HAL open science

Formes modérément ramifiées de polydisques fermés et de dentelles

Marc Chapuis

▶ To cite this version:

Marc Chapuis. Formes modérément ramifiées de polydisques fermés et de dentelles. Mathématiques générales [math.GM]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066293 . tel-01707772

HAL Id: tel-01707772

https://theses.hal.science/tel-01707772v1

Submitted on 13 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Marc Chapuis

Formes modérément ramifiées de polydisques fermés et de dentelles

---

dirigée par Antoine Ducros

Soutenance le 14 décembre 2017 devant le jury composé de :

M. Antoine Ducros	Université Pierre et Marie Curie	directeur
M. Mathieu Florence	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. David Harari	Université de Paris-Sud	examinateur
Mme. Ariane Mézard	Université Pierre et Marie Curie	examinatrice
M. Jérôme Poineau	Université de Caen Basse-Normandie	examinateur
M. Tobias Schmidt	Université de Rennes 1	rapporteur

Après avis des rapporteurs :

M. Tobias Schmidt	Université de Rennes 1	rapporteur
M. Michael Temkin	The Hebrew University of Jerusalem	rapporteur

Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université Pierre et Marie Curie.
École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

En réponse à ce que m'a adressé Son Excellence Gao

Bien peu de moines dans ce vieux temple,
L'hôte s'est installé dans une chambre vide.
Un vieil ami lui offre du riz qu'il a gagné,
Un voisin lui donne des légumes du jardin.
Un double sal facilite le prêche du Dharma,
Les Trois Véhicules pourraient-ils porter des livres ?
Comment oserais-je écrire un « Mystère » ?
Je composerai peut-être comme Xiangru.

Du Fu, traduction Nicolas Chapuis

Remerciements

Il m'est impossible d'exprimer toute la gratitude que j'ai pour mon directeur de thèse Antoine. Voilà bientôt cinq ans qu'il a accepté de m'encadrer en master puis en thèse. Il s'est chargé de cette tâche avec une gentillesse immense et une patience infinie. Toujours disponible pour discuter de mon travail, il a été un modèle de rigueur : si ce travail a quelques qualités elles lui doivent beaucoup, quant à ses défauts, ils persistent bien malgré lui. Surtout, la joie qu'il a systématiquement montrée dans le travail est une leçon d'humanité que je n'oublierai jamais. Merci Antoine !

Je ne mesure pas ma chance d'avoir achevé mes études mathématiques auprès d'un professeur aussi bon que celui avec lequel elles ont commencé et qui est aussi un exemple pour moi. Merci Roger.

Je suis extrêmement reconnaissant à Tobias Schmidt et à Michael Temkin pour avoir accepté d'être mes rapporteurs. Je suis très reconnaissant à Mathieu Florence, David Harari, Ariane Mézard et Jérôme Poineau ainsi qu'à Tobias Schmidt à nouveau pour avoir accepté d'être mes examinateurs.

Je suis très reconnaissant envers Thibaud pour avoir si patiemment écouté mes premières idées souvent confuses. Je suis très reconnaissant envers Daniele et Lorenzo pour m'avoir informé de leur travail sur un sujet similaire et les discussions que nous avons eu à ce sujet.

Je suis très reconnaissant envers les maîtres et les collègues qui ont eu quelque intérêt pour ce travail.

Je suis très reconnaissant envers tous les camarades de master ou de thèse. Leur passion et leur courage, pour les mathématiques comme en toutes choses, n'ont jamais cessé de me servir de guides.

Je suis très reconnaissant envers les diverses générations du BDD et les membres de l'administration pour toute l'aide qu'ils m'ont fournie et fournissent à tous.

Je suis très reconnaissant envers mes professeurs de grec, Isabelle Assan-Dhôte, de latin, Marion Faure-Ribreau, et de sanskrit, Nalini Balbir, qui m'ont chacune généreusement guidé dans l'étude de ces langues et ainsi embelli ces années de thèse. J'en profite pour remercier mes amis hellénistes Vincent et Olivier pour tant de belles discussions.

Je veux remercier mes amis de Chine ainsi que mes amis de taupe, Alexis, Corentin et Vincent, leur amitié traverse les années et les distances. Merci à Tony dont les (im)pulsions me gardent en mouvement.

Enfin, je veux remercier mes parents pour leur soutien indéfectible et Susana pour avoir rendu plus supportables les pires périodes et plus agréables les meilleures.

Résumé

Soit k un corps ultramétrique complet, L une extension galoisienne finie modérément ramifiée de k et X un espace k-analytique. Nous montrons que X est isomorphe à un k-polydisque fermé (resp. une k-dentelle) si et seulement si X_L est isomorphe à un L-polydisque fermé (resp. une L-dentelle) sur lequel l'action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ est raisonnable. Nous montrons que X est isomorphe à un k-bidisque fermé si et seulement si X_L est isomorphe à un L-bidisque fermé.

Dans le cadre de l'algèbre graduée : on calcule le premier ensemble pointé de cohomologie du groupe linéaire et des automorphismes du plan.

Mots-clés

Ramification modérée, espaces de Berkovich, polydisques fermés, bidisques fermés, polycouronnes, dentelles, algèbre graduée, automorphismes du plan, Hilbert 90.

Tamely Ramified Forms of Closed Polydiscs and Laces

Abstract

Let k be a complete non-Archimedean field, L a finite tamely ramified galoisian extension of k and X a k-analytic space. We show that X is isomorphic to a closed k-polydisc (resp. a k-lace) if and only if X_L is isomorphic to a closed L-polydisc (resp. a L-lace) on which the action of $\mathrm{Gal}(L/k)$ is reasonable. We show that X is isomorphic to a closed k-bidisc if and only if X_L is isomorphic to a closed k-bidisc.

In the formalism of graduated algebra : we calculate the first pointed cohomology set of the general linear group and of the automorphisms of the plane.

Keywords

Tame ramification, Berkovich spaces, closed polydiscs, closed bidiscs, polyannuli, laces, graded algebra, automorphisms of the plane, Hilbert 90.

Table des matières

Introduction **11**

1 Algèbre graduée **23**
1.1 Premières définitions 23
1.2 Algèbre commutative et théorie de Galois 25
1.3 Algèbre linéaire 27
1.3.1 Espaces vectoriels 27
1.3.2 Matrices 29
1.3.3 Indépendance linéaire des automorphismes 32
1.4 Automorphismes du plan 33
1.4.1 Contrôle des automorphismes 36
1.5 Théorèmes de Hilbert 43
1.5.1 Groupe général linéaire 43
1.5.2 Groupe additif 48
1.5.3 Automorphismes du plan 48

2 Polydisques fermés et dentelles **51**
2.1 Polydisques fermés 51
2.2 Dentelles 57
2.3 La dimension 1 63
2.3.1 Disque fermé 63
2.3.2 Couronne 65
2.4 Exemples de formes non triviales de couronnes 68
2.4.1 Cas modérément ramifié 68
2.4.2 Cas sauvagement ramifié 69

3 Trois théorèmes **71**
3.1 Une proposition clef 71
3.2 Formes de polydisques fermés 72
3.3 Formes de bidisques fermés 75
3.4 Formes de dentelles 77

Introduction

> Plût au ciel que le lecteur, enhardi et devenu momentanément féroce comme ce qu'il lit, trouve, sans se désorienter, son chemin abrupt et sauvage...
>
> Comte de Lautréamont,
> *Les Chants de Maldoror*

Dans toute cette introduction k désigne un corps ultramétrique complet (nous autorisons les valuations triviales). Quand nous parlerons d'espaces k-analytiques nous les entendrons toujours au sens de Berkovich [Ber90 ; Ber93].

Soit X un espace k-analytique. Antoine Ducros a montré dans [Duc13] que s'il existe une extension finie, séparable et modérément ramifiée L de k telle que X_L soit isomorphe à un *L-polydisque ouvert*, l'espace X lui-même est alors isomorphe à un k-polydisque ouvert. Tobias Schmidt a montré dans [Sch15] que s'il existe une extension finie, galoisienne et modérément ramifiée L de k telle que X_L soit isomorphe à un *L-disque fermé*, l'espace X lui-même est alors isomorphe à un L-disque fermé.

Nous étendons ces résultats à une classe plus large d'objets.

Motivations.

Le théorème de réduction semi-stable se traduit dans le formalisme de Berkovich en un « découpage » des courbes analytiques en formes galoisiennes de disques et de couronnes, appelé triangulation dans [Duc]. On peut espérer qu'étudier ces formes aide à mieux comprendre les courbes analytiques et que l'étude d'analogues en dimension supérieure aide à mieux comprendre les espaces analytiques.

Plus généralement, étudier les formes d'objets abstraits définis sur un corps de base qui après extension des scalaires se réalisent en objets élémentaires apporte souvent de l'information de nature arithmétique sur le corps de base. On peut penser au rôle important dans la théorie des corps de classe du groupe de Bauer, qui classifie variétés de Severi-Brauer, c'est-à-dire les variétés algébriques qui deviennent isomorphes à l'espace projectif après passage à une clôture algé-

brique, ou, de manière équivalente, les algèbres centrales simples. Notons que les travaux de Ducros et de Schmidt ainsi que le notre montrent l'essentielle trivialité des formes modérément ramifiées, il faudra donc mener l'étude des formes sauvagement ramifiées.

Plus concrètement, si les espaces de Berkovich ont toutes sortes de bonnes propriétés, notamment topologiques, la richesse de leur structure fait que certains objets que l'on penserait *a priori* simples ne le sont pas. Par exemple les k-disques fermés : les classes d'isomorphie de k-disques fermés sont en bijection avec $\mathbb{R}_+^\times/|k^\times|$, autrement dit deux k-disques fermés ne sont pas forcément isomorphes. C'est pour mieux comprendre ce genre de phénomènes que nous nous sommes initialement intéressé aux résultats de [Duc13]. Une conséquence inattendue de ce travail a été d'établir une correspondance remarquable entre (structure linéaire sur les) polydisques fermés et espaces vectoriels *gradués*.

Polydisques fermés.

(0.0.0.1) Définition. — Nous appelons *polyrayon* une famille finie d'éléments de $\mathbb{R}_+^\times$.

Soit $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$, le k-polydisque fermé centré en zéro de polyrayon $\mathbf{r}$ que nous notons $\mathbb{D}_\mathbf{r}$ est la partie de $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ définie par $|T_i| \leq r_i$ pour tout i.

(0.0.0.2) Définition. — Deux polyrayons $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+^\times)^m$ et $\mathbf{s} \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$ sont *k-équivalents* si $m = n$ et s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$(s_i r_{\sigma(i)}^{(-1)})_i \in |k^\times|^n.$$

Cette relation sur les polyrayons est une relation d'équivalence. On appelle *k-type* une classe d'équivalence de polyrayons, et on note $\mathcal{T}(k)$ l'ensemble des k-types ; on confondra dans l'écriture un polyrayon et son k-type.

La formation de $\mathcal{T}(k)$ est fonctorielle en k et si L est une extension de k l'application naturelle

$$\tau_{k\to L} : \mathcal{T}(k) \to \mathcal{T}(L)$$

est surjective.

On montre que l'application $\mathbf{r} \mapsto \mathbb{D}_\mathbf{r}$ induit une bijection entre l'ensemble des k-types $\mathcal{T}(k)$ et les classes d'isomorphie des k-polydisques fermé.

(0.0.0.3) Définition. — Un *k-polydisque fermé de k-type* $\mathbf{r}$ est un espace k-analytique isomorphe à $\mathbb{D}_\mathbf{r}$.

Dentelles.

(0.0.0.4) Définition. — Une *k-dentelle de squelette U* est un espace k-analytique isomorphe à une partie de $\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}$ définie par $(|T_1|, \ldots, |T_n|) \in U$ où U est une partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ non vide et connexe c'est-à-dire une union localement finie de $\mathbb{Z}$-polytopes de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ que l'on définit au moyen de formes affines dont la partie linéaire est à coefficients entiers et dont le terme constant appartient à $\mathbb{R}_+^\times$ (on voit ici $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Ces parties $\mathbb{Z}$-linéaires par morceaux sont un cas particulier des c-espaces linéaires par morceaux introduits par Berkovich dans [Ber04] ; le lecteur intéressé par de telles questions pourra aussi consulter [Duc12].

Tous les produits d'intervalles sont des parties $\mathbb{Z}$-linéaires par morceaux (avec pour conséquence que toutes les k-polycouronnes sont des k-dentelles) et que tous les ouverts (connexes, non vides) de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ sont des parties $\mathbb{Z}$-linéaires par morceaux (connexes, non vides) de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$. En dimension un, les k-dentelles sont exactement les k-couronnes. [1]

(0.0.0.5) Définition. — Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur une k-dentelle et $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \{f \in \mathcal{A}\,,\ ||f||_\infty < 1\}$ la sous-algèbre des fonctions de norme spectrale strictement inférieure à 1, on montre que $\mathcal{A}^\times / k^\times (1 + \mathcal{A}^{\circ\circ})$ est un groupe (précisément un $\mathbb{Z}$-module de type fini) que l'on appelle *réseau* de la dentelle.

Un groupe qui agit sur une dentelle, agit par automorphisme sur son réseau même s'il ne fixe pas le corps de base.

Résultats principaux.

Nous montrons le théorème (3.2.0.1) :

(0.0.0.6) Théorème. — *Soit k un corps ultramétrique complet, soit X un espace k-analytique, soit L une extension galoisienne finie et modérément ramifiée de k et soit $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$ un polyrayon. Si X_L est un L-polydisque fermé de L-type $\mathbf{r}$ sur lequel l'action de* $\mathrm{Gal}(L/k)$ *est résiduellement affine alors il existe*

$$\mathbf{s} \in \tau_{k \to L}^{-1}(\mathbf{r})$$

tel que X soit un k-polydisque fermé de k-type $\mathbf{s}$

Nous n'expliciterons pas l'hypothèse « l'action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ est résiduellement affine » dans cette introduction ; notons simplement que :

1. Un mot sur le choix de *dentelle* (eng. *lace*), comme l'objet est élémentaire nous souhaitions un mot simple et les autres candidats considérés posent différents problèmes, par exemple : on a remarqué que les dentelles sont une classe plus large que les parties définies par U un produit d'intervalles auxquels nous voulons réserver *polycouronne* ; *polyèdre* colle bien quand U est un polytope mais n'est pas très satisfaisant quand U est ouvert ; l'adjectif *cellulaire* est déjà utilisé en topologie, etc.

On peut parler de *polydentelles* (eng. *polylace*), mais en dimension un les dentelles sont exactement les couronnes, et il semble que le couple couronne/dentelle, plus expressif que dentelle/polydentelle, suffit à indiquer si l'on se restreint à la dimension un ou non : c'est le choix que nous avons fait ici.

- dans les cas traités par Antoine Ducros (les polydisques ouverts [Duc13, thm. 3.5]) et Tobias Schmidt (les disques fermés [Sch15, thm. 2.22]) elle est vérifiée ;
- savoir si elle est en général toujours vérifiée est une question liée à des problèmes compliqués de descriptions des automorphismes de l'espace affine (pour un exposé complet [Kra95]).

Nous arrivons à la vérifier en dimension deux ce qui nous permet de déduire le théorème (3.3.0.1) :

(0.0.0.7) Théorème. — *Soit k un corps ultramétrique complet, soit X un espace k-analytique, soit L une extension galoisienne finie modérément ramifiée de k et soit $(r,s) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$ un polyrayon. Si X_L est un L-bidisque de L-type $(r,s) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$ alors il existe*

$$(r',s') \in \tau_{k\to L}^{-1}(r,s).$$

tel que X soit un k-bidisque de k-type (r',s').

(0.0.0.8) Remarque. — La réciproque est vraie en toute dimension et pour toute extension L de k.

Si X est un k-polydisque fermé de k-type $\mathbf{r}$, alors X_L est un L-polydisque de L-type $\mathbf{r}$ (sur lequel l'action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ est résiduellement affine quand l'extension est galoisienne).

Nous montrons aussi le théorème (3.4.0.1)

(0.0.0.9) Théorème. — *Soit k un corps ultramétrique complet, soit X un espace k-analytique et soit L une extension galoisienne finie modérément ramifiée de k. Si X_L est une L-dentelle de type $U \subset (\mathbb{R}_+^\times)^n$ telle que l'action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ est triviale sur le réseau de X_L alors il existe $\mathbf{r} \in |L^\times|^n$ tel que X soit une k-dentelle de squelette*

$$\mathbf{r}.U = \{(r_1s_1,\dots,r_ns_n)\,,\, \mathbf{s} \in U\}.$$

(0.0.0.10) Remarque. — La réciproque est vraie en toute dimension et pour toute extension L de k.

Soit X une k-dentelle de squelette U, alors X_L est une L-dentelle de squelette U. Notons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}_L$) l'algèbre des fonctions analytiques sur X (resp. X_L). L'injection naturelle

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}_L$$

induit un isomorphisme entre les réseaux

$$\mathcal{A}^\times/k^\times(1+\mathcal{A}^{\circ\circ}) \to \mathcal{A}_L^\times/L^\times(1+\mathcal{A}_L^{\circ\circ}).$$

Donc le groupe $\mathrm{Gal}(L/k)$ agit trivialement sur le réseau de X_L.

En dimension 1, donc sur les couronnes, on appelle par analogie orientation le choix d'une base du réseau.

Voici énoncés les trois résultats principaux de cette thèse[2] que nous prouverons chapitre 3.

Disons maintenant un mot sur les preuves.

Réduction graduée.

Nous utiliserons de manière fondamentale la théorie introduite par Michael Temkin dans [Tem04] qui consiste à étudier une algèbre normée par le biais de sa réduction *graduée*. La motivation est la suivante. La réduction usuelle $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ d'une algèbre *strictement affinoïde* $\mathcal{A}$, définie comme le quotient de la sous-algèbre $\mathcal{A}_1^\circ = \{f \in \mathcal{A}\,,\, ||f||_\infty \leq 1\}$ par l'idéal $\mathcal{A}_1^{\circ\circ} = \{f \in \mathcal{A}\,,\, ||f||_\infty < 1\}$, code bien les propriétés de l'algèbre. Mais la réduction usuelle d'une algèbre affinoïde non triviale est insuffisante, par exemple si $r \in \mathbb{R}_+^\times \setminus \sqrt{|k^\times|}$ et $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions analytiques sur un k-disque fermé de rayon 1 alors $\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \widetilde{k}_1$. Temkin s'est rendu compte que c'était une algèbre résiduelle $\mathbb{R}_+^\times$-graduée dont $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ est la partie de degré 1 qui avait les bonne propriétés.

Sur les polydisques fermés nous considérerons l'algèbre résiduelle associée à la norme spectrale. Nous verrons que sur les dentelles, pour nos besoins, il ne suffit pas de considérer l'algèbre résiduelle graduée obtenue en munissant l'algèbre des fonctions analytiques de la norme spectrale. Nous associerons aux dentelles une algèbre résiduelle graduée à *chaque point* de leur squelette analytique (l'ensemble des points maximaux pour la relation $x \leq y$ si $|f(x)| \leq |f(y)|$ pour toute fonction analytique f, qui, pour une dentelle de squelette U est canoniquement homéomorphe à U).

Antoine Ducros a remarqué dans [Duc13] que les extensions modérément ramifiées de k se comportent, du point de vue de la théorie graduée exactement comme les extensions non ramifiées du point de vue de la réduction classique. Essentiellement nous arrivons à ramener l'étude des formes modérément ramifiées de polydisques et de dentelles à l'étude de la cohomologie de groupes d'automorphismes d'objets de l'algèbre graduée, c'est-à-dire à l'étude des formes galoisiennes d'objets gradués.

Algèbre graduée.

Nous suivons l'approche de l'algèbre graduée adoptée par Antoine Ducros dans [Duc] qui diffère de celle de Temkin pour les raisons qu'il donne page 113 : «

2. La preuve du théorème des polydisques fermés et des dentelles (c'est-à-dire sans le résultat sur les bidisques) a fait l'objet d'un article de l'auteur intitulé comme cette thèse «Formes modérément ramifiées de polydisques fermés et de dentelles» qui a été accepté pour publication dans les *Annales de l'Institut Fourier*.

[Temkin] considère un anneau gradué comme un anneau A muni d'une décomposition en somme directe $A = \oplus A_r$, où r parcourt un groupe abélien. Mais comme en pratique il n'arrive *jamais*, pour le type de problème que nous aurons à considérer ici, que l'on ait à additionner deux éléments (non nuls) appartenant à des sommandes distincts, il nous a semblé plus simple de remplacer les sommes directes par des *réunions disjointes* : cela ne change sur le fond strictement rien aux énoncés ni à leurs preuves, et permet d'éviter les répétitions fastidieuses de l'adjectif "homogène", indispensables lorsqu'on s'en tient à la définition traditionnelle. De ce fait, les objets qui nous tiendront lieu d'anneaux gradués ne sont pas des anneaux (l'addition n'y est pas partout définie). Nous avons donc modifiée la terminologie. »

Ainsi on appelle *annéloïde* les objets qui tiennent lieu d'anneau, et *corpoïde* un annéloïde dont les éléments non nuls sont inversibles. Nous avons choisi d'appeler dans ce travail *grade* plutôt que *degré* l'indice du sommande auquel appartient un élément d'un objet gradué.

(0.0.0.11) Exemple. — Reprenons notre corps ultramétrique k et notons pour tout $r \in \mathbb{R}_+^\times$:

- $k_{\leq r} := \{a \in k\,,\ |a| \leq r\}$;
- $k_{<r} := \{a \in k\,,\ |a| < r\}$;
- $\widetilde{k}_r := k_{\leq r}/k_{<r}$.

La réduction (graduée) $\widetilde{k} := \coprod_r \widetilde{k}_r$ de k est un *corpoïde*. Détaillons-en la structure : on voit que l'addition sur $k_{\leq r}$ induit une loi interne $+$ sur $\widetilde{k}_r$ faisant de ce dernier un groupe abélien, d'élément neutre noté 0_r. La multiplication sur k induit sur $\widetilde{k}$ une loi interne commutative et associative $\cdot$, que l'on appelle encore multiplication, induisant pour tout $(r,s) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$ une application bilinéaire $\widetilde{k}_r \times \widetilde{k}_s \to \widetilde{k}_{rs}$. L'image de 1 dans $\widetilde{k}_1$ est un élément neutre pour la multiplication sur $\widetilde{k}$ et les éléments inversibles pour la multiplication forment un groupe que l'on note $k^\times$. On vérifie que $\widetilde{k}^\times = \widetilde{k} \setminus \coprod_r \{0_r\}$, i.e. que les éléments non nuls forment un groupe pour la multiplication.

On peut dans ce cadre transcrire la plupart des résultats classiques de l'algèbre commutative et de la théorie de Galois. Nous renvoyons à [Duc, Chapitre 2] pour le traitement le plus complet (pour un traitement plus succin dans le langage de Temkin, on peut se référer à [Duc13] ou [Sch15]). Nous avons continué ce travail de traduction sur deux points : l'algèbre linéaire et les automorphismes du plan.

Soit $K = \coprod_{r \in \mathbb{R}_+^\times} K_r$ un corpoïde. On note $\mathrm{grad}(K^\times)$ le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^\times$ formé des grades r pour lesquels $K_r \neq \{0_r\}$.

Algèbre linéaire graduée. On a une notion naturelle d'espace vectoriel sur les corpoïdes et on peut définir, ce que nous proposons section 1.3, les objets nécessaires pour faire de l'algèbre linéaire (graduée) en dimension finie.

Cette algèbre linéaire a une caractéristique surprenante : les classes d'isomorphie des k-espaces vectoriels (classiques) de dimension finie sont déterminées par la dimension, i.e. sont en bijection avec $\mathbb{N}$, ce n'est en toute généralité pas vrai dans le cas gradué.

(0.0.0.12) Définition. — Deux polyrayons $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+^\times)^m$ et $\mathbf{s} \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$ sont *K-équivalents* si $m = n$ et s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$(s_i r_{\sigma(i)}^{(-1)})_i \in \mathrm{grad}(K^\times)^n.$$

Cette relation sur les polyrayons est une relation d'équivalence. On appelle *K-type* une classe d'équivalence de polyrayons, et on note $\mathcal{T}(K)$ l'ensemble des K-types ; on confondra dans l'écriture un polyrayon et son K-type.

La formation de $\mathcal{T}(K)$ est fonctorielle en K et si L est une extension de K l'application naturelle

$$\tau_{K\to L} : \mathcal{T}(K) \to \mathcal{T}(L)$$

est surjective.

On montre que les classes d'isomorphie des K-espaces vectoriels de dimension finie sont en bijection avec $\mathcal{T}(K)$. En effet on associe canoniquement à un polyrayon $\mathbf{r}$ un K-espace vectoriel que l'on note $K(\mathbf{r})$. Si $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont deux polyrayons on montre que $K(\mathbf{r})$ et $K(\mathbf{s})$ sont isomorphes si et seulement si $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont K-équivalents. Enfin on montre que pour tout K-espace vectoriel V de dimension finie, il existe un polyrayon $\mathbf{r}$ tel que V soit isomorphe à $K(\mathbf{r})$.

