



HAL
open science

Execution adaptative de trajectoire 5 axes sur structures poly-articulées

Laureen Grandguillaume

► **To cite this version:**

Laureen Grandguillaume. Execution adaptative de trajectoire 5 axes sur structures poly-articulées. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COmUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLN059 . tel-01709080

HAL Id: tel-01709080

<https://theses.hal.science/tel-01709080>

Submitted on 14 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Exécution adaptative de trajectoires 5 axes sur structures poly-articulées

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'École normale supérieure de Cachan
(École normale supérieure Paris-Saclay)

École doctorale n°579
Sciences Mécaniques et Energétiques, Matériaux et Géosciences -
SMEMAG
Spécialité de doctorat : Génie Mécanique

Thèse présentée et soutenue à Cachan, le 07 décembre 2017, par

Laureen GRANDGUILLAUME

Composition du Jury :

Jean-Yves HASCOËT Professeur des Universités Ecole centrale de Nantes (GeM)	Président du jury
Hélène CHANAL Maître de Conférences - HDR Sigma Clermont-Ferrand (Institut Pascal)	Rapporteur
Walter RUBIO Professeur des Universités Université Toulouse III (Institut Clément Ader)	Rapporteur
Christian ARBER Directeur Général (Missler Software)	Examineur
Pedro RODRIGUEZ-AYERBE Professeur des Universités Centrale Supélec (L2S)	Examineur
Christophe TOURNIER Professeur des Universités ENS Paris-Saclay (LURPA)	Directeur de thèse
Sylvain LAVERNHE Maître de Conférences ENS Paris-Saclay (LURPA)	Co-encadrant

Remerciements

La thèse a été pour moi un long voyage. J'ai pris un billet pour une durée déterminée mais pour une destination inconnue. La première année, je suis arrivée aveugle, à la recherche de l'orientation à donner à mes travaux. J'ai ainsi commencé par imiter mes aînés pour éviter un comportement singulier. La deuxième année, j'ai continué à avancer pour combiner au mieux la direction imposée et mes envies dans le but de conquérir le monde civilisé de la recherche. Finalement, après ces 3 années, je me suis rendu compte que tout est une histoire de compromis et cette aventure a surtout été humaine : elle m'a donné une bonne leçon de vie.

Je souhaite remercier en premier lieu l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail, et plus particulièrement Jean-Yves Hascoët pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury. Je tiens à remercier Helène Chanal et Walter Rubio d'avoir accepté de rapporter mes travaux. Je tiens également à remercier Pedro Rodriguez-Ayerbe pour avoir examiné mes travaux et Christian Arber pour sa participation au jury en qualité d'expert au niveau industriel.

Je remercie encore plus particulièrement « mes chefs » : Christophe Tournier et Sylvain Lavernhe. Christophe, merci d'avoir accepté de diriger ces travaux et de m'avoir guidé tout au long de ces trois années. Tes compétences et ton expérience dans le domaine m'ont permis de progresser durant cette aventure. Sylvain, tu as été présent à mes côtés tout au long de mon parcours professionnel : TER de M1, stage de M1, dossier d'agrégation, stage de M2 et thèse. Je te remercie d'avoir pris le temps de m'écouter tant sur le plan professionnel que personnel et d'avoir accepté de t'ouvrir à moi pour que nos échanges en soient facilités. Petit à petit, j'ai appris à te découvrir et à mes yeux tu n'es plus un chef mais un papa, un ami.

J'adresse également mes remerciements à Nabil Anwer, Olivier Bruneau, Laurent Pierre, Yann Quinsat et François Thiebaut pour m'avoir aidé et encouragé dans la préparation de la soutenance. Vos conseils m'ont été d'une très grande utilité.

Je remercie l'ensemble des doctorants et M2 que j'ai rencontré durant mes 3 années de thèse. Votre présence quotidienne : les discussions au coin café, à proximité du baby, ou encore autour de quelques jeux saupoudrés de quelques breuvages ont été pour moi essentielles. Je remercie plus particulièrement mon frère jumeau, plus vieux de seulement quelques heures, présent quotidiennement pendant ces années. Ton empathie, ta bonne humeur, ton sens de l'humour ont été pour moi indispensables. Je remercie El Commandante pour sa confiance : elle a contribué à mon épanouissement au sein du labo. Je remercie mes fidèles lieutenants qui m'ont aidé à prendre le pouvoir et à me défendre contre l'adorable Duck et ses petits canetons. Merci à mes co-bureaux pour les discussions très intéressantes malgré la réticence de l'un d'entre eux à mettre le chauffage. Les

indispensables « Ca a été » à la sortie des réunions et les discussions associées à Franklin, Pedro et Jack ont été une bouffée d'oxygène. Merci à 47(46) d'avoir baptisé et initié les acolytes de Disney. Ces aventures ont été merveilleuses et ont largement contribué à l'écriture de ce manuscrit. Elles resteront gravées dans ma mémoire.

Comme dirait ma « copiiiine », un grand merci à mes amis « pour l'instant » qui m'ont supporté quotidiennement pendant ces 3 années, parfois à distance :

Jo, mon inséparable Jolau, et qui sera bientôt Jomax pour toujours, mon ami intelligent, mon nouveau collègue pas encore docteur, le docteur chômeur mais qui devrait un jour avoir une tour à son nom, le jeune écossais, petit fan de chats, le vieil homme au chien, Dami et bien sûr le bébé.

Pour finir, je tiens à vous remercier : mèch', pich', kikine et les deux L. ou plutôt W. à mes yeux, pour votre confiance et votre soutien tout au long de ces années.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
1 Exécution de trajectoires multi-axes sur structures poly-articulées : un état de l'art	5
1 Processus global de fabrication de pièces	8
1.1 Relation typologie de pièces et procédés de fabrication	8
1.2 Architecture des structures poly-articulées	10
1.2.1 Architectures sérielles	10
1.2.2 Architectures parallèles	11
1.3 Diversité cinématique des structures poly-articulées	12
2 Étude du comportement cinématique en usinage sur MOCN	15
2.1 Transformation géométrique directe et inverse	16
2.2 Influence des contraintes cinématiques sur la vitesse relative outil/pièce . .	16
2.2.1 Profil 7 segments	16
2.2.2 Lien entre la géométrie du trajet et la loi temporelle de mouvement	17
2.3 Lissage	20
2.3.1 Lissage local : format de description G1	20
2.3.2 Lissage global : compactage et format de description polynomial ou spline	21
2.4 Passage de singularité	22
3 Les stratégies d'usinage	26
3.1 Difficultés associées aux trajectoires 5 axes	26
3.2 Stratégies liées à la géométrie de la pièce à usiner	29
3.3 Stratégies liées à la coupe	29
3.4 Stratégies liées à la cinématique	31
3.4.1 Définition des trajets hors matière	31
3.4.2 Définition du posage	31
3.4.3 Définition de la direction d'avance	32
3.4.4 Définition de l'orientation de l'axe de l'outil	32
4 Synthèse de l'état de l'art et problématique des travaux de thèse	35

2	Modèles de manipulabilité cinématique	39
1	Manipulabilité cinématique	42
1.1	Espaces généralisés	42
1.1.1	Espace généralisé articulaire	42
1.1.2	Espace des tâches	43
1.1.3	Passage de l'espace articulaire à l'espace des tâches	43
1.2	Ellipsoïde de manipulabilité cinématique	44
1.2.1	Norme 2 associée à l'espace articulaire	44
1.2.2	Transfert de l'espace articulaire à l'espace des tâches	45
1.2.3	Critères de manipulabilité associés à l'ellipsoïde	46
1.2.4	Limites de l'ellipsoïde de manipulabilité	48
1.3	Polytopes de manipulabilité cinématique	49
1.3.1	Norme infinie associée à l'espace articulaire	49
1.3.2	Transfert de l'espace articulaire à l'espace des tâches	51
1.3.3	Critères de manipulabilité associés aux polytopes	53
2	Analyse de la géométrie du polytope de vitesse pour différentes structures	53
2.1	Représentation graphique des polytopes dans l'espace articulaire	54
2.2	Représentation graphique des polytopes dans l'espace des tâches	54
2.2.1	Principe mathématique de projection et d'intersection de polytopes	55
2.2.2	En usinage 3 axes	56
2.2.3	En usinage 5 axes positionné	58
2.2.4	En usinage 5 axes continu	58
3	Analyse de la géométrie des polytopes d'accélération et de jerk	62
3.1	Polytopes d'accélération et de jerk dans l'espace articulaire	62
3.2	Modèles cinématiques du 2ème et du 3ème ordre	63
3.3	Somme de Minkowski	63
3.4	Décalage du centre du polytope	64
4	Conclusion	66
3	Choix de l'orientation outil/pièce : Application à l'usinage 5 axes positionné	69
1	Paramètres articulaires saturants	72
1.1	Directions de norme maximale dans l'espace articulaire	72
1.2	Détermination du paramètre saturant	74
1.3	Combinaison des directions de plusieurs niveaux cinématiques	77
2	Conséquences du paramètre articulaire saturant sur la trajectoire dans l'espace des tâches	78
2.1	Modèles cinématiques dans un contexte d'usinage 5 axes positionné	78
2.2	Evaluation des capacités cinématiques dans la direction tangentielle	79
3	Choix de l'orientation de l'outil dans le cas de l'usinage de droites	82
3.1	Principe de la méthode proposée	82
3.2	Application à l'usinage des règles d'un paraboloïde hyperbolique	84
3.2.1	Pièce test : paraboloïde hyperbolique	84
3.2.2	Orientation outil/pièce solution pour chaque niveau cinématique	84
3.2.3	Mise en œuvre expérimentale	86

3.3	Collisions potentielles associées à l'orientation optimale	88
4	Choix de l'orientation de l'outil pour des surfaces « tendues »	91
4.1	Pièce test : surface Manta	91
4.2	Adaptation de la méthode proposée	91
4.3	Tests sur le centre d'usinage Mikron UCP710	92
4.4	Limites de la méthode proposée	93
4.4.1	Valeurs de f_{moyen}	93
4.4.2	Temps d'usinage sur la pièce complète	94
5	Application à des architectures hybride ou parallèle	96
5.1	Combinaison des mouvements de translation et de rotation	96
5.2	Algorithme proposé	97
6	Conclusion	99
4	Génération de trajectoires multi-axes	101
1	Combinaison des mouvements relatifs des axes : application au cas XYZ	104
1.1	Modèle cinématique du troisième ordre dans le cas XYZ	104
1.2	Méthode basée sur la combinaison des mouvements relatifs des axes	105
1.3	Influence du positionnement de la pièce dans l'espace de travail	106
1.4	Lien entre la direction d'avance et l'orientation outil/pièce	108
1.5	Prise en compte de la causalité	111
1.6	Mise en œuvre expérimentale	113
1.6.1	Désynchronisation des axes	113
1.6.2	Programmation de trajectoires en mode positioning axes	115
1.6.3	Résultats expérimentaux	116
2	Évolution vers l'optimisation de trajectoires 5 axes en UGV	118
2.1	Mise en avant des difficultés liées au choix d'une stratégie d'usinage 5 axes continu	118
2.2	Optimisation du positionnement de la pièce dans l'espace de travail	120
2.3	Optimisation de la direction d'avance	123
2.4	Optimisation de l'orientation relative outil/pièce	124
2.5	Mise en œuvre expérimentale	127
	Conclusions et perspectives	131
	Références	134
	Annexes	I
A	Modèles géométriques et cinématiques du centre d'usinage Mikron UCP710	I
1	Structure du centre d'usinage Mikron UCP710	I
2	Transformation géométrique directe	II
3	Transformation cinématique directe du premier ordre	III

B	Modèles géométriques et cinématiques du centre d'usinage Huron KX8-five	V
1	Structure du centre d'usinage Huron KX8-five	V
2	Transformation géométrique directe	VI
3	Transformation cinématique directe du premier ordre	VI
C	Modèles géométriques et cinématiques du centre d'usinage Fatronik Verne	VII
1	Structure du centre d'usinage Fatronik Verne	VII
2	Transformation géométrique directe	IX
3	Transformation cinématique directe du premier ordre	IX
D	Modèles géométriques et cinématiques du robot Stäubli RX170B	XI
1	Structure et paramétrage selon le convention de Denavit et Hartenberg modifiée . . .	XI
2	Transformation géométrique directe en position	XII
3	Transformation cinématique directe du premier ordre en position	XII
E	Résolution d'équations typiques en robotique	XIII
F	Extraits des programmes d'usinage dans le cas XYZ	XV

Table des figures

1.1	Processus global de programmation sur structures poly-articulées	8
1.2	Exemple de structures poly-articulées avec une architecture série	11
1.3	Exemple de structures parallèle et hybride	12
1.4	Architectures et caractéristiques cinématiques de trois centres d'usinage et d'un robot	14
1.5	Représentation schématique des tâches effectuées par une commande numérique Beudaert (2013)	15
1.6	Chaîne numérique 5 axes d'une structure $[wC'A'bX_mY_mZ_m(C1)t$	16
1.7	Loi de mouvement de type bang-bang de jerk	18
1.8	Traitement de la géométrie et interpolation temporelle dans la commande numérique Beudaert (2013)	18
1.9	Trajectoire dans l'espace pièce après TGI-TGD (d'après Lavernhe (2006))	21
1.10	Modes de compactage SIEMENS (2006)	21
1.11	Discontinuité au passage d'une singularité	23
1.12	Marques laissées sur la pièce au passage d'une singularité	23
1.13	Algorithme d'insertion d'un motif cinématiquement admissible au passage d'une singularité	25
1.14	Trajectoires obtenues en fonction de la machine-outil	26
1.15	Trajectoires passant par la singularité ou non pour le centre Mikron UCP710	26
1.16	Paramétrage du positionnement de l'outil en usinage 5 axes en bout	27
1.17	Nombre de publications pour la requête « 5-axis milling » par Prat (2014)	28
1.18	Chaîne numérique en usinage 5 axes	28
1.19	Génération de trajectoires basée sur un champ de vecteur Liu et al. (2015)	30
1.20	Comparaison posage traditionnel et posage optimisé Pessoles et al. (2013)	32
1.21	Critère d'énergie de déformation pour l'usinage sur le flanc Pecharde (2009)	33
1.22	Domaine d'Orientation Admissible et lissage des axes de rotation Castagnetti (2008)	34
1.23	Optimisation de l'orientation de l'outil avec prise en compte des contraintes cinématiques Lavernhe et al. (2008)	35
2.1	Ellipsoïde de manipulabilité cinématique en vitesse	45
2.2	Sous-estimation des capacités cinématiques dans l'espace articulaire avec la norme 2	49
2.3	Exemple d'un polytope en 2 dimensions défini par une H-description ou par une V-description	51
2.4	Polytope de manipulabilité cinématique en vitesse en 2 dimensions	52
2.5	Polytopes de vitesse dans l'espace articulaire pour différentes structures	54

2.6	Principe mathématique de projection (à gauche) et d'intersection (à droite) de polytopes	56
2.7	Transfert du polytope de l'espace articulaire à l'espace des tâches : cas de l'usinage 3 axes	57
2.8	Transfert du polytope de l'espace articulaire à l'espace des tâches : cas de l'usinage 5 axes positionné	59
2.9	Influence des axes de rotation sur la forme du polytope de vitesse pour différentes structures	61
2.10	Polytopes d'accélération dans l'espace articulaire pour différentes structures	62
2.11	Polytopes de jerk dans l'espace articulaire pour différentes structures	62
2.12	Principe de la somme de Minkowski de deux polytopes en dimension 2 (d'après Barki et al. (2009))	64
2.13	Décalage du centre des polytopes d'accélération et de jerk en fonction de la causalité	65
3.1	Directions de norme maximale des différents niveaux cinématiques pour 2 centres d'usinage	73
3.2	Conséquences des directions maximales de jerk sur les polytopes d'accélération et de vitesse pour les 2 centres d'usinage	75
3.3	Longueur de trajet à la limite d'une saturation autre que le jerk	76
3.4	Directions combinaison des directions de jerk et d'accélération	77
3.5	Estimation du temps d'usinage d'un segment de 100 mm pour les différentes combinaisons de jerk et d'accélération	78
3.6	Principe d'évaluation des composantes de jerk, d'accélération et de vitesse dans l'espace des tâches en usinage 5 axes positionné	79
3.7	Évolution de \mathbf{f} et de ses dérivées en fonction de la trajectoire	81
3.8	Modélisation des capacités cinématiques tangentielles définies dans la commande numérique par une boule	82
3.9	Exemple des 8 solutions obtenues correspondant aux 8 sommets du polytope	83
3.10	Pièce test : parabolôïde hyperbolique	85
3.11	Polytopes de l'espace des tâches maximisant la vitesse, l'accélération ou le jerk dans la direction imposée \mathbf{f}_{impose} de la plus grande règle	86
3.12	Vitesse relative outil/pièce mesurée pour les différentes orientations solutions	86
3.13	Evolution des solutions A et C en fonction de la règle pour le centre d'usinage Mikron UCP710	87
3.14	Mikron UCP710 : Orientation initiale (A0, C0) et solution pour le polytope de jerk (A85, C140)	88
3.15	Variation possible sur les angles θ_t et θ_f	89
3.16	Variation de la normale \mathbf{n} le long de la passe centrale (à gauche) et intersection des variations possibles de θ_f et θ_t (à droite)	89
3.17	Orientations possibles le long de la passe centrale pour $\theta_f = \pm 40^\circ$ et $\theta_t = \pm 40^\circ$	90
3.18	Comparaison de l'orientation du polytope de jerk sans ou avec relimitation par les angles θ_f et θ_t	90
3.19	Pièce test : surface Manta	92
3.20	Orientations initiale et solution pour 3 passes caractéristiques	92
3.21	Vitesses relatives outil/pièce mesurées sur 3 passes pour différentes orientations	93
3.22	Conséquences de la variation de \mathbf{f} sur l'intersection de \mathbf{f} et avec le polytope de jerk (à gauche) et sur le jerk tangentiel résultant (à droite)	94

3.23	Vitesses relatives outil/pièce mesurées sur 3 passes pour différentes orientations sur la Manta avec un facteur d'échelle $\times 10$	95
3.24	Module parallèle du centre d'usinage Fatronik Verne	96
3.25	Algorithme de choix de l'orientation outil/pièce sur une architecture parallèle pour un usinage 5 axes positionné	97
3.26	Etape 4 : intersection entre les polytopes articulaires 5D et \mathbf{f}_{art}	98
3.27	Etape 5 : évaluation du temps de parcours pour chaque axe articulaire	99
4.1	Polytopes associés aux axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m et \mathbf{C} dans l'espace articulaire et dans l'espace des tâches	106
4.2	Influence du positionnement de la pièce dans l'espace de travail	107
4.3	Lien entre la direction d'avance et l'orientation outil/pièce	108
4.4	Directions et orientations locales maximisant la fonction objectif	109
4.5	Influence de p_x et p_y sur les polytopes pour deux points distincts de la pièce (P_1, P_2)	110
4.6	Simulation du temps de trajet de l'axe \mathbf{C}	111
4.7	Algorithme destiné à combiner les capacités cinématiques des axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m et \mathbf{C}	112
4.8	Combinaison optimale des jerks outil/bâti et bâti/pièce au centre de la trajectoire	113
4.9	Trajectoires solutions pour l'usinage d'un carré de 100×100 sur les deux centres d'usinage	114
4.10	Transition entre chaque bloc : arrêt précis ou déplacement tangentiel SIEMENS (2006)	115
4.11	Relevés de mesures sur la passe $X_p = 0$ pour le posage ($p_x = 50$; $p_y = -50$)	117
4.12	Vitesse relative outil/pièce mesurée pour différentes stratégies	119
4.13	Algorithme du choix du positionnement de la pièce dans l'espace des tâches	120
4.14	Polytopes de jerk pour deux combinaisons positionnement et orientation	122
4.15	Évolution du positionnement solution en fonction de la passe à réaliser	123
4.16	Direction d'avance locale pour maximiser le jerk en fonction de A et C	123
4.17	Algorithme du choix de l'orientation relative outil/pièce en usinage 5 axes continu	125
4.18	Évolution des vitesses mesurées pour chaque axe articulaire	127
4.19	Vitesses relatives outil/pièce mesurées sur la passe $X_p = 0.5$ mm pour différentes stratégies	128
4.20	Surface Manta usinée en 5 axes continu avec la méthode proposée	129
A.1	Modélisation de la Mikron UCP710 et repères associés Lavernhe (2006)	I
B.1	Modélisation de la Huron KX8-five et repères associés	V
C.1	Centre d'usinage Fatronik Verne	VIII
D.1	Paramétrage DH modifié	XI

Liste des tableaux

1.1	Domaines de solutions (A_1, C_1) et (A_2, C_2)	23
1.2	Synthèse de l'état de l'art sur les stratégies d'usinage liées à la cinématique	36
3.1	Norme maximale induite sur les autres niveaux cinématiques par la direction choisie	73
3.2	Longueur maximale du segment avant le début d'une saturation autre que le jerk	75
3.3	Orientations permettant d'orienter chaque polytope dans la direction $\mathbf{f}_{\text{impose}}$ de la plus grande règle	85
3.4	Temps d'usinage du paraboloïde hyperbolique	87
3.5	Temps d'usinage de la surface Manta	95
3.6	Temps d'usinage de la surface Manta avec un facteur d'échelle de 10	95
4.1	Aire du polytope dans l'espace pièce en fonction du positionnement de la pièce dans l'espace de travail	107
4.2	Temps d'usinage pour les différentes stratégies avec le posage $(p_x = 200 ; p_y = -50)$	116
4.3	Temps d'usinage de la passe $X_p = 0.5$ mm de la Manta pour différentes stratégies	128
4.4	Temps d'usinage de la surface Manta pour différentes stratégies	128
A.1	Matrices de passage homogènes entre les différents repères	II
B.1	Matrices de passage homogènes entre les différents repères	VI
C.1	Matrices de passage entre les différentes bases	VIII
C.2	Equations géométriques	IX
F.1	Extraits des programmes d'usinage dans le cas XYZ	XV

Introduction

L'automatisation industrielle est en plein essor et on dénombre aujourd'hui plusieurs millions de structures poly-articulées en activité dans le monde. Leur nombre ne cesse d'augmenter car leurs utilisations permettent un contrôle automatique, programmable, et polyvalent. Ces structures sont utilisées pour différentes activités comme le pick-and-place, le soudage, la peinture, l'assemblage, l'usinage, le polissage... En fonction de ces utilisations, l'architecture de la structure est différente et la programmation de la trajectoire doit être adaptée à la tâche à réaliser, mais doit également dépendre des capacités de la structure pour atteindre le niveau de productivité imposé par une concurrence toujours plus élevée. Dans la plupart des cas, la trajectoire est définie dans le but de respecter les contraintes géométriques associées aux déplacements ou à la réalisation de la pièce mais ne dépend pas des capacités cinématiques de la structure. Or, l'utilisation de structures multi-axes impose d'avoir une méthode générique facilitant la définition des trajectoires en fonction de la tâche à réaliser et de la structure poly-articulée. Le but est de pouvoir combiner au mieux les différents axes afin de pouvoir réaliser la tâche le plus efficacement possible, c'est-à-dire en réalisant la tâche de manière conforme au procédé et le plus rapidement possible.

L'usinage 5 axes à grande vitesse est l'un des processus complexes de plus en plus utilisé dans l'industrie. Pour réaliser les pièces en usinage 5 axes, les trajectoires de l'outil sont générées en fonction de la géométrie de la pièce à usiner et du nombre d'axes de la machine (accessibilité, réduction du nombre de posage, collisions). L'exécution de la trajectoire sur la structure poly-articulée (machine-outil à commande numérique ou robot usineur) conduit à la réalisation de la pièce usinée. La définition de la trajectoire à suivre fait intervenir de nombreux paramètres ce qui constitue une difficulté pour maîtriser le processus global de fabrication en particulier en ce qui concerne la qualité et la productivité.

Dans ce contexte, les travaux réalisés au cours de cette thèse s'inscrivent dans la continuité des recherches menées en fabrication par l'équipe Géo3D du LURPA. L'un des objectifs principaux est la compréhension du processus d'usinage multi-axes dans le but de maîtriser la qualité géométrique des pièces produites tout en optimisant les temps de réalisation. Les premiers travaux ont mis en avant les limites et verrous scientifiques du processus d'usinage à grande vitesse en multi-axes. Dans sa thèse, [Lavernhe \(2006\)](#) a mis en avant les écarts géométriques liés au positionnement de l'outil et les ralentissements potentiels de la vitesse effective outil/pièce. Les recherches se sont alors orientées vers la synthèse des trajectoires 5 axes, privilégiant des critères comme l'énergie de déformation pour définir des trajectoires fluides [Pechard \(2009\)](#) tout en évitant les collisions [Lacharnay \(2014\)](#). Dans le but d'expérimenter ce type d'approche, le développement

d'une commande numérique ouverte a permis de démontrer des gains importants en termes de qualité et de productivité lors de l'usinage multi-axes [Beudaert \(2013\)](#). De plus, un modèle d'interpolateur permettant de simuler le comportement cinématique de la trajectoire a été développé. Cependant, malgré une évaluation pertinente de la vitesse réelle, ce modèle ne permet pas de définir intrinsèquement des trajectoires favorisant les combinaisons cinématiques des différents axes de la structure. Ainsi, l'objectif de cette thèse est d'aider un programmeur à choisir une stratégie d'usinage adaptée à la structure poly-articulée sur laquelle la pièce va être réalisée. Le but est d'attirer l'attention du programmeur sur l'intérêt de tenir compte de ces capacités et de lui donner un formalisme lui permettant de privilégier un positionnement, une direction d'avance ou une orientation de l'outil. Les résultats obtenus sont synthétisés dans ce manuscrit et s'articulent en quatre chapitres.

Le chapitre 1 présente un état de l'art du processus d'exécution de trajectoires multi-axes sur structures poly-articulées. Le processus global de fabrication de pièces est décrit. En particulier, la relation entre les différentes typologies de pièces et les structures utilisées pour les réaliser est mise en avant. Cette diversité des structures conduit à s'intéresser plus particulièrement à leurs comportements cinématiques dans le cadre de l'usinage sur machine-outil à commande numérique. Une liste non exhaustive des différentes stratégies d'usinage développées dans la littérature est réalisée et introduit de manière plus précise la problématique de cette thèse : « Comment adapter la stratégie d'usinage en fonction des contraintes cinématiques de la structure poly-articulée sur laquelle la trajectoire sera exécutée pour maîtriser la vitesse relative outil/pièce ? ».

Le chapitre 2 est ainsi dédié à la formalisation des contraintes cinématiques à l'aide de polytopes de manipulabilité cinématique. Ce formalisme, original, basé sur une étude bibliographique des approches utilisées en robotique, est appliqué sur plusieurs structures poly-articulées dans le cas de l'usinage 3 axes, de l'usinage 5 axes positionné et de l'usinage 5 axes continu. Cette étude permet de montrer l'intérêt d'utiliser les polytopes de manipulabilité cinématique pour aider le programmeur à choisir la trajectoire à réaliser. De manière locale, en tout point d'une trajectoire, cet outil donne visuellement et possiblement de manière interactive le moyen de localiser les orientations et les directions à privilégier pour atteindre les capacités maximales des différents axes de la structure poly-articulée.

Le chapitre 3 exploite les polytopes de manipulabilité dans le cadre de l'usinage 5 axes positionné. La méthode proposée s'applique sur des surfaces tendues et permet d'augmenter la vitesse relative outil/pièce en définissant les orientations de l'outil le long de chaque passe qui combinent au mieux les capacités cinématiques des différents axes de la structure. L'avantage de cette méthode est d'être applicable quelle que soit l'architecture de la machine-outil, sérielle ou parallèle, et plus généralement à toutes structures poly-articulées. Cette méthode a été validée expérimentalement sur deux pièces tests pour un centre d'usinage. Cependant, le cadre de l'étude, c'est-à-dire l'usinage 5 axes positionné, limite les apports potentiels induits par les axes de rotation.

Le chapitre 4 se consacre ainsi à l'optimisation de trajectoires 5 axes continu à partir des polytopes de manipulabilité dans le but de combiner tous les axes de la structure poly-articulée et ainsi pouvoir augmenter la vitesse relative outil/pièce. Générer une combinaison des mouvements des

différents axes en un instant donné impose de considérer la causalité, c'est-à-dire de tenir compte de ce qui s'est passé avant et de ce qui doit se passer après sur la trajectoire. La méthode proposée est illustrée dans un premier temps sur un cas simplifié en ne considérant que deux axes de translation et un axe de rotation. Elle permet de trouver le positionnement de la pièce dans l'espace de travail, la direction d'avance et l'orientation de l'outil. Des essais expérimentaux sont menés et valident la méthode proposée tout en mettant en lumière les limites induites par les commandes numériques industrielles actuelles. Le principe est développé dans le cas général pour n'importe quelle structure poly-articulée et un essai 5 axes continu est réalisé sur la Mikron UCP710 du laboratoire afin de valider le concept de manipulabilité cinématique. Bien que non optimal à cause des restrictions de la commande numérique industriel, le cas étudié valide le gain potentiel pour une surface tendue.

Pour finir, une conclusion synthétise les travaux réalisés au cours de cette thèse et propose un ensemble de perspectives.

Chapitre

1

**Exécution de trajectoires multi-axes
sur structures poly-articulées :
un état de l'art**

Sommaire

1	Processus global de fabrication de pièces	8
1.1	Relation typologie de pièces et procédés de fabrication	8
1.2	Architecture des structures poly-articulées	10
1.2.1	Architectures sérielles	10
1.2.2	Architectures parallèles	11
1.3	Diversité cinématique des structures poly-articulées	12
2	Étude du comportement cinématique en usinage sur MOCN	15
2.1	Transformation géométrique directe et inverse	16
2.2	Influence des contraintes cinématiques sur la vitesse relative outil/pièce	16
2.2.1	Profil 7 segments	16
2.2.2	Lien entre la géométrie du trajet et la loi temporelle de mouvement	17
2.3	Lissage	20
2.3.1	Lissage local : format de description G1	20
2.3.2	Lissage global : compactage et format de description polynomial ou spline	21
2.4	Passage de singularité	22
3	Les stratégies d'usinage	26
3.1	Difficultés associées aux trajectoires 5 axes	26
3.2	Stratégies liées à la géométrie de la pièce à usiner	29
3.3	Stratégies liées à la coupe	29
3.4	Stratégies liées à la cinématique	31
3.4.1	Définition des trajets hors matière	31
3.4.2	Définition du posage	31
3.4.3	Définition de la direction d'avance	32
3.4.4	Définition de l'orientation de l'axe de l'outil	32
4	Synthèse de l'état de l'art et problématique des travaux de thèse	35

Introduction

La fabrication de pièces de grandes dimensions ou de formes complexes nécessite l'emploi de structures multi-axes. Les mouvements disponibles permettent de balayer l'espace cartésien dans les 3 dimensions et l'ajout de la variation d'orientation entre l'effecteur et la pièce facilite l'accessibilité. L'expertise et le temps nécessaires à leur fabrication en font des pièces à forte valeur ajoutée. La maîtrise des maillons de leur processus de fabrication est donc primordiale pour rester compétitif. Que ce soit en usinage, en polissage ou en fabrication additive, la fabrication multi-axes est un levier d'amélioration de la compétitivité des entreprises. Cependant, l'utilisation de stratégies multi-axes reste encore faible de part la complexité du processus. Une régie inadéquate du triptyque géométrie de la pièce, stratégie, et structure multi-axes peut engendrer une faible productivité. En effet, une mauvaise gestion de l'orientation de l'effecteur peut engendrer des écarts géométriques, des ralentissements, ou encore des collisions. Des problèmes de transformations géométriques, par exemple de singularités peuvent apparaître. De plus, les effets cinématiques, associés aux déplacements de chacun des axes, sont à maîtriser pour tirer profits des combinaisons spatiales des mouvements et éviter les chutes de vitesse relative entre l'effecteur et la pièce à réaliser.

Les méthodes de génération de trajectoires disponibles à ce jour améliorent localement les mouvements pour les rendre fluides indépendamment du moyen de production utilisé, en particulier des caractéristiques cinématiques de la structure poly-articulée. Cette insuffisance d'intégration de la structure poly-articulée pour définir des trajectoires multi-axes est un défaut dans le processus global de fabrication de pièces complexes. Il est ainsi nécessaire de proposer des outils à la disposition du bureau des méthodes pour maîtriser la définition et l'exécution de trajectoires multi-axes en fonction de la pièce à réaliser et des moyens d'exécution.

La première partie de ce chapitre détaille le processus global de programmation de pièces de forme complexe et l'intérêt de l'utilisation de stratégies multi-axes. La diversité des structures poly-articulées en termes d'architecture et en termes cinématique est également mise en avant. La deuxième partie décrit les étapes d'exécution d'une trajectoire 5 axes en insistant sur celles pouvant dégrader la qualité de la pièce et la productivité à cause des fluctuations de la vitesse relative outil/pièce. La troisième partie s'intéresse plus particulièrement aux différentes stratégies d'usinage existantes dans la littérature, et notamment à celles développées en usinage 5 axes. Le manque d'intégration de la diversité des structures poly-articulées dans les stratégies existantes conduit à s'interroger plus en détail sur l'influence des caractéristiques cinématiques au cours de l'exécution de la trajectoire. La synthèse sur l'étendue des structures poly-articulées et l'influence de leur comportement cinématique sur la vitesse relative outil/pièce définit de manière plus précise la problématique de cette thèse.

1 Processus global de fabrication de pièces

1.1 Relation typologie de pièces et procédés de fabrication

Dans le contexte économique actuel, les designers ont des exigences croissantes en termes fonctionnel ou plus simplement esthétique pour rester compétitifs. Le challenge pour les fabricants est de créer des pièces de manière efficace, en utilisant des technologies rapides et précises. Pour atteindre ces exigences de forme, de qualité de surface, et de vitesse, il est nécessaire d'adapter le procédé de fabrication à la typologie de la pièce à fabriquer. De plus, la maîtrise des paramètres d'exécution de ce procédé est nécessaire pour garantir la conformité de la pièce fabriquée.

Le choix du procédé de fabrication dépend de nombreux facteurs, dont le matériau, les formes de la pièce, les états de surface... Les procédés d'obtention de pièces sont variés et de plus en plus automatisés sur des structures poly-articulées. Lors de l'établissement de l'avant-projet de fabrication, les fabricants sont amenés à choisir le type de structure capable de réaliser la pièce et le procédé adapté. Parmi ces procédés, on peut citer le soudage, la découpe, l'ébavurage, le tournage, le fraisage, le polissage, la fabrication additive... Il n'existe pas de méthode exhaustive pour adapter le processus de fabrication à une pièce mais le choix provient de la synthèse de l'analyse des possibilités des différents procédés. Le processus d'élaboration de la pièce est très similaire quel que soit le procédé. Le principe consiste à manipuler un effecteur relativement à une pièce à l'aide d'une structure « porteuse ». Pour réaliser une manipulation adaptée, le processus se décompose en 4 étapes principales, représentées sur la Figure 1.1.

- La Conception Assistée par Ordinateur (CAO) définit la géométrie de la pièce à réaliser.
- La Fabrication Assistée par Ordinateur (FAO) permet de définir les paramètres géométriques et procédés et de générer les trajectoires à partir du modèle CAO de la pièce.
- Le post-traitement traduit les trajectoires générées en FAO en un langage compatible avec le système de production utilisé.
- L'exécution a lieu quand les consignes de déplacement sont envoyées aux différents axes du système poly-articulé utilisé.

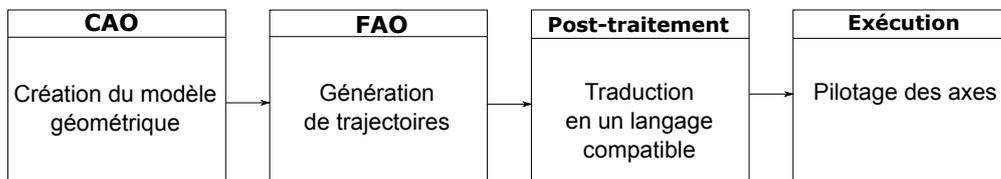


Figure 1.1 – Processus global de programmation sur structures poly-articulées

Il est nécessaire que chacune des étapes de ce processus d'élaboration de pièces soit en lien étroit avec les autres. La communication entre l'étape de FAO et l'exécution doit être optimisée afin de créer des trajectoires tenant compte du système poly-articulé sur laquelle la pièce va être réalisée.

Au niveau de chacune des étapes de ce processus, de nombreuses études académiques et industrielles ont permis des améliorations importantes dans le but de créer des pièces respectant les spécifications imposées par le bureau d'étude. Des trajectoires adaptées à la géométrie de la pièce

à réaliser ont été développées. Néanmoins dans ce processus, les trajectoires réalisées prennent en compte la structure du système poly-articulé, c'est-à-dire en particulier son nombre d'axes et les courses des axes, mais elles ne prennent pas en compte les aspects cinématiques de la structure qui peuvent faire varier la vitesse d'avance programmée.

La maîtrise de la vitesse d'exécution de la trajectoire est pourtant l'un des facteurs fondamentaux pour maintenir les conditions opératoires du procédé utilisé et ainsi obtenir une pièce respectant les exigences fonctionnelles. Quelle que soit l'utilisation, le contrôle de la vitesse relative pièce/effecteur, nécessaire pour garantir les conditions nominales du procédé, passe par la maîtrise de la cinématique du système poly-articulé.

En usinage, le contrôle de la vitesse d'avance est important puisqu'il impacte directement la productivité au niveau du temps d'usinage et de la qualité de surface. En effet, en ébauche, la vitesse d'avance est programmée dans le but de ne pas avoir trop d'efforts, et en finition, elle est programmée pour obtenir la rugosité souhaitée. Le pas longitudinal, fonction de l'avance à la dent réelle, et la géométrie de l'outil engendrent le motif de la surface usinée [Quinsat et al. \(2011\)](#). De plus, la section du copeau est fonction de la vitesse d'avance. Une évolution non maîtrisée de la vitesse d'avance peut engendrer une variation du chargement mécanique sur l'outil. Dans ce cas, une flexion anormale de celui-ci a lieu, ce qui peut causer des marques sur la pièce [Zhang et al. \(2016\)](#). Une détérioration de l'état de surface et une usure anormale de l'outil peuvent également se produire si des vibrations sont causées par des variations importantes en accélération et en jerk au niveau des axes [Sun et Altintas \(2016\)](#). Ces vibrations dégradent la géométrie et la micro-géométrie de la pièce usinée en créant une non-régularité du motif. En somme, il est nécessaire d'adapter la vitesse d'avance réelle de l'outil et donc de tenir compte de la cinématique de la structure poly-articulée pour obtenir une pièce conforme rapidement.

En polissage, [Wu et al. \(2007\)](#) privilégient l'utilisation d'un robot anthropomorphe alors que [Pessoles et Tournier \(2009\)](#) favorisent l'utilisation d'une machine 5 axes. Dans les deux cas, l'objectif est d'utiliser au maximum les degrés de liberté de la structure pour améliorer les performances du procédé. Le robot permet d'atteindre un volume de travail plus important et d'attacher plus facilement divers effecteurs. De plus, l'incorporation d'un système de contrôle d'efforts pour adapter les paramètres au cours du polissage est facilitée. L'utilisation d'une machine 5 axes permet quant à elle de pouvoir réaliser le fraisage et le polissage sur la même machine. La réalisation de deux procédés sur la même machine permet d'éviter les erreurs de re-positionnement de la pièce et d'augmenter son taux d'utilisation. Quel que soit le matériau à polir, le pouvoir abrasif est fonction de l'effort et de la vitesse relative entre l'effecteur et la pièce [Klocke et Zunke \(2009\)](#). Les trajectoires utilisées sont souvent issues du savoir-faire manuel. Ce sont des courbes porteuses dont les motifs trochoïdaux ou encore triangulaires imitent les mouvements répétitifs des polisseurs [Chaves-Jacob et al. \(2013\)](#). La géométrie de cette trajectoire est ainsi souvent difficile à suivre pour un robot anthropomorphe ou pour une machine-outil. La maîtrise de la vitesse est importante pour appliquer l'effort de polissage au bon endroit sur la pièce. Il est donc nécessaire d'adapter la trajectoire en fonction du système poly-articulé sur laquelle elle sera exécutée.

En fabrication additive, et plus particulièrement pour le procédé de dépôt de matière sous énergie

concentrée (Laser Metal Deposition LMD), il est également nécessaire de développer des structures multi-axes afin de pouvoir créer des pièces de plus en plus complexes [Dwivedi et Kovacevic \(2006\)](#). Ainsi, des difficultés de gestion du système poly-articulé apparaissent également. La gestion des configurations singulières en est un exemple [Boisselier et al. \(2014\)](#). La maîtrise de la vitesse est également très importante pour que le dépôt de matière ou la fusion soit homogène sur toute la surface de la pièce. La vitesse d'avance, au même titre que le débit de poudre et la puissance du laser, est un paramètre fondamental dans l'ensemble des stratégies existantes en LMD.

Cependant, définir des trajectoires cinématiquement admissibles, c'est-à-dire ne dépassant pas les limites cinématiques de chacun des axes, n'est pas simple car la diversité des structures poly-articulées en termes d'architecture et de capacités cinématiques est très importante. Les parties suivantes recensent les différentes architectures et expliquent les contraintes technologiques donnant lieu à une étendue très large de caractéristiques cinématiques possibles.

1.2 Architecture des structures poly-articulées

[Rauch et Xu \(2010\)](#) ont comptabilisé 118 travaux basés sur l'étude de l'architecture des machines-outils en fonction de l'organisation des liaisons cinématiques. L'agencement le plus courant consiste à organiser les liaisons cinématiques en série, mais il est également possible de les combiner partiellement ou totalement en parallèle. Les mouvements possibles et les surfaces atteignables sont différents en fonction de l'architecture.

1.2.1 Architectures sérielles

Sur une architecture sérielle, les liaisons cinématiques sont disposées les unes à la suite des autres. Sur les structures poly-articulées de type bras de robot, l'architecture du robot est par exemple composée de 6 liaisons de rotation. Sur les structures poly-articulées plus traditionnellement utilisées en usinage, les machines-outils comportent au minimum 2 axes dans le cas du tournage, et 3 axes dans le cas du fraisage. Des machines-outils avec des axes supplémentaires sont également employées pour réaliser plus facilement certaines formes de pièce, ou encore réduire le nombre de posages. Ainsi, en usinage 5 axes, la structure se décompose en 5 liaisons : 3 translations et 2 rotations. Les structures de type bras de robot sont encore peu répandues en usinage 5 axes notamment à cause du manque de rigidité de la structure. Le suivi de la trajectoire programmée à l'extrémité de l'effecteur n'est pas encore satisfaisant par-rapport aux résultats obtenus avec des structures plus standards à 5 axes. En effet, les machines-outils traditionnelles permettent d'avoir des répétabilités de l'ordre de $2 \mu\text{m}$ et des exactitudes de l'ordre de $5 \mu\text{m}$ depuis une vingtaine d'années [Ramesh et al. \(2000\)](#). Ces dernières années, de nombreuses études ont permis d'améliorer les performances des robots industriels, mais leurs exactitudes et leurs répétabilités ne sont pas encore au même niveau que celles des machines-outils [Klimchik et al. \(2017\)](#).

[Bohez \(2002\)](#) a recensé 3 architectures principales de machines-outils en fonction de la position relative des axes de translation (T) et des axes de rotation (R).

- Structure RRTTT : Les axes de rotation sont associés au mouvement de la pièce.
- Structure TTTRR : Les axes de rotation sont associés au mouvement de l'outil.
- Structure RTTTR : Les axes de rotation contribuent à la fois au mouvement de la pièce et au mouvement de l'outil.

La Figure 1.2 donne un exemple de quatre structures séries. Il s'agit des trois types de structure de machines-outils décrites précédemment et une structure poly-articulée de type robot, constituée de 6 rotations successives R1 à R6.

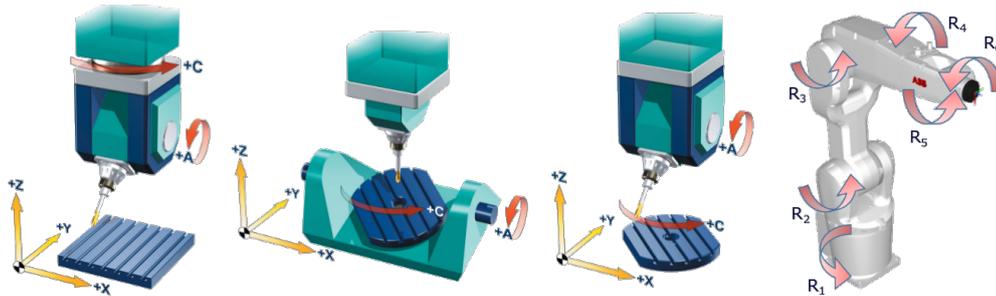


Figure 1.2 – Exemple de structures poly-articulées avec une architecture série

1.2.2 Architectures parallèles

Les architectures parallèles sont employées en Usinage à Grande Vitesse uniquement depuis une quinzaine d'années [Weck et Staimer \(2002\)](#). Elles ont l'avantage d'avoir une plus grande rigidité et des capacités cinématiques plus importantes par rapport aux architectures sérielles. En revanche, le volume de travail est anisotrope et souvent plus faible. De plus, le pilotage des différentes liaisons est plus complexe pour obtenir le mouvement souhaité dans l'espace des tâches. Parmi les machines à structures parallèles, il existe les structures partiellement parallèles et les structures totalement parallèles. Dans les structures totalement parallèles, la chaîne cinématique est fermée. L'outil est relié à la pièce par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes. Le lien entre le bâti (pièce) et l'effecteur (outil) est assuré par des jambes. Les structures avec des jambes de longueurs constantes sont de type Glides ou Delta alors que les structures avec des longueurs de jambes variables sont de type Hexapode. Des liaisons pivot ou rotule sont utilisées à chacune des extrémités des jambes pour assurer les mouvements entre le bâti et l'effecteur. Un nouvel axe de développement cherche à combiner une structure parallèle avec une structure sériele. Cette structure hybride a l'avantage d'avoir des capacités cinématiques élevées par son ensemble parallèle et un volume de travail important par son ensemble sériele. La capacité cinématique et la rigidité évoluent dans l'espace de travail de la structure. En effet, les angles entre la direction du mouvement des jambes et la direction du mouvement de la plate-forme mobile procurent un gain d'un point de vue des capacités cinématiques et une diminution de la rigidité par-rapport à une architecture sériele pour laquelle les déplacements de l'axe et de l'effecteur sont identiques. Ces angles évoluent en fonction de la configuration, le comportement cinématique et la rigidité sont donc anisotropes dans l'espace de travail de la structure poly-articulée. De plus, les capacités dynamiques sont plus grandes puisque les masses en mouvement sont moins importantes. La Figure 1.3 donne

un exemple d'une structure parallèle et d'une structure hybride.

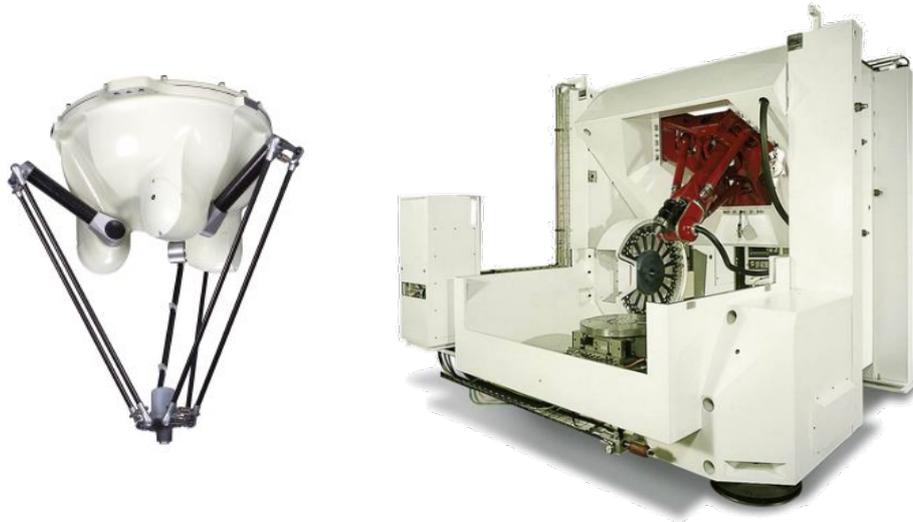


Figure 1.3 – Exemple de structures parallèle et hybride

1.3 Diversité cinématique des structures poly-articulées

La diversité des structures poly-articulées n'est pas seulement vraie en termes d'architecture, elle est aussi vraie en termes de caractéristiques cinématiques. La capacité d'une structure à générer des déplacements est directement liée à son architecture, c'est-à-dire à la mise en position relative des différents axes par-rapport au bâti. Chaque mouvement est généré par le déplacement d'un axe composé d'une partie commande et d'une partie opérative. La partie commande permet d'asservir en position et en vitesse le déplacement des mobiles en fonction des données acquises par le système de mesure. La partie opérative est constituée d'une motorisation, d'un système d'entraînement et d'un guidage. Les éléments technologiques réalisant ces fonctions dépendent de la modernité des composants technologiques, des masses embarquées, des fabricants de la structure... La technologie choisie pour la partie opérative impacte les paramètres au niveau de la partie commande. Les paramètres cinématiques sont liés aux caractéristiques mécaniques des actionneurs mais également au comportement dynamique de la structure.

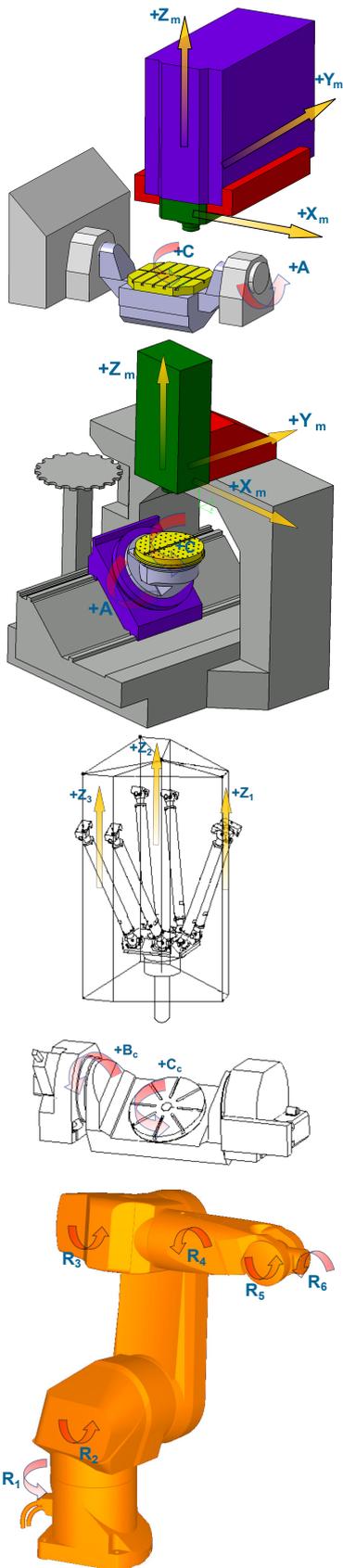
Deux technologies différentes sont principalement utilisées pour les axes de translation des machines-outils. Ils peuvent être composés d'un moteur linéaire ou d'un moteur rotatif et d'une liaison par vis à billes. A la sortie du moteur, un réducteur adapte la vitesse de rotation de la vis à billes qui transforme le mouvement de rotation du moteur en une translation le long de la glissière. Dans ce cas, toutes les pièces mécaniques assurant la transformation du mouvement influencent les déplacements de l'axe (vis à billes, glissières, courroies pour la réduction de la vitesse...). Dans le cas d'un moteur linéaire, il n'y a pas de chaîne mécanique de transformation de mouvement. L'influence des modes vibratoires de la structure devient ainsi prépondérante par rapport à une transmission composée de plusieurs éléments. Les excitations vibratoires engendrées par le moteur

et les perturbations liées aux efforts de coupe ne sont plus atténuées par les éléments de transmission du mouvement. L'utilisation de machines à structures parallèles accroît encore davantage ces phénomènes vibratoires à cause des vitesses d'avance très élevées qui sont utilisées et des faibles inerties intervenant dans les déplacements de la structure. Une modélisation dynamique de l'ensemble de la structure est ainsi nécessaire pour mieux appréhender son comportement [Bonnemains \(2009\)](#). La dynamique des systèmes réalisant des mouvements rapides est susceptible d'exciter les fréquences propres de la machine, ce qui peut engendrer des mouvements non désirés à l'extrémité des axes de la structure [Béarée \(2005\)](#). Des modèles dynamiques ont été développés pour faire le lien entre le couple disponible au niveau des moteurs, le taux de couple (variation du couple sur une seconde) et les limites cinématiques en vitesse, en accélération, et en jerk choisies par les fabricants [Vulliez et al. \(2016\)](#).

Cependant, la complexité des phénomènes mécaniques intervenant tout le long de la chaîne de transmission, et la diversité des technologies utilisées imposent un réglage expérimental des paramètres de vitesse, d'accélération et de jerk par les fabricants dans le but de ne pas trop solliciter les différents éléments. Ils sont réglés à l'installation de la structure en fonction de la réponse des axes à une consigne pré-définie par le constructeur. Ainsi, des réglages différents de ces paramètres cinématiques sont donnés en fonction de la structure mais également pour les axes d'une même structure. Ces valeurs sont ainsi souvent plus restrictives que nécessaire pour le bon fonctionnement de la structure, mais ce sont elles qui vont limiter la vitesse d'exécution de la trajectoire. En effet, ces limites sont implémentées dans le contrôleur du robot ou de la commande numérique et ils vont donc influencer sur l'interpolation des trajectoires réalisée.

Dans la suite de ce manuscrit, nous prendrons donc en compte ces limites de vitesse, d'accélération, et de jerk pour modéliser les limites cinématiques de la structure. Les contraintes de vitesse, d'accélération et de jerk sont différentes d'une structure à l'autre. La Figure 1.4 donne les caractéristiques cinématiques de quatre structures poly-articulées utilisées en usinage. Les architectures de la Mikron UCP710 et de la Huron KX8-five se ressemblent, pourtant les caractéristiques cinématiques de la Huron KX8-five sont plus élevées, en particulier au niveau des axes de rotation étant donnée la technologie plus récente de ses axes et de ses moteurs. De plus, les performances des axes de translation sont la plupart du temps équilibrées mais ce n'est pas le cas pour le centre d'usinage Mikron UCP710. Comme nous l'avons vu précédemment, cette différence s'explique par la technologie des axes, par les masses embarquées, et par les réglages effectués par les fabricants.

Cette diversité, fonction du système poly-articulé, mais aussi fonction de l'axe sollicité, nécessite de tenir compte de ces paramètres pour adapter la trajectoire au système poly-articulé utilisé. Les paramètres retenus pour définir les contraintes cinématiques associées à une architecture sont directement ceux définis par le fabricant de la machine. Il s'agit des paramètres de vitesse, d'accélération, et de jerk de chaque axe. Le réglage de ces paramètres n'est pas remis en cause dans ce manuscrit ; il est considéré comme une contrainte pour définir des trajectoires cinématiquement admissibles.



Mikron UCP710	V_{max} (<i>m/min</i>) (<i>tr/min</i>)	A_{max} (<i>m/s²</i>) (<i>tr/s²</i>)	J_{max} (<i>m/s³</i>) (<i>tr/s³</i>)
X_m	30	2.5	5
Y_m	30	3	5
Z_m	30	2.1	50
A	15	0.83	5
C	20	0.83	50

Huron KX8-five	V_{max} (<i>m/min</i>) (<i>tr/min</i>)	A_{max} (<i>m/s²</i>) (<i>tr/s²</i>)	J_{max} (<i>m/s³</i>) (<i>tr/s³</i>)
X_m	50	5	40
Y_m	50	5	80
Z_m	50	5	100
A	50	3	100
C	50	3	100

Patronik Verne	V_{max} (<i>m/min</i>) (<i>tr/min</i>)	A_{max} (<i>m/s²</i>) (<i>tr/s²</i>)	J_{max} (<i>m/s³</i>) (<i>tr/s³</i>)
Z_1	80	10	15
Z_2	80	10	15
Z_3	80	10	15
B_c	22	1.5	5
C_c	33	1	10

d'après Terrier (2005)

Stäubli RX170B	V_{max} ($^{\circ}/s$)	A_{max} ($^{\circ}/s^2$)	J_{max} ($^{\circ}/s^3$)
R_1	65	140	2500
R_2	65	110	2500
R_3	65	150	2500
R_4	90	450	2500
R_5	100	300	2500
R_6	150	700	2500

d'après Olabi et al. (2010)

Figure 1.4 – Architectures et caractéristiques cinématiques de trois centres d'usinage et d'un robot

En résumé, la diversité des structures poly-articulées en termes d'architecture et en termes de cinématique montre qu'il est nécessaire de maîtriser l'impact de la cinématique au cours de la génération d'une trajectoire d'usinage. La partie suivante se focalise sur les différentes étapes liées à l'exécution de la trajectoire qui ont un impact sur la vitesse d'avance réelle en usinage sur MOCN. L'influence des contraintes cinématiques sur la vitesse relative outil/pièce est mise en avant. Un exemple d'utilisation de ces contraintes est développé pour modifier localement la trajectoire au passage d'une singularité dans le but de la rendre cinématiquement admissible.

2 Étude du comportement cinématique en usinage sur MOCN

Le comportement cinématique d'une machine-outil joue un rôle majeur dans l'exécution du programme d'usinage. Les étapes liées à l'exécution dans le processus global de fabrication sont cruciales. Celles-ci sont détaillées sur la Figure 1.5. Cette partie recense les différentes tâches effectuées par la Commande Numérique qui ont un impact significatif sur les déplacements physiques des axes de la machine, et donc sur le mouvement relatif outil/pièce. Ainsi, cette section se focalise sur les transformations géométriques directe et inverse. Le lien entre la géométrie du trajet et la loi temporelle de mouvement est également abordé et montre la nécessité de lisser la trajectoire pour ne pas trop solliciter la structure. En ce sens, les ralentissements possibles engendrés par le format de description des trajectoires ainsi que l'interpolation temporelle sont également développés dans cette partie. Pour finir, une méthode de passage de singularités sans diminution de la vitesse d'avance et lissant la trajectoire en prenant en compte la cinématique des axes articulaires est développée.

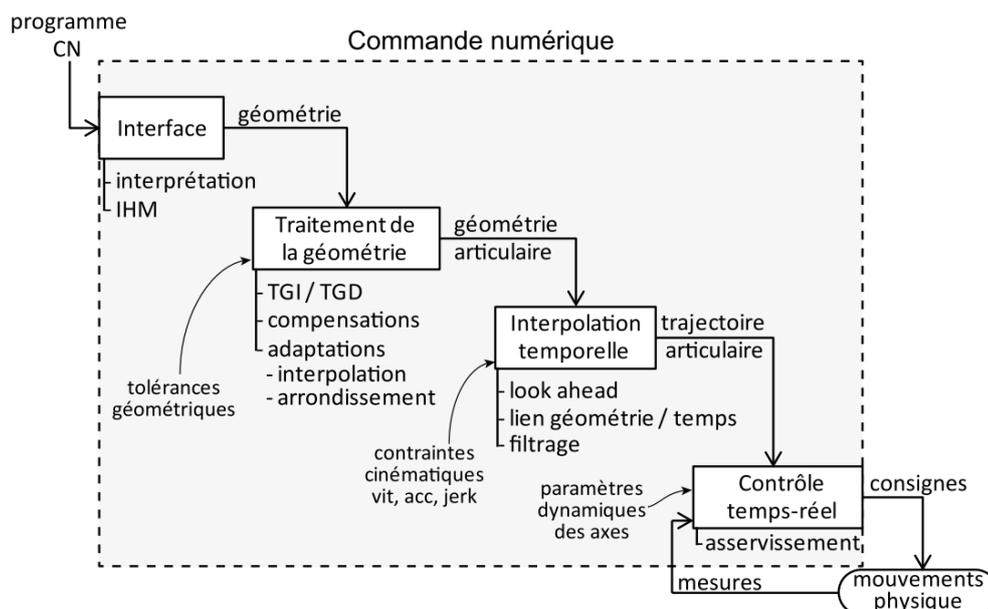


Figure 1.5 – Représentation schématique des tâches effectuées par une commande numérique [Beudaert \(2013\)](#)

2.1 Transformation géométrique directe et inverse

L'espace articulaire est constitué de l'ensemble des articulations q_i (liaisons) d'une structure poly-articulée. Sa dimension est égale au nombre d'articulations (i) de la structure. L'espace des tâches, lié à l'effecteur, est un espace de dimension 6, constitué de 3 paramètres donnant la position du point piloté de l'effecteur (X_p, Y_p, Z_p) et de 3 paramètres donnant l'orientation de l'effecteur. Le paramétrage de l'orientation peut par exemple être défini par les cosinus directeurs (i, j, k). Le Modèle Géométrique Direct (MGD) permet d'exprimer le positionnement de l'effecteur en fonction des paramètres articulaires. A l'inverse, le Modèle Géométrique Inverse (MGI) permet d'exprimer la configuration articulaire en fonction du positionnement de l'effecteur. Les MGD et MGI du centre d'usinage 5 axes Mikron UCP710 de structure $[wC'A'bX_mY_mZ_m(C1)t]$ selon la norme ISO 1079 sont donnés en Annexe A.

La description de la trajectoire peut être transmise à la commande numérique avec les coordonnées exprimées dans l'espace pièce (X_p, Y_p, Z_p, i, j, k) ou avec les coordonnées exprimées dans l'espace articulaire (X_m, Y_m, Z_m, A, C), ou encore en combinant les coordonnées précédentes (X_p, Y_p, Z_p, A, C). Le premier format de description a l'avantage d'être le même quelle que soit la machine-outil utilisée. Les deux derniers peuvent être plus difficiles à gérer puisque les mouvements relatifs entre chacun des axes doivent être maîtrisés. La Figure 1.6 résume les différents cas possibles précédemment énumérés.

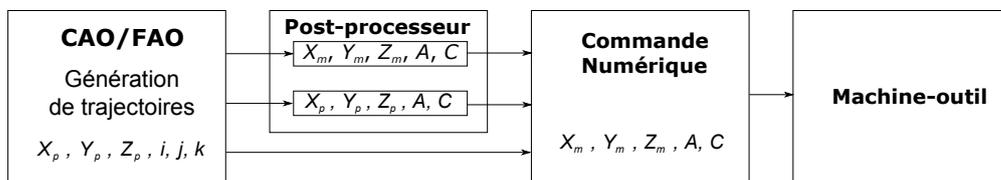


Figure 1.6 – Chaîne numérique 5 axes d'une structure $[wC'A'bX_mY_mZ_m(C1)t]$

Bien que les problèmes liés aux transformations géométriques directe et inverse aient été largement étudiés dans la littérature [Bohez et al. \(2000\)](#), il reste encore quelques difficultés au niveau des points singuliers. En effet, des mouvements de grandes amplitudes peuvent se produire, générant des ralentissements de la vitesse relative outil/pièce. Ces mouvements peuvent également affecter la qualité de la surface usinée puisque comme nous l'avons vu précédemment l'avance à la dent réelle va générer le motif de la surface fabriquée.

