



**HAL**  
open science

## Quelques exemples de jeux à champ moyen

Jean-Luc Coron

► **To cite this version:**

Jean-Luc Coron. Quelques exemples de jeux à champ moyen. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris sciences et lettres, 2017. Français. NNT : 2017PSLED032 . tel-01705969

**HAL Id: tel-01705969**

**<https://theses.hal.science/tel-01705969v1>**

Submitted on 10 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres  
PSL Research University

Préparée à **Université Paris-Dauphine**

Quelques exemples de jeux à champ moyen

**École doctorale n°543**

ÉCOLE DOCTORALE DE DAUPHINE

**Spécialité** MATHÉMATIQUES

Soutenue par **Jean-Luc CORON**  
le 18 décembre 2017

Dirigée par **Pierre-Louis LIONS**

## COMPOSITION DU JURY :

M Olivier GUÉANT  
Université Panthéon-Sorbonne, Président du jury

M Yves ACHDOU  
Université Paris-Diderot, Rapporteur

M Jean-Michel LASRY  
Université Paris-Dauphine, Membre du jury

M Pierre-Louis LIONS  
Collège de France, Membre du jury



# Remerciements

Je souhaite remercier la région Île-de-France qui en finançant l'allocation Domaine d'intérêt Majeur du Réseau de Recherche Doctoral en Mathématiques (DIM RDM-IdF) m'a permis de mener à bien cette thèse. Je remercie aussi pour leur confiance, l'université Paris-Dauphine et notamment l'école doctorale de Dauphine ainsi que le laboratoire CEREMADE.

Toute ma gratitude va à mon directeur de thèse Pierre-Louis Lions ainsi qu'à Jean-Michel Lasry pour le temps qu'ils ont consacré et l'encadrement scientifique qu'ils m'ont apporté durant la préparation de cette thèse. Ils m'ont donné envie et permis de découvrir ce monde captivant de la recherche. Je remercie aussi Yves Achdou et Olivier Guéant avec qui j'ai pu travailler, explorer un peu plus cet univers de la recherche scientifique en mathématiques. J'adresse tous mes remerciements à Pierre Cardaliaguet qui m'a accompagné et guidé dans le monde de l'enseignement supérieur. Je tiens aussi à remercier tous les membres du jury pour le temps et les efforts qu'ils ont consacrés à l'évaluation de cette thèse.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier mes parents et mes amis Florian, Guillaume, Thibault et Sébastien pour leur soutien et leurs encouragements durant ces dernières années.



Il est bien connu que l'on ne peut résoudre en pratique les problèmes de théorie des jeux lorsque le nombre de joueurs est trop grand. Un phénomène similaire se produit en physique lorsque l'on étudie des problèmes à  $N$  corps en mécanique classique ou quantique. La théorie du champ moyen développée en mécanique et en physique statistique permet, lorsque l'on peut l'appliquer, de contourner ce problème et d'obtenir une équation pour la densité des particules lorsque  $N$  tend vers l'infini.

Pour la théorie des jeux, cette méthode est la théorie des jeux à champ moyen. La théorie des jeux à champ moyen fut introduite en 2006 par Jean-Michel Lasry et Pierre-Louis Lions dans un certain nombre d'articles comme [1], [2] et [3]. Indépendamment, Minyi Huang, Roland Malhame et Peter Caines [4] ont étudié certains cas particuliers.

Dans cette thèse, nous étudierons d'abord la théorie des jeux à champ moyen sur les graphes. Nous y définirons des résultats d'existence et d'unicité et nous aborderons le problème de la planification. Nous verrons ensuite comment formuler un problème d'apprentissage statistique, les  $K$ -moyennes, sous la forme d'un jeu à champ moyen. Enfin nous examinerons un jeu à champ moyen à savoir le problème "d'heure de début d'une réunion" en l'étendant à des situations où les agents peuvent choisir entre deux réunions.

## **Théorie des jeux**

La théorie des jeux est l'étude des modèles mathématiques analysant les interactions et coopérations entre agents rationnels. Elle possède de nombreuses applications notamment en économie, en sciences sociales, en politique et en psychologie. Elle fut introduite dans les années 1920 par différents articles d'Ernest Zermelo [5], Émile Borel [6] et John von Neumann [7]. Son nom vient du fait que cette théorie visait à étudier des jeux classiques comme le poker, les échecs ou tout autre jeu de société. On y modélise un certain nombre de joueurs, aussi appelés agents, qui ont pour but d'optimiser leur utilité, une quantité qui tient compte de leur gain final mais aussi de leurs coûts éventuels dûs à leurs interactions avec les autres joueurs, leur état propre et l'entretien de leurs variables de contrôle.

Pour pouvoir introduire des champs moyens dans la théorie des jeux, deux hypothèses sont nécessaires : les joueurs sont supposés d'une part indiscernables et d'autre part "petits".

L'indiscernabilité des joueurs signifie qu'à situations égales, ils ont le même comportement. Si on échange les stratégies et les états de deux agents,

alors cela va échanger leur fonction d'utilité. Remarquons que l'on peut également étudier des jeux à champ moyen avec plusieurs populations différentes. Cela sera le cas dans l'étude des K-moyennes.

La "petitesse" des joueurs signifie quant à elle que lorsque le nombre de joueurs est grand, un joueur ne peut pas à lui tout seul influencer significativement le jeu global.

## Une structure de jeu à champ moyen

Nous allons décrire une version simplifiée de modèle de jeu à champ moyen. Pour une version plus complexe, on suggère au lecteur de regarder les vidéos du Collège de France de Pierre-Louis Lions [8] et la lecture de [9].

On se place ici dans le cadre où  $x \in \mathbb{R}^d$ . On considère qu'un agent se déplace à une certaine vitesse  $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  qu'il peut choisir. À ce déplacement déterministe se rajoute un bruit modélisé par un mouvement brownien  $W_\tau$  et une variance  $\sigma^2$ . Le contrôle  $a$  doit être adapté à la filtration générée par  $(W_\tau)$ . On obtient ainsi la dynamique d'un agent

$$dX_\tau = a_\tau d\tau + \sigma dW_\tau.$$

On note  $m$  la densité des agents à chaque instant. Chaque agent cherche à minimiser sa fonction de coût suivante

$$J_T[a] = \mathbb{E} \left[ g(X_T, m(T)) + \int_0^T L(X_\tau, a_\tau) + f(X_\tau, m(\tau)) d\tau \right],$$

où  $g$  définit le coût de l'état final,  $L$  le coût du contrôle et  $f$  le coût dû aux interactions avec les autres agents. On note  $u$  la fonction valeur

$$u(t, x) = \inf_a \mathbb{E} \left[ g(X_T^{t,x}, m(T)) + \int_t^T L(X_\tau^{t,x}, a_\tau) + f(X_\tau^{t,x}, m(\tau)) d\tau \right].$$

où

$$dX_\tau^{t,x} = a_\tau d\tau + \sigma dW_\tau, \text{ avec } X_t^{t,x} = x.$$

On introduit le hamiltonien  $H$  donné par

$$H(x, p) := \sup_{v \in \mathbb{R}} \{ -\langle p, v \rangle - L(x, v) \},$$

et  $\nu = \frac{\sigma^2}{2}$ .

On a alors en utilisant les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman et de Kolmogorov le système de jeu à champ moyen MFG suivant

$$\begin{cases} -\partial_t u + H(x, \nabla u) - \nu \Delta u = f(x, m) \\ \partial_t m - \operatorname{div}(m D_p H(x, \nabla u)) - \nu \Delta m = 0 \\ u(T, x) = g(x, m(T)) \\ m(0) = m^0 \end{cases} \quad (1)$$

avec un contrôle optimal donné par

$$a^*(t, x) = -\partial_p H(x, \nabla u).$$

## Théorie des jeux sur les graphes

Nous nous appuyerons sur l'article [10] que nous généraliserons. On considère que l'état du joueur est cette fois dans un graphe  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ . On notera le voisinage de  $i$ ,  $J(i)$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{N}$  à destinations de  $i$  et  $d_i = \operatorname{card}(J(i))$ . On définit de même l'inverse  $J^{-1}(i)$  l'ensemble des sommets qui ont comme arrivée  $i$ .

La trajectoire  $(X_\tau)$  de chaque agent constitue un processus de Markov à temps continu. On considère que chaque joueur situé en  $i$  a un contrôle sur sa probabilité de transition  $\lambda_{i,j}$  vers le sommet  $j$

$$\mathbb{P}(X_{\tau+h} = j | X_\tau = i) = \lambda_{i,j} h + o(h).$$

Chaque agent cherche à maximiser son gain

$$G_T[\lambda] = \mathbb{E} \left[ g_{X_T}(m(T)) + \int_t^T -L(X_\tau, (\lambda_{X_\tau, j})_j, m(\tau)) + f_{X_\tau}(m(\tau)) d\tau \right],$$

avec  $L(i, (\lambda_{i,j})_{j \in \mathbb{R}^{d_i}}, m)$  le coût des contrôles  $(\lambda_{i,j})_{j \in \mathbb{R}^{d_i}}$ ,  $g_i$  le gain final et  $f_i$  le gain instantané à être dans l'état  $i$ . On note  $u$  la fonction valeur

$$u_i(t) = \sup_{\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}_+^{d_i}} \mathbb{E} \left[ g_{X_T}(m(T)) + \int_t^T -L(X_\tau, (\lambda_{X_\tau, j})_j, m(\tau)) + f_{X_\tau}(m(\tau)) d\tau | X_t = i \right].$$

On notera qu'ici la quantité  $m(t)$  ne désigne plus une densité sur  $\mathbb{R}^d$  mais une loi de probabilité discrète sur le graphe  $\mathcal{N}$  :  $m(t) = (m_1(t), \dots, m_N(t))$ .

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} m_i(t) = 1$$

On note aussi que l'on est passé d'un problème de minimisation de coût à un problème de maximisation de gain.

On introduit les hamiltoniens  $H_i$  donnés par

$$H_i(u, m) := \sup_{v \in \mathbb{R}_+^{d_i}} \left\{ \langle (u_j - u_i)_{j \in J(i)}, v \rangle - L(i, v, m) + f_i(m) \right\}.$$

On obtient des équations similaires à (1). Elles ont été introduites par Olivier Guéant [10] et prennent la forme suivante

$$\begin{cases} 0 = \partial_t u_i + H_i(u, m) \\ 0 = \partial_t m_i - \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) m_j + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) m_i \\ u_i(T) = g_i(m(T)) \\ m(0) = m^0 \end{cases}$$

avec  $T$  temps final et  $m^0$  densité initiale fixés.

On fera une légère extension des résultats d'existence et d'unicité à des formes d'hamiltoniens plus généraux. On étudiera aussi le problème de planification où l'on oubliera la contrainte  $u_i(T) = g_i(m(T))$  et où l'on fixera la densité à la fois en son état initial mais aussi final.

## K-moyennes

On dispose d'un ensemble d'observables  $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{I} = \llbracket 1, N \rrbracket$ .

Le partitionnement en K-moyennes est une technique de classification dont le but est de créer  $K$  classes  $(S_k)_{k \in \llbracket 1, K \rrbracket}$  pour former une partition de  $\mathbb{R}^d$  de telle manière à minimiser la somme des distances des points d'une même classe pour chaque classe  $S_k$ .

$$\min_{S_1, \dots, S_K} \sum_{k=1}^K \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in I_k} \frac{\|x_i - x_j\|^2}{\text{card}(I_k)} \quad (2)$$

avec  $I_k = \{i \in \mathcal{I} | x_i \in S_k\}$  l'ensemble des indices des observables appartenant à  $S_k$ .

En introduisant les barycentres  $y_k$  pour chaque classe  $S_k$ , on obtient que la classe  $S_k$  est l'ensemble des points pour lesquels  $y_k$  est le barycentre le plus proche.

$$S_k = \{x | \|x - y_k\| = \min_{l \in \llbracket 1, K \rrbracket} \|x - y_l\|\}$$

On cherche alors à minimiser la quantité

$$\min_{y_1, \dots, y_K} \sum_{k=1}^K \sum_{i \in I_k} \|x_i - y_k\|^2.$$

Tout ensemble de barycentre vérifiant la règle d'auto-consistance

$$y_k = \frac{\sum_{i \in I_k} x_i}{\text{card}(I_k)}, \text{ avec } I_k = \{i \in \mathcal{I} \mid \|x_i - y_k\| = \min_{l \in [1, K]} \|x_i - y_l\|\}$$

est un minimum local du problème de minimisation.

Un algorithme de résolution des K-moyennes à partir d'un ensemble de barycentres  $(y_k)_k$  va établir les classes  $S_k$  qui sont les ensembles des points  $(x_i)_i$  dont  $y_k$  est le barycentre le plus proche. Puis l'algorithme va créer un nouvel ensemble de barycentre  $(y'_k)_k$  en prenant les vrais barycentres des classes  $S_k$ . On répète ensuite l'algorithme jusqu'à la convergence des  $(y_k)_k$ .

Le but est de comprendre les liens qui existent entre les K-moyennes et les jeux à champ moyen. Pour la modélisation, on remplace chaque observation présente dans nos données par un joueur qui va essayer de se regrouper dans une des  $K$  classes. On interprète ainsi le problème (2) comme un système MFG du type (1).

Notons que cela permet en principe de proposer de nouveaux algorithmes pour les K-moyennes grâce aux techniques de résolution numérique des MFG comme par exemple dans [11].

## Problème d'heure de début de réunion

On considère un joueur qui souhaite se rendre à une réunion. Il a accès à deux réunions différentes, l'une située en  $x = -L$  et l'autre située en  $x = L$ . Chacune des deux réunions commence à un certain temps  $T_i$ . Ce temps  $T_i$  est défini comme étant le premier instant où à la fois une certaine proportion fixée  $\bar{\theta}_i$  d'agents a réussi à se rendre à cette réunion et l'on a dépassé l'heure prévue de début de réunion  $\bar{t}_i$ .

$$T_i = \inf_{t \geq \bar{t}_i} (t \mid \theta_i(t) \geq \bar{\theta}_i)$$

On décrit la fonction de coût d'arrivée à l'instant  $t$  à une réunion en trois parties

- Le coût de réputation pour être arrivé en retard à la réunion par rapport au temps initial prévu de début d'une réunion  $\alpha [t - \bar{t}_i]_+$ ,

- Le coût de gêne personnelle pour être arrivé après le début effectif de la réunion  $\beta [t - T_i]_+$ ,
- Le coût d'attente avant le début effectif de la réunion  $\gamma [T_i - t]_+$ .

Ceci nous donne deux fonctions de coût suivant la réunion où l'on se rend :

$$\begin{aligned} c_{-L}(t) &= \alpha [t - \bar{t}]_+ + \beta [t - T_1]_+ + \gamma [T_1 - t]_+, \\ c_L(t) &= \alpha [t - \bar{t}]_+ + \beta [t - T_2]_+ + \gamma [T_2 - t]_+. \end{aligned}$$

On rajoute à la fonction de coût, le coût de la vitesse que l'agent a choisi. En utilisant les notations précédentes dans le cadre d'un jeu à champ moyen de type (1) avec  $d = 1$ , on prend  $L(x, a) = \frac{1}{2}a^2$ . La fonction valeur est donc

$$u(t, x) = \min_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ c_{X_\tau^{t,x}}(\tilde{\tau}) + \frac{1}{2} \int_t^{\tilde{\tau}} a_\tau^2 d\tau \right]$$

avec  $X_\tau^{t,x}$  le processus qui part de  $x$  en  $t$ ,  $\mathcal{A}$  l'ensemble des contrôle admissibles, c'est à dire adaptés à la filtration générée par  $(W_\tau)$ , et

$$\tilde{\tau} = \inf \{ \tau \geq t : |X_\tau| = L \}.$$

On obtient alors les équations MFG

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u = 0 \\ \partial_t m + \partial_x ((-\partial_x u) m) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 m = 0 \end{cases}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{cases} u(t, x = \pm L) = c_{\pm L}(t) \\ m(t, x = \pm L) = 0 \\ m(t = 0, x) = m_0(x). \end{cases}$$

Nous étudierons de manière analytique et numérique l'existence et la multiplicité des solutions de ce problème.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>MFG sur les graphes</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction . . . . .	11
1.2	Existence . . . . .	12
1.3	Uniqueness . . . . .	16
1.4	Planning . . . . .	17
<b>2</b>	<b>MFG et K-mean</b>	<b>23</b>
2.1	Modèle de jeu à champ moyen associé aux K-moyennes . . . . .	24
2.2	Relations K-moyennes et MFG . . . . .	26
2.3	Existence . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Problème d'heure de début de réunion</b>	<b>31</b>
3.1	Modélisation . . . . .	31
3.2	Résolution explicite . . . . .	36
3.3	Problème d'inversion . . . . .	40
3.4	Simulations numériques . . . . .	53



# Chapitre 1

## Théorie des jeux à champ moyen sur les graphes

### Résumé

Nous voulons étudier l'équation ( $\mathcal{G}$ -MFG) sur un graphe  $\mathcal{N} = \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{cases} 0 = \partial_t u_i + H_i(u, m) \\ 0 = \partial_t m_i - \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) m_j + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) m_j \end{cases}$$

avec  $u_i(T) = g_i(m(T))$  et  $m(0) = m^0$ , où  $T > 0$  et  $m^0$  sont fixés.

Ici, les hamiltoniens  $(H_i)_{i \in \mathcal{N}}$  dépendent des valeurs  $u(t) = (u_j(t))_{j \in \mathcal{N}}$  et  $m(t) = (m_j(t))_{j \in \mathcal{N}}$ . Généralement, l'hamiltonien  $H_i$  ne dépend des valeurs de  $u$  qu'en  $i$  et pour tout  $j \in J(i)$  où  $J(i)$  est le voisinage de  $i$ . Par exemple, on peut considérer que  $J(i) = \{i - 1, i + 1\}$ .

Le but de ce chapitre est d'étudier la théorie des jeux à champ moyen appliquée sur des graphes généraux. Plus particulièrement, nous allons étendre les résultats d'Olivier Guéant [10] sur l'existence et l'unicité de solution pour des hamiltoniens  $H_i$  qui ne dépendent plus que des différences  $(u_j - u_i)_{j \in J(i)}$  mais aussi de  $u_i$ . Nous étudierons ensuite le problème de planification où on impose la valeur de  $m$  à l'état initial et final.

### 1.1 Introduction

We want to study ( $\mathcal{G}$ -MFG) equation over graph  $\mathcal{N} = \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{cases} 0 = \partial_t u_i + H_i(u, m) \\ 0 = \partial_t m_i - \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) m_j + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) m_j \end{cases}$$

with  $u_i(T) = g_i(m(T))$  and  $m(0) = m^0$ , where  $T > 0$  and  $m^0$  are fixed.

Here, the set of hamiltonian  $(H_i)_{i \in \mathcal{N}}$  depends on the set of values of  $u(t) = (u_j(t))_{j \in \mathcal{N}}$  and  $m(t) = (m_j(t))_{j \in \mathcal{N}}$ . Generally, the hamiltonian  $H_i$  only depends on the value of  $u$  and  $m$  on  $i$  and all  $j \in J(i)$ , where  $J(i)$  is the neighborhood of  $i$ . For example, we can consider that  $J(i) = \{i - 1, i + 1\}$ .

The goal of this article is to study the MFG over general graphs. More particularly, we will extend Olivier Guéant's results [10] about the existence and uniqueness of solutions over hamiltonian  $H_i$  depending not only on the differences  $(u_j - u_i)_{j \in J(i)}$  but also on  $u_i$ . And we will study the so-called "planning" problem where we impose the value of  $m$  at the initial and final states.

## 1.2 Existence

**Theorem 1.** *If there is any  $C_0 \in \mathbb{R}$  such that  $\forall i \in \mathcal{N}$  and  $\forall j \in J(i)$ ,  $\partial_{u_j} H_i \geq 0$  and  $|\partial_{u_i} H_i + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i| \leq C_0$  then there is a solution  $(u, m)$  to the  $\mathcal{G}$ -MFG equation.*

Here, we will adapt the proof of [10] and so, we need the following lemma.

**Lemma 2.** *Comparison Principle*

*Let us consider  $u = (u_i(t))_{i \in \mathcal{N}}$  and  $v = (v_i(t))_{i \in \mathcal{N}}$  such that*

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad -\partial_t u_i - H_i(u, m) \leq 0,$$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad -\partial_t v_i - H_i(v, m) \geq 0,$$

*and  $u_i(T) \leq g_i(m(T))$ ,  $v_i(T) \geq g_i(m(T))$ .*

*If there is any  $C_0 \in \mathbb{R}$  such that  $\forall i \in \mathcal{N}$  and  $\forall j \in J(i)$ ,  $\partial_{u_j} H_i \geq 0$  and  $\partial_{u_i} H_i + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i \leq C_0$ , then  $\forall i \in \mathcal{N}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $u_i(t) \leq v_i(t)$ .*

*Proof of Lemma 2.* For the time being, we will assume that  $\forall i \in \mathcal{N}$  and  $\forall j \in J(i)$ ,  $\partial_{u_j} H_i \geq 0$  and  $\partial_{u_i} H_i + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i \leq 0$ .

