|_{0, \Gamma})$$

Alors l'existence de u découle de celle de \hat{u} et l'unicité de u et l'inégalité d'énergie sont une conséquence de (2-19). ~~✎~~

On peut représenter la solution u de (P_\pm) comme une somme de potentiels retardés:

$$(2-20) \quad u = Lp + M\varphi$$

où les densités φ et p sont respectivement les sauts de u et $\partial_n u$ à travers Γ :

$$\varphi = u_- - u_+$$

$$p = \partial_n u_- - \partial_n u_+$$

On a noté L le potentiel retardé de simple couche défini par:

$$Lp(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq \tau} \frac{p(t-\tau, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(y) d\tau, \quad x \in \Gamma, t > 0$$

et M le potentiel retardé de double couche:

$$M\varphi(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq \tau} n_y \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} \frac{\tau \partial_t \varphi(t-\tau, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(y) d\tau, \quad x \in \Gamma, t > 0$$

Si on prend la transformée de Fourier-Laplace de (2-20), on retrouve la formule de représentation de la solution \hat{u} de (P_\pm^ω) :

$$\hat{u} = L_\omega \hat{p} + M_\omega \hat{\varphi}$$

où \hat{p} et $\hat{\varphi}$ sont les transformées de Fourier-Laplace de p et φ .

En exprimant les conditions aux limites, on obtient alors le système d'équations intégral-différentielles en φ et p :

$$(2-21) \quad \begin{cases} 2(Kp + D\varphi) + \alpha \partial_t \varphi = -2\partial_n u^i \\ p + 2\alpha \partial_t (Sp + K'\varphi) = -2\alpha \partial_t u^i \end{cases}$$

où les opérateurs S , K , K' et D étant définis à partir des traces des potentiels retardés L et M . On a, pour $t \geq 0$ et $x \in \Gamma$:

$$Sf(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq \tau} \frac{f(t-\tau, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(y) d\tau$$

$$Kf(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq \tau} n_x \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} \frac{\tau \partial_t f(t-\tau, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(y) d\tau$$

$$K'f(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq \tau} n_y \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} \frac{\tau \partial_t f(t-\tau, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(y) d\tau$$

$$Df(t, x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' = x + \varepsilon n_x} n_x \cdot \nabla_{x'} \int_{y \in \Gamma / |x'-y| \leq \tau} n_y \cdot \frac{x'-y}{|x'-y|^2} \frac{\tau \partial_t f(t-\tau, y)}{(\tau^2 - |x'-y|^2)^{1/2}} d\gamma(y) d\tau$$

THEOREME 2-5: Si $(\partial_n u^i, u^i) \in \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma))$, $\sigma > 0$, le système (2-21) admet une unique solution (φ, p) dans $\mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma))$.

Preuve

Si (φ, p) est solution de (2-21) alors par transformation de Fourier-Laplace en temps $(\hat{\varphi}, \hat{p})$ est solution du système d'équations intégrales (2-7) et réciproquement. Or on a vu que ce système avait une unique solution \tilde{U} dans $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ vérifiant (2-18). On détermine donc l'espace dans lequel se trouve (φ, p) :

$$|\varphi|_{\sigma, 0, 1/2}^2 + |p|_{\sigma, 0, 0}^2 \leq C_\sigma (|\partial_n u^i|_{\sigma, 1, -1/2}^2 + |u^i|_{\sigma, 1, 0}^2)$$



L'unique solution (φ, p) de (2-21) satisfait le problème variationnel espace-temps, trouvé en intégrant le problème (2-8) harmonique:

$$(2-22) \quad b((\varphi, p), (\psi, q)) = -2 \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma (\partial_n u^i \cdot \partial_t \psi + \partial_t u^i \cdot q) d\gamma dt$$

$$\forall (\psi, q) \in \mathcal{X}_\sigma^{3/2}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma)) \times \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Gamma))$$

où la forme bilinéaire b est donné par:

$$b((\varphi, p), (\psi, q)) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \{ \alpha \partial_t \varphi \cdot \partial_t \psi + \frac{1}{\alpha} p \cdot q + 2(Kp \cdot \partial_t \psi + \partial_t K' \varphi \cdot q$$

$$+ \partial_t Sp \cdot q + D\varphi \cdot \partial_t \psi) \} d\gamma dt$$

THEOREME 2-6: Si $(\partial_n u^i, u^i) \in \mathcal{X}_\sigma^{5/2}(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma))$, $\sigma > 0$, le problème (2-22) admet une unique solution (φ, p) dans $\mathcal{X}_\sigma^{3/2}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma)) \times \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Gamma))$. De plus la forme bilinéaire b apparaissant dans (2-22) est continue sur $(\mathcal{X}_\sigma^{3/2}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma)) \times \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Gamma)))^2$ et vérifie l'inégalité de coercivité:

$$(2-23) \quad b((\varphi, p), (\varphi, p)) \geq C_\sigma (|\varphi|_{\sigma, 0, 1/2}^2 + |p|_{\sigma, 0, 0}^2)$$

$$\forall (\varphi, p) \in \mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)).$$

Preuve

La continuité de b se déduit de celle de a donné dans l'inégalité (2-15) et la relation de coercivité (2-23) provient de la formule (2-16).

2-3. Discrétisation

A l'aide de la méthode des éléments finis, on va maintenant construire une approximation numérique de (φ, p) solution de (2-22). Le principe de l'approximation variationnelle du problème (2-22) étant le même que celui du problème de Dirichlet, on écrit directement le problème approché: trouver $(\varphi_{h\Delta t}, p_{h\Delta t}) \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \tilde{V}_h) \times \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \tilde{W}_h)$ tel que

$$b((\varphi_{h\Delta t}, p_{h\Delta t}), (\psi, q)) = -2 \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma (\partial_n u^i \cdot \partial_t \psi + \partial_t u^i \cdot q) d\gamma dt$$

$$\forall (\psi, q) \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \tilde{V}_h) \times \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \tilde{W}_h)$$

où les entiers n_1 et n_2 sont respectivement supérieur à 2 et à 1 et $\Delta t > 0$ est le pas de temps. Les sous-espaces \tilde{V}_h et \tilde{W}_h de dimensions finies N_h^1 et N_h^2 sont les

espaces approchés de $H^{1/2}(\Gamma)$ et $L^2(\Gamma)$ respectivement, définis de façon équivalente à ce qui a été fait dans le paragraphe discrétisation en espace du chapitre 1, soit:

$$\tilde{V}_h = \{ \tilde{\varphi} / \tilde{\varphi} \circ F_i \in \mathbb{P}_{m_1} \}, m_1 \geq 1$$

$$\tilde{W}_h = \{ \tilde{p} / \tilde{p} \circ F_i \in \mathbb{P}_{m_2} \}, m_2 \geq 0$$

Si on note $(\varphi_i^h)_{i=1, \dots, N_h^1}$ une base de \tilde{V}_h et $(p_j^h)_{j=1, \dots, N_h^2}$ une base de \tilde{W}_h , les

inconnues $\varphi_{h\Delta t}$ et $p_{h\Delta t}$ peuvent s'écrire:

$$\varphi_{h\Delta t}(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_j^h(x) \eta_{j\Delta t}(t), \eta_{j\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \mathbb{R})$$

$$p_{h\Delta t}(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} p_j^h(x) \gamma_{j\Delta t}(t), \gamma_{j\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \mathbb{R})$$

Alors le problème approché consiste à chercher $\eta_{l\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \mathbb{R})$ pour $l=1, \dots, N_h^1$ et $\gamma_{j\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \mathbb{R})$ pour $j=1, \dots, N_h^2$ tels que:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N_h^1} \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta'_{i\Delta t}(t) [\eta'_{l\Delta t}(t) \int_\Gamma \alpha(x) G_{il}^1(x, x) d\gamma(x) \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^t \iint_{|x-y| \leq \tau} \eta''_{l\Delta t}(t-\tau) G_{il}^1(x, y) \frac{n_x \cdot n_y}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} + \eta_{l\Delta t}(t-\tau) \frac{G_{il}^2(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau] dt \\ & + \sum_{j=1}^{N_h^2} \{ \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta'_{i\Delta t}(t) \int_0^t \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{K_{ij}^1(x, y)}{\pi (\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} \tau \gamma'_{j\Delta t}(t-\tau) d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau dt \\ & + \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \zeta_{k\Delta t}(t) [\gamma_{j\Delta t}(t) \int_\Gamma \frac{1}{\alpha(x)} P_{kj}(x, x) d\gamma(x) \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \int_0^t \iint_{|x-y| \leq \tau} \gamma'_{j\Delta t}(t-\tau) \frac{P_{kj}(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau] dt \} \\ & + \sum_{l=1}^{N_h^1} \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \zeta_{k\Delta t}(t) \frac{1}{\pi} \int_0^t \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{K_{kl}^2(x, y)}{\pi (\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} \tau \eta'_{l\Delta t}(t-\tau) d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau dt \\ & = -2 \int_0^\infty e^{-2\sigma t} [\beta'_{i\Delta t}(t) \int_\Gamma \partial_n u^i(t, x) \varphi_i^h(x) d\gamma(x) + \zeta_{k\Delta t}(t) \int_\Gamma \partial_t u^i(t, x) p_k^h(x) d\gamma(x)] dt \\ & \quad \forall \beta_{i\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \mathbb{R}), 1 \leq i \leq N_h^1, \forall \zeta_{k\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \mathbb{R}), 1 \leq k \leq N_h^2 \end{aligned}$$

où on a noté:

$$G_{il}^1(x,y) = \varphi_i^h(x) \varphi_l^h(y)$$

$$G_{il}^2(x,y) = \frac{\partial \varphi_i^h}{\partial s_x}(x) \frac{\partial \varphi_l^h}{\partial s_y}(y) \quad (\text{où } \frac{\partial}{\partial s} \text{ est la dérivée tangentielle à } \Gamma)$$

$$P_{kj}(x,y) = p_k^h(x) p_j^h(y)$$

$$K_{ij}^1(x,y) = -n_x \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} \varphi_i^h(x) p_j^h(y)$$

$$K_{kl}^2(x,y) = n_y \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} p_k^h(x) \varphi_l^h(y)$$

On montre comment construire un schéma calculant $\eta_{l\Delta t}$ et $\gamma_{j\Delta t}$ sur le cas $n_1 = n_2 + 1 = 2$. La généralisation à des indices de régularité en temps plus grands sera faite par la suite.

On choisit les fonctions test telles que $\beta'_{i\Delta t}(t) = \beta_{\Delta t}^n(t)$, $i=1, \dots, N_h^1$ et $\zeta_{k\Delta t}(t) = 0$, $k=1, \dots, N_h^2$ dans un premier temps puis $\zeta_{k\Delta t}(t) = \beta_{\Delta t}^n(t)$, $k=1, \dots, N_h^2$ et $\beta'_{i\Delta t}(t) = 0$, $i=1, \dots, N_h^1$. On a noté $\beta_{\Delta t}^n$ la fonction de support (t_{n-1}, t_{n+1}) définie par:

$$\beta_{\Delta t}^n(t) = \begin{cases} t - t_{n-1} & \text{pour } t \in [t_{n-1}, t_n[\\ t_{n+1} - t & \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On obtient alors deux systèmes d'équations.

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N_h^1} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \beta_{\Delta t}^n(t) \left[\eta'_{l\Delta t}(t) \int_{\Gamma} \alpha(x) G_{il}^1(x,x) d\gamma(x) \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^t \iint_{|x-y| \leq \tau} \eta''_{l\Delta t}(t-\tau) G_{il}^1(x,y) \frac{n_x \cdot n_y}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} + \eta_{l\Delta t}(t-\tau) \frac{G_{il}^2(x,y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau \Big] dt \\ & + \sum_{j=1}^{N_h^2} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \beta_{\Delta t}^n(t) \int_0^t \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{K_{ij}^1(x,y)}{\pi(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} \tau \gamma'_{j\Delta t}(t-\tau) d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau dt \\ & = -2 \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \beta_{\Delta t}^n(t) \int_{\Gamma} \partial_n u^i(t,x) \varphi_i^h(x) d\gamma(x) dt, \quad i=1, \dots, N_h^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_h^2} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \beta_{\Delta t}^n(t) [\gamma_{j\Delta t}(t) \int_{\Gamma} \frac{1}{\alpha(x)} P_{kj}(x, x) d\gamma(x) \\
& \quad + \frac{1}{\pi} \int_0^t \iint_{|x-y| \leq \tau} \gamma'_{j\Delta t}(t-\tau) \frac{P_{kj}(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau] dt \\
& + \sum_{l=1}^{N_h^1} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \beta_{\Delta t}^n(t) \int_0^t \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{K_{kl}^2(x, y)}{\pi(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} \tau \eta'_{l\Delta t}(t-\tau) d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau dt \\
& = -2 \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \beta_{\Delta t}^n(t) \int_{\Gamma} \partial_t u^i(t, x) p_k^h(x) d\gamma(x) dt, \quad k=1, \dots, N_h^2
\end{aligned}$$

Si maintenant on pose:

$$\eta''_{l\Delta t}(t) = a_l^n \quad \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

$$\gamma'_{j\Delta t}(t) = b_j^n \quad \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

des calculs identiques à ceux développés dans le cas du problème de Dirichlet conduisent aux systèmes matriciels en $A^n = (a_1^n, \dots, a_{N_h^1}^n)^t$ et $B^n = (b_1^n, \dots, b_{N_h^2}^n)^t$.

$$(2-24) \quad \begin{cases} \sum_{p=0}^n (M^{n-p} A^p + \tilde{N}^{n-p} B^p) = S^n, & n \geq 1 \\ \sum_{p=0}^n (\tilde{M}^{n-p} A^p + N^{n-p} B^p) = \tilde{S}^n, & n \geq 1 \end{cases}$$

où le vecteur S^n de dimension N_h^1 est donné par:

$$\begin{aligned}
S_i^n = & -2 \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \{ (\Delta t - s) \int_{\Gamma} \varphi_i^h(x) \partial_n u^i(s+t_n, x) d\gamma(x) \\
& + s e^{2\sigma \Delta t} \int_{\Gamma} \varphi_i^h(x) \partial_n u^i(s+t_{n-1}, x) d\gamma(x) \} ds
\end{aligned}$$

et \tilde{S}^n de dimension N_h^2 a une même formulation en remplaçant la fonction de base φ_i^h par p_i^h et la donnée $\partial_n u^i$ par $\partial_t u^i$. Les matrices $M^p, N^p, \tilde{M}^p, \tilde{N}^p$ s'écrivent:

$$\begin{aligned}
M_{il}^P &= C_p(\Delta t) \int_{\Gamma} \alpha(x) G_{il}^1(x, x) d\gamma(x) \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} [(\Delta t - s) \int_{s+t_{p-1}}^{s+t_p} \iint_{|x-y| \leq \tau} G_{il}^1(x, y) \frac{n_x \cdot n_y}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} + \frac{(s+t_p - \tau)^2}{2} \frac{G_{il}^2(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x, y) d\tau \\
&+ s e^{2\sigma \Delta t} \int_{s+t_{p-2}}^{s+t_{p-1}} \iint_{|x-y| \leq \tau} G_{il}^1(x, y) \frac{n_x \cdot n_y}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} + \frac{(s+t_{p-1} - \tau)^2}{2} \frac{G_{il}^2(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x, y) d\tau] ds \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} [(\Delta t - s) \int_0^{s+t_{p-1}} \iint_{|x-y| \leq \tau} \Delta t (s+t_p - \tau - \frac{\Delta t}{2}) \frac{G_{il}^2(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x, y) d\tau \\
&+ s e^{2\sigma \Delta t} \int_0^{s+t_{p-2}} \iint_{|x-y| \leq \tau} \Delta t (s+t_{p-1} - \tau - \frac{\Delta t}{2}) \frac{G_{il}^2(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x, y) d\tau] ds, \quad i, l=1, \dots, N_h^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{kj}^P &= C_p(\Delta t) \int_{\Gamma} \frac{1}{\alpha(x)} P_{kj}(x, x) d\gamma(x) \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} [(\Delta t - s) \int_{s+t_{p-1}}^{s+t_p} \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{P_{kj}(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau \\
&+ s e^{2\sigma \Delta t} \int_{s+t_{p-2}}^{s+t_{p-1}} \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{P_{kj}(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau] ds, \quad j, k=1, \dots, N_h^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{kl}^P &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} [(\Delta t - s) \int_{s+t_{p-1}}^{s+t_p} \tau \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{K_{kl}^2(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau \\
&+ s e^{2\sigma \Delta t} \int_{s+t_{p-2}}^{s+t_{p-1}} \tau \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{K_{kl}^2(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau] ds, \quad k=1, \dots, N_h^2, \quad l=1, \dots, N_h^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{ij}^P &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} [(\Delta t - s) \int_{s+t_{p-1}}^{s+t_p} \tau \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{K_{ij}^1(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau \\
&+ s e^{2\sigma \Delta t} \int_{s+t_{p-2}}^{s+t_{p-1}} \tau \iint_{|x-y| \leq \tau} \frac{K_{ij}^1(x, y)}{(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) d\tau] ds, \quad j=1, \dots, N_h^2, \quad i=1, \dots, N_h^1
\end{aligned}$$

avec la constante $C_p(\Delta t)$ qui dépend de Δt , de p et de σ :

$$C_p(\Delta t) = \Delta t \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} [(\Delta t - s) + s e^{2\sigma \Delta t}] ds, \quad p \geq 2$$

$$C_1(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} [(\Delta t - s)s + s^2 e^{2\sigma \Delta t}] ds$$

$$C_0(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s)s ds .$$

Les matrices Q^p formées à partir des matrices $M^p, N^p, \tilde{M}^p, \tilde{N}^p$

$$Q^p = \begin{bmatrix} M^p & \tilde{N}^p \\ \tilde{M}^p & N^p \end{bmatrix}, p \geq 0$$

sont carrées de taille $(N_h^1 + N_h^2) \times (N_h^1 + N_h^2)$ et sont symétriques puisque:

$$(2-25) \quad K_{ij}^1(x, y) = K_{ji}^2(x, y), j=1, \dots, N_h^2, i=1, \dots, N_h^1$$

Si on pose:

$$D^n = (A^n, B^n)^t, R^n = (S^n, \tilde{S}^n)^t$$

alors le schéma (2-24) se réécrit sous la forme:

$$(2-26) \quad \sum_{p=0}^n Q^{n-p} D^p = R^n, n \geq 1$$

PROPOSITION 2-1: La matrice Q^0 est définie positive pour Δt assez petit.

Preuve

Les quatres matrices qui composent Q^0 sont:

$$N_{kj}^0 = \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s)s ds \right) \int_{\Gamma} \frac{1}{\alpha(x)} P_{kj}(x, x) d\gamma(x) \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} P_{kj}(x, y) \text{Argch} \left(\frac{s}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

$$M_{il}^0 = \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s)s ds \right) \int_{\Gamma} \alpha(x) G_{il}^1(x, x) d\gamma(x) \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \{ n_x \cdot n_y G_{il}^1(x, y) \text{Argch} \left(\frac{s}{|x-y|} \right) \\ + \frac{1}{2} G_{il}^2(x, y) [(s^2 + \frac{|x-y|^2}{2}) \text{Argch} \left(\frac{s}{|x-y|} \right) - \frac{3}{2} s (s^2 - |x-y|^2)^{1/2}] \} d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

$$\tilde{N}_{ij}^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} (s^2 - |x-y|^2)^{1/2} K_{ij}^1(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

$$\tilde{M}_{kl}^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} (s^2 - |x-y|^2)^{1/2} K_{kl}^2(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

On remarque que les deux premières matrices M^0 et N^0 sont les matrices des schémas correspondants aux problèmes de Dirichlet et Neumann respectivement, à un terme près contenant le produit $L^2(\Gamma)$ des fonctions de base. On déduit du lemme 1-1 et des théorèmes A3 et A4 que M^0 et N^0 sont définies positives:

$$M_{il}^0 = \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) s ds \right) \int_{\Gamma} (\alpha(x) + 1) G_{il}^1(x, x) d\gamma(x) + O(\Delta t^4) \\ + \frac{1}{6} \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) s^3 ds \right) \int_{\Gamma} G_{il}^2(x, x) d\gamma(x) + O(\Delta t^6)$$

$$N_{kj}^0 = \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) s ds \right) \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\alpha(x)} + 1 \right) P_{kj}(x, x) d\gamma(x) + O(\Delta t^4)$$

Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^{N_h^1 + N_h^2}$, $V = (v_1, \dots, v_{N_h^1}, w_1, \dots, w_{N_h^2})^t$. On a:

$$V^t Q^0 V = V_1^t M^0 V_1 + V_2^t N^0 V_2 + V_1^t \tilde{N}^0 V_2 + V_2^t \tilde{M}^0 V_1$$

où l'on a noté $V_1 = (v_1, \dots, v_{N_h^1})^t$ et $V_2 = (w_1, \dots, w_{N_h^2})^t$. D'après ce qui précède, les termes comprenant M^0 et N^0 peuvent être minorés par:

$$V_1^t M^0 V_1 + V_2^t N^0 V_2 \geq \frac{\Delta t^3}{6} \left(\int_{\Gamma} \left[\left(\frac{1}{\alpha(x)} + 1 \right) |W_h(x)|^2 + (\alpha(x) + 1) |V_h(x)|^2 \right] d\gamma(x) \right) \\ + C \Delta t^5 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial V_h}{\partial s_x}(x) \right|^2 d\gamma(x)$$

avec les fonctions V_h et W_h définies par:

$$V_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h^1} v_i \varphi_i^h(x) \quad W_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h^2} w_j p_j^h(x)$$

D'autre part, on a:

$$V_1^t \tilde{N}^0 V_2 + V_2^t \tilde{M}^0 V_1 = \sum_{i=1}^{N_h^1} \sum_{j=1}^{N_h^2} (v_i \tilde{N}_{ij}^0 w_j + w_j \tilde{M}_{ji}^0 v_i)$$

soit en tenant compte de la remarque (2-25):

$$V_1^t \tilde{N}^0 V_2 + V_2^t \tilde{M}^0 V_1 = \sum_{i=1}^{N_h^1} \sum_{j=1}^{N_h^2} 2v_i w_j \tilde{N}_{ij}^0 = \sum_{i=1}^{N_h^1} \sum_{j=1}^{N_h^2} 2v_i w_j \tilde{M}_{ji}^0$$

Ecrivons en fonction de V_h et W_h l'expression ci-dessus:

$$V_1^t \tilde{N}^0 V_2 + V_2^t \tilde{M}^0 V_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} n_y \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} (s^2 - |x-y|^2)^{1/2} \\ \times 2 W_h(y) V_h(x) d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

La surface Γ étant régulière, pour x et y voisins sur Γ (i.e pour Δt assez petit), le produit scalaire $n_y \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2}$ reste borné. Le lemme A4-2 nous permet d'écrire:

$$\iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} (s^2 - |x-y|^2)^{1/2} |V_h(x)| |W_h(y)| d\gamma(x) d\gamma(y) \leq C' s^2 |V_h|_{0,\Gamma} |W_h|_{0,\Gamma}$$

On vérifie sans peine que:

$$|V_1^t \tilde{N}^0 V_2 + V_2^t \tilde{M}^0 V_1| \leq C \Delta t^4 |V_h|_{0,\Gamma} |W_h|_{0,\Gamma}$$

On en déduit donc:

$$V^t Q^0 V \geq \frac{\Delta t^3}{6} \left(\int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\alpha(x)} |W_h(x)|^2 + \alpha(x) |V_h(x)|^2 \right] d\gamma(x) \right) + C \Delta t^5 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial V_h}{\partial s_x}(x) \right|^2 d\gamma(x) \\ + \frac{\Delta t^3}{6} (|V_h|_{0,\Gamma} - |W_h|_{0,\Gamma})^2 + \frac{\Delta t^3}{3} (1 - C \Delta t) |V_h|_{0,\Gamma} |W_h|_{0,\Gamma}$$

ce qui implique que pour Δt petit la matrice Q^0 est définie positive. 

La généralisation au cas $n_1 > 2$ et $n_2 > 1$ se fait de la façon suivante: on scinde le problème approché en deux systèmes de N_h^1 équations et N_h^2 équations en choisissant les fonctions test $(\beta'_{i\Delta t}, \zeta_{k\Delta t}) = (\Lambda^{2-n_1} \beta_{\Delta t}^n, 0)$ puis $(\beta'_{i\Delta t}, \zeta_{k\Delta t}) = (0, \Lambda^{1-n_2} \beta_{\Delta t}^n)$. On rappelle que $\Lambda^{-k} f$ où k est un entier désigne la $k^{\text{ième}}$ primitive en temps de f . Si on écrit que:

$$\eta_{i\Delta t}^{(n_2)}(t) = a_i^n \text{ si } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

$$\gamma_{j\Delta t}^{(n_1)}(t) = b_j^n \text{ si } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

on obtient alors un schéma du type (2-24) soit:

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^n (M^{n-p} A^p + \tilde{N}^{n-p} B^p) = S^n, n \geq n_1 - 1 \\ \sum_{p=0}^n (\tilde{M}^{n-p} A^p + N^{n-p} B^p) = \tilde{S}^n, n \geq n_2 \end{cases}$$

Si l'on veut conserver la propriété $\tilde{N}_{ij}^p = \tilde{M}_{ji}^p$ pour $i \in \{1, \dots, N_h^1\}$ et $j \in \{1, \dots, N_h^2\}$, donc avoir un schéma de la forme (2-26) avec des matrices Q^p symétriques, il nous faut prendre $n_1 = n_2 + 1$. Alors on obtient le schéma voulu:

$$\sum_{p=0}^n Q^{n-p} A B^p = S M^n, \quad n \geq n_2 = n_1 - 1$$

Comme dans le cas du problème de Dirichlet, traité précédemment, on peut énoncer des théorèmes de stabilité et de convergence pour la surface exacte.

THEOREME 2-7: Si $(\partial_n u_{h\Delta t}^i, u_{h\Delta t}^i)$ est une approximation consistante de $(\partial_n u^i, u^i)$ dans $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma))$, la solution $J_{h\Delta t} = (\varphi_{h\Delta t}, p_{h\Delta t})$ du problème discrétisé:

$$b((\varphi_{h\Delta t}, p_{h\Delta t}), (\psi, q)) = -2 \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma (\partial_n u_{h\Delta t}^i \cdot \partial_t \psi + \partial_t u_{h\Delta t}^i \cdot q) d\gamma dt$$

$$\forall (\psi, q) \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \tilde{V}_h) \times \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \tilde{W}_h)$$

vérifie:

$$(2-27) \quad |J_{h\Delta t}|_{\sigma, 0, H} \leq C_{\text{ste}}, \quad h, \Delta t \rightarrow 0$$

Remarque

On rappelle que l'espace H est $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ et est muni de la norme $\|\cdot\|_H$.

Preuve

L'inégalité (2-27) provient de:

$$|J_{h\Delta t}|_{\sigma, 0, H} \leq C_\sigma (|\partial_n u_{h\Delta t}^i|_{\sigma, 1, -1/2} + |u_{h\Delta t}^i|_{\sigma, 1, 0})$$

C'est une conséquence de la propriété de coercivité de la forme bilinéaire b :

$$b(J_{h\Delta t}, J_{h\Delta t}) \geq C_\sigma |J_{h\Delta t}|_{\sigma, 0, H}^2$$

et de la continuité du second membre du problème discrétisé:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma (\partial_n u_{h\Delta t}^i \cdot \partial_t \varphi_{h\Delta t} + \partial_t u_{h\Delta t}^i \cdot p_{h\Delta t}) d\gamma dt &\leq C |\partial_n u_{h\Delta t}^i|_{\sigma, 1, -1/2} |\varphi_{h\Delta t}|_{\sigma, 0, 1/2} \\ &+ |u_{h\Delta t}^i|_{\sigma, 1, 0} |p_{h\Delta t}|_{\sigma, 0, 0} \end{aligned}$$



THEOREME 2-8: Si la solution (φ, p) du système intégro-différentiel est suffisamment régulière :

$$p \in \mathcal{X}_\sigma^2(\mathbb{R}^+, H^{m_1+1}(\Gamma)) \cap \mathcal{X}_\sigma^{m_2+1}(\mathbb{R}^+, L^2(\Gamma))$$

alors on a:

$$\begin{aligned} |p - p_{h\Delta t}|_{\sigma,0,0} + |\varphi - \varphi_{h\Delta t}|_{\sigma,0,1/2} \leq C \{ & |c^i - c_{h\Delta t}^i|_{\sigma,1,H'} + \Delta t^{n_1-2} |\varphi|_{\sigma,n_1+1,1/2} \\ & + \frac{h^{m_1+1/2}}{\Delta t} |\varphi|_{\sigma,5/2,m_1+1} + \frac{h^{m_2+1}}{\Delta t} |p|_{\sigma,2,m_2+1} + \Delta t^{n_2-3/2} |p|_{\sigma,n_2+1,0} \} \end{aligned}$$

où $c^i = (\partial_n u^i, u^i)$, $c_{h\Delta t}^i = (\partial_n u_{h\Delta t}^i, u_{h\Delta t}^i)$ et l'espace H est $H^{-1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.

Preuve

On écrit la relation de coercivité appliquée à $J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \tilde{V}_h) \times \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \tilde{W}_h)$:

$$b(J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}, J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}) \geq C_\sigma |J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}|_{\sigma,0,H}^2$$

Or $J_{h\Delta t}$ et J sont solutions du problème discrétisé et du problème exact respectivement donc:

$$\begin{aligned} b(J_{h\Delta t} - J, J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}) = -2 \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \{ & (\partial_n u_{h\Delta t}^i - \partial_n u^i) \cdot (\partial_t \varphi_{h\Delta t} - \partial_t \psi_{h\Delta t}) \\ & + (\partial_t u_{h\Delta t}^i - \partial_t u^i) \cdot (p_{h\Delta t} - q_{h\Delta t}) \} d\gamma dt \end{aligned}$$

où on a posé $V_{h\Delta t} = (\psi_{h\Delta t}, q_{h\Delta t})$. L'expression ci-dessus est bornée par:

$$\begin{aligned} |J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}|_{\sigma,0,H} (|\partial_n u_{h\Delta t}^i - \partial_n u^i|_{\sigma,1,-1/2} + |\partial_t u_{h\Delta t}^i - \partial_t u^i|_{\sigma,1,0}) \\ \leq C |J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}|_{\sigma,0,H} |c^i - c_{h\Delta t}^i|_{\sigma,1,H'} \end{aligned}$$

D'autre part, la continuité de b implique que:

$$\begin{aligned} b(J - V_{h\Delta t}, J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}) \leq C_\sigma [|p_{h\Delta t} - q_{h\Delta t}|_{\sigma,0,0} (|\varphi - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma,5/2,1/2} + |p - q_{h\Delta t}|_{\sigma,2,0}) \\ + |\varphi_{h\Delta t} - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma,1,1/2} (|\varphi - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma,2,1/2} + |p - q_{h\Delta t}|_{\sigma,3/2,0})] \end{aligned}$$

soit en utilisant les propriétés des espaces $\mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \tilde{V}_h)$ (proposition 2) décrites dans le paragraphe préliminaires:

$$\begin{aligned} b(J - V_{h\Delta t}, J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}) \leq C_\sigma |J_{h\Delta t} - V_{h\Delta t}|_{\sigma,0,H} (|\varphi - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma,5/2,1/2} + |p - q_{h\Delta t}|_{\sigma,2,0} \\ + \frac{1}{\Delta t} |\varphi - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma,2,1/2} + \frac{1}{\Delta t} |p - q_{h\Delta t}|_{\sigma,3/2,0}) \end{aligned}$$

Il faut donc majorer les quantités:

$$|p - q_{h\Delta t}|_{\sigma,s,0}, s=2 \text{ ou } 3/2 \text{ et } |\varphi - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma,s,1/2}, s=5/2 \text{ ou } 2$$

On écrit:

$$|p - q_{h\Delta t}|_{\sigma, s, 0} \leq |p - q_h|_{\sigma, s, 0} + |q_h - q_{h\Delta t}|_{\sigma, s, 0}, \quad \forall q_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \tilde{W}_h)$$

$$|\varphi - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma, s, 1/2} \leq |\varphi - \psi_h|_{\sigma, s, 1/2} + |\psi_h - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma, s, 1/2}, \quad \forall \psi_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \tilde{V}_h)$$

avec $q_h = \tilde{s}_h p$, $\psi_h = s_h \varphi$ où s_h et \tilde{s}_h sont les opérateurs de projection orthogonale de $L^2(\Gamma)$ sur \tilde{V}_h et \tilde{W}_h respectivement. Alors on a les inégalités suivantes:

$$|p - q_h|_{\sigma, s, 0} \leq C h^{m_2+1} |p|_{\sigma, s, m_2+1}$$

$$|\varphi - \psi_h|_{\sigma, s, 1/2} \leq C h^{m_1+1/2} |\varphi|_{\sigma, s, m_1+1}$$

Maintenant on choisit $q_{h\Delta t} = r_{\Delta t} q_h$ et $\psi_{h\Delta t} = r_{\Delta t} \psi_h$, $r_{\Delta t}$ étant l'opérateur d'interpolation défini en (7). La proposition 3 donne:

$$|q_h - q_{h\Delta t}|_{\sigma, s, 0} \leq C \Delta t^{n_2+1-s} |p|_{\sigma, n_2+1, 0}$$

$$|\psi_h - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma, s, 1/2} \leq C \Delta t^{n_1+1-s} |\varphi|_{\sigma, n_1+1, 1/2}$$

Finalement, on obtient:

$$\inf_{\psi_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_1}(\Delta t, \tilde{V}_h)} \{ |\varphi - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma, s, 1/2} + \frac{1}{\Delta t} |\varphi - \psi_{h\Delta t}|_{\sigma, 2, 1/2} \} + \inf_{q_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{n_2}(\Delta t, \tilde{W}_h)} \{ |p - q_{h\Delta t}|_{\sigma, 2, 0} + \frac{1}{\Delta t} |p - q_{h\Delta t}|_{\sigma, 3/2, 0} \}$$

$$\leq C \Delta t^{n_1-2} |\varphi|_{\sigma, n_1+1, 1/2} + \frac{h^{m_1+1/2}}{\Delta t} |\varphi|_{\sigma, s, m_1+1} + \frac{h^{m_2+1}}{\Delta t} |p|_{\sigma, 2, m_2+1} + \Delta t^{n_2-3/2} |p|_{\sigma, n_2+1, 0}$$

ce qui permet de conclure à la convergence des schémas pour

$$n_1 > 2, \quad n_2 \geq 2, \quad m_1 \geq 1, \quad m_2 \geq 1$$



Equations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell en dimension 3+1

On applique la méthode des équations intégrales espace-temps au problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle borné parfaitement conducteur. Le champ diffracté (E, H) vérifie les équations:

$$(P_+) \quad \begin{cases} -\partial_t E + \text{rot } H = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \partial_t H + \text{rot } E = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \text{div } E = \text{div } H = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \vec{n} \wedge E = c, & \text{sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ E(t, x) = H(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_+ \end{cases}$$

où c est un courant donné par le champ incident sur Γ et \vec{n} est la normale à Γ extérieure à l'obstacle Ω_- . Comme pour le cas de l'équation des ondes, on construit une formulation variationnelle espace-temps ne contenant que le courant électrique et dont la forme bilinéaire est coercive sur des espaces \mathcal{H}_σ^s bien choisis. La discrétisation du problème variationnel par une méthode d'éléments finis en espace et en temps conduit à un schéma stable et convergent. Malheureusement, comme pour le problème de Dirichlet en dimension deux, ce schéma n'est pas constructif. On emploie la méthode de condensation décrite au chapitre I de cette partie pour obtenir un schéma constructif.

1- Espaces

Avant de développer la méthode d'équations intégrales, on rappelle quelques définitions d'espaces usuels, que nous allons utiliser par la suite.

1-1. Espaces $H(\text{div}, \Omega)$ et $H(\text{rot}, \Omega)$

Dans ce paragraphe, on se contentera d'énoncer des résultats dont on trouvera les démonstrations dans l'ouvrage de Dautray-Lions [8]. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 et u, v deux éléments de $L^2(\Omega)^3$ ou $L^2(\Omega)$. On désigne par $\|u\|$ la norme de u dans $L^2(\Omega)^3$ ou $L^2(\Omega)$ et par (u, v) le produit scalaire de u, v dans ces espaces.

Espace $H(\text{div}, \Omega)$

On définit :

$$H(\text{div}, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3, \text{div } v \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{\text{div}, \Omega} = (\|v\|^2 + \|\text{div } v\|^2)^{1/2}$$

L'espace $H(\text{div}, \Omega)$ est un espace de Hilbert.

Espace $H(\text{rot}, \Omega)$

On introduit de même:

$$H(\text{rot}, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3, \text{rot } v \in L^2(\Omega)^3\}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|v\|_{\text{rot}, \Omega} = (\|v\|^2 + \|\text{rot } v\|^2)^{1/2}$$

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω et $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

On fait maintenant les hypothèses :

(H1) Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 .

(H2) la frontière Γ de Ω est une variété indéfiniment différentiable de dimension 2, Ω étant localement d'un seul côté de Γ .

Alors on a le théorème de densité suivant:

THEOREME 1-1. *L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ est dense dans $H(\text{div}, \Omega)$ et dans $H(\text{rot}, \Omega)$*

Pour des références futures, on introduit les notations suivantes:

On définit l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ par:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \{ g \in L^2(\Gamma) / \exists v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = g \}$$

Lorsque $L^2(\Gamma)$ est identifié à son dual, $H^{-1/2}(\Gamma)$ est le dual de $H^{1/2}(\Gamma)$. Pour une autre définition de $H^{-1/2}(\Gamma)$ à l'aide de cartes locales définissant Γ , on renvoie à Lions-Magenes [20].

Soit \vec{n} la normale unitaire à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

THEOREME 1-2. *L'application trace γ_n définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ par :*

$$\gamma_n u = u \cdot \vec{n}$$

se prolonge en une application, encore notée γ_n , linéaire continue surjective de $H(\text{div}, \Omega)$ sur $H^{-1/2}(\Gamma)$. Le noyau de cette application est l'espace $H_0(\text{div}, \Omega)$, fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ dans $H(\text{div}, \Omega)$ soit:

$$H_0(\text{div}, \Omega) = \{ v \in H(\text{div}, \Omega), \gamma_n v = 0 \}$$

THEOREME 1-3. *L'application trace γ_τ définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ par :*

$$\gamma_\tau u = \vec{n} \wedge u|_{\Gamma}$$

se prolonge en une application, encore notée γ_τ , linéaire continue de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)^3$. Le noyau de cette application est l'espace $H_0(\text{rot}, \Omega)$, fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ dans $H(\text{rot}, \Omega)$ soit

$$H_0(\text{rot}, \Omega) = \{ v \in H(\text{rot}, \Omega), \gamma_\tau v = 0 \}$$

Remarque

L'application γ_τ n'est pas une surjection de $H(\text{rot}, \Omega)$ sur $H^{-1/2}(\Gamma)^3$. On déterminera au paragraphe 3 l'image $\gamma_\tau(H(\text{rot}, \Omega))$. Comme conséquence de ces théorèmes, on peut généraliser les formules de Green à $H(\text{rot}, \Omega)$ et $H(\text{div}, \Omega)$:

$$(1-1) \quad (v, \text{grad } \varphi) + (\text{div } v, \varphi) = \langle \gamma_n v, \varphi \rangle_{\Gamma}$$

$$\forall v \in H(\text{div}, \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

$$(1-2) \quad (\text{rot } v, \varphi) - (v, \text{rot } \varphi) = \langle \gamma_\tau v, \varphi \rangle_{\Gamma}$$

$$\forall v \in H(\text{rot}, \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega)^3$$

où le crochet $\langle ., . \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)^3$ et $H^{1/2}(\Gamma)^3$ ou $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$.

1-2. Opérateurs différentiels sur Γ

On reprend les hypothèses (H1)-(H2) du paragraphe précédent. Soit un voisinage U de la surface Γ dans \mathbb{R}^3 . On note $\tilde{\varphi}$ un prolongement régulier sur U d'une fonction régulière φ définie sur Γ . De même, à un champ de vecteurs u tangents à Γ régulier, on associe un prolongement \tilde{u} sur U .

Rotationnel vecteur tangentiel et rotationnel scalaire superficiel

On appellera *rotationnel vecteur tangentiel* sur Γ le vecteur tangent:

$$(1-3) \quad \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \varphi(x) = \vec{n}(x) \wedge \text{grad } \tilde{\varphi}(x)$$

où $\vec{n}(x)$ est la normale unité à Γ au point x , orientée vers l'extérieur de Ω . L'opérateur grad désigne ici le gradient d'une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^3 . La définition (1-3) est indépendante du prolongement choisi.

Le *rotationnel scalaire superficiel* d'un champ de vecteurs u régulier tangents à Γ est donné par:

$$(1-4) \quad \text{rot}_{\Gamma} u(x) = \vec{n}(x) \cdot \text{rot } \tilde{u}(x)$$

où rot est le rotationnel vecteur d'un champ de vecteurs défini sur \mathbb{R}^3 . On voit qu'alors $\text{rot}_{\Gamma} u$ est indépendant du prolongement \tilde{u} choisi. En employant les formules de Green (1-1) et (1-2), on remarque que l'opérateur $\vec{\text{rot}}_{\Gamma}$ est l'adjoint de $-\text{rot}_{\Gamma}$ par rapport au produit scalaire $L^2(\Gamma)$ soit:

$$(1-5) \quad \int_{\Gamma} \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \varphi(x) \cdot u(x) d\gamma(x) = - \int_{\Gamma} \varphi(x) \text{rot}_{\Gamma} u(x) d\gamma(x)$$

$$\forall u \in C^1(\Gamma)^3, u \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\Gamma)$$

On étend ces opérateurs différentiels à l'espace des distributions sur Γ , $\mathcal{D}'(\Gamma)$, en posant:

$$\bullet T \in \mathcal{D}'(\Gamma)$$

$$(1-6) \quad \langle \vec{rot}_\Gamma T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle T, rot_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)^3, \varphi \cdot \vec{n} = 0$$

$$\bullet \bullet T \in \mathcal{D}'(\Gamma)^3, T \cdot \vec{n} = 0$$

$$(1-7) \quad \langle rot_\Gamma T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle T, \vec{rot}_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$$

Opérateur de Laplace–Beltrami

L'opérateur de *Laplace–Beltrami* sur Γ d'une distribution T sur Γ est défini par:

$$(1-8) \quad \Delta_\Gamma T = rot_\Gamma \vec{rot}_\Gamma T$$

Divergence superficielle et gradient tangentiel

La *divergence superficielle* d'un champ de vecteurs T défini sur Γ est donnée par:

$$(1-9) \quad div_\Gamma T = - rot_\Gamma (T \wedge \vec{n})$$

où $T \in \mathcal{D}'(\Gamma)^3$

On définit le *gradient tangentiel* d'une distribution T définie sur Γ par dualité soit:

$$(1-10) \quad \langle grad_\Gamma T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle T, div_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)^3$$

Remarque

De la définition (1-9), on déduit que:

$$div_\Gamma T = - div_\Gamma (\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge T))$$

On voit facilement que $grad_\Gamma T$ est effectivement un champ de vecteurs tangent à Γ . En effet, soit Φ une fonction régulière définie sur Γ

$$\langle \vec{n} grad_\Gamma T, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = \langle grad_\Gamma T, \Phi \cdot \vec{n} \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle T, div_\Gamma (\Phi \cdot \vec{n}) \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

ce qui donne, d'après la remarque précédente:

$$\langle \vec{n} grad_\Gamma T, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = 0, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Gamma).$$

PROPOSITION 1-1. Soit φ une fonction régulière définie sur Γ . Le gradient tangentiel de φ est un champ de vecteurs régulier tangent à Γ :

$$(1-11) \quad \text{grad}_\Gamma \varphi(x) = -\vec{n}(x) \wedge (\vec{n}(x) \wedge \text{grad } \tilde{\varphi}(x)) \quad x \in \Gamma.$$

Cette définition de grad_Γ est indépendante du prolongement choisi.

Preuve

Soient φ une fonction régulière sur Γ , $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$, et Φ un champ de vecteurs tangent à Γ régulier, $\Phi \in \mathcal{D}(\Gamma)^3$. D'après la définition (1-10) on a:

$$\langle \text{grad}_\Gamma \varphi, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle \varphi, \text{div}_\Gamma \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

L'égalité (1-9) donne alors:

$$\langle \text{grad}_\Gamma \varphi, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = \langle \varphi, \text{rot}_\Gamma (\Phi \wedge \vec{n}) \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

L'opérateur rot_Γ étant le transposé formel de $-\vec{\text{rot}}_\Gamma$, on peut écrire:

$$\langle \text{grad}_\Gamma \varphi, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle \vec{\text{rot}}_\Gamma \varphi, \Phi \wedge \vec{n} \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

Or on a la relation:

$$\vec{\text{rot}}_\Gamma \varphi = \vec{n} \wedge \text{grad } \tilde{\varphi}$$

où $\tilde{\varphi}$ est un prolongement régulier sur U de φ donc:

$$\langle \text{grad}_\Gamma \varphi, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle \vec{n} \wedge \text{grad } \tilde{\varphi}, \Phi \wedge \vec{n} \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

$$\langle \text{grad}_\Gamma \varphi, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \text{grad } \tilde{\varphi}), \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$



PROPOSITION 1-2. L'opérateur div_Γ apparaît comme le transposé formel de l'opérateur $-\text{grad}_\Gamma$ au sens suivant:

$$(1-12) \quad \langle \text{div}_\Gamma T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = - \langle T, \text{grad}_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\Gamma)^3, T \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma).$$

Preuve

Par définition on a:

$$\langle \text{div}_\Gamma T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = \langle -\text{rot}_\Gamma (T \wedge \vec{n}), \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

soit d'après la relation (1-7) :

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = \langle T \wedge \vec{n}, \vec{\operatorname{rot}}_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} = \langle T, \vec{n} \wedge \vec{\operatorname{rot}}_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)}$$

Grâce à (1-3) et (1-11)

$$\vec{n} \wedge \vec{\operatorname{rot}}_\Gamma \varphi = -\operatorname{grad}_\Gamma \varphi$$

D'où le résultat de la proposition. 

1-3. Espaces de trace $H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ et $H^{-1/2}(\operatorname{rot}, \Gamma)$

On est prêt maintenant à introduire les espaces $H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ et $H^{-1/2}(\operatorname{rot}, \Gamma)$. On reprend les hypothèses (H1)-(H2) sur l'ouvert Ω de frontière Γ et on note Ω' l'ouvert extérieur $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

On introduit les espaces:

$$H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma) = \{ c \in H^{-1/2}(\Gamma)^3, c \cdot \vec{n} = 0, \operatorname{div}_\Gamma c \in H^{-1/2}(\Gamma) \}$$

$$H^{-1/2}(\operatorname{rot}, \Gamma) = \{ c \in H^{-1/2}(\Gamma)^3, c \cdot \vec{n} = 0, \operatorname{rot}_\Gamma c \in H^{-1/2}(\Gamma) \}$$

munis de leurs normes respectives:

$$\| c \|_{-1/2, \operatorname{div}} = (\| c \|_{-1/2, \Gamma}^2 + \| \operatorname{div}_\Gamma c \|_{-1/2, \Gamma}^2)^{1/2}$$

$$\| c \|_{-1/2, \operatorname{rot}} = (\| c \|_{-1/2, \Gamma}^2 + \| \operatorname{rot}_\Gamma c \|_{-1/2, \Gamma}^2)^{1/2}$$

où $\| \cdot \|_{-1/2, \Gamma}$ désigne la norme dans $H^{-1/2}(\Gamma)^3$ ou $H^{-1/2}(\Gamma)$. Les opérateurs sur la surface Γ sont définis par (3-4) et (3-8).

PROPOSITION 1-3. *L'application $c \rightarrow \vec{n} \wedge c$ définie sur l'espace des champs de vecteurs réguliers et tangents à Γ se prolonge en un isomorphisme de $H^{-1/2}(\operatorname{rot}, \Gamma)$ sur $H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ et de $H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ sur $H^{-1/2}(\operatorname{rot}, \Gamma)$.*

Preuve

A partir des égalités:

$$c = -\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge c)$$

$$\operatorname{div}_\Gamma (\vec{n} \wedge c) = -\operatorname{rot}_\Gamma c$$

on vérifie facilement que l'application est un isomorphisme. 

THEOREME 1-4 : Etant donné $v \in H^1(\Gamma)$, la forme linéaire L_v définie sur $H^1(\Gamma)$ par:

$$L_v : u \longmapsto L_v(u) = (u, v)_{L^2(\Gamma)}$$

se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ (resp. sur $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$). L'application $L : v \longmapsto L_v$ de $H^1(\Gamma)$ dans $(H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))'$ (resp. $(H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma))'$) se prolonge en une isométrie de $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ sur $(H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))'$ (resp. de $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ sur $(H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma))'$).

Preuve

On a repris la démonstration de [7] pour prouver cette propriété. On trouvera aussi dans [27] une autre preuve de cette dualité.

On remarque qu'on peut localiser et que la propriété se conserve par changement de cartes locales de classe \mathcal{C}^∞ , à inverse \mathcal{C}^∞ . Ainsi on se ramène au cas $\Gamma = \mathbb{R}^2$.

Soit la matrice M symétrique positive inversible, définie par:

$$M = (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 + \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1 \xi_2 & 1 + \xi_2^2 \end{bmatrix}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

On vérifie facilement que:

$$\|u\|_{-1/2, \text{div}} = C \left(\int_{\mathbb{R}^2} M \hat{u} \cdot \bar{\hat{u}} d\xi \right)^{1/2}$$

$$\|u\|_{-1/2, \text{rot}} = C \left(\int_{\mathbb{R}^2} \hat{u} \cdot M^{-1} \bar{\hat{u}} d\xi \right)^{1/2}$$

la constante C est égale à $1/2\pi$ et la notation \hat{u} désigne la transformée de Fourier de u soit :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x} u(x) dx$$

Ainsi on a les équivalences suivantes:

$$u \in H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \mathcal{S}_d u \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$v \in H^{-1/2}(\text{rot}, \mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \mathcal{S}_r v \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

où les applications \mathcal{S}_d et \mathcal{S}_r sont définies par:

$$\mathcal{S}_d u = C \times M^{1/2} \hat{u} \quad , \quad \mathcal{S}_r v = C \times M^{-1/2} \hat{v}$$

et sont des isométries de $H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2)$ et $H^{-1/2}(\text{rot}, \mathbb{R}^2)$, respectivement, sur $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Soit un champ de vecteurs v appartenant à $H^{-1/2}(\text{rot}, \mathbb{R}^2)$, on pose:

$$(1-13) \quad L_v(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{J}_d u(\xi) \cdot \overline{\mathcal{J}_r v(\xi)} d\xi, \quad \forall u \in H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2)$$

Alors L_v est une forme linéaire continue sur $H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2)$:

$$|L_v(u)| \leq \| \mathcal{J}_d u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \| \mathcal{J}_r v \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \| v \|_{-1/2, \text{rot}} \| u \|_{-1/2, \text{div}}$$

et sa norme vaut $\| v \|_{-1/2, \text{rot}}$:

$$(1-14) \quad \| L_v \|_d = \| v \|_{-1/2, \text{rot}}$$

où $\| \cdot \|_d$ est la norme sur $(H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2))'$ définie par :

$$\| L_v \|_d = \sup \{ \| u \|_{-1/2, \text{div}} = 1, |L_v(u)| \} = \sup \{ \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, |(\mathcal{J}_r v, f)_{L^2(\mathbb{R}^2)}| \}$$

On en déduit que l'application $v \longmapsto L_v$ est une isométrie de $H^{-1/2}(\text{rot}, \mathbb{R}^2)$ dans $(H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2))'$.

Soit maintenant L une forme linéaire continue sur $H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2)$ alors $L \circ \mathcal{J}_d^{-1}$ est une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. D'où il existe un unique f dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$(1-15) \quad L \circ \mathcal{J}_d^{-1}(g) = (f, g)_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

Puisque \mathcal{J}_r est une isométrie de $H^{-1/2}(\text{rot}, \mathbb{R}^2)$ sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe un élément v de $H^{-1/2}(\text{rot}, \mathbb{R}^2)$ tel que $f = \mathcal{J}_r v$ donc (1-15) se réécrit :


$$L \circ \mathcal{J}_d^{-1}(g) = (\mathcal{J}_r v, g)_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

De même \mathcal{J}_d^{-1} étant aussi une isométrie, on peut trouver pour tout g de $L^2(\mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs $u = \mathcal{J}_d^{-1} g \in H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2)$, d'où:

$$L(u) = (\mathcal{J}_r v, \mathcal{J}_d u)_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall u \in H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2)$$

c'est-à-dire, d'après (1-13) :

$$(1-16) \quad L(u) = L_v(u)$$

ce qui permet de conclure que $v \longmapsto L_v$ est une isométrie de $H^{-1/2}(\text{rot}, \mathbb{R}^2)$ sur $(H^{-1/2}(\text{div}, \mathbb{R}^2))'$. 

La dualité des espaces $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ permet de donner un sens à la formule de Green :

$$(1-17) \quad (\text{rot } v, u) - (v, \text{rot } u) = \langle n \wedge v|_{\Gamma}, -n \wedge (n \wedge u)|_{\Gamma} \rangle$$

pour tout u et tout v élément de $H(\text{rot}, \Omega)$, le crochet \langle, \rangle désignant alors la dualité entre $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ et $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$.

THEOREME 1-5 : Les applications trace :

$$u \rightarrow n \wedge u|_{\Gamma}$$

et

$$u \rightarrow -n \wedge (n \wedge u)|_{\Gamma}$$

sont linéaires continues surjectives de $H(\text{rot}, \Omega)$ sur $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ et $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ respectivement.

Preuve

Les propriétés de l'application trace $u \rightarrow n \wedge (n \wedge u)|_{\Gamma}$ se déduisent par la proposition 1-3 de celles de l'application $\gamma_{\tau} : u \rightarrow n \wedge u|_{\Gamma}$ et réciproquement.

On sait, d'après le théorème de trace (1-3), que l'application γ_{τ} est linéaire continue de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)^3$. Il reste donc à montrer la surjectivité.

Soit $u \in H(\text{rot}, \Omega)$ alors $v = \text{rot } u$ est dans $H(\text{div}, \Omega)$. La trace $n \cdot v|_{\Gamma}$ existe donc dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Or on a :

$$n \cdot v|_{\Gamma} = n \cdot (\text{rot } u)|_{\Gamma} = \text{rot}_{\Gamma}(u|_{\Gamma}) = -\text{div}_{\Gamma}(n \wedge u|_{\Gamma})$$

d'où $n \wedge u|_{\Gamma}$ est dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$.

On se ramène maintenant par cartes locales au cas où $\Omega = \mathbb{R}_+^3$. Soit $c = (c_1, c_2)$ un élément de $H^{-1/2}(\text{rot}, \mathbb{R}^2)$ c'est-à-dire vérifiant :

$$c_1, c_2, \frac{\partial c_1}{\partial x_2} - \frac{\partial c_2}{\partial x_1} \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^2).$$

On va montrer qu'il existe un champ de vecteurs $u = (u_1, u_2, u_3)$ élément de $H(\text{rot}, \mathbb{R}_+^3)$ tel que :

$$u_{1/x_3=0} = c_1, \quad u_{2/x_3=0} = c_2$$

On utilise alors la transformation de Fourier partielle par rapport à $x' = (x_1, x_2)$ donnée par :

$$\hat{u}(y, x_3) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy \cdot x'} u(x', x_3) dx'$$

Soit Φ une fonction régulière à support compact dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ telle que $\Phi(0) = 1$. On définit $\hat{u}_j(\cdot, x_3)$ pour $j=1, 2$ par :

$$\hat{u}_j(y, x_3) = \hat{c}_j(y) \Phi((1+|y|^2)^{1/2} x_3)$$

et $\hat{u}_3(\cdot, x_3)$ par :

$$\hat{u}_3(y, x_3) = \frac{1}{(1+|y|^2)^{1/2}} (y_1 \hat{c}_1(y) + y_2 \hat{c}_2(y)) \Phi'((1+|y|^2)^{1/2} x_3)$$

De manière évidente $u_j|_{x_3=0} = c_j$ car $\hat{u}_j|_{x_3=0} = \hat{c}_j$. Par ailleurs, on a :

$$\|\hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)} = K \|(1+|y|^2)^{-1/2} \hat{c}_j(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

où :

$$K = \int_{\mathbb{R}_+} |\Phi(\lambda)|^2 d\lambda$$

et :

$$|\hat{u}_3| \leq (|\hat{c}_1(y) \Phi'((1+|y|^2)^{1/2} x_3) + \hat{c}_2(y) \Phi'((1+|y|^2)^{1/2} x_3)|)$$

donc $u_1, u_2, u_3 \in L^2(\mathbb{R}_+^3)$. D'autre part :

$$y_1 \hat{u}_1 - y_2 \hat{u}_2 = (y_1 \hat{c}_1 + y_2 \hat{c}_2) \Phi((1+|y|^2)^{1/2} x_3)$$

et puisque $\text{rot } c \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$, on voit que :

$$y_1 \hat{u}_1 - y_2 \hat{u}_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^3)$$

soit :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \in L^2(\mathbb{R}_+^3)$$

De plus :

$$y_1 \hat{u}_3 - \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3} = \frac{1}{(1+|y|^2)^{1/2}} (-\hat{c}_1 + y_2(y_1 \hat{c}_2 - y_2 \hat{c}_1)) \Phi'((1+|y|^2)^{1/2} x_3)$$

ce qui entraîne que :

$$|y_1 \hat{u}_3 - \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3}| \leq |\hat{c}_1| |\Phi'((1+|y|^2)^{1/2} x_3)| + |y_1 \hat{c}_2 - y_2 \hat{c}_1| |\Phi'((1+|y|^2)^{1/2} x_3)|$$

Ainsi :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \in L^2(\mathbb{R}_+^3)$$

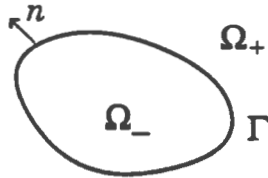
Et finalement $u \in H(\text{rot}, \mathbb{R}_+^3)$.

Le théorème 1-5 est encore vrai pour le domaine extérieur Ω' .

2-Le problème en fréquence

Le but de cette partie est d'étudier les problèmes aux limites extérieur et intérieur en régime harmonique :

$$(E, H) \in H(\text{rot}, \Omega_{\pm}) \times H(\text{rot}, \Omega_{\pm})$$



$$(P_{\pm}^{\omega}) \begin{cases} i\omega E + \text{rot} H = 0 & \text{dans } \Omega_{\pm} \\ -i\omega H + \text{rot} E = 0 & \text{dans } \Omega_{\pm} \\ \vec{n} \wedge E = c & \text{sur } \Gamma \text{ où } c \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

pour une fréquence complexe ω dans le demi-plan $\{ \text{Im } \omega > 0 \}$. Dans ce cas la condition $(E, H) \in H(\text{rot}, \Omega_{\pm}) \times H(\text{rot}, \Omega_{\pm})$ du problème en domaine extérieur remplace la condition de rayonnement à l'infini. On sait que les problèmes (P_{\pm}^{ω}) admettent une unique solution. On s'intéresse à la dépendance de (E, H) et des traces de $\vec{n} \wedge H$ par rapport à ω afin d'estimer la régularité en temps de la solution du problème d'évolution.

2-1-Résultats d'existence et d'unicité

On établit d'abord un lemme de relèvement qui permet de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à chacun des problèmes (P_{\pm}^{ω}) . On introduit l'espace :

$$H(\text{rot}, \text{div } 0, \Omega) = \{ u \in H(\text{rot}, \Omega), \text{div } u = 0 \}$$

où Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^3 , borné ou de complémentaire borné.

LEMME 2-1. *Pour tout champ de vecteurs $c \in H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ et pour tout $\omega \in \{ \text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0 \}$, il existe un relèvement $v(\omega)$ dans $H(\text{rot}, \text{div } 0, \Omega)$ tel que :*

$$\vec{n} \wedge v(\omega)|_{\Gamma} = c$$

et :

$$(2-1) \quad \int_{\Omega} (|\text{rot } v|^2 + |\omega v|^2) dx \leq C |\omega|^2 \max\left(1, \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \|\vec{n} \wedge c\|_{-1/2, \text{rot}}^2$$

où C ne dépend que de la géométrie de Γ .

Preuve

On va montrer que le problème aux limites

$$(P) \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} u + |\omega|^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{n} \wedge u = c & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où c est donné dans $H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$, admet une unique solution dans $H(\operatorname{rot}, \operatorname{div} 0, \Omega)$. Comme c est dans $H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$, d'après le théorème de trace (1-5) il existe un élément u_0 de $H(\operatorname{rot}, \Omega)$ dont la trace $\gamma_\tau u_0$ est le champ de vecteurs c soit :

$$\vec{n} \wedge u_0 = c \quad \text{sur } \Gamma$$

On pose :

$$v = u - u_0$$

alors v vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} v + |\omega|^2 v = f & \text{dans } \Omega \\ \vec{n} \wedge v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec :

$$f = -|\omega|^2 u_0 - \operatorname{rot} \operatorname{rot} u_0$$

ce qui équivaut à chercher v dans $H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$, solution du problème variationnel

$$(2-2) \quad \forall w \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega), \quad a(v, w) = -a(u_0, w)$$

où la forme hermitienne $a(\cdot, \cdot)$ est définie par :

$$a(v, w) = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} v \cdot \operatorname{rot} \bar{w} + |\omega|^2 v \cdot \bar{w}) dx$$

La quantité

$$\|v\|_{\Omega, \omega} = \left\{ \int_{\Omega} (|\operatorname{rot} v|^2 + |\omega v|^2) dx \right\}^{1/2}$$

étant une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H(\operatorname{rot}, \Omega)}$ pour $\omega \neq 0$, il est clair que la forme sesquilinéaire a est continue sur $H_0(\operatorname{rot}, \Omega) \times H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ et $H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ - coercive. Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (2-2). D'où en posant :

$$u = v + u_0$$

l'existence d'une solution du problème (P).

Pour démontrer l'unicité, il suffit de montrer que le problème homogène (soit avec c nul) ne possède que la solution triviale.

Soit u dans $H(\text{rot}, \text{div}0, \Omega)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \text{rot rot } u + |\omega|^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{n} \wedge u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Si l'on note $w = \text{rot } u$, w est un élément de $H(\text{rot}, \Omega)$. En appliquant la formule de Green à w et u :

$$\int_{\Omega} \text{rot } w \cdot \bar{u} \, dx = \int_{\Omega} w \cdot \text{rot } \bar{u} \, dx$$

on trouve que :

$$\int_{\Omega} (|\text{rot } u|^2 + |\omega u|^2) \, dx = 0$$

ce qui donne, puisque $|\omega| \neq 0$:

$$u = 0.$$

Pour établir l'estimation (2-1), on utilise à nouveau la formule de Green (1-17). On obtient :

$$\|u\|_{\Omega, \omega}^2 = \langle \vec{n} \wedge \text{rot } u|_{\Gamma}, u|_{\Gamma} \rangle$$

où le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$.

Or :

$$u|_{\Gamma} = (u|_{\Gamma} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \vec{n} \wedge c$$

donc :

$$\langle \vec{n} \wedge \text{rot } u|_{\Gamma}, u|_{\Gamma} \rangle = - \langle \vec{n} \wedge \text{rot } u|_{\Gamma}, \vec{n} \wedge c \rangle.$$

Le théorème de trace (1-5) et l'inégalité

$$\|\text{rot } u\|_{H(\text{rot}, \Omega)}^2 \leq |\omega|^2 \max\left(1, \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \|u\|_{\Omega, \omega}^2$$

permettent de conclure à (2-1). ~~✶~~

PROPOSITION 2-1: *Si le champ de vecteurs c est dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, le problème (P_+^{ω}) (resp. (P_-^{ω})) admet une unique solution (E, H) dans $H(\text{rot}, \Omega_+) \times H(\text{rot}, \Omega_+)$ (resp. dans $H(\text{rot}, \Omega_-) \times H(\text{rot}, \Omega_-)$) pour tout ω tel que $\text{Im } \omega > 0$. De plus E vérifie :*

$$(2-3) \quad \|E\|_{\Omega_{\pm}, \omega} \leq C \frac{1}{\sigma_0} |\omega|^2 \max\left(1, \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \|\vec{n} \wedge c\|_{-1/2, \text{rot}}$$

pour tout $\omega \in \{\text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0\}$.

Preuve

Soit u le relèvement de c déterminé par le lemme 2-1, c'est-à-dire solution de :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} u + |\omega|^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \vec{n} \wedge u = c & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En posant $\tilde{E} = E - u$

$$(2-4) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{E} - \omega^2 \tilde{E} = (|\omega|^2 + \omega^2) u & \text{dans } \Omega_+ \\ \vec{n} \wedge \tilde{E} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

qui est équivalent au problème variationnel : trouver \tilde{E} dans $H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que

$$b(\tilde{E}, v) = \int_{\Omega_+} f \cdot \bar{v} dx, \quad \forall v \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega_+)$$

où la forme sesquilinéaire b est définie par :

$$b(v, w) = \int_{\Omega_+} (-\operatorname{rot} v \cdot \operatorname{rot} \bar{w} + \omega^2 v \cdot \bar{w}) dx, \quad \forall v, w \in H(\operatorname{rot}, \Omega_+)$$

et :

$$f = -(|\omega|^2 + \omega^2) u.$$

La continuité de la forme b sur $H_0(\operatorname{rot}, \Omega_+) \times H_0(\operatorname{rot}, \Omega_+)$ est évidente : il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Quant à la coercivité, elle provient de l'égalité :

$$\sigma \int_{\Omega_+} (|\operatorname{rot} w|^2 + |\omega w|^2) dx = \operatorname{Im}(\bar{\omega} b(w, w)) \quad \text{où } \sigma = \operatorname{Im} \omega.$$

Donc :

$$|b(w, w)| \geq \frac{\sigma}{|\omega|} \|w\|_{\Omega_+, \omega}^2.$$

Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure à l'existence et l'unicité d'une solution \tilde{E} dans $H_0(\operatorname{rot}, \Omega_+)$ du problème (2-4). On a ainsi construit une solution $E = \tilde{E} + u$ du problème :

$$(2-5) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E - \omega^2 E = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \vec{n} \wedge E = c & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

L'unicité dans l'espace $H(\operatorname{rot}, \Omega_+)$ se déduit facilement de la coercivité de b .

Comme E est dans $H(\operatorname{rot}, \operatorname{div} 0, \Omega_+)$, si H est défini par :

$$(2-6) \quad H = \frac{1}{i\omega} \operatorname{rot} E$$

et vérifie :

$$H \in L^2(\Omega_+), \operatorname{rot} H \in L^2(\Omega_+)^3 \text{ et } \operatorname{div} H = 0.$$

On vérifie facilement que le problème (P_+^ω) est équivalent à trouver E vérifiant (2-5) et H donné par (2-6). On établit l'estimation sur E en remarquant que :

$$b(E, v) = 0, \quad \forall v \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega_+)$$

d'où en prenant $v = E - u$, on trouve :

$$b(E, E) = b(E, u).$$

Grâce à la continuité et la coercivité de b , on peut écrire :

$$\frac{\sigma}{|\omega|} \|E\|_{\Omega_+, \omega} \leq \|u\|_{\Omega_+, \omega}.$$

D'où en tenant compte de (2-1) on obtient :

$$\|E\|_{\Omega_+, \omega} \leq C \frac{1}{\sigma} |\omega|^2 \max\left(1, \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \|\vec{n} \wedge c\|_{-1/2, \operatorname{rot}}$$

On procède de façon similaire pour (P_-^ω) .

2-2- Représentation intégrale de la solution

On définit $(E(x), H(x))$ sur tout l'espace \mathbb{R}^3 par :

$$(E(x), H(x)) = \begin{cases} (E_+(x), H_+(x)) & \text{si } x \in \Omega_+ \\ (E_-(x), H_-(x)) & \text{si } x \in \Omega_- \end{cases}$$

où (E_+, H_+) et (E_-, H_-) sont les solutions dans $H(\operatorname{rot}, \Omega_+)^2$ et $H(\operatorname{rot}, \Omega_-)^2$ de (P_+^ω) et (P_-^ω) respectivement.

Alors (E, H) vérifie au sens des distributions sur \mathbb{R}^3 :

$$\begin{array}{l} (2-7) \\ (2-8) \\ (2-9) \\ (2-10) \end{array} \quad \begin{cases} i\omega E + \operatorname{rot} H = j \delta_\Gamma \\ -i\omega H + \operatorname{rot} E = 0 \\ \operatorname{div} E = q \delta_\Gamma \\ \operatorname{div} H = 0 \end{cases}$$

où j et q sont respectivement le saut de $-\vec{n} \wedge H$ et $-\vec{n} \cdot E$ à travers Γ :

$$j = -[\vec{n} \wedge H] = \vec{n} \wedge H_{+\Gamma} - \vec{n} \wedge H_{-\Gamma}.$$

$$q = -[\vec{n} \cdot E] = \vec{n} \cdot E_{+\Gamma} - \vec{n} \cdot E_{-\Gamma}.$$

et δ_Γ est la distribution de simple couche de densité 1 portée par Γ . En éliminant le champ magnétique H entre (2-7) et (2-8), on voit que le champ E vérifie l'équation d'Helmholtz vectorielle:

$$(2-11) \quad (\Delta + \omega^2)E = -i\omega j\delta_\Gamma + \text{grad}(q\delta_\Gamma)$$

et en procédant de même pour E , le champ H est solution de:

$$(2-12) \quad (\Delta + \omega^2)H = -\text{rot}(j\delta_\Gamma).$$

Les courants et les charges induits sur Γ , j et q , sont reliés par l'équation de conservation de la charge:

$$(2-13) \quad i\omega q = \text{div}_\Gamma j.$$

Ceci est une conséquence de (2-7) et (2-9).

Si on note Φ la solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz scalaire:

$$\Phi(x) = \frac{e^{i\omega|x|}}{4\pi|x|}$$

alors la solution (E, H) de (2-7) – (2-10) s'écrit:

$$E = i\omega\Phi * j\delta_\Gamma - \text{grad}_\Gamma(\Phi * q\delta_\Gamma)$$

$$H = \text{rot}(\Phi * j\delta_\Gamma).$$

Pour des densités j et q régulières sur Γ , on introduit les potentiels:

$$L_\omega j(x) = \int_\Gamma \Phi(x-y)j(y)d\gamma(y), \quad x \in \mathbb{R}^3/\Gamma,$$

$$N_\omega q(x) = \text{grad}(L_\omega q)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3/\Gamma$$

$$N_\omega q(x) = \int_\Gamma \text{grad}\Phi(x-y)q(y)d\gamma(y), \quad x \in \mathbb{R}^3/\Gamma.$$

Ainsi si j et q sont régulières sur Γ , E s'écrit:

$$(2-14) \quad E = i\omega L_\omega j - N_\omega q.$$

Il est bien connu [8] que le potentiel de simple couche $L_\omega f$ de densité f régulière est solution de l'équation d'Helmholtz homogène dans Ω_+ et Ω_- et les traces de ce potentiel sur Γ sont définies par:

$$(L_\omega f)_+(x) = (L_\omega f)_-(x) = \int_\Gamma \Phi(x-y)f(y)d\gamma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$\left(\frac{\partial L_\omega f}{\partial n}\right)_+(x) = -\frac{f(x)}{2} + \int_\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial n_x}(x-y)f(y)d\gamma(y), \quad x \in \Gamma$$

$$\left(\frac{\partial L_\omega f}{\partial n}\right)_-(x) = \frac{f(x)}{2} + \int_\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial n_x}(x-y)f(y)d\gamma(y), \quad x \in \Gamma.$$

On pose:

$$S_{\omega} f(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x-y) f(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma.$$

Les propriétés de $N_{\omega} q$ se déduisent aussitôt des propriétés précédentes. En particulier, on remarque que:

$$[\vec{n} \wedge N_{\omega} q] = 0$$

et comme on a, d'après (1-11):

$$-\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \text{grad}(L_{\omega} q))_{/\Gamma} = \text{grad}_{\Gamma} S_{\omega} q$$

on en déduit que:

$$\vec{n} \wedge (N_{\omega} q)_{+/\Gamma} = \vec{n} \wedge (N_{\omega} q)_{-/\Gamma} = \vec{n} \wedge \text{grad}_{\Gamma} S_{\omega} q$$

On exprime la condition sur le bord:

$$\vec{n} \wedge E_{-/\Gamma} = \vec{n} \wedge E_{+/\Gamma} = c$$

pour le champ électrique donné par (2-14) par l'équation intégrale:

$$(2-15) \quad c = i\omega (\vec{n} \wedge S_{\omega} f - \frac{1}{i\omega} \text{grad}_{\Gamma} S_{\omega} q)$$

où j et q vérifient l'équation de continuité (2-13).

Le problème est donc de calculer j et q , c étant donné. On choisit comme inconnue p définie par:

$$p = i\omega j$$

et on introduit l'opérateur intégral R_{ω}

$$(2-16) \quad R_{\omega} p = \pi_{\Gamma} S_{\omega} p + \frac{1}{\omega^2} \text{grad}_{\Gamma} S_{\omega} \text{div}_{\Gamma} p.$$

On a noté $\pi_{\Gamma} S_{\omega} p$ la projection orthogonale de $S_{\omega} p$ sur le plan tangent à Γ , soit pour tout champ de vecteurs a défini sur Γ

$$\pi_{\Gamma} a = -\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge a).$$

L'équation (2-14) devient alors:

$$(2-17) \quad \vec{c} = R_{\omega} p$$

où on a pris $\vec{c} = -\vec{n} \wedge c$. On va montrer que R_{ω} se prolonge en un opérateur de $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$.

2-3. Formulation variationnelle

La proposition (2-1) permet de définir l'opérateur R'_ω qui à \tilde{c} dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ associe le saut $-\vec{n} \wedge \text{rot } E$ dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ où (E, H) est solution des problèmes (P_+^ω) et (P_-^ω) avec la donnée sur le bord:

$$\pi_\Gamma(E|_\Gamma) = \tilde{c}.$$

On a donc:

$$(2-18) \quad R'_\omega \tilde{c} = -[\vec{n} \wedge \text{rot } E].$$

PROPOSITION 2-1: Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0$, l'opérateur R'_ω est un isomorphisme de $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, vérifiant l'inégalité de continuité:

$$(2-19) \quad |R'_\omega b| \leq C \frac{|\omega|^3}{\sigma_0} \max(1, \frac{1}{\sigma_0}) \|b\|_{-1/2, \text{rot}}, \quad \forall b \in H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$$

et la relation de coercivité suivante:

$$(2-20) \quad \Re e \langle R'_\omega b, -i \omega b \rangle \geq C \sigma_0 \min(\sigma_0^2, 1) \|b\|_{-1/2, \text{rot}}^2, \quad \forall b \in H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma).$$

Preuve

Vérifions d'abord les inégalités (2-19) et (2-20). Soient b dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ et c dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ tel que $-\vec{n} \wedge c = b$. Etant donné (E, H) la solution de (P_+^ω) et (P_-^ω) de donnée c sur le bord, la formule de Green (1-17) entraîne que, pour tout c' dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$, on a:

$$(2-21) \quad \langle \vec{n} \wedge \text{rot } E_{-/\Gamma}, c' \rangle = - \int_{\Omega_-} (\text{rot } E \cdot \text{rot } \bar{u}_- - \omega^2 E \cdot \bar{u}_-) dx$$

$$(2-22) \quad \langle \vec{n} \wedge \text{rot } E_{+/\Gamma}, c' \rangle = - \int_{\Omega_+} (\text{rot } E \cdot \text{rot } \bar{u}_+ - \omega^2 E \cdot \bar{u}_+) dx$$

u_+ et u_- étant respectivement des relèvements de c' dans $H(\text{rot}, \Omega_+)$ et $H(\text{rot}, \Omega_-)$. Si on choisit u_+ relevant $\vec{n} \wedge c'$ comme dans la preuve du lemme 2-1, c' est-à-dire vérifiant l'estimation (2-1) alors on a:

$$(2-23) \quad \|\vec{n} \wedge \text{rot } E_+\|_{-1/2, \text{div}} \leq C |\omega| \max(1, \frac{1}{\sigma_0}) \|E\|_{\Omega_+, \omega}.$$

L'inégalité (2-3) implique que:

$$\|\vec{n} \wedge \text{rot } E_+\|_{-1/2, \text{div}} \leq C \frac{1}{\sigma_0} \max(1, \frac{1}{\sigma_0^2}) |\omega|^3 \|b\|_{-1/2, \text{rot}}.$$

De même, on trouverait:

$$\| \vec{n} \wedge \text{rot } E_- \|_{-1/2, \text{div}} \leq C \frac{1}{\sigma_0} \max(1, \frac{1}{\sigma_0^2}) |\omega|^3 \|b\|_{-1/2, \text{rot}}$$

d'où:

$$\| R'_\omega b \|_{-1/2, \text{div}} \leq C \frac{1}{\sigma_0} \max(1, \frac{1}{\sigma_0^2}) |\omega|^3 \|b\|_{-1/2, \text{rot}} .$$

La relation de coercivité (2-20) provient des formules (2-21) et (2-22) où on a remplacé u_+ par $-i\omega E_-$. Ainsi:

$$(2-24) \quad \langle -[\vec{n} \wedge \text{rot } E], -i\omega b \rangle = \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} (i\bar{\omega} |\text{rot } E|^2 - i\omega |\omega|^2 |E|^2) dx .$$

Donc

$$(2-25) \quad \Re \langle R'_\omega b, -i\omega b \rangle = \sigma \|E\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega}^2 .$$

La continuité de l'application trace $u \rightarrow \pi_\Gamma(u|_\Gamma)$ de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ (où l'ouvert Ω peut être Ω_+ ou Ω_-) entraîne que:

$$\|E\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega}^2 \geq C \min(\sigma_0^2, 1) \|b\|_{-1/2, \text{rot}}^2 .$$

On en déduit (2-20).

Pour démontrer que l'opérateur R'_ω est un isomorphisme, il suffit de montrer que, pour tout p dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, le problème:

$$(P_1) \quad \begin{cases} i\omega E + \text{rot } H = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ -i\omega H + \text{rot } E = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ [\vec{n} \wedge E] = 0 \\ [\vec{n} \wedge H] = -\frac{1}{i\omega} p \end{cases}$$

admet une solution unique (E, H) dans $V \times V$ où on a défini l'espace V par:

$$V = \{ u / u|_{\Omega_+} \in H(\text{rot}, \Omega_+) \text{ et } u|_{\Omega_-} \in H(\text{rot}, \Omega_-) \} .$$

Ce problème équivaut à trouver (E, H) dans $V \times V$ vérifiant:

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\text{rot } \text{rot } E + \omega^2 E = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ [\vec{n} \wedge E] = 0 \\ [\vec{n} \wedge \text{rot } H] = p \\ H = \frac{1}{i\omega} \text{rot } E & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \end{cases}$$

On introduit l'espace X :

$$X = \{ u \in V / -\text{rot } \text{rot } u + \omega^2 u = 0 \text{ et } [\vec{n} \wedge u] = 0 \} .$$

Alors X est un sous-espace fermé de V pour la norme $\| \cdot \|_{\Omega_+ \cup \Omega_-}$. On note:

$$\mathcal{A} E = -[\vec{n} \wedge \text{rot } E] .$$

Le problème (P_2) revient à trouver E dans X tel que:

$$\mathcal{A} E = p .$$

On lui associe le problème variationnel


$$(2-26) \quad a(E, v) = \langle p, \pi_\Gamma(v|_\Gamma) \rangle, \quad \forall v \in X$$

où:

$$a(E, v) = \langle \mathcal{A} E, \pi_\Gamma(v|_\Gamma) \rangle$$

la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ et $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$. La continuité de l'opérateur \mathcal{A} sur X provient du théorème de trace 1-5. Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram, il reste à prouver que la forme a est coercive sur X . La coercivité de a se déduit de l'égalité (2-24):

$$|a(E, E)| \geq \frac{\sigma}{|\omega|} \|E\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega}^2 .$$

Le problème variationnel (2-26) admet donc une unique solution E dans X . D'où l'existence et l'unicité d'une solution (E, H) du problème (P_1) . 

On prolonge R_ω à $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$:

$$\begin{aligned} R_\omega : H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma) &\longrightarrow H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma) \\ p &\longrightarrow R_\omega p = \pi_\Gamma(E|_\Gamma) \end{aligned}$$

où (E, H) est la solution du problème (P_1) .

PROPOSITION 2-1: Pour tout ω tel que $\text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0$, R_ω est l'inverse de R_ω' . L'opérateur R_ω est continu de $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$:

$$(2-27) \quad \|R_\omega p\|_{-1/2, \text{rot}} \leq C |\omega| \frac{1}{\sigma_0} \max\left(1, \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \|p\|_{-1/2, \text{div}}, \quad \forall p \in H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$$

et vérifie l'inégalité de coercivité:

$$(2-28) \quad \Re \langle p, -i\omega R_\omega p \rangle \geq C \frac{1}{|\omega|^2} \min(\sigma_0^3, 1) \|p\|_{-1/2, \text{div}}^2, \quad \forall p \in H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma).$$

preuve

A \tilde{c} dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$ on associe par R'_ω le saut $[\text{rot } E \wedge \vec{n}]$ où (E, H) est l'unique solution dans $V \times V$ du problème:

$$(P'_\pm) \begin{cases} i\omega E + \text{rot } H = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ -i\omega H + \text{rot } E = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ \vec{n} \wedge E = \vec{n} \wedge \tilde{c} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Soit (E_0, H_0) la solution de (P_1) associée à $[\vec{n} \wedge \text{rot } E]$, i.e.:

$$\begin{cases} i\omega E_0 + \text{rot } H_0 = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ -i\omega H_0 + \text{rot } E_0 = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ [\vec{n} \wedge E_0] = 0 \\ [\vec{n} \wedge H_0] = -\frac{1}{i\omega} R'_\omega \tilde{c} \end{cases}$$

Ainsi la trace tangentielle de E_0 n'est autre que $R_\omega R'_\omega \tilde{c}$ par définition. D'autre part, puisque (E, H) est solution de (P_1) , (E, H) et (E_0, H_0) coïncident. Donc:

$$\tilde{c} = R_\omega R'_\omega \tilde{c}, \quad \forall \tilde{c} \in H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma).$$

L'opérateur R'_ω étant un isomorphisme d'après la proposition précédente, on a:

$$R_\omega R'_\omega = \text{Id sur } H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma).$$

Etant donné p dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, on note $b = R_\omega p$. La formule de Green (2-25) s'écrit:

$$\Re \langle p, -i\omega R_\omega p \rangle = \sigma \|E\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega}^2.$$

Grâce à l'inégalité (2-23) et son analogue dans Ω_- , on a:

$$\|p\|_{-1/2, \text{div}}^2 \leq C \max\left(1, \frac{1}{\sigma_0^2}\right) |\omega|^2 \|E\|_{\Omega_+ \cup \Omega_-, \omega}^2$$

d'où la relation de coercivité (2-28). On déduit de (2-20) que:

$$|\langle p, -i\omega R_\omega p \rangle| \geq C \sigma_0 \min(\sigma_0^2, 1) \|R_\omega p\|_{-1/2, \text{rot}}^2$$

donc

$$\|p\|_{-1/2, \text{div}} \geq C \frac{\sigma_0}{|\omega|} \min(\sigma_0^2, 1) \|R_\omega p\|_{-1/2, \text{rot}}$$

ce qui établit (2-27). \square

CONCLUSION

Nous résumons les étapes de l'étude du problème en fréquence et les résultats obtenus.

Etant donné \tilde{c} dans $H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma)$, le problème initial consiste à trouver l'unique solution (E, H) de:

$$(P_{\pm}^{\omega}) \begin{cases} i\omega E + \text{rot} H = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ -i\omega H + \text{rot} E = 0 & \text{dans } \Omega_+ \cup \Omega_- \\ \vec{n} \wedge E = \vec{n} \wedge \tilde{c} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Alors E et H s'expriment à l'aide d'opérateurs intégraux.

$$E(\omega, x) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} p(y) d\gamma(y) + \frac{1}{\omega^2} \int_{\Gamma} \text{grad}_x \left(\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \text{div}_{\Gamma} p(y) \right) d\gamma(y) \right\}, x \in \Gamma$$

$$H(\omega, x) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{i\omega} \int_{\Gamma} \text{grad}_x \left(\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \wedge p(y) \right) d\gamma(y) \right\}, x \in \Gamma$$

où $p = -[\vec{n} \wedge \text{rot} E]$.

Le problème (P_{\pm}^{ω}) se ramène à trouver p dans $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ solution de (2-17) i.e:

$$R_{\omega} p = \tilde{c}$$

où

$$R_{\omega} p = \pi_{\Gamma} S_{\omega} p + \frac{1}{\omega^2} \text{grad}_{\Gamma} S_{\omega} \text{div}_{\Gamma} p.$$

Le calcul de (E, H) revient maintenant à résoudre le problème variationnel associé à (2-17):

(2-29)

$$\boxed{\begin{aligned} \langle p', -i\omega R_{\omega} p \rangle &= \langle p', -i\omega \tilde{c} \rangle \\ \forall p' \in H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma) \end{aligned}}$$

Remarque

La forme sesquilinéaire

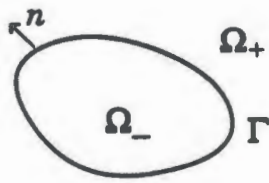
$$\langle p', -i\omega R_{\omega} p \rangle$$

est étroitement liée à l'énergie du champ électromagnétique:

$$\Re \langle p, -i\omega R_{\omega} p \rangle = \sigma |\omega|^2 \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} (|E(\omega, x)|^2 + |H(\omega, x)|^2) dx$$

3-Le problème en temps

On revient ici au problème d'évolution pour l'onde diffractée:



$$(P_+) \begin{cases} -\partial_t E + \text{rot } H = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \partial_t H + \text{rot } E = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \text{div } E = \text{div } H = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \vec{n} \wedge E = c, & \text{sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ E(t, x) = H(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_+ \end{cases}$$

où c est un courant donné sur Γ vérifiant:

$$c \cdot \vec{n} = 0$$

Comme dans le cas du problème en fréquence, la solution de (P_+) se représente de façon unique, dans un cadre approprié, par une somme de potentiels retardés. Leurs densités sont solution d'une équation intégrale qu'on résout par une formulation variationnelle espace-temps. Tous les résultats de cette partie se déduisent de l'étude du problème harmonique par une transformation de Laplace en temps en utilisant les espaces $\mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, E)$ définis dans le premier chapitre.

3-1-Existence et représentation intégrale

Au problème (P_+) on associe le problème intérieur (P_-) dans l'ouvert Ω_- :

$$(P_-) \begin{cases} -\partial_t E + \text{rot } H = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_- \\ \partial_t H + \text{rot } E = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_- \\ \text{div } E = \text{div } H = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega_- \\ \vec{n} \wedge E = c, & \text{sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma \\ E(t, x) = H(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_- \end{cases}$$

On notera dans toute la suite $|f|_{\sigma, s, -1/2 \text{div}}$ (resp. $|f|_{\sigma, s, -1/2 \text{rot}}$) la norme de f dans $\mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$ (resp. $\mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma))$).

THEOREME 3-1: Pour tout c dans $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$, $\sigma > 0$, le problème (P_\pm) admet une unique solution (E, H) dans $\mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H(\text{rot}, \Omega_+ \cup \Omega_-)) \times \mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H(\text{rot}, \Omega_+ \cup \Omega_-))$. De plus (E, H) satisfait l'estimation d'énergie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} (|E(t, x)|^2 + |H(t, x)|^2) dx dt \leq C_{\sigma_0, \Gamma} |c|_{\sigma, 1, -1/2 \text{div}}, \forall \sigma \geq \sigma_0 > 0$$

Remarque

On a noté $|f|_{\sigma,s,-1/2 div}$ (resp. $|f|_{\sigma,s,-1/2 rot}$) la norme de f dans $\mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(div, \Gamma))$ (resp. $\mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(rot, \Gamma))$).

Preuve

C'est une conséquence directe de la proposition 2-1 en remarquant que (E, H) est solution de (P_\pm) dans $\mathcal{H}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H(rot, \Omega_+ \cup \Omega_-)) \times \mathcal{H}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H(rot, \Omega_+ \cup \Omega_-))$ si et seulement si (\hat{E}, \hat{H}) est solution de (P_\pm^0) dans $H(rot, \Omega_+ \cup \Omega_-) \times H(rot, \Omega_+ \cup \Omega_-)$, vérifiant (2-3). ~~✎~~

Le champ électrique de la solution de (P_\pm) se représente à l'aide de potentiels retardés:

$$(3-5) \quad E = -L \partial_t j - N q$$

où les densités j et q sont respectivement les sauts de $\vec{n} \wedge H$ et $\vec{n} \cdot E$ à travers Γ :

$$j = -[\vec{n} \wedge H] \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma,$$

$$q = -[\vec{n} \cdot E] \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \Gamma$$

et sont reliés par l'équation de conservation de la charge:

$$\partial_t q + div_\Gamma j = 0.$$

Le potentiel retardé de simple couche L est défini par:

$$Lp(t, x) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_\Gamma \frac{p(t - |x-y|, y)}{|x-y|} d\gamma(y) \right\}, t \in \mathbb{R}^+, x \in \Gamma$$

pour $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t \times \Gamma)^3$ et

$$Nf = grad(Lf) \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3 / \Gamma$$

pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_t \times \Gamma)$.

Remarque

Si on prend la transformée de Laplace en temps de l'égalité (3-5), on retrouve la formule de représentation de \hat{E} :

$$\hat{E} = -i\omega L_\omega \hat{j} - N_\omega \hat{q}$$

où:

$$\hat{j} = -[\vec{n} \wedge \hat{H}] \text{ et } \hat{q} = -[\vec{n} \cdot \hat{E}]$$

avec

$$-i\omega \hat{q} + div_\Gamma \hat{j} = 0.$$

THEOREME 3-2: La solution (E, H) de (P_{\pm}) se représente de façon unique sous la forme:

$$E = -L \partial_t j - N \left(\int_0^t \operatorname{div}_{\Gamma} j(\tau) d\tau \right)$$

$$H = \operatorname{rot}(Lj).$$

La densité j vérifie alors:

$$(3-6) \quad |j|_{\sigma, 0, -1/2 \operatorname{div}} \leq C_{\sigma_0} |c|_{\sigma, 2, -1/2 \operatorname{div}}, \quad \forall \sigma \geq \sigma_0 > 0$$

Preuve

L'inégalité (3-6) provient de la continuité de l'opérateur R'_{ω} .

Remarque

La méthode adoptée ne donne pas des résultats de régularités en temps optimaux, comme on peut le constater dans (3-6). On peut espérer l'améliorer en choisissant un cadre fonctionnel couplant l'espace et le temps.

3-2. Formulation variationnelle espace-temps

On note S l'opérateur intégral, trace du potentiel retardé de surface L i.e:

$$Sf(t, x) = Lf(t, x), \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \Gamma.$$

En prenant la trace tangentielle des deux membres de (3-5), on obtient l'équation intégrale:

$$(3-7) \quad \vec{n} \wedge c = \pi_{\Gamma} S \partial_t j + \operatorname{grad}_{\Gamma} S q.$$

On introduit l'opérateur R :

$$Rj = \pi_{\Gamma} S j - \operatorname{grad}_{\Gamma} S \operatorname{div}_{\Gamma} \left(\int_0^t j(\tau) d\tau \right).$$

Alors (3-7) devient:

$$(3-8) \quad \vec{n} \wedge c = Rj.$$

L'étude du problème initial se ramène donc à la résolution de l'équation intégrale (3-8). L'existence et l'unicité de cette équation se déduit de l'étude du problème en fréquence.

THEOREME 3-3: Si $c \in \mathcal{X}_\sigma^3(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$, $\sigma > 0$, l'équation intégrale (3-8) admet une unique solution j dans $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$.

Preuve

Le champ de vecteurs j est solution de:

$$\vec{n} \wedge c = Rj$$

si et seulement si \hat{j} vérifie:

$$\vec{n} \wedge \hat{c} = -i\omega R_\omega \hat{j}.$$

On résoud l'équation (3-8) par une méthode variationnelle espace-temps: la solution j de (3-8) est l'unique solution du problème variationnel

$$(3-9) \quad \boxed{\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle p(t, \cdot), Rj(t, \cdot) \rangle dt = - \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle p(t, \cdot), c(t, \cdot) \wedge \vec{n} \rangle dt} \\ \forall p \in \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$$

La forme bilinéaire qui apparait au premier membre est étroitement liée avec l'énergie du champ électromagnétique:

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle j(t, \cdot), Rj(t, \cdot) \rangle dt = \sigma \int_0^\infty e^{-2\sigma t} (\|E(t)\|_{L^2(\Omega_+ \cup \Omega_-)}^2 + \|H(t)\|_{L^2(\Omega_+ \cup \Omega_-)}^2) dt.$$

La coercivité de cette forme bilinéaire est une conséquence de la proposition 2-2.

THEOREME 3-4: Pour $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, R est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{X}_\sigma^2(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$ dans $\mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma))$ et pour tout j dans $\mathcal{X}_\sigma^2(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$ vérifiant

$$Rj \in \mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma))$$

on a:

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle j(t, \cdot), Rj(t, \cdot) \rangle dt \geq C |j|_{\sigma, -1, -1/2 \text{div}}^2$$

Remarque

L'opérateur R n'est pas un isomorphisme: on perd deux degrés de régularité en temps.

4-Discrétisation- Les schémas

La discrétisation de la formulation variationnelle (3-9) par une méthode d'éléments finis, aussi bien en *espace* qu'en *temps* conduit à l'écriture de schémas stables de la forme:

$$M^0 A^n = - \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k} A^k + B^n, \quad n \geq m_2 \geq 1$$

où les vecteurs A^k sont les inconnues, les B^n sont déterminés par la donnée sur le bord c et l'entier m_2 est l'ordre de la méthode d'éléments finis en temps. Malheureusement, ces schémas ne sont pas constructifs: on construit donc, pour $m_2=1$, un schéma constructif par une méthode de condensation.

4-1.L'approximation discrète du problème variationnel.

Le choix des espaces $\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$ nous permet de découpler l'espace et le temps. Nous commençons par la discrétisation en espace.

Nous restons assez formel en ce qui concerne l'approximation spatiale au sens que nous ne discutons pas du remplacement de la surface Γ par une surface approchée Γ_h ni de la construction d'un sous espace d'approximation de $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$. Ceci sera fait ultérieurement au cours de l'analyse du schéma. On décrit donc la méthode générale d'approximation variationnelle du problème (3-9). Soit X_h un sous espace de dimension finie N_h de l'espace $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$, h étant donné. On décompose le courant inconnu sur une base φ_j^h de X_h :

$$j(t, x) = j_h(t, x) = \sum_{k=1}^{N_h} \alpha_j(t) \varphi_j^h(x)$$

où $\alpha_j \in \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ pour tout $j = 1, \dots, N_h$. Le problème discret revient à déterminer les α_j tels que:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_h} \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_j(t) \iint_{\Gamma \times \Gamma} K_{jl}^{(1)}(x, y) \alpha_l'(t - |x - y|) + \\ (4-1) \quad & + K_{jl}^{(2)}(x, y) \left\{ \int_0^{t - |x - y|} \alpha_l(\tau) d\tau \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\ & = - \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_j(t) \int_\Gamma \varphi_j^h(x) (c_h(t, x) \wedge \vec{n}_x) d\gamma(x) dt, \quad \forall j = 1, \dots, N_h \end{aligned}$$

où β_j est une fonction test dans $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, c_h est une approximation de c dans X_h et $K_{jl}^{(1)}$ et $K_{jl}^{(2)}$ sont définis par :

$$K_{jl}^{(1)}(x, y) = \frac{\varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y)}{4\pi |x-y|}$$

$$K_{jl}^{(2)}(x, y) = \frac{\operatorname{div}_\Gamma \varphi_j^h(x) \operatorname{div}_\Gamma \varphi_l^h(y)}{4\pi |x-y|} .$$

Dans une seconde étape on choisit une partition régulière de l'axe des temps positifs $(t_n = n \Delta t, n \in \mathbb{N})$. Les éléments de $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ peuvent être approchés par des éléments du sous espace $\mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \mathbb{R})$ composé de fonctions polynômiales de degrés $m_2 \geq 1$ dans chaque intervalle (t_n, t_{n+1}) . En conséquence le courant approché peut être exprimé sous la forme :

$$j_{h\Delta t}(t, x) = \sum_{k=1}^{N_h} \alpha_{j\Delta t}(t) \varphi_j^h(x)$$

où $\alpha_{j\Delta t} \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \mathbb{R})$. En remplaçant j_h par cette expression dans (4-1), on obtient :

$$(4-2) \quad \sum_{l=1}^{N_h} \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_{j\Delta t}(t) \iint_{\Gamma \times \Gamma} K_{jl}^{(1)}(x, y) \alpha_{l\Delta t}'(t - |x-y|) +$$

$$+ K_{jl}^{(2)}(x, y) \left\{ \int_0^{t-|x-y|} \alpha_{l\Delta t}(\tau) d\tau \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) dt$$

$$= - \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_{j\Delta t}(t) \int_\Gamma \varphi_j^h(x) (c_h(t, x) \wedge \vec{n}_x) d\gamma(x) dt, \quad \forall j=1, \dots, N_h$$

et toutes les fonctions test $\beta_{j\Delta t}$ sont dans $\mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \mathbb{R})$. Pour simplifier l'exposition de la méthode, on considère le cas $m_2=1$. La généralisation au cas $m_2 > 1$ se fait facilement en employant les mêmes arguments que ceux ci-dessous. On choisit les fonctions test comme suit:

$$\beta_{j\Delta t}(t) = \begin{cases} t - t_{n-1} & \text{for } t \in I_{n-1} \\ t_{n+1} - t & \text{for } t \in I_n \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Une simple substitution dans (4-2) donne:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \iint_{\Gamma \times \Gamma} K_{jl}^{(1)}(x,y) \alpha'_{l\Delta t}(t-|x-y|) + \\
 & \quad + K_{jl}^{(2)}(x,y) \left(\int_0^{t-|x-y|} \alpha_{l\Delta t}(\tau) d\tau \right) d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\
 & + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-2\sigma t} (t-t_{n-1}) \iint_{\Gamma \times \Gamma} K_{jl}^{(1)}(x,y) \alpha'_{l\Delta t}(t-|x-y|) + \\
 (4-3) \quad & \quad + K_{jl}^{(2)}(x,y) \left(\int_0^{t-|x-y|} \alpha_{l\Delta t}(\tau) d\tau \right) d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\
 & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) (\vec{n}_x \wedge c_h(t,x)) d\gamma(x) dt \\
 & \quad - \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-2\sigma t} (t-t_{n-1}) \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) (\vec{n}_x \wedge c_h(t,x)) d\gamma(x) dt, \quad \forall j=1, \dots, N_h
 \end{aligned}$$

La fonction $\alpha'_{l\Delta t}$ est une constante sur (t_n, t_{n+1}) , notée a_l^n .

PROPOSITION 4-1: Le problème discrétisé (4-3) peut s'écrire sous la forme :

$$- M^0 A^n = - \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k} A^k + B^n, \quad n \geq 1$$

où A^k désigne le vecteurs des inconnues $(a_1^k, \dots, a_{N_h}^k)^T$ et B^n est le vecteur correspondant au membre de droite de (4-3).

Preuve

La somme $M^0 A^n + \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k} A^k$ représente le membre de gauche de (4-3) à un facteur $e^{-2\sigma t_n}$ près. En effet, décomposons ce membre en deux parties I_j^n et J_j^n :

$$\begin{aligned}
 I_j^n &= \sum_{l=1}^{N_h} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \iint_{\Gamma \times \Gamma} K_{jl}^{(1)}(x,y) \alpha'_{l\Delta t}(t-|x-y|) d\gamma(x) d\gamma(y) dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-2\sigma t} (t-t_{n-1}) \iint_{\Gamma \times \Gamma} K_{jl}^{(1)}(x,y) \alpha'_{l\Delta t}(t-|x-y|) d\gamma(x) d\gamma(y) dt \right)
 \end{aligned}$$

$$J_j^n = \sum_{l=1}^{N_h} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \iint_{\Gamma \times \Gamma} K_{jl}^{(2)}(x,y) \left\{ \int_0^{t-|x-y|} \alpha_{l\Delta t}(\tau) d\tau \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) dt \right. \\ \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-2\sigma t} (t-t_{n-1}) \iint_{\Gamma \times \Gamma} K_{jl}^{(2)}(x,y) \left\{ \int_0^{t-|x-y|} \alpha_{l\Delta t}(\tau) d\tau \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) dt \right\}$$

Puisque $\alpha'_{l\Delta t}(t) = a_l^n$ pour $t \in (t_n, t_{n+1})$, on vérifie aisément que I_j^n peut se réécrire:

$$I_j^n = \sum_{l=1}^{N_h} \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_l^p \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \iint_{\Gamma \times \Gamma / t-t_{p+1} < |x-y| \leq t-t_p} K_{jl}^{(1)}(x,y) d\gamma(x) d\gamma(y) dt \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-2\sigma t} (t-t_{n-1}) \iint_{\Gamma \times \Gamma / t-t_{p+1} < |x-y| \leq t-t_p} K_{jl}^{(1)}(x,y) d\gamma(x) d\gamma(y) dt \right\} \right. \\ \left. + a_l^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t_{n+1}-t) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t-t_n} K_{jl}^{(1)}(x,y) d\gamma(x) d\gamma(y) dt \right)$$

Donc:

$$I_j^n = \left(\sum_{l=1}^{N_h} \sum_{p=0}^n a_l^p N_{jl}^{n-p} \right) e^{-2\sigma t_n}$$

avec:

$$N_{jl}^0 = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} K_{jl}^{(1)}(x,y) d\gamma(x) d\gamma(y) ds \\ N_{jl}^k = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \left\{ (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / s+t_{k-1} < |x-y| \leq s+t_k} K_{jl}^{(1)}(x,y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \\ \left. + e^{2\sigma \Delta t} s \iint_{\Gamma \times \Gamma / s+t_{k-2} < |x-y| \leq s+t_{k-1}} K_{jl}^{(1)}(x,y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right\} ds$$

Il reste à étudier le terme J_j^n . Un calcul simple nous donne:

$$\int_0^t \alpha_{l\Delta t}(\tau) d\tau = \frac{1}{2}(t-t_n)^2 a_l^n + \Delta t (t-t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \sum_{p=0}^{n-1} a_l^p + \Delta t^2 \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{m=0}^{p-1} a_l^m, \quad t \in (t_n, t_{n+1})$$

En substituant dans l'expression de J_j^n , on trouve:

$$J_j^n = \left(\sum_{l=1}^{N_h} \sum_{p=0}^n a_l^p P_{jl}^{n-p} \right) e^{-2\sigma t_n}$$

où

$$P_{jl}^0 = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{1}{2} (s - |x-y|)^2 K_{jl}^{(2)}(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

$$P_{jl}^k = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \left\{ \iint_{\Gamma \times \Gamma / s+t_{k-1} < |x-y| \leq s+t_k} \frac{1}{2} (s+t_k - |x-y|)^2 K_{jl}^{(2)}(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \\ \left. + \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_k} (s+t_k - |x-y| - \frac{\Delta t}{2}) \Delta t K_{jl}^{(2)}(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right\} ds \\ + e^{2\sigma \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} s \left\{ \iint_{\Gamma \times \Gamma / s+t_{k-2} < |x-y| \leq s+t_{k-1}} \frac{1}{2} (s+t_{k-1} - |x-y|)^2 K_{jl}^{(2)}(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \\ \left. + \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-1}} (s+t_{k-1} - |x-y| - \frac{\Delta t}{2}) \Delta t K_{jl}^{(2)}(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right\} ds$$

On en déduit la forme de $I_j^n + J_j^n = (M^0 A^n + \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k} A^k) e^{-2\sigma t_n}$ où l'on a pris:

$$M^{n-k} = N^{n-k} + P^{n-k}, \quad k < n$$

$$M^0 = N^0 + P^0$$

Le second membre de (4-3) est représenté par B^n :

$$B_j^n = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \left\{ (\Delta t - s) \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) (\vec{n}_x \wedge c_h(s+t_n, x)) d\gamma(x) \right. \\ \left. + s e^{2\sigma \Delta t} \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) (\vec{n}_x \wedge c_h(s+t_{n-1}, x)) d\gamma(x) \right\} ds$$

LEMME 4-1: La matrice M^0 est symétrique définie positive pour Δt petit.

$$M_{jl}^0 \sim C \Delta t^3 \int_{\Gamma} K_{jl}^{(1)}(x, x) d\gamma(x) + C' \Delta t^5 \int_{\Gamma} K_{jl}^{(2)}(x, x) d\gamma(x)$$

Preuve

Il est clair que M^0 est symétrique. Reste à prouver qu'elle est définie positive.

On désigne par V le vecteur ligne suivant:

$$V = (v_1, \dots, v_{N_h})$$

En posant :

$$V_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j^h(x) \in X_h$$

on voit que :

$$V^t M^0 V = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \left\{ \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{V_h(x) \cdot V_h(y)}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{2} (s - |x-y|)^2 \frac{\operatorname{div}_\Gamma V_h(x) \cdot \operatorname{div}_\Gamma V_h(y)}{4\pi|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) ds \right.$$

Pour Δt suffisamment petit, on peut écrire (voir théorème A1 de l'annexe) :

$$\begin{aligned} \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{V_h(y)}{4\pi|x-y|} d\gamma(y) &= \frac{s}{2} V_h(x) + O(s) \\ \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{\operatorname{div}_\Gamma V_h(y)}{4\pi|x-y|} d\gamma(y) &= \frac{s}{2} \operatorname{div}_\Gamma V_h(x) + O(s) \\ \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{\operatorname{div}_\Gamma V_h(y)}{4\pi} d\gamma(y) &= \frac{s^2}{4} \operatorname{div}_\Gamma V_h(x) + O(s^2) \\ \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{\operatorname{div}_\Gamma V_h(y)}{4\pi} |x-y| d\gamma(y) &= \frac{s^3}{12} \operatorname{div}_\Gamma V_h(x) + O(s^3) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{V_h(x) \cdot V_h(y)}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{2} (s - |x-y|)^2 \frac{\operatorname{div}_\Gamma V_h(x) \cdot \operatorname{div}_\Gamma V_h(y)}{4\pi|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) \\ = \frac{s}{2} |V_h|_{0,\Gamma}^2 + Cste s^3 |\operatorname{div}_\Gamma V_h|_{0,\Gamma}^2 + O(s^3) \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$V^t M^0 V \sim C_1 \Delta t^3 |V_h|_{0,\Gamma}^2 + C_2 \Delta t^5 |\operatorname{div}_\Gamma V_h|_{0,\Gamma}^2 > 0, V \neq 0 \quad \clubsuit$$

Si le pas de temps Δt est suffisamment petit M^0 est définie positive. Ainsi le problème discret conduit un schéma quasi explicite: une simple inversion de la matrice M^0 est requise. D'autre part beaucoup de coefficients de M^0 sont nuls si une condition de type Courant-Friedrichs-Lewy est vérifiée . De plus la propriété de coercivité de la forme bilinéaire (3-9) assure la stabilité du schéma:

$$\begin{aligned} M_k^{jl} = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \left\{ \iint_{\Gamma \times \Gamma / s+t_{k-1} < |x-y| \leq s+t_k} [K_{jl}^{(1)}(x,y) + \frac{1}{2} (s+t_k - |x-y|)^2 K_{jl}^{(2)}(x,y)] d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \\ \left. + \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_k} (s+t_k - |x-y| - \frac{\Delta t}{2}) \Delta t K_{jl}^{(2)}(x,y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right\} ds \\ - e^{2\sigma \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} s \left\{ \iint_{\Gamma \times \Gamma / s+t_{k-2} < |x-y| \leq s+t_{k-1}} [K_{jl}^{(1)}(x,y) + \frac{1}{2} (s+t_{k-1} - |x-y|)^2 K_{jl}^{(2)}(x,y)] \right. \\ \left. d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \\ \left. + \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-1}} (s+t_{k-1} - |x-y| - \frac{\Delta t}{2}) \Delta t K_{jl}^{(2)}(x,y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right\} ds \end{aligned}$$

4-2. Analyse des schémas.

Nous rappelons ici la méthode d'éléments finis en espace développée par Nédélec et Bendali.

Approximation de la surface

On reprend les idées de Nédélec [26].

On suppose que la surface Γ est une variété régulière compacte. On introduit alors une partition de Γ en p morceaux fermés Γ_i tels que:

$$a) \Gamma = \bigcup_{i=1}^p \Gamma_i$$

b) $\Gamma_i \cap \Gamma_j$, $i \neq j$, est soit réduit à l'ensemble vide, soit une courbe portée par Γ

c) $\Gamma_i = \Phi_i(D_i)$ où D_i est un domaine polygonal fermé de \mathbb{R}^2 et Φ_i une application régulière, bijection de D_i sur Γ_i .

On considère maintenant une triangulation régulière \mathcal{T}_{hi} de chaque domaine D_i en éléments K . A chaque élément K est associé un élément fini de classe \mathcal{C}^0 , de type Lagrange, $(K, \mathbb{P}_l, \Sigma_K)$, l étant un entier supérieur ou égal à 1. On désigne par \mathbb{P}_l l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à l . Pour chaque K de \mathcal{T}_{hi} , on note F_K le \mathbb{P}_l -interpolé de Φ_i .

Soit $\mathcal{T}_h = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{T}_{hi}$, alors la surface approchée Γ_h est définie par:

$$\Gamma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} F_K(K).$$

Pour h assez petit, la surface Γ_h se trouve dans un voisinage U_δ , pour $\delta > 0$ assez petit, de Γ :

$$U_\delta = \{ x \in \mathbb{R}^3, \text{dist}(x, \Gamma) \leq \delta \}.$$

L'application projection orthogonale ψ sur Γ , définie sur U_δ , est une bijection restreinte à Γ_h pour h assez petit. On désignera par ψ^{-1} l'inverse de $\psi|_{\Gamma_h}$.

Espaces d'éléments finis

On introduit d'abord un système de coordonnées locales sur Γ : à chaque triangle K de \mathcal{T}_h , on associe un repère orthonormé $(0_K, f_1^K, f_2^K)$ du plan supportant le triangle K . On peut ainsi définir un système de coordonnées paramétriques $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ du plan de K .

Élément fini mixte

Soit m_1 entier ≥ 1 , m_1 étant l'ordre de la méthode du point de vue approximation des courants. On rappelle la définition de l'espace vectoriel \mathbb{D}_{m_1} (introduit par Raviart-Thomas [31]) associé à tout K de \mathcal{T}_h :

$$\mathbb{D}_{m_1} = \{p(\xi) = p_1(\xi)f_1^K + p_2(\xi)f_2^K / \exists q_0, q_1, q_2 \in \mathbb{P}_{m_1-1}, p_\alpha(\xi) = q_\alpha(\xi) + \xi^\alpha q_0(\xi), \alpha=1,2\}$$

Si à cet espace \mathbb{D}_{m_1} , on associe l'espace Σ des degrés de liberté suivant:

$$\int_{\partial K_j} p \cdot v_j^K w \, dl, \quad j=1,2,3, \quad \forall w \in \mathbb{P}_{m_1-1}$$

où v_j^K est la normal unitaire à l'arête ∂K_j de K , extérieure à K et

$$\int_K p^\alpha w \, d\xi, \quad \alpha=1,2, \quad \forall w \in \mathbb{P}_{m_1-2} \text{ si } m_1 > 1$$

alors $(K, \mathbb{D}_{m_1}, \Sigma)$ est un élément fini mixte.

On définit maintenant les espaces d'éléments finis sur Γ . On note \tilde{K} le triangle curviligne :

$$\tilde{K} = \psi \circ F_K(K)$$

Espace X_h

$$p \in X_h \Leftrightarrow R_K p = \sqrt{g} (p_1(\xi)f_1^K + p_2(\xi)f_2^K) \in \mathbb{D}_{m_1}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

$$R_K p \cdot v_i^K + R_L p \cdot v_j^L = 0 \text{ sur toute arête curviligne } \partial \tilde{K}$$

$$\text{où } \partial \tilde{K} = \psi \circ F_K(\partial K_i) = \psi \circ F_L(\partial L_j)$$

où \sqrt{g} défini par $\sqrt{g} \, d\xi = d\gamma$.

Espace M_h : si $p \in X_h$ alors $\text{div}_\Gamma p \in M_h$.

$$M_h = \{\lambda \in L^2(\Gamma), \lambda|_{\tilde{K}} = \frac{1}{\sqrt{g}} q(\xi), q \in \mathbb{P}_{m_1-1}, \forall K \in \mathcal{T}_h, \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q(\xi) \, d\xi = 0, i=1, \dots, p\}$$

Propriétés d'approximation

Pour les démonstrations des estimations d'erreurs qui suivent, on renvoie à Bendali [12].

Pour $p \in H^t(\Gamma)^3, t \geq 0, p$ tangent à Γ , on définit le sous-espace $V_h(p)$ de X_h

$$V_h(p) = \{q \in X_h, \langle Cv, \text{div}_\Gamma p \rangle = \langle Cv, \text{div}_\Gamma q \rangle \quad \forall v \in M_h\}$$

où l'opérateur C est donné par:

$$Cu(x) = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi|x-y|} u(y) d\gamma(y), x \in \Gamma.$$

Soit p_h la projection orthogonale de p sur $V_h(p)$:

$$\begin{cases} \iint_{\Gamma} (p-p_h) \cdot q d\gamma + \langle C\lambda_h, \text{div}_{\Gamma} q \rangle = 0, \forall q \in X_h \\ \langle Cv, \text{div}_{\Gamma} p - \text{div}_{\Gamma} p_h \rangle = 0, \forall v \in M_h \end{cases}$$

On a alors les estimations:

THEOREME 3-1: Si $p \in H^t(\Gamma)^3$ alors

$$(4-4) \quad |p-p_h|_{-s, \Gamma} \leq C h^{s+t-\epsilon-\frac{1}{2}} |p|_{t, \Gamma}, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq m_1, 0 \leq s \leq m_1, 0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$$

$$(4-5) \quad |\text{div}_{\Gamma} p - \text{div}_{\Gamma} p_h|_{-s-1, \Gamma} \leq C h^{s+t-\epsilon-\frac{1}{2}} |p|_{t, \Gamma}, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq m_1+1, -\frac{1}{2} \leq s \leq m_1$$

et si on note $H = H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma) \cap L^2(\Gamma)$

$$(4-6) \quad |p-p_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C |p|_H$$

Remarque

Le réel ϵ qui apparaît dans l'égalité (4-4) provient du fait que l'interpolé de p est défini si $p \in H^s(\Gamma)^3$ avec $s > \frac{1}{2}$.

Une démarche analogue à celle de Bendali dans la démonstration de (4-4) employant non plus (cas $s=0, t=0$)

$$\alpha h^{\frac{1}{2}+\epsilon} |\lambda_h|_{0, \Gamma} \leq |p-p_h|_{0, \Gamma}$$

mais

$$\alpha h^{\epsilon} |\lambda_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq |p-p_h|_{0, \Gamma}$$

nous permet d'écrire (4-6).

Nous allons démontrer la stabilité et la convergence des schémas dans le cas de la surface exacte.

Stabilité

On rappelle que le courant approché $j_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, X_h)$ est solution du problème:

$$a(j_{h\Delta t}, \varphi) = \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} \int_{\Gamma} \varphi(t, x) (\vec{n}_x \wedge c_{h\Delta t}(t, x)) d\gamma(x) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, X_h)$$

où la forme a est définie par:

$$a(j_{h,\Delta t}, \varphi) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \iint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\varphi(t, x) \partial_t j_{h,\Delta t}(t - |x-y|, y)}{4\pi |x-y|} \\ + \frac{\operatorname{div}_\Gamma \varphi(t, x)}{4\pi |x-y|} \left\{ \int_0^{t-|x-y|} \operatorname{div}_\Gamma j_{h,\Delta t}(\tau, y) d\tau \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) dt .$$

THEOREME 4-1 La solution $j_{h,\Delta t}$ du problème discrétisé en espace-temps où $c_{h,\Delta t}$ est une approximation consistante de c dans $\mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+; H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma))$ vérifie :

(4-7) $|j_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1, -1/2 \operatorname{div}} \leq C_{\text{ste}} ; h \rightarrow 0 ; \Delta t \rightarrow 0 .$

Preuve

On a:


$$a(j_{h,\Delta t}, j_{h,\Delta t}) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma j_{h,\Delta t}(t, \underline{x}) (\vec{n}_x \wedge c_{h,\Delta t}(t, x)) d\gamma(x) dt$$

La relation de coercivité du théorème 3-4 implique que:

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma j_{h,\Delta t}(t, x) (\vec{n}_x \wedge c_{h,\Delta t}(t, x)) d\gamma(x) dt \geq C_\sigma |j_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1, -1/2 \operatorname{div}}^2$$

donc

$$|j_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1, -1/2 \operatorname{div}} |c_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1, -1/2 \operatorname{div}} \geq C_\sigma |j_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1, -1/2 \operatorname{div}}^2$$

d'où le résultat. 

Remarque

La constante apparaissant dans l'inégalité (4-7) dépend de σ :

$$C_{\text{ste}} = C \max\left(1, \frac{1}{\sigma^3}\right)$$

donc si σ tends vers 0, la constante explose.

Estimations d'erreurs

On démontre aussi que ce schéma est convergent:

THEOREME 4-2 On suppose que j vérifie la condition de régularité:

$$(4-8) \quad j \in \mathcal{X}_\sigma^2(\mathbb{R}^+; H^{m_1}(\operatorname{div}, \Gamma)) \cap \mathcal{X}_\sigma^{m_2+1}(\mathbb{R}^+; H), \quad m_1 > 1, m_2 > 2;$$

alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2]$, on a:

$$|j - j_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1, -1/2 \operatorname{div}} \leq C_\varepsilon \left\{ |c - c_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1, 1/2 \operatorname{div}} + \frac{h^{m_1 - \varepsilon}}{\Delta t} |j|_{\sigma, 2, m_1 \operatorname{div}} \right. \\ \left. + \Delta t^{m_2 - 2} |j|_{\sigma, m_2 + 1, H} \right\}.$$

où $H = H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ et la constante ε ne dépend que de Γ et ε .

Preuve

On commence par majorer $j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}$, où $p_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, X_h)$, grâce à l'inégalité de coercivité:

$$(4-9) \quad C_\sigma |j - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div}^2 \leq a(j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}, j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t})$$

On découpe en deux parties le second membre de l'inégalité ci-dessus:

$$a(j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}, j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}) = a(j_{h\Delta t} - j, j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}) + a(j - p_{h\Delta t}, j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t})$$

Puisque j et $j_{h\Delta t}$ sont solutions respectivement du problème variationnel exact et du problème discret, on a:

$$a(j_{h\Delta t} - j, j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma (j_{h\Delta t}(t,x) - p_{h\Delta t}(t,x)) (\vec{n}_x \wedge c_{h\Delta t}(t,x)) d\gamma(x) dt$$

D'où la majoration:

$$(4-10) \quad a(j_{h\Delta t} - j, j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}) \leq C |p_{h\Delta t} - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div} |c - c_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2rot}$$

D'autre part la continuité de l'opérateur R donne:

$$\begin{aligned} a(j - p_{h\Delta t}, j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}) &= \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}, R(j - p_{h\Delta t}) \rangle dt \\ &\leq |p_{h\Delta t} - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,0,-1/2div} |p_{h\Delta t} - j|_{\sigma,2,-1/2div} \end{aligned}$$

comme $j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, X_h)$, on a par ():

$$|p_{h\Delta t} - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,0,-1/2div} \leq \frac{C}{\Delta t} |p_{h\Delta t} - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div}.$$

On en déduit que:

$$(4-11) \quad a(j - p_{h\Delta t}, j_{h\Delta t} - p_{h\Delta t}) \leq \frac{C}{\Delta t} |p_{h\Delta t} - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div} |p_{h\Delta t} - j|_{\sigma,2,-1/2div}$$

Il résulte de (4-9), (4-10), (4-11) que:

$$|j - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div} \leq C_\sigma \left\{ |c - c_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2rot} + \frac{1}{\Delta t} |p_{h\Delta t} - j|_{\sigma,2,-1/2div} \right\}$$

On écrit maintenant l'inégalité triangulaire:

$$|j - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div} \leq |j - p_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div} + |p_{h\Delta t} - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} |j - j_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div} &\leq C_\sigma \left(|c - c_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2rot} \right. \\ &\quad \left. + \inf_{p_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, X_h)} \left\{ \frac{1}{\Delta t} |j - p_{h\Delta t}|_{\sigma,2,-1/2div} + |j - p_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2div} \right\} \right) \end{aligned}$$

Il reste à majorer les deux quantités:

$$|j - p_{h\Delta t}|_{\sigma, 2, -1/2div}, |j - p_{h, \Delta t}|_{\sigma, -1, -1/2div}.$$

Pour cela, on écrit:

$$|j - p_{h, \Delta t}|_{\sigma, k, -1/2div} \leq |j - p_h|_{\sigma, k, -1/2div} + |p_h - p_{h, \Delta t}|_{\sigma, k, -1/2div}, \quad k = -1 \text{ ou } 2$$

où l'on a choisi le courant p_h comme étant la projection orthogonale de j sur $V_h(j)$, ceci étant loisible puisque par hypothèse, j vérifie (4-8). D'où grâce aux estimations (4-4), (4-5), il vient:

$$\begin{aligned} |j - p_h|_{\sigma, k, -1/2div} &\leq C_\varepsilon h^{m_1 - \varepsilon} |j|_{\sigma, k, m_1} + C h^{m_1 + \frac{1}{2}} |div_{\Gamma} j|_{\sigma, k, m_1} \\ &\leq C_\varepsilon h^{m_1 - \varepsilon} |j|_{\sigma, k, m_1 div} \end{aligned}$$

Maintenant on pose $p_{h\Delta t} = r_{\Delta t} p_h$. Les résultats d'interpolation dans $\mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, \mathbb{R})$ donnent alors:

$$|p_h - p_{h, \Delta t}|_{\sigma, k, -1/2div} \leq C \Delta t^{m_2 + 1 - k} |p_h|_{\sigma, m_2 + 1, -1/2div}$$

D'autre part, on peut majorer $|p_h|_{-1/2div}$ indépendamment de h en employant (4-5) et (4-6):


$$|p_h|_{-1/2div} \leq |j|_{-1/2div} + |j - p_h|_{-1/2div} \leq C |j|_H$$

D'où:

$$|p_h - p_{h, \Delta t}|_{\sigma, k, -1/2div} \leq C \Delta t^{m_2 + 1 - k} |j|_{\sigma, m_2 + 1, H}$$

Finalement on obtient:

$$\begin{aligned} &\inf_{p_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^{m_2}(\Delta t, X_h)} \left\{ \frac{1}{\Delta t} |j - p_{h\Delta t}|_{\sigma, 2, -1/2div} + |j - p_{h, \Delta t}|_{\sigma, -1, -1/2div} \right\} \\ &\leq C_\varepsilon \frac{h^{m_1 - \varepsilon}}{\Delta t} (|j|_{\sigma, 2, m_1 div} + \Delta t |j|_{\sigma, k-1, m_1 div}) + C \Delta t^{m_2 - 2} (\Delta t^4 |j|_{\sigma, m_2 + 1, H^+} + |j|_{\sigma, m_2 + 1, H}) \end{aligned}$$

Pour Δt suffisamment petit, on en déduit l'estimation d'erreur 

Remarque

Les théorèmes de régularité des solutions des problèmes mixtes hyperboliques permettent d'assurer que la condition (4-8) est satisfaite dès que le champ incident est suffisamment régulier.

4-3. La méthode de condensation.

Récrivons (4-3) sous la forme plus explicite:

$$(4-12) \quad \begin{bmatrix} M^1 & M^0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ M^2 & M^1 & M^0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^n & \dots & \dots & M^1 & M^0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^0 \\ A^1 \\ \vdots \\ A^{n-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

On applique une méthode de condensation en posant :

$$\bar{M}^1 = M^1 + e^{2\sigma\Delta t} M^0, \quad \bar{M}^k = M^k, \quad 2 \leq k, \quad B^n = \bar{B}^n, \quad 1 \leq n,$$

et on résoud:

$$\bar{M}^1 \bar{A}^0 = \bar{B}^1, \quad \bar{M}^1 \bar{A}^n = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{M}^{n+1-k} \bar{A}^k + \bar{B}^{n+1}, \quad 1 \leq n:$$

$$(4-13) \quad \begin{bmatrix} \bar{M}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}^2 & \bar{M}^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}^n & \dots & \dots & \bar{M}^1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^0 \\ \bar{A}^1 \\ \vdots \\ \bar{A}^{n-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}^1 \\ \bar{B}^2 \\ \vdots \\ \bar{B}^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Pour que ce schéma soit effectivement constructif, il faut la matrice \bar{M}^1 soit inversible. C'est ce que l'on va démontrer en remarquant que (4-13) découle d'un problème variationnel discret. On note:

$$(4-14) \quad \bar{A}^k = (a_1^k, \dots, a_{N_h}^k)^T, \quad j_{h\Delta t}(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_{j\Delta t}(t) \varphi_j^h(x)$$

où

$$\alpha_{j\Delta t} \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \mathbb{R}), \quad \alpha'_{l\Delta t}(t) = a_l^n \quad t \in (t_n, t_{n+1})$$

PROPOSITION 4-1: *Le problème variationnel suivant admet une unique solution dans $\mathcal{X}^1(\Delta t, X_h)$ et $j_{h\Delta t}$ défini par (4-14) est cette solution:*

$$\begin{aligned}
 (4-15) \quad & \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \iint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\varphi(t, x)}{|x-y|} \partial_t j_{h\Delta t}(t-|x-y|, y) \\
 & + \frac{\operatorname{div}_\Gamma \varphi(t, x)}{|x-y|} \left(\int_0^{t-|x-y|} \operatorname{div}_\Gamma j_{h\Delta t}(s, y) ds \right) d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\
 & + \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \left(\left[\frac{t}{\Delta t} + 1 \right] \Delta t - t \right) \iint_{|x-y| \leq t - \left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t} \left\{ \frac{\partial_t \varphi(t, x)}{|x-y|} \partial_t j_{h\Delta t}(t-|x-y|, y) + \right. \\
 & \left. + \frac{\operatorname{div}_\Gamma \partial_t \varphi(t, x)}{|x-y|} \left(\int_{\left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t + |x-y|}^t \int_{\left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t}^{\tau-|x-y|} \operatorname{div}_\Gamma \partial_t j_{h\Delta t}(s, y) ds d\tau \right) \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) dt = \\
 & = 4\pi \int_0^\infty \int_\Gamma \varphi(t, x) [\vec{n} \wedge c_{h, \Delta t}(t, x)] d\gamma(x) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}_\sigma^1(\Delta t, V_h)
 \end{aligned}$$

où on a noté $[x]$ la partie entière de x :

$$x \in \mathbb{R}^+, [x] \in \mathbb{N}, [x] \leq x < [x] + 1.$$

Preuve

On va d'abord vérifier que si le courant $j_{h\Delta t}$ est solution de (4-15) alors les inconnues \bar{A}^k sont solutions du système matriciel (4-13).

Soit la forme bilinéaire:

$$\begin{aligned}
 a_{\Delta t}(j_{h\Delta t}, \varphi) = & \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \left(\left[\frac{t}{\Delta t} + 1 \right] \Delta t - t \right) \iint_{|x-y| \leq t - \left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t} \left\{ \frac{\partial_t \varphi(t, x)}{|x-y|} \partial_t j_{h\Delta t}(t-|x-y|, y) + \right. \\
 & \left. + \frac{\operatorname{div}_\Gamma \partial_t \varphi(t, x)}{|x-y|} \left(\int_{\left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t + |x-y|}^t \int_{\left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t}^{\tau-|x-y|} \operatorname{div}_\Gamma \partial_t j_{h\Delta t}(s, y) ds d\tau \right) \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) dt
 \end{aligned}$$

On choisit φ comme suit:

$$\varphi(t, x) = \beta_{\Delta t}^n(t) \varphi_j^h(x), \quad n \geq 1$$

Comme dans la preuve de la proposition 4-1 on a:

$$a(j_{h\Delta t}, \varphi) = e^{-2\sigma t_n} \sum_{k=0}^n (M^{n-k} \bar{A}^k)_j$$

En employant les mêmes techniques et en exploitant le fait que

$$\left[\frac{t}{\Delta t} \right] \Delta t = t_n, \quad \left[\frac{t}{\Delta t} + 1 \right] \Delta t = t_{n+1}, \quad t \in (t_n, t_{n+1})$$

on trouve que:

$$(4-16) \quad a_{\Delta t}(j_{h\Delta t}, \varphi) = e^{-2\sigma t_n} (e^{2\sigma \Delta t} M^0 \bar{A}^{n-1} - M^0 \bar{A}^n)_j$$

Donc

$$a_{\Delta t}(j_{h\Delta t}, \varphi) + a(j_{h\Delta t}, \varphi) = e^{-2\sigma t_n} (e^{2\sigma \Delta t} M^0 \bar{A}^{n-1} - M^0 \bar{A}^n + M^0 \bar{A}^n + M^1 \bar{A}^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M^{n-k} \bar{A}^k);$$

soit encore

$$a_{\Delta t}(j_{h\Delta t}, \varphi) + a(j_{h\Delta t}, \varphi) = e^{-2\sigma t_n} ((e^{2\sigma \Delta t} M^0 + M^1) \bar{A}^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M^{n-k} \bar{A}^k).$$

Comme d'autre part

$$a_{\Delta t}(j_{h\Delta t}, \varphi) + a(j_{h\Delta t}, \varphi) = e^{-2\sigma t_n} B_j^n$$

on obtient bien le schéma (4-13).

On a besoin des deux lemmes suivants pour prouver la proposition 4-2

LEMME 4-2: $\forall \varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h)$ $a(\varphi, \varphi) \geq 0$ pour Δt petit

Preuve du lemme 4-2

Puisque $\varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h)$, φ peut s'écrire

$$(4-17) \quad \varphi(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} \beta_j(t) \varphi_j^h(x)$$

avec $\beta_j \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \mathbb{R})$. Si on note $\beta_j^n(t) = a_j^n$ pour $t \in (t_n, t_{n+1})$ et si d'autre part on écrit

$$\beta_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_j^n \beta_{\Delta t}^n(t)$$

où on rappelle que

$$\beta_{\Delta t}^n(t) = \begin{cases} t - t_{n-1} & \text{pour } t \in (t_{n-1}, t_n) \\ t_{n+1} - t & \text{pour } t \in (t_n, t_{n+1}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

alors le rapport entre les a_j^n et les d_j^n est:

$$\begin{cases} a_j^0 = d_j^1 \\ a_j^k = d_j^{k+1} - d_j^k \quad k \geq 1 \end{cases}$$

Reprenons la formule (4-16) appliquée à φ donné par (4-17):

$$a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \sum_{j=1}^{N_h} d_j^n (e^{2\sigma \Delta t} M^0 A^{n-1} - M^0 A^n);$$

d'où

$$\begin{aligned} a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_{n-1}} \sum_{j=1}^{N_h} d_j^n (M^0 A^{n-1})_j - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \sum_{j=1}^{N_h} d_j^n (M^0 A^n)_j \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} a_j^0 (M^0 A^0)_j + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \sum_{j=1}^{N_h} (d_j^{n+1} - d_j^n) (M^0 A^n)_j \end{aligned}$$

soit

$$a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} T A^n M^0 A^n.$$

D'après le lemme 4-1 la matrice M^0 est définie positive donc

$$a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) > 0, \quad \forall \varphi \neq 0$$

LEMME 4-3: La forme bilinéaire $a_{\Delta t}$ est continue sur $\mathcal{X}^1(\Delta t, X_h) \times \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h)$ pour Δt assez petit.

Preuve

On montre facilement que

$$a_{\Delta t}(j, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} T B^n M^0 A^n.$$

où $j, \varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h)$ sont tels que

$$\partial_t j(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \varphi_j^h(x), \quad \partial_t \varphi(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h(x) \quad t \in (t_n, t_{n+1})$$

En explicitant M^0 , on a donc:

$$\begin{aligned} a_{\Delta t}(j, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \left\{ \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{\sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h(x) \cdot \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \varphi_j^h(y)}{4\pi|x-y|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (s - |x-y|)^2 \frac{\sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \operatorname{div}_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \cdot \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \operatorname{div}_{\Gamma} \varphi_j^h(y)}{4\pi|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) ds \right\} \end{aligned}$$

D'après le théorème A1 de l'annexe, on a pour toute fonction f dans $L^2(\Gamma)$

$$\left| \frac{1}{s^{2-p}} \int_{y \in \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{f(y)}{4\pi|x-y|} d\gamma(y) \right|_{L^2(\Gamma)} \leq C |f|_{L^2(\Gamma)}, \quad p = -1, 0, 1$$

d'où

$$|a_{\Delta t}(j, \varphi)| \leq C \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \left| \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) s ds \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \operatorname{div}_{\Gamma} \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \left| \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \operatorname{div}_{\Gamma} \varphi_j^h \right|_{L^2(\Gamma)} \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) s^3 ds \right) \right)$$

soit pour Δt assez petit:

$$|a_{\Delta t}(j, \varphi)| \leq C \Delta t^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\operatorname{div}, \Gamma)} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\operatorname{div}, \Gamma)} \right)^{1/2}$$

Or pour tout $\varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h)$ on a

$$|\varphi|_{\sigma, 1, 0 \operatorname{div}} = \left(\frac{1 - e^{-2\sigma \Delta t}}{2\sigma} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \left| \sum_{j=1}^{N_h} b_j^n \varphi_j^h \right|_{L^2(\operatorname{div}, \Gamma)} \right)^{1/2}$$

donc

$$|a_{\Delta t}(j, \varphi)| \leq C \Delta t^2 |j|_{\sigma, 1, 0 \operatorname{div}} |\varphi|_{\sigma, 1, 0 \operatorname{div}}$$

$$|a_{\Delta t}(j, \varphi)| \leq C \frac{\Delta t^2}{h} |j|_{\sigma, 1, -1/2 \operatorname{div}} |\varphi|_{\sigma, 1, -1/2 \operatorname{div}} \quad \clubsuit$$

Preuve de la proposition 4-2

Le théorème 3-4 et les lemmes précédents montrent que la forme bilinéaire $a + a_{\Delta t}$ est continue sur $\mathcal{X}^1(\Delta t, X_h) \times \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h)$ et vérifie la relation de coercivité suivante:

$$(4-18) \quad (a + a_{\Delta t})(\varphi, \varphi) \geq C |\varphi|_{\sigma, -1, -1/2 \operatorname{div}}^2 \geq C \Delta t^4 |\varphi|_{\sigma, 1, -1/2 \operatorname{div}}^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h)$$

L'existence et l'unicité de $j_{h\Delta t}$ solution de

$$\forall \varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h) \quad (a + a_{\Delta t})(j_{h\Delta t}, \varphi) = \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} \varphi(t, x) [\vec{n} \wedge c_{h\Delta t}(t, x)] d\gamma(x) dt$$

provient du théorème de Lax-Milgram. \clubsuit

L'inégalité de coercivité (4-18) nous donne la stabilité du schéma et l'inversibilité de \overline{M}^1 .

THEOREME 4-3: Si $c_{h\Delta t}$ est une approximation consistante de c dans $\mathcal{X}_{\sigma}^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma))$ alors $j_{h\Delta t}$ donné par (4-14) et vérifiant (4-15) satisfait:

$$|j_{h\Delta t}|_{\sigma, -1, -1/2 \operatorname{div}} \leq C \text{ste} \quad , \quad h \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$$

LEMME 4-4: La matrice \overline{M}^1 est définie positive pour Δt petit.

Preuve

On va reprendre les notations de la démonstration du lemme 4-2 soit:

$$\varphi \in \mathcal{X}^1(\Delta t, X_h) \quad \varphi(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} \beta_j(t) \varphi_j^h(x)$$

avec

$$\beta_j \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \mathbb{R}), \quad \beta_j'(t) = \alpha_j^n \text{ pour } t \in (t_n, t_{n+1})$$

$$\beta_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_j^n \beta_{\Delta t}^n(t) \text{ et } \begin{cases} \alpha_j^0 = d_j^1 \\ \alpha_j^k = d_j^{k+1} - d_j^k \quad k \geq 1 \end{cases}$$

On rappelle qu'on a:

$$a(\varphi, \beta_{\Delta t}^n \varphi_j^h) = e^{-2\sigma t_n} \sum_{k=0}^n (M^{n-k} A^k)_j$$

$$a_{\Delta t}(\varphi, \beta_{\Delta t}^n \varphi_j^h) = e^{-2\sigma t_n} (e^{2\sigma \Delta t} M^0 A^{n-1} - M^0 A^n)_j$$

On en déduit donc:

$$a(\varphi, \varphi) + a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\sigma t_n} \sum_{k=0}^n d_j^n (e^{2\sigma \Delta t} M^0 A^{n-1} + M^1 A^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M^{n-k} A^k)_j$$

On choisit alors

$$\alpha_j^0 = d_j^1 \neq 0, \quad d_j^k = 0 \quad \forall k \geq 1 \Rightarrow \alpha_j^1 = -\alpha_j^0 \text{ et } \alpha_j^{0k} = 0 \quad k \geq 2$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi) + a_{\Delta t}(\varphi, \varphi) &= e^{-2\sigma \Delta t} T A^0 (M^1 + e^{2\sigma \Delta t} M^0) A^0 \\ &= e^{-2\sigma \Delta t} T A^0 \overline{M}^1 A^0 > 0. \end{aligned}$$



Partie C

EXPERIMENTATION NUMERIQUE

INTRODUCTION

L'expérimentation numérique est menée sur le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique de polarisation TM par un obstacle cylindrique infini, parfaitement conducteur: le champ électrique est donc parallèle à l'axe de ce cylindre.

Dans le premier chapitre, nous décrivons les différents schémas utilisés, construits grâce à la méthode d'équations intégrales espace-temps de Bamberger-Ha Duong, en particulier on retrouve le schéma proposé par Y. Haugazeau [13]. Nous indiquons les techniques de calcul des matrices de ces schémas: on explique comment calculer les intégrales apparaissant dans les matrices et comment traiter les singularités de ces intégrales.

Le second chapitre présente des résultats numériques de calcul de courant et de surface équivalente radar (SER). On valide les schémas du chapitre I en utilisant le principe d'amplitude limite donné dans la partie A: étant donné une onde incidente plane de fréquence ω , $\exp(i\omega(t-x))$, lorsque le temps t tend vers l'infini, l'onde diffractée multipliée par $\exp(i\omega t)$ tend vers la solution du problème harmonique. Les résultats obtenus sont conformes avec ceux obtenus avec un code harmonique du CEA/CESTA. On teste la stabilité des schémas avec un champ incident à support compact de type impulsion. Les premiers résultats sont très satisfaisants et encouragent à développer des codes de calcul selon cette méthode.

Méthodes numériques

On propose dans ce chapitre des schémas numériques construits à partir de la formulation variationnelle espace-temps du problème $2D+1$. Outre le schéma trouvé dans la partie B, en jouant sur la régularité de l'approximation en temps, nous donnons deux autres schémas de calcul du courant électrique. On décrit des méthodes de calcul des matrices intervenant dans ces trois schémas.

1-Les schémas numériques

Dans un premier temps, nous rappelons le schéma obtenu au chapitre I de la partie B. Outre ce schéma, nous construisons ensuite deux autres schémas toujours à partir de la formulation variationnelle espace-temps du problème $2D$ de Dirichlet. On a déjà remarqué que les estimations obtenues par la méthode d'équations intégrales espace-temps de Bamberger-Ha Duong n'étaient pas optimales, en particulier en ce qui concerne le degré de régularité en temps. Il est donc tentant d'essayer de prendre la fonction test et l'inconnue moins régulières en temps, sachant de plus qu'une discrétisation de type P_0 (voir partie B -Préliminaires) d'une équation de convolution en temps conduit directement (sans étape de condensation) à un schéma constructif.

1-1. Schéma P_1-P_1

Ce paragraphe reprend les résultats de la partie B (chapitre I, paragraphe 1). Nous rappelons le problème approché construit par une méthode d'éléments finis en espace et en temps:

$$\sum_{i=1}^{N_h} \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_{j\Delta t}(t) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t} \varphi_j^h(x) \varphi_i^h(y) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\alpha'_{i\Delta t}(\tau)}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt$$

$$(1-1) \quad = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_{j\Delta t}(t) \int_\Gamma \varphi_j^h(x) \partial_t g(t,x) d\gamma(x) dt, \quad \forall j=1, \dots, N_h$$

où les fonctions $\beta_{j\Delta t}$, $j=1, \dots, N_h$ sont les fonctions test et les $\alpha_{i\Delta t}$, $i=1, \dots, N_h$ sont les fonctions inconnues. Le courant approché s'exprime sous la forme :

$$p_{h\Delta t}(t, x) = \sum_{i=1}^{N_h} \varphi_i^h(x) \alpha_{i\Delta t}(t)$$

La discrétisation de type P_1-P_1 (en temps) consiste à prendre $\beta_{j\Delta t}$ et $\alpha_{i\Delta t}$ dans $\mathcal{X}^1(\Delta t, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\beta_{j\Delta t}$ et $\alpha_{i\Delta t}$ sont des polynômes de degré 1 en temps sur chaque intervalle $[n\Delta t, (n+1)\Delta t[$. C'est en choisissant $\beta_{j\Delta t}$ comme étant la fonction $\beta_{\Delta t}^n$ où :

$$\beta_{\Delta t}^n(t) = \begin{cases} t-t_{n-1} & \text{pour } t \in [t_{n-1}, t_n[\\ t_{n+1}-t & \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad n \geq 1$$

et en écrivant que $\alpha_{i\Delta t}(t) = a_i^n$ pour $t \in [t_n, t_{n+1}[$ qu'on a construit un premier schéma stable non constructif :

$$(1-2) \quad \sum_{k=0}^n M^{n-k} A^k = B^n, \quad n \geq 1$$

où les vecteurs A^k sont les inconnues $a_1^k, \dots, a_{N_h}^k$, les vecteurs B^n sont donnés par la trace de l'onde incidente $-g$ et les matrices M^k sont définies par :

$$\begin{aligned} M_{jl}^k = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \left[\iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_k} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \right. \\ & \left. \left. - \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-1}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch} \left(\frac{s+t_{k-1}}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right] ds \right. \\ & \left. + e^{2\sigma \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} s \left[\iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-1}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch} \left(\frac{s+t_{k-1}}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \right. \\ & \left. \left. - \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-2}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch} \left(\frac{s+t_{k-2}}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right] ds \right\}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

et :

$$M_{jl}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} (\Delta t - s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \text{Argch} \left(\frac{s}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

Pour avoir un schéma constructif à partir de (1-2), on a employé une méthode de condensation qui transforme la matrice :

$$\begin{bmatrix} M^1 & M^0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ M^2 & M^1 & M^0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^n & \dots & \dots & M^1 & M^0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

en une matrice "tridiagonale":

$$\begin{bmatrix} \bar{M}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ M^2 & \bar{M}^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^n & \dots & \dots & \bar{M}^1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

où $\bar{M}^1 = M^1 + e^{2\sigma\Delta t} M^0$. Le nouveau schéma s'écrit donc:

$$(1-3) \quad \bar{M}^1 A^0 = B^1, \quad \bar{M}^1 A^n = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{M}^{n+1-k} A^k + B^{n+1}, \quad n \geq 1$$

La matrice \bar{M}^1 étant définie positive, on voit que les A^k se calculent successivement par:

$$A^n = (\bar{M}^1)^{-1} S^n, \quad n \geq 0$$

où le vecteur S^n est déterminé à partir des n inconnues précédentes A^0, A^1, \dots, A^{n-1} et du second membre donné B^{n+1} . Le principal effort à fournir pour implanter numériquement le schéma (1-3), appelé schéma P_1-P_1 , est le calcul des matrices M^k pour $k \geq 2$ et de la matrice \bar{M}^1 .

1-2. Schéma P_0-P_1

Comme on vient de le constater et comme on l'a remarqué dans le paragraphe discrétisation d'une équation de convolution, l'approximation par éléments finis P_1 de la fonction test $\beta_{j\Delta t}$ conduit à un schéma non constructif. Or la discrétisation de type P_0 de la formulation variationnelle associée à l'équation de convolution modèle donnait directement un schéma constructif. D'autre part, le sous-espace approché \tilde{V}_h de $H^{-1/2}(\Gamma)$ est inclus dans $L^2(\Gamma)$ et l'opérateur pseudo-différentiel S est borné dans $\mathcal{K}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, L^2(\Gamma))$, $s \geq 0$:

$$|S\varphi|_{\sigma, s, 0} \leq C |\varphi|_{\sigma, s, 0}$$

Ceci nous permet de définir la forme bilinéaire a de la formulation variationnelle pour $\varphi_h \in \mathcal{X}_\sigma^0(\mathbb{R}^+, \tilde{V}_h)$ et $p_h \in \mathcal{X}_\sigma^1(\mathbb{R}^+, \tilde{V}_h)$:

$$a(\varphi_h, p_h) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \varphi_h(t, x) \partial_t S p_h(t, x) d\gamma(x) dt \leq C |\varphi_h|_{\sigma, 0, 0} |p_h|_{\sigma, 1, 0}$$

et donc aussi pour $\varphi_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^0(\Delta t, \tilde{V}_h)$ et $p_{h\Delta t} \in \mathcal{X}^1(\Delta t, \tilde{V}_h)$. On écrit alors le problème approché (1-1) pour $\beta_{j\Delta t} \in \mathcal{X}^0(\Delta t, \mathbb{R})$, les inconnues $\alpha_{i\Delta t}$ étant toujours dans $\mathcal{X}^1(\Delta t, \mathbb{R})$. On choisit la fonction test comme suit:

$$\beta_{j\Delta t}(t) = \beta_{\Delta t}^n(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in]t_n, t_{n+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad n \geq 0$$

On obtient alors le système de N_h équations à N_h inconnues:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\alpha_{l\Delta t}'(\tau)}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt \\ (1-4) \quad & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \varphi_j^h(x) \partial_t g(t, x) d\gamma(x) dt, \quad \forall j=1, \dots, N_h, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

On pose de façon habituelle $\alpha_{i\Delta t}'(t) = a_i^n$ pour $t \in]t_n, t_{n+1}]$ et en remarquant qu'on a pour $t \in]t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\alpha_{l\Delta t}'(\tau)}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) \\ & = \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t-t_n} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_l^k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau \right. \\ & \quad \left. + a_l^n \int_{t_n}^{t-|x-y|} \frac{1}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) \\ & + \sum_{k=1}^n \iint_{\Gamma \times \Gamma / t-t_k \leq |x-y| \leq t-t_{k-1}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \left\{ \sum_{p=0}^{k-2} a_l^p \int_{t_p}^{t_{p+1}} \frac{1}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau \right. \\ & \quad \left. + a_l^{k-1} \int_{t_{k-1}}^{t-|x-y|} \frac{1}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau \right\} d\gamma(x) d\gamma(y) \end{aligned}$$

où les sommations $\sum_{k=1}^n$ et $\sum_{p=0}^{k-2}$ ne se font pas si $n=0$ et si $k < 2$ respectivement, il est facile de voir que (1-4) peut se mettre sous forme matricielle:

$$(1-5) \quad \begin{cases} M^0 A^0 = B^0 \\ M^0 A^n = - \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k} A^k + B^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

où $A^k = (a_1^k, \dots, a_{N_h}^k)^t$ et B^n est donné par:

$$(1-6) \quad B_j^n = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \partial_t g(s+t_n, x) d\gamma(x) ds$$

Un calcul simple donne les matrices M^k :

$$M_{jl}^k = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \left[\iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_k} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \right. \\ \left. \left. - \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-1}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_{k-1}}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y) \right] ds \right.$$

PROPOSITION 2-1: *La matrice M^0 est symétrique définie positive pour Δt assez petit.*

Preuve

La symétrie de M^0 est évidente. En procédant comme au chapitre I de la partie B, on trouve que l'élément M_{jl}^0 est équivalent à

$$\frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(x) d\gamma(x)$$

pour Δt assez petit. 

1-3. Schéma P_0-P_0

Maintenant on souhaite prendre le courant approché $p_{h\Delta t}$ dans $\mathcal{X}_{\sigma}^0(\mathbb{R}^+, \tilde{V}_h)$ tout en gardant la fonction test dans ce même espace, choix qui nous a mené précédemment à un schéma constructif. En admettant la possibilité d'un tel choix, on montre que le problème discrétisé (1-4) avec cette fois-ci, $\alpha_{i\Delta t}(t) = \alpha_i^n$ pour $t \in]t_n, t_{n+1}]$, donne un schéma constructif du type (1-5).

Modifions le membre de gauche de (1-4) soit:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \int_0^{t-|x-y|} \frac{\alpha_{i\Delta t}(\tau)}{2\pi((t-\tau)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\tau d\gamma(x) d\gamma(y) dt$$

en faisant le changement de variable $s = t - \tau$ et en intervertissant les intégrales de surface et celle en la variable temps s :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \int_0^t \alpha'_{l\Delta t}(t-s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{\varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y)}{2\pi (s^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) ds dt$$

Si l'on appelle $E_{jl}(s)$ la double intégrale de surface qui intervient dans la quantité ci-dessus, il nous faut exprimer

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \int_0^t \alpha'_{l\Delta t}(t-s) E_{jl}(s) ds dt$$

en fonction des réels $(a_l^n)_{l=1, \dots, N_h}$. En changeant l'ordre des intégrations, on trouve que la formule précédente est égale à:

$$(1-7) \quad \int_0^{t_n} E_{jl}(s) \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \alpha'_{l\Delta t}(t-s) dt \right\} ds \\ + \int_{t_n}^{t_{n+1}} E_{jl}(s) \left\{ \int_s^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \alpha'_{l\Delta t}(t-s) dt \right\} ds$$

En intégrant par parties l'intégrale en t et en tenant compte du fait que $\alpha_{l\Delta t}(0)=0$ et que $t_{n+1}-s$ appartient à l'intervalle $]0, \Delta t]$, la seconde partie de (1-7) s'écrit:

$$a_l^0 \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma s} E_{jl}(s) ds$$

Quant à la première partie de (1-7), on découpe $]0, t_n[$ en n intervalles $]t_k, t_{k+1}[$, l'intégrale en t ayant été intégrée par parties, ce qui donne:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\sigma t_{n-k}} (a_l^{n-k} - a_l^{n-k-1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-2\sigma s} E_{jl}(s) ds$$

Finalement on a:

$$a_l^0 \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma s} E_{jl}(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\sigma t_{n-k}} (a_l^{n-k} - a_l^{n-k-1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-2\sigma s} E_{jl}(s) ds \\ = e^{-2\sigma t_n} \left(\sum_{k=0}^n a_l^k M_{jl}^{n-k} \right)$$

où les réels M_{jl}^k valent:

$$M_{jl}^k = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \left\{ \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_k} \frac{\varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y)}{2\pi ((s+t_k)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) \right. \\ \left. - \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_{k-1}} \frac{\varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y)}{2\pi ((s+t_{k-1})^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) \right\} ds, \quad k \geq 1$$

$$M_{jl}^0 = \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s} \frac{\varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y)}{2\pi (s^2 - |x-y|^2)^{1/2}} d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

On obtient donc le même schéma que le schéma $\mathbb{P}_0\text{-}\mathbb{P}_1$ avec les matrices M^k définies ci-dessus, le vecteur B^n restant identique à celui donné dans le schéma $\mathbb{P}_0\text{-}\mathbb{P}_1$ par (1-6).

2-Le calcul des matrices M^k

Quelle que soit la régularité en temps du courant approché et de la fonction test de la formulation variationnelle (1-1), on s'est efforcé d'obtenir un schéma constructif de la forme:

$$\begin{cases} M^0 A^0 = B^0 \\ M^0 A^n = - \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k} A^k + B^n, n \geq 1 \end{cases}$$

Pour trouver les vecteurs réels A^k , $k \geq 0$, il suffit de calculer les matrices réelles symétriques M^k , $k \geq 0$ et d'inverser une bonne fois pour toutes la matrice M^0 .

Les calculs des matrices M^k qui viennent sont destinés à montrer qu'il est plus avantageux de prendre le réel σ nul, réel dont dépendent toutes les matrices. Or on a vu que σ devait être strictement positif pour avoir le résultat de stabilité (démontré dans le cas du schéma $\mathbb{P}_1\text{-}\mathbb{P}_1$):

$$|p_{h \Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq C_{1/\sigma} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} +\infty$$

Toutefois σ n'est utile que pour contrôler le comportement à l'infini. Il est évident que nous ne calculerons pas les inconnues A^n jusqu'à n infini. Les résultats numériques du chapitre suivant montreront que les schémas sont stables pour $\sigma = 0$.

2-1. Le choix $\sigma \neq 0$

De façon générale, les matrices M^k des trois schémas décrits ci-dessus sont une somme de termes de la forme:

$$(2-1) \quad \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} f(s) \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq s+t_k} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) G(s+t_k, |x-y|) d\gamma(x) d\gamma(y) ds$$

où la fonction G est définie selon les schémas par:

$$G(s, |x-y|) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Argch} \left(\frac{s}{|x-y|} \right), \text{ cas } \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1 \text{ et } \mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_1$$

$$G(s, |x-y|) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(s^2 - |x-y|^2)^{1/2}}, \text{ cas } \mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_0$$

De même la fonction f est, soit la constante 1, soit la fonction s . On choisit d'intégrer d'abord en temps pour obtenir une simple intégrale double en espace. Cela revient à écrire (2-1) de la façon suivante:

$$\iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t_k} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \left(\int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} f(s) G(s+t_k, |x-y|) ds \right) d\gamma(x) d\gamma(y)$$

$$+ \iint_{\Gamma \times \Gamma / t-t_k \leq |x-y| \leq t-t_{k-1}} \varphi_j^h(x) \varphi_l^h(y) \left(\int_{|x-y|-t_k}^{\Delta t} e^{-2\sigma s} f(s) G(s+t_k, |x-y|) ds \right) d\gamma(x) d\gamma(y)$$

Pour chaque couple (G, f) , on a donc à calculer deux intégrales en la variable temps s . On a à considérer trois couples:

$$\left(s, \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) \right), \left(1, \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) \right), \left(1, \frac{1}{((s+t_k)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} \right)$$

Des intégrations par parties donnent:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\sigma s} s \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) ds = \frac{1}{4\sigma^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{e^{-2\sigma s}}{((s+t_k)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds$$

$$- \frac{1}{2\sigma} [e^{-2\sigma s} s \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right)]_{s=\tau_1}^{s=\tau_2} - \frac{1}{4\sigma^2} [e^{-2\sigma s} \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right)]_{s=\tau_1}^{s=\tau_2}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\sigma s} \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) ds = \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{e^{-2\sigma s}}{((s+t_k)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds - \frac{1}{2\sigma} [e^{-2\sigma s} \operatorname{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right)]_{s=\tau_1}^{s=\tau_2}$$

où les réels τ_1, τ_2 sont positifs. On choisira bien sûr $\tau_1 = 0$ ou $|x-y| - t_k$, $\tau_2 = \Delta t$. On remarque que les intégrales à calculer correspondant aux deux premiers couples de fonctions (G, f) s'expriment en fonction de l'intégrale correspondant au troisième couple

$$\int \frac{e^{-2\sigma s}}{((s+t_k)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds$$

ainsi qu'en fonction d'une nouvelle intégrale

$$\int \frac{e^{-2\sigma s} s}{((s+t_k)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds$$

A partir de ces calculs, on détermine la forme des éléments des matrices M^k pour chaque schéma.

♦ Schéma $\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1$

Si on note F_{ij}^k l'intégrale double suivante:

$$F_{ij}^k = \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t_k} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \left\{ \frac{e^{2\sigma t_{k-1}}}{4\pi\sigma} \int_{|x-y|}^{t_k} \frac{e^{-2\sigma s} s}{(s^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds \right. \\ \left. + \frac{e^{2\sigma t_{k-1}}}{8\pi\sigma^2} (1 - 2\sigma t_k) \int_{|x-y|}^{t_k} \frac{e^{-2\sigma s}}{(s^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds - \frac{e^{-2\sigma\Delta t}}{8\pi\sigma^2} \operatorname{Argch}\left(\frac{t_k}{|x-y|}\right) \right\} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

l'élément de matrice M_{ij}^k s'exprime sous la forme:

$$M_{ij}^k = -F_{ij}^{k+1} + (1 + 2e^{2\sigma\Delta t}) F_{ij}^k - (2 + e^{2\sigma\Delta t}) F_{ij}^{k-1} - e^{4\sigma\Delta t} F_{ij}^{k-2}, \quad k \geq 2$$

avec la convention

$$F_{ij}^{-n} = 0, \quad \forall i, j, n \geq 0$$

On en déduit la valeur de \overline{M}^1 :

$$\overline{M}^1 = M^1 + e^{2\sigma\Delta t} M^0 = -F^2 + (1 + e^{2\sigma\Delta t}) F^1$$

♦ Schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_1$

On réutilise la notation F_{ij}^k pour désigner l'intégrale de référence:

$$F_{ij}^k = \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t_k} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \left\{ -\frac{e^{2\sigma t_{k-1}}}{4\pi\sigma} \int_{|x-y|}^{t_k} \frac{e^{-2\sigma s}}{(s^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds \right. \\ \left. + \frac{e^{-2\sigma\Delta t}}{4\pi\sigma} \operatorname{Argch}\left(\frac{t_k}{|x-y|}\right) \right\} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

alors les matrices M^k sont reliées aux F^k par:

$$M^k = -F^{k+1} + (1 + e^{2\sigma\Delta t}) F^k - F^{k-1}$$

avec la même convention sur les F^k que précédemment.

♦ Schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_0$

Comme ci-dessus, les M^k s'écrivent en fonction de matrices F^k dont les éléments sont donnés par:

$$F_{ij}^k = - \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t_k} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \left\{ \frac{e^{2\sigma t_{k-1}}}{4\pi\sigma} \int_{|x-y|}^{t_k} \frac{e^{-2\sigma s}}{(s^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds \right\} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

de la façon suivante:

$$M^k = -F^{k+1} + (1 + e^{2\sigma\Delta t})F^k - F^{k-1}$$

On remarque que quelque soit le schéma envisagé, il apparaît dans les matrices F^k l'intégrale:

$$(2-2) \quad \int_{|x-y|}^{t_k} \frac{e^{-2\sigma s}}{(s^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds$$

et dans le cas du schéma P_1-P_1 l'intégrale supplémentaire:

$$(2-3) \quad \int_{|x-y|}^{t_k} \frac{e^{-2\sigma s} s}{(s^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds$$

qui n'est autre que la dérivée par rapport à σ de (2-2) à un facteur -2 près. On note $E_k(\sigma, |x-y|)$ cette première intégrale (2-2) et donc l'intégrale (2-3) s'écrit $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} E_k(\sigma, |x-y|)$. On constate ensuite que si $k \rightarrow +\infty$ soit si $t_k \rightarrow +\infty$ alors:

$$E_k(\sigma, R) \rightarrow K_0(2\sigma R) \text{ quand } k \rightarrow +\infty$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0 définie par:

$$K_0(x) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$$

$H_0^{(1)}$ étant la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0. On vérifie facilement que $E_k(\sigma, R)$ vérifie l'équation différentielle:

$$-2\sigma e^{-2\sigma t_k} (t_k^2 - R^2)^{1/2} = \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} E_k(\sigma, R) + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} E_k(\sigma, R) - 4\sigma^2 R^2 E_k(\sigma, R)$$

Si on pose $g(2\sigma R) = E_k(\sigma, R)$ on a, en notant $x = 2\sigma R$:

$$(2-4) \quad -x e^{-x/R} t_k \left(\left(\frac{t_k}{R} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} = x^2 g''(x) + x g'(x) - x^2 g(x)$$

On cherche alors $g(x)$ sous la forme $\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$. On doit donc avoir:

$$-x e^{-x/R} t_k \left(\left(\frac{t_k}{R} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p p^2 x^p - \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+2}$$

Le premier membre de (2-4) est égal à :

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \left(\frac{t_k}{R} \right)^p \frac{x^{p+1}}{p!}$$

On obtient donc les relations:

$$(2-5) \quad a_1 = - \left(\left(\frac{t_k}{R} \right)^2 - 1 \right)^{1/2}$$

$$(2-6) \quad p^2 a_p - a_{p-2} = (-1)^p \left(\frac{t_k}{R} \right)^{p-1} \left(\left(\frac{t_k}{R} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \frac{1}{(p-1)!}, \quad p \geq 2$$

Le premier coefficient a_0 est déterminé par la valeur de la fonction g en 0, c'est-à-dire:

$$a_0 = \int_R^{t_k} \frac{1}{(s^2 - R^2)^{1/2}} ds = \text{Argch} \left(\frac{t_k}{R} \right)$$

Il résulte de (2-5) et (2-6) que tous les coefficients d'indice impairs sont négatifs et de la valeur de a_0 et de (2-5), on tire que tous les coefficients d'indices pairs sont positifs. Numériquement il nous faut tronquer la série:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p (2\sigma |x-y|)^p$$

pour tout (x, y) dans $\Gamma \times \Gamma$ puis traiter les singularités apparaissant dans les coefficients de cette série. Outre que le choix de σ et de l'indice de troncature ne sont pas évidents, le calcul de ces séries est coûteux en temps. Il est plus raisonnable de prendre $\sigma = 0$ du point de vue simplicité des calculs. Comme on le verra par la suite, ce choix n'entache en rien la stabilité des schémas.

2-2. Le choix $\sigma = 0$

On reprend la même démarche que dans le cas $\sigma \neq 0$: on calcule les intégrales en temps apparaissant dans les termes de la forme (2-1) avec cette fois-ci, bien sûr, $\sigma = 0$ pour n'obtenir que des intégrales doubles sur des portions de $\Gamma \times \Gamma$. Les diverses intégrales en temps qui arrivent sont alors:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} s \text{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) ds, \int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) ds, \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{((s+t_k)^2 - |x-y|^2)^{1/2}} ds$$

où $\tau_1 = 0$ ou $|x-y| - t_k$, $\tau_2 = \Delta t$ et le temps $s+t_k$ est supérieur à la distance $|x-y|$. La troisième intégrale n'est autre que $\text{Argch} \left(\frac{\tau_2+t_k}{|x-y|} \right) - \text{Argch} \left(\frac{\tau_1+t_k}{|x-y|} \right)$. Les deux autres se calculent par intégrations par parties:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} s \text{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) ds = \left[(\tau^2 - |x-y|^2)^{1/2} \left(t_k - \frac{1}{4} s \right) \right]_{s=\tau_1+t_k}^{s=\tau_2+t_k} - \frac{1}{2} \left[\text{Argch} \left(\frac{s}{|x-y|} \right) \left(\frac{|x-y|^2}{2} - s^2 + 2s t_k \right) \right]_{s=\tau_1+t_k}^{s=\tau_2+t_k}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) ds = \left[(s+t_k) \text{Argch} \left(\frac{s+t_k}{|x-y|} \right) \right]_{s=\tau_1}^{s=\tau_2} - \left[((s+t_k)^2 - |x-y|^2)^{1/2} \right]_{s=\tau_1}^{s=\tau_2}$$

Quelques calculs supplémentaires permettent de déterminer les matrices de "base" F^k formant les M^k .

♦ Schéma P_1-P_1

L'élément F_{ij}^k est donné par:

$$(2-7) \quad F_{ij}^k = \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t_k} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \left\{ \frac{3}{8\pi} t_k (t_k^2 - |x-y|^2)^{1/2} \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \operatorname{Argch} \left(\frac{t_k}{|x-y|} \right) \left(t_k^2 + \frac{|x-y|^2}{2} \right) \right\} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

En conséquence de quoi, la matrice M^k s'exprime en fonction des F^k par:

$$(2-8) \quad M^k = -F^{k+1} + 3F^k - 3F^{k-1} + F^{k-2}, \quad k \geq 0$$

où $F_{ij}^{-n} = 0$, $\forall i, j, n \geq 0$. La matrice "condensée" \bar{M}^1 s'écrit alors:

$$\bar{M}^1 = M^1 + M^0 = -F^2 + 2F^1$$

♦ Schéma P_0-P_1

$$(2-9) \quad F_{ij}^k = \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t_k} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \left\{ \frac{1}{2\pi} (t_k^2 - |x-y|^2)^{1/2} \right. \\ \left. - \frac{t_k}{2\pi} \operatorname{Argch} \left(\frac{t_k}{|x-y|} \right) \right\} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

Les matrices M^k sont alors données par:

$$(2-10) \quad M^k = -F^{k+1} + 2F^k - F^{k-1}, \quad k \geq 0$$

♦ Schéma P_0-P_0

$$(2-11) \quad F_{ij}^k = - \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| \leq t_k} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \frac{1}{2\pi} \operatorname{Argch} \left(\frac{t_k}{|x-y|} \right) d\gamma(x) d\gamma(y)$$

Les matrices M^k sont déterminées par la formule (2-10).

On fait quelques remarques avant de passer au calcul des F^k . La première constatation est que les matrices de "base" sont d'autant plus simples que le schéma exige moins de régularité en temps. On préférera donc utiliser le schéma P_0-P_0 par la suite. On vérifie bien que les matrices F^k et leur

combinaison donnant les M^k pour $\sigma \neq 0$ redonnent les matrices F^k et M^k ci-dessus quand on fait tendre σ vers 0. Pour finir, le schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_1$ que nous avons obtenu est le schéma décrit par Y-Haugazeau dans [13]: les matrices M^k coïncident avec les matrices trouvées dans [13] et ses inconnues sont liées aux nôtres A^k par la relation:

$$W^k = \sum_{k=0}^n A^k .$$

3-Le calcul des matrices de base F^k

On a vu que, via les différentes relations trouvées précédemment, le calcul des matrices M^k des trois schémas se déduisaient de celui des matrices F^k . On ne s'occupe à partir de maintenant que du cas $\sigma=0$.

Dans un premier temps, on a voulu conserver la frontière exacte Γ pour calculer F^k . A cause des singularités numériques rencontrées dans les intégrales, il nous faut connaître pour tout point x de Γ le point y de la frontière à la distance t_k de x . S'il est facile de trouver y dans le cas où Γ est un cercle, il est beaucoup plus difficile à déterminer dans le cas d'une frontière quelconque et l'élimination des singularités l'est encore plus. On s'est donc limité à traiter le cercle et on précise où apparaissent les difficultés si Γ est un contour quelconque. L'approche raisonnable de ces problèmes est de considérer non plus la frontière exacte mais sa frontière approchée Γ_h , interpolée d'ordre 1 de Γ . L'intersection d'une droite et d'un cercle est tout de même plus facile à trouver que celle d'un cercle et d'une courbe quelconque! Comme on l'a déjà remarqué, le schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_0$ est plus simple à mettre en oeuvre que les deux autres schémas: ceci sera confirmé dans les tests numériques faits par l'approche "frontière exacte", dans le cas où le contour Γ est un cercle. On s'est donc contenté de faire les calculs pour ce schéma dans le cas où Γ est remplacée par Γ_h . En ce qui concerne l'ordre de discrétisation par éléments finis en espace, on a choisi le cas le plus simple c'est-à-dire que les fonctions de base φ_i^h sont constantes par morceaux, que ce soit dans le cas où on a conservé la frontière exacte ou dans celui où on a pris Γ_h .

3-1. Contour exact: le cercle

La frontière Γ étant un cercle, elle admet une représentation paramétrique de la forme:

$$X=(x_1, x_2)=(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

où ρ désigne le rayon de ce cercle. On découpe Γ en N morceaux Γ_i de longueurs égales $\frac{2\pi}{N}$. Les extrémités d'un élément de courbe sont donc donnés par:

$$X_i=(\rho \cos \theta_i, \rho \sin \theta_i) \quad , \quad X_{i+1}=(\rho \cos \theta_{i+1}, \rho \sin \theta_{i+1})$$

où $\theta_{i+1}-\theta_i=\frac{2\pi}{N}$. Les éléments de matrice de base F^k s'écrivent:

$$F_{ij}^k = \iint_{\Gamma_i \times \Gamma_j / |X-Y| \leq t_k} G_k(|X-Y|) d\gamma(X) d\gamma(Y)$$

où le noyau G_k de cette double intégrale dépend du schéma:

◦ schéma P_1-P_1
$$G_k(R) = \frac{3}{8\pi} t_k (t_k^2 - R^2)^{1/2} - \frac{1}{4\pi} \text{Argch}\left(\frac{t_k}{R}\right) \left(t_k^2 + \frac{R^2}{2}\right)$$

◦ schéma P_0-P_1
$$G_k(R) = \frac{1}{2\pi} (t_k^2 - R^2)^{1/2} - \frac{t_k}{2\pi} \text{Argch}\left(\frac{t_k}{R}\right)$$

◦ schéma P_0-P_0
$$G_k(R) = -\frac{1}{2\pi} \text{Argch}\left(\frac{t_k}{R}\right)$$

On rappelle que

$$\text{Argch}\left(\frac{t_k}{R}\right) = \text{Log}(t_k + (t_k^2 - R^2)^{1/2}) - \text{Log} R$$

Il apparaît alors deux types de singularité quelque soit le schéma choisi. La première en $|X-Y|=0$ provient de la partie logarithmique de la fonction hyperbolique réciproque Argch . Cette singularité est classique dans la méthode des équations intégrales et ne pose aucun problème. La seconde est plus nouvelle et vient du fait que, en $R=t_k$, les deux fonctions $(t_k^2 - R^2)^{1/2}$ et $\text{Log}(t_k + (t_k^2 - R^2)^{1/2})$ ont une tangente perpendiculaire à l'axe des R . On sait alors que si l'on ne prend pas de précaution, l'intégration numérique de telles fonctions risque de très mal se passer. Si la singularité en $|X-Y|=0$ ne se produit qu'en des éléments de courbe Γ_i et Γ_j ayant un ou plusieurs points en commun, la "pseudo"-singularité en $|X-Y|=t_k$, elle, se produit pour n'importe

quel couple d'éléments (Γ_i, Γ_j) , en particulier pour les trois cas d'éléments que nous allons envisager.

On appelle éléments confondus les couples de portions de courbe (Γ_i, Γ_j) tels que $\Gamma_i = \Gamma_j$, éléments adjacents les morceaux Γ_i, Γ_j qui ont une extrémité en commun et éléments disjoints les morceaux de courbe Γ_i, Γ_j qui n'ont aucun point en commun. Pour chacun de ces cas, on traitera le ou les singularités apparaissant dans le calcul des F_{ij}^k .

Eléments confondus

Soient θ_1 et θ_2 les deux angles correspondants aux extrémités du segment courbe $\Gamma_i = \Gamma_j$ considéré. La distance d'un point $X(\theta)$ à un point $Y(\theta')$ appartenant tous deux à Γ_i est donné par:

$$|X(\theta) - Y(\theta')| = 2\rho \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|$$

Le domaine d'intégration de F_{ii}^k devient donc:

$$(3-1) \quad 2\rho \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| \leq t_k, \quad \theta, \theta' \in [\theta_1, \theta_2] \quad (\text{on suppose } \theta_1 < \theta_2)$$

et l'intégrale s'écrit:

$$F_{ii}^k = \rho^2 \int_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} \int_{\theta' \in [\theta_1, \theta_2] / 2\rho \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| \leq t_k} G_k(2\rho \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|) d\theta d\theta'$$

On voit qu'il y a deux cas à considérer: ou la distance d'une extrémité à une autre de l'élément Γ_i , $\Delta x = 2\rho \left| \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \right|$, est plus petite que le temps t_k ou elle est plus grande que t_k . Dans le premier cas ($\Delta x \leq t_k$), la condition (3-1) est toujours vérifiée donc on intègre sur tout $[\theta_1, \theta_2] \times [\theta_1, \theta_2]$. D'autre part, puisqu'il n'existe aucun point Y de Γ_i tel que pour tout X de Γ_i , $|X - Y| = t_k$, on n'a pas de "pseudo"-singularité. Dans le cas $\Delta x \geq t_k$, la "pseudo"-singularité existe et l'intégration se fait sur une bande du pavé $[\theta_1, \theta_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ (figure 1). Traitons d'abord ce dernier cas.

cas $\Delta x \geq t_k$

La "pseudo"-singularité, on l'a déjà dit, se trouve en les points

$$|X - Y| = t_k$$

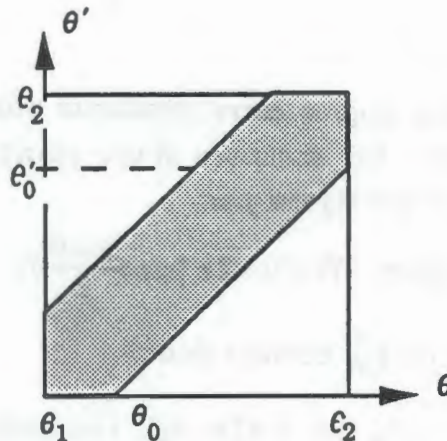
soit pour les angles θ, θ' tels que:

$$2\rho \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| = t_k$$

Si on note l'angle positif $\alpha = \text{Arcsin} \left(\frac{t_k}{2\rho} \right)$ et les angles

$$\theta_0 = \theta_1 + 2\alpha, \quad \theta'_0 = \theta_2 - 2\alpha$$

on voit facilement que le "pseudo"-singularité est située sur les deux segments symétriques l'un de l'autre par rapport à la diagonale du carré de la figure 1 définis par:



-Figure 1-

cas $\Delta x \geq t_k$

La "pseudo"-singularité, on l'a déjà dit, se trouve en les points

$$|X - Y| = t_k$$

soit pour les angles θ, θ' tels que:

$$2\rho |\sin \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right)| = t_k$$

Si on note l'angle positif $\alpha = \text{Arcsin} \left(\frac{t_k}{2\rho} \right)$ et les angles

$$\theta_0 = \theta_1 + 2\alpha, \quad \theta'_0 = \theta_2 - 2\alpha$$

on voit facilement que le "pseudo"-singularité est située sur les deux segments symétriques l'un de l'autre par rapport à la diagonale du carré de la figure 1 définis par:

$$\theta = \theta' + 2\alpha, \quad \theta' = \theta + 2\alpha \text{ avec } \theta, \theta' \in [\theta_1, \theta_2]$$

La singularité en $|X-Y|=0$ se trouve bien sûr sur la diagonale $\theta=\theta'$ du pavé. Les rôles joués par θ et θ' étant les mêmes et le domaine d'intégration étant symétrique par rapport à la diagonale, l'intégrale sur la bande hachurée du pavé se réduit à deux fois celle de la demi-bande:

$$F_{ii}^k = 2\rho^2 \int_{\theta_1}^{\theta'_0} \int_{\theta}^{\theta+2\alpha} G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta-\theta'}{2})|) d\theta d\theta' \\ + 2\rho^2 \int_{\theta'_0}^{\theta_2} \int_{\theta}^{\theta_2} G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta-\theta'}{2})|) d\theta d\theta'$$

On fait le changement de variables suivant pour se ramener au carré $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\theta = (\xi \theta_2 + (1-\xi) \theta_1)(1-\eta) + (\xi \theta'_0 + (1-\xi) \theta_1) \eta$$

$$\theta' = (\xi \theta_2 + (1-\xi) \theta_1)(1-\eta) + (\xi \theta_2 + (1-\xi) \theta_0) \eta$$

Le jacobien d'un tel changement de variables est égal à:

$$Jac(\eta) = 2\alpha |\theta_2 - \theta_1 - 2\alpha \eta|$$

Puisqu'il ne dépend pas de la variable ξ et que $\theta - \theta' = -2\alpha \eta$, la double intégrale se transforme en une intégrale simple sur $[0, 1]$:

$$F_{ii}^k = 4\rho^2 \alpha \int_0^1 |\theta_2 - \theta_1 - 2\alpha \eta| G_k(2\rho |\sin(\alpha \eta)|) d\eta$$

La "pseudo"-singularité a été envoyée en $\eta=1$ et la singularité se retrouve en $\eta=0$. On écrit maintenant le noyau G_k sous la forme:

$$G_k(R) = f_1(R) (t_k^2 - R^2)^{1/2} - f_2(R) \text{Argch}\left(\frac{t_k}{R}\right)$$

où les fonctions f_1, f_2 dépendent du schéma choisi. La partie contenant la singularité est alors:

$$I_1 = \int_0^1 |\theta_2 - \theta_1 - 2\alpha \eta| f_2(2\rho |\sin(\alpha \eta)|) \text{Log}(2\rho |\sin(\alpha \eta)|) d\eta$$

et celle contenant les "singularités numériques" est:

$$I_2 = \int_0^1 |\theta_2 - \theta_1 - 2\alpha \eta| [f_1(2\rho |\sin(\alpha \eta)|) (t_k^2 - (2\rho |\sin(\alpha \eta)|)^2)^{1/2} - \\ f_2(2\rho |\sin(\alpha \eta)|) \text{Log}(t_k + (t_k^2 - (2\rho |\sin(\alpha \eta)|)^2)^{1/2})] d\eta$$

La singularité logarithmique est facile à traiter: il suffit d'écrire

$$I_1 = \int_0^1 J_2(\eta) \text{Log} \eta d\eta + \int_0^1 J_2(\eta) \text{Log}\left(2\rho \frac{|\sin(\alpha \eta)|}{\eta}\right) d\eta$$

où on a noté $J_i(\eta) = |\theta_2 - \theta_1 - 2\alpha\eta| f_i(2\rho |\sin(\alpha\eta)|)$ pour $i=1$ ou 2 . La première intégrale comportant le terme $\text{Log } \eta$ s'intègre par une formule de Gauss à poids logarithmique tandis qu'une formule de Gauss-Lobatto classique suffit pour l'autre intégrale puisque la fonction $2\rho \frac{|\sin(\alpha\eta)|}{\eta}$ ne s'annule plus. En ce qui concerne I_2 , le problème numérique provient du fait que:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (t_k^2 - (2\rho |\sin(\alpha\eta)|)^2)^{1/2} \rightarrow +\infty \text{ quand } \eta \rightarrow 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \text{Log}(t_k + (t_k^2 - (2\rho |\sin(\alpha\eta)|)^2)^{1/2}) \rightarrow +\infty \text{ quand } \eta \rightarrow 1$$

On rappelle en effet que $\sin \alpha = \frac{t_k}{2\rho}$. En fait le simple changement de variable

$$\tau = \sqrt{1-\eta}$$

nous permet de contourner ce problème. Réécrivons I_2 :

$$I_2 = \int_0^1 2\tau [J_1(1-\tau^2) (t_k^2 - (2\rho |\sin \alpha (1-\tau^2)|)^2)^{1/2} - J_2(1-\tau^2) \text{Log}(t_k + (t_k^2 - (2\rho |\sin \alpha (1-\tau^2)|)^2)^{1/2})] d\tau$$

On remarque qu'alors:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (t_k^2 - (2\rho |\sin(\alpha(1-\tau^2))|)^2)^{1/2} \rightarrow 4\rho \sqrt{\alpha} (\sin(2\alpha))^{1/2} \text{ quand } \tau \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \text{Log}(t_k + (t_k^2 - (2\rho |\sin \alpha (1-\tau^2)|)^2)^{1/2}) \rightarrow \frac{4\rho}{t_k} \sqrt{\alpha} (\sin(2\alpha))^{1/2} \text{ quand } \tau \rightarrow 0$$

On peut donc intégrer par une formule de Gauss.

cas $\Delta x \geq t_k$

On a vu que dans ce cas-là l'intégration se fait sur tout $[\theta_1, \theta_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ soit:

$$F_{ii}^k = \rho^2 \int_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} \int_{\theta' \in [\theta_1, \theta_2]} G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta - \theta'}{2})|) d\theta d\theta'$$

On se ramène au carré $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$F_{ii}^k = \rho^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \int_0^1 \int_0^1 G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}(\xi - \eta))|) d\xi d\eta$$

Le rôle de ξ et de η étant interchangeable, l'intégrale sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ est égale à deux fois l'intégrale sur le triangle $[0, 1] \times [0, \xi]$ par exemple. Ainsi on a:

$$F_{ii}^k = 2\rho^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \int_0^1 (1-\eta) G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \eta)|) d\eta$$

Dans ce cas on n'a pas de "pseudo"-singularité. La singularité en $\eta=0$ se traite comme dans le cas $\Delta x \geq t_k$.

Eléments adjacents

On appelle θ_1 et θ_2 les angles correspondants aux extrémités de Γ_i et α_1 , α_2 ceux correspondants aux extrémités de Γ_j . On suppose que le point commun aux deux arcs de courbe est en $\theta_2 = \alpha_1$ et que de plus $\theta_1 < \theta_2 = \alpha_1 < \alpha_2$. D'autre part, les morceaux de courbe étant égaux, on a $\theta_2 - \theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$. On note δ la distance séparant les extrémités de $\Gamma_i \cup \Gamma_j$ et Δx la longueur des segments:

$$d = 2\rho |\sin(\frac{\alpha_2 - \theta_1}{2})|, \quad \Delta x = 2\rho |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})|$$

Trois cas sont à considérer: $t_k \leq \Delta x$, $\Delta x < t_k \leq d$, $d < t_k$.

cas $\Delta x \geq t_k$

L'angle α désigne toujours $\text{Arcsin}(\frac{t_k}{2\rho})$ et par la suite, il en sera toujours de même. Le domaine d'intégration est un triangle:

$$F_{ij}^k = \rho^2 \int_{\theta_2 - 2\alpha}^{\theta_2} \int_{\alpha_1}^{\theta_2 + 2\alpha} G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta - \theta'}{2})|) d\theta d\theta'$$

La singularité est concentré au point $\theta_2 = \theta = \theta'$ tandis que la "pseudo"-singularité est située en $\theta' = \theta + 2\alpha$. On transforme le domaine d'intégration en une moitié du carré $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$F_{ij}^k = 4\rho^2 \alpha^2 \int_0^1 \int_0^\xi G_k(2\rho |\sin \alpha(\xi - \eta - 1)|) d\xi d\eta$$

En posant :

$$\xi = (1-u)v + u, \quad \eta = (1-u)v$$

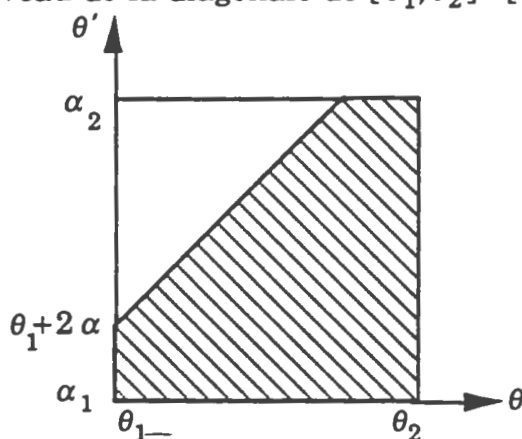
on déplace la singularité en $u = 0$ et la "pseudo"-singularité en $u = 1$ et on a:

$$F_{ij}^k = 4\rho^2 \alpha^2 \int_0^1 u G_k(2\rho |\sin(\alpha u)|) du$$

L'élimination des singularité et "pseudo"-singularité se fait comme dans le cas des éléments confondus et on procèdera toujours de même.

cas $\Delta x < t_k \leq d$

La figure 2 donne le domaine d'intégration. On sépare ce domaine en deux parties en coupant au niveau de la diagonale de $[\theta_1, \theta_2] \times [\alpha_1, \alpha_2]$.



- Figure 2 -

Ainsi l'intégrale de base F_{ij}^k se compose d'une intégrale contenant seulement la singularité en $\theta_2 = \theta = \theta'$ et d'une autre contenant seulement la "pseudo"-singularité en $\theta' = \theta + 2\alpha$. Après des changements de variables similaires à ceux décrit ci-dessus, on arrive à:

$$F_{ij}^k = \rho^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \int_0^1 u G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}u)|) du$$

$$+ \rho^2 |\theta_1 - \alpha_1 + 2\alpha| \int_0^1 |\theta_2 - \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1 - 2\alpha)\eta| G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}(1-\eta) + \alpha\eta)|) d\eta$$

La singularité logarithmique se retrouve dans la première de ces intégrales en $u=0$ tandis que la "pseudo"-singularité est dans la seconde intégrale en $\eta=1$.

cas $d < t_k$

L'intégration se fait sur tout $[\theta_1, \theta_2] \times [\alpha_1, \alpha_2]$ et seule la singularité en $\theta_2 = \theta = \theta'$ apparaît. Quelques calculs simples conduisent à:

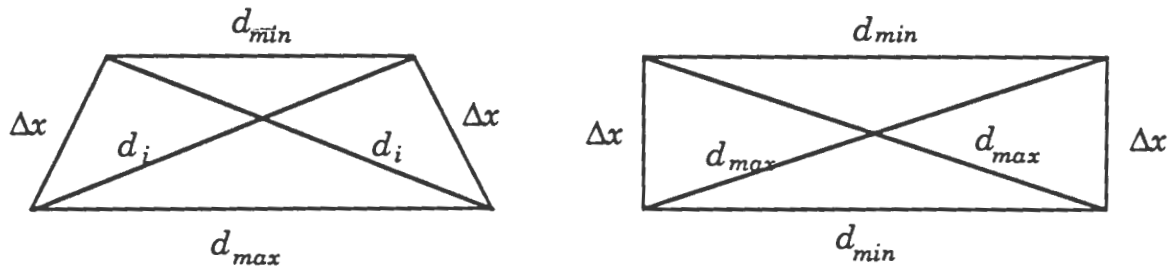
$$F_{ij}^k = \rho^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \left\{ \int_0^1 u G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}u)|) du \right.$$

$$\left. + \int_0^1 u G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}(2-u)|) du \right\}$$

L'argument de G_k ne s'annule que dans la première intégrale.

Eléments disjoints

Puisque les éléments n'ont aucun point en commun, nous n'aurons pas à traiter de singularité du type $\text{Log } R$. Par contre il subsiste la "pseudo"-singularité en $t_k = R$. Introduisons d'abord les notations: d_{min} désigne la distance minimale parmi les distances reliant les extrémités de Γ_i à celles de Γ_j , d_{max} la distance maximale et d_1 et d_2 les distances restantes. En fait puisque le cercle est découpé en morceaux d'égaux longueurs, on ne peut avoir que les deux cas suivants représentés par la figure 3: les segments "extérieurs" reliant les quatre extrémités de Γ_i, Γ_j forment un trapèze auquel cas $d_1 = d_2 = d_i$ ou un rectangle alors $d_1 = d_2 = d_{max}$ et $d_{min}^2 + \Delta x^2 = d_{max}^2$.



- Figure 3 -

cas $d_{min} \geq t_k$

Que ce soit dans le cas du trapèze ou du rectangle, l'intégrale F_{ij}^k est nulle.

cas $d_{min} < t_k \leq d_i$ (trapèze)

On note $\alpha_m = \text{Arcsin}(\frac{d_{min}}{2\rho})$. On va se placer dans un cas particulier, sachant que l'écriture finale de F_{ij}^k ne change pas, ceci étant aussi valable pour tous les cas traités précédemment. On suppose que:

$$d_{min} = 2\rho \left| \sin\left(\frac{\alpha_1 - \theta_2}{2}\right) \right|, \quad d_{max} = 2\rho \left| \sin\left(\frac{\alpha_2 - \theta_1}{2}\right) \right|$$

$$d_i = 2\rho \left| \sin\left(\frac{\alpha_p - \theta_p}{2}\right) \right| \quad \text{pour } p=1 \text{ ou } 2$$

et que de plus $\theta_1 < \theta_2$, $\alpha_1 < \alpha_2$. Alors on a:

$$F_{ij}^k = \rho^2 \int_{\alpha_1 - 2\alpha}^{\theta_2} \int_{\alpha_1}^{\theta + 2\alpha} G_k(2\rho \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|) d\theta d\theta'$$

soit encore:

$$F_{ij}^k = 4\rho^2 (\alpha - \alpha_m)^2 \int_0^1 u G_k(2\rho |\sin((1-u)\alpha_m + \alpha u)|) du$$

la "pseudo"-singularité se trouvant en $u=1$.

cas $d_i < t_k \leq d_{max}$ (trapèze)

On est dans un cas similaire à la figure 2:

$$F_{ij}^k = \rho^2 \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\alpha_1}^{\theta_2 + \alpha_1 - \theta_1} G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta - \theta'}{2})|) d\theta d\theta' \right. \\ \left. + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_2 + \alpha_1 - \theta_1}^{\theta_2 + 2\alpha} G_k(2\rho |\sin(\frac{\theta - \theta'}{2})|) d\theta d\theta' \right\}$$

On transforme ces deux intégrales en:

$$F_{ij}^k = \rho^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \int_0^1 u G_k(2\rho |\sin(\alpha_m + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} u)|) du + \rho^2 |\theta_1 - \alpha_1 + 2(\alpha - \alpha_m)| \\ \int_0^1 |\theta_2 - \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1 - 2(\alpha - \alpha_m))\eta| G_k(2\rho |\sin((\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \alpha_m)(1-\eta) + \alpha\eta)|) d\eta$$

Seule la seconde intégrale contient la "pseudo"-singularité.

cas $d_{max} < t_k$

Quelque soit le cas, on intègre sur tout $[\theta_1, \theta_2] \times [\alpha_1, \alpha_2]$. En suivant la procédure habituelle on obtient l'intégrale simple sans "pseudo"-singularité:

$$F_{ij}^k = \rho^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \int_0^1 u [G_k(2\rho |\sin(\alpha_m + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} u)|) \\ + G_k(2\rho |\sin(\alpha_m + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} (1+u))|)] du$$

cas $d_{min} < t_k \leq d_{max}$ (rectangle)

La figure 4 montre les deux triangles sur lesquels on intègre. L'intégration sur le triangle "inférieur droite" donne l'intégrale:

$$4\rho^2 (\alpha - \alpha_m)^2 \int_0^1 u G_k(2\rho |\sin((1-u)\alpha_m + \alpha u)|) du$$

alors que celle sur le triangle "supérieur gauche" amène à la même intégrale.

Dans tous les cas d'éléments, pour t_k assez grand, on n'a pas de "pseudo"-singularité puisque pour tous $X \in \Gamma_i$ et $Y \in \Gamma_j$, la distance $|X-Y|$ est toujours

strictement inférieure au temps t_k . Pour le cas des éléments disjoints, lorsque $t_k > d_{max}$, on n'a ni "pseudo"-singularité ni singularité dans le calcul de F_{ij}^k . Dans le cas des éléments confondus ($t_k > \Delta x$) et des éléments adjacents ($t_k > d$), il reste à traiter la singularité en $|X-Y| = t_k$. Toutefois si on calcule directement les matrices M^k sans passer par le calcul des F^k , on constate que la singularité disparaît. En effet, pour $t_{k-2} > \Delta x$ dans le cas des éléments confondus et $t_{k-2} > d$ dans le cas des éléments adjacents, en tenant compte de (2-8) et (2-10) et après quelques calculs simples, les éléments M_{ij}^k s'écrivent pour le schéma $\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1$:

$$M_{ij}^k = \iint_{\Gamma_i \times \Gamma_j / |X-Y| \leq t_{k-2}} H_k(|X-Y|) d\gamma(X) d\gamma(Y)$$

avec:

$$\begin{aligned} H_k(R) = & -\frac{3}{8\pi} \{t_{k+1}(t_{k+1}^2 - R^2)^{1/2} - t_k(t_k^2 - R^2)^{1/2}\} \\ & + \frac{3}{4\pi} \{t_k(t_k^2 - R^2)^{1/2} - t_{k-1}(t_{k-1}^2 - R^2)^{1/2}\} - \frac{3}{8\pi} \{t_{k-1}(t_{k-1}^2 - R^2)^{1/2} - t_{k-2}(t_{k-2}^2 - R^2)^{1/2}\} \\ & + \frac{1}{4\pi} \{Argch(\frac{t_{k+1}}{R}) - Argch(\frac{t_k}{R})\} (t_{k+1}^2 + \frac{R^2}{2}) + \frac{1}{4\pi} \{Argch(\frac{t_{k-1}}{R}) - Argch(\frac{t_{k-2}}{R})\} (t_{k-2}^2 + \frac{R^2}{2}) \\ & - \frac{1}{4\pi} \{Argch(\frac{t_k}{R}) - Argch(\frac{t_{k-1}}{R})\} (R^2 - 2\Delta t^2 + t_k^2 + t_{k-1}^2) \end{aligned}$$

Pour les deux autres schémas, si $t_{k-1} > \Delta x$ (éléments confondus) ou $t_{k-1} > d$ (éléments adjacents), l'élément ij de la matrice M^k est égal à :

$$M_{ij}^k = \iint_{\Gamma_i \times \Gamma_j / |X-Y| \leq t_{k-1}} H_k(|X-Y|) d\gamma(X) d\gamma(Y)$$

où le noyau H_k s'écrit en fonction du schéma:

◦ schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_1$

$$\begin{aligned} H_k(R) = & -\frac{1}{2\pi} \{(t_{k+1}^2 - R^2)^{1/2} - (t_k^2 - R^2)^{1/2}\} + \frac{1}{2\pi} \{(t_k^2 - R^2)^{1/2} - (t_{k-1}^2 - R^2)^{1/2}\} \\ & + \frac{t_{k+1}}{2\pi} \{Argch(\frac{t_{k+1}}{R}) - Argch(\frac{t_k}{R})\} - \frac{t_{k-1}}{2\pi} \{Argch(\frac{t_k}{R}) - Argch(\frac{t_{k-1}}{R})\} \end{aligned}$$

◦ schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_0$

$$H_k(R) = \frac{1}{2\pi} \{Argch(\frac{t_{k+1}}{R}) - Argch(\frac{t_k}{R})\} - \frac{1}{2\pi} \{Argch(\frac{t_k}{R}) - Argch(\frac{t_{k-1}}{R})\}$$

Puisque quelque soit le schéma les termes en *Argch* sont de la forme

$$\text{Argch}\left(\frac{t_k}{R}\right) - \text{Argch}\left(\frac{t_{k-1}}{R}\right) = \text{Log}(t_k + (t_k^2 - R^2)^{1/2}) - \text{Log}(t_{k-1} + (t_{k-1}^2 - R^2)^{1/2})$$

la singularité due au logarithme disparaît. On choisira donc de calculer plutôt M^k directement que de calculer les F^k séparément et d'obtenir M^k grâce aux combinaisons linéaires des F^k .

Surface exacte quelconque

On considère exacte la représentation de la courbe Γ donnée par le logiciel de CAO, CATIA, décrite par une suite finie de morceaux de courbes ayant une équation paramétrique du type:

$$x_1 = r(\lambda), \quad x_2 = z(\lambda) \quad \lambda \text{ abscisse curviligne}$$

où r et z sont des polynômes de degré $N \leq 11$:

$$r(\lambda) = \sum_{n=1}^{N+1} a_n \lambda^{n-1}, \quad z(\lambda) = \sum_{n=1}^{N+1} b_n \lambda^{n-1}$$

On a vu dans le cas d'un cercle que pour traiter la "pseudo"-singularité, il nous fallait connaître les points X, Y de Γ tels que $|X-Y| = t_k$. Donnons-nous donc un point $X = (x_1, x_2)$ de Γ et cherchons le point Y de Γ tel que $|X-Y| = t_k$. On suppose de plus pour simplifier que le temps t_k permet de considérer que X et Y appartiennent à la même portion de courbe et donc:

$$X = (x_1, x_2) = (r(\lambda_0), z(\lambda_0)) \quad Y = (y_1, y_2) = (r(\lambda), z(\lambda))$$

le réel λ_0 étant fixé, le réel λ est l'inconnue à déterminer grâce à:

$$(r(\lambda) - r(\lambda_0))^2 + (z(\lambda) - z(\lambda_0))^2 = t_k^2$$

Cela revient à trouver les racines d'un polynôme de degré $2N$ et à sélectionner les racines correspondant à la portion de courbe choisie. Des méthodes numériques existent pour calculer de telles racines. Rappelons que nous devons trouver les racines non pas d'un mais de plusieurs polynômes puisque t_k varie ($k = 0, \dots, n_T$) et pour chaque instant t_k , on aura forcément plusieurs λ_0 puisqu'il nous faut intégrer sur $\Gamma \times \Gamma$. En résumé, même sur des cas simples de courbes Γ , il nous faudrait trouver les racines d'un nombre conséquent (environ 1000) de polynômes d'où des temps de calcul considérables. Sans compter les problèmes d'intégration numérique.

3-2. Contour approché

La frontière Γ est approchée par un ensemble d'arcs de courbe polynômiaux d'ordre 1: chaque arc Γ_i ($\cup_i \Gamma_i = \Gamma$) est approché par le segment d'extrémités celles de Γ_i . Les intégrales à calculer sont égales à:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_{ih} \times \Gamma_{jh} / |X-Y| \leq t_k} \text{Argch}\left(\frac{t_k}{|X-Y|}\right) d\gamma(X) d\gamma(Y)$$

puisqu'on a choisi de ne traiter que le schéma $\mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_0$, les fonctions de base de l'espace V_h , approximation de $H^{-1/2}(\Gamma_h)$, étant prises constantes par morceaux. On ne suppose pas que les segments Γ_{ih} sont tous de la même longueur. On note Δx_i et Δx_j les longueurs respectives de Γ_{ih} et Γ_{jh} dans toute la suite. Comme pour la surface exacte, on considère les trois cas: éléments confondus, éléments adjacents et disjoints. Quelque soit le cas, on sait calculer F_{ij}^k de façon exacte c'est-à-dire sans faire intervenir de formules d'intégration numérique.

Éléments confondus

Le cas des éléments confondus est le plus simple à traiter. On note $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ les coordonnées cartésiennes des extrémités du segment Γ_{ih} . On suppose que Γ_{ih} a pour équation

$$y = a x + C_a, \quad x \in [x_1, x_2] \quad (\text{où on suppose } x_2 > x_1)$$

Cette hypothèse ne change en rien le résultat du calcul de F_{ij}^k . Alors:

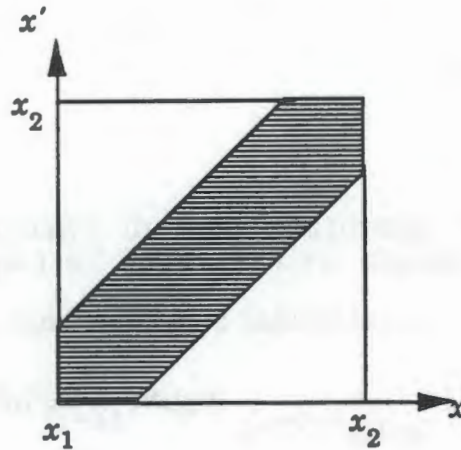
$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} (1+a^2) \int_{x \in [x_1, x_2]} \int_{x' \in [x_1, x_2]} H(t_k - \sqrt{1+a^2} |x-x'|) \text{Argch}\left(\frac{t_k}{\sqrt{1+a^2} |x-x'|}\right) dx dx'$$

où la fonction H est la fonction de Heaviside. Deux situations peuvent se produire: la longueur Δx_i est plus petite que le temps t_k auquel cas on a toujours $\sqrt{1+a^2} |x-x'| \leq t_k$ pour tout $(x, x') \in [x_1, x_2]^2$ ou $\Delta x_i > t_k$ et alors le domaine d'intégration est donné par la réunion des deux trapèzes (figure 4).

Récapitulons ces deux cas:

cas $\Delta x_i \leq t_k$

$$F_{ii}^k = -\frac{1}{2\pi} (1+a^2) \int_{x \in [x_1, x_2]} \int_{x' \in [x_1, x_2]} \text{Argch}\left(\frac{t_k}{\sqrt{1+a^2} |x-x'|}\right) dx dx'$$



- Figure 4 -

cas $\Delta x_i > t_k$

$$F_{ii}^k = -\frac{1}{2\pi} (1+a^2) 2 \left\{ \int_{x_1}^{x_2 - (t_k/\sqrt{1+a^2})} \int_x^{x + (t_k/\sqrt{1+a^2})} \text{Argch} \left(\frac{t_k}{\sqrt{1+a^2}|x-x'|} \right) dx dx' \right. \\ \left. + \int_{x_2 - (t_k/\sqrt{1+a^2})}^{x_2} \int_x^{x_2} \text{Argch} \left(\frac{t_k}{\sqrt{1+a^2}|x-x'|} \right) dx dx' \right\}$$

En utilisant les trois résultats suivants:

$$\int_a^b \text{Argch} \left(\frac{1}{y} \right) dy = \text{Arcsin } x \Big|_{x=a}^b + x \text{Argch} \left(\frac{1}{x} \right) \Big|_{x=a}^b \quad a \geq 0, b > 0$$

$$\int_a^b \text{Arcsin } y dy = [\sqrt{1-x^2} + x \text{Arcsin } x]_{x=a}^b \quad -1 \leq a < b \leq 1$$

$$\int_a^b y \text{Argch} \left(\frac{1}{y} \right) dy = \left[-\frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{2} \text{Argch} \left(\frac{1}{x} \right) \right]_{x=a}^b \quad 0 \leq a < b \leq 1$$

des calculs simples amènent à:

cas $\Delta x_i \leq t_k$

$$F_{ii}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(-1 + 2f \left(\frac{\Delta x_i}{t_k} \right) \right)$$

où on a définie la fonction f par:

$$(3-2) \quad f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + x \text{Arcsin } x + \frac{x^2}{2} \text{Argch} \left(\frac{1}{x} \right) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1$$

cas $\Delta x_i > t_k$

$$F_{ii}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(-1 + \frac{\Delta x_i}{t_k} \pi \right)$$

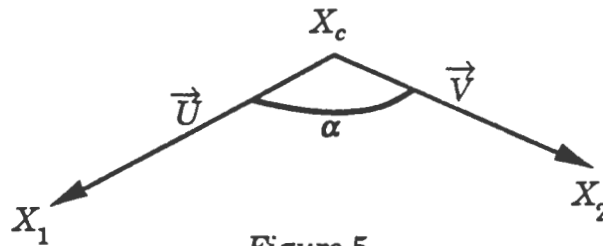
On vérifie bien qu'il y a continuité en $\Delta x_i = t_k$ puisque $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

Eléments adjacents

Puisque les éléments Γ_{ih} et Γ_{jh} sont adjacents, ils ont un point commun que nous notons $X_c = (x_c, y_c)$. L'autre extrémité de Γ_{ih} est $X_1 = (x_1, y_1)$ et celle de Γ_{jh} est $X_2 = (x_2, y_2)$. On définit l'angle α fait par les deux segments:

$$\alpha = \text{Arccos} \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{V}\| \|\vec{U}\|} \right)$$

où \vec{U} et \vec{V} sont les vecteurs de coordonnées cartésiennes $(x_1 - x_c, y_1 - y_c)$ et $(x_2 - x_c, y_2 - y_c)$ respectivement. La figure 5 représente l'angle α choisi.



- Figure 5 -

Un cas aux calculs similaires à ceux du cas des éléments confondus est quand $\alpha = \pi$ soit quand les segments sont portés par la même droite. Si d désigne la distance séparant X_1 de X_2 i.e ici $d = \Delta x_i + \Delta x_j$ alors on a:

cas $d \leq t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(\frac{1}{2} + f\left(\frac{d}{t_k}\right) - f\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}\right) - f\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) \right)$$

cas $d > t_k$, $\Delta x_i < t_k$, $\Delta x_j < t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{d}{t_k} - f\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}\right) - f\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) \right)$$

cas $\Delta x_i < t_k \leq \Delta x_j$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta x_i}{t_k} - f\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) \right)$$

cas $\Delta x_j < t_k \leq \Delta x_i$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta x_j}{t_k} - f\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}\right) \right)$$

cas $\Delta x_i \geq t_k, \Delta x_j \geq t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} t_k^2$$

la fonction f étant donnée par (3-2).

Soit maintenant l'angle $\alpha \neq \pi$. Alors la distance d s'écrit:

$$(3-3) \quad d^2 = \Delta x_i^2 + \Delta x_j^2 - 2 \Delta x_i \Delta x_j \cos \alpha$$

De même, si X est un point de Γ_{ih} et Y un point de Γ_{jh} , la distance de X à Y est donnée par une formule identique:

$$(3-4) \quad |X-Y|^2 = |X-X_c|^2 + |Y-X_c|^2 - 2 |X-X_c| |Y-X_c| \cos \alpha$$

Puisque Γ_{ih} est un segment, on peut écrire pour tout point X de Γ_{ih} :

$$X = (1-t)X_1 + tX_c, \quad t \in [0, 1]$$

De façon analogue, tout point Y de Γ_{jh} s'exprime en fonction d'un paramètre t' :

$$Y = (1-t')X_2 + t'X_c, \quad t' \in [0, 1]$$

En mettant ces deux expressions dans (3-4), on obtient :

$$|X-Y|^2 = (1-t)^2 \Delta x_i^2 + (1-t')^2 \Delta x_j^2 - 2(1-t)(1-t') \Delta x_i \Delta x_j \cos \alpha$$

D'autre part on a:

$$d\gamma(X) = \Delta x_i dt, \quad d\gamma(Y) = \Delta x_j dt'$$

On en déduit que:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} \Delta x_i \Delta x_j \int_0^1 \int_0^1 H(t_k - g(\tau, \tau')) \operatorname{Argch}\left(\frac{t_k}{g(\tau, \tau')}\right) d\tau d\tau'$$

où g est la fonction:

$$g(\tau, \tau') = (\tau^2 \Delta x_i^2 + (\tau')^2 \Delta x_j^2 - 2\tau\tau' \Delta x_i \Delta x_j \cos \alpha)^{1/2}$$

Le changement de variable:

$$x = \tau \frac{\Delta x_i}{t_k} \sin \alpha, \quad y = \tau' \frac{\Delta x_j}{t_k} - \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha}$$

conduit à:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \int_0^{\frac{\Delta x_i}{t_k} \sin \alpha} \int_{-\frac{x}{\operatorname{tg} \alpha}}^{\frac{\Delta x_j}{t_k} - \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha}} H(1 - \sqrt{y^2 + x^2}) \operatorname{Argch}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}}\right) dx dy$$

Cette dernière formulation est très pratique puisqu'on peut représenter clairement suivant les valeurs de t_k , Δx_i , Δx_j et α le domaine d'intégration. En fait, on dénombre un assez grand nombre de cas aussi ne donnerons nous qu'un calcul détaillé, les calculs des autres cas employant les mêmes techniques.

On choisit $\alpha < \frac{\pi}{2}$ et $\Delta x_j \leq t_k < \Delta x_i$ ainsi que $d < t_k$. De ces hypothèses, on tire la forme du domaine d'intégration. Puisque $\Delta x_j \leq t_k$, on a $\Delta x_j \sin \alpha \leq t_k$ et donc la droite $\frac{\Delta x_j}{t_k} - \frac{x}{tg \alpha}$ coupe le cercle $y = \sqrt{1-x^2}$ en deux points x_+ et x_- :

$$x_{\pm} = \sin \alpha \left(\frac{\Delta x_j}{t_k} \cos \alpha \pm \left(1 - \left(\frac{\Delta x_j}{t_k} \right)^2 \sin^2 \alpha \right)^{1/2} \right)$$

Toujours des hypothèses sur Δx_j , on voit que x_- est négatif. D'autre part le fait que $d < t_k$ implique que $x_+ > \frac{\Delta x_i}{t_k} \sin \alpha$ et $\Delta x_i \sin \alpha < t_k$. L'intégrale F_{ij}^k s'écrit alors:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ \int_0^{\sin \alpha} \int_{-\frac{x}{tg \alpha}}^{\frac{\Delta x_j}{t_k} - \frac{x}{tg \alpha}} \text{Argch} \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}} \right) dx dy \right. \\ \left. + \int_{\frac{\Delta x_i \sin \alpha}{\sin \alpha}}^{\frac{\Delta x_j \sin \alpha}{\sin \alpha}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\frac{\Delta x_j}{t_k} - \frac{x}{tg \alpha}} \text{Argch} \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}} \right) dx dy \right\}$$

On passe maintenant en coordonnées polaires dans chacune des intégrales. Si on note $\alpha_i = -\text{Arccos} \left(\frac{\Delta x_i}{t_k} \sin \alpha \right)$ et $\alpha_d = \pm \text{Arccos} \left(\frac{\Delta x_i}{d} \sin \alpha \right)$, le signe de α_d dépend de celui de $\Delta x_j - \Delta x_i \cos \alpha$ de la façon suivante:

$$\alpha_d > 0 \text{ si } \Delta x_j - \Delta x_i \cos \alpha > 0, \quad \alpha_d < 0 \text{ si } \Delta x_j - \Delta x_i \cos \alpha < 0$$

ce changement de variable conduit à:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ \int_0^1 \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha_2} r \text{Argch} \left(\frac{1}{r} \right) d\theta dr + \int_0^{r_1(\theta)} \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} r \text{Argch} \left(\frac{1}{r} \right) d\theta dr \right. \\ \left. + \int_0^{r_1(\theta)} \int_{\alpha_3}^{\frac{\pi}{2}} r \text{Argch} \left(\frac{1}{r} \right) d\theta dr \right\}$$

avec:

$$r_1(\theta) = \frac{\Delta x_i \sin \alpha}{t_k \cos \theta} \quad \text{et} \quad r_2(\theta) = \frac{\Delta x_j \sin \alpha}{t_k \cos(\theta - \alpha)}$$

Comme la primitive de $r \operatorname{Argch}(\frac{1}{r})$ est la fonction $r^2 \operatorname{Argch}(\frac{1}{r}) - \sqrt{1-r^2}$, on a:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} r_1^2(\theta) \operatorname{Argch}\left(\frac{1}{r_1(\theta)}\right) - \sqrt{1-r_1^2(\theta)} d\theta \right. \\ \left. + \int_{\alpha_3}^{\frac{\pi}{2}} r_2^2(\theta) \operatorname{Argch}\left(\frac{1}{r_2(\theta)}\right) - \sqrt{1-r_2^2(\theta)} d\theta \right\}$$

Il reste donc à calculer l'intégrale de la forme:

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) \operatorname{Argch}\left(\frac{1}{r(\theta)}\right) - \sqrt{1-r^2(\theta)} d\theta \quad \text{pour } r(\theta) = \frac{C}{\cos \theta} \text{ avec } C < 1$$

Pour θ_1 et θ_2 de mêmes signes, on a

$$(3-5) \quad I = \left[(1+C^2) \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-C^2}}\right) + C^2 \operatorname{tg} \theta \operatorname{Argch}\left(\frac{\cos \theta}{C}\right) - 2C \operatorname{Arctg}\left(\frac{\sqrt{C \cos^2 \theta - C^2}}{C \sin \theta}\right) \right]_{\theta=\theta_1}^{\theta_2}$$

On introduit les fonctions G^1 et G^2 :

$$(3-6) \quad G^1(x) = -(1-x \sin \alpha)^2 \pi$$

$$(3-7) \quad G^2(x, y, d) = -(1+x^2 \sin^2 \alpha) \operatorname{Arccos}\left(\frac{-t_k(y-x \cos \alpha)}{d \sqrt{1-x^2 \sin^2 \alpha}}\right) + x \sin \alpha (y-x \cos \alpha) \operatorname{Argch}\left(\frac{t_k}{d}\right)$$

$$-2x \sin \alpha \operatorname{Arctg}\left(\frac{\sqrt{1-d^2/t_k^2}}{y-x \cos \alpha}\right) \quad (+ 2x \sin \alpha \pi \text{ si } y-x \cos \alpha > 0)$$

On conclut que:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, \frac{\Delta x_j}{t_k}, d\right) + G^2\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}, \frac{\Delta x_i}{t_k}, d\right) - G^2\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}, 0, \Delta x_j\right) \right\}$$

On fait la liste de tous les cas à envisager et des résultats correspondants.

$$\Delta x_i \geq t_k, \Delta x_j \geq t_k$$

$$\circ \Delta x_j \sin \alpha < t_k$$

$$\square x_+ < \frac{\Delta x_i}{t_k} \sin \alpha$$

$$*(\Delta x_i \sin \alpha \geq t_k) \text{ ou } (\Delta x_i \sin \alpha < t_k \text{ et } \Delta x_j - \Delta x_i \cos \alpha < 0)$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^1\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}\right) \right\}$$

$$* \Delta x_i \sin \alpha < t_k \text{ et } \Delta x_j - \Delta x_i \cos \alpha > 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^1\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}\right) + G^1\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) \right\}$$

$$\square x_+ < \frac{\Delta x_i}{t_k} \sin \alpha$$

$$* d < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, \frac{\Delta x_j}{t_k}, d\right) + G^2\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}, \frac{\Delta x_i}{t_k}, d\right) \right\}$$

$$* d \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^1\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) \right\}$$

$$\circ \Delta x_j \sin \alpha \geq t_k$$

$$\square \Delta x_i \sin \alpha \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (\pi - \alpha)$$

$$\square \Delta x_i \sin \alpha \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^1\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) \right\}$$

$$\boxed{\Delta x_j > t_k \geq \Delta x_i}$$

$$\circ d \geq t_k$$

$$\square (\Delta x_j \sin \alpha \geq t_k) \text{ ou } (\Delta x_j \sin \alpha < t_k \text{ et } \Delta x_i - \Delta x_j \cos \alpha < 0)$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^1\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) - G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, 0, \Delta x_i\right) \right\}$$

$$\square \Delta x_j \sin \alpha < t_k \text{ et } \Delta x_i - \Delta x_j \cos \alpha > 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^1\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) + G^1\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}\right) - G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, 0, \Delta x_i\right) \right\}$$

$$\circ d < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, \frac{\Delta x_j}{t_k}, d\right) + G^2\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}, \frac{\Delta x_i}{t_k}, d\right) - G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, 0, \Delta x_i\right) \right\}$$

$$\boxed{\Delta x_i > t_k \geq \Delta x_j}$$

Il suffit de remplacer dans le cas $\Delta x_j > t_k \geq \Delta x_i$ la distance Δx_j par Δx_i et réciproquement dans tous les résultats et cas.

$$\boxed{\Delta x_i < t_k, \Delta x_j < t_k}$$

$$\circ d < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, \frac{\Delta x_j}{t_k}, d\right) + G^2\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}, \frac{\Delta x_i}{t_k}, d\right) - G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, 0, \Delta x_i\right) - G^2\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}, 0, \Delta x_j\right) \right\}$$

$$\circ d \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \left\{ (\pi - \alpha) + G^1\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}\right) + G^1\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}\right) - G^2\left(\frac{\Delta x_i}{t_k}, 0, \Delta x_i\right) - G^2\left(\frac{\Delta x_j}{t_k}, 0, \Delta x_j\right) \right\}$$

Eléments disjoints

On va distinguer deux grands cas: le cas où les droites portant les deux segments Γ_{ih} et Γ_{jh} sont sécantes et celui où ces droites sont parallèles et non confondues. Le cas des droites parallèles confondues est considéré comme le cas limite $\alpha = \pi$ des droites sécantes d'angle α .

Commençons par le cas des droites sécantes non parallèles formant un angle α choisi positif:

$$\alpha = \text{Arccos} \left(\frac{(x_1 - x_i)(x'_2 - x_i) + (y_1 - y_i)(y'_2 - y_i)}{|X_1 - X_i| |Y_2 - X_i|} \right)$$

les extrémités de Γ_{ih} étant notées $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ et celles de Γ_{jh} étant $Y_1 = (x'_1, y'_1)$ et $Y_2 = (x'_2, y'_2)$. Le point d'intersection des deux droites est désigné par $X_i = (x_i, y_i)$.

Soient $t_k x_0$ et $t_k y_0$ les distances maximales des extrémités de Γ_{ih} et Γ_{jh} , respectivement, au point X_i :

$$(3-8) \quad t_k x_0 = \max(|X_1 - X_i|, |X_2 - X_i|) = |X_l - X_i| \quad l = 1 \text{ ou } 2$$

$$(3-9) \quad t_k y_0 = \max(|Y_1 - X_i|, |Y_2 - X_i|) = |Y_m - X_i| \quad m = 1 \text{ ou } 2$$

La distance d du point X_l à Y_m est:

$$d^2 = t_k^2 (x_0^2 + y_0^2 - 2 x_0 y_0 \cos \alpha)$$

Soient maintenant $X \in \Gamma_{ih}$ et $Y \in \Gamma_{jh}$. La longueur $|X - Y|$ est donnée par:

$$\begin{aligned} |X - Y|^2 = & |X - X_l|^2 + |Y - Y_m|^2 + d^2 - 2 |X - X_l| |Y - Y_m| \cos \alpha - 2 |X - X_l| (|X_l - X_i| \\ & - \cos \alpha |Y_m - X_i|) - 2 |Y - Y_m| (|Y_m - X_i| - |X_l - X_i| \cos \alpha) \end{aligned}$$

Puisque X appartient au segment (X_1, X_2) et Y au segment (Y_1, Y_2) , on peut écrire:

$$|X - X_l| = t \Delta x_i, \quad |Y - Y_m| = t' \Delta x_j, \quad t, t' \in [0, 1]$$

On en déduit que:

$$|X - Y|^2 = t^2 \Delta x_i^2 + (t')^2 \Delta x_j^2 - 2 t t' \Delta x_i \Delta x_j \cos \alpha + 2 t \Delta x_i X_a + 2 t' \Delta x_j X_b + d^2 = g^2(t, t')$$

où on a noté:

$$X_a = -|X_l - X_i| + \cos \alpha |Y_m - X_i| \quad \text{et} \quad X_b = -|Y_m - X_i| + |X_l - X_i| \cos \alpha$$

L'intégrale de base devient alors:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} \Delta x_i \Delta x_j \int_0^1 \int_0^1 H(t_k - g(\tau, \tau')) \text{Argch} \left(\frac{t_k}{g(\tau, \tau')} \right) d\tau d\tau'$$

On fait d'abord le changement de variable $s = \tau \frac{\Delta x_i}{t_k}$, $s' = \tau' \frac{\Delta x_j}{t_k}$ alors

$$g\left(s \frac{t_k}{\Delta x_i}, s' \frac{t_k}{\Delta x_j}\right) = (s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \alpha + 2s \frac{X_a}{t_k} + 2s' \frac{X_b}{t_k} + \frac{d^2}{t_k^2})^{1/2}$$

En remarquant que:

$$x_0 = -\frac{1}{t_k} \frac{\cos \alpha X_b + X_a}{\sin^2 \alpha}, \quad y_0 = -\frac{1}{t_k} \frac{\cos \alpha X_a + X_b}{\sin^2 \alpha}$$

on voit que

$$g\left(s \frac{t_k}{\Delta x_i}, s' \frac{t_k}{\Delta x_j}\right) = ((s-x_0)^2 + (s'-y_0)^2 - 2 \cos \alpha (s-x_0)(s'-y_0))^{1/2} = h^2(s-x_0, s'-y_0)$$

Donc:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \int_{-x_0}^{\frac{\Delta x_i}{t_k} - x_0} \int_{-y_0}^{\frac{\Delta x_j}{t_k} - y_0} H(1-h(s,s')) \operatorname{Argch}\left(\frac{1}{h(s,s')}\right) ds ds'$$

et comme:

$$h(s,s') = ((-\cos \alpha s + s')^2 + \sin^2 \alpha s^2)^{1/2}$$

on retrouve la forme d'intégrale obtenue dans le cas des éléments adjacents:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} \int_{-x_0 \sin \alpha}^{\left(\frac{\Delta x_i}{t_k} - x_0\right) \sin \alpha} \int_{-y_0 - \frac{x}{t_k \alpha}}^{\frac{\Delta x_j}{t_k} - y_0 - \frac{x}{t_k \alpha}} H(1 - \sqrt{y^2 + x^2}) \operatorname{Argch}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}}\right) dx dy$$

Les techniques d'intégration sont alors celles du cas des éléments adjacents.

Quant au cas où les droites sont confondues, on fait $\alpha = \pi$ et on obtient:

$$d = (x_0 + y_0), \quad X_a = X_b = -t_k(x_0 + y_0)$$

Il est facile de voir que $h(s,s') = |s+s'|$ et donc:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \int_0^{\frac{\Delta x_i}{t_k}} \int_{-\frac{d}{t_k} + x}^{\frac{\Delta x_j - d}{t_k} + x} H(1-|y|) \operatorname{Argch}\left(\frac{1}{|y|}\right) ds ds'$$

Cette intégrale rappelle le type d'intégrales du cas des éléments confondus et se calculent effectivement de façon analogue. Il nous reste à calculer F_{ij}^k pour Γ_{ih} et Γ_{jh} portés par deux droites parallèles non confondues, à la suite de quoi nous donnerons une liste détaillée de tous les cas à traiter.

Soient $u_1 x + v_1 y = h_1$ et $u_2 x + v_2 y = h_2$ les équations des deux droites portant les segments (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) respectivement. Les droites étant parallèles, on a:

$$u_1 v_2 = u_2 v_1$$

On note *dist* la distance séparant les droites:

$$\text{si } v_1 = 0 \quad \text{dist} = \left| \frac{h_2}{u_2} - \frac{h_1}{u_1} \right|, \quad \text{si } v_1 \neq 0 \quad \text{dist} = \left(1 + \frac{u_1^2}{v_1^2}\right)^{-1/2} \left| \frac{h_2}{v_2} - \frac{h_1}{v_1} \right|$$

Soit maintenant x_a la distance définie par:

$$(3-10) \quad \text{si } v_1 = 0 \quad x_a = \min(y_1, y_2) - \max(y'_1, y'_2) = y_l - y'_m$$

$$(3-11) \quad \text{si } v_1 \neq 0 \quad x_a = \left(1 + \frac{u_1^2}{v_1^2}\right)^{1/2} [\min(x_1, x_2) - \max(x'_1, x'_2)] + \frac{u_1}{v_1} \left(1 + \frac{u_1^2}{v_1^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{h_2}{v_2} - \frac{h_1}{v_1}\right)$$

$$x_a = \left(1 + \frac{u_1^2}{v_1^2}\right)^{1/2} [x_l - x'_m] + \frac{u_1}{v_1} \left(1 + \frac{u_1^2}{v_1^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{h_2}{v_2} - \frac{h_1}{v_1}\right)$$

Quelques calculs montrent que x_a est la distance entre le point Y_m de la droite portant (Y_1, Y_2) et le point X_{M_l} , projection orthogonale de X_l sur cette même droite. Soient $X \in (X_1, X_2)$ et $Y \in (Y_1, Y_2)$, si on note Y_X la projection orthogonale de X sur la droite $u_2x + v_2y = h_2$, la distance de X à Y est donnée par:

$$|X-Y|^2 = |Y-Y_X|^2 + \text{dist}^2$$

et comme $|Y-Y_X|^2 = (x_a + |X-X_l| + |Y-Y_m|)^2$, en changeant d'inconnues

$$|X-X_l| = t \Delta x_i, \quad |Y-Y_m| = t' \Delta x_j$$

on a:

$$|X-Y|^2 = (t \Delta x_i + t' \Delta x_j + x_a)^2 + \text{dist}^2$$

En posant:

$$x = \tau \frac{\Delta x_i + x_a}{t_k} \quad \text{et} \quad y = \tau' \frac{\Delta x_j}{t_k} + x$$

l'intégrale de base s'écrit:

$$F_{i,j}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \int_{\frac{\Delta x_i}{t_k} + X_a}^{\frac{\Delta x_i}{t_k} + X_a} \int_x^{\frac{\Delta x_j}{t_k} + x} H(1 - \sqrt{y^2 + C^2}) \text{Argch}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + C^2}}\right) dx dy$$

où on a noté:

$$X_a = \frac{x_a}{t_k} \quad \text{et} \quad C = \frac{\text{dist}}{t_k}$$

Il est clair que F_{ij}^k peut s'exprimer sous la forme:

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} \int_{X_a/C}^{\frac{\Delta x_i}{\text{dist}} + X_a/C} \int_{\text{Arctg}x}^{\text{Arctg}(\frac{\Delta x_j}{\text{dist}} + x)} H(1-r(\theta)) r^2(\theta) \text{Argch}\left(\frac{1}{r(\theta)}\right) d\theta dx$$

où $r(\theta) = \frac{C}{\cos \theta}$. On détermine ensuite tous les cas de domaine d'intégration et on se sert de la formule:

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\cos^2 y} \left[C \text{tg} y \text{Argch}\left(\frac{\cos y}{C}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}{C \sin y}\right) + C \text{Arccos}\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-C^2}}\right) \right] dy \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{C^2}{\cos^2 \theta}\right)^{1/2} + C^2 \text{tg} \theta \text{Arccos}\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-C^2}}\right) + \frac{C^2}{2} (\text{tg}^2 \theta - 1) \text{Argch}\left(\frac{\cos \theta}{C}\right) \right. \\ & \quad \left. - C \text{tg} \theta \text{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\cos^2 \theta - C^2}}{C \sin \theta}\right) \right]_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

où θ_1 et θ_2 sont deux angles quelconques.

Nous dressons la liste de tous les cas et tous les résultats pour les éléments disjoints. On commence par le cas le plus simple: les deux segments sont sur la même droite. La distance d est alors la distance maximale parmi toutes les distances joignant les extrémités de Γ_{ih} et Γ_{jh} . On note d_0 la distance minimale. La fonction f qui apparaît est celle donnée par (3-2) (éléments confondus).

Droites confondues ($\alpha = \pi$)

$$d_0 = \min_{i,j=1,2} |X_i - Y_j|, \quad d = d_0 + \Delta x_i + \Delta x_j, \quad d_1 = \Delta x_i + d_0, \quad d_2 = \Delta x_j + d_0$$

• $d_0 \geq t_k$

$$F_{ij}^k = 0$$

• $d < t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(f\left(\frac{d}{t_k}\right) - f\left(\frac{d_1}{t_k}\right) - f\left(\frac{d_2}{t_k}\right) + f\left(\frac{d_0}{t_k}\right) \right)$$

• $d_0 < t_k, d \geq t_k$

□ $d_1 \geq t_k$ * $d_2 \geq t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(f\left(\frac{d_0}{t_k}\right) - \frac{\pi d_0}{2 t_k} \right)$$

□ $d_1 > t_k$ * $d_2 \geq t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(f\left(\frac{d_0}{t_k}\right) - f\left(\frac{d_2}{t_k}\right) + \frac{\pi \Delta x_j}{2 t_k} \right)$$

□ $d_1 < t_k$ * $d_2 > t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(f\left(\frac{d_0}{t_k}\right) - f\left(\frac{d_1}{t_k}\right) + \frac{\pi \Delta x_i}{2 t_k} \right)$$

□ $d_1 > t_k$ * $d_2 < t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left(f\left(\frac{d_0}{t_k}\right) - f\left(\frac{d_2}{t_k}\right) + \frac{\pi d}{2 t_k} - f\left(\frac{d_1}{t_k}\right) \right)$$

On passe maintenant au cas des droites sécantes d'angle α . Avant de traiter séparément les cas $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$, on introduit des notations communes à ces deux cas. On définit les quatres distances liant les points extrémités de Γ_{ih} et Γ_{jh} à partir des distances (3-8) et (3-9) et de $x'_0 = x_0 - \Delta x_i$, $y'_0 = y_0 - \Delta y_j$:

$$d^2 = t_k^2(x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0 \cos \alpha), \quad d_0^2 = t_k^2(x_0'^2 + y_0'^2 - 2x_0'y_0' \cos \alpha)$$

$$d_2^2 = t_k^2(x_0^2 + y_0'^2 - 2x_0y_0' \cos \alpha), \quad d_1^2 = t_k^2(x_0'^2 + y_0^2 - 2x_0'y_0 \cos \alpha)$$

Les fonctions G^1 et G^2 étant celles données en (3-6) et (3-7), on pose:

$$J_3^4 = G^2(x_0, y_0, d) - G^2(x_0, y_0', d_1), \quad J_1^4 = G^2(y_0', x_0, d_1) - G^2(y_0', x_0', d_0)$$

$$J_4^4 = G^2(x_0', y_0, d_2) - G^2(x_0', y_0', d_0), \quad J_2^4 = G^2(y_0, x_0, d) - G^2(y_0, x_0', d_2)$$

$$J_1^3 = G^1(y_0') - G^2(y_0', x_0', d_0), \quad J_2^3 = G^1(y_0) - G^2(y_0, x_0', d_2), \quad J_3^3 = G^2(x_0, y_0, d)$$

$$J_4^3 = G^2(x_0', y_0, d_2)$$

$$J_1^2 = G^2(y_0', x_0, d_1), \quad J_2^2 = G^2(y_0, x_0, d), \quad J_3^2 = G^1(x_0) - G^2(x_0, y_0', d_1)$$

$$J_4^2 = G^1(x_0') - G^2(x_0', y_0', d_0)$$

$$J_1^1 = G^1(y_0'), \quad J_2^1 = G^1(y_0), \quad J_3^1 = G^1(x_0), \quad J_4^1 = G^1(x_0')$$

Droites sécantes, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$

◦ $d_0 \geq t_k$

$$F_{ij}^k = 0$$

◦ $d < t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (J_3^4 - J_1^4 - J_4^4 + J_2^4)$$

◦ $d_0 < t_k, d \geq t_k$

$$\square d_1 \geq t_k \quad *d_2 \geq t_k \quad F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^2)$$

$$\square d_1 > t_k \quad *d_2 \geq t_k \quad F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^4 + J_2^3)$$

$$\square d_1 < t_k \quad *d_2 > t_k \quad F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^4 - J_4^2 + J_2^3)$$

$$\square d_1 > t_k \quad *d_2 < t_k \quad F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^4 - J_4^4 + J_2^3 + J_3^3)$$

Droites sécantes, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

◦ $x'_0 \sin \alpha \geq 1$ ou $y'_0 \sin \alpha \geq 1$

$$F_{ij}^k = 0$$

◦ $x'_0 \sin \alpha < 1$ et $y'_0 \sin \alpha < 1$

□ $d_0 \geq t_k$ et $y'_0 - x'_0 \cos \alpha \geq 0$ * $x'_0 - y'_0 \cos \alpha \geq 0$

$$F_{ij}^k = 0$$

□ $d_0 \geq t_k$ et $y'_0 - x'_0 \cos \alpha \geq 0$ * $x'_0 - y'_0 \cos \alpha < 0$

⊗ $d_1 \geq t_k$ et $x_0 - y'_0 \cos \alpha \geq 0$

$$y_0 \sin \alpha \geq 1$$

* $(x_0 \sin \alpha \geq 1)$ ou $(x_0 \sin \alpha < 1$ et $y'_0 - x_0 \cos \alpha \geq 0)$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^1)$$

* $(x_0 \sin \alpha \geq 1)$ ou $(x_0 \sin \alpha < 1$ et $y'_0 - x_0 \cos \alpha \geq 0)$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^1 + J_3^1)$$

$$y_0 \sin \alpha < 1$$

→ $d \geq t_k$ et $x_0 - y_0 \cos \alpha \geq 0$

* $(x_0 \sin \alpha \geq 1)$ ou $(x_0 \sin \alpha < 1$ et $(y'_0 - x_0 \cos \alpha)(y_0 - x_0 \cos \alpha) \geq 0)$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^1 + J_2^1)$$

* $x_0 \sin \alpha < 1$ et $(y'_0 - x_0 \cos \alpha)(y_0 - x_0 \cos \alpha) < 0$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^1 + J_2^1 + J_3^1)$$

$\rightarrow d \geq t_k$ et $x_0 - y_0 \cos \alpha < 0$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^1 + J_3^1)$$

$\rightarrow d < t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^1 + J_2^2 + J_3^3)$$

⊗ $d_1 \geq t_k$ et $x_0 - y'_0 \cos \alpha < 0$

$$F_{ij}^k = 0$$

⊗ $d_1 < t_k$

$(y_0 \sin \alpha \geq 1)$ ou $(y_0 \sin \alpha < 1$ et $d \geq t_k$ et $x_0 - y_0 \cos \alpha < 0)$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^2 + J_3^2)$$

$y_0 \sin \alpha < 1$ et $d \geq t_k$ et $x_0 - y_0 \cos \alpha \geq 0$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^2 + J_3^2 + J_2^1)$$

$y_0 \sin \alpha < 1$ et $d < t_k$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^2 + J_3^4 + J_2^2)$$

□ $d_0 \geq t_k$ et $y'_0 - x'_0 \cos \alpha < 0$

pour ce cas on remplacera x_0 par y_0 et réciproquement et x'_0 par y'_0 dans le cas $d_0 \geq t_k$ et $y'_0 - x'_0 \cos \alpha \geq 0$.

$$\square d_0 < t_k$$

$$* d_1 \geq t_k$$

$$\circ d_2 \geq t_k$$

$$(y_0 \sin \alpha \geq 1) \text{ ou } (y_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } x'_0 - y_0 \cos \alpha \geq 0)$$

$$\rightarrow (x_0 \sin \alpha \geq 1) \text{ ou } (x_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } y'_0 - x_0 \cos \alpha \geq 0)$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^2)$$

$$\rightarrow x_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } y'_0 - x_0 \cos \alpha < 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^2 + J_3^1)$$

$$y_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } x'_0 - y_0 \cos \alpha < 0$$

$$\rightarrow d \geq t_k \text{ et } x_0 - y_0 \cos \alpha \geq 0$$

$$* (x_0 \sin \alpha \geq 1) \text{ ou } (x_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } (y'_0 - x_0 \cos \alpha)(y_0 - x_0 \cos \alpha) \geq 0)$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^2 + J_2^1)$$

$$* x_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } (y'_0 - x_0 \cos \alpha)(y_0 - x_0 \cos \alpha) < 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^2 + J_2^1 + J_3^1)$$

$$\rightarrow d \geq t_k \text{ et } x_0 - y_0 \cos \alpha < 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^2 + J_3^1)$$

$$\rightarrow d < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^2 + J_2^2 + J_3^3)$$

$$\otimes d_2 < t_k$$

$$d \geq t_k$$

$$\rightarrow (x_0 \sin \alpha \geq 1) \text{ ou } (x_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } (y'_0 - x_0 \cos \alpha)(y_0 - x_0 \cos \alpha) \geq 0)$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^4 + J_2^3)$$

$$\rightarrow x_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } (y'_0 - x_0 \cos \alpha)(y_0 - x_0 \cos \alpha) < 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^4 + J_2^3 + J_3^1)$$

$$d < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^3 - J_4^4 + J_2^4 + J_3^3)$$

$$* d_1 \geq t_k$$

$$\otimes d_2 \geq t_k$$

$$d \geq t_k$$

$$\rightarrow (y_0 \sin \alpha \geq 1) \text{ ou } (y_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } (x'_0 - y_0 \cos \alpha)(x_0 - y_0 \cos \alpha) \geq 0)$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^4 - J_4^2 + J_3^2)$$

$$\rightarrow y_0 \sin \alpha < 1 \text{ et } (x'_0 - y_0 \cos \alpha)(x_0 - y_0 \cos \alpha) < 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^4 - J_4^2 + J_2^1 + J_3^2)$$

$$d < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^4 - J_4^2 + J_2^2 + J_3^4)$$

$$\otimes d_2 < t_k$$

$$d \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^4 - J_4^4 + J_2^3 + J_3^2)$$

$$d < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{t_k^2}{\sin \alpha} (-J_1^4 - J_4^4 + J_2^4 + J_3^4)$$

Pour finir on a le cas des droites parallèles non confondues. Alors on note:

$$X_a^1 = X_a + \frac{\Delta x_j}{t_k}, X_a^2 = X_a + \frac{\Delta x_i}{t_k}, X_a^0 = X_a + \frac{\Delta x_j}{t_k} + \frac{\Delta x_i}{t_k}$$

Les distances aux quatres extrémités sont données par:

$$d^2 = dist^2 + t_k^2 X_a^2, d_1^2 = dist^2 + t_k^2 (X_a^1)^2, d_2^2 = dist^2 + t_k^2 (X_a^2)^2, d_0^2 = dist^2 + t_k^2 (X_a^0)^2$$

On définit G par:

$$G(d, X) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{d}{t_k} \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d}{t_k} \right)^2 - \left(\frac{dist}{t_k} \right)^2 \right) \text{Argch} \left(\frac{t_k}{d} \right) + X \frac{dist}{t_k} \text{Arccos} \left(\frac{t_k X}{d \sqrt{1 - C^2}} \right) - X \text{Arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - (d/t_k)^2}}{X} \right)$$

Droites parallèles non confondues

◦ $dist \geq t_k$

$$F_{ij}^k = 0$$

◦ $dist < t_k$

* $d < t_k$

$$d_0 < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d_0, X_a^0) + G(d, X_a) - G(d_1, X_a^1) - G(d_2, X_a^2) - \frac{\Delta x_i}{t_k} \pi + \pi [\text{sup}(X_a^0, 0) - \text{sup}(X_a^1, 0) + \text{inf}(X_a^2, 0) - \text{inf}(X_a, 0)])$$

$$d_0 \geq t_k$$

$$\circledast d_1 < t_k \quad * d_2 < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d, X_a) - G(d_1, X_a^1) - G(d_2, X_a^2) + \pi X_a^1 + \pi [\text{inf}(X_a^2, 0) - \text{inf}(X_a, 0) - \text{sup}(X_a^1, 0)])$$

$$\circledast d_1 < t_k \quad * d_2 \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d, X_a) - G(d_1, X_a^1) + \pi X_a^1 - \pi [\text{inf}(X_a, 0) + \text{sup}(X_a^1, 0)])$$

$$\otimes d_1 \geq t_k \quad * d_2 < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d, X_a) - G(d_2, X_a^2) + \pi [\inf(X_a^2, 0) - \inf(X_a, 0)])$$

$$\otimes d_1 \geq t_k \quad * d_2 \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d, X_a) - \pi \inf(X_a, 0))$$

$$* d \geq t_k \text{ et } X_a \geq 0$$

$$F_{ij}^k = 0$$

$$* d \geq t_k \text{ et } X_a < 0$$

$$\otimes d_2 \geq t_k \text{ et } X_a^2 < \bar{0}$$

$$* d_0 \geq t_k \text{ et } X_a^0 < 0$$

$$F_{ij}^k = 0$$

$$* d_0 \geq t_k \text{ et } X_a^0 \geq 0$$

$$\rightarrow d_1 \geq t_k \text{ et } X_a^1 < 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (1 - C) \pi X_a^0$$

$$\rightarrow d_1 \geq t_k \text{ et } X_a^1 \geq 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (1 - C) \pi \frac{\Delta x_i}{t_k}$$

$$\rightarrow d_1 < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \{ (1 - C) \pi X_a^0 + C \pi X_a^1 - G(d_1, X_a^1) - \pi \sup(X_a^1, 0) \}$$

$$* d_0 < t_k$$

$$\rightarrow d_1 \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d_0, X_a^0) + \pi \sup(X_a^0, 0) - C \pi X_a^0)$$

$$\rightarrow d_1 < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d_0, X_a^0) - G(d_1, X_a^1) - C \frac{\Delta x_i}{t_k} \pi + \pi [\sup(X_a^0, 0) - \sup(X_a^1, 0)])$$

$$\otimes d_2 \geq t_k \text{ et } X_a^2 \geq 0$$

$$* d_1 \geq t_k \text{ et } X_a^1 < 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (1-C) \pi \frac{\Delta x_j}{t_k}$$

$$* d_1 \geq t_k \text{ et } X_a^1 \geq 0$$

$$F_{ij}^k = \frac{1}{2\pi} t_k^2 (1-C) \pi X_a$$

$$* d_1 < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 \left\{ (1-C) \pi \frac{\Delta x_j}{t_k} + C \pi X_a^1 - G(d_1, X_a^1) - \pi \sup(X_a^1, 0) \right\}$$

$$\otimes d_2 < t_k$$

$$* d_0 < t_k$$

$$\rightarrow d_1 < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d_0, X_a^0) - G(d_1, X_a^1) - G(d_2, X_a^2) - \pi X_a^2 + C \pi X_a + \pi [\inf(X_a^2, 0) + \sup(X_a^0, 0) - \sup(X_a^1, 0)])$$

$$\rightarrow d_1 \geq t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (G(d_0, X_a^0) - G(d_2, X_a^2) - \pi X_a^2 - C \pi \frac{\Delta x_j}{t_k} + \pi [\sup(X_a^0, 0) + \inf(X_a^2, 0)])$$

$$* d_0 \geq t_k$$

$$\rightarrow d_1 < t_k$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (-G(d_1, X_a^1) - G(d_2, X_a^2) + C \pi X_a^1 + (1-C) \pi \frac{\Delta x_j}{t_k} - \pi [\sup(X_a^1, 0) - \inf(X_a^2, 0)])$$

$$\rightarrow d_1 \geq t_k \text{ et } X_a^1 \geq 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (-G(d_2, X_a^2) - (1-C) \pi X_a + \pi \inf(X_a^2, 0))$$

$$\rightarrow d_1 \geq t_k \text{ et } X_a^1 \geq 0$$

$$F_{ij}^k = -\frac{1}{2\pi} t_k^2 (-G(d_2, X_a^2) + (1-C) \pi \frac{\Delta x_j}{t_k} + \pi \inf(X_a^2, 0))$$

Etant donné le grand nombre de cas à considérer, il faudra dans l'avenir pour traiter des problèmes plus complexes (problème dissipatif, obstacle tridimensionnel) introduire des formules d'intégration numérique dans l'une (ou les deux) intégrales sur Γ_h pour réduire la complexité et le temps de calcul des F^k tout en gardant un ordre de précision acceptable.

Résultats numériques

On teste la stabilité et la convergence des trois schémas décrits dans le chapitre I. Pour valider nos résultats, on a utilisé le résultat d'amplitude limite donné dans la partie A, chapitre I de ce travail: en envoyant sur le cylindre une onde plane harmonique en temps, on récupère l'onde diffractée, solution de l'équation de Helmholtz hors de l'obstacle. Ainsi on a pu comparer les résultats de notre code EOLE d'équations intégrales espace-temps et ceux du code BENOUE 2D développé au CEA-CESTA, mettant en oeuvre une méthode d'équations intégrales en régime harmonique.

1-Mise en oeuvre numérique

On donne quelques précisions sur la construction du programme et sur ce qu'il calcule exactement.

1-1. Construction du code

La partie principale du code consiste en la résolution du système matriciel:

$$\begin{cases} M^0 A^0 = B^0 \\ M^0 A^n = - \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k} A^k + B^n, 1 \leq n \leq n_t \end{cases}$$

pour trouver les inconnues A^k , k variant de 0 à n_t où n_t est l'entier correspondant au temps $t_{n_t} = n_t \Delta t$ où l'on veut arrêter les calculs. Chaque vecteur A^k est de dimension N où N est le nombre d'éléments du maillage du contour Γ . Les matrices M^k sont carrées réelles symétriques de dimension $N \times N$. La connaissance des vecteurs A^0, A^1, \dots, A^{n_t} permet de déterminer les

courants jusqu'au temps $(n_t + 1)\Delta t$. La matrice M^0 étant, quelque soit le schéma, (on a renommé M^0 la matrice \overline{M}^1 du schéma $\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1$) définie positive, on utilise la méthode de Cholesky LL^t pour "inverser" cette matrice. Pour obtenir une matrice M^0 très creuse, dans le cas où le contour Γ est un cercle, on a introduit le rapport:

$$\alpha = \frac{c \Delta t}{\Delta x}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Si ce rapport est plus petit que 1, on voit que lorsque Γ est un cercle (ou un carré, une ellipse ou toute autre forme simple avec Δx assez petit) la matrice M^0 est de la forme:

$$(1-1) \quad M^0 = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & \dots & * \\ * & * & * & 0 & \dots & \dots \\ \dots & * & * & * & \dots & \dots \\ \dots & \dots & * & * & * & \dots \\ 0 & \dots & \dots & * & * & * \\ * & 0 & \dots & \dots & * & * \end{bmatrix}$$

où les seuls éléments non nuls sont représentés par une étoile, ceci quand on numérote les morceaux de courbe dans le sens de l'abscisse curviligne croissante (ou décroissante). Il suffit alors de stocker trois vecteurs (la matrice étant symétrique) soit $N + (N-1) + (N-2)$ inconnues. L'inversion par une méthode de Cholesky profil est alors très rapide. Bien sûr, dans le cas d'un contour quelconque, la matrice M^0 peut très bien ne plus être de la forme (1-1) et en particulier être beaucoup plus pleine. A priori le réel α n'est pas forcément plus petit que 1. On verra par la suite le rôle joué par α .

En ce qui concerne les matrices M^k , $k \geq 1$, on voit qu'à chaque étape n , on a besoin de connaître n matrices. Au total, pour calculer le courant jusqu'au temps $(n_t + 1)\Delta t$, il nous faut conserver n_t matrices. Sachant que toutes ces matrices sont symétriques, on garde en mémoire $n_t \times N \times \frac{N+1}{2}$ réels. Si l'on veut éviter de stocker les n_t "demi"-matrices, on peut les calculer à chaque pas de temps. Cette méthode s'avère très onéreuse en temps lorsqu'il s'agit de calculer la SER (surface équivalente radar) pour un balayage en fréquences : on résoud alors le système matriciel n_f fois où n_f est le nombre de fréquences d'où $n_f \times (n_t + n_t - 1 + \dots + 2 + 1)$ matrices à calculer!

Au contraire de ce qui se passe en dimension trois, on ne sait pas dire où sont les éléments non nuls des matrices M^k . En 3D on pourra se reporter à [13] pour trouver un stockage optimal des matrices M^k .

Quelques développements asymptotiques nous permettent de voir que pour k grand, la matrice M^k a un terme dominant en $\frac{1}{k}$ pour les schémas P_1-P_1 et P_0-P_1 et en $\frac{1}{k^2}$ pour le schéma P_0-P_0 . Une façon de réduire le nombre de réels M_{ij}^k , $k=0, \dots, n_t$ à stocker est de dire que pour k grand, $M^k = 0$. Si cette méthode semble fournir des résultats convaincants pour le schéma P_0-P_0 , elle est nettement moins bonne pour les deux autres schémas puisqu'en général l'entier k_a tel que l'on puisse prendre $M^{k_a} = 0$ est supérieur à l'entier n_t correspondant au temps d'arrêt du calcul.

1-2. Calcul des inconnues

On rappelle que le calcul des vecteurs A^k nous permet de reconstruire le courant approché p défini par:

$$p(t, x) = -\frac{\partial e_z}{\partial n}(t, x) \quad \text{pour } x \in \Gamma \text{ (ou } \Gamma_h), t > 0$$

où e_z est la composante suivant l'axe du cylindre Oz du champ électrique diffracté total. Le courant électrique j calculé en électromagnétisme est relié à p par la relation:

$$j(t, x) = -\frac{1}{\mu} \int_0^t p(t, x) dt$$

où μ désigne la perméabilité du vide. On explicite pour chaque schéma le lien entre les $A^k = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_N^k)^T$ et ces courants:

◦ Schémas P_0-P_1 ou P_1-P_1 : pour $x \in \Gamma_j$ (ou Γ_{jh}) et $t \in [t_n, t_{n+1}]$

$$p(t, x) = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} a_j^k + a_j^n (t - t_n)$$

$$j(t, x) = -\frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{2}(t - t_n)^2 a_j^n + \Delta t \left(t - \frac{t_{2n-1}}{2} \right) \sum_{k=0}^{n-1} a_j^k + \Delta t^2 \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) a_j^k \right\}$$

◦ Schéma P_0-P_0 : pour $x \in \Gamma_j$ (ou Γ_{jh}) et $t \in]t_n, t_{n+1}]$

$$p(t, x) = a_j^n$$

$$j(t, x) = -\frac{1}{\mu} \left\{ \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} a_j^k + a_j^n (t - t_n) \right\}$$

En dimension deux, la SER (surface équivalente radar) est donnée par la formule:

$$s(k, u, u') = \frac{i}{4} \left(\frac{2i}{\pi k} \right)^{1/2} \int_{\Gamma} e^{-ik u' \cdot x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial n} + ik u' \cdot n v_z \right) d\gamma(x)$$

où k est le nombre d'onde, u la direction d'incidence et u' celle d'observation. L'onde diffractée v_z est solution du problème harmonique:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)v_z = 0 \text{ dans } \Omega \\ v_z = -e^{ik u \cdot x} \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

et vérifie la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini. On a:

$$v_z(r\theta) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} s(k, u, -\theta) + o\left(\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}\right) \text{ quand } r \rightarrow +\infty$$

Le principe d'amplitude limite démontré dans la partie A reste pertinent en dimension deux: ainsi si on calcule pour un temps t assez grand l'onde diffractée solution de:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c^2 \Delta) E_z = 0 \text{ dans } \Omega \\ E_z = -e^{-i\omega t} e^{ik u \cdot x} Y(x \cdot u - ct) \text{ sur } \Gamma \\ E_z(t, \cdot) = 0 \text{ } t \leq 0 \end{cases}$$

où $\omega = kc$ est la pulsation et on a supposé qu'à l'instant $t = 0$ l'onde incidente touche l'obstacle. Alors on a:

$$e^{i\omega t} E_z(t, x) \sim v_z \text{ pour } t \text{ grand}$$

ce qui nous donne un procédé de calcul de la SER par une méthode dépendant du temps:

$$s(k, u, u') = \frac{i}{4} \left(\frac{2i}{\pi k} \right)^{1/2} \int_{\Gamma} e^{i\omega t} e^{-ik u' \cdot x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial n}(t, x) + ik u' \cdot n E_z(t, x) \right) d\gamma(x)$$

soit en fonction du courant p :

$$(1-2) \quad s(k, u, u') = -\frac{i}{4} \left(\frac{2i}{\pi k} \right)^{1/2} \int_{\Gamma} e^{-ik u' \cdot x} \left(e^{i\omega t} p(t, x) + ik (u + u') \cdot n e^{ik u \cdot x} \right) d\gamma(x)$$

2-Tests numériques

On présente maintenant quelques résultats numériques obtenus en utilisant les trois schémas construits au chapitre précédent. On considère plusieurs ondes incidentes et différentes formes simples (cercle, carré, ellipse) de contour Γ .

2-1. Choix de l'onde incidente

Jusqu'ici nous n'avons pas fait de restriction sur le champ incident E_z^i excepté qu'il atteint l'obstacle en $t=0$. Dans ce qui suit, nous choisissons uniquement des ondes planes, se propageant dans la direction des x négatifs. Deux cas d'ondes incidentes sont traités: E_z^i est une oscillation entretenue, auquel cas l'onde diffractée (temporelle) est liée à celle solution du problème harmonique, E_z^i est une impulsion. Si on note x_0 le point de l'axe des x appartenant à Γ , l'onde E_z^i est de la forme:

$$E_z^i(t, x) = f(t - (x - x_0)/c)$$

Onde plane harmonique

On va choisir trois régularité d'ondes harmoniques: la fonction f est d'ordre \mathcal{C}^0 , \mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^2 .

onde \mathcal{C}^0 : la fonction f s'écrit

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ -i \sin \omega t, & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \\ e^{-i\omega t}, & t \geq \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Dans les deux autres cas, on a:

$$f(t) = \chi(t) e^{-i\omega t}$$

avec $\chi(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et dans le cas de l'onde \mathcal{C}^1 :

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\sin \omega(t - \frac{\pi}{2\omega}) + 1], & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \\ 1, & t \geq \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

tandis que pour l'onde \mathcal{E}^2 on a :

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} [\sin \omega(t - \frac{\pi}{2\omega}) + 1] + \omega \frac{t}{8} \sin \omega(t - \frac{\pi}{\omega}) , & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \\ \frac{1}{4} [\sin \omega(t - \frac{3\pi}{2\omega}) + 3] + (\frac{2\pi}{\omega} - t) \frac{\omega}{8} \sin \omega(t - \frac{\pi}{\omega}) , & t \in [\frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}] \\ 1 & t \geq \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

On verra que la régularité \mathcal{E}^2 donnera les meilleurs résultats. L'onde diffractée $E_z(t, x)$ est bien évidemment un complexe.

Impulsion

Ce que nous appelons impulsion est une onde plane sinusoïdale sur une période:

$$(2-1) \quad f(t) = \begin{cases} 1 - \cos \omega t , & t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}] \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

L'onde incidente ayant un support compact en un point donné, on s'attend à ce que, pour $t \rightarrow \infty$ l'amplitude de l'onde diffractée donc du courant tende vers 0.

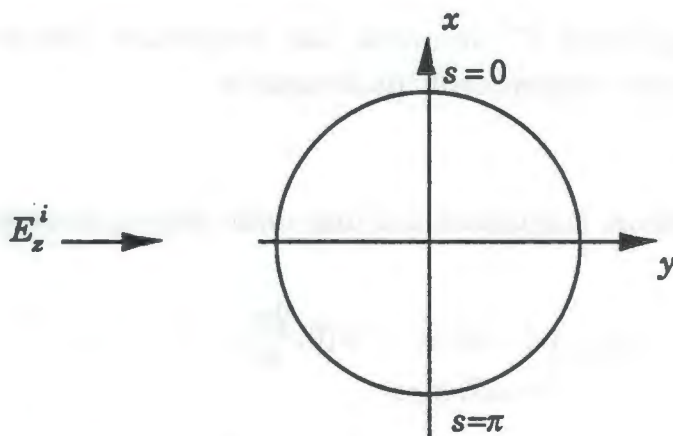
2-2. Présentation et commentaires des tests numériques

Dans un premier temps, on va s'intéresser aux schémas construits en conservant le contour Γ . Ceci nous permet de tirer les conclusions sur chacun des trois schémas. En particulier, la méthode $\mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_0$ s'avère être la meilleure des trois méthodes en ce sens qu'elle fournit d'aussi bons résultats que les autres, qu'elle est plus stable et plus rapide. La validité de l'approximation de Γ sera donc testée sur le seul schéma $\mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_0$ pour trois géométries représentatives: un cylindre circulaire, un cylindre de bas carré et un cylindre elliptique. Pour finir, on donne quelques résultats de SER.

Nous montrerons trois types de sorties graphiques: des courbes retraçant l'évolution du courant j en des points du contour (aux points éclairé et caché, correspondants au point d'impact de l'onde incidente et à son point opposé), des courbes représentant j sur Γ à un temps fixé et des courbes donnant la SER en "backscattering" (c'est-à-dire quand le point d'observation est aussi celui d'où est partie l'onde incidente) en fonction de la fréquence.

Contour exact: le cercle

Dans les cas tests qui suivent, le cercle de rayon 1mètre est centré en l'origine et maillé en 40 éléments. L'abscisse curviligne croissante est décrite dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 6).



- Figure 6 -

On envoie sur le cylindre une onde harmonique de régularité \mathcal{C}^1 et on compare le module du courant calculé par chaque schéma avec celui donné par le code BENOUE pour la fréquence $f=2\pi k/c=150$ mégahertz (figure 7). Le temps d'arrêt des calculs pour tous les schémas est égal à 20 nanosecondes, soit environ 6 fois le rayon du cercle divisé par la vitesse de la lumière c et le pas de temps Δt a été choisi comme étant la moitié ($\alpha=0,5$) de celui d'espace. Quelque soit le schéma, les plus grandes erreurs se situent aux voisinages du point d'impact et de son point radialement opposé soit au environ de l'abscisse curviligne $s=\frac{\pi}{2}$ et $s=\frac{3\pi}{2}$, soit encore là où il y a la plus forte amplitude. Ce phénomène est très accentué dans le cas du schéma $\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1$ alors qu'il reste acceptable pour les deux autres schémas. Si l'on regarde les courbes d'évolution en temps dans la partie éclairé et la partie caché (figure 8), on constate que le régime harmonique s'établit très vite et on vérifie que c'est avec la bonne période ($T=\frac{2\pi}{\omega} \sim 7 \text{ ns}$).

On choisit l'onde incidente impulsion avec la même fréquence pour un premier test de stabilité. On regarde alors le courant au point d'impact de l'onde en fonction du temps. Si toutes les courbes coïncident jusqu'à environ 20

ns, il n'en est pas de même après: le courant calculé par le schéma $\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1$ quand t devient grand devient négatif et s'éloigne de zéro, le schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_1$ donne des oscillations à partir de 30 ns tandis que le schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_0$ a le comportement attendu. Outre sa plus grande stabilité, le schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_0$ est le plus rapide: en effet le noyau des intégrales F^k est le plus simple comparé à ceux des intégrales des deux autres schémas et donc il y a moins d'erreurs numériques à chaque étape de temps. Ceci peut aussi expliquer la différence de stabilité entre les trois schémas. De plus, on rappelle qu'on a eu recours à une étape de condensation dans la construction du schéma $\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1$: de là découlent sans doute ses moins bonnes performances par rapport aux autres schémas.

A partir de maintenant, on se limite à faire des tests sur le meilleur des trois schémas i.e le schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_0$. On rappelle la forme du second membre contenant l'onde incidente de la formulation variationnelle espace-temps après discrétisation en espace et en temps:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma} \varphi_j^h(x) \partial_t E_z^i(t, x) d\gamma(x) dt$$

On voit qu'en intégrant en temps, il n'apparaît plus de dérivée en temps de E_z^i : on peut donc essayer de prendre l'onde incidente \mathcal{E}^0 en temps. Ce qu'on fait avec l'onde harmonique. L'évolution du courant induit par cette onde \mathcal{E}^0 est donnée par la figure 10. Si au niveau du point éclairé les ennuis n'apparaissent qu'au bout de $t = 15$ ns, ils sont de suite visibles au point caché. Ceci se confirme en regardant en $t = 20$ ns les parties imaginaire et réelles du courant en fonction de l'abscisse curviligne (figure 11): par rapport aux résultats obtenus quand la régularité de l'onde est \mathcal{E}^1 ou \mathcal{E}^2 , les écarts sont importants surtout près du point d'impact dans la zone éclairé et dans la majeure partie de la zone cachée. De même si l'on compare l'onde harmonique \mathcal{E}^1 à celle ayant une régularité \mathcal{E}^2 (figure 12), on voit que la plus régulière donne de meilleurs résultats. On choisira donc pour les tests suivants l'onde harmonique \mathcal{E}^2 .

On a vu précédemment que pour gagner de la place mémoire, on pouvait annuler les matrices M^k apparaissant dans le schéma $\mathbb{P}_0-\mathbb{P}_0$ à partir d'un certain entier k_a . Si on choisit ce k_a trop petit il est évident que le schéma ainsi "tronqué" va mal se comporter. Différents essais nous ont appris que pour k_a tel que $c k_a \Delta t \sim 5 \rho = 5$ les résultats obtenus restaient très bons (figure 13). Dorénavant on tronquera la suite des matrices M^k .

Contour approché

On teste d'abord la validité de l'approximation du contour Γ dans le cas où celui-ci est un cercle. On compare le courant calculé par le schéma P_0-P_0 avec approximation avec celui calculé avec ce même schéma sans approximation dans le cas d'une onde harmonique et lorsque l'onde incidente est une impulsion. La courbe de j au point d'incidence en fonction du temps aussi bien que celle du module du courant en fonction de la position sur le cercle (fig.14) prouvent la validité de l'approximation de Γ .

Dans la figure suivante, on présente les courbes comparatives sur le module du courant entre notre code et le code BÉNOU pour plusieurs géométries (cercle, carré, ellipse). On constate que, dans les trois cas, les résultats sont satisfaisants. Les "pics" apparaissant dans le cas du carré correspondent aux coins de ce carré: le courant devient infini aux coins. Nous rappelons que la discrétisation en espace a été faite par éléments finis P_0 , celle du code BÉNOU est faite par éléments finis P_1 : nous trouvons donc des valeurs sur un morceau de courbe tandis que BÉNOU donne le courant en des points: cela explique la différence entre la hauteur des pics.

On regarde l'influence du choix du rapport α pour le schéma P_0-P_0 . Le choix de α détermine le pas de temps Δt , le pas en espace étant fixé en fonction de la longueur d'onde de l'onde incidente.

Pour une fréquence de 150 mhz, les résultats obtenus dans le cas d'un cercle maillé en 40 éléments (figure 16) sont meilleurs pour $\alpha \leq 1$ que pour $\alpha > 1$. L'explication à ceci est que pour $\alpha=2$, le pas de temps est un peu trop grand pour détecter aussi bien que dans le cas $\alpha \leq 1$ le phénomène périodique. Constataion qui se vérifie si on fait varier le nombre d'éléments du maillage (figure 17). Pour un maillage en $\lambda/5$ (λ est la longueur d'onde) soit 20 éléments de courbe, on prend une valeur du paramètre α deux fois plus petite que celle pour un maillage en $\lambda/10$. Les courbes représentant les modules des courants correspondants à ces deux valeurs de α sont quasiment identiques. Inversement si on raffine le maillage (60 éléments) on peut se permettre de prendre α plus grand et constater que l'erreur entre le cas 40 éléments et 60 éléments est à première vue indétectable. Pour finir avec cette fréquence, on a poussé les calculs jusqu'au temps 60 ns pour voir si des instabilités apparaissaient avec $\alpha=2$ tout en gardant un pas de temps raisonnable. La comparaison du module du courant en $t=20$ ns avec celui en $t=60$ ns nous amène à cette conclusion: en choisissant un pas de temps convenable par

rapport au phénomène temporel qu'on veut observer, le schéma est stable même pour $\alpha=2$.

On veut vérifier cette dernière assertion pour des fréquences plus élevées. On considère cette fois-ci l'onde incidente plane (2-1) rencontrant un cylindre circulaire (toujours de rayon 1 m). Pour un même maillage de 72 éléments (critère en $\lambda/6$ environ), on choisit différentes valeurs de α et on regarde le courant induit au point d'impact (figure 18). En prenant α de plus en plus petit, on lisse les courbes à partir de 2 ns environ. Pour $\alpha=2$, la mauvaise restitution du "pic" est due au pas de temps trop grand. En ne conservant que les courbes $\alpha=1$ et $\alpha=0,5$, on ne voit pas apparaître d'instabilités jusqu'à 12 fois le rayon de l'obstacle.

On calcule la surface équivalente radar (SER) du cylindre circulaire infini considéré ci-dessus par la méthode "d'amplitude limite" rappelée dans le paragraphe 1. On choisit plus particulièrement de calculer la quantité

$$\sigma(k, u, u') = 2\pi |s(k, u, u')|^2 \quad \text{avec } u' = -u$$

qui s'exprime en m^2 . On compare comme précédemment les résultats du code EOLE à ceux du code BENOUE. Le cercle est d'abord découpé en 72 éléments pour le code EOLE, en 200 éléments pour le code BENOUE. On fait varier la fréquence de 100 à 600 mhz. Les courbes de la figure 19 donnent

$$10 \log_{10}(\sigma(k, u, -u)) \quad (\text{en } dbm^2)$$

en fonction de la fréquence $f = kc / 2\pi$.

Le premier test consiste à prendre deux valeurs de α : $\alpha=1$ et $\alpha=0,5$. La valeur $\alpha=1$ donne de mauvais résultats (plus grande erreur de l'ordre de 1 dbm^2): le cercle n'est pas assez maillé et le pas de temps est trop important pour observer de façon suffisamment précise le comportement harmonique du courant. En prenant $\alpha=0,5$, on améliore nettement les résultats et si de plus on raffine le maillage (de 72 éléments à 88 éléments), on obtient des résultats satisfaisants. Pour faire mieux encore il faudrait continuer à raffiner le maillage sans forcément aller jusqu'au critère $\lambda/10$ (critère optimal pour avoir de bons résultats), la compensation venant alors du choix de α petit.

Les matrices du schéma étant indépendantes de la fréquence et de l'angle d'incidence, elles ne sont calculées qu'une fois lors d'un balayage en fréquence ou en angles d'incidence. Seule reste l'étape de résolution des systèmes:

$$A^n = (M^0)^{-1} S^n, \quad n \geq 0$$

puisque le second membre S^n dépend de la fréquence et de l'angle d'incidence. Ainsi le temps de calcul pour un balayage fréquentiel n'est pas trop important:

il est de l'ordre de 15 minutes (temps cpu) pour l'exemple des 10 fréquences ci-dessus.

La seconde méthode de calcul de la SER par une approche dépendant du temps consiste à tirer partie de la représentation intégrale du noyau de diffraction (1-2). On calcule l'onde diffractée pour l'onde incidente $\varphi(t-(x-x_0)/c)$ approchant $\delta(t-(x-x_0)/c)$ avec:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\omega}{2\pi}(1-\cos \omega t), & t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

puis on prend la transformée de Fourier du courant p calculé par le schéma P_0 - P_0 . Ainsi on peut calculer la SER de rétrodiffusion $\sigma(k, u, -u)$ par:

$$2\pi |s(k, u, -u)|^2 = 2\pi \left| \frac{i}{4} \left(\frac{2i}{\pi k} \right)^{1/2} \int_{\Gamma} e^{iku x} \hat{p}(kc, x) d\gamma(x) \right|^2$$

Un avantage de cette méthode est le gain de temps de calcul. Le tableau ci-dessous présente les tests que nous avons effectués pour quelques fréquences avec un maillage de 88 éléments. La comparaison avec le code BENOUE se révèle encourageante.

fréquence (MHZ)	BENOUE	EOLE
100	5,3210	5,3277
150	5,1580	5,1569
250	5,0500	5,0253
300	5,0280	4,9537

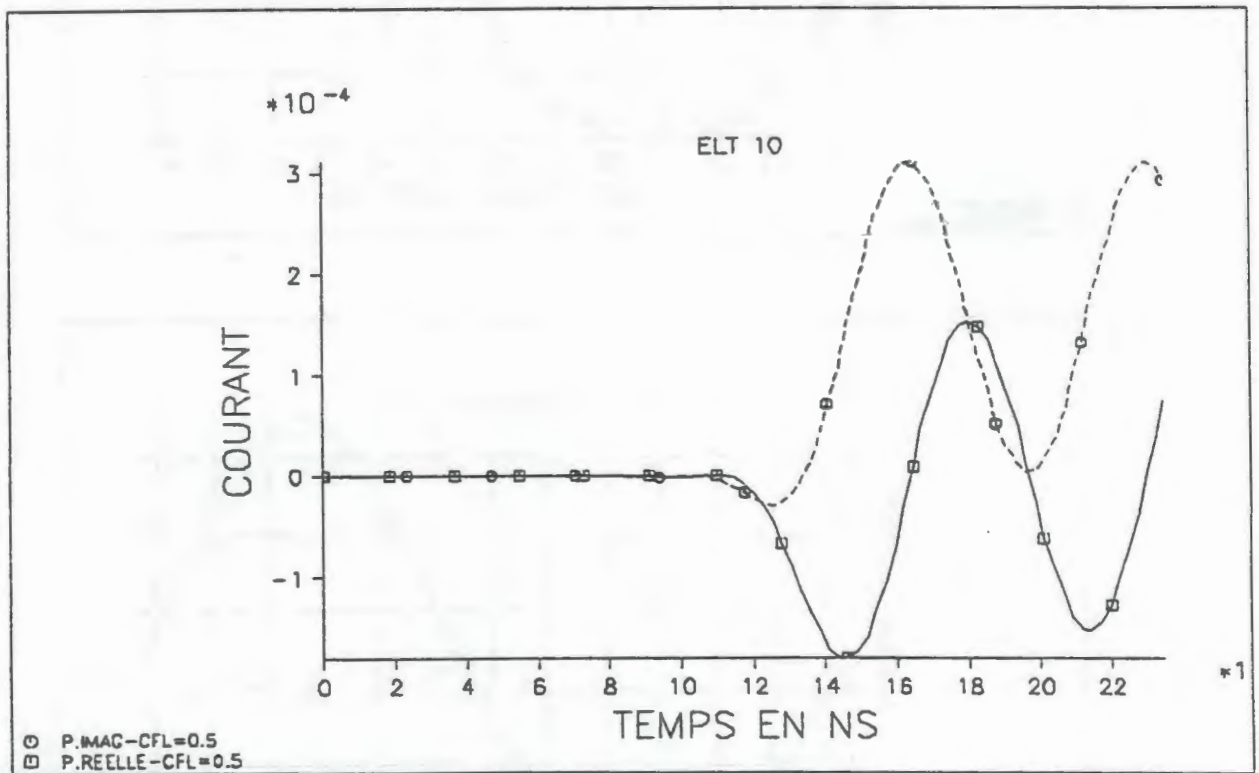
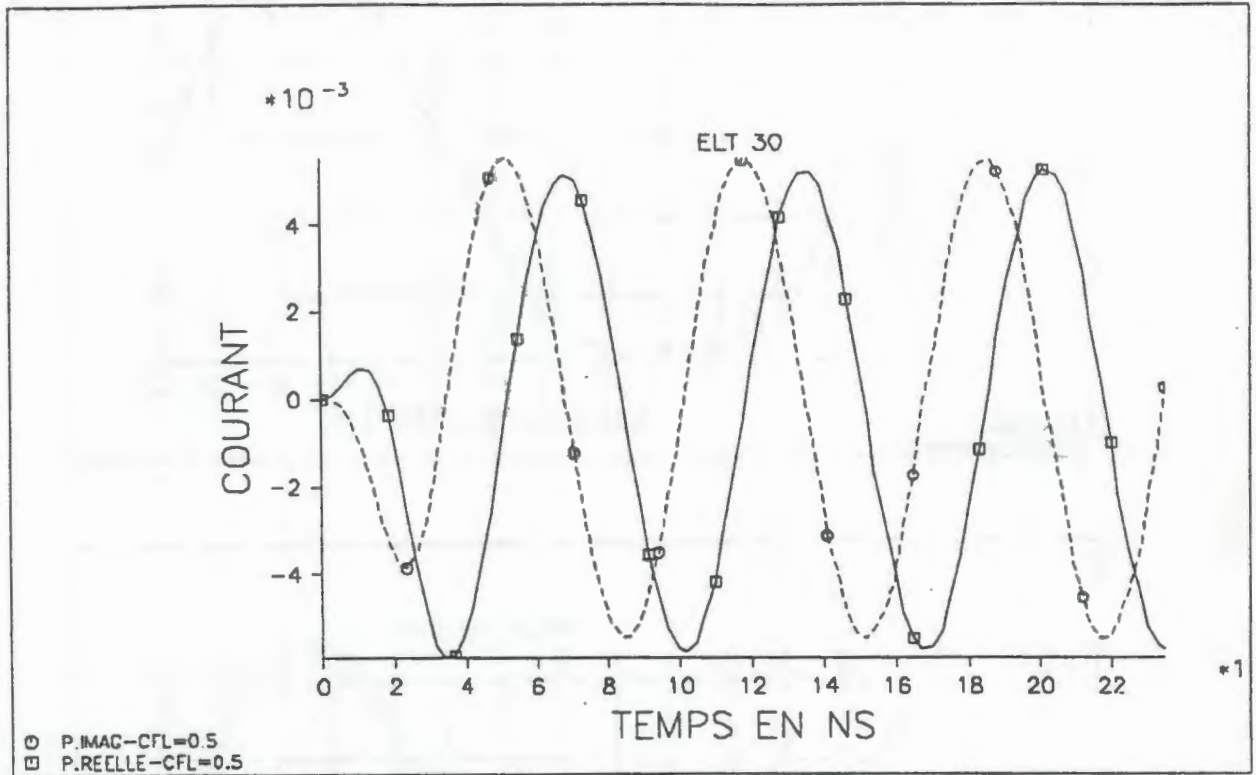


Fig 8: Phénomène harmonique aux points éclairé et caché

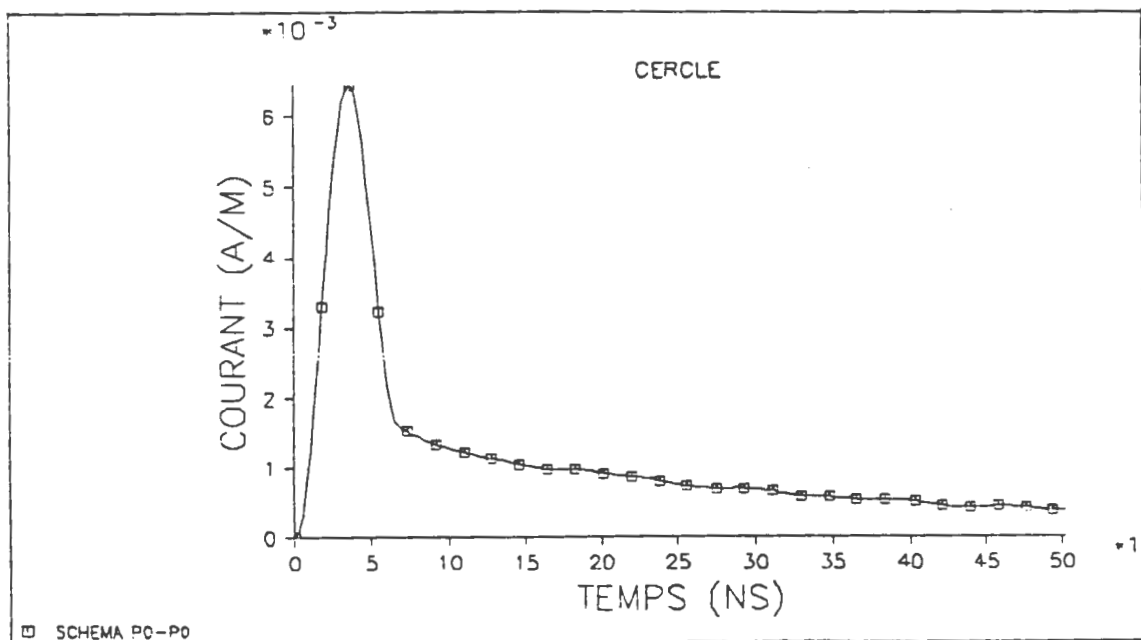
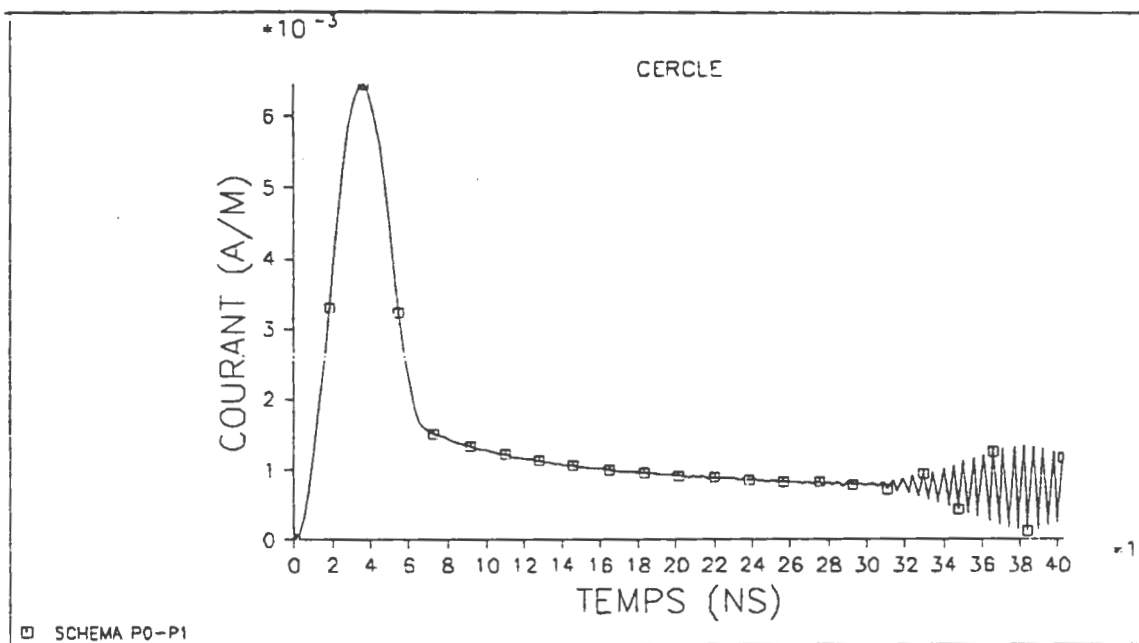
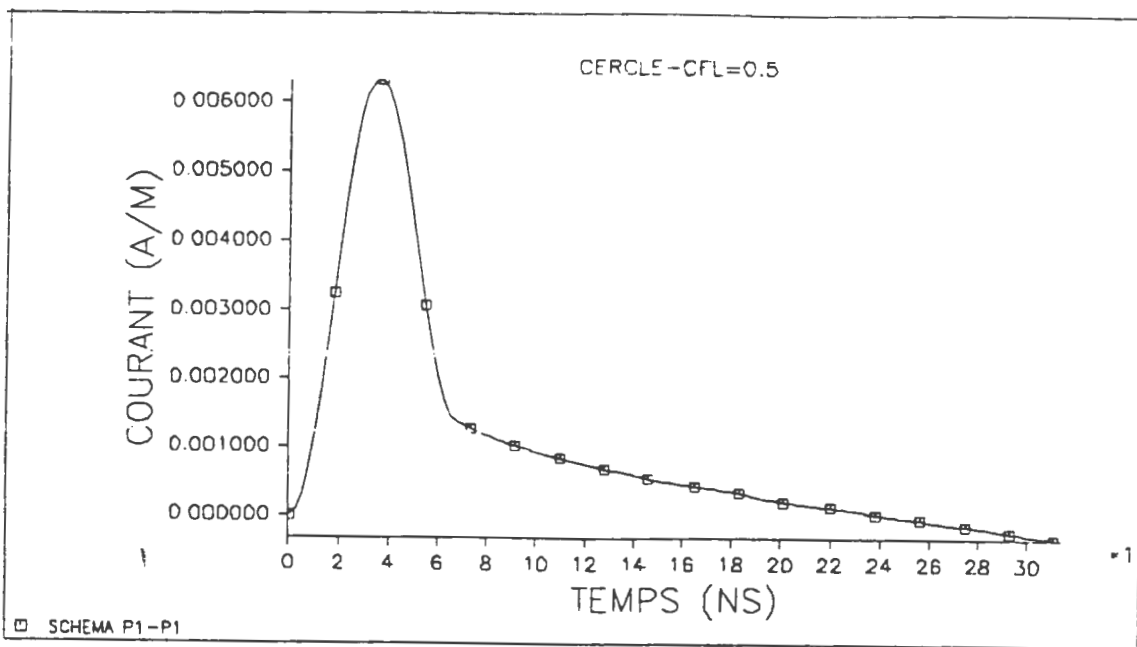


Fig 9: Test de stabilité sur les trois schémas

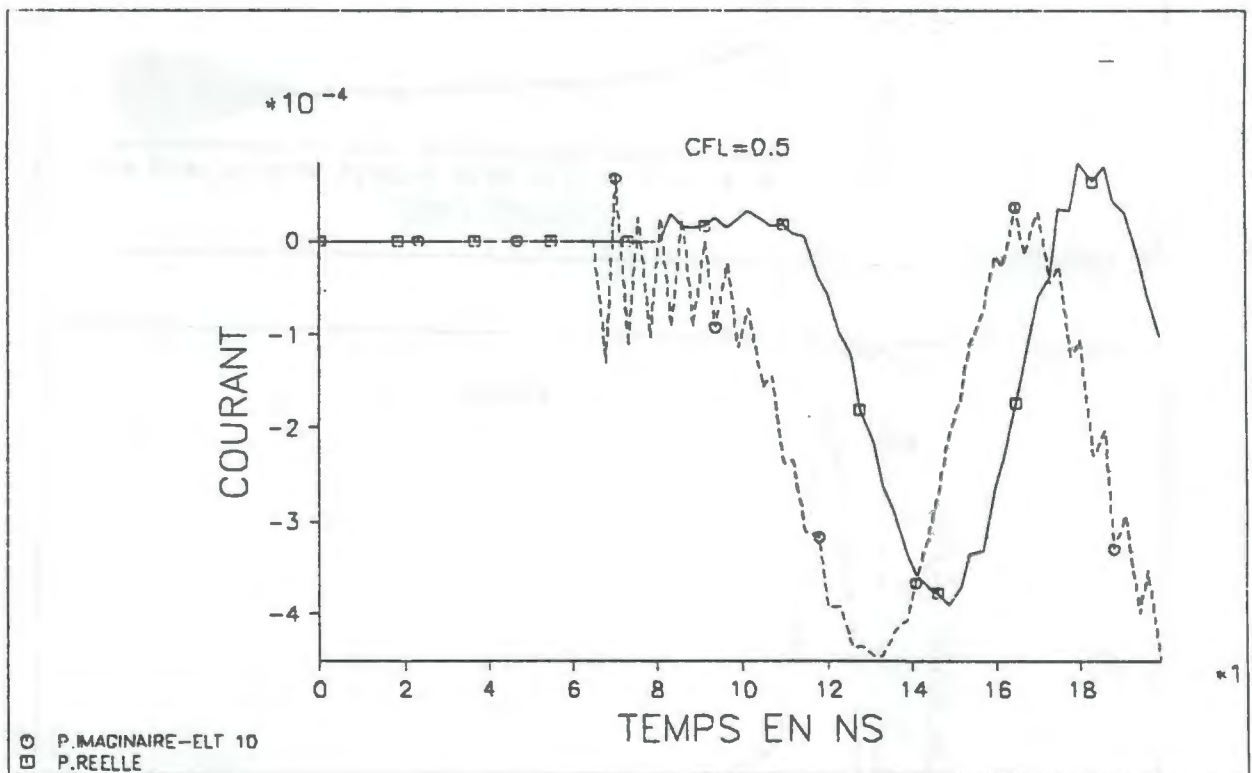
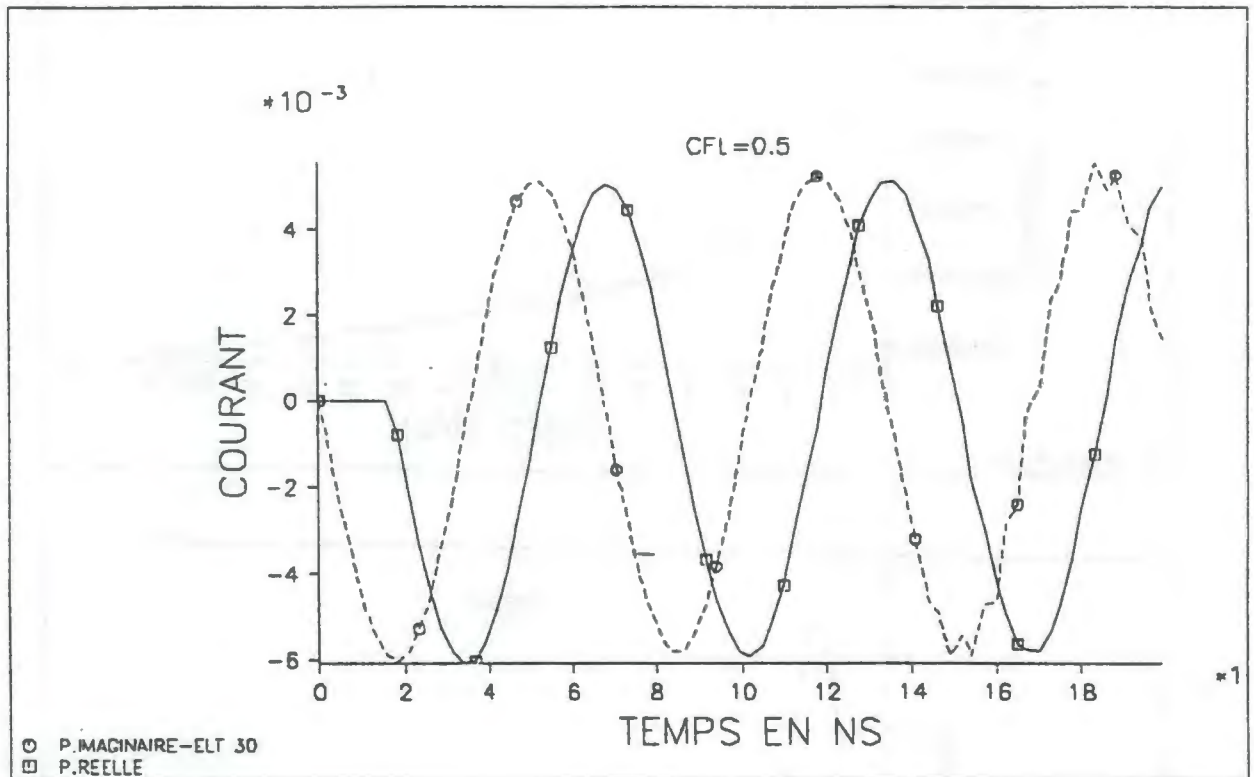


Fig 10: Evolution du courant induit par l'onde harmonique C0

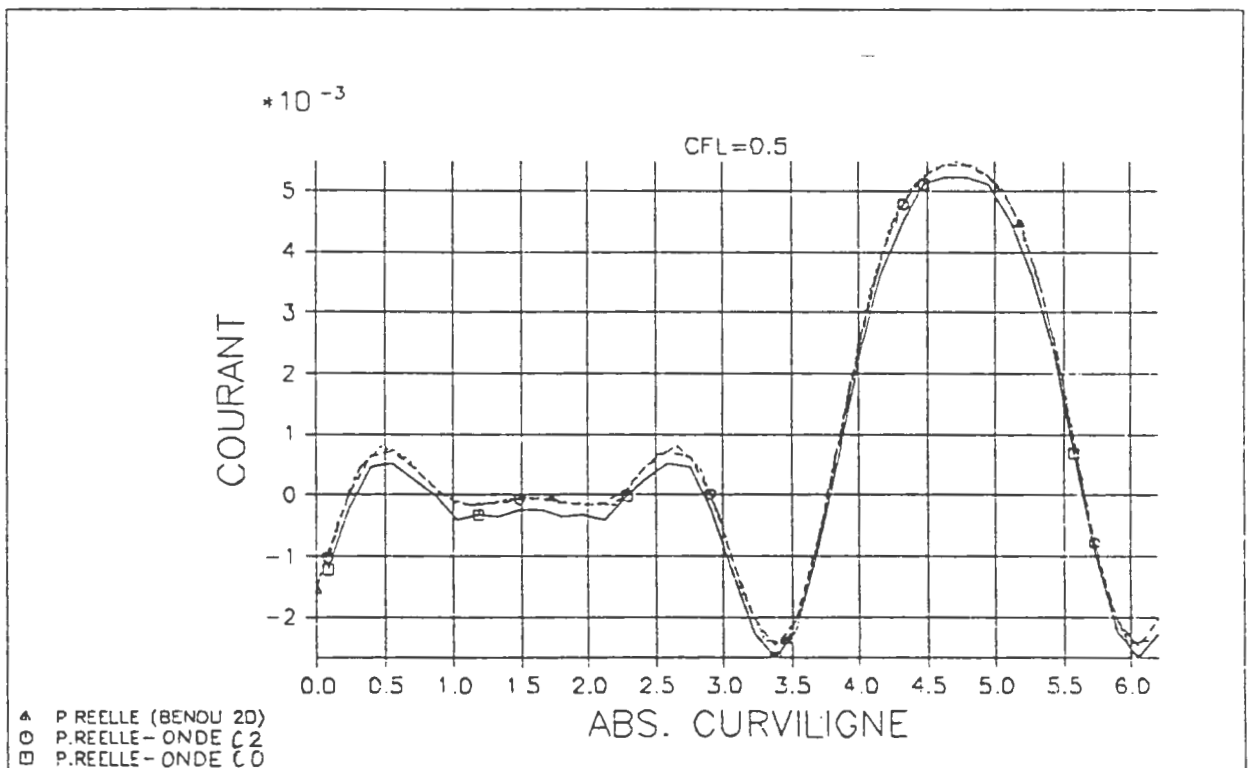
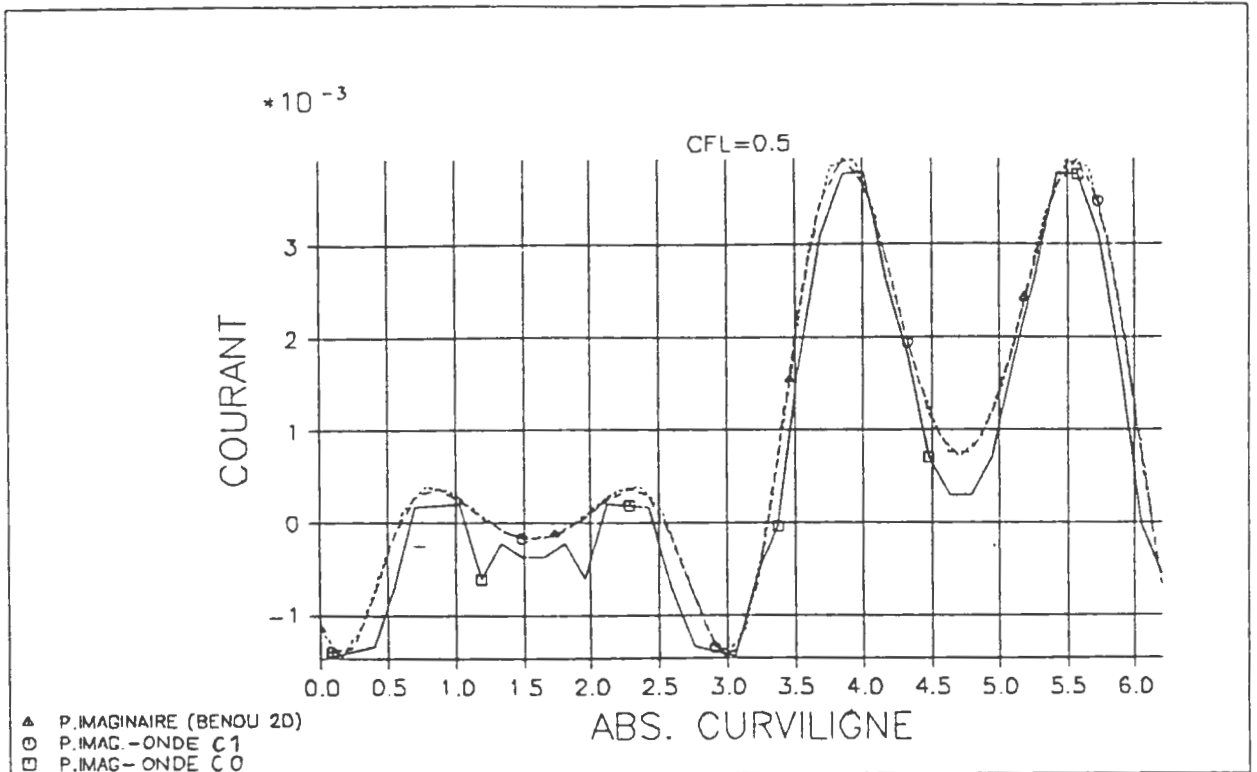


Fig 11: Comparaison du module du courant induit par l'onde C0 avec ceux calculés avec les ondes C1, C2 et par BENOU

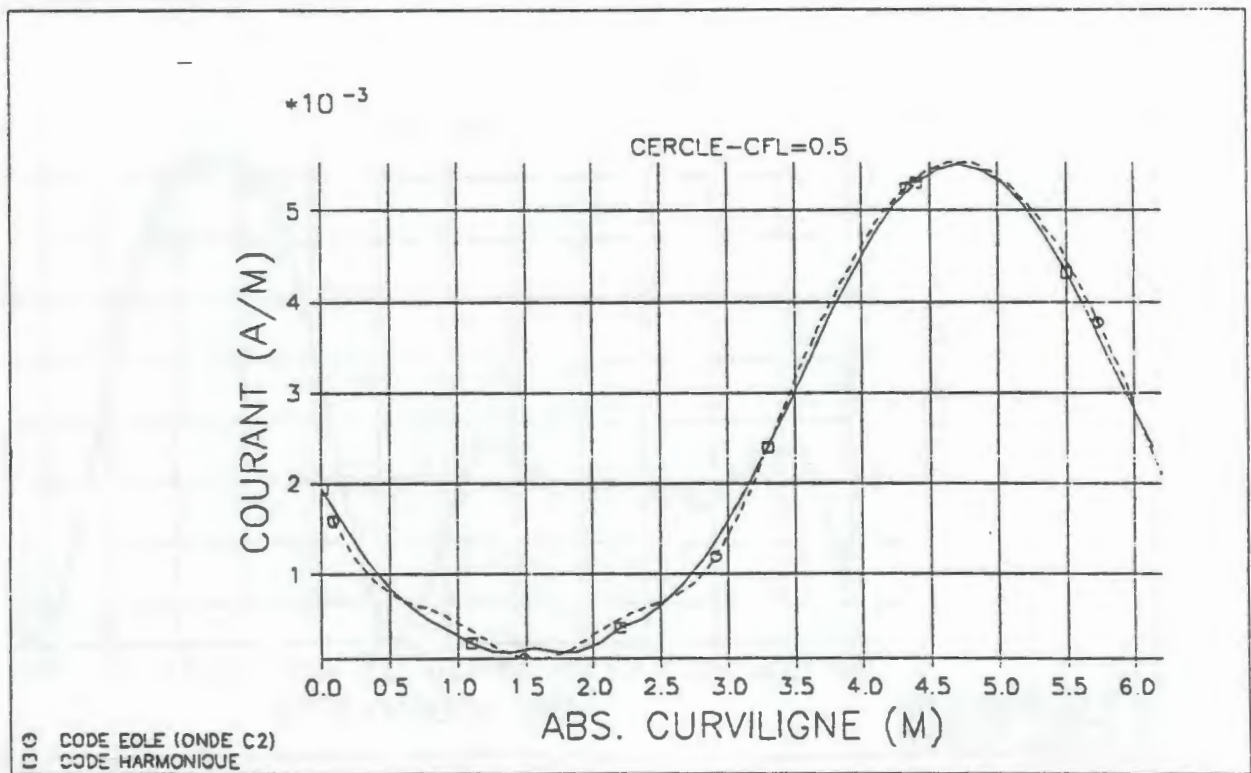
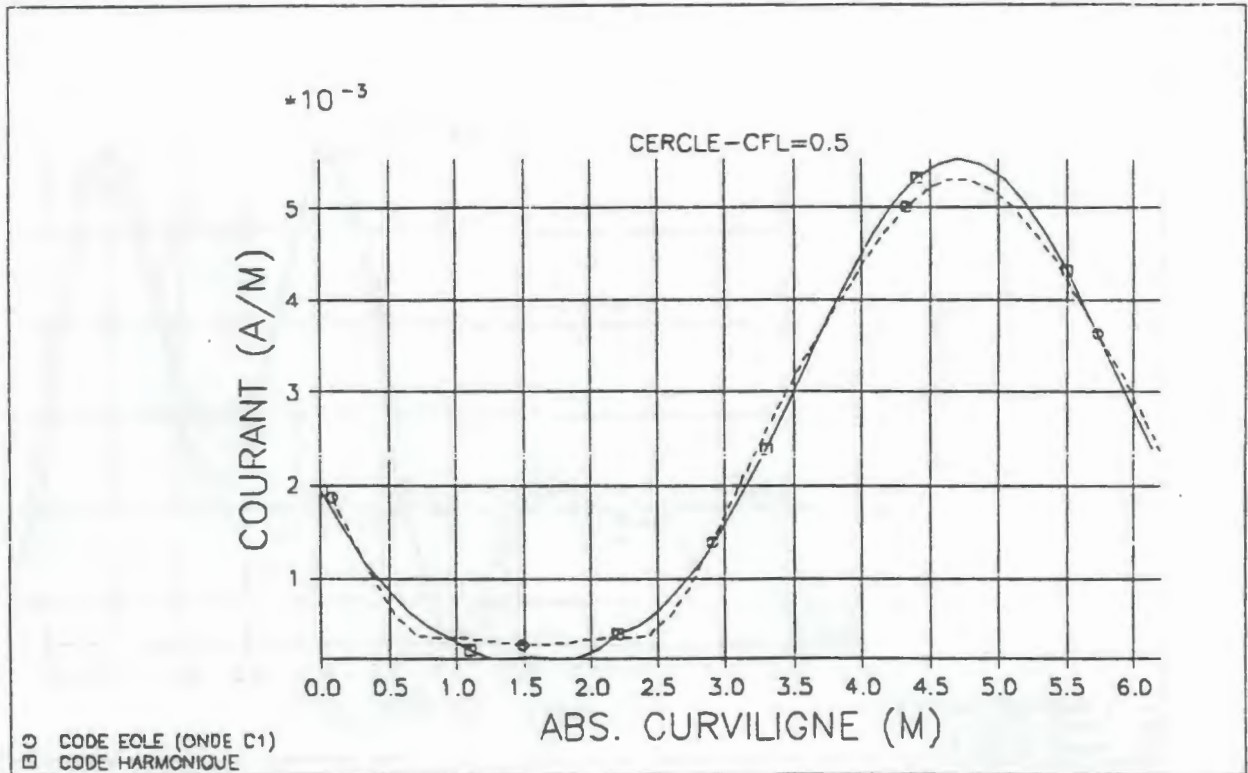


Fig 12: Comparaison entre le courant résultant de l'onde C1 avec celui induit par l'onde incidente de régularité C2

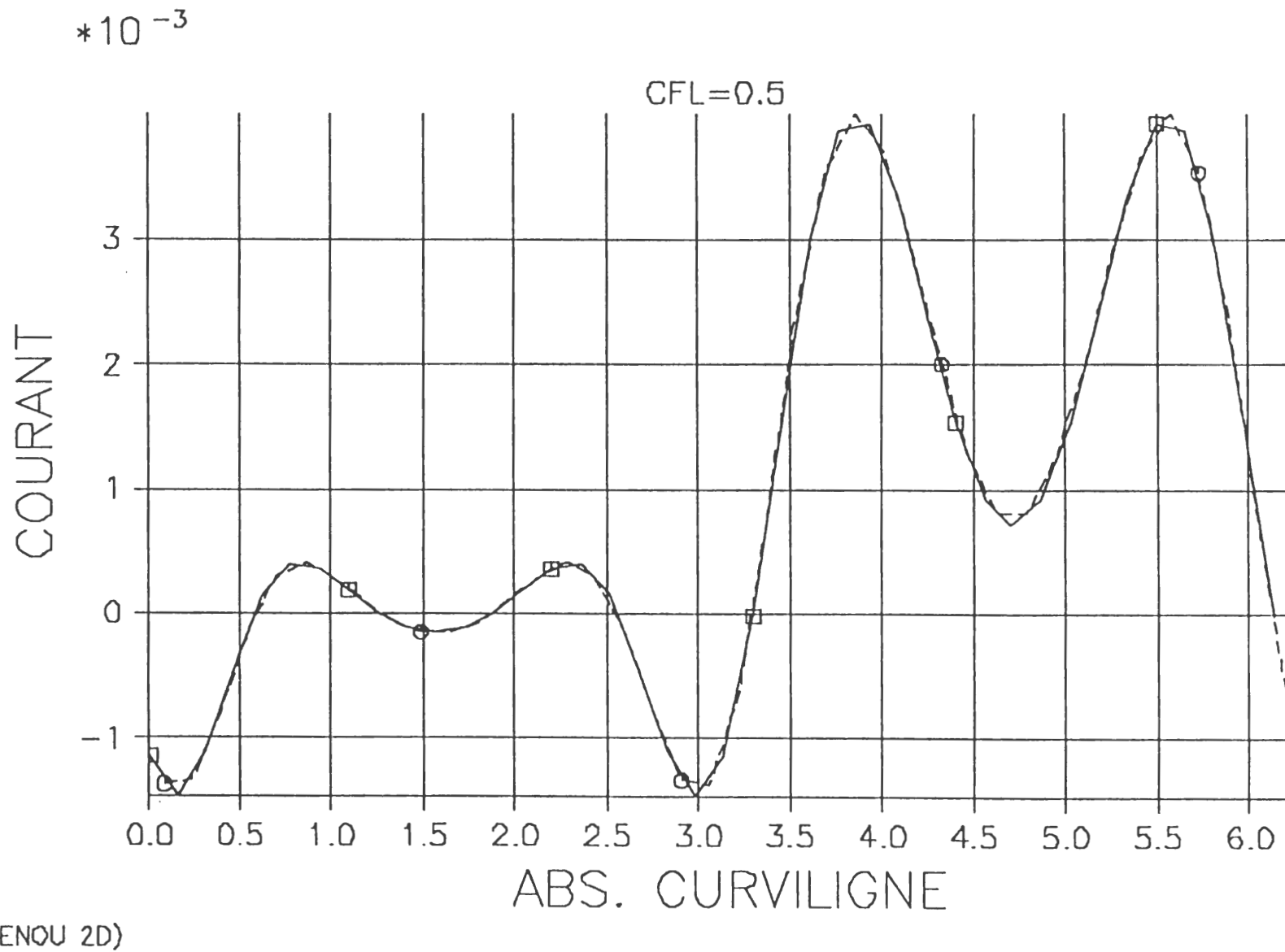


Fig 1.3: Effet de la troncature à 5^{pe} de la suite des matrices

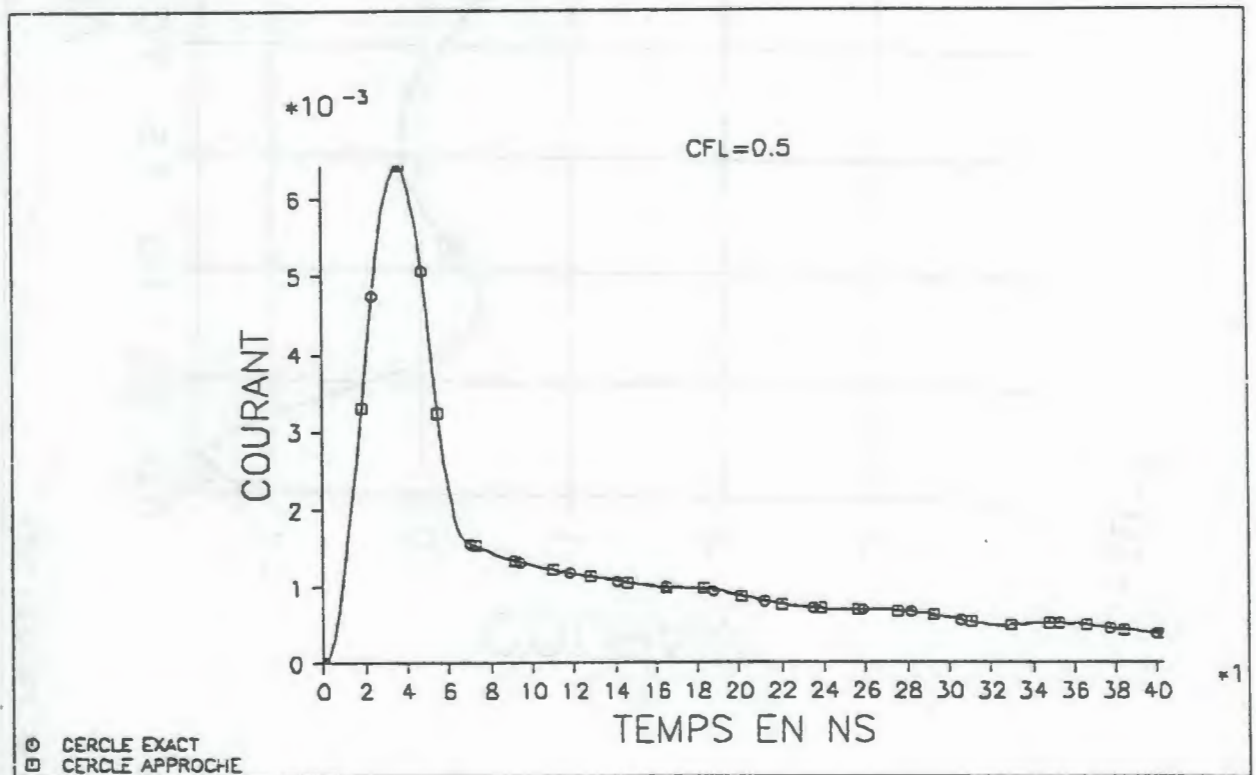
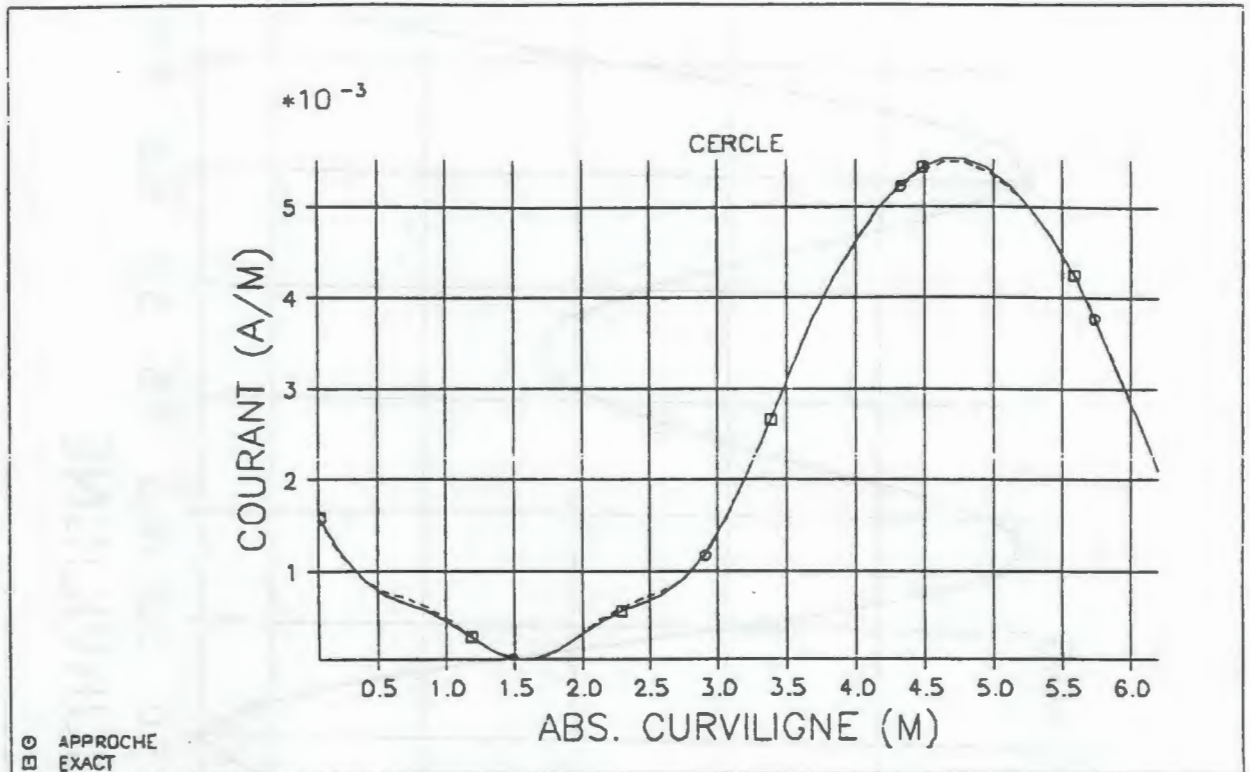


Fig 14: Courant calculé avec le contour exact (cercle) comparé à celui calculé en approchant le contour

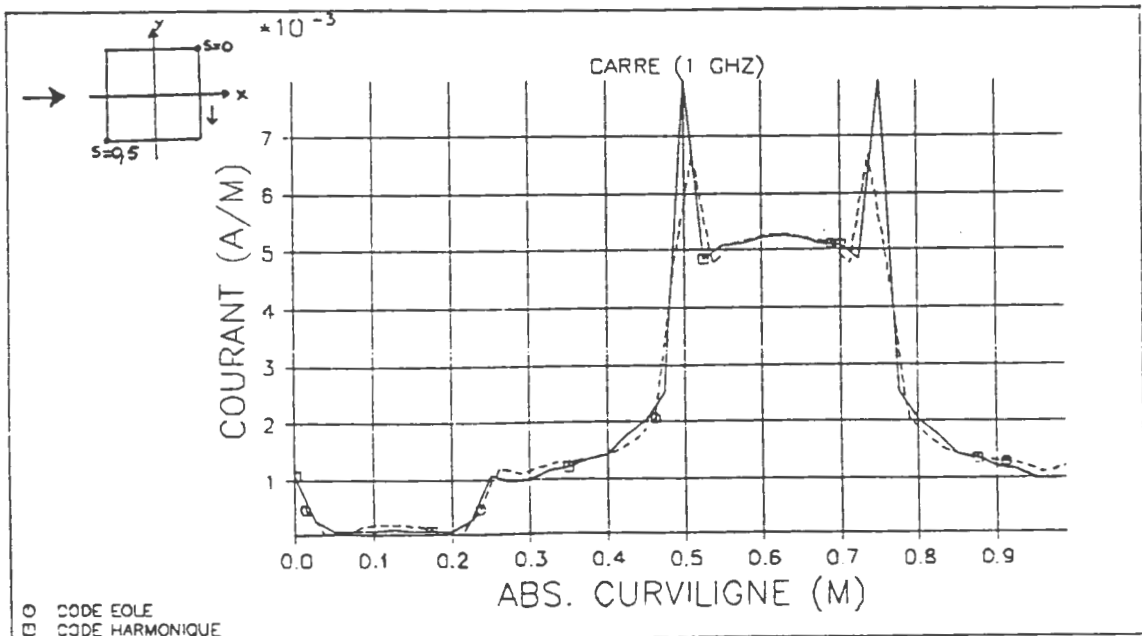
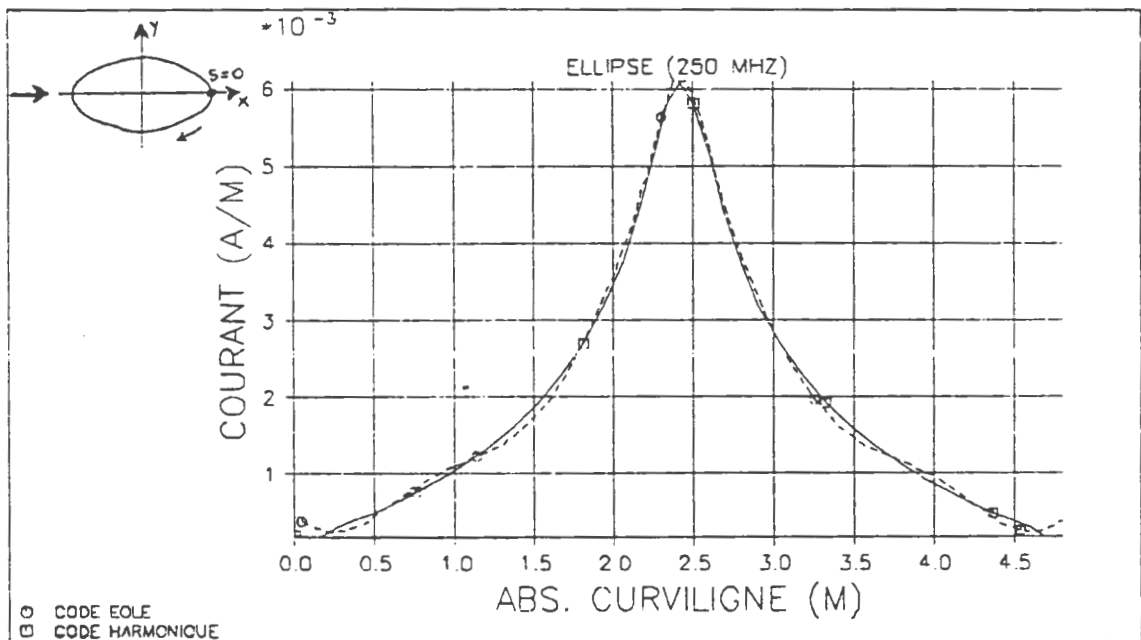
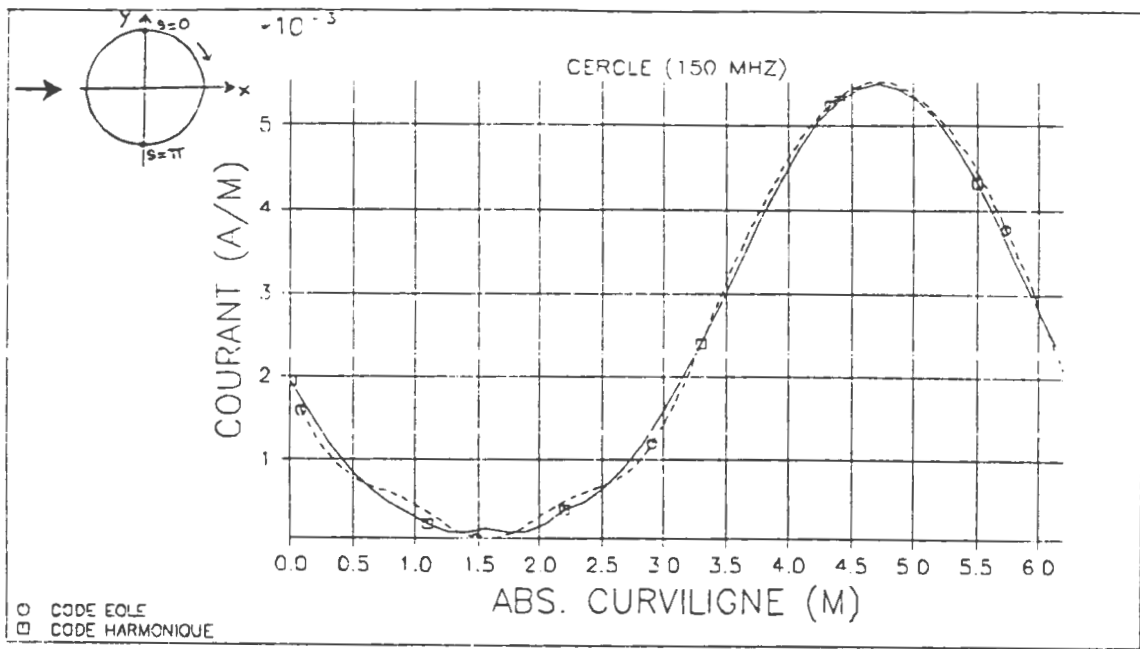


Fig 15: Module du courant pour plusieurs géométries

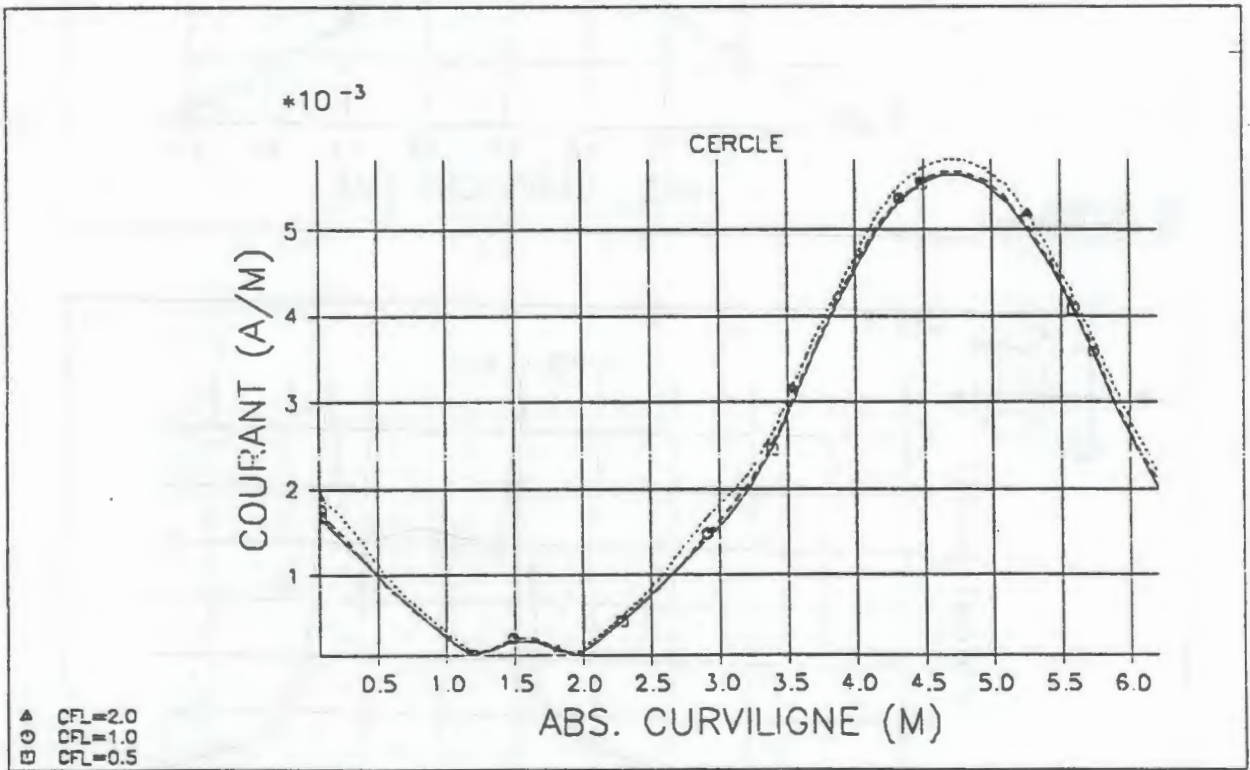
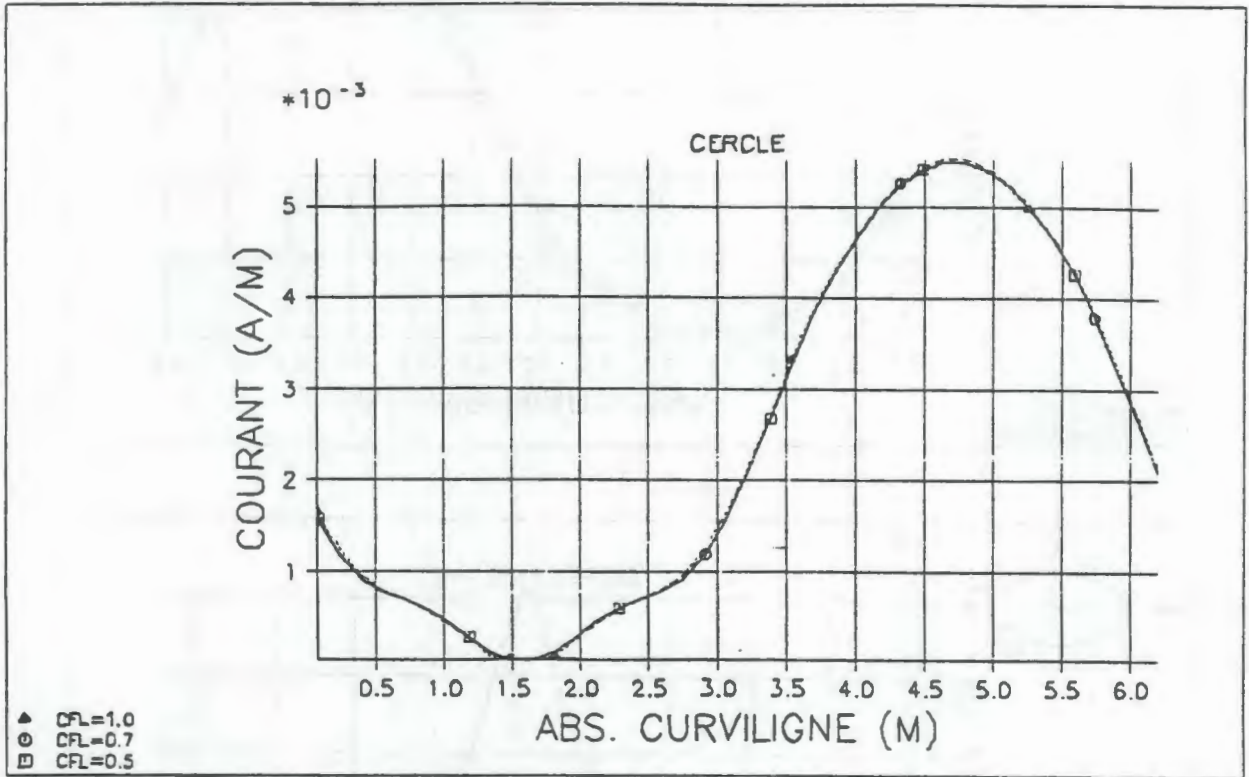


Fig 16: Variation du rapport CFL

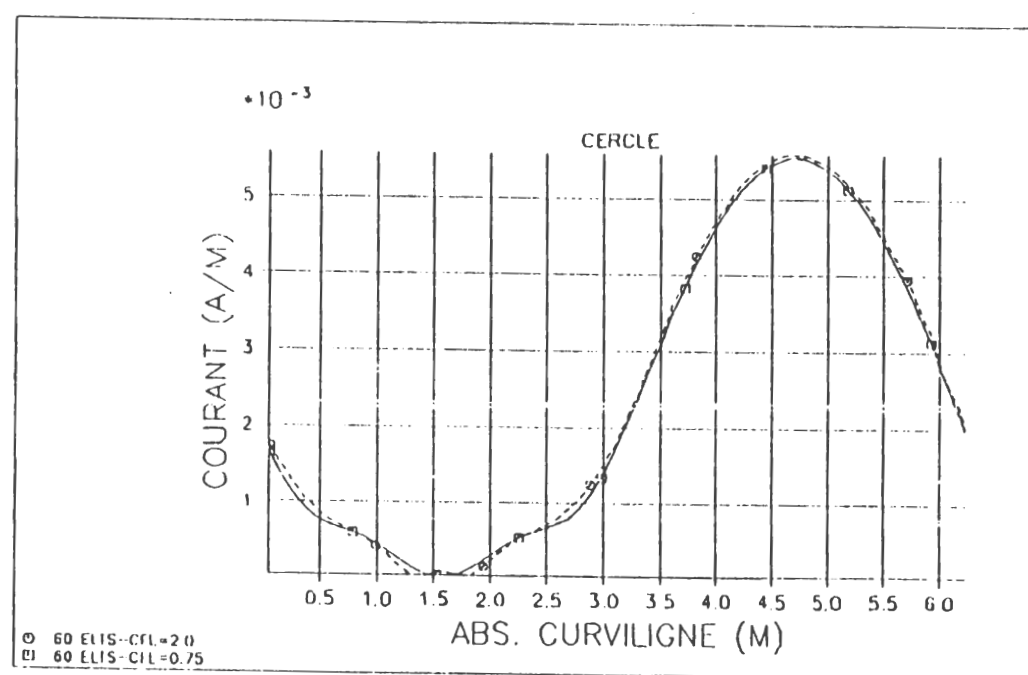
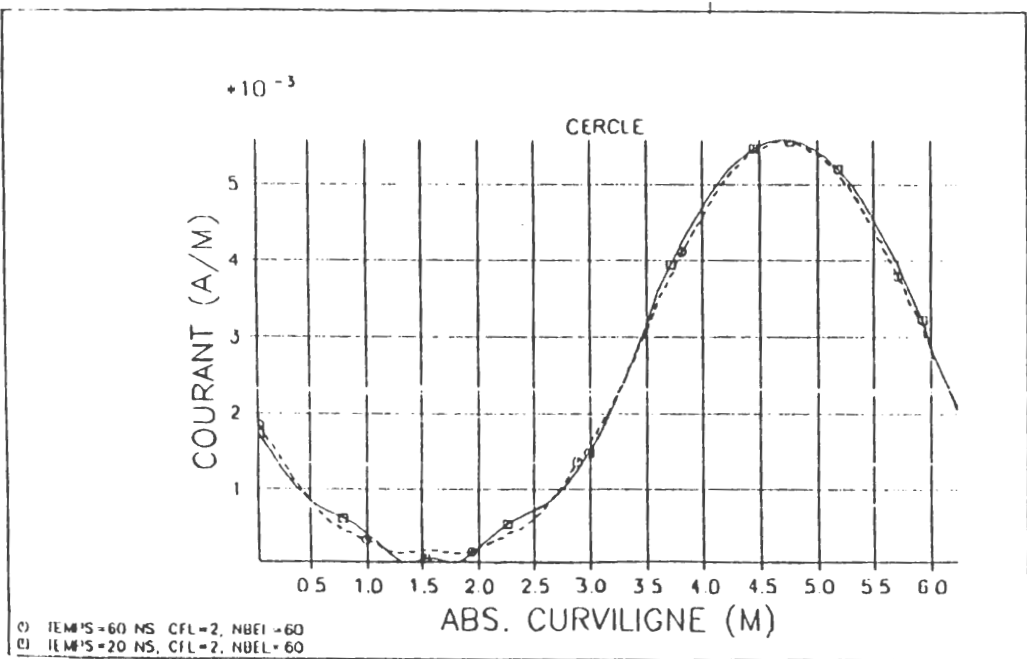
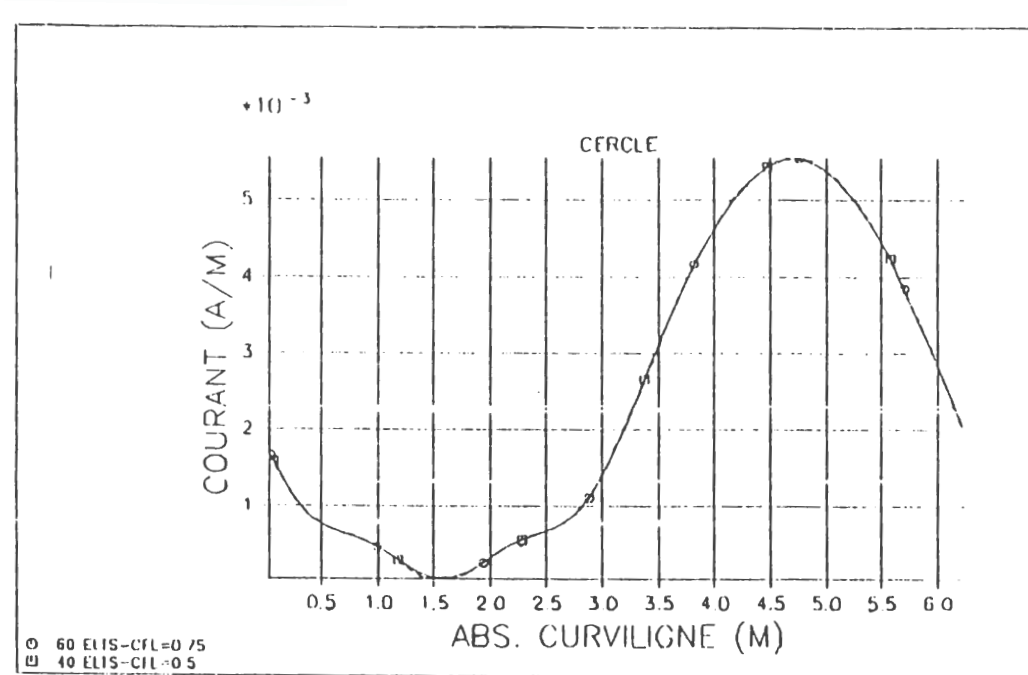
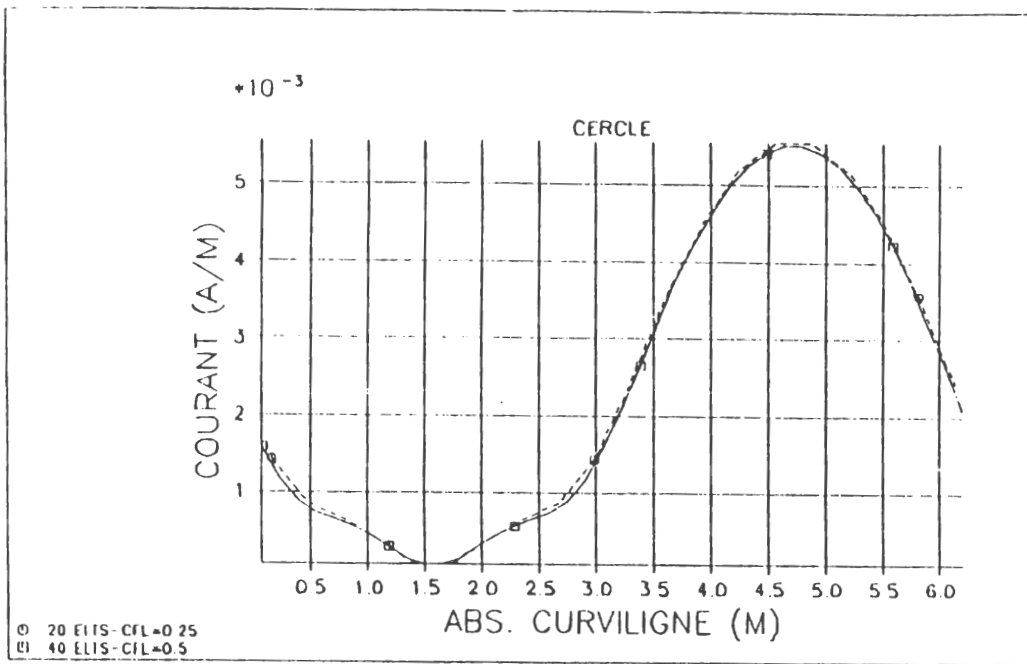


Fig 17: Effet du CFL par rapport au nombre d'éléments du maillage

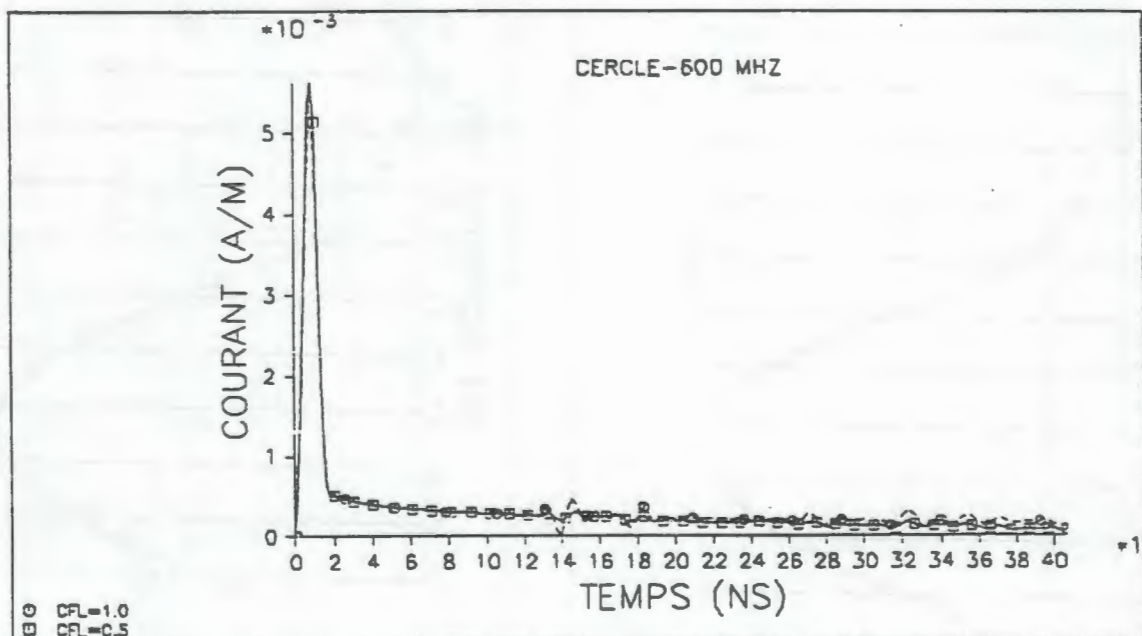
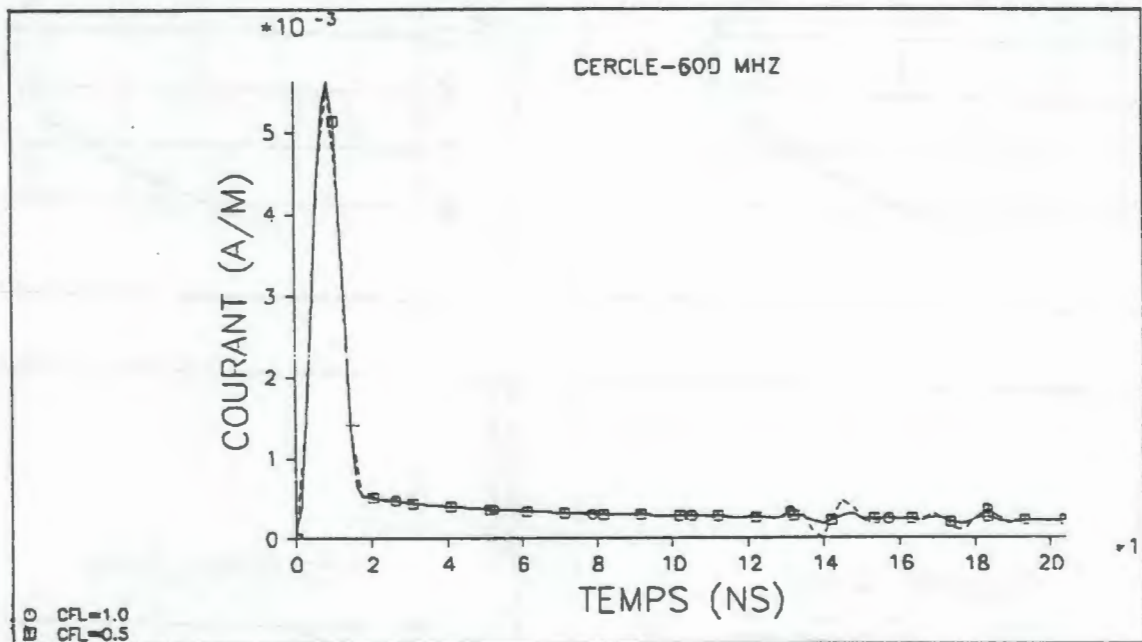
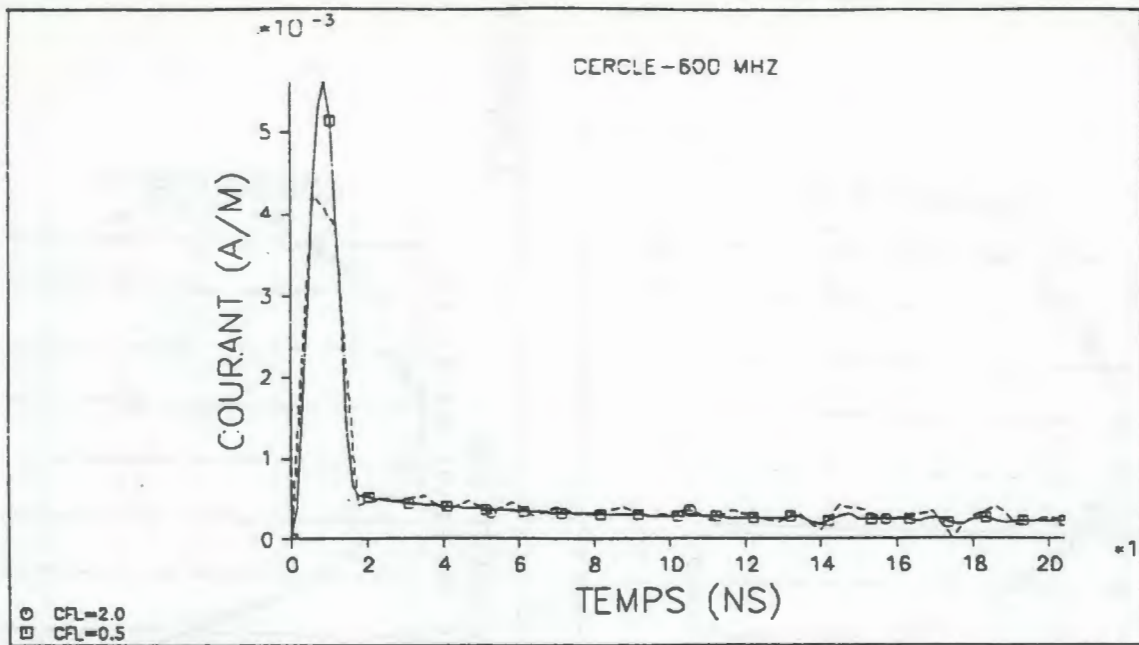


Fig 18: Courant induit par une impulsion brève, au point d'impact, pour plusieurs valeurs de CFL

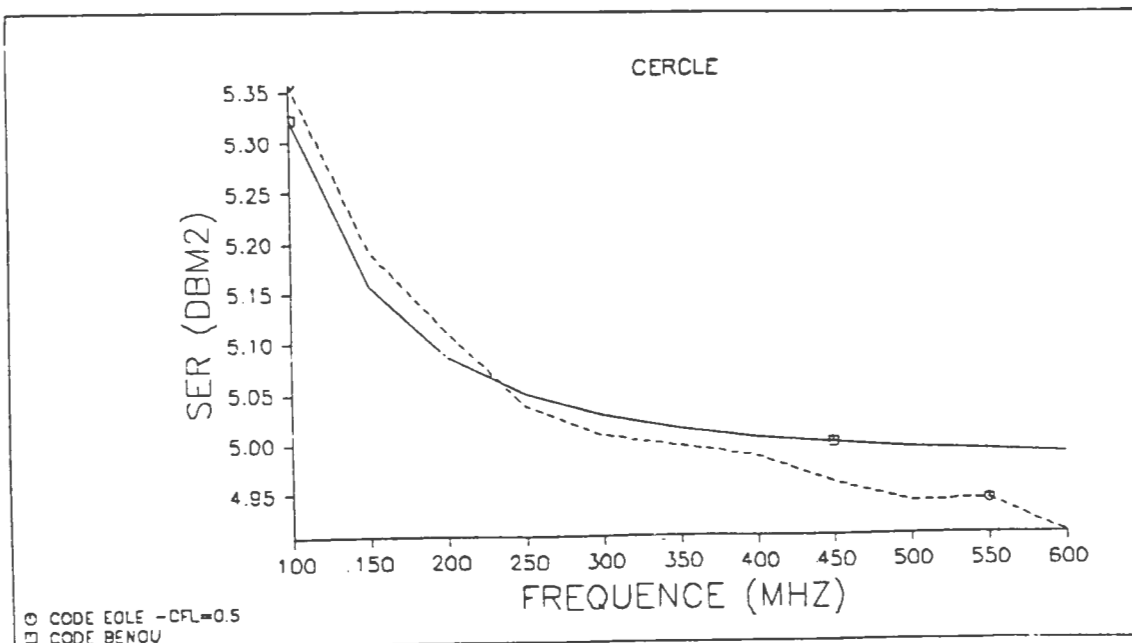
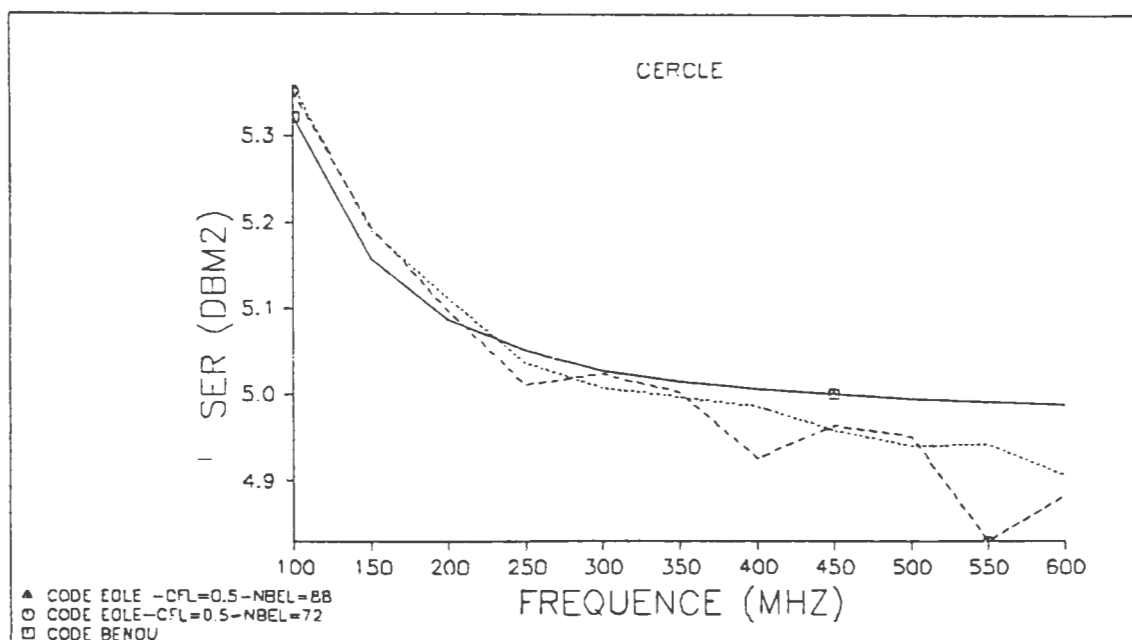
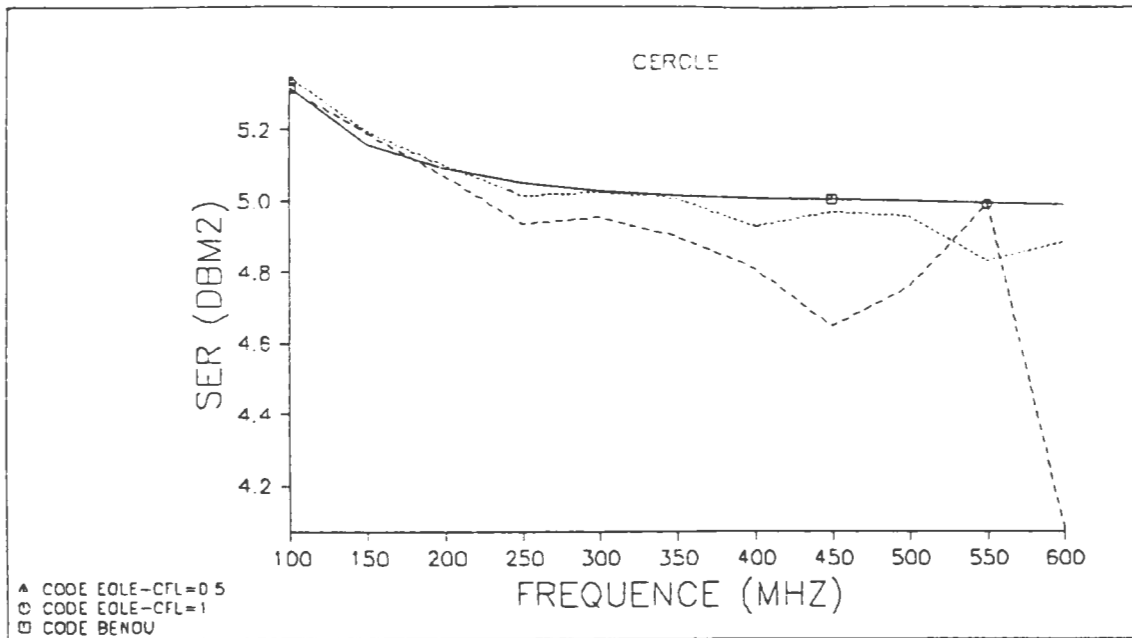


Fig 19: SER en rétrodiffusion d'un cercle de rayon 1M: effets du maillage et du rapport CFL

CONCLUSION

Nous avons construit, à partir de la formulation variationnelle espace-temps du système de Maxwell en dimension deux d'espace, trois schémas numériques calculant le courant électrique. Grâce aux expériences numériques nous avons constaté que parmi ces schémas, le schéma \mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_0 établi avec les régularités minimales en temps aussi bien pour le courant que pour la fonction test donne les meilleurs résultats.

Des tests numériques plus poussés, en particulier avec des fréquences plus élevées, nous permettrons de valider plus complètement ce schéma. Ainsi on espère obtenir des résultats convaincants de SER par une méthode d'impulsion brève.

ANNEXE

On démontre dans cette annexe les théorèmes qui nous ont permis, dans la partie B, de montrer que la matrice M^0 était définie positive.

THEOREME A1: Soient Γ une variété \mathcal{C}^∞ , compacte, sans bord de dimension deux et f, g deux fonctions de $L^2(\Gamma)$. Alors

$$\frac{1}{s^{2-k}} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| < s} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^k} d\gamma(x) d\gamma(y) = C_k \int_{\Gamma} f(x)g(x) d\gamma(x) + O(s), \quad k = -1, 0, 1$$

où $C_1 = 2\pi$, $C_0 = \pi$, $C_{-1} = \frac{\pi}{2}$.

La preuve de ce théorème se fait en trois étapes. On ne fera la démonstration que dans le cas où $k = 1$, les démonstrations dans les autres cas étant similaires.

LEMME A1-1: Il existe $C_0 > 0$ et $s_0 > 0$ tel que pour tout x de Γ et s dans $]0, s_0]$, on a:

$$\int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) \leq C_0 s$$

Preuve du lemme A1-1

Puisque Γ est une variété régulière compacte, elle admet un atlas régulier fini $(O_i, \varphi_i, U_i)_{1 \leq i \leq N}$ où O_i est un ouvert de \mathbb{R}^3 , U_i un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^3 et φ_i un difféomorphisme de U_i sur O_i tel que:

$$\varphi_i(U_i \cap \{z_3 = 0\}) \subset O_i \cap \Gamma \quad \text{où } z = (z_1, z_2, z_3)$$

$U_i \cap U_j = \emptyset \Rightarrow \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ est un difféomorphisme de $U_i \cap U_j$ dans lui-même

Le lemme de recouvrement de Lebesgue assure qu'il existe $s_0 > 0$ tel que:

$$\forall x \in \Gamma, \exists i \in \{1, \dots, N\} / \forall y \in \Gamma, |x-y| < s_0 \Rightarrow y \in O_i$$

On écrit pour $s \in]0, s_0]$ et $x = \varphi_i(z'_0, 0)$:

$$\int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) = \int_{z' \in \mathbb{R}^2 / |\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z', 0)| < s} \frac{F_i(z')}{|\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z', 0)|} dz'$$

où $|F_i(z')| \leq M$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et tout $(z', 0) \in U_i \cap \{z_3 = 0\}$. D'autre part, φ_i^{-1} est un difféomorphisme de O_i sur U_i donc:

$$|z'_0 - z'| \leq \sup_{1 \leq i \leq N} |D\varphi_i^{-1}|_{L^\infty(O_i)} |\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z', 0)| \leq M' |\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z', 0)|$$

Finalement, on en déduit la majoration:

$$\int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) \leq M M' \int_{|z'-z'_0| < M's} \frac{1}{|z'-z'_0|} dz' = 2\pi M M' s$$

✪

LEMME A1-2: Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout s dans $]0, s_0[$:

$$\left\| \frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{g(y)}{|x-y|} d\gamma(y) \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \|g\|_{L^2(\Gamma)}$$

Preuve du lemme A1-2

On a:

$$\left| \frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{g(y)}{|x-y|} d\gamma(y) \right|^2 \leq \frac{1}{s^2} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{|g(y)|^2}{|x-y|} d\gamma(y) \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y)$$

Le lemme A1-1 nous donne alors:

$$\left| \frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{g(y)}{|x-y|} d\gamma(y) \right|^2 \leq \frac{C_0}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{|g(y)|^2}{|x-y|} d\gamma(y)$$

Donc en passant à la norme $L^2(\Gamma)$ et en utilisant une nouvelle fois le lemme A1-1, on conclut à:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{g(y)}{|x-y|} d\gamma(y) \right\|_{L^2(\Gamma)} &\leq \frac{C_0}{s} \int_{y \in \Gamma} |g(y)|^2 \left(\int_{x \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(x) \right) d\gamma(y) \\ &\leq C_0^2 \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

LEMME A1-3: Pour tout x de Γ , on a quand $s \rightarrow 0$

$$\frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) \longrightarrow 2\pi$$

Preuve du lemme A1-3

On choisit à nouveau l'atlas défini dans le lemme A1-1. On a vu que:

$$I = \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) = \int_{z' \in \mathbb{R}^2 / |\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z', 0)| < s} \frac{F_i(z')}{|\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z', 0)|} dz'$$

On pose $z' = z'_0 + s\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Alors l'intégrale précédente devient:

$$I = \int_{\xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / |\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)| < s} \frac{F_i(z'_0 + s\xi) s^2}{|\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)|} d\xi$$

Pour ξ fixé, on a:

$$\frac{\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)}{s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} D\varphi_i(z'_0, 0) \cdot \xi$$

et

$$F_i(z'_0 + s\xi) \xrightarrow{s \rightarrow 0} F_i(z'_0)$$

Soient les ensembles suivants:

$$E_+ = \{ \xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / |D\varphi_i(z'_0, 0) \cdot \xi| > 1 \}$$

$$E_- = \{ \xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / |D\varphi_i(z'_0, 0) \cdot \xi| < 1 \}$$

$$E_0 = \{ \xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / |D\varphi_i(z'_0, 0) \cdot \xi| = 1 \}$$

Puisque φ_i est un difféomorphisme, l'application linéaire de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R}^3 $D\varphi_i(z'_0, 0)$ est bijective. Si on note T_{x_0} le plan tangent à Γ en x_0 (espace vectoriel de dimension 2) alors $E_0 = [D\varphi_i(z'_0, 0)]^{-1} / T_{x_0}$ et donc E_0 est négligeable dans $(\mathbb{R}^2, d\xi)$. De plus pour $\xi \in E_{\pm}$, on a:

$$\Pi_{\{|\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)| < s\}}(\xi) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \Pi_{E_-}(\xi)$$

où Π désigne la fonction caractéristique. Donc pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, la fonction:

$$\Pi_{\{|\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)| < s\}}(\xi) \frac{F_i(z'_0 + s\xi) s}{|\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)|}$$

converge simplement quand $s \rightarrow 0$ vers la fonction:

$$\Pi_{E_-}(\xi) \frac{F_i(z'_0)}{|D\varphi_i(z'_0, 0) \cdot \xi|}$$

Comme on a la majoration:

$$\left| \frac{F_i(z'_0 + s\xi) s}{|\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)|} \right| \leq M \frac{s}{|\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)|} \leq M M'$$

et l'inclusion:

$$\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / |\varphi_i(z'_0, 0) - \varphi_i(z'_0 + s\xi, 0)| \} \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / |\xi| \leq M' \} = \text{compact}$$

le théorème de la convergence dominée assure que

$$\frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) \xrightarrow{s \rightarrow 0} G(x)$$

avec:

$$G(x) = F_i(z'_0) \int_{\xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / |D\varphi_i(z'_0, 0) \cdot \xi| < 1} \frac{1}{|D\varphi_i(z'_0, 0) \cdot \xi|} d\xi$$

Pour calculer $G(x)$, on va choisir une carte locale particulière, le résultat étant intrinsèque. On peut prendre:

$$\varphi_i(z', z_3) = (z', f(z') + z_3) \text{ avec } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

alors :

$$D\varphi_i(z'_0, 0) \cdot \xi = (\xi_1, \xi_2, \nabla f(z'_0) \cdot \xi) \text{ et } F_i(z'_0) = (1 + |\nabla f(z'_0)|^2)^{1/2}$$

Donc

$$G(x) = (1 + |\nabla f(z'_0)|^2)^{1/2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / |\xi|^2 + |\nabla f(z'_0) \cdot \xi|^2 < 1} \frac{1}{(|\xi|^2 + |\nabla f(z'_0) \cdot \xi|^2)^{1/2}} d\xi$$

Soit $u = \nabla f(z'_0)$. Comme l'intégrale ci-dessus est invariante par rotation ie

$$G(x) = I_u = I_{A'u} \text{ où } A \text{ est une matrice de rotation}$$

on choisit $u = (|u|, 0)$ d'où on a:

$$I_u = \sqrt{1 + |u|^2} \int_{(1 + |u|^2)\xi_1^2 + \xi_2^2 < 1} \frac{1}{((1 + |u|^2)\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}} d\xi_1 d\xi_2$$

En faisant les deux changements de variables successifs:

$$X_1 = \sqrt{1 + |u|^2} \xi_1, X_2 = \xi_2 \text{ et } X_1 = r \cos \theta, X_2 = r \sin \theta$$

on trouve:

$$G(x) = I_u = \int_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$



Preuve du théorème A1

On évalue l'intégrale

$$\frac{1}{s} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| < s} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) = I \quad , \quad f, g \in L^2(\Gamma)$$

Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ alors on décompose I en trois parties:

$$I = \frac{1}{s} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| < s} \frac{f(x)h(x)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) + \frac{1}{s} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| < s} \frac{f(x)(h(y)-h(x))}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) \\ + \frac{1}{s} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| < s} \frac{f(x)(g(y)-h(y))}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

soit encore:

$$I = 2\pi \int_{\Gamma} f(x)g(x) d\gamma(x) + 2\pi \int_{\Gamma} f(x)(h(x)-g(x)) d\gamma(x) \\ + \int_{\Gamma} f(x)h(x) \left(\frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) - 2\pi \right) d\gamma(x) \\ + \frac{1}{s} \int_{\Gamma} f(x) \left(\int_{|x-y| < s} \frac{h(y)-h(x)}{|x-y|} d\gamma(x) \right) d\gamma(y) \\ + \frac{1}{s} \int_{\Gamma} f(x) \left(\int_{|x-y| < s} \frac{g(y)-h(y)}{|x-y|} d\gamma(x) \right) d\gamma(y)$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, on choisit $h \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ telle que

$$\|g-h\|_{L^2(\Gamma)} \leq \varepsilon / (4 \max(2\pi, C_1) \|g\|_{L^2(\Gamma)})$$

On en déduit que, pour $s \in]0, s_1]$ avec s_1 suffisamment petit:

$$|I - 2\pi \int_{\Gamma} f(x)g(x) d\gamma(x)| \leq \varepsilon$$



On passe maintenant au cas où Γ est une variété compacte, sans bord, de dimension 1. Alors on démontre de façon analogue à la dimension 2 les lemmes et théorèmes suivants:

LEMME A2-1: Il existe $C_0 > 0$ et $s_0 > 0$ tel que pour tout x de Γ et s dans $]0, s_0]$, on a:

$$\int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \text{Argch}\left(\frac{s}{|x-y|}\right) d\gamma(y) \leq C_0 s$$

LEMME A2-2: Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout s dans $]0, s_0]$:

$$\left\| \frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} g(y) \text{Argch}\left(\frac{s}{|x-y|}\right) d\gamma(y) \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \|g\|_{L^2(\Gamma)}$$

LEMME A1-3: Pour tout x de Γ , on a quand $s \rightarrow 0$

$$\frac{1}{s} \int_{y \in \Gamma / |x-y| < s} \text{Argch}\left(\frac{s}{|x-y|}\right) d\gamma(y) \longrightarrow \pi$$

D'où le théorème:

THEOREME A2: Soient Γ une variété \mathcal{C}^∞ , compacte, sans bord de dimension un et f, g deux fonctions de $L^2(\Gamma)$. Alors

$$\frac{1}{s} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| < s} f(x)g(y) \operatorname{Argch}\left(\frac{s}{|x-y|}\right) d\gamma(x) d\gamma(y) = \pi \int_{\Gamma} f(x)g(x) d\gamma(x) + O(s)$$

De même on peut énoncer les:

THEOREME A3: Soient Γ une variété \mathcal{C}^∞ , compacte, sans bord de dimension un et f, g deux fonctions de $L^2(\Gamma)$. Alors

$$\frac{1}{s^3} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| < s} f(x)g(y) |x-y|^2 \operatorname{Argch}\left(\frac{s}{|x-y|}\right) d\gamma(x) d\gamma(y) = \frac{\pi}{6} \int_{\Gamma} f(x)g(x) d\gamma(x) + O(s)$$

THEOREME A4: Soient Γ une variété \mathcal{C}^∞ , compacte, sans bord de dimension un et f, g deux fonctions de $L^2(\Gamma)$. Alors

$$\frac{1}{s^2} \iint_{\Gamma \times \Gamma / |x-y| < s} f(x)g(y) (s^2 - |x-y|^2)^{1/2} d\gamma(x) d\gamma(y) = \frac{\pi}{2} \int_{\Gamma} f(x)g(x) d\gamma(x) + O(s)$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. BAMBERGER, T.HA DUONG, *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé d'une onde acoustique*, Math.Meth.Appl.Sci.,8 (1986),p. 405-435 et 598-608 .
- [2] A. BAMBERGER, T.HA DUONG, *Diffraction d'une onde acoustique par une paroi absorbante: nouvelles équations intégrales*, rapport interne n° 121, CMAP Polytechnique, 1985.
- [3] A. BENDALI, *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*, Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1984.
- [4] C.L. BENNETT, L. WEEKS, *Transient scattering from conducting cylinders*, IEEE Trans. AP, n° 5, 18 (1970), p. 627.
- [5] E. BECACHE, *Résolution par une méthode d'équations intégrales d'un problème de diffraction d'ondes élastiques transitoires par une fissure*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1991.
- [6] E. BECACHE, T.HA DUONG, *Formulation variationnelle espace-temps associé au potentiel retardé de double couche des ondes élastiques*, rapport interne n° 199, CMAP Polytechnique, 1989.
- [7] M. CESSENAT, *Rapport Interne*, C.E.A./ C.E.L.V., 1984.
- [8] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Vol 1 and 5, Masson, 1985.
- [9] Y. DING, *Méthodes numériques sur l'équation intégrale aux bords pour le problème d'ondes acoustiques diffractées par une surface rigide en 3D*, Thèse de Doctorat, Université d'Orsay, 1989.
- [10] V. GEORGIEV, *Controllability of the scattering operator for dissipative hyperbolic systems*, Math. Nachr. 122 (1985), p. 339-346.
- [11] V. GEORGIEV, *Disappearing solutions for dissipative hyperbolic systems of constant multiplicity*, Hokkaido Math. J., vol. 15 (1986), p. 357-385.
- [12] T. HA DUONG, *Equations intégrales pour la résolution numérique des problèmes de diffraction d'ondes acoustiques dans \mathbb{R}^3* , Thèse d'Etat, Université Paris VI, France, 1987.

- [13] Y. HAUGAZEAU, *Equations intégrales en espace-temps. Formulation variationnelle et schéma numérique*, non publié.
- [14] B. JECKO, *Diffraction d'ondes électromagnétiques impulsionnelles par des obstacles métalliques*, Ann. Telecom. 38, n° 5-6 (1983), p. 215-225;
- [15] L. HORMANDER, *Linear partial differential operator*, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [16] P. LAX, R. PHILLIPS , *Scattering theory*, Academic Press, New York, 1967.
- [17] P. LAX, R. PHILLIPS , *Scattering theory for dissipative hyperbolic systems*, J. Func. Anal. 14 (1973), p. 172-235.
- [18] G. LEBEAU, M. SCHATZMAN , *A wave problem in a half-space with a one-sided constraint at the boundary* , Rapport interne n° 84 , Centre de Mathématiques Appliquées , Ecole Polytechnique , Palaiseau , 1982 .
- [19] M. N. LE ROUX , *Méthodes d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2*, R.A.I.R.O. Anal. Numér. 11 (1977), p. 27-60.
- [20] J. L. LIONS, E. MAGENES , *Problèmes aux limites non homogènes*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [21] A. MAJDA , *A representation formula for the scattering operator and the inverse scattering problem for arbitrary bodies*, Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977), p. 165-194.
- [22] A. MAJDA, *Disappearing solutions for dissipative wave equation*, Indiana Univ. Math. J. 24 (1975), p. 1119-1138.
- [23] A. MAJDA, *High frequency asymptotics for the scattering matrix and the inverse problem of acoustical scattering*, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), p. 261-291.
- [24] A. MAJDA, M. TAYLOR, *Inverse scattering problems for transparent obstacles, electromagnetic waves and hyperbolic systems*, Comm. in Part. Diff. Eq. 2 (1977), p. 395-438.

[25] E. K. MILLER, A. J. POGGIO, G. J. BURKE, *An integro-differential equation technique for the time domain analysis of thin wire structure*, J. Comput. Phys. 12 (1972), Part I, n° 1, p. 24-48, Part. II, n° 2, p. 210-233.

[26] J. C. NEDELEC, *Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surface in \mathbb{R}^3* , Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 8, (1976), p. 61-80.

[27] L. PAQUET, *Problèmes mixtes pour le système de Maxwell*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, 4, (1982), p. 103-141.

[28] V. PETKOV, *Scattering theory for hyperbolic operators*, North Holland, 1989.

[29] V. PETKOV, *Representation of the scattering operator for dissipative hyperbolic systems*, Comm. in Part. Diff. Eq. 6 (1981), p. 993-1002.

[30] V. PETKOV, *Propagation of singularities and inverse scattering problem for transparent obstacles*, J. Math. Pures et Appl. 60 (1982), p. 65-90.

[31] P.A. RAVIART, J. M. THOMAS, *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, Lecture Notes in Math. n° 606, Springer Verlag, Berlin, 1975.

[32] M. TAYLOR, *Reflections of singularities of solutions to systems of differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), p. 457-478.

*Achévé d'imprimer
par
le CEA, Service de Documentation et d'Édition Multimédia
Février 1992*

*DEPOT LEGAL
1er trimestre 1992*