(0.0.0.13) Remarque. — Évidemment $|k^\times| = \mathrm{grad}(\widetilde{k}^\times)$ donc deux polyrayons sont k-équivalents si et seulement s'ils sont $\widetilde{k}$-équivalents, c'est-à-dire que $\mathcal{T}(k) = \mathcal{T}(\widetilde{k})$.

Il y a ainsi en dimension finie, *via* l'égalité $\mathcal{T}(k) = \mathcal{T}(\widetilde{k})$, une bijection remarquable entre les classes d'isomorphie des k-polydisques fermés et les classes d'isomorphie des $\widetilde{k}$-espaces vectoriels.

On note $\mathrm{GL}(K, \mathbf{r})$ le groupe des automorphismes K-linéaires de $K(\mathbf{r})$ et nous montrons l'analogue gradué du théorème 90 de Hilbert, notre théorème (1.5.1.3) :

(0.0.0.14) Théorème. — *Soit K un corpoïde, soit L une extension galoisienne de K et $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$ un polyrayon. Alors*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}(L, \mathbf{r})) = \tau_{K\to L}^{-1}(\mathbf{r}).$$

En fait, chemin faisant, nous obtenons un peu plus, dont une description utile des cocycles ; nous renvoyons à l'énoncé dans le corps du texte.

Automorphismes du plan gradué. Soit $(r,s) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$ on note :

$$K[r^{-1}x, s^{-1}y] := \coprod_{R \in \mathbb{R}_+^\times} \{ \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x^i y^j \, , \, a_{i,j} \in K_{Rr^{-i}s^{-j}} \}$$

l'*annéloïde* des polynômes en deux variables (que l'on pourrait appeler par analogie de birayon (r,s)). Cet annéloïde nous intéressera tout particulièrement car l'algèbre résiduelle des fonctions analytiques sur un k-bidisque fermé de type (r,s) est isomorphe à $\widetilde{k}[r^{-1}x, s^{-1}y]$.

Le groupe des automorphismes du plan classique $k[x,y]$ est déjà bien connu. Ainsi :

(0.0.0.15) Théorème. — *Si l'on note :*

- $\mathrm{Aff} = \{(ax+by+c, a'x+b'y+c') \, , \, ab'-ba' \neq 0\}$ *le sous-groupe des automorphismes affines et*
- $\mathrm{Jon} = \{(ax+c, by+P(x)) \, , \, a,b \in k^\times, P(x) \in k[x]\}$ *le sous-groupe des automorphismes de Jonquières.*

Alors l'application naturelle

$$\mathrm{Aff} *_{\mathrm{Aff} \cap \mathrm{Jon}} \mathrm{Jon} \to \mathrm{Aut}(k[x,y])$$

est un isomorphisme.

L'histoire du résultat est compliquée. Tatsuji Kambayashi, qui en attribue la paternité à Igor Shafarevich, le déduit dans [Kam75] du théorème de Wouter Van der Kulk [Van53] sur les automorphismes polynomiaux de k^2 généralisant le théorème de Heinrich Jung [Jun42] sur les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$.

Nous en donnerons théorème (1.4.0.1) un analogue gradué exact en traduisant en termes gradués une preuve de Warren Dicks [Dic83] elle-même basée sur la thèse de Leonid Makar-Limanov [Mak70] (qui d'après Dicks fait référence à Shafarevich mais ne semble pas au moment où il écrit connaître les travaux de Van der Kulk).

Avec cette description du groupe des automorphismes du plan et la connaissance du premier ensemble pointé de cohomologie des groupes linéaires, nous adaptons les preuves de [Kam75] et montrons le théorème (1.5.3.1) :

(0.0.0.16) Théorème. — *Soit L une extension galoisienne finie de K et soit $(r,s) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$, alors la flèche naturelle*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}(L,(r,s))) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{Aut}(L[r^{-1}x, s^{-1}y]))$$

est un isomorphisme d'ensembles pointés.

En particulier

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{Aut}(L[r^{-1}x, s^{-1}y])) = \tau_{K\to L}^{-1}(r,s).$$

Stratégie de preuve des théorèmes principaux.

Nos preuves suivent essentiellement la stratégie de [Duc13]. Esquissons-la pour les polydisques fermés, donc soit X un espace k-analytique, soit L une extension galoisienne finie et modérément ramifiée de k (auquel cas $\widetilde{L}$ est une extension galoisienne finie de $\widetilde{k}$ et $\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k}) = \mathrm{Gal}(L/k)$). On suppose que X_L est un L-polydisque fermé sur lequel l'action de Galois est résiduellement affine et nous allons montrer que X est un k-polydisque fermé.

1. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X et $\mathcal{B}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X_L. L'application naturelle

$$\mathcal{A} \otimes_k L \to \mathcal{B}$$

   est un isomorphisme.

2. En utilisant notre théorème de Hilbert gradué, on montre qu'on peut choisir un système de fonctions coordonnées $(T_1, \ldots, T_n)$ sur X_L tel que les $\widetilde{T}_i$ soient Galois invariant.

3. L'hypothèse de ramification modérée nous donne que l'application naturelle

$$\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L} \to \widetilde{\mathcal{B}}$$

   est un isomorphisme. En particulier les $\widetilde{T}_i$ appartiennent à $(\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L})^{\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})}$ donc à $\widetilde{\mathcal{A}}$.

4. On note $(f_1, \ldots, f_n)$ une préimage de $(\widetilde{T_1}, \ldots, \widetilde{T_n})$ dans $\mathcal{A}$ (qui n'a aucune raison d'être $(T_1, \ldots, T_n)$).

5. On montre que les $(f_1, \ldots, f_n)$ forment un système de fonctions coordonnées sur X_L (avoir pour réduction $(\widetilde{T_1}, \ldots, \widetilde{T_n})$ est une condition suffisante).

6. Si l'on note $s_i = ||f_i||_\infty$, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ induit un morphisme $X \to \mathbb{D}_{\mathbf{s}}$, qui d'après le point précédent devient un isomorphisme $X_L \to \mathbb{D}_{\mathbf{s},L}$ après extension des scalaires.

7. Par descente la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ induit un isomorphisme $X \to \mathbb{D}_{\mathbf{r}}$.

Dans le cas des polydisques ouverts traité par Antoine Ducros, l'algèbre résiduelle $\widetilde{\mathcal{B}}$ est locale ce qui lui permet d'utiliser des arguments d'algèbre commutative

qui ne sont toujours applicables pour les polydisques fermé. Notre théorème de Hilbert 90 sert en 2, exactement comme dans la preuve de Tobias Schmidt, à remplacer cet argument de localité.

Pour les dentelles la logique de la preuve est rigoureusement la même. Une difficulté apparaît dans la caractérisation essentiellement locale des fonctions coordonnées sur une dentelles que nous arrivons à résoudre.

Plan de la thèse.

Notre *premier* chapitre traite exclusivement d'algèbre graduée. Les deux premières sections rassemblent pour la commodité du lecteur des définitions et notations de [Duc]. La troisième section traite de l'algèbre linéaire graduée. La quatrième section est dédiée à la description du groupe des automorphismes du plan gradué. La cinquième contient différentes variantes du théorème 90 de Hilbert.

Notre *deuxième* chapitre est dédié aux polydisques fermés et aux dentelles. Les deux premières sections donnent toutes les définitions et propriétés générales qui nous seront utiles. La troisième section reprend les deux premières en dimension 1 pour en illustrer et motiver certains aspects. La dernière section donne des exemples de formes non triviales de dentelles qui montrent que les hypothèses que nous requerrons sont nécessaires.

Enfin, notre *troisième* et dernier chapitre réunit les preuves des trois théorèmes principaux.

Une autre approche.

Lorenzo Fantini et Daniele Turchetti ont développé dans [FT17] des techniques de descente galoisienne pour les espaces analytiques non archimédiens qui admettent un schéma formel spécial affine comme modèle au-dessus d'un anneau de valuation discrète complet. Avec ces techniques ils démontrent un cas particulier – sur un corps discrètement valué k, en dimension un, pour les couronnes de rayons distincts dans $\sqrt{|k^\times|}$ et des hypothèses plus strictes sur l'extension – de notre résultat sur les dentelles et retrouvent avec les mêmes hypothèses le résultat sur les disques (ouverts et fermés). Leur méthode complètement différente ne fait pas intervenir la réduction graduée et ouvre des pistes intéressantes quand la notre reste encore muette : ils obtiennent, par exemple, une description des formes de couronnes après extension quadratique sur le réseau desquelles l'action de Galois n'est pas triviale.

Pistes.

Les questions considérées dans cette thèse ont trois prolongements naturels :

Formes de dentelles modérément ramifiées avec action non triviale sur le réseau. On peut se demander quelles sont les formes de dentelles sans hypothèse sur l'action

sur le réseau. Le résultat en dimension 1 de Fantini et de Turchetti sus-mentionné est encourageant.

Formes sauvagement ramifiées. Tobias Schimdt a décrit dans [Sch15] une classe de formes sauvagement ramifiées du disque fermé. La question semble encore très difficile mais son étude apportera sans doute des informations intéressantes sur le corps de base.

L'étude de l'algèbre graduée. La non trivialité du premier ensemble pointé de cohomologie du groupe linéaire a des conséquences intéressantes. Par exemple, puisque l'on a évoqué dans les motivations les variétés de Severi-Brauer on pourrait se demander ce qu'est le groupe de Brauer d'un corpoïde K. Remarquons que l'on peut définir des groupes linéaires projectifs et obtenir une suite exacte :

$$1 \to \widetilde{K}_1^\times \to \mathrm{GL}(K, \mathbf{r}) \to \mathrm{PGL}(K, \mathbf{r}) \to 1$$

Par analogie le groupe de Brauer pourrait correspondre à $\mathrm{H}^2(K_1^\times)$ mais la flèche $\mathrm{H}^1(\mathrm{PGL}(K, \mathbf{r})) \to \mathrm{H}^2(K_1^\times)$ n'est pas forcément injective puisque $\mathrm{H}^1(\mathrm{GL}(K, \mathbf{r}))$ n'est *a priori* ni trivial ni isomorphe à $\mathrm{H}^1(K_1^\times)$.

Chapitre 1

Algèbre graduée

On fixe un groupe abélien divisible Γ noté multiplicativement ; en pratique Γ sera égal à $\mathbb{R}_+^\times$.

(1.0.0.1) Remarque. — On retrouverait l'algèbre commutative classique en prenant $\Gamma = 1$.

1.1 Premières définitions

Cette section et la suivante réunissent des définitions de [Duc, Chapitre 2].

(1.1.0.1) Définition. — Un *annéloïde* est un ensemble A muni d'une décomposition $A = \coprod_{r\in\Gamma} A_r$, que l'on appelle graduation et des données supplémentaires suivantes :

- pour tout $r \in \Gamma$, une loi interne $+$ sur A_r faisant de ce dernier un groupe abélien, d'élément neutre noté 0_r ;
- une loi interne commutative et associative $\cdot$ induisant pour tout $(r, s) \in \Gamma^2$ une application bilinéaire $A_r \times A_s \to A_{rs}$;
- un élément $1 \in A_1$ tel que pour tout $a \in A$, $1 \cdot a = a$.

(1.1.0.2) Remarque. — Quand la valeur de r est définie sans ambiguïté par le contexte, on utilisera volontiers l'écriture 0 au lieu de 0_r.

(1.1.0.3) Définition. — Soit A un annéloïde.

Si $a \in A$ on appelle *grade* de a l'unique élément r de Γ tel que a appartienne à A_r. On le notera $\mathrm{grad}(a)$. [1]

On note $A^{\neq 0}$ l'ensemble des éléments non nuls de A c'est-à-dire la réunion disjointe des $A_r \setminus \{0_r\}$.

1. Nous préférons le terme « grade » à « degré » pour désigner l'indice du sommande auquel appartient un élément, en effet nous aurons à travailler avec des polynômes gradués et nous voulons réserver « degré » pour le degré polynomial au sens classique.

Un élément a de A est dit *inversible* s'il possède un inverse pour la multiplication ; cet inverse est alors nécessairement unique, et sera en général noté a^{-1}. On désigne par $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A ; il est stable sous la loi $\cdot$ qui en fait un groupe abélien.

Si B est un annéloïde, un *morphisme d'annéloïde* de A vers B est une application de A vers B qui

- préserve le grade,
- est telle que l'application induite $A_r \to B_r$ soit un morphisme de groupes additifs pour tout r,
- commute au produit,
- envoie 1 sur 1.

(1.1.0.4) Définition. — Soit A un annéloïde. Une *A-algèbre* est un annéloïde B muni d'un morphisme $A \to B$.

Un *idéal* de A est une partie I de A stable par multiplication par tous les éléments de A, et telle que $I \cap A_r$ soit pour tout r un sous-groupe de A_r.

On définit de façon évidente le quotient de A par un idéal. Il hérite d'une structure d'annéloïde.

(1.1.0.5) Définition. — Soit A un annéloïde. Si S est une partie multiplicative de A (*i.e.* S contient 1 et est stable par multiplication), la catégorie des A-algèbres dans lesquelles les éléments de A sont inversibles admet un objet initial, noté $S^{-1}A$. Pour tout $r \in \Gamma$, le sommande $(S^{-1}A)_r$ est constitué de fractions a/s avec $a \in A$, $s \in S$, et $\mathrm{grad}(a)/\mathrm{grad}(s) = r$. Si a/s et b/t sont deux telles fractions alors $(a/s) = (b/t)$ si et seulement s'il existe $\sigma \in S$ vérifiant l'égalité $\sigma(at - bs) = 0$.

(1.1.0.6) Définition. — Un annéloïde A est dit *intègre* s'il est non nul et si $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

Un *corpoïde* est un annéloïde non nul dans lequel tout élément non nul est inversible.

Un corpoïde est intègre ; si A est annéloïde intègre et si S désigne l'ensemble des éléments non nuls de A, le localisé $K := S^{-1}A$ est un corpoïde, appelé *corpoïde des fractions* de A, dont les éléments sont de la forme a/b, où a et b sont deux éléments de A, et où b est non nul.

(1.1.0.7) Remarque. — Les corpoïdes que nous considérerons dans les chapitres suivants seront obtenus comme réductions graduées de corps ultramétriques telles que définies ci-dessous.

(1.1.0.8) Définition. — Soit $(K, |.|)$ un corps ultramétrique (i.e. $|.| : K \to \mathbb{R}_+$ est une valeur absolue ultramétrique). On note pour tout $r \in \mathbb{R}_+^\times$:

- $K_{\leq r} := \{x \in K\,;\, |x| \leq r\}$,
- $K_{<r} := \{x \in K\,;\, |x| < r\}$ et
- $\widetilde{K}_r := K_{\leq r}/K_{<r}$.

La réduction (graduée) de K est le corpoïde (ici $\Gamma = \mathbb{R}_+^\times$)

$$\widetilde{K} := \coprod_{r \in \mathbb{R}_+^\times} \widetilde{K}_r.$$

(1.1.0.9) Remarque. — Si $r \notin |K^\times|$, le sommande de grade r de $\widetilde{K}$ est réduit à $\{0_r\}$, ou encore pour l'écrire autrement si $a \in \widetilde{K}$ et $\mathrm{grad}(a) \notin |K^\times|$ alors $a = 0$.

1.2 Algèbre commutative et théorie de Galois

(1.2.0.1) Définition. — Soit A un annéloïde et soit $\mathbf{r} = (r_i)$ une famille d'éléments de Γ. Posons $\mathbf{T} = (T_i)$. On note $A[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]$ l'annéloïde défini comme suit : pour tout s appartenant à Γ, le sommande $A[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]_s$ est constitué des sommes finies (formelles) $\sum a_I \mathbf{T}^I$ avec $a_I \in A_{s\mathbf{r}^I}$ pour tout I ; les opérations sont définies de façon évidente.

On définit de même l'annéloïde $A[[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]]$ constitué des sommes infinies. [2]

(1.2.0.2) Définition. — Soit k un corpoïde et soit $\mathbf{r}$ une famille d'éléments de Γ. La k-algèbre $k[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]$ est intègre, et son corpoïde des fractions sera noté $k(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T})$.

Soit r un élément de Γ. La k-algèbre $k[[r^{-1}T]]$ est intègre et son corpoïde des fractions sera noté $k((r^{-1}T))$.

(1.2.0.3) Définition. — Soit k un corpoïde et soit A une k-algèbre. Soit (x_i) une famille d'éléments de A. Pour tout i, on note r_i le grade de x_i.

On dit que les x_i sont *algébriquement indépendants* sur k si $P(x_i) \neq 0$ pour tout élément non nul P de $k[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]$; notons que la famille vide est algébriquement indépendante sur k si et seulement si A est non nulle.

Si x est un élément de F on dira qu'il est *transcendant* sur k si la famille singleton $\{x\}$ est algébriquement indépendante ; l'élément x est transcendant si et seulement s'il n'est pas algébrique. Il est algébrique si et seulement si $k[x]$ est de dimension finie (comme k-espace vectoriel).

(1.2.0.4) Définition. — Soit $k \hookrightarrow F$ une extension de corpoïdes.

Un élément x de F est algébrique sur k si et seulement si $k[x]$ est un corpoïde. L'ensemble des éléments de F algébriques sur k est un sous-corpoïde de F. On dit que F est une *extension algébrique de* k si tous les éléments de F sont algébriques sur K ; notons que si c'est le cas $\mathrm{grad}(F^\times)/\mathrm{grad}(k^\times)$ est de torsion.

2. Potentiellement infinies du moins, par exemple sur un corpoïde k si $\mathbf{r}$ est une famille libre dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\Gamma/|k^\times|)$ (appelée *polyrayon k-libre* dans [Duc]) alors $k[[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]] = k[\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}]$.

Si F est une extension algébrique de k, on notera $\mathrm{Gal}(F/k)$ le groupe des k-automorphismes de F.

Soit x un élément de F algébrique sur k et soit r son grade. On appelle *polynôme minimal* de x sur K l'unique générateur unitaire de l'annulateur de x dans $k[r^{-1}T]$. Il est irréductible ; son degré est simplement appelé le *degré de x sur k* et il coïncide avec la dimension du k-espace vectoriel $k[x]$. [3]

Une *base de transcendance* de F sur k est une famille maximale d'éléments de F algébriquement indépendants sur K. Toutes les bases de transcendances de F sur k ont le même cardinal, appelé le *degré de transcendance* de F sur k.

(1.2.0.5) Définition. — Soit k un corpoïde. Une *extension de k* est une k-algèbre qui est un corpoïde, c'est-à-dire encore un corpoïde L muni d'un plongement $k \hookrightarrow L$.

(1.2.0.6) Définition. — Si $r \in \Gamma$, un élément non nul P de $k[r^{-1}T]$ est dit *séparable* s'il est premier à son polynôme dérivé P' (qui est de grade sr^{-1} si P est de grade r). Si P est irréductible, il est séparable si et seulement si $P' \neq 0$; en général, P est séparable si et seulement s'il n'a que des facteurs irréductibles simples et eux-mêmes séparables.

Soit L une extension algébrique de k et soit $x \in L$. On dit que x est *séparable* sur k si son polynôme minimal est séparable.

On dit que L est *séparable* sur K si tous ses éléments sont séparables sur k.

(1.2.0.7) Définition. — Soit k un corpoïde et soit L une extension de k. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. il existe un groupe fini G d'automorphismes de L tel que $k = L^G$;
2. l'extension L/k est finie, séparable, et normale (ce qui signifie que si x est un élément de L, son polynôme minimal est scindé dans L) ;
3. il existe $r \in \Gamma$ et un élément non nul et séparable P de $k[r^{-1}T]$ tel que L soit un corpoïde de décomposition de P sur k.

De plus si 1 est vraie alors $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ et $[L : k] = \mathrm{card}(G)$ et si 2 ou 3 est vraie alors $k = L^{\mathrm{Gal}(L/k)}$.

Lorsqu'une extension L de k satisfait ces conditions équivalentes, on dit qu'elle est *finie galoisienne*.

(1.2.0.8) Remarque. — Soit L une extension algébrique de k et soit G le groupe $\mathrm{Gal}(L/k)$. Soit $x \in L$. Son orbite sous G est constituée d'éléments annulés par le

3. Avec la terminologie habituellement employée x a un *degré* (ce que nous appelons un *grade*) qui n'a rien a voir avec le *degré* de x sur k qui est donné par le *degré* monomial de son polynôme minimal. Or il est important de préciser que l'on parle du degré *monomial* du polynôme minimal car, en tant qu'élément de l'annéloïde $k[r^{-1}T]$ il a aussi un *degré* (un grade donc). On voit les risques de confusion.

polynôme minimal de x, et elle est donc finie ; il s'ensuit que L est réunion de ses sous-extensions finies stables sous G, puis que G est isomorphe à la limite projective des $\mathrm{Gal}(F/k)$ où F parcourt l'ensemble des sous-extensions finies de k. C'est donc un groupe profini.

(1.2.0.9) Définition. — Soit L une extension algébrique de k, on dit que L est *galoisienne* si elle est séparable et normale.

1.3 Algèbre linéaire

Soit k un corpoïde.

1.3.1 Espaces vectoriels

(1.3.1.1) Définition. — Un *k-espace vectoriel* est un ensemble V muni d'une graduation $V = \coprod_{r\in\Gamma} V_r$ et des données supplémentaires suivantes :

- pour tout $r \in \Gamma$, une loi interne $+$ sur V_r faisant de ce dernier un groupe abélien d'élément neutre noté 0_r ;
- une loi externe $k \times V \to V$ induisant pour tout $(r, s) \in \Gamma^2$ une application bilinéaire $k_r \times V_s \to V_{rs}$ vérifiant, pour tout $(\lambda, \mu, v), \in k \times k \times V$, les relations $1.v = v$ et $(\lambda\mu).v = \lambda.(\mu.v)$.

(1.3.1.2) Remarque. — Pour tout $r \in \Gamma$, le groupe abélien V_r hérite d'une structure de k_1-espace vectoriel au sens classique.

(1.3.1.3) Définition. — Soit V un k-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel F est une partie non vide de V telle que, si l'on note $F_r := F \cap V_r$,

- pour tout $r \in \Gamma$, $(F_r, +)$ est un sous-groupe additif de $(V_r, +)$,
- pour tout $\lambda \in k$, $v \in F$, $\lambda.v \in F$.

Muni de la graduation et des lois induites F est un k-espace vectoriel.

(1.3.1.4) Définition. — Si U et V sont deux k-espaces vectoriels, une *application k-linéaire de U vers V* est une application f de U vers V telle que pour tout $r \in \Gamma$:

- $f(U_r) \subset V_r$;
- pour tout $u, v \in U_r$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$;
- et pour tout u dans U et tout $\lambda \in k$, $f(\lambda.u) = \lambda.f(u)$.

(1.3.1.5) Remarque. — Pour tout $r \in \Gamma$, la restriction $f_{|U_r} : U_r \to V_r$ est une application k_1-linéaire.

(1.3.1.6) Définition. — Soit U et V deux k-espaces vectoriels, et $f : U \to V$ une application k-linéaire, on appelera *noyau* de f l'ensemble, que l'on note encore $\ker(f)$, défini par

$$\ker(f) = \coprod_{r\in\Gamma} \ker(f_{|U_r}).$$

L'ensemble $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de U et est donc naturellement muni d'une structure de k-espace vectoriel.

(1.3.1.7) Définition. — Soit V un k-espace vectoriel, soit $v_1, \ldots, v_n$ une famille de vecteurs de grades $\rho_1, \ldots, \rho_n$, on dit que la famille $v_1, \ldots, v_n$ est *libre* si pour tout $R \in \Gamma$ et toute famille d'éléments $\lambda_i \in k_{R\rho_i^{-1}}$,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$$

équivaut à $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

On dit que la famille est *génératrice* si pour tout vecteur x de V, dont on note R le grade, il existe une famille d'éléments $\lambda_i \in k_{R\rho_i^{-1}}$ telle que

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

On dit que la famille est une *base* si elle est libre et génératrice.

(1.3.1.8) Remarque. — On peut vérifier que le théorème de la dimension ainsi que le théorème de la base incomplète sont encore vrais, i.e. deux bases quelconques d'un même espace vectoriel ont même cardinal et tout espace vectoriel admet une base ; ceci nous permet de définir la *dimension* d'un k-espace vectoriel comme le cardinal commun à toutes ses bases.

(1.3.1.9) Définition. — Un *polyrayon* est une famille finie d'éléments de Γ.

(1.3.1.10) Définition. — Soit $\mathbf{r}$ un polyrayon, l'ensemble

$$\coprod_{r\in\Gamma} (\prod_i k_{rr_i})$$

a une structure naturelle de k-espace vectoriel. On le notera $k(\mathbf{r})$, et on *l'appellera k-espace vectoriel de polyrayon* $\mathbf{r}$.

(1.3.1.11) Remarque. — Le corpoïde k a une structure canonique de k-espace vectoriel respectant sa graduation, $k(1)$, le k-espace vectoriel de (poly)rayon 1. Quand le contexte rend évident qu'il s'agit de k-espaces vectoriels on écrit k pour $k(1)$.

(1.3.1.12) Remarque. — Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie, et (e_i) une base de V. Soit v un vecteur de grade R, il existe une famille (v_i) d'éléments de k telles que

$$v = \sum v_i e_i.$$

L'application k-linéaire qui à v associe (v_i) induit un isomorphisme k-linéaire entre V et

$$k((R^{-1}\mathrm{grad}(e_i))_i).$$

Tout k-espace vectoriel V admet une base, donc il existe un polyrayon $\mathbf{r}$ tel que V soit isomorphe à $k(\mathbf{r})$.

Ainsi les $k(\mathbf{r})$ sont des k-espaces vectoriels *canoniques* et jouent un rôle analogue à k^n dans la théorie classique. Nous donnerons dans ce qui suit des exemples de k-espaces vectoriels de même dimension non isomorphes. Évidemment quand $\Gamma = 1$, le polyrayon $\mathbf{r}$ est complètement déterminé par la dimension, étant une famille $(1, \ldots, 1)$ de cardinal égal à la dimension.

(1.3.1.13) Définition. — On a une notion évidente de produit tensoriel de k-espaces vectoriels. En effet il nous suffit prendre en compte la graduation dans les construction usuelles, par exemple : soient U et V deux k-espaces vectoriels, nous pouvons parler de l'espace vectoriel libre $F(U \times V)$ engendré par $U \times V$ sur k où le grade d'un couple (u, v) est défini comme le produit des grades des coordonnées. Et alors les vecteurs du produit tensoriel que nous noterons $U \otimes_k V$ sont les classes d'équivalences définis par les relations habituelles sur $F(A \times V)$:

- $\forall r \in \Gamma, u_1, u_2 \in U_r, v \in V$, $(u_1, v) + (u_2, v) \sim (u_1 + u_2, v)$;
- $\forall r \in \Gamma, u \in U, v_1, v_2 \in V_r$, $(u, v_1) + (u, v_2) \sim (u, v_1 + v_2)$;
- $\forall u \in U, v \in V, \lambda \in k$, $\lambda.(u, v) \sim (\lambda.u, v)$;
- $\forall u \in U, v \in V, \lambda \in k$, $\lambda.(u, v) \sim (u, \lambda.v)$.

Les opérations étant induites.

(1.3.1.14) Remarque. — Le produit tensoriel satisfait à la propriété universelle habituelle. Il existe une application k-bilinéaire $\varphi : U \times V \to U \otimes_k V$ telle que pour tout k-espace vectoriel W et toute application bilinéaire $f : U \times V \to W$ il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : U \otimes_k V \to W$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \varphi$.

1.3.2 Matrices

(1.3.2.1) Définition. — Soit $m, n \in \mathbb{N}^\times$, et soit $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \Gamma^n$ et $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \Gamma^m$, on note :

$$\mathrm{M}(k, \mathbf{s}, \mathbf{r}) := \left\{ (a_{ij})_{i=1..m, j=1..n} \mid a_{ij} \in k_{s_i r_j^{-1}} \right\}.$$

Cet ensemble de matrices est naturellement en bijection avec les applications k-linéaires de $k(\mathbf{r})$ dans $k(\mathbf{s})$. Pour les opérations matricielles habituelles,

- c'est un groupe additif ;
- pour tout $l \in \mathbb{N}^\times$, $\mathbf{s}' = (s'_1, \ldots, s'_l) \in \Gamma^l$ la multiplication à droite d'un élément de $\mathrm{M}(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ avec un élément de $\mathrm{M}(k, \mathbf{r}, \mathbf{s}')$ a un sens et définit un élément de $M(k, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ (modulo les bijections entre matrices et applications k-linéaires ces produits matriciels correspondent à la composition des endomorphismes) ;
- quand $m = n$, le déterminant (selon la formule usuelle) de telles matrices a un sens, c'est un élément de k de grade $R = \prod_{i=1..n} s_i r_i^{-1}$. Si le déterminant est non nul, la formule usuelle définit une matrice inverse qui appartient à $\mathrm{M}(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$. Enfin on note $\mathrm{GL}(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ le sous-ensemble de $M(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ des matrices de déterminant non nul.

(1.3.2.2) Remarque. — Insistons un moment sur le fait que $\mathrm{GL}(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ peut être vide, en effet, deux k-espaces vectoriels de même dimension ne sont pas forcément isomorphes. Par exemple munissons $\mathbb{Q}_3$ de la norme 3-adique usuelle et considérons sa réduction (graduée, définition (1.1.0.8)) $\widetilde{\mathbb{Q}_3}$.

Dans les $\widetilde{\mathbb{Q}_3}$-espaces vectoriels $\widetilde{\mathbb{Q}_3}(1)$ et $\widetilde{\mathbb{Q}_3}(2)$ on voit le vecteur 1 (c'est-à-dire $\widetilde{1}$) comme étant de grade respectivement 1 et $\frac{1}{2}$.

La seule application linéaire de $\widetilde{\mathbb{Q}_3}(1)$ dans $\widetilde{\mathbb{Q}_3}(2)$ est l'application « nulle de grade 2 » c'est-à-dire donnée par la multiplication par $\widetilde{0}_2$, ou encore, traduit dans les notations que nous venons d'adopter,

$$\mathrm{M}(\widetilde{\mathbb{Q}_3}, (2), (1)) = \{(\widetilde{0}_2)\} \text{ et } \mathrm{GL}(\widetilde{\mathbb{Q}_3}, (2), (1)) = \emptyset.$$

(1.3.2.3) Définition. — Soit Δ un sous-groupe de Γ.

Sur les polyrayons la relation $\mathbf{r} \sim_\Delta \mathbf{s}$ si et seulement s'il existe un entier n tel que $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \Gamma^n$ et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$(s_i r_{\sigma(i)}^{-1})_i \in \Delta^n$$

est une relation d'équivalence.

Deux polyrayons $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ sont Δ-*équivalents* si $\mathbf{r} \sim_\Delta \mathbf{s}$.

Un Δ-*type* est une classe de polyrayons Δ-équivalents.

On note $\mathcal{T}(\Delta)$ l'ensemble des Δ-types.

(1.3.2.4) Notation. — Pour alléger les notations on écrira :

- $\mathbf{r} \sim_k \mathbf{s}$ pour $\mathbf{r} \sim_{\mathrm{grad}(k^\times)} \mathbf{s}$;
- k-équivalents pour $\mathrm{grad}(k^\times)$-équivalents ;
- k-type pour $\mathrm{grad}(k^\times)$-type ;

- $\mathcal{T}(k)$ pour $\mathcal{T}(\mathrm{grad}(k^\times))$.

(1.3.2.5) Remarque. — La formation de $\mathcal{T}(k)$ est fonctorielle en k et si L est une extension de k la flèche naturelle $\mathcal{T}(k) \to \mathcal{T}(L)$ est surjective.

(1.3.2.6) Notation. — Soit L une extension de k, on note $\tau_{k\to L}$ la surjection naturelle $\mathcal{T}(k) \to \mathcal{T}(L)$.

(1.3.2.7) Remarque. — Les k-types de longueur 1 forment un groupe : $\Gamma/\mathrm{grad}(k^\times)$ et $\tau_{k\to L}$ induit un morphisme de groupe surjectif

$$\Gamma/\mathrm{grad}(k^\times) \to \Gamma/\mathrm{grad}(L^\times)$$

de noyau $\mathrm{grad}(L^\times)/\mathrm{grad}(k^\times)$.

(1.3.2.8) Proposition. — *Soit* $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \Gamma^n$, *alors* $\mathrm{GL}\,(k, \mathbf{s}, \mathbf{r}) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $\mathbf{r}$ *et* $\mathbf{s}$ *sont k-équivalents.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}\,(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$. Supposons qu'il n'existe pas de permutation satisfaisant à la définition de k-équivalence : pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il existe i tel que $s_i r_{\sigma(i)}^{-1} \notin \mathrm{grad}(k^\times)$. Comme

$$\mathrm{grad}(a_{i,\sigma(i)}) = s_i r_{\sigma(i)}^{-1}.$$

Il suit que $a_{i,\sigma(i)} = 0$. Ainsi, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\prod_i a_{i,\sigma(i)} = 0$ donc $\det(A) = 0$.

La condition est suffisante. Prenons une permutation σ satisfaisant à la définition de k-équivalence, alors pour tout i,

$$k^\times_{s_i r_{\sigma(i)}^{-1}} \neq \emptyset.$$

Choisissons pour tout i, un élément $a_i \in k^\times_{s_i r_{\sigma(i)}^{-1}}$. La matrice A définie par :

$$\forall i,\ a_{i,\sigma(i)} := a_i \text{ et } \forall j \neq i, a_{i,j} := 0_{s_i r_j^{-1}}$$

appartient à $\mathrm{M}\left(\widetilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r}\right)$ et

$$\det(A) = \pm \prod_i a_{i,\sigma(i)} \neq 0.$$

□

(1.3.2.9) Remarque. — Nous avions remarqué que les k-espaces vectoriels $k(\mathbf{r})$ jouaient le rôle de k-espaces vectoriels canoniques de dimension finie en ce que

tout k-espace vectoriel est isomorphe à un $k(\mathbf{r})$. Il suit de la proposition (1.3.2.8) ci-dessus, que $k(\mathbf{r})$ et $k(\mathbf{s})$ sont isomorphes si et seulement si $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont k-équivalents.

Donc les k-types indexent les classes d'isomorphie des k-espaces vectoriels de dimension finie et la généralisation graduée de l'énoncé classique « deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils sont de même dimension » est donc « deux k-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils sont de même k-type ».

(1.3.2.10) Définition. — Soit $\mathbf{r}$ un polyrayon. Un k-espace vectoriel est dit *de k-type* $\mathbf{r}$ (on confondra par abus de notation un polyrayon $\mathbf{r}$ et son k-type) s'il est isomorphe à $k(\mathbf{r})$.

Fixons une dernière notation.

(1.3.2.11) Définition. — Soit $\mathbf{r} \in \Gamma^n$, l'ensemble $\mathrm{M}(k, \mathbf{r}, \mathbf{r})$ est un *anneau* pour le produit défini plus haut ; il est isomorphe à l'anneau des endomorphismes k-linéaires de $k(\mathbf{r})$, on le notera

$$\mathrm{M}(k, \mathbf{r});$$

le sous-ensemble des matrices de déterminant non nul que l'on notera de manière transparente $\mathrm{GL}(k, \mathbf{r})$ est donc toujours non vide et forme un groupe multiplicatif.

(1.3.2.12) Remarque. — En dimension 1, pour tout $r, s \in \Gamma$,

- $\mathrm{M}(k, (s), (r)) = k_{sr^{-1}}$ et $\mathrm{GL}(k, (s), (r)) = k^{\times}_{sr^{-1}}$;
- $\mathrm{M}(k, (r)) = \mathrm{M}(k, (1)) = k_1$ et $\mathrm{GL}(k, (r)) = \mathrm{GL}(k, (1)) = k_1^{\times}$.

1.3.3 Indépendance linéaire des automorphismes

(1.3.3.1) Proposition (Indépendance linéaire des automorphismes de corpoïdes)**. —** *Soit k un corpoïde, soit $(\chi_i)_{i=1\ldots n}$ une famille de n automorphismes, deux à deux distincts, de k, soit $\rho \in \Gamma$ et soit $(a_i)_{i=1\ldots n}$ une famille d'éléments de k_ρ, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_n\chi_n = 0$;
- *pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = 0$.*

Démonstration. La graduation n'intervient pas vraiment. Nous allons procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\times}$. Si $n = 1$, cela revient à montrer qu'un automorphisme χ de k n'est pas nul, or $\chi(1) = 1 \neq 0$. Supposons $n \geq 2$, alors pour tout x, y éléments de k

$$a_1\chi_1(xy) + a_2\chi_2(xy) + \cdots + a_n\chi_n(xy) = 0,$$

soit

$$a_1\chi_1(x)\chi_1(y) + a_2\chi_2(x)\chi_2(y) + \cdots + a_n\chi_n(x)\chi_n(y) = 0$$

et donc pour tout x de k,

$$a_1\chi_1(x)\chi_1 + a_2\chi_2(x)\chi_2 + \cdots + a_n\chi_n(x)\chi_n = 0.$$

On a aussi pour tout x de k, en multipliant $a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_n\chi_n = 0$ par $\chi_1(x)$,

$$a_1\chi_1(x)\chi_1 + a_2\chi_1(x)\chi_2 + \cdots + a_n\chi_1(x)\chi_n = 0.$$

Par soustraction :

$$a_2\left(\chi_1(x) - \chi_2(x)\right)\chi_2 + \cdots + a_n\left(\chi_1(x) - \chi_n(x)\right)\chi_n = 0.$$

Cette somme comporte $n-1$ termes et comme $\chi_1 \neq \chi_n$ on peut choisir x de telle sorte que $\chi_1(x) \neq \chi_n(x)$. Par hypothèse de récurrence on obtient que $a_n = 0$, donc que

$$a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_{n-1}\chi_{n-1} = 0,$$

et, encore par hypothèse de récurrence, que $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. $\square$

1.4 Automorphismes du plan

On adapte ici la preuve dans le cas classique donnée en [Dic83].

Soit k un corpoïde. On fixe (r, s) un couple d'éléments de Γ.

On adopte la convention de noter un automorphisme de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ par la paire (p, q) où p (de grade r) est l'image de x et q (de grade s) est l'image de y.

On note

$$\mathrm{Aff} = \{A(x, y) + B \mid A \in \mathrm{GL}(L, (r, s)) \text{ et } B \in L(r, s)_1\}$$

le sous-groupe des automorphismes affines.

On note

$$\mathrm{Jon} = \{(\lambda_{1,1}x + \lambda_1, \lambda_{2,2}y + P(x)) \mid \lambda_{1,1}, \lambda_{2,2} \in k_1^\times, \lambda_1 \in k_r \text{ et } P(x) \in (k[r^{-1}x])_s\}$$

le sous-groupe des automorphismes de Jonquières.

On peut aussi facilement décrire l'intersection de ces deux sous-groupes :

$$\mathrm{Aff} \cap \mathrm{Jon} = \{(\lambda_{1,1}x + \lambda_1, \lambda_{2,1}x + \lambda_{2,2}y + \lambda_2) \mid \lambda_{1,1}, \lambda_{2,2} \in k_1^\times, \lambda_{2,1} \in k_{r^{-1}s}, \lambda_1 \in k_r, \lambda_2 \in k_s\}.$$

Tout l'objet de la section est de montrer :

(1.4.0.1) Théorème. — *L'application naturelle*

$$\mathrm{Aff} *_{\mathrm{Aff}\cap\mathrm{Jon}} \mathrm{Jon} \to \mathrm{Aut}(k[r^{-1}x, s^{-1}y])$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $(p_i)_{i\leq 0}$ une famille de polynômes de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ dont on note r_i les grades. On note

$$k.p_0 + k.p_1 + \dots$$

le k-sous-espace vectoriel de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ dont le sommande de degré ρ est

$$k_{\rho r_0^{-1}}.p_0 + k_{\rho r_1}.p_1 + \cdots = \{\mu_0.p_0 + \mu_1.p_1 + \dots \mid \mu_0 \in k_{\rho r_0^{-1}}, \mu_1 \in k_{\rho r_1^{-1}}, \dots\}.$$

Pour alléger les notations on préfèrera k à $k.1$.

Soit $\mathbb{G}$ le graphe orienté dont les sommets sont les k-sous-espaces vectoriels de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ et dont les arêtes sont les inclusions. Le groupe $\mathrm{Aut}(k[r^{-1}x, s^{-1}y])$ agit d'une manière naturelle sur $\mathbb{G}$. Soit T l'orbite de l'arête

$$k + k.x \to k + k.x + k.y$$

nous allons montrer que T est un arbre.

Un sommet de T est de la forme $k + k.p$ ou $k + k.p + k.q$ où (p, q) est un automorphisme. On définit

$$\begin{aligned} &\deg(k + k.p) := \deg(p) \text{ et} \\ &\deg(k + k.p + k.q) := \max(\deg(p), \deg(q)) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Où $\deg(p)$ désigne le degré usuel de p.

Considérons d'abord un sommet de la forme $k + k.p$. Il existe q de degré minimal tel que (p, q) soit un automorphisme. D'après la proposition (1.4.1.12) (que nous démontrons dans la sous-section qui suit cette preuve) :

- soit $\deg(q) < \deg(p)$,
- soit (p, q) est affine (et $\deg(p) = \deg(q) = 1$),
- soit il existe un automorphisme (p, q') avec $\deg(q') < \deg(q)$.

Donc, comme nous avons pris q de degré minimal, ou bien $\deg(q) < \deg(p)$, ou bien (p, q) est affine.

(1.4.0.2) Lemme. — *Tous les voisins de $k + k.p$ dans T sont de la forme*

$$k + k.p + k.(q + h(p))$$

avec $h \in (k[r^{-1}x])_s$.

Démonstration. Quitte à composer avec l'inverse de l'automorphisme (p, q) le problème est équivalent à montrer que si (x, z) est un automorphisme de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$, alors $z = ay + P$ avec $a \in k_1^\times$ et $P \in (k[r^{-1}x])_s$.

Notons $A = k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ et $B = k[r^{-1}x, s^{-1}z]$, évidemment A et B sont deux manières de décrire le même annéloïde. Écrivons z sur A et y sur B

$$z = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \text{ et } y = \sum_{m,n} b_{m,n} x^m z^n$$

Alors

$$z = \sum_{i,j} (a_{ij} x^i (\sum_{m,n} b_{m,n} x^m z^n))^j \Rightarrow 1 = \max_{a_{i,j} \neq 0}(j) * \max_{b_{m,n} \neq 0}(n) \Rightarrow 1 = \max_{a_{i,j} \neq 0}(j) = \max_{b_{m,n} \neq 0}(n)$$

autrement dit

$$z = y \sum_i a_{i,1} x^i + \sum_i a_{i,0} x^i \text{ et } y = z \sum_m b_{m,1} x^m + \sum_m b_{m,0} x^m$$

d'où

$$z = z(\sum_i a_{i,1} x^i)(\sum_m b_{m,1} x^m) + \text{ termes en } x$$

donc $a_{0,1} \neq 0$, $b_{0,1} \neq 0$ et, pour tout $i, m \geq 1$, $a_{i,1} = b_{m,1} = 0$, c'est-à-dire que

$$z = a_{1,0} y + \sum_i a_{i,0} x^i.$$

□

De ceci on déduit que le seul voisin de $k + k.p$ (de degré $\deg(p)$) qui soit de degré plus petit est $k + k.p + k.q$, tous les autres sont de strictement supérieur. En effet choisissons un voisin, et écrivons le $k + k.p + k.(q + h(p))$ comme dans le lemme (1.4.0.2), alors

- si $\deg(h) \leq 1$, on a l'égalité $k + k.p + k.q = k + k.p + k.(q + h)$ et

$$\deg(k + k.p + k.q) = \deg(p) - \frac{1}{2} < \deg(p)$$

- si $\deg(h) \geq 2$ alors $\deg(h(p)) \geq 2\deg(p)$ et

$$\deg(k + k.p + k.(q + h)) \geq 2\deg(p) - \frac{1}{2} > \deg(p).$$

Considérons un sommet de la forme $k + k.p + k.q$ avec $\deg(q) < \deg(p)$. Ses

voisins sont de la forme $k + k.(\alpha p + \beta q)$ avec $\alpha \in k_1$ et $\beta \in k_{rs^{-1}}$ non tous deux nuls. En effet ses voisins sont de la forme $k + k.P$ où

- (P, Q) est un automorphisme,
- $k + k.P + k.Q = k + k.p + k.q$ et, surtout,
- $k + k.P$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $k + k.p + k.q$, autrement dit $P \in (k + k.p + k.q)_r$ et P est non constant, c'est-à-dire que $P = a + \alpha p + \beta k$ avec α et β non tous deux nuls ;

donc $k + k.P = k + k.(\alpha p + \beta q)$. Le sommet $k + k.p + k.q$ a pour degré $\deg(p) - \frac{1}{2}$ et parmi ses voisins seul $k + k.q$ est de degré plus petit ($\deg(q)$), tous les autres sont de degré supérieur, ($\deg(p)$).

Enfin, le sommet $k + k.x + k.y$ est de degré $\frac{1}{2}$, strictement inférieur à tous ses voisins. (Ça vaut pour $k + k.p + k.q$ avec (p, q) affine quelconque, mais c'est alors le même k-espace vectoriel et donc le même sommet).

Ainsi tous les sommets de T excepté $k + k.x + k.y$ ont un et un seul voisin de degré strictement inférieur. De chaque sommet il existe un chemin strictement décroissant en degré aboutissant forcément à $k + k.x + k.y$ donc T est connexe. Et, comme tous les chemins partant de $k + k.x + k.y$ sont strictement croissants en degré, T n'a pas de cycles. Donc T est un arbre.

Le résultat suit par la théorie de Bass-Serre, [SB77]. Par construction le groupe $\mathrm{Aut}(k[r^{-1}x, s^{-1}y])$ agit transitivement sur T et l'arête $k + k.x \to k + k.x + k.y$ est un domaine fondamental de T. Le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(k[r^{-1}x, s^{-1}y])$ fixant $k + k.x$ est Jon et le sous-groupe fixant $k + k.x + k.y$ est Aff. □

1.4.1 Contrôle des automorphismes

(1.4.1.1) Notation. — Soit (f, g) un automorphisme de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$. On peut écrire

$$f = \sum \lambda_{i,j} x^i y^j, \text{ avec } \lambda_{i,j} \in k_{r^{-i+1}s^{-j}}.$$

On définit :

$$\mathrm{supp}(f) = \{x^i y^j \mid \lambda_{i,j} \neq 0\} \subseteq < x, y >,$$

où $< x, y >$ est le groupe abélien libre (gradué) engendré par x et y.

On note le degré en x et le degré en y de f par :

$$x\text{-}\deg(f) := \max_{\lambda_{i,j} \neq 0}(i) \text{ et } y\text{-}\deg(f) := \max_{\lambda_{i,j} \neq 0}(j).$$

(1.4.1.2) Proposition. — *Soit (f, g) un automorphisme de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$. Soit $m := x\text{-}\deg(f)$ et $n := y\text{-}\deg(f)$. Alors*

- $x^m \in \mathrm{supp}(f)$,

- $y^n \in \mathrm{supp}(f)$,
- $\mathrm{supp}(f) \subseteq \{x^i y^j \mid ni + mj \leq mn, i \geq 0, j \geq 0\}$ *et*
- *ou bien* $m|n$ *ou bien* $n|m$.

(1.4.1.3) Remarque. — Évidemment m et n ne sont pas tous deux nuls si (f, g) est un automorphisme de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ et on peut traduire la proposition en : si (f, g) est un automorphisme de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ alors

1. soit $f = ax^m + \sum_{i<m} a_i x^i$ avec $m \in \mathbb{N}^{\neq 0}, a \in k^{\times}_{r^{-(m-1)}}, a_i \in k_{r^{i-1}}$;
2. soit $f = by^n + \sum_{j<n} b_j y^j$ avec $n \in \mathbb{N}^{\neq 0}, b \in k^{\times}_{rs^{-m}}, b_j \in k_{rs^{-j}}$;
3. soit $f = ax^m + by^n + \sum_{ni+mj \leq m} c_{i,j} x^i y^j$ avec $m, n \in \mathbb{N}^{\neq 0}, a \in k^{\times}_{r^{-(m-1)}}, b \in k^{\times}_{rs^{-m}}, c_{i,j} \in k_{r^{-(i-1)}s^{-j}}$.

Démonstration. Si $mn = 0$ ou bien $n = 0$ et f est de la forme du 1 de la remarque, ou bien $m = 0$ et f est de la forme du 3, dans les deux cas le résultat suit.

Supposons donc $mn > 0$. Posons $m' = m/\mathrm{pgcd}(m, n)$ et $n' = n/\mathrm{pgcd}(m, n)$. Ce sont deux entiers premiers entre eux donc il existe A et B entiers naturels tels que $Am' - Bn' = 1$.

Posons $u = x^{m'}/y^{n'}$ (de grade $r^{m'}s^{-n'}$ que l'on notera ρ) et $v = y^A/x^B$ (de grade $s^A r^{-B}$ que l'on notera σ) éléments de $< x, y >$. Par construction, $x = u^A v^{n'}$ et $y = u^B v^{m'}$.

Ainsi $k[r^{-1}x, s^{-1}y] \subseteq k[\rho^{-1}u, \sigma^{-1}v]$, on peut écrire $f = \sum \mu_{i,j} u^i v^j$ et $\mathrm{supp}(f) = \{u^i v^j | \mu_{i,j} \neq 0\}$. Remarquons que $u\text{-}\deg(f) > 0$ et $v\text{-}\deg(f) > 0$, en effet f n'est pas constante donc $u\text{-}\deg(f)$ et $v\text{-}\deg(f)$ ne sont pas tous deux nuls par ailleurs si, par exemple, $u\text{-}\deg(f) > 0$ et $v\text{-}\deg(f) = 0$ alors $f = \sum \mu_i u^i = \sum \mu_i (x^{m'} y^{-n'})^i \notin k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ ce qui est absurde et symétriquement si $u\text{-}\deg(f) = 0$.

On définit :

$$|f| := (\sum_i \mu_{i,j} u^i) v^j \in k[\rho^{-1}u]^{\times} \times < v > \text{, où } j = v\text{-}\deg(f);$$
$$||f|| := u^i v^j \in < u, v > \text{, où } i = u\text{-}\deg(|f|).$$

Et on peut étendre $||.||$ en un morphisme de groupes :

$$||.|| : k(\rho^{-1}u, \sigma^{-1}v)^{\times} \to < u, v > .$$

(1.4.1.4) *Il existe* α *(de grade* δ_α*) et* β *(de grade* δ_β*) dans* $k(\rho^{-1}u)^{\times} \times < v >$ *(sous-groupe de* $k(\rho^{-1}u, \sigma^{-1}v)^{\times}$*), un entier* $a \in \mathbb{N}$ *et un élément* $\lambda \in k^{\times}_{r\delta_\alpha^{-a}}$ *tels que*

$$|f| = \lambda \alpha^a$$

et x *et* y *appartiennent à* $k[(\delta_\alpha^{-1}\alpha)^{\pm 1}, \delta_\beta^{-1}\beta]$.

Démonstration. Soit le corpoïde des fractions $K = k(\rho^{-1}u)$. On considère le corpoïde des séries de Laurent $K((\sigma v^{-1}))$.

Naturellement $k(\rho^{-1}u, \sigma^{-1}v) \subseteq K((\sigma v^{-1}))$ et il existe des applications

$$v\text{-deg} : K((\sigma v^{-1}))^\times \to \mathbb{Z},$$

$$|.| : K((\sigma v^{-1})) \to K^\times \times < v >$$

qui étendent les applications correspondantes sur $k[\rho^{-1}u, \sigma^{-1}v]$. On voit $k^\times$ comme un sous-groupe (abélien) de $K^\times \times < v > \subseteq K((\sigma v^{-1}))^\times$. Comme $v\text{-}\deg(f) > 0$ il existe un plus grand entier a tel que l'image de $|f|$ soit a-divisible dans

$$(K^\times \times < v >)/k^\times,$$

(a est majoré par $v\text{-}\deg(f)$) c'est-à-dire tel qu'il existe $\alpha \in K^\times \times < v >$ et $\lambda \in k^\times_{r\delta_\alpha^{-a}}$ avec

$$|f| = \lambda\alpha^a.$$

En particulier, l'image de α dans $(K^\times \times < v >)/k^\times$ engendre un sous-groupe cyclique maximal contenant l'image de $|f|$.

Le reste de (1.4.1.4) découle du lemme ci-dessous.

(1.4.1.5) Lemme. — *Soit p de grade r et q de grade s dans $K((\sigma v^{-1}))$, s'il existe $M \in \mathbb{N}$ et $\mu \in k^\times_{r\delta_\alpha^{-M}}$ tels que*

$$|p| = \mu\alpha^M$$

alors il existe $\beta \in K^\times \times < v >$ tel que

$$|k[(r^{-1}p)^{\pm 1}, s^{-1}q]| \subseteq k[(\delta_\alpha^{-1}\alpha)^{\pm 1}, \delta_\beta^{-1}\beta].$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur M. Si $M = 0$, alors $|p| \in k$ ce qui implique immédiatement $v\text{-}\deg(p) = 0$ mais aussi que $p = |p| \in k$. En ce cas

$$|k[(r^{-1}p)^{\pm 1}, s^{-1}q]| = |k[s^{-1}q]| = k[s^{-1}|q|]$$

et $\beta = |q|$ convient.

Soit $M_0 \in \mathbb{N}^{\neq 0}$, supposons le lemme vrai pour tout $M < M_0$ et montrons le pour M_0. Définissons une suite (possiblement finie) (q_i) dans $K((\sigma v^{-1}))_s$. Posons $q_1 := g$. Supposons que l'on ait construit q_i pour $i \geq 1$. Si

$$|q_i| = \lambda_i(\lambda\alpha^{M_0})^{n_i}$$

avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_i \in k^\times_{sr^{-n_i}}$, on pose

$$q_{i+1} := q_i - \lambda_i p^{n_i};$$

si $q_i = 0$ ou si $q_i \neq 0$ et $|q_i|$ n'est pas de la forme ci-dessus, on arrête la suite à q_i. Comme

$$v\text{-deg}(g_1) > v\text{-deg}(g_2) > \dots$$

la suite $q_1, q_2, \dots$ a une limite $q_\star$ dans $K((\sigma v^{-1}))_s$,

$$q_\star = q - \lambda_1 p^{n_1} - \lambda_2 p^{n_2} - \dots .$$

Si $q_\star = 0$ alors $k[(r^{-1}p)^{\pm 1}, s^{-1}q] \subseteq k((rp^{-1}))$ donc

$$|k[(r^{-1}p)^{\pm 1}, s^{-1}q]^\times| \subseteq |k((rp^{-1}))^\times| \subseteq k[(r^{-1}|p|)^{\pm 1}] \subseteq k[(\delta_\alpha^{-1}\alpha)^{\pm 1}]$$

et β peut être choisi arbitrairement.

Si $|p|$ et $|q_\star|$ sont algébriquement indépendants sur k alors

$$|k[(r^{-1}p)^{\pm 1}, s^{-1}q_\star]| \subseteq k[(r^{-1}|p|)^{\pm 1}, s^{-1}|q_\star|]$$

et on peut prendre $\beta := |q_\star|$.

Il reste le cas où $g_\star \neq 0$, $|p|$ et $|q_\star|$ sont algébriquement dépendants sur k. Si l'on note $c = v\text{-deg}(p)$ et $d = v\text{-deg}(q_\star)$ alors $|p|^d$ et $|q_\star|^c$ sont algébriquement dépendants sur k (puisque $k[r^{-d}|p|^d, s^{-c}|q_\star|^c] \subseteq k[r^{-1}|p|, s^{-1}|q|]$) et v-homogènes (ils appartiennent à $K^\times \times < v >$) de même v-degré. Le quotient $|p|^d/|q_\star|^c$ est algébrique sur k, en effet il existe $P = \sum a_{i,j} T_1^i T_2^j \in k[r^{-d}T_1, s^{-c}T_2]$ non constant tel que :

$$\sum a_{i,j} (|p|^d)^i (|q|^c)^j = 0,$$

écrivant $|p| = \varphi v^c$ et $|q_\star| = \gamma v^d$ avec $\varphi, \gamma \in K$, et $N = \max\{i+j\,,\, a_{i,j} \neq 0\}$ on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i,j} a_{i,j} (\varphi^d)^i (\gamma^c)^j v^{cd(i+j)} \\
\Rightarrow 0 &= \sum_i a_{i,N-i} (\varphi^d)^i (\gamma^c)^{N-i} v^{cdN} = \sum_i a_{i,N-i} \left(\frac{\varphi^d}{\gamma^c}\right)^i (\gamma^c)^N v^{cdN} \\
\Rightarrow 0 &= \sum_i a_{i,N-i} \left(\frac{\varphi^d}{\gamma^c}\right)^i = \sum_i a_{i,N-i} \left(\frac{|p|^d}{|q_\star|^c}\right)^i
\end{aligned}$$

où par construction il existe un $a_{i,l} \neq 0$. Ainsi $|p|^d/|q_\star|^c$ qui appartient à K est algébrique sur k, donc appartient à k ([Duc, (2.2.29.1)]) et $|q_\star|^c = |p|^d = \alpha^{ad} (\bmod k^\times)$.

Le groupe $(K^\times \times < v >)/k^\times$ est un groupe abélien sans torsion et l'image de α engendre par construction un sous-groupe cyclique maximal donc $c|ad$ et $|g_\star|^c = \alpha^b (\bmod k^\times)$ avec $b = \frac{ad}{c}$. Disons $|q_\star| = \mu\alpha^b$ avec $\mu \in k^\times_{s\delta_\alpha^{-b}}$. Par définition de $q_\star$ on sait que $a \nmid b$, disons $b = aQ + R$ avec $0 < R < a$.

Soit $h = \frac{q_\star}{p^Q}$. Alors $|h| = \alpha^r (\bmod k^\times)$ et l'hypothèse de récurrence s'applique au couple (h, p). Donc il existe $\beta \in K^\times \times < v >$ tel que

$$|k[(r^q s^{-1} h)^{\pm 1}, r^{-1} p]^\times| \subseteq k[(\delta_\alpha^{-1}\alpha)^{\pm 1}, \delta_\beta^{-1}\beta].$$

Par récurrence $|k[(r^{-1}p)^{\pm 1}, s^{-1}q]^\times| \subseteq k[(\delta_\alpha^{-1}\alpha)^{\pm 1}, \delta_\beta^{-1}\beta]$ pour un β dans $k(\rho^{-1}u)^\times \times < v >$, d'où le résultat puisque x et y appartiennent à $|k[r^{-1}p, s^{-1}q]^\times|$. □

□

(1.4.1.6) *Il existe w et z dans $< u, v >$ tels que $< w > = < ||\alpha|| >$ ou $< ||\alpha||, ||\beta|| >$ et x et y appartiennent à* semigp $< w^{\pm 1}, z >$.

Démonstration. On dit que deux éléments de $< u, v >$ sont liés s'ils engendrent un sous-groupe cyclique, sinon ils sont indépendants, c'est-à-dire qu'ils engendrent librement un sous-groupe abélien libre.

Rappelons que α et β appartiennent à $k(\rho^{-1}u)^\times \times < v >$.

Si $||\alpha|$ et $||\beta||$ sont indépendants alors

$$x, y \in ||k[(\delta_\alpha^{-1}\alpha)^{\pm 1}, \delta_\beta^{-1}\beta]^\times|| \subseteq \text{semigp} < ||\alpha||^{\pm 1}, ||\beta|| >$$

et on peut prendre $w = ||\alpha||$ et $z = ||\beta||$.

Sinon $||\alpha||$ et $||\beta||$ sont liés. Soit w un générateur de $< ||\alpha||, ||\beta|| >$, disons $||\alpha|| = w^i$, $||\beta|| = w^j$ et $w = ||\alpha||^c ||\beta||^d$. Ici $||\alpha^j|| = ||\beta^i|| = w^{ij}$ donc il existe un unique $\mu \in k^\times_{\delta_\alpha^i \delta_\beta^{-j}}$ tel que

$$z = ||\alpha^j - \mu\beta^i|| \neq w^{ij}.$$

Mais z et w^{ij} sont de même v-degré (car du $v - degr$ de α^j) donc w et z sont indépendants. Soit $\alpha' = \alpha^c\beta^d$ et $\beta' = \alpha^j/\beta^i - \mu$. Alors

$$||k[(\delta_\alpha^{-1}\alpha)^{\pm 1}, (\delta_\beta^{-1}\beta)^{\pm 1}]^\times|| = ||k[(\delta_{\alpha'}^{-1}\alpha')^{\pm 1}, 1(\beta' + \mu)^{\pm 1}]^\times||$$

□

(1.4.1.7) Notation. — On pose

$$\Delta := \{x^i y^j \mid ni + mj \leq mn, i \geq 0, j \geq 0\}.$$

(1.4.1.8) *Les monômes x^m et y^n appartiennent à* $\mathrm{supp}(f)$ *qui est inclus dans* Δ, $||f|| = x^m$ *et* $< w >=< x >$.

Démonstration. Géométriquement (i.e. en identifiant $< x, y >$ avec $\mathbb{Z}^2$) $x, y \in$ semigp $< w^{\pm 1}, z >$ signifie qu'un des deux demi-plans déterminés par w contient à la fois x et y. (La figure (1.4.1.8) même fausse, peut servir à suivre les arguments.)

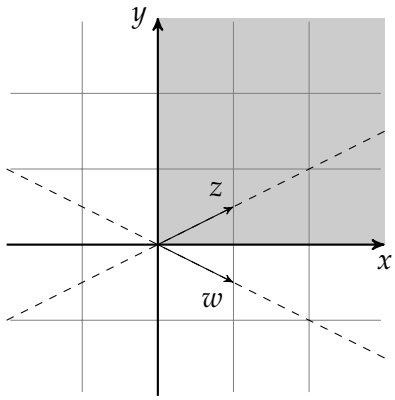

FIGURE 1.1 –

D'après (1.4.1.6), il existe un entier i tel que $||\alpha|| = w^i$; quitte à remplacer w par w^{-1} on peut supposer i positif. D'après (1.4.1.4) $||f|| = ||\alpha||^a = w^{ia}$ et $||f|| \in$ semigp $< x, y >$ donc $w \in$ semigp $< x, y >$ autrement dit w appartient au premier quadrant. Ceci n'est possible que si w est sur l'axe des x ou sur l'axe des y, c'est-à-dire si w est une puissance de x ou de y.

Comme $< x, y > \subseteq < w, z >$ ou bien $w = x$ ou bien $w = y$. Ainsi $||f||$ est une puissance soit de x soit de y. Mais le seul endroit où $\mathrm{supp}(f)$ rencontre l'axe des x ou des y est dans Δ donc $||f|| \in \Delta$ et alors $\mathrm{supp}(f) \subseteq \Delta$.

Ainsi $x\text{-}\deg(f) = m$ implique que $x^m \in \mathrm{supp}(f)$ et de même $y^n \in \mathrm{supp}(f)$. Donc soit $||f|| = x^m$ soit $||f|| = y^n$. Mais

$$u\text{-}\deg(x^m) = u\text{-}\deg(u^{mA}v^{mn'}) = mA \text{ et}$$

$$u\text{-}\deg(y^n) = u\text{-}\deg(u^{nB}v^{m'n}) = nB = mA - \mathrm{pgcd(m,n)} < mA$$

donc $||f|| = x^m$. Ainsi $< w >=< x >$. □

(1.4.1.9) *Si* $< w >=< ||\alpha|| >$ *alors* $n|m$.

Démonstration. Si $< ||\alpha|| >=< w >=< x >$ alors $||\alpha|| = x$. Mais (1.4.1.4) implique que $||f|| = ||\alpha||^a = x^a$ et (1.4.1.8) que $||f|| = x^m$ donc $a = m$. Ansi $|f| = \lambda\alpha^m$ dans $k(r^{-1}x, s^{-1}y)$, donc $y\text{-}\deg(|f|) = m(y\text{-}\deg(\alpha))$. Et $y\text{-}\deg(|f|) = n$ puisque $y^n \in \mathrm{supp}(|f|)$, donc $m|n$. □

(1.4.1.10) Si $< w >=< ||\alpha||, ||\beta|| >$ alors $m|n$.

Démonstration. Si $< ||\alpha||, ||\beta|| >=< w >=< x >$ alors $n'\mathbb{Z} = v\text{-}\deg(< x >) = v\text{-}\deg(< ||\alpha||, ||\beta|| >) = v\text{-}\deg(< \alpha, \beta >)$. Alors d'après (1.4.1.4) $y \in k[(\delta_\alpha^{-1}\alpha)^{\pm 1}, \delta_\beta^{-1}\beta]$ et est v-homogène donc $v\text{-}\deg(y) \in v\text{-}\deg(< \alpha, \beta >)$, c'est-à-dire que m' est un multiple de n' donc $n|m$. □

□

(1.4.1.11) Définition. — Pour tout $p = \sum \mu_{i,j} x^i y^j \in k[r^{-1}x, s^{-1}y]^{\neq 0}$ de degré $\deg(p) = d$ on définit $p_0 = \sum \mu_{i,d-i} x^i y^{d-i}$, la *composante dominante* de p.

(1.4.1.12) Proposition. — *Soit (p, q) un automorphisme de $k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ avec $\deg(p) \leq \deg(q)$. Alors soit (p, q) est affine, soit il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ et $\mu \in k^\times_{sr^{-N}}$ tels que*

$$\deg(q - \mu p^N) < \deg(q).$$

Et $(p, q - \mu p^N)$ est encore un automorphisme.

Démonstration. Soit (f, g) l'inverse de (p, q) et notons $m = x\text{-}\deg(f)$ et $n = y\text{-}\deg(f)$.

Si $\deg(p^m) \neq \deg(q^n)$ la caractérisation de la forme de f obtenue proposition (1.4.1.2) implique que

$$\deg(f(p, q)) = \max(\deg(p^m), \deg(q^n)).$$

Comme $f(p, q) = x$, les polynômes p^m et q^n, et donc p et q, sont de degré au plus 1, ainsi (p, q) est affine.

Si $\deg(p^m) = \deg(q^n)$ alors $m \geq n$ (puisque $\deg(p) \leq \deg(q)$) donc, d'après la proposition (1.4.1.2), $n|m$ et on peut écrire $\deg(p^N) = \deg(q)$ avec $N = \frac{m}{n}$. On peut supposer que (p, q) n'est pas affine donc $\deg(q) > 1$. Comme $f(p, q) = x$ il suit que p_0 et q_0 (composantes dominantes de p et q) sont algébriquement dépendants sur k, il existe donc $P = \sum a_{i,j} x^i y^j \in k[r^{-1}x, s^{-1}y]$ non constant tel que $P(p, q) = 0$.

Par construction p_0 est un polynôme homogène de degré d et q_0 est un polynôme homogène de degré Nd vérifiant donc le degré de $p_0^i q_0^j$ est $d(i + jN)$. Il existe un couple d'indice $(i_0, j_0) \neq 0$ avec a_{i_0,j_0} tels que $a_{i_0,j_0} \neq 0$. Notant $l := i_0 + j_0 N = \frac{\deg(p^{i_0} q^{j_0})}{d}$, l'égalité $P(p, q) = 0$ implique

$$0 = \sum_{i+jN=l} a_{i,j} p_0^i q_0^j = \sum_{i+jN=l} a_{i,j} p_0^{i+jN} \left(\frac{q_0}{p_0^N}\right)^j = p_0^l \sum_{i+jN=l} a_{i,j} \left(\frac{q_0}{p_0^N}\right)^j,$$

autrement dit q_0/p_0^N est algébrique sur k et appartient donc à k ([Duc, (2.2.29.1)]), disons $q_0/p_0^N = \mu$. Alors $\deg(q - \mu p^N) < \deg(q)$ comme voulu. □

1.5 Théorèmes de Hilbert

1.5.1 Groupe général linéaire

Avant de passer à la preuve, établissons l'analogue gradué d'un résultat utile :

(1.5.1.1) Définition. — Soit L/k une extension galoisienne de groupe de Galois G, et soit U un espace vectoriel sur L avec une action $*$ de G sur U. On note $\cdot$ l'action linéaire standard de G sur L. On dit que G agit par *automorphismes semi-linéaires* sur U si l'on a pour tout $r \in \Gamma$, $u, u' \in U_r, \lambda \in L$

$$\sigma * (u + u') = \sigma * u + \sigma * u';$$

$$\sigma * (\lambda u) = (\sigma \cdot \lambda)(\sigma * u).$$

(1.5.1.2) Lemme. — *Soit U un L-espace vectoriel. Si G agit sur U par automorphismes semi-linéaires, alors $U^G := \{u \in U \mid \sigma * u = u$ pour tout $\sigma \in G\}$ est un k-espace vectoriel, et l'application :*

$$f : U^G \otimes_k L \to U, u \otimes \lambda \mapsto \lambda u$$

est un isomorphisme L-linéaire.

Démonstration. Il est clair que U^G est un k-espace vectoriel et que f est L-linéaire. Établissons d'abord la surjectivité de f.

Soit u un vecteur de U, soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ une k-base de L et soit $\sigma_1 = id_L, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les éléments de G. Posons pour $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$u_i = \sum_j \sigma_j * (\lambda_i u).$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\sigma_k * u_i = \sum_j (\sigma_k \sigma_j) * (\lambda_i u).$$

Ainsi l'action de σ_k sur $\sum_j \sigma_j * (\lambda_i u)$ ne fait que permuter les termes de la somme, donc $u_i \in U^G$.

Comme $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont des k-automorphismes distincts de L, ils sont linéairement indépendants sur L (proposition (1.3.3.1)). C'est pourquoi, ayant, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, noté r_i le grade de λ_i, la matrice $M = (\sigma_j \cdot \lambda_i)_{i,j}$ appartient à $\mathrm{GL}(L, (r_1, ..., r_n), (1, \ldots, 1))$. Puisque G agit par automorphismes semi-linéaires, on a

$$u_i = \sum_j \sigma_j * (\lambda_i u) = \sum_j (\sigma_j \cdot \lambda_i)(\sigma_j * u).$$

Maintenant si l'on écrit $M^{-1} = (m'_{ij})$, de $M^{-1}M = I_n$,

$$\sum_j m'_{1k}(\sigma_k \cdot \lambda_j) = \delta_{1k} \text{ pour tout } k = 1 \dots n.$$

Donc

$$\sum_j m'_{ij} u_j = \sum_j \sum_k m'_{1j}(\sigma_k \cdot \lambda_j)(\sigma_k * u) = \sum_k \delta_{1k}(\sigma_k * u) = \sigma_1 * u = u,$$

la dernière égalité découlant de $\sigma_1 = id_L$. Ainsi

$$u = \sum_j m'_{1j} u_j = f(\sum_j u_j \otimes m'_{1j}),$$

ce qui prouve la surjectivité de f.

Admettons un instant que l'on ait montré que « toute famille de vecteurs $u_1, \dots, u_l \in U^G$ k-linéairement indépendants est une famille de vecteurs L-linéairement indépendants dans U ». Alors, soit $x \in \ker(f)$ (de grade ρ). On peut écrire :

$$x = u_1 \otimes \mu_1 + \cdots + u_n \otimes \mu_n,$$

où les $u_1, \dots, u_n$ sont k-linéairement indépendants (de grade r_i) et les μ_i sont des éléments homogènes de L (où μ_i est de grade ρr_i^{-1}). Par construction, $f(x) = 0 = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$. Alors on a $\mu_i = 0_{\rho r_i^{-1}}$, et donc $x = 0$, ce qui prouve l'injectivité de f.

Montrons maintenant ce que nous avions admis. Supposons que l'on ait l vecteurs k-linéairement indépendants $u_1, \dots, u_l \in U^G$ (de grades $r_1, \dots, r_l$) pour lesquels il existe $\mu_1, \dots, \mu_l$ éléments de L (μ_i est de grade ρr_i^{-1}) non tous nuls tels que :

$$\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_l u_l = 0.$$

On peut supposer que l est minimal, $l > 1$ et $\mu_1 = 1$ (alors $\rho = r_1$). Par hypothèse, les μ_i ne sont pas tous dans k, donc on peut aussi supposer que $\mu_2 \notin k$. Soit $\sigma \in G$ tel que $\sigma \cdot \mu_2 \neq \mu_2$, alors

$$\sigma(\sum_i \mu_i u_i) = \sum_i (\sigma \cdot \mu_i)(\sigma * u_i) = \sum_i (\sigma \cdot \mu_i) u_i = 0$$

et on obtient $\sum_{i \geq 2} (\sigma \cdot \mu_i - \mu_i) u_i = 0$, relation non triviale avec moins de termes, contradiction. □

(1.5.1.3) Théorème. — *Soit k un corpoïde, soit L une extension galoisienne de k et $\mathbf{r} \in \Gamma^n$ un polyrayon.*

1. *Soit α une application de* $\mathrm{Gal}(L/k)$ *vers* $\mathrm{GL}(L, \mathbf{r})$*, alors*

$$\alpha \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{Gal}(L/k), \mathrm{GL}(L, \mathbf{r}))$$

si et seulement s'il existe $\mathbf{s} \in \Gamma^n$ *et* $A \in \mathrm{GL}(L, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ *tels que pour tout* $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/k)$

$$\alpha(\sigma) = A^{-1}(\sigma.A).$$

2. *En particulier*

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{Gal}(L/k), \mathrm{GL}(L, \mathbf{r}))$$

est en bijection avec les classes de couples (V, φ_V) *où* V *est un* k*-espace vectoriel et* φ_V *est un* L*-isomorphisme entre* $V \otimes_k L$ *et* $L(\mathbf{r})$ *modulo la relation d'équivalence :* $(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V)$ *si et seulement s'il existe* ψ *isomorphisme* k*-linéaire de* U *vers* V *tel que* $\varphi_U = \varphi_V \circ \psi$*.*

3. *Et*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/k), \mathrm{GL}(L, \mathbf{r})) = \tau_{k \to L}^{-1}(\mathbf{r})$$

c'est-à-dire que le premier ensemble pointé de cohomologie est en bijection avec les classes d'isomorphie k*-espaces vectoriels* V *tels que* $V \otimes_k L$ *soit de* L*-type* $\mathbf{r}$*.*

(1.5.1.4) Remarque. — Quand $\mathrm{grad}(k^\times) = \mathrm{grad}(L^\times)$ et donc quand $\Gamma = 1$, l'application $\tau_{k \to L} : \mathcal{T}(k) \to \mathcal{T}(L)$ est bijective, alors

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/k), \mathrm{GL}(L, \mathbf{r})) = 1$$

et on retrouve l'énoncé classique du théorème 90 de Hilbert : tous les cocycles sont des cobords.

Démonstration. Le résultat a trois parties : l'écriture des cocycles en termes de matrices, la description des cocycles et la description du premier ensemble pointé de cohomologie. Posons $G = \mathrm{Gal}(L/k)$.

Soit α un morphisme de groupe de G vers $\mathrm{GL}(L, \mathbf{r})$. Supposons $\alpha \in Z^1(G, \mathrm{GL}(L, \mathbf{r}))$ la réciproque étant évidente. On tord l'action naturelle de G sur $L(\mathbf{r})$ en une action par automorphismes semi-linéaires :

$$\sigma * u = \alpha(\sigma)(\sigma \cdot u) \text{ pour tout } u \in L(\mathbf{r}), \sigma \in G.$$

D'après le lemme (1.5.1.2) il existe un isomorphisme $f : (L(\mathbf{r}))^G \otimes_k L \xrightarrow{\sim} L(\mathbf{r})$. En particulier $\dim_k((L(\mathbf{r}))^G) = \dim_L((L(\mathbf{r}))^G \otimes_k L) = \dim_L(L(\mathbf{r})) = n$.

Soit $v_1, \ldots, v_n$ une k-base de $(L(\mathbf{r}))^G$, c'est aussi une L-base de $L(\mathbf{r})$, et, notant s_i^{-1} le grade de v_i, la j-ème coordonnée de v_i est de grade $s_i^{-1} r_j$. Ainsi la matrice P dont les colonnes sont $v_1, \ldots, v_n$ appartient à $\mathrm{GL}(L, \mathbf{r}, \mathbf{s})$.

Alors, pour tout $\sigma \in G$, la matrice $\sigma \cdot P$ est la matrice dont les colonnes sont $\sigma \cdot v_1, \ldots, \sigma \cdot v_n$. Comme $v_1, \ldots, v_n \in (L(\mathbf{r}))^G$

$$v_i = \sigma * v_i = \alpha(\sigma)(\sigma \cdot v_i) \text{ pour tout } i = 1 \ldots n,$$

donc en termes de matrices, pour tout $\sigma \in G$,

$$\begin{aligned} P &= \alpha(\sigma)(\sigma \cdot P) \\ \Leftrightarrow \alpha(\sigma) &= P(\sigma \cdot P)^{-1} \\ \Leftrightarrow \alpha(\sigma) &= P(\sigma \cdot P^{-1}). \end{aligned}$$

Donc $A = P^{-1} \in \mathrm{GL}(L, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ convient.

Étudions les cocycles. Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Gamma^n$ et $A \in \mathrm{GL}(L, \mathbf{a}, \mathbf{r})$ et $B \in \mathrm{GL}(L, \mathbf{b}, \mathbf{r})$. Ces matrices définissent le même cocycle si et seulement si, pour tout $\sigma \in G$,

$$\begin{aligned} A^{-1}\sigma(A) &= B^{-1}\sigma(B) \\ \Leftrightarrow AB^{-1} &= \sigma.(AB^{-1}) \\ \Leftrightarrow AB^{-1} &\in \mathrm{GL}(k, \mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Autrement dit ces matrices définissent le même cocycle si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(k, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ telle que

$$A = PB.$$

Ce que l'on peut traduire en l'existence du diagramme commutatif d'espaces vectoriels (gradués) suivant où toutes les flèches hormis celles d'extension des scalaires sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd} k(\mathbf{a}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "P^{-1}"] & k(\mathbf{a}) \otimes_k L \arrow[r, "A^{-1}"] \arrow[d, "P^{-1}"] & L(\mathbf{r}) \\ k(\mathbf{b}) \arrow[r, hook] & k(\mathbf{b}) \otimes_k L \arrow[ur, "B^{-1}"] & \end{tikzcd}$$

C'est-à-dire que les cocycles correspondent aux classes de couples (V, φ_V) où V est un k-espace vectoriel et φ_V est un L-isomorphisme entre $V \otimes_k L$ et $L(\mathbf{r})$ modulo la relation d'équivalence : $(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V)$ si et seulement il existe ψ isomorphisme k-linéaire de U vers V tel que $\varphi_U = \varphi_V \circ \psi$.

Enfin, soit α et β deux éléments de $\mathrm{Z}^1(\mathrm{Gal}(L/k), \mathrm{GL}(L, \mathbf{r}))$, il existe d'après le premier point traité $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Gamma^n$ et des matrices $A \in \mathrm{GL}(L, \mathbf{a}, \mathbf{r})$ et $B \in \mathrm{GL}(L, \mathbf{b}, \mathbf{r})$ tels que pour tout $\sigma \in G$

$$\alpha(\sigma) = A^{-1}(\sigma.A) \text{ et } \beta(\sigma) = B^{-1}(\sigma.B).$$

Ces cocycles sont cohomologues si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(L, \mathbf{r})$ telle que pour tout $\sigma \in G$

$$\begin{aligned} &\alpha(\sigma) = P^{-1}\beta(\sigma)(\sigma.P) \\ \Leftrightarrow\ &A^{-1}(\sigma.A) = P^{-1}B^{-1}(\sigma.B)(\sigma.P) \\ \Leftrightarrow\ &AP^{-1}B^{-1} = \sigma.(AP^{-1}B^{-1}) \\ \Leftrightarrow\ &AP^{-1}B^{-1} \in \mathrm{GL}(k, \mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Autrement dit α et β sont cohomologues si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}(L, \mathbf{r})$ et $Q \in \mathrm{GL}(k, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ telles que

$$A = QBP.$$

Le résultat suit si l'on traduit ces égalités matricielles en l'existence du diagramme commutatif d'espace vectoriels suivant où toutes les flèches hormis celles d'extension des scalaires sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd} k(\mathbf{a}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "Q^{-1}"] & k(\mathbf{a}) \otimes_k L \arrow[r, "A^{-1}"] \arrow[d, "Q^{-1}"] & L(\mathbf{r}) \arrow[d, "P"] \\ k(\mathbf{b}) \arrow[r, hook] & k(\mathbf{b}) \otimes_k L \arrow[r, "B^{-1}"] & L(\mathbf{r}) \end{tikzcd}$$

Les classes de cohomologie sont moins contraintes que les cocycles et correspondent aux classes d'isomorphie des k-espaces vectoriels devenant L-isomorphes à $L(\mathbf{r})$ qui étaient k-isomorphes sans condition de compatibilité. □

(1.5.1.5) Remarque. — Ce théorème se ramène en dimension 1 à l'énoncé ci-dessous, donnant une autre preuve de [Sch15, Proposition 2.11].

(1.5.1.6) Corollaire. — *Soit k un corpoïde,L une extension galoisienne de k, et α un morphisme de groupe de* $\mathrm{Gal}(L/k) \to$ *vers* $L_1^\times$,

$$\alpha \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{Gal}(L/k), L_1^\times)$$

si et seulement s'il existe $\lambda \in L^\times$ tel que

$$\alpha(\sigma) = \frac{\sigma.\lambda}{\lambda} \text{ pour tout } \sigma \in \mathrm{Gal}(L/k).$$

En particulier,

$$\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}(L/k), L_1^\times\right) = \tau_{k\to L}^{-1}((1)) = \mathrm{grad}(L^\times)/\mathrm{grad}(k^\times).$$

Démonstration. Il suffit de rappeler que pour tout r et s dans Γ, les groupes $L_1^\times$ et $\mathrm{GL}(L, (r))$ sont isomorphes, ainsi que $L_s^\times$ et $\mathrm{GL}(L, (s), (1))$. □

1.5.2 Groupe additif

(1.5.2.1) Théorème (Hilbert 90 additif gradué). — *Soit k un corpoïde, L une extension galoisienne de k, pour tout $r \in \Gamma$*

$$\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}(L/k), L_r\right) = 0.$$

Démonstration. (D'après Antoine Ducros.) On se ramène immédiatement au cas où L est une extension finie de k. On commence par remarquer que comme L est finie galoisienne sur k, il existe un élément λ de trace 1 dans $L_1^\times$. Il y a pour ce faire deux possibilités : décalquer la démonstration de la non dégénérescence de la trace dans le contexte gradué, en se ramenant par tensorisation avec une extension convenable au cas d'un produit fini d'extensions de k ; ou bien utiliser le résultat connu pour K_1, et le fait que le noyau de la surjection $\mathrm{Gal}(L/k) \to \mathrm{Gal}(L_1/k_1)$ est d'ordre inversible dans L.

La multiplication par λ est alors un endomorphisme de L_r de trace égale à l'identité, et l'existence d'un tel endomorphisme permet de conclure (Cartan-Eilenberg-Serre utilise cette méthode dans Corps locaux). □

1.5.3 Automorphismes du plan

On adapte ici la preuve de [Kam75].

(1.5.3.1) Théorème. — *Soit k un corpoïde, L une extension galoisienne finie de k et $(r,s) \in \Gamma^2$, alors la flèche naturelle*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/k), \mathrm{GL}(L,(r,s))) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/k), \mathrm{Aut}(L[r^{-1}x, s^{-1}y]))$$

est un isomorphisme d'ensembles pointés.

En particulier

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/k), \mathrm{Aut}(L[r^{-1}x, s^{-1}y])) = \tau_{k\to L}^{-1}(r,s).$$

Démonstration. Pour alléger les notations écrivons Aut pour $\mathrm{Aut}(L[r^{-1}x, s^{-1}y])$ et G pour $\mathrm{Gal}(L/k)$. Nous avons montré, théorème (1.4.0.1), que

$$\mathrm{Aut} = \mathrm{Aff} *_{\mathrm{Aff}\cap\mathrm{Jon}} \mathrm{Jon}$$

où Aff est le sous-groupe G-stable des automorphismes affines et Jon est le sous-groupe G-stable des automorphismes de Jonquières.

(1.5.3.2) Lemme. — *Les flèches naturelles*

1. $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aff}) \to \mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(L,(r,s)))$;

2. $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aff} \cap \mathrm{Jon}) \to \mathrm{H}^1(G, (L_1^\times)^2)$;

3. $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Jon}) \to \mathrm{H}^1(G, (L_1^\times)^2)$.

sont des isomorphismes.

Démonstration. **1** le G-morphisme naturel $\mathrm{Aff} \to \mathrm{GL}(L, (r,s))$, $(A, B) \mapsto A$ est surjectif de noyau les translations (la loi de groupe sur Aff étant $(A, B) \circ (A', B') = (AA', B + AB')$), c'est-à-dire que

$$\mathrm{Aff} = L(r,s)_1 \rtimes \mathrm{GL}(L, (r,s)).$$

En particulier, la surjection $\mathrm{Aff} \to \mathrm{GL}(L, (r,s))$ a une section et il en découle formellement que le morphisme induit

$$\mathrm{Z}^1(G, \mathrm{Aff}) \to \mathrm{Z}^1(G, \mathrm{GL}(L, (r,s)))$$

est surjectif et partant que l'application

$$\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aff}) \to \mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(L, (r,s)))$$

est surjective.

Par ailleurs $L(r,s)_1 = L_r \times L_s$ et, d'après le théorème (1.5.2.1),

$$\mathrm{H}^1(G, L_r) = \mathrm{H}^1(G, L_s) = 1$$

donc $\mathrm{H}^1(G, L(r,s)_1) = 1$.

De tout ceci on déduit (par exemple via [Ser13, VII, A, Proposition 1]) de la suite exacte de G-modules

$$1 \to L(r,s) \to \mathrm{Aff} \to \mathrm{GL}(L, (r,s)) \to 1$$

une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to \mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aff}) \to \mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(L, (r,s)))$$

qui donne l'injectivité voulue.

2 se montre comme **1** en écrivant $\mathrm{Aff} \cap \mathrm{Jon} = (L_r \times L_s) \rtimes (L_1^\times)^2$.

3, le sous-groupe

$$\{\varphi \in \mathrm{Jon} \mid \varphi(x,y) = (x, y + P(x))\}$$

de Jon est isomorphe à $L[r^{-1}x]_s$. Donc on peut écrire

$$\mathrm{Jon} = (L_r \times L[r^{-1}x]_s) \rtimes (L_1^\times)^2$$

et on procèderait comme en **1** pour peu que l'on ait l'égalité

$$\mathrm{H}^1(G, L[r^{-1}x]_s) = 1.$$

Pour tout $d \in \mathbb{Z}$, notons $L[r^{-1}x]_s^{(d)}$ le sous-groupe de $L[r^{-1}x]_s$ des polynômes de degré au plus d. Pour tout d,

$$L[r^{-1}x]_s^{(d)} \simeq L_s \times L_{sr^{-1}} \times \cdots \times L_{sr^{-d}}$$

donc, d'après le théorème (1.5.2.1),

$$\mathrm{H}^1(G, L[r^{-1}x]_s^{(d)}) = 1.$$

Soit $\alpha \in \mathrm{Z}^1(G, L[r^{-1}x]_s)$, comme G est fini, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha(g) \in L[r^{-1}x]_s^{(d)}$ pour tout $g \in G$. Ainsi $\alpha \in \mathrm{Z}^1(G, L[r^{-1}x]_s^{(d)})$ est cohomologue à 1 dans $\mathrm{H}^1(G, L[r^{-1}x]_s^{(d)})$ et donc est cohomologue à 1 dans $\mathrm{H}^1(G, L[r^{-1}x]_s)$. □

D'après [Kam75, Theorem 1] le diagramme commutatif naturel d'espaces pointés

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aff} \cap \mathrm{Jon}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(G, \mathrm{Jon}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aff}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aut})
\end{tikzcd}$$

est cocartésien. Nous pouvons expliciter les termes et les flèches via le lemme (1.5.3.2), obtenant le diagramme commutatif cocartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(G, (L_1^\times)^2) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathrm{H}^1(G, (L_1^\times)^2) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(L, (r, s))) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aut})
\end{tikzcd}$$

Et la flèche

$$\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(L, (r, s))) \to \mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aut})$$

est alors un isomorphisme pour des raisons formelles. □

Chapitre 2

Polydisques fermés et dentelles

Soit k un corps ultramétrique complet.

(2.0.0.1) Définition. — Un polyrayon est une famille finie d'éléments de $\mathbb{R}_+^\times$.

2.1 Polydisques fermés

On note $T_1, \ldots, T_n$ des coordonnées sur $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$.

(2.1.0.1) Définition. — Soit un polyrayon $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$, nous noterons $\mathbb{D}_\mathbf{r}$ le domaine analytique de $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ défini par les conditions $|T_i| \leq r_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, que nous appellerons *k-polydisque fermé centré en l'origine de polyrayon* $\mathbf{r}$.

Un *k-polydisque fermé de polyrayon* $\mathbf{r}$ est un espace k-analytique isomorphe à $\mathbb{D}_\mathbf{r}$.

Nous dirons qu'une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ de fonctions sur un k-polydisque fermé X est un *système de coordonnées* si les f_i induisent un isomorphisme entre X et un k-polydisque fermé centré en l'origine.

(2.1.0.2) Définition. — Soit X un espace k-analytique ; soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X. Pour tout réel r strictement positif, on note

- $\mathcal{A}_{\leq r}$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ formé des éléments a tels que que $||a||_\infty \leq r$;
- $\mathcal{A}_{<r}$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ formé des éléments a tels que que $||a||_\infty < r$;
- $\mathcal{A}_{\prec r}$ le complété de $\mathcal{A}_{<r}$ pour la topologie de la convergence en norme sur tout domaine affinoïde. Remarquons que si $\mathcal{A}$ est compact, $\mathcal{A}_{\prec r} = \mathcal{A}_{<r}$;
- $\widetilde{\mathcal{A}}_r := \mathcal{A}_{\leq r} / \mathcal{A}_{\prec r}$.

On pose

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \coprod_{r \in \mathbb{R}_+^\times} \widetilde{\mathcal{A}}_r$$

la réduction de $\mathcal{A}$ pour la semi-norme spectrale ; c'est un annéloïde.

Si $a \in \mathcal{A}$ et si r est un réel strictement positif supérieur ou égal à $||a||_\infty$, on notera $\widetilde{a}_r$ l'image de a dans $\widetilde{A}_r$. Si $r = ||a||_\infty$, on écrira simplement $\widetilde{a}$.

(2.1.0.3) Remarque. — Dans cette section on travaillera toujours avec des polydisques fermés qui sont des espaces k-analytiques compacts.

(2.1.0.4) Définition. — Nous noterons $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$, que nous munissons de la norme spectrale $||.||_\infty$, et $\widetilde{\mathcal{A}_{\mathbf{r}}}$ sa réduction (graduée) pour cette norme.

(2.1.0.5) Remarque. — Sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ le k-polydisque fermé centré en l'origine de polyrayon $\mathbf{r}$, la norme spectrale coïncide avec la norme $f \mapsto |f(\eta_{\mathbf{r}})|$ évaluation en $\eta_{\mathbf{r}}$ le bord de Shilov de $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$.

(2.1.0.6) Lemme. — *Il existe un isomorphisme de $\widetilde{k}$-algèbres entre $\widetilde{\mathcal{A}_{\mathbf{r}}}$ et l'annéloïde*

$$\widetilde{k}\left[r_1^{-1}\tau_1, \ldots, r_n^{-1}\tau_n\right]$$

modulo l'identification de $\widetilde{T}_i$ avec τ_i.

Démonstration. Corollaire de [Tem04, Proposition 3.1 (i)]. □

(2.1.0.7) Proposition. — *Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$, on note $s_i = ||f_i||_\infty$. On suppose qu'il existe $A \in \mathrm{GL}\left(\widetilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r}\right)$ et $B \in \widetilde{k}(\mathbf{s})_1$ tels que*

$$(\widetilde{f}_i) = A(\tau_i) + B.$$

Alors (f_i) est un système de coordonnées induisant un isomorphisme entre $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ et $\mathbb{D}_{\mathbf{s}}$.

(2.1.0.8) Remarque. — Rappelons que $A \in \mathrm{GL}\left(\widetilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r}\right)$ signifie simplement que A est de la forme $(a_{i,j})_{i,j=1..n}$ avec $a_{i,j} \in \widetilde{k}_{r_j^{-1}s_i}$ et $\det(A) \in \widetilde{k}_R^\times$ où $R = \prod_{i=1..n}(r_i^{-1}s_i)$, et que $B \in \widetilde{k}(\mathbf{s})_1$ signifie que B est de la forme $(b_i)_{i=1..n}$ avec $b_i \in \widetilde{k}_{s_i}$.

Démonstration. On note $\varphi : \mathbb{D}_{\mathbf{r}} \to \mathbb{D}_{\mathbf{s}}$ le morphisme induit par les f_i.

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ un antécédent de A et $Q \in k^n$ un antécédent de B. Quitte à composer φ avec l'isomorphisme $\mathbb{D}_{\mathbf{s}} \to \mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ induit par

$$(T_i) \mapsto P^{-1}((T_i) - Q)$$

on peut supposer que $(\widetilde{f}_i) = (\tau_i)$. Il nous reste à montrer qu'alors (f_i) est un système de coordonnées induisant un automorphisme de $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$.

Si l'on construit pour tout i une fonction g_i de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ telle que $g_i(\mathbf{f}) = T_i$, la famille (g_i) induira un endomorphisme ψ de $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ tel que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. La famille (g_i) vérifiant

les mêmes hypothèses que la famille (f_i) on pourra construire un inverse à gauche de ψ ainsi ψ sera inversible donc φ aussi et on en aura terminé.

Commençons par traduire en terme de séries notre hypothèse. Que $f_i \in \mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ vérifie $\widetilde{f_i} = \tau_i$ signifie que

$$f_i = a_i T_i + \sum a_{i,I}^{(0)} \mathbf{T}^I$$

où

$$\lim_{|I|\to\infty} |a_{i,I}^{(0)}|\mathbf{r}^I = 0,\ |a_i| = 1 \text{ et } |a_{i,I}^{(0)}|\mathbf{r}^I < r_i.$$

Quitte à composer φ avec l'automorphisme induit par $T_i \mapsto a_i^{-1} T_i$ on peut supposer $a_i = 1$.

Notons $f_i^{(0)} := \sum a_{i,I}^{(0)} \mathbf{T}^I$, et

$$\delta := \max_i \left(\frac{||f_i^{(0)}||_\infty}{r_i} \right),$$

par construction $\delta < 1$ et $||f_i^{(0)}||_\infty \leq r_i \delta$. Il nous sera utile de remarquer que pour tout tout $I \in \mathbb{N}^n$

$$||\mathbf{T}^I - \mathbf{f}^I||_\infty \leq \mathbf{r}^I \delta.$$

En effet,

$$\mathbf{T}^I - \mathbf{f}^I = \mathbf{T}^I - (\mathbf{T} + \mathbf{f}^{(\mathbf{0})})^I = \sum_{J+K=I, K\neq 0} a_{J,K} \mathbf{T}^J (\mathbf{f}^{(0)})^K,$$

où les $a_{J,K}$ sont entiers (i.e. sommes finies de 1 dans k), en particulier $|a_{J,K}| \leq 1$. La majoration $||f_i||_\infty \leq r_i \delta$ implique ainsi que $||(\mathbf{f}^{(0)})^K||_\infty \leq \mathbf{r}^K \delta^{|K|}$ et donc que

$$||a_{J,K} \mathbf{T}^J (\mathbf{f}^{(0)})^K||_\infty \leq ||\mathbf{T}^J||_\infty . ||(\mathbf{f}^{(0)})^K||_\infty \leq \mathbf{r}^{J+K} \delta^{|K|}$$

d'où

$$||\mathbf{T}^I - \mathbf{f}^I||_\infty \leq \max_{J+K=I, K\neq 0} ||a_{J,K} \mathbf{T}^J (\mathbf{f}^{(0)})^K||_\infty \leq \max_{J+K=I, K\neq 0} \mathbf{r}^{J+K} \delta^{|K|} \leq \mathbf{r}^I \delta.$$

Construisons par récurrence sur m une suite $(\mathcal{E}_m, g_1^{(m)}, f_1^{(m)})_m$ vérifiant :

- $\mathcal{E}_m$ est une partie *finie* de $\mathbb{N}^n$;
- $g_1^{(m)} = T_1 - \sum_{i=0..m} (\sum_{I\in\mathcal{E}_i} a_{1,I}^{(i)} \mathbf{T}^I)$ où $\forall i \in \mathbb{N}, \forall I \in \mathcal{E}_i,\ |a_{1,I}^{(i)}|\mathbf{r}^I \leq r_1 \delta^i$;
- $g_1^{(m)}(\mathbf{f}) = T_1 + f_1^{(m)}$ où $f_1^{(m)} \in \mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ et $||f_1^{(m)}||_\infty \leq r_1 \delta^{m+1}$.

Soit $\mathcal{E}_0 := \emptyset$ et $g_1^{(0)} := T_1$, alors

$$g_1^{(0)}(\mathbf{f}) = T_1 + f_1^{(0)},$$

(nous avons fixé $f_i^{(0)}$ supra) et $(\mathcal{E}_0, g_1^{(0)}, f_1^{(0)})$ vérifie l'hypothèse de récurrence.

Supposons que l'on ait $(\mathcal{E}_i, g_1^{(i)}, f_1^{(i)})$ pour tout $i \leq m$ et construisons le triplet suivant. Écrivons

$$f_1^{(m)} = \sum_I a_{i,I}^{(m+1)} \mathbf{T}^I.$$

Comme $\lim_{|I|\to\infty} a_{i,I}^{(m)} = 0$ puisque $f_1^{(m)} \in \mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ l'ensemble de multi-indices

$$\mathcal{E}_{m+1} := \left\{ I \,,\, |a_{i,I}^{(m+1)}|\mathbf{r}^I \in]r_1\delta^{m+2}; r_1\delta^{m+1}] \right\}$$

est fini.

Posons

$$g_1^{(m+1)} := T_1 - \sum_{i=0\ldots m+1} (\sum_{I\in\mathcal{E}_i} a_{1,I}^{(i)} \mathbf{T}^I).$$

Alors

$$\begin{aligned} g_1^{(m+1)}(\mathbf{f}) &= g_1^{(m)}(\mathbf{f}) - \sum_{I\in\mathcal{E}_{m+1}} a_{1,I}^{(m+1)} \mathbf{f}^I \\ &= T_1 + f_1^{(m)} - \sum_{I\in\mathcal{E}_{m+1}} a_{1,I}^{(m+1)} \mathbf{f}^I \\ &= T_1 + \sum_{I\notin\mathcal{E}_{m+1}} a_{I,1}^{(m+1)} \mathbf{T}^I + \sum_{I\in\mathcal{E}_{m+1}} a_{1,I}^{(m+1)} (\mathbf{T}^I - \mathbf{f}^I). \end{aligned}$$

Posons

$$f_1^{(m+1)} := \sum_{I\notin\mathcal{E}_{m+1}} a_{I,1}^{(m+1)} \mathbf{T}^I + \sum_{I\in\mathcal{E}_{m+1}} a_{1,I}^{(m+1)} (\mathbf{T}^I - \mathbf{f}^I),$$

alors $f_1^{(m+1)}$ appartient à $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ puisque combinaison linéaire finie de produits finis de fonctions de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ (nommément $f_1^{(m)}$ et les f_i). Par ailleurs

$$|| \sum_{I\notin\mathcal{E}_{m+1}} a_{I,1}^{(m+1)} \mathbf{T}^I ||_\infty \leq r_1\delta^{m+2},$$

puisque, pour tout I, $||a_{I,1}^{(m+1)}\mathbf{T}^I||_\infty \leq ||f_1^{(m)}||_\infty \leq r_1\delta^{m+1}$ et pour tout $I \notin \mathcal{E}_{m+1}$, $||a_{I,1}^{(m+1)}\mathbf{T}^I||_\infty \notin]r_1\delta^{m+2}, r_1\delta^{m+1}]$. Enfin pour tout $I \in \mathcal{E}_{m+1}$,

$$||a_{I,1}^{(m+1)}(\mathbf{T}^I - \mathbf{f}^I)||_\infty \leq |a_{I,1}^{(m+1)}|\mathbf{r}^I\delta \leq (r_1\delta^{m+1})\delta.$$

Donc $||f_1^{(m+1)}||_\infty \leq r_1\delta^{m+2}$. Ceci achève la récurrence.

Enfin on pose $g_1 := \lim_m g_1^{(m)}$, par construction

$$g_1(\mathbf{f}) = T_1$$

et $g_1 \in \mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_1 a un nombre fini de monômes de norme supérieure à $r_1\delta^n$ et $\delta < 1$. $\square$

(2.1.0.9) Corollaire. — *La flèche naturelle*

$$\mathrm{Aut}\,(\mathcal{A}_{\mathbf{r}}) \to \mathrm{Aut}\,(\widetilde{\mathcal{A}_{\mathbf{r}}})$$

est surjective.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(\widetilde{\mathcal{A}_{\mathbf{r}}})$. Notons $(\mathbf{f}) := (\varphi(\tau_i))_i$ et $(\mathbf{g}) := (\varphi^{-1}(\tau_i))_i$ les familles (de polynômes) image de (τ_i) par l'automorphisme φ et sa réciproque.

On peut prendre dans $\mathcal{A}_{\mathbf{r}} = k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$ des préimages polynomiales de ces familles. Notons $\mathbf{F}$ (resp. $\mathbf{G}$) une telle préimage de $\mathbf{f}$ (resp. $\mathbf{g}$) et notons F (resp. G) l'endomorphisme de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ induit par la famille $\mathbf{F}$ (resp. $\mathbf{G}$).

Par construction, pour tout i,

$$(\widetilde{F_i(\mathbf{G})}) = f_i(\mathbf{g}) = \tau_i.$$

Donc, d'après la proposition (2.1.0.7), la famille $(F_i(\mathbf{G}))_i$ est un système de fonctions coordonnées induisant un automorphisme de $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$, c'est-à-dire que $F \circ G$ est un automorphisme de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$. On montre de même que $G \circ F$ est un automorphisme, en particulier F est un monomorphisme.

Par ailleurs comme $F \circ G$ est un automorphisme de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$, il existe $u \in \mathrm{Aut}\,(\mathcal{A}_{\mathbf{r}})$ tel que $F \circ G \circ u = \mathrm{id}$. Or un monomorphisme qui a un inverse à droite est un isomorphisme, vérifions le ici,

$$F \circ G \circ u \circ F = F = F \circ \mathrm{id} \Rightarrow G \circ u \circ F = \mathrm{id}$$

donc F a pour inverse $G \circ u$.

Ainsi F est un automorphisme de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ qui induit φ. □

(2.1.0.10) Définition. — Deux polyrayons $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont *k-équivalents* si et seulement s'ils sont de même cardinal n et s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$(s_i r_{\sigma(i)}^{-1})_i \in |k^\times|^n.$$

Un *k-type* est une classe de polyrayons k-équivalents.

On note $\mathcal{T}(k)$ l'ensemble des k-types. (On confondra par abus de notation un polyrayon $\mathbf{r}$ et son k-type.)

(2.1.0.11) Remarque. — Comme $\mathrm{grad}(\widetilde{k}^\times) = |k^\times|$, les définitions de k-équivalents et de $\widetilde{k}$-équivalents ainsi que de k-type et de $\widetilde{k}$-type coïncident et $\mathcal{T}(k) = \mathcal{T}(\widetilde{k})$.

Par ailleurs, de même que dans le cas gradué, la formation de $\mathcal{T}(k)$ est fonctorielle en k et l'application naturelle

$$\mathcal{T}(k) \to \mathcal{T}(L)$$

est surjective.

(2.1.0.12) Notation. — Soit L une extension de k, on note $\tau_{k\to L}$ la surjection naturelle $\mathcal{T}(k) \to \mathcal{T}(L)$.

(2.1.0.13) Remarque. — Évidemment $\tau_{k\to L} = \tau_{\widetilde{k}\to\widetilde{L}}$.

(2.1.0.14) Corollaire. — *Soient deux polyrayons* $\mathbf{r}, \mathbf{s}$*, deux k-polydisques fermés respectivement de polyrayon* $\mathbf{r}$ *et* $\mathbf{s}$ *sont isomorphes si et seulement si* $\mathbf{r}$ *et* $\mathbf{s}$ *sont k-équivalents.*

Démonstration. Implication. Soit (f_i) un système de fonctions coordonnées sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ induisant un isomorphisme vers $\mathbb{D}_{\mathbf{s}}$. Alors

$$(\widetilde{f}_i) = A.(\tau_i) + B + \text{ termes de degré supérieur}$$

avec $A \in \mathrm{GL}\left(\widetilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r}\right)$ et $B \in \widetilde{k}(\mathbf{s})_1$. En particulier $\mathrm{GL}\left(\widetilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r}\right) \neq \emptyset$. Donc $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont $\widetilde{k}$-équivalents, i.e. k-équivalents.

Réciproque. Il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}\left(\widetilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r}\right)$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ un antécédent de A, alors la famille $P.(T_i)$ a pour réduction

$$A.(\tau_i)$$

et définit d'après la proposition (2.1.0.7) un système de fonctions coordonnées induisant un isomorphisme de $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ vers $\mathbb{D}_{\mathbf{s}}$. □

(2.1.0.15) Remarque. — L'application $\mathbf{r} \mapsto \mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ induit donc une bijection entre les k-types $\mathcal{T}(k)$ et les classes d'isomorphie de k-polydisques fermés.

(2.1.0.16) Définition. — Un *k-polydisque fermé de k-type* $\mathbf{r}$ est un espace k-analytique isomorphe à $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$.

(2.1.0.17) Définition. — Nous dirons que l'action d'un groupe G sur le k-polydisque fermé centré en zéro $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ est *résiduellement affine* si l'action induite sur le plan $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{r}} \simeq \widetilde{k}\left[r_1^{-1}\tau_1, \ldots, r_n^{-1}\tau_n\right]$ est affine. C'est-à-dire, pour tout $g \in G$:

$$g.(\tau_i) = A(\tau_i) + B$$

où, $A \in \mathrm{GL}(\widetilde{k}, \mathbf{r})$ et $B \in \widetilde{k}(\mathbf{r})_1$.

Nous dirons que l'action d'un groupe G sur *un* k-polydisque fermé de type $\mathbf{r}$ abstrait X est résiduellement affine s'il existe un isomorphisme $X \to \mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ tel que l'action induite sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ est résiduellement affine.

(2.1.0.18) Remarque. — La proposition (2.1.0.7) joue le même rôle dans notre travail que [Duc12, Proposition 3.4] et [Sch15, Proposition 2.18] dans leurs papiers. Elle implique en particulier qu'un groupe fini G dont l'action sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ induit une action par

automorphismes *affines* (donc préservant le grade) sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{r}}$ agit par automorphismes préservant la norme spectrale sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$.

2.2 Dentelles

On note $T_1, \ldots, T_n$ des coordonnées sur $\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}$.

On note $\rho : x \mapsto \eta_{(|T_1(x)|,\ldots,|T_n(x)|)}$ la rétraction de $\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}$ sur son squelette $S(\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}})$.

(2.2.0.1) Notation. — Soit U une partie de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$, nous noterons

$$\eta_U = \{\eta_{\mathbf{r}} \in \mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}, \mathbf{r} \in U\};$$

$$\mathbb{D}_U = \rho^{-1}(\eta_U) = \{x \in \mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}\,,\ (|T_1(x)|, \ldots, |T_n(x)|) \in U\}.$$

Nous considérons $(\mathbb{R}_+^\times)$ comme un espace vectoriel réel, la loi interne étant donnée par sa structure de groupe abélien et la loi externe par l'exponentiation coordonnée par coordonnée. (Ce point de vue « multiplicatif » est dû à Berkovich.)

(2.2.0.2) Définition. — On note $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{R}_+^\times)^n)$ l'ensemble des applications affines de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ vers $\mathbb{R}_+^\times$ de la forme

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto r \prod t_i^{a_i}$$

où les a_i appartiennent à $\mathbb{Z}$ et où $r \in \mathbb{R}_+^\times$.

Un *$\mathbb{Z}$-polytope* de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ définie par une condition de la forme :

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} \varphi_{i,j} \leq 1$$

où I et J sont des ensembles finis d'indices et où les $\varphi_{i,j}$ appartiennent à $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{R}_+^\times)^n)$.

(2.2.0.3) Définition. — Soit X un espace topologique séparé et localement compact. Soit Y une partie de X et soit (Y_i) une famille de sous-ensembles de Y. On dit que la famille (Y_i) est un *G-recouvrement* de Y si tout point y de Y possède un voisinage dans Y de la forme $U_{i \in I} Y_i$ où I est un ensemble fini d'indices et où $y \in \cap_{i \in I} Y_i$.

(2.2.0.4) Définition. — Une *partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de* $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ est une partie de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ qui admet un G-recouvrement par une famille de $\mathbb{Z}$-polytopes de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$.

(2.2.0.5) Remarque. — Soit U un $\mathbb{Z}$-polytope non vide convexe, c'est-à-dire non vide et défini par une condition de la forme :

$$\bigwedge_{i=1..m} \varphi_i \leq 1$$

où les $\varphi_i : \mathbf{t} \mapsto r_i \mathbf{t}^{\mathbf{a_i}}$ appartiennent à $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{R}_+^\times)^n)$. Alors $\mathbb{D}_U$ est un domaine k-affinoïde de $\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}$. Pour le voir : noter R un réel positif non nul tel que U soit inclus dans le pavé $[R^{-1}; R]^n$ et remarquer que la partie $\mathbb{D}_U$ est isomorphe au spectre analytique de

$$k\{R^{-1}T_1, R^{-1}T_1^{-1}, \dots R^{-1}T_n, R^{-1}T_n^{-1}, r_1^{-1}S_1, \dots, r_m^{-1}S_m\}/(\mathbf{T}^{\mathbf{a_i}} - S_i)_{i=1..m}.$$

Ainsi quand U est une partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ non vide, $\mathbb{D}_U$ est un domaine k-analytique de $\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}$ et donc un espace k-analytique. En effet, on a par construction un G-recouvrement de $\mathbb{D}_U$ par des domaines k-affinoïdes de $\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}$ ([Ber93]).

(2.2.0.6) Remarque. — Pour toute partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ on peut décrire le squelette η_U de $\mathbb{D}_U$ comme l'ensemble des points maximaux de $\mathbb{D}_U$ pour la relation : $x \leq y$ si et seulement si $|f(x)| \leq |f(y)|$ pour toute fonction analytique f sur $\mathbb{D}_U$.

Donc le squelette ne dépend pas du choix de coordonnées et $\sigma(\eta_U) = \eta_U$ pour tout automorphisme σ d'espace analytique de $\mathbb{D}_U$ (remarquons que σ peut agir non trivialement sur k).

(2.2.0.7) Remarque. — Soit U une partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ connexe, la rétraction ρ de $\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}}$ sur son squelette induit une rétraction canonique de $\mathbb{D}_U$ vers η_U. En fait il existe ([Ber99]) une rétraction par déformation $\Phi : \mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}} \times [0;1] \to S(\mathbb{G}_m^{n,\mathrm{an}})$ qui préserve $|T_i|$ pour tout i et donc rétracte $\mathbb{D}_U$ sur η_U, de la connexité de η_U découle alors celle de $\mathbb{D}_U$; la rétraction ρ est simplement $\Phi(\bullet, 1)$.

Si L est une extension complète de k nous utiliserons les notations $\mathbb{D}_{U,L}$ et $\eta_{U,L}$ dans un sens évident. La flèche $\mathbb{D}_{U,L} \to \mathbb{D}_U$ induit un homéomorphisme $\eta_{U,L} \simeq \eta_U$, et, par les formules, $\mathbb{D}_{U,L} \to \mathbb{D}_U$ commute aux rétractions canoniques de $\mathbb{D}_{U,L}$ sur $\eta_{U,L}$ et de $\mathbb{D}_U$ sur η_U.

Le point $\eta_{\mathbf{r},\widehat{k^a}}$ de $\mathbb{G}_{\widehat{k^a}}^{n,\mathrm{an}}$ est par définition invariant sous l'action de Galois ; il s'ensuit que si L est une extension complète de k admettant un k-plongement isométrique dans $\widehat{k^a}$ (appellé *extension presque algébrique de k* dans [Duc]), l'image réciproque de η_U sur $\mathbb{D}_{U,L}$ est exactement $\eta_{U,L}$.

(2.2.0.8) Définition. — Une *k-dentelle de squelette U* est un espace k-analytique X isomorphe à $\mathbb{D}_U$ avec U une partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ connexe et non vide. Quand U est un produit d'intervalles, ce qui est toujours vrai en dimension un, on parlera de manière équivalente de *k-couronne de squelette U*.

On appelle $\mathbb{D}_U$ *la k-dentelle de squelette U centrée en zéro.* [1]

1. On parle de k-dentelle « centrée en zéro » par analogie avec les polydisques, en fait le choix de zéro ne suffit pas, il faut aussi choisir l'infini.

Nous dirons qu'une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ de fonctions sur une k-dentelle X est un *système de coordonnées* si les f_i induisent un isomorphisme entre X et $\mathbb{D}_U$ où U est une partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ connexe et non vide.

Un isomorphisme $X \simeq \mathbb{D}_U$ identifie η_U à une partie de X qui ne dépend pas du choix du système de coordonnées (cf. remarque (2.2.0.6)) ; nous l'appellerons *squelette analytique* de X et nous le noterons $S^{\mathrm{an}}(X)$.

(2.2.0.9) Remarque. — Quand X est un espace k-analytique et L une extension galoisienne de k tels que X_L soit une L-dentelle, l'action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ sur X_L fixe (mais n'est pas forcément triviale sur) le squelette de X_L ; c'est une conséquence de la remarque (2.2.0.6).

Dans toute la suite de la section, U désignera une partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux connexe et non vide.

(2.2.0.10) Remarque. — Nous allons vouloir obtenir un analogue de la proposition (2.1.0.7), c'est-à-dire un critère pour déterminer à partir de sa réduction si une famille de fonctions analytiques est un système de fonctions coordonnée.

Prenons $\mathbb{D}_{[1;2]}$ la k-couronne fermée de squelette $[1;2]$ centrée en 0. Et munissons l'algèbre de ses fonction analytiques de la norme spectrale comme nous l'avions fait pour les polydisques. La fonction T est une fonction coordonnée sur $\mathbb{D}_{[1;2]}$ alors que ce n'est pas vrai pour la fonction $T + T^{-1}$; pourtant ces fonctions ont même réduction pour la norme spectrale. En effet $||T||_\infty = ||T + T^{-1}||_\infty = 2$ et $||T^{-1}||_\infty = 1$ donc

$$\widetilde{T} = \widetilde{T + T^{-1}}.$$

Il nous faut donc considérer une autre réduction.

(2.2.0.11) Définition. — Soit X un espace k-analytique ; soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X et x un point de X. Pour tout réel r strictement positif, on note

- $\mathcal{A}_{x,\leq r}$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ formé des éléments a tels que que $|a(x)| \leq r$;
- $\mathcal{A}_{x,<r}$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ formé des éléments a tels que que $|a(x)| < r$;
- $\widetilde{\mathcal{A}}_r^x := \mathcal{A}_{x,\leq r}/\mathcal{A}_{x,<r}$.

On pose

$$\widetilde{\mathcal{A}}^x = \coprod_{r \in \mathbb{R}_+^\times} \mathcal{A}_{x,\leq r}/\mathcal{A}_{x,<r}.$$

On l'appelle *la réduction de $\mathcal{A}$ en x* ; c'est un annéloïde.

Si $a \in \mathcal{A}$ et si r est un réel strictement positif supérieur ou égal à $|a(x)|$, on notera $\widetilde{a}_r^x$ l'image de a dans $\widetilde{A}_r^x$. Si $r = |a(x)|$, on écrira simplement $\widetilde{a}^x$.

(2.2.0.12) Définition. — Nous noterons $\mathcal{A}_U$ l'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_U$ et pour alléger les notations $\widetilde{\mathcal{A}_U}^{\mathbf{r}}$ sa réduction pour la semi-norme $f \mapsto |f(\eta_r)|$ évaluation en $\eta_{\mathbf{r}}$ pour tout $\mathbf{r} \in U$.

Quand U est un singleton $\{\mathbf{r}\}$ les semi-normes $\eta_{\mathbf{r}}$ et $||.||_\infty$ coïncident, ainsi nous écrirons simplement $\widetilde{\mathcal{A}_{\{\mathbf{r}\}}}$ pour $\widetilde{\mathcal{A}_{\{\mathbf{r}\}}}^{\mathbf{r}}$.

(2.2.0.13) Remarque. — L'algèbre $\mathcal{A}_U$ est l'ensemble des séries $\sum_{I\in\mathbb{Z}^n} a_I \mathbf{T}^I$ telles que, pour tout $\mathbf{r} \in U$, $\lim_{|I|\to+\infty} |a_I|\mathbf{r}^I = 0$.

(2.2.0.14) Lemme. — *Il existe un isomorphisme de $\widetilde{k}$-algèbres entre $\widetilde{\mathcal{A}_U}^{\mathbf{r}}$ et l'annéloïde*

$$\widetilde{k}[r_1^{-1}\tau_{\mathbf{r},1}, r_1\tau_{\mathbf{r},1}^{-1}, \ldots, r_n^{-1}\tau_{\mathbf{r},n}, r_n\tau_{\mathbf{r},n}^{-1}]$$

modulo les identifications de $\widetilde{T_i}^{\mathbf{r}}$ avec $\tau_{\mathbf{r},i}$ (de degré r_i) et de $\widetilde{T_i^{-1}}^{\mathbf{r}}$ avec $\tau_{\mathbf{r},i}^{-1}$ (de degré r_i^{-1}).

Démonstration. Corollaire de [Tem04, Proposition 3.1 (ii)] en remarquant que $f \mapsto |f(\eta_{\mathbf{r}})|$ est la norme spectrale de l'algèbre des fonctions analytiques du polydisque fermé de polyrayon $\mathbf{r}$. □

(2.2.0.15) Définition. — Soit $f = \sum_I a_I \mathbf{T}^I$ une fonction de $\mathcal{A}_U$. Nous dirons que f a un *monôme strictement dominant de polydegré I* si pour tout $\mathbf{r} \in U$ et tout $J \neq I$,

$$|a_I|\mathbf{r}^I > |a_J|\mathbf{r}^J.$$

(2.2.0.16) Lemme. — *Une fonction de $\mathcal{A}_U$ est inversible si et seulement si elle a un monôme strictement dominant.*

Démonstration. Si elle en a un elle s'écrit $f = a_I\mathbf{T}^I(1+u)$ avec $|u(\eta_{\mathbf{r}})| < 1$ pour tout $\mathbf{r} \in U$ et est donc inversible.

Réciproquement, pour tout $\mathbf{r} \in U$ la réduction $\widetilde{f}^{\mathbf{r}}$ est inversible dans $\widetilde{\mathcal{A}_{\{\mathbf{r}\}}}$. Donc s'écrit $\widetilde{a_{I(\mathbf{r})}}\tau_{\mathbf{r}}^{I(\mathbf{r})}$, c'est-à-dire que pour tout $\mathbf{r} \in U$ il existe un unique n-uplet $I(\mathbf{r})$ tel que

$$|a_{I(\mathbf{r})}|\mathbf{r}^{I(\mathbf{r})} = \max |a_I|\mathbf{r}^I.$$

La fonction $\mathbf{r} \mapsto I(\mathbf{r})$ est par conséquent localement constante et donc constante sur U. □

(2.2.0.17) Proposition. — *Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_U$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *les f_i forment un système de fonctions coordonnées ;*
2. *pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction f_i admet un monôme strictement dominant de polydegré I_i et la matrice ayant pour lignes les I_i appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$;*

3. *pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $a_i \neq 0$ et $I_i \in \mathbb{Z}$ tels que, pour tout $\mathbf{r} \in U$,*

$$\widetilde{f}_i^{\mathbf{r}} = a_i(\tau_{\mathbf{r},i})^{I_i}$$

et tels que la matrice ayant pour lignes les I_i appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

(2.2.0.18) Exemple. — Sur la k-dentelle de squelette $\{(1,1)\}$ centrée en zéro, les couples

$$(f_1, f_2) = (T_1 T_2^{-1}, T_2) \text{ et } (g_1, g_2) = (T_1 T_2, T_2)$$

définissent deux systèmes de fonctions coordonnées induisant des automorphismes inverses l'un de l'autre.

Démonstration. L'équivalence 2 $\Leftrightarrow$ 3 suit des définitions, prouvons 1 $\Leftrightarrow$ 2.

On notera $\mathbf{I}$ la matrice ayant pour lignes les I_i.

Implication. Chaque f_i est inversible puisque fonction coordonnée, et admet donc un monôme strictement dominant de polydegré I_i. On vérifie que les polydegrés des monômes strictement dominant des fonctions induisant l'isomorphisme inverse donnent immédiatement l'inverse de $\mathbf{I}$.

Réciproque. Notons J_i le i-ème vecteur ligne de $\mathbf{I}^{-1}$. Quitte à remplacer $(T_1, \dots, T_n)$ par $(\mathbf{T}^{J_1}, \dots, \mathbf{T}^{J_n})$ (système de fonctions coordonnées induisant un morphisme d'inverse évident), on peut supposer, pour tout i, que f_i a pour monôme strictement dominant $a_i T_i$. Donc, quitte à remplacer à nouveau $(T_1, \dots, T_n)$ par $(a_1^{-1} T_1, \dots, a_n^{-1} T_n)$, on peut supposer, pour tout i, que f_i a pour monôme strictement dominant T_i.

Soit $\mathbf{r} \in U$, on peut, pour tout i, écrire f_i de deux façons :

- $T_i(1 + u_i)$ où $u_i \in \mathcal{A}_U$ et $|u_i(\eta_{\mathbf{r}})| < 1$;
- $T_i + f_i^{(0)}$ où $f_i^{(0)} \in \mathcal{A}_U$ et $|f_i(\eta_{\mathbf{r}})| < r_i$.

Évidemment $f_i^{(0)} = T_i u_i$ et $|f_i^{(0)}(\eta_{\mathbf{r}})| = r_i |u_i(\eta_{\mathbf{r}})|$. Notons

$$\delta := \max_i |u_i(\eta_{\mathbf{r}})| = \frac{|f_i^{(0)}(\eta_{\mathbf{r}})|}{r_i}.$$

Soit $I \in \mathbb{Z}^n$, on peut écrire $I = I_+ - I_-$ avec $I_+, I_- \in \mathbb{N}^n$. Alors

$$|(1 - (1 + \mathbf{u})^I)(\eta_{\mathbf{r}})| = \underbrace{|(1 + \mathbf{u})^{-I_-}(\eta_{\mathbf{r}})|}_{=1} . \underbrace{|((1 + \mathbf{u})^{I_-} - (1 + \mathbf{u})^{I_+})(\eta_{\mathbf{r}})|}_{\leq \delta}$$

et donc

$$|(\mathbf{T}^I - \mathbf{f}^I)(\eta_{\mathbf{r}})| = |\mathbf{T}^I(\eta_{\mathbf{r}})| . |(1 - (1 + \mathbf{u})^I)(\eta_{\mathbf{r}})| \leq \mathbf{r}^I \delta.$$

La famille (f_i) induit un endomorphisme $\varphi_{\mathbf{r}}$ de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$. Fort de l'inégalité ci-dessus, on utilise la méthode de la preuve de la proposition (2.1.0.7) pour construire une

famille de fonctions $(g_{\mathbf{r},i})$ de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ qui induit un automorphisme $\psi_{\mathbf{r}}$, réciproque de $\varphi_{\mathbf{r}}$. En particulier $\varphi_{\mathbf{r}}$ est un automorphisme de $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$.

Pour tout $\mathbf{r} \in U$, l'automorphisme $\varphi_{\mathbf{r}}$ induit un automorphisme (comme k-algèbre) de $k[[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}]]$ de réciproque induite par $\psi_{\mathbf{r}}$. Comme $\varphi_{\mathbf{r}}$ est induit par la famille (f_i), l'automorphisme induit de $k[[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}]]$ ne dépend pas de $\mathbf{r}$, par conséquent sa réciproque non plus et donc, pour tout $\mathbf{s} \in U$, $\psi_{\mathbf{r}} = \psi_{\mathbf{s}}$, i.e. $(g_{\mathbf{r},i}) = (g_{\mathbf{s},i})$.

Soit $\mathbf{r} \in U$, on pose $g_i := g_{\mathbf{r},i}$, pour tout $\mathbf{s} \in U$, $g_i = g_{\mathbf{s},i} \in \mathcal{A}_{\{\mathbf{s}\}}$ et donc $g_i \in \mathcal{A}_U$.

Par construction la famille (g_i) induit un automorphisme de $\mathcal{A}_U$ réciproque de l'endomorphisme induit par la famille (f_i). La famille (f_i) induit donc un automorphisme de $\mathcal{A}_U$ et partant de $\mathbb{D}_U$. □

(2.2.0.19) Définition. — Il suit des résultats ci-dessus que le groupe

$$\mathcal{L}(\mathbb{D}_U) := \mathcal{A}_U^\times / k^\times (1 + \mathcal{A}_U^{\circ\circ})$$

est libre de rang n, et une famille de fonctions $(f_1, \ldots, f_n)$ est un système de fonctions coordonnées si et seulement si elles sont inversibles et s'envoient sur une base de $\mathcal{L}(\mathbb{D}_U)$ (comme $\mathbb{Z}$-module).

Nous appellerons *réseau* de $\mathbb{D}_U$ le groupe $\mathcal{L}(\mathbb{D}_U)$.

(2.2.0.20) Remarque. — Tout automorphisme de $\mathbb{D}_U$ (même s'il ne fixe pas le corps de base) induit un automorphisme du réseau de $\mathbb{D}_U$.

Le réseau ne dépend pas du choix d'un système de fonctions coordonnées et donc est bien défini pour toute dentelle abstraite.

(2.2.0.21) Remarque. — Quand U est une partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ connexe et non vide, et L une extension galoisienne finie complète de k, l'action de Galois de $\mathrm{Gal}(L/k)$ sur $\mathbb{D}_{U,L}$, induite par son action naturelle sur $\mathbb{G}_L^{n,\mathrm{an}}$, est triviale sur le réseau : il suffit de prendre des coordonnées de $\mathbb{G}_k^{n,\mathrm{an}}$.

Ainsi, si un espace k-analytique X est une k-dentelle, l'action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ est triviale sur le réseau de X_L.

Quand U est d'intérieur non vide un automorphisme de $\mathbb{D}_U$ agit trivialement sur le réseau si et seulement s'il agit trivialement sur le squelette analytique η_U de $\mathbb{D}_U$.

2.3 La dimension 1

L'objet de cette section est de donner une illustration géométrique de la caractérisation des fonctions coordonnées obtenues dans les sections précédentes.

Rappelons qu'une partie $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $\mathbb{R}_+^\times$ connexe et non vide est tout simplement un intervalle non vide quelconque de $\mathbb{R}_+^\times$. Ainsi, en dimension 1 et en cohérence avec l'usage habituel, nous parlons de couronnes plutôt que de dentelles.

2.3.1 Disque fermé

Fixons un rayon r appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$ et considérons $\mathbb{D}_r$, le k-disque fermé centré en 0 de rayon r.

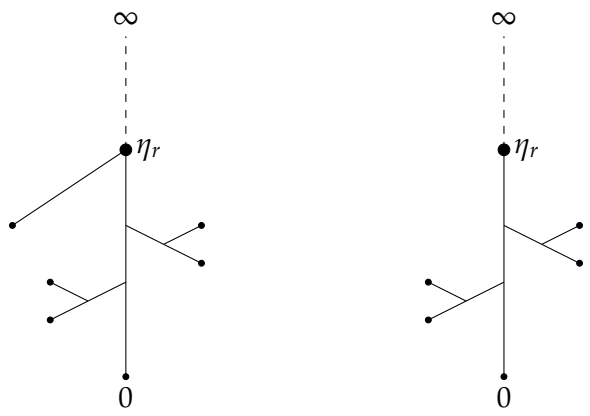

FIGURE 2.1 – Disques fermés

Topologiquement $\mathbb{D}_r$ a une structure d'arbre réel. La structure analytique distingue un sommet particulier : η_r, le bord de Shilov de $\mathbb{D}_r$ qui n'est autre que le squelette analytique de $\mathbb{D}_r$. Selon que η_r est de type 2 (i.e. r est de torsion modulo $|k^\times|$) ou de type 3 (i.e. r n'est pas de torsion modulo $|k^\times|$) le sommet η_r est soit de valence supérieure à 1 soit de valence 1.

Nous notons $\mathcal{A}_r$ l'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_r$, ce sont les séries de la forme $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i T^i$ avec $\lim_{i\to\infty} |a_i| r^i = 0$. On la munit de sa norme spectrale : soit $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i T^i \in \mathcal{A}_r$, elle est donnée par $||f||_\infty = \max_{i\in\mathbb{N}} |a_i| r^i$ et $||f||_\infty = |f(\eta_r)|$.

Nous notons $\widetilde{\mathcal{A}_r}$ sa réduction (graduée) pour la norme spectrale. La $\widetilde{k}$-algèbre $\widetilde{\mathcal{A}_r}$ est isomorphe à l'annéloïde

$$\widetilde{k}[r^{-1}\tau]$$

où l'on note $\tau := \widetilde{T}$.

Une fonction coordonnée sur $\mathbb{D}_r$ est une fonction qui induit un isomorphisme vers un k-disque fermé centré en zéro.

(2.3.1.1) Proposition. — *Soit $f \in \mathcal{A}_r$, alors f est une fonction coordonnée si et seulement si*

$$\widetilde{f} = a\tau + b,$$

avec $a \in \widetilde{k}^\times$ *et* $b \in \widetilde{k}_{||f||_\infty}$.

Démonstration. Si f est une fonction coordonnée induisant un isomorphisme entre $\mathbb{D}_r$ et $\mathbb{D}_{||f||_\infty}$, il existe une fonction $g \in \mathcal{A}_{||f||_\infty}$ induisant l'isomorphisme réciproque et alors

$$1 = \deg(\tau) = \deg(\widetilde{g}(\widetilde{f})) = \deg(\widetilde{g})\deg(\widetilde{f})$$

donc $\deg(\widetilde{f}) = \deg(\widetilde{g}) = 1$. Autrement dit

$$\widetilde{f} = a\tau + b$$

avec $a \in k^\times$ et $||f||_\infty = \mathrm{grad}(\widetilde{f}) = \mathrm{grad}(a)\mathrm{grad}(\tau) = \mathrm{grad}(a)r$.

La réciproque est une conséquence de proposition (2.1.0.7) □

(2.3.1.2) Corollaire. — *L'application* $\mathcal{A}_r \to \mathbb{N}, f \mapsto \deg(\widetilde{f})$ *ne dépend pas du choix de coordonnée.*

Et une fonction $f \in \mathcal{A}_r$ *est une fonction coordonnée sur* $\mathbb{D}_r$ *si et seulement si*

$$\deg(\widetilde{f}) = 1.$$

(2.3.1.3) Remarque. — On peut caractériser les fonctions coordonnées au niveau de $\mathcal{A}_r$. Qu'une fonction $f = \sum a_i T^i$ appartienne à $\mathcal{A}_r$ signifie qu'elle a un monôme dominant de plus haut degré, c'est-à-dire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$||f||_\infty = |a_d|r^d \text{ et } \forall i > d, |a_d|r^d > |a_i|r^i$$

et cette fonction est une fonction coordonnée si et seulement si son monôme dominant de plus haut degré est de degré 1.

Évidemment cette caractérisation-ci est équivalente à celle donnée en terme d'algèbre résiduelle graduée, mais – d'autant qu'il est plus agréable de penser au degré d'un polynôme qu'à des monômes dominants – cette caractérisation-là nous permettra d'utiliser avec profit les méthodes de l'algèbre commutative.

(2.3.1.4) Résumons . Le disque fermé $\mathbb{D}_r$ a un sous-ensemble particulier, son squelette analytique qui est réduit à un point η_r et la semi-norme définie par ce point coïncide avec la norme spectrale.

À l'algèbre des fonctions analytiques sur le disque $\mathcal{A}_r$ on associe sa réduction[2] en η_r, i.e. pour la norme spectrale, $\widetilde{\mathcal{A}_r}$ est un annéloïde de polynômes.

Une fonction analytique f sur le disque est une fonction coordonnée si et seulement si sa réduction $\widetilde{f}$ (en η_r) est de degré 1.

2. On a aimerait écrire « en chaque point du squelette analytique ».

2.3.2 Couronne

Fixons un intervalle I appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$ et considérons $\mathbb{D}_I$, la k-couronne centrée en 0 de squelette I.

Topologiquement $\mathbb{D}_I$ a une structure d'arbre réel. La structure analytique distingue la partie $\eta_I = \{\eta_r\,,\, r \in I\}$, c'est son squelette analytique de $\mathbb{D}_I$.

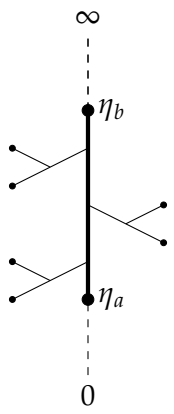

FIGURE 2.2 – Couronne $\mathbb{D}_{[a;b]}$

Nous notons $\mathcal{A}_I$ l'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_I$, ce sont les séries de la forme $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i$ avec $\lim_{|i|\to\infty} |a_i| r^i = 0$ pour tout $r \in I$.

Pour tout $r \in I$, nous notons $\widetilde{\mathcal{A}_I}^r$ sa réduction (graduée) pour la semi-norme η_r. La $\widetilde{k}$-algèbre $\widetilde{\mathcal{A}_I}^r$ est isomorphe à l'annéloïde

$$\widetilde{k}[r^{-1}\tau_r, r\tau_r^{-1}]$$

où l'on note $\tau_r := \widetilde{T}^r$.

Soit $r \in I$. On dit qu'une fonction $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i \in \mathcal{A}_I$ a un monôme strictement dominant de degré d en η_r si pour tout $j \neq d$

$$|a_d| r^d > |a_j| r^j.$$

On dit que f a un monôme strictement dominant de degré d si f a un monôme strictement dominant de degré d en η_r pour tout $r \in I$.

(2.3.2.1) Proposition. — *Soit $f \in \mathcal{A}_I$,*

- *f est inversible si et seulement si f a un monôme strictement dominant ;*
- *f est une fonction coordonnée si et seulement si f a un monôme strictement dominant de degré 1 ou -1.*

(2.3.2.2) Remarque. — Le degré des monômes (strictement) dominant est bien défini à un signe $-$ près, qui dépend du choix d'une fonction coordonnée, c'est ce que nous avons appelé réseau de la dentelle. Quand I n'est pas réduit à un point cela correspond à se donner une orientation du squelette.

On traduit cela en terme d'algèbre résiduelle graduée :

(2.3.2.3) Proposition. — *Une fonction $f \in \mathcal{A}_I$ est inversible si et seulement s'il existe $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \widetilde{k}^\times$ tels que pour tout $r \in I$*

$$\widetilde{f} = a\tau_r^d.$$

Une fonction $f \in \mathcal{A}_I$ est une fonction coordonnée si et seulement s'il existe $d \in \{\pm 1\}$ et $a \in \widetilde{k}^\times$ tels que pour tout $r \in I$

$$\widetilde{f} = a\tau_r^d.$$

Auquel cas f induit un isomorphisme entre $\mathbb{D}_I$ et $\mathbb{D}_{\mathrm{grad}(a).I^d}$.

(2.3.2.4) Notation. — Soit $r \in I$ on note $\deg_r^+$ (resp. $\deg_r^-$) l'application de $\widetilde{\mathcal{A}_I}^r$ dans $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ qui à

- 0 associe $-\infty$ (resp. $+\infty$)
- $P = \sum a_i \tau_r^i$ associe $\max\{i\,,\, a_i \neq 0\}$ (resp. $\min\{i\,,\, a_i \neq 0\}$).

Et on peut définir une application bien définie à l'opération $(a, b) \mapsto (-b, -a)$ près, qui correspond au choix d'une orientation sur la couronne,

$$\Delta : I \times \mathcal{A}_I \to (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^2, (r, f) \mapsto (\deg_r^-(\widetilde{f}), \deg_r^+(\widetilde{f})).$$

Cette application correspond à celle définie pour les disques fermés

$$\mathcal{A}_r \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, f \mapsto \deg(\widetilde{f})$$

que l'on pourrait écrire pour insister sur le parallèle :

$$\{r\} \times \mathcal{A}_r \to (\mathbb{N} \cup \{\infty\}), f \mapsto (\deg(\widetilde{f})).$$

Et alors :

(2.3.2.5) Corollaire. — *Une fonction $f \in \mathcal{A}_I$ est inversible si et seulement s'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que la fontion*

$$r \mapsto \Delta(r, f)$$

est constante égale à (d, d) sur I.

Une fonction $f \in \mathcal{A}_I$ est une fonction coordonnée si et seulement s'il existe $d \in \{\pm 1\}$ tel que

$$r \mapsto \Delta(r, f)$$

est constante égale à (d, d) sur I.

(2.3.2.6) Remarque. — Soit $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \in \mathcal{A}_I$, alors pour tous $i < j$ tels que $a_i, a_j \neq 0$ la fonction $r \mapsto \frac{|a_j| r^j}{|a_i| r^i}$ est strictement croissante sur I. Comme pour tout $r \in I$, $|f(\eta_r)| = \max_i |a_i| r^i$, on en déduit que la fonction $r \mapsto |f(\eta_r)|$ est convexe, et que $\log(r) \mapsto \log(|f(\eta_r)|)$ est linéaire par morceau, c'est-à-dire que l'on a un graphe de la forme donnée figure 2.3. Qui est une sorte de polygone de Newton

FIGURE 2.3 – Norme d'une fonction sur le squelette d'une couronne.

de f (développé dans [Thu05]).

On vérifie facilement que le couple $\Delta(r, f)$ donne exactement la pente à gauche et la pente à droite de $\ln(|f|)$ en $\ln(r)$. Et notre caractérisation des fonctions coordonnées généralise le fait bien connu qu'une fonction est inversible si son polygone de Newton est réduit à un segment.

(2.3.2.7) Remarque. — Remarquons que par construction $\deg_r^-(\widetilde{f}) \leq \deg_r^+(\widetilde{f})$ et que si l'on munit $(\mathbb{Z} \cup \{\pm 1\})^2$ de l'ordre (partiel, mais total sur l'image de Δ) $(a, b) \leq (c, d)$ si et seulement si $b \leq c$ alors la convexité notée ci-dessus se traduit en

$$r < s \Rightarrow \Delta(r, f) \leq \Delta(r', f).$$

Ainsi, même nous ne nous servirons pas de ce fait, remarquons que si I est fermé, il suffit de considérer la réduction en les deux points extrêmes pour caractériser les fonctions inversibles ou coordonnées. (En dimension supérieure on peut utiliser des arguments de convexité de la même manière).

(2.3.2.8) Corollaire. — *Soit $I = [r, s]$.*

Une fonction $f \in \mathcal{A}_I$ est inversible si et seulement s'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\Delta(r, f) = \Delta(s, f) = (d, d).$$

Une fonction $f \in \mathcal{A}_I$ est une fonction coordonnée si et seulement s'il existe $d \in \{\pm 1\}$ tel que

$$\Delta(r, f) = \Delta(s, f) = (d, d).$$

(2.3.2.9) Résumons. Comme le disque fermé, la couronne $\mathbb{D}_I$ a un sous-ensemble particulier, son squelette analytique qui est homéomorphe à I. À l'algèbre $\mathcal{A}_I$ des fonctions analytiques sur la couronne on associe une réduction $\widetilde{\mathcal{A}_I}^r$ en chaque point η_r du squelette.

De la réduction $\widetilde{f}^r$ d'une fonction f en η_r nous pouvons déterminer ce que l'on peut appeler par analogie les pentes à gauche et à droite (de $\log(|f|)$) en η_r, couple dont la définition dépend du choix d'une base du réseau de la couronne ; pour les fonctions inversibles un changement de base simplement lieu à un changement de signe, c'est ce qui motive que dans [Duc] le choix d'une base du réseau est appelé « orientation ».

Enfin une fonction est une fonction coordonnée si et seulement si ses pentes à gauche et à droite sont en tout point du squelette identiquement égales à 1 ou égales -1.

2.4 Exemples de formes non triviales de couronnes

2.4.1 Cas modérément ramifié

Donnons une forme modérément ramifiée de couronne avec action de Galois non triviale sur le réseau et qui n'est pas une couronne quand l'action de Galois n'est pas triviale sur le réseau. Prenons comme corps de base $k = \mathbb{Q}_3$ (muni de la norme 3-adique usuelle où $|3| = \frac{1}{3}$), comme extension modérément ramifiée $\mathbb{Q}_3[i]$ et intéressons-nous à la partie de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_3}$ définie par :

$$\{x \in \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_3}, \frac{1}{4} \leq |(T^2+1)(x)|\}$$

que l'on note X (voir Figure 2.4, le segment $\eta_{[0;\infty]}$ donné comme repère ne joue pas de rôle particulier). L'espace $\mathbb{Q}_3$-analytique X n'est pas une $\mathbb{Q}_3$-couronne (la partie fermée ainsi définie aurait deux bouts de type 2 ou 3 et non un) et pourtant, après extension des scalaires, on peut écrire

$$X_{\mathbb{Q}_3[i]} = \{x \in \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_3[i]}, \frac{1}{2} \leq |\frac{T+i}{T-i}(x)| \leq 2\}$$

et remarquer que l'on obtient une $\mathbb{Q}_3[i]$-couronne avec $f = \frac{T+i}{T-i}$ comme fonction coordonnée. Si l'on note σ la conjugaison complexe, $\sigma(f) = f^{-1}$ donc l'action de Galois sur le réseau de $X_{\mathbb{Q}_3[i]}$ n'est pas triviale.

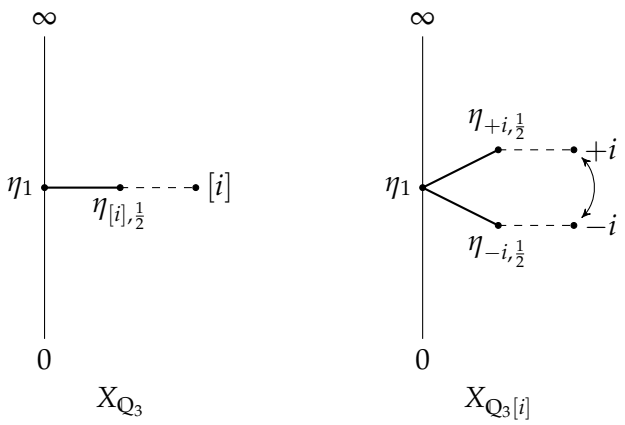

FIGURE 2.4 – Forme modérément ramifiée mais non triviale de couronne

2.4.2 Cas sauvagement ramifié

On peut directement adapter pour les couronnes un des contre-exemples données en [Duc13, (3.8)].

Supposons que k est de caractéristique mixte $(0, p)$ et que le corpoïde résiduel $\widetilde{k}$ n'est pas parfait ; choisissons $a \in k^\times$ tel que $\widetilde{a}$ ne soit pas une puissance p-ième dans $\widetilde{k}$, et posons $r = \sqrt[p]{|a|}$. Soit L la k-algèbre étale $k[X]/(X^p - a)$. Si F est un corps quotient de L alors $\widetilde{a}$ est une puissance p-ième dans $\widetilde{F}$, ce qui montre que $[\widetilde{F} : \widetilde{k}] \geq p$, et donc que $[F : p] \geq p$. Il s'ensuit que L est un corps de degré p sur k, et que $\widetilde{L}$ s'identifie à $\widetilde{k}[r^{-1}X]/(X^p - \widetilde{a})$.

Posons $\varepsilon = |p|^{1/(p-1)}$. Par construction, a possède une racine p-ième ξ dans L ; notons que $|\xi| = r$. Soit F un corps complet algébriquement clos quelconque contenant L et soient $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ les racines p-ièmes de a dans F. Si i est un entier compris entre 2 et p alors $\xi_i = \xi\mu$ pour une certaine racine primitive p-ième de l'unité μ ; on a donc $|\xi_i - \xi| = r\varepsilon$. Soit z un élément de F. On déduit de ce qui précède que l'on a pour tout $s \in]r\varepsilon; r]$ les équivalences suivantes

- $|z - \xi| < s \Leftrightarrow (\forall i,\ |z - \xi_i| < s)$;
- $|z - \xi| \geq s \Leftrightarrow (\forall i,\ |z - \xi_i| \geq s)$.

Soit $s \in]r\varepsilon; r[$ et soit W le domaine analytique de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_k$ défini par l'inégalité $s^p \leq |T^p - a| < r^p$. Nous allons montrer que W_L est isomorphe à une k-couronne, mais que W n'est pas lui-même isomorphe à une k-couronne.

L'espace W_L est isomorphe à une L-couronne. En effet si F est une extension complète algébriquement close de k et si $z \in F$ alors

$$s \leq |z - \xi| < r \Leftrightarrow s^p \leq \prod_i |z - \xi_i| < r^p \Leftrightarrow s^p \leq |z^p - a| < r^p.$$

Ceci valant pour tout extension complète algébriquement close de k, l'ouvert W_L de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$ peut être défini par l'inégalité $s \leq |T - \xi| < r$, et est donc une L-couronne de squelette $[s; r[$.

L'espace W_k n'est pas isomorphe à une k-couronne. Supposons en effet qu'il le soit, et fixons une fonction coordonnée f sur W qui identifie W à la couronne de squelette $[S; R[$ pour des réels $0 < S < R$.

Soit F une clôture séparable de k et soit F_0 l'extension modérément ramifiée maximale de k dans F. La valeur absolue de k n'étant pas triviale (il est de caractéristique mixte), le groupe $|F_0^\times|$ est dense dans $\mathbb{R}_+^\times$; il existe donc $\lambda \in F_0$ tel que $|\lambda| \in [S; R[$. L'élément λ définit, *via* la fonction coordonnée, f un point rigide x de W. Par construction, $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie modérément ramifiée de k.

Posons $\alpha = T(x)$. Comme $\alpha \in W$,

$$|(T^p - a)(x)| < r^p = |a|.$$

Il en résulte les égalités $|\alpha| = r$ et $\widetilde{\alpha}^p = \widetilde{a}$. Mais puisque $\mathcal{H}(x)$ est une extension modérément ramifiée de k, le corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est séparable sur $\widetilde{k}$, et ne peut donc contenir de racine p-ième de $\widetilde{a}$. On aboutit ainsi à une contradiction.

Chapitre 3

Trois théorèmes

3.1 Une proposition clef

Il nous sera pratique d'avoir présenté sous la forme des deux propositions ci-dessous des résultats établis au début de la preuve de [Duc12, Théorème 3.5]. Nous en redonnons les démonstrations.

(3.1.0.1) Proposition. — *Soit k un corps ultramétrique complet et X un espace k-analytique. Soit L une extension finie de k. Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X et $\mathcal{B}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X_L. La flèche naturelle*

$$\mathcal{A} \otimes_k L \to \mathcal{B}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Supposons L une extension finie de k. Choisissons une base $(l_1, \ldots, l_n)$ de L sur k. Si V est un domaine affinoïde de X d'algèbre $\mathcal{A}_V$ alors V_L est un domaine affinoïde de X_L d'algèbre $\mathcal{A}_V \otimes_k L \simeq \oplus \mathcal{A}_V.l_i$; il s'ensuit que la flèche naturelle

$$\mathcal{A} \otimes_k L = \oplus \mathcal{A}.l_i \to \mathcal{B}$$

est un isomorphisme. □

(3.1.0.2) Proposition. — *Soit k un corps ultramétrique complet et X un espace k-analytique compact. Soit L une extension modérément ramifiée de k. Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X et $\mathcal{B}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X_L, que nous munissons de la norme spectrale, et $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{B}}$ leurs réductions pour cette norme. Le morphisme canonique*

$$\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L} \to \widetilde{\mathcal{B}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Choisissons un d-uplet $(l_1, \ldots, l_d)$ d'éléments de $L^\times$ tel que $(\widetilde{l_1}, \ldots, \widetilde{l_d})$ soit une base de $\widetilde{L}$ sur $\widetilde{k}$. Soit $\mathbb{K}$ une extension ultramétrique complète quelconque de k. Comme L est une extension modérément ramifiée de k, la famille $(\widetilde{l_1}, \ldots, \widetilde{l_n})$ est d'après [Duc12, §2.21] encore une base de $\widetilde{(\mathbb{K} \otimes_k L)}$ sur $\widetilde{k}$. Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, [Duc12, Lemme 2.3] assure alors que

$$||\underbrace{\sum \lambda_i l_i}_{\in \mathbb{K} \otimes_k L}|| = \max |\lambda_i|.|l_i|.$$

Donc, par la définition de la norme spectrale d'une fonction analytique, on a pour tout n-uplet $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$, l'égalité

$$|| \sum \underbrace{f_i.l_i}_{\in \mathcal{B}} ||_\infty = \max ||f_i||_\infty |l_i|.$$

On en déduit l'égalité des sommandes $\widetilde{\mathcal{B}}_\rho = \oplus_i \widetilde{L}_{\frac{\rho}{|l_i|}} \widetilde{l_i}$ et donc que le morphisme canonique $\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme. □

(3.1.0.3) Remarque. — Soit x un point de X dont la fibre dans X_L est réduite à un point x_L. On a pour tout n-uplet $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$, l'égalité

$$|(\sum \underbrace{f_i.l_i}_{\in \mathcal{B}})(x_L)| = \max |f_i(x)||l_i|.$$

Donc si l'on note $\widetilde{\mathcal{A}}^x$ la réduction de $\mathcal{A}$ en x et $\widetilde{\mathcal{B}}^{x_L}$ la réduction de $\mathcal{B}$ en x_L. Le morphisme canonique

$$\widetilde{\mathcal{A}}^x \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L} \to \widetilde{\mathcal{B}}^{x_L}$$

est un isomorphisme.

3.2 Formes de polydisques fermés

(3.2.0.1) Théorème. — *Soit k un corps ultramétrique complet, soit X un espace k-analytique, soit L une extension galoisienne finie et modérément ramifiée de k et soit $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$ un polyrayon. Alors X_L est un L-polydisque fermé de L-type $\mathbf{r}$ sur lequel l'action de Galois est résiduellement affine si et seulement si X est un k-polydisque fermé de k-type $\mathbf{s}$, avec*

$$\mathbf{s} \in \tau_{k \to L}^{-1}(\mathbf{r}).$$

Démonstration. La réciproque est évidente, montrons l'implication.

On désigne par $T_1, \ldots, T_n$ un système de fonctions coordonnées sur X_L. Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'algèbre des fonctions analytiques sur X (resp. X_L) que nous munissons

de la norme spectrale, $||.||_\infty$.

Il existe (lemme (2.1.0.6)) un isomorphisme entre $\widetilde{\mathcal{B}}$ et $\widetilde{L}\left[\tau_1, ..., \tau_n\right]$ modulo lequel $\widetilde{T}_i = \tau_i$ est de degré r_i, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(3.2.0.2) Lemme. — *Quitte à remplacer $(T)_{i=1...n}$ par un autre système de coordonnées on peut supposer les τ_i invariants sous l'action de* $\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$.

Démonstration. Par notre hypothèse sur l'action de Galois, quitte à changer de système de fonctions coordonnées, pour tout $g \in \mathrm{Gal}\left(\widetilde{L}/\widetilde{k}\right)$:

$$g.(\tau)_{i=1..n} = A_g(\tau_i)_{i=1..n} + B_g$$

avec

- $A_g = (a_{ij,g})_{i,j=1..n} \in \mathrm{GL}\left(\widetilde{L}, \mathbf{r}\right)$;
- $B_g = (b_{i,g})_{i=1..n} \in \widetilde{L}(\mathbf{r})_1$.

Considérons d'abord seulement les termes de degré 1. On obtient l'identité :

$$A_{gh} = (g.A_h)\, A_g.$$

Donc l'application $g \mapsto A_g^{-1}$ est un cocycle de $\mathrm{Z}^1(G, \mathrm{GL}(\widetilde{L}, \mathbf{r}))$. D'après notre variante du théorème 90 de Hilbert (théorème (1.5.1.3)), il existe $\mathbf{s} = (s_i)_{i=1..n}$ dans $\mathbb{R}^n$ et P dans $\mathrm{GL}\left(\widetilde{L}, \mathbf{s}, \mathbf{r}\right)$ telle que $A_g = (g.P^{-1})P$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$.

Pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$

$$g.(P\,(\tau_i)_{i=1..n}) = P\,(\tau_i)_{i=1..n} + B'_g,$$

avec $B'_g \in \widetilde{L}(\mathbf{s})_1$. Quitte à remplacer $(\tau_i)_{i=1..n}$ par $P\,(\tau_i)_{i=1..n}$ on peut écrire pour tout $g \in \mathrm{Gal}\left(\widetilde{L}/\widetilde{k}\right)$:

$$g.(\tau_i)_{i=1..n} = (\tau_i)_{i=1..n} + B_g,$$

avec $B_g \in \widetilde{L}_{(s_i)}$. Soit coordonnée par coordonnée :

$$g.\tau_i = \tau_i + b_{i,g},$$

où $b_{i,g} \in \widetilde{L}_{s_i}$. Fixons i, soient g et h deux éléments de $\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$; via les égalités

$$(gh).\tau_i = \tau_i + b_{i,gh}$$

$$g.(h.\tau_i) = g.(\tau_i + b_{i,h}) = \tau_i + b_{i,g} + g.b_{i,h}$$

on obtient l'identité

$$b_{i,gh} = b_{i,g} + g(b_{i,h}).$$

Ainsi, pour tout i, l'application $g \mapsto b_{i,g}$ est un cocycle additif de $\mathrm{H}^1\left(G, \widetilde{L}_{s_i}\right)$, et d'après la version graduée additive du théorème 90 de Hilbert (théorème (1.5.2.1)), est un cobord, c'est-à-dire qu'il existe $\widetilde{\mu}_i$ dans $\widetilde{L}_{|\lambda^{-1}|R}$ tel que $b_{i,g} = g.\widetilde{\mu}_i - \widetilde{\mu}_i$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$.

Donc les τ_i peuvent être supposés invariants sous Galois quitte à les translater par μ_i. Il suffit alors de remplacer les T_i par les antécédents de ces nouveaux τ_i. $\square$

Nous avons établi qu'il existe un isomorphisme entre $\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L}$, puisque isomorphe à $\widetilde{\mathcal{B}}$ (proposition (3.1.0.2)), et

$$\widetilde{L}\left[s_1^{-1}\tau_1, ..., s_n^{-1}\tau_n\right],$$

modulo lequel, pour tout i, $\widetilde{T}_i = \tau_i$ est de grade s_i et Galois invariant.

(3.2.0.3) Lemme. — *L'inclusion naturelle*

$$\widetilde{\mathcal{A}} \to \left(\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L}\right)^{\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $f \in \left(\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L}\right)^{\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})}$, l'invariance sous Galois des τ_i a pour conséquence immédiate :

$$\left(\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L}\right)^{\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})} = \widetilde{k}\left[s_1^{-1}\tau_1, ..., s_n^{-1}\tau_n\right].$$

On peut donc écrire $f = \sum a_I \tau^I$ avec pour tout I, $a_{i,I}$.

Choisissons un d-uplet $(l_1, \ldots, l_d)$ d'éléments de $L^\times$ tel que $(\widetilde{l_1}, \ldots, \widetilde{l_d})$ soit une base de $\widetilde{L}$ sur $\widetilde{k}$, comme il ne nous coute rien de prendre $l_1 = 1$ nous le ferons. Alors

$$\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L} = \bigoplus_i \widetilde{\mathcal{A}}.\widetilde{l_i}.$$

On peut donc écrire $f = \sum_i f_i \widetilde{l_i}$ avec $f_i \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Et, pour tout i, de même que pour f, via l'inclusion

$$\widetilde{\mathcal{A}} \to \left(\widetilde{\mathcal{A}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L}\right)^{\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})},$$

on peut écrire $f_i = \sum_I a_{i,I}\tau^I$ avec pour tout I, $a_{i,I} \in \widetilde{k}$.

Alors

$$\begin{aligned} f = \sum f_i \widetilde{l_i} &\Leftrightarrow \sum_I a_I \tau^I = \sum_i (\sum_I a_{i,I}\tau^I)\widetilde{l_i} \\ &\Leftrightarrow \forall I,\ a_I = a_{1,I} + \sum_{i \neq 1} a_{i,I} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall I,\ \underbrace{a_I - a_{1,I}}_{\in \widetilde{k}} = \underbrace{\sum_{i\neq 1} a_{i,I}\widetilde{l}_i}_{\in \bigoplus_{i\neq 0}\widetilde{k}.\widetilde{l}_i}.$$

Donc pour tout I,

$$\sum_{i\neq 1} a_{i,I}\widetilde{l}_i \in \widetilde{k} \cap \bigotimes_{i\neq 1} \widetilde{k}.\widetilde{l}_i = \coprod_r \{0_r\},$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{i\neq 1} a_{i,I}\widetilde{l}_i = 0$$

et, comme les $\widetilde{l}_i$ forment une famille libre, pour tout $i \neq 1$, $a_{i,I} = 0$ (ce pour tout I).

Donc $f = f_1 \in \widetilde{\mathcal{A}}$. □

Donc :

$$\widetilde{k}\left[s_1^{-1}\tau_1, ..., s_n^{-1}\tau_n\right].$$

Il existe ainsi $(f_1, ..., f_n)$ préimage de $(\tau_1, ..., \tau_n)$ dans $\mathcal{A}$; en particulier, les f_i sont de rayon spectral s_i. Soit Y le k-polydisque fermé de polyrayon $\mathbf{s}$ et soit φ le morphisme $X \to Y$ induit par les f_i ; il résulte de la proposition (2.1.0.7) que $\varphi_L : X_L \to Y_L$ est un isomorphisme.

Comme être un isomorphisme descend par extension quelconque des scalaires (voir [CT, Theorem 9.2]), φ est un isomorphisme. Donc X est un k-polydisque fermé de k-type $\mathbf{s}$.

De plus X_L est un L-polydisque à la fois de L-type $\mathbf{r}$ et de L-type $\mathbf{s}$, donc, d'après le corollaire (2.1.0.14) $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont L-équivalents. □

3.3 Formes de bidisques fermés

(3.3.0.1) Théorème. — *Soit k un corps ultramétrique complet, soit X un espace k-analytique, soit L une extension galoisienne finie modérément ramifiée de k et soit $(r,s) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$ un polyrayon. Alors X_L est un L-bidisque de L-type $(r,s) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$ si et seulement si X est un k-bidisque de k-type (r',s') avec*

$$(r',s') \in \tau_{k\to L}^{-1}(r,s).$$

Démonstration. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X et $\mathcal{B}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur X_L. Soit (T_1, T_2) un couple de fonction coordonnées sur X_L induisant un isomorphisme vers $\mathbb{D}_{(r,s),L}$. On note $\tau_1 = \widetilde{T}_1$ et $\tau_2 = \widetilde{T}_2$. Alors l'algèbre résiduelle graduée $\widetilde{\mathcal{B}}$ est isomorphe à

$$\widetilde{L}[r^{-1}\tau_1, s^{-1}\tau_2].$$

Le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ agit par automorphismes sur X_L et partant agit par automorphismes sur $\widetilde{L}[r^{-1}\tau_1, s^{-1}\tau_2]$. (On rappelle que $\mathrm{Gal}(L/k) = \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$). Écrivons pour tout $g \in G$,

$$g.(\tau_1, \tau_2) = \alpha(g)(\tau_1, \tau_2)$$

avec $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(\widetilde{L}[r^{-1}\tau_1, s^{-1}\tau_2])$. On vérifie que pour tout $(g, h) \in G^2$,

$$\alpha(gh) = (g.\alpha(h)) \circ \alpha(g),$$

autrement dit que $\alpha^{-1} \in \mathrm{Z}^1(G, \mathrm{Aut}(\widetilde{L}[r^{-1}\tau_1, s^{-1}\tau_2]))$.

D'après le théorème (1.5.3.1) la flèche

$$\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(\widetilde{L}, (r, s))) \to \mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aut}(\widetilde{L}[r^{-1}\tau_1, s^{-1}\tau_2]))$$

induite par l'inclusion

$$\mathrm{Z}^1(G, \mathrm{GL}(\widetilde{L}, (r, s))) \hookrightarrow \mathrm{Z}^1(G, \mathrm{Aut}(\widetilde{L}[r^{-1}\tau_1, s^{-1}\tau_2]))$$

est un isomorphisme. Donc α^{-1} est cohomologue à un $\beta \in \mathrm{Z}^1(G, \mathrm{GL}(\widetilde{L}, (r, s)))$, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\widetilde{L}[r^{-1}\tau_1, s^{-1}\tau_2])$ tel que pour tout $g \in G$

$$\alpha^{-1}(g) = \varphi^{-1} \circ \beta(g) \circ (g.\varphi).$$

D'après le théorème (1.5.1.3) il existe $(r', s') \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$ et $B \in \mathrm{GL}(\widetilde{L}, (r', s'), (r, s))$ tel que pour tout $g \in G$

$$\beta(g) = B^{-1} \circ (g.B)$$

ainsi pour tout $g \in G$,

$$\alpha(g) = (g.(B \circ \varphi)^{-1}) \circ (B \circ \varphi)$$

Un calcul immédiat montre que pour tout $g \in G$,

$$g.(B \circ \varphi(\tau_1, \tau_2)) = B \circ \varphi(\tau_1, \tau_2).$$

D'après le corollaire (2.1.0.9), à un automorphisme près, c'est-à-dire quitte à remplacer (T_1, T_2) par un autre système de fonctions coordonnées induisant un isomorphisme de X_L vers $\mathbb{D}_{(r,s),L}$, on peut remplacer (τ_1, τ_2) par $\varphi(\tau_1, \tau_2)$.

Maintenant $g.(B(\tau_1, \tau_2)) = B(\tau_1, \tau_2)$ donc quitte à remplacer (T_1, T_2) par un système de fonctions coordonnées préimage de $B(\tau_1, \tau_2)$ l'action de Galois sur le bidisque fermé est résiduellement linéarisable et le résultat suit du théorème

(3.2.0.1) □

3.4 Formes de dentelles

(3.4.0.1) Théorème. — *Soit k un corps ultramétrique complet, L une extension galoisienne finie modérément ramifiée de k et X un espace k-analytique. Alors X_L est une L-dentelle de type $U \subset (\mathbb{R}_+^\times)^n$ telle que l'action de* $\mathrm{Gal}(L/k)$ *est triviale sur le réseau de X_L si et seulement si X est une k-dentelle de squelette $\mathbf{r}.U$ avec $\mathbf{r} \in |L^\times|^n$.*

(3.4.0.2) Remarque. — Il suit de la preuve que si l'on se limite aux classes d'isomorphie par translation, c'est-à-dire aux isomorphismes induits par des familles de la forme $(\lambda_i T_i)$, elles sont en correspondance exacte avec

$$(|L^\times|/|k^\times|)^n = (\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/k), L_1^\times))^n = (\tau_{k\to L}^{-1}(1))^n.$$

Démonstration. Si X est une k-dentelle de type $\mathbf{r}.U$, X_L est une L-dentelle de type $\mathbf{r}.U$, donc de type U – puisque soit $(\lambda_i)_{i=1..n}$ une famille de L^n avec $|\lambda_i| = r_i$, l'application $T_i \mapsto \lambda_i T_i$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{D}_{U,L}$ et $\mathbb{D}_{\mathbf{r}.U,L}$ – et l'action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ sur X_L est triviale sur le réseau (cf. remarque (2.2.0.21)).

Réciproquement, on désigne par $(T_1, \ldots, T_n)$ un système de fonctions coordonnées sur X_L induisant un isomorphisme vers $\mathbb{D}_{U,L}$. Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'algèbre des fonctions analytiques sur X (resp. X_L).

L'isomorphisme $X_L \to \mathbb{D}_{U,L}$ induit un homéomorphisme stable sous Galois entre $S^{\mathrm{an}}(X_L)$ le squelette analytique de X_L et $\eta_{U,L}$. Le passage au quotient sous Galois induit dès lors un homéomorphisme entre une partie de X et $\eta_{U,L}$.

Pour tout $\mathbf{r} \in U$, nous notons naturellement $||.||_{\mathbf{r}}$ les semi-normes sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ correspondant à l'évaluation en $\eta_{\mathbf{r},L}$ modulo les deux homéomorphismes mentionnés ci-dessus. Nous notons $\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}^{\mathbf{r}}$ les réductions graduées de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour les semi-normes $||.||_{\mathbf{r}}$.

Il existe (lemme (2.2.0.14)) un isomorphisme entre $\widetilde{\mathcal{B}}^{\mathbf{r}}$ et

$$\widetilde{L}[r_1^{-1}\tau_{\mathbf{r},1}, r_1\tau_{\mathbf{r},1}^{-1}, \ldots, r_n^{-1}\tau_{\mathbf{r},n}, r_n\tau_{\mathbf{r},n}^{-1}]$$

modulo les identifications de $\widetilde{T_i}^{\mathbf{r}}$ avec $\tau_{\mathbf{r},i}$ (de degré r_i) et de $\widetilde{T_i^{-1}}^{\mathbf{r}}$ avec $\tau_{\mathbf{r},i}^{-1}$ (de degré r_i^{-1}).

Par hypothèse l'action de Galois préserve le réseau de la couronne, autrement dit, pour tout $g \in \mathrm{Gal}(L/k)$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ la fonction $g.T_i$ a pour coefficient dominant αT_i avec $|\alpha| = 1$. Ainsi, pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$, tout $\mathbf{r} \in U$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$g.\tau_{\mathbf{r},i} = a_{i,g}\tau_{\mathbf{r},i}$$

où $a_{i,g} \in \widetilde{L}_1^\times$. Les $a_{i,g}$ ne dépendent pas de $\mathbf{r}$ puisque obtenus par réduction du coefficient du même monôme strictement dominant.

La situation est exactement analogue au cas des polydisques. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'application $g \mapsto a_{i,g}$ est un élément de $\mathrm{Z}^1\left(\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k}), \widetilde{L}_1^\times\right)$ donc, d'après la version graduée du théorème 90 de Hilbert (corollaire (1.5.1.6)), il existe $\lambda_i \in L^\times$ (il n'y a pas de raison que $|\lambda_i| = 1$) tel que $a_{i,g} = \widetilde{\lambda_i}^{-1}(g.\widetilde{\lambda_i})$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Notons $\Lambda = (|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$. Les applications $T_i \mapsto \lambda_i T_i$ induisent un isomorphisme entre $\mathbb{D}_U$ et $\mathbb{D}_{\Lambda.U}$ (d'inverse évidemment induit par $T_i \mapsto \lambda_i^{-1} T_i$) donc, quitte à remplacer U par $\Lambda.U$, on peut supposer, pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$, tout $\mathbf{r} \in U$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ que

$$g.\tau_{\mathbf{r},i} = \tau_{\mathbf{r},i}.$$

Choisissons un d-uplet $(l_1, \ldots, l_d)$ d'éléments de $L^\times$ tel que $(\widetilde{l_1}, \ldots, \widetilde{l_d})$ soit une base de $\widetilde{L}$ sur $\widetilde{k}$, comme il ne nous coute rien de prendre $l_1 = 1$ nous le ferons. Les flèches naturelles

$$\mathcal{A} \otimes_k L = \oplus \mathcal{A}.l_i \to \mathcal{B}$$

et, pour tout $\mathbf{r} \in U$,

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L} = \oplus \widetilde{\mathcal{A}}^{|l_i|^{-1}\mathbf{r}}.\widetilde{l_i} \to \widetilde{\mathcal{B}}^{\mathbf{r}}$$

sont des isomorphismes. Le premier vient de la proposition (3.1.0.1). Le deuxième de la proposition (3.1.0.2) et de la remarque qui le suit.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on peut donc écrire $T_i = \sum_{j=1..d} f_{i,j} l_j$ avec $f_{i,j} \in \mathcal{A}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$. En passant à la réduction on obtient, pour tout $\mathbf{r} \in U$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\tau_{\mathbf{r},i} = \widetilde{f_{i,1}}^{\mathbf{r}} + \sum_{j \neq 1} (\widetilde{f_{i,j}}^{\mathbf{r}})_{|l_j|^{-1} r_i}.\widetilde{l_j}$$

où $\tau_{\mathbf{r},i}$, $\widetilde{f_{i,1}}^{\mathbf{r}}$ et tous les $(\widetilde{f_{i,j}}^{\mathbf{r}})_{|l_j|^{-1} r_i}$ (c'est-à-dire la composante de grade $|l_j|^{-1} r_i$ de la réduction de $f_{i,j}$ dans $\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}}$) sont invariants sous Galois. En particulier

$$\sum_{j \neq 1} (\widetilde{f_{i,j}}^{\mathbf{r}})_{|l_j|^{-1} r_i}.\widetilde{l_j} = \tau_{\mathbf{r},i} - \widetilde{f_{i,1}}^{\mathbf{r}} \in (\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L})^{\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})}.$$

(3.4.0.3) Lemme. — *Pour tout $\mathbf{r} \in U$, l'inclusion naturelle*

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}} \to (\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{L})^{\mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Essentiellement identique à la preuve du lemme (3.2.0.3). □

Donc

$$\sum_{j\neq 1}(\widetilde{f_{i,j}}^{\mathbf{r}})_{|l_j|^{-1}r_i}.\widetilde{l}_j \in \widetilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}} \cap \oplus_{j\neq 1}\widetilde{\mathcal{A}}^{|l_j|^{-1}\mathbf{r}}.\widetilde{l}_j,$$

c'est-à-dire que $\sum_{j\neq 1}(\widetilde{f_{i,j}}^{\mathbf{r}})_{|l_j|^{-1}r_i}.\widetilde{l}_j = 0$ avec pour conséquence immédiate que :

$$\tau_{\mathbf{r},i} = \widetilde{f_{i,1}}^{\mathbf{r}}.$$

Donc, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe $f_i \in \mathcal{A}$ telle que pour tout $\mathbf{r} \in U$,

$$\widetilde{f_{i,1}}^{\mathbf{r}} = \tau_{\mathbf{r},i}.$$

Ainsi pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, dans $\mathcal{B}$, f_i a pour monôme strictement dominant a_iT_i avec $|a_i| = 1$ et $\widetilde{a_i} = \widetilde{1}$. En particulier, d'après le lemme (2.2.0.17), la famille (f_i) forme un système de fonctions coordonnées sur X_L qui induit un isomorphisme $X_L \to \mathbb{D}_{U,L}$

Il existe donc une famille de fonctions analytiques $(f_1,...,f_n)$ dans $\mathcal{A}$ qui induisent un morphisme $\varphi : X \to \mathbb{D}_U$ tel que $\varphi_L : X_L \to \mathbb{D}_{U,L}$ soit un isomorphisme.

Comme être un isomorphisme descend par extension quelconque des scalaires [voir CT, Theorem 9.2], φ est un isomorphisme. $\square$

Bibliographie

[Ber04] Vladimir G Berkovich. "Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible. II". In : *Geometric aspects of Dwork theory* 1 (2004), p. 293–370.

[Ber90] Vladimir G Berkovich. *Spectral Theory and Analytic Geometry Over Non-Archimedean Fields*. American Mathematical Soc., 1990.

[Ber93] Vladimir G Berkovich. "Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces". In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 78.1 (1993), p. 5–161.

[Ber99] Vladimir G Berkovich. "Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible". In : *Inventiones mathematicae* 137.1 (1999), p. 1–84.

[CT] Brian Conrad et Michael Temkin. "Descent for non-archimedean analytic spaces". URL : `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/descentnew.pdf`.

[Dic83] Warren Dicks. "Automorphisms of the polynomial ring in two variables". In : *Publicacions de la Secció de Matemàtiques* 27.1 (1983), p. 155–162.

[Duc] Antoine Ducros. *La structure des courbes analytiques*. URL : `http://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/livre.html`.

[Duc12] Antoine Ducros. "Espaces de Berkovich, polytopes, squelettes et théorie des modèles". In : *Confluentes Mathematici* 4.04 (2012), p. 1250007.

[Duc13] Antoine Ducros. "Toute forme modérément ramifiée d'un polydisque ouvert est triviale". In : *Mathematische Zeitschrift* 273.1-2 (2013), p. 331–353.

[FT17] L. Fantini et D. Turchetti. "Galois descent of semi-affinoid spaces". In : *ArXiv e-prints* (mar. 2017). arXiv : `1703.03698 [math.AG]`.

[Jun42] Heinrich W.E. Jung. "Über ganze birationale Transformationen der Ebene." In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 184 (1942), p. 161–174.

[Kam75] Tatsuji KAMBAYASHI. "On the absence of nontrivial separable forms of the affine plane". In : *Journal of Algebra* 35.1-3 (1975), p. 449–456.

[Kra95] Hanspeter KRAFT. "Challenging problems on affine n-space". eng. In : *Séminaire Bourbaki* 37 (1994-1995), p. 295–317. URL : `http://eudml.org/doc/110203`.

[Mak70] Leonid G. MAKAR-LIMANOV. "On automorphisms of certain algebras". In : *Candidate's dissertation, Moscou* (1970).

[SB77] Jean Pierre SERRE et Hyman BASS. *Arbres, amalgames, SL2 : cours au Collège de France*. Société mathématique de France, 1977.

[Sch15] Tobias SCHMIDT. "Forms of an affinoid disc and ramification". In : *Annales de l'Institut Fourier* 65.3 (2015), p. 1301–1347.

[Ser13] Jean-Pierre SERRE. *Local fields*. T. 67. Springer Science & Business Media, 2013.

[Tem04] Michael TEMKIN. "On local properties of non-Archimedean analytic spaces II". In : *Israel Journal of Mathematics* 140.1 (2004), p. 1–27.

[Thu05] Amaury THUILLIER. "Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov". Thèse de doct. Université Rennes 1, 2005.

[Van53] Wouter VAN DER KULK. "On polynomial rings in two variables". In : *Nieuw Arch. Wisk* 1.3 (1953), p. 33–41.