2.2 Influence des contraintes cinématiques sur la vitesse relative outil/pièce

2.2.1 Profil 7 segments

Le lien entre la géométrie de la trajectoire et le temps est donné par les lois de mouvement des axes. Ces lois de mouvement d'un système poly-articulé définissent le mouvement temporel de l'effecteur, combinaison des mouvements résultants des différents axes. Il existe deux familles de

lois dites « loi douce » et « loi en bang-bang ». Les lois douces sont infiniment dérivables et permettent ainsi d'avoir un mouvement sans à-coups lors de l'exécution de la trajectoire. Les lois de type bang-bang ou à commutation permettent de saturer la variable de commande du système que l'on souhaite, en commutant le niveau maximal et minimal autorisé et ainsi de minimiser le temps. En position, la loi de mouvement est donc polynomiale et le degré dépend du niveau cinématique associé à la loi bang-bang. Les lois de commande de type bang-bang de jerk sont actuellement les plus répandues sur les machines-outils et sur les robots. En effet, le jerk a une influence significative sur la dynamique vibratoire de la structure poly-articulée [Béarée et Olabi \(2013\)](#). Limiter le jerk permet ainsi d'éviter les discontinuités sur l'accélération qui pourraient engendrer des chocs et détériorer à la fois la qualité de la pièce usinée et la structure mécanique, notamment l'entraînement. En conclusion, en se plaçant dans un contexte d'utilisation d'une commande numérique industrielle en UGV, la loi la plus douce à temps minimal implémentée est une loi en bang-bang de jerk. La loi de mouvement retenue et étudiée dans la suite de ce manuscrit est donc une loi à commutation en jerk.

Ces lois en bang-bang de jerk définissent un profil d'accélération trapézoïdal limité par la valeur de commande en jerk. [Erkorkmaz et Altintas \(2001\)](#) décomposent cette loi de mouvement en 7 parties. La Figure 1.7 définit les 7 segments :

- Les segments 1 et 7 sont ceux où le jerk est maximal et positif. Les segments 3 et 5 sont ceux où le jerk est minimal. Sur ces segments, le profil de vitesse est parabolique et celui de position est cubique.
- Les segments 2 et 6 correspondent à une saturation en accélération. Le jerk est nul sur ces segments. Le profil de vitesse est linéaire et celui de position est parabolique.
- Le segment 4 correspond à une saturation en vitesse. Le jerk et l'accélération sont nuls et le déplacement est linéaire.

Les profils des mouvements décrits sur la Figure 1.7 s'appliquent sur chacun des axes articulaires. Ces limites et la géométrie du trajet vont avoir un impact sur le mouvement réalisé.

2.2.2 Lien entre la géométrie du trajet et la loi temporelle de mouvement

Les consignes de vitesses sur chacun des axes ne sont pas toujours atteignables à cause de leurs niveaux cinématiques de vitesse, d'accélération, et de jerk. Il est ainsi important de faire le lien entre la géométrie du trajet et les contraintes cinématiques de chacun des axes. Dans sa thèse, [Beudaert \(2013\)](#) propose justement de faire le lien entre la géométrie et la loi de mouvement (Figure 1.8). Il met en application les équations définies par [Sencer et al. \(2008\)](#). En notant \mathbf{q} les positions des axes, pour un déplacement s sur la trajectoire, la vitesse des axes $\dot{\mathbf{q}}$ peut s'exprimer comme le produit d'un élément géométrique q_s et d'un élément de la loi de mouvement \dot{s} (Equation 1.1). L'accélération $\ddot{\mathbf{q}}$ et le jerk $\dddot{\mathbf{q}}$ sont obtenus par dérivation (Equations 1.2 et 1.3).

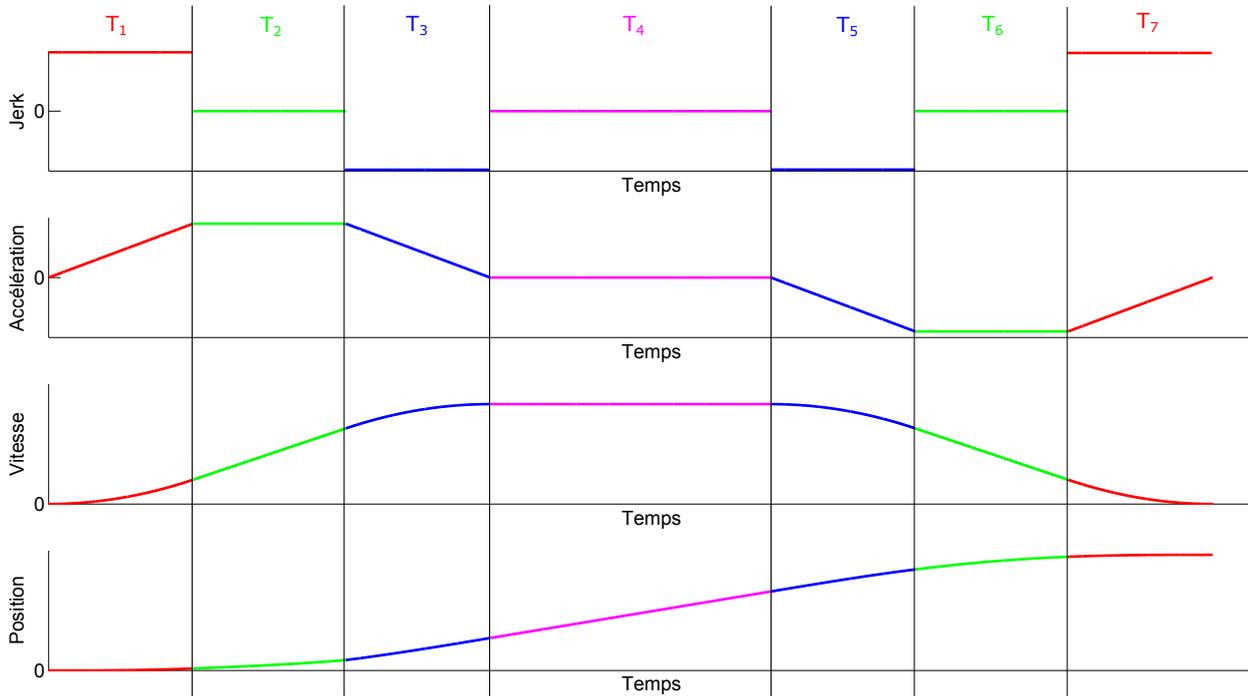


Figure 1.7 – Loi de mouvement de type bang-bang de jerk

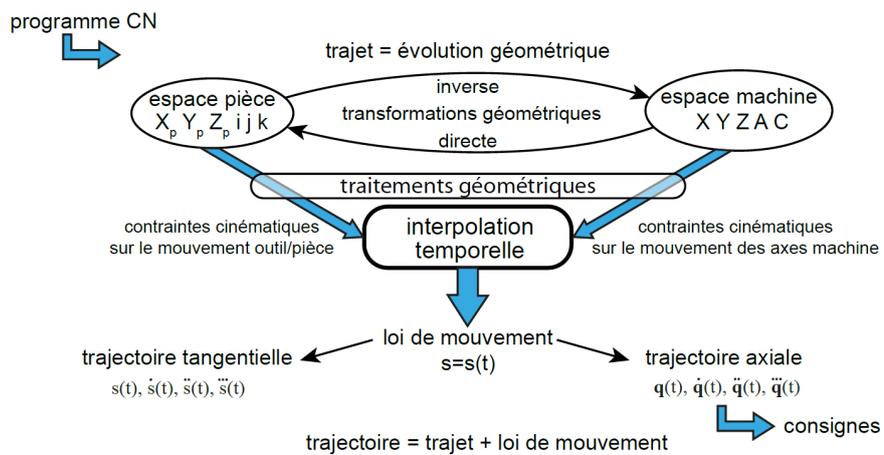


Figure 1.8 – Traitement de la géométrie et interpolation temporelle dans la commande numérique Beudaert (2013)

$$\dot{\mathbf{q}}(s) = \frac{d\mathbf{q}(s)}{dt} = \frac{d\mathbf{q}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{q}_s(s)\dot{s} \quad (1.1)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{q}_{ss}(s)\dot{s}^2 + \mathbf{q}_s(s)\ddot{s} \quad (1.2)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{q}_{sss}(s)\dot{s}^3 + 3\mathbf{q}_{ss}(s)\dot{s}\ddot{s} + \mathbf{q}_s(s)\ddot{\ddot{s}} \quad (1.3)$$

Le trajet de chaque axe articulaire est ainsi fonction de l'abscisse curviligne s du trajet outil/pièce, et des dérivées géométriques q_s , q_{ss} , et q_{sss} . Chaque axe d'une machine a ses propres limites en vitesse, en accélération, et en jerk (Equation 1.4). Des contraintes tangentielles sont également présentes pour limiter les mouvements outil/pièce (Equation 1.5).

$$\begin{cases} |\dot{q}^i| < V_{max}^i \\ |\ddot{q}^i| < A_{max}^i \\ |\ddot{\ddot{q}}^i| < J_{max}^i \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \dot{s} < V_{tan} \\ \ddot{s} < A_{tan} \\ \ddot{\ddot{s}} < J_{tan} \end{cases} \quad (1.5)$$

A partir de ce formalisme, Beudaert propose d'obtenir simplement une approximation des limites supérieures de la vitesse tangentielle à partir de la géométrie du trajet et des limites cinématiques des axes de la machine. La vitesse tangentielle maximale atteignable est directement liée aux contraintes de vitesse des axes. En revanche, l'accélération et le jerk tangentiel sont tous les deux liés à la vitesse tangentielle \dot{s} . Une approximation est donc nécessaire pour lier simplement les contraintes d'accélération et de jerk à la vitesse d'avance maximale atteignable. Les limites les plus basses se produisent au niveau des chutes de vitesse relative outil/pièce. A cet endroit, la vitesse d'avance diminue jusqu'à une valeur minimale puis ré-augmente. Le niveau le plus bas se produit ainsi lorsque l'accélération tangentielle \ddot{s} est nulle. Cette simplification permet d'obtenir une limite de la vitesse d'avance en fonction des ralentissements générés par les contraintes d'accélération des axes. De manière analogue pour les contraintes de jerk, pour chaque axe i , l'ordre de grandeur des dérivées géométriques premières q_s est largement inférieur à celui des dérivées géométriques d'ordre trois q_{sss} dans les zones où la géométrie varie beaucoup, c'est-à-dire dans les zones où de forts ralentissements peuvent se produire. Ainsi, les termes associés à \ddot{s} et $\ddot{\ddot{s}}$ sont négligeables dans l'Equation 1.3. En résumé, une approximation de la vitesse d'avance est donnée par l'Equation 1.6, et où i représente chaque axe de la machine.

$$\dot{s} \leq \min \left(V_{prog}, \frac{V_{max}^i}{|q_s^i|}, \sqrt{\frac{A_{max}^i}{|q_{ss}^i|}}, \sqrt[3]{\frac{J_{max}^i}{|q_{sss}^i|}} \right) \quad (1.6)$$

Cette approximation a été exploitée dans diverses applications pour modifier la trajectoire existante et la rendre plus lisse [Beudaert et al. \(2011\)](#), [Grandguillaume et al. \(2016\)](#) ou pour évaluer des temps de fabrication [Grandguillaume et al. \(2015b\)](#). Le lissage de la trajectoire est un point crucial pour ne pas trop solliciter les axes de la structure. Plus la trajectoire est lisse, plus les dérivées géométriques \mathbf{q}_s , \mathbf{q}_{ss} , et \mathbf{q}_{sss} des axes sont faibles. Ainsi, pour une structure avec des capacités cinématiques données, les valeurs de vitesse d'avance atteignables seront plus élevées (Equation 1.6).

Les sous-parties suivantes développent les aspects liés au lissage lors de l'exécution de la trajectoire, et exploitent l'approximation de l'Equation 1.6 au passage d'une singularité.

2.3 Lissage

Dans le modèle CAO, la surface complexe est créée au nominal. Cependant, le programmeur de FAO génère des trajectoires discrétisées sur cette surface. Ensuite, le post-processeur les traduit en blocs pour la commande numérique en respectant les tolérances prescrites pour les erreurs de contour. Géométriquement, le résultat de l'usinage peut donner de petits plans juxtaposés qui sont visibles sur la surface. Cinématiquement, des ralentissements peuvent se produire entre le passage de chaque bloc. Pour palier à ces phénomènes, des méthodes d'arrondissement local et global ont été développées par les académiques et par les fabricants de commandes numériques.

Dans ce processus de lissage, deux tolérances sont définies par l'utilisateur dans le cas de l'usinage 5 axes : la tolérance d'usinage et la tolérance d'interpolation.

La tolérance d'usinage se situe au niveau du passage du modèle CAO à la trajectoire FAO. La surface à usiner est souvent lisse lorsqu'elle est décrite en CAO. La trajectoire décrite en FAO est ensuite une approximation, donnée par une succession de segments de droites. La tolérance d'interpolation se situe au niveau de la commande numérique. Il s'agit de la distance maximale (en position et en orientation) entre la trajectoire programmée en FAO et la consigne envoyée aux variateurs sur la machine. La valeur de ces tolérances a un impact significatif sur la vitesse relative outil/pièce. Il est ainsi nécessaire de maîtriser les paramètres CN intervenant sur ces tolérances pour maîtriser la vitesse relative outil/pièce.

[Beudaert \(2013\)](#) recense dans sa thèse l'ensemble des travaux réalisés pour modéliser ces lissages locaux et globaux. Ce manuscrit n'a pas pour vocation de détailler l'ensemble des modélisations de lissages existantes mais il souligne l'importance des réglages de la commande numérique. En particulier, les différences entre les deux formats de description de trajectoires, sous forme de segments de droites (interpolation linéaire) ou sous forme de courbes (interpolation polynomiale), sont détaillées.

2.3.1 Lissage local : format de description G1

Le format de description G1 est un format de description linéaire. Le point piloté de l'outil se déplace en ligne droite entre deux points programmés de la trajectoire, décrits par deux blocs

dans le programme CN. Cependant, en usinage 5 axes, l'outil ne se déplace pas en ligne droite mais selon une portion de courbe à cause des axes de rotation. Suivant les cas, l'écart entre la ligne droite théorique et la trajectoire réellement réalisée peut être significatif. Pour diminuer cet écart, un ré-échantillonnage linéaire est effectué dans l'espace pièce dont la valeur minimale correspond au temps de cycle de la CN. La Figure 1.9 illustre ce ré-échantillonnage.

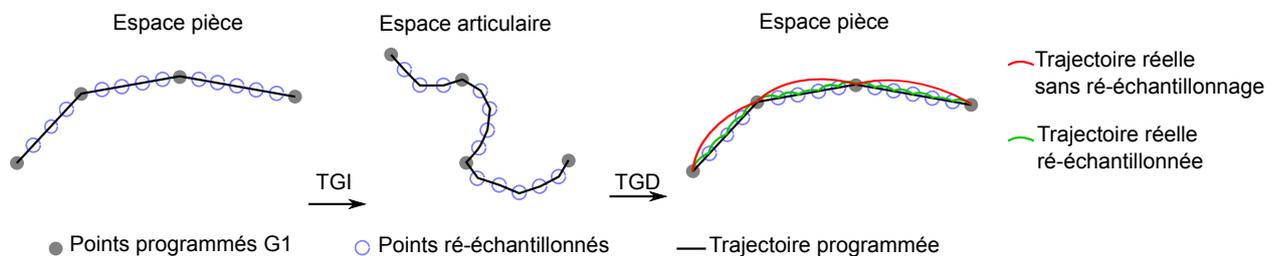


Figure 1.9 – Trajectoire dans l'espace pièce après TGI-TGD (d'après [Lavernhe \(2006\)](#))

Lorsque la trajectoire a un nombre de points trop important, des problèmes de suivi de trajectoire peuvent apparaître si la vitesse d'avance programmée est trop importante. La CN réduit la vitesse d'avance pour avoir le temps de calculer les données à chaque cycle d'interpolation.

2.3.2 Lissage global : compactage et format de description polynomial ou spline

Pour pallier aux problèmes liés aux arrêts entre blocs, plusieurs modes de compactage existent au sein de certaines commandes numériques industrielles. Les deux modes de compactage existant sur la Siemens 840D sont donnés sur la Figure 1.10.

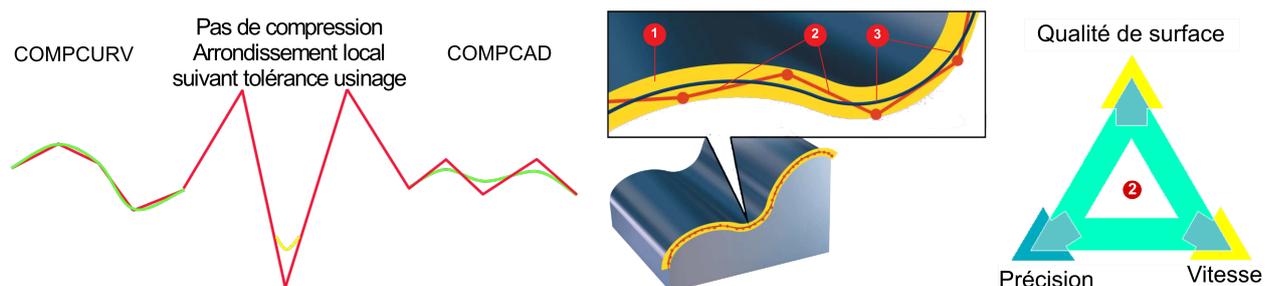


Figure 1.10 – Modes de compactage [SIEMENS \(2006\)](#)

La fonction COMPCURV interpole la trajectoire programmée en FAO par un polynôme de degré 5 en passant exactement par les points programmés alors que la fonction COMPCAD approxime les points issus de la trajectoire FAO. La fonction COMPCAD permet un usinage plus régulier car elle lisse l'accélération entre les différentes splines décrites dans chaque bloc. De manière analogue à la bande de tolérance (1), le compresseur regroupe une séquence d'instructions G1 (2) et la comprime en une courbe de type spline (3). Celle-ci est directement exécutable par la CN (Figure 1.10 au centre). Sans compression, l'arrondissement local présenté dans la partie précédente est effectué

en fonction des tolérances d'usinage. Un compromis entre la qualité de la surface, la précision et la vitesse d'exécution de la trajectoire est à faire (Figure 1.10 à droite).

Les formats de description des trajectoires nativement splines ou polynômiaux permettent de maîtriser la définition et l'exécution de la trajectoire a priori sans approximation dans l'interpolation. Pour pallier aux problèmes liés au format de description linéaire, [Langeron et al. \(2004\)](#) proposent un format d'interpolation 5xNurbs, basé sur deux B-Splines de degré 3. La première décrit les coordonnées de la courbe associée au point piloté de l'outil. La seconde décrit les coordonnées de la courbe associée à un point de l'axe de l'outil pour définir son orientation en usinage 5 axes. Des formats de description polynomiaux sont présents dans certaines commandes numériques industrielles. En affectant les coefficients des polynômes et des fonctions 5xNurbs, il est possible de générer des courbes variées (droite, parabole, fonction puissance).

Cependant, même ces formats sont limitants par-rapport à la surface nominale définie en CAO. Le développement de commandes numériques ouvertes est ainsi en plein essor depuis quelques années pour remédier à ces problèmes d'interpolateurs de gestion de la géométrie entre FAO et CN. La structure de la commande peut être ainsi librement paramétrée. En supprimant la barrière du code CN, toutes les informations décrivant la géométrie des trajets sont directement envoyées à la CN sans perte d'informations liées aux formats de description. Mais la modélisation d'un interpolateur de commande numérique industrielle reste toujours difficile.

En conclusion, le réglage de la commande numérique est l'un des facteurs sur lesquels les programmeurs jouent le moins dans l'industrie. C'est pourtant l'un des facteurs les plus influents pour la qualité de la pièce et l'optimisation de la productivité. La gestion de ces paramètres ne constitue pas le cœur de ces travaux mais est une étape nécessaire pour étudier l'influence des contraintes cinématiques sur le mouvement outil/pièce. Elle est ainsi partiellement détaillée dans les chapitres 3 et 4 de ce manuscrit, en particulier lors de l'expérimentation sur le centre d'usinage Mikron UCP710.

2.4 Passage de singularité

Les principales difficultés associées aux transformations géométriques inverses sont les problèmes de configurations singulières et de changement d'espace de solution. Le Tableau 1.1 présente les deux domaines de solutions admissibles pour des structures de types RRTTT (Paragraphe 1.2.1). Il existe deux solutions correspondant à A positif et à A négatif. Les solutions varient ensuite en fonction des cosinus directeurs (i, j, k) décrivant l'orientation de l'outil dans l'espace pièce.

Le Tableau 1.1 montre que le cas $(i = 0, j = 0)$ est une position singulière car n'importe quelle valeur de C permet de réaliser le positionnement outil/pièce. Le passage d'une valeur de j négative à une valeur de j positive correspond à un changement du domaine de solutions. Cela signifie que les valeurs des angles de rotation passent de la solution $[A_1 = \text{acos}(k), C_1 = -\text{atan}(i/j)]$ à la solution $[A_2 = -\text{acos}(k), C_2 = -\text{atan}(i/j)]$, ce qui engendre une discontinuité. En effet, lorsque le ratio i/j a une valeur négative très grande, C_1 est proche de $\pi/2$ alors que lorsque le ratio i/j a une valeur positive très grande, C_2 est proche de $-\pi/2$. Dans le pire des cas, une discontinuité de π peut ainsi

	$i < 0$	$i = 0$	$i > 0$
$j < 0$	$A_1 = \text{acos}(k) \quad C_1 = -\text{atan}(i/j)$ $A_2 = -\text{acos}(k) \quad C_2 = -\text{atan}(i/j) + \pi$		
$j = 0$	$A_1 = \text{acos}(k) \quad C_1 = -\pi/2$ $A_2 = -\text{acos}(k) \quad C_2 = \pi/2$	$A = 0$ C indéfini	$A_1 = \text{acos}(k) \quad C_1 = \pi/2$ $A_2 = -\text{acos}(k) \quad C_2 = -\pi/2$
$j > 0$	$A_1 = \text{acos}(k) \quad C_1 = -\text{atan}(i/j) + \pi$ $A_2 = -\text{acos}(k) \quad C_2 = -\text{atan}(i/j)$		

Tableau 1.1 – Domaines de solutions (A_1, C_1) et (A_2, C_2)

apparaître sur l'axe C entre deux points consécutifs interpolés de la trajectoire. La Figure 1.11 donne un exemple d'une trajectoire avec une discontinuité de 52° . Cela se produit au passage de $j = 0$ quand i n'est pas nul. Ces mouvements de grandes amplitudes réduisent la vitesse relative outil/pièce et peuvent laisser des marques sur la pièce (Figure 1.12).

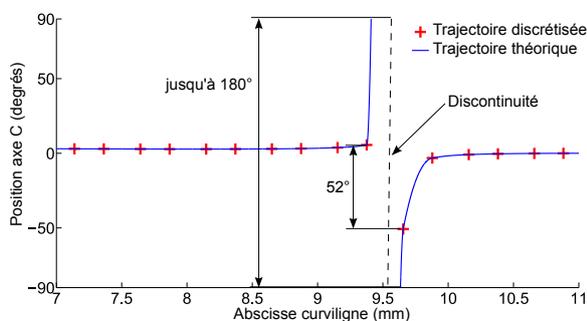


Figure 1.11 – Discontinuité au passage d'une singularité

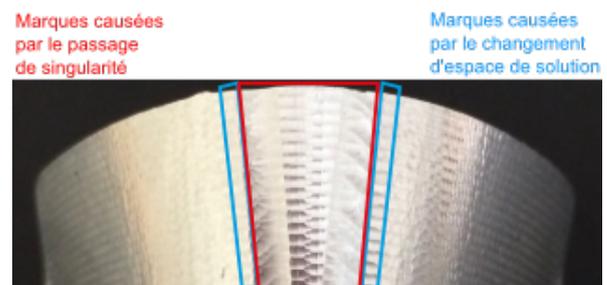


Figure 1.12 – Marques laissées sur la pièce au passage d'une singularité

Dans la littérature, deux approches sont envisagées pour résoudre ce problème de singularité : éviter de passer proche de la singularité ou passer exactement par la singularité.

Pour éviter les inconvénients de la singularité, en particulier les marques laissées sur la pièce, [Jung et al. \(2002\)](#) proposent de rétracter l'outil au passage d'une singularité. Cependant avec cette méthode, des marques causées par la flexion de l'outil au moment du dégageage et du réengagemment dans la matière peuvent apparaître. De plus, le temps d'usinage est augmenté. Pour se soustraire des contraintes liées à la singularité, [Affouard et al. \(2004\)](#) ont ainsi décrit un cône à éviter pour ne pas passer proche des positions singulières. La trajectoire, décrite par deux courbes polynomiales, est ensuite déformée pour éviter ce cône. [Lei et Hsu \(2003\)](#) proposent également d'éviter les positions singulières en modifiant les angles d'inclinaison et de pivotement à proximité des points singuliers. Modifier ces angles dans l'espace pièce permet d'éviter les singularités dans l'espace articulaire. [Yang et Altintas \(2013\)](#) modifient aussi les angles de rotation mais cette fois-ci en décrivant l'orientation avec un format spline. Les points de contrôle de la courbe sont modifiés dans le but d'éviter la singularité, tout en respectant les tolérances d'usinage.

A l'inverse, [Sørby \(2007\)](#) modifie la position des axes de rotation pour passer exactement sur le point singulier. L'étude est menée sur une trajectoire avec un format de description G1. Il ajoute

dans le programme décrivant la trajectoire un point correspondant exactement au point singulier. Cette déviation de la trajectoire pour passer exactement par la singularité est définie par Siemens [SIEMENS \(2006\)](#). Si la trajectoire passe à une distance pré-définie de la singularité, alors la trajectoire est déformée pour passer exactement sur la singularité. [Tournier et al. \(2006\)](#) analysent ce phénomène à partir des cosinus directeur de l'axe de l'outil (i, j, k) et proposent une méthode pour éviter les mouvements incohérents au passage de la singularité.

Toutes ces méthodes permettent d'améliorer les performances d'un point de vue géométrique mais pas au niveau cinématique. La trajectoire est modifiée mais pas en fonction des performances cinématiques de la machine-outil sur laquelle la pièce va être réalisée. Ainsi, la modification de la trajectoire ne permet pas nécessairement d'avoir une trajectoire sans ralentissement de la vitesse relative outil/pièce.

Au cours de cette thèse, nous avons introduit une nouvelle méthode pour détecter les mouvements incohérents au passage des points singuliers et pour modifier la trajectoire dans le but d'éviter les chutes de vitesse relative outil/pièce. La trajectoire introduite au passage de la singularité permet de respecter les contraintes cinématiques des différents axes de la machine. Pour cela, le motif où se situe la singularité est isolé, puis, la trajectoire de l'axe ralentissant la vitesse relative est modifiée à cet endroit. La modification de cette trajectoire est basée sur les équations introduites dans la partie 2.2.2. L'algorithme développé est donné sur la Figure 1.13.

A partir du programme d'usinage décrit par les coordonnées (X_p, Y_p, Z_p, i, j, k) , l'étape 1 consiste à déterminer les positions des axes de rotation A et C correspondantes grâce à la transformation géométrique inverse. Au passage de la singularité, la trajectoire initiale est séparée en 2 parties : une partie avant la singularité et une partie après la singularité (Etape 2). Ces parties sont ensuite interpolées par deux courbes B-Spline de degrés 3 C_{av} et C_{ap} en fonction de l'abscisse curviligne (Etape 3). L'étape 4 permet de ré-échantillonner les courbes à une fréquence correspondant au temps de cycle de la commande numérique utilisée. En chacun de ces points discrétisés, il est possible d'évaluer les dérivées géométriques. Si les signes de la dérivée première avant et après la singularité sont différents alors de manière symétrique, on recule sur la courbe avant la singularité et on avance sur la courbe après la singularité jusqu'à obtenir des dérivées géométriques avec le même signe au point discrétisé k . L'étape 8 permet d'interpoler les 4 points précédant le point k sur la courbe avant la singularité et les 4 points suivant le point k sur la courbe après la singularité pour créer une courbe C_{motif} . Après avoir projeté les points initiaux sur la courbe C_{motif} , l'étape 11 permet de vérifier que la nouvelle trajectoire est cinématiquement admissible, c'est-à-dire respecte les limites de vitesse, d'accélération, et de jerk de la machine. Si ce n'est pas le cas, alors on continue à reculer sur la courbe avant la singularité et à avancer sur la courbe après la singularité jusqu'à respecter les contraintes cinématiques. Des détails supplémentaires justifiant la construction de cet algorithme sont disponibles dans [Grandguillaume et al. \(2016\)](#).

Afin de savoir s'il est nécessaire de passer exactement par le point singulier, deux approches distinctes ont été réalisées, l'une en introduisant un motif avec une trajectoire passant exactement par le point singulier [Grandguillaume et al. \(2015a\)](#) et l'autre en créant un motif plus « naturel » reliant les deux parties de la trajectoire sans imposer le passage par le point singulier.

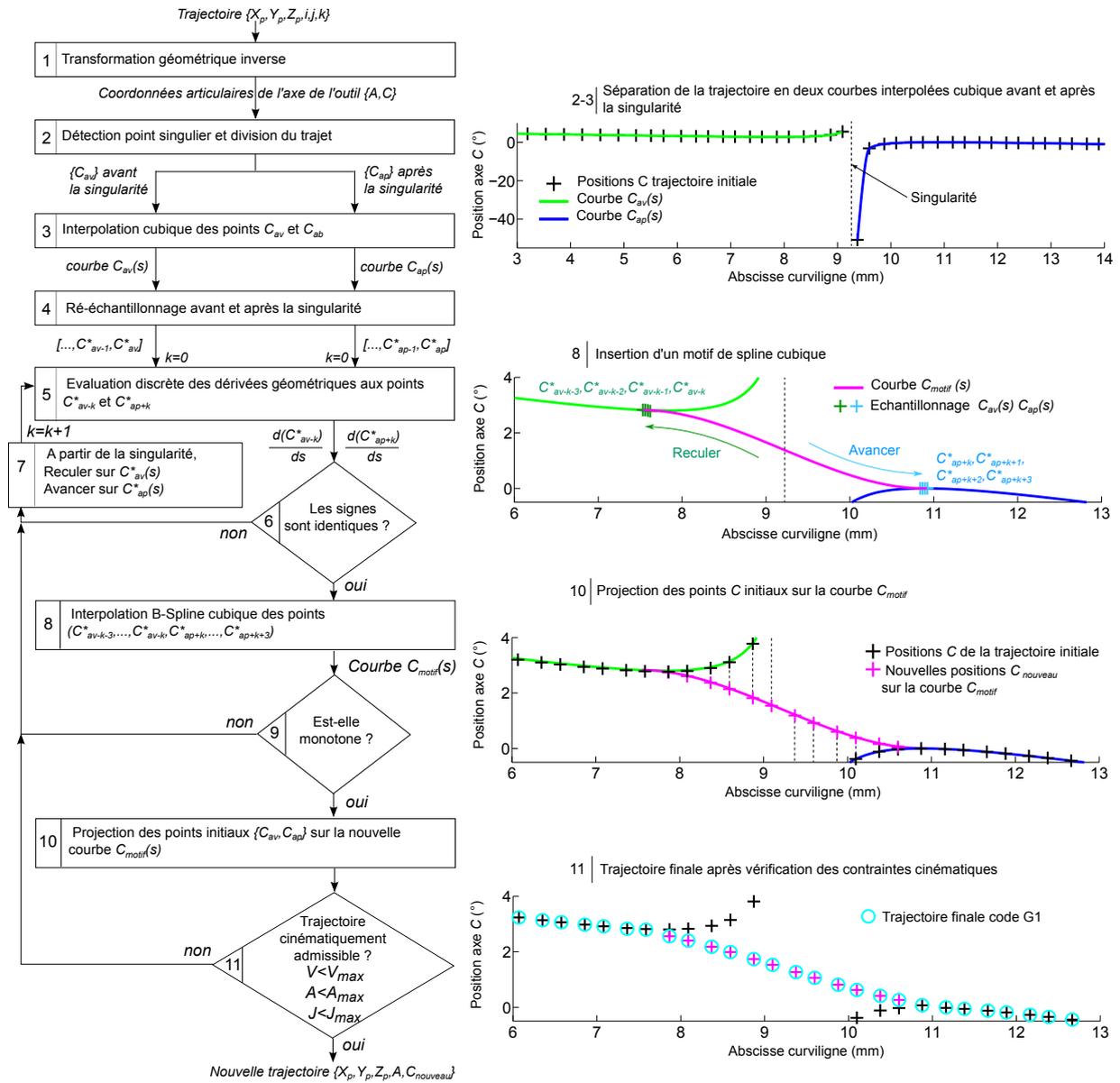


Figure 1.13 – Algorithme d’insertion d’un motif cinématiquement admissible au passage d’une singularité

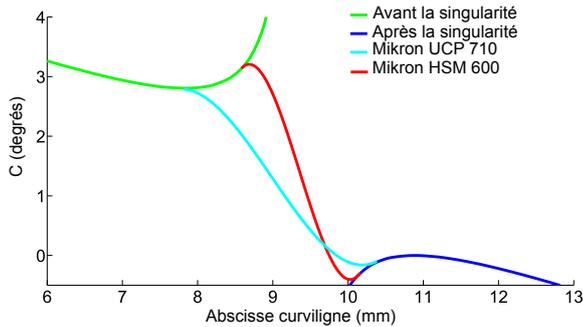


Figure 1.14 – Trajectoires obtenues en fonction de la machine-outil

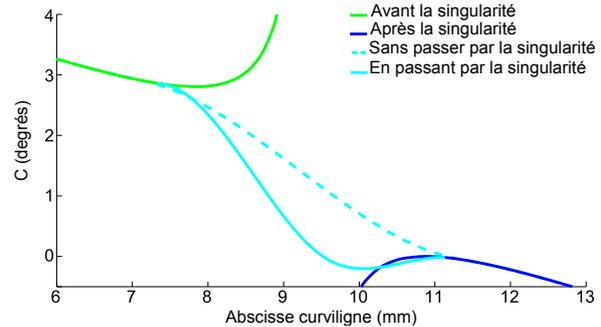


Figure 1.15 – Trajectoires passant par la singularité ou non pour le centre Mikron UCP710

Le passage par le point singulier n'est pas nécessaire, un mouvement plus lisse peut être créé sans passer par ce point (Figure 1.15). Des tests ont été réalisés sur le centre d'usinage Mikron UCP710 sur une partie d'aube de turbine hydraulique. Sur cette pièce, le phénomène de singularité se produit au passage du bord d'attaque de l'aube. Une vidéo est disponible sur la chaîne Youtube du Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisé (LURPA) à l'adresse <https://www.youtube.com/watch?v=g7p1umVBQ08>. La méthode proposée est générique, c'est-à-dire applicable à n'importe quelle structure poly-articulée. Afin de constater l'influence des caractéristiques cinématiques sur la trajectoire, l'algorithme utilisé a été appliqué avec les caractéristiques d'un autre centre d'usinage (Mikron HSM600). La Figure 1.14 montre que la trajectoire solution est différente en fonction de la machine-outil. Les capacités de jerk de l'axe C sont meilleures pour le centre HSM600, le mouvement de l'axe C possible est ainsi plus important.

Cette étude a permis de mettre en avant l'importance des caractéristiques cinématiques sur la définition de la trajectoire. Une stratégie de lissage de la trajectoire a été mise en place pour déformer la trajectoire au passage de la singularité et la rendre cinématiquement admissible pour la machine-outil utilisée. La partie suivante recense l'ensemble des stratégies de fraisage existantes en usinage 5 axes. Une attention particulière est donnée aux stratégies définies en lien avec la cinématique.

3 Les stratégies d'usinage

3.1 Difficultés associées aux trajectoires 5 axes

Une trajectoire 5 axes est définie par le positionnement de l'outil, c'est-à-dire par les coordonnées du point piloté et par son orientation \mathbf{u} par-rapport à la pièce. Le point piloté de l'outil est souvent le point extrémité (C_E). Cependant, il peut être intéressant dans le cas de l'utilisation de fraises hémisphériques de piloter le point centre de l'outil (C_L). En effet, en pilotant ce point, une variation des angles d'inclinaison de l'outil par-rapport à la pièce n'engendre pas de modification de sa position. La Figure 1.16 propose un paramétrage de l'orientation de l'outil dans le repère local $(\mathbf{f}, \mathbf{n}, \mathbf{t})$. \mathbf{f} représente le vecteur tangent à la courbe suivie par le point piloté, \mathbf{n} est le vecteur

normal à la surface, et \mathbf{t} est le vecteur transverse à la trajectoire et tangent à la surface. Il existe plusieurs dénominations à ces angles, mais la notion la plus communément utilisée dans la littérature est donnée par les angles θ_n et θ_t . θ_n est l'angle de pivotement autour de \mathbf{n} et θ_t est l'angle d'inclinaison autour de \mathbf{t} . L'enchaînement des différents points dans la direction d'avance \mathbf{f} définit le mode de balayage. Selon le type de surface, on peut distinguer l'usinage en bout et l'usinage sur le flanc. L'usinage en bout est particulièrement adapté aux surfaces galbées avec des rayons de courbures importants alors que l'usinage sur le flanc convient plus spécifiquement aux surfaces réglées, développables ou non, avec peu de raccordements. Le recouvrement de la surface est obtenu en juxtaposant les passes dans la direction perpendiculaire à la direction d'avance. Ce mode de guidage peut être réalisé par des courbes iso-paramétriques [He et al. \(2009\)](#), des plans parallèles [Ding et al. \(2005\)](#), ou des contours parallèles [Park \(2003\)](#)...

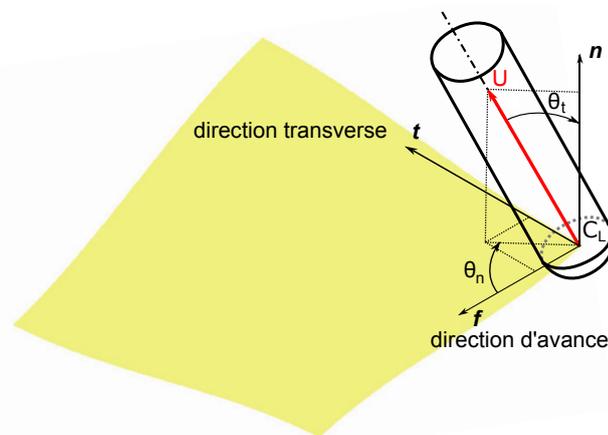


Figure 1.16 – Paramétrage du positionnement de l'outil en usinage 5 axes en bout

L'utilisation de l'usinage 5 axes a permis d'améliorer la productivité, notamment en permettant de réduire le nombre de posages d'une pièce, et en atteignant des surfaces inaccessibles tout en restant hors collisions. La possibilité d'orientation de l'outil par-rapport à la pièce permet d'usiner des pièces plus complexes. Il permet également d'orienter la partie active de l'outil par-rapport à la surface à usiner pour contrôler la vitesse de coupe. Cependant l'usinage 5 axes requiert une meilleure expertise par rapport à l'usinage 3 axes. De nombreuses difficultés sont associées à l'ajout d'axes supplémentaires. Une mauvaise gestion des axes de rotation peut donner un temps d'usinage plus important qu'avec une méthode d'usinage 3 axes classique [Zębala et Plaza \(2014\)](#). La vaste étendue des recherches en usinage 5 axes depuis la fin des années 1980 montre l'intérêt porté par les chercheurs à ce domaine. Plus de 3000 articles sont recensés dans le domaine de l'usinage. Dans sa thèse, [Prat \(2014\)](#) comptabilise le nombre de publications associées à l'usinage 5 axes sur ces 30 dernières années (Figure 1.17). La base de donnée choisie est SCOPUS et la recherche est associée à l'expression « 5-axis milling ». Cette syntaxe est recherchée soit dans le titre, soit dans les mots clés, soit dans le résumé. En se basant sur ces 3 dernières années, le nombre d'articles publiés par an est toujours aussi élevé, voire en progression.

Les multiples stratégies d'usinage proposées dans ces articles abordent les difficultés liées à l'usinage 5 axes. Les différents axes de développement se sont concentrés sur l'amélioration des

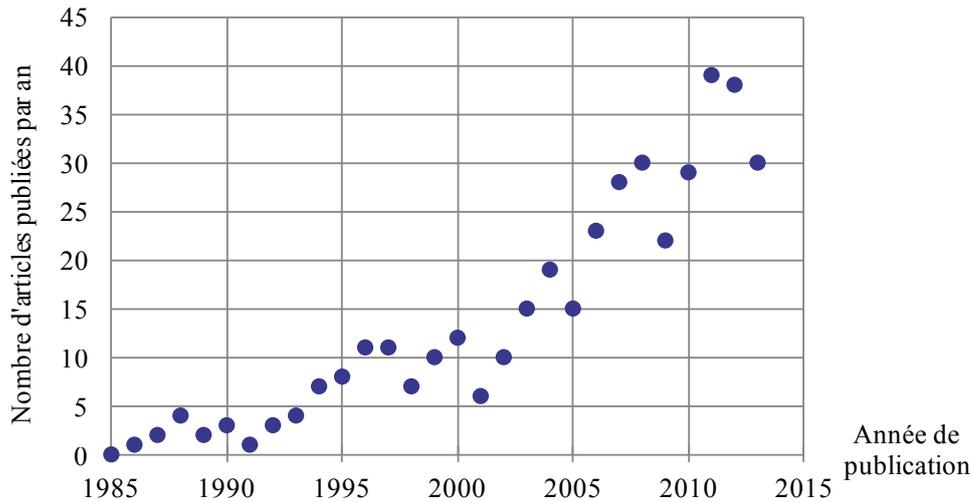


Figure 1.17 – Nombre de publications pour la requête « 5-axis milling » par an [Prat \(2014\)](#)

trajectoires au niveau des 3 étapes principales du processus de fabrication mais également au niveau de l'interface entre ces étapes (Figure 1.18). En FAO, les trajectoires sont définies d'un point de vue géométrique. D'un point de vue machine, les problématiques liées aux transferts des langages via les post-processeurs ont été abordées. L'exécution sur la machine a fait intervenir des problématiques liées à la cinématique mais également à la coupe.

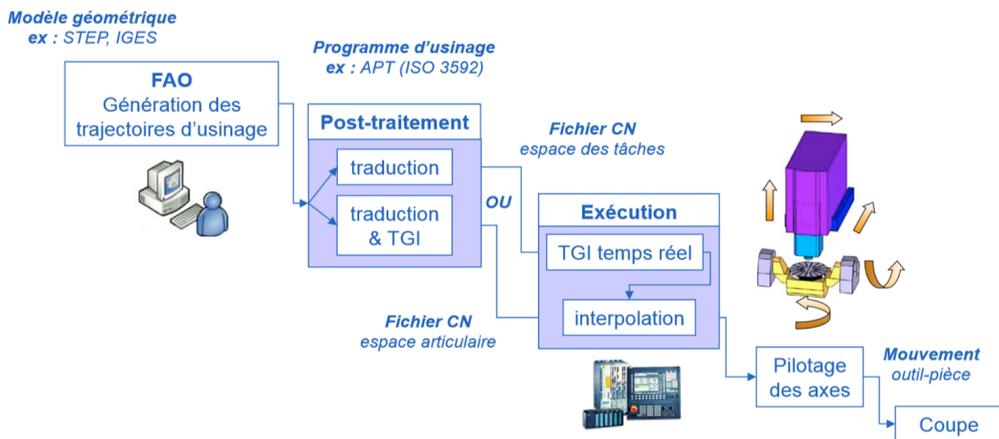


Figure 1.18 – Chaîne numérique en usinage 5 axes

Les différentes stratégies proposées dans la littérature prennent toutes en compte des aspects différents mais essentiels pour avoir une pièce conforme en un minimum de temps. Les sous-parties suivantes font état des différentes stratégies d'usinage 5 axes mises en œuvre dans la littérature. Ces stratégies sont définies soit en fonction de la géométrie de la pièce à usiner, soit en fonction de la coupe, ou encore en fonction de la cinématique.

3.2 Stratégies liées à la géométrie de la pièce à usiner

D'un point de vue géométrique, la trajectoire de l'outil est généralement choisie en fonction de 3 critères distincts : l'évitement de collisions, l'évitement d'interférences outil/pièce au niveau local, et l'état de surface souhaité en finition.

Les méthodes d'évitement de collisions globales sont la plupart du temps structurées en 3 étapes : la modélisation du sous-ensemble outil/porte-outil et du sous-ensemble pièce/porte-pièce, des tests de collisions entre ces deux sous-ensembles, et pour finir une correction de l'orientation en cas de collisions. La correction de l'orientation doit s'effectuer en gardant une trajectoire lisse [Bi et al. \(2010\)](#). En ce sens, des méthodes ont été développées comme l'utilisation de champs répulsifs [Lacharnay \(2014\)](#). Cependant ces approches ne tiennent pas compte de l'architecture de la machine et de ses caractéristiques cinématiques. Des ralentissements de la vitesse relative outil/pièce peuvent être engendrés sur les portions de trajectoire modifiées ou au niveau des raccordements. Une amélioration possible à ces développements serait de tenir compte de la structure sur laquelle la pièce va être réalisée.

Les méthodes d'évitement d'interférences au niveau local proposent de modifier la position du point piloté de l'outil [Li et Jerard \(1994\)](#), mais plus récemment uniquement l'orientation de l'outil par rapport à la pièce [Kim et al. \(2015\)](#). Les trajectoires proposées initialement sont déformées localement pour éviter les problèmes de talonnage par exemple. Ces méthodes lissent l'orientation de l'outil en essayant de minimiser les déplacements des axes de rotation [Chen et al. \(2015\)](#). Cependant, ces modifications d'orientation ne prennent également pas en compte la diversité des structures poly-articulées tant sur l'architecture que sur leurs capacités cinématiques.

L'état de surface peut être maîtrisé avec des stratégies d'usinage iso-crête [Tournier et Duc \(2005\)](#). La maîtrise de l'orientation de l'outil permet d'utiliser des outils toriques ou encore cylindriques et d'augmenter le pas transversal tout en gardant la même hauteur de crête [Hosseinkhani et al. \(2007\)](#). L'usinage s'effectue donc en moins de passes et des gains potentiels de temps d'usinage peuvent être envisagés. [Jun et al. \(2003\)](#) proposent une méthode d'optimisation de l'orientation de l'axe de l'outil en définissant un espace de configurations admissibles (C-Space). Des tests de collisions permettent de déterminer les zones sans interférence, et l'orientation est ensuite choisie dans le but d'avoir la hauteur de crête minimale. Pour une hauteur de crête fixée, la distance entre passes peut être réduite. La longueur totale du trajet est ainsi plus faible. Cependant, il est nécessaire dans ce genre de situation de vérifier que la diminution de la longueur du trajet ne soit pas handicapée par une vitesse d'exécution plus faible. En effet, cette diminution pourrait engendrer un temps global d'usinage plus élevé [Tournier et Duc \(2001\)](#).

3.3 Stratégies liées à la coupe

Des critères associés au débit d'enlèvement de matière ont été développés afin de diminuer le temps d'usinage, en particulier sur des opérations d'ébauche avec des fraises toriques. Deux axes principaux ont été mis en avant, l'un basé sur la recherche de la direction d'avance du point piloté

de l'outil et l'autre basé sur l'orientation de l'axe de l'outil.

La direction d'avance peut être choisie dans le but de maximiser la largeur de coupe. [Chiou et Lee \(2002\)](#) spécifient un critère appelé Machining Potential Field (MPF). Un champ de vecteurs locaux caractérise les directions suivant lesquelles la largeur coupée est maximale. Ils déterminent ensuite la trajectoire continue, passant par ces maximums locaux, et maximisant la largeur coupée. Sur le même principe, [Kumazawa et al. \(2015\)](#) proposent un critère nommé Preferred Feed Direction (PFD) qui maximise la largeur coupée. La différence par rapport à l'étude précédente consiste à venir partitionner la surface en plusieurs zones. [Liu et al. \(2015\)](#) construisent des trajectoires maximisant la largeur coupée sur une passe, mais pas nécessairement localement. La Figure 1.19 montre la méthode basée sur le critère MPF et les points singuliers définissant la répartition des différentes zones. L'approche de la définition d'une trajectoire par l'utilisation d'un champ de vecteurs donnant localement la direction à privilégier est très intéressante. Cependant, étant donné que l'on ne connaît pas les caractéristiques cinématiques de la MOCN utilisée, il est difficile de comparer ces méthodes en termes de temps d'usinage.

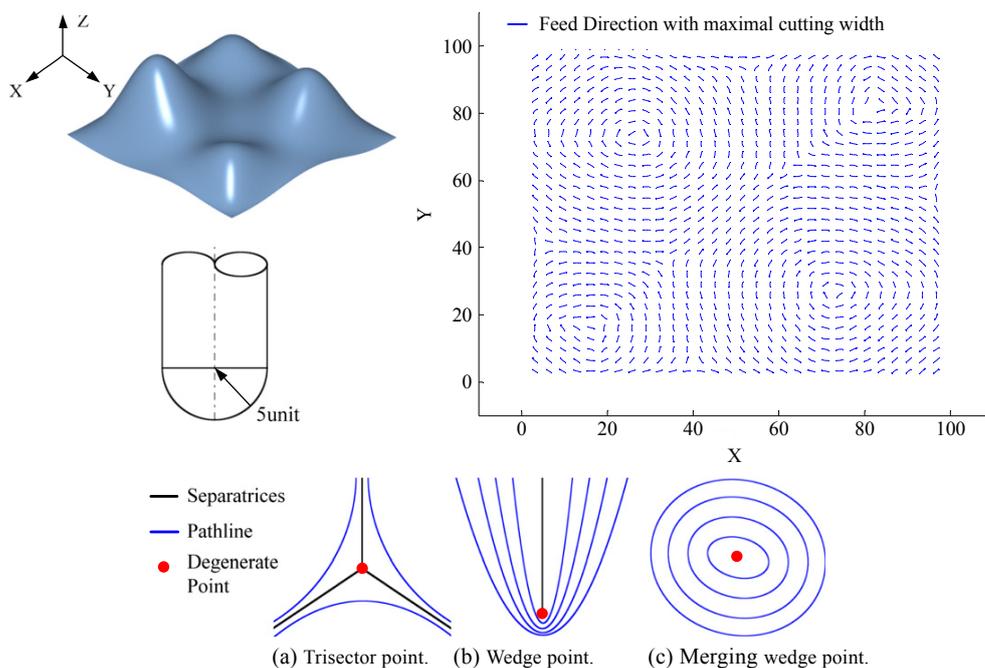


Figure 1.19 – Génération de trajectoires basée sur un champ de vecteur [Liu et al. \(2015\)](#)

L'orientation de l'axe de l'outil a une influence sur la morphologie des copeaux et sur le niveau des efforts de coupe. Ces efforts peuvent engendrer des vibrations et laisser des marques sur la pièce. En finition, [Gilles et al. \(2013\)](#) proposent ainsi d'orienter l'axe de l'outil pour faire talonner l'avant et ainsi équilibrer l'effort de coupe transversal à l'avance. Cette méthode permet de réduire les vibrations et donc de garantir un meilleur état de surface.

3.4 Stratégies liées à la cinématique

L'étude du comportement cinématique de la machine associée à la stratégie d'usinage est cruciale pour obtenir un gain significatif en termes de temps d'usinage et ainsi en termes économique pour un industriel. En effet, l'adaptation de la stratégie d'usinage aux performances cinématiques est plus importante dans le cas de l'usinage 5 axes que dans le cas de l'usinage 3 axes. Une mauvaise utilisation des axes de rotation entraîne un ralentissement global du mouvement outil/pièce puisque la commande numérique synchronise tous les axes bien que les caractéristiques cinématiques individuelles soient différentes. Les approches les plus performantes considèrent de manière simultanée la géométrie à usiner et la vitesse d'avance outil/pièce réelle, souvent bien en deçà de celle programmée. Plusieurs leviers sont ainsi possibles pour définir des stratégies d'usinage 5 axes permettant de garantir les vitesses d'avance programmées ou de réduire le temps d'usinage. Il est possible d'optimiser les trajets hors matière, d'adapter le posage, la direction d'avance ou encore l'orientation de l'outil.

3.4.1 Définition des trajets hors matière

Les temps de trajets hors matière sont parfois importants et ont un impact significatif sur le temps de fabrication total de la pièce usinée. En ce sens, réduire les temps hors matière peut être à privilégier d'autant plus que les possibilités sont plus variées. La trajectoire est spécifiée à partir d'un positionnement outil de départ pour relier un positionnement outil de fin avec pour seule contrainte la non collision. Ainsi, [Pateloup \(2011\)](#) prend en considération la cinématique d'une machine à structure parallèle pour décrire des trajets hors matière optimaux en temps. Pour cela, il détermine expérimentalement un coefficient d'amplification cinématique entre les contraintes cinématiques des axes dans l'espace articulaire et la vitesse, l'accélération, et le jerk obtenus dans l'espace pièce. A partir de ces valeurs, il en déduit des trajets hors matière dans l'espace articulaire qui permettent de réduire le temps. Ces résultats sont intéressants mais ils sont basés sur des relevés expérimentaux, associés à une structure poly-articulée donnée. [Denkena et al. \(2011\)](#) déterminent des trajectoires hors matière qui diminuent le temps des trajets tout en évitant les collisions pour une machine donnée. Il serait intéressant d'avoir un formalisme générique qui permette de faire le lien entre les contraintes cinématiques articulaires et la vitesse relative outil/pièce obtenue dans l'espace des tâches, quelle que soit la structure.

3.4.2 Définition du posage

[Pessoles et al. \(2013\)](#) définissent le posage (position et orientation) d'une pièce pour l'usiner en 5 axes continu. Le critère choisi pour le posage est basé sur la distance parcourue par les axes de rotation B et C (Equation 1.7). L'objectif est de minimiser cette distance sur l'ensemble de la trajectoire de la pièce. La Figure 1.20 montre un gain de temps d'environ 40% sur l'usinage d'une pièce test par-rapport à un posage traditionnel. Ce critère prend en compte l'architecture de la machine en termes de déplacements possibles mais pas en termes de cinématique. Or la cinématique des axes a nécessairement un impact sur le choix de la solution donnant le posage si

le but est d'usiner la pièce le plus rapidement possible.

$$\sum_{i=1}^{N-1} \max (|B_{i+1} - B_i|; |C_{i+1} - C_i|) \quad (1.7)$$

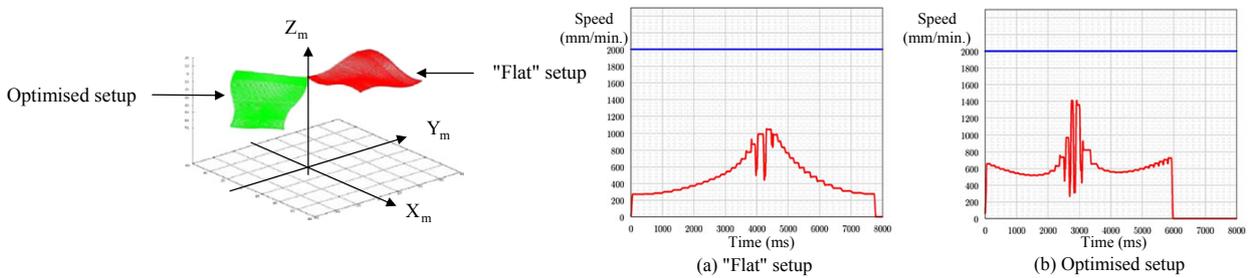


Figure 1.20 – Comparaison posage traditionnel et posage optimisé [Pessoles et al. \(2013\)](#)

[Hu \(2011\)](#) proposent de choisir le posage qui permet de minimiser les accélérations des axes de rotation (Equation 1.8). Ils font l'hypothèse que les axes de rotation, en particulier leurs sollicitations en accélération, vont limiter la vitesse relative outil/pièce. En ce sens, ils définissent une fonction de minimisation composée de la somme des accélérations des deux axes de rotation. Néanmoins, cette hypothèse n'est pas nécessairement vraie dans un cas général. En effet, d'autres axes ou encore d'autres niveaux cinématiques peuvent venir restreindre la vitesse relative outil/pièce réelle.

$$\min \sum_{i,j} ((a_{i,j}^A)^2 + (a_{i,j}^B)^2) \quad (1.8)$$

3.4.3 Définition de la direction d'avance

A partir des limites cinématiques en vitesse, [Kim et Sarma \(2002\)](#) construisent un champ de vecteurs donnant les directions à privilégier. Plus récemment, [Hu et Tang \(2016\)](#) proposent un critère nommé Machine-Dependant Potential Field (MDPF). Cet indicateur combine les directions à privilégier pour maximiser la largeur de coupe tout en tenant compte des capacités cinématiques de la machine. [Zhang et Tang \(2016\)](#) modélisent également la largeur coupée et la vitesse d'avance mais comme deux fonctions indépendantes. La solution consiste ensuite à trouver le compromis entre les deux. [Hu et al. \(2017\)](#) prennent en compte dans leurs travaux les capacités cinématiques de la machine pour définir des trajectoires ayant un taux d'enlèvement de matière optimal. Ils trouvent la direction des plans parallèles qui permet de réduire le temps d'usinage. Pour cela, ils tiennent compte des capacités cinématiques de la machine.

3.4.4 Définition de l'orientation de l'axe de l'outil

Bien que l'adaptation de l'orientation de l'axe de l'outil soit souvent destinée à éviter les collisions ou interférences, quelques recherches ont néanmoins été effectuées ces dernières années pour

assurer une variation de l'orientation de l'outil fluide. La fluidité permet de ne pas trop solliciter les axes, et ainsi de ne pas réduire la vitesse d'avance.

Ho et al. (2003) développent une méthode nommée TOS (Tool Orientation Smoothing) qui lisse l'orientation de l'outil en évitant les collisions et les interférences outil/pièce. L'orientation de l'axe de l'outil est lissée entre les positions de passage obligatoires qui évitent les collisions. Ils montrent que le temps d'usinage est réduit mais le lissage n'est pas effectué en fonction des capacités cinématiques de la machine. Ainsi, ce résultat montre l'intérêt du lissage mais il n'est pas adapté à la structure sur laquelle la trajectoire est exécutée.

Pechard (2009) définit des trajectoires en usinage sur le flanc en effectuant un compromis entre la minimisation des écarts géométriques et la maximisation de la fluidité de la trajectoire. La trajectoire de l'axe de l'outil est définie par deux courbes Langeron et al. (2004). Ce critère de fluidité, basé sur l'énergie de déformation de la surface d'usinage S dans les directions u et v , permet d'obtenir un trajet plus lisse, donc potentiellement avec une vitesse d'avance plus élevée, tout en respectant les contraintes géométriques (Equation 1.9). La Figure 1.21 présente le gain de temps potentiel associé à cette méthode. Cependant, ce critère n'est pas directement fonction des capacités cinématiques de la machine même si l'objectif était d'avoir une vitesse d'avance plus élevée.

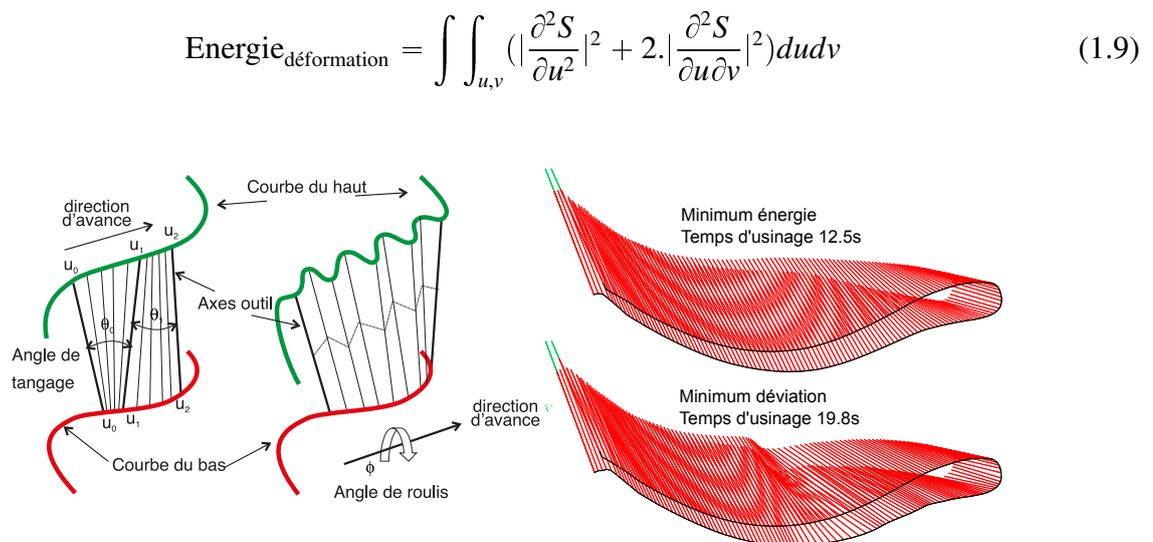


Figure 1.21 – Critère d'énergie de déformation pour l'usinage sur le flanc Pechard (2009)

Castagnetti et al. (2008) proposent d'orienter l'outil dans un Domaine d'Orientation Admissible. Ce domaine, défini dans l'espace pièce, traduit les contraintes liées à l'usinage de la pièce. Il est ensuite transféré dans l'espace machine. La solution, choisie à l'intérieur de ce domaine, tend à minimiser les sollicitations des 2 axes de rotation A et C le long de l'abscisse curviligne s , à travers la fonction définie par l'Equation 1.10.

$$\min_i [\sum_i ((\frac{\partial^2 A_i}{\partial S_i^2})^2 + (\frac{\partial^2 C_i}{\partial S_i^2})^2)] \quad (1.10)$$

La Figure 1.22 représente le DOA à partir des contraintes des angles d'inclinaison et de détal-

nage, ainsi que les différentes trajectoires à l'intérieur du DOA. Ces trajectoires sont générées à partir du critère précédemment mentionné.

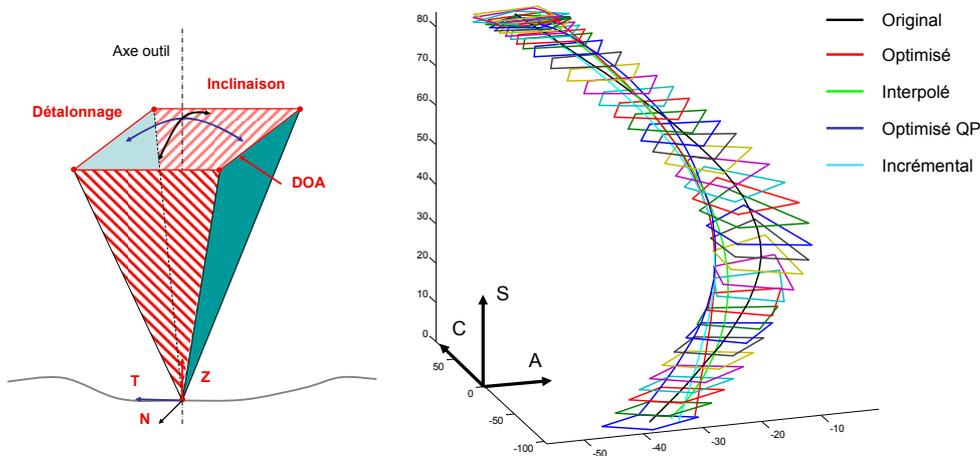


Figure 1.22 – Domaine d'Orientation Admissible et lissage des axes de rotation [Castagnetti \(2008\)](#)

Cette méthode permet de respecter les contraintes liées à l'usinage de la surface de la pièce, mais le lissage des axes de rotation n'est pas défini en fonction des capacités cinématiques de la structure utilisée. Ce critère part simplement du principe qu'il est préférable de ne pas utiliser les axes de rotation car ils ont des capacités cinématiques moins performantes que les axes de translation. Leurs utilisations engendrent ainsi des ralentissements potentiels de la vitesse relative outil/pièce. Sur le même principe, [Hu \(2011\)](#) modélisent un Domaine de Contraintes Géométriques (Domain of Geometrical Constraints DGC) pour éviter les interférences locales et obtenir l'état de surface souhaité sur la pièce. Le trajet est ensuite déterminé dans le but de réduire l'accélération maximale des axes de rotation sur toute la surface à usiner (Equation 1.8).

[Lavernhe et al. \(2008\)](#) ont souligné dans leurs travaux l'importance des contraintes liées aux limitations cinématiques, en particulier du jerk pour optimiser l'orientation de l'outil. Un formalisme en inverse du temps a été développé dans le but de savoir quel axe limite la vitesse d'avance. Sa modélisation a permis d'optimiser l'orientation d'un outil torique sur une surface tendue de type parabolicoïde hyperbolique. L'optimisation consiste à trouver les angles d'inclinaison de l'outil θ_n et θ_t qui maximisent la vitesse sur l'ensemble de la trajectoire (Equation 1.11). L'espace admissible pour l'orientation de l'axe de l'outil est limité et restreint à la recherche de lois polynomiales cubiques. La Figure 1.23 présente la stratégie retenue et le gain potentiel sur la vitesse d'avance par rapport à une orientation de l'outil normale à la surface.

$$F_Q = \int_0^L V_{\max}(s).ds \quad (1.11)$$

[Gasparetto et Zanotto \(2008\)](#) définissent des trajectoires fluides en minimisant une fonction objectif (nommé FOBJ) composée d'un terme proportionnel au temps total d'exécution de la trajectoire (h_i) et d'un terme proportionnel au carré du jerk (\ddot{q}_j) (Equation 1.12). La trajectoire est définie par une

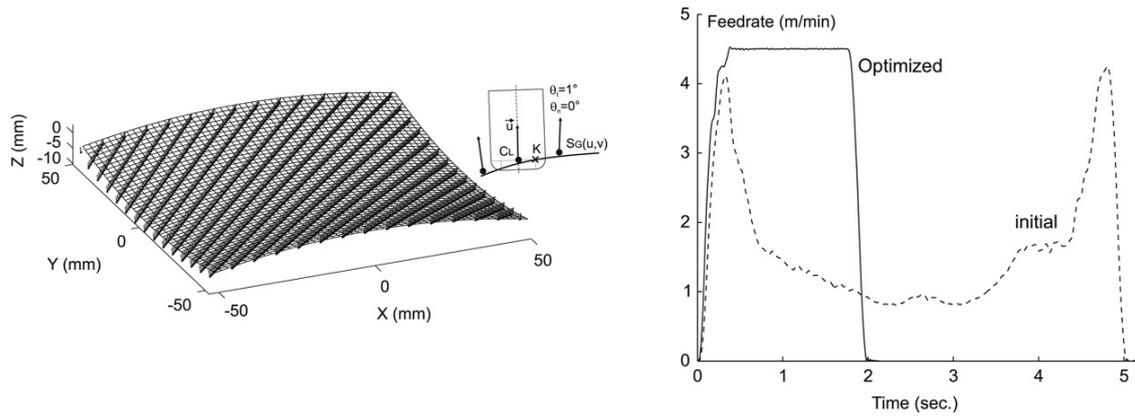


Figure 1.23 – Optimisation de l'orientation de l'outil avec prise en compte des contraintes cinématiques Lavernhe et al. (2008)

B-Spline de degré 5 et minimisant la fonction objectif. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle dépend uniquement du paramètre de jerk. De plus, des termes de poids (k_T et k_J) permettent de quantifier l'impact du temps et du jerk mais leur utilisation en fonction de la pièce à réaliser et de la machine utilisée n'est pas précisée.

$$FOBJ = k_T \cdot N \cdot \sum_{i=1}^{vp-1} h_i + k_J \cdot \sum_{j=1}^N \int_0^{t_f} (\ddot{q}_j(t))^2 dt \quad (1.12)$$

Beudaert et al. (2011) lissent des trajectoires d'usinage 5 axes sur le flanc en prenant en compte les contraintes cinématiques de vitesse, d'accélération, et de jerk de la machine. Ils localisent les zones où des ralentissements de la vitesse d'avance se produisent puis ils lissent l'orientation de l'outil de manière itérative jusqu'à obtenir une trajectoire cinématiquement admissible. La vitesse d'avance est ainsi plus homogène sur toute la surface de la pièce usinée. Cette méthode tient compte des contraintes cinématiques des axes mais améliore seulement localement la trajectoire au niveau des chutes de vitesse. Il serait intéressant de créer nativement des trajectoires cinématiquement admissible et exploitant au mieux les combinaisons des mouvements des différents axes.

En résumé, la plupart des méthodes mises en oeuvre essaient de tenir compte des capacités cinématiques, mais aucun formalisme générique n'est développé afin d'adapter la stratégie complète d'usinage 5 axes, c'est-à-dire le posage, la direction d'avance, et l'orientation de l'outil.

4 Synthèse de l'état de l'art et problématique des travaux de thèse

Les exigences des industriels et de leurs clients incitent la communauté scientifique à développer des méthodes adaptées pour augmenter la qualité de la pièce tout en réduisant le temps de fabrication et ainsi les coûts associés. En ce sens, le passage de stratégies d'usinage 3 axes à des stratégies d'usinage 5 axes a permis un gain significatif. Un état de l'art a mis en avant les

avantages et les difficultés de l'usinage 5 axes en recensant les différentes stratégies développées dans la littérature. Ces stratégies prennent en compte la géométrie de la pièce à usiner, les efforts de coupe induits, ainsi que des aspects cinématiques. Cependant, cette étude a fait apparaître un manque de méthodes génériques prenant en compte les divers aspects des structures poly-articulées sur les trajectoires générées. En effet, nous avons vu qu'il est nécessaire de prendre en compte les caractéristiques cinématiques du système pour générer des trajectoires maximisant la fluidité de l'exécution sur les 3 paramètres cinématiques de vitesse, d'accélération, et de jerk. La diversité des systèmes poly-articulés, en termes d'architecture et de cinématique révèle qu'il est par conséquent pertinent de rechercher une adéquation maximale entre la structure poly-articulée employée et la trajectoire d'usinage réalisée. Le tableau 1.2 résume les différentes fonctions utilisées dans la littérature pour définir les trajets hors matière, le posage de la pièce, la direction d'avance et l'orientation de l'outil. Elles sont réparties en deux couleurs : la couleur brune englobe les références proposant des méthodes qui limitent les sollicitations cinématiques des différents axes de la machine. C'est un premier pas pour éviter d'avoir des ralentissements causés par des sollicitations trop importantes mais cela ne permet pas d'exploiter au mieux les capacités cinématiques de la structure. En effet, ces stratégies partent du constat que les axes de rotation ralentissent le mouvement relatif outil/pièce. Cependant, il semble intéressant de pouvoir adapter la stratégie pour au contraire tirer profit des combinaisons spatiales des mouvements et éviter les chutes de vitesse relative. La couleur grise contient les références tenant compte directement des limites cinématiques réglées dans le contrôleur. Ces travaux offrent la possibilité d'améliorer l'un des paramètres de la trajectoire : soit le posage, soit la direction d'avance, ou soit l'orientation de l'outil pour une machine-outil donnée.

L'étape suivante serait de trouver une méthode générique pour définir l'ensemble des paramètres quelle que soit la structure. Ces travaux de thèse s'attachent donc à développer une méthode générique et simple à utiliser permettant de créer une trajectoire d'usinage adaptée à l'architecture sur laquelle la pièce sera réalisée, en particulier sur les aspects liés à la cinématique.

	Déplacement	Vitesse	Accélération	Jerk
Hors matière			Pateloup (2011) Denkena et al. (2011)	
Posage	Pessoles et al. (2013)		Hu (2011)	
Direction avance		Kim et Sarma (2002)	Hu et Tang (2016) Hu et al. (2017)	
			Zhang et Tang (2016)	
Orientation outil	Ho et al. (2003)		Castagnetti et al. (2008) Hu (2011)	Gasparetto et Zanutto (2008)
			Lavernhe et al. (2008) Beudaert et al. (2011)	

Tableau 1.2 – Synthèse de l'état de l'art sur les stratégies d'usinage liées à la cinématique

Cette thèse a pour but de résoudre la problématique suivante :

Comment adapter la stratégie d'usinage en fonction des contraintes cinématiques de la structure poly-articulée sur laquelle la trajectoire sera exécutée pour maîtriser la vitesse relative outil/pièce ?

Pour mener à bien la résolution de cette problématique, il est nécessaire de maîtriser le comportement cinématique des structures poly-articulées au niveau articulaire et sa conséquence dans l'espace des tâches. Une méthode générique permettant de faire le lien entre les contraintes cinématiques des axes et les contraintes cinématiques induites dans l'espace pièce est mise en place dans le chapitre 2. Par la suite, des critères aidant au choix de la trajectoire sont développés dans 3 cadres d'application distincts liés au choix du posage, au choix de l'orientation de l'outil et au choix de la direction d'avance. Les 3 cadres d'application sont les suivants :

Comment adapter l'orientation de l'outil en usinage 5 axes positionné pour tirer profit des caractéristiques cinématiques des axes de translation ?

Les caractéristiques cinématiques des axes de translation sur des structures poly-articulées sont diverses et parfois réparties de manière hétérogène. En ce sens, définir une orientation de l'outil adaptée à la géométrie de la pièce et cherchant à combiner les caractéristiques des axes de translation peut être une première amélioration pour augmenter la vitesse relative outil/pièce. Le chapitre 3 présente les développements théoriques réalisés et illustre expérimentalement la méthode sur un cas test. Dans le but de montrer la généralité de la méthode proposée, les résultats sont donnés sur des structures poly-articulées avec des architectures différentes.

Comment adapter le posage de la pièce pour tirer profit des combinaisons des mouvements relatifs des axes de rotation et de translation et ainsi augmenter la vitesse relative outil/pièce ?

Le posage de la pièce dans l'espace de travail a un impact significatif sur les combinaisons possibles des axes de translation et de rotation. Définir un posage adapté dans l'espace de travail peut permettre de tirer profit des combinaisons des axes de rotation. Des développements sur l'influence du posage sont détaillés dans le chapitre 4.

Comment adapter la direction d'avance en fonction de la géométrie de la pièce à usiner et des contraintes cinématiques de la structure pour définir des trajectoires cinématiquement admissibles ?

Le choix de la direction d'avance lors de l'usinage d'une pièce va de pair avec le choix de l'orientation de l'outil et du posage. Une méthode permettant de définir des trajectoires 5 axes continu avec une vitesse relative outil/pièce plus élevée est proposée dans le chapitre 4. Elle passe par le choix de la direction d'avance et de l'orientation de l'outil.

Chapitre
2

Modèles de manipulabilité cinématique

Sommaire

1	Manipulabilité cinématique	42
1.1	Espaces généralisés	42
1.1.1	Espace généralisé articulaire	42
1.1.2	Espace des tâches	43
1.1.3	Passage de l'espace articulaire à l'espace des tâches	43
1.2	Ellipsoïde de manipulabilité cinématique	44
1.2.1	Norme 2 associée à l'espace articulaire	44
1.2.2	Transfert de l'espace articulaire à l'espace des tâches	45
1.2.3	Critères de manipulabilité associés à l'ellipsoïde	46
1.2.4	Limites de l'ellipsoïde de manipulabilité	48
1.3	Polytopes de manipulabilité cinématique	49
1.3.1	Norme infinie associée à l'espace articulaire	49
1.3.2	Transfert de l'espace articulaire à l'espace des tâches	51
1.3.3	Critères de manipulabilité associés aux polytopes	53
2	Analyse de la géométrie du polytope de vitesse pour différentes structures . .	53
2.1	Représentation graphique des polytopes dans l'espace articulaire	54
2.2	Représentation graphique des polytopes dans l'espace des tâches	54
2.2.1	Principe mathématique de projection et d'intersection de polytopes	55
2.2.2	En usinage 3 axes	56
2.2.3	En usinage 5 axes positionné	58
2.2.4	En usinage 5 axes continu	58
3	Analyse de la géométrie des polytopes d'accélération et de jerk	62
3.1	Polytopes d'accélération et de jerk dans l'espace articulaire	62
3.2	Modèles cinématiques du 2ème et du 3ème ordre	63
3.3	Somme de Minkowski	63
3.4	Décalage du centre du polytope	64
4	Conclusion	66

Introduction

Le chapitre 1 a mis en avant les problématiques liées à la cinématique et le manque de formalisme associé aux contraintes cinématiques pour définir nativement des trajectoires d'usinage cinématiquement admissibles. Il s'est focalisé sur les méthodes utilisées dans le monde de l'usinage sur MOCN et non sur celles développées en robotique. Cependant, que ce soit un robot humanoïde ou un centre d'usinage, la tâche est commandée dans le but d'obtenir la trajectoire souhaitée de l'effecteur. Mais les domaines de l'usinage et de la robotique se sont développés en parallèle : des modélisations différentes ont ainsi été mises en place.

Les performances d'un robot se caractérisent par son espace de travail et ses performances cinématiques mais aussi par sa rigidité et sa dextérité [Khalil et Dombre \(1999\)](#). L'espace de travail correspond au volume total exploré par l'effecteur lorsque la structure parcourt l'ensemble des positions articulaires possibles. Il est défini en fonction des paramètres géométriques de la structure. Pour une position donnée dans l'espace de travail, il peut exister plusieurs configurations articulaires. De plus, à l'intérieur de cet espace de travail, les performances cinématiques évoluent, il est ainsi nécessaire de les quantifier. La rigidité d'un robot évolue également dans son espace de travail, ainsi sa dextérité est également variable en fonction de la position de l'effecteur. La dextérité mesure l'aptitude d'une structure à effectuer un mouvement répétable à faible amplitude [Doty et al. \(1995\)](#). Cet indice caractérise l'influence des erreurs de mesures articulaires sur la position de l'effecteur. Les erreurs sur chaque articulation sont bornées. Ainsi, connaissant l'architecture du robot, il est ensuite possible de connaître l'erreur à l'extrémité de l'effecteur. Dans le cas de l'usinage, ce critère est très intéressant car il est nécessaire de maîtriser les déplacements de l'effecteur pour usiner la pièce dans les tolérances imposées par le cahier des charges.

Un couplage important existe entre les caractéristiques cinématiques et statiques d'un robot [Asada et Slotine \(1986\)](#). La direction dans laquelle la capacité en vitesse est la meilleure est aussi celle dans laquelle la capacité en efforts est la moins bonne et inversement. En robotique, ces deux capacités sont importantes, par exemple dans le cas de l'utilisation d'un robot destiné à réaliser du pick-and-place, il est nécessaire d'avoir un compromis vitesse et efforts pour transporter de lourdes charges le plus rapidement possible. Cette dualité entre ces caractéristiques et leurs comportements anisotropes au sein de l'espace de travail ont donné lieu à la création de formalismes afin de pouvoir caractériser l'ensemble des performances d'un robot. L'un de ces formalismes part du constat que chaque articulation a des contraintes, c'est-à-dire des capacités bornées. Ces bornes articulaires peuvent ensuite être transférées dans l'espace des tâches. Ce transfert caractérise la conséquence des bornes articulaires dans le mouvement réalisé par l'effecteur. Dans ce manuscrit, nous nous intéresserons plus particulièrement aux limites cinématiques en vitesse, en accélération et en jerk de chacun des axes. En effet, la capacité de l'effecteur à changer de direction et/ou d'orientation est une mesure intéressante pour faire le choix des stratégies d'usinage. Dans la littérature, le concept de manipulabilité cinématique a été défini en ce sens pour caractériser les performances cinématiques des robots. En usinage, il paraît alors pertinent d'utiliser ce formalisme pour trouver les directions de vitesse maximale puisqu'on ne cherche pas à obtenir des capacités en efforts

maximales.

Ce chapitre présente différents formalismes et critères utilisés en robotique pour décrire les contraintes cinématiques des articulations et leurs effets sur les mouvements du robot. La première partie de ce chapitre détaille le principe de manipulabilité cinématique et l'évolution des développements réalisés dans la littérature. Deux modèles sont proposés : l'un sous la forme de quadriques et l'autre sous la forme de polytopes. Les avantages et les inconvénients de chaque modèle sont exposés et le modèle de polytopes est retenu. La deuxième partie de ce chapitre analyse la géométrie du polytope de vitesse. Cette analyse est réalisée dans l'espace articulaire et dans l'espace des tâches pour les quatre structures poly-articulées présentées sur la Figure 1.4 du chapitre 1. Les limites cinématiques de vitesse n'étant pas les seules limitant la vitesse relative outil/pièce, une analyse de la géométrie des polytopes d'accélération et de jerk est également réalisée dans la troisième partie.

1 Manipulabilité cinématique

La manipulabilité est une quantité qui représente la capacité de la machine à se déplacer autour d'une configuration donnée [Yoshikawa \(1985\)](#). Elle permet d'analyser la cinématique des systèmes mécaniques et peut ainsi aider à planifier une trajectoire maximisant la vitesse relative outil/pièce. Le système se déplace dans la direction qui lui permet d'atteindre la plus grande vitesse. Dans un premier temps, il est nécessaire de caractériser cette manipulabilité dans l'espace articulaire. Dans un second temps, il est ainsi possible de caractériser la manipulabilité dans l'espace des tâches en fonction de la manipulabilité de l'espace articulaire.

1.1 Espaces généralisés

1.1.1 Espace généralisé articulaire

Nous avons vu au paragraphe 1.3 du chapitre 1 que les vitesses articulaires \dot{q} de chaque axe i du système poly-articulé sont bornées, ce qui se traduit par l'Equation 2.1. De plus, les limites sont symétriques (Equation 2.2).

$$\dot{q}_i^{min} \leq \dot{q}_i \leq \dot{q}_i^{max} \quad (2.1)$$

$$\dot{q}_i^{min} = -\dot{q}_i^{max} \quad (2.2)$$

Afin d'avoir une notation générique, c'est-à-dire identique quelles que soient les limites de la structure, nous avons choisi de normer chacune des vitesses généralisées. On obtient ainsi un vecteur normé représentant les vitesses articulaires généralisées (Equation 2.3).

$$\tilde{\dot{\mathbf{q}}} = \underline{\dot{\mathbf{Q}}}_{max} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.3)$$

Avec $\underline{\dot{\mathbf{Q}}}_{\max}$ la matrice représentant les limites des axes. ($\underline{\dot{\mathbf{Q}}}_{\max} = \text{diag}(1/\dot{q}_i^{\max})$).

Cet espace normé des vitesses articulaires $\dot{\mathcal{Q}}$ est un espace vectoriel de dimension n , dont les vecteurs de base sont les vecteurs des n articulations du système. Cet espace regroupe les vitesses généralisées normées des articulations, c'est-à-dire des liaisons pivots et/ou des liaisons glissières et sa dimension n correspond au nombre d'articulations du système poly-articulé. Mathématiquement, la structure d'espace vectoriel permet de réaliser des combinaisons linéaires des différents vecteurs, ce qui se traduit concrètement par une combinaison des vitesses des différents axes.

1.1.2 Espace des tâches

L'espace des vitesses effectives généralisées normées $\dot{\mathcal{X}}$ est un espace vectoriel dont les vecteurs de base représentent les vitesses du positionnement de l'effecteur. Comme nous l'avons décrit au paragraphe 3.1 du chapitre 1, le positionnement de l'effecteur est donné par sa position et son orientation. Ainsi, sa vitesse se caractérise par la vitesse relative outil/pièce dans les 3 directions de l'espace des tâches ($\dot{X}_p, \dot{Y}_p, \text{ et } \dot{Z}_p$) et par la vitesse décrivant l'orientation de l'effecteur, par exemple par ses cosinus directeurs ($\dot{i}, \dot{j}, \dot{k}$). Cet espace correspond aux vitesses de l'effecteur en position et en orientation. Cet espace est de dimension 6 et on notera ses vecteurs $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{X}_p, \dot{Y}_p, \dot{Z}_p, \dot{i}, \dot{j}, \dot{k})^T$.

1.1.3 Passage de l'espace articulaire à l'espace des tâches

Le modèle cinématique direct permet de décrire l'évolution des vitesses dans l'espace des tâches (dimension 6) en fonction de l'évolution des vitesses articulaires (dimension n) (Equation 2.4).

$$\dot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.4)$$

avec $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$ la matrice Jacobienne de dimension $(6, n)$ du mécanisme, égale à $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}}$ et fonction de la configuration articulaire \mathbf{q} . La matrice Jacobienne $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$ définit une application linéaire permettant de passer de l'espace articulaire à l'espace des tâches (Equation 2.5).

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Q}} &\longrightarrow \dot{\mathcal{X}} \\ \dot{\mathbf{q}} &\longmapsto \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les espaces vectoriels généralisés articulaire et des tâches définis dans cette partie peuvent être munis de différentes normes qui vont permettre de caractériser la manipulabilité cinématique du système poly-articulé. Ces normes permettent de définir des propriétés géométriques de distances associées aux limites cinématiques des axes de la structure poly-articulée. En fonction de la norme choisie, les limites cinématiques représentent une géométrie différente. En effet, dans l'espace vectoriel $\dot{\mathcal{Q}}$ des vitesses articulaires généralisées normées, la boule unité correspond aux valeurs limites des vitesses articulaires. Sa dimension (n) correspond au nombre d'articulations du système. La représentation géométrique de la boule unité est différente en fonction de la norme choisie. Les sous-parties suivantes montrent que la norme 2 définit des ellipsoïdes alors que la norme infinie définit des polytopes.

1.2 Ellipsoïde de manipulabilité cinématique

Yoshikawa (1985) fut le premier à développer une approche pour évaluer cette capacité cinématique. Il a introduit le concept de l'ellipsoïde de manipulabilité à partir des limites cinématiques de chaque axe. Cet ellipsoïde de manipulabilité correspond aux limites cinématiques de l'espace articulaire associé à la norme 2.

1.2.1 Norme 2 associée à l'espace articulaire

Le produit scalaire entre les vecteurs $\tilde{\mathbf{q}}_i$ et $\tilde{\mathbf{q}}_j$ se définit par l'Equation 2.6. A ce produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on peut associer la norme 2 $\|\cdot\|_2$ donnée par l'Equation 2.7.

$$\langle \tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_j \rangle = \tilde{\mathbf{q}}_i^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_j \quad (2.6)$$

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\|_2 = \sqrt{\langle \tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{q}}_i \rangle} \quad (2.7)$$

En associant la norme 2, la géométrie de l'espace vectoriel des vitesses articulaires généralisées est celle d'une quadrique (Equation 2.8).

$$\forall \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i \in \dot{\tilde{Q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i^T \cdot \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i \leq 1 \quad (2.8)$$

Prenons l'exemple de différentes valeurs de la dimension de l'espace articulaire généralisé :

- Si le système poly-articulé contient une seule articulation alors :
 $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|_2 = |\dot{\tilde{q}}|$ et l'équation cartésienne de la boule unité est donc $|\dot{\tilde{q}}| \leq 1$, autrement dit il s'agit du segment $[-1,1]$.
- Si le système poly-articulé contient deux articulations alors :
 $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = (\dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2)^T$ et $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|_2 = \sqrt{\dot{\tilde{q}}_1^2 + \dot{\tilde{q}}_2^2}$. L'équation cartésienne de la boule unité dans ce cas est $\dot{\tilde{q}}_1^2 + \dot{\tilde{q}}_2^2 \leq 1$. Il s'agit de l'équation d'un disque de centre O (origine du repère (0,0)) et de rayon 1.
- Si le système poly-articulé contient trois articulations alors :
 $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = (\dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2, \dot{\tilde{q}}_3)^T$ et $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|_2 = \sqrt{\dot{\tilde{q}}_1^2 + \dot{\tilde{q}}_2^2 + \dot{\tilde{q}}_3^2}$. L'équation cartésienne de la boule unité dans ce cas est $\dot{\tilde{q}}_1^2 + \dot{\tilde{q}}_2^2 + \dot{\tilde{q}}_3^2 \leq 1$. Il s'agit de l'équation d'une sphère de centre O (origine du repère (0,0)) et de rayon 1.
- Si le système contient n articulations alors :
 il s'agit donc bien d'une hyper-sphère de dimension n .

La Figure 2.1 illustre en 2 dimensions la conséquence géométrique de la norme 2. Dans l'espace articulaire, les limites initiales en vitesse représentent une ellipse (1) et après généralisation, il s'agit du cercle unité (2).

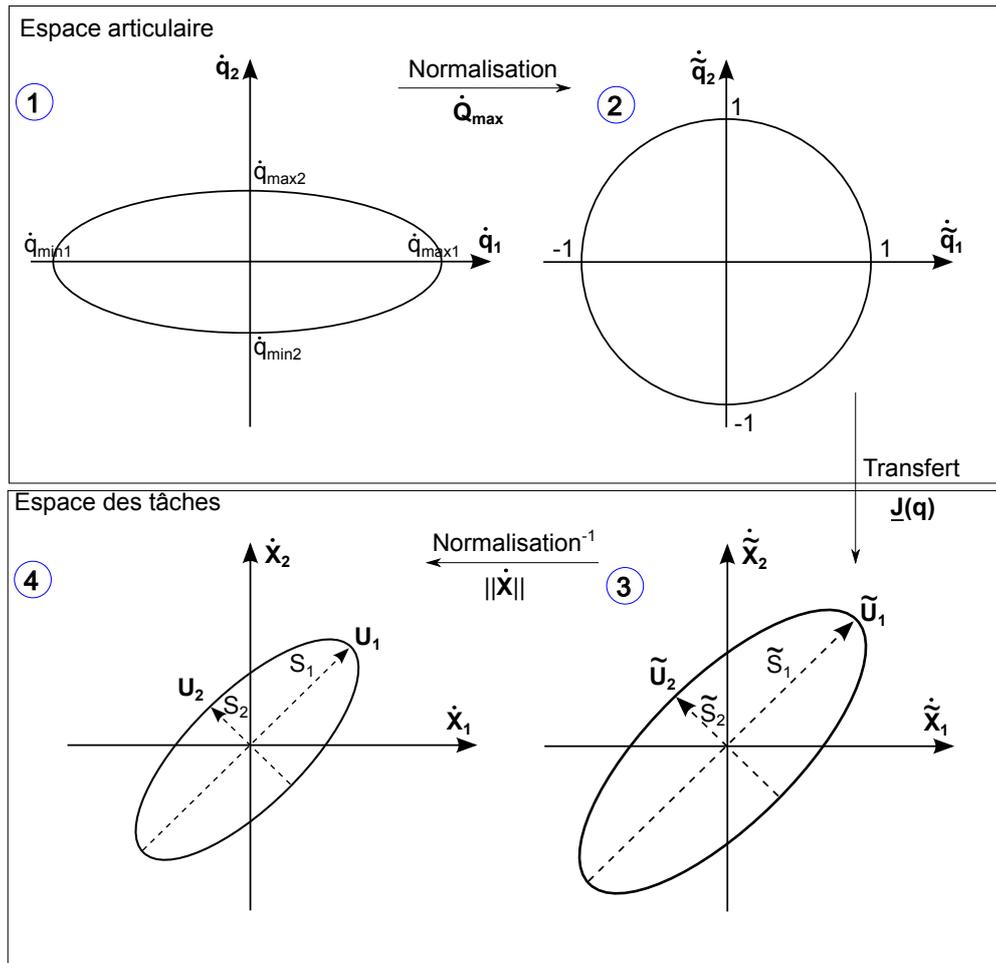


Figure 2.1 – Ellipsoïde de manipulabilité cinématique en vitesse

1.2.2 Transfert de l'espace articulaire à l'espace des tâches

En inversant le modèle cinématique direct de l'Equation 2.4, l'Equation 2.9 donne le modèle cinématique inverse.

$$\dot{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (2.9)$$

En remplaçant dans l'Equation 2.8, l'expression des vitesses articulaires généralisées de l'Equation 2.3 et en utilisant le modèle cinématique indirect de l'Equation 2.9, l'image de l'hyper-sphère unité dans l'espace des tâches est donnée par l'Equation 2.10.

$$\dot{\mathbf{X}}^T \cdot \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1T} \cdot \underline{\dot{\mathbf{Q}}}_{\max}^T \cdot \underline{\dot{\mathbf{Q}}}_{\max} \cdot \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} \leq 1 \quad (2.10)$$

Il s'agit de l'équation d'une quadrique. Pour obtenir les caractéristiques de cet hyper-ellipsoïde (directions principales des axes et longueurs des axes), il faut décomposer la matrice $\tilde{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \underline{\dot{\mathbf{Q}}}_{\max}$ en valeurs singulières (Equation 2.11). L'étude de la matrice $\tilde{\mathbf{J}}$ permet d'analyser de manière simultanée l'influence de la structure (matrice $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$) et l'influence des limites cinématiques (matrice $\underline{\dot{\mathbf{Q}}}_{\max}$) sur le mouvement possible dans l'espace des tâches. On obtient l'image des caractéristiques

de l'espace articulaire de dimension n dans l'espace des tâches de dimension m .

$$\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^T \quad (2.11)$$

avec

- $\tilde{\mathbf{U}}$: matrice orthogonale de dimension $(m \times m)$ et dont les vecteurs colonnes définissent les axes principaux de l'ellipsoïde.
- $\tilde{\mathbf{S}}$: matrice de dimension $(m \times n)$ de la forme : $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$ avec r le rang de la matrice Jacobienne.
Chaque valeur \tilde{S}_i représente la longueur des 1/2 axes de l'hyper-ellipsoïde.
- $\tilde{\mathbf{V}}$: matrice orthogonale de dimension $(n \times n)$

Les axes principaux de l'ellipsoïde dans l'espace des tâches sont donnés par les vecteurs $\tilde{S}_1 \cdot \tilde{\mathbf{U}}_1$, $\tilde{S}_2 \cdot \tilde{\mathbf{U}}_2$, ..., $\tilde{S}_m \cdot \tilde{\mathbf{U}}_m$.

La Figure 2.1 illustre ce transfert en 2 dimensions. L'image du cercle unité défini dans l'espace articulaire (2) donne ainsi une ellipse dans l'espace des tâches (3). Le demi grand axe de l'ellipse a une longueur \tilde{S}_1 dans la direction $\tilde{\mathbf{U}}_1$ et le demi petit axe a une longueur \tilde{S}_2 dans la direction $\tilde{\mathbf{U}}_2$. La dernière étape consiste à re-dimensionner l'ellipse obtenue afin d'avoir une signification physique de la représentation géométrique donnée par l'ellipse. Pour cela, il faut multiplier les longueurs des axes \tilde{S}_i par la norme de la matrice $\dot{\mathbf{X}}$. Afin de rester homogène, la norme est calculée pour les composantes définissant la position et de manière séparée pour les composantes définissant l'orientation. On obtient ainsi l'ellipse (4) où dans la direction du grand axe \mathbf{U}_1 , la structure sera dans la position articulaire engendrant la plus grande vitesse dans l'espace des tâches. A l'inverse, dans la direction du petit axe \mathbf{U}_2 , la structure aura une moins grande capacité en vitesse.

Ainsi, la norme 2 caractérise les limites cinématiques des vitesses articulaires sous la forme d'ellipsoïdes de dimensions n dans le cas de structures poly-articulées avec n articulations. A partir de ce formalisme mathématique, de nombreux critères locaux et globaux ont été mis en place pour caractériser la manipulabilité cinématique en vitesse.

1.2.3 Critères de manipulabilité associés à l'ellipsoïde

Cette partie n'a pas pour vocation de faire la liste exhaustive de tous les critères de manipulabilité associés à l'ellipsoïde mais elle présente de manière synthétique les critères locaux et globaux les plus utilisés dans la littérature.

La mesure de manipulabilité la plus courante basée sur l'ellipsoïde de manipulabilité est un indice proportionnel au volume de l'ellipsoïde. Ce critère W est fonction de la matrice Jacobienne (Equation 2.12) et peut donc aussi être exprimé en fonction des valeurs singulières de la Jacobienne (Equation 2.13). Il caractérise l'architecture de la structure.

$$W = \sqrt{\det(\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^T)} \quad (2.12)$$

$$W = S_1.S_2...S_n \quad (2.13)$$

Dans le cas où la matrice jacobienne $\underline{\mathbf{J}}$ est carrée, ce critère W se détermine plus simplement par l'Equation 2.14. Ce cas peut se produire lorsque le nombre de degrés de liberté de l'effecteur est égal au nombre d'articulations du système poly-articulé.

$$W = |\det(\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}))| \quad (2.14)$$

Ce critère donne une idée globale de la manipulabilité d'un mécanisme mais il ne permet pas de différencier la forme de l'ellipsoïde obtenue. Pour caractériser cette forme, Nakamura (1990) utilise le rapport entre la longueur du plus petit demi-axe de l'ellipsoïde et la longueur du plus grand demi-axe (Equation 2.15). Ce critère revient à étudier l'inverse du conditionnement de la matrice Jacobienne $\underline{\mathbf{J}}$. L'utilisation de l'inverse du conditionnement permet d'éviter d'avoir des valeurs tendant vers l'infini et de rester avec un indice variant entre 0 et 1.

$$W_2 = \frac{S_n}{S_1} \quad (2.15)$$

Basé sur ce critère, Bayle (2001) définit un critère associé à l'excentricité de l'ellipsoïde (Equation 2.16).

$$W_3 = \sqrt{1 - \frac{S_n^2}{S_1^2}} \quad (2.16)$$

Les critères W_2 et W_3 sont très proches mais évoluent de façon inverse. Ils permettent tous les deux de caractériser la singularité de la matrice Jacobienne. En effet, lorsque l'indice de conditionnement inverse W_2 est égal à 0, cela signifie qu'au moins une valeur singulière est nulle et donc que la matrice Jacobienne est singulière. Cette étude permet ainsi de déterminer au préalable les configurations dans lesquelles le système sera incapable d'engendrer de la vitesse dans une direction. Lorsque la configuration est isotrope, l'indice W_2 vaut 1 et l'indice W_3 vaut 0.

Les indices de vitesse locaux peuvent être utilisés pour évaluer les performances de vitesse dans une position donnée (Equation 2.17). Ces indices caractérisent la vitesse maximale et la vitesse minimale. Ils sont directement issus des valeurs singulières de la matrice Jacobienne.

$$\|V_{max}\| = \sqrt{\max(S_i)} \quad \|V_{min}\| = \sqrt{\min(S_i)} \quad (2.17)$$

A partir de ces critères, il est ainsi possible de définir localement des trajectoires allant toujours dans la direction permettant d'avoir la plus grande manipulabilité tout en essayant de ne pas se rapprocher des limites des axes. Nait Chabane (2006) ajoute l'influence de la direction de la trajectoire à exécuter dans son critère (Equation 2.18).

$$\mathbf{d} = \frac{\dot{\mathbf{X}}}{\|\dot{\mathbf{X}}\|} \quad (2.18)$$

$\dot{\mathbf{X}}$ est le vecteur des vitesses opérationnelles imposées à l'organe terminal. L'Equation 2.19 définit ce critère. Il s'agit de la somme des projections des différentes longueurs des axes de l'ellipsoïde ($S_i \cdot \mathbf{U}_i$) dans la direction imposée (\mathbf{d}). Pour chaque axe i , le critère consiste donc à effectuer le produit scalaire entre la direction \mathbf{d} et le vecteur décrivant les axes de l'ellipsoïde $S_i \cdot \mathbf{U}_i$. Cette mesure est maximisée lorsque la capacité de manipulation suivant la direction imposée de la tâche est maximale. Elle s'annule s'il n'y a pas de possibilité de déplacement suivant cette direction. Ce critère semble plus pertinent dans le cas de l'usinage car la direction d'avance est imposée, il est donc nécessaire de caractériser les capacités en vitesse dans cette direction.

$$W_{dir} = \sum_{i=1}^n |\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{U}_i \cdot S_i| \quad (2.19)$$

Les indices de manipulabilité présentés ci-dessus sont des indices locaux puisqu'ils expriment la performance de la structure dans une configuration donnée. Cependant, une trajectoire se définit par la succession de plusieurs configurations locales. En ce sens, des critères globaux ont été développés dans la littérature à partir de ces critères locaux. Les indices de manipulabilité globaux définissent une performance atteinte sur l'ensemble des configurations du système poly-articulé. Ils caractérisent le système poly-articulé dans son ensemble et peuvent aider à déterminer quelle structure poly-articulée est la plus apte à effectuer une tâche.

[Angeles \(2002\)](#) définit l'indice de conditionnement cinématique sur l'espace de travail (Equation 2.20). Ce pourcentage, basé sur la plus petite longueur de l'ensemble des axes de tous les ellipsoïdes \tilde{S}_{min} , indique la meilleure performance locale atteignable par le système. Dans le cas où le système poly-articulé est isotrope cet indice vaut 100%.

$$I_c = \frac{1}{\tilde{S}_{min}} \times 100 \quad (2.20)$$

A partir des indices de vitesses locaux, [Angeles \(2002\)](#) propose également des indices globaux de vitesse en intégrant les indices locaux sur l'ensemble de la trajectoire W (Equation 2.21).

$$\eta_{V_{max}} = \frac{\int_W \|V_{max}\| dW}{\int_W dW} \quad \eta_{V_{min}} = \frac{\int_W \|V_{min}\| dW}{\int_W dW} \quad (2.21)$$

1.2.4 Limites de l'ellipsoïde de manipulabilité

Utiliser la norme 2 permet de définir un ellipsoïde de manipulabilité et ainsi d'avoir une formulation analytique des capacités articulaires du système poly-articulé. Cette formulation analytique donne directement les capacités induites dans l'espace des tâches via la matrice Jacobienne. Cependant, les limites articulaires sont sous-estimées en particulier lors de leur combinaison maximale.

La Figure 2.2 illustre en deux dimensions les combinaisons possibles des axes articulaires qui ne sont pas prises en compte en utilisant la norme 2.

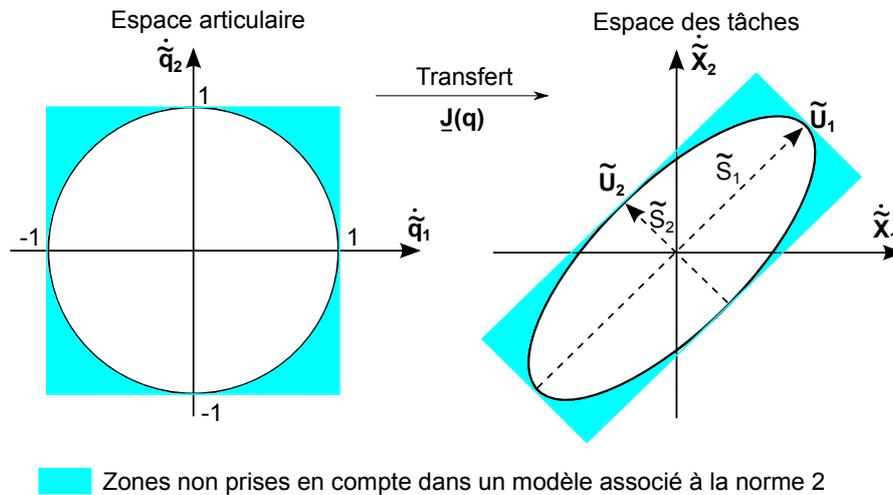


Figure 2.2 – Sous-estimation des capacités cinématiques dans l'espace articulaire avec la norme 2

La vitesse estimée dans l'espace des tâches et les différents critères mis en place sous-estiment les capacités cinématiques réelles du système poly-articulé. En effet, supposons que sur la structure poly-articulée dont les capacités sont représentées sur la Figure 2.2, la sollicitation dans l'espace articulaire requiert les capacités maximales des axes 1 et 2. Cette sollicitation se situe en dehors de la modélisation définie dans l'espace articulaire par la norme 2 et donc son image dans l'espace des tâches est également en dehors de l'ellipse. Or, l'objectif est de pouvoir obtenir la vitesse maximale dans l'espace des tâches, et pour obtenir cela il se peut qu'il faille solliciter simultanément plusieurs axes de manière maximale. Il est ainsi nécessaire de modéliser les limites de manière plus réaliste. Merlet (2005) remarque cette différence entre l'utilisation des limites décrites à l'aide d'hyperellipsoïde en norme 2 et préconise d'utiliser une norme infinie pour avoir une vision complète des limites cinématiques et non pas une approximation. Si la direction imposée dans l'espace articulaire correspond à la diagonale, un facteur $\sqrt{2}$ intervient entre la norme 2 et la norme infinie.

La partie suivante décrit ainsi l'utilisation de la norme infinie et les caractéristiques de la géométrie associée à la norme infinie sous la forme de polytopes.

1.3 Polytopes de manipulabilité cinématique

1.3.1 Norme infinie associée à l'espace articulaire

Dans l'espace vectoriel des vitesses articulaires généralisées normées, on peut introduire la norme infinie pour chaque vecteur $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)^T$ (Equation 2.22).

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|_\infty = \max(|\dot{q}_1|, |\dot{q}_2|, \dots, |\dot{q}_n|) \quad (2.22)$$

Dans l'espace articulaire généralisé normé, la norme infinie de $\dot{\mathbf{q}}$ est inférieure à 1 (Equation 2.23).

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.23)$$

En associant les Equations 2.22 et 2.23, on obtient les limites sur chaque axe. Chacune de ces limites forme un système d'inégalités définissant des demi-espaces (Equation 2.24).

$$\begin{cases} |\dot{q}_1| \leq 1 \\ |\dot{q}_2| \leq 1 \\ \dots \\ |\dot{q}_n| \leq 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Chacune de ces inégalités définit un hyperplan et l'intersection de toutes ces limites forme géométriquement un polytope de dimension n . Un hyperplan est un sous-espace affine de dimension 0, 1, 2 ou $(n-1)$ dans \mathbb{R}^n et est respectivement appelé point, droite, plan, ou hyperplan de dimension $(n-1)$. L'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés dont les frontières sont des hyperplans de \mathbb{R}^n se nomme un polytope [Ziegler \(1995\)](#). Mathématiquement, un polytope de dimension m peut être défini comme un système d'inégalités formé par l'ensemble des demi-espaces fermés (Equation 2.25).

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \text{ avec } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ et } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad (2.25)$$

Un polytope est un polyèdre borné, constitué de faces planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droites pour former les arêtes [Minkowski \(1896\)](#). La notion de polyèdre borné signifie qu'il s'agit de l'enveloppe convexe. Un polyèdre est dit convexe si tout point de tout segment joignant deux points quelconques du polyèdre appartient au polyèdre. Le polytope peut être vu comme une généralisation à toutes dimensions des polygones (2 dimensions) et des polyèdres (3 dimensions).

Un polytope peut se définir de deux façons duales appelées H-description (H pour demi-espace (Halfspace en anglais)) et V-description (V pour sommets (Vertex en anglais)). Cette équivalence entre les deux définitions constitue le théorème de Weyl et Minkowski. La H-description correspond aux limites par les hyperplans précédemment définies. Dans une V-description, un polytope de dimension m est défini comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de sommets S_i dans \mathbb{R}^n avec $m \leq n$ [Fukuda \(2004\)](#). L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble S est le plus petit sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n qui contienne S . La Figure 2.3 illustre, pour le même polytope de 2 dimensions du plan (X,Y), soit la H-description, soit la V-description.

Prenons l'exemple de différentes valeurs de la dimension de l'espace articulaire :

- Si le système poly-articulé contient une seule articulation alors :

$\|\dot{\mathbf{q}}\|_{\infty} = |\dot{q}|$ et l'équation cartésienne de la boule unité est donc $|\dot{q}| \leq 1$, autrement dit il s'agit du segment $[-1,1]$. Dans ce cas, la géométrie engendrée est la même que pour la norme 2.

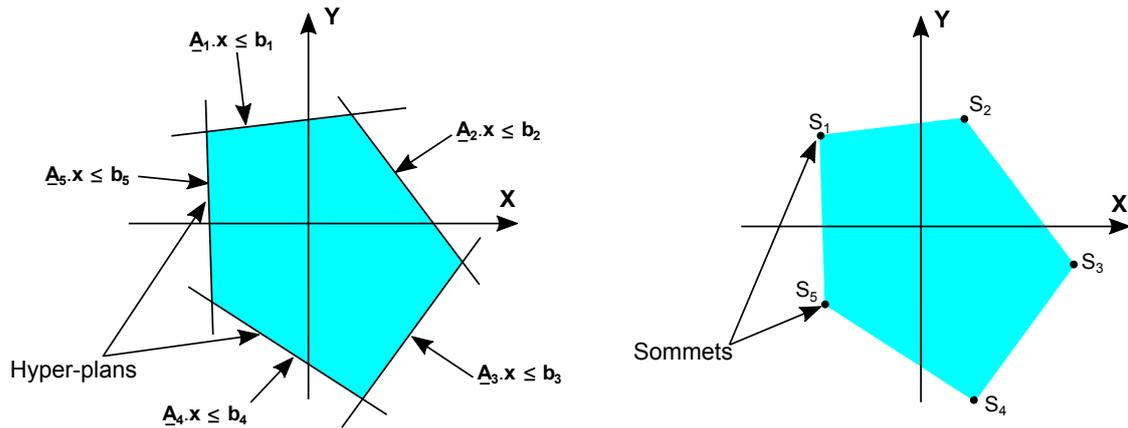


Figure 2.3 – Exemple d'un polytope en 2 dimensions défini par une H-description ou par une V-description

- Si le système poly-articulé contient deux articulations alors :
 $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)^T$ et $\|\dot{\mathbf{q}}\|_\infty = \max(|\dot{q}_1|, |\dot{q}_2|)$. L'équation cartésienne de la boule unité correspond ainsi à $|\dot{q}_1| \leq 1$ et $|\dot{q}_2| \leq 1$. Ces deux inégalités correspondent à une description d'un polytope par 4 hyperplans en enlevant les valeurs absolues. Dans l'Equation 2.25, $\underline{\mathbf{A}}$ est la matrice identité de taille (2×2) , \mathbf{x} correspond aux vecteurs $\dot{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{b} = (1, 1)^T$. Il s'agit de l'intérieur d'un carré de bord délimité par les points de coordonnées $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$. Cette définition par les coordonnées correspond à une description du polytope par ses sommets (V-description).
- Si le système poly-articulé contient trois articulations alors :
 $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)^T$ et $\|\dot{\mathbf{q}}\|_\infty = \max(|\dot{q}_1|, |\dot{q}_2|, |\dot{q}_3|)$. L'équation cartésienne de la boule unité dans ce cas correspond à un cube de côté 1.
- Si le système contient n articulations alors :
 il s'agit d'un hyper-cube de dimension n .

La Figure 2.4 illustre en 2 dimensions la conséquence géométrique de la norme infinie. Dans l'espace articulaire, les limites initiales en vitesse représentent un rectangle (1) et après généralisation, il s'agit du carré unité (2).

1.3.2 Transfert de l'espace articulaire à l'espace des tâches

En utilisant le modèle cinématique direct de l'Equation 2.4, l'image de l'hyper-cube unité dans l'espace des tâches est donnée par l'Equation 2.26.

$$\|\dot{\mathbf{X}}\|_\infty = \|\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}\|_\infty \leq \|\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\|_\infty \cdot \|\dot{\mathbf{q}}\|_\infty \quad (2.26)$$

La Matrice jacobienne $\underline{\mathbf{J}}$ définit une application linéaire. L'image du polytope défini dans l'espace articulaire est un polytope dans l'espace des tâches. Sa forme et son orientation peuvent évoluer en fonction de la structure du système poly-articulé et de sa configuration articulaire \mathbf{q} .

La Figure 2.4 illustre ce transfert en 2 dimensions. L'image du carré unité défini dans l'espace

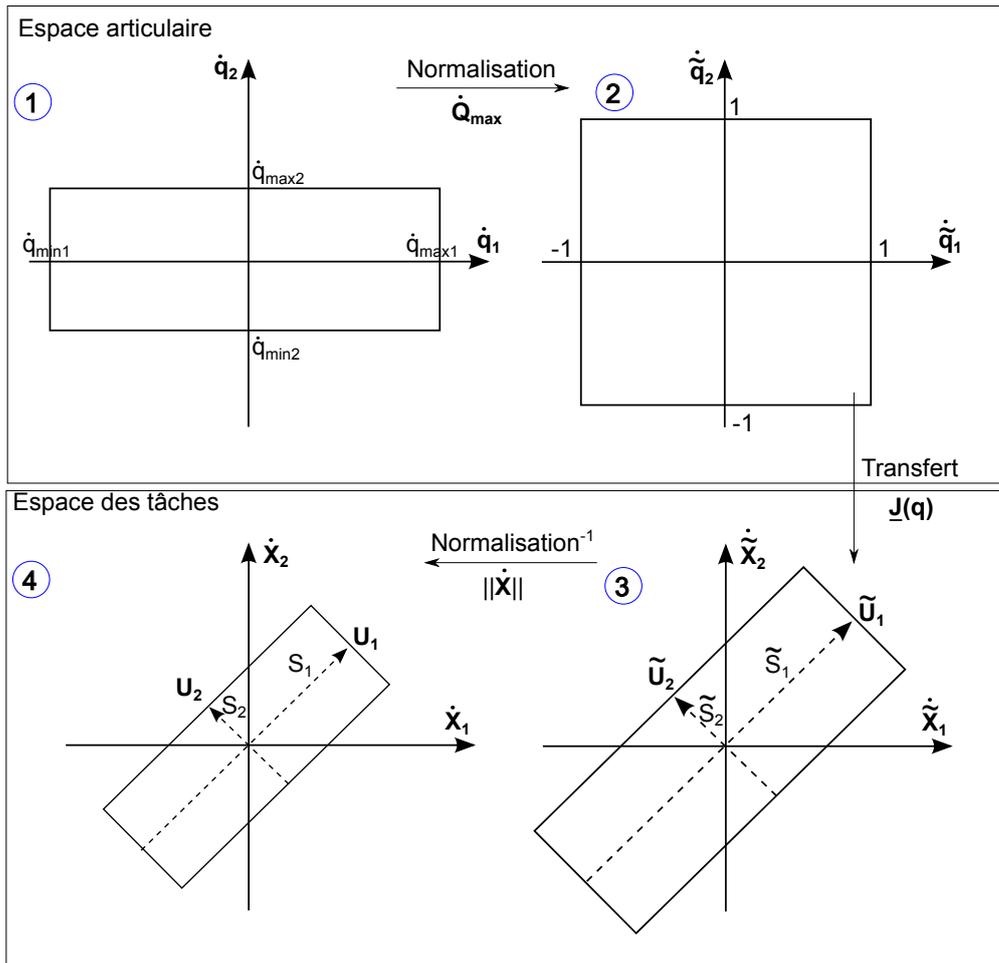


Figure 2.4 – Polytope de manipulabilité cinématique en vitesse en 2 dimensions

articulaire (2) donne ainsi un rectangle dans l'espace des tâches (3). La décomposition en valeurs singulières présentée dans la partie 1.2.2 s'applique de la même façon de sorte que le polytope obtenu est circonscrit à l'ellipsoïde. Le demi grand axe du polytope a une longueur \tilde{S}_1 dans la direction \tilde{U}_1 et le demi petit axe a une longueur \tilde{S}_2 dans la direction \tilde{U}_2 . La dernière étape consiste à re-dimensionner le rectangle obtenu afin d'avoir une signification physique de la représentation géométrique donnée par celui-ci en le multipliant par la norme de la matrice \dot{X} comme dans le cas de l'ellipsoïde. On obtient ainsi le rectangle (4). En revanche, contrairement aux résultats donnés par l'ellipsoïde de manipulabilité, ce n'est plus dans la direction du grand axe U_1 que la structure a la plus grande capacité à engendrer de la vitesse. Si le polytope est centré sur l'origine de l'espace, la direction de plus grande vitesse est donnée par le vecteur dont l'origine est le centre du polytope et l'extrémité est le sommet le plus éloigné du centre du polytope.

Ainsi, dans le cas de structures poly-articulées avec m articulations, de nombreux critères locaux et globaux ont été mis en place pour caractériser la manipulabilité cinématique en vitesse à partir de ces polytopes.

1.3.3 Critères de manipulabilité associés aux polytopes

Briot et al. (2010) proposent un indice basé sur les polytopes pour caractériser les directions dans lesquelles les vitesses sont les plus amplifiées. Ce critère (k_v^{max}) quantifie la plus grande distance entre l'origine et le polytope obtenu lors de la projection de l'espace des vecteurs des vitesses articulaires dans l'espace des vitesses de l'espace des tâches dans le cas tridimensionnel (Equation 2.27).

$$k_v^{max} = \max_j (|\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_j|) \quad (2.27)$$

avec $e_1 = (1,1,1)^T$, $e_2 = (1, -1,1)^T$, $e_3 = (1,1, -1)^T$, $e_4 = (1, -1, -1)^T$. Ces vecteurs ont pour origine le centre du polytope et leurs extrémités sont les sommets du polytope. Ce critère s'applique pour l'espace des tâches en 3 dimensions (l'espace cartésien). Ce critère suppose que le polytope est centré sur l'origine c'est pourquoi ils considèrent uniquement 4 sommets du cube alors que le cube est composé de 8 sommets. La distance obtenue pour les sommets opposés est la même.

Comme pour les critères basés sur l'ellipsoïde de manipulabilité, il est possible de mettre en place des critères globaux afin d'avoir une vision d'ensemble des capacités du système sur toute la trajectoire. Ces critères pourraient se définir de la même manière que ceux décrits pour les ellipsoïdes dans la partie 1.2.3 de ce chapitre, ils ne seront donc pas détaillés dans ce manuscrit. Ces facteurs de transmission des vitesses sont des critères intéressants mais ils simplifient la géométrie du polytope. Ainsi, la partie suivante analyse la géométrie des polytopes de vitesse dans l'espace articulaire et dans l'espace des tâches pour différentes structures.

2 Analyse de la géométrie du polytope de vitesse pour différentes structures

Cette partie illustre géométriquement les polytopes pour les 4 architectures présentées sur la Figure 1.4 du chapitre 1. Ces polytopes sont représentés dans l'espace articulaire et dans l'espace des tâches en fonction des configurations articulaires choisies pour l'illustration et du type d'usinage réalisé : usinage 3 axes, usinage 5 axes positionné et usinage 5 axes continu. Dans la suite de ce manuscrit, toutes les représentations des polytopes seront effectuées de manière à conserver les unités des différents axes même si ceux-ci ne sont pas généralisés. Le principe mathématique de la généralisation a été présenté dans la partie 1.1 de ce chapitre mais ne sera pas illustré afin de représenter uniquement les polytopes initiaux et finaux. En somme, seules les étapes (1) et (4) illustrées en 2 dimensions sur la Figure 2.4 sont dessinées.

2.1 Représentation graphique des polytopes dans l'espace articulaire

Les limites cinématiques des structures poly-articulées sont réglées en fonction de leur architecture mécanique, de leur comportement cinématique et dynamique lors de l'intégration de la commande numérique ou lors de leur utilisation spécifique. La Figure 2.5 représente les polytopes de l'espace articulaire. La dimension de ces polytopes correspond au nombre d'articulations mais pour obtenir une représentation graphique, il est nécessaire de les projeter dans un espace dont la dimension est au maximum égale à 3.

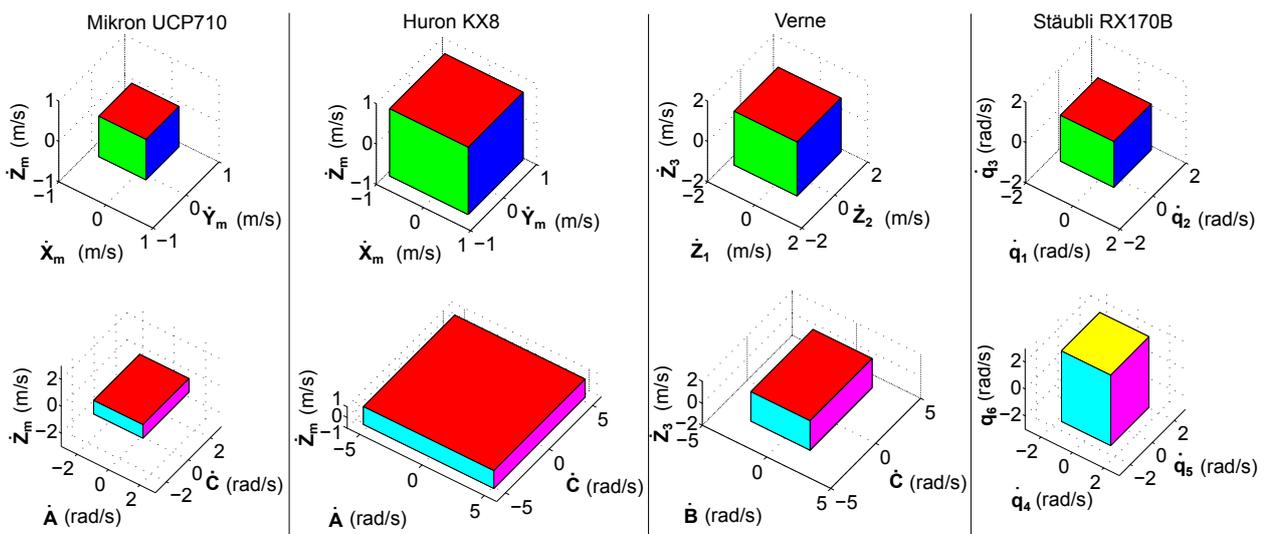


Figure 2.5 – Polytopes de vitesse dans l'espace articulaire pour différentes structures

La forme géométrique des différents polytopes souligne le déséquilibre des caractéristiques cinématiques entre les axes. Pour les 3 centres d'usinage proposés, les contraintes de vitesse sont égales pour les 3 axes de translation, le polytope obtenu est ainsi un cube dans l'espace défini par ces 3 axes. Les capacités en vitesse des axes de rotation sont différentes, le polytope obtenu dans l'espace défini par un axe de translation et les deux axes de rotation est donc un parallélépipède. En ce qui concerne le robot, les 3 premiers axes sont identiques, le polytope est donc un cube dans l'espace défini par les trois premiers axes. Les trois derniers axes du poignet ont des caractéristiques de vitesse différentes, le polytope est un parallélépipède dans cet espace. En somme, pour toutes les structures, ce sont des hyper-parallélépipèdes.

2.2 Représentation graphique des polytopes dans l'espace des tâches

La trajectoire de l'outil est usuellement définie dans l'espace des tâches, i.e. dans un repère associé à la pièce. Il est donc nécessaire d'étudier l'effet des limites cinématiques articulaires sur le mouvement outil/pièce. Cette analyse est possible en transférant le polytope cinématique de

l'espace articulaire vers l'espace des tâches. Pour cela, il est nécessaire de déterminer la matrice Jacobienne de chaque structure poly-articulée. Le détail du calcul des matrices associées aux différentes architectures est donné en Annexe A pour la Mikron UCP710, en Annexe B pour la Huron KX8-five, en Annexe C pour le centre d'usinage Fatronik Verne et en Annexe D pour le robot Stäubli RX170B.

La géométrie du polytope obtenue dans l'espace des tâches dépend de la structure de la machine, des capacités cinématiques de chacun des axes, et évolue en fonction de la position articulaire \mathbf{q} . Afin de bien comprendre les différents polytopes qu'il est possible d'obtenir dans l'espace des tâches, le principe du transfert du polytope est appliqué pour les 4 structures poly-articulées dans quelques cas particuliers, i.e en usinage 3 axes, en usinage 5 axes positionné et en usinage 5 axes continu. Les illustrations sont données en faisant l'hypothèse que lors du montage de la pièce sur la table, la base associée au repère pièce est identique à la base associée au repère machine.

2.2.1 Principe mathématique de projection et d'intersection de polytopes

L'espace des tâches a 6 dimensions, 3 correspondant à la vitesse du point piloté de l'effecteur $(\dot{\mathbf{X}}_p, \dot{\mathbf{Y}}_p, \dot{\mathbf{Z}}_p)$ et 3 correspondant à la vitesse d'orientation de l'axe $(\dot{\mathbf{i}}, \dot{\mathbf{j}}, \dot{\mathbf{k}})$. Ainsi ce modèle permet de caractériser la vitesse relative outil/pièce du point piloté et de l'axe de l'outil. La Figure 2.6 à gauche donne un exemple d'un polytope en 3 dimensions dans l'espace $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ projeté dans le plan (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) . Dans cet exemple, le polytope en 3 dimensions a 8 sommets et sa projection n'en a plus que 4. Les 4 autres sommets se retrouvent à l'intérieur ou sur la frontière du polytope. Dans la suite de ce manuscrit, on s'intéressera plus particulièrement à la vitesse relative outil/pièce du point piloté. Les représentations des polytopes de vitesse sont ainsi données en projection dans l'espace $(\dot{\mathbf{X}}_p, \dot{\mathbf{Y}}_p, \dot{\mathbf{Z}}_p)$.

La dimension de l'espace articulaire (n) n'est pas nécessairement égale à la dimension de l'espace des tâches (m). Dans la partie 1.1 de ce chapitre, nous avons défini la dimension de l'espace articulaire égale au nombre d'axes du système poly-articulé. Chaque face de ce polytope articulaire est un hyperplan de dimension $n - 1$. Ces faces sont ainsi également des polytopes. Suivant les axes qui sont utilisés dans l'espace articulaire, il est ainsi possible de faire des intersections du polytope articulaire avec l'hyperplan donnant l'une des capacités cinématiques d'un axe ou de plusieurs. L'Equation 2.28 donne la définition du polytope P intersection de deux polytopes P_1 et P_2 .

$$\begin{aligned}
 P_1(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{b}}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} \leq \underline{\mathbf{b}}\} \text{ avec } \underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m} \text{ et } \underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{n_1} \\
 P_2(\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{d}}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{x} \leq \underline{\mathbf{d}}\} \text{ avec } \underline{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m} \text{ et } \underline{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^{n_2} \\
 P(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{f}}) &= P_1 \cap P_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \leq \underline{\mathbf{f}}\} \text{ avec } \underline{\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times m} \text{ et } \underline{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2)} \quad (2.28) \\
 \text{avec } \underline{\mathbf{E}} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{C}} \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{d}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La Figure 2.6 illustre l'intersection entre un polytope de dimension 3 et le plan H . L'intersection donne un polytope de dimension 2.

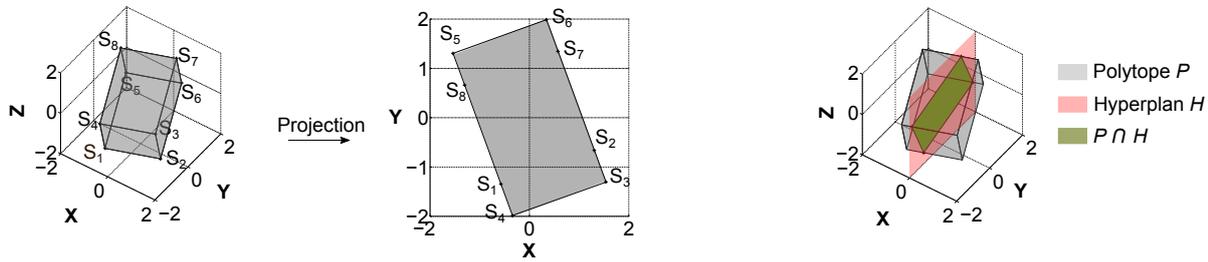


Figure 2.6 – Principe mathématique de projection (à gauche) et d'intersection (à droite) de polytopes

Afin d'analyser la géométrie du polytope obtenu dans l'espace des tâches, des exemples d'usinage 3 axes, 5 axes positionné, et 5 axes continu sont présentés. En usinage 3 axes et en usinage 5 axes positionné, le polytope articulaire est l'intersection du polytope articulaire complet, c'est-à-dire comprenant tous les axes de la structure même s'ils ne sont pas sollicités, et des hyperplans définissant les vitesses des axes de rotation comme nulles.

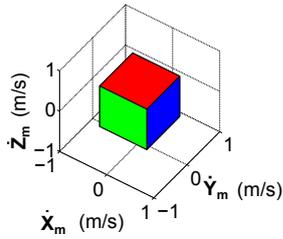
2.2.2 En usinage 3 axes

Dans le cas de l'usinage 3 axes, l'orientation de l'outil reste verticale. Pour les deux premières structures présentées précédemment sur la Figure 2.5, cela signifie que les vitesses de leurs axes de rotation sont nulles. Ainsi, les polytopes définis dans l'espace articulaire sont de dimension 3, ils se réduisent aux deux premiers polytopes sur la première ligne de la Figure 2.5.

Ainsi pour les centres d'usinage Mikron UCP710 et Huron KX8-five, les axes de translation ($\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m$) sont colinéaires aux axes de l'espace des tâches ($\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p$). Quelle que soit la position articulaire des axes de translation, le polytope obtenu dans l'espace des tâches est exactement le même que le polytope défini dans l'espace articulaire (Figure 2.7).

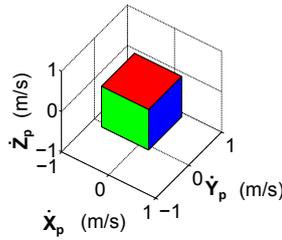
Sur le centre d'usinage Fatronik Verne, les axes de translation ($\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$) ne sont pas colinéaires aux axes définis dans l'espace des tâches. Il s'agit d'un usinage 3 axes au sens articulaire, c'est-à-dire que seuls les mouvements des axes de translation sont commandés. Les mouvements des axes de rotation sont induits pour assurer un déplacement linéaire. Ainsi, le polytope dans l'espace articulaire se réduit au troisième polytope de la première ligne sur la Figure 2.7. Le polytope obtenu dans l'espace des tâches est différent de celui défini dans l'espace articulaire. Son orientation correspond au positionnement relatif entre les axes articulaires et les axes associés à la pièce. Le polytope obtenu dans l'espace des tâches est composé de deux pyramides à base rectangulaire symétriques par rapport au plan ($\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p$). Le sommet correspond à la composition maximale des trois axes dans la direction \mathbf{Z}_p .

Mikron UCP710

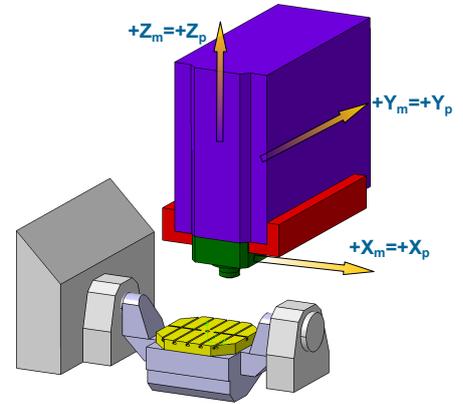


Espace articulaire

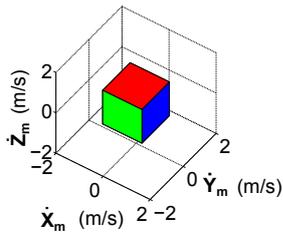
Transfert
 $\underline{J}(X_m, Y_m, Z_m, 0, 0)$



Espace des tâches

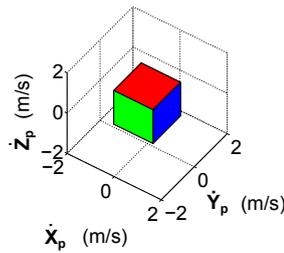


Huron KX8

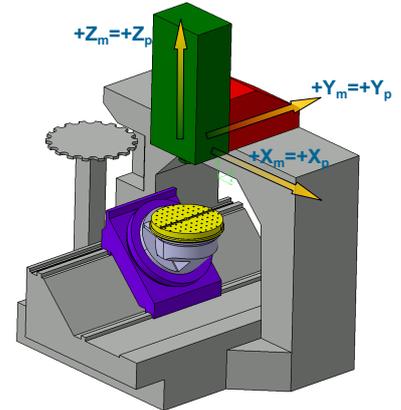


Espace articulaire

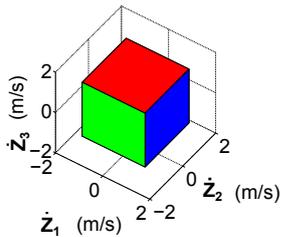
Transfert
 $\underline{J}(X_m, Y_m, Z_m, 0, 0)$



Espace des tâches

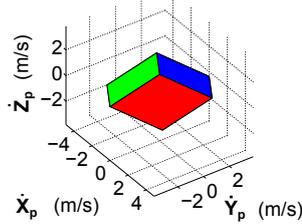


Fatronic verne



Espace articulaire

Transfert
 $\underline{J}(300, 500, 500, 0, 0)$



Espace des tâches

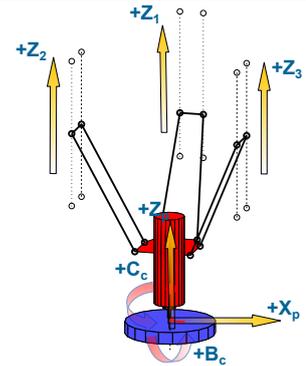


Figure 2.7 – Transfert du polytope de l'espace articulaire à l'espace des tâches : cas de l'usinage 3 axes

2.2.3 En usinage 5 axes positionné

Comme dans le cas de l'usinage 3 axes, les vitesses des axes de rotation sont nulles, mais les positions articulaires correspondant aux angles des axes de rotation ne sont pas nulles. Les positions articulaires ne modifient pas la forme du polytope mais son orientation. Cette modification d'orientation correspond à l'orientation relative entre les axes articulaires $(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m)$ et les axes de la pièce $(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p)$.

La Figure 2.8 illustre l'influence des positions des axes de rotation sur l'orientation du polytope obtenu dans l'espace des tâches pour les trois centres d'usinage.

Pour le centre d'usinage Mikron UCP710, si le berceau est en position $A = 20^\circ$, les vitesses suivant les axes \mathbf{Y}_p et \mathbf{Z}_p deviennent potentiellement plus élevées. Les vitesses suivant l'axe \mathbf{X}_p ne sont pas modifiées puisque l'axe \mathbf{A} tourne autour de l'axe \mathbf{X}_m . Le polytope obtenu dans l'espace des tâches est ainsi tourné de 20 degrés autour de l'axe \mathbf{Y}_p . Si le plateau est en position $C = 20^\circ$, alors ce sont les vitesses suivant les axes \mathbf{X}_p et \mathbf{Y}_p qui deviennent potentiellement plus élevées. Les vitesses suivant l'axe \mathbf{Z}_p ne sont pas modifiées puisque l'axe \mathbf{C} tourne autour de l'axe \mathbf{Z}_p . Le polytope dans l'espace des tâches est tourné de 20 degrés autour de l'axe \mathbf{Z}_p .

Pour le centre d'usinage Huron KX8-five, si la table est en position $A = 20^\circ$, les vitesses suivant les axes \mathbf{Y}_p et \mathbf{Z}_p sont modifiées. En effet, l'axe \mathbf{A} est un axe qui tourne autour d'un axe \mathbf{XZ} orienté à 45° par rapport à \mathbf{X}_m dans le plan $(\mathbf{X}_m, \mathbf{Z}_m)$. Le polytope dans l'espace des tâches est ainsi tourné de 20 degrés autour de cet axe \mathbf{XZ} . Si le plateau est en position $C = 20^\circ$, alors ce sont les vitesses suivant les axes \mathbf{X}_p et \mathbf{Y}_p qui deviennent potentiellement plus élevées. Les vitesses suivant l'axe \mathbf{Z}_p ne sont pas modifiées puisque l'axe \mathbf{C} tourne autour de l'axe \mathbf{Z}_p . Le polytope dans l'espace des tâches est tourné de 20 degrés autour de l'axe \mathbf{Z}_p .

Pour le centre d'usinage Fatronik Verne, les axes \mathbf{B}_c et \mathbf{C}_c ont exactement la même influence que pour le centre d'usinage Mikron UCP710. En effet, l'architecture des axes de rotation est similaire, et nous considérons que les mouvements des axes de rotation sont induits et non commandés. Il est également composé d'un berceau d'axe \mathbf{B}_c tournant autour de \mathbf{Y}_m et d'un plateau d'axe \mathbf{C}_c tournant autour de \mathbf{Z}_p . Le polytope obtenu dans l'espace des tâches subit donc une rotation autour de ces axes correspondant à la valeur imposée pour l'angle.

2.2.4 En usinage 5 axes continu

En usinage 5 axes, les vitesses des axes de rotation ne sont pas nulles. Chaque hyperplan obtenu dans l'espace des tâches est une combinaison des hyperplans définis dans l'espace articulaire. Le polytope obtenu dans l'espace des tâches peut être vu comme la combinaison du polytope obtenu en usinage 3 axes et du polytope associé aux axes de rotation. Celui associé aux axes de rotation dépend de la position articulaire. En effet, la distance entre l'axe de rotation et la position articulaire du point piloté de l'outil agit comme un bras de levier dans le mouvement relatif outil/pièce.

La Figure 2.9 montre l'influence des axes de rotation sur la géométrie du polytope de vitesse obtenu dans l'espace des tâches pour les 3 centres d'usinage et pour le robot.

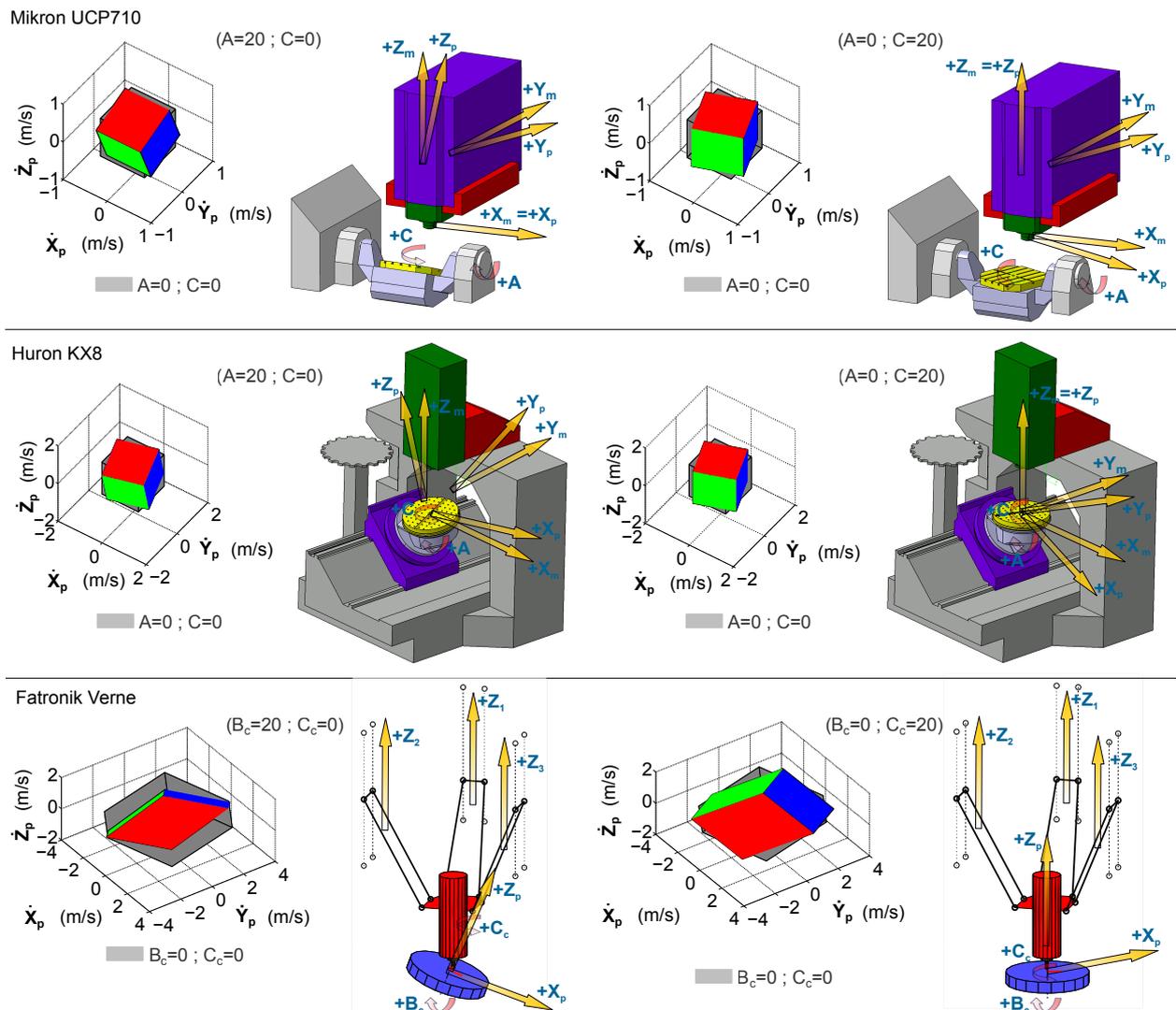


Figure 2.8 – Transfert du polytope de l'espace articulaire à l'espace des tâches : cas de l'usinage 5 axes positionné

Pour le centre d'usinage Mikron UCP710, l'exemple est donné pour une position articulaire simple (décalage du centre table de 0.1 m selon \mathbf{Y}_p). Dans cette configuration, autoriser un mouvement sur l'axe **A** déforme le polytope dans l'espace des tâches sur les composantes $\dot{\mathbf{Y}}_p$ et $\dot{\mathbf{Z}}_p$. La valeur maximale correspond au bras de levier, c'est-à-dire à $0.1 \times \dot{A}_{max}$. Autoriser un mouvement de l'axe **C** revient à augmenter la vitesse relative outil/pièce selon la composante $\dot{\mathbf{X}}_p$.

Pour le centre d'usinage Huron KX8-five, l'exemple est également donné pour une position articulaire simple (décalage du centre table de 100 mm selon \mathbf{Y}_m). Dans cette configuration, autoriser un mouvement sur l'axe **A** déforme le polytope dans l'espace des tâches sur les composantes $\dot{\mathbf{X}}_p$, $\dot{\mathbf{Y}}_p$ et $\dot{\mathbf{Z}}_p$. Autoriser un mouvement de l'axe **C** revient à augmenter la vitesse relative outil/pièce selon la composante $\dot{\mathbf{X}}_p$.

Pour le centre d'usinage Fatronik Verne, l'exemple est donné pour une position articulaire simple mais imposant des hauteurs différentes sur les axes \mathbf{Z}_2 et \mathbf{Z}_3 . Cette position induit une rotation autour de l'axe \mathbf{Y}_p . A cause de ce mouvement induit, les axes de rotation ne changent pas la forme du polytope mais décalent son centre dans l'espace, ce qui change les capacités cinématiques possibles puisque l'on considère la distance entre l'origine de l'espace et le polytope. Le mouvement des axes de translation et les mouvements induits par les axes de rotation peuvent se compenser ou au contraire permettre de s'éloigner de l'origine et ainsi augmenter la vitesse relative outil/pièce atteignable.

Pour le robot Stäubli RX170B, les exemples sont donnés pour deux configurations articulaires. La première configuration est donnée de sorte à ne plus pouvoir engendrer un mouvement suivant l'axe \mathbf{Z}_p . Il s'agit d'une singularité. L'intersection du polytope avec la direction d'axe \mathbf{Z}_p est nulle. Le polytope permet ainsi de privilégier les directions permettant d'engendrer la plus grande vitesse dans une direction donnée. La deuxième configuration montre le robot dans une position où l'axe de l'outil est vertical. La combinaison des différents axes est plus complexe à analyser mais on voit ici que les vitesses ne seront pas réparties de manière équivalente suivant les 3 axes. La forme du polytope est un peu plus complexe.

Cette partie a mis en avant l'utilisation du formalisme de polytopes pour définir les limites cinématiques de vitesse pour plusieurs stratégies d'usinage : 3 axes, 5 axes positionné, 5 axes continu. L'étude a été réalisée pour diverses structures poly-articulées et a permis de montrer la généralité du formalisme de polytopes pour analyser les capacités cinématiques induites dans l'espace des tâches. L'étude des polytopes de vitesse est très intéressante mais elle ne prend pas en compte toute la cinématique de la structure poly-articulée. En effet, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.3 du chapitre 1, les capacités en accélération et en jerk sont également limitées. En ce sens, la partie suivante analyse les polytopes d'accélération et de jerk définis dans l'espace articulaire et leurs images dans l'espace des tâches.

2. Analyse de la géométrie du polytope de vitesse pour différentes structures

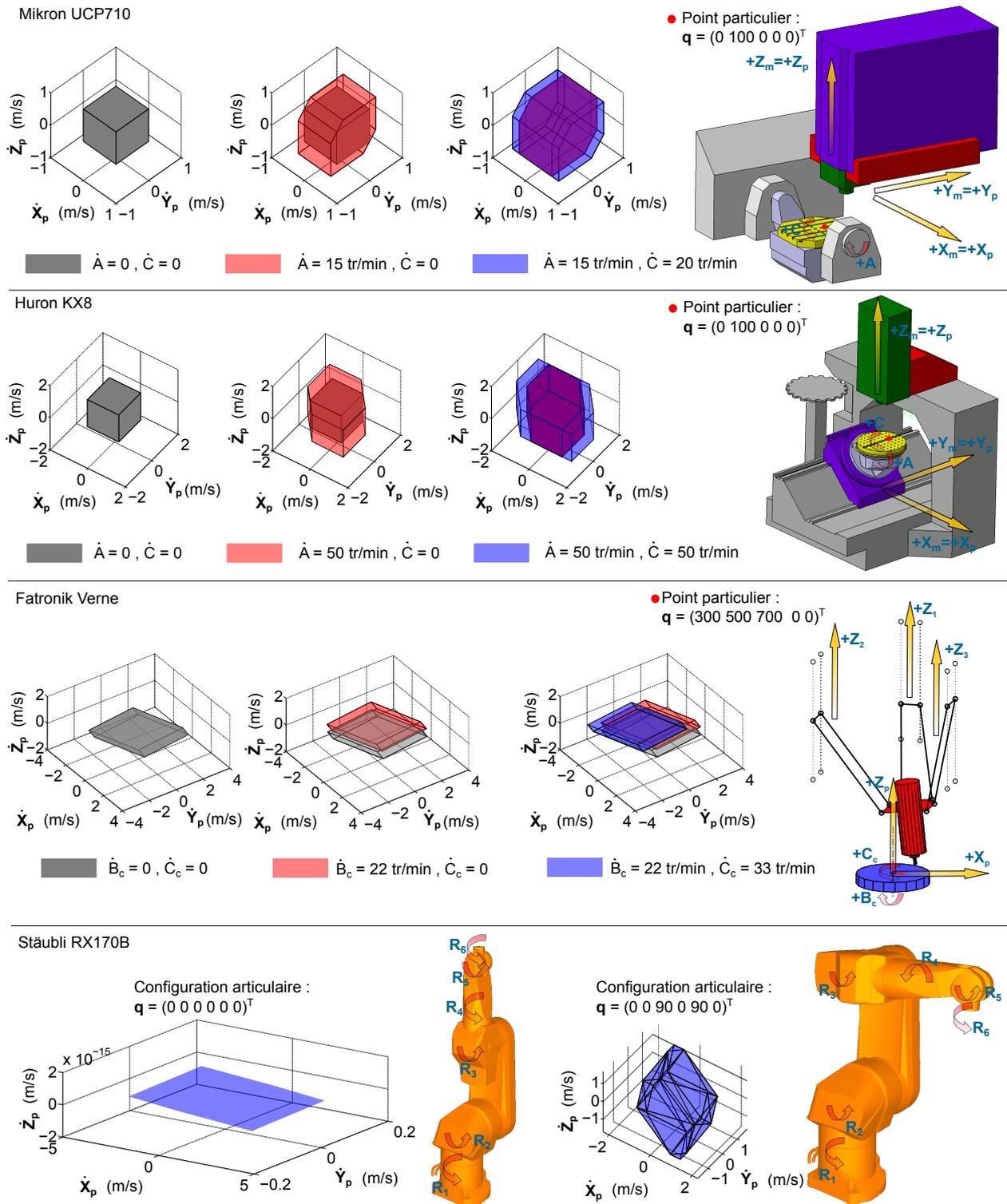


Figure 2.9 – Influence des axes de rotation sur la forme du polytope de vitesse pour différentes structures

3 Analyse de la géométrie des polytopes d'accélération et de jerk

3.1 Polytopes d'accélération et de jerk dans l'espace articulaire

Nous avons vu au paragraphe 1.3 du chapitre 1 que chaque axe d'un système poly-articulé est également limité par ses capacités d'accélération et de jerk. Les Figures 2.10 et 2.11 représentent respectivement les polytopes d'accélération et de jerk dans l'espace articulaire pour les trois centres d'usinage et le robot de la Figure 1.4. Comme pour les polytopes de vitesse, le nombre d'articulations des systèmes est supérieur à 3 : il n'est pas possible de donner une représentation graphique complète du polytope. Les représentations sont ainsi données pour un triplet d'axes.

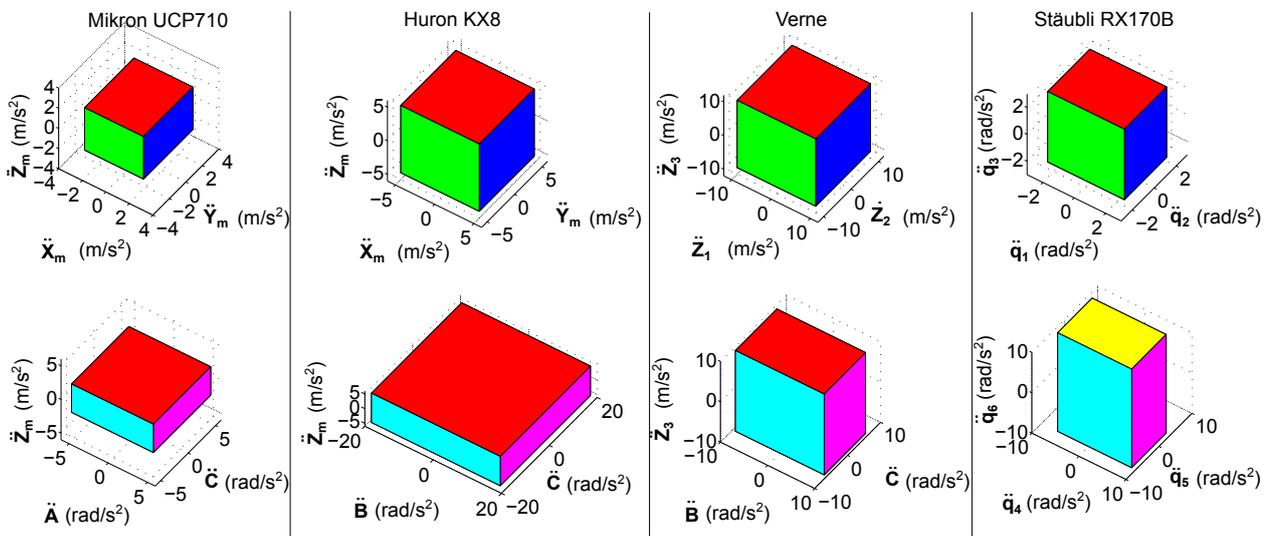


Figure 2.10 – Polytopes d'accélération dans l'espace articulaire pour différentes structures

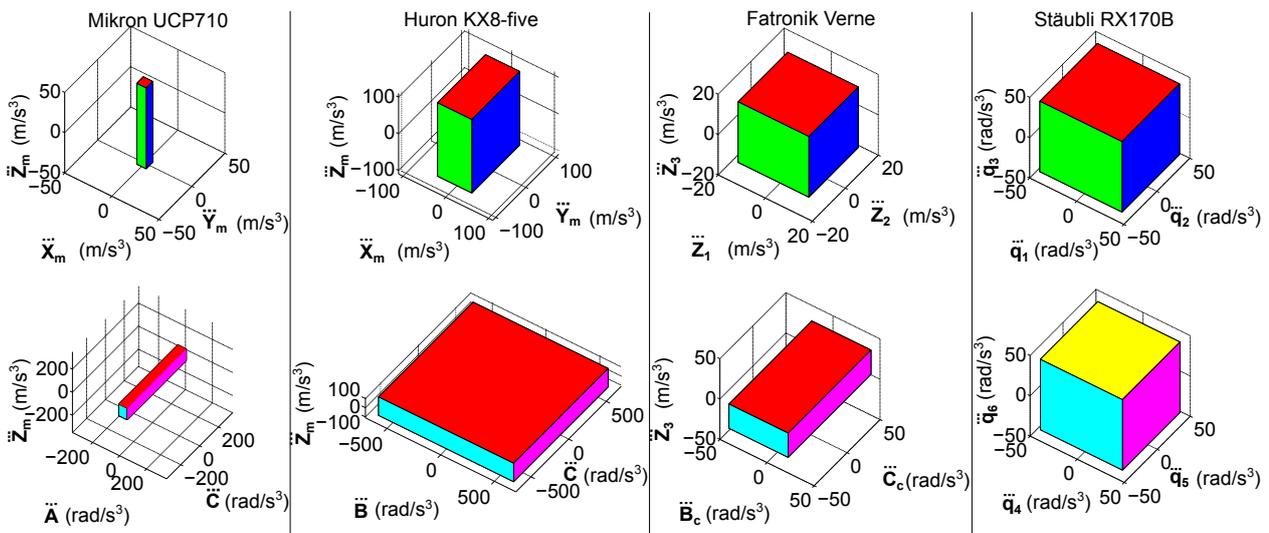


Figure 2.11 – Polytopes de jerk dans l'espace articulaire pour différentes structures

3.2 Modèles cinématiques du 2ème et du 3ème ordre

Par dérivation du modèle cinématique du premier ordre de l'Equation 2.4, l'Equation 2.29 définit le modèle cinématique du deuxième ordre. Il permet de quantifier l'influence des vitesses et des accélérations articulaires sur l'accélération produite dans l'espace des tâches.

$$\ddot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\dot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.29)$$

De manière similaire, par dérivation de l'Equation 2.29, l'Equation 2.30 définit le modèle cinématique du troisième ordre. Il quantifie l'influence des vitesses, des accélérations et des jerks articulaires sur le jerk produit dans l'espace des tâches.

$$\dddot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + 2 \cdot \underline{\dot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \underline{\ddot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.30)$$

Ainsi, l'accélération et le jerk obtenus dans l'espace des tâches sont la somme de plusieurs termes dépendant des positions, des vitesses, des accélérations, et des jerks de chaque axe dans l'espace articulaire. La partie suivante s'intéresse ainsi à la somme de polytopes, appelée somme de Minkowski.

3.3 Somme de Minkowski

La somme de Minkowski de deux polytopes P_1 et P_2 de dimension n est donnée par l'Equation 2.31.

$$P = P_1 + P_2 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \exists \mathbf{p}_1 \in P_1, \exists \mathbf{p}_2 \in P_2 : \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\} \quad (2.31)$$

Géométriquement, la somme de Minkowski est une opération sur les vecteurs d'un espace vectoriel. La somme de Minkowski d'un polytope P_1 et d'un polytope P_2 est un polytope P . Lorsque $n = 1$, la somme de Minkowski représente la somme de deux intervalles bornés. Pour des dimensions supérieures, cela consiste à effectuer le balayage du centre du premier polytope sur la frontière du deuxième polytope [Barki et al. \(2009\)](#). La Figure 2.12 illustre le principe en deux dimensions.

Dans la somme définie dans l'Equation 2.29, la matrice $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$ définit une application linéaire reliant l'espace articulaire à l'espace des tâches. Cependant, la matrice $\underline{\dot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ n'est pas une application linéaire. Il n'est donc pas possible de considérer le polytope obtenu dans l'espace des tâches comme la somme de Minkowski du polytope articulaire en accélération (terme $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}$) et du polytope articulaire de vitesse (terme $\underline{\dot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$).

Pour tenir compte de ce terme non linéaire, il ne faut pas considérer l'ensemble de l'espace vectoriel \dot{Q} mais uniquement une seule valeur lorsqu'on détermine l'accélération. Ainsi, le terme non linéaire est un vecteur et non un polytope. De même, pour le jerk il faut considérer une seule valeur de l'espace \dot{Q} et de \ddot{Q} .

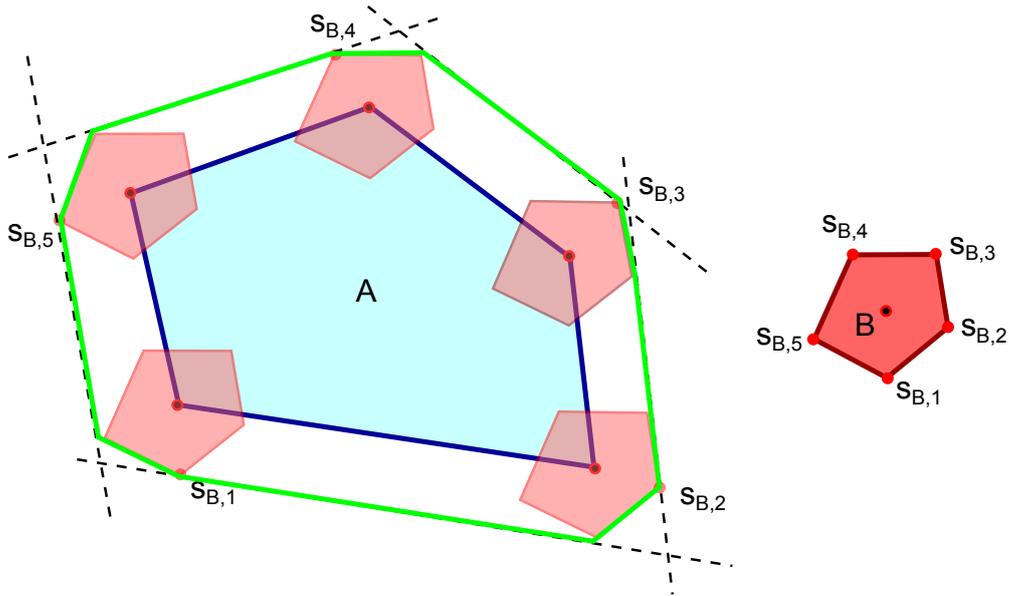


Figure 2.12 – Principe de la somme de Minkowski de deux polytopes en dimension 2 (d'après Barki et al. (2009))

3.4 Décalage du centre du polytope

En prenant une seule valeur, le terme non linéaire est vu comme un décalage du centre du polytope donné par le premier terme de l'Equation 2.29. L'Equation 2.32 est ainsi obtenue pour l'accélération et l'Equation 2.33 est obtenue pour le jerk.

$$\ddot{\mathbf{X}} - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{decalage}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad \ddot{\mathbf{X}}_{\text{decalage}} = \underline{\dot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.32)$$

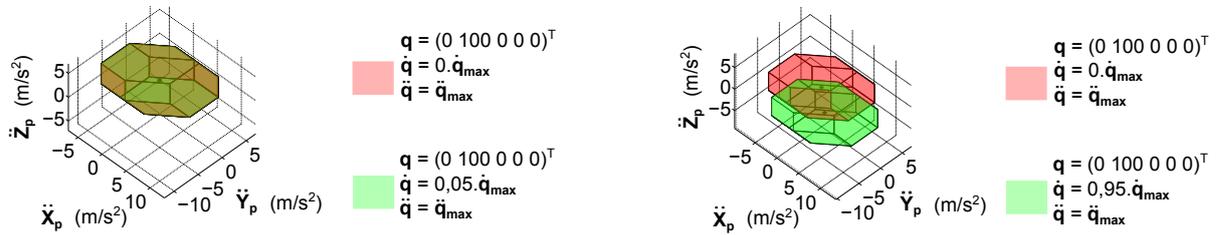
$$\ddot{\mathbf{X}} - \ddot{\mathbf{X}}_{\text{decalage}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad \ddot{\mathbf{X}}_{\text{decalage}} = 2 \cdot \underline{\dot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \underline{\ddot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.33)$$

Selon les cas, la valeur de ce décalage peut être influente en fonction des vitesses articulaires utilisées Rosenstein et Grupen (2002). La valeur de ce décalage est fonction de la valeur des termes choisis et donc de la causalité. En effet, pour une loi de commande de type bang-bang de jerk comme celle présentée dans la partie 2.2.1 du chapitre 1, les valeurs d'accélération \ddot{q}_i , de vitesse \dot{q}_i , et de position q_i de chaque axe i à l'instant t sont fonction des valeurs précédemment réalisées à l'instant $(t-1)$ (Equation 2.34). Ainsi, la Figure 2.13 montre que le décalage du centre du polytope peut être plus ou moins important.

$$\begin{cases} \ddot{q}_i(t) = \ddot{q}_i(t-1) + \int_{t-1}^t \ddot{\ddot{q}}_i(\tau) \cdot d\tau \\ \dot{q}_i(t) = \dot{q}_i(t-1) + \int_{t-1}^t \ddot{q}_i(\tau) \cdot d\tau \\ q_i(t) = q_i(t-1) + \int_{t-1}^t \dot{q}_i(\tau) \cdot d\tau \end{cases} \quad (2.34)$$

L'exemple de la Figure 2.13 est donné pour le centre d'usinage Mikron UCP710 mais le principe est identique pour toutes les structures.

Polytope d'accélération



Polytope de jerk

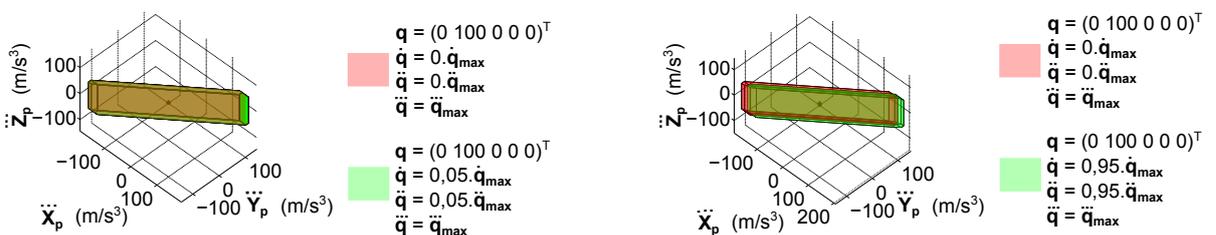


Figure 2.13 – Décalage du centre des polytopes d'accélération et de jerk en fonction de la causalité

En accélération, ce décalage permet de quantifier la contribution de la vitesse articulaire sur l'accélération réalisée dans l'espace des tâches. Lorsque les vitesses articulaires de tous les axes sont égales à 5% des valeurs maximales atteignables, alors le décalage du polytope est très faible. Il est ainsi possible de le négliger. En revanche, lorsque les vitesses articulaires sont à 95% des capacités en vitesse alors un décalage significatif du polytope apparaît. Il n'est plus possible de négliger ces termes. En jerk, ce décalage permet de quantifier la contribution de la vitesse et de l'accélération articulaire sur le jerk réalisé dans l'espace des tâches. Lorsque les vitesses et les accélérations articulaires de tous les axes sont égales à 5% des valeurs maximales atteignables, alors le décalage du centre du polytope est très faible. Il est ainsi possible de le négliger. En revanche, lorsque les vitesses et les accélérations articulaires sont à 95% des capacités maximales alors un décalage du polytope apparaît, mais il reste très relatif vis-à-vis de la taille du polytope.

Ce décalage a un impact sur l'estimation de l'accélération et du jerk dans l'espace des tâches. En effet, la capacité cinématique maximale que la structure peut engendrer est la plus grande distance entre l'origine de l'espace et les sommets du polytope. Si le centre du polytope n'est pas confondu avec l'origine alors la solution obtenue ne correspond plus directement au sommet le plus éloigné du centre du polytope. En conclusion, les termes associés au décalage du centre du polytope ne sont pas toujours négligeables. Cela dépend de la configuration dans laquelle se trouve le système polyarticulé. Ce décalage peut poser problème dans la planification de trajectoires car il n'est pas aisé de connaître a priori les niveaux de vitesse et d'accélération atteints. L'estimation du décalage du centre du polytope n'est pas simple à quantifier tant qu'une solution de l'interpolation temporelle n'a pas été déterminée. L'une des solutions serait de calculer le décalage après avoir généré une

première trajectoire. Puis, par un processus itératif, il serait possible de modifier la trajectoire jusqu'à obtenir une trajectoire augmentant la vitesse relative outil/pièce. Mais ce processus peut être très coûteux en calcul et très long. En ce sens, lorsqu'un décalage apparaît, il serait intéressant de ne pas regarder l'image du polytope dans l'espace des tâches mais de considérer directement le polytope dans l'espace articulaire.

L'analyse de l'orientation et de la forme du polytope suivant les cas d'usinage (3 axes, 5 axes positionné, et 5 axes continu) est la même que celle réalisée en vitesse. En effet, la matrice Jacobienne définissant le transfert de l'espace articulaire à l'espace des tâches est la même. Seul un potentiel décalage du centre du polytope intervient. A partir des différents polytopes de vitesse, d'accélération et de jerk définis dans ce chapitre, les chapitres suivants proposent des méthodes pour créer des trajectoires d'usinage qui cherchent à exploiter au mieux les capacités cinématiques des axes en fonction de la structure de la machine et de la pièce à réaliser.

4 Conclusion

Ce chapitre a exposé le principe de manipulabilité cinématique existant dans la littérature dans le domaine de la robotique. La manipulabilité permet de quantifier les capacités cinématiques de la structure poly-articulée, c'est-à-dire sa capacité à se déplacer autour d'une configuration donnée. L'association de la norme 2 aux limites cinématiques articulaires permet de définir des ellipsoïdes de manipulabilité. Cette représentation géométrique a l'avantage d'avoir une expression analytique. En ce sens, le passage de l'espace articulaire à l'espace des tâches est facilité. Son exploitation a donc été largement développée dans la littérature et de nombreux critères de manipulabilité ont été associés à l'ellipsoïde dans le but de définir des trajectoires cinématiquement admissibles. Cependant, le modèle le plus rigoureux pour représenter les limites cinématiques semble être le polytope et non l'ellipsoïde. Ces polytopes sont obtenus en associant une norme infinie aux limites cinématiques dans l'espace articulaire. Bien que ce modèle géométrique n'ait pas une formulation analytique explicite, la dualité de ses deux définitions permet de le définir et de l'exploiter. En effet, la H-description définit le polytope dans l'espace articulaire par les contraintes cinématiques et la V-description permet son transfert de l'espace articulaire vers l'espace des tâches. Le polytope est un formalisme mathématique qui permet de regrouper les limites cinématiques des structures poly-articulées dans l'espace articulaire. Ce formalisme permet de modéliser simultanément des limites cinématiques des axes de translation et de rotation. Le formalisme mathématique associé permet d'obtenir l'image de ce polytope dans l'espace des tâches. Localement, ces images ne sont pas approximées et elles sont valables pour les trois niveaux cinématiques pouvant limiter la vitesse relative outil/pièce, c'est-à-dire la vitesse, l'accélération et le jerk. Comme pour l'ellipsoïde de manipulabilité, des critères ont été développés dans la littérature afin d'exploiter ces polytopes dans le but de tirer profit des combinaisons des différents axes de la structure poly-articulée.

L'avantage des polytopes de manipulabilité est d'être un formalisme définissable pour toutes les structures poly-articulées. Afin de montrer sa généralité, les polytopes de vitesse dans l'espace articulaire ont été représentés pour 4 architectures différentes : deux machines-outils 5 axes avec

une architecture sérielle de type RRTTT (Mikron UCP710 et Huron KX8), une machine-outil 5 axes avec une architecture hybride (Fatronik Verne) et un robot usineur composé de 6 axes de rotation en série (Stäubli RX170B). Le transfert des polytopes articulaires dans l'espace des tâches a ensuite été réalisé en définissant la matrice Jacobienne de chaque architecture. La matrice Jacobienne définit une application linéaire pour une configuration donnée : l'image des polytopes de vitesse articulaire donne ainsi des polytopes de vitesse dans l'espace des tâches. La diversité géométrique des polytopes définis dans l'espace articulaire et de leurs images dans l'espace des tâches souligne l'importance de la modélisation des capacités cinématiques pour définir des trajectoires cinématiquement admissibles adaptées pour chaque structure. La forme et l'orientation des polytopes varient en fonction de l'usinage réalisé (usinage 3 axes, usinage 5 axes positionnés, usinage 5 axes continus) et de la configuration articulaire. Ainsi, le polytope évolue au fur et à mesure que l'on évolue le long d'une trajectoire.

La modélisation des polytopes pour les niveaux cinématiques d'accélération et de jerk a également été réalisée dans l'espace articulaire. Les difficultés liées à leurs transferts dans l'espace des tâches ont été mises en avant. Dans l'espace des tâches, le polytope obtenu est décalé à cause des termes liés à la vitesse articulaire qui traduisent un état cinématique instantané de la structure. De même, la vitesse et l'accélération articulaire créent un décalage du centre du polytope de jerk obtenu dans l'espace des tâches. Ces décalages sont donnés pour une valeur de position, de vitesse et d'accélération et sont fonction de la causalité.

En résumé, ce formalisme permet de :

- Caractériser les contraintes cinématiques sur plusieurs niveaux (vitesse, accélération et jerk).
- Caractériser les contraintes cinématiques pour n'importe quelle structure poly-articulée
- Caractériser les capacités cinématiques du mouvement outil/pièce.

Les chapitres suivants présentent des méthodes pour exploiter au mieux ces polytopes de manipulabilité cinématiques dans le but de définir des trajectoires qui cherchent à exploiter au mieux les capacités cinématiques des axes en fonction de la structure de la machine et de la pièce à réaliser. Dans le chapitre suivant, l'exploitation de ces polytopes est réalisée pour définir l'orientation de l'outil qui maximise la vitesse relative outil/pièce dans le cas de l'usinage 5 axes positionné.

Chapitre

3

**Choix de l'orientation outil/pièce :
Application à l'usinage 5 axes
positionné**

Sommaire

1	Paramètres articulaires saturants	72
1.1	Directions de norme maximale dans l'espace articulaire	72
1.2	Détermination du paramètre saturant	74
1.3	Combinaison des directions de plusieurs niveaux cinématiques	77
2	Conséquences du paramètre articulaire saturant sur la trajectoire dans l'espace des tâches	78
2.1	Modèles cinématiques dans un contexte d'usinage 5 axes positionné . . .	78
2.2	Evaluation des capacités cinématiques dans la direction tangentielle . . .	79
3	Choix de l'orientation de l'outil dans le cas de l'usinage de droites	82
3.1	Principe de la méthode proposée	82
3.2	Application à l'usinage des règles d'un parabolôïde hyperbolique	84
3.2.1	Pièce test : parabolôïde hyperbolique	84
3.2.2	Orientation outil/pièce solution pour chaque niveau cinématique	84
3.2.3	Mise en œuvre expérimentale	86
3.3	Collisions potentielles associées à l'orientation optimale	88
4	Choix de l'orientation de l'outil pour des surfaces « tendues »	91
4.1	Pièce test : surface Manta	91
4.2	Adaptation de la méthode proposée	91
4.3	Tests sur le centre d'usinage Mikron UCP710	92
4.4	Limites de la méthode proposée	93
4.4.1	Valeurs de f_{moyen}	93
4.4.2	Temps d'usinage sur la pièce complète	94
5	Application à des architectures hybride ou parallèle	96
5.1	Combinaison des mouvements de translation et de rotation	96
5.2	Algorithme proposé	97
6	Conclusion	99

Introduction

Le chapitre 1 a mis en avant les exigences croissantes en termes de design et de temps de fabrication des pièces usinées. En ce sens, les structures poly-articulées ont évolué dans le but de ne plus uniquement réaliser de l'usinage 3 axes et permettre un usinage 5 axes positionné et un usinage 5 axes continu. En effet, pour usiner des formes orientées de façon quelconque dans l'espace ou maîtriser les conditions de coupe, il faut pouvoir modifier l'inclinaison de l'outil. De plus, le développement de l'usinage 5 axes a permis de réduire le nombre de posages nécessaires pour usiner une pièce [Gupta et al. \(1995\)](#). Des méthodes ont été développées pour obtenir un posage unique [Isnaini et al. \(2014\)](#), tout en évitant les collisions [Hu et al. \(2013\)](#). Dans la littérature, les modèles liés au choix du posage sont principalement associés aux écarts géométriques et au temps d'usinage. Concernant le temps d'usinage, les critères développés se focalisent en particulier sur les effets de la cinématique des axes de rotation sur la vitesse relative outil/pièce (partie 3.4.2 du chapitre 1). La maîtrise de cette vitesse est indispensable car elle caractérise les performances de la trajectoire utilisée et donne une image de la qualité de la surface au sens du respect des conditions de coupe programmées. Les critères développés tentent de limiter les mouvements des axes de rotation car expérimentalement ce sont souvent ceux qui limitent la vitesse relative outil/pièce. En revanche, ces études ne cherchent pas à combiner les axes dans le but de générer des trajectoires qui prennent en compte les capacités des différents axes de translation. L'avantage de l'usinage 5 axes positionné est de pouvoir orienter la pièce pour combiner au mieux les capacités des différents axes de translation sans utiliser la cinématique des mouvements relatifs induits par les axes de rotation.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode définissant l'orientation de l'outil par rapport à la pièce à partir des polytopes de manipulabilité cinématique définis au chapitre 2. Le but est de trouver les positionnements outils qui permettent de tirer profit des différents axes de translation de la machine en usinage 5 axes positionné. La méthode proposée s'adresse particulièrement à l'usinage de pièces initialement réalisées en 3 axes avec une stratégie par plans parallèles et avec une faible courbure. Nous proposons de choisir l'orientation relative outil/pièce le long de chaque passe afin de favoriser les combinaisons des axes de translation. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, pour des architectures sérielles, cette première étude a l'avantage de ne pas modifier la forme des polytopes articulaires lors de leurs transferts dans l'espace des tâches et de ne pas prendre en compte la causalité qui peut dans certains cas engendrer un décalage du centre du polytope. Une adaptation de la méthode est nécessaire avec des structures hybrides puisqu'il est nécessaire de mettre en mouvement les axes de rotation pour obtenir un mouvement rectiligne dans l'espace des tâches sauf dans certaines configurations particulières. Les sollicitations des axes de translation et de rotation sont couplées.

La première partie de ce chapitre a pour objectif de sensibiliser à la difficulté d'optimiser conjointement les différents niveaux cinématiques (vitesse, accélération, et jerk). Optimiser l'ensemble des niveaux cinématiques de manière simultanée permettrait d'obtenir une trajectoire plus rapide sans se soucier de l'évolution temporelle de la cinématique lors de l'exécution. Malheureusement, cette concomitance n'est pas toujours possible. En ce sens, il est nécessaire de déterminer

le paramètre cinématique saturant et de privilégier ce niveau cinématique pour créer des trajectoires qui permettent de combiner au mieux les axes de translation. Pour cela, une étude théorique basée sur une loi de commande de type bang-bang de jerk est réalisée. Une fois ce niveau cinématiquement limitant identifié, la deuxième partie de ce chapitre propose une méthode pour choisir l'orientation de l'outil à partir du polytope associé à ce niveau cinématiquement limitant. Dans un premier temps, la méthode est proposée dans le cas d'une trajectoire rectiligne et les résultats sont donnés pour deux structures poly-articulées avec une architecture sérielle. La réalisation d'essais expérimentaux sur une pièce test permet de vérifier la pertinence du choix du paramètre limitant la vitesse relative outil/pièce et la nécessité de limiter le domaine d'orientation admissible pour choisir l'orientation. Ces trajectoires rectilignes sont très restrictives, c'est pourquoi dans un second temps, une adaptation de cette méthode est proposée pour des trajectoires « tendues ». Ainsi, la quatrième partie détaille la méthode pour choisir l'orientation de l'outil dans le cas de surfaces gauches. La réalisation d'essais sur un centre d'usinage montre l'intérêt de la méthode mais également ses limites dans le cas de l'usinage 5 axes positionné. La cinquième partie propose des adaptations à réaliser pour gérer le choix de l'orientation de l'outil dans le cas de structures poly-articulées avec une architecture hybride.

1 Paramètres articulaires saturants

1.1 Directions de norme maximale dans l'espace articulaire

Nous avons vu au chapitre 2 que les limites cinématiques des axes de chaque structure poly-articulée peuvent être déséquilibrées. De plus, ce déséquilibre n'est pas nécessairement identique pour chaque niveau cinématique. Par exemple, pour le centre Mikron UCP710, les vitesses des axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m et \mathbf{Z}_m sont égales à 30 m/min alors que les niveaux de jerk des axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m sont à 5 m/s³ et celui de \mathbf{Z}_m est à 50 m/s³. Ainsi, les directions dans lesquelles la norme du vecteur vitesse est maximale ne coïncident pas avec la direction dans laquelle la norme de l'accélération ou du jerk est maximale. Dans le cas de l'usinage 5 axes positionné et d'une architecture sérielle, la norme pour chaque niveau cinématique se détermine à partir des composantes des trois axes de translation q_i (Equation 3.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\dot{\mathbf{q}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2} \\ \|\ddot{\mathbf{q}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \ddot{q}_i^2} \\ \|\dddot{\mathbf{q}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \dddot{q}_i^2} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

La Figure 3.1 donne l'ensemble des directions possibles \mathbf{d} et les 8 directions de norme maximale

en jerk, en accélération, et en vitesse pour les 2 centres d'usinage avec une architecture sérielle.

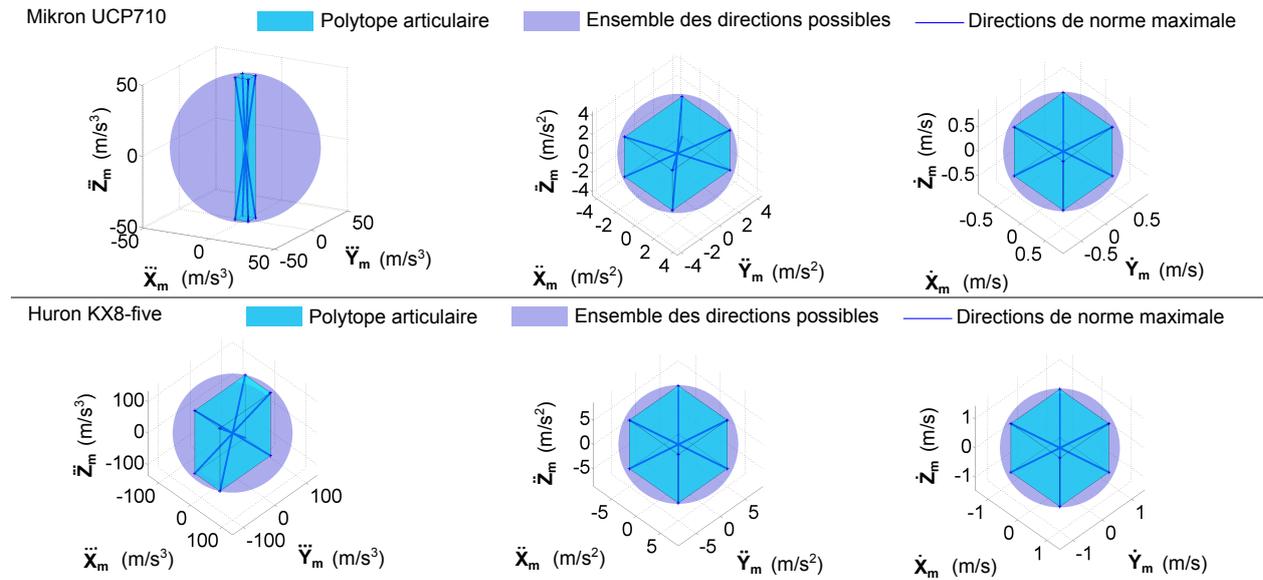


Figure 3.1 – Directions de norme maximale des différents niveaux cinématiques pour 2 centres d'usinage

L'ensemble des directions possibles forme une sphère centrée sur l'origine de l'espace pour chaque niveau cinématique. Les directions qui donnent la plus grande norme sont celles correspondant aux 8 sommets du polytope. La Figure 3.1 montre que pour les centres d'usinage Mikron UCP710 et Huron KX8-five, les directions de normes maximales ne sont pas identiques. Ainsi, il ne sera pas possible d'aller à la fois dans la direction maximisant la vitesse, l'accélération et le jerk. Le Tableau 3.1 quantifie l'effet du choix de direction d'un niveau cinématique sur les autres niveaux.

Mikron UCP710	$\ \ddot{\mathbf{q}}_d\ $ (m/s ³)	$\ \dot{\mathbf{q}}_d\ $ (m/s ²)	$\ \mathbf{q}_d\ $ (m/s)	Huron KX8-five	$\ \ddot{\mathbf{q}}_d\ $ (m/s ³)	$\ \dot{\mathbf{q}}_d\ $ (m/s ²)	$\ \mathbf{q}_d\ $ (m/s)
d_{jerk}	50.5	2.1	0.51	d_{jerk}	134.1	6.7	1.1
d_{acceleration}	7.4	4.4	0.74	d_{acceleration}	69.3	8.7	1.44
d_{vitesse}	8.7	3.6	0.87	d_{vitesse}	69.3	8.7	1.44

Tableau 3.1 – Norme maximale induite sur les autres niveaux cinématiques par la direction choisie

La valeur maximale pour chaque niveau cinématique (en vert et en gras dans le Tableau 3.1) est obtenue lorsqu'on est dans la direction correspondant à ce niveau cinématique. Dans les autres directions, le niveau est plus faible sauf si les deux directions sont les mêmes. C'est par exemple le cas sur le centre Huron KX8-five : les directions en vitesse et en accélération sont les mêmes, ce qui donne des normes égales. Il est donc nécessaire de déterminer le paramètre cinématique qui sature pour aller dans la direction permettant de maximiser la combinaison des trois axes de

translation. En augmentant au maximum ce paramètre, il sera possible de diminuer le temps de parcours de la trajectoire correspondante.

1.2 Détermination du paramètre saturant

Nous avons vu au paragraphe 2.2.1 du chapitre 1 que la loi de commande la plus douce à temps minimal implémentée dans les commandes numériques industrielles en UGV est une loi en bang-bang de jerk. Ce type de loi se décompose en 7 segments et sur chacun des segments un niveau cinématique différent sature.

La saturation intervient en premier lieu en jerk, puis peut-être en accélération ou en vitesse en fonction des niveaux cinématiques. Le niveau cinématique de jerk est donc nécessairement à prendre en compte mais il reste à déterminer la longueur à partir de laquelle une autre saturation peut se produire. Trouver la longueur minimale pour saturer en accélération revient à déterminer quelle est la distance parcourue lorsque la saturation est uniquement en jerk. Sur le profil à 7 segments présenté au chapitre 1 sur la Figure 1.7, cela revient à considérer les temps associés aux segments 2, 4 et 6 comme nuls. La durée de l'intervalle 1 (T_1) sur le profil en 7 segments est ainsi donnée par l'Equation 3.2.

$$T_1 = \frac{\|\ddot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}\|}{\|\dot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}\|} \quad (3.2)$$

avec :

- $\ddot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}$ le jerk induit par la direction choisie \mathbf{d}
- $\dot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}$ l'accélération induite par la direction choisie \mathbf{d}

La représentation graphique illustrant le calcul de ces normes est donnée sur la Figure 3.2.

Les valeurs de $\|\ddot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}\|$, $\|\dot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}\|$ et $\|\mathbf{q}_{\text{dir}}\|$ se déterminent en fonction de la direction, c'est-à-dire de la combinaison des sollicitations sur les différents axes. Etant donné que le jerk est le paramètre saturant en premier, nous allons déterminer la longueur de trajet correspondant à une saturation uniquement en jerk et correspondant aux combinaisons donnant les valeurs maximales de la norme du jerk. Les directions correspondantes vont donc du centre du polytope à ses sommets. La norme se détermine en effectuant l'intersection entre la direction et la surface du polytope (Equation 3.3).

$$\begin{cases} \|\dot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}\| = \min_i \left| \frac{\dot{q}_{\text{max}}^i}{d^i} \right| \\ \|\ddot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}\| = \min_i \left| \frac{\ddot{q}_{\text{max}}^i}{d^i} \right| \\ \|\ddot{\mathbf{q}}_{\text{dir}}\| = \min_i \left| \frac{\ddot{\ddot{q}}_{\text{max}}^i}{d^i} \right| \end{cases} \quad (3.3)$$

avec :

- d^i les composantes du vecteur unitaire donnant la direction maximale en jerk.

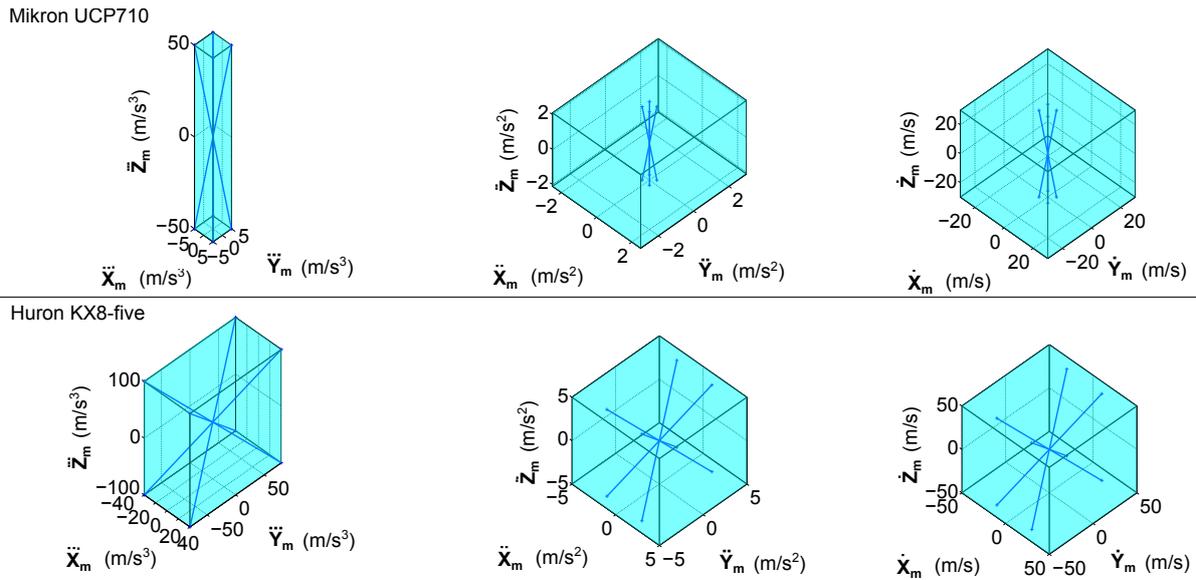


Figure 3.2 – Conséquences des directions maximales de jerk sur les polytopes d'accélération et de vitesse pour les 2 centres d'usinage

Les valeurs correspondantes sont celles données en vert dans le Tableau 3.1. Les caractéristiques en jerk du centre d'usinage Mikron UCP710 sont fortement déséquilibrées. En effet, il y a un facteur 10 entre la valeur de l'axe Z_m et celle des axes X_m et Y_m . Ce déséquilibre, qui n'est pas présent en accélération et en vitesse a pour conséquence d'avoir une norme sur les niveaux d'accélération et de vitesse relativement faible dans la direction donnée par les caractéristiques en jerk. En effet, la Figure 3.2 montre que ces directions sont éloignées des sommets. Pour le centre d'usinage Huron KX8-five, le déséquilibre est un peu moins important mais les directions de jerk ne permettent pas d'atteindre les valeurs maximales en accélération et en vitesse.

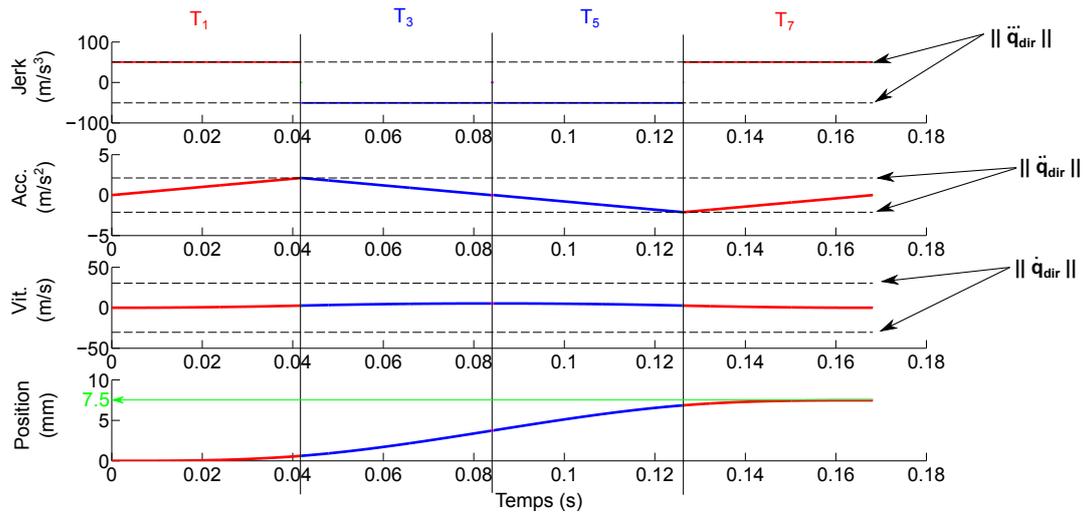
Sur le profil en 7 segments, les durées T_3 , T_5 , et T_7 sont les mêmes pour respecter la relation entre le jerk et l'accélération et sont égales à la durée T_1 définie dans l'Equation 3.2. En intégrant, on obtient la longueur minimale du segment pour qu'il y ait une potentielle saturation en accélération. Les profils de jerk, d'accélération, de vitesse et de position sont donnés sur la Figure 3.3 pour les 2 centres d'usinage avec une architecture sérielle. Les longueurs correspondantes sont résumées dans le Tableau 3.2.

	Mikron UCP710	Huron KX8-five
Longueur segment (mm)	7.5	33.5

Tableau 3.2 – Longueur maximale du segment avant le début d'une saturation autre que le jerk

Pour le centre d'usinage Huron KX8-five, le léger déséquilibre des axes en jerk ne donne pas la combinaison maximale en accélération ce qui peut diminuer la longueur maximale du segment avant d'avoir une saturation en accélération. Pour le centre d'usinage Mikron UCP710, la longueur du segment avant d'atteindre une saturation en jerk est de 7.5 mm. Cette valeur est assez faible à cause du déséquilibre entre les axes. Le niveau de jerk dans sa direction privilégié est quasiment 10

Mikron UCP710



Huron KX8-five

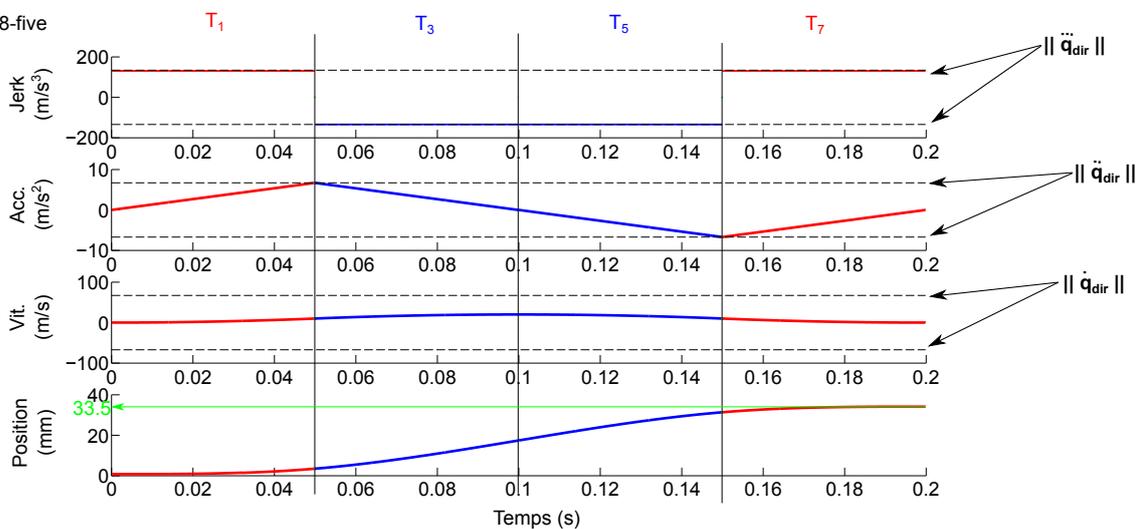


Figure 3.3 – Longueur de trajet à la limite d'une saturation autre que le jerk

fois plus important que dans les directions d'accélération et de vitesse. De plus, le niveau d'accélération est faible dans les directions données par le jerk. Si le niveau d'accélération correspondait à la meilleure combinaison en accélération alors la longueur du segment avant d'atteindre une saturation en accélération serait de 68.8 mm. Cette valeur correspondrait à une direction optimale en jerk, c'est-à-dire 50.5 m/s³, et à une direction optimale en accélération, c'est-à-dire 4.4 m/s² (Tableau 3.1). Cependant, dans le cas de l'usinage 5 axes positionné, le principe consiste à garder une orientation de l'outil constante le long de la passe et donc il n'est pas envisageable d'alterner les orientations maximisant le jerk, puis l'accélération, et la vitesse. En revanche, il serait possible de trouver une direction intermédiaire, par exemple entre les niveaux de jerk et d'accélération qui permet de diminuer le temps d'usinage.

1.3 Combinaison des directions de plusieurs niveaux cinématiques

La partie précédente a démontré qu'il n'est pas possible de trouver une orientation unique maximisant les niveaux de jerk, d'accélération et de vitesse. Ainsi, il serait intéressant de trouver une direction qui permette d'obtenir une combinaison qui ne maximise pas tous les niveaux mais qui donne le temps d'usinage minimal pour une longueur de trajectoire donnée.

Si on prend l'exemple d'une trajectoire saturant uniquement en jerk et en accélération, alors la direction donnant le temps optimal se trouve nécessairement entre les directions de jerk maximal et les directions d'accélération maximale. Ces directions sont données sur la Figure 3.4 (à gauche) pour les 2 centres d'usinage. L'intersection entre le polytope et ces directions donnent les niveaux de jerk et d'accélération correspondant (Figure 3.4 à droite). Lorsque la direction est celle de jerk, le paramètre de discrétisation vaut 0 et lorsque la direction est en accélération il vaut 1.

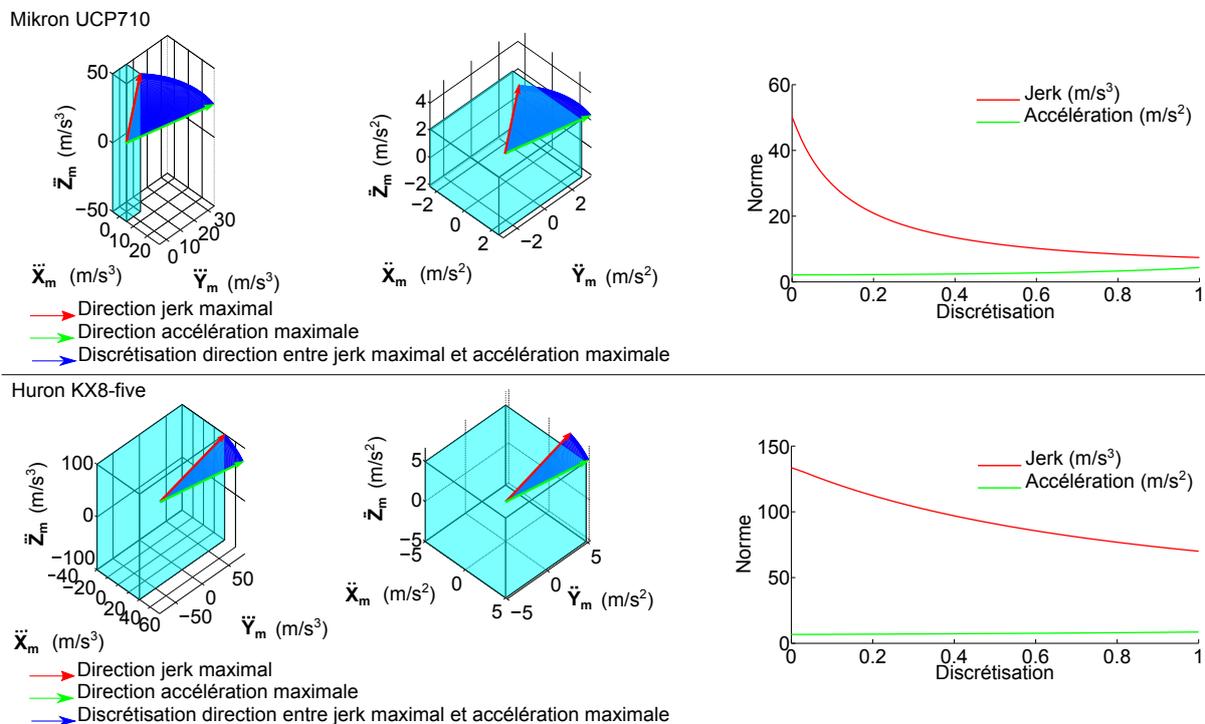


Figure 3.4 – Directions combinaison des directions de jerk et d'accélération

La Figure 3.4, à droite, montre que le niveau de jerk descend rapidement alors que celui d'accélération augmente légèrement lorsqu'on passe d'une direction en jerk à une direction en accélération. A partir de ces niveaux cinématiques, il est possible d'estimer les temps d'usinage associés grâce au modèle en 7 segments d'une loi en bang-bang de jerk. Pour chaque direction, la Figure 3.5 donne les temps d'usinage obtenus pour une longueur de segment de 100 mm. Le nombre de discrétisations correspond à la direction évaluée entre la direction de jerk et d'accélération en commençant par celle de jerk.

Ces résultats montrent que le paramètre de jerk est celui qu'il est nécessaire de privilégier. En augmentant le niveau d'accélération, le niveau de jerk diminue ce qui augmente les temps où le jerk sature et donc le temps total de l'usinage.

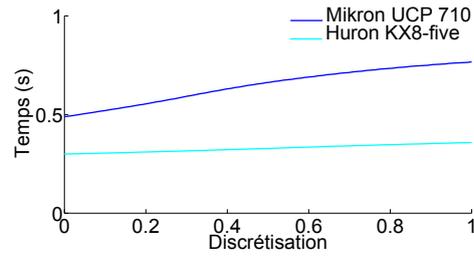


Figure 3.5 – Estimation du temps d'usinage d'un segment de 100 mm pour les différentes combinaisons de jerk et d'accélération

En conclusion, l'étude effectuée dans cette partie a mis en avant l'intérêt de solliciter les axes dans la direction donnant la norme maximale de jerk. Cependant, l'objectif de ce chapitre est de trouver l'orientation relative outil/pièce qui permet de combiner au mieux les performances cinématiques des axes de translation dans le but d'augmenter la vitesse relative outil/pièce. La direction de la trajectoire dans l'espace des tâches étant imposée, il faut déterminer l'orientation qui permet d'aller dans la direction donnant la norme maximale de jerk dans l'espace articulaire. La partie suivante fait le lien entre la trajectoire à effectuer dans l'espace des tâches et l'orientation outil/pièce qui va permettre de solliciter les axes de translation dans les directions de jerk maximal.

2 Conséquences du paramètre articulaire saturant sur la trajectoire dans l'espace des tâches

2.1 Modèles cinématiques dans un contexte d'usinage 5 axes positionné

Le chapitre 2 a montré les caractéristiques des polytopes dans un contexte d'usinage 5 axes positionné. Pour des architectures sérielles, définir des trajectoires en usinage 5 axes positionné revient à considérer les caractéristiques cinématiques des axes de rotation nulles. Les polytopes articulaires résultant sont ainsi de dimension 3 puisque les dérivées première, seconde, et troisième des axes de rotation sont nulles. Ce sont des parallélépipèdes dont la longueur des côtés correspond aux limites cinématiques des 3 axes de translation. Les polytopes dans l'espace des tâches sont également de dimension 3 et se réduisent à un parallélépipède pouvant changer d'orientation et de position en fonction de la position articulaire \mathbf{q} de la matrice jacobienne. De plus, en usinage 5 axes positionné, les dérivées première et seconde de la matrice jacobienne sont nulles. En effet, chacune des coordonnées des axes \mathbf{X}_p , \mathbf{Y}_p et \mathbf{Z}_p dépend des axes de rotation. Ainsi, ces termes deviennent nuls en les dérivant puisque les dérivées des axes de rotation sont nulles. Les modèles cinématiques du premier (Equation 2.4), du deuxième (Equation 2.29) et du troisième ordre (Equation 2.30) se réduisent ainsi à l'Equation 3.4 dans le cas de l'usinage 5 axes positionné.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \\ \dddot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \dddot{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (3.4)$$

Les polytopes d'accélération et de jerk ne sont donc pas décalés. Le polytope est centré sur l'origine de l'espace correspondant. L'évaluation des différentes composantes dans une direction \mathbf{d} s'effectue à partir de l'origine (0,0,0) pour chaque niveau cinématique (Figure 3.6).

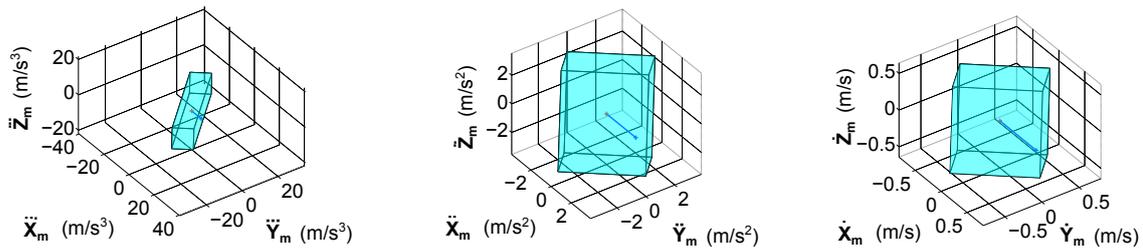


Figure 3.6 – Principe d'évaluation des composantes de jerk, d'accélération et de vitesse dans l'espace des tâches en usinage 5 axes positionné

La partie suivante donne la direction dans laquelle il est intéressant d'évaluer ces composantes dans le but d'augmenter la vitesse relative outil/pièce et ainsi de réduire le temps d'usinage ou d'avoir une vitesse d'avance constante plus élevée.

2.2 Evaluation des capacités cinématiques dans la direction tangentielle

A partir des polytopes de vitesse, d'accélération et de jerk présentés dans le chapitre 2, l'objectif est de déterminer l'orientation de l'outil qui permet de minimiser le temps d'usinage tout en respectant les contraintes cinématiques de la machine. Pour une même distance parcourue, plus la vitesse relative outil/pièce réelle \dot{s} est élevée, plus le temps d'usinage est faible (Equation 3.5).

$$t_{usinage} = \int_0^L \frac{1}{\dot{s}} \cdot ds \quad (3.5)$$

Réduire le temps d'usinage passe par l'augmentation de la cinématique du mouvement relatif outil/pièce, c'est-à-dire par l'augmentation de la norme de la vitesse, de l'accélération et du jerk dans l'espace des tâches (Equation 3.6).

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\dot{\mathbf{X}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \dot{X}_i^2} \\ \|\ddot{\mathbf{X}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \ddot{X}_i^2} \\ \|\dddot{\mathbf{X}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \dddot{X}_i^2} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

L'intérêt du polytope dans l'espace des tâches est de pouvoir évaluer directement ces valeurs en fonction de la direction locale de la trajectoire. La vitesse se décompose en fonction de la direction d'avance (vecteur unitaire \mathbf{f}), et de la vitesse tangentielle (\dot{s}). L'accélération et le jerk dans l'espace des tâches se décomposent en fonction de la direction d'avance \mathbf{f} , et de la dérivée première et seconde de \mathbf{f} par-rapport à l'abscisse curviligne s . L'Equation 3.7 donne cette décomposition pour les trois niveaux cinématiques.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}} = \dot{s} \cdot \mathbf{f} \\ \ddot{\mathbf{X}} = \ddot{s} \cdot \mathbf{f} + \dot{s}^2 \cdot \frac{d\mathbf{f}}{ds} \\ \dddot{\mathbf{X}} = \ddot{s} \cdot \mathbf{f} + 3\dot{s} \cdot \dot{s} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{ds} + \dot{s}^3 \cdot \frac{d^2\mathbf{f}}{ds^2} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

où la direction d'avance et ses dérivées sont fonction de la géométrie de la trajectoire (Equation 3.8).

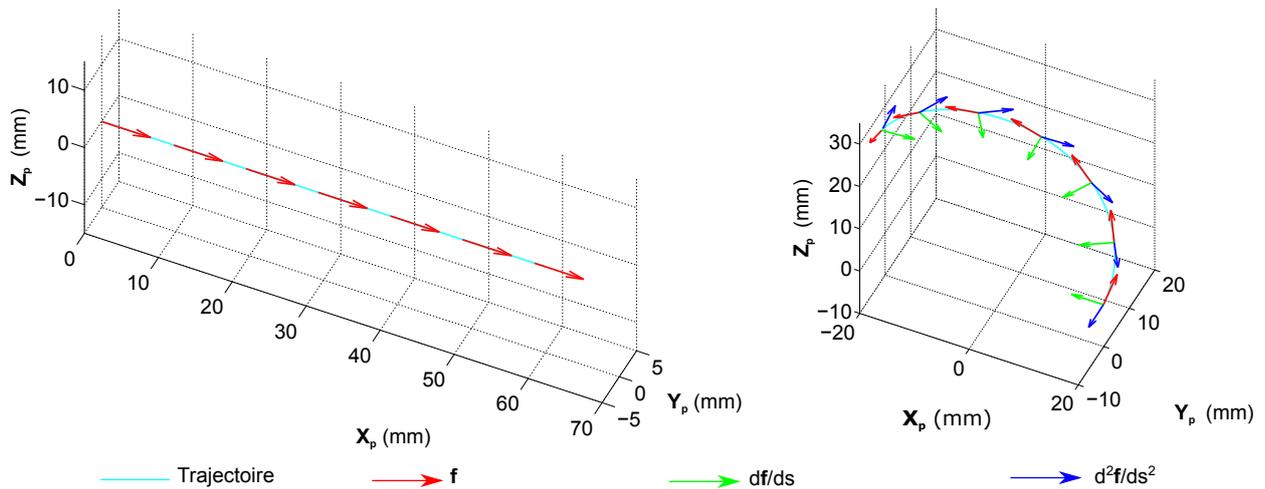
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{f}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2} \\ \frac{d^2\mathbf{f}}{ds^2} = \frac{d^3\mathbf{X}}{ds^3} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

La Figure 3.7 illustre l'évolution des directions du vecteur d'avance \mathbf{f} et de ses dérivées pour deux géométries de trajectoire.

Géométriquement, la direction d'avance et ses dérivées caractérisent la trajectoire :

- \mathbf{f} est le vecteur tangent à la trajectoire.
- $\frac{d\mathbf{f}}{ds}$ caractérise la courbure de la trajectoire. Il est orthogonal au vecteur tangent.
- $\frac{d^2\mathbf{f}}{ds^2}$ caractérise la torsion de la trajectoire.

Lorsque la trajectoire est une droite, le vecteur tangent est constant le long de l'abscisse curviligne s . Ses dérivées par-rapport à l'abscisse curviligne sont donc nulles (Figure 3.7 à gauche). En revanche, lorsque la trajectoire est plus complexe, les termes $\frac{d\mathbf{f}}{ds}$ et $\frac{d^2\mathbf{f}}{ds^2}$ ne sont plus nuls (Figure 3.7 à droite). Le vecteur courbure caractérise la façon dont la trajectoire s'éloigne localement d'une


 Figure 3.7 – Évolution de \mathbf{f} et de ses dérivées en fonction de la trajectoire

droite tangente au trajet. La torsion mesure la manière dont la courbe se tord pour sortir du plan osculateur formé par les vecteurs \mathbf{f} et $\frac{d\mathbf{f}}{ds}$.

En se plaçant dans un cadre où les surfaces à usiner sont « tendues », il est possible de négliger les termes associés aux dérivées de \mathbf{f} devant les termes associés à la direction d'avance \mathbf{f} . Ainsi, les Equations 3.7 se simplifient pour donner les Equations 3.9. En se plaçant dans un cas où les trajectoires sont très complexes (fortes variations de courbure), l'amplitude des variations de directions de \mathbf{f} ne permettent pas d'en extraire une direction prépondérante.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \dot{s} \cdot \mathbf{f} \\ \ddot{\mathbf{X}} = \ddot{s} \cdot \mathbf{f} \\ \dddot{\mathbf{X}} = \dddot{s} \cdot \mathbf{f} \end{cases} \quad (3.9)$$

De plus, en faisant l'hypothèse que les capacités cinématiques tangentielles résultent des capacités des axes de la machine, alors ces valeurs tangentielles peuvent prendre toutes les valeurs correspondant aux enveloppes des polytopes de jerk, d'accélération et de vitesse. Pour que l'hypothèse soit valide, il faut s'assurer que les paramètres tangentiels définis dans la commande numérique soient supérieurs aux valeurs maximales tangentielles définies par les maximums des capacités des axes de la machine. Géométriquement les valeurs tangentielles admissibles définies dans la commande numérique peuvent se représenter par des boules dont les rayons sont égaux aux valeurs tangentielles des différents niveaux cinématiques (Figure 3.8). Les capacités des paramètres axiaux et tangentiels de la machine sont modélisées par l'intersection du polytope et de la boule pour chaque niveau cinématique. Dans le cas où les valeurs tangentielles de la commande numérique sont supérieures aux valeurs définies par chacun des axes alors il s'agit directement des polytopes.

La partie 3 présente ainsi la méthode de résolution pour trouver l'orientation de l'outil qui permet de maximiser le jerk dans la direction tangentielle lorsque la trajectoire est une droite. La

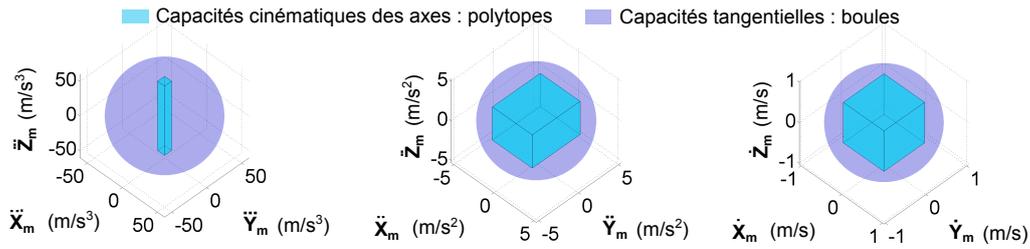


Figure 3.8 – Modélisation des capacités cinématiques tangentielles définies dans la commande numérique par une boule

partie 4 propose une adaptation de la méthode lors de l'usinage d'une trajectoire « tendue ».

3 Choix de l'orientation de l'outil dans le cas de l'usinage de droites

3.1 Principe de la méthode proposée

La valeur maximale du jerk tangential est donnée par la distance maximale entre l'origine du polytope dans l'espace des tâches et sa surface. Étant donné que le polytope est convexe, le jerk maximum est atteint sur un de ses sommets. Ce sommet correspond à l'un des sommets du polytope articulaire. Ainsi, à partir du modèle cinématique du troisième ordre de l'Equation 3.4, le problème posé revient à résoudre le système défini par l'Equation 3.10.

$$\ddot{s} \cdot \mathbf{f} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.10)$$

avec :

- \mathbf{f} : le vecteur tangent à la trajectoire et unitaire.
- $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$: la matrice jacobienne de la structure poly-articulée.
- $\ddot{\mathbf{q}}$: les vecteurs définissant les sommets du polytope de jerk.

Nous avons vu dans la partie 2.2.3 du chapitre 2 que le polytope ne se déforme pas entre l'espace articulaire et l'espace des tâches en usinage 5 axes positionné. En termes de norme, cela se traduit par l'Equation 3.11, qui se simplifie pour donner l'Equation 3.12 puisque les normes du vecteur \mathbf{f} et de la matrice $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$ valent 1 dans le cas de l'usinage 5 axes positionné sur des structures sérielles. Ainsi, la valeur du jerk tangential est directement égale à la norme des vecteurs définissant les sommets du polytope en jerk (Equation 3.12).

$$\ddot{s} \cdot \|\mathbf{f}\| = \|\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\| \cdot \|\ddot{\mathbf{q}}\| \quad (3.11)$$

$$\ddot{s} = \|\ddot{\mathbf{q}}\| \quad (3.12)$$

Pour la Mikron UCP710, le système à résoudre est donné par l'Equation 3.13.

$$\begin{cases} \ddot{s}.f_x = \cos(C).\ddot{q}_x - \cos(A).\sin(C).\ddot{q}_y + \sin(A).\sin(C).\ddot{q}_z \\ \ddot{s}.f_y = \sin(C).\ddot{q}_x + \cos(A).\cos(C).\ddot{q}_y - \sin(A).\cos(C).\ddot{q}_z \\ \ddot{s}.f_z = \sin(A).\ddot{q}_y + \cos(A).\ddot{q}_z \end{cases} \quad (3.13)$$

La troisième équation de ce système ne dépend que de A , il est ainsi possible de déterminer sa valeur et d'en déduire ensuite celle de C avec les deux premières équations du système de l'Equation 3.13. Concrètement, la résolution se fait en utilisant les équations données en Annexe E.

En conclusion, les orientations qui maximisent localement le jerk tangentiel le long de la trajectoire se déterminent de manière explicite. Le polytope dans l'espace articulaire a 8 sommets en usinage 5 axes positionné, il y a donc 8 solutions (A,C) en chaque point de la trajectoire. Il y a ainsi 8 couples solutions d'orientation qui permettent d'orienter le polytope vers l'un des sommets en chaque point de la trajectoire. La Figure 3.9 montre un exemple des 8 solutions obtenues pour une direction imposée $\mathbf{f}=(-1 \ 0 \ 0)^T$ avec un polytope de jerk cubique.

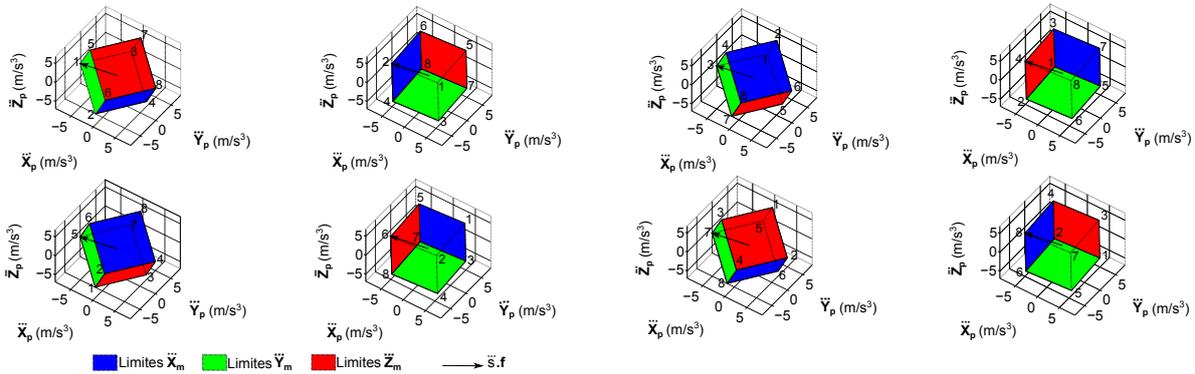


Figure 3.9 – Exemple des 8 solutions obtenues correspondant aux 8 sommets du polytope

Les capacités en jerk suivant les axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m , et \mathbf{Z}_m sont les mêmes dans l'exemple choisi, les solutions obtenues sont donc symétriques. Le choix de la solution retenue est déterminé par les courses de la machine, la non collision, l'accessibilité et de bonnes conditions de coupe.

Afin d'appliquer la méthode proposée sur une pièce test avec des droites de différentes orientations, la surface test choisie est une surface réglée dont la direction des règles évolue. Cette surface a également la particularité d'avoir de la torsion le long de chaque règle, c'est-à-dire une variation de la normale \mathbf{n} . La méthode est appliquée sur le niveau cinématique de jerk mais également sur celui d'accélération et de vitesse afin de vérifier expérimentalement que le niveau cinématique de jerk est bien celui à privilégier pour choisir l'orientation.

3.2 Application à l'usinage des règles d'un parabolöide hyperbolique

3.2.1 Pièce test : parabolöide hyperbolique

La surface de guidage choisie pour le point piloté de l'outil est un parabolöide hyperbolique dont les règles sont à 45° par-rapport aux axes \mathbf{X}_p et \mathbf{Y}_p (Figure 3.10). Il s'agit d'un carreau de Bézier $\mathbf{C}(u,v)$, défini par les Equations 3.14 et 3.15. Les points caractéristiques sont donnés en Equation 3.16.

$$\mathbf{C}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{im}(u) \cdot B_{jn}(v) \cdot S_{ij} \quad (3.14)$$

avec

$$B_{im}(u) = \frac{m!}{i!(m-i)!} \cdot u^i \cdot (1-u)^{m-i} \quad (3.15)$$

et

$$\begin{aligned} S_{00} &= \begin{pmatrix} -50 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} & S_{01} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 10 \end{pmatrix} & S_{02} &= \begin{pmatrix} 50 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} \\ S_{10} &= \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} & S_{11} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & S_{12} &= \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \\ S_{20} &= \begin{pmatrix} -50 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} & S_{21} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} & S_{22} &= \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ainsi, la surface choisie permet un usinage en 5 axes positionné le long de chaque règle. Le mode de balayage utilisé est un mode par plans parallèles selon les règles du parabolöide. Pour chaque passe, c'est-à-dire chaque règle, la trajectoire du point piloté se réduit à un segment linéaire et l'orientation de l'outil est fixe. En revanche, d'une passe à l'autre, l'orientation de l'outil peut évoluer. L'outil est un outil hémisphérique : le choix de son orientation est ainsi libre dans la limite des bonnes conditions de coupe.

3.2.2 Orientation outil/pièce solution pour chaque niveau cinématique

La trajectoire à usiner pour chaque règle du parabolöide est une droite. En ce sens, les termes $\frac{d\mathbf{f}}{ds}$ et $\frac{d^2\mathbf{f}}{ds^2}$ sont nuls le long de la trajectoire (Figure 3.7). L'objectif est donc de trouver l'orientation qui maximise la vitesse, l'accélération et le jerk dans la direction tangentielle \mathbf{f} .

En appliquant la méthode proposée, pour chaque polytope de vitesse, d'accélération et de jerk, il est possible de déterminer la position des axes de rotation qui permet de maximiser la composante tangentielle à chaque passe. Pour chaque règle du parabolöide hyperbolique, la direction d'avance est imposée. Sa direction est donnée par le vecteur unitaire $\mathbf{f}_{\text{impose}}$ de l'Equation 3.17. La Figure

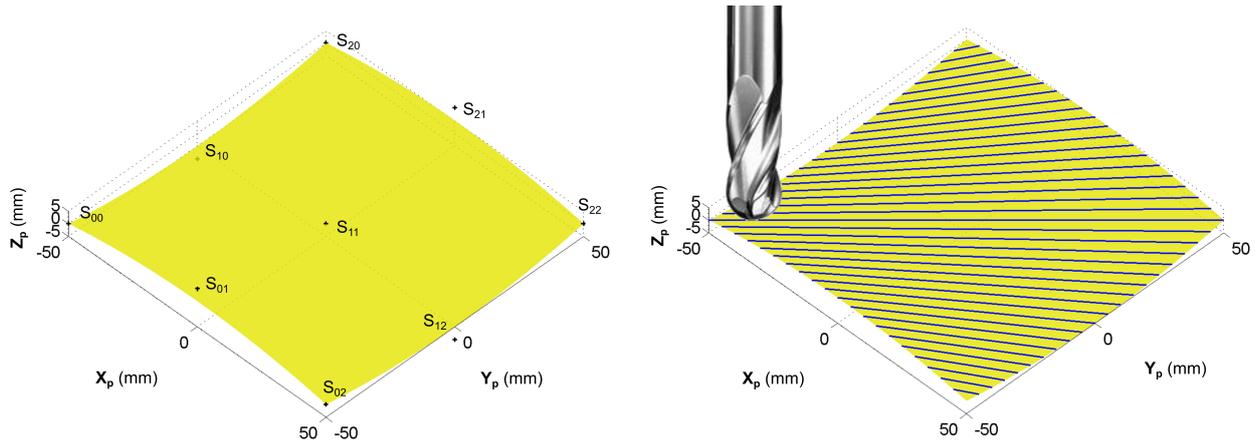


Figure 3.10 – Pièce test : parabolöide hyperbolique

3.10 montre que la stratégie d'usinage est une stratégie par plans parallèles selon les règles du parabolöide. Toutes les règles sont orientées à 45°, ce qui impose $f_x = \frac{1}{\|\mathbf{f}\|}$ et $f_y = \frac{-1}{\|\mathbf{f}\|}$.

$$\mathbf{f}_{\text{impose}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + f_z^2}} \\ -1 \\ \frac{f_z}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + f_z^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + f_z^2}} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Il faut donc orienter le polytope de l'espace des tâches pour toucher l'un des sommets en connaissant la direction imposée $\mathbf{f}_{\text{impose}}$. Pour les deux centres d'usinage, la Figure 3.11 donne l'orientation solution associée à la passe centrale du parabolöide (la plus grande) pour les différents niveaux cinématiques. Les orientations solutions sont résumées dans le Tableau 3.3.

	Polytope de jerk	Polytope d'accélération	Polytope de vitesse
Mikron UCP710	A84 C141	A35 C101	A45 C170
Huron KX8-five	A51 C152	A45 C170	A45 C170

Tableau 3.3 – Orientations permettant d'orienter chaque polytope dans la direction $\mathbf{f}_{\text{impose}}$ de la plus grande règle

Dans ce cas particulier, $f_z = 0$. Les valeurs des orientations solutions sont différentes pour chacun des centres d'usinage, mais permettent à chaque fois d'orienter les polytopes pour que la direction imposée $\mathbf{f}_{\text{impose}}$ intersecte un des sommets du polytope.

Au-delà de la simulation sur les deux centres d'usinage avec une architecture sérielle, le comportement a été validé expérimentalement sur le centre Mikron UCP710 du LURPA. L'objectif de ces essais est de retrouver le comportement attendu par la simulation du modèle proposé.

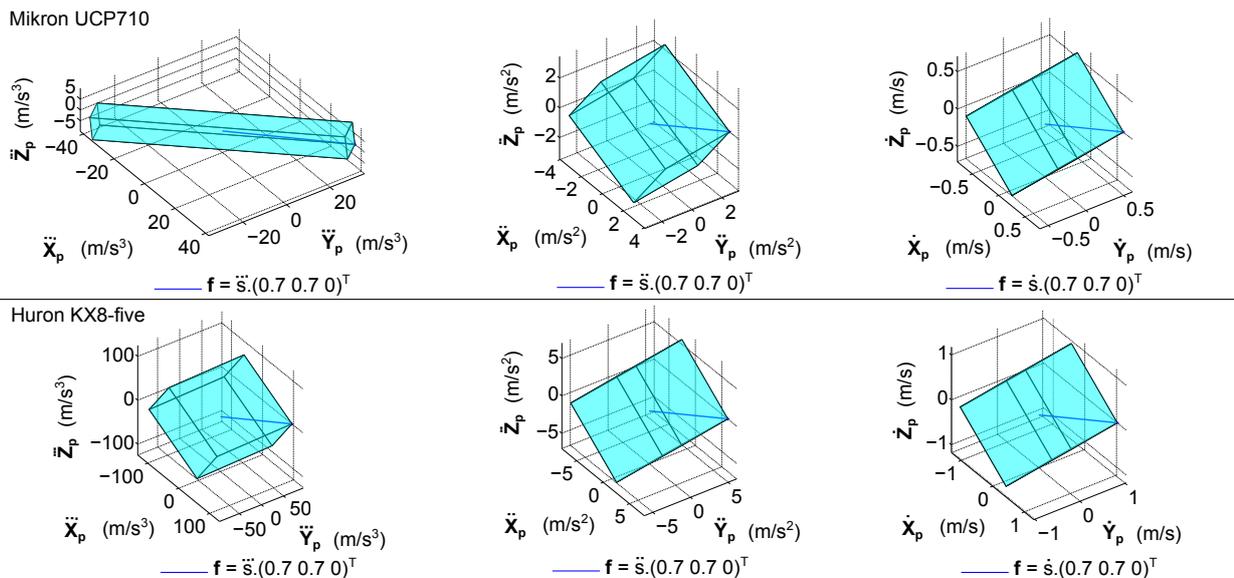


Figure 3.11 – Polytopes de l'espace des tâches maximisant la vitesse, l'accélération ou le jerk dans la direction imposée f_{impose} de la plus grande règle

3.2.3 Mise en œuvre expérimentale

La trajectoire programmée pour chaque passe est constituée du premier point et du dernier point de la règle. Une interpolation linéaire en mode G1 est réalisée entre les deux points. Lors de l'exécution de la trajectoire, les valeurs des vitesses des axes sont relevées pour les différentes orientations A et C obtenues précédemment. La Figure 3.12 montre la vitesse relative outil/pièce reconstruite à partir des vitesses articulaires mesurées le long de la passe centrale du paraboloïde pour les différentes orientations solutions.

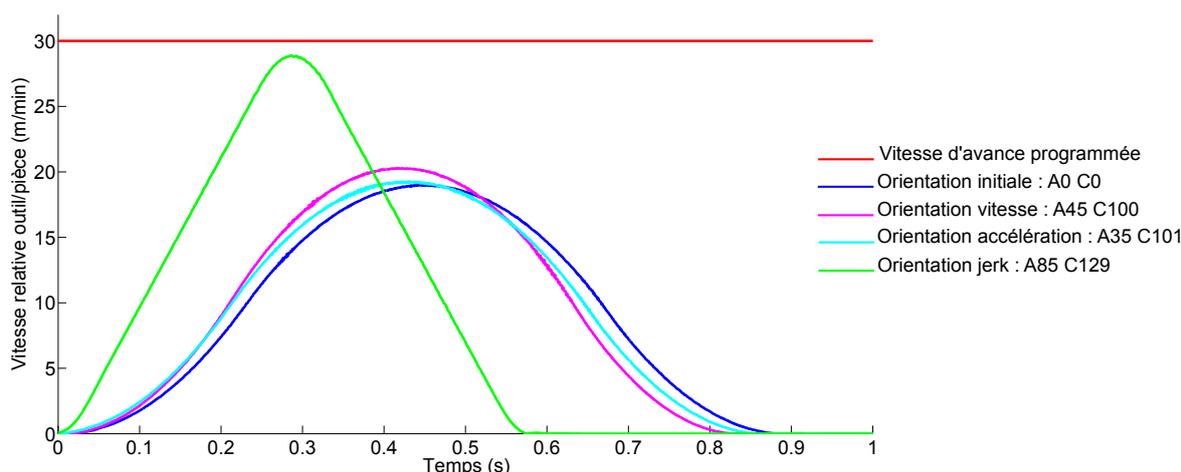


Figure 3.12 – Vitesse relative outil/pièce mesurée pour les différentes orientations solutions

La Figure 3.12 montre que la vitesse relative outil/pièce atteinte est la plus élevée quand le trajet s'effectue dans l'orientation solution associée au paramètre de jerk. Les orientations obtenues par

les polytopes de vitesse et d'accélération ne permettent quasiment pas d'augmenter la vitesse relative outil/pièce. En effet, lorsque l'orientation est optimisée pour le polytope d'accélération, le jerk tangentiel disponible est réduit (environ 7.4 m/s^3). Il en est de même pour les polytopes associés aux orientations initiale et en vitesse. Ces résultats confirment ainsi l'analyse théorique réalisée. Sur un trajet de courte distance, la vitesse et l'accélération n'ont pas le temps d'atteindre la valeur maximale disponible : c'est le jerk qui est le paramètre limitant tout au long du trajet lorsque sa valeur tangentielle est plus faible. Ainsi, dans la suite de ce chapitre, nous avons choisi de nous focaliser sur le paramètre de jerk puisqu'il est le paramètre limitant la vitesse relative outil/pièce.

La Figure 3.13 donne les orientations solutions A et C obtenues pour maximiser le jerk tangentiel le long de chaque passe. La règle 1 est celle se trouvant avec une valeur de $X_p = -50$.

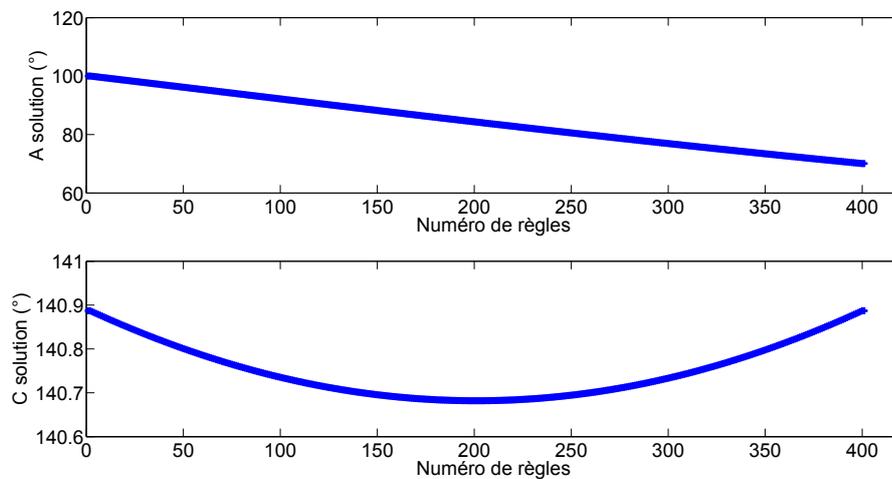


Figure 3.13 – Evolution des solutions A et C en fonction de la règle pour le centre d'usinage Mikron UCP710

Le Tableau 3.4 donne les temps d'usinage relevés pour l'usinage du paraboloïde hyperbolique complet dans la configuration initiale ($A = 0, C = 0$) et en utilisant l'orientation solution du polytope de jerk pour chaque passe (usinage 5 axes positionné).

	Orientation initiale	5 axes positionné par passe
Temps	4 min 45 s	3 min 53 s

Tableau 3.4 – Temps d'usinage du paraboloïde hyperbolique

Les temps d'usinage relevés confirment qu'il est possible de gagner du temps. Cependant, la comparaison est ici effectuée entre de l'usinage 3 axes et de l'usinage 5 axes positionné. Dans le cas de l'usinage 5 axes positionné, le temps mis pour changer d'orientation entre chaque passe peut augmenter le temps total d'usinage. Le gain de temps obtenu sur chaque passe permet de compenser la perte de temps causée par le changement d'orientation entre chaque passe. Sur des passes plus longues, le gain de temps par passe pourrait être encore plus important, ce qui accentuerait encore davantage le gain de temps sur la pièce complète.

Les vitesses atteintes avec l'orientation en jerk sont plus importantes mais elles permettent surtout

d'atteindre plus rapidement la vitesse programmée que l'on souhaite. Par exemple, sur la Figure 3.12, si l'on souhaite avoir une vitesse d'avance programmée de 10 m/min pour être dans les conditions de coupe souhaitées alors l'orientation en jerk montre que l'on atteint plus rapidement cette valeur.

Ces relevés de temps ont été effectués à vide, c'est-à-dire sans usiner, mais il est nécessaire de vérifier que les orientations relatives entre l'outil et la pièce permettent d'usiner sans collision et avec de bonnes conditions de coupe.

3.3 Collisions potentielles associées à l'orientation optimale

Dans le cas du centre d'usinage Mikron UCP710, les valeurs obtenues de l'axe **A** pour une orientation associée au polytope de jerk sont très élevées de part la répartition des limites cinématiques (facteur 10 entre les caractéristiques de l'axe **Z_m** et celles des axes **X_m** et **Y_m**). La Figure 3.14 montre la position du berceau et du plateau pour la première passe du parabolôïde hyperbolique.

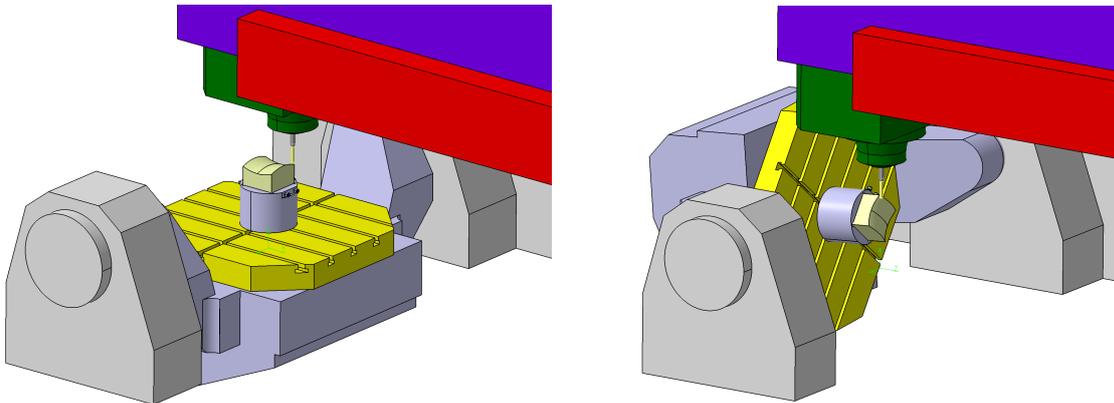


Figure 3.14 – Mikron UCP710 : Orientation initiale (A0, C0) et solution pour le polytope de jerk (A85, C140)

Avec cette orientation, il n'est pas possible d'usiner dans des conditions de coupe recommandées par les fabricants d'outils. Dans ce cas, il est ainsi nécessaire de relimiter le domaine d'orientation admissible de l'outil par rapport à la pièce. Il est possible de contraindre les angles d'inclinaison et de pivotement autour de la normale à la surface.

La Figure 3.15 montre un exemple de variation possible sur les angles θ_t (rotation autour de l'axe **t**) et θ_f (rotation autour de l'axe **f**). Cette discrétisation forme une pyramide à base rectangulaire centrée sur le vecteur normal **n**. En considérant que le vecteur normal correspond initialement à l'axe de l'outil alors les possibilités d'orientation de l'axe de l'outil se limitent à l'intérieur de cette pyramide.

Contraindre ces valeurs va limiter les valeurs potentiellement prises par les axes de rotation et ainsi permettre d'usiner des pièces dans de bonnes conditions de coupe. Dans le but de réaliser de l'usinage 5 axes positionné, c'est-à-dire avec des valeurs constantes en orientation, il est nécessaire de trouver cette orientation pour qu'elle soit à l'intérieur de la pyramide sur tous les points de la

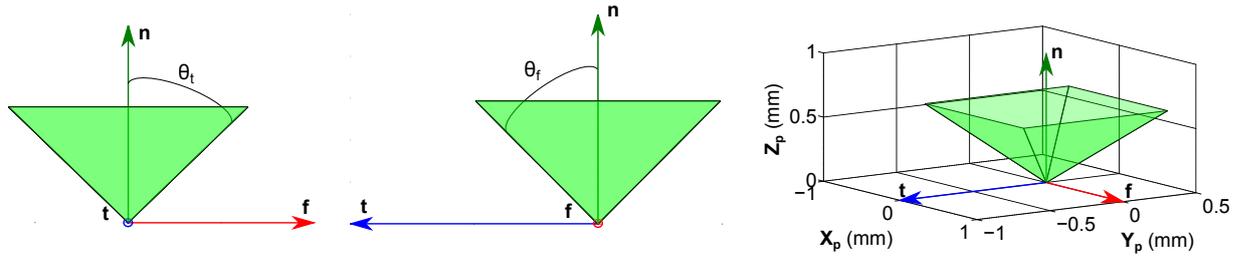


Figure 3.15 – Variation possible sur les angles θ_t et θ_f

trajectoire. En effet, si on prend l'exemple de la passe centrale du paraboloïde hyperbolique, la normale \mathbf{n} varie le long de la passe (Figure 3.16 à gauche). La variation se produit à l'intérieur d'un arc de cercle formé par les deux vecteurs extrémités \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 .

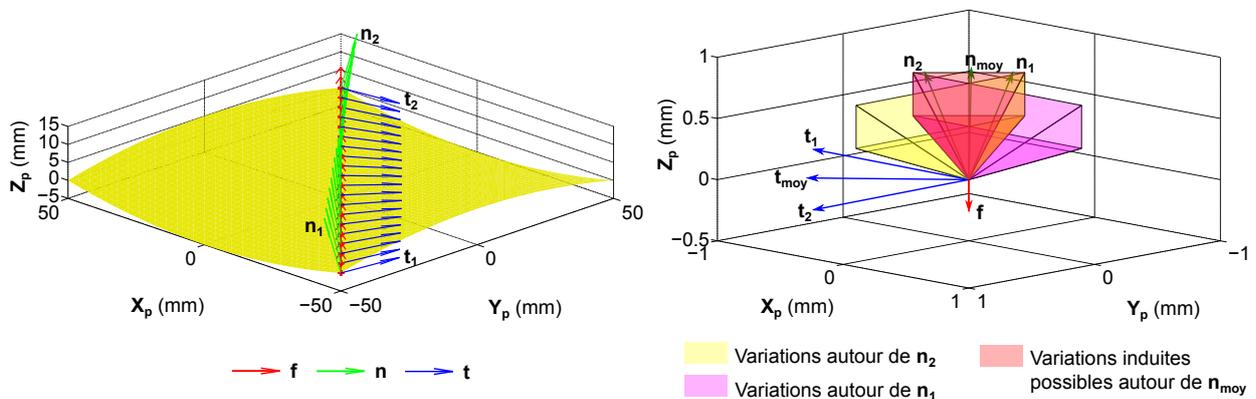


Figure 3.16 – Variation de la normale \mathbf{n} le long de la passe centrale (à gauche) et intersection des variations possibles de θ_f et θ_t (à droite)

Trouver l'unique orientation sur la passe revient à trouver l'orientation (A,C) sur toute la passe qui permette de rester à l'intérieur de la pyramide formée par les variations de θ_f et θ_t . La Figure 3.16 montre les pyramides pour les deux variations extrêmes (\mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2). L'intersection de ces deux pyramides donne la variation (θ_f, θ_t) autorisée pour choisir les valeurs de A et C pour le \mathbf{n}_{moyen} (Figure 3.16 à droite). Ces variations induites sont possibles si il existe une intersection entre la pyramide associé à \mathbf{n}_1 et celle associée à \mathbf{n}_2 . Les variations de la normale le long de la trajectoire ne doivent pas être supérieures aux variations autorisées d'inclinaison et de pivotement. La Figure 3.17 donne une représentation du domaine d'orientation autorisé pour des valeurs de θ_f de θ_t de $\pm 40^\circ$.

Une fois l'intersection obtenue, le modèle géométrique inverse permet de déterminer l'orientation de l'outil à l'intérieur de la pyramide rouge. La solution choisie est celle qui donne le jerk maximal dans la direction \mathbf{f} . Une comparaison entre l'orientation du polytope sans contrainte sur θ_f et θ_t et l'orientation relimitée à une variation de $\theta_f = \pm 40^\circ$ et $\theta_t = \pm 40^\circ$ est donnée sur la Figure 3.18. Avec cette relimitation, les capacités accessibles en jerk sont beaucoup plus faibles. Ce résultat

est causé par le déséquilibre très important des axes en jerk sur cette structure. Ce déséquilibre n'est pas nécessaire, à première vue, car il n'y a de justifications technologiques, dynamiques pouvant l'expliquer. Nous avons choisi de remettre en cause ce réglage pour être plus proche des caractéristiques que l'on peut trouver sur d'autres centres d'usinage. Nous avons donc décidé de réduire ce paramètre de jerk suivant l'axe Z_m à 5 m/s^3 . Ce choix permet d'homogénéiser les capacités cinématiques en jerk du centre Mikron UCP710 et de trouver des orientations permettant d'avoir des conditions de coupe acceptables. Dans la suite de ce manuscrit, l'ensemble des résultats sera donc présenté pour cette nouvelle limite en jerk.

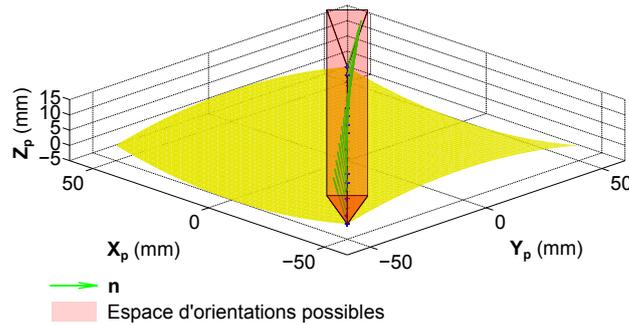


Figure 3.17 – Orientations possibles le long de la passe centrale pour $\theta_f = \pm 40^\circ$ et $\theta_t = \pm 40^\circ$

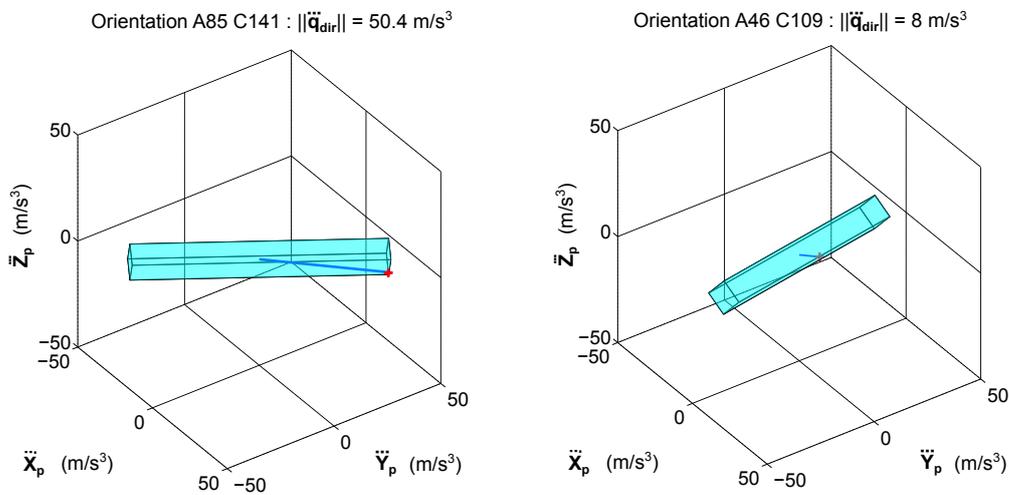


Figure 3.18 – Comparaison de l'orientation du polytope de jerk sans ou avec relimitation par les angles θ_f et θ_t

Cette partie a présenté une méthode pour choisir l'orientation de l'outil dans le cas de l'usinage de segments de droites. La partie suivante propose une adaptation de cette méthode dans le cas de l'usinage de surfaces « tendues », c'est-à-dire à faibles courbures.

4 Choix de l'orientation de l'outil pour des surfaces « tendues »

La partie précédente a montré qu'il était possible de déterminer le paramètre limitant la vitesse relative outil/pièce en fonction de la longueur du trajet. La plupart du temps, elle est limitée par les caractéristiques cinématiques en jerk de chacun des axes de la machine. Ainsi, la norme du jerk permet de caractériser les déplacements du point piloté de l'outil dans l'espace des tâches. L'objectif est de trouver l'orientation qui maximise le jerk tangentiel dans la direction imposée par la trajectoire \mathbf{f} . Cette partie propose d'adapter la méthode dans le cas où la direction imposée \mathbf{f} n'est pas constante le long de la passe. Afin de transposer la méthode, les modifications sont données avec l'exemple d'une pièce test.

4.1 Pièce test : surface Manta

La pièce test choisie est extraite d'une précédente étude réalisée par [Pessoles et al. \(2013\)](#). Les coordonnées des points de contrôle de la surface baptisée Manta sont données dans l'Equation 3.18.

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & P_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} & P_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} & P_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} \\
 P_5 &= \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & P_6 &= \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} & P_7 &= \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} & P_8 &= \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} \\
 P_9 &= \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} & P_{10} &= \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} & P_{11} &= \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} & P_{12} &= \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 P_{13} &= \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} & P_{14} &= \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} & P_{15} &= \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} & P_{16} &= \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

L'usinage est réalisé avec une fraise hémisphérique de diamètre 16 mm et la stratégie initialement retenue est un usinage par plans parallèles au plan $(\mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p)$. Le choix de l'orientation de l'outil est ainsi libre dans la limite de conditions de coupe acceptables et de non collision. La Figure 3.19 donne une représentation de la surface.

4.2 Adaptation de la méthode proposée

La direction d'avance \mathbf{f} évolue le long de chaque passe dans les plans $(\mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p)$. Les valeurs solutions de l'orientation relative entre l'outil et la pièce vont donc évoluer le long de la passe. Or, l'objectif est de réaliser de l'usinage 5 axes positionné par passe, les orientations solutions

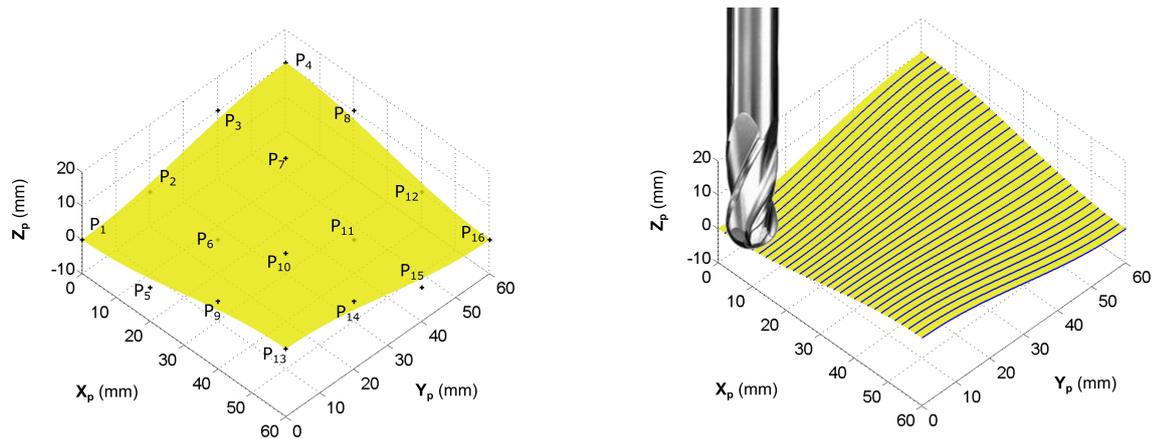


Figure 3.19 – Pièce test : surface Manta

doivent ainsi être déterminées pour une unique valeur de \mathbf{f} . En ce sens, nous avons choisi de trouver l'orientation correspondant à $\mathbf{f}_{\text{moyen}}$ le long de la passe. Choisir une orientation autre que $\mathbf{f}_{\text{moyen}}$ reviendrait à privilégier un endroit le long de la trajectoire.

En appliquant la méthode proposée dans la partie 3.1, il suffit de résoudre l'Equation 3.10 pour trouver les différentes solutions (multiples pour chaque passe) puis d'en choisir une compatible (collisions, coupe) qui permette d'orienter l'un des sommets du polytope dans la direction $\mathbf{f}_{\text{moyen}}$. La Figure 3.20 représente les orientations de l'outil pour 3 passes caractéristiques ($X_p = 0.5$ mm, $X_p = 15$ mm et $X_p = 30$ mm).

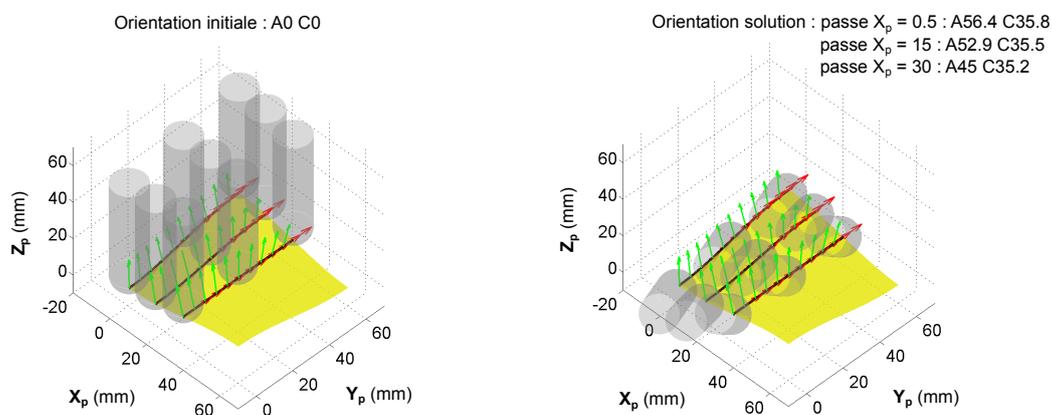


Figure 3.20 – Orientations initiale et solution pour 3 passes caractéristiques

4.3 Tests sur le centre d'usinage Mikron UCP710

Afin de ne pas être limité par la taille des segments pendant l'exécution de la trajectoire sur la machine, une interpolation polynomiale de degré 5 a été utilisée pour chaque passe. En effet, avec un format d'interpolation linéaire de type G1, la taille des segments engendrée par la discrétisation de la courbe « tendue » serait petite ce qui limiterait la vitesse d'avance à cause du temps de

cycle d'interpolation de la commande numérique. Les coordonnées du point piloté (X_p, Y_p, Z_p) sont décrites pour chaque passe via une fonction polynomiale de degré 5 et les coordonnées A et C sont constantes.

La Figure 3.21 montre les vitesses relatives outil/pièce relevées avec une orientation initiale ($A = 0, C = 0$) et avec l'orientation proposée par notre méthode pour les 3 passes caractéristiques ($X_p = 0.5, X_p = 15$ et $X_p = 30$).

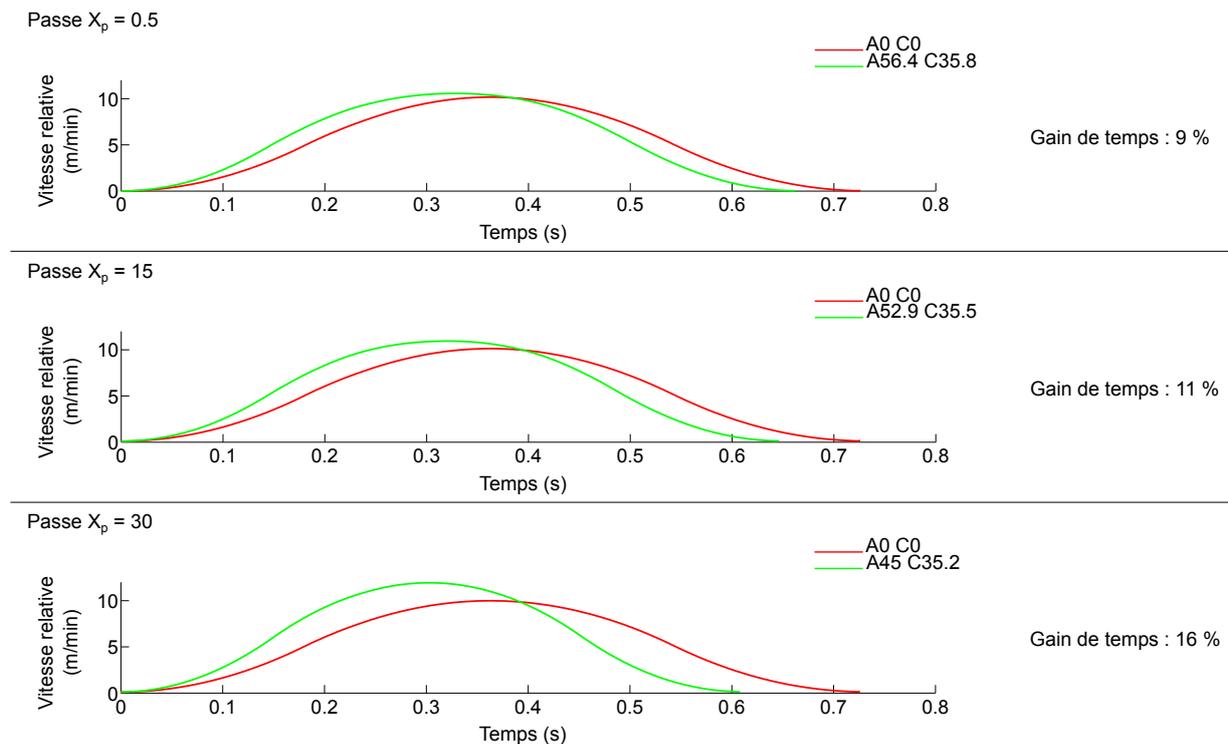


Figure 3.21 – Vitesses relatives outil/pièce mesurées sur 3 passes pour différentes orientations

La Figure 3.21 montre que le temps d'usinage sur chaque passe est plus faible avec les nouvelles orientations proposées. En revanche, le gain potentiel est différent en fonction de la passe observée.

4.4 Limites de la méthode proposée

4.4.1 Valeurs de f_{moyen}

Le choix de A et C est donné sur une passe pour avoir la direction moyenne (f_{moyen}) qui coïncide avec l'un des sommets du polytope. Cependant, f évolue le long de la passe, ce qui veut dire que localement la direction f ne va pas coïncider avec l'un des sommets du polytope (Figure 3.22 à gauche). La Figure 3.22 à droite donne l'évolution du jerk tangentiel le long des passes $X_p = 0.5$ et $X_p = 30$. La valeur du jerk tangentiel n'est donc pas maximale lorsqu'il y a une variation de f le long de la passe. Sur la passe $X_p = 0.5$, la variation de f est plus importante que sur la passe $X_p = 30$. Le gain de temps est donc plus important sur la passe $X_p = 30$. Cette méthode s'applique

donc particulièrement bien aux surfaces avec une faible variation de la direction d'avance, c'est-à-dire aux surfaces dites « tendues ».

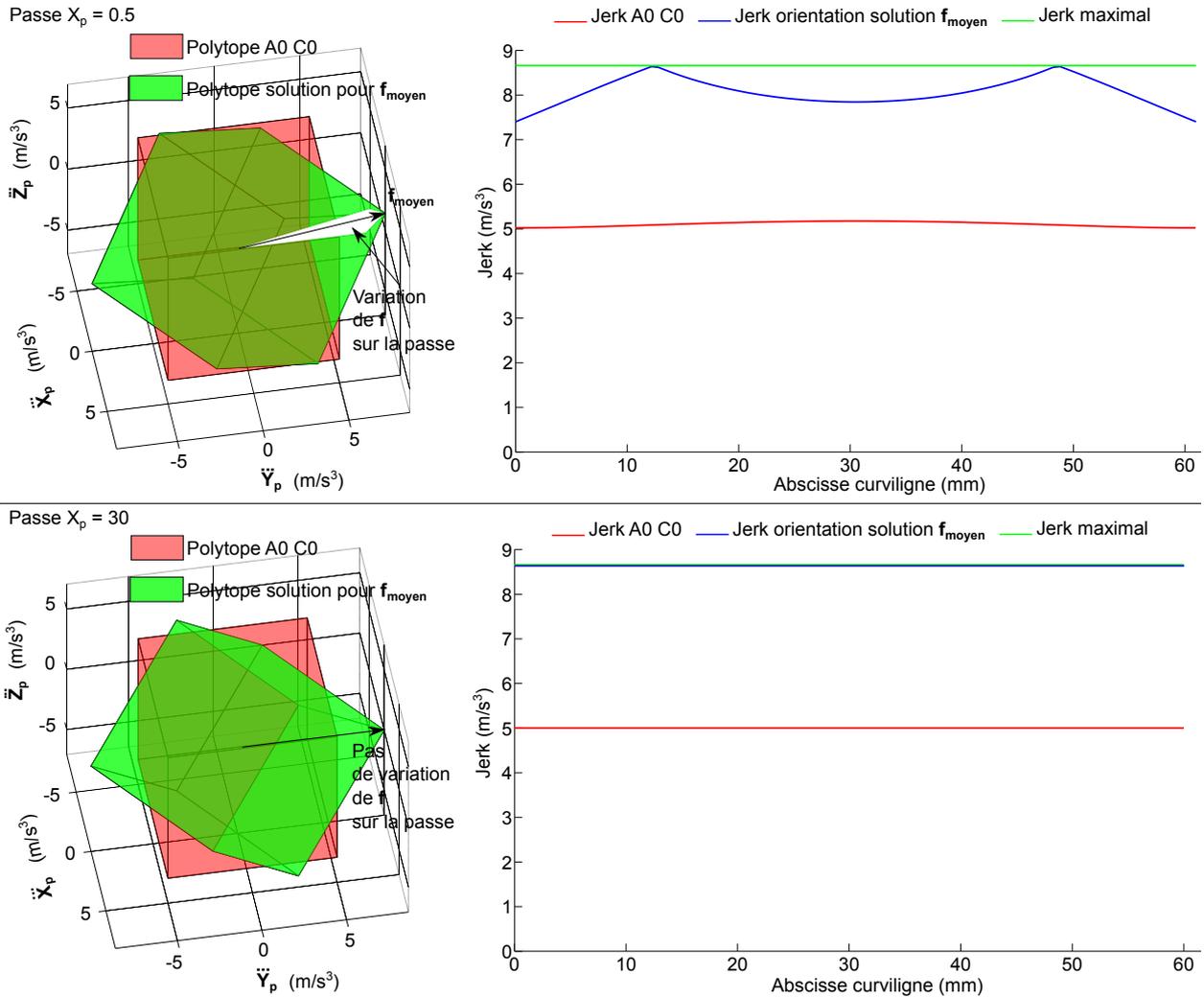


Figure 3.22 – Conséquences de la variation de f sur l'intersection de f et avec le polytope de jerk (à gauche) et sur le jerk tangentiel résultant (à droite)

4.4.2 Temps d'usinage sur la pièce complète

Les résultats précédents ont montré le gain potentiel en termes de temps d'usinage pour chaque passe. Le Tableau 3.5 résume les temps d'usinage obtenus pour la pièce complète avec l'orientation initiale (A0,C0), avec l'orientation solution obtenue pour chaque passe (5 axes positionné par passe), et en gardant l'orientation moyenne solution pour toute la pièce (5 axes positionné sur la pièce complète). L'orientation retenue pour toute la pièce correspond à la moyenne des orientations de chaque passe.

Le Tableau 3.5 montre qu'il n'y a pas de gain de temps sur la pièce complète lorsqu'on usine en 5 axes positionnés par passe. Ceci peut s'expliquer par le temps mis pour changer d'orientation entre chaque passe. Le gain obtenu le long de chaque passe ne permet pas de compenser la perte

	Orientation initiale	5 axes positionné par passe	5 axes positionné pièce complète
Temps	1 min 33 s	1 min 35 s	1 min 27 s

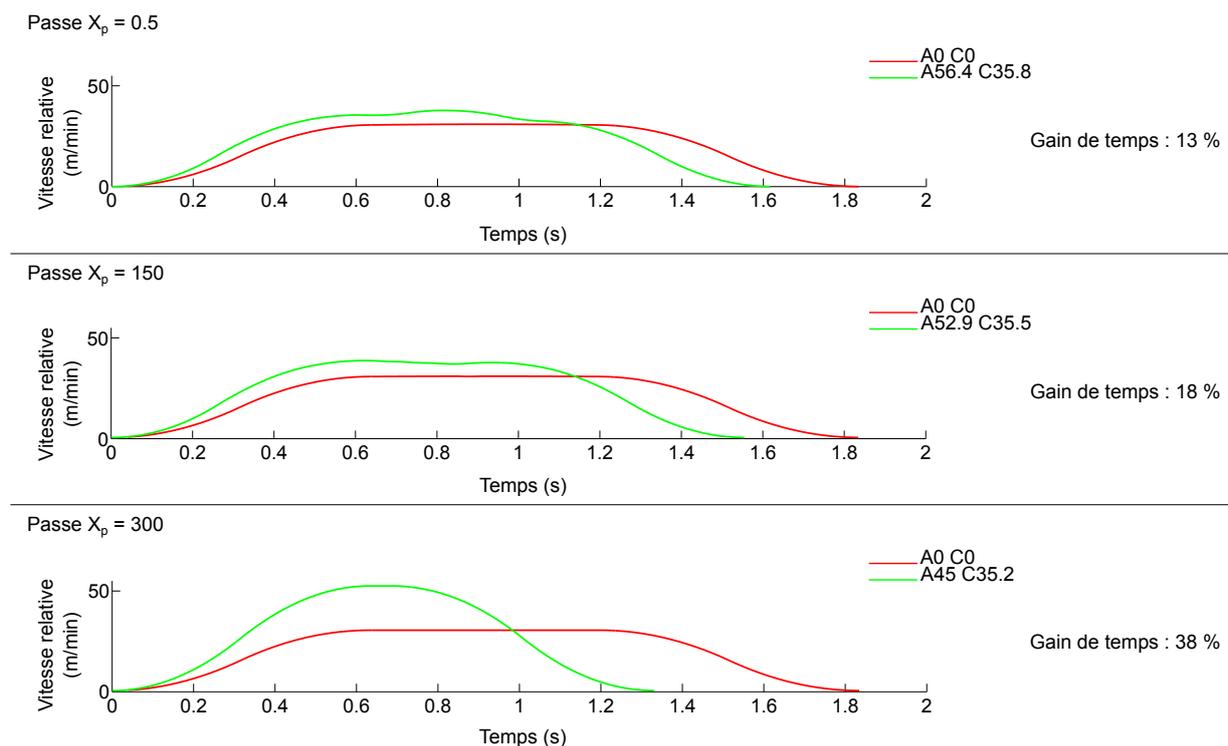
Tableau 3.5 – Temps d'usinage de la surface Manta

de temps causée par le changement d'orientation entre chaque passe. En réalisant de l'usinage 5 axes positionné sur la pièce complète, le gain de temps est d'environ 8%.

Dans le but de montrer qu'en augmentant le gain de temps par passe, il serait possible de gagner du temps, la méthode a été appliquée sur la même pièce test Manta mais avec un facteur d'échelle de 10. La Figure 3.23 montre un gain de temps plus important pour chaque passe et ainsi un gain de temps potentiel sur la pièce complète en usinage 5 axes positionné par passe et pour la pièce complète (Tableau 3.6).

	Orientation initiale	5 axes positionné par passe	5 axes positionné pièce complète
Temps	36 min 15	32 min 30 s	30 min 4 s

Tableau 3.6 – Temps d'usinage de la surface Manta avec un facteur d'échelle de 10

Figure 3.23 – Vitesses relatives outil/pièce mesurées sur 3 passes pour différentes orientations sur la Manta avec un facteur d'échelle $\times 10$

Les parties précédentes ont mis en avant une méthode afin de choisir l'orientation outil/pièce en usinage 5 axes positionné pour des structures poly-articulées avec une architecture sérielle. La partie suivante présente une méthode pour des architectures hybride ou parallèle.

5 Application à des architectures hybride ou parallèle

Dans le cas de structures poly-articulées hybride ou parallèle, réaliser un mouvement rectiligne dans l'espace des tâches nécessite le mouvement des axes de rotation sauf dans le cas de configurations particulières. Il est ainsi nécessaire de prendre en compte les caractéristiques cinématiques de ces axes de rotation pour définir l'orientation relative outil/pièce la plus adaptée. Cette partie décrit l'adaptation de la méthode proposée précédemment dans le cas de ce type d'architecture, en particulier sur le centre d'usinage Fatronik Verne présenté sur la Figure 1.4.

5.1 Combinaison des mouvements de translation et de rotation

La Figure 3.24 détaille l'architecture du centre d'usinage Fatronik Verne. Il est composé de 6 jambes de longueur fixe, disposées sous la forme de deux parallélogrammes et d'un trapèze. Chaque paire de jambe relie la plate-forme mobile à un chariot qui coulisse selon l'axe Z_m de la machine.

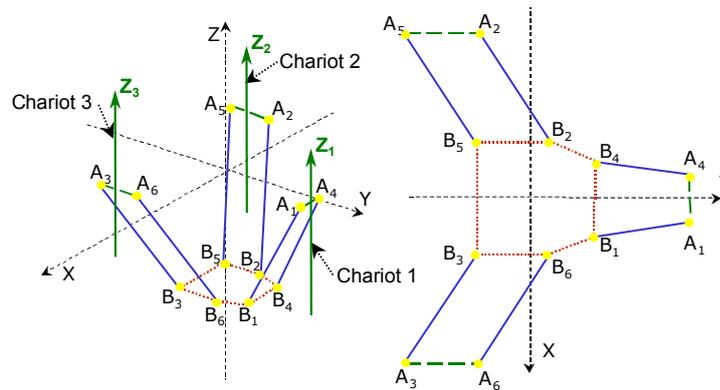


Figure 3.24 – Module parallèle du centre d'usinage Fatronik Verne

Lors des mouvements des axes de translation Z_1 , Z_2 et Z_3 , une rotation peut être induite autour de l'axe Y . En effet, lorsque les déplacements des axes Z_2 et Z_3 se font en gardant une altitude identique alors avec le déplacement de l'axe Z_1 , il est possible d'obtenir un mouvement rectiligne selon Y , sans changer l'orientation de l'axe de l'outil par rapport à la pièce. En revanche, si les deux axes Z_2 et Z_3 n'évoluent pas à la même altitude alors les déplacements de l'axe Z_1 engendrent un mouvement de rotation induit autour de l'axe Y . La réalisation d'un trajet en 5 axes positionné nécessite donc un déplacement continu de l'axe de rotation du plateau B_c afin de compenser ce mouvement induit. La prise en compte des caractéristiques cinématiques de cet axe est donc primordiale pour définir une orientation relative entre l'outil et la pièce qui permette de diminuer le temps d'usinage.

5.2 Algorithme proposé

Contrairement aux structures poly-articulées avec une architecture sérielle, il est indispensable de considérer les polytopes articulaires complets, c'est-à-dire avec une dimension égale aux nombres d'axes. Les mouvements réalisés par les axes de rotation sont uniquement destinés à pouvoir suivre la trajectoire imposée dans l'espace des tâches. En ce sens, il n'est plus possible de considérer que l'on souhaite avoir tous les axes articulaires avec une sollicitation maximale (sommet du polytope) pour obtenir la vitesse maximale dans l'espace des tâches. Il faut quantifier les sollicitations induites par la direction d'avance imposée dans l'espace des tâches et trouver l'orientation qui permette de diminuer le temps d'usinage sur toute la passe en gardant une orientation relative outil/pièce constante pour réaliser de l'usinage 5 axes positionné. Ainsi, la méthode proposée est basée sur la géométrie de la trajectoire à réaliser dans l'espace pièce, c'est-à-dire sur la position du point piloté (X_p, Y_p, Z_p) et sur la définition du repère local (\mathbf{f} : vecteur d'avance, \mathbf{n} : vecteur normal, \mathbf{t} : vecteur transverse). Le principe de l'algorithme est présenté sur la Figure 3.25.

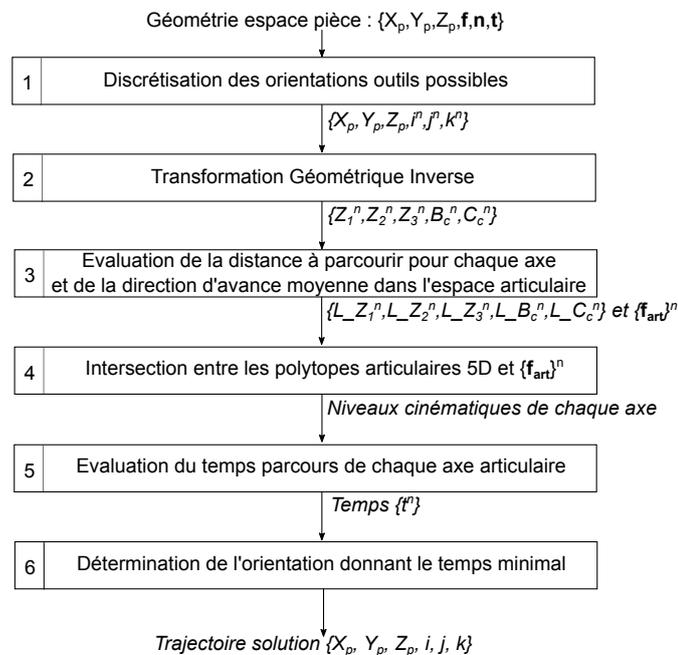


Figure 3.25 – Algorithme de choix de l'orientation outil/pièce sur une architecture parallèle pour un usinage 5 axes positionné

La première étape consiste à discrétiser les orientations outils possibles autour de la normale à la surface. Pour cela, comme dans la partie 3.3, il est possible de définir une pyramide qui permette d'avoir une orientation de l'axe outil (i, j, k) fixe tout le long de la passe puisque l'objectif est de réaliser de l'usinage 5 axes positionné. Cette discrétisation donne n orientations possibles.

A partir de la position et de l'orientation de l'outil dans l'espace des tâches, le modèle géométrique inverse donne les positions articulaires correspondantes. Dans le cas du centre d'usinage Fatronik Verne, dont la transformée géométrique est donnée en Annexe C, n valeurs sont obtenues pour chaque axe $(Z_1^n, Z_2^n, Z_3^n, B_c^n, C_c^n)$.

La troisième étape permet d'évaluer le déplacement cumulé entre le premier et le dernier point de la trajectoire pour les n orientations possibles ($L_Z_1^n, L_Z_2^n, L_Z_3^n, L_B_c^n, L_C_c^n$). Ces valeurs permettent également de déterminer le gradient de position et donc les n directions \mathbf{f}_{art} qui donnent les directions articulaires combinaisons des différents axes. Sur l'exemple choisi pour décrire l'algorithme, les variations cumulées de l'axe C_c sont quasiment nulles.

L'intersection entre chaque direction articulaire \mathbf{f}_{art} et les polytopes articulaires en 5 dimensions de jerk, d'accélération et de vitesse donne les capacités cinématiques maximales des différents axes dans la direction imposée. Pour chaque orientation n , cette intersection engendre des niveaux cinématiques différents pour chaque axe. Au minimum, un seul des axes a un niveau maximal correspondant à la frontière du polytope. La Figure 3.26 illustre en 3 dimensions l'intersection entre une direction \mathbf{f}_{art} et les polytopes de jerk, d'accélération et de vitesse.

La cinquième étape consiste à évaluer le temps d'usinage pour chaque axe articulaire en se basant sur une loi de commande de type bang-bang de jerk sur la longueur articulaire précédemment identifiée. Les niveaux cinématiques associés sont ceux précédemment obtenus pour chaque orientation possible n . Prendre en compte les variations de position de chaque axe, ramené à sa capacité en jerk est une approximation du comportement réel lors de l'interpolation. La méthode est basée sur une amplitude de mouvement global sans vérifier localement le positionnement exact sur la trajectoire. Cette méthode est ainsi adaptée à des trajectoires tendues. La Figure 3.27 donne les profils des 4 axes articulaires pour une orientation. Les variations articulaires de l'axe C_c sont quasiment nulles dans l'exemple choisi, son évolution en fonction du temps n'est ainsi pas représentée sur la Figure 3.27.

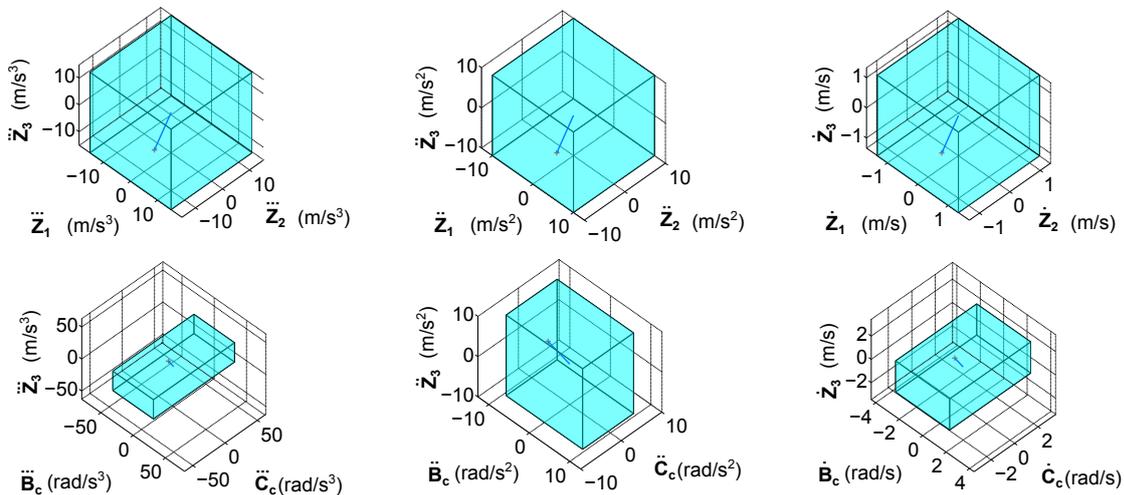


Figure 3.26 – Etape 4 : intersection entre les polytopes articulaires 5D et \mathbf{f}_{art}

La dernière étape permet de déterminer l'orientation donnant le temps d'usinage minimal. Cette orientation donne la trajectoire solution retenue (X_p, Y_p, Z_p, i, j, k). Elle permet un gain de temps de 15% par-rapport à l'orientation initiale consistant à avoir l'axe de l'outil vertical sur le paraboloïde hyperbolique. Ces résultats théoriques montrent l'intérêt du choix de l'orientation de l'outil en

usinage 5 axes positionné avec une architecture parallèle et font l'hypothèse qu'il est possible de désynchroniser les sollicitations des axes de la structure, c'est-à-dire qu'il est possible de solliciter un des axes en accélération alors que les autres axes sont sollicités en jerk par exemple. En conclusion, la méthode proposée permet de choisir l'orientation de l'outil par-rapport à la pièce pour tout type de structures poly-articulées.

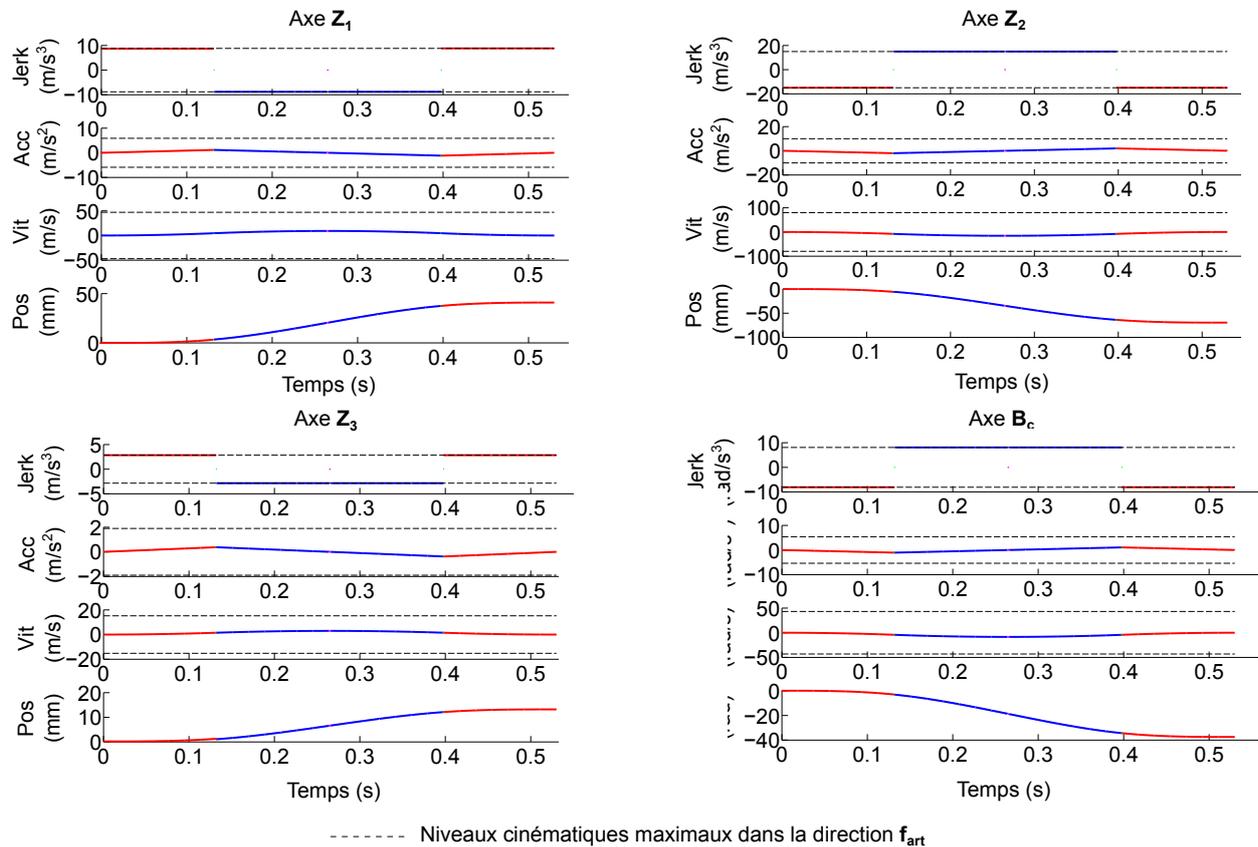


Figure 3.27 – Etape 5 : évaluation du temps de parcours pour chaque axe articulaire

6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de montrer l'intérêt d'utiliser une approche basée sur les polytopes de manipulabilité cinématique pour faciliter le choix de la programmation de la trajectoire. La méthode proposée consiste à optimiser l'orientation de l'outil dans le cas de l'usinage 5 axes positionné pour des structures avec une architecture sérielle ou une architecture hybride ou parallèle.

Pour cela, la première étape consiste à déterminer le paramètre cinématique saturant au cours de la trajectoire. En effet, la modélisation des limites cinématiques pour les niveaux de vitesse, d'accélération et de jerk met en évidence qu'il n'est pas toujours possible de combiner les axes de translation au maximum de leur capacité sur les 3 niveaux cinématiques à cause du déséquilibre de certains axes. En considérant une loi optimale de type bang-bang de jerk, il est possible de déterminer la longueur minimale d'un segment qui commence à engendrer une saturation en accé-

lération ou en vitesse pour chaque structure. Pour calculer cette longueur, l'analyse est effectuée en considérant une combinaison optimale des axes de translation pour le niveau de jerk puisque c'est celui-ci qui sature en premier dans une loi de commande de type bang-bang de jerk. Les niveaux d'accélération et de vitesse peuvent ainsi être réduits dans les directions de jerk. Cette analyse a permis de montrer que le paramètre de jerk est le paramètre cinématique limitant. Ce sont donc les capacités en jerk qu'il est nécessaire de combiner pour donner la valeur maximale de jerk dans l'espace des tâches.

Cependant, la combinaison optimale des axes de translation en jerk (sommets du polytope de jerk) peut être atteinte si la trajectoire générée dans l'espace des tâches engendre cette sollicitation. Nous avons ainsi proposé une méthode pour déterminer analytiquement l'orientation outil/pièce qui permet d'orienter la trajectoire dans l'espace des tâches pour obtenir cette sollicitation. Des essais expérimentaux sur les règles d'un parabolioïde hyperbolique ont permis de valider l'hypothèse que le jerk est le niveau cinématique limitant et dont il est nécessaire de tenir compte pour déterminer l'orientation relative outil/pièce.

Une méthode a également été proposée pour choisir l'orientation de l'outil sur des pièces « tendues ». La démarche consiste à déterminer la direction d'avance moyenne le long d'une passe et à orienter le polytope de jerk dans cette direction moyenne dans le but de la faire coïncider avec l'un des sommets. Des essais expérimentaux ont montré que la vitesse relative outil/pièce pouvait être augmentée.

La dernière partie de ce chapitre a proposé une méthode pour choisir l'orientation de l'outil sur des architectures parallèles ou hybrides. En effet, il n'est plus possible d'utiliser la même méthode puisque des mouvements de rotation sont induits pas les mouvements des axes de translation. Une étude théorique a montré un gain de temps potentiel de la nouvelle orientation par rapport à une orientation initiale correspondant à un axe de l'outil selon l'axe Z_p de la pièce.

Cependant, imposer une orientation moyenne sur toute la trajectoire ne permet pas d'être optimal. Ainsi le chapitre 4 de ce manuscrit se focalise sur la définition de trajectoires continues en 5 axes. Une méthode de direction de guidage se basant sur les polytopes de manipulabilité cinématique est présentée et vise à combiner les axes de translation et de rotation dans le but d'augmenter la vitesse relative outil/pièce.

Chapitre

4

Génération de trajectoires multi-axes

Sommaire

1	Combinaison des mouvements relatifs des axes : application au cas XYZ . . .	104
1.1	Modèle cinématique du troisième ordre dans le cas XYZ	104
1.2	Méthode basée sur la combinaison des mouvements relatifs des axes . . .	105
1.3	Influence du positionnement de la pièce dans l'espace de travail	106
1.4	Lien entre la direction d'avance et l'orientation outil/pièce	108
1.5	Prise en compte de la causalité	111
1.6	Mise en œuvre expérimentale	113
1.6.1	Désynchronisation des axes	113
1.6.2	Programmation de trajectoires en mode positioning axes	115
1.6.3	Résultats expérimentaux	116
2	Évolution vers l'optimisation de trajectoires 5 axes en UGV	118
2.1	Mise en avant des difficultés liées au choix d'une stratégie d'usinage 5 axes continu	118
2.2	Optimisation du positionnement de la pièce dans l'espace de travail . . .	120
2.3	Optimisation de la direction d'avance	123
2.4	Optimisation de l'orientation relative outil/pièce	124
2.5	Mise en œuvre expérimentale	127

Introduction

Le chapitre 3 a mis en avant qu'il était possible de combiner les axes de translation au maximum de leurs capacités cinématiques en jerk en jouant sur le positionnement des axes de rotation. Les résultats expérimentaux réalisés sur un centre d'usinage avec une architecture sérielle ont mis en avant un gain de temps potentiel mais la réalisation d'un usinage 5 axes positionné limite le gain lorsque la surface n'est plus « tendue ». Pour toute structure poly-articulée, il serait intéressant de pouvoir combiner les mouvements des axes de translation et de rotation dans le but d'avoir un suivi de trajectoire plus performant et ainsi diminuer le temps d'usinage. Dans la littérature, la génération de trajectoires multi-axes associée à des critères cinématiques se focalise sur les effets de la cinématique des axes de rotation en essayant de limiter leurs mouvements (partie 3.4.2 du chapitre 1). Partant du constat que les capacités cinématiques des axes de rotation sont souvent faibles, réduire leurs déplacements permet de ne pas les rendre limitant vis-à-vis de la vitesse relative outil/pièce. Cependant en combinant les mouvements relatifs induits par les axes de rotation, il serait possible d'augmenter la vitesse relative outil/pièce. Pour être le plus efficace possible, la génération de cette trajectoire doit s'effectuer au maximum des capacités cinématiques des axes et dans le même temps pour tous les axes. En effet, si les mouvements d'un axe nécessitent un temps supérieur aux autres axes alors le trajet aura une durée correspondante au temps le plus long.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode pour générer des trajectoires d'usinage multi-axes qui permettent de combiner les capacités cinématiques de tous les axes de la structure poly-articulée dans le but d'augmenter la vitesse relative outil/pièce. La méthode proposée s'appuie sur les polytopes de manipulabilité cinématique définis au chapitre 2. Comme nous l'avons vu dans ce chapitre, la forme des polytopes obtenus dans l'espace des tâches est complexe et des décalages du centre des polytopes peuvent apparaître en fonction de la position, de la vitesse et de l'accélération produite à l'instant t . Une étude locale des capacités cinématiques des différents axes n'est donc plus suffisante, il est nécessaire de prendre en compte la causalité, c'est-à-dire le couplage entre l'évolution des différents niveaux cinématiques au cours du temps.

La première partie de ce chapitre illustre le principe de combinaison des mouvements relatifs des axes dans sur une structure simplifiée, c'est-à-dire en considérant uniquement 3 axes : les deux axes de translation \mathbf{X}_m et \mathbf{Y}_m et l'axe de rotation \mathbf{C} . Cette étude permet de comprendre l'interaction entre les différents axes et de choisir tous les paramètres (positionnement de la pièce, direction d'avance, et évolution des positions de l'axe de rotation \mathbf{C}) de la trajectoire dans le but d'augmenter la vitesse relative outil/pièce. Des essais expérimentaux ont été réalisés sur le centre d'usinage Mikron UCP710 et ont permis de mettre en avant les limites de cette méthode pour être appliquée sur des commandes numériques industrielles. La deuxième partie présente la méthode dans le cas de la structure poly-articulée avec l'ensemble des axes. La génération de la trajectoire est appliquée sur la surface test Manta en usinage 5 axes continu. Nous proposons une méthodologie pour choisir le positionnement de la pièce dans l'espace de travail, et une direction d'avance en accord avec les mouvements maximaux possibles sur les axes de rotation sans que pour autant ils ne ralentissent le suivi, mais au contraire, contribuent à l'améliorer. Des relevés de la vitesse relative outil/pièce

mettent en avant les gains de vitesse sur la nouvelle trajectoire proposée.

1 Combinaison des mouvements relatifs des axes : application au cas XYZ

Le chapitre 3 a mis en avant que le paramètre limitant la vitesse relative outil/pièce est le paramètre de jerk. Ainsi, l'objectif est de trouver la direction d'avance, le positionnement de la pièce dans l'espace de travail et l'orientation de l'outil par rapport à la pièce qui maximise le jerk tangentiel, c'est-à-dire le jerk dans la direction d'avance \mathbf{f} . La méthode proposée est développée dans le cas de l'usinage d'une surface plane carrée de 100 mm de côté. Seuls les axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m , et \mathbf{C} de la structure sont utilisés pour expliquer de manière simple les interactions entre les différents paramètres intervenant dans le mouvement relatif entre l'outil et la pièce. Dans toute la méthode proposée, le posage de la pièce dans l'espace des tâches considère la base pièce confondue avec la base de la machine lorsque le centre d'usinage est en position repos ($A = 0$ et $C = 0$).

1.1 Modèle cinématique du troisième ordre dans le cas XYZ

Dans le cas XYZ, le modèle cinématique du troisième ordre, rappelé dans l'Equation 4.1 est le même que celui présenté au chapitre 2 à l'Equation 2.30.

$$\ddot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + 2 \cdot \underline{\dot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \underline{\ddot{\mathbf{J}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.1)$$

Afin d'expliquer le principe de génération de trajectoires dans le cas XYZ et les paramètres influents, une première approche sans les effets de la causalité est détaillée. La prise en compte de la causalité sera ensuite détaillée dans la partie 1.5. En considérant une étude locale de la trajectoire, c'est-à-dire sans la prise en compte de la causalité, les dérivées premières et secondes de la matrice Jacobienne sont supposées nulles. Le modèle cinématique du troisième ordre est ainsi simplifié (Equation 4.2).

$$\ddot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (4.2)$$

Dans le cas XYZ, la matrice Jacobienne est de dimension (2×3) et sa forme est donnée en Equation 4.3 pour le centre d'usinage Mikron UCP710. La signification des différents termes et le détail du calcul de cette matrice sont donnés en Annexe A. La forme de la matrice Jacobienne est identique pour le centre d'usinage Huron KX8-five puisque l'architecture des axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m et \mathbf{C} est identique (Annexe B). Seules les valeurs numériques des décalages des différents repères et les caractéristiques cinématiques en jerk sont différentes. En ce sens, dans la suite de ce manuscrit, les calculs détailleront le principe sur le centre d'usinage Mikron UCP710 et les résultats numériques et les trajectoires solutions seront donnés pour les deux centres d'usinage.

$$\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & (m_y - Y_m) \cdot \cos C + (m_x - X_m) \cdot \sin C + b_y \cdot \cos C \\ \sin C & \cos C & (X_m - m_x) \cdot \cos C + b_y \cdot \sin C + (m_y - Y_m) \cdot \sin C \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Le modèle géométrique inverse permet ensuite d'exprimer la position du point piloté dans l'espace articulaire en fonction de sa position dans l'espace des tâches (Equation 4.4).

$$\begin{cases} X_m = (X_p + p_x) \cdot \cos C + (Y_p + p_y) \cdot \sin C + m_x \\ Y_m = -\sin C \cdot (X_p + p_x) + \cos C \cdot (Y_p + p_y) + b_y + m_y \end{cases} \quad (4.4)$$

En remplaçant l'Equation 4.4 dans la définition de la matrice Jacobienne donnée à l'Equation 4.3, on obtient le système de l'Equation 4.5 correspondant au développement du modèle cinématique du troisième ordre simplifié de l'Equation 4.2.

$$\begin{cases} \ddot{X}_p = \cos C \cdot \ddot{X}_m - \sin C \cdot \ddot{Y}_m - (Y_p + p_y) \cdot \ddot{C} \\ \ddot{Y}_p = \sin C \cdot \ddot{X}_m + \cos C \cdot \ddot{Y}_m + (X_p + p_x) \cdot \ddot{C} \end{cases} \quad (4.5)$$

L'objectif est de trouver le positionnement de la pièce (décalage par rapport au centre de la table (p_x, p_y)), l'évolution de l'orientation de l'axe de rotation C et de la direction d'avance \mathbf{f} qui permettent d'usiner une pièce le plus rapidement possible. La direction d'avance \mathbf{f} représente le lien entre les composantes en jerk des axes \mathbf{X}_p et \mathbf{Y}_p en considérant que les composantes associées aux dérivées première et seconde de \mathbf{f} sont négligeables (Equation 3.9). Pour cela, nous proposons de décomposer le jerk obtenu dans l'espace des tâches comme la combinaison du jerk issu du mouvement de l'outil par-rapport au bâti et du bâti par-rapport à la pièce. Cette méthode est applicable dans le cas d'une structure avec une architecture sérielle car les mouvements des axes de translation et des axes rotation peuvent se découpler. Dans le cas d'une architecture parallèle, il est nécessaire de coupler les mouvements des axes de rotation à ceux des axes de translation ce qui est naturellement fait dans les transformations géométriques directe et inverse. Cette décomposition est possible pour une structure avec une architecture sérielle et permet d'illustrer de manière pédagogique les effets et l'apport potentiel des axes de rotation. Pour une architecture parallèle, l'objectif est toujours le même : maximiser le jerk outil/pièce, mais dans ce cas, les axes de rotation et de translation ne sont pas dissociables.

1.2 Méthode basée sur la combinaison des mouvements relatifs des axes

Le but est de maximiser le jerk relatif outil/pièce. Pour cela, de manière instantanée, en décomposant le mouvement par-rapport au bâti, il est nécessaire d'avoir le jerk outil/bâti et le jerk bâti/pièce maximaux et colinéaires pour que la composition vectorielle soit maximale (Equation 4.6).

$$\mathbf{J}_{\text{outil/pièce}} = \mathbf{J}_{\text{outil/bâti}} + \mathbf{J}_{\text{bâti/pièce}} \quad (4.6)$$

Maximiser le jerk outil/bâti revient à maximiser les jerks des axes de translation \mathbf{X}_m et \mathbf{Y}_m , c'est-à-dire à solliciter les axes au maximum de leurs capacités cinématiques (sommets du polytope de jerk). Comme dans le cas de l'usinage 5 axes positionné que nous avons étudié dans le chapitre 3, cela revient à trouver l'orientation C qui permet d'aller dans la direction d'avance \mathbf{f} donnée par les sommets du polytope.

Maximiser le jerk pièce/bâti revient à maximiser le jerk de l'axe de rotation C pour une position de la pièce dans l'espace de travail. La Figure 4.1 illustre l'influence des capacités cinématiques en jerk de l'axe C sur la géométrie du polytope obtenue dans l'espace des tâches. La forme du polytope dépend du posage et de la position du point piloté de l'outil. Il s'agit de l'influence des termes en facteur de \ddot{C} dans l'Equation 4.5. Plus le point piloté est éloigné de l'axe de rotation de la table, plus la géométrie du polytope sera grande.

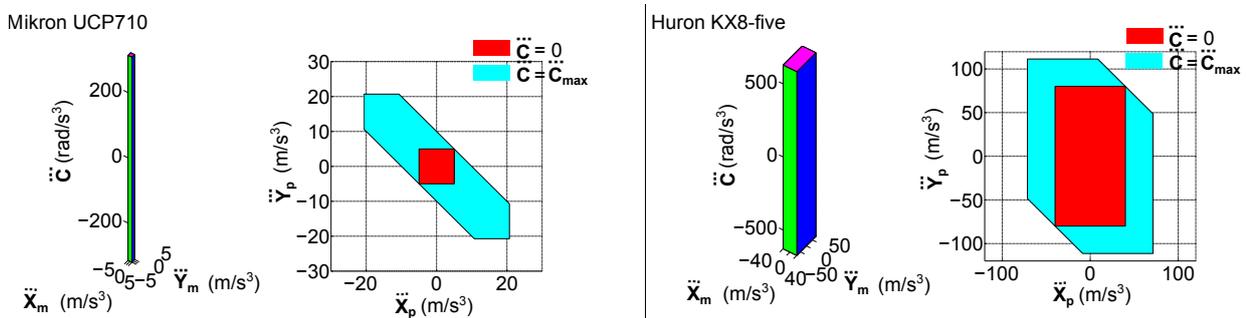


Figure 4.1 – Polytopes associés aux axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m et C dans l'espace articulaire et dans l'espace des tâches

Pour combiner au mieux les 3 axes, il est ensuite nécessaire d'avoir les combinaisons maximales du jerk outil/bâti et du jerk bâti/pièce dans la même direction, c'est-à-dire d'orienter le polytope (C) dans la direction d'avance \mathbf{f} ou de choisir la direction d'avance \mathbf{f} donnant le sommet du polytope le plus éloigné du centre de l'espace pour l'orientation C définie. Cela revient à obtenir le plus grand polytope dans l'espace des tâches et à aller dans la direction où la norme du jerk est maximale, ce qui correspond aux sommets du polytope. Les parties suivantes détaillent comment obtenir le plus grand polytope et comment combiner la direction d'avance et l'orientation relative outil/pièce pour combiner au mieux les deux paramètres.

1.3 Influence du positionnement de la pièce dans l'espace de travail

Maximiser le jerk bâti/pièce nécessite de maximiser le jerk de l'axe C mais également de maximiser la distance entre l'axe de rotation C et le point piloté de l'outil. En effet, l'Equation 4.5 montre que plus les composantes multipliant \ddot{C} sont importantes ($X_p + p_x$ et $Y_p + p_y$), plus les valeurs de jerk de l'espace des tâches seront importantes. Pour cela, le positionnement de la pièce dans l'espace de travail doit être le plus excentré. Pour tous les points d'une surface à usiner, les solutions se trouvent donc sur un cercle de rayon R . Ainsi, le problème initial à deux variables (p_x, p_y) se réduit à une seule variable (R) que l'on doit maximiser (Equation 4.7).

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (4.7)$$

La Figure 4.2 illustre l'influence du positionnement de la pièce dans l'espace de travail pour les mêmes valeurs de X_p , Y_p et C . Les résultats sont donnés pour les centres d'usinage Mikron UCP710 et Huron KX8-five et les aires des différents polytopes sont résumées dans le Tableau 4.1.

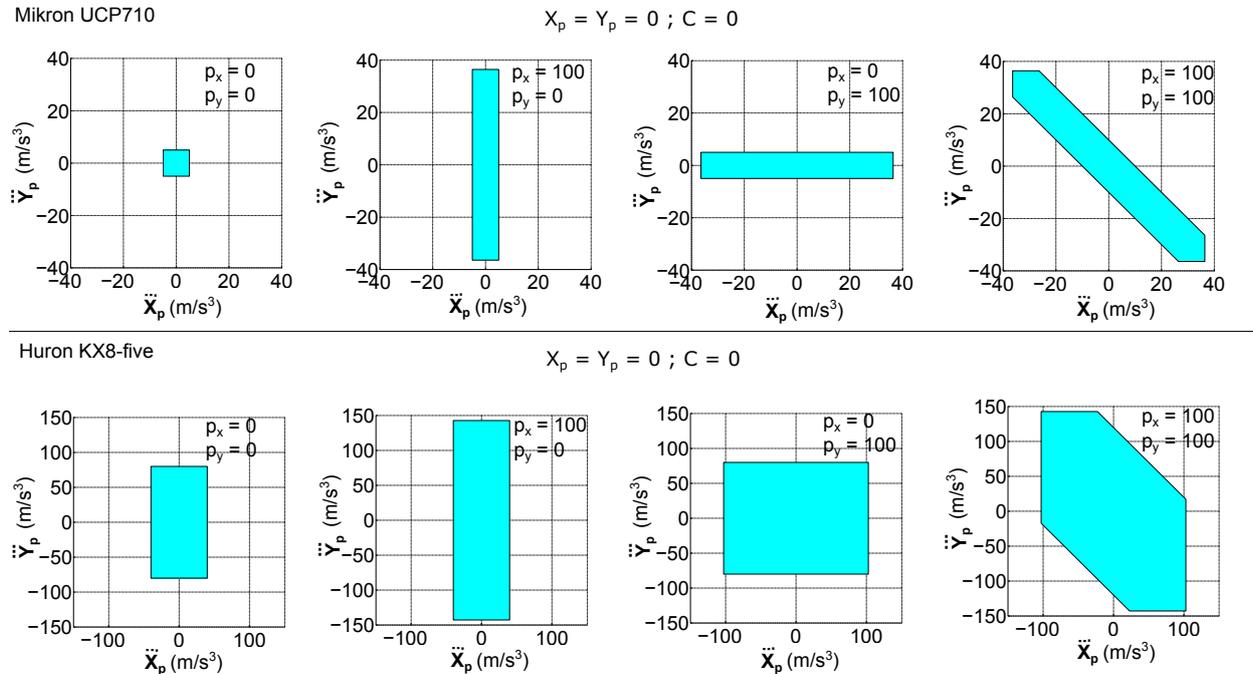


Figure 4.2 – Influence du positionnement de la pièce dans l'espace de travail

Aire $(m/s^3)^2$	$p_x = 0 ; p_y = 0$	$p_x=100 ; p_y = 0$	$p_x = 0 ; p_y = 100$	$p_x = 100 ; p_y = 100$
Mikron UCP710	100	728	728	1357
Huron KX8-five	12800	22853	32906	42960

Tableau 4.1 – Aire du polytope dans l'espace pièce en fonction du positionnement de la pièce dans l'espace de travail

Le Tableau 4.1 confirme que plus la pièce est excentrée de l'axe de rotation, c'est-à-dire plus le rayon R est important, plus l'aire du polytope est importante. Cependant, pour une même valeur de rayon R , les directions dans lesquelles le jerk est maximal sont différentes. En effet, pour le centre d'usinage Mikron UCP710, sur la Figure 4.2, lorsque $R = 100$ ($p_x = 100 ; p_y = 0$) et ($p_x = 0 ; p_y = 100$), les directions donnant les sommets du polytope sont différentes. De plus, pour la Huron KX8-five, l'aire du polytope est plus importante dans le cas ($p_x = 0 ; p_y = 100$) que dans le cas ($p_x = 100 ; p_y = 0$) alors que le rayon R est identique. En effet, les directions dans lesquelles le jerk outil/bâti et le jerk bâti/pièce sont maximales ne sont pas les mêmes. La somme de Minkowski des deux polytopes n'est donc pas maximale. Il est ainsi nécessaire de combiner

le positionnement de la pièce avec la direction d'avance et l'orientation outil/pièce dans le but de combiner les deux contributions en jerk de manière optimale.

Afin d'avoir un motif de trajectoire sur la pièce orienté globalement sur la direction souhaitée (par exemple ici Y_p), il est possible de positionner la pièce avec une excentration potentiellement prononcée uniquement selon X_m (terme p_x) et un décalage de la moitié de la taille de la pièce selon $-Y_m$ (terme p_y). Ce posage conserve ainsi la symétrie d'axe X_m .

1.4 Lien entre la direction d'avance et l'orientation outil/pièce

Pour un positionnement de la pièce dans l'espace de travail, c'est-à-dire pour des positions p_x et p_y choisies, il est possible de trouver C qui maximise la norme du jerk dans l'espace des tâches en résolvant le système de l'Equation 4.5. La résolution de ce système engendre une combinaison des valeurs de \ddot{X}_p et de \ddot{Y}_p qui donne la direction d'avance f . La Figure 4.3 illustre le lien entre la direction d'avance f et l'angle C .

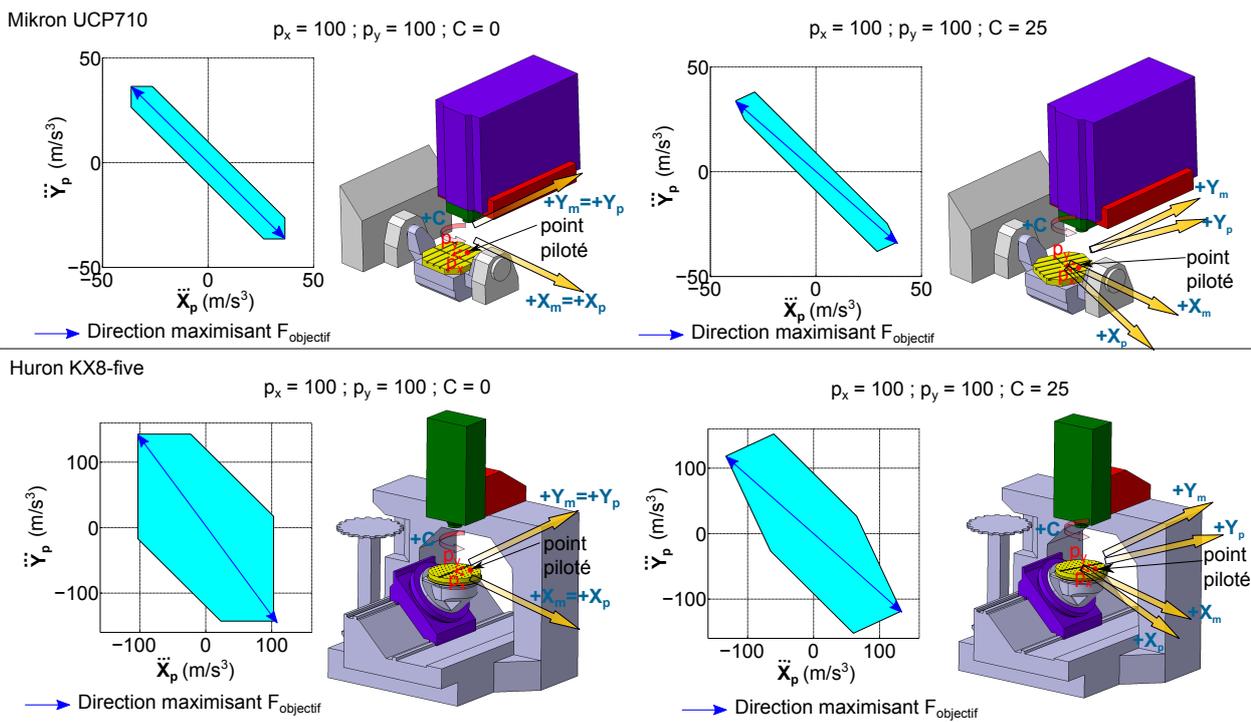


Figure 4.3 – Lien entre la direction d'avance et l'orientation outil/pièce

La Figure 4.3 montre que pour un même positionnement de la pièce dans l'espace de travail, modifier la valeur de C transforme le polytope obtenu dans l'espace des tâches. La direction d'avance solution est ainsi changée.

Connaissant l'influence du positionnement de la pièce dans l'espace de travail et de l'angle C , l'objectif est de trouver la combinaison qui permet de maximiser le jerk, c'est-à-dire la fonction objectif de l'Equation 4.8.

$$F_{\text{objectif}} = \max \sqrt{\ddot{X}_p^2 + \ddot{Y}_p^2} \quad (4.8)$$

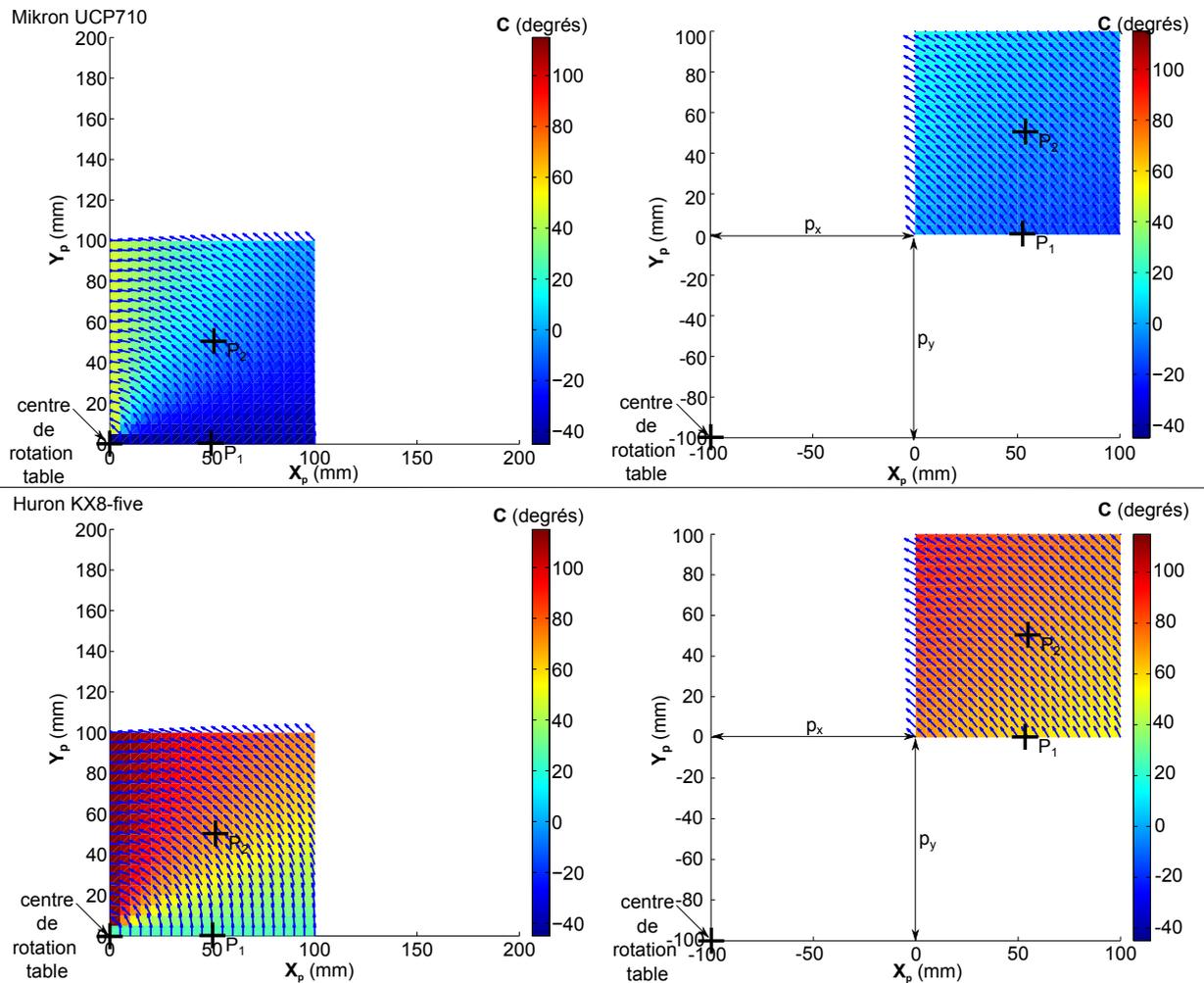


Figure 4.4 – Directions et orientations locales maximisant la fonction objectif

La Figure 4.4 montre les valeurs locales de l'axe C et les directions locales d'avance solutions de cette maximisation. La trajectoire outil/pièce, reconstruite à partir des solutions locales, correspond à des arcs de cercle puisque nous avons fait l'hypothèse de ne pas prendre en compte la causalité. Il s'agit ainsi directement de la composition du mouvement détaillée dans l'Equation 4.6. Sur les figures de gauche, correspondant à un positionnement de la pièce ($p_x = 0, p_y = 0$) les positions locales de C évoluent dans un intervalle de 90° puisque le centre de rotation est sur un des coins de la pièce. En se décalant du centre de rotation, les valeurs locales évoluent ainsi sur un intervalle plus faible puisque l'on se décale du centre de rotation. La direction d'avance solution correspond aux tangentes aux cercles centrés sur l'axe de rotation du plateau.

Pour le centre d'usinage Mikron UCP710, les valeurs de l'axe C correspondent à une rotation permettant d'amener le point piloté de l'outil dans la diagonale $X_m = Y_m$. En effet, comme le montre les polytopes associés à la Mikron sur la Figure 4.5, lorsque le point piloté se situe sur l'axe $Y_p = 0$, c'est-à-dire pour le point P_1 de la Figure 4.4 et lorsque $C = 0$, alors la direction est suivant Y_p . Lorsque $C = 45$, la direction est suivant $X_p = Y_p$. Lorsque le point piloté est déjà sur la

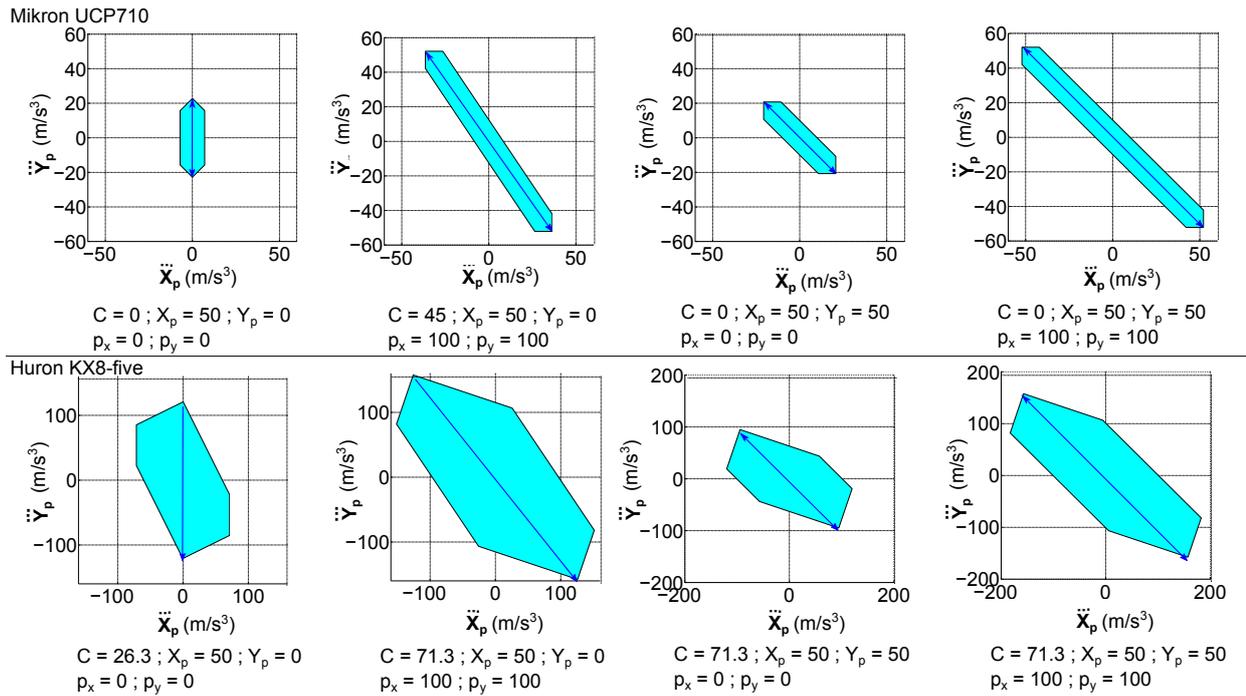


Figure 4.5 – Influence de p_x et p_y sur les polytopes pour deux points distincts de la pièce (P_1, P_2)

diagonale $X_m = Y_m$, c'est-à-dire pour le point P_2 de la Figure 4.4, la position de l'axe C doit être nulle pour rester dans la direction diagonale.

En ce qui concerne le centre d'usinage Huron KX8-five, la position de l'axe C qui permet de combiner au mieux les deux axes de translation vaut 71.3° , c'est pourquoi les directions locales obtenues sur la Figure 4.4 permettent d'orienter la direction d'avance dans le coin du polytope de jerk lorsque l'axe C vaut cette valeur. Pour recouvrir toute la pièce lorsque celle-ci n'est pas excentrée, les solutions locales évoluent ensuite dans un intervalle de 90° autour de cette valeur. Lorsque la pièce est excentrée de l'axe de rotation C , les valeurs de C évoluent sur un intervalle plus faible. Pour le point P_1 , la Figure 4.5 montre que lorsque $C = 71.3$, la direction est dans la diagonale $X_p = Y_p$ si $p_x = p_y = 100$ et elle est suivant Y_p si $p_x = p_y = 0$. Lorsqu'on est déjà sur la diagonale, c'est-à-dire pour le point P_2 , il suffit d'avoir $C = 71.3$ pour rester dans la direction diagonale.

Les variations induites sur l'axe C sont importantes le long de la trajectoire. En prenant les valeurs obtenues pour le centre Mikron UCP710 quand $p_x = 0$ et $p_y = 0$ (en haut à gauche sur la Figure 4.4), l'amplitude des mouvements de l'axe C nécessite un temps de trajet de 1,19 s au vue de ses caractéristiques cinématiques en considérant un profil cinématique en 7 segments (Figure 4.6). En revanche, l'amplitude des mouvements des axes X_m et Y_m sont très faibles, en particulier sur les passes proches de l'axe de rotation du plateau, ce qui nécessite un temps de trajet très court.

Au cours de l'exécution, les mouvements des axes sont synchronisés : l'axe C va ainsi ralentir les axes X_m et Y_m et donc la vitesse relative outil/pièce. Il est nécessaire de prendre en compte la causalité afin d'éviter ce phénomène. La causalité implique de tenir compte de ce qui s'est passé avant et de ce qui doit se passer après sur la trajectoire pour trouver localement la position de

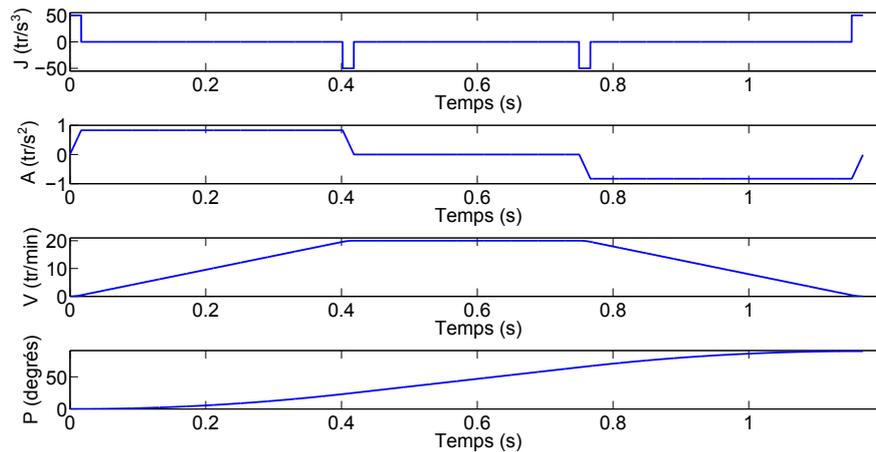


Figure 4.6 – Simulation du temps de trajet de l'axe C

chaque axe. La partie suivante propose une méthode pour définir des trajectoires tenant compte de la causalité.

1.5 Prise en compte de la causalité

Pour tenir compte de la causalité, nous proposons de construire des trajectoires de manière globale à partir du profil cinématique en 7 segments des axes dans l'espace articulaire, c'est-à-dire en construisant directement chaque passe. À partir de l'évolution temporelle de la position de chaque axe articulaire, nous allons assembler ces mouvements pour déterminer la géométrie de la trajectoire dans l'espace des tâches. Cette construction est réalisée par un processus itératif en partant d'une solution initiale où la valeur de l'axe C est constante le long de la passe (Figure 4.7). Le principe consiste à utiliser les résultats obtenus dans l'étude locale (sans la causalité) et d'ajouter la causalité en étudiant directement la cinématique de toute la trajectoire modélisée par un profil en 7 segments.

Partant d'une position initiale (X_{p0}, Y_{p0}, C_0) sur la surface dans l'espace des tâches, la première étape consiste à estimer la longueur initiale du trajet à réaliser. Par exemple, en partant de la position $(X_p = 50, Y_p = 0)$, une première estimation de la longueur L_0 peut être de 100 mm, ce qui correspond à la distance pour aller jusqu'à l'autre extrémité de la pièce en ligne droite. Le but étant de combiner les mouvements articulaires des axes pour réaliser le trajet, cette longueur est nécessairement supérieure à la longueur à parcourir par les axes de translation \mathbf{X}_m et \mathbf{Y}_m .

En utilisant la transformation géométrique inverse de la structure poly-articulée utilisée, il est ensuite possible de déterminer la valeur initiale correspondante (X_{m0}, Y_{m0}) .

À partir de cette valeur initiale, l'évolution des axes \mathbf{X}_m , \mathbf{Y}_m et C est obtenue en considérant qu'ils sont sollicités au maximum de leur capacité cinématique en jerk, en accélération et en vitesse. L'estimation de temps est à réaliser sur l'axe avec les capacités cinématiques les plus élevées induites par la longueur L_0 . Les mouvements de l'autre axe et de l'axe C sont déterminés dans le but d'obtenir le même temps t dans le but d'éviter le temps de trajet. Pour obtenir la meilleure

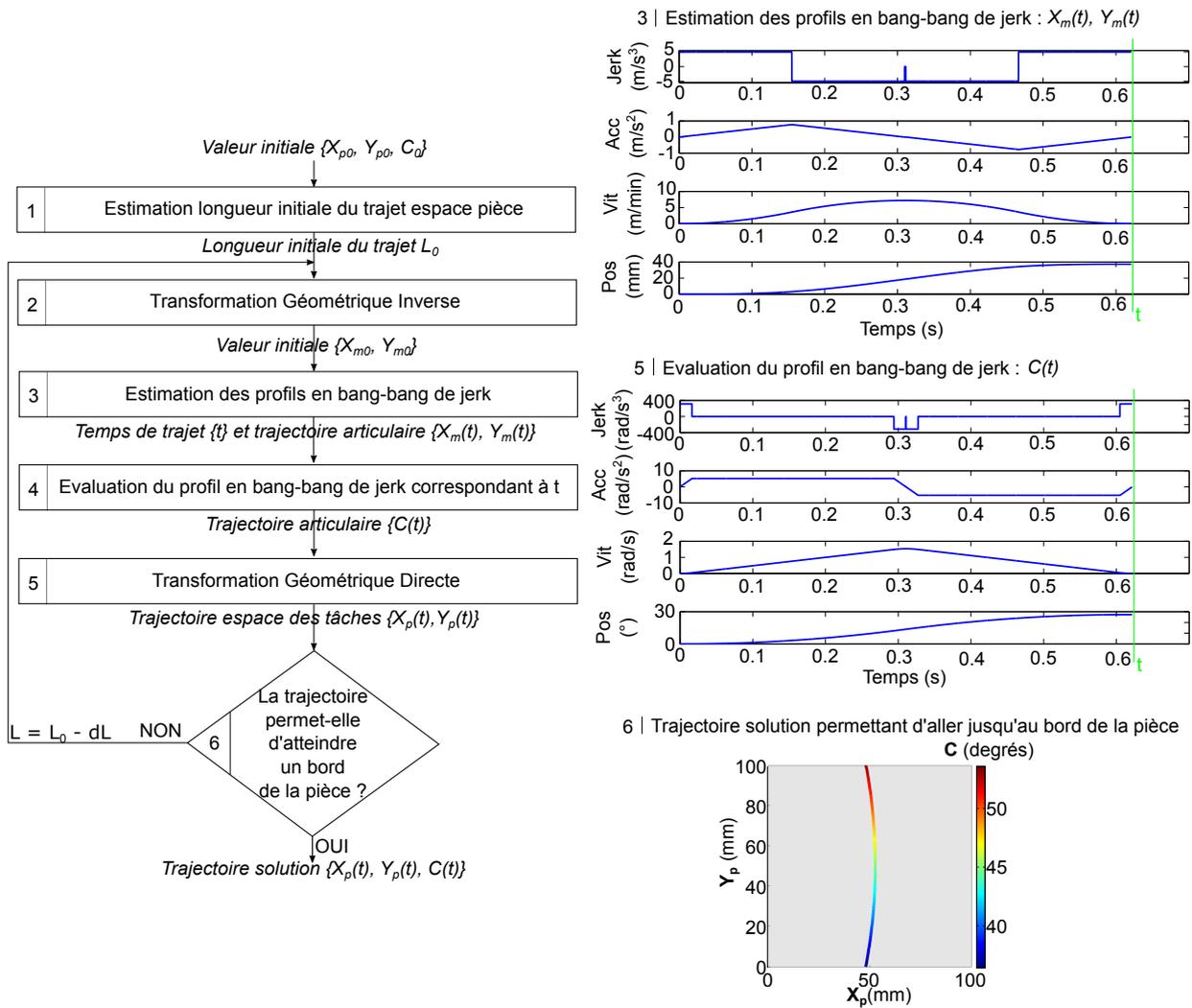


Figure 4.7 – Algorithme destiné à combiner les capacités cinématiques des axes X_m , Y_m et C

combinaison des capacités cinématiques au moment où les mouvements des axes sont les plus rapides, la valeur optimale, correspondant à la solution locale en jerk, est choisie au milieu de la trajectoire à réaliser. En effet, les mouvements sont les plus importants au milieu de la trajectoire, c'est donc à cet endroit qu'il est préférable de les combiner au mieux.

Après avoir recalé les mouvements de l'axe C sur la valeur initiale pour le milieu de la trajectoire à réaliser, la transformation géométrique inverse permet d'obtenir la trajectoire dans l'espace des tâches.

Si la trajectoire obtenue est trop grande alors une diminution de la valeur de la longueur initiale à parcourir permet de manière itérative d'atteindre exactement l'autre extrémité de la pièce. Une trajectoire solution est donnée sur la Figure 4.7 pour le centre d'usinage Mikron UCP710 pour un positionnement $(p_x = 200, p_y = -50)$.

La Figure 4.8 montre pour la trajectoire représentée sur la gauche qu'au début et à la fin de la passe les directions ne sont plus colinéaires car la causalité nous empêche d'atteindre les solutions locales sur la trajectoire.

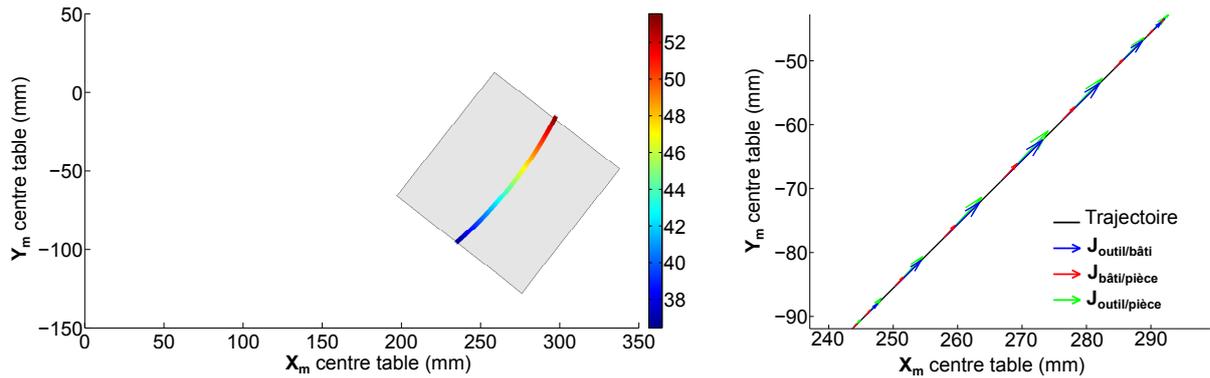


Figure 4.8 – Combinaison optimale des jerks outil/bâti et bâti/pièce au centre de la trajectoire

Si l'on souhaite avoir une régularité dans le motif, c'est-à-dire un état de surface semblable sur toute la pièce, il est important de conserver autant que possible une distance entre passe constante entre deux passes. Pour cela, il est nécessaire de positionner la pièce de manière symétrique dans l'espace de travail par-rapport à l'axe de rotation C . De plus, afin d'avoir une trajectoire symétrique, le point initial et optimal est choisit au centre de la pièce. La Figure 4.9 donne les trajectoires solutions obtenues sur la pièce complète dans le cas de deux posages et pour les deux centres d'usinage.

Les trajectoires se ressemblent pour les deux centres d'usinage et ont une valeur de C centrée sur la solution locale au milieu de la pièce. Plus le point piloté de l'outil est éloigné de l'axe de rotation, plus les mouvements de l'axe C est faible et plus le temps d'usinage est petit. Afin de vérifier l'efficacité de la méthode, l'usinage de la pièce a été réalisé sur le centre d'usinage Mikron UCP710 avec les trajectoires solutions obtenues.

1.6 Mise en œuvre expérimentale

1.6.1 Désynchronisation des axes

Dans la commande numérique Siemens 840D associée au centre d'usinage Mikron UCP710, il existe plusieurs modes d'exécution de trajectoire : le mode *path axes* et le mode *positioning axes*. Le mode *path axes* est le plus couramment utilisé et le mode *positioning axes* est mis en œuvre pour des déplacements manuels des axes ou pour des axes additionnels ajoutés à la structure initiale.

Dans le mode *path axes*, utilisé par défaut quel que soit le mode d'interpolation utilisé (G0, G1, Spline, Poly...), les mouvements des différents axes sont interpolés de manière synchrone dans un même canal. En effet, tous les axes d'un même canal sont interpolés de manière unique ce qui signifie que les durées des différentes phases du profil à 7 segments sont identiques pour tous les axes. Ainsi, si un axe se met à saturer en accélération ou en vitesse alors tous les autres axes ralentissent pour rester synchronisés avec l'axe saturant même si les capacités cinématiques de ces axes permettraient d'avoir des niveaux plus élevés.

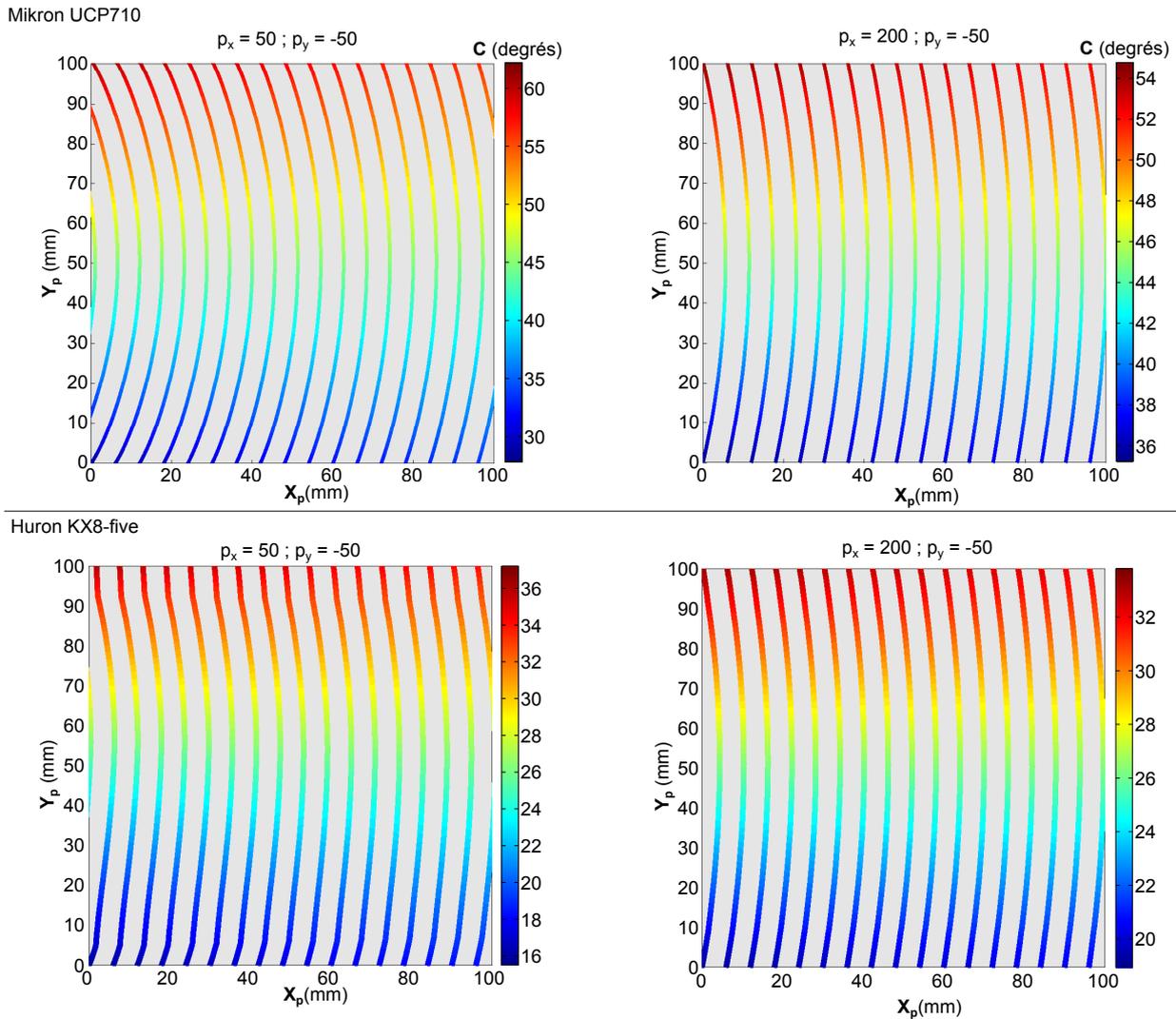


Figure 4.9 – Trajectoires solutions pour l’usinage d’un carré de 100×100 sur les deux centres d’usinage

Dans le mode *positioning axes*, chaque axe est interpolé séparément. Chaque axe a ainsi ses propres phases de saturation en jerk, en accélération et en vitesse. Dans le but de gagner du temps et d’augmenter la vitesse relative outil/pièce, il est nécessaire d’utiliser le mode *positioning axes* pour bénéficier au maximum des capacités cinématiques de chacun des axes. Dans le réglage de la commande numérique Siemens 840D, les valeurs maximales de jerk de chaque axe étaient différentes de celles définies en mode *path axes*. Le paramètre de réglage de ces valeurs se nomme *MD32430 JOG_AND_POS_MAX_JERK*. Nous avons choisi de modifier ce paramètre pour que les niveaux cinématiques de chaque axe correspondent à ceux définis dans le mode *path axes* et avec lesquels nous avons réalisé l’étude. La partie suivante détaille les fonctions utilisées pour générer des trajectoires en mode *positioning axes* puisqu’il permet de désynchroniser les axes comme dans la méthode que nous proposons.

1.6.2 Programmation de trajectoires en mode positioning axes

Dans le mode *positioning axes*, plusieurs fonctions existent pour définir la trajectoire. La première fonction se nomme *RTLIOF*, elle est associée à un mode d'interpolation G0. Etant donné qu'elle est utilisable uniquement en G0, la valeur de la vitesse obtenue n'est pas très stable : un dépassement de la consigne en vitesse peut être observé au démarrage. De plus, l'utilisation de cette fonction impose une transition entre blocs avec la fonction G60 ce qui engendre nécessairement un arrêt entre chaque bloc programmé. En effet, la Figure 4.10 montre les deux manières de contrôler le passage entre chaque bloc du programme G1 : par arrêt précis ou par déplacement tangentiel. En arrêt précis, à la fin de chaque bloc, les axes ralentissent et s'arrêtent brièvement. En déplacement tangentiel, la trajectoire passe à proximité des points en gardant la vitesse la plus constante possible tout en restant dans la tolérance d'écart au contour et d'écart par axe. Une fonction de *look ahead* permet de lire en avance plusieurs blocs CN ce qui consent à atteindre une vitesse réelle plus élevée. Imposer un déplacement tangentiel nécessite de combiner les axes, donc de les synchroniser, ce qui n'est pas compatible avec le mode *positioning axes*.

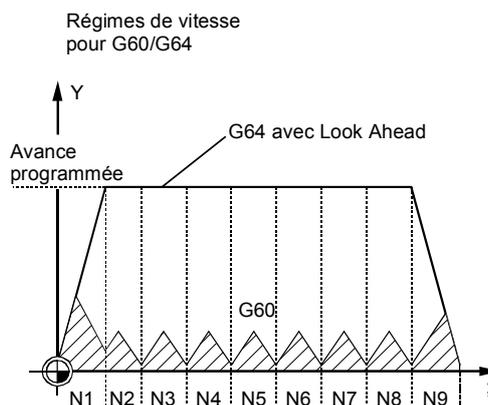


Figure 4.10 – Transition entre chaque bloc : arrêt précis ou déplacement tangentiel [SIEMENS \(2006\)](#)

D'après la documentation, il n'est pas possible d'utiliser les fonctions de compactage que nous avons décrites au chapitre 1 en mode *positioning axes*. Ainsi, nous ne pouvons pas utiliser la fonction *RTLIOF* pour désynchroniser les axes. Avec un mode d'interpolation G1 les fonctions se nomment *POS* et *POSA*. Elles permettent de désynchroniser les axes mais pas d'utiliser les fonctions de compactage. Les mouvements réalisables sont ainsi limités.

La fonction *TRAORI* active la transformation géométrique inverse associée à la structure poly-articulée. Ainsi, les déplacements sont générés en fonction de la cinématique de la machine, sur la base des coordonnées de position et d'orientation décrites dans le programme associé au repère de la pièce. Dans le cas XYZ, un extrait des programmes est donné en annexe F. Mais avec ce mode, étant donné que c'est la commande numérique qui effectue elle-même la transformation, tous les axes sont synchronisés, ce qui ne permet pas de réaliser l'optimisation que nous avons proposé précédemment. Sans la fonction *TRAORI*, la fonction *TRAFOOF* est activée par défaut. Dans ce

cas, la programmation se fait directement dans le repère machine associée au centre de la table. La trajectoire réalisée permet ainsi de désynchroniser les axes. Un extrait de ce programme est également donné en annexe F.

1.6.3 Résultats expérimentaux

Les essais ont été réalisés sur le centre d'usinage Mikron UCP710 pour deux posages distincts : ($p_x = 50$; $p_y = -50$) et ($p_x = 200$; $p_y = -50$). Plusieurs programmes ont été réalisés afin de mettre en avant l'intérêt d'utiliser l'axe **C** mais aussi celui de désynchroniser les axes. Les différents programmes vont d'une programmation classique (avec couplage des axes) vers une programmation permettant de réaliser l'évolution temporelle souhaitée en désynchronisant les axes. Un extrait de chacun des codes est donné en Annexe F. Les temps d'usinage sur la pièce complète sont résumés dans le Tableau 4.2.

Modes	path $C = 0$	path $C = 45$	path G1 articulaire	positioning TRAORI/POS	positioning TRAFOOF/POS
Temps (s)	21.8	19.4	17.1	17.7	16.1

Tableau 4.2 – Temps d'usinage pour les différentes stratégies avec le posage ($p_x = 200$; $p_y = -50$)

Le programme le plus couramment utilisé est celui correspondant à un usinage par plans parallèles selon les plans ($\mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p$), c'est-à-dire avec $C = 0$, mais le Tableau 4.2 montre que c'est celui qui engendre le temps d'usinage le plus élevé. L'utilisation de l'axe **C** est bénéfique dans le sens où le temps d'usinage est plus faible lorsqu'il est utilisé. En 5 axes continus avec une orientation à 45° , cela permet de combiner les capacités des axes \mathbf{X}_m et \mathbf{Y}_m . En réalisant une trajectoire programmée dans l'espace articulaire en mode G1, le mouvement bénéficie des capacités cinématiques de l'axe **C**. Un gain de temps est donc réalisé. Le programme utilisant la fonction *POS* associée à la fonction *TRAFOOF* permet d'avoir le temps d'usinage minimal pour l'ensemble de la pièce. Lorsque la fonction *POS* est associée à la fonction *TRAORI* alors le temps est un petit peu plus élevé. Ces résultats peuvent s'expliquer en observant les relevés cinématiques sur une passe (Figure 4.11). Les relevés ont été réalisés pour la passe $X_p = 0$ et un positionnement de la pièce ($p_x = 50$; $p_y = -50$) afin de mieux mettre en avant l'influence de la synchronisation des axes. En effet, les mouvements de **C** sont plus importants pour ce positionnement que lorsqu'on est excentré de l'axe de rotation. Ainsi, le temps de chaque passe est plus long et le ralentissement sur les axes \mathbf{X}_m et \mathbf{Y}_m pour être synchronisé est plus visible.

La programmation à partir des coordonnées articulaires en mode G1 ne permet pas désynchroniser les axes. Ainsi, lorsque le premier axe passe d'une saturation en jerk à une saturation en accélération, tous les autres axes se mettent également à saturer en accélération et les niveaux maximaux en jerk sont plus faibles. Sur la Figure 4.11, le profil en 7 segments apparaît très distinctement. Le temps d'usinage de la passe est de 0.78 s. En utilisant la fonction *POS*, il est possible de désynchroniser les axes mais lorsque la programmation est réalisée dans l'espace des tâches avec la fonction *TRAORI* alors la commande numérique réalise elle-même la transformation géo-

1. Combinaison des mouvements relatifs des axes : application au cas XYZ

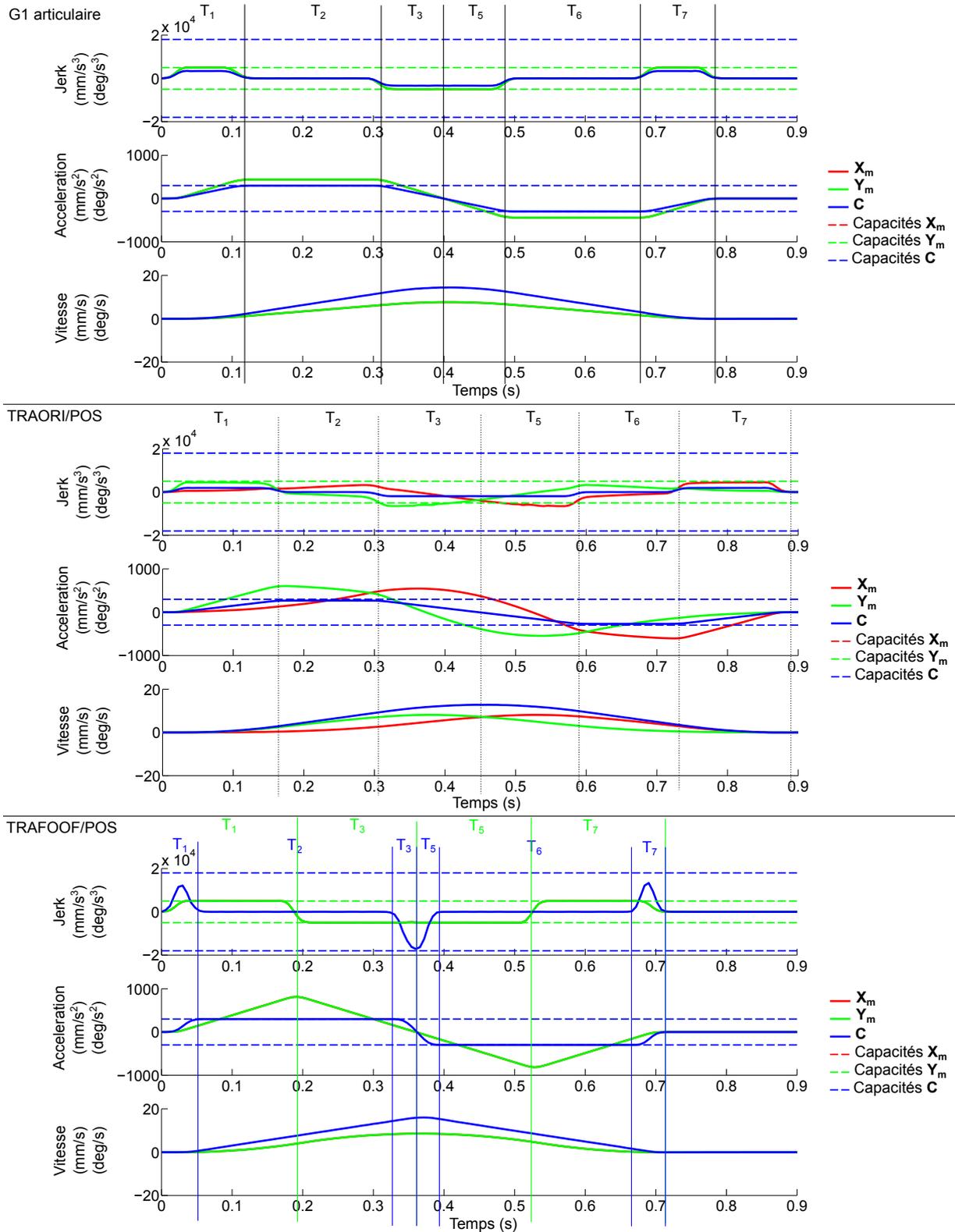


Figure 4.11 – Relevés de mesures sur la passe $X_p = 0$ pour le posage ($p_x = 50$; $p_y = -50$)

métrique inverse dans le but de suivre la trajectoire programmée dans l'espace des tâches, il y a donc une resynchronisation des axes. Ainsi, la Figure 4.11 montre que les niveaux cinématiques de chacun des axes ne sont pas maximaux en même temps. Il est cependant possible de retrouver une similitude avec un profil en 7 segments mais ce ne sont pas les mêmes axes qui saturent en jerk le long de la passe. Le temps d'usinage de la passe est plus important, il est ici de 0.89 s, soit 14% plus élevé qu'en utilisant une programmation G1 articulaire. Avec une programmation de la trajectoire directement dans l'espace articulaire (centre table) et en utilisant la fonction *POS*, la désynchronisation des axes est celle attendue. La Figure 4.11 montre le profil en 7 segments pour l'axe Y_m et celui pour l'axe C . Le profil de l'axe X_m est identique à celui de l'axe Y_m car les capacités cinématiques en jerk des deux axes sont égales. De plus, il n'y a pas de saturation en accélération sur ce profil, les différences de niveaux cinématiques en accélération n'interviennent donc pas. Chacun des axes parcourt la distance qu'il doit réaliser au maximum de ses capacités cinématiques dans le même temps, ce qui permet d'obtenir un temps d'usinage sur la passe plus faible. Il est de 0.71 s, soit 25 % plus faible qu'en réalisant une programmation dans l'espace des tâches avec la fonction *TRAORI*.

Cette étude dans le cas *XYC* a mis en avant l'intérêt d'utiliser les capacités cinématiques des axes de rotation pour augmenter la vitesse relative outil/pièce. Même dans le cas d'un usinage sur une commande numérique industrielle, un gain de temps est observé entre l'usinage positionné ($C = 0$ et $C = 45$) et l'usinage continu en mode G1 articulaire. Pour que le gain de temps soit plus significatif, il est nécessaire de pouvoir désynchroniser chacun des axes. Cependant, les commandes numériques industrielles ne permettent pas encore de réaliser une désynchronisation des axes dans le cas de l'usinage de trajectoires complexes. L'exécution de ce type de trajectoires pourrait néanmoins être réalisée avec une commande numérique dite « ouverte ». En ce sens, la partie suivante propose un algorithme permettant de générer les trajectoires en usinage 5 axes continu. Nous ne pouvons pas exécuter les trajectoires comme nous le souhaitons avec une désynchronisation totale des axes. Dans ce cadre, il n'est pas possible de montrer pleinement le potentiel de la méthode, cependant, pour illustrer le gain potentiel, des essais sont menés sur la commande numérique industrielle et montrent déjà un gain par rapport à un génération de trajectoires classiques.

2 Évolution vers l'optimisation de trajectoires 5 axes en UGV

2.1 Mise en avant des difficultés liées au choix d'une stratégie d'usinage 5 axes continu

Le choix de la stratégie d'usinage d'une pièce doit se définir en fonction de la structure articulée, en particulier de son architecture et de ses caractéristiques cinématiques. La stratégie doit permettre d'usiner toute la pièce le plus rapidement possible tout en atteignant l'état de surface souhaité. Elle se définit par plusieurs paramètres : le positionnement de la pièce dans l'espace de

travail, l'orientation de l'outil par rapport à la pièce et la direction d'avance. Optimiser chacun de ces paramètres n'est pas simple car ils sont inter-dépendants.

Afin de montrer l'influence des divers paramètres, des mesures ont été effectuées sur le centre d'usinage Mikron UCP710 pour la passe $X_p = 0.5$ mm de la surface Manta. Les stratégies d'usinage proposées sont l'usinage 3 axes ($A = 0$ et $C = 0$), l'usinage 5 axes positionné (solution de la méthode obtenue dans le chapitre 3), et l'usinage 5 axes continu avec une orientation de l'outil normal à la surface dans le cas de deux positionnements de la pièce dans l'espace de travail. Les relevés de la vitesse relative outil/pièce dans chacun des cas sont donnés sur la Figure 4.12.

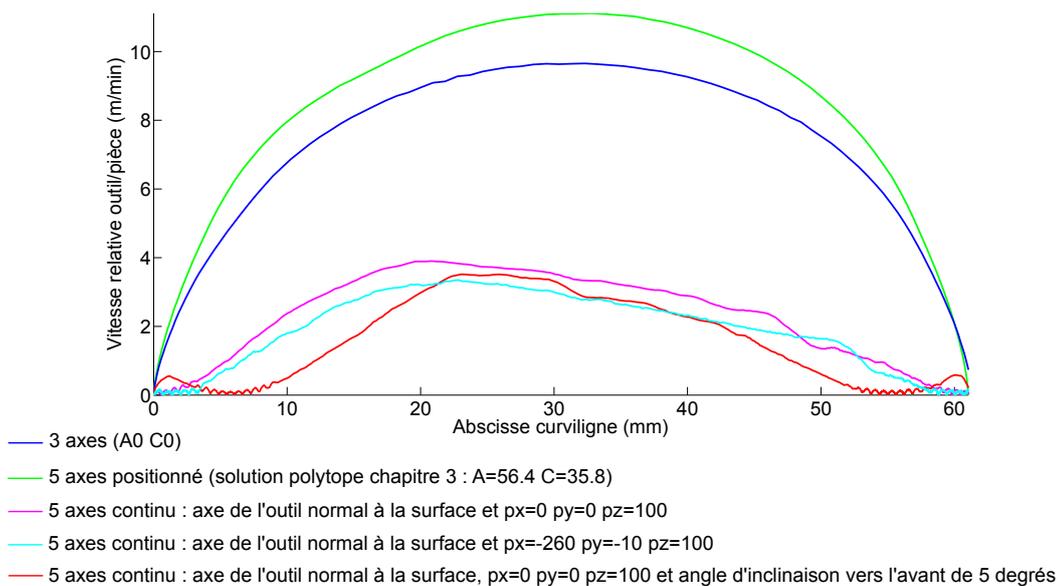


Figure 4.12 – Vitesse relative outil/pièce mesurée pour différentes stratégies

La Figure 4.12 montre que l'utilisation des axes de rotation peut se retrouver bénéfique dans le cas de l'usinage 5 axes positionné comme nous l'avons montré dans le chapitre 3 mais lorsque les axes de rotation bougent, par exemple, pour suivre la normale à la surface alors ils ralentissent le mouvement outil/pièce. En fonction des mouvements réalisés par les axes de rotation, la vitesse relative est plus ou moins réduite. De plus, le positionnement de la pièce dans l'espace de travail a également une influence : lorsque la pièce est positionnée de manière proche des axes de rotation alors les axes de translation ont une amplitude de déplacement plus faible que lorsque la pièce est positionnée de manière excentrée. En effet, les mouvements des axes de translation peuvent être d'une plus grande amplitude pour suivre le déplacement de la pièce induit par les mouvements des axes de rotation.

L'objectif de la méthode proposée dans la suite de ce manuscrit est de trouver le positionnement de la pièce dans l'espace de travail et de générer des mouvements des axes de rotation qui tendent au contraire à augmenter la vitesse relative outil/pièce. La méthodologie proposée est appliquée à l'usinage de la passe $X_p = 0.5$ mm de la surface Manta et sera comparée aux relevés expérimentaux donnés sur la Figure 4.12.

2.2 Optimisation du positionnement de la pièce dans l'espace de travail

Afin de tirer profit des combinaisons des capacités cinématiques des axes de translation, le principe proposé dans le cas XYZ a mis en avant l'intérêt de positionner la pièce pour combiner au mieux les capacités en jerk des axes de rotation dans le mouvement relatif entre l'outil et la pièce. En ce sens, intuitivement, il est nécessaire de positionner la pièce de la façon la plus excentrée des axes de rotation. Pour chaque passe, le jerk bâti/pièce est ainsi plus élevé grâce au bras de levier induit par l'excentration de la pièce et aux mouvements de rotation des axes.

La méthode que nous proposons consiste à trouver le positionnement de la pièce dans l'espace des tâches qui permettent d'obtenir le plus grand jerk dans la direction d'avance moyenne de la passe pour une valeur d'orientation relative outil/pièce donnée. L'algorithme mis en place est décrit sur la Figure 4.13.

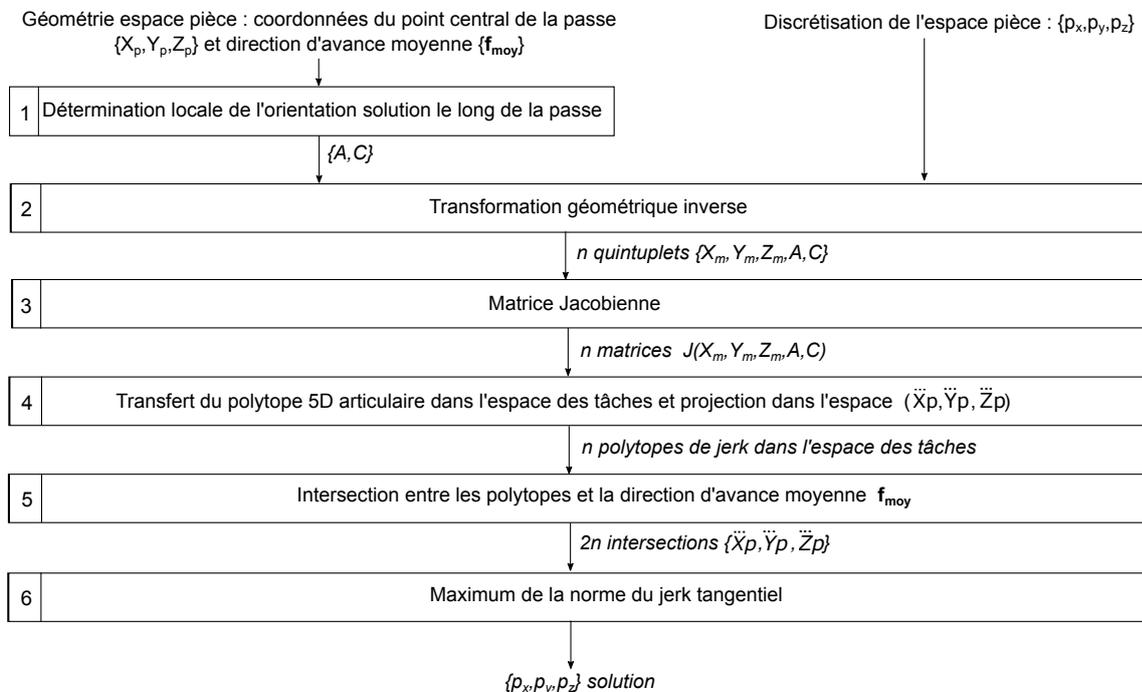


Figure 4.13 – Algorithme du choix du positionnement de la pièce dans l'espace des tâches

A partir des coordonnées du point central de la passe et de la direction d'avance moyenne de la passe étudiée, la première étape consiste à déterminer l'orientation (A, C) qui donne le jerk maximum en usinage 5 axes positionné. Il s'agit de l'intersection entre la direction d'avance moyenne et le polytope de jerk 5 axes positionné obtenu dans l'espace des tâches. Pour cela, il est nécessaire de résoudre le système donné dans l'Equation 3.13 du chapitre 3. Ce choix d'orientation permet d'avoir une solution qui donne une combinaison maximale des capacités des axes de translation de la structure.

La transformation géométrique inverse donne n quintuplets de valeurs (X_m, Y_m, Z_m, A, C) correspondant aux n possibilités de positionnements de la pièce dans l'espace des tâches. Les n valeurs de

positionnements sont issues de la discrétisation de l'espace des tâches dans les 3 directions de l'espace.

Ces n coordonnées articulaires donnent n matrices jacobiennes qui permettent de transférer le polytope articulaire de jerk de l'espace articulaire vers l'espace des tâches. Sa projection dans l'espace $(\ddot{X}_p, \ddot{Y}_p, \ddot{Z}_p)$ donne n polytopes de jerk.

L'intersection entre la direction d'avance moyenne \mathbf{f}_{moy} et chacun des n polytopes trouvés précédemment donne $2n$ intersections puisque les polytopes sont symétriques.

La solution du positionnement est celle qui donne la norme du jerk maximale. La Figure 4.14, à gauche, donne le polytope dans l'espace des tâches qui engendre le jerk maximal. L'orientation (A,C) obtenue oriente le polytope 5 axes positionné pour avoir l'un des sommets dans la direction d'avance moyenne. Cependant, cette orientation ne correspond pas à celle qui permet d'atteindre l'un des sommets du polytope de jerk en 5 axes continu.

L'impact des combinaisons des axes de translation sur la norme du polytope de jerk est très importante. Cette influence se traduit directement par la taille des polytopes obtenus dans l'espace des tâches. La Figure 4.14 montre que le polytope 5 axes positionné est beaucoup plus petit que le polytope 5 axes continu. Ainsi, il est préférable de ne pas choisir par défaut l'orientation (A,C) qui donne le jerk maximal en 5 axes positionné mais de re-déterminer ce couple directement pour chaque positionnement (p_x, p_y, p_z) . Dans l'algorithme proposée sur la Figure 4.13, cela revient à ne pas faire l'étape 1 mais à discrétiser les valeurs possibles de (A,C) . La solution de l'algorithme donne le couple orientation (A,C) et le positionnement (p_x, p_y, p_z) solutions. La Figure 4.14, en bas, donne le polytope solution et les valeurs d'orientation et de positionnement correspondantes pour la première passe centrale de la surface Manta ($X_p = 0.5$ mm). L'intersection entre la direction d'avance et les polytopes ne se fait plus sur l'un des sommets du polytope 5 axes positionné mais sur l'un des sommets du polytope 5 axes continu, au défaut de discrétisation près.

Dans la méthode proposée ci-dessus le positionnement de la pièce dans l'espace de travail dépend de la passe à exécuter sur la pièce puisqu'il dépend de la position de son point milieu. Cependant, il n'est pas envisageable de modifier le positionnement de la pièce pour chaque passe. Ainsi, il est nécessaire de trouver le positionnement moyen sur toute la surface de la pièce à fabriquer. La Figure 4.15 donne l'évolution du positionnement solution obtenue en fonction de X_p , c'est-à-dire en fonction de la passe réalisée.

Les capacités en jerk de l'axe **C** sont 10 fois plus importantes que les capacités en jerk de l'axe **A** ce qui implique qu'il est préférable d'excentrer au maximum la pièce de l'axe de rotation **C**. Cette valeur n'évolue pas en fonction de la passe car il s'agit d'une des bornes de la discrétisation pour respecter les dimensions de l'espace de travail de la Mikron UCP710. Afin d'avoir la distance maximale entre l'axe de rotation **A** et la pièce, il est nécessaire d'avoir la surface de la pièce à usiner la plus basse possible, ce qui donne théoriquement pour toutes les passes un positionnement p_z nul (indépendamment des conditions pratiques de positionnement et de fixation de la pièce sur la table). Le positionnement p_y solution évolue en fonction de la passe car le point central de la trajectoire de chaque passe se décale. La solution obtenue ne correspond pas directement au

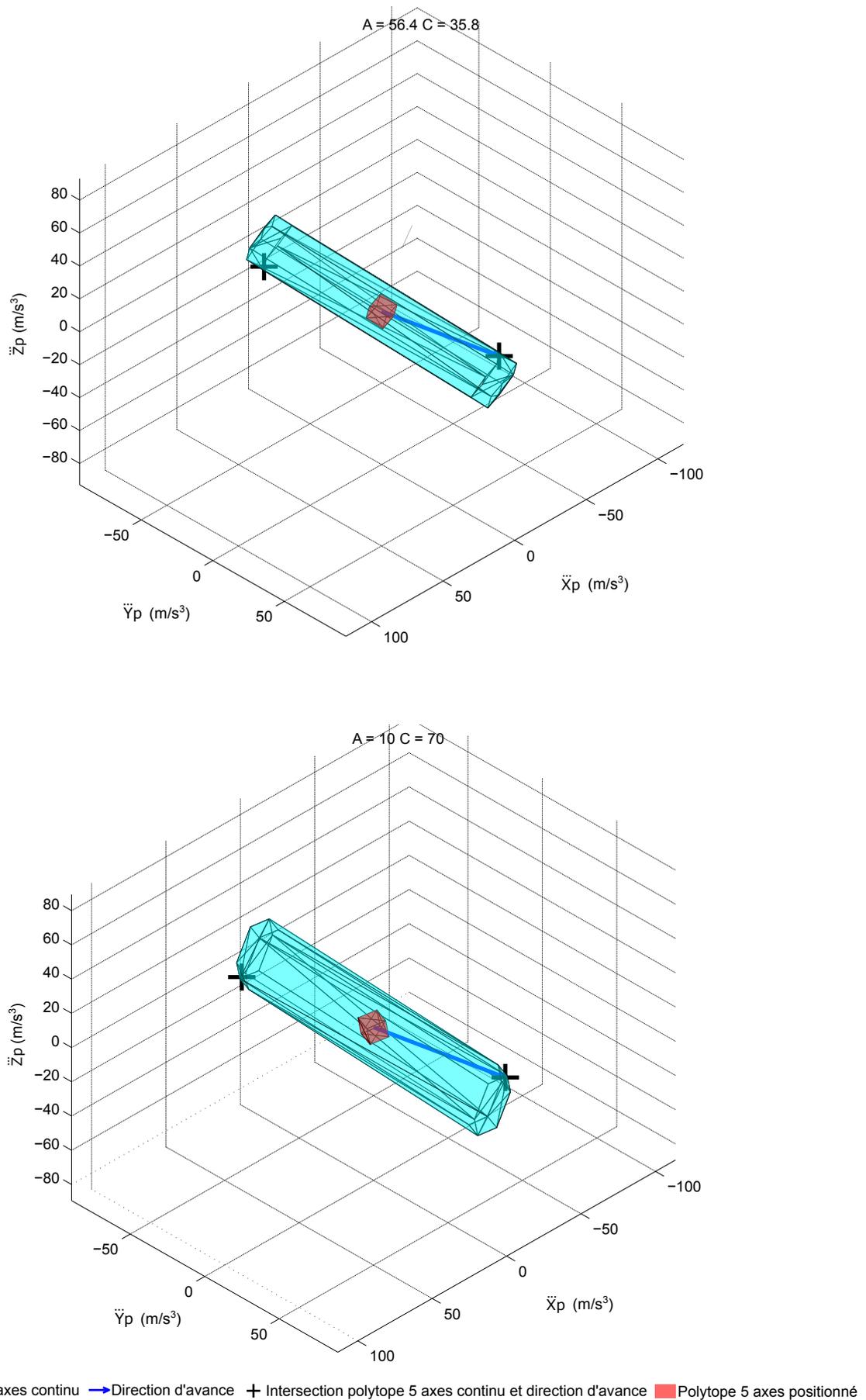


Figure 4.14 – Polytopes de jerk pour deux combinaisons positionnement et orientation

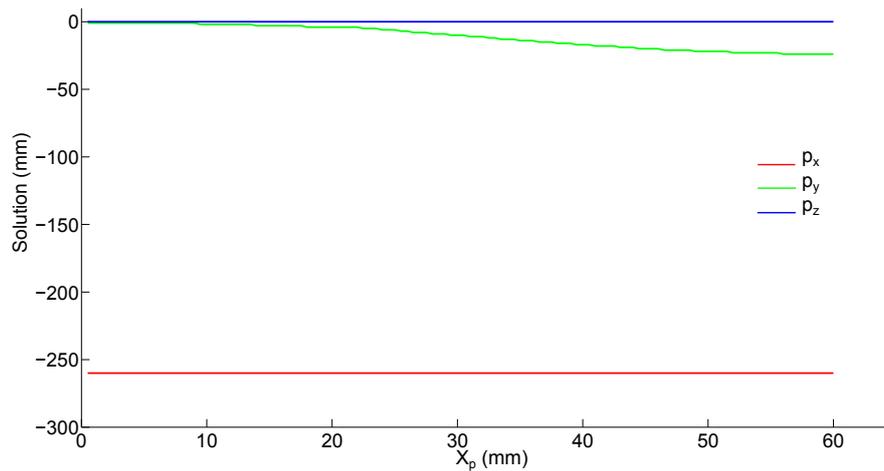


Figure 4.15 – Évolution du positionnement solution en fonction de la passe à réaliser

décalage entre chaque pièce car les valeurs de A et C choisies n'évoluent pas mais sont les valeurs $A = 10$ et $C = 70$.

En résumé, la méthode proposée permet de déterminer le positionnement de la pièce dans l'espace de travail qui donne le jerk tangentiel maximal dans l'espace des tâches. Cette solution dépend de la direction d'avance et de l'orientation relative entre l'outil et la pièce.

2.3 Optimisation de la direction d'avance

La direction d'avance est nécessairement liée aux choix de l'orientation outil/pièce puisque les positions des axes de rotation sont déterminées dans le but de faire coïncider l'un des sommets du polytope avec la direction d'avance. La direction solution est la direction dans laquelle le vecteur \mathbf{f} touche l'un des deux sommets les plus éloignés de l'origine de l'espace des tâches. La Figure 4.16 montre les directions solutions obtenues pour deux positions fixes des axes de rotation.

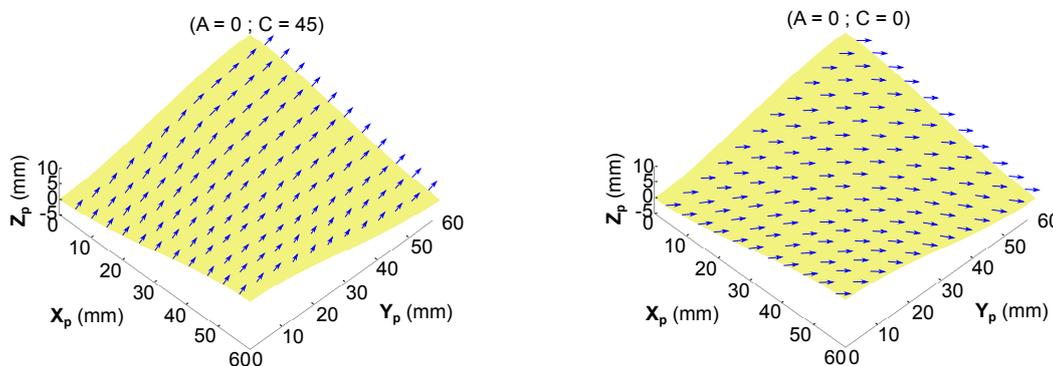


Figure 4.16 – Direction d'avance locale pour maximiser le jerk en fonction de A et C

Afin de conserver un contact tangent entre l'outil et la surface et ainsi éviter les interférences, la vitesse d'avance est nécessairement dans le plan tangent à la surface au point de contact. La

direction varie dans ce plan dans le but d'atteindre le point le plus éloigné du polytope. Les directions obtenues sur la Figure 4.16 intersectent ainsi avec l'un des sommets du polytope de jerk. Sachant qu'il n'est pas toujours possible de garantir l'orientation optimale quelle que soit la direction d'avance, nous proposons de modifier la direction d'avance pour suivre les mouvements maximaux possibles par les axes de rotation. Le principe est alors identique à l'algorithme utilisé dans le cas (XYC), la seule différence consiste à imposer la direction d'avance dans le plan local tangent à la trajectoire.

Ce principe est très intéressant sur une passe mais la direction d'avance va évoluer le long de chaque passe ce qui ne va pas permettre un recouvrement uniforme de la surface. La hauteur de crête va ainsi avoir tendance à évoluer le long de la passe. Pour éviter d'avoir de trop grandes disparités, il serait nécessaire de déterminer au préalable sur chaque pièce des zones où la direction d'avance évolue peu. Cela permettrait d'avoir des zones avec une hauteur de crête maximale quasiment constante.

Afin de montrer l'intérêt de l'utilisation des mouvements des axes de rotation pour définir des trajectoires adaptées, nous avons choisi par la suite d'imposer la direction d'avance. Dans le cas de la surface Manta, la stratégie est ainsi une stratégie par plans parallèles au plan (Y_p, Z_p) . L'optimisation consiste à venir orienter l'outil pour avoir les plus grandes capacités de jerk dans la direction imposée.

2.4 Optimisation de l'orientation relative outil/pièce

Le chapitre 3 a proposé une méthode pour choisir l'orientation relative outil/pièce dans le cas de l'usinage 5 axes positionné. Le principe consiste à faire coïncider l'un des sommets du polytope avec la direction d'avance $\mathbf{f}_{\text{moyen}}$. Lorsque la trajectoire à usiner est une droite, nous avons vu au paragraphe 4.4 du chapitre 3 que la solution était optimale mais lorsqu'il y avait une variation de courbure alors la direction moyenne n'est plus optimale. Localement, les solutions d'orientation évoluent le long de la passe. Cependant, il ne faut pas que les axes de rotation deviennent limitant pour la vitesse relative outil/pièce dans le passage entre deux solutions locales successives. Ainsi, nous proposons de modifier l'orientation de l'outil le long de la passe pour essayer de profiter au maximum des combinaisons spatiales des axes de rotation. Le principe consiste à générer les déplacements maximaux dans l'espace de travail qui augmente la vitesse relative outil/pièce. Les différentes étapes de l'algorithme proposé sont données sur la Figure 4.17.

A partir de la géométrie de la pièce dans l'espace pièce définissant les coordonnées de la passe à réaliser (X_p, Y_p, Z_p) et la direction d'avance moyenne sur la passe, la première étape consiste à déterminer le positionnement de la pièce dans l'espace de travail et l'orientation A et C correspondante pour le point milieu de la trajectoire. Pour cela, il faut utiliser l'algorithme décrit précédemment sur la Figure 4.13. On obtient ainsi l'orientation solution (A, C) et le positionnement de la pièce dans l'espace de travail (p_x, p_y, p_z) .

Le but étant de donner des mouvements aux axes de rotation pour augmenter la vitesse relative outil/pièce sans toutefois qu'ils deviennent limitants, le principe consiste à augmenter de manière

itérative les déplacements possibles des axes de rotation jusqu'à ce qu'ils deviennent limitants. Pour cela, la deuxième étape réside dans le choix d'une distance à parcourir. Partant d'une longueur très faible ($L_A = 0.1^\circ$ et $L_C = 0.1^\circ$ par exemple), les mouvements des axes de rotation sont centrés de part et d'autre de la position correspondant à la solution locale trouvée précédemment dans le but d'augmenter la vitesse relative outil/pièce. On obtient ainsi les valeurs minimales et maximales de chaque axe de rotation (Equation 4.9). Le sens de parcours s'obtient ensuite en étudiant le signe des sommets du polytope articulaire qui ont conduit à générer dans l'espace des tâches la valeur de jerk maximale.

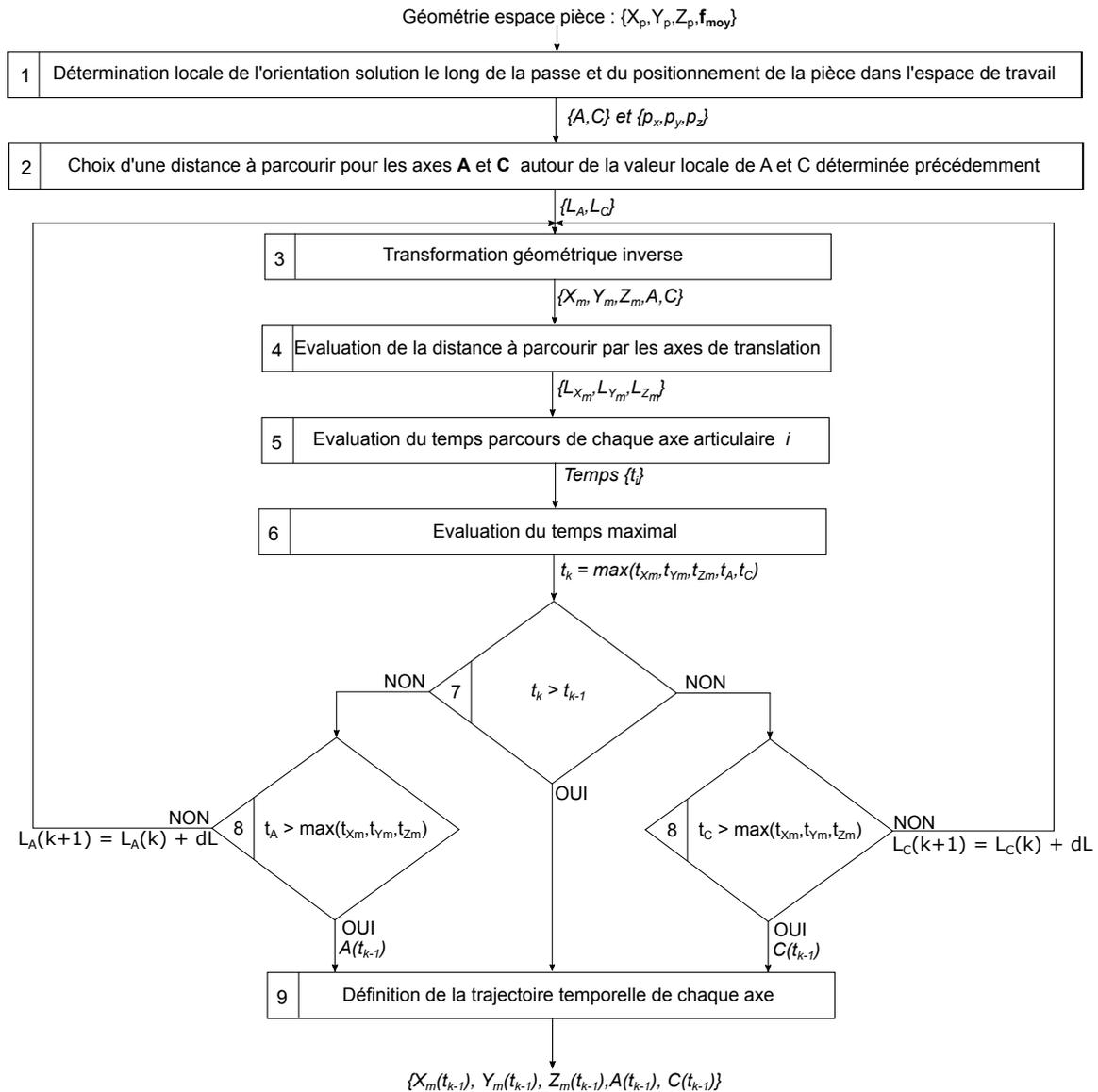


Figure 4.17 – Algorithme du choix de l'orientation relative outil/pièce en usinage 5 axes continu

$$\begin{cases} \min(A) = A - \frac{L_A}{2} & \text{et} & \max(A) = A + \frac{L_A}{2} \\ \min(C) = C - \frac{L_C}{2} & \text{et} & \max(C) = C + \frac{L_C}{2} \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans l'étape 3, la transformation géométrique inverse permet d'obtenir les variations articulaires correspondantes (X_m, Y_m, Z_m, A, C). En effectuant un cumul des longueurs à parcourir pour chacun des axes, on obtient les longueurs ($L_{X_m}, L_{Y_m}, L_{Z_m}, L_A, L_C$).

L'étape 5 consiste à utiliser une loi de type bang-bang de jerk sur cette longueur pour obtenir une estimation du temps de parcours de chaque axe, t_i , en fonction de ses capacités cinématiques. Parmi les temps de chaque axe, le temps maximal sera nécessairement l'estimation la plus basse du temps d'usinage de la passe.

Si ce temps t_k est supérieur au temps obtenu avec une plus petite variation des axes de rotation t_{k-1} alors la meilleure trajectoire est celle obtenue à l'itération précédente, c'est-à-dire celle donnant le temps t_{k-1} . Si ce n'est pas le cas, cela signifie que l'augmentation de l'amplitude des axes de rotation a permis un gain de temps. Ainsi, si ce n'est pas l'axe de rotation **A** ou l'axe de rotation **C** qui est limitant alors il est peut être possible d'avoir des mouvements encore plus importants des axes de rotation sans qu'ils ne deviennent limitants. Ainsi, l'étape 8 consiste à augmenter les mouvements des axes de rotation et à réitérer les étapes précédentes avec une nouvelle valeur de mouvement des axes de rotation.

Cet algorithme donne la définition de la trajectoire de chaque axe de manière temporelle en effectuant une approximation avec le calcul d'une loi en bang-bang de jerk. Cette approximation est valable lorsque les déplacements des axes ne subissent pas d'inversion. En ce sens, il est nécessaire de vérifier que les mouvements des axes de rotation ne génèrent pas des déplacements des axes de translation dont la variation n'est plus monotone. Cette condition impose donc nécessairement d'avoir initialement des déplacements des axes avec une variation monotone.

De plus, en effectuant la transformation géométrique, les points retrouvés dans l'espace des tâches ne sont pas nécessairement exactement sur la trajectoire initiale à réaliser. Pour éviter ce problème, nous proposons de partir de l'estimation de la trajectoire réalisée en 5 axes positionnés et de déterminer l'évolution de l'abscisse curviligne s en fonction du temps dans ce cas. Les évolutions des axes **A** et **C** sont ensuite obtenues en fonction de l'abscisse curviligne à partir des évolutions temporelles obtenues précédemment.

La trajectoire obtenue par cet algorithme pour la passe $X_p = 0.5$ mm donne initialement une amplitude de 3.4 degrés sur les mouvements de l'axe **A** et une amplitude de -10.7 degrés sur les mouvements de l'axe **C**. Cependant, les déplacements de l'axe **A** engendrent des modifications de la variation des déplacements de l'axe **Z_m** : il n'est donc pas possible de déplacer l'axe **A** sans risquer d'augmenter le temps nécessaire à l'axe **Z_m** pour parcourir le trajet, ce qui augmenterait le temps total.

Les amplitudes varient autour des valeurs moyennes $A = 10$ et $C = 70$ pour un positionnement de la pièce dans l'espace de travail de ($p_x = -260, p_y = -10, p_z = 100$). Cette trajectoire a été testée sur le centre d'usinage Mikron UCP710 avec un format de description polynomiale de degré 5.

2.5 Mise en œuvre expérimentale

La passe $X_p = 0.5$ mm est la passe de la surface Manta qui a la plus forte variation de la direction d'avance \mathbf{f} . Ainsi, en usinage 5 axes positionné, nous avons vu dans le chapitre 3 que le gain de temps était plus faible que pour les autres passes puisqu'il n'était pas possible d'atteindre l'un des sommets du polytope de jerk sur toute la passe. L'objectif est ici de montrer qu'en utilisant les mouvements des axes de rotation **A** et **C**, il est possible d'avoir un gain de temps supplémentaire par rapport à la solution obtenue au chapitre 3 en usinage 5 axes positionné.

Comme pour les tests effectués en usinage 5 axes positionné dans le chapitre 3, la description de la trajectoire est réalisée en utilisant une interpolation polynomiale afin de ne pas être limité par la taille des segments pendant l'exécution de la trajectoire. Les coordonnées du point piloté (X_p, Y_p, Z_p) et les coordonnées des axes de rotation (A, C) sont ainsi décrites par des fonctions polynomiales de degré 5. Les évolutions des vitesses mesurées de chaque axe articulaire sont données sur la Figure 4.18 dans le cas de l'usinage 5 axes continu obtenu par la méthode proposée. Les vitesses des différents axes de translation contribuent de manière équilibrée au mouvement relatif entre l'outil et la pièce. L'axe de rotation **C** contribue au mouvement sans toutefois ralentir les autres axes.

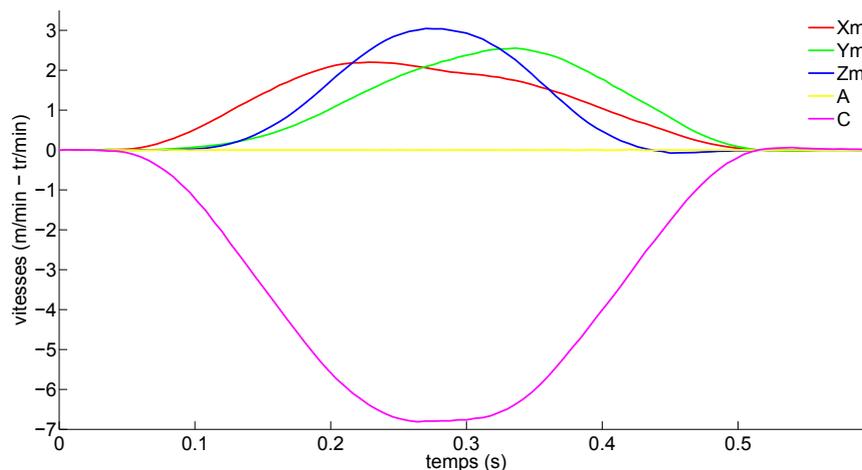


Figure 4.18 – Évolution des vitesses mesurées pour chaque axe articulaire

La Figure 4.19 montre les vitesses relatives outil/pièce relevées dans le cas de l'usinage 3 axes, de l'usinage 5 axes positionné et dans le cas de l'usinage 5 axes continu.

En se basant sur la solution locale $A = 10$ et $C = 70$, correspondant au meilleur couple positionnement et jerk outil/pièce moyen sur la trajectoire alors la solution proposée dans le cas de l'usinage 5 axes continu permet d'augmenter la vitesse relative outil/pièce. Ces résultats montrent qu'en définissant de manière adéquate le positionnement de la pièce dans l'espace de travail, la direction d'avance et l'orientation relative entre l'outil et la pièce, il est possible d'augmenter la vitesse relative outil/pièce en usinage 5 axes continu. Les temps d'usinage sont ainsi diminués (Tableau 4.3).

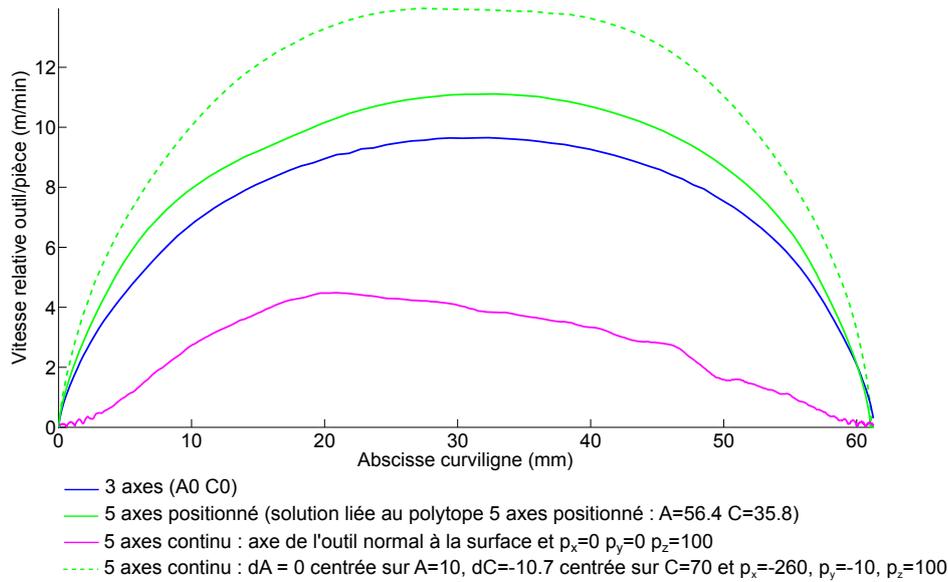


Figure 4.19 – Vitesses relatives outil/pièce mesurées sur la passe $X_p = 0.5$ mm pour différentes stratégies

	3 axes	5 axes positionné	5 axes continu normal à la surface	5 axes continu solution
Temps (s)	0.78	0.67	6	0.51

Tableau 4.3 – Temps d’usinage de la passe $X_p = 0.5$ mm de la Manta pour différentes stratégies

En conclusion, cette méthode permet un gain de temps sur le trajet parcouru mais également sur la capacité à atteindre la vitesse d’avance souhaitée. Si l’on souhaite par exemple avoir une vitesse d’avance de 10 m/min pour avoir les conditions de coupe souhaitées alors il n’est pas possible de l’atteindre en 3 axes. Il est possible de l’atteindre sur environ 30% de la trajectoire en usinage 5 axes positionné et sur quasiment 70% en usinage 5 axes continu avec ces conditions. Ainsi, cette méthode permet de mieux maîtriser le procédé et la qualité de la pièce usinée.

L’usinage a été réalisé sur la pièce complète. Pour l’ensemble des passes, la valeur centrale de A est de 10° et la valeur centrale de C est de 70° . Les variations de l’axe A sont choisies nulles pour éviter d’avoir des inversions sur les axes de translation car ce phénomène augmenterait le temps d’usinage. Les variations de l’axe C sont différentes pour chaque passe. Elles vont de -10.9° pour la première passe à -13° pour la dernière passe. Le Tableau 4.4 donne les temps obtenus dans le cas de l’usinage 3 axes, de l’usinage 5 axes positionné par passe et dans le cas de l’usinage 5 axes continu.

	3 axes	5 axes positionné	5 axes continu
Temps	1 min 07 s	1 min 03 s	50 s

Tableau 4.4 – Temps d’usinage de la surface Manta pour différentes stratégies

Les temps relevés montrent un gain de temps d’environ 6% en usinage 5 axes positionné et un gain

de temps de 34% en usinage 5 axes continu. La méthode proposée permet ainsi d'obtenir un gain de temps significatif tout en gardant la qualité du surface souhaitée (Figure 4.20).

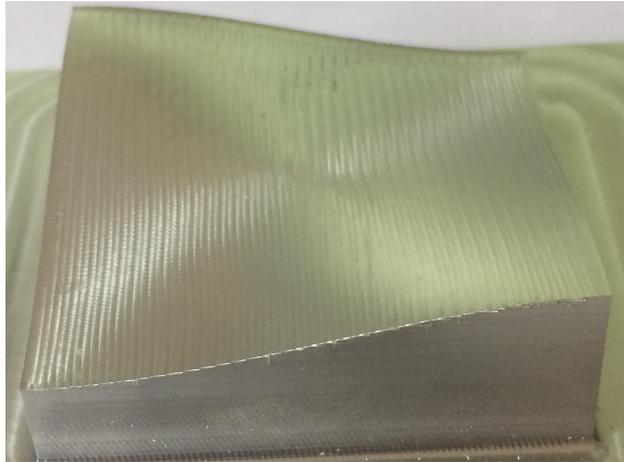


Figure 4.20 – Surface Manta usinée en 5 axes continu avec la méthode proposée

Conclusion

Ce chapitre a proposé une méthode basée sur les polytopes de manipulabilité cinématique pour générer des trajectoires combinant les capacités cinématiques de tous les axes de la structure articulée et ainsi augmenter la vitesse relative outil/pièce. Le principe a tout d'abord été illustré sur une structure simplifiée composée de deux axes de translation X_m et Y_m et d'un axe de rotation C . La méthode a été appliquée pour usiner une surface plane, carrée, de 100 mm de côté. Les solutions locales sont obtenues par les polytopes de manipulabilité cinématique et la causalité est appréhendée en simulant les mouvements de chacun des axes avec une loi optimale de type bang-bang de jerk. Cette méthode permet de choisir le positionnement de la pièce dans l'espace de travail, la direction d'avance et le positionnement de l'axe de rotation C . Les essais expérimentaux réalisés sur le centre d'usinage Mikron UCP ont montré l'intérêt de la méthode et les difficultés de programmation pour désynchroniser les axes. En effet, dans la plupart des commandes numériques industrielles actuelles, tous les axes sont synchronisés, ce qui a pour conséquences de ne pas pouvoir avoir une saturation en jerk sur un axe et une saturation en accélération sur un autre axe. Or, étant donné que les niveaux cinématiques des axes de rotation sont assez faibles, une saturation en accélération apparaît rapidement. Si les axes de translation se mettent alors à saturer en accélération alors leurs vitesses sont plus faibles que s'ils pouvaient encore saturer en jerk. Des essais expérimentaux ont néanmoins réussi à montrer un gain de temps en utilisant des fonctions de désynchronisation des axes mais ces fonctions se limitent à des trajectoires simples.

Dans le cas de la structure complète, la méthode a été adaptée afin de choisir le positionnement de la pièce dans l'espace de travail, la direction d'avance et l'orientation relative entre l'outil et la pièce. Contrairement à l'usinage 5 axes positionné proposé dans le chapitre 3, les axes de rotation évoluent le long de la passe au maximum de leurs capacités cinématiques pour augmenter le jerk

induit par la composition du mouvement. Les résultats proposés mettent en avant la forte interaction entre le positionnement de la pièce, la direction d'avance et l'orientation relative outil/pièce. Ainsi, il est préférable d'ajuster la direction d'avance pour suivre les mouvements maximaux des axes de rotation et ainsi augmenter le jerk outil/pièce et diminuer le temps d'usinage.

Conclusions et perspectives

Les travaux de cette thèse se sont concentrés sur la génération et l'exécution de trajectoires d'usinage à grande vitesse en multi-axes. Actuellement, la plupart des méthodes de génération de trajectoires sont basées sur des critères difficilement exploitables pour tout type de structures poly-articulées. La synthèse de l'état de l'art présentée dans le tableau 1.2 traduit le manque de généralité des méthodes pour choisir la stratégie d'usinage la plus adaptée à la cinématique particulière de chaque structure. Ainsi, le manque d'intégration de cette diversité et l'insuffisance de formalisme générique ont conduit la problématique de cette thèse : « Comment adapter la stratégie d'usinage en fonction des contraintes cinématiques de la structure poly-articulée sur laquelle la trajectoire sera exécutée pour augmenter la vitesse relative outil/pièce ? ».

La démarche que nous avons proposée est basée sur le formalisme des polytopes de manipulabilité cinématique. Ce formalisme se veut être aussi simple et générique que possible pour représenter les capacités cinématiques des axes de tout type de structures poly-articulées. Il permet de modéliser simultanément l'ensemble des capacités cinématiques de tous les axes de la structure sur les trois niveaux cinématiques pouvant limiter la vitesse relative outil/pièce (vitesse, accélération et jerk). Une première étude réalisée sur un parabolôïde hyperbolique a mis en avant que le seul paramètre cinématique limitant la vitesse relative outil/pièce est le jerk. Ainsi, l'analyse de la géométrie des polytopes de jerk conduit à définir des trajectoires réduisant le temps d'usinage.

L'exploitation de ce formalisme a permis de définir des trajectoires 5 axes positionné sur des pièces de formes tendues pour des structures avec une architecture sérielle. Nous avons validé expérimentalement la méthode proposée sur deux pièces tests en comparant les temps d'exécution induits par un usinage initial standard et avec la méthode que nous proposons. Pour des structures avec une architecture hybride ou parallèle, la réalisation d'un mouvement rectiligne dans l'espace des tâches impose des mouvements des axes de rotation. Ces mouvements modifient la forme du polytope de jerk et le décalent de l'origine de l'espace des tâches. Ainsi, l'évaluation de la capacité en jerk n'est plus simplement la distance entre le centre du polytope et la peau du polytope mais entre l'origine et la peau du polytope. L'estimation de ce décalage du centre du polytope impose de réaliser une interpolation de la trajectoire et d'avoir une bonne estimation de la vitesse réelle de chacun des axes ce qui peut être très coûteux en temps de calcul. Ainsi, nous proposons de ne plus seulement analyser la forme du polytope mais de tenir compte de la causalité en calculant le temps global de réalisation du mouvement d'un axe avec une loi de type bang-bang de jerk. La méthode proposée a été validée théoriquement sur le centre d'usinage Fatronik Verne.

Les développements réalisés en usinage 5 axes continu sont basés sur le même principe que

pour l'usinage 5 axes positionné sur une architecture parallèle. En effet, les mouvements des axes de rotation et la causalité engendrent également des décalages des centres des polytopes. Pour éviter des calculs trop coûteux, une estimation du temps de parcours de chaque axe est donc réalisée de manière simple grâce à une loi de commande de type bang-bang de jerk et conduit à choisir le positionnement de la pièce dans l'espace de travail, la direction d'avance et l'orientation relative outil/pièce qui donne lieu à une augmentation de la vitesse relative outil/pièce. Ainsi, contrairement à ce qui se fait actuellement dans la littérature, nous proposons d'utiliser les mouvements des axes de rotation pour augmenter la vitesse relative outil/pièce. Ce principe nécessite néanmoins de pouvoir désynchroniser les axes car sinon les axes de rotation risquent d'imposer des ralentissements selon leurs limites cinématiques, ce qui va freiner les mouvements des axes de translation. Des essais expérimentaux sur le centre d'usinage Mikron UCP710 ont néanmoins mis en avant l'intérêt de la méthode et un gain de temps sur la réalisation de la trajectoire. Ainsi, la montée en vitesse pour atteindre la vitesse relative outil/pièce souhaitée est plus faible, ce qui permet de la maintenir plus longtemps et ainsi de mieux maîtriser le procédé et donc la qualité de la pièce.

Un regard critique peut être porté sur les méthodes proposées en usinage 5 axes positionné pour des architectures parallèles et en usinage 5 axes continu notamment car elles ne peuvent pas être appliquées directement sur la plupart des commandes numériques industrielles actuelles. Cependant, le développement d'une commande numérique ouverte pourrait permettre de désynchroniser les axes. Des essais complémentaires pourraient ainsi être développés au LURPA afin de conforter expérimentalement les développements réalisés et d'améliorer la méthode dans le cas de formes de pièces plus complexes.

En revanche, la méthode proposée en 5 axes positionné pour des architectures sérielles est directement exploitable par des programmeurs en FAO pour choisir l'orientation qui permette de faire coïncider la direction d'avance moyenne avec l'un des sommets du polytope en jerk correspondant à la machine sur laquelle l'usinage va être réalisé. Dans le but de compléter l'étude sur la relimitation de l'orientation de l'outil dans l'espace des tâches, il serait intéressant de tenir compte de la hauteur de crête souhaitée et de proposer d'autres types d'outils et non plus seulement des outils hémisphériques. En fonction du type d'outil, il serait alors indispensable de relimiter de manière plus restrictive les variations d'orientations possibles afin d'éviter toute collision locale. Ainsi, cette méthode permettrait à un programmeur en FAO de choisir de manière plus efficace la stratégie à mettre en place, c'est-à-dire en particulier l'orientation des axes de rotation dans le cas de l'usinage 5 axes positionné en fonction de la géométrie de la pièce à usiner et des capacités cinématiques de la structure poly-articulée.

Afin de faciliter l'utilisation de polytopes de manipulabilité et d'offrir une représentation visuelle simplifiée pour le programmeur en FAO, il semble indispensable de donner à l'utilisateur uniquement la direction et l'orientation correspondant à la moyenne ou d'effectuer au préalable un partitionnement de la pièce pour ne pas avoir une direction d'avance évoluant trop. Une interface graphique pourrait permettre une visualisation des polytopes en usinage 5 axes positionné et la direction d'avance moyenne sur la pièce. Une estimation du gain potentiel au niveau du jerk tangentiel et de son impact sur le temps d'usinage total de la pièce pourrait ainsi faciliter les choix

du programmeur. Cet outil serait uniquement un indicateur et l'interprétation du résultat serait à réaliser par le programmeur en fonction de son expérience.

De plus, à l'inverse, à partir de la géométrie d'une pièce et de la stratégie initiale choisie, les polytopes permettent de choisir facilement la structure poly-articulée la plus adaptée pour réaliser l'usinage le plus rapidement possible. Ainsi, en fonction des disponibilités de chaque machine, il serait intéressant de planifier la gestion du parc machine d'une entreprise en prenant en compte cet indicateur.

En ce sens, ce formalisme pourrait être intégré dans le standard STEP-NC. En effet, ce standard permet d'échanger directement de manière bidirectionnelle les informations liées jusqu'alors à la CAO, à la FAO, et à la MOCN. Les polytopes de manipulabilité cinématique peuvent être un indicateur pour choisir la machine la plus adaptée à une pièce ou pour décrire la trajectoire la plus adaptée à une machine.

Références

- Affouard, A., Duc, E., Lartigue, C., Langeron, J.-M. et Bourdet, P. (2004). « Avoiding 5-axis singularities using tool path deformation ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 44(4), p. 415–425 (cf. p. 23).
- Angeles, J. (2002). « Fundamentals of Robotics Mechanical Systems : Theory, Methods, and Algorithms ». *Second Edition, Springer Verlag*, ISBN 9781475727081 (cf. p. 48).
- Asada, H. et Slotine, J.-J.E. (1986). « Robot analysis and control ». *John Wiley & Sons*, ISBN 10 : 0471830291 (cf. p. 41).
- Béarée, R. (2005). « Prise en compte des phénomènes vibratoires dans la génération de commande des machines-outils à dynamique élevée ». *Thèse de doctorat : Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers - Centre de Lille* (cf. p. 13).
- Béarée, R. et Olabi, A. (2013). « Dissociated jerk-limited trajectory applied to time-varying vibration reduction ». *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 29(2), p. 444–453 (cf. p. 17).
- Barki, H., Denis, F. et Dupont, F. (2009). « Contributing vertices-based Minkowski sum computation of convex polyhedra ». *Computer-Aided Design*, 41(7), p. 525–538 (cf. p. 63, 64).
- Bayle, B. (2001). « Modélisation et commande cinématiques des manipulateurs mobiles à roues ». *Thèse de doctorat : Université Paul Sabatier, Toulouse* (cf. p. 47).
- Beudaert, X. (2013). « Commande numérique ouverte : interpolation optimisée pour l'usinage 5 axes grande vitesse des surfaces complexes ». *Thèse de doctorat : Ecole Normale Supérieure de Cachan* (cf. p. 2, 15, 17, 18, 20).
- Beudaert, X., Pechard, P.-Y. et Tournier, C. (2011). « 5-Axis tool path smoothing based on drive constraints ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 51(12), p. 958–965 (cf. p. 20, 35, 36).
- Bi, Q.-Z., Wang, Y.-H. et Ding, H. (2010). « A GPU-based algorithm for generating collision-free and orientation-smooth five-axis finishing tool paths of a ball-end cutter ». *International Journal of Production Research*, 48(4), p. 1105–1124 (cf. p. 29).
- Bohez, E.L.J. (2002). « Five-axis milling machine tool kinematic chain design and analysis ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42(4), p. 505–520 (cf. p. 10).

- Bohez, E.L.J., Makhanov, S.S. et Sonthipermpon, K. (2000). « Adaptive nonlinear tool path optimization for five-axis machining ». *International Journal of Production Research*, 38(17), p. 4329–4343 (cf. p. 16).
- Boisselier, D., Sankaré, S. et Engel, T. (2014). « Improvement of the Laser Direct Metal Deposition Process in 5-axis Configuration ». *Physics Procedia*, 56, p. 239–249 (cf. p. 10).
- Bonnemains, T. (2009). « Etude du comportement mécanique des machines outils à structure parallèle en Usinage Grande Vitesse ». *Thèse de doctorat : Université Blaise Pascal - Clermont II* (cf. p. 13).
- Briot, S, Pashkevich, A. et Chablat, D. (2010). « Optimal Technology-Oriented Design of Parallel Robots for High-Speed Machining Applications ». *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2010)* (cf. p. 53).
- Castagnetti, C. (2008). « Amélioration du comportement cinématique des machines par l'optimisation des trajets d'usinage 5 axes ». *Thèse de doctorat : Université Blaise Pascal - Clermont II* (cf. p. 34).
- Castagnetti, C., Duc, E. et Ray, P. (2008). « The Domain of Admissible Orientation concept : A new method for five-axis tool path optimisation ». *Computer-Aided Design*, 40(9), p. 938–950 (cf. p. 33, 36).
- Chaves-Jacob, J., Linares, J.-M. et Sprauel, J.-M. (2013). « Improving tool wear and surface covering in polishing via toolpath optimization ». *Journal of Materials Processing Technology*, 213(10), p. 1661–1668 (cf. p. 9).
- Chen, L., Xu, K. et Tang, K. (2015). « Collision-free tool orientation optimization in five-axis machining of bladed disk ». *Journal of Computational Design and Engineering*, 2(4), p. 197–205 (cf. p. 29).
- Chiou, C.-J. et Lee, Y.-S. (2002). « A machining potential field approach to tool path generation for multi-axis sculptured surface machining ». *Computer-Aided Design*, 34(5), p. 357–371 (cf. p. 30).
- Denkena, B., Böß, B. et Hoppe, P. (2011). « Optimization of non-cutting tool paths ». *CIRP CMMO* (cf. p. 31, 36).
- Ding, S., Mannan, M.A., Poo, A.N., Yang, D.C.H. et Han, Z. (2005). « The implementation of adaptive isoplanar tool path generation for the machining of free-form surfaces ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 26(7), p. 852–860 (cf. p. 27).
- Doty, K. L., Melchiorri, C., Schwartz, E. M. et Bonivento, C. (1995). « Robot manipulability ». *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(3), p. 462–468 (cf. p. 41).
- Dwivedi, R. et Kovacevic, R. (2006). « An expert system for generation of machine inputs for laser-based multi-directional metal deposition ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46(14), p. 1811–1822 (cf. p. 10).

- Erkorkmaz, K. et Altintas, Y. (2001). « High speed CNC system design. Part I : jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 41(9), p. 1323–1345 (cf. p. 17).
- Fukuda, K. (2004). « From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes ». *Journal of Symbolic Computation*, 38(4), p. 1261–1272 (cf. p. 50).
- Gasparetto, A. et Zanotto, V. (2008). « A technique for time-jerk optimal planning of robot trajectories ». *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 24(3), p. 415–426 (cf. p. 34, 36).
- Gilles, P., Cohen, G., Monies, F. et Rubio, W. (2013). « Torus cutter positioning in five-axis milling using balance of the transversal cutting force ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 66(5), p. 965–973 (cf. p. 30).
- Grandguillaume, L., Lavernhe, S. et Tournier, C. (2015a). « Kinematical smoothing of rotary axis near singularity point ». *12th International conference on High Speed Machining* (cf. p. 24).
- Grandguillaume, L., Lavernhe, S., Quinsat, Y. et Tournier, C. (2015b). « Mold Manufacturing Optimization : A Global Approach of Milling and Polishing Processes ». *Procedia CIRP*, 31, p. 13–18 (cf. p. 20).
- Grandguillaume, L., Lavernhe, S. et Tournier, C. (2016). « A tool path patching strategy around singular point in 5-axis ball-end milling ». *International Journal of Production Research*, 1, p. 1–11 (cf. p. 20, 24).
- Gupta, P., Janardan, R., Majhi, J. et Woo, T. (1995). « Efficient geometric algorithms for workpiece orientation in 4- and 5-axis NC-machining ». *4th International Workshop, WADS '95 Kingston, Canada* (cf. p. 71).
- He, W., Lei, M. et Bin, H. (2009). « Iso-parametric CNC tool path optimization based on adaptive grid generation ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 41(5), p. 538–548 (cf. p. 27).
- Ho, M.-C., Hwang, Y.-R. et Hu, C.-H. (2003). « Five-axis tool orientation smoothing using quaternion interpolation algorithm ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43(12), p. 1259–1267 (cf. p. 33, 36).
- Hosseinkhani, Y., Akbari, J. et Vafaeseefat, A. (2007). « Penetration–elimination method for five-axis CNC machining of sculptured surfaces ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 47(10), p. 1625–1635 (cf. p. 29).
- Hu P. et Tang, K. (2011). « Improving the dynamics of five-axis machining through optimization of workpiece setup and tool orientations ». *Computer-Aided Design*, 43(12), p. 1693–1706 (cf. p. 32, 34, 36).

- Hu, P. et Tang, K. (2016). « Five-axis tool path generation based on machine-dependent potential field ». *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 29(6), p. 636–651 (cf. p. 32, 36).
- Hu, P., Tang, K. et Lee, C.H. (2013). « Global obstacle avoidance and minimum workpiece setups in five-axis machining ». *Computer-Aided Design*, 45(10), p. 1222–1237 (cf. p. 71).
- Hu, P., Chen, L. et Tang, K. (2017). « Efficiency-optimal iso-planar tool path generation for five-axis finishing machining of freeform surfaces ». *Computer-Aided Design*, 83, p. 33–50 (cf. p. 32, 36).
- Isnaini, M.M., Sato, R. et Shirase, K. (2014). « Workpiece setup simulation based on machinable space of five-axis machining centers ». *Procedia CIRP*, 14, p. 257–262 (cf. p. 71).
- Jun, C.-S., Cha, K. et Lee, Y.-S. (2003). « Optimizing tool orientations for 5-axis machining by configuration-space search method ». *Computer-Aided Design*, 35(6), p. 549–566 (cf. p. 29).
- Jung, Y.H., Lee, D.W., Kim, J.S. et Mok, H.S. (2002). « NC post-processor for 5-axis milling machine of table-rotating/tilting type ». *Journal of Materials Processing Technology*, 130–131(0), p. 641–646 (cf. p. 23).
- Khalil, W. et Dombre, E. (1999). « Modélisation, identification et commande des robots ». *Hermès, collection Robotique, 2ème édition* (cf. p. 41, XIII).
- Kim, T. et Sarma, S.E. (2002). « Toolpath generation along directions of maximum kinematic performance ; a first cut at machine-optimal paths ». *Computer-Aided Design*, 34(6), p. 453–468 (cf. p. 32, 36).
- Kim, Y.-J., Elber, G., Bartoň, M. et Pottmann, H. (2015). « Precise gouging-free tool orientations for 5-axis CNC machining ». *Computer-Aided Design*, 58, p. 220–229 (cf. p. 29).
- Klimchik, A., Ambiehl, A., Garnier, S., Furet, B. et Pashkevich, A. (2017). « Efficiency evaluation of robots in machining applications using industrial performance measure ». *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 48, p. 12–29 (cf. p. 10).
- Klocke, F. et Zunke, R. (2009). « Removal mechanisms in polishing of silicon based advanced ceramics ». *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 58(1), p. 491–494 (cf. p. 9).
- Kumazawa, G.H., Feng, H.-Y. et Barakchi Fard, M.J. (2015). « Preferred feed direction field : A new tool path generation method for efficient sculptured surface machining ». *Computer-Aided Design*, 67–68, p. 1–12 (cf. p. 30).
- Lacharnay, V. (2014). « Modélisation mécanique intégrant des champs répulsifs pour la génération de trajectoires 5 axes hors collision ». *Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan* (cf. p. 1, 29).
- Langeron, J.-M., Duc, E., Lartigue, C. et Bourdet, P. (2004). « A new format for 5-axis tool path computation, using Bspline curves ». *Computer-Aided Design*, 36(12), p. 1219–1229 (cf. p. 22, 33).

- Lavernhe, S. (2006). « Prise en compte des contraintes associées au couple MO-CN en génération de trajectoires 5 axes UGV ». *Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan* (cf. p. 1, 21, I).
- Lavernhe, S., Tournier, C. et Lartigue, C. (2008). « Optimization of 5-axis high-speed machining using a surface based approach ». *Computer-Aided Design*, 40(10-11), p. 1015–1023 (cf. p. 34–36).
- Lei, W.T et Hsu, Y.Y (2003). « Accuracy enhancement of five-axis CNC machines through real-time error compensation ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43(9), p. 871–877 (cf. p. 23).
- Li, S.X. et Jerard, R.B. (1994). « 5-axis machining of sculptured surfaces with a flat-end cutter ». *Computer-Aided Design*, 26(3), p. 165–178 (cf. p. 29).
- Liu, X., Li, Y., Ma, S. et Lee, C.-H. (2015). « A tool path generation method for freeform surface machining by introducing the tensor property of machining strip width ». *Computer-Aided Design*, 66, p. 1–13 (cf. p. 30).
- Merlet, J. P. (2005). « Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots ». *Journal of Mechanical Design*, 128(1), p. 199–206 (cf. p. 49).
- Minkowski, H. (1896). « Geometrie der Zahlen (erste Lieferung) ». *Teubner, Leipzig* (cf. p. 50).
- Nait Chabane, K. (2006). « Exploitation de la redondance pour la commande coordonnée d'un manipulateur mobile d'assistance aux personnes handicapées ». *Thèse de Doctorat : Université d'Evry - Val d'Essonne* (cf. p. 47).
- Nakamura, Y. (1990). « Advanced robotics : redundancy and optimization ». *Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.* ISBN : 9780201151985 (cf. p. 47).
- Olabi, A., Béarée, R., Gibaru, O. et Damak, M. (2010). « Feedrate planning for machining with industrial six-axis robots ». *Control Engineering Practice*, 18, p. 471–482 (cf. p. 14).
- Park, S.C. (2003). « Toolpath generation for Z-constant contour machining ». *Computer-Aided Design*, 35(1), p. 27–36 (cf. p. 27).
- Pateloup, S. (2011). « Modélisations et aptitudes à l'emploi des machines-outils à structure parallèle : vers une optimisation dirigée du processus ». *Thèse de doctorat : Université Blaise Pascal - Clermont II* (cf. p. 31, 36).
- Pechard, P.-Y. (2009). « Génération de trajectoires d'usinage grande vitesse 5 axes par flanc d'outil : intégration d'un critère de fluidité ». *Thèse de doctorat : Ecole Normale Supérieure de Cachan* (cf. p. 1, 33).
- Pessoles, X. et Tournier, C. (2009). « Automatic polishing process of plastic injection molds on a 5-axis milling center ». *Journal of Materials Processing Technology*, 209(7), p. 3665–3673 (cf. p. 9).

- Pessoles, X., Landon, Y., Segonds, S. et Rubio, W. (2013). « Optimisation of workpiece setup for continuous five-axis milling : application to a five-axis BC type machining centre ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 65(1), p. 67–79 (cf. p. 31, 32, 36, 91).
- Prat, David (2014). « Développement et modélisation de stratégies de fraisage 5 axes de finition - Application à l'usinage de veines fermées ». Thèse de doct. Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (cf. p. 27, 28).
- Quinsat, Y., Lavernhe, S. et Lartigue, C. (2011). « Characterization of 3D surface topography in 5-axis milling ». *Wear*, 271(3–4), p. 590–595 (cf. p. 9).
- Ramesh, R., Mannan, M.A. et Poo, A.N. (2000). « Error compensation in machine tools - a review : Part I : geometric, cutting-force induced and fixture-dependent errors ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 40(9), p. 1235–1256 (cf. p. 10).
- Rauch, M. et Xu, X. (2010). « Five-axis machining : technologies and challenges ». *International Journal of Manufacturing Research*, 5(3), p. 327–352 (cf. p. 10).
- Rosenstein, M.T. et Grupen, R.A. (2002). « Velocity-dependent dynamic manipulability ». *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* (cf. p. 64).
- Sencer, B., Altintas, Y. et Croft, E. (2008). « Feed optimization for five-axis CNC machine tools with drive constraints ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 48(7–8), p. 733–745 (cf. p. 17).
- SIEMENS (2006). « Special functions : 3-Axis to 5-Axis transformation ». *Function Manual* (cf. p. 21, 24, 115).
- Sørby, K. (2007). « Inverse kinematics of five-axis machines near singular configurations ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 47(2), p. 299–306 (cf. p. 23).
- Sun, C. et Altintas, Y. (2016). « Chatter free tool orientations in 5-axis ball-end milling ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 106, p. 89–97 (cf. p. 9).
- Terrier, M. (2005). « Optimisation du processus de fabrication en Usinage à Grande Vitesse sur machines-outils à structure parallèle ». *Thèse de doctorat : Ecole Centrale de Nantes - Université de Nantes* (cf. p. 14, VII).
- Tournier, C. et Duc, E. (2001). « A surface based approach for constant scallop height tool path generation ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 19, p. 318–324 (cf. p. 29).
- Tournier, C. et Duc, E. (2005). « Iso-scallop tool path generation in 5-axis milling ». *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 25, p. 867–875 (cf. p. 29).
- Tournier, C., Castagnetti, C., Lavernhe, S. et Avellan, F. (2006). « Tool path generation and post-processor issues in five-axis high speed machining of hydro turbine blades ». In : *Fifth International Conference on High Speed Machining*. Metz, France (cf. p. 24).

- Vulliez, M., Lavernhe, S. et Bruneau, O. (2016). « Dynamic approach of the feedrate interpolation for trajectory planning process in multi-axis machining ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 85, p. 1–12 (cf. p. 13).
- Weck, M. et Staimer, D. (2002). « Parallel kinematic machine tools – Current state and future potentials ». *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 51(2), p. 671–683 (cf. p. 11).
- Wu, X., Kita, Y. et Ikoku, K. (2007). « New polishing technology of free form surface by GC ». *Journal of Materials Processing Technology*, 187(0), p. 81–84 (cf. p. 9).
- Yang, J. et Altintas, Y. (2013). « Generalized kinematics of five-axis serial machines with non-singular tool path generation ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 75, p. 119–132 (cf. p. 23).
- Yoshikawa, T. (1985). « Manipulability of Robotic Mechanisms ». *The International Journal of Robotics Research*, 4(2), p. 3–9 (cf. p. 42, 44).
- Zębala, Wojciech et Plaza, Malgorzata (2014). « Comparative study of 3- and 5-axis CNC centers for free-form machining of difficult-to-cut material ». *International Journal of Production Economics*, 158, p. 345–358 (cf. p. 27).
- Zhang, K. et Tang, K. (2016). « Optimal five-axis tool path generation algorithm based on double scalar fields for freeform surfaces ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 83(9), p. 1503–1514 (cf. p. 32, 36).
- Zhang, X., Zhang, J., Pang, B. et Zhao, W. (2016). « An accurate prediction method of cutting forces in 5-axis flank milling of sculptured surface ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 104, p. 26–36 (cf. p. 9).
- Ziegler, G.M. (1995). « Lectures on polytopes ». *Springer New York*, ISBN 978–0–387–94365–7 (cf. p. 50).

Annexe A

Modèles géométriques et cinématiques du centre d'usinage Mikron UCP710

1 Structure du centre d'usinage Mikron UCP710

Le centre d'usinage 5 axes Mikron UCP710 a une structure de type $[wC'A'bX_mY_mZ_m(C1)t]$ selon la norme ISO1079. Les équations données dans cette annexe sont extraites de la thèse de [Lavernhe \(2006\)](#). La modélisation géométrique et les différents repères associés sont donnés sur la Figure A.1.

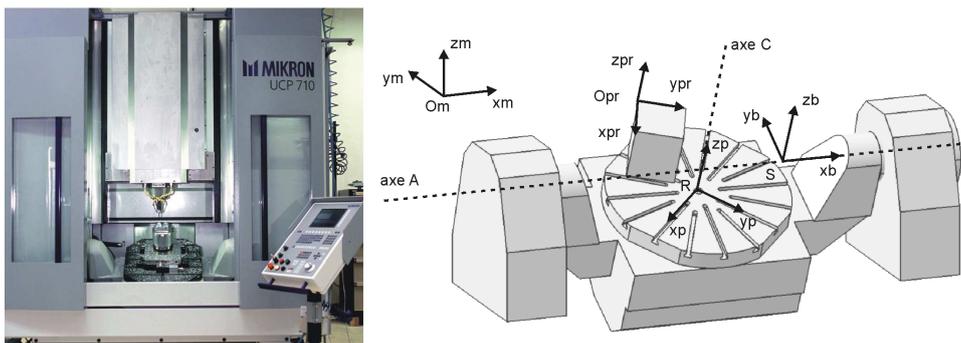


Figure A.1 – Modélisation de la Mikron UCP710 et repères associés [Lavernhe \(2006\)](#)

Les différents repères locaux sont :

- (O_m, X_m, Y_m, Z_m) : repère lié à la structure fixe de la machine
- (S, X_b, Y_b, Z_b) : repère lié au berceau
- (R, X_p, Y_p, Z_p) : repère lié au plateau
- $(O_{pr}, X_{pr}, Y_{pr}, Z_{pr})$: repère de programmation lié à la pièce

Les distances entre les différentes origines des repères sont données par les Equations A.1.

$$\begin{cases} \mathbf{O}_m \mathbf{S} = m_x \cdot \mathbf{X}_m + m_y \cdot \mathbf{Y}_m + m_z \cdot \mathbf{Z}_m \\ \mathbf{SR} = b_y \cdot \mathbf{Y}_b + b_z \cdot \mathbf{Z}_b \\ \mathbf{RO}_{pr} = p_x \cdot \mathbf{X}_p + p_y \cdot \mathbf{Y}_p + p_z \cdot \mathbf{Z}_p \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

L'utilisation des coordonnées homogènes permet de définir les matrices de passage entre les différents repères (Tableau A.1).

machine-berceau	berceau-plateau	plateau-pièce
$\mathbf{P}_{mb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m_x \\ 0 & \cos A & \sin A & m_y \\ 0 & -\sin A & \cos A & m_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{P}_{bp} = \begin{pmatrix} \cos C & \sin C & 0 & 0 \\ -\sin C & \cos C & 0 & b_y \\ 0 & 0 & 1 & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{P}_{ppr} = \begin{pmatrix} a & d & g & p_x \\ b & e & h & p_y \\ c & f & i & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tableau A.1 – Matrices de passage homogènes entre les différents repères

Les modèles géométriques direct et inverse permettent de faire le lien entre les coordonnées de l'espace articulaire (X_m, Y_m, Z_m, A, C) et de l'espace des tâches (X_p, Y_p, Z_p, i, j, k) .

2 Transformation géométrique directe

La transformation géométrique directe permet d'exprimer la position et l'orientation de l'élément terminal en fonction de la configuration articulaire. Cette transformation possède une unique solution. La position de l'effecteur dans l'espace des tâches est donnée par l'Equation A.2 et son orientation est donnée par l'Equation A.3. Ces équations se réduisent aux systèmes des Equations A.4 et A.5 dans le cas où la base de programmation est identique à la base du plateau.

$$\begin{pmatrix} X_{pr} \\ Y_{pr} \\ Z_{pr} \\ 1 \end{pmatrix}_{(O_{pr}, \mathbf{X}_{pr}, \mathbf{Y}_{pr}, \mathbf{Z}_{pr})} = (\mathbf{P}_{ppr})^{-1} \cdot (\mathbf{P}_{bp})^{-1} \cdot (\mathbf{P}_{mb})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ 1 \end{pmatrix}_{(O_m, \mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m)} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}_{pr}, \mathbf{Y}_{pr}, \mathbf{Z}_{pr})} = (\mathbf{P}_{ppr})^{-1} \cdot (\mathbf{P}_{bp})^{-1} \cdot (\mathbf{P}_{mb})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m)} \quad (\text{A.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{pr} = X_m \cdot \cos C - Y_m \cdot \sin C \cdot \cos A + Z_m \cdot \sin C \cdot \sin A + X_0 \\ X_0 = -m_x \cdot \cos C - \sin C \cdot (m_z \cdot \sin A - m_y \cdot \cos A - b_y) - p_x \\ Y_{pr} = X_m \cdot \sin C + Y_m \cdot \cos C \cdot \cos A - Z_m \cdot \cos C \cdot \sin A + Y_0 \\ Y_0 = -m_x \cdot \sin C + \cos C \cdot (m_z \cdot \sin A - m_y \cdot \cos A - b_y) - p_y \\ Z_{pr} = Y_m \cdot \sin A + Z_m \cdot \cos A + Z_0 \\ Z_0 = -m_y \cdot \sin A - m_z \cdot \cos A - b_z - p_z \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \sin C \cdot \sin A \\ j = -\cos C \cdot \sin A \\ k = \cos A \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

3 Transformation cinématique directe du premier ordre

Le modèle cinématique direct du premier ordre est obtenu par dérivation du modèle géométrique (Equation A.6). Le détail des expressions de la matrice Jacobienne est donné en Equation A.7.

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{pr} \\ \dot{Y}_{pr} \\ \dot{Z}_{pr} \\ \dot{i} \\ \dot{j} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{X}_m \\ \dot{Y}_m \\ \dot{Z}_m \\ \dot{A} \\ \dot{C} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 J_{11} = \cos C \\
 J_{12} = -\sin C \cdot \cos A \\
 J_{13} = \sin C \cdot \sin A \\
 J_{14} = (Y_m - m_y) \cdot \sin C \cdot \sin A + (Z_m - m_z) \cdot \sin C \cdot \cos A \\
 J_{15} = (m_x - X_m) \cdot \sin C + ((Z_m - m_z) \cdot \sin A + (m_y - Y_m) \cdot \cos A + b_y) \cdot \cos C \\
 J_{21} = \sin C \\
 J_{22} = \cos C \cdot \cos A \\
 J_{23} = -\cos C \cdot \sin A \\
 J_{24} = (m_y - Y_m) \cdot \cos C \cdot \sin A + (m_z - Z_m) \cdot \cos C \cdot \cos A \\
 J_{25} = (X_m - m_x) \cdot \cos C + ((m_y - Y_m) \cdot \cos A + (Z_m - m_z) \cdot \sin A + b_y) \cdot \sin C \\
 J_{32} = \sin A \\
 J_{33} = \cos A \\
 J_{34} = (Y_m - m_y) \cdot \cos A + (m_z - Z_m) \cdot \sin A \\
 J_{44} = \sin C \cdot \cos A \\
 J_{45} = \cos C \cdot \sin A \\
 J_{54} = -\cos C \cdot \cos A \\
 J_{55} = \sin C \cdot \sin A \\
 J_{64} = -\sin A \\
 J_{31} = J_{35} = J_{41} = J_{42} = J_{43} = J_{51} = J_{52} = J_{53} = J_{61} = J_{62} = J_{63} = J_{65} = 0
 \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Annexe B

Modèles géométriques et cinématiques du centre d'usinage Huron KX8-five

1 Structure du centre d'usinage Huron KX8-five

Le centre d'usinage 5 axes Huron KX8-five a une structure de type $[wC'A'bX_mY_mZ_m(C1)t]$ selon la norme ISO1079. La particularité de cette structure est l'orientation à 45° de l'axe A. La modélisation géométrique et les différents repères sont donnés sur la Figure B.1.

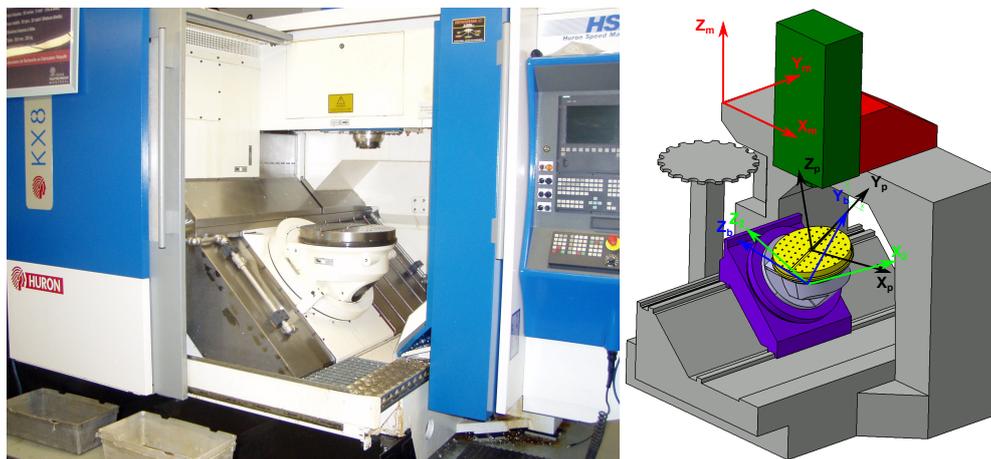


Figure B.1 – Modélisation de la Huron KX8-five et repères associés

L'utilisation des coordonnées homogènes permet de définir les matrices de passage entre les différents repères (Tableau B.1). Les angles α_1 et α_2 orientent l'axe A à 45° . Ainsi, $\alpha_1 = 45^\circ$ et $\alpha_2 = -45^\circ$. On suppose que le repère de programmation est identique au repère de la pièce.

Les modèles géométriques direct et inverse permettent de faire le lien entre les coordonnées de l'espace articulaire (X_m, Y_m, Z_m, A, C) et de l'espace des tâches (X_p, Y_p, Z_p, i, j, k) .

pièce-R2	R2-berceau
$\underline{\mathbf{P}}_{\text{pR2}} = \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & 0 & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{P}}_{\text{R2b}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2) & 0 & \sin(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
berceau-R1	R1-machine
$\underline{\mathbf{P}}_{\text{bR1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A & 0 \\ 0 & \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{P}}_{\text{R1m}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & 0 & \sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_1) & 0 & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tableau B.1 – Matrices de passage homogènes entre les différents repères

2 Transformation géométrique directe

La transformation géométrique directe permet d'exprimer la position et l'orientation de l'effecteur en fonction de la configuration articulaire. La position de l'effecteur est donnée par l'Equation B.1 et son orientation est donnée par l'Equation B.2.

$$\begin{pmatrix} X_{pr} \\ Y_{pr} \\ Z_{pr} \\ 1 \end{pmatrix}_{(O_{pr}, X_{pr}, Y_{pr}, Z_{pr})} = \underline{\mathbf{P}}_{\text{pR2}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\text{R2b}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\text{bR1}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\text{R1m}} \cdot \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ 1 \end{pmatrix}_{(O_m, X_m, Y_m, Z_m)} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \\ 0 \end{pmatrix}_{(X_{pr}, Y_{pr}, Z_{pr})} = \underline{\mathbf{P}}_{\text{pR2}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\text{R2b}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\text{bR1}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\text{R1m}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(X_m, Y_m, Z_m)} \quad (\text{B.2})$$

3 Transformation cinématique directe du premier ordre

Le modèle cinématique direct du premier ordre est obtenu par dérivation du modèle géométrique direct en position et en orientation.

Modèles géométriques et cinématiques du centre d'usinage Fatronik Verne

1 Structure du centre d'usinage Fatronik Verne

Le centre d'usinage Fatronik Verne a été étudié par l'IRCCyN. Les équations données dans cette annexe sont extraites de la thèse de [Terrier \(2005\)](#). Il s'agit d'une architecture hybride, composée d'un module parallèle et d'une table tilting dont les positions articulaires sont commandées et notées \mathbf{B}_c et \mathbf{C}_c . Le module parallèle est composé de 6 jambes de longueur fixe qui sont disposées sous forme de deux parallélogrammes et d'un trapèze. Chaque paire de jambes relie la plate-forme mobile à un chariot qui coulisse selon l'axe \mathbf{Z} de la structure. Cet axe est incliné à 30° par-rapport à la verticale. Les différents repères locaux et la modélisation sont donnés sur la Figure C.1. Dans l'espace des tâches, l'orientation de l'outil par rapport à la pièce est ici paramétrée par les angles B et C , respectivement, les angles d'inclinaison de l'axe outil autour des axes \mathbf{X} et \mathbf{Y} du repère de programmation lié à la pièce.

- $(O, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$: repère absolu lié au bâti
- $(O_m, \mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m)$: repère lié au bâti et centré sur la table
- $(O_T, \mathbf{X}_T, \mathbf{Y}_T, \mathbf{Z}_T)$: repère lié à la plate-forme mobile
- $(O_c, \mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p)$: repère de programmation lié à la pièce

Les matrices de passage entre les différents repères sont données dans le Tableau C.1.

La matrice de passage de R_0 à R_T se définit comme le produit des 2 matrices données dans le Tableau C.1 (Equation C.1).

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}_{R_0-R_M} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{R_M-R_T} \quad (\text{C.1})$$

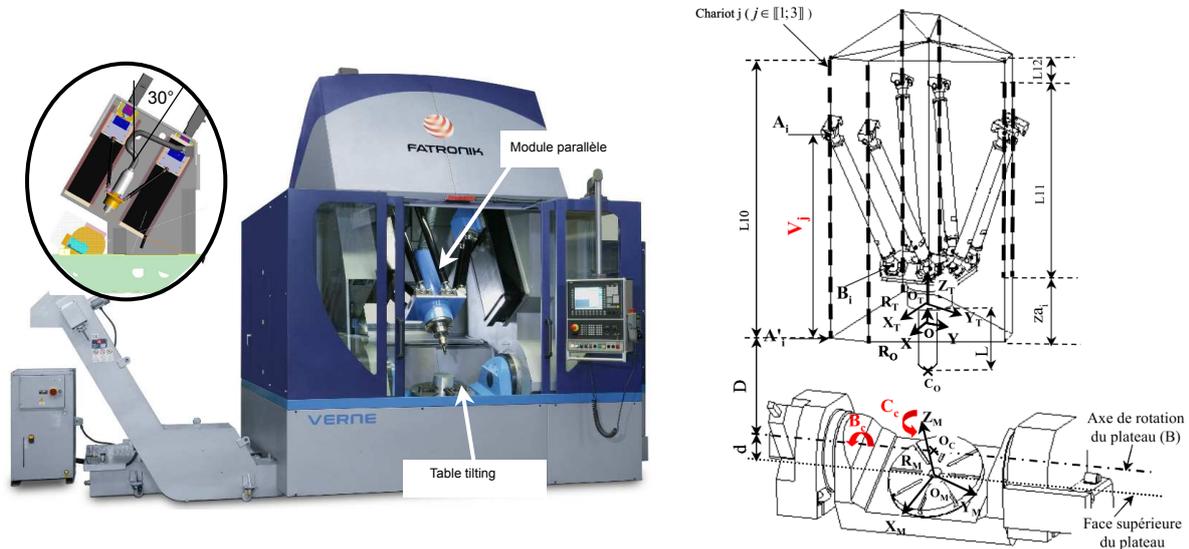


Figure C.1 – Centre d'usinage Fatronik Verne

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{R_0-R_M} &= \begin{pmatrix} \cos B_c & 0 & \sin B_c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B_c & 0 & \cos B_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos C_c & -\sin C_c & 0 \\ \sin C_c & \cos C_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{P}_{R_M-R_T} &= \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tableau C.1 – Matrices de passage entre les différentes bases

Les coordonnées des centres de chacune des jambes sont notées xa_i, ya_i, za_i au niveau des chariots et xb_i, yb_i, zb_i au niveau de la plate-forme mobile. La longueur de chaque jambe est noté L_i .

En effectuant une fermeture géométrique au niveau de chaque jambe, on obtient les 6 équations données dans le Tableau C.2.

Jambe 1 - Chariot 1	$\begin{aligned} & (X_0 + P_{1,1}.xb_1 + P_{1,2}.yb_1 + P_{1,3}.zb_1 - xa_1)^2 + \\ & (Y_0 + P_{2,1}.xb_1 + P_{2,2}.yb_1 + P_{2,3}.zb_1 - ya_1)^2 + \\ & (Z_0 + P_{3,1}.xb_1 + P_{3,2}.yb_1 + P_{3,3}.zb_1 - (za_1 + \mathbf{Z}_1))^2 - L_1^2 = 0 \end{aligned}$
Jambe 2 - Chariot 2	$\begin{aligned} & (X_0 + P_{1,1}.xb_2 + P_{1,2}.yb_2 + P_{1,3}.zb_2 - xa_2)^2 + \\ & (Y_0 + P_{2,1}.xb_2 + P_{2,2}.yb_2 + P_{2,3}.zb_2 - ya_2)^2 + \\ & (Z_0 + P_{3,1}.xb_2 + P_{3,2}.yb_2 + P_{3,3}.zb_2 - (za_2 + \mathbf{Z}_2))^2 - L_2^2 = 0 \end{aligned}$
Jambe 3 - Chariot 3	$\begin{aligned} & (X_0 + P_{1,1}.xb_3 + P_{1,2}.yb_3 + P_{1,3}.zb_3 - xa_3)^2 + \\ & (Y_0 + P_{2,1}.xb_3 + P_{2,2}.yb_3 + P_{2,3}.zb_3 - ya_3)^2 + \\ & (Z_0 + P_{3,1}.xb_3 + P_{3,2}.yb_3 + P_{3,3}.zb_3 - (za_3 + \mathbf{Z}_3))^2 - L_3^2 = 0 \end{aligned}$
Jambe 4 - Chariot 1	$\begin{aligned} & (X_0 + P_{1,1}.xb_4 + P_{1,2}.yb_4 + P_{1,3}.zb_4 - xa_4)^2 + \\ & (Y_0 + P_{2,1}.xb_4 + P_{2,2}.yb_4 + P_{2,3}.zb_4 - ya_4)^2 + \\ & (Z_0 + P_{3,1}.xb_4 + P_{3,2}.yb_4 + P_{3,3}.zb_4 - (za_4 + \mathbf{Z}_1))^2 - L_4^2 = 0 \end{aligned}$
Jambe 5 - Chariot 2	$\begin{aligned} & (X_0 + P_{1,1}.xb_5 + P_{1,2}.yb_5 + P_{1,3}.zb_5 - xa_5)^2 + \\ & (Y_0 + P_{2,1}.xb_5 + P_{2,2}.yb_5 + P_{2,3}.zb_5 - ya_5)^2 + \\ & (Z_0 + P_{3,1}.xb_5 + P_{3,2}.yb_5 + P_{3,3}.zb_5 - (za_5 + \mathbf{Z}_2))^2 - L_5^2 = 0 \end{aligned}$
Jambe 6 - Chariot 3	$\begin{aligned} & (X_0 + P_{1,1}.xb_6 + P_{1,2}.yb_6 + P_{1,3}.zb_6 - xa_6)^2 + \\ & (Y_0 + P_{2,1}.xb_6 + P_{2,2}.yb_6 + P_{2,3}.zb_6 - ya_6)^2 + \\ & (Z_0 + P_{3,1}.xb_6 + P_{3,2}.yb_6 + P_{3,3}.zb_6 - (za_6 + \mathbf{Z}_3))^2 - L_6^2 = 0 \end{aligned}$

Tableau C.2 – Equations géométriques

Les modèles géométriques direct et inverse permettent de faire le lien entre les coordonnées de l'espace articulaire $(Z_1, Z_2, Z_3, B_c, C_c)$ et de l'espace des tâches (X_p, Y_p, Z_p, B, C) .

2 Transformation géométrique directe

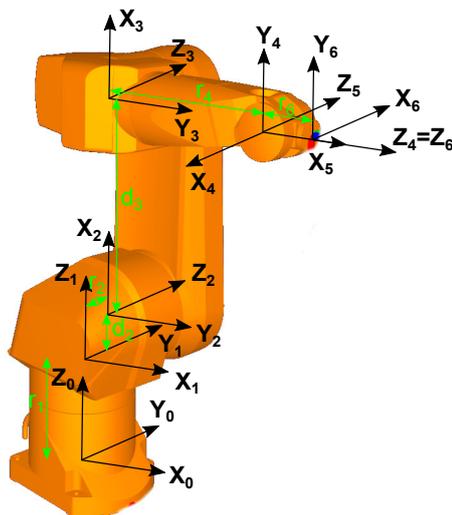
Le modèle géométrique direct correspond à la résolution des 6 équations définies dans le Tableau C.2. Le système à résoudre est non linéaire mais il est composé de 6 équations et de 5 inconnues. Pour résoudre ce système, la méthode utilisée est un algorithme de Newton-Raphson.

3 Transformation cinématique directe du premier ordre

En dérivant les équations géométriques, on obtient les équations cinématiques du système. Le système obtenu est linéaire et permet de déterminer les vitesses dans l'espace des tâches $(\dot{X}_p, \dot{Y}_p, \dot{Z}_p, \dot{B}, \dot{C})$ en fonction des vitesses articulaires $(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3, \dot{B}_c, \dot{C}_c)$.

Modèles géométriques et cinématiques du robot Stäubli RX170B

1 Structure et paramétrage selon le convention de Denavit et Hartenberg modifiée



	d_i	α_i	r_i	θ_i
$\underline{\mathbf{T}}_{01}$	0	0	r_1	θ_1
$\underline{\mathbf{T}}_{12}$	d_2	α_2	r_2	$\theta_2 - 90$
$\underline{\mathbf{T}}_{23}$	d_3	0	0	$\theta_3 - 90$
$\underline{\mathbf{T}}_{34}$	0	α_4	r_4	θ_4
$\underline{\mathbf{T}}_{45}$	0	α_5	0	θ_5
$\underline{\mathbf{T}}_{56}$	0	α_6	r_6	$\theta_6 + 180$

Figure D.1 – Paramétrage DH modifié

Chaque liaison peut s'exprimer à l'aide de la matrice homogène $\underline{\mathbf{T}}_{i-1,i}$ de l'Equation D.1.

$$\underline{\mathbf{T}}_{i-1,i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & d_i \\ \cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\sin \alpha_i & -r_i \cdot \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & \cos \alpha_i & r_i \cdot \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

2 Transformation géométrique directe en position

Le modèle géométrique direct s'obtient en faisant le produit des matrices homogènes précédemment définies (Equation D.2).

$$\mathbf{X} = \underline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{12} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{23} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{34} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{45} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{56} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

3 Transformation cinématique directe du premier ordre en position

Le modèle cinématique direct du premier ordre s'obtient par dérivation du modèle géométrique direct.

Résolution d'équations typiques en robotique

Cette annexe détaille la résolution des équations intervenant pour résoudre les différents systèmes d'équations. Celle-ci conduit à obtenir les solutions d'orientation entre l'outil et la pièce. La résolution de ces équations a été développée dans [Khalil et Dombre \(1999\)](#). La variable θ_i correspond à la variable articulaire d'une liaison de type pivot.

Equation de type 2 :

$$X \cdot \sin(\theta_i) + Y \cdot \cos(\theta_i) = Z \quad (\text{E.1})$$

Solution :

$$\theta_i = \begin{cases} \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_i)}, \cos(\theta_i)) & \text{si } X = 0 \text{ et } Y \neq 0 \\ \text{atan2}(\sin(\theta_i), \pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_i)}) & \text{si } X \neq 0 \text{ et } Y = 0 \\ \begin{cases} \theta_{i1} = \text{atan2}(-Y, X) \\ \theta_{i2} = \theta_{i1} + 180^\circ \end{cases} & \text{si } X \neq 0 \text{ et } Y \neq 0 \text{ et } Z = 0 \\ \text{atan2}(\sin(\theta_i), \cos(\theta_i)) & \text{si } X \neq 0 \text{ et } Y \neq 0 \text{ et } Z \neq 0 \text{ et } X^2 + Y^2 \geq Z^2 \\ \text{configuration singulière} & \text{si } X = 0 \text{ et } Y = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $X \neq 0$, $Y \neq 0$ et $Z \neq 0$, l'équation est résolue en élevant l'expression au carré : en remplaçant les termes en sinus par les fonctions équivalentes en cosinus, on aboutit à une équation du second degré à résoudre donnant la valeur du cosinus. Un raisonnement analogue est mené pour déterminer le terme en sinus. La résolution est donnée en Equation E.2.

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{YZ - \epsilon X \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \\ \sin \theta_2 = \frac{XZ + \epsilon Y \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

avec $\epsilon = \pm 1$

Dans ce cas, la résolution avec la fonction atan2 donne ensuite deux solutions, correspondant aux valeurs de ϵ .

Equation de type 3 :

Le système à résoudre est de la forme de celui donné en Equation E.3.

$$\begin{cases} X_1 \cdot \sin \theta_i + Y_1 \cdot \cos \theta_i = Z_1 \\ X_2 \cdot \sin \theta_i + Y_2 \cdot \cos \theta_i = Z_2 \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

Dans le cas où $X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \neq 0$, les termes en cosinus et sinus sont obtenus par combinaison linéaire de deux équations pour éliminer respectivement les termes sinus et cosinus (Equation E.4).

$$\begin{cases} \cos \theta_i = \frac{Z_2 X_1 - Z_1 X_2}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1} \\ \sin \theta_i = \frac{Z_1 Y_2 - Z_2 Y_1}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1} \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Dans le cas où $X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0$ alors les Equations E.3 ne sont plus indépendantes. Le principe consiste alors à choisir l'une des deux équations que l'on résout comme une équation de type 2.

Solution :

$$\theta_i = \begin{cases} \text{atan2}(\sin \theta_i, \cos \theta_i) & \text{si } X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \neq 0 \\ \text{atan2}\left(\frac{Z_1}{X_1}, \frac{Z_2}{Y_2}\right) & \text{si } Y_1 = 0 \text{ et } X_2 = 0 \end{cases}$$

Extraits des programmes d'usinage dans le cas XYZ

<p>Programme C = 0 M11 M16 TRAORI G57 G94 F30000 G1 X0.000000 Y0.000000 Z0 A0 C0 G1 X0.000000 Y0.000000 Z0 A0 C0 G1 X0.000000 Y100.000000 G1 X6.000000 Y100.000000 G1 X6.000000 Y0.000000 ... G1 X96.000000 Y0.000000 G1 X96.000000 Y100.000000 G1 X102.000000 Y100.000000 G1 X102.000000 Y0.000000 TRAFOOF M10 M15 M2</p>	<p>Programme C = 45 M11 M16 TRAORI G57 G94 F30000 G1 X0.000000 Y0.000000 Z0 A0 C45 G1 X0.000000 Y0.000000 Z0 A0 C45 G1 X0.000000 Y100.000000 G1 X6.000000 Y100.000000 G1 X6.000000 Y0.000000 ... G1 X96.000000 Y0.000000 G1 X96.000000 Y100.000000 G1 X102.000000 Y100.000000 G1 X102.000000 Y0.000000 TRAFOOF M10 M15 M2</p>	<p>Programme G1 articulaire M11 M16 TRAFOOF G57 G94 F30000 G1 X134.002603 Y-106.669022 Z0 A0 C35.421544 G1 X134.002603 Y-106.669022 C35.421544 G1 X156.370107 Y-84.301518 C54.578456 G1 X160.404513 Y-88.579288 C54.433255 G1 X138.485782 Y-110.498019 C35.566745 ... G1 X204.243139 Y-170.007682 C37.539436 G1 X219.816037 Y-154.434784 C52.460564 G1 X223.838335 Y-158.799715 C52.360637 G1 X208.610358 Y-174.027692 C37.639363 M10 M15 M2</p>
<p>Programme POS TRAORI M11 M16 TRAORI G57 G94 F30000 G1 X0.000000 Y0.000000 Z0 A0 C35.421544 POS[X]=0.000000 POS[Y]=0.000000 POS[C]=35.421544 POS[X]=0.000000 POS[Y]=100.000000 POS[C]=54.578456 POS[X]=6.000000 POS[Y]=100.000000 POS[C]=54.423575 POS[X]=6.000000 POS[Y]=0.000000 POS[C]=35.576425 ... POS[X]=96.000000 POS[Y]=0.000000 POS[C]=37.539436 POS[X]=96.000000 POS[Y]=100.000000 POS[C]=52.460564 POS[X]=102.000000 POS[Y]=100.000000 POS[C]=52.360637 POS[X]=102.000000 POS[Y]=0.000000 POS[C]=37.639363 TRAFOOF M10 M15 M2</p>	<p>Programme POS TRAFOOF M11 M16 TRAFOOF G57 G94 F30000 G1 X134.002603 Y-106.669022 Z0 A0 C35.421544 POS[X]=134.002603 POS[Y]=-106.669022 POS[C]=35.421544 POS[X]=156.370107 POS[Y]=-84.301518 POS[C]=54.578456 POS[X]=160.404513 POS[Y]=-88.579288 POS[C]=54.433255 POS[X]=138.485782 POS[Y]=-110.498019 POS[C]=35.566745 ... POS[X]=204.243139 POS[Y]=-170.007682 POS[C]=37.539436 POS[X]=219.816037 POS[Y]=-154.434784 POS[C]=52.460564 POS[X]=223.838335 POS[Y]=-158.799715 POS[C]=52.360637 POS[X]=208.610358 POS[Y]=-174.027692 POS[C]=37.639363 M10 M15 M2</p>	

Tableau F.1 – Extraits des programmes d'usinage dans le cas XYZ

Titre : Exécution adaptative de trajectoires 5 axes sur structures poly-articulées

Mots clés : usinage 5 axes, usinage à grande vitesse, génération de trajectoires, polytope, cinématique, manipulabilité

Résumé : L'usinage 5 axes à grande vitesse est de plus en plus utilisé dans l'industrie pour réaliser des pièces de géométrie complexe à forte valeur ajoutée avec pour contrainte de respecter la qualité géométrique tout en maximisant la productivité. Dans ce contexte, la FAO et plus particulièrement la génération des trajectoires d'usinage jouent un rôle prépondérant.

Ces travaux proposent de définir des trajectoires en fonction de la pièce à réaliser mais aussi de la structure poly articulée et de ses performances cinématiques. La grande diversité des structures en termes d'architecture et de cinématique impose une méthode de calcul générique facilitant la définition de trajectoires adaptées pour leur suivi.

L'état de l'art des travaux réalisés dans les domaines de l'usinage et de la robotique pour répondre à cette problématique conduit à utiliser des polytopes de manipulabilité cinématique pour modéliser les contraintes cinématiques. L'analyse de ces polytopes et de la géométrie de la pièce à usiner permet de générer des trajectoires avec une vitesse outil/pièce maîtrisée et un temps de parcours réduit dans le cas de l'usinage 5 axes positionné et de l'usinage 5 axes continu. Ce formalisme met en avant les fortes dépendances entre les différents paramètres de la stratégie d'usinage (positionnement de la pièce, direction d'avance et orientation de l'outil) et permet de privilégier certaines combinaisons de ces paramètres pour maîtriser la vitesse d'exécution de la trajectoire.

Title : Adaptative execution of 5-axis toolpath on polyarticulated structure

Keywords : 5-axis milling, high speed machining, toolpath computation, polytope, kinematic, manipulability

Abstract : 5-axis high speed milling is increasingly used for manufacturing high added value parts with complex forms in order to respect surface quality while maximizing productivity. In this context, CAM and more specifically toolpath computations play a major part.

This work proposes to define toolpaths depending on the workpiece but also on kinematical capacities of the polyarticulated structure. The large variety of structure in terms of architecture and kinematic enforce a generic calculation method to simplify adaptative toolpath generation.

A state of the art realized in machining and robotics proposes to investigate the use of kinematical manipulability polytopes to represent kinematical capacities. An analysis of the polytopes and of the workpiece allows to generate toolpaths with a controlled feedrate and a decreasing time in 5-axis positionned milling and in 5-axis continous milling. This formalism highlights strong interactions between milling strategy parameters (workpiece setup, feed direction, tool orientation) and allows to prioritize specific parameters to have a controlled execution feedrate.