Let us consider  $(u, v)$  such that

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad -\partial_t u_i - H_i(u, m) \leq 0,$$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad -\partial_t v_i - H_i(v, m) \geq 0,$$

and  $u_i(T) \leq g_i(m(T))$ ,  $v_i(T) \geq g_i(m(T))$ .

We define  $\Delta u_i = u_i - v_i$  and

$$\Delta H_i = H_i(u, m) - H_i(v, m).$$

Let  $\epsilon > 0$  and  $(i^*, t^*)$  such that

$$\Delta u_{i^*}(t^*) - \epsilon(T - t^*) = \max_{(i,t) \in \mathcal{N} \times [0,T]} \Delta u_i(t) - \epsilon(T - t).$$

The function

$$M : t \rightarrow \Delta u_{i^*}(t) - \epsilon(T - t)$$

has a local maximum at  $t^*$  so if  $t^* < T$  then

$$\partial_t M(t^*) \leq 0.$$

And so we get that

$$-\partial_t u_{i^*}(t^*) \geq -\partial_t v_{i^*}(t^*) + \epsilon \geq -\partial_t v_{i^*}(t^*). \quad (1.1)$$

We also have

$$\forall i \in \mathcal{N}, \Delta u_{i^*}(t^*) \geq \Delta u_i(t^*),$$

and so

$$\forall j \in J(i^*), \Delta u_{i^*}(t^*) - \Delta u_j(t^*) \geq 0. \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{i^*} &= \int_0^1 d\theta \sum_{j \in J(i^*)} \Delta u_j(t^*) \partial_{u_j} H_{i^*}(u + \theta(v - u), m) \\ &\quad + \Delta u_{i^*}(t^*) \partial_{u_{i^*}} H_{i^*}(u + \theta(v - u), m) \end{aligned}$$

$$\Delta H_{i^*} = \int_0^1 d\theta \sum_{j \in J(i^*)} (\Delta u_j - \Delta u_{i^*}) \partial_{u_j} H_{i^*} + \Delta u_{i^*} (\partial_{u_{i^*}} H_{i^*} + \sum_{j \in J(i^*)} \partial_{u_j} H_{i^*})$$

We can consider that  $\Delta u_{i^*} \geq 0$  or else, we have  $u < v$  and the lemma is proven. Hence, thanks to the hypotheses on the partial derivatives of  $H$  and (1.2), we have  $\Delta H_{i^*} \leq 0$ .

And then using (1.1) we have

$$-\partial_t u_{i^*} - H_{i^*}(u, m) \geq -\partial_t v_{i^*} - H_{i^*}(v, m),$$

which contradicts the hypotheses on  $u$  and  $v$  of sub and super-solutions. So  $t^* = T$  and because of the limit conditions  $u_i(T) \leq g_i(m(T)) \leq v_i(T)$ ,

$$\max_{(i,t) \in \mathcal{N} \times [0,T]} \Delta u_i(t) - \epsilon(T - t) = \max_{i \in \mathcal{N}} \Delta u_i(T) \leq 0.$$

This is true for any  $\epsilon > 0$  so  $u \leq v$ .

Now we consider the general case and we want to prove that we can come back to the previous case. We use a transformation of the function  $u$  and  $v$  to get new equations.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i(t) &= e^{\lambda t} u_i(t) \text{ and } \tilde{v}_i(t) = e^{\lambda t} v_i(t). \\ -e^{-\lambda t} \partial_t \tilde{u}_i(t) + \lambda e^{-\lambda t} \tilde{u}_i(t) - H_i(e^{-\lambda t} \tilde{u}(t), m) &\leq 0 \\ -\partial_t \tilde{u}_i(t) - \tilde{H}_i(\tilde{u}, m) &\leq 0\end{aligned}$$

with

$$\tilde{H}_i(u, m) = -\lambda u_i + e^{\lambda t} H_i(e^{-\lambda t} u, m).$$

We also get

$$-\partial_t \tilde{v}_i(t) - \tilde{H}_i(\tilde{v}, m) \geq 0.$$

The final conditions become

$$\tilde{u}_i(T) \leq \tilde{g}_i(m(T)) \leq \tilde{v}_i(T)$$

with

$$\tilde{g}_i(m(T)) = e^{\lambda T} g_i(m(T)).$$

$$\partial_{u_j} \tilde{H}_j = \partial_{u_j} H_j, \partial_{u_i} \tilde{H}_i = \partial_{u_i} H_i - \lambda \text{ and we choose } \lambda \text{ such that } \lambda = C_0.$$

Using the assumptions of the lemma, we have  $\forall i \in \mathcal{N}$  and  $\forall j \in J(i)$ ,  $\partial_{u_j} \tilde{H} \geq 0$  and  $\partial_{u_i} \tilde{H} + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} \tilde{H} \leq 0$ . Then, using the result above, we get that  $\tilde{u} \leq \tilde{v}$  and then  $u \leq v$ .  $\square$

*Proof of Theorem 1.* Let  $m$  be a set of continuous probability

$$(m_k(\cdot))_{k \in \mathcal{N}} : [0, T] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{N}},$$

and  $u$  the solution to the Hamilton-Jacobi equation

$$0 = \partial_t u_i + H_i(u, m),$$

with  $u_i(T) = g_i(m(T))$ .

We use the fact that the functions

$$x \rightarrow H_i((x, \dots, x), m)$$

are globally lipschitz, so there is a super-solution  $\bar{w} \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$  such that

$$\partial_t \bar{w} + \sup_i (H_i((\bar{w}, \dots, \bar{w}), m)) = 0,$$

and  $\bar{w}(T) = \sup_{(i,v) \in \mathcal{N} \times \mathbb{P}_{\mathcal{N}}} g_i(v)$ .

And, there is a sub-solution  $\underline{w} \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$  such that

$$\partial_t \underline{w} + \inf_i (H_i(\underline{w}, \dots, \underline{w}), m) = 0,$$

and  $\underline{w}(T) = \inf_{(i,v) \in \mathcal{N} \times \mathbb{P}_{\mathcal{N}}} g_i(v)$ .

Then, with the comparison principle, we get

$$\sup_{i \in \mathcal{N}} \|u_i\|_{\infty} \leq \max(\|\bar{w}\|_{\infty}, \|\underline{w}\|_{\infty}). \quad (1.3)$$

We now want to study the solution of

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \tilde{m}_i - \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) \tilde{m}_j + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) \tilde{m}_i. \\ \partial_t \tilde{m}_i &= \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) \tilde{m}_j - \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) \tilde{m}_i \end{aligned}$$

Because  $m$  and  $\tilde{m}$  are probability, they are bounded by 1 and we know with (1.3) that  $u$  is bounded, then, we get that the quantity

$$\sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) \tilde{m}_j - \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) \tilde{m}_i$$

is also bounded and so is  $\partial_t \tilde{m}_i$ .

We have the continuity of the application  $\Theta : m \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{P}_{\mathcal{N}}) \rightarrow \tilde{m}$ .  $\Theta(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^N))$  is a relatively compact set and  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^N)$  is convex. So with a Schauder's fixed point theorem over the application  $\Theta$ , there is a fixed point  $m$ . If we consider the solution  $u$  associated to  $m$  by the HJB equation above, there exists a solution  $(u, m)$  to the  $\mathcal{G}$ -MFG equation.  $\square$

**Remark.** The condition  $\partial_{u_j} H_i \geq 0$  is usually true in order to be sure that  $m$  won't be negative with the second equation of the  $\mathcal{G}$ -MFG equation.

**Remark.** The condition  $\partial_{u_i} H_i + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i \geq -C_0$  is only here to be sure that we can get the existence of constant sub-solutions. It can be too strong but we generally study  $H$  such that

$$H_i(u, m) = \tilde{H}_i((u_j - u_i)_j, m) + h_i(u_i),$$

and the condition only applies to  $h_i$ .

### 1.3 Uniqueness

We define

$$H_i^m(u, m) = - \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) m_j + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) m_i$$

and

$$\mathcal{F} : (u, m) \rightarrow (-H^m(u, m), -H(u, m)).$$

**Definition.** A function  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  will be called monotone if  $\forall x \in \mathbb{R}^d$  we get

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

$f$  will be called strongly monotone if it is monotone and

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle = 0 \Rightarrow f(x) = f(y).$$

**Theorem 3.** *If the functions  $\mathcal{F}$  and  $-g$  are monotone and one of the two following conditions is true*

- $\mathcal{F}$  is strongly monotone,
- $g$  is strongly monotone and we have the hypothesis of the comparison principle : there exists  $C_0 \in \mathbb{R}$  such that  $\forall i \in \mathcal{N}$  and  $\forall j \in J(i)$ ,  $\partial_{u_i} H_i \geq 0$  and  $\partial_{u_i} H_i + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i \leq C_0$ ,

*then there is only one solution to the  $\mathcal{G}$ -MFG equation.*

*Proof of Theorem 3.* Let us consider two solutions to the  $\mathcal{G}$ -MFG equation  $(\tilde{u}, \tilde{m})$  and  $(\bar{u}, \bar{m})$ .

Let us consider

$$I = \int_0^T dt \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} ((\tilde{u}_i(t) - \bar{u}_i(t))(\tilde{m}_i(t) - \bar{m}_i(t))).$$

Because  $(\tilde{u}, \tilde{m})$  and  $(\bar{u}, \bar{m})$  are solutions to the  $\mathcal{G}$ -MFG equation, we know thanks to the limit condition that

$$I = \sum_{i=1}^N (g_i(\tilde{m}(T)) - g_i(\bar{m}(T)))(\tilde{m}_i(T) - \bar{m}_i(T)),$$

and we know thanks to the partial differential equation that

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T dt \sum_{i=1}^N -(H_i(\tilde{u}, \tilde{m}) - H_i(\bar{u}, \bar{m}))(\tilde{m}_i(t) - \bar{m}_i(t)) \\ &\quad - (\tilde{u}_i(t) - \bar{u}_i(t))(H_i^m(\tilde{u}, \tilde{m}) - H_i^m(\bar{u}, \bar{m})), \\ I &= \int_0^T dt \langle \mathcal{F}(\tilde{u}, \tilde{m}) - \mathcal{F}(\bar{u}, \bar{m}), ((\tilde{u}, \tilde{m}) - (\bar{u}, \bar{m})) \rangle. \end{aligned}$$

So we have

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N (g_i(T, (\tilde{m}(T))) - g_i(T, \bar{m}(T))) (\tilde{m}_i(T) - \bar{m}_i(T)) \\ & \quad + \int_0^T dt < \mathcal{F}(\tilde{u}, \tilde{m}) - \mathcal{F}(\bar{u}, \bar{m}), ((\tilde{u}, \tilde{m}) - (\bar{u}, \bar{m})) = 0. \end{aligned}$$

Since both terms are non-negative, they are both equal to zero.

If  $g$  is strongly monotone then  $\tilde{u}(T) = \bar{u}(T)$  and using the comparison principle, we got that  $\tilde{u} = \bar{u}$ . Then,  $H^m(u, m)$  is locally Lipschitz, so we have a uniqueness over  $m$ ,  $(\tilde{u}, \tilde{m}) = (\bar{u}, \bar{m})$ .

If  $\mathcal{F}$  is strongly monotone, then  $\mathcal{F}(\tilde{u}, \tilde{m}) = \mathcal{F}(\bar{u}, \bar{m})$  and  $(\tilde{u} - \bar{u}, \tilde{m} - \bar{m})$  are independent of time. Because we have  $\tilde{m}(0) = \bar{m}(0) = m^0$ ,  $\tilde{m} = \bar{m}$  then  $\tilde{u}(T) = \bar{u}(T) = g(\tilde{m}(T))$  so  $(\tilde{u}, \tilde{m}) = (\bar{u}, \bar{m})$ .  $\square$

## 1.4 Planning

We want to solve the planning problem ( $\mathcal{P}$ )

$$\begin{cases} 0 = \partial_t u_i + H_i(u, m) \\ 0 = \partial_t m_i - \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) m_j + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) m_i \end{cases}$$

with  $m_i(0) = m_i^0$  and  $m_i(T) = m_i^1$ .

**Theorem 4.** *If there exists  $p > 1$ ,  $K \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{K,N}(\mathbb{R})$  and  $C \in \mathbb{R}$  such that  $\forall u \in \mathbb{R}^N$ ,*

$$Au = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathcal{N}, u_i = u_1,$$

*and if there exists  $\tilde{m} \in C^0([0, T], \mathbb{P}_{\mathcal{N}})$  such that  $\tilde{m}(0) = m^0$ ,  $\tilde{m}(T) = m^1$ , and  $\forall (u, m, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{P}_{\mathcal{N}} \times [0, T]$ ,*

$$< \mathcal{F}(u, m), (u, m - \tilde{m}(t)) > \geq \delta(\|H(u, m)\| + \|Au\|^p) - C,$$

*and if there exists  $C_0 \in \mathbb{R}$  such that  $\forall (i, j) \in \mathcal{N} \times J(i)$ ,  $\partial_{u_j} H_i \geq 0$  and  $|\partial_{u_i} H_i + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i| \leq C_0$ , then, there is a solution to the planning problem ( $\mathcal{P}$ ).*

**Theorem 5.** *If the function  $\mathcal{F}$  or  $-\mathcal{F}$  is strongly monotone, then, there is at most one solution to the planning problem ( $\mathcal{P}$ ) within an additive constant for  $u$  : for two solutions  $(\tilde{u}, \tilde{m})$ ,  $(\bar{u}, \bar{m})$  there exists  $c \in \mathbb{R}^N$  such that*

$$(\tilde{u} + c, \tilde{m}) = (\bar{u}, \bar{m})$$

*at any time.*

*Proof of Theorem 4.*

$$Au = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathcal{N}, u_i = u_1.$$

So the application  $u \rightarrow \|Au\|$  is a norm in  $\mathbb{R}^N/\mathbb{R}$ .  $\mathbb{R}^N/\mathbb{R}$  is a finite dimensional space so we can use the equivalence of the norms : there exists  $C^{te} \in \mathbb{R}$  such that  $\forall u \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\left\| \left( u_i - \frac{1}{n} \sum_{l \in \mathcal{N}} u_l \right)_{i \in \mathcal{N}} \right\| \leq C^{te} \|Au\|.$$

Let us introduce the penalized planning problem  $(\mathcal{P}_\epsilon)$

$$\begin{cases} 0 = \partial_t u_i + H_i(u, m) \\ 0 = \partial_t m_i - \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) m_j + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) m_i \end{cases}$$

with  $m_i(0) = m_i^0$  and  $u_i(T) = \frac{1}{\epsilon}(m_i^1 - m_i(T))$ .

Because we have the assumptions of theorem 1, there exists a solution  $(u^\epsilon, m^\epsilon)$  to  $(\mathcal{P}_\epsilon)$ . We choose  $(\tilde{u}, \tilde{m})$  such that  $\tilde{u}_i = 0$ , and  $\tilde{m}$  satisfies the hypothesis of the theorem. We can notice that generally,  $(\tilde{u}, \tilde{m})$  is not a solution.

The goal of this proof is to bound  $(u^\epsilon, m^\epsilon)$  independently of  $\epsilon$ .

Let us consider

$$I = -\frac{1}{\epsilon} \sum_i (m_i^\epsilon(T) - m_i^1)^2.$$

$$I = \sum_i (u_i^\epsilon(T) - \tilde{u}_i(T))(m_i^\epsilon(T) - \tilde{m}_i(T))$$

$$I = \int_0^T \frac{d}{dt} \left( \sum_i (u_i^\epsilon(s) - \tilde{u}_i(s))(m_i^\epsilon(s) - \tilde{m}_i(s)) \right) ds$$

$$I = \int_0^T ds \sum_i (m_i^\epsilon(s) - \tilde{m}_i(s)) \frac{d}{dt} (u_i^\epsilon(s) - \tilde{u}_i(s)) + (u_i^\epsilon(s) - \tilde{u}_i(s)) \frac{d}{dt} (m_i^\epsilon(s) - \tilde{m}_i(s))$$

$$I = \int_0^T \langle (\partial_t m^\epsilon - \partial_t \tilde{m}, \partial_t u^\epsilon - \partial_t \tilde{u}), (u^\epsilon - \tilde{u}, m^\epsilon - \tilde{m}) \rangle$$

Because  $(u^\epsilon, m^\epsilon)$  is a solution, we have,

$$I = \int_0^T \langle \mathcal{F}(u^\epsilon, m^\epsilon) - (\partial_t \tilde{m}, \partial_t \tilde{u}), (u^\epsilon - \tilde{u}, m^\epsilon - \tilde{m}) \rangle.$$

We want to bound the term  $\int_0^T \langle (\partial_t \tilde{m}, \partial_t \tilde{u}), (u^\epsilon - \tilde{u}, m^\epsilon - \tilde{m}) \rangle$ . Noticing that

$$\sum_i \partial_t \tilde{m}_i = 0,$$

we have

$$\sum_i (\partial_t \tilde{m}_i) u_i^\epsilon = \sum_i (\partial_t \tilde{m}_i) \left( u_i^\epsilon - \frac{1}{N} \sum_l u_l^\epsilon \right).$$

$(\partial_t \tilde{m}_i)$  is bounded so we have

$$\sum_i (\partial_t \tilde{m}_i) \left( u_i^\epsilon - \frac{1}{N} \sum_l u_l^\epsilon \right)$$

which is bounded for each time by the norm of  $u^\epsilon$  in  $\mathbb{R}^N/\mathbb{R}$ . Then, by equivalence of the norms, there exists  $C_1$  such that

$$\sum_i (\partial_t \tilde{m}_i) u_i^\epsilon \leq C_1 \|Au^\epsilon\|.$$

Then we have  $\tilde{u} = 0$ , so  $\partial_t \tilde{u} = 0$ . We get

$$\int_0^T \langle (\partial_t \tilde{m}, \partial_t \tilde{u}), (u^\epsilon, m^\epsilon - \tilde{m}) \rangle \leq C_1 \int_0^T \|Au^\epsilon\|. \quad (1.4)$$

We have

$$\langle \mathcal{F}(u^\epsilon, m^\epsilon), (u^\epsilon, m^\epsilon - \tilde{m}) \rangle = I + \int_0^T \langle (\partial_t \tilde{m}, \partial_t \tilde{u}), (u^\epsilon, m^\epsilon - \tilde{m}) \rangle.$$

Using the assumption of the theorem,

$$\langle \mathcal{F}(u^\epsilon, m^\epsilon), (u^\epsilon, m^\epsilon - \tilde{m}) \rangle \geq \delta(\|H\| + \|Au^\epsilon\|^p) - C,$$

and integrating this inequality by time we get

$$I + \int_0^T \langle (\partial_t \tilde{m}, \partial_t \tilde{u}), (u^\epsilon, m^\epsilon - \tilde{m}) \rangle \geq \int_0^T \delta(\|H\| + \|Au^\epsilon\|^p) - CT. \quad (1.5)$$

Combining (1.4) and (1.5),

$$\int_0^T \delta(\|H\| + \|Au^\epsilon\|^p) \leq C_1 \int_0^T \|Au^\epsilon\| + CT + I.$$

$I \leq 0$ , so we get

$$\int_0^T \delta(\|H\| + \|Au^\epsilon\|^p) \leq C_1 \int_0^T \|Au^\epsilon\| + CT. \quad (1.6)$$

As  $\|H\| > 0$  and  $p > 1$ , we have by holder that

$$\delta \left( \int_0^T (\|Au^\epsilon\|) \right)^p \leq \int_0^T \delta(\|Au^\epsilon\|^p) \leq C_1 \int_0^T \|Au^\epsilon\| + CT.$$

So, there exists  $C_2 \in \mathbb{R}$  such that

$$\int_0^T \|Au^\epsilon\| \leq C_2.$$

If we use once again (1.6), only keeping this time  $\|H\|$ , there exists  $C_3 \in \mathbb{R}$  such that

$$\int_0^T \delta \|H\| \leq C_1 \int_0^T \|Au^\epsilon\| + CT \leq C_3.$$

Then,  $H_i(u^\epsilon, m^\epsilon) = -\partial_t u_i^\epsilon$  is bounded in  $L^1$  and so does

$$\frac{d}{dt} \sum_i u_i^\epsilon.$$

As  $\sum_i u_i^\epsilon(T) = 0$ , we have

$$\left\| \sum_i u_i^\epsilon \right\|_{L^\infty(0,T)}$$

which is bounded independently of  $\epsilon$ .

Using the fact that  $\int_0^T \|Au^\epsilon\| \leq C_2$  and the equivalence of the norm in  $\mathbb{R}^N/\mathbb{R}$ ,

$$\int_0^T \left\| u^\epsilon - \sum_j u_j^\epsilon \right\| \leq C^{te} \int_0^T \|Au^\epsilon\| \leq C^{te} C_2,$$

and so we find that  $u^\epsilon$  is bounded in  $L^1$ , and because  $\partial_t u^\epsilon$  is bounded, there exists  $C_4 \in \mathbb{R}$  such that  $\forall (i, t) \in \mathcal{N} \times [0, T]$ ,

$$|u_i^\epsilon(t)| \leq C_4.$$

So we have bounded  $(u^\epsilon, m^\epsilon)$  and by using their differential equations, we can bound their derivatives  $(\partial_t u^\epsilon, \partial_t m^\epsilon)$  so  $(u^\epsilon, m^\epsilon)$  is in a relatively compact of  $C([0, T])$ . We can extract a sub-sequence which converge to  $(u, m)$  such that

$$\begin{cases} 0 = \partial_t u_i + H_i(u, m) \\ 0 = \partial_t m_i - \sum_{j \in J^{-1}(i)} \partial_{u_i} H_j(u, m) m_j + \sum_{j \in J(i)} \partial_{u_j} H_i(u, m) m_i \end{cases}$$

with  $m(0) = m^0$  and  $m(T) = m^1$  because  $\forall i \in \mathcal{N}$ ,

$$|u_i^\epsilon(T)| \leq C_4$$

and so,

$$\left| m_i^1(T) - m_i^\epsilon(T) \right| \leq \epsilon C_4.$$

□

*Proof of Theorem 5.* Let us consider two solutions to the planning problem  $(\mathcal{P})$   $(\tilde{u}, \tilde{m})$  and  $(\bar{u}, \bar{m})$  and

$$I = \int_0^T dt \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} ((\tilde{u}_i(t) - \bar{u}_i(t))(\tilde{m}_i(t) - \bar{m}_i(t))).$$

Because  $(\tilde{u}, \tilde{m})$  and  $(\bar{u}, \bar{m})$  are solutions to the planning problem  $(\mathcal{P})$ , we know thanks to the limit condition that  $I = 0$  and

$$\begin{aligned} I = \int_0^T dt \sum_{i=1}^N & - (H_i(\tilde{u}, \tilde{m}) - H_i(\bar{u}, \bar{m}))(\tilde{m}_i(t) - \bar{m}_i(t)) \\ & - (\tilde{u}_i(t) - \bar{u}_i(t))(H_i^m(\tilde{u}, \tilde{m}) - H_i^m(\bar{u}, \bar{m})). \end{aligned}$$

So we have

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^T dt \sum_{i=1}^N & - (H_i(\tilde{u}, \tilde{m}) - H_i(\bar{u}, \bar{m}))(\tilde{m}_i(t) - \bar{m}_i(t)) \\ & - (\tilde{u}_i(t) - \bar{u}_i(t))(H_i^m(\tilde{u}, \tilde{m}) - H_i^m(\bar{u}, \bar{m})). \end{aligned}$$

From the property of  $\mathcal{F}$ , we know that  $\mathcal{F}(\tilde{u}, \tilde{m}) = \mathcal{F}(\bar{u}, \bar{m})$ . Then,  $(\tilde{u} - \bar{u}, \tilde{m} - \bar{m})$  is independent of time and as we have  $\tilde{m}(0) = \bar{m}(0) = m^0$ ,  $\tilde{m} = \bar{m}$ , so there exist  $c \in \mathbb{R}^N$  such that  $(\tilde{u} + c, \tilde{m}) = (\bar{u}, \bar{m})$ . □

**Remark.** We use  $A$  such that

$$Au = 0 \Rightarrow \forall i, u_i = u_1,$$

because usually, like in [10],  $H_i$  only depends on the differences  $u_j - u_i$ . That's also why  $u$  is unique within an additive constant. If we want to add a term  $\lambda u_i$  :

$$H_i(u, m) = \tilde{H}_i((u_j - u_i)_j, m) + \lambda u_i,$$

we can use the transformation  $\phi = u \exp \lambda t$  then  $\phi$  solves the problem

$$0 = \partial_t \phi_i + e^{\lambda t} \tilde{H}_i((e^{-\lambda t}(\phi_j - \phi_i))_j, m),$$

and we may check the property for  $\bar{H}$ ,

$$\bar{H}_i(\phi, m) = e^{\lambda t} \tilde{H}_i((e^{-\lambda t}(\phi_j - \phi_i))_j, m).$$

Then we will have found the uniqueness of  $u$  within a term  $Ce^{-\lambda t}$ .



## Chapitre 2

# Théorie des jeux à champ moyen et K-moyennes

*Dans cette partie, nous verrons comment exprimer le partitionnement en K-moyennes avec la théorie des jeux à champ moyen. Avec ce nouveau prisme, nous étudierons les problèmes d'unicité et d'existence qui sont posés avec cette nouvelle formulation.*

On dispose d'un ensemble d'observable  $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sur  $\mathbb{R}^d$ .

Le partitionnement en K-moyennes est une technique de classification dont le but est de créer  $K$  classes  $(S_k)_{k \in [1, K]}$  formant une partition de  $\mathbb{R}^d$  et de telle manière à minimiser la somme des distances des points d'une même classe.

$$\min_{S_1, \dots, S_K} \sum_{k=1}^K \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in I_k} \frac{\|x_i - x_j\|^2}{\text{card}(I_k)} \quad (2.1)$$

avec  $I_k = \{i \in \mathcal{I} | x_i \in S_k\}$  l'ensemble des indices des observables appartenant à  $S_k$ .

En introduisant les barycentres  $y_k$  pour chaque classe  $S_k$ , on obtient que la classe  $S_k$  est l'ensemble des points pour lesquels  $y_k$  est le barycentre le plus proche.

$$S_k = \{x | \|x - y_k\| = \min_{l \in [1, K]} \|x - y_l\|\}$$

On cherche alors à minimiser la quantité

$$\min_{y_1, \dots, y_K} \sum_{k=1}^K \sum_{i \in I_k} \|x_i - y_k\|^2.$$

Tout ensemble de barycentre vérifiant la règle d'auto-consistance

$$y_k = \frac{\sum_{i \in I_k} x_i}{\text{card}(I_k)}, \text{ avec } I_k = \{i \in \mathcal{I} | \|x_i - y_k\| = \min_{l \in [1, K]} \|x_i - y_l\|\}$$

est un minimum local du problème de minimisation.

Pour passer à la théorie des jeux à champ moyen, il est naturel de considérer que l'on a accès à un nombre infini d'observables, et donc qu'au lieu d'avoir des  $x_i$ , on a accès à une fonction de densité  $f(x)$ . Ceci peut s'exprimer simplement si on considère la notation précédente

$$\min_{y_1, \dots, y_K} \sum_{k=1}^K \int_{S_k} \|x - y_k\|^2 f(x) dx,$$

et l'équation d'auto-consistance

$$y_k = \frac{\int_{S_k} z f(z) dz}{\int_{S_k} f(z) dz}.$$

## 2.1 Modèle de jeu à champ moyen associé aux K-moyennes

Nous allons décrire le modèle de jeu à champ moyen stationnaire choisi pour décrire les problèmes des K-moyennes.

Ici, les agents sont liés aux observables. Chaque agent appartient à une classe spécifique. Ces agents ont la dynamique suivante

$$dX_t = a_t dt + \sigma dW_t,$$

avec  $a_t$  un contrôle adaptée à la filtration générée par  $(W_t)$ .

Ils cherchent à minimiser leurs coût de déplacement ainsi que leur distance au barycentre  $y_k$  de leur classe  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  et donc leur fonction de coût total  $J_k(x, a)$

$$J_k(x, a) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \left( F_k(X_t^{0,x}) + \frac{1}{2} a_t^2 \right) e^{-\rho t} dt \right],$$

avec  $\rho > 0$  fixé,  $X_t^{0,x}$  le processus décrit précédemment partant de  $X_0^{0,x} = x$ ,

$$F_k(x, m_k) = \frac{1 + \rho}{2} \|x - y_k\|^2$$

$$\text{et } y_k = \frac{\int z m_k(z) dz}{\int m_k(z) dz}.$$

On obtient alors l'équation sur leur fonction valeur  $u$

$$\rho u_k + \frac{1}{2} \|\nabla u_k\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u_k = F_k(x, m_k).$$

## 2.1. MODÈLE DE JEU À CHAMP MOYEN ASSOCIÉ AUX K-MOYENNES 25

Soit  $f$  la densité sur  $\mathbb{R}^d$  de nos observables. Notre problème doit faire intervenir cette densité  $f$ . Les agents vont aléatoirement être enlevés et de nouveaux vont être redistribués sur les différentes classe  $S_k$  suivant une loi normale de variance  $\nu^2$  et de moyenne  $\tilde{y}_k$ . On prend  $2\nu^2 = \sigma^2$ .  $\tilde{y}_k$  est le barycentre de la classe  $S_k$  calculée avec la densité  $f$ . On a

$$\tilde{y}_k = \frac{\int_{S_k} z f(z) dz}{\int_{S_k} f(z) dz}.$$

On pose  $\tilde{f}_k$  la densité de cette loi, on a,

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\nu\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\|x - \tilde{y}_k\|^2}{2\nu^2}\right).$$

Ce processus de tirage suivra une loi exponentielle de raison  $\rho$ . On peut comprendre ce processus de tirage par le fait que dans la pratique, au fil du temps nos observations deviennent obsolètes et on doit en fabriquer de nouvelles. Pour en retirer une nouvelle, on suit la loi des observables et on applique une erreur qui correspond à une erreur de mesure.

On obtient alors l'équation sur leur fonction de densité

$$\rho m_k - \operatorname{div}(\nabla u_k m_k) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m_k = \rho \tilde{f}_k.$$

On considère donc le (MFG-K) problème suivant  $\forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket$

$$\begin{cases} \rho u_k + \frac{1}{2} \|\nabla u_k\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u_k = F_k(x, m_k) \\ \rho m_k - \operatorname{div}(\nabla u_k m_k) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m_k = \rho \tilde{f}_k \end{cases}$$

avec

$$F_k(x, m_k) = \frac{1 + \rho}{2} \left\| x - \frac{\int z m_k(z) dz}{\int m_k(z) dz} \right\|^2$$

et  $\rho > 0$  fixé.

Les équations en  $u_k$  vont définir les classe  $S_k$  comme les points tels que  $y_k$  est le barycentre le plus proche

$$S_k = \{x | u_k(x) = \min_{l \in \llbracket 1, K \rrbracket} u_l(x)\}.$$

Les équations en  $m_k$  vont elles déplacer la masse et donc le barycentre  $y_k$  vers le barycentre réel  $\tilde{y}_k$  calculé sur la classe  $S_k$  par notre densité  $f$ . On a ici un fonctionnement proche des algorithmes des K-moyennes où à chaque itération on crée les nouvelles classes  $S_k$  et on actualise les barycentre  $y_k$ .

## 2.2 Relations entre les K-moyennes et les jeux à champ moyen

**Théorème 1.** *Tout ensemble de barycentre vérifiant la règle d'auto-consistance  $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_K)$  constitue une solution du (MFG-K) problème avec  $f$  la distribution de Dirac associée à notre ensemble de point  $(x_i)_i$ .*

**Théorème 2.** *Soit  $(u, m)$  une solution du (MFG-K) problème. Si*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

*alors on peut associer à cette solution un ensemble de barycentre vérifiant la règle d'auto-consistance.*

*Démonstration du Théorème 1.* On note tout d'abord que la notation  $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_K)$  est cohérente dans la mesure où si  $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_K)$  sont des barycentres, ils vérifient la propriété

$$\tilde{y}_k = \frac{\int_{S_k} z f(z) dz}{\int_{S_k} f(z) dz}.$$

On pose les fonctions

$$u_k(x) = \frac{1}{2} \|x - \tilde{y}_k\|^2 + \frac{d\sigma^2}{2\rho}$$

et

$$m_k(x) = \frac{1}{\nu\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\|x - \tilde{y}_k\|^2}{2\nu^2}\right) = \tilde{f}_k(x).$$

On a

$$\rho u_k + \frac{1}{2} \|\nabla u_k\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u_k = F_k(x, m_k).$$

Comme  $m_k$  correspondent à des gaussiennes centrée en  $\tilde{y}_k$ , on obtient  $\forall k, \tilde{y}_k = y_k$ .

De plus, on a

$$\operatorname{div}((x - y_k)\tilde{f}_k(x)) = \left(d - \frac{\|x - y_k\|^2}{\nu^2}\right) \tilde{f}_k(x),$$

et

$$\Delta \tilde{f}_k(x) = \left(\frac{\|x - y_k\|^2}{\nu^4} - \frac{d}{\nu^2}\right) \tilde{f}_k(x).$$

On a donc

$$-\operatorname{div}(\nabla u_k \tilde{f}_k) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \tilde{f}_k = 0.$$

On a finalement

$$\rho m_k - \operatorname{div}(\nabla u_k m_k) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m_k = \rho \tilde{f}_k.$$

$(u, m)$  est donc une solution du (MFG-K) problème.  $\square$

*Démonstration du Théorème 2.* Soit  $(u, m)$  une solution. Soit  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ , on fixe, quitte à faire une transformation spatiale  $\frac{\int z m_k(z) dz}{\int m_k(z) dz} = 0$ . On pose

$$\bar{u}_\delta(x) = \frac{1}{2}(1 + \delta) \|x\|^2 + \frac{d\sigma^2}{2\rho}(1 + \delta)$$

et

$$\underline{u}_\delta(x) = \frac{1}{2}(1 - \delta) \|x\|^2 + \frac{d\sigma^2}{2\rho}(1 - \delta),$$

avec  $0 < \delta < 2$ .

On a

$$\rho \bar{u}_\delta(x) + \frac{1}{2} \|\nabla \bar{u}_\delta(x)\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \bar{u}_\delta(x) = \left( \rho(1 + \delta) + (1 + \delta)^2 \right) \frac{\|x\|^2}{2} \geq F_k(x, m_k).$$

$\bar{u}_\delta$  est donc sur-solution du problème (MFG-K). De même,  $\underline{u}_\delta$  est sous-solution.

Par le comportement limite, en prenant  $\delta > 0$ , on obtient

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} u_k(x) - \bar{u}_\delta(x) = -\infty.$$

Soit  $x_0$  le maximum de  $x \rightarrow u_k(x) - \bar{u}_\delta(x)$ . On obtient en  $x_0$

$$\nabla(u_k - \bar{u}_\delta)(x_0) = 0,$$

$$\Delta(u_k - \bar{u}_\delta)(x_0) \leq 0,$$

ce qu'on injecte dans l'équation (MFG-K) de  $u_i$  évaluée en  $x = x_0$

$$\rho u_k(x_0) + \frac{1}{2} \|\nabla u_k(x_0)\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u_k(x_0) = F_k(x_0, m_k),$$

$$\rho u_k(x_0) + \frac{1}{2} \|\nabla \bar{u}_\delta(x_0)\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u_k(x_0) = F_k(x_0, m_k),$$

$$\rho u_k(x_0) + \frac{1}{2} \|\nabla \bar{u}_\delta(x_0)\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \bar{u}_\delta(x_0) \leq F_k(x_0, m_k).$$

Comme  $\bar{u}_\delta$  est sur-solution,

$$\rho \bar{u}_\delta(x_0) + \frac{1}{2} \|\nabla \bar{u}_\delta(x_0)\|^2 - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \bar{u}_\delta(x_0) \geq F_k(x_0, m_k).$$

Et donc  $\rho \bar{u}_\delta(x_0) \geq \rho u_k(x_0)$ . Comme  $\rho \geq 0$ , on a  $\bar{u}_\delta(x_0) \geq u_k(x_0)$ , et comme  $x_0$  est un point de maximum, on obtient  $\bar{u}_\delta \geq u_k$ . Par un raisonnement analogue, on obtient  $\underline{u}_\delta \leq u_k$ .

L'égalité vaut pour tout  $\delta > 0$  on a donc l'égalité

$$u_k(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{d\sigma^2}{2\rho}.$$

On pose

$$y_k = \frac{\int z m_k(z) dz}{\int m_k(z) dz}$$

que l'on suppose désormais non nécessairement nul dans le cas général. On a obtenu

$$u_k(x) = \frac{1}{2} \|x - y_k\|^2 + \frac{d\sigma^2}{2\rho}.$$

On injecte cette égalité dans la deuxième équation (MFG-K) et on obtient

$$\rho m_k(x) - \operatorname{div}((x - y_k)m_k) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m_k = \rho \tilde{f}_k.$$

On veut montrer que  $y_k = \tilde{y}_k$ . L'équation stationnaire

$$\rho m_k(x) - \operatorname{div}((x - y_k)m_k) - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m_k = \rho \tilde{f}_k,$$

provient d'un processus de tirage ainsi que d'un processus de transport des agents issue de la dynamique

$$dX_t = -(X_t - y_k)dt + \sigma dW_t.$$

Puisque l'on a  $y_k$  barycentre de  $m_k$ , le drift optimal  $-(X_t - y_k)$  ne change pas l'emplacement du barycentre, de même que la diffusion brownienne ( $W_t$ ).

On obtient alors en intégrant l'équation en  $m_k$ ,

$$\int \rho m_k = \int \rho \tilde{f}_k,$$

et en multipliant par  $x$  et en intégrant,

$$\int \rho x m_k(x) dx = \int \rho x \tilde{f}_k dx.$$

On a donc

$$y_k = \frac{\int x m_k(x) dx}{\int m_k(x) dx} = \frac{\int x \tilde{f}_k(x) dx}{\int \tilde{f}_k(x) dx} = \tilde{y}_k.$$

Les  $u_k$  étant calculés suivant la distance d'un point à  $y_k$ , on a bien que les  $y_k$  et donc  $\tilde{y}_k$  sont les barycentres des points auxquels ils sont les plus proches et ce sont donc bien des solutions pour le problème des K-means.  $\square$

## 2.3 Existence

**Théorème 3.** *Si  $f$  est à support compact, alors le problème des K-means et donc (MFG-K) ont une solution.*

*Démonstration du Théorème 3.* L'application

$$A : (y_1, \dots, y_K) \rightarrow (y'_1, \dots, y'_K)$$

est à support dans le support de  $f$ .  $f$  est diffuse, donc  $A$  est continue. Elle admet donc par le théorème du point fixe, un point fixe qui est solution du problème K-mean et qui est donc associé à une solution du problème (MFG-K).  $\square$

**Remarque.** On peut montrer la non-unicité dans le cadre général en prenant l'exemple de deux couples de gaussienne. Chaque couple est constitué de deux gaussiennes dont les densités sont mélangées. Les deux couples sont significativement éloignés l'un de l'autre. De sorte que si une partition possède une partie d'un des couples, elle sera disjointe de l'autre couple. Une partition canonique qui serait solution des 4-moyennes, consisterait à associer astucieusement à chaque gaussienne, une classe. On peut néanmoins trouver un minimum local en associant à un couple entier une classe,  $y_1$  barycentre des deux gaussiennes, et au couple restant trois autres classes,  $y_2$  barycentre et  $y_3$  et  $y_4$  légèrement excentrés à droite et à gauche de  $y_2$ . Il existe de nombreux exemples qui montrent l'existence de multiples minimums locaux pour les K-moyennes. Ce sont d'ailleurs ces minimums locaux qui posent problème pour les résolutions algorithmiques des K-moyennes.



## Chapitre 3

# Problème d'heure de début de réunion

Considérons  $N$  agents cherchant à rejoindre une réunion. Chaque agent cherchera à la rejoindre à une heure qui minimisera à la fois ses coûts de déplacement et ses coûts d'une éventuelle attente ou d'un éventuel retard. Que se passe-t-il cette fois lorsque la réunion ne commence que dès qu'un certain nombre d'agents  $N_i$  est arrivé? C'est le problème du temps auquel débute une réunion. Il a été introduit dans [12] et étudié par la suite notamment dans [13].

Nous allons étudier une extension du problème du temps auquel débute une réunion en lui ajoutant une réunion supplémentaire. Le problème devient ainsi plus complexe et rajoute de nouvelles perspectives qui n'étaient pas disponibles dans le problème précédent. Tout d'abord nous commencerons par poser le problème et le décomposer. En étudiant l'équation MFG du problème, nous montrerons qu'avec un champ fixé, on a existence et unicité de solution. Néanmoins, le champ ainsi fixé doit résoudre une équation d'auto-consistance. Nous transformerons alors le problème en un problème de point fixe dont nous montrerons, notamment dans le cas déterministe, en l'absence de bruit brownien, qu'il peut y avoir jusqu'à cinq solutions. Nous définirons alors une notion de stabilité pour qualifier nos différentes solutions. Enfin, nous effectuerons un certain nombre d'analyses numériques pour vérifier la conformité de nos résultats.

### 3.1 Modélisation

#### 3.1.1 Description du modèle

Dans la théorie des jeux à champ moyen, nous allons étudier le problème de temps d'arrivée à une réunion. L'objectif de ce document est d'étendre le modèle au cas où il existe deux réunions à deux endroits différents. On

espère que cette extension permettra d'obtenir de nouvelles applications ou de rajouter des propriétés aux applications existantes.

### 3.1.2 Agents et Réunions

On considère un agent qui souhaite se rendre à une réunion. Il y a deux réunions possibles : une située en  $x = -L$  et l'autre située en  $x = L$ . Chacune des deux réunions commence à un certain temps  $T_i$ . Ce temps  $T_i$  est défini comme étant le premier instant où à la fois une certaine proportion fixée  $\bar{\theta}_i$  d'agents a réussi à se rendre à cette réunion et l'on a dépassé l'heure prévue de début de réunion  $\bar{t}_i$

$$T_i = \inf_{t \geq \bar{t}_i} (t | \theta_i(t) \geq \bar{\theta}_i)$$

Il est possible qu'une réunion ne puisse commencer faute d'un nombre suffisant d'agents. Cela peut notamment se produire lorsque la somme des deux  $\bar{\theta}_i$  dépasse l'unité ou lorsque trop d'agents vont à la même réunion. Il est possible de modifier ce problème en introduisant un temps maximal  $T_i^M$  où une réunion est obligée de commencer. Dans ce document, nous n'avons pas introduit un tel temps et nous avons considéré que si les agents sont arrivés à une réunion, ils y sont coincés et doivent y attendre un temps infini.

Trois cas de figure sont étudiés :

- une seule réunion en  $-L$  à une heure  $T$
- une seule réunion en  $L$  à une heure  $T$
- les deux réunions commencent respectivement aux heures  $T_1$  et  $T_2$

Nous commencerons par étudier le troisième cas, puis nous étudierons les limites de ce cas lorsque l'on fait tendre un des deux temps de début de réunion  $T_i$  vers l'infini ce qui nous permettra de voir les deux cas précédents.

### 3.1.3 Dynamique de l'agent

La dynamique d'un agent ne change pas par rapport au modèle initial. On considère qu'un agent se déplace à une certaine vitesse  $a_\tau$  qu'il peut fixer. On considère néanmoins qu'il y a un coût à avoir une vitesse élevée. A ce déplacement déterministe se rajoute un bruit, un mouvement brownien avec une certaine variance  $\sigma^2$ . On obtient ainsi la dynamique d'un agent

$$dX_\tau = a_\tau d\tau + \sigma dW_\tau.$$

### 3.1.4 Fonction de coût

On décrit la fonction de coût d'arrivée à l'instant  $t$  à une réunion en trois parties

- Le coût de réputation pour être arrivé en retard à la réunion par rapport au temps initial prévu de début d'une réunion  $\alpha [t - \bar{t}]_+$ ,
- Le coût de gêne personnelle pour être arrivé après le début effectif de la réunion  $\beta [t - T_i]_+$ ,
- Le coût d'attente avant le début effectif de la réunion  $\gamma [T_i - t]_+$ .

Pour que le coût soit minimal pour  $t = \bar{t}$ , on considère que  $\alpha > \gamma$ . Ceci nous donne deux fonctions de coût suivant la réunion où l'on se rend

$$\begin{cases} c_{-L}(t) = \alpha [t - \bar{t}]_+ + \beta [t - T_1]_+ + \gamma [T_1 - t]_+, \\ c_L(t) = \alpha [t - \bar{t}]_+ + \beta [t - T_2]_+ + \gamma [T_2 - t]_+. \end{cases} \quad (3.1)$$

On rajoute à la fonction de coût, le coût de la vitesse que l'agent a choisi. La fonction de coût total est donc

$$J[a] = \mathbb{E} \left[ c_{X_{\tilde{\tau}}}(\tilde{\tau}) + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{\tau}} a_\tau^2 d\tau \right],$$

avec

$$\tilde{\tau} = \inf \{t : |X_t| = L\}.$$

On note que dans cette fonction de coût on a une dépendance au point d'arrivée  $x = L$  ou  $x = -L$ .

### 3.1.5 Fonction valeur

On suppose pour la suite, que les temps  $T_i$  sont déterminés à l'avance. Ils constituent le champ moyen de notre problème.

On cherche à calculer la fonction valeur

$$u(t, x) = \min_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ c_{X_\tau^{t,x}}(\tilde{\tau}) + \frac{1}{2} \int_t^{\tilde{\tau}} a_\tau^2 d\tau \right],$$

avec  $\mathcal{A}$ , l'ensemble des contrôles admissible, c'est à dire adaptés avec  $(W_\tau)$  et avec  $X_\tau^{t,x}$  processus partant de  $x$  en  $\tau = t$ .

Ce problème d'optimisation nous donne l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème suivante

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u = 0 \\ u(t, x = L) = c_L(t) \\ u(t, x = -L) = c_{-L}(t) \end{cases}$$

avec un drift optimal donné par

$$a^*(t, x) = -\partial_x u(t, x).$$

Cette équation est identique au cas à une seule réunion, si ce n'est pour les conditions au bord.

### 3.1.6 Densité des agents

On obtient ensuite l'équation de Kolmogorov sur l'évolution de la densité des agents

$$\begin{cases} \partial_t m + \partial_x((- \partial_x u)m) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 m = 0 \\ m(t, x = -L) = m(t, x = L) = 0 \\ m(t = 0, x) = m_0(x). \end{cases}$$

### 3.1.7 Proportion d'agent pour chaque réunion

Une fois ces deux équations résolues, on peut obtenir les  $\theta_i(t)$ , parts des personnes arrivées à la réunion  $i$  avant l'instant  $t$  en intégrant le flux de personne arrivant entre 0 et l'instant  $t$  en  $x = -L$  et  $x = L$ .

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} \partial_x m(s, -L) - a^*(s, -L+)m(s, -L+) ds \\ \theta_2(t) = \int_0^t -\frac{\sigma^2}{2} \partial_x m(s, L) + a^*(s, L-)m(s, L-) ds. \end{cases}$$

Si  $\sigma \neq 0$  les fonctions sont continues et on a alors

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} \partial_x m(s, -L) ds \\ \theta_2(t) = \int_0^t -\frac{\sigma^2}{2} \partial_x m(s, L) ds. \end{cases}$$

Si on est dans le cadre déterministe  $\sigma = 0$  on a par contre

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \int_0^t -a^*(s, -L+)m(-L+, s) ds \\ \theta_2(t) = \int_0^t a^*(s, L-)m(L-, s) ds. \end{cases}$$

Et on obtient les conditions d'auto-consistances

$$\begin{cases} \theta_i(T_i) = \bar{\theta}_i & \text{si } T_i > \bar{t} \\ \theta_i(T_i) \geq \bar{\theta}_i & \text{si } T_i = \bar{t}. \end{cases}$$

### 3.1.8 Notations finales du problème

#### Problème à $(T_1, T_2)$ fixé

On considère donc la résolution du système  $(\mathcal{E})$  ou  $(\mathcal{E}_{(T_1, T_2)})$  qui à  $(T_1, T_2)$  fixé cherche les fonctions  $u$  et  $m$  telles que

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u = 0 \\ \partial_t m + \partial_x ((-\partial_x u)m) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 m = 0 \end{cases}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{cases} u(t, x = \pm L) = c_{\pm L}(t) \\ m(t, x = -L) = m(t, x = L) = 0 \\ m(t = 0, x) = m_0(x) \end{cases}$$

où  $a(t, x) = -\partial_x u(t, x)$ .

On note que la dépendance en  $(T_1, T_2)$  s'effectue à travers la condition au bord  $u(t, x = \pm L) = c_{\pm L}(t)$  puisque  $c$  dépend des valeurs de  $(T_1, T_2)$  dans (3.1).

On va ensuite simplifier les équation du problème en introduisant la transformation de Cole-Hopf ainsi qu'une transformation sur  $m$  :

$$u(t, x) = -\sigma^2 \log \phi(t, x),$$

$$m(t, x) = \psi(t, x) \phi(t, x),$$

ce qui change le problème en

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 \phi = 0 \\ \partial_t \psi - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 \psi = 0 \end{cases}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{cases} \phi(t, x = \pm L) = \exp -\frac{c_{\pm L}(t)}{\sigma^2} \\ \psi(t = 0, x) = \frac{m_0(x)}{\phi(0, x)} \\ \psi(t, x = \pm L) = 0. \end{cases}$$

**Problème initial**

Le problème que l'on cherche à résoudre est alors le problème  $(\mathcal{P})$  ou  $(\mathcal{P}_{(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)})$  qui à  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$  fixé consiste à trouver  $(T_1, T_2)$  tel qu'une solution  $(u, m)$  de  $(\mathcal{E}_{(T_1, T_2)})$  vérifie la condition d'auto-consistance

$$\begin{cases} \theta_i(T_i) = \bar{\theta}_i & \text{si } T_i > \bar{t} \\ \theta_i(T_i) \geq \bar{\theta}_i & \text{si } T_i = \bar{t}. \end{cases}$$

**Problème point fixe**

Une autre manière de voir  $(\mathcal{P})$  consiste à considérer le problème comme un problème de point fixe de la fonction qui à  $(T_1, T_2)$  fixé donne une solution  $(u, m)$  de  $(\mathcal{E}_{(T_1, T_2)})$  et finalement donne les temps effectifs de début de réunion  $(T'_1, T'_2)$ .

$$(T_1, T_2) \xrightarrow{(\mathcal{E})} (u, m) \longrightarrow (\theta_1(\cdot), \theta_2(\cdot)) \longrightarrow (T'_1, T'_2)$$

$(T'_1, T'_2)$  sont tels que

$$\begin{cases} \theta_i(T'_i) = \bar{\theta}_i & \text{si } T'_i > \bar{t} \\ \theta_i(T'_i) \geq \bar{\theta}_i & \text{si } T'_i = \bar{t}. \end{cases}$$

**3.2 Résolution explicite****3.2.1 Unicité et Existence**

**Théorème 1.** *Le problème  $(\mathcal{E})$  est bien posé. L'équation  $(\mathcal{E}_{(T_1, T_2)})$  admet une et une seule solution.*

Pour prouver le théorème, nous allons nous intéresser au comportement de  $\phi$  aux temps grands.

**Proposition 1.** *Pour  $t > \max(T_1, T_2)$ , on a*

$$\phi(t, x) = \exp\left(-\frac{c_L(t)}{\sigma^2}\right) \frac{\sinh(\omega(L+x))}{\sinh(2\omega L)} + \exp\left(-\frac{c_{-L}(t)}{\sigma^2}\right) \frac{\sinh(\omega(L-x))}{\sinh(2\omega L)}$$

avec  $\omega = \frac{\sqrt{2(\alpha+\beta)}}{\sigma^2}$ .

*Démonstration.* Considérons le problème initialement posé

$$u(t, x) = \min_a \mathbb{E} \left[ c_{X_{\tilde{\tau}}}(\tilde{\tau}) + \frac{1}{2} \int_t^{\tilde{\tau}} a_{\tau}^2 d\tau \right].$$

Supposons  $t > \max(T_1, T_2)$

$$u(t + \Delta t, x) = \min_a \mathbb{E} \left[ c_{X_{\tilde{\tau}'}}(\tilde{\tau}') + \frac{1}{2} \int_{t+\Delta t}^{\tilde{\tau}'} a_{\tau}^2 d\tau \right].$$

Si on conserve une trajectoire de drift  $a$ , ce qui change est l'instant de départ du processus  $X$ . et donc le temps d'arrêt  $\tilde{\tau}$  en  $\tilde{\tau}'$  et on a donc la relation

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}' + \Delta t.$$

On obtient

$$u(t + \Delta t, x) = \min_a \mathbb{E} \left[ c_{X_{\tilde{\tau}}}(\tilde{\tau} + \Delta t) + \frac{1}{2} \int_t^{\tilde{\tau}} a_{\tau}^2 d\tau \right].$$

Or on est dans le cas  $t > \max(T_1, T_2)$  donc  $\tilde{\tau} > \max(T_1, T_2)$  et donc

$$c_{X_{\tilde{\tau}}}(\tilde{\tau} + \Delta t) = c_{X_{\tilde{\tau}}}(\tilde{\tau}) + (\alpha + \beta)\Delta t.$$

On obtient donc

$$u(t, x) = u(\max(T_1, T_2), x) + (\alpha + \beta)(t - \max(T_1, T_2)).$$

On a alors

$$\partial_t \phi = -\frac{\alpha + \beta}{\sigma^2} \phi$$

pour  $t \geq \max(T_1, T_2)$ .

On doit donc résoudre

$$-\frac{\alpha + \beta}{\sigma^2} \phi + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 \phi = 0,$$

avec conditions au bord.

On obtient

$$\phi(t, x) = A_1(t) \exp(\omega x) + A_2(t) \exp(-\omega x),$$

avec

$$\omega = \frac{\sqrt{2(\alpha + \beta)}}{\sigma^2},$$

et

$$A_1(t) = \frac{\exp\left(-\frac{c_L(t)}{\sigma^2} + \omega L\right) - \exp\left(-\frac{c_{-L}(t)}{\sigma^2} - \omega L\right)}{\exp(2\omega L) - \exp(-2\omega L)},$$

$$A_2(t) = \frac{\exp\left(-\frac{c_{-L}(t)}{\sigma^2} + \omega L\right) - \exp\left(-\frac{c_L(t)}{\sigma^2} - \omega L\right)}{\exp(2\omega L) - \exp(-2\omega L)}.$$

Qu'on peut écrire

$$\phi(t, x) = \exp\left(-\frac{c_L(t)}{\sigma^2}\right) \frac{\sinh(\omega(L+x))}{\sinh(2\omega L)} + \exp\left(-\frac{c_{-L}(t)}{\sigma^2}\right) \frac{\sinh(\omega(L-x))}{\sinh(2\omega L)}.$$

Il est à noter qu'on peut en modifiant  $\omega$  transposer cette formule au cas où les coefficients  $(\alpha, \beta)$  ne sont pas identiques.  $\square$

En rajoutant qu'au temps final  $T = \max(T_1, T_2)$  la fonction  $\phi$  doit vérifier l'égalité précédente, on obtient que  $\phi$  est solution d'une équation de la chaleur rétrograde avec des conditions au bord continues. Il s'agit d'un problème bien posé. On a donc une et une seule solution.

Si on suppose de plus que  $\phi$  ne s'annule pas au bord,  $\psi$  est solution d'une équation de la chaleur et on a une et une seule solution pour  $\psi$ .

### 3.2.2 Résolution semi-explicite

**Proposition 2.**

$$\phi(t, x) = \int_0^\infty \left( \frac{L+x}{2L} \exp\left(-\frac{c_{-L}(\tau+t)}{\sigma^2}\right) + \frac{L-x}{2L} \exp\left(-\frac{c_L(\tau+t)}{\sigma^2}\right) \right) p_x(\tau) d\tau$$

avec

$$p_x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( f\left(\tau, \frac{(2n+1)L+x}{\sigma}\right) + f\left(\tau, \frac{(2n+1)L-x}{\sigma}\right) \right),$$

et

$$f(t, x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

*Démonstration.* On reformule le problème sous sa forme probabiliste sans condition en  $t = \max(T_1, T_2)$

$$\phi(t, x) = \mathbb{E} \left[ -\frac{\exp(c_{X_{\tilde{\tau}}}(t, x))}{\sigma^2} \right],$$

avec  $X_\tau^{t,x}$  un mouvement brownien sans drift, de variance  $\sigma^2$  partant de  $x$  en  $\tau = t$ ,

$$\tilde{\tau}_{t,x} = \inf \left\{ \tau \geq t : |X_\tau^{t,x}| = L \right\}.$$

Si on note  $p_{t,x}(\tau)$  la densité de probabilité de  $\tilde{\tau}_{t,x}$ , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}[\tilde{\tau}_{t,x} \leq s] = \int_t^s p_{t,x}(\tau) d\tau,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = \int_t^\infty p(\tau) & \left( \mathbb{P} \left[ X_\tau^{t,x} = -L \right] \exp\left(-\frac{c_{-L}(\tau)}{\sigma^2}\right) \right. \\ & \left. + \mathbb{P} \left[ X_\tau^{t,x} = L \right] \exp\left(-\frac{c_L(\tau)}{\sigma^2}\right) \right) d\tau. \end{aligned}$$

On sait que  $X_\tau^{t,x}$  est une martingale, on obtient alors pour le temps d'arrêt  $\tilde{\tau}$  qui est presque sûrement fini,

$$\mathbb{E} \left[ X_{\tilde{\tau}}^{t,x} \right] = x.$$

Ce qui donne

$$-L\mathbb{P}\left[X_{\tilde{\tau}}^{t,x} = -L\right] + L\mathbb{P}\left[X_{\tilde{\tau}}^{t,x} = L\right] = x.$$

Comme on sait que  $\mathbb{P}\left[X_{\tilde{\tau}}^{t,x} = -L\right] + \mathbb{P}\left[X_{\tilde{\tau}}^{t,x} = L\right] = 1$ , on a

$$\mathbb{P}\left[X_{\tilde{\tau}}^{t,x} = -L\right] = \frac{L+x}{2L}, \text{ et } \mathbb{P}\left[X_{\tilde{\tau}}^{t,x} = L\right] = \frac{L-x}{2L}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer  $p_{t,x}(\tau)$ . Par translation du temps, on a

$$p_{t,x}(\tau) = p_{0,x}(\tau - t) = p_x(\tau - t).$$

On peut se ramener à la recherche de la fonction  $p_x(\tau)$ , la fonction de densité de

$$\tau_x = \inf \left\{ s : \left| X_s^{0,x} \right| \geq L \right\},$$

On note de plus

$$\tau_x^1 = \inf \left\{ s : X_s^{0,x} \leq -L \right\},$$

$$\tau_x^2 = \inf \left\{ s : X_s^{0,x} \geq L \right\},$$

ainsi que  $p_x^1(\tau)$  et  $p_x^2(\tau)$  leur fonctions de densité respectives avec

$$p_x^1(\tau) = f\left(\tau, \frac{L+x}{\sigma}\right) = \frac{L+x}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau^3}} \exp\left(-\frac{(L+x)^2}{2\sigma^2\tau}\right),$$

$$p_x^2(\tau) = f\left(\tau, \frac{L-x}{\sigma}\right) = \frac{L-x}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau^3}} \exp\left(-\frac{(L-x)^2}{2\sigma^2\tau}\right).$$

On a

$$\mathbb{P}(\tau_x \leq \tau) = \mathbb{P}(\tau_x^1 \leq \tau) + \mathbb{P}(\tau_x^2 \leq \tau) - \mathbb{P}(\tau_x^1 \leq \tau \cap \tau_x^2 \leq \tau).$$

Si on nomme  $p_x^{1,2}(\tau)$  la densité de  $\mathbb{P}(\tau_x^1 \leq \tau \cap \tau_x^2 \leq \tau)$ , on a

$$p_x(\tau) = p_x^1(\tau) + p_x^2(\tau) - p_x^{1,2}(\tau)$$

Si on nomme  $E_1(\tau)$  = "Atteindre la réunion 1 puis la 2 avant  $\tau$ " et  $E_2(\tau)$  = "Atteindre la réunion 2 puis la 1 avant  $\tau$ ", alors,

$$\mathbb{P}(\tau^1 \leq \tau \cap \tau^2 \leq \tau) = \mathbb{P}(E_1(\tau)) + \mathbb{P}(E_2(\tau)) - \mathbb{P}(E_1(\tau) \cap E_2(\tau)).$$

En appliquant le principe de réflexion du mouvement brownien en  $\tau^1$  on a que arriver en  $x = -L$  puis en  $x = L$  est équivalent à arriver en

$x = -L$  puis  $x = -3L$  qui est équivalent à arriver en  $x = -3L$ . La densité de  $\mathbb{P}(E_1(\tau))$  est alors

$$f\left(\frac{3L+x}{\sigma}, \tau\right).$$

On identifie un schéma récurrent qui nous permet d'obtenir

$$p_x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( f\left(\tau, \frac{(2n+1)L+x}{\sigma}\right) + f\left(\tau, \frac{(2n+1)L-x}{\sigma}\right) \right).$$

Ce qui nous donne une formulation semi-explicite pour la fonction  $\phi$

$$\phi(t, x) = \int_0^{\infty} \left( \frac{L+x}{2L} \exp\left(-\frac{c_{-L}(\tau+t)}{\sigma^2}\right) + \frac{L-x}{2L} \exp\left(-\frac{c_L(\tau+t)}{\sigma^2}\right) \right) p_x(\tau) d\tau.$$

□

### 3.2.3 Cas réunion unique

Jusqu'à présent, nous n'avons pas précisé, à part dans le cadre du comportement aux temps grands, si nous étions avec des fonctions de coût  $c$  à une ou deux réunions. Dans le cadre d'une unique réunion, par exemple en  $x = -L$ , la fonction de coût en  $x = L$  est infinie. Cela impose une condition au bord pour la fonction  $u$  qui peut poser problème. Néanmoins, lorsque l'on utilise la transformation de Cole-Hopf, cette condition au bord se transforme en  $\phi(L, t) = 0$  ce qui n'induit plus de problème spécifique dans la résolution de  $\phi$ . Tout ce qui a été dit plus haut peut donc s'appliquer. Pour la fonction  $\psi$  il faut néanmoins supposer que lorsque  $\phi$  s'annule, la fonction de densité  $m$  s'annule aussi de telle sorte que

$$\lim_{x \rightarrow L} \frac{m(0, x)}{\phi(0, x)} = 0.$$

## 3.3 Problème d'inversion

### 3.3.1 Existence et unicité

On peut voir sur les graphiques 3.1 et 3.2 obtenus grâce à la méthode numérique de la section 3.4 que la fonction qui au couple  $(T_1, T_2)$  associe  $(\theta_1, \theta_2)$  ne garantit pas l'unicité de la solution du problème à  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$  fixé.

On constate dans le graphique 3.2 qu'on est en présence de deux solutions  $(T_1, T_2)$  proches des points  $(0.5, 1.25)$  et  $(0.6, 0.4)$ .

Restreignons nous maintenant au cas où  $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$ . Pour étudier l'ensemble des solutions suivant la valeur de  $\bar{\theta}_1$ , on trace l'écart  $|\theta_1(T_1, T_2) - \theta_2(T_1, T_2)|$  qu'on superpose avec les lignes de niveau de  $\theta_1$  sur le graphique 3.3. La zone rouge correspond au lieu où  $\theta_1 = \theta_2$ . Les solutions de notre problème se trouvent dans cette zone car on cherche  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $\theta_1 = \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \theta_2$ . De plus la solution doit aussi se situer sur la ligne de niveau  $\theta_1 = \bar{\theta}_1$  fixé. Les intersections entre la zone rouge et une ligne de niveau de  $\theta_1$  correspondent donc aux solutions cherchées.

Les lignes de niveau rouges n'intersectent pas la zone rouge car elles correspondent à des  $\theta_1 > 0.5$  ce qui interdit l'égalité  $\theta_1 = \theta_2$ . Les lignes de niveau bleues correspondent à des  $\theta_1$  petits. Pour ces valeurs  $\theta_i$  petites on constate trois intersections : une pour des valeurs de  $T_1$  grandes et  $T_2$  petites à droite du graphique ainsi que deux autres à gauche, une pour  $T_1$  et  $T_2$  petits et une autre pour  $T_2$  grand et  $T_1$  petit. On pouvait aussi l'observer sur le graphique 3.1, même si dans ce cas, on avait  $\bar{\theta}_1 \neq \bar{\theta}_2$ . Plus on augmente la valeur de  $\theta_1$  en allant vers les lignes de niveau vertes, plus les intersections se rapprochent. Il est possible qu'il n'y ait plus que deux solutions ou en tous les cas deux solutions proches l'une de l'autre et une troisième plus écartée des deux premières. C'est ce qui a dû se produire pour le graphique 3.2. On peut donc voir un phénomène de bifurcation des solutions lorsque l'on fait varier  $\theta_1$ .

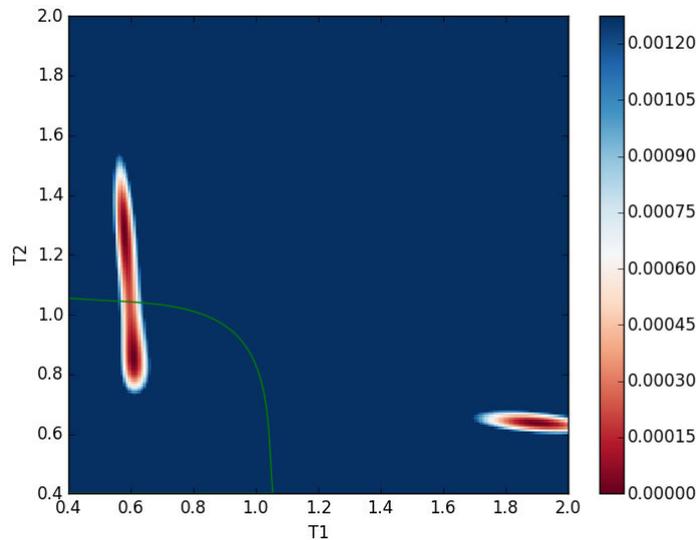


FIGURE 3.1 – L'erreur  $\sum_i (\theta_i - \bar{\theta}_i)^2$  pour  $\sigma = 1$  et  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = (0.4, 0.3)$  avec en vert le lieu où la hessienne de  $(\theta_1, \theta_2)$  n'est pas inversible

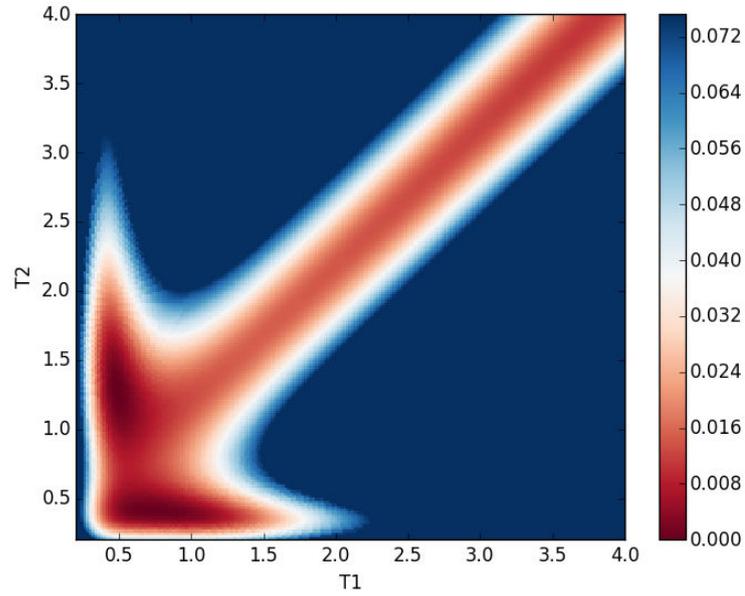


FIGURE 3.2 – Erreur  $\sum_i(\theta_i - \bar{\theta}_i)^2$  en fonction de  $T_1$  et  $T_2$  pour d'autres valeurs de  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$

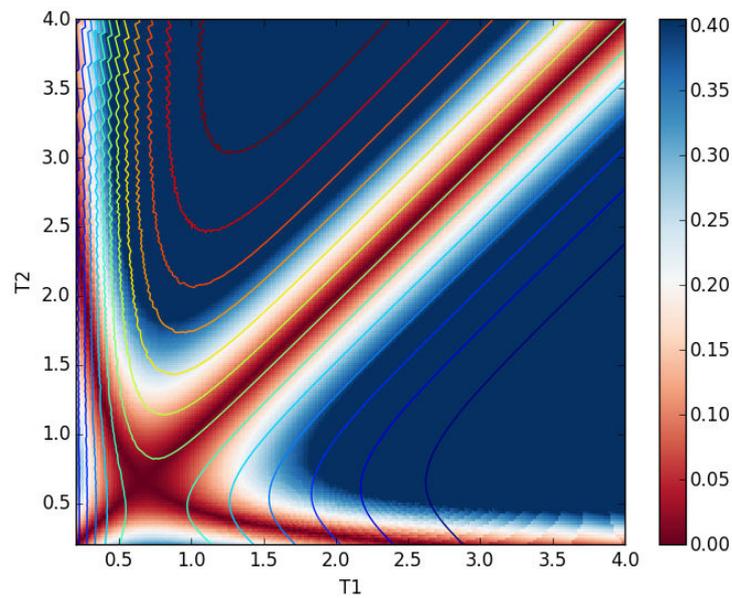


FIGURE 3.3 –  $|\theta_1 - \theta_2|$  fonction de  $T_1$  et  $T_2$  avec les lignes de niveau de  $\theta_1$

### 3.3.2 Stabilité des solutions

En théorie des jeux, il est possible d'avoir plusieurs solutions. Il n'est donc pas surprenant que ce cas de figure se produise ici. Il est intéressant cependant de noter qu'en théorie des jeux, on peut définir la notion de stabilité et d'instabilité pour les différentes solutions. Par exemple dans notre cas  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = (0.4, 0.3)$ , si on avait une correspondance parfaite avec la théorie des jeux, on devrait avoir une solution stable et une solution instable. Il serait logique de dire que la solution stable est celle qui conserve la relation d'ordre  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$  pour  $(T_1, T_2)$  : si  $\bar{\theta}_1 > \bar{\theta}_2$  alors  $T_1 > T_2$ . En effet, la première réunion ayant besoin de plus de personnes, elle devrait commencer plus tard.

En théorie des jeux, la notion de stabilité signifie que lorsque l'on applique une petite perturbation sur les stratégies des joueurs, ceux-ci vont, dans le jeu répété, reprendre la stratégie de départ. Par exemple dans le jeu de coordination suivant : chaque joueur a le choix entre A ou B. Les lignes indiquent le choix du premier joueur et les colonnes le choix du second. Les chiffres indiquent à gauche les gains du premier joueur et à droite celle du second. Chaque joueur cherche à maximiser son gain.

	A	B
A	(1, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 1)

Ce jeu possède deux équilibres en stratégies pures  $(A, A)$  et  $(B, B)$  qui sont stables ainsi qu'une stratégie mixte  $((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$  qui elle est instable. En effet, si le premier joueur change sa stratégie pure A en une stratégie mixte  $((1 - \epsilon, \epsilon)$ , alors que le deuxième joueur garde sa stratégie pure en A, les gains des joueurs vont être de  $1 - \epsilon$ . Le deuxième joueur n'a pas d'intérêt à changer sa stratégie pure en A au contraire du premier joueur qui a intérêt lui à reprendre sa stratégie pure en A.

Lorsque l'on regarde par contre la stratégie mixte  $(0.5, 0.5)$ , si le premier joueur change sa stratégie en  $(0.5 + \epsilon, 0.5 - \epsilon)$  avec  $\epsilon > 0$ , alors le deuxième joueur a intérêt à adopter la stratégie pure en A forçant le premier joueur à prendre finalement une stratégie pure en A.

Dans notre cas de figure, une méthode pour voir si un équilibre est  $(T_1, T_2)$  est stable, il suffirait d'étudier le signe de la dérivée partielle

$$\partial_{T_1} \theta_1(T_1, T_2).$$

Si la dérivée est négative, cela signifie que si on empêche un petit nombre de personnes à aller à la première réunion,  $T_1$  va dans un premier temps légèrement augmenter et dans un second temps  $\theta_1$  va décroître à cause du

signe de la dérivée partielle. La part de retardataire va donc encore augmenter et le phénomène va s'amplifier. Ce qui fait qu'on est dans une situation d'instabilité.

Si on consulte le graphique 3.3, on constate que  $\partial_{T_1}\theta_1(T_1, T_2)$  est positif dans les deux équilibres du graphique 3.2. Par contre,  $\partial_{T_2}\theta_1(T_1, T_2)$  change de signe selon le point d'équilibre choisi. Seul l'équilibre avec  $T_1 > T_2$  en  $(T_1, T_2)$  près de  $(0.6, 0.4)$  a un signe négatif et est donc stable. L'autre équilibre en  $(T_1, T_2)$  près de  $(0.5, 1.25)$  est instable.

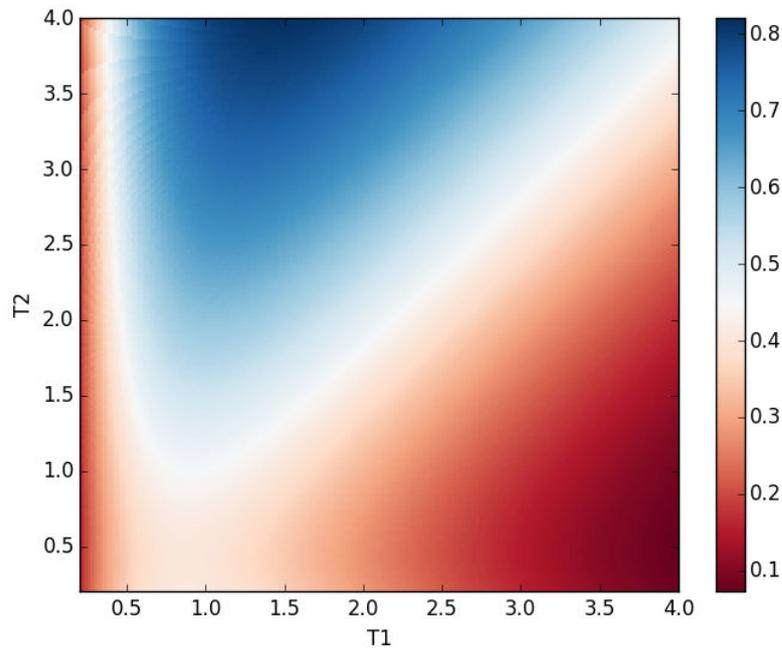


FIGURE 3.4 –  $\theta_1$  fonction de  $T_1$  et  $T_2$  avec  $\sigma = 1$ .

### 3.3.3 Cas Déterministe

Nous allons maintenant aborder le cas déterministe. Il s'agit du cas sans bruit  $\sigma = 0$ . Celui-ci permet une résolution totalement explicite dans le cadre d'une réunion. Pour le passage à deux réunions, il faut cependant faire preuve d'exhaustivité afin d'obtenir une résolution complète.

#### Cas une réunion

On regarde le cas où il n'y a qu'une seule réunion située en  $x = -L$ . On prend ici le problème selon le point de vue du problème d'optimisation.

Chaque agent cherche son drift  $a_\tau$  de telle manière à minimiser son coût. Le terme  $\int_0^{\tilde{\tau}} a_\tau^2 d\tau$  et le fait qu'on est dans une dynamique déterministe font qu'un agent doit avoir une vitesse moyenne constante  $v$  vers la première réunion. On cherche donc à résoudre le problème

$$u_1(0, x) = \min_v \left\{ C \left( \frac{x}{v} \right) + \frac{1}{2} v x \right\}.$$

Si on note  $v$  la vitesse adoptée par l'agent situé en  $x$ , on obtient que son temps d'arrivée  $\tilde{\tau}$  en  $-L$  est

$$\tilde{\tau} = \frac{x + L}{v}.$$

Sa fonction de coût totale sera donc

$$J[v] = C_{-L} \left( \frac{x + L}{v} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\tau} v^2,$$

$$J[v] = C_{-L} \left( \frac{x + L}{v} \right) + \frac{1}{2} v(x + L),$$

que l'on cherche à minimiser par rapport à  $v$ .

**Arrivée avant  $\bar{t}$**  Si on a  $\tilde{\tau} \leq \bar{t}$ , c'est à dire,  $v \geq \frac{x+L}{\bar{t}}$ , alors,

$$C_{-L}(\tilde{\tau}) = \gamma(T_1 - \tilde{\tau}).$$

On a donc

$$J[v] = \gamma \left( T_1 - \frac{x + L}{v} \right) + \frac{1}{2} v(x + L).$$

On dérive cette quantité dans le but d'en trouver le minimum pour  $v \geq \frac{x+L}{\bar{t}}$ ,

$$\partial_v J[v] = \gamma \frac{x + L}{v^2} + \frac{1}{2}(x + L).$$

Cette quantité est toujours positive, on prend donc  $v$  le plus petit possible c'est à dire

$$v_1^* = \frac{x + L}{\bar{t}}.$$

**Arrivée entre  $\bar{t}$  et  $T_1$**  Si on a  $\bar{t} \leq \tilde{\tau} \leq T_1$ , c'est à dire,  $\frac{x+L}{\bar{t}} \geq v \geq \frac{x+L}{T_1}$ , alors,

$$C_{-L}(\tilde{\tau}) = \alpha(\tau - \bar{t}) + \gamma(T_1 - \tau).$$

On a donc

$$J[v] = \alpha \left( \frac{x+L}{v} - \bar{t} \right) + \gamma \left( T_1 - \frac{x+L}{v} \right) + \frac{1}{2}v(x+L).$$

On dérive cette quantité dans le but d'en trouver le minimum pour les vitesses telles que  $\frac{x+L}{\bar{t}} \geq v \geq \frac{x+L}{T_1}$ ,

$$\partial_v J[v] = (x+L) \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha - \gamma}{v^2} \right) \text{text.}$$

On a  $\alpha > \gamma$ , donc cette quantité s'annule pour la valeur  $v_2^*$  telle que,

$$v_2^* = \sqrt{2(\alpha - \gamma)},$$

Pour que cette valeur soit un minimum acceptable, il faut cependant qu'elle soit dans l'intervalle et donc qu'on ait

$$\frac{x+L}{\bar{t}} \geq \sqrt{2(\alpha - \gamma)} \geq \frac{x+L}{T_1}.$$

Si cette relation n'est pas respectée alors, le  $v$  optimal est  $v_1^*$  si on est dans le cas où  $\sqrt{2(\alpha - \gamma)} \geq \frac{x+L}{\bar{t}}$ . Si  $\frac{x+L}{T_1} \geq \sqrt{2(\alpha - \gamma)}$ , alors le  $v$  optimal est

$$v_3^* = \frac{x+L}{T_1}.$$

**Arrivée après  $T_1$**  Si on a  $T_1 \leq \tilde{\tau}$ , c'est à dire,  $\frac{x+L}{T_1} \geq v$ , alors,

$$C_{-L}(\tilde{\tau}) = \alpha(\tau - \bar{t}) + \beta(\tau - T_1).$$

On a donc

$$J[v] = \alpha \left( \frac{x+L}{v} - \bar{t} \right) + \beta \left( \frac{x+L}{v} - T_1 \right) + \frac{1}{2}v(x+L).$$

On dérive cette quantité dans le but d'en trouver le minimum pour les vitesses telles que  $\frac{x+L}{T_1} \geq v$ ,

$$\partial_v J[v] = (x+L) \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha + \beta}{v^2} \right) \text{text.}$$

Cette quantité s'annule pour la valeur  $v_4^*$  telle que,

$$v_4^* = \sqrt{2(\alpha + \beta)},$$

Pour que cette valeur soit un minimum acceptable, il faut cependant que

$$\frac{x+L}{T_1} \geq \sqrt{2(\alpha + \beta)},$$

sinon le  $v$  optimal est  $v_3^*$ .

**Conclusion** Plutôt que de chercher pour chaque  $x$  quelle est la vitesse optimale, on va regarder pour chaque  $\tau$  les  $x$  qui lui sont antécédents. Si on a  $\bar{t} < \tilde{\tau} < T_1$ , alors le  $v$  optimal est soit  $v_1^*$ , soit  $v_2^*$ , soit  $v_3^*$ . Or pour  $v_1^*$ , on a  $\tilde{\tau} = \bar{t}$  et pour  $v_3^*$ , on a  $\tilde{\tau} = T_1$ . Donc les agents qui arrivent en  $\tilde{\tau}$  tel que  $\bar{t} < \tilde{\tau} < T_1$  ont la même vitesse  $v_2^* = \sqrt{2(\alpha - \gamma)}$ . Cela correspond aux agents situés en  $x$  tel que

$$-L + \bar{t}\sqrt{2(\alpha - \gamma)} < x < -L + T_1\sqrt{2(\alpha - \gamma)}.$$

Si on a  $T_1 < \tilde{\tau}$ , alors la seule vitesse optimale possible est  $v_4^*$  car la vitesse  $v_3^*$  donne  $\tilde{\tau} = T_1$ . La population d'agents correspondant est située en  $x$  tel que

$$-L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)} < x.$$

Dans le cas déterministe, deux agents ne peuvent se croiser. En effet, s'ils se rencontrent en  $(t, x)$ , ils vont avoir le même comportement et arriver en même temps à la réunion. Donc puisque les agents situés proches de  $x = -L + T_1\sqrt{2(\alpha - \gamma)}$  et les agents situés proches de  $x = -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}$  arrivent en un temps proche de  $T_1$ , tous les agents situés entre ces deux points arrivent aussi en  $T_1$ . Si

$$-L + T_1\sqrt{2(\alpha - \gamma)} < x < -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)},$$

alors  $\tilde{\tau} = T_1$ .

De même, comme les agents situés proches de  $x = -L + \bar{t}\sqrt{2(\alpha - \gamma)}$  arrivent en un temps proche de  $\bar{t}$ , on a que si

$$x < -L + \bar{t}\sqrt{2(\alpha - \gamma)},$$

alors  $\tilde{\tau} \leq \bar{t}$ , ces agents vont donc choisir la vitesse optimale  $v_1^*$  et arriver en  $\tilde{\tau} = \bar{t}$ .

Finalement, on obtient quatre cas possibles :

Si  $x < -L + \bar{t}\sqrt{2(\alpha - \gamma)}$  alors,

$$v = \frac{L+x}{\bar{t}}, \quad u_1(0, x) = \gamma(T_1 - \bar{t}) + \frac{(L+x)^2}{2\bar{t}}.$$

Si  $-L + \bar{t}\sqrt{2(\alpha - \gamma)} < x < -L + T_1\sqrt{2(\alpha - \gamma)}$  alors,

$$v = \sqrt{2(\alpha - \gamma)},$$

$$u_1(0, x) = \alpha \left( \frac{L+x}{\sqrt{2(\alpha - \gamma)}} - \bar{t} \right) + \gamma \left( T_1 - \frac{L+x}{\sqrt{2(\alpha - \gamma)}} \right) + \frac{(L+x)\sqrt{2(\alpha - \gamma)}}{2}.$$

Si  $-L + T_1\sqrt{2(\alpha - \gamma)} < x < -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}$  alors,

$$v = \frac{L+x}{T_1}, u_1(0, x) = \alpha(T_1 - \bar{t}) + \frac{(L+x)^2}{2T_1}.$$

Si  $-L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)} < x$  alors,

$$v = \sqrt{2(\alpha + \beta)},$$

$$u_1(0, x) = \alpha \left( \frac{L+x}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} - \bar{t} \right) + \beta \left( \frac{L+x}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} - T_1 \right) + \frac{(L+x)\sqrt{2(\alpha + \beta)}}{2}.$$

Si on veut calculer  $u_2(0, x)$ , grâce à la symétrie il suffit de regarder  $u_1(0, -x)$  en changeant dans la formule  $T_1$  en  $T_2$ .

On obtient alors facilement

$$\theta(T_1) = \int_{-L}^{-L+T_1\sqrt{2(\alpha+\beta)}} m_0(x) dx.$$

De fait on a l'existence de solutions dans un tel contexte, la fonction  $\theta$  est croissante étant la primitive d'une fonction positive. Pour l'unicité, il faut contrôler  $m$  de façon à ce qu'il ne s'annule pas sur une zone critique.

### Cas deux réunions

Lorsque l'on passe d'une à deux réunions dans le cas déterministe, du point de vue du joueur il ne s'agit plus pour lui que de savoir laquelle de ces deux réunions est la plus profitable pour lui. On a donc

$$u(t, x) = \min \{u_1(t, x), u_2(t, x)\}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer, quitte à inverser les deux réunions que  $T_1 > T_2$ .

### Pas d'interaction

Dans le cas où  $u_1(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}) < u_2(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)})$ , les joueurs censés arriver à la première réunion avant  $T_1$  n'ont pas d'intérêt à aller à la deuxième réunion. On a donc

$$\theta_1(T_1, T_2) = \int_{-L}^{-L+T_1\sqrt{2(\alpha+\beta)}} m_0(x) dx,$$

comme dans le cas de la réunion unique, la deuxième réunion ne retarde donc pas la première,  $\partial_{T_2}\theta_1 = 0$ .

$$u_1\left(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}\right) = \alpha(T_1 - \bar{t}) + \frac{(L - L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)})^2}{2T_1},$$

$$u_1\left(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}\right) = \alpha(T_1 - \bar{t}) + T_1(\alpha + \beta).$$

Pour calculer la valeur  $u_2\left(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}\right)$ , il faut regarder la distance du point  $x = -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}$  à la deuxième réunion, c'est à dire  $2L - T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}$ . Si cette distance est plus petite que  $T_2\sqrt{2(\alpha + \beta)}$ , alors les agents situés en  $x = -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}$  peuvent arriver à la deuxième réunion avant qu'elle commence. Comme on a  $d_x u_1(0, x) > 0$ , on a donc  $d_x u_2(0, x) < 0$ . Si

$$2L - T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)} \leq T_2\sqrt{2(\alpha + \beta)},$$

alors

$$u_2(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}) \leq u_2(0, L - T_2\sqrt{2(\alpha + \beta)}),$$

$$u_2(0, L - T_2\sqrt{2(\alpha + \beta)}) = \alpha(T_2 - \bar{t}) + T_2(\alpha + \beta).$$

Comme on a  $T_1 > T_2$ ,

$$u_2(0, L - T_2\sqrt{2(\alpha + \beta)}) < u_1\left(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}\right).$$

Les agents iront donc à la deuxième réunion. On doit donc avoir

$$2L - T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)} > T_2\sqrt{2(\alpha + \beta)}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} u_2(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}) &= \alpha\left(\frac{2L - T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} - \bar{t}\right) \\ &+ \beta\left(\frac{2L - T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} - T_2\right) + \frac{2L\sqrt{2(\alpha + \beta)}}{2} - T_1(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}) &= \alpha\left(\frac{2L}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} - T_1 - \bar{t}\right) \\ &+ \beta\left(\frac{2L}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} - T_1 - T_2\right) + \frac{(2L - T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)})\sqrt{2(\alpha + \beta)}}{2}. \end{aligned}$$

Si on note

$$\Delta = u_2(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}) - u_1\left(0, -L + T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)}\right),$$

on a

$$\Delta = \alpha \left( \frac{2L}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} - 2T_1 \right) + \beta \left( \frac{2L}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} - T_1 - T_2 \right) + \frac{2L\sqrt{2(\alpha + \beta)}}{2} - 2T_1(\alpha + \beta).$$

Ce qui donne en regroupant les termes

$$\Delta = \frac{2L}{\sqrt{2(\alpha + \beta)}} 2(\alpha + \beta) - T_1(4\alpha + 3\beta) - \beta T_2.$$

$\Delta > 0$  revient donc à

$$T_1 < \frac{1}{4\alpha + 3\beta} \left( 2L\sqrt{2(\alpha + \beta)} - \beta T_2 \right).$$

Cette condition entraîne la précédente  $2L - T_1\sqrt{2(\alpha + \beta)} > T_2\sqrt{2(\alpha + \beta)}$ , c'est donc cette condition que l'on garde.

Comme  $T_1 > T_2$ , la condition symétrique est respectée, on a donc

$$\theta_2(T_1, T_2) = \int_{L-T\sqrt{2(\alpha+\beta)}}^L m_0(x) dx.$$

Si on se restreint à cette zone, on revient au cas à une réunion pour ce qui est de l'unicité. Néanmoins, rien ne nous garantit la possibilité de l'existence d'une solution au moins dans cette zone. Notamment lors d'un déséquilibre important entre les  $\theta_i$  tout en ayant leur somme proche de l'unité.

**La deuxième réunion retarde la première réunion** Dans ce cas là,  $\theta_1$  est cette fois décroissante en  $T_1$ . De plus elle est aussi croissante en  $T_2$ . Si on garde  $T_2$  fixe, on peut alors obtenir tout un demi-espace de possibilité pour  $\theta_1$  tout en gardant  $\theta_2$  fixé et défini suivant la relation précédente.

**Les réunions se retardent mutuellement** Dans ce cas là, on a  $\theta_1 + \theta_2 = 1$ . On obtient des courbes de niveaux sur les  $\theta_i$ . Il n'y a donc pas unicité, mais on peut obtenir toutes les solutions que l'on souhaite à condition bien sûr d'avoir la relation précédente.

### Conclusion

Si la somme des deux  $\theta$  est égale à 1, alors on regarde l'espace où les réunions se retardent mutuellement et on a tout une courbe de solutions.

Si la somme des deux  $\theta$  est différente de 1, alors on est dans un des deux cas précédents. Considérons le couple  $(T_1, T_2)$  obtenu par l'inversion précédente

$$\theta_1 = \int_0^{T_1\sqrt{2(\alpha+\beta)}} m_0(x-L)dx,$$

$$\theta_2 = \int_0^{T_2\sqrt{2(\alpha+\beta)}} m_0(L-x)dx.$$

Si  $T_1$  et  $T_2$  sont inférieurs à  $\frac{L}{2\sqrt{2(\alpha+\beta)}}$ . Alors on a que

$$T_1 < \frac{1}{4\alpha + 3\beta} \left( L\sqrt{2(\alpha + \beta)} - \beta T_2 \right)$$

et

$$T_2 < \frac{1}{4\alpha + 3\beta} \left( L\sqrt{2(\alpha + \beta)} - \beta T_1 \right).$$

On se place donc dans la situation où les deux réunions n'interagissent pas entre elles et grâce à l'inversion on obtient bien

$$\theta_1(T_1, T_2) = \theta_1 \text{ et } \theta_2(T_1, T_2) = \theta_2$$

On a donc une solution au problème. On peut en obtenir deux autres en faisant tendre  $T_1$  ou  $T_2$  vers l'infini car se faisant on fera croître puis décroître vers 0 le  $\theta_i$  associé.

Si  $T_1$  ou  $T_2$  n'est pas inférieur à  $\frac{L}{\sqrt{2(\alpha+\beta)}}$ , prenons par exemple  $T_1$ , alors on fait tendre  $T_2$  vers l'infini. On se retrouve alors dans le deuxième cas où seule la réunion 1 retarde la réunion 2. Dans cette phase, on a  $\theta_2(T_1, T_2)$  qui part de 0 et qui va croître à mesure qu'on diminue  $T_2$ ,  $\theta_1(T_1, T_2)$  restant fixe.  $\theta_2(T_1, T_2)$  ne peut croître éternellement car il est nul en  $T_2 = 0$ . On est obligé donc d'aller dans un des autres cas étudiés si l'on diminue suffisamment  $T_2$ . Or il ne peut s'agir du cas où les réunions n'interagissent pas entre elles car on a

$$T_1 > \frac{1}{4\alpha + 3\beta} \left( 2L\sqrt{2(\alpha + \beta)} - \beta T_2 \right).$$

On tombe donc sur le cas des interactions mutuelles et on a donc  $\theta_1(T_1, T_2) + \theta_2(T_1, T_2) = 1$ . Il y a donc une valeur intermédiaire de  $T_2$  qui est solution.

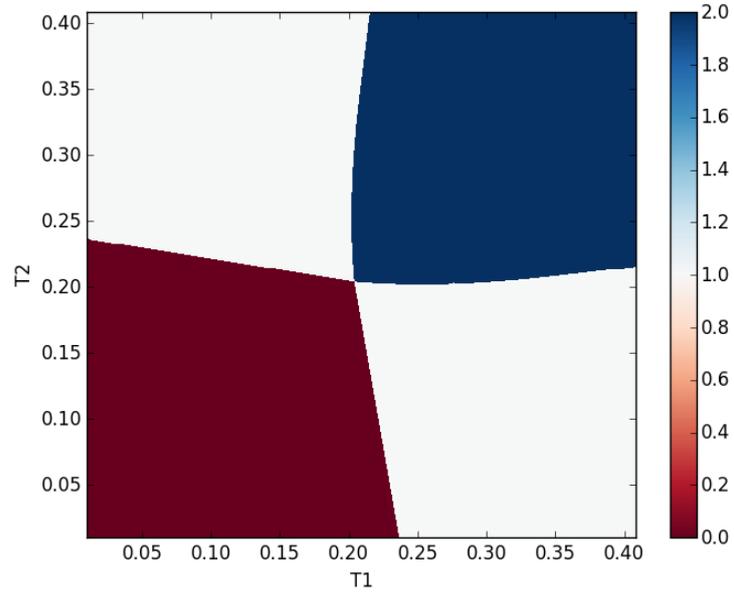


FIGURE 3.5 – Zones d'interaction des réunions en fonction de  $T_1$  et  $T_2$  zone rouge : aucune interaction, zone blanche : une seule réunion retarde l'autre, zone bleue : les réunions se retardent mutuellement

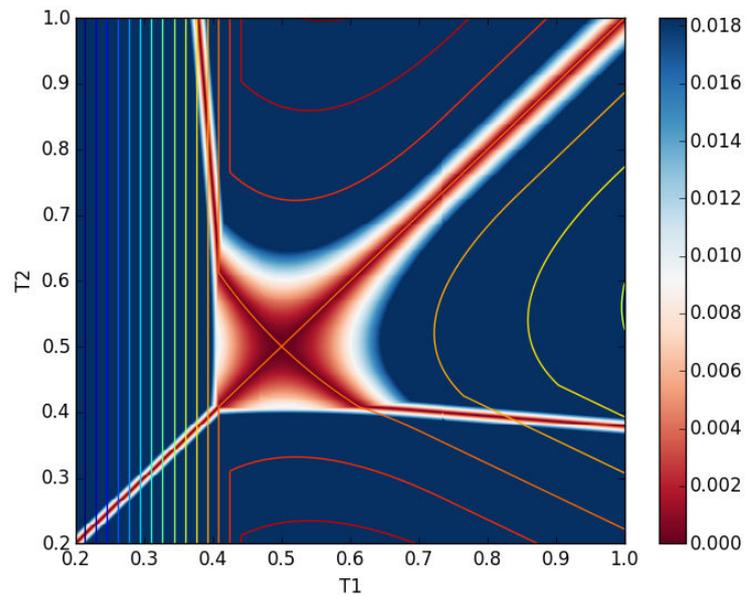


FIGURE 3.6 – Ligne de niveau de  $\theta_1$  et valeur de  $\theta_2 - \theta_1$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$

## 3.4 Simulations numériques

### 3.4.1 Méthode numérique

#### Objectif

L'inconvénient de la formule semi-explicite trouvé dans la section 3.2 est qu'elle nécessite beaucoup de temps de calcul pour permettre un tracé de la fonction valeur. Pour corriger ce problème et faire des tracés numériques, nous allons utiliser une méthode numérique en discrétisant le temps et l'espace et en utilisant un schéma implicite en  $x$ .

#### Schéma implicite

On applique le schéma implicite pour trouver  $(\phi, \psi)$  les transformés de  $(u, m)$  solutions du système  $(\mathcal{E}_{(T_1, T_2)})$  à  $(T_1, T_2)$  fixés. On utilisera pour poser la condition au bord sur  $\phi$  la formule explicite en temps grand. On peut se référer à [11] pour les convergences du schéma sachant qu'il n'y a pas ici de couplage entre les deux équations sur  $u$  et  $m$  et que la transformation de Cole-Hopf et la transformation sur  $m$  rendent chacune des deux équations linéaires.

L'avantage de résoudre le problème en  $(\phi, \psi)$  plutôt qu'en  $(u, m)$  est qu'il s'agit d'équations linéaires qui sont donc plus rapides à résoudre par le schéma implicite. Néanmoins un problème apparaît suivant la valeur de  $\sigma$  et les variations de la fonction  $u$  comme on le verra dans le paragraphe suivant.

Le schéma implicite est le suivant :

$$\frac{\phi(t + \Delta t, x) - \phi(t, x)}{\Delta t} + \sigma^2 \frac{\phi(t, x + \Delta x) + \phi(t, x - \Delta x) - 2\phi(t, x)}{2\Delta x} = 0.$$

qu'on résout implicitement pour les points de discrétisation en  $x$  et de manière rétrograde en temps sachant que l'on a le comportement en temps grand de  $\phi(t, x)$  et que sa valeur aux bornes  $x = \pm L$  est fixée.

On résout ensuite  $\psi(t, x)$  en faisant un schéma analogue mais cette fois dans le sens croissant du temps. On utilise enfin les valeurs trouvées pour  $\psi$  près du bord en  $x = L - \Delta x$  et  $x = -L + \Delta x$  pour intégrer le flux des personnes qui sont effectivement arrivées à chacune des deux réunions avant les temps  $T_i$  et obtenir le  $\theta_i$  effectif.

#### Problème de précision pour la transformée $\phi$

$$\phi(t, x) = \exp\left(-\frac{u(t, x)}{\sigma^2}\right)$$

Lorsque  $u(t, x)\sigma^{-2}$  est trop grand, il faut adapter la méthode numérique pour pouvoir continuer à manipuler  $\phi$ . On a donc des problèmes lorsque  $\sigma$  est trop petit.

$$u(t, x) = -\sigma^2 \log \phi(t, x)$$

Lorsque l'on se place là où la fonction valeur est la plus grande, les erreurs de la fonction  $\phi$  sont amplifiées. Néanmoins, lorsque l'on peut déterminer une valeur maximale  $U_M$  pour la fonction  $u(t, x)$ , on peut travailler avec une version modifiée de la transformée de Cole-Hopf qui conserve la même équation aux dérivées partielles :

$$\tilde{\phi}(t, x) = \exp\left(\frac{U_M - u(t, x)}{\sigma^2}\right).$$

Le problème d'imprécision est temporairement réglé.

### 3.4.2 Graphiques

Il s'agit maintenant de montrer un certain nombre de résultats. On posera pour l'ensemble des figures les variables fixes suivantes

$\bar{t}$	$L$	$N_T$	$N_h$
1.	1.	500	500

En utilisant les notations  $N_h$  et  $N_T$  pour le nombre de point pour la méthode numérique pour faire une subdivision de l'espace  $[-L, L]$  et du temps  $[0, T_{\max}]$ , avec  $T_{\max} = \max(T_1, T_2)$  et  $\bar{t} = \bar{t}_1 = \bar{t}_2$ . On a la relation

$$\Delta t = \frac{T_{\max}}{N_T - 1} \text{ et } \Delta h = \frac{2L}{N_h - 1}$$

Ces valeurs de  $N_T$  et de  $N_h$  ont été choisies de manière à avoir une précision suffisante des résultats numériques.

On prendra comme densité initiale  $m^0$ , la fonction

$$m^0(x) = \frac{1}{2L} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right).$$

On trace ensuite les fonctions valeur, drift et densité de probabilité en fonction de  $t$  et de  $x$  avec différents types de variables

Variabes	$T_1$	$T_2$	$\sigma$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Cas 1	2.	2.	1.	2.	1.	1.
Cas 2	2.	4.	1.	2.	1.	1.
Cas 3	2.	2.	1.	0.02	0.01	0.01
Cas 4	2.	2.	0.5	2.	1.	1.
Cas 5	2.	2.	0.2	2.	1.	1.

Le premier cas sera pour nous un point de référence pour comparer les autres cas. Il s'agit d'un cas où les deux réunions commencent en même temps.

Pour le deuxième cas, on introduit une asymétrie en faisant commencer la deuxième réunion beaucoup plus tard.

Pour le troisième cas, on a diminué les coûts liés à  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ce qui revient à augmenter le coût de déplacement lié au drift  $a(t, x)$ .

Pour le quatrième et cinquième cas, on diminue progressivement la variance  $\sigma^2$ .

### Fonction valeur $u$

Pour le premier cas, on remarque sur le graphique 3.7 que la fonction valeur a très peu de variabilité par rapport à la variable d'espace. Ceci est induit par un coût de déplacement très faible.

Pour le deuxième cas, on peut observer l'asymétrie sur le graphique 3.8.

Le troisième cas montre sur le graphique 3.9 que l'on a grandement augmenté la variabilité en espace de la fonction valeur par rapport au graphique 3.7. Ceci est dû à l'augmentation du coût pour se déplacer.

On ne note sur les graphiques 3.10 et 3.11 que peu de différence pour le quatrième et cinquième cas.

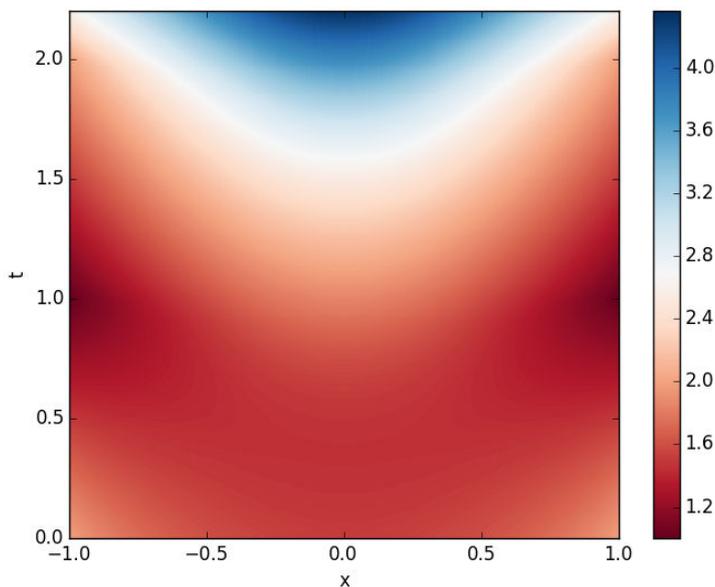


FIGURE 3.7 – Fonction valeur pour le cas 1

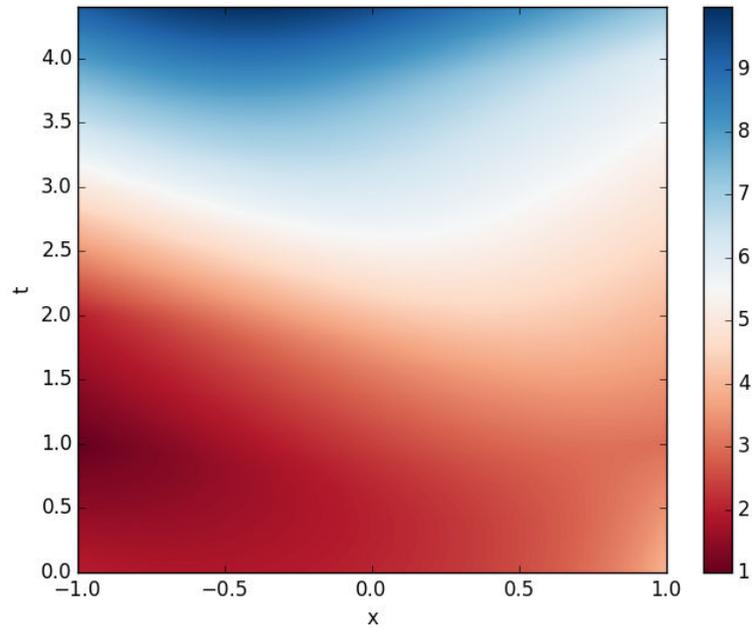


FIGURE 3.8 – Fonction valeur pour le cas 2

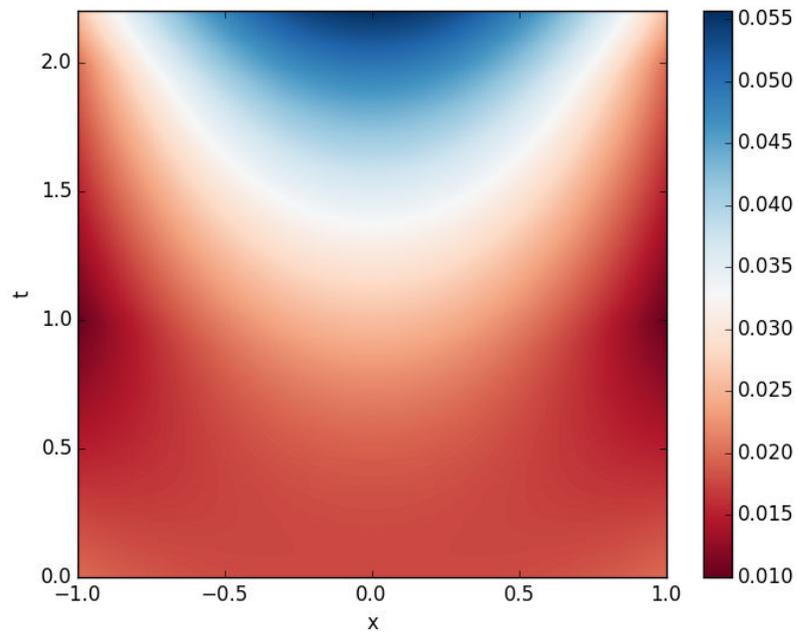


FIGURE 3.9 – Fonction valeur pour le cas 3

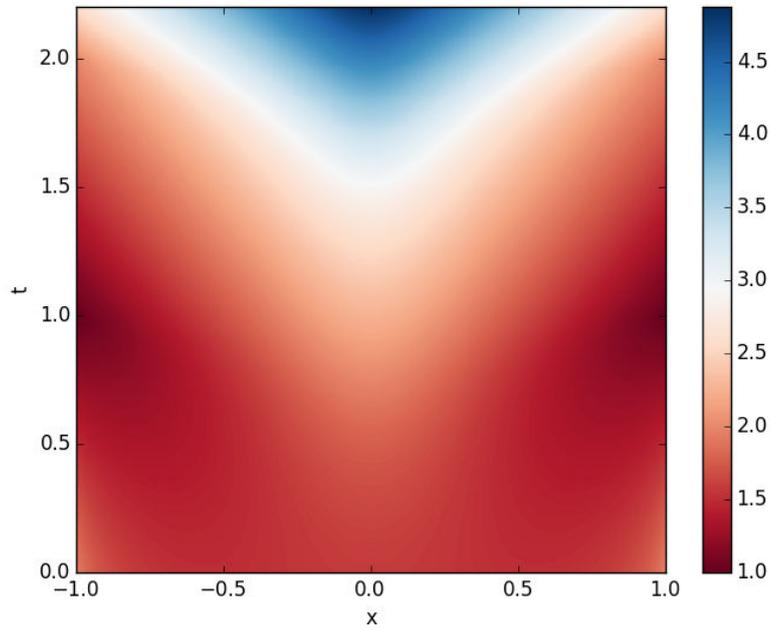


FIGURE 3.10 – Fonction valeur pour le cas 4

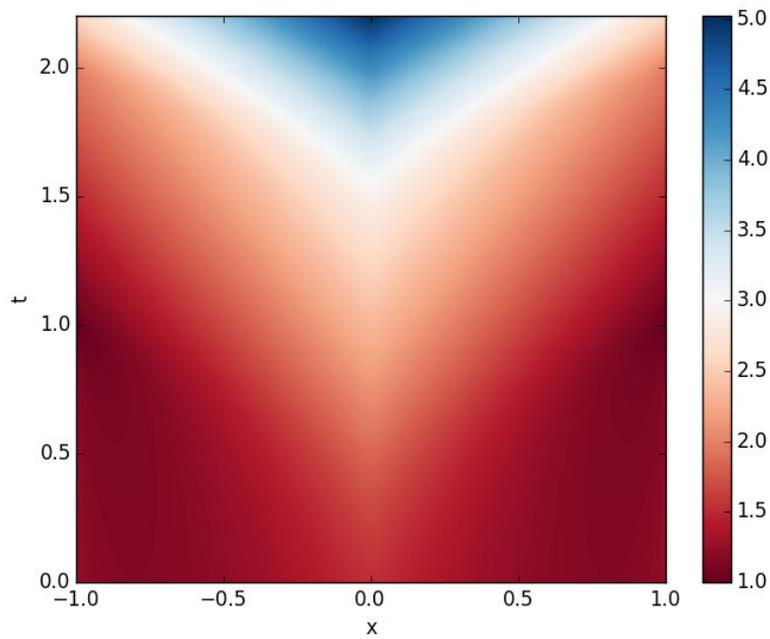


FIGURE 3.11 – Fonction valeur pour le cas 5

**Drift optimal  $a^*$** 

On note sur le drift optimal sur le premier cas sur le graphique 3.12, trois phases :

- Avant l'heure prévue des réunions  $\bar{t}_i$ , la vitesse est positive pour les  $x$  négatif et la vitesse est négative pour les  $x$  positif : les agents cherchent à s'éloigner des bords et ceci d'autant plus qu'ils sont près des bords.
- Entre l'heure prévue  $\bar{t}_i$  et l'heure effective de début de réunion  $T_i$ , on cherche à arriver progressivement à la réunion,
- Après l'heure effective de réunion, les valeurs absolues de  $a$  augmentent quand  $t$  est supérieur à  $T_{max}$ . Les agents cherchent donc à arriver plus rapidement à la réunion.

On peut aussi noter l'antisymétrie du drift :  $a^*(t, -x) = -a^*(t, x)$ .

Sur le deuxième cas, on observe sur le graphique 3.13 tout d'abord une aversion pour la deuxième réunion juste avant l'heure prévue de début de réunion. Puis, lorsque la première réunion commence, les agents commencent peu à peu à préférer aller à la deuxième réunion.

Le troisième cas ressemble beaucoup au premier si ce n'est que le coût de transport étant plus cher, le drift prend des valeurs plus faibles sur le graphique 3.14 que sur le graphique 3.12.

On note sur les graphiques 3.15 et 3.16 que pour les deux derniers cas, la valeur absolue de  $a$  augmente lorsque l'on diminue  $\sigma$  lorsque l'on est près de chacune des réunions avant  $\bar{t}$ .

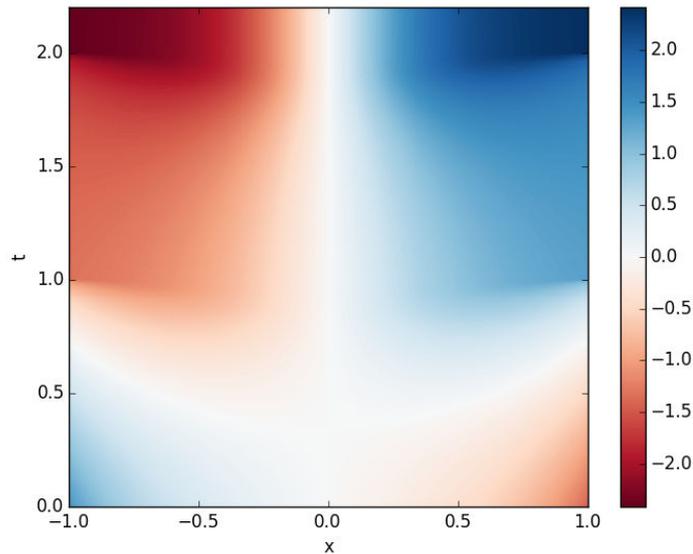


FIGURE 3.12 – Drift pour le cas 1

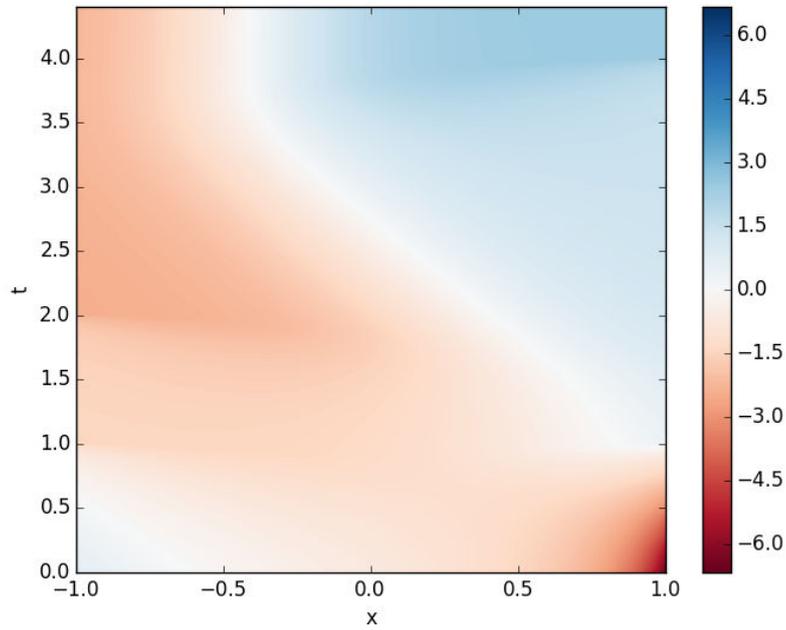


FIGURE 3.13 – Drift pour le cas 2

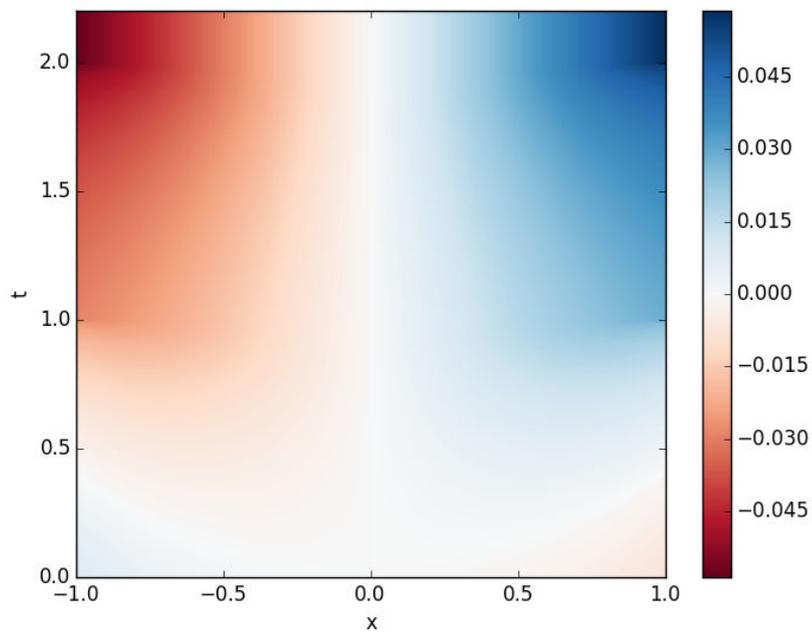


FIGURE 3.14 – Drift pour le cas 3

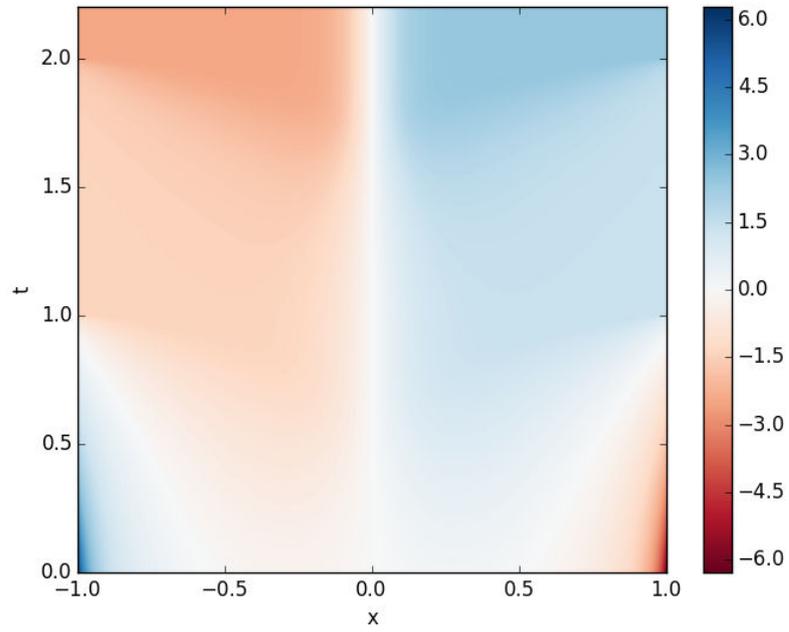


FIGURE 3.15 – Drift pour le cas 4

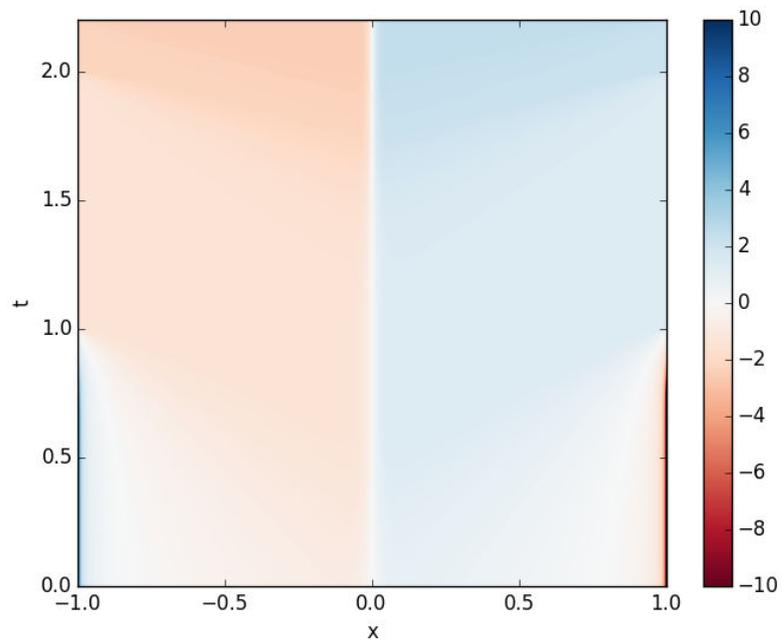


FIGURE 3.16 – Drift pour le cas 5

**Fonction de densité  $m$** 

On remarque sur les graphiques 3.17 et 3.18 que la fonction de densité est symétrique dans le premier cas et asymétrique dans le deuxième cas.

On constate sur le graphique 3.19, dans le troisième cas, que la densité se diffuse moins vite que pour le premier cas. Ceci est dû au fait que le coût de transport est plus élevé ce qui limite les gradients de la fonction densité,  $m$ , en temps.

Pour les deux derniers cas, on constate sur les graphiques 3.20 et 3.21 une convergence des agents sur les points  $(\pm L, \bar{t})$ . En effet, on converge vers le cas déterministe.

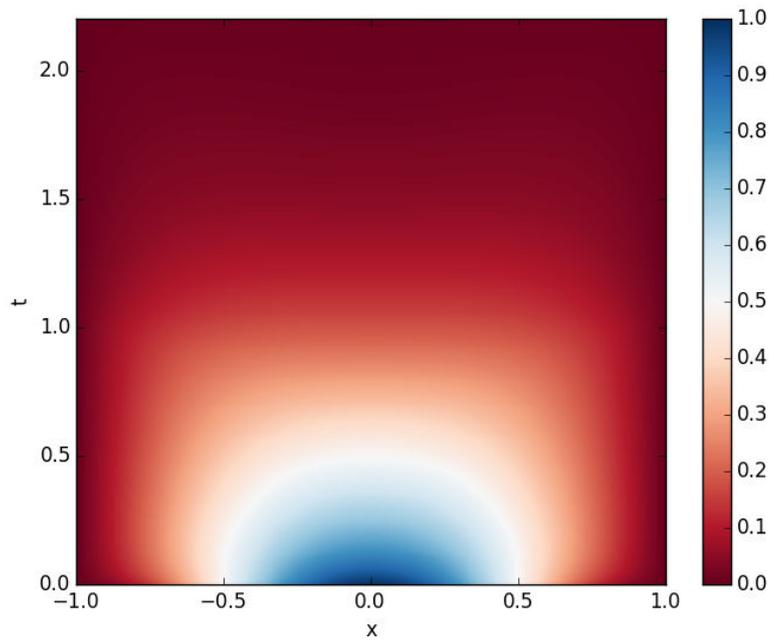


FIGURE 3.17 – Densité des agents pour le cas 1

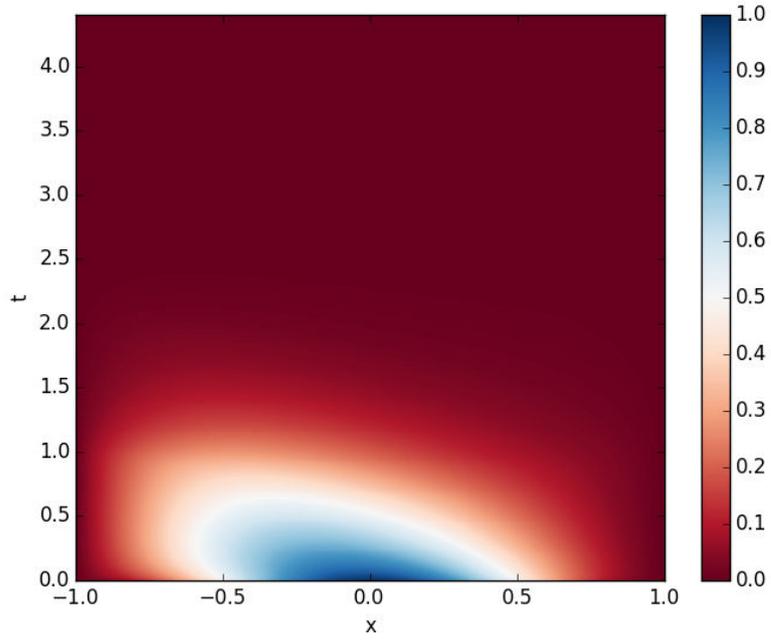


FIGURE 3.18 – Densité des agents pour le cas 2

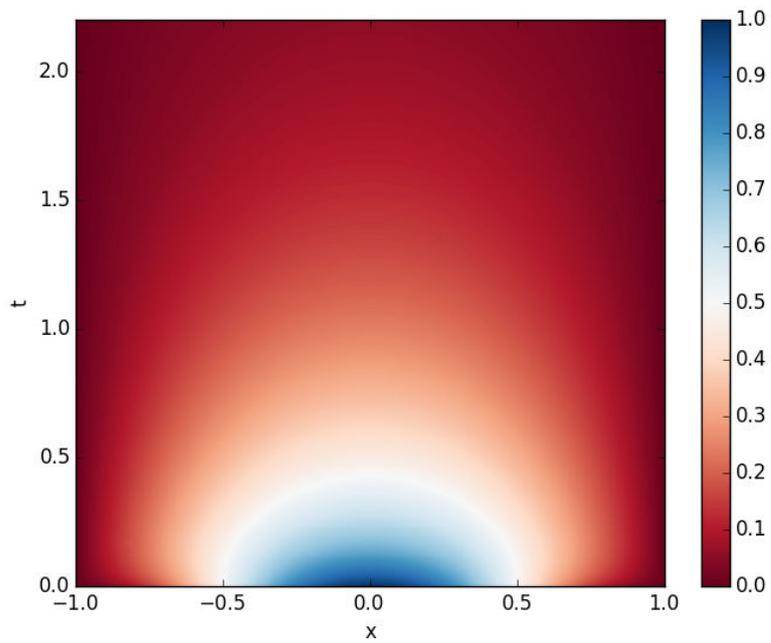


FIGURE 3.19 – Densité des agents pour le cas 3

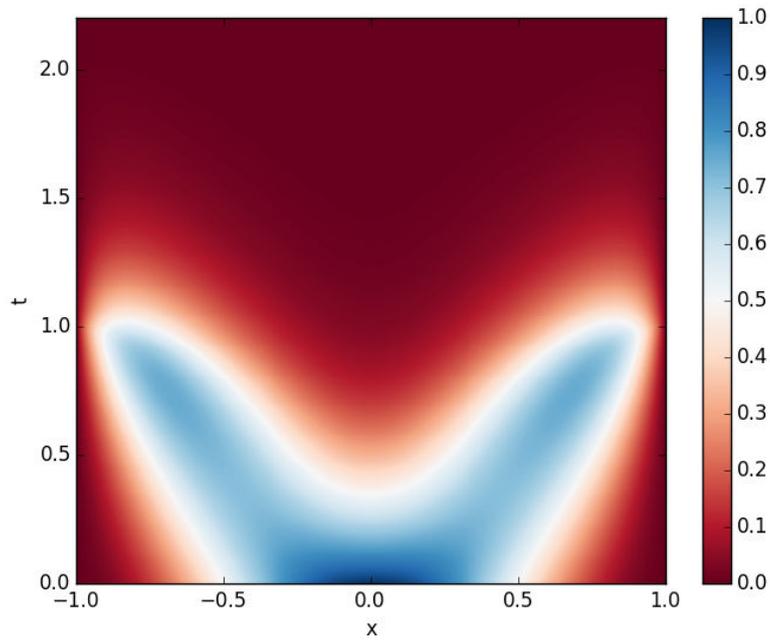


FIGURE 3.20 – Densité des agents pour le cas 4

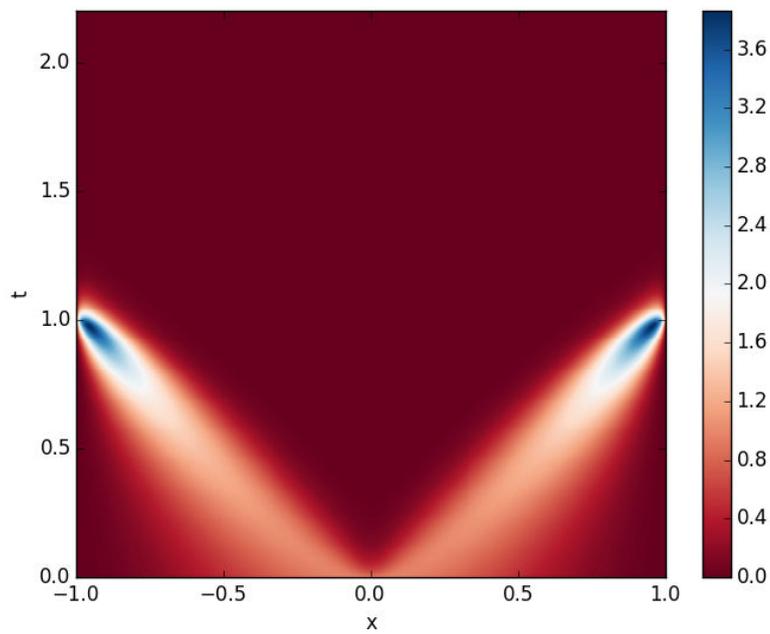


FIGURE 3.21 – Densité des agents pour le cas 5

**Cas où seule une réunion a lieu**

Particularité du modèle à deux réunions : il est possible qu'une seule réunion ait lieu. Dans cette configuration, lorsqu'un agent arrive à une réunion qui n'aura pas lieu, il y reste coincé. Les agents vont donc chercher à éviter ce lieu de rendez-vous à tout prix. Sans perte de généralité, on peut considérer que c'est le rendez-vous en  $x = L$  qui n'a pas lieu.

Ce cas de figure est facilement traitable via la transformée  $\phi$ . En effet, lorsque la fonction  $u(t, L) = \infty$  alors  $\phi(t, x) = 0$ . On obtient alors les graphiques suivants.

$\bar{t}$	$T_1$	$\sigma$	$N_T$	$N_h$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$L$
0.5	0.6	0.5	500	500	2	1	1	1

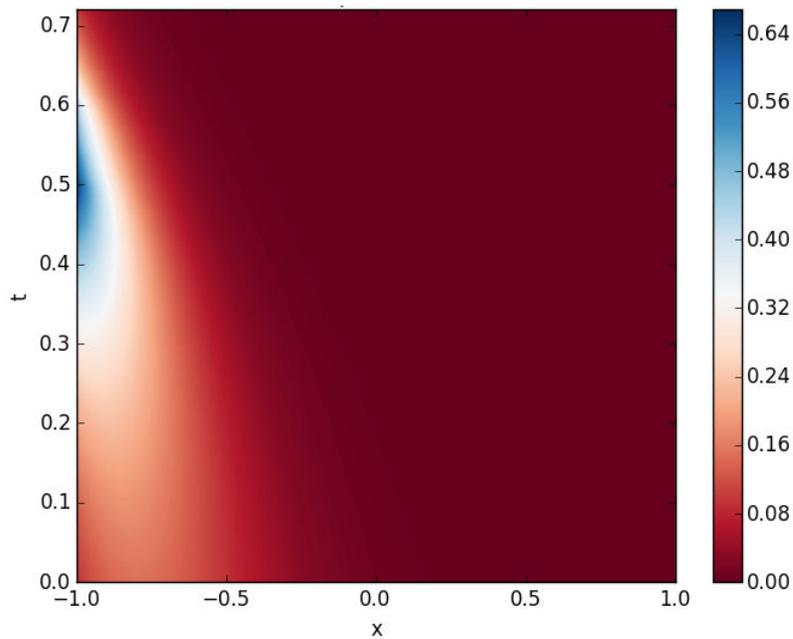


FIGURE 3.22 – Transformée  $\phi$  en fonction de l'espace et du temps

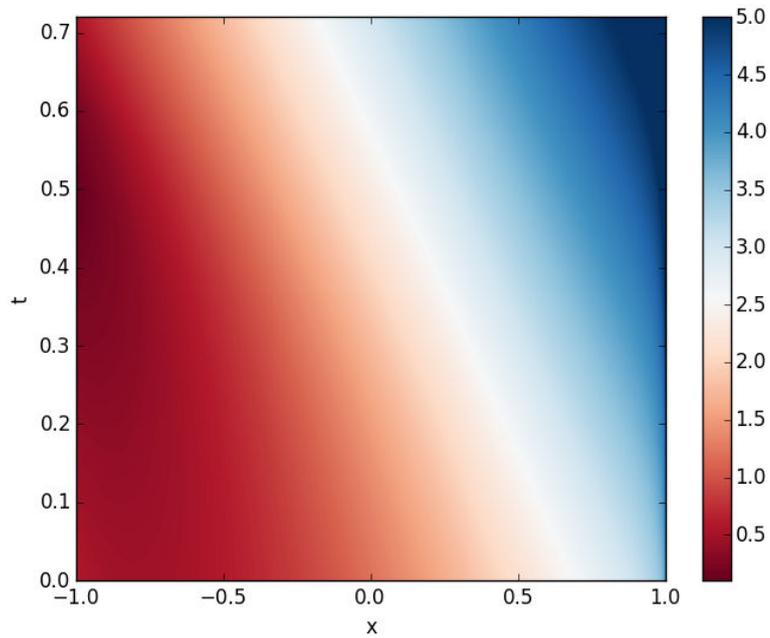
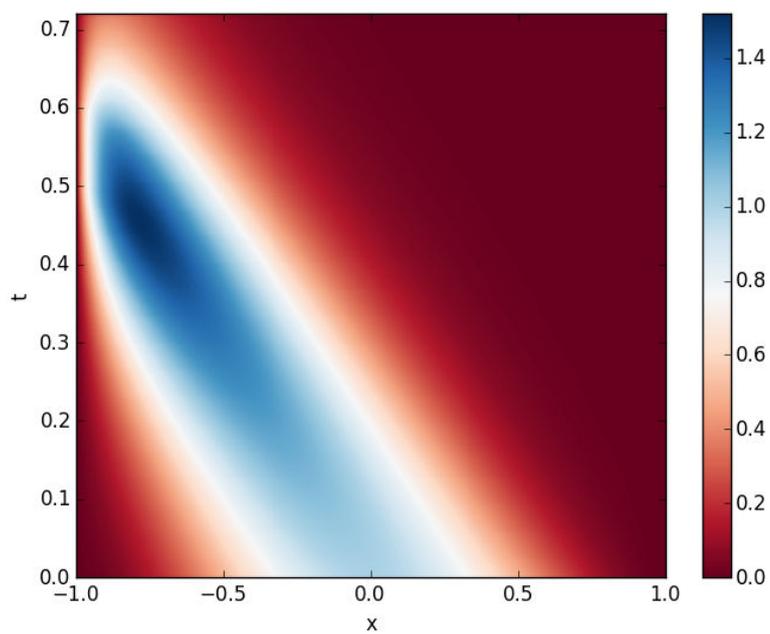


FIGURE 3.23 – Fonction valeur

FIGURE 3.24 – Densité  $m$  en fonction de l'espace et du temps

$\theta_1$  fonction de  $T_1$  et  $T_2$ 

Nous traçons ensuite la fonction  $\theta_1$  en fonction de  $T_1$  et  $T_2$  suivant différents  $\sigma$  ainsi que des lignes de niveau de  $\theta_1 + \theta_2$  et  $\theta_1/\theta_2$  afin de visualiser la manière de trouver une solution au problème. On constate que plus on s'éloigne de l'origine, plus  $\theta_1 + \theta_2$  est grand. Néanmoins il ne semble pas y avoir de règle pour le rapport  $\theta_1/\theta_2$ . Deux situations très asymétriques peuvent être compatibles avec la même solution. Si on trace la courbe de la Hessienne et la ligne de niveau  $\theta_1 + \theta_2$  on se rend compte visuellement qu'on peut très bien avoir une coexistence de jusqu'à trois solutions. Ceci est confirmé lorsque l'on regarde l'erreur  $(\theta_1 - 0.3)^2 + (\theta_2 - 0.4)^2$  sur le graphique 3.25.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\bar{t}$	$L$	$N_T$	$N_h$
2.	1.	1.	0.2	1.	100	100

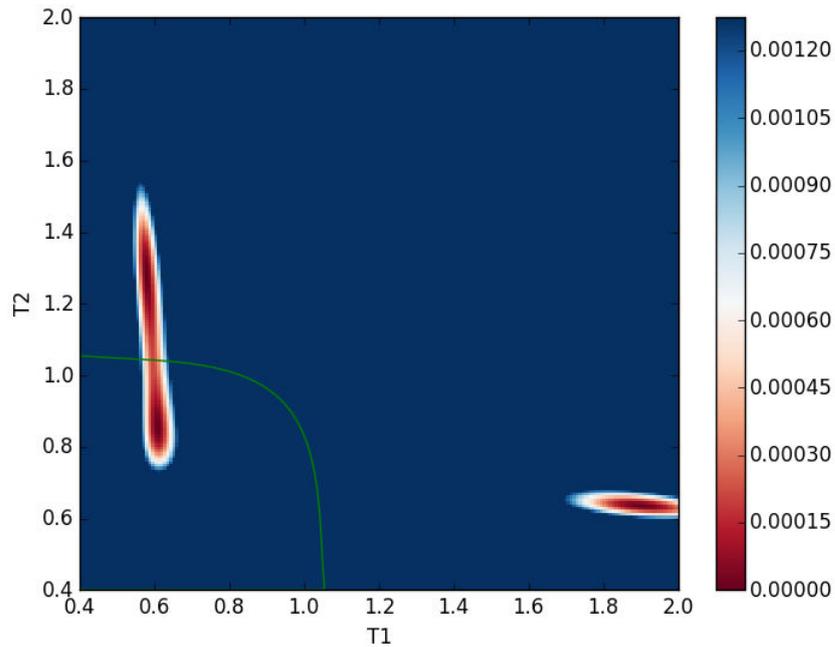
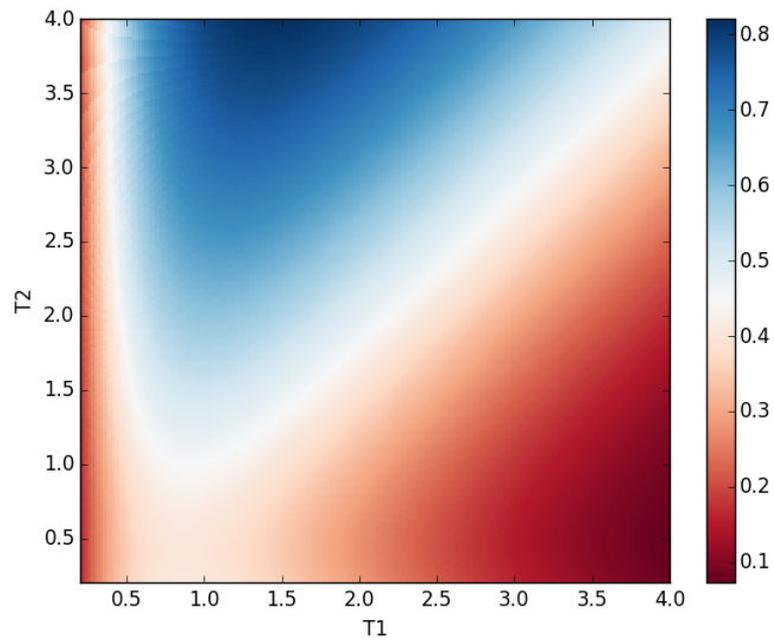
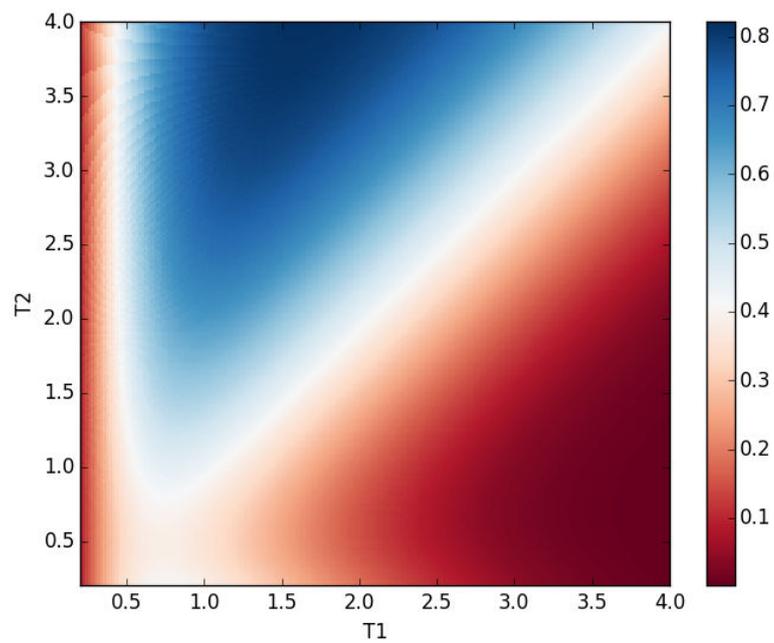


FIGURE 3.25 – L'erreur  $\sum_i(\theta_i - \bar{\theta}_i)^2$  pour  $\sigma = 1$  et  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = (0.3, 0.4)$  avec en vert le lieu où la hessienne de  $(\theta_1, \theta_2)$  s'annule

FIGURE 3.26 –  $\theta_1$  fonction de  $T_1$  et  $T_2$  avec  $\sigma = 1$ .FIGURE 3.27 –  $\theta_1$  fonction de  $T_1$  et  $T_2$  avec  $\sigma = 0.5$

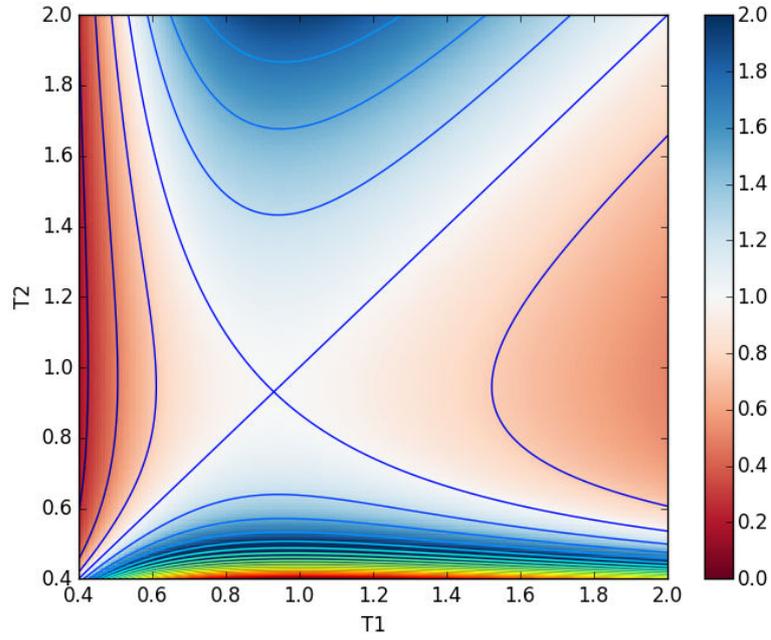


FIGURE 3.28 – Ligne de niveau de  $\theta_1/\theta_2$  fonction de  $T_1$  et  $T_2$

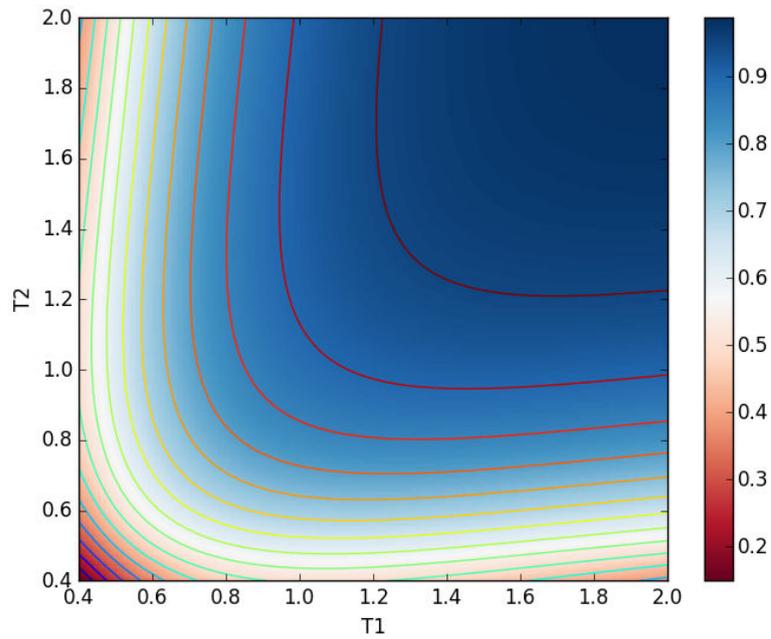


FIGURE 3.29 – Ligne de niveau de  $\theta_1 + \theta_2$  fonction de  $T_1$  et  $T_2$

# Bibliographie

- [1] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, “Jeux à champ moyen. I - Le cas stationnaire,” *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 343, no. 9, pp. 619–625, 2006.
- [2] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, “Jeux à champ moyen. II - Horizon fini et contrôle optimal,” *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 343, no. 10, pp. 679–684, 2006.
- [3] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, “Mean field games,” *Japanese Journal of Mathematics*, vol. 2, no. 1, 2007.
- [4] M. Huang, R. Malhame, and P. Caines, “Large population stochastic dynamic games : Closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle,” *Special issue in honor of the 65th birthday of Tyrone Duncan, Communications in Information and Systems*, vol. 6, no. 3, pp. 221–252, 2006.
- [5] E. Zermelo, “Über eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels,” *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, 1913.
- [6] Émile Borel, “La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche,” *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, no. 173, 1921.
- [7] J. von Neumann, “Zur theorie der gesellschaftsspiele,” *Mathematische Annalen*, vol. 100, no. 1, pp. 295–320, 1928.
- [8] P.-L. Lions, “Mean field games (cont.)..” Collège de France <https://www.college-de-france.fr/site/en-pierre-louis-lions/course-2011-10-28-09h00.htm>, 2011-2012.
- [9] R. Carmona and F. Delarue, *Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I*. 83, Springer International Publishing, 1 ed., 2017.
- [10] O. Guéant, “Existence and uniqueness result for mean field games with congestion effect on graphs,” 2014.
- [11] Y. Achdou and I. Capuzzo-Dolcetta, “Mean field games : Numerical methods,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 48, no. 3, pp. 1136–1162, 2009.

- [12] O. Guéant, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions, “Mean field games and applications,” in *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010* (Springer, ed.), pp. 205–266, 2011.
- [13] I. Swiecicki, T. Gobron, and D. Ullmo, “"phase diagram" of a mean field game,” 2015.



## Résumé

La théorie des jeux à champ moyen fut introduite en 2006 par Jean-Michel Lasry et Pierre-Louis Lions. Elle permet l'étude de la théorie des jeux dans certaines configurations où le nombre de joueurs est trop grand pour espérer une résolution pratique. Nous étudions la théorie des jeux à champ moyen sur les graphes en nous appuyant sur les travaux d'Olivier Guéant que nous étendrons à des formes plus générales d'hamiltoniens. Nous étudierons aussi les liens qui existent entre les K-moyennes et les jeux à champ moyen ce qui permettra en principe de proposer de nouveaux algorithmes pour les K-moyennes grâce aux techniques de résolution numérique propres aux jeux à champ moyen. Enfin nous étudierons un jeu à champ moyen à savoir le problème "d'heure de début d'une réunion" en l'étendant à des situations où les agents peuvent choisir entre deux réunions. Nous étudierons de manière analytique et numérique l'existence et la multiplicité des solutions de ce problème.

## Mots Clés

Théorie des jeux à champ moyen, Équations aux dérivées partielles, Théorie des graphes, Apprentissage statistique, K-moyennes

## Abstract

The mean field game theory was introduced in 2006 by Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. It allows us to study the game theory in some situations where the number of players is too high to be able to be solved in practice. We will study the mean field game theory on graphs by learning from the studies of Olivier Guéant which we will extend to more generalized forms of hamiltonian. We will also study the links between the K-means and the mean field game theory. In principle, this will offer us new algorithms for solving the K-means thanks to the techniques of numerical resolutions of the mean field games. Finally, we will study a mean field game called the "starting time of a meeting". We will extend it to situations where the players can choose between two meetings. We will study analytically and numerically the existence and multiplicity of the solutions to this problem.

## Keywords

Mean field games theory, Partial differential equations, Graph theory, Statistical Learning, K-means