



**HAL**  
open science

# Ondes scélérates complexes dans les fibres optiques

Benoit Frisquet

► **To cite this version:**

Benoit Frisquet. Ondes scélérates complexes dans les fibres optiques. Optique [physics.optics]. Université de Bourgogne, 2016. Français. NNT : 2016DIJOS056 . tel-01709276

**HAL Id: tel-01709276**

**<https://theses.hal.science/tel-01709276v1>**

Submitted on 14 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne

UMR 6303 CNRS - Dijon - France

Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

## THESE

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Bourgogne**

Discipline : Physique

par

**Benoit FRISQUET**

Le 24 mars 2016

---

## Ondes scélérates complexes dans les fibres optiques

---

Directeur de thèse : Pr. Guy MILLOT  
Co-encadrant de thèse : Bertrand KIBLER

### Jury :

RANDOUX Stéphane	Professeur, Université de Lille 1	Rapporteur
SCIAMANNA Marc	Professeur, Supelec	Rapporteur
BRUNETTI Maura	Docteur, Université de Genève	Examineur
SENET Patrick	Professeur, Université de Bourgogne	Examineur
KIBLER Bertrand	Chargé de recherche (CNRS), Université de Bourgogne	Co-encadrant de thèse
MILLOT Guy	Professeur, Université de Bourgogne	Directeur de thèse



*À ma famille, mes amis...*



# Remerciements

Tout d'abord, je remercie les membres du jury qui ont accepté de lire cette thèse avec attention et grande rigueur. Merci au professeur **Patrick Senet** qui a accepté d'être le président du jury lors de la soutenance malgré qu'il ne soit pas du domaine de l'optique non linéaire. Je remercie les professeurs **Stéphane Randoux** de l'Université de Lille et **Marc Sciamanna** de CentraleSupélec à Metz et également Mme **Maura Brunetti** de l'Université de Genève.

Je ne pourrai continuer ces remerciements sans remercier particulièrement mon directeur de thèse, le professeur **Guy Millot**, et de mon co-encadrant de thèse, **Bertrand Kibler**, qui m'ont permis avec leurs encadrements d'avancer dans mon projet, de faire toujours plus pointu au niveau des simulations et des expériences ainsi que la possibilité de réaliser des conférences internationales et des collaborations à l'étranger.

Je remercie également mon équipe d'accueil (SLCO) codirigé par **Guy Millot** et **Frédéric Smektala**. Je tiens à citer particulièrement **Julien Fatome** pour son aide précieuse lors de montages expérimentaux très complexes, également **Christophe Finot** avec qui j'ai pu échangé quelques discussions constructives. Je remercie aussi **Philippe Grelu** et **Patrice Tchouf-Dinda** pour leurs confiances en m'accordant l'enseignement du module de travaux pratiques avec les 4<sup>es</sup> années de l'école d'ingénieur. Je tiens à remercier **Kamal Hammani** avec qui j'ai pu échangé avant ma thèse lorsqu'il était également doctorant mais aussi pendant lorsqu'il est revenu au laboratoire ICB. Je remercie également **Olivier Musset** et toutes les personnes composant le groupe Verre de l'équipe (**Frédéric Desevedavy**, **Jean-Charles Jules**, **Grégory Gadret**) avec qui j'ai pu avoir des discussions scientifiques ou non durant ces trois années et demie de thèse.

Je tiens également à remercier **Pierre Béjot** avec qui j'ai pu échangé des techniques de simulations permettant d'optimiser mon code et d'avoir de meilleurs résultats. Je ne peux oublier également **Bruno Lavorel** avec sa poignée de main légendaire. **Edouard Hertz** avec son aide pour la préparation du module de travaux pratiques dont **Olivier Bidault** était le responsable, que je remercie aussi pour sa confiance renouvelée pour réaliser l'enseignement de son module de TP en optique. Enfin, je remercie tout particulièrement **Hans Jauslin**, pour son soutien à l'ATCPB dont j'ai été le président.

Je poursuis mes remerciements avec les personnes qui ont côtoyé mon bureau (D325) à savoir tout d'abord, **Jérémy Picot-Clemente**, avec qui j'ai passé toutes mes années de thèses avec qui j'ai pu échanger de science ou non ainsi que nos tentatives de reconversion à l'aéronautique. Je ne peux oublier **Florent Favier** avec son bref passage dans le bureau. Je remercie aussi **Karim Bendahmane** qui est arrivé lors de ma dernière année de thèse qui a pu m'offrir de nombreux conseils pour ma soutenance et mon manuscrit. Enfin, je finirai avec **Foued Amrani** et **Ugo Andral** qui sont arrivés lors des changements de fenêtre et n'ont plus voulu en partir tellement qu'ils s'y sont sentis bien.

Je remercie également les différentes personnes avec qui j'étais entouré quand je faisais partie du bureau de l'association ATCPB, lorsque j'ai été vice-président : **Fabienne Peltier**, **Gilles Plusquellec**, **Loïc Stefan**, **Michael Claudon**. Et plus particulièrement lors de mes mandats de président : **Camille Nallet**, **Clément Roux**, **Clément Strutynski** et **Ugo Andral** pour leurs aides très précieuses.

Je tiens à remercier tous les autres doctorants passés ou actuels du laboratoire ou dans l'association ATCPB avec qui j'ai pu partager durant ces trois années : **Philippe Morin**, **Ibrahim**

**El-Mansouri, Pierre-Yves Bony, Charles-Henri Hage, Marin Gilles, Manon Lamy, Paul Froideveau, Benjamin Rousseaux, Gang Xu, Christian Mback, Pauline Vitry, Mylène Bonnaud, Maud Louviot, Maiwen Meisterhans, Julien Dussot, Hugo Varguet.**

Durant ces trois années, j'ai pu également participer à une expérience fabuleuse qui est l'expérimentarium, je remercie pour cela **Lionel Maillot**, et **Elise Cellier-Holzem** ainsi que **Coralie Biguzzi** qui m'ont permis de parler de mon sujet de thèse à des enfants et à un public non avertis. Je remercie également tous les participants doctorants à cette aventure, même si je retiendrai plus particulièrement mes camarades de promotion : **Florent Delencre, Lucie Desmoulins, Déborah Ancel, Vianney Rozand, Pierre-Yves Bony** et **Sandra Wagner**.

Je tiens également à remercier tous mes amis qui ont su me supporter, m'encourager et passer de bon moment lors de ces trois années : **Aurélien, Florian, Cyril, Romain, Nicolas, François, Laëtitia, Eléonore, Aurélie, Chloé** et particulièrement **Sandra** qui ayant connu aussi l'expérience d'un doctorat a su trouver les mots justes. Mais également mes amis que j'ai connu au travers de jeu en ligne ou forum : **Felina, Audrey, Maloo, Blistyle, Kryyy, Kyliu, Freyia, Lilly, Ombresia, Negi** et plus particulièrement **Hanna** (ou Mary) qui m'a énormément soutenu lors de l'écriture de mon manuscrit.

Pour terminer ces remerciements, je souhaite grandement remercier ma famille, ma mère **Nathalie**, mon père **Michel** et ma soeur **Noemie** pour leur soutien indéfectible tout au long de ma thèse et plus particulièrement sur la fin de ma thèse. Vous avez toujours été présent sur toute la durée de mes études et je vous en remercie.

Je tiens à m'excuser pour les oublis et prie les personnes potentiellement concernées de ne pas m'en tenir compte.





# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Références de l'introduction . . . . .	3
<b>1 L'équation de Schrödinger non linéaire : analogie entre hydrodynamique et optique</b>	<b>5</b>
1.1 Le soliton, toute une histoire . . . . .	7
1.1.1 En hydrodynamique . . . . .	7
1.1.2 En optique . . . . .	7
1.2 Équation de Schrödinger non linéaire dans les différents domaines . . . . .	9
1.2.1 Les équations en hydrodynamique . . . . .	9
1.2.2 Des équations de Maxwell à l'équation de Schrödinger en optique . . . . .	10
1.2.2.1 L'équation de Schrödinger non linéaire "standard" . . . . .	11
1.2.2.2 L'équation de Schrödinger non linéaire généralisée . . . . .	13
1.2.3 L'analogie hydrodynamique et optique . . . . .	14
1.3 Les systèmes d'observation . . . . .	15
1.3.1 Le canal hydrodynamique . . . . .	15
1.3.2 La fibre optique . . . . .	17
1.3.2.1 La propagation linéaire . . . . .	18
1.3.2.1.1 L'atténuation . . . . .	18
1.3.2.1.2 La dispersion . . . . .	19
1.3.2.2 Les effets non linéaires . . . . .	20
1.3.2.2.1 L'effet Kerr : Non-linéarité instantanée . . . . .	21
1.3.2.2.2 L'effet Raman : non-linéarité retardée . . . . .	22
1.3.3 Analogie entre les différents paramètres des systèmes expérimentaux hydrodynamique et optique . . . . .	23
1.4 Le phénomène d'instabilité de modulation (MI) . . . . .	23
1.4.1 L'instabilité de Benjamin-Feir . . . . .	23
1.4.2 L'instabilité de modulation en optique . . . . .	25
1.4.2.1 Instabilité de modulation spontanée . . . . .	25
1.4.2.2 Instabilité de modulation stimulée . . . . .	26

---

1.5	Les breathers d'Akhmediev : solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire et de l'instabilité de modulation . . . . .	28
	Références du chapitre 1 . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Instabilité de modulation et solutions de l'Equation de Schrödinger Non Linéaire sur fond continu : de la théorie au système physique idéal</b>	<b>35</b>
2.1	Solutions de premier ordre : des solutions "simples" . . . . .	38
2.1.1	Le breather d'Akhmediev . . . . .	38
2.1.2	Le soliton de Kuznetsov-Ma . . . . .	41
2.1.3	Le soliton de Peregrine . . . . .	42
2.2	Des solutions complexes de second ordre . . . . .	43
2.2.1	Superposition non linéaire de solutions de premier ordre "déphasées" . . . . .	44
2.2.2	Superposition non linéaire de deux solutions de premier ordre "en phase" . . . . .	45
2.2.2.1	Superposition non dégénérée . . . . .	45
2.2.2.2	Superposition dégénérée . . . . .	48
2.3	Simulation de la génération expérimentale de ces solutions de manière idéale . . . . .	49
2.3.1	Le breather d'Akhmediev . . . . .	50
2.3.2	Le soliton de Peregrine . . . . .	52
2.3.3	Les solutions de deuxième ordre . . . . .	53
2.4	Comparaison entre les solutions analytiques et les simulations numériques de la génération des solutions de manière idéale . . . . .	55
2.5	Impact des conditions initiales et des pertes sur la propagation . . . . .	58
2.5.1	Impact de la puissance initiale . . . . .	58
2.5.2	Impact de la phase spectrale initiale relative . . . . .	58
2.5.3	L'influence des pertes . . . . .	59
2.6	Génération expérimentale des solitons sur fond continu : idéaux . . . . .	60
2.6.1	Le montage expérimental . . . . .	60
2.6.2	Mesure expérimentale . . . . .	62
2.6.2.1	Étude de l'impact de la phase . . . . .	62
2.6.2.2	Étude de différents cas . . . . .	63
2.6.2.2.1	Solutions de premier ordre . . . . .	63
2.6.2.2.2	Solutions de second ordre . . . . .	64
2.7	Conclusion . . . . .	67
	Références du chapitre 2 . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Vers la génération et l'interaction de solitons sur fond continu dans un système physique "réaliste"</b>	<b>71</b>
3.1	Simulation numérique de la génération de solutions d'une manière non idéale . . . . .	73
3.1.1	Le breather d'Akhmediev . . . . .	74
3.1.2	Les solutions de deuxième ordre . . . . .	75
3.2	Comparaison entre les solutions analytiques et les simulations numériques avec une excitation non idéale . . . . .	79
3.3	Les différents impacts d'une excitation réaliste des solutions . . . . .	81
3.3.1	L'impact des conditions initiales . . . . .	81
3.3.1.1	Impact du spectre initial . . . . .	81
3.3.1.2	Impact de la puissance initiale . . . . .	82
3.3.1.3	Impact de la phase spectrale initiale relative . . . . .	82
3.3.2	L'impact des pertes . . . . .	83
3.4	Expériences sur l'excitation non-idéale des solitons sur fond continu . . . . .	85
3.4.1	Le montage expérimental . . . . .	85

---

---

3.4.2	Mesures et observations expérimentales . . . . .	86
3.4.2.1	Breathers d'Akhmediev . . . . .	87
3.4.2.2	La collision des breathers d'Akhmediev . . . . .	88
3.4.2.3	Impact des conditions initiales . . . . .	90
3.4.2.3.1	Impact de la puissance moyenne . . . . .	90
3.4.2.3.2	Impact de la phase spectrale . . . . .	91
3.5	Conclusions . . . . .	92
	Références du chapitre 3 . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Instabilité de modulation vectorielle et ondes scélérates dans un système fibré de type Manakov</b>	<b>95</b>
4.1	Le modèle Manakov . . . . .	98
4.1.1	Description du modèle . . . . .	98
4.1.2	Instabilité de modulation vectorielle et analyse de stabilité linéaire . . . . .	100
4.1.3	Solution analytique de type onde scélérate vectorielle . . . . .	104
4.2	Observation de l'instabilité de modulation vectorielle spontanée . . . . .	106
4.2.1	Montage expérimental . . . . .	106
4.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	108
4.2.2.1	En fonction de la puissance initiale . . . . .	108
4.2.2.2	En fonction de l'écart de fréquence . . . . .	110
4.3	Instabilité de modulation vectorielle stimulée et génération de solutions extrêmes vectorielles . . . . .	112
4.3.1	Montage expérimental . . . . .	112
4.3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	113
4.3.2.1	Le cas simple : onde scélérate noire de premier ordre . . . . .	113
4.3.2.2	Extension à un cas complexe : solution d'onde scélérate d'ordre supérieure . . . . .	116
4.4	Conclusion . . . . .	118
	Références du chapitre 4 . . . . .	120
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Calcul de la largeur spatiale à mi-hauteur d'un breather d'Akhmediev</b>	<b>129</b>
	<b>Liste des publications</b>	<b>133</b>



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Depuis des millénaires l'Homme s'interroge sur les phénomènes naturels, les observe, essaie de les comprendre et de les modéliser. Il a commencé à les emprisonner dans des équations afin de décrire au plus juste les phénomènes, quelles qu'en soient les conditions. Cela a permis d'expliquer de nombreux effets et d'utiliser ce que la nature nous a donné, comme par exemple le feu. L'Homme a observé le feu, a fini par le maîtriser avec succès (vers -400 000 ans), puis a cherché à expliquer le phénomène bien plus tard. L'Homme de nature curieuse va toujours tenter de découvrir les phénomènes qui l'entourent, les comprendre pour pouvoir les maîtriser si possible.

Cependant de nombreux phénomènes physiques n'ont pas encore été élucidés, tels les ondes scélébrates ou vague scélébrates dans les océans. Ce phénomène d'abord observé et relayé par les récits de marins reportant qu'un mur d'eau (de 15 à plus de 30 mètres de haut) apparaissait devant leur navire avec une force incroyable. Certains navires ont été simplement déformés par la force de ces vagues, d'autres ont malheureusement sombré sans réellement connaître la raison. Ces vagues n'étaient pas prises en compte par les modèles mathématiques et physiques permettant de décrire l'évolution des vagues dans les océans. En effet, la compréhension des phénomènes hydrodynamiques dans les océans a réellement commencé pendant la Seconde Guerre mondiale par la nécessité de contrôler les débarquements amphibies sur les plages exposées à la houle [1]. Les théories développées ont montré en général un bon accord avec les mesures effectuées sur l'océan. De plus ces vagues étaient très rares avec une probabilité, à un endroit donné, d'environ une vague tous les 3000 ans. Par ailleurs les calculs théoriques ne laissaient pas présager qu'elles existaient. La première mesure réalisée d'une vague scélébrate a eu lieu le 1<sup>er</sup> janvier 1995, sur la plate-forme pétrolière Draupner E dans la mer du Nord. Depuis, diverses mesures de ce phénomène ont été réalisées sur d'autres plates-formes, mais également avec des satellites. Ces dernières mesures ont alors permis des études statistiques de ce phénomène.

Ainsi, de nombreux modèles ont été développés en se fondant sur l'interaction non linéaire entre les vagues modélisée par l'équation de Schrödinger non linéaire [2, 3]. Ces modèles ont permis de réaliser des simulations numériques pour mieux comprendre la création de ces vagues. Par ailleurs d'autres concepts ont prédit que les vagues scélébrates océaniques pouvaient se former à partir des effets linéaires comme la focalisation directionnelle ou de la superposition aléatoire de

différents trains d'ondes indépendants. D'autres concepts non linéaires ont montré que la croissance du bruit présent sur la surface de l'eau pouvait générer des structures d'ondes localisées de forte amplitude [4, 5]. La propagation d'onde non linéaire en optique peut être également gouvernée par l'équation de Schrödinger non linéaire, d'où l'analogie entre les domaines de l'optique et de l'hydrodynamique. Malgré l'utilisation de cette équation en optique non linéaire depuis des décennies, c'est seulement en 2007 que des instabilités en optique ont été associées à la notion d'onde scélérate [6]. En effet Solli et ses collaborateurs ont rapporté dans des histogrammes les fluctuations d'intensité aux grandes longueurs d'onde de spectres de supercontinuum générés dans les fibres optiques. L'analogie entre l'instabilité optique et les vagues scélérates en hydrodynamique a été effectuée pour deux raisons. La première raison est que les mesures de l'intensité optique ou de l'amplitude de la surface de l'eau présentent des distributions de probabilité asymétriques. Cette asymétrie est généralement caractéristique des processus extrêmes. En effet, les mesures très éloignées de la médiane ont des probabilités d'apparition faibles, mais ont une très forte amplitude. La seconde raison est que le supercontinuum étudié par Solli et al. a été enregistré en régime d'instabilité de modulation. L'instabilité de modulation est un processus non linéaire qui se manifeste par la croissance exponentielle du bruit. Ce processus est l'un des mécanismes probables à l'origine de la génération des vagues scélérates dans les océans.

Les résultats de Solli et al., les premiers obtenus en optique, ont permis de réaliser une analyse des fluctuations d'intensité sur un large spectre du supercontinuum. Ces résultats ont motivé de nombreuses études afin de comprendre comment les structures avec de fortes amplitudes pouvaient apparaître dans les systèmes optiques, et par analogie, en hydrodynamique. Le terme d'onde scélérate depuis a été généralisé afin de décrire différents processus issus de l'instabilité de modulation. En outre, des solutions analytiques de l'équation de Schrödinger non linéaire qui décrivent des solitons sur fond continu permettent de décrire les ondes scélérates en hydrodynamique et en optique. En effet, ces solutions sont des prototypes d'ondes scélérates et correspondent aux divers enregistrements réalisés de vagues scélérates dans les océans. C'est pourquoi, les solutions analytiques générées expérimentalement à partir de conditions initiales contrôlées, sont aussi appelées ondes scélérates.

Durant ces dernières années, un nombre croissant de solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire ont été étudiées, travaux motivés par le fait que ces solutions peuvent être des prototypes des ondes scélérates dans les océans. Enfin, notons également que de nombreux résultats expérimentaux ont été obtenus en optique et en hydrodynamique afin de vérifier l'existence de ces solutions dans les deux domaines. En effet, les chercheurs ont pu démontrer l'existence des différentes solutions de premier ordre dans ces deux domaines [7–11]. Ainsi les travaux de cette thèse sont motivés par la volonté de vérifier l'existence de solutions analytiques complexes de l'équation de Schrödinger non linéaire. Pour ce faire, nous utiliserons les connaissances des différentes observations déjà réalisées afin de générer des structures de type onde scélérates plus complexes.

Le chapitre 1 introduit l'analogie entre l'hydrodynamique et l'optique, ainsi que les différentes notions nécessaires à la compréhension des résultats qui seront présentés par la suite. L'accent sera tout particulièrement mis sur l'instabilité de modulation qui est responsable de l'émergence de structures de type onde scélérate.

Le chapitre 2 présente les solutions analytiques de premier ordre de l'équation de Schrödinger non linéaire sur lesquelles nous nous baserons pour générer des solutions de second ordre. Nous verrons les caractéristiques typiques de ces solutions. Il est possible de réaliser une superposition non linéaire de solutions de premier ordre pour générer des solutions de second ordre. Nous pré-

senterons les différentes solutions existantes et nous nous intéresserons tout particulièrement aux solutions "en phase". Dans ce même chapitre, des résultats numériques et expérimentaux seront également présentés sur la génération idéale des solutions. Cependant, la nature n'est jamais totalement idéale, c'est pourquoi dans le chapitre 3, nous présenterons les résultats numériques et expérimentaux d'une génération réaliste. Des solutions de premier ordre seront générées à l'aide d'une condition initiale approchée de la solution analytique exacte. Nous étudierons ensuite leur collision qui peut être l'analogie d'une collision de deux trains d'ondes indépendants permettant la création de vague scélérate océanique. Le fait de réaliser une collision entre deux solutions non idéales permet de vérifier la robustesse de ce type de génération.

Le dernier chapitre présentera une extension des solutions analytiques scalaires à un cas vectoriel. En effet, la composante de la polarisation dans les diverses expériences réalisées en optique n'a pas été prise en compte. Ici, nous présenterons des résultats à la fois novateurs et complexes à mettre en oeuvre. Nous montrerons comment générer une structure de type onde scélérate sur deux axes de polarisation orthogonaux. Une étude préliminaire portera sur l'instabilité de modulation vectorielle spontanée dans les fibres optiques standard à dispersion normale et présentant une variation aléatoire rapide de la biréfringence résiduelle. Puis, nous montrerons comment générer une structure vectorielle de type onde scélérate.

## Références de l'introduction

- [1] Thomas AA Adcock and Paul H Taylor. The physics of anomalous ('rogue') ocean waves. *Reports on Progress in Physics*, 77(10) :105901, 2014.
- [2] M. Onorato, a. R. Osborne, M. Serio, and S. Bertone. Freak waves in random oceanic sea states. *Physical Review Letters*, 86(25) :5831–5834, 2001.
- [3] N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, and a. Ankiewicz. Extreme waves that appear from nowhere : On the nature of rogue waves. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics*, 373(25) :2137–2145, 2009.
- [4] Christian Kharif and Efim Pelinovsky. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 22(6) :603–634, 2003.
- [5] Alfred Osborne. *Nonlinear Ocean Waves & the Inverse Scattering Transform*, volume 97. Academic Press, 2010.
- [6] DR Solli, C Ropers, P Koonath, and B Jalali. Optical rogue waves. *Nature*, 450(7172) :1054–1057, 2007.
- [7] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, and J. M. Dudley. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics. *Nature Physics*, 6(10) :790–795, 2010.
- [8] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev. Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*, 106(20) :2–5, 2011.
- [9] Kamal Hammani, Benjamin Wetzels, Bertrand Kibler, Julien Fatome, Christophe Finot, Guy Millot, Nail Akhmediev, and John Dudley. Spectral dynamics of modulation instability described using akhmediev breather theory. *Optics letters*, 36(11) :2140–2142, 2011.
- [10] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, G. Genty, B. Wetzels, N. Akhmediev, F. Dias, and J. M. Dudley. Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre. *Scientific Reports*, 2 :1–5, 2012.

- [11] A Chabchoub, B Kibler, JM Dudley, and N Akhmediev. Hydrodynamics of periodic breathers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 372(2027) :20140005, 2014.

CHAPITRE

— 1 —

L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON  
LINÉAIRE : ANALOGIE ENTRE  
HYDRODYNAMIQUE ET OPTIQUE



## 1.1 Le soliton, toute une histoire

Le soliton appelé également onde solitaire est un concept aussi bien mathématique que de physique non linéaire. Il existe lorsque les effets dispersifs et non linéaires se compensent exactement. Le développement du concept de soliton s'est accru en même temps que les différentes équations mathématiques qui ont permis sa compréhension, notamment à partir des années 1960 [1]. Le terme soliton est apparu en 1965 en référence aux comportements d'ondes solitaires robustes lors de collisions, à l'instar des collisions élastiques entre particules [2]. Nous verrons tout d'abord l'origine de ce phénomène physique en hydrodynamique puisque c'est dans ce domaine qu'il a été observé pour la première fois.

### 1.1.1 En hydrodynamique

La première observation d'un soliton ou onde solitaire a été faite par John Scott Russel en 1834, mais il faudra attendre quelques années (1838-1844) pour que ses travaux soient reportés dans la littérature [3]. Dans son rapport, John Scott Russel nota la propagation d'une vague solitaire de grande amplitude observée dans l'Union canal à Hermiston, proche de l'université de Riccarton Heriot - Watt située à Edinburgh. Dans son rapport, on trouve le texte suivant devenu maintenant célèbre (traduit en français) :

*« J'observais le mouvement d'un bateau qui était tiré rapidement le long du canal par une paire de chevaux, quand soudainement le bateau s'arrêta, mais pas la masse d'eau qui avait été mise en mouvement ; elle s'était accumulée autour de la proue du bateau dans un état de violente agitation, puis soudainement, l'abandonna, roula vers l'avant à grande vitesse, prenant la forme d'une grande élévation solitaire, d'un paquet d'eau rond, à la forme douce et bien définie, qui continua sa course dans le canal, apparemment sans changement de forme ou diminution de vitesse. Je la suivis à cheval et la dépassais alors qu'elle roulait encore à la vitesse de huit ou neuf miles à l'heure, préservant sa forme originale de 30 pieds de long et d'un pied et demi en hauteur. La hauteur diminua peu à peu, et après une poursuite d'un ou deux miles, je la perdais dans les méandres du canal. Tel fut, dans le mois d'août 1834, ma première rencontre avec ce phénomène si singulier et si beau que j'avais appelé "onde solitaire" »*

Nous pouvons ainsi noter de cette citation, la première observation d'une onde solitaire qui fut nommée plus tard *soliton*. Cette onde causa une polémique, car aucune des équations à cette époque-là ne prédisait l'existence d'une onde solitaire telle que celle observée par Russel. Phénomène non résolu jusqu'en 1871, année où Joseph Valentin Boussinesq [4] proposa un nouveau modèle mathématique, puis en 1876 Lord Rayleigh [5] permit des avancées significatives. Mais le modèle qui permit vraiment de lever les doutes sur l'existence des ondes solitaires fut celui des équations de Korteweg - de Vries en 1894-1895 [6]. En 1995, une reconstitution de l'expérience a été réalisée dans le canal où a été observé pour la première fois le soliton [7].

### 1.1.2 En optique

En optique, il a fallu d'abord attendre l'apparition du laser en 1960 [8, 9] afin de pouvoir prétendre observer les solitons. Il est possible de distinguer deux types de solitons optiques, spatial ou temporel, selon le mode de confinement du champ électromagnétique durant la propagation de l'onde. Le soliton temporel correspond à une impulsion optique qui se propage à profil temporel constant [10]. Le soliton spatial correspond, quant à lui, à un faisceau autoguidé qui reste confiné dans l'une ou les deux directions perpendiculaires transversales à la direction de propagation. Selon la symétrie du milieu de propagation et/ou du faisceau incident il est

possible d'observer des solitons spatiaux à 1 ou 2 dimensions [11].

Les deux types de solitons optiques sont des structures dont la localisation provient de la variation non linéaire de l'indice de réfraction induite par l'intensité lumineuse, phénomène connu sous le nom d'effet Kerr optique [12–14]. L'effet Kerr optique est à l'origine de deux effets très importants, l'autofocalisation spatiale d'un faisceau lumineux et l'automodulation de phase temporelle, connue sous le nom anglais (*Self-phase Modulation* (SPM)) [15]. Ce sont ces deux principaux effets non linéaires qui sont responsables de la formation des solitons optiques. Le soliton spatial est généré lorsque l'autofocalisation d'un faisceau optique compense exactement sa diffraction naturelle. De manière similaire, le soliton temporel est formé lorsque l'élargissement temporel de l'impulsion induit par la dispersion est exactement compensé par la SPM induite par effet Kerr [15].

Le soliton spatial a été découvert via le phénomène d'autopiégeage de faisceaux laser continus (*Continuous Waves* (CW)) dans un matériau non linéaire optique massif [16]. Cependant le phénomène d'autopiégeage n'a pas été immédiatement relié à la notion de soliton spatial à cause de la nature instable de ce dernier. Ce n'est que dans les années 1980, que des solitons stables ont pu être observés en utilisant des matériaux non linéaires dans lesquels la diffraction a été limitée à une seule dimension transversale [11].

La première observation d'un soliton temporel a eu lieu en 1967 lors de la découverte du phénomène de transparence auto-induite dans un milieu non linéaire résonnant [17]. Six ans plus tard des travaux théoriques montrent que certaines impulsions lumineuses peuvent se propager à profil constant dans une fibre optique en régime de dispersion anormale [10]. Hasegawa propose d'utiliser ce genre d'impulsion pour augmenter les performances des systèmes de télécommunications à fibres optiques. C'est en 1980 que furent observés pour la première fois des solitons dans les fibres optiques [18]. La figure 1.1 montre les premiers enregistrements de solitons dans une fibre optique. Cette figure montre que les solitons perdent leur forme à partir d'une certaine puissance laser, la dispersion étant alors insuffisante pour compenser les effets non linéaires. Suite à cette première observation le potentiel des solitons a été mis en évidence pour les télécommunications optiques à longues distances [19–21].

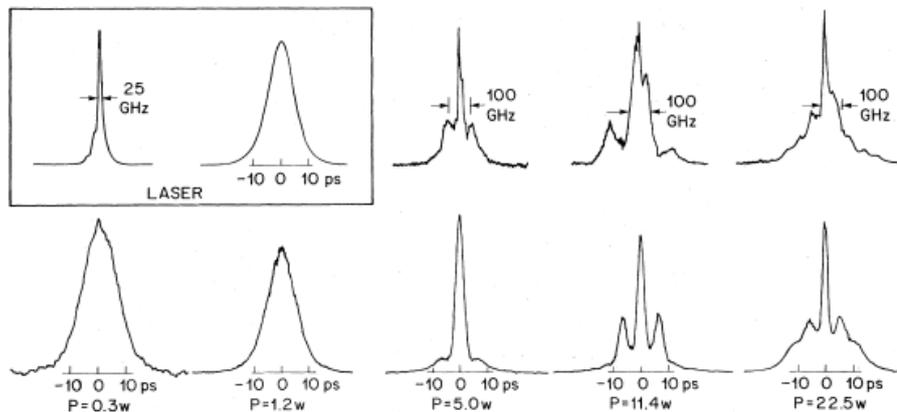


FIGURE 1.1 – Premier enregistrement du soliton. Dans l'encadré, les caractéristiques temporelles et spectrales du laser. En bas, traces d'autocorrélation pour différentes puissances. En haut, les spectres correspondant aux traces temporelles situées en dessous (les courbes sont normalisées)[18].

## 1.2 Équation de Schrödinger non linéaire dans les différents domaines

Avec l'avènement de la mécanique quantique dans les années 1960 et de la physique non linéaire, l'équation de Schrödinger non linéaire est étudiée dans de nombreux domaines tels que l'hydrodynamique, l'optique guidée ou bien encore les condensats de Bose-Einstein. Nous verrons dans la suite de cette partie les similitudes entre l'équation de Schrödinger non linéaire en hydrodynamique et celle obtenue en optique non linéaire. L'équation de Schrödinger non linéaire est très importante puisqu'elle a permis d'étudier de manière simple et précise la propagation d'ondes dispersives et non linéaires.

### 1.2.1 Les équations en hydrodynamique

Les équations décrivant la propagation d'ondes d'un fluide incompressible et à flux irrotationnel sont connues sous le nom *des équations d'Euler* :

$$\Delta\Phi = 0, \quad -\infty < z < \eta(x, y, t), \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz = p \\ \eta_t + \nabla\phi \cdot \nabla\eta - \phi_z = 0 \end{array} \right\} \quad z = \eta(x, y, t), \quad (1.2)$$

$$\phi_z \rightarrow 0 \quad z \rightarrow -\infty, \quad (1.3)$$

où  $\phi$  est le potentiel des vitesses,  $\eta$  le déplacement de la surface libre,  $g$  la constante d'accélération de la pesanteur et  $p$  est la pression externe exercée sur la surface libre du fluide. Pour des déplacements de la surface libre de faible amplitude les conditions limites deviennent  $z < 0$  et  $z = 0$  à la place de  $z < \eta(x, y, z)$  et  $z = \eta(x, y, z)$ . Cette approximation conduit aux équations d'ondes de Stokes [22].

Ainsi à partir de ces équations, nous pouvons distinguer deux régimes de propagation selon les valeurs relatives de la profondeur d'eau et de la longueur d'onde. Le régime en eau profonde correspond au cas où la longueur d'onde est petite devant la profondeur, tandis qu'à l'opposé le régime en eau peu profonde correspond au cas où la longueur d'onde est grande devant la profondeur. Notons que l'observation du soliton de Russel a été réalisée en eau peu profonde. Ainsi les premiers modèles pour l'étude des ondes hydrodynamiques furent développés en régime d'eau peu profonde. C'est ainsi que Boussinesq a présenté le premier modèle en 1872 [4]. Puis plus de deux décennies plus tard, D.J. Korteweg et G. de Vries ont proposé un nouveau modèle de la propagation d'ondes en eau peu profonde. Ce modèle, connu sous le nom d'équation KdV (Korteweg - de Vries) du nom de ses auteurs, fut développé en 1895 [6]. Le modèle a ainsi permis de modéliser la propagation de l'onde solitaire dans le canal de Heriot-Watt University. L'élévation de la surface de l'eau étant le seul paramètre pertinent, le modèle de propagation dans le canal est qualifié de modèle 1D+1.

Le principal modèle en eau profonde est venu bien plus tard, il a fallu en effet attendre les années 1970, avec l'avènement de la physique quantique et de sa célèbre équation de Schrödinger, pour voir la naissance de l'équation Schrödinger non linéaire en hydrodynamique. Cette équation a été développée de différentes manières. Dans le contexte de l'hydrodynamique en eau profonde, elle a été établie pour la première fois en 1968 par Zakharov à partir d'une méthode d'analyse spectrale [23]. En 1972, Hasimoto et Ono [24] et Davey [25] l'ont développée indépendamment en utilisant la méthode multi échelle. Puis Yuen et Lake ont dérivé l'équation de Schrödinger en partant des équations d'Euler (voir équation 1.2). D'autre part, Yuen et Lake ont obtenu l'équation de Schrödinger non linéaire en utilisant la formulation Lagrangienne moyenne en

1975 [26]. Cette approche a été introduite par Whitham en 1965 [27] et a été reprise par Luke en 1967 [28]. (historique repris de la publication de Yuen et Lake [26].) C'est ainsi que l'équation de Schrödinger non linéaire (1.4) permet de calculer l'évolution de l'enveloppe d'un paquet d'ondes qui dépend de la distance de propagation  $x$  et du temps  $t$  :

$$i \left[ \frac{\partial a}{\partial t} + C_g \frac{\partial a}{\partial x} \right] + \mu \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + v|a|^2 a = 0 \quad (1.4)$$

où

$$C_g = \frac{\omega_0}{2k_0} \quad \mu = -\frac{\omega_0}{8k_0^2} \quad v = -\frac{1}{2}\omega_0 k_0^2 \quad (1.5)$$

où  $k_0$  et  $\omega_0 = \omega(k_0)$  le nombre d'onde et la fréquence angulaire de l'onde porteuse, respectivement. De plus,  $\omega_0$  et  $k_0$  sont reliés par une relation de dispersion définie par :  $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$ , où  $g$  correspond à l'accélération de la pesanteur. Pour avoir l'élévation de la surface de l'eau notée  $\eta(x, t)$ , qui correspond à la grandeur observée, il faut utiliser la relation [29] :

$$\eta(x, t) = \text{Re} \left\{ a(x, t) \exp [i(k_0 x - \omega_0 t)] + \frac{1}{2} k_0 a^2(x, t) \exp [2i(k_0 x - \omega_0 t)] \right\} \quad (1.6)$$

Pour obtenir l'équation de Schrödinger non linéaire sous une forme normalisée, nous effectuons le changement de variables :  $\tau = -\frac{\omega_0}{8k_0^2} t$ ,  $\xi = x - C_g t = x - \frac{\omega_0}{2k_0} t$  et  $q = \sqrt{2} k_0^2 a$ , où  $C_g$  est la vitesse de groupe du train d'ondes. Nous obtenons alors l'équation suivante :

$$i \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + 2|q|^2 q = 0 \quad (1.7)$$

Dans l'équation (1.37), nous avons le terme de dispersion représenté par  $\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2}$ , et le terme non linéaire représenté par  $2|q|^2 q$ . Une équation similaire sera obtenue pour modéliser la propagation d'une impulsion dans un matériau diélectrique non linéaire, telle qu'une fibre optique par exemple.

### 1.2.2 Des équations de Maxwell à l'équation de Schrödinger en optique

En optique, il existe des équations très connues qui permettent d'obtenir une équation de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu. Ces équations sont celles de Maxwell (équations (1.8)) [15] :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

où  $\vec{J}$  représente le vecteur de densité de courant et  $\rho_f$  la densité de charge respectivement,  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide.  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont respectivement les vecteurs du champ électrique et de l'induction magnétique.  $\vec{P}$  est le vecteur de polarisation électrique induit par le passage d'une onde électromagnétique qui impose une oscillation des électrons liés. Dans le cas d'un milieu diélectrique tel qu'une fibre optique il n'y a aucune charge libre, par conséquent  $\vec{J} = 0$  et  $\rho_f = 0$ .

Afin de connaître la polarisation ( $\vec{P}(\vec{r}, t)$ ) dans le milieu, un traitement complet nécessite une approche quantique, cependant les expériences que nous avons réalisées impliquent un

domaine spectral (0.5 à 2  $\mu\text{m}$ ) loin des fréquences de résonance de la silice. Une approche phénoménologique pour décrire le milieu peut donc être déployée [15]. Cependant celle-ci est possible que dans un régime dit perturbatif, c'est-à-dire que l'intensité lumineuse doit être inférieure à environ  $10^{13} \text{ W/cm}^2$ , intensité largement inférieure au champ de Coulomb atomique. Pour ces intensités pas trop élevées les états atomiques de la silice sont très peu perturbés [30]. La polarisation induite  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  lors de la propagation de l'onde peut alors être décrite selon une expansion en série de puissance du champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \chi^{(k)} \vec{E}(\vec{r}, t)^k \quad (1.9)$$

$$= \underbrace{\vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t)}_{\vec{P}_L(\vec{r}, t)} + \underbrace{\left( \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) + \dots \right)}_{\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)} \quad (1.10)$$

où  $\chi^{(k)}$  sont les tenseurs de susceptibilité diélectrique de l'ordre  $k$  du matériau [14]. Dans l'équation (1.10),  $\vec{P}_L(\vec{r}, t)$  représente la polarisation linéaire qui correspond à la susceptibilité d'ordre 1 du matériau diélectrique.  $\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$  est le terme de polarisation non linéaire qui regroupe tous les termes d'ordres supérieurs à un. La silice amorphe des fibres optiques étant un matériau centrosymétrique, les susceptibilités d'ordres pairs comme l'ordre 2 ( $\chi^{(2)}$ ) sont nulles. Les fibres optiques standards ne permettent donc pas la génération de seconde harmonique. Les équations (1.8) et (1.9) conduisent à l'équation de propagation suivante :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \vec{P}_L(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \right) \quad (1.11)$$

C'est de cette équation (1.11) que va résulter l'équation de Schrödinger non linéaire, comme nous le verrons ci-après.

### 1.2.2.1 L'équation de Schrödinger non linéaire "standard"

La propagation de la lumière dans une fibre optique peut être décrite par l'équation de Schrödinger non linéaire, cette équation intégrable peut être résolue mathématiquement par la méthode de la diffusion inverse [31], mais surtout se résout numériquement rapidement en utilisant la méthode de Fourier à pas divisés [15]. Nous allons voir dans cette partie comment l'équation de Schrödinger non linéaire a pu être dérivée à partir des équations de Maxwell. Précisons d'abord les principales hypothèses réalisées pour décrire la partie non linéaire de l'équation. Nous considérons le cas d'une onde se propageant dans une fibre optique monomode selon la direction  $\vec{z}$  et possédant une polarisation linéaire selon  $\vec{x}$ . Le champ électrique peut être décomposé selon la combinaison enveloppe-porteuse suivante [15] :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{x} \left\{ F(x, y) A(z, t) \exp^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \right\} \quad (1.12)$$

où  $F(x, y)$  correspond à la distribution transverse du mode fondamental,  $\beta_0$  est la constante de propagation de la porteuse à la pulsation  $\omega_0$ , et  $c.c.$  est le complexe conjugué. L'enveloppe  $A(z, t)$  est supposée varier lentement par rapport aux variations rapides de l'onde porteuse. En d'autres termes, l'enveloppe temporelle contient un grand nombre d'oscillations de l'onde porteuse. L'enveloppe temporelle est normalisée de telle sorte que  $|A(z, t)|^2$  corresponde exactement à la puissance instantanée exprimée en W. On trouve également de manière équivalente que  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  correspond à l'enveloppe complexe du spectre du champ. L'enveloppe temporelle  $A(z, t)$  est associée à de nombreuses composantes spectrales, ce qui laisse un large choix de

fréquences de référence dans la décomposition du champ. Cependant il est préférable de choisir la fréquence dans le voisinage des structures spectrales prédominantes. Lorsque la biréfringence du milieu peut être négligée, il est possible de réduire les équations vectorielles précédentes à une description purement scalaire. Cette approximation scalaire peut être utilisée pour des fibres optiques à maintien de la polarisation avec un champ polarisé rectilignement ou bien lorsque le champ se propage de manière monomode dans une fibre optique possédant une symétrie de révolution. Dans cette approche scalaire la polarisation électrique peut être décrite sous la forme suivante :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{x} \left\{ F(x, y) P(z, t) \exp^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \right\} \quad (1.13)$$

Avec une polarisation orientée selon  $\vec{x}$ , les seules composantes de tenseur non nulles sont du type  $\chi_{xx}^{(1)}$  pour  $\chi^{(1)}$  et  $\chi_{xxxx}^{(3)}$  pour  $\chi^{(3)}$ . Les équations (1.9) (1.12) et (1.13) conduisent alors à :

$$P_L(z, t) = \epsilon_0 \chi_{xx}^{(1)} A(z, t) \quad (1.14)$$

$$P_{NL}(z, t) = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} |A(z, t)|^2 A(z, t) \quad (1.15)$$

La polarisation totale peut être déduite à partir de ces deux équations :

$$P(z, t) = \left( \epsilon_0 \chi_{xx}^{(1)} + \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} |A(z, t)|^2 \right) A(z, t) = \epsilon_0 \left[ \chi_{xx}^{(1)} + \epsilon_{NL} \right] A(z, t) \quad (1.16)$$

À partir de l'équation (1.16), il est possible d'exprimer la permittivité relative  $\epsilon_r(\omega)$  qui conduit à l'indice de réfraction  $n$  pour une fréquence donnée [15] :

$$n^2 = \epsilon_r(\omega) = \underbrace{1 + \chi_{xx}^{(1)}}_{\epsilon_L} + \underbrace{\left( \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |A(z, t)|^2 \right)}_{\epsilon_{NL}} \quad (1.17)$$

En traitant le terme  $\epsilon_{NL}$  comme étant perturbatif devant  $\epsilon_L$ , il est aisé de réaliser une expansion des parties réelles et imaginaires de  $\epsilon_r$ . Nous pouvons en déduire l'indice de réfraction total du milieu qui varie en fonction de la fréquence et de la puissance lumineuse :

$$n(\omega, |A|^2) = n_L(\omega) + n_2 |A|^2 \quad (1.18)$$

Les relations de Kramers-Krönig sont utilisées pour obtenir les contributions linéaire  $n_L$  et non linéaire  $n_2$  à l'indice de réfraction [14] ; ces équations relient les parties réelles et imaginaires de  $\chi_{xx}^{(1)}$ , l'indice linéaire s'écrit alors :

$$n_L(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \chi_{xx}^{(1)} \right] \quad (1.19)$$

De la même manière, la contribution non linéaire peut être obtenue à partir des équations précédentes, elle s'écrit sous la forme :

$$n_2 = \frac{3}{8n_L} \text{Re} \left[ \chi_{xxxx}^{(3)} \right] \quad (1.20)$$

L'équation (1.18) montre que l'indice de réfraction du milieu est modifié durant la propagation de l'onde, ceci proportionnellement à la puissance de l'onde, c'est le principe bien connu de l'effet Kerr optique que nous verrons plus en détail dans la suite du manuscrit [12]. Pour une fibre optique de silice  $n_L$  vaut environ 1.46 et  $n_2$  compris entre 2.3 et  $2.7 \cdot 10^{-20} \text{m}^2/\text{W}$  [32, 33]. L'équation de Schrödinger non linéaire est obtenue facilement à partir des équations de Maxwell (équation (1.8)) [15] :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma(\omega_0) |A|^2 A \quad (1.21)$$

Où  $\gamma(\omega_0)$  est le coefficient de non-linéarité défini par :

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 n_2}{c A_{eff}(\omega_0)} \quad (1.22)$$

Où  $c$  est la vitesse de la lumière (299 792 458 m/s), et  $A_{eff}$  l'aire effective du mode guidé dans la fibre optique qui dépend de la fréquence de l'onde porteuse (voir l'équation (1.23)). Enfin  $\beta_1$  et  $\beta_2$  proviennent du développement en série de Taylor de la constante de propagation du mode  $\beta$  (équation (1.24)) autour de la fréquence porteuse  $\omega_0$  (fréquence centrale du spectre de l'impulsion).  $\beta_1$  et  $\beta_2$  représentent respectivement l'inverse de la vitesse de groupe et la dispersion de la vitesse de groupe de l'impulsion se propageant dans la fibre optique.

$$A_{eff}(\omega) = \frac{\left( \int \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{F}(x, y, \omega)|^2 dx dy \right)^2}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{F}(x, y, \omega)|^4 dx dy} \quad (1.23)$$

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0) \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} + \dots \quad (1.24)$$

Le terme de vitesse de groupe est en général éliminé en traitant le problème dans un référentiel lié à l'impulsion, c'est-à-dire en écrivant l'équation de propagation dans un système de coordonnées qui se déplace à la vitesse de groupe des impulsions ( $v_g = \frac{1}{\beta_1}$ ). Le temps est alors modifié par  $t = t - \beta_1 z$  au cours de la propagation. L'équation (1.21) devient par ce changement de variable :

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (1.25)$$

### 1.2.2.2 L'équation de Schrödinger non linéaire généralisée

Précédemment, nous avons considéré que l'indice de réfraction non linéaire variait de manière instantanée [12], cependant il faut envisager la réponse du milieu selon plusieurs échelles de temps. En effet, lorsqu'un champ se propage dans un milieu celui-ci va alors interagir avec les atomes lorsqu'il va se propager, entraînant le déplacement des électrons liés aux atomes et également des noyaux constituant le milieu de propagation de manière non linéaire [34, 35]. Cette vibration moléculaire induite par le déplacement des noyaux possède une réponse temporelle qui va être non instantanée (de l'ordre de 60 fs) par rapport à la réponse des électrons [36]. Afin de tenir compte de cet effet, nous introduisons un nouveau terme dans l'équation de propagation, la fraction de réponse Raman ( $f_R = 0.18$ ), comme nous pouvons le voir dans l'équation (1.26) qui décrit la réponse non linéaire totale intégrée dans le temps. Dans cette équation la fonction de Dirac  $\delta(t)$  représente la contribution de l'effet Kerr instantanée du milieu et  $h_R(t)$  est la réponse Raman retardée. La réponse Raman peut être décrite par une fonction oscillante amortie sur quelques dizaines de femtosecondes (voir partie 1.3.2.2).

$$R(t) = (1 - f_r) \delta(t) + f_R h_R(t) \quad (1.26)$$

Cette réponse peut être intégrée dans le temps afin de pouvoir l'utiliser dans une équation de propagation, nous avons alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(T') \times |A(z, T - T')|^2 dT' = (1 - f_R) |A(z, T)|^2 + f_R \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(T') |A(z, T - T')|^2 dT' \quad (1.27)$$

Ainsi dans l'équation de Schrödinger non linéaire standard (équation (1.25)) il faut ajouter la réponse retardée (équation (1.27)) dans la partie non linéaire. Nous pouvons ainsi écrire

l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée [15, 37, 38] :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}A - \hat{D}'A = i\gamma \left( 1 + i\tau_{shock} \frac{\partial}{\partial T} \right) \times \left( A(z, T) \left( (1 - f_R)|A(z, T)|^2 + f_R \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(T')|A(z, T - T')|^2 dT' \right) \right) \quad (1.28)$$

où  $\hat{D}'$  est l'opérateur dispersion qui comprend les différents ordres de dispersion (voir l'équation (1.29)), celui-ci sera décrit plus précisément dans la partie 1.3.2.1.

$$\hat{D}' = \sum_{k \geq 2} \frac{i^{k+1}}{k!} \beta^k \frac{\partial^k}{\partial T^k} \quad (1.29)$$

Pour être le plus général possible, notamment dans le cas de la propagation d'impulsions ultracourtes (femtosecondes) il faut tenir compte de la dépendance fréquentielle du coefficient non linéaire (dispersion non linéaire). Ainsi, nous réalisons un développement de  $\gamma$  en série de Taylor autour de la fréquence  $\omega_0$ . Un terme de choc optique  $\tau_{shock}$  apparaît alors dans l'équation de propagation  $\tau_{shock}$  qui correspond à la dispersion de la non-linéarité  $\gamma$ . L'équation (1.30) donne une forme simplifiée du terme de choc optique ( $\tau_0$ ). Dans certaines conditions, il est effectivement possible de négliger la dépendance fréquentielle de l'aire effective [35, 38, 39] et le terme de choc est décrit simplement par l'équation (1.30), où  $\tau_{shock} \simeq \tau_0$ .

$$\tau_{shock} = \tau_0 - \left\{ \frac{\partial [\ln A_{eff}(\omega)]}{\partial \omega} \right\}_{\omega=\omega_0} \simeq \tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \quad (1.30)$$

Nous vérifions bien que la condition  $f_R = 0$  conduit bien à l'équation de Schrödinger non linéaire standard. Suivant les systèmes étudiés, nous pourrions uniquement utiliser l'équation de Schrödinger non linéaire standard plutôt que l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée.

### 1.2.3 L'analogie hydrodynamique et optique

Dans les paragraphes précédents nous avons introduit l'équation de Schrödinger non linéaire en hydrodynamique et en optique. Cette équation possède une forme identique pour les deux domaines. En effet, un examen de l'équation normalisée en hydrodynamique (1.37) et de l'équation en optique (1.25) montre que la différence entre les deux équations est l'échange entre les variables temporelles et spatiales. Bien que les deux équations permettent d'obtenir l'évolution de l'enveloppe de l'onde, en pratique les grandeurs mesurées dans les deux domaines sont différentes. En effet en hydrodynamique, la grandeur physique mesurée est l'élévation de la surface libre qui correspond à l'onde porteuse, donnée par l'équation (1.6). En optique, la grandeur physique mesurée est la puissance du champ optique qui correspond au carré du module de l'amplitude complexe de l'onde enveloppe. Sur la figure 1.2, nous pouvons voir la représentation graphique dans le domaine de l'hydrodynamique et de l'optique d'une onde continue, d'un soliton et d'un soliton de Peregrine [40]. En hydrodynamique, la grandeur mesurée dans les expériences est représentée par des lignes continues noires sur la figure 1.2(a-c). En optique, l'observation se fait par la puissance du champ optique, représenté par les traits continus orange sur la figure 1.2(d-f). La ligne pointillée rouge représente la grandeur physique hydrodynamique ou optique calculée à partir de l'équation de Schrödinger non linéaire, équation (1.4) en hydrodynamique et équation (1.21) en optique.

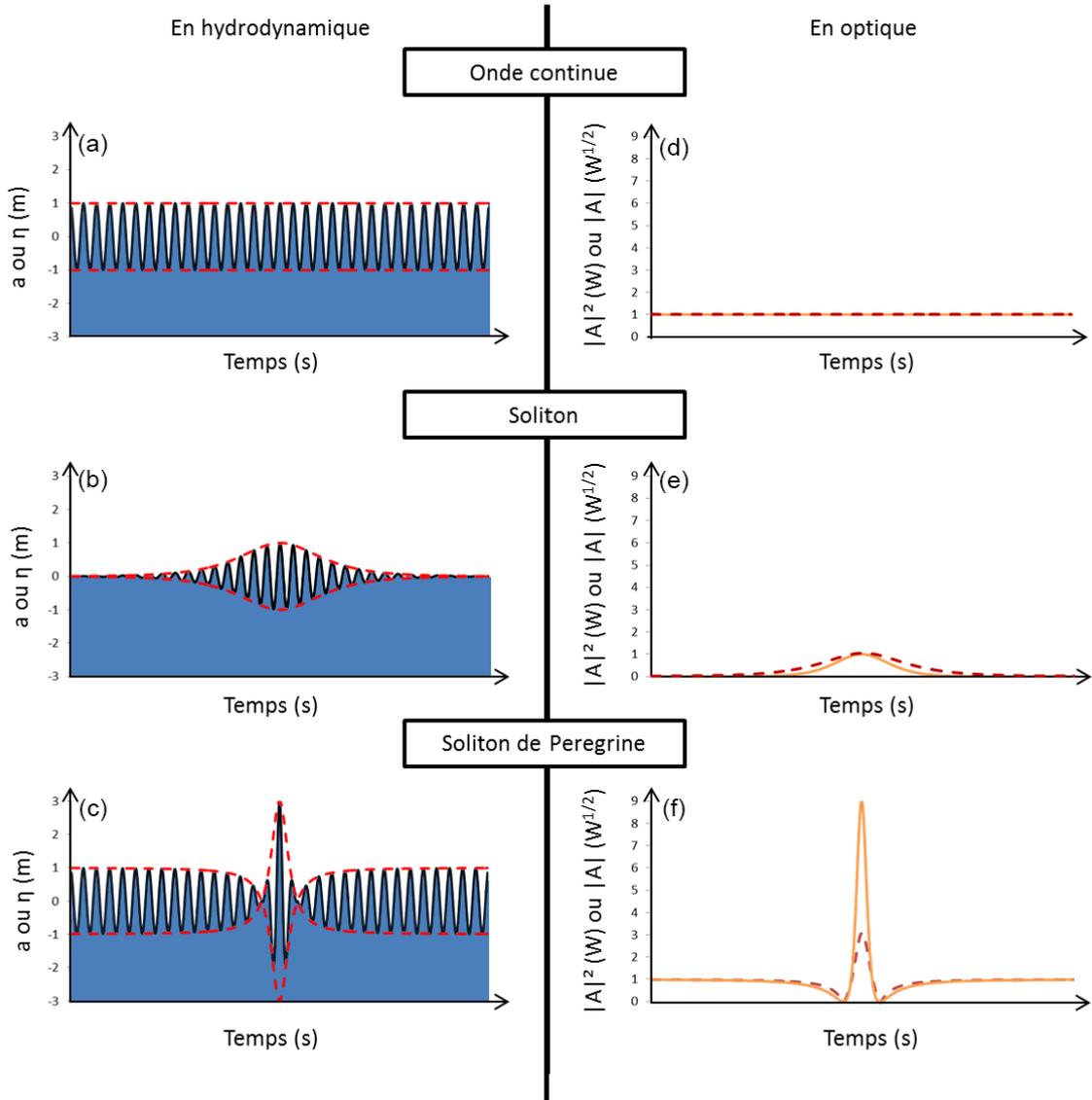


FIGURE 1.2 – (a-c) (a-c) Représentation des ondes en hydrodynamique ; ligne pointillée rouge, enveloppe calculée par l'équation Schrödinger non linéaire (1.4) ; ligne continue noire, élévation de la surface de l'eau calculée à partir de l'équation (1.6). (d-f) Représentation des ondes en optique ; ligne pointillée rouge, valeur absolue de l'enveloppe  $|A|$ , ligne continue orange, puissance du champ calculée à partir de l'équation Schrödinger non linéaire (1.21). (a,d) Onde continue. (b,e) Soliton. (c,f) Soliton Peregrine. Représentation graphique à partir de [40].

### 1.3 Les systèmes d'observation

Après avoir mis en évidence l'analogie entre l'optique et l'hydrodynamique, nous allons décrire maintenant un système expérimental typique de chacun des domaines. Ainsi nous allons considérer l'exemple d'un canal hydrodynamique horizontal de forme rectangulaire et celui d'une fibre optique monomode.

#### 1.3.1 Le canal hydrodynamique

Le canal hydrodynamique permet de recréer des phénomènes qui se produisent en milieu naturel. Nous avons vu précédemment que selon la profondeur d'eau dans le canal, l'équation de propagation sera du type KdV (eau peu profonde) ou du type NLS (eau profonde). Nous

allons considérer le cas de l'eau profonde. Le canal hydrodynamique que nous pouvons voir sur la figure 1.3 possède les caractéristiques suivantes : 15 m de long, 1.6 m de large et 1.5 m de profondeur.

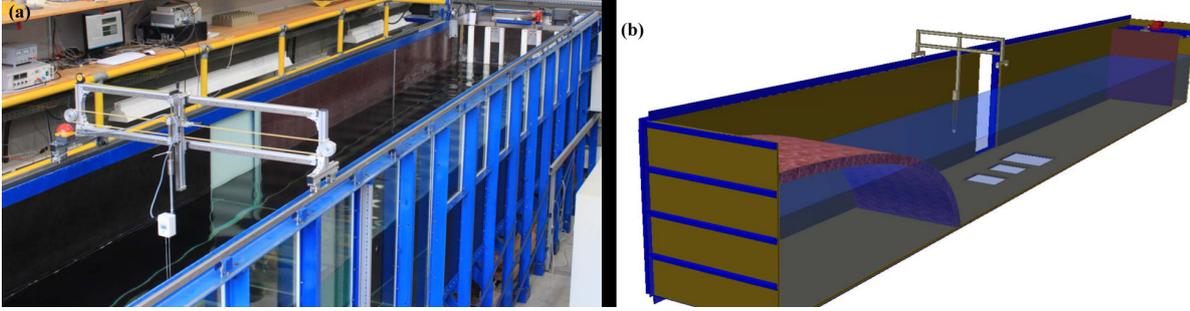


FIGURE 1.3 – Illustration d'un canal hydrodynamique dans les conditions d'eau profonde. (a) Photo du canal hydrodynamique avec le système de mesure de l'élévation de la surface libre, et le système qui permet de créer les vagues au fond du canal. (b) Schéma du canal hydrodynamique avec la jauge, le système mécanique piston-plaque et la plage [41].

Nous pouvons voir également sur la figure 1.3 une sonde qui permet de mesurer la hauteur de la surface libre, déplaçable afin de réaliser des mesures à différentes distances par rapport à la source d'émission des ondes. Sur cette figure, nous pouvons voir également le système qui permet de générer les ondes, il est constitué d'un ensemble mécanique de palles qui déplace l'eau à la fréquence choisie. Ce système est situé à l'extrémité du bassin que nous pouvons voir sur la figure 1.3(a) . Le canal hydrodynamique possède également une "plage" (visible au premier plan sur le schéma de la figure 1.3(b)) qui permet d'absorber les ondes émises par le générateur d'onde et ainsi éviter la réflexion de celles-ci en fin de canal pour ne pas perturber les mesures. En hydrodynamique, il est également possible d'écrire l'équation de Schrödinger non linéaire sous la même forme que celle en optique, que nous appelons *time Non Linear Schrödinger Equation* [42]. À partir de l'équation (1.4) effectuons les changements de variables suivants en utilisant les variables définies en (1.5) :

$$t \mapsto x, x \mapsto t, C_g \mapsto C'_g = \frac{1}{C_g} = \frac{2k_0}{\omega_0}, \mu \mapsto \mu' = \frac{\mu}{C_g^3} = \frac{-k_0}{\omega_0^2} = \frac{-1}{g}, v \mapsto v' = \frac{v}{C_g} = -k_0^3 \quad (1.31)$$

Ces changements de variables permettent alors d'obtenir l'équation de Schrödinger non linéaire temporelle :

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial x_0} + C'_g \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \mu' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + v' |A|^2 A = 0 \quad (1.32)$$

Par identification avec l'équation de Schrödinger non linéaire en optique :

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (1.33)$$

nous pouvons déterminer les paramètres de dispersion et de non linéarité suivants [43] :

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{C_g} = \frac{2k_0}{\omega_0} =: \beta_1 \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = \frac{2}{g} =: \beta_2 \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial k}{\partial |a|^2} = -k_0^3 =: \gamma \quad (1.36)$$

En effectuant un second changement de variables qui permet d'utiliser un système de coordonnées qui se déplace à la vitesse de groupe, soit  $T = t - \beta_1 z$ , nous obtenons alors l'équation suivante :

$$i \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} + \gamma |a|^2 a = 0 \quad (1.37)$$

### 1.3.2 La fibre optique

Les fibres optiques que nous utilisons dans le cadre de cette thèse sont des guides d'ondes diélectriques cylindriques constitués de silice fondue  $SiO_2$ . Elles sont à saut d'indice avec un coeur qui a son indice de réfraction  $n_c$  légèrement supérieur à celui de la gaine optique  $n_g$  qui l'entoure (voir la figure 1.4). La légère différence d'indice est obtenue en dopant la silice du coeur avec du germanium  $GeO_2$  ou phosphore  $P_2O_5$  qui augmentent l'indice de réfraction. L'indice de la gaine optique peut être diminué en dopant alors la silice avec du bore  $B_2O_3$  par exemple. La différence entre les deux indices de réfraction est alors de l'ordre de 0.3%, valeur suffisante pour obtenir l'effet de réflexion totale interne [44]). La réflexion interne à l'interface coeur-gaine permet un piégeage de l'onde électromagnétique dans le milieu diélectrique. Enfin, l'ensemble coeur gaine est protégé par une gaine en plastique (voir sur la figure 1.4) pour éviter les détériorations de la fibre optique. Sur la figure 1.4, nous pouvons voir un schéma de la fibre optique ainsi que de la répartition des indices de réfraction en fonction des différentes couches la constituant.

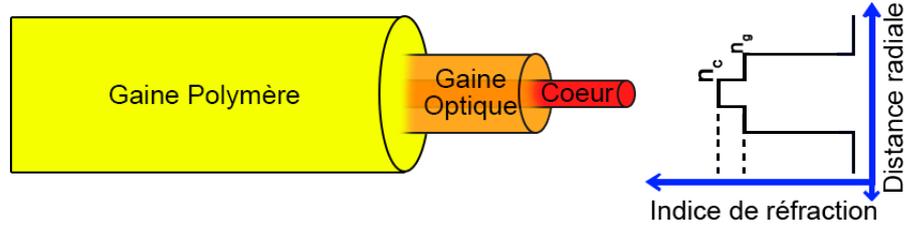


FIGURE 1.4 – Structure de la fibre optique à saut d'indice, observation des différentes couches successives.

Il existe deux types de fibres optiques, les fibres monomodes et les fibres multimodes. Une fibre monomode est une fibre qui va propager uniquement le mode fondamental de la lumière. Pour cela elles doivent respecter une condition particulière c'est-à-dire que la fréquence normalisée doit être inférieure à 2.405. Si celle-ci est supérieure à 2.405, la fibre optique est alors multimode. La fréquence normalisée peut être calculée à l'aide de l'équation suivante :

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_c^2 - n_g^2} \quad (1.38)$$

où  $a$  est le rayon du coeur de la fibre optique,  $\lambda$  est la longueur d'onde du mode se propageant dans la fibre optique,  $n_c$  et  $n_g$  sont respectivement les indices de réfraction du coeur et de la gaine optique. La principale différence qui distingue les fibres monomodes des fibres multimodes est le diamètre du coeur qui sera autour de  $10 \mu\text{m}$  pour une fibre monomode standard alors qu'il atteindra  $50 \mu\text{m}$  pour une fibre fortement multimode. Pour les fibres destinées aux télécommunications optiques, le diamètre de la gaine est de  $125 \mu\text{m}$ .

La lumière qui se propage dans une fibre optique va subir les effets linéaires et non linéaires décrits dans les paragraphes qui suivent.

### 1.3.2.1 La propagation linéaire

#### 1.3.2.1.1 L'atténuation

L'atténuation est l'un des premiers effets observés lors de la propagation de la lumière dans une fibre optique. En effet, les premières fibres optiques qui ont été fabriquées possédaient de fortes pertes (de l'ordre de 20 dB/km), ce sont celles de **Corning Glass Work** en 1970 [45]. Mais au cours des années qui ont suivi, la fabrication des fibres optiques a été améliorée et les pertes ont énormément diminué.

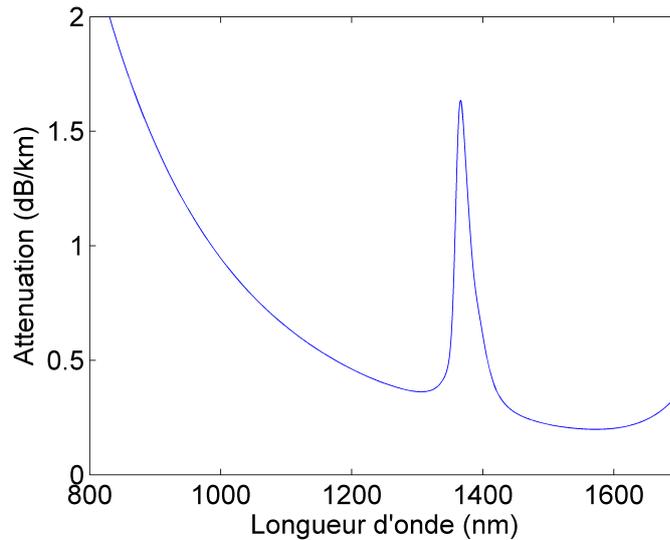


FIGURE 1.5 – Courbe d'atténuation d'une fibre silice en fonction de la longueur d'onde, établie à l'aide de la référence [46].

De plus, comme nous l'avons vu précédemment, dans une approche simple purement géométrique, la lumière se propage selon le principe de réflexion totale à l'interface cœur-gaine, ce qui entraîne des pertes intrinsèques qu'il n'est pas possible de réduire. Ainsi, lorsque nous injectons dans une fibre optique de longueur  $L$  un faisceau laser d'une puissance  $P_i$  la puissance transmise  $P_t$  est donnée par l'équation suivante :

$$P_f = P_i \exp^{-\alpha L} \quad (1.39)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de perte linéique de la fibre exprimée en  $m^{-1}$ . Toutefois, il est d'usage d'exprimer les pertes en  $dB.km^{-1}$ . La relation suivante permet de passer de l'une à l'autre des unités :

$$\alpha_{dB} = -\frac{10}{L} \log \left( \frac{P_f}{P_i} \right) \approx 4.343\alpha \quad (1.40)$$

Les pertes globales dans une fibre optique ont différentes origines, par exemple les défauts d'alignement lors d'une soudure entre deux fibres, ou bien encore la torsion qui modifie le chemin optique de l'onde. Mais les principales sources de pertes sont la diffusion Rayleigh et l'absorption par les ions. La diffusion Rayleigh se traduit par une diminution de l'intensité de la lumière avec la longueur d'onde ( $I_t \sim I_i \lambda^{-4}$ ). La seconde source de pertes est due principalement à la présence d'ions  $OH^-$  qui crée un pic d'absorption à 1380 nm. Ces caractéristiques sont visibles sur la courbe de la figure 1.5 qui donne l'évolution des pertes en fonction de la longueur d'onde. Depuis plusieurs décennies, la recherche a permis de diminuer les pertes liées aux matériaux, géométries, méthodes de fabrication des fibres. À ce jour, les pertes minimales sont de 0.2 dB/km dans la bande C (de 1530 à 1565 nm) comme le montre la figure 1.5. C'est pourquoi cette fenêtre spectrale est principalement utilisée à ce jour pour les transmissions optiques.

### 1.3.2.1.2 La dispersion

La dispersion totale de la fibre optique est l'association de deux contributions, celle du matériau et celle du guide d'onde. Lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un milieu diélectrique, l'onde interagit avec les électrons du matériau diélectrique. La dispersion du matériau se traduit par une dépendance de l'indice de réfraction avec la fréquence  $n(\omega)$ . La vitesse de propagation va ainsi dépendre de la fréquence  $n = c/v$ . La variation de l'indice de réfraction  $n$  en fonction de la fréquence est donnée par l'équation de Sellmeier [47] :

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2} \quad \text{avec } \lambda_j = \frac{2\pi c}{\omega_j} \quad (1.41)$$

Cette équation est valable loin des fréquences de résonance du matériau. Dans le cas des fibres optiques en silice les forces et fréquences de résonances sont données dans le tableau 1.1 :

m	$B_j$	$\lambda_j(nm)$
1	0.6961663	68.4043
2	0.4079426	116.2414
3	0.8974794	9896.161

TABLE 1.1 – Coefficients de résonance de Sellmeier pour la silice

La dispersion du guide d'onde va quant à elle dépendre de la conception de la fibre optique, c'est-à-dire du rayon du cœur, mais aussi de la différence d'indice entre la gaine et le cœur. Notons que la géométrie complexe du guide va jouer également, c'est le cas notamment des fibres optiques microstructurées. Compte-tenu de la différence d'indice de réfraction entre le cœur et la gaine optique, les parties de la lumière ne se propagent pas à la même vitesse dans le cœur et la gaine, d'où l'apparition de délais optiques à la sortie de la fibre ; c'est l'effet de dispersion du guide. Un paramètre clé caractérisant la dispersion d'une fibre est la longueur d'onde du zéro de dispersion, c'est-à-dire la longueur d'onde pour laquelle la dispersion est nulle ( $D=0 \text{ ps.nm}^{-1}.km^{-1}$ ). Pour une fibre optique standard monomode (SMF - *Single Mode Fiber*) la longueur d'onde correspondant au zéro de dispersion est située aux alentours de 1300 nm. En modifiant les propriétés géométriques de la fibre, il est possible de déplacer le zéro de dispersion vers 1550 nm (longueur d'onde de transmission pour les télécommunications optiques) ; la fibre correspondante est appelée fibre à dispersion décalée (DSF - *Dispersion Shifted Fiber*). Les modifications des propriétés géométriques entraînent une variation de l'indice de réfraction vu par la lumière ; il est en général commode d'introduire l'indice de réfraction effectif total  $n_{eff}$  vu par le mode lumineux. Par souci de simplicité mathématique, nous prendrons pour la suite la notation  $n$  au lieu de  $n_{eff}$  pour parler de l'indice de réfraction effectif.

D'un point de vue théorique, les effets de dispersion sont traités par un développement en série de Taylor de la constante de propagation  $\beta(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c}$  autour de la fréquence  $\omega_0$  de l'onde porteuse :

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\omega - \omega_0)^6 + \dots + \frac{\beta_m}{m!}(\omega - \omega_0)^m \quad (1.42)$$

avec  $\beta_0 = \beta(\omega_0)$  et  $\beta_m = \left( \frac{\partial^m \beta}{\partial \omega^m} \right)_{\omega=\omega_0}$ . Les termes  $\beta_m$  sont exprimés en  $ps^m.km^{-1}$ . Le terme  $\beta_1$ , inversement proportionnel à la vitesse de groupe, est donné par l'équation suivante :

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) \quad (1.43)$$

$\beta_2$  exprime le fait que deux fréquences voisines voient une vitesse de groupe différente. On nomme ainsi ce paramètre dispersion de la vitesse de groupe (GVD - *Group Velocity Dispersion*) il est donné par l'équation suivante :

$$\beta_2 = \frac{\partial \beta_1}{\partial \omega} = -\frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left( 2 \frac{\partial n}{\partial \omega} + \omega \frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2} \right) \quad (1.44)$$

Dans la littérature, la dispersion est souvent caractérisée par le paramètre D, qui s'exprime selon l'équation suivante :

$$D = \frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (1.45)$$

Ce paramètre est exprimé en  $ps.nm^{-1}.km^{-1}$ . La figure 1.6 donne la variation en longueur d'onde de la dispersion de la vitesse de groupe de la silice fondue. Pour des longueurs d'onde inférieures à la longueur d'onde du zéro de dispersion, la dispersion est dite normale,  $D < 0$  ( $\beta_2 > 0$ ). Pour des longueurs d'onde supérieures à la longueur d'onde de dispersion nulle, la dispersion est dite anormale,  $D > 0$  (ou  $\beta_2 < 0$ ). En régime de dispersion normale, les basses longueurs d'onde vont se déplacer plus vite que les hautes longueurs d'onde, et inversement en régime de dispersion anormale. Quel que soit le signe de la dispersion, une impulsion qui se propage dans une fibre optique va s'élargir temporellement au cours de sa propagation.

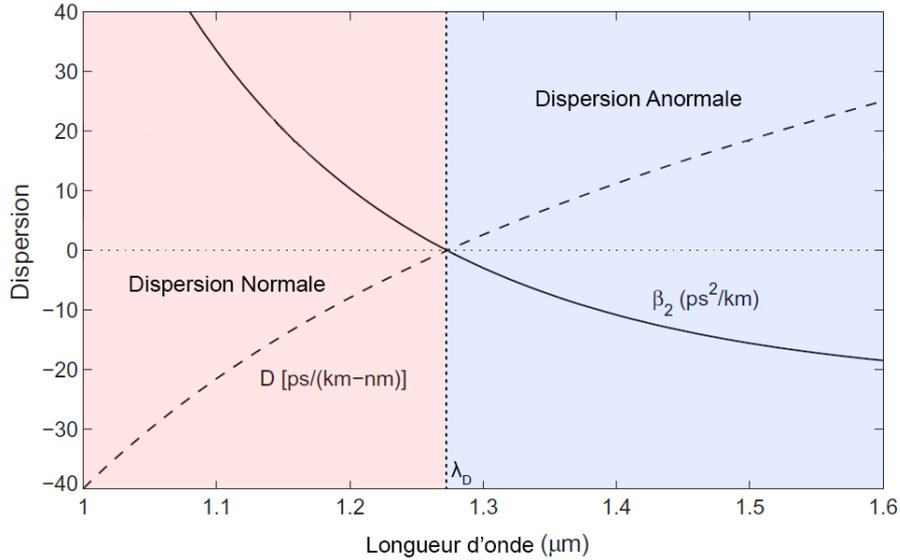


FIGURE 1.6 – Dispersion de la vitesse de groupe de la silice fondue (trait discontinu), et variation du paramètre D correspondant. La zone rouge est la zone où la dispersion est normale, et la zone bleue est la zone où la dispersion est anormale (tirée de [15]).

Dans le cadre de cette thèse, nous utiliserons principalement la fibre SMF-28 (*Single Mode Fiber*) qui a une dispersion anormale à  $\lambda \simeq 1.55 \mu m$ , c'est une fibre standard pour les transmissions télécoms.

### 1.3.2.2 Les effets non linéaires

Après avoir vu un bref descriptif des effets linéaires qui apparaissent lors de la propagation de lumière dans une fibre optique nous allons maintenant nous intéresser aux effets non linéaires.

### 1.3.2.2.1 L'effet Kerr : Non-linéarité instantanée

Nous étudierons tout d'abord l'effet Kerr qui a une réponse du milieu non linéaire instantanée. En négligeant le terme de dispersion l'équation de Schrödinger non linéaire (1.28) se réduit à la forme suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma|A|^2A \quad (1.46)$$

où le terme Kerr est caractérisé par le coefficient de non-linéarité  $\gamma$ . Les effets sont alors instantanés vu qu'ils sont indépendants du temps. Le coefficient  $\gamma$  est déterminé par l'équation suivante :

$$\gamma = \frac{\omega_0 n_2}{c A_{eff}(\omega_0)} \quad (1.47)$$

où  $\omega_0$ ,  $A_{eff}(\omega_0)$  sont respectivement la fréquence centrale et l'aire effective correspondant au mode de propagation dans la fibre. Nous définissons une longueur caractéristique au bout de laquelle les effets non linéaires agissent de façon significative par  $L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_i}$  où  $P_i$  est la puissance crête initiale. Dans la suite de ce manuscrit, nous utiliserons souvent ce paramètre pour normaliser les distances de propagation. L'effet Kerr se manifeste par l'automodulation de phase (*SPM, Self Phase Modulation*), la modulation de phase croisée (*XPM, Cross Phase Modulation*) et le mélange à quatre ondes (*FWM, Four Waves Mixing*). Ces différents effets sont décrits ci-après.

### L'automodulation de phase

L'automodulation de phase est une conséquence directe de la variation de l'indice de réfraction avec l'intensité du champ qui se propage [48]. Sachant que  $|A(z, T)|^2 = |A(0, T)|^2$ , la solution de l'équation (1.46) est  $A(z, T) = A(0, T) \exp(i\phi_{SPM})$  où  $\phi_{SPM}$  est le déphasage non linéaire induit par effet Kerr et déterminé par :

$$\phi_{SPM} = \gamma|A(0, T)|^2 z \quad (1.48)$$

Le déphasage non linéaire varie proportionnellement à la distance de propagation et dépend du coefficient de non-linéarité et de la puissance initiale du champ. Cette accumulation de phase induit un élargissement spectral des impulsions. De plus, le déphasage non linéaire varie temporellement, d'où l'apparition d'une fréquence instantanée qui diffère de la fréquence porteuse  $\omega_0$ . L'effet SPM modifie le profil spectral des impulsions par la génération de fréquences inférieures ou supérieures à la fréquence  $\omega_0$  sur le front montant ou descendant des impulsions, respectivement. Nous pouvons noter que l'élargissement spectral induit par SPM est symétrique.

### La modulation de phase croisée

De la même façon, lorsque deux ondes de fréquences différentes ( $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) suffisamment intenses se propagent simultanément dans une fibre optique, l'onde à la fréquence  $\omega_1$  est susceptible de modifier l'indice de réfraction vu par l'onde à fréquence  $\omega_2$ , et inversement ; il s'agit de l'effet de modulation de phase croisée (XPM) [49]. Cet effet est à l'origine d'un déphasage non linéaire supplémentaire sur le champ à la fréquence  $\omega_1$  induit par le champ à la fréquence  $\omega_2$  et inversement. Le déphasage induit par XPM est défini par :

$$\begin{aligned} \phi_{XPM}^{(1)} &= 2\gamma|A_2(0, T)|^2 \\ \phi_{XPM}^{(2)} &= 2\gamma|A_1(0, T)|^2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

Lors d'une propagation purement non linéaire dans une fibre optique comme décrite par l'équation (1.46), nous aurons alors un déphasage non linéaire total qui est la somme des déphasages auto-induit (SPM) et induit par XPM. Nous pouvons alors définir les champs par un système d'équations couplées :

$$A_1(z, T) = A_1(0, T) \exp(i(\phi_{SPM}^{(1)} + \phi_{XPM}^{(1)})z) \quad (1.50)$$

$$A_2(z, T) = A_2(0, T) \exp(i(\phi_{SPM}^{(2)} + \phi_{XPM}^{(2)})z) \quad (1.51)$$

Avec la même puissance initiale pour les champ 1 et 2 la contribution de la modulation de phase croisée sur le déphasage non linéaire total est deux fois supérieure à celle de l'automodulation de phase. De plus, les deux ondes ayant des fréquences différentes, elles ont une vitesse de groupe différente. Ainsi l'élargissement spectral induit par XPM sera asymétrique contrairement à l'élargissement spectral induit pas SPM qui est symétrique.

### Le mélange à quatre ondes

Le terme non linéaire Kerr est également à l'origine de l'effet de mélange à quatre ondes, qui est une interaction paramétrique [14, 15]. L'interaction non linéaire dans une fibre optique de trois ondes aux fréquences  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  qui va conduire à la génération d'une nouvelle composante spectrale à la fréquence  $\omega_4$  avec conservation de l'énergie :  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ . Pour que ce processus paramétrique soit efficace, les fréquences doivent satisfaire également à une condition d'accord de phase définie par :  $\Delta_k = 0$ , où  $\Delta_k = \beta(\omega_1) + \beta(\omega_2) - \beta(\omega_3) - \beta(\omega_4)$ . Notons que le mélange à quatre ondes a lieu également s'il y a dégénérescence des fréquences à l'entrée de la fibre. L'interaction de deux fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  peut générer deux nouvelles fréquences réparties symétriquement autour des fréquences de pompe  $\omega_1$  et  $\omega_2$  :  $\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2$  et  $\omega_4 = 2\omega_2 - \omega_1$ . Durant la propagation, chacune des fréquences ( $\omega_1$  à  $\omega_4$ ) pourra interagir avec les autres fréquences et donner naissance à de nouvelles fréquences, générant ainsi une cascade de composantes spectrales régulièrement espacées les unes des autres [50–53].

#### 1.3.2.2.2 L'effet Raman : non-linéarité retardée

Si l'onde est suffisamment puissante, elle peut également déplacer les noyaux constituant le milieu de propagation. En effet, lorsque l'onde traverse le matériau, qui est initialement dans son état fondamental, les molécules constituant du matériau vont alors absorber une partie ( $\hbar\Omega_R$ ) de l'énergie ( $\hbar\omega$ ) des photons incidents. Celles-ci vont alors passer vers un état excité correspondant à la résonance de la vibration intramoléculaire, avec émission de photons Stokes se propageant dans la même direction que ceux incidents, mais avec une fréquence  $\omega_s = \omega - \Omega_R$ . De la même manière, les photons incidents peuvent provoquer le retour des molécules vers leur état fondamental, d'où l'apparition de photons anti-Stokes à la fréquence  $\omega_{as} = \omega + \Omega_R$ . La fréquence  $\Omega_R$  est le décalage Raman qui dépend du type de matériau. Dans le cas de la silice le décalage Raman est de l'ordre de 13.2 THz. Le transfert d'énergie qui s'effectue de la pompe vers l'onde Stokes s'effectue avec un gain  $g_R(\Omega)$  où  $\Omega$  est la différence de fréquence entre la pompe et l'onde Stokes. Ce gain Raman peut être obtenu à partir de la partie imaginaire de la transformée Fourier de la fonction de réponse Raman notée  $h_R(t)$  [36]. Cette fonction est approximée par une expression analytique et a récemment été améliorée par Lin et Agrawal [54]. Nous pouvons voir sur la figure 1.7, respectivement le gain et la fonction réponse de Raman obtenu à partir de cette référence. Nous voyons que le gain est maximum pour une décalage Stokes de -13.2 THz qui correspond au décalage Raman dans la silice.

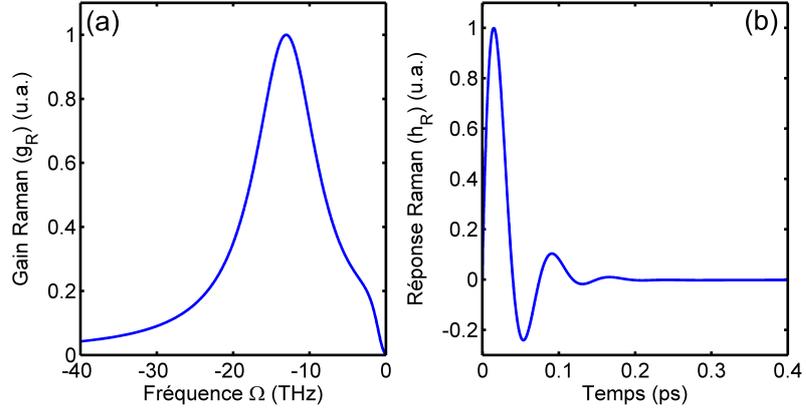


FIGURE 1.7 – (a) Gain Raman dans la silice  $g_R(\Omega)$  - (b) Réponse Raman  $h_R(t)$ .

### 1.3.3 Analogie entre les différents paramètres des systèmes expérimentaux hydrodynamique et optique

Dans les deux parties précédentes nous avons introduit les paramètres de l'équation de Schrödinger dans les deux contextes, hydrodynamique et optique. Nous rappelons ci-dessous l'équation de Schrödinger non linéaire commune aux deux systèmes :

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (1.52)$$

Nous pouvons voir ci-dessous un tableau récapitulatif permettant de déterminer les différents coefficients de cette équation selon le domaine étudié :

	Hydrodynamique	Optique
$\beta_1$	$\frac{1}{C_g} = \frac{2k_0}{\omega_0}$	$\frac{1}{C_g} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\omega n_0(\omega)}{c} \right)$
$\beta_2$	$\frac{2}{g}$	$-\frac{\lambda^2}{2\pi c} D$
$\gamma$	$-k_0^3$	$\frac{\omega n_2}{c A_{eff}}$

TABLE 1.2 – Les différentes constantes pour l'équation de Schrödinger non linéaire (équation (1.52)).

D'après ce tableau nous voyons que la non-linéarité en hydrodynamique n'est pas liée au milieu de propagation, mais est induite par l'onde elle-même contrairement au cas de l'optique où la non-linéarité est intrinsèque au milieu (présence de  $n_2$ ).

## 1.4 Le phénomène d'instabilité de modulation (MI)

### 1.4.1 L'instabilité de Benjamin-Feir

L'instabilité de Benjamin-Feir correspond à l'instabilité de modulation en hydrodynamique. Les recherches menées sur cette instabilité commencent en 1965 par Lighthill qui travaille alors

sur l'instabilité des vagues en eau profonde. Puis apparaissent des travaux indépendants obtenus avec des approches différentes, par Zakharov [55] ainsi que par Benjamin et Feir [56]. Ces travaux montrent qu'une onde à la surface de l'eau peut être instable en présence de faibles perturbations dans un régime focalisant, c'est-à-dire en régime de dispersion anormale. Lorsque l'onde de surface se propage l'instabilité crée une auto modulation de son amplitude (voir figure 1.8). En effet, sous l'effet de la non-linéarité et de la dispersion, certaines fréquences de la perturbation vont croître exponentiellement et devenir importantes comme nous pouvons le voir sur la figure 1.8.

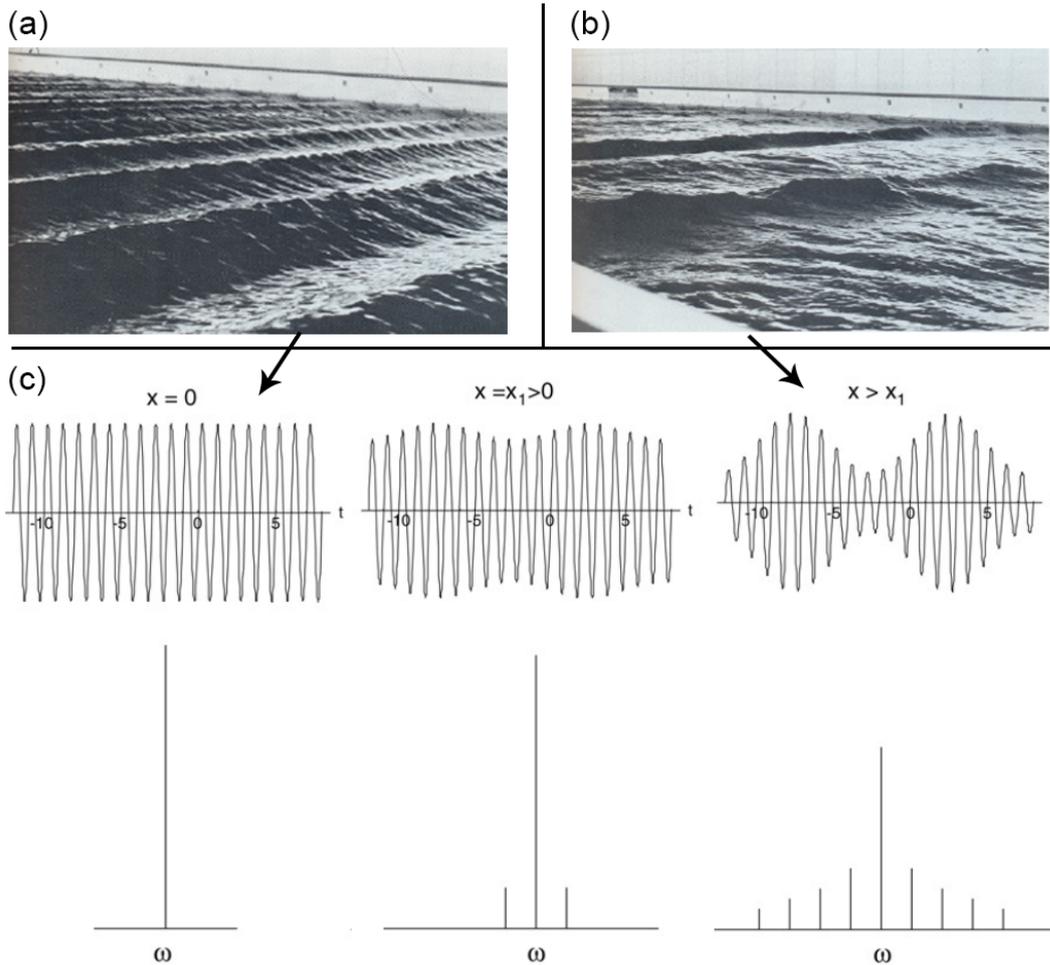


FIGURE 1.8 – (a) Photographie d'un train d'ondes dans un bassin hydrodynamique en début de propagation, (b) Photographie d'un train d'onde se dégradant à cause de l'instabilité de Benjamin-Feir. Photographie de l'expérience de Benjamin [57]. (c) En haut : évolution non linéaire d'un train d'ondes dans un milieu dispersif non linéaire due à l'instabilité de Benjamin-Feir. En bas, évolution du spectre correspondant au train d'ondes situé au-dessus [55].

Benjamin et Feir ont interprété cette instabilité par des modèles mathématiques, mais également lors d'expériences. En effet, ils ont utilisé un canal hydrodynamique et ont fait propager un train d'ondes dont l'enveloppe continue initiale s'est désintégrée au cours de la propagation [57], ainsi que le montre la figure 1.8(a,b).

## 1.4.2 L'instabilité de modulation en optique

### 1.4.2.1 Instabilité de modulation spontanée

L'instabilité de modulation (MI) en optique et plus particulièrement dans les fibres optiques se manifeste par la brisure d'une onde optique continue en un train d'impulsions lorsque la propagation a lieu en régime de dispersion anormale ( $\beta_2 < 0$ ). Cette brisure est induite par les faibles perturbations présentes dans la fibre sous forme de bruit quantique (émission spontanée). Le spectre de l'onde continue initialement très étroit se voit enrichi par deux lobes latéraux dont les fréquences centrales correspondent au maximum de gain d'instabilité. Ce phénomène d'instabilité modulationnelle a été étudiée avec différentes techniques, par simulations numériques [58–60] ou par calcul analytique [15]. Il est important de noter que ce phénomène peut être interprété simplement dans le domaine spectral par un mélange à quatre ondes (FWM) alors que sa dynamique est en général décrite dans le domaine temporel [37].

Afin d'obtenir une expression analytique du gain de l'instabilité de modulation, une analyse de stabilité linéaire est généralement utilisée. La solution stationnaire de l'équation de Schrödinger non linéaire est  $A = \sqrt{P_i} \exp(i\phi_{NL})$ , où  $P_i$  et  $\phi_{NL}$  sont respectivement la puissance injectée dans la fibre et la phase non linéaire induite par SPM. La solution stationnaire est alors perturbée par l'addition d'un terme complexe de faible amplitude :  $A = (\sqrt{P_i} + a) \exp(i\phi_{NL})$ . L'analyse de stabilité linéaire consiste à supposer que la perturbation  $a$  reste de faible amplitude par rapport à l'amplitude de l'onde continue initiale, c'est-à-dire que les termes non linéaires vis-à-vis de l'amplitude  $a$  seront négligés. En injectant la solution stationnaire perturbée dans l'équation de Schrödinger non linéaire (équation (1.21)), et après linéarisation, nous obtenons l'équation d'évolution de la perturbation :

$$i \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \gamma P_i (a + a^*) \quad (1.53)$$

Cette équation est alors simple à résoudre dans le domaine de Fourier, cependant à cause de la présence de  $a^*$ , nous aurons des composantes spectrales  $\Omega$  et  $-\Omega$  qui seront couplées. On peut considérer la solution de l'équation (1.53) comme étant de la forme suivante :

$$a(z, t) = a_1 \exp(i(Kz - \Omega t)) + a_2 \exp(i(Kz + \Omega t)) \quad (1.54)$$

où  $\Omega$  et  $K$  sont respectivement la fréquence et le nombre d'onde de la perturbation. Cette forme de solution nous permet à partir de l'équation (1.53) de déterminer la relation de dispersion de la perturbation :  $K = \pm \frac{1}{2} |\beta_2 \Omega| [\Omega^2 + \text{sgn}(\beta_2) \Omega_c^2]^{\frac{1}{2}}$ , où  $\Omega_c$  est une fréquence de coupure définie par  $\Omega_c = \frac{4\gamma P_i}{|\beta_2|}$ . À partir de la relation de dispersion, nous pouvons voir que si  $\beta_2 > 0$  (dispersion normale), alors l'onde se propageant dans la fibre optique est stable. Cependant, si  $\beta_2 < 0$  (dispersion anormale), alors  $K$  devient imaginaire pour toutes les fréquences qui sont inférieures à la fréquence de coupure  $\Omega_c$ . Ainsi les petites perturbations sur l'onde continue croissent de manière exponentielle. Il est possible d'en déduire le gain d'instabilité de modulation en prenant deux fois la partie imaginaire de  $K$ , soit :

$$g(\Omega) = |\beta_2 \Omega| (\Omega_c^2 - \Omega^2)^{1/2} \quad (1.55)$$

Le gain maximum est obtenu pour une fréquence :  $\Omega_M = \pm \sqrt{2\gamma P_0 / |\beta_2|}$  et a une valeur de  $g_M = 2\gamma P_i$ .

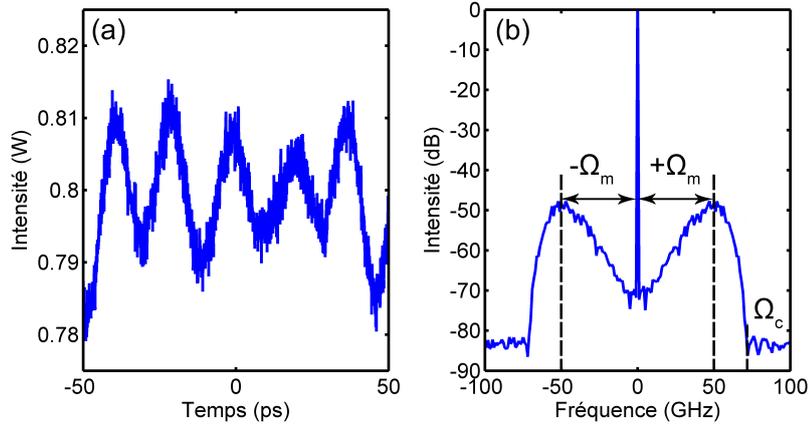


FIGURE 1.9 – (a) Profil temporel à la sortie de la fibre optique - (b) Spectre à la sortie de la fibre optique. Positions des fréquences  $\Omega_m$  et  $\Omega_c$ .

Lorsque l'onde continue se propage dans la fibre optique avec une forte puissance (dans l'approximation de non-déplétion de la pompe), l'onde continue va se moduler à la fréquence où le gain est maximum. Nous pouvons voir un exemple de propagation (figure 1.9) d'une onde continue sur 5 km de fibre optique SMF-28 ayant comme paramètre suivant :  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{km}$  et  $\gamma = 1.2 \text{ W}^{-1} \cdot \text{km}^{-1}$  et une puissance de 800 mW. La fréquence de coupure est de 69 GHz et le gain est maximum pour une fréquence de 48GHz (il s'agit ici des écarts de fréquence par rapport à la fréquence de l'onde continue initiale). La figure 1.9(a), montre le profil temporel de l'onde continue après une distance de propagation de 5 km. La période de modulation est d'environ 20 ps (5 périodes sur 100 ps), ce qui correspond à une fréquence d'instabilité de 50 GHz, en bon accord avec la fréquence obtenue par l'analyse d'instabilité modulationnelle (48 GHz). L'instabilité de modulation fut observée pour la première fois en 1986 par Tai et al. dans les fibres optiques [61].

#### 1.4.2.2 Instabilité de modulation stimulée

L'instabilité de modulation peut être induite en créant une modulation initiale à l'aide d'un modulateur d'intensité externe par exemple. L'instabilité de modulation est alors stimulée. Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'une onde continue qui possède une forte puissance va s'auto-moduler en amplitude lors de sa propagation dans une fibre à dispersion anormale [61]. Le processus d'instabilité de modulation est né à partir de petites perturbations sur l'onde continue qui dans le domaine spectral vont s'amplifier sous forme de bandes latérales situées symétriquement par rapport à la fréquence de l'onde initiale. Ces perturbations sont réparties dans le domaine spectral de manière aléatoire puisqu'elles proviennent du bruit. Or ici, dans le cadre de l'instabilité de modulation stimulée, la perturbation est définie par la modulation appliquée sur l'onde continue. Ainsi dans le domaine spectral, une fréquence unique est privilégiée contrairement au cas précédent où une multitude de fréquences sont initialement présentes. Par analogie avec le cas spontané, dans une fibre optique à dispersion anormale, la fréquence de perturbation créée par le modulateur d'intensité va croître de manière exponentielle. La modulation initiale permet alors d'initier le processus d'instabilité de modulation plus efficacement que dans le cas spontané. Ainsi les bandes latérales induites par instabilité pourront acquérir une intensité élevée et jouer à leur tour le rôle de pompe pour induire leur propres bandes latérales. Ainsi, un phénomène de cascade apparaît qui permet de générer un ensemble de bandes latérales équidistantes et espacées de  $\Delta_f$  qui correspond à la fréquence de perturbation. Cette génération

de fréquences en cascade permet ainsi de générer un peigne de fréquences [62–65].

La figure 1.10 montre la condition initiale à  $z=0$  qui correspond à une onde continue faiblement perturbée dont le champ est défini par :

$$A(0, t) = \sqrt{P_0}(1 + d \cos(\omega t)) \quad (1.56)$$

avec  $\omega = 2\pi f$ ,  $d=0.05$  et  $P_0=0.800$  W. On choisira une fréquence  $f$  de 20 GHz et nous utiliserons les mêmes paramètres de fibre optique que pour l'instabilité spontanée (soit  $\beta_2 = -20$  ps<sup>2</sup>/km,  $\gamma = 1.2$  W<sup>-1</sup> · km<sup>-1</sup>). La figure 1.10 montre l'évolution du profil temporel et du spectre associé pour différentes distances de propagation. Cette figure montre clairement la croissance exponentielle de la fréquence de perturbation et la génération des nouvelles fréquences par instabilité de modulation. Dans le domaine temporel, nous pouvons voir que la modulation sinusoidale commence à former des impulsions et à se compresser au fur et à mesure de sa propagation. À la distance la plus grande, le spectre est fortement élargi et les impulsions sont fortement compressées.

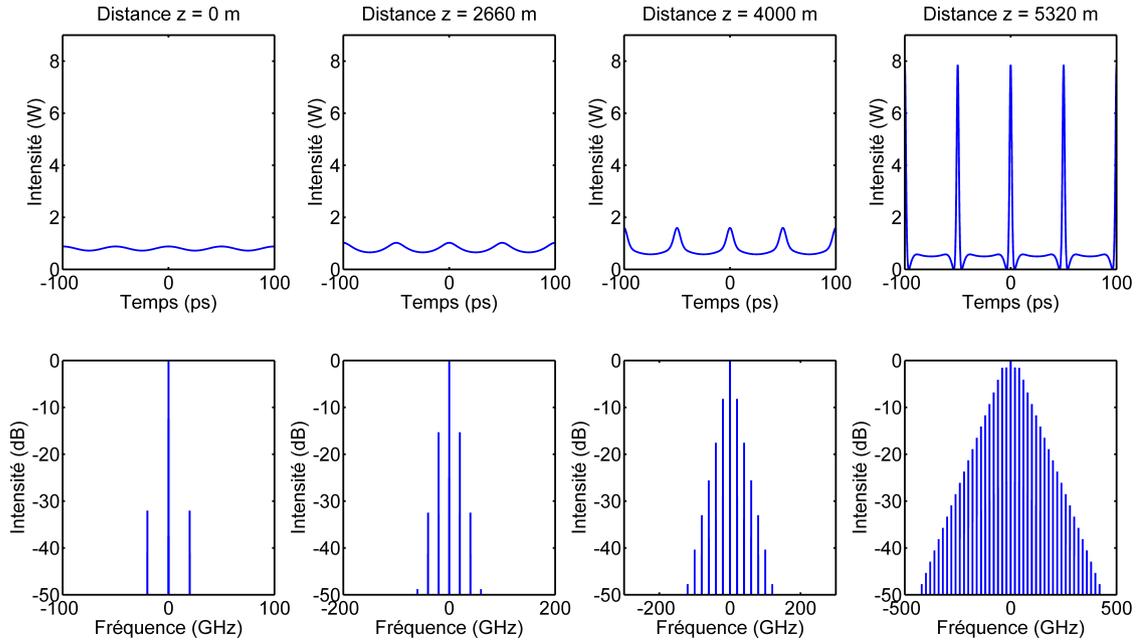


FIGURE 1.10 – En haut : Profil temporel à différentes distances dans la fibre, en bas : spectre normalisé correspondant au profil temporel.

Ce processus permet ainsi de générer des sources laser impulsionnelles à ultra haut débit par génération puis compression d'impulsions. En effet, Hasegawa a montré théoriquement en 1984 que le processus d'instabilité de modulation permet de générer des impulsions en propageant une onde continue faiblement modulée dans une fibre optique [58]. Deux ans plus tard Tai *et al.* ont démontré expérimentalement la génération d'impulsions courtes (Largeur totale à mi-hauteur de 0.5 ps) cadencées à 300 GHz [66]. Notons cependant la présence de piédestaux dûs à des conditions initiales non optimales. En choisissant de façon idéale les conditions initiales (puissance de pompe, puissance de la perturbation, fréquence de la perturbation) et la distance de propagation, il est possible de générer des trains de solitons (sans piédestaux).

## 1.5 Les breathers d'Akhmediev : solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire et de l'instabilité de modulation

Nous avons décrit dans la partie précédente le phénomène d'instabilité de modulation dans les domaines hydrodynamique et optique, ainsi que la possibilité de stimuler l'instabilité en utilisant une onde préalablement modulée. La dynamique de ce processus a été décrite analytiquement sous la forme des breathers d'Akhmediev découverts il y a environ 25 ans et qui sont des solutions exactes de l'équation de Schrödinger non linéaire [40, 67, 68]. Nous étudierons plus en détail les breathers d'Akhmediev dans le chapitre 2. La solution analytique des breathers d'Akhmediev est donnée dans la référence [69]. Loin de leur maximum d'intensité les breathers d'Akhmediev peuvent être approximés par une onde continue faiblement modulée par une sinusoïdale :

$$\Psi(0, t) = (1 + a_{mod} \cos(\omega_{mod}t)) \quad (1.57)$$

où  $a_{mod}$  et  $\omega_{mod}$  sont respectivement l'amplitude et la fréquence de modulation qui est déterminée par l'expression  $\omega_{mod} = 2\sqrt{1 - 2a}/\sqrt{|\beta_2|/\gamma.P_0}$ , où  $a$  est le paramètre de modulation qui permet d'établir les différents types de breathers d'Akhmediev. Considérons un exemple avec les paramètres suivants : dispersion de vitesse de groupe  $\beta_2 = -21.1 \text{ ps}^2.km^{-1}$ , le coefficient de non-linéarité,  $\gamma = 1.2 \text{ W}^{-1}.km^{-1}$ , et la puissance crête  $P_0 = 138.8 \text{ mW}$ . La figure 1.11 montre une comparaison entre les simulations numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire avec la condition initiale de l'équation (1.57) et la solution analytique dans le cas  $a = 0.25$ . L'amplitude de modulation  $a_{mod}$  pour l'approximation est égale à 0.05.

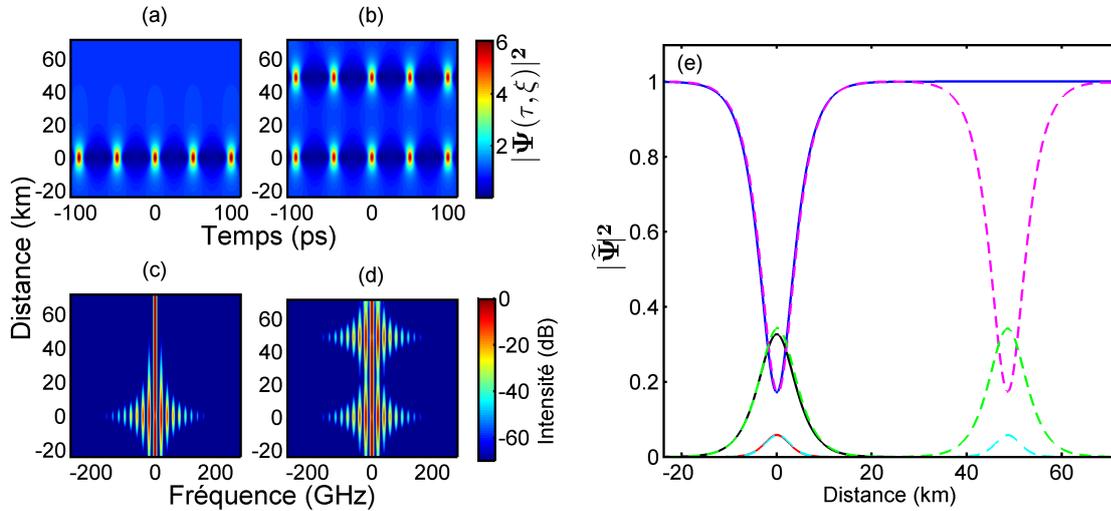


FIGURE 1.11 – Évolution d'un breather d'Akhmediev ( $a=0.25$ ) spatio-temporelle (a,b) et spatio fréquentielle (c,d) de la solution analytique (a,c) et de la simulation numérique avec la condition initiale approximée (b,d). (e) Intensité spectrale de la solution analytique (trait continu) et de la simulation numérique (trait discontinu) selon la fréquence centrale (en bleu et magenta) et la première (en noir et vert) et seconde (en rouge et cyan) composante en fonction de la distance en km.

Sur la figure 1.11(a,b), nous avons la représentation de l'évolution spatio-temporelle de la solution analytique et le résultat de la propagation de la simulation numérique avec la condition initiale approximée. Nous avons également les évolutions dans le domaine spectral de ces mêmes propagations sur la figure 1.11(c,d). Notons que sur les évolutions de la simulation numérique, la distance a été volontairement décalée afin de faire correspondre l'origine « 0 » avec la première apparition des breathers d'Akhmediev afin de faciliter la comparaison avec la solution

analytique. Nous pouvons voir que la première apparition des breathers issus de la simulation numérique est en bon accord avec la solution analytique. De même la figure 1.11(e) montre que la fréquence centrale et les fréquences  $+\omega_{mod}$  et  $+2\omega_{mod}$  de la simulation numérique (représenté par des traits discontinus) correspondent à celles de la solution analytique (représenté par les traits continus) sur les cinquante premiers km. La dynamique de la solution analytique et de la solution approximée est liée aux phénomènes de récurrence de Fermi–Pasta–Ulam (FPU) [68, 70, 71]. En effet, ce phénomène dit que le système retournera à la condition initiale et non à une condition où il sera en équilibre. Ici, la dynamique de l'instabilité de modulation permet d'illustrer ce phénomène, en effet, la solution analytique retourne bien à la condition initiale.

Notons que l'approximation par une modulation sinusoïdale, malgré qu'elle soit légèrement éloignée de la solution parfaite, permet de générer les breathers d'Akhmediev lors de la propagation. De plus, comme nous pouvons voir sur la figure 1.11(c,d,e), nous observons que la simulation numérique de la modulation sinusoïdale permet une génération périodique des breathers d'Akhmediev (avec ici une période de 25 km) dû à la récurrence FPU. Ce phénomène de récurrence a été observé expérimentalement lors de la génération des breathers d'Akhmediev par instabilité de modulation [72]. Notons que l'équation de Schrödinger non linéaire admet des solutions plus complexes de second ordre qui sont des superpositions non linéaires des breathers d'Akhmediev de premier ordre (voir chapitre 2).

## Références du chapitre 1

- [1] Clifford S Gardner, John M Greene, Martin D Kruskal, and Robert M Miura. Method for solving the korteweg-devries equation. *Physical Review Letters*, 19(19) :1095, 1967.
- [2] Norman J Zabusky and Martin D Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett*, 15(6) :240–243, 1965.
- [3] J Scott Russell. Report on waves. In *14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*, volume 311, page 390, 1844.
- [4] Joseph Boussinesq. Théorie de l’intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. *Comptes Rendus Acad. Sci (Paris)*, 72 :755–759, 1871.
- [5] Lord Rayleigh. On waves. *Phil. Mag*, 1(5) :257–279, 1876.
- [6] DJ Kordeweg and G de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and a new type of long stationary wave. *Phil. Mag*, 39 :422–443, 1895.
- [7] Michel Remoissenet. *Waves called solitons : concepts and experiments*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] Theodore H Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. 1960.
- [9] Theodore H Maiman. Stimulated optical emission in fluorescent solids. i. theoretical considerations. *Physical Review*, 123(4) :1145, 1961.
- [10] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*, 23(3) :142–144, 1973.
- [11] Alain Barthelemy, Serge Maneuf, and Claude Froehly. Propagation soliton et autoconfinement de faisceaux laser par non linearité optique de kerr. *Optics communications*, 55(3) :201–206, 1985.
- [12] Y.R. Shen. *Principles of nonlinear optics*. Wiley-Interscience, NY, USA, 1984.
- [13] Paul N Butcher and David Cotter. *The elements of nonlinear optics*, volume 9. Cambridge University Press, 1991.
- [14] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic Press, 2003.
- [15] G.P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 2013.
- [16] R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes. Self-trapping of optical beams. *Phys. Rev. Lett.*, 13 :479–482, Oct 1964.
- [17] Samuel L McCall and Erwin L Hahn. Self-induced transparency by pulsed coherent light. *Physical Review Letters*, 18(21) :908, 1967.
- [18] Linn F Mollenauer, Roger H Stolen, and James P Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Physical Review Letters*, 45(13) :1095, 1980.
- [19] Akira Hasegawa and Yūji Kodama. *Solitons in optical communications*. Number 7. Oxford University Press, USA, 1995.

- [20] Hermann A Haus and William S Wong. Solitons in optical communications. *Reviews of modern physics*, 68(2) :423, 1996.
- [21] Govind Agrawal. *Applications of nonlinear fiber optics*. Academic press, 2001.
- [22] George Gabriel Stokes. On the theory of oscillatory waves. *Trans Cambridge Philos Soc*, 8 :441–473, 1847.
- [23] Vladimir E Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 9(2) :190–194, 1968.
- [24] Hidenori Hasimoto and Hiroaki Ono. Nonlinear modulation of gravity waves. *Journal of the Physical Society of Japan*, 33(3) :805–811, 1972.
- [25] A Davey. The propagation of a weak nonlinear wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 53(04) :769–781, 1972.
- [26] Henry C Yuen and Bruce M Lake. Nonlinear deep water waves : Theory and experiment. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 18(8) :956–960, 1975.
- [27] GB Whitham. A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a lagrangian. *Journal of Fluid Mechanics*, 22(02) :273–283, 1965.
- [28] JC Luke. A variational principle for a fluid with a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(02) :395–397, 1967.
- [29] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev. Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*, 106(20) :2–5, 2011.
- [30] Thomas Brabec and Ferenc Krausz. Intense few-cycle laser fields : Frontiers of nonlinear optics. *Reviews of Modern Physics*, 72(2) :545, 2000.
- [31] A Shabat and V Zakharov. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Physics JETP*, 34(1) :62, 1972.
- [32] Y Namihira, A Miyata, and N Tanahashi. Nonlinear coefficient measurements for dispersion shifted fibres using self-phase modulation method at 1.55  $\mu\text{m}$ . *Electronics Letters*, 30(14) :1171–1172, 1994.
- [33] C Vinegoni, M Wegmuller, and N Gisin. Determination of nonlinear coefficient  $n_2/a_{\text{eff}}$  using self-aligned interferometer and faraday mirror. *Electronics Letters*, 36(10) :886–888, 2000.
- [34] EP Ippen. Low-power quasi-cw raman oscillator. *Applied Physics Letters*, 16(8) :303–305, 1970.
- [35] Keith J Blow and David Wood. Theoretical description of transient stimulated raman scattering in optical fibers. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 25(12) :2665–2673, 1989.
- [36] Roger H Stolen, WJ Tomlinson, HA Haus, and JP Gordon. Raman response function of silica-core fibers. *JOSA B*, 6(6) :1159–1166, 1989.
- [37] John M Dudley, Goëry Genty, and Stéphane Coen. Supercontinuum generation in photonic crystal fiber. *Reviews of modern physics*, 78(4) :1135, 2006.

- [38] PV Mamyshev and Stanislav V Chernikov. Ultrashort-pulse propagation in optical fibers. *Optics letters*, 15(19) :1076–1078, 1990.
- [39] B Kibler, JM Dudley, and S Coen. Supercontinuum generation and nonlinear pulse propagation in photonic crystal fiber : influence of the frequency-dependent effective mode area. *Applied Physics B*, 81(2-3) :337–342, 2005.
- [40] John M Dudley, Frédéric Dias, Miro Erkintalo, and Goëry Genty. Instabilities, breathers and rogue waves in optics. *Nature Photonics*, 8(10) :755–764, 2014.
- [41] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev. Super Rogue Waves : Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves. *Physical Review X*, 2(1) :2–7, 2012.
- [42] Alfred Osborne. *Nonlinear Ocean Waves & the Inverse Scattering Transform*, volume 97. Academic Press, 2010.
- [43] Amin Chabchoub, Bertrand Kibler, Christophe Finot, Guy Millot, Miguel Onorato, JM Dudley, and AV Babanin. The nonlinear schrödinger equation and the propagation of weakly nonlinear waves in optical fibers and on the water surface. *Annals of Physics*, 361 :490–500, 2015.
- [44] Jeff Hecht. *City of light : the story of fiber optics*. Oxford university press, 2004.
- [45] FP Kapron, Donald B Keck, and Robert D Maurer. Radiation losses in glass optical waveguides. *Applied Physics Letters*, 17(10) :423–425, 1970.
- [46] Meire C Fugihara and Armando Nolasco Pinto. Attenuation fitting functions. *Microwave and Optical Technology Letters*, 51(10) :2294–2296, 2009.
- [47] IH Malitson. Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica. *JOSA*, 55(10) :1205–1208, 1965.
- [48] RH Stolen and Chinlon Lin. Self-phase-modulation in silica optical fibers. *Physical Review A*, 17(4) :1448, 1978.
- [49] Mohammed N Islam, JR Simpson, HT Shang, LF Mollenauer, and RH Stolen. Cross-phase modulation in optical fibers. *Optics letters*, 12(8) :625–627, 1987.
- [50] Darlene L Hart, Arthur Judy, TA Brian Kennedy, Rajarshi Roy, and Kroum Stoev. Conservation law for multiple four-wave-mixing processes in a nonlinear optical medium. *Physical Review A*, 50(2) :1807, 1994.
- [51] Colin J McKinstrie and Michael G Raymer. Four-wave-mixing cascades near the zero-dispersion frequency. *Optics express*, 14(21) :9600–9610, 2006.
- [52] CJ McKinstrie, S Radic, MG Raymer, and L Schenato. Unimpaired phase-sensitive amplification by vector four-wave mixing near the zero-dispersion frequency. *Optics express*, 15(5) :2178–2189, 2007.
- [53] Arismar Cerqueira Sodre, JM Chavez Boggio, AA Rieznik, HE Hernandez-Figueroa, HL Fragnito, and JC Knight. Highly efficient generation of broadband cascaded four-wave mixing products. *Optics Express*, 16(4) :2816–2828, 2008.
- [54] Q Lin and Govind P Agrawal. Raman response function for silica fibers. *Optics letters*, 31(21) :3086–3088, 2006.

- [55] VE Zakharov and LA Ostrovsky. Modulation instability : the beginning. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 238(5) :540–548, 2009.
- [56] T Brooke Benjamin and JE Feir. The disintegration of wave trains on deep water part 1. theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(03) :417–430, 1967.
- [57] T Brooke Benjamin and K Hasselmann. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems [and discussion]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 299(1456) :59–76, 1967.
- [58] Akira Hasegawa. Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers. *Optics letters*, 9(7) :288–290, 1984.
- [59] Denis Mestdagh. Induced amplitude-modulation instability in single-mode optical fibers. *Optics letters*, 13(10) :829–831, 1988.
- [60] EM Dianov, PV Mamyshev, AM Prokhorov, and SV Chernikov. Generation of a train of fundamental solitons at a high repetition rate in optical fibers. *Optics letters*, 14(18) :1008–1010, 1989.
- [61] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita. Observation of modulational instability in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :135–138, Jan 1986.
- [62] Nail Akhmediev, Adrian Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and John M. Dudley. Universal triangular spectra in parametrically-driven systems. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics*, 375(3) :775–779, 2011.
- [63] DF Grosz, C Mazzali, S Celaschi, A Paradisi, and HL Fragnito. Modulation instability induced resonant four-wave mixing in wdm systems. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 11(3) :379–381, 1999.
- [64] DL Hart, Arthur F Judy, Rajarshi Roy, and James W Beletic. Dynamical evolution of multiple four-wave-mixing processes in an optical fiber. *Physical Review E*, 57(4) :4757, 1998.
- [65] Shanliang Liu. Four-wave mixing and modulation instability of continuous optical waves in single-mode optical fibers. *Applied physics letters*, 89(17) :171118, 2006.
- [66] K Tai, A Tomita, JL Jewell, and A Hasegawa. Generation of subpicosecond solitonlike optical pulses at 0.3 thz repetition rate by induced modulational instability. *Applied physics letters*, 49(5) :236–238, 1986.
- [67] N Akhmediev and VI Korneev. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear schrödinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 69(2) :1089–1093, 1986.
- [68] J M Dudley, G Genty, F Dias, B Kibler, and N Akhmediev. Modulation instability, Akhmediev Breathers and continuous wave supercontinuum generation. *Optics express*, 17(24) :21497–21508, 2009.
- [69] N Akhmediev, A Ankiewicz, and M Taki. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace. *Physics Letters A*, 373(6) :675–678, 2009.
- [70] Gaetan Van Simaey, Ph Emplit, and Marc Haelterman. Experimental demonstration of the fermi-pasta-ulam recurrence in a modulationally unstable optical wave. *Physical review letters*, 87(3) :033902, 2001.

- [71] Nail Akhmediev. Nonlinear physics : Déjà vu in optics. *Nature*, 413(6853) :267–268, 2001.
- [72] Kamal Hammani, Benjamin Wetzel, Bertrand Kibler, Julien Fatome, Christophe Finot, Guy Millot, Nail Akhmediev, and John Dudley. Spectral dynamics of modulation instability described using akhmediev breather theory. *Optics letters*, 36(11) :2140–2142, 2011.

CHAPITRE

— 2 —

INSTABILITÉ DE MODULATION ET  
SOLUTIONS DE L'EQUATION DE  
SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE SUR  
FOND CONTINU : DE LA THÉORIE AU  
SYSTÈME PHYSIQUE IDÉAL



Les solutions complexes de l'équation de Schrödinger non linéaire également connues sous le nom de solitons sur fond continu ont particulièrement attiré l'attention au cours des dernières années, car elles sont considérées comme des prototypes qui permettent de modéliser une localisation d'énergie dans de nombreux systèmes dispersifs et non linéaires [1, 2]. Ces ondes localisées sont observées lorsque des perturbations de faible amplitude sur une onde continue deviennent fortement focalisées en raison de l'instabilité de modulation. Les breathers d'Akhmediev, solitons Kuznetsov-Ma et le soliton Peregrine offrent ainsi une approche simple pour la description de la célèbre vague scélérate hydrodynamique [3–6]. Leur existence a également été confirmée dans d'autres domaines de la physique régis par l'équation de Schrödinger non linéaire [7–9]. En hydrodynamique, les différents profils des ondes initiales sont générés par un système mécanique permettant la création de vagues dont le profil contrôlé reproduit au mieux l'expression mathématique décrivant l'amplitude exacte de la surface de l'eau [5, 10, 11]. Cependant, en optique de telles perturbations « idéales » sont non triviales à générer dans le domaine temporel au moyen des modulateurs d'intensité habituels (bande passante de quelques GigaHertz). Dans ce contexte, nous proposons de présenter les avantages des technologies optiques ultrarapides et de la mise en forme programmable d'impulsions optiques qui permettent la génération d'onde optique de forme proche des solutions analytiques [12, 13]. Ici, nous effectuerons la mise en forme d'impulsions dans le domaine spectral afin de fournir un contrôle ultime sur la phase et l'amplitude pour exciter idéalement les solutions complexes de l'équation de Schrödinger non linéaire. De plus, notre système est basé sur la mise en forme d'une source laser à peigne de fréquence adaptée pour les solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire périodiques dans le temps [14]. D'autre-part, les solutions d'ordres supérieurs de l'équation de Schrödinger non linéaire, qui ont été observées récemment, peuvent expliquer la formation de vagues scélérates de plus grande amplitude [10, 11]. Ces solutions d'ordres supérieurs peuvent être interprétées comme une superposition non linéaire de deux ou plus solitons rationnels du premier ordre [15].

Dans ce chapitre, nous verrons dans un premier temps les solutions analytiques de premier ordre de l'équation de Schrödinger non linéaire. Ainsi nous verrons en détail les solitons sur fond continu de premier ordre tels que les solitons de Kuseztnov-Ma, le soliton Peregrine et les breathers d'Akhmediev. Pour chaque cas, nous verrons leur expression analytique, mais également des représentations graphiques permettant d'identifier quelques caractéristiques de leur propagation dans la fibre optique.

Dans un second temps, nous verrons les solitons sur fond continu de second ordre qui résultent de la superposition non linéaire des solutions de premier ordre. Ainsi, nous verrons tout d'abord le soliton rationnel d'ordre 2 qui est l'ordre supérieur du soliton Peregrine (ordre 1). Puis, nous enchaînerons sur des solutions complexes qui mettent en œuvre des solutions déphasées ou en phase.

Ainsi, en s'appuyant sur les résultats des deux premières parties, nous nous emploierons à déterminer de manière numérique les possibilités de générer ces solutions expérimentalement de manière idéale. C'est pourquoi, dans la troisième partie, nous regarderons la faisabilité de générer des solutions en réalisant une modification du spectre et de la phase à partir d'une source laser préalablement simulée. Nous regarderons s'il est possible de générer les solutions à leur maximum de localisation, mais également à une certaine distance de celle-ci. Nous vérifierons également qu'il est possible de générer une solution sur fond continu spatio-temporellement en utilisant plusieurs filtres correspondant à des distances différentes.

Ensuite, dans la quatrième partie, nous ferons une comparaison entre les solutions analytiques et les simulations numériques qui correspondent aux expériences que l'on pourrait faire,

un comparatif dans les domaines temporel et spectral validera les méthodes pour nos expériences.

Dans la partie suivante, nous étudierons l'influence des incertitudes sur les conditions initiales, notamment l'influence d'une variation de la puissance moyenne, de la phase spectrale relative, mais également l'influence des pertes pour la génération des solitons sur fond continu de second ordre.

Enfin, dans la dernière partie, nous mettrons en œuvre l'expérience correspondante aux parties précédentes, nous verrons le montage expérimental en détail, mais également le résultat des mesures expérimentales avec l'étude du filtre de phase. Nous finirons avec la génération des solutions de second ordre, chacun des résultats présentés ici est accompagné de comparaison avec les simulations et/ou les solutions analytiques.

## 2.1 Solutions de premier ordre : des solutions "simples"

Dans cette partie nous considérons les solutions de premier ordre de l'équation de Schrödinger non linéaire normalisée définie par (2.1) :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (2.1)$$

Nous nous intéresserons principalement aux breathers d'Akhmediev. Mais nous verrons également les solitons de Kuznetsov-Ma et de Peregrine, nous analyserons les différentes caractéristiques de chacune des solutions. Les formes analytiques seront données dans la suite de ce manuscrit avec des vecteurs temps et espace normalisés. Ceci a pour but de pouvoir utiliser les différentes formes analytiques dans les divers domaines de la physique. Ainsi, dans notre cas, la normalisation s'effectue par la longueur non linéaire,  $L_{NL} = 1/(\gamma P)$  ainsi qu'à partir de la période d'instabilité de modulation définie par :  $\tau_0 = (\beta_2 L_{NL})^{1/2}$ . Nous utiliserons les expressions suivantes afin de faire le lien entre les dimensions temps et espaces normalisés et non normalisés [16] :

$$\xi = \frac{z}{L_{NL}}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_0} \quad (2.2)$$

### 2.1.1 Le breather d'Akhmediev

Le breather d'Akhmediev est l'une des solutions de premier ordre de l'équation de Schrödinger non linéaire. Sa forme analytique permet d'étudier les phénomènes extrêmes dans les océans. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il peut être obtenu par instabilité de modulation, qui rappelons-le, est l'un des phénomènes probables à l'origine de la création des vagues scélérates dans les océans. Le breather d'Akhmediev est localisé dans l'espace et périodique dans le temps. Les différents breathers sont définis par un paramètre  $a$  compris entre 0 et 1/2. Lorsque  $a$  tend vers 0, la solution est une onde continue. En revanche, si  $a$  tend vers 1/2, celle-ci correspond au soliton de Peregrine. La forme analytique est définie par l'équation (2.3) établie avec des dimensions temps et espace normalisés notées  $\tau$  et  $\xi$  respectivement [16–18] :

$$\Psi(\xi, \tau) = e^{i\xi} \left[ 1 + \frac{2(1-2a) \cosh(b\xi) + ib \sinh(b\xi)}{\sqrt{2a} \cos(\omega\tau) - \cosh(b\xi)} \right] \quad (2.3)$$

Où  $b$  et  $\omega$  qui sont respectivement le gain et la fréquence normalisés, liés à la période de modulation définie par :

$$b = [8a(1-2a)]^{1/2} \quad (2.4)$$

$$\omega = 2(1-2a)^{1/2} \quad (2.5)$$

Il est également possible de déterminer  $a$  à partir des paramètres de la fibre optique et des conditions initiales telles que la fréquence de modulation et la puissance moyenne du laser :

$$a = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{\omega_{mod}}{\omega_c} \right)^2 \right) \quad (2.6)$$

Où  $\omega_{mod}$  est la fréquence angulaire de modulation de la source laser et  $\omega_c$  est définie par :

$$\omega_c = \frac{4\gamma P_0}{|\beta_2|} \quad (2.7)$$

Nous pouvons observer sur la figure 2.1 le gain en fonction de la pulsation  $\omega$  et du paramètre  $a$ . Nous voyons clairement que le gain maximum est obtenu pour une fréquence normalisée égale à  $\sqrt{2}$ , et correspond à  $a = 0.25$ , en effet, les expressions (2.4) et (2.5) montrent que  $b$  est optimal pour  $a = 0.25$ , et  $\omega = \sqrt{2}$ .

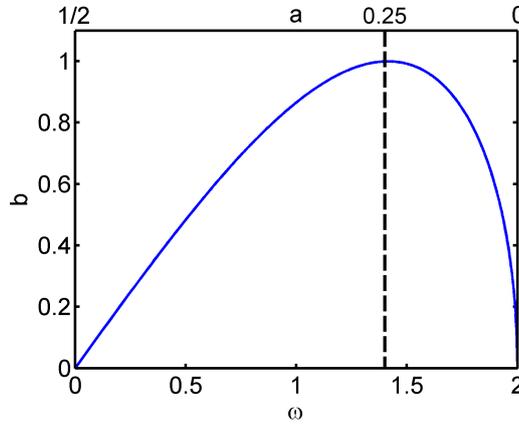


FIGURE 2.1 – Courbe de gain de l’instabilité de modulation en fonction de la fréquence normalisée et du paramètre  $a$ .

La figure 2.2 montre l’évolution des différents breathers d’Akhmediev. Ainsi, nous remarquons que plus  $a$  augmente, plus la période temporelle des breathers augmente ainsi que le maximum d’intensité qui se situe en  $\xi = 0$ .

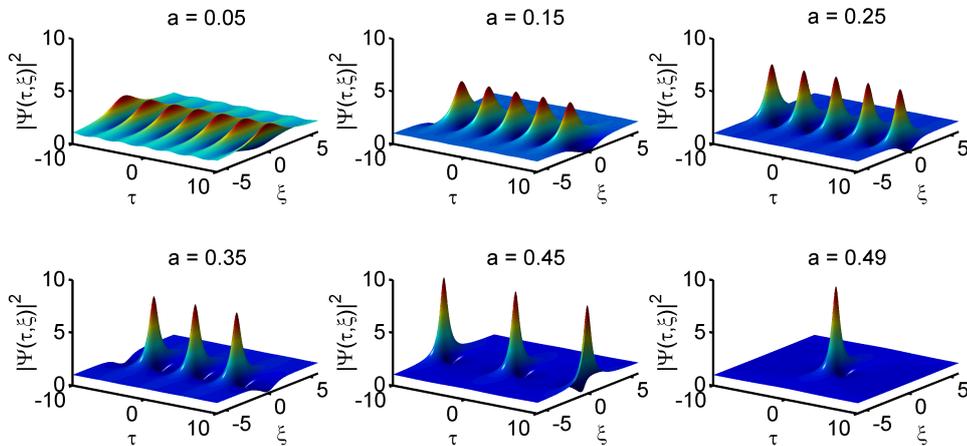


FIGURE 2.2 – Évolution des breathers d’Akhmediev en fonction du paramètre  $a$ .

Cette périodicité des breathers, définie par l'équation (2.8) est représentée sur la figure 2.3(a) :

$$T = \frac{2\pi}{2\sqrt{1-2a}} \quad (2.8)$$

La période (équation (2.8)) est normalisée, les expressions définies par les équations (2.2) permettent de remonter à son expression en unité physique. Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.3(b), plus le paramètre  $a$  augmente, plus la période augmente et tend vers l'infini lorsque  $a$  tend vers 1/2, ce qui correspond à la période du soliton Peregrine.

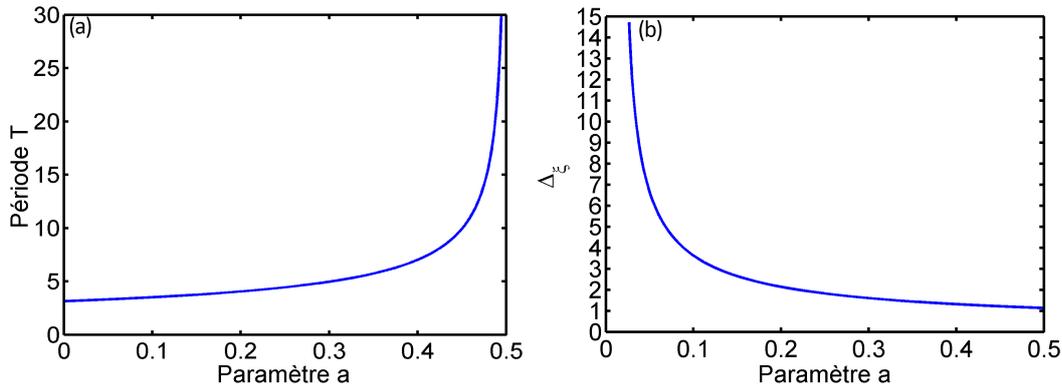


FIGURE 2.3 – Évolution de la période (a) et de la largeur spatiale à mi-hauteur (b) des breathers d'Akhmediev en fonction du paramètre  $a$ .

De même, nous pouvons étudier la largeur spatiale à mi-hauteur des breathers d'Akhmediev en utilisant l'équation (2.9). Cependant, cette largeur à mi-hauteur ne peut pas être définie pour des valeurs de  $a < \frac{1}{8}(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0.0214$ , car dans ce cas l'intensité maximum du breather est inférieure à 2 et son intensité à mi-hauteur serait plus faible que le fond continu d'intensité 1. La largeur à mi-hauteur est définie (nous pourrions trouver le développement dans l'annexe A) par :

$$\Delta_{\xi} = \frac{2}{\sqrt{8a(1-2a)}} \cosh^{-1} \left( \frac{7\sqrt{2a} + (1 - \sqrt{2a})8a}{8a + 4\sqrt{2a} - 1} \right) \quad (2.9)$$

La figure 2.3(b) qui donne la représentation de l'équation (2.9), permet de constater que plus  $a$  croît, plus la largeur à mi-hauteur spatiale  $\Delta_{\xi}$  diminue jusqu'à atteindre la valeur de  $\frac{3}{\sqrt{7}} \approx 1.1339$  qui correspond à la largeur à mi-hauteur spatiale du soliton Peregrine.

Ces solutions analytiques ont pu être observées expérimentalement pour la première fois en optique, avec notamment en 2010 la génération du soliton Peregrine [7] et en 2011 l'observation de l'évolution de la dynamique spectrale de l'instabilité de modulation durant la propagation dans une fibre optique [16]. Cependant, ces générations ne sont pas idéales mais réalisées avec des conditions initiales approchées comme nous avons pu le voir dans le chapitre 1, dans la partie 1.5. En hydrodynamique, l'observation des breathers d'Akhmediev est très récente puisqu'elle a été faite en 2014 [19]. Dans l'expérience qui a été menée [19], la solution a été générée directement à partir de la solution analytique. Ainsi, le système mécanique a pu reproduire avec exactitude les ondes conduisant à la génération des solutions sur fond continu.

### 2.1.2 Le soliton de Kuznetsov-Ma

À l'opposé du breather d'Akhmediev, le soliton de Kuznetsov-Ma (KM) possède une périodicité spatiale et est localisé dans le temps. Son maximum d'intensité se situe à  $\tau = 0$ . Ce soliton respire, en effet, il croit et décroît au fur et à mesure de sa propagation, d'où son nom de *breather*. Mais, il est surtout connu sous le nom de soliton de Kuznetsov-Ma qui vient des chercheurs qui l'ont découvert (Kuznetsov en 1977 [20], et Ma qui a fait une description complète en 1979 [21]). Comme les breathers d'Akhmediev, les solitons KM sont caractérisés par le paramètre  $a$ , cependant celui-ci devra être supérieur à  $1/2$ . Les paramètres  $b$  et  $\omega$  sont alors imaginaires et sont écrits en terme d'argument réel :

$$b = i\sqrt{8a(2a-1)} = iB \quad (2.10)$$

$$\omega = i2\sqrt{2a-1} = i\Omega \quad (2.11)$$

De même que  $b$  et  $\omega$ ,  $B$  et  $\Omega$  représentent respectivement le gain et la fréquence de modulation. Contrairement aux breathers d'Akhmediev, ces paramètres ne sont pas bornés entre 0 et 1 pour l'un et entre 0 et 2 pour l'autre, mais varient de 0 à l'infini. En utilisant les expressions (équations (2.10) et (2.11)) dans la formule analytique (équation (2.3)), nous obtenons la solution pour les solitons KM à l'aide des équations (2.12) [8] :

$$\Psi = e^{i\xi} \left[ 1 + \frac{2(1-2a)\cos(B\xi) + iB\sin(B\xi)}{\sqrt{2a}\cosh(\Omega\tau) - \cos(B\xi)} \right] \quad (2.12)$$

La figure 2.4, montre l'évolution des solitons KM en fonction du paramètre  $a$ . Nous observons que lorsque  $a$  tend vers  $1/2$ , nous avons une période spatiale qui tend vers l'infini, et plus  $a$  augmente, plus la période spatiale diminue. Ainsi, le soliton KM possède des cas limites à l'instar des breathers d'Akhmediev. En effet, si  $a$  tend vers  $1/2$ , le soliton KM tend vers le soliton de Peregrine, en revanche si  $a$  tend vers infini, le soliton KM tend vers un soliton standard car la période spatiale  $Z$  tend vers zéro.

Notons que le soliton Kuznetsov-Ma est une solution beaucoup plus complexe à générer. Malgré tout, celui-ci a été observé en optique pour la première fois en 2012 [8], tout comme le breather d'Akhmediev, celui-ci a été généré de manière approchée avec comme condition initiale une onde continue fortement modulée. Le soliton KM a été observé en hydrodynamique en 2014 [19] par une méthode similaire à celle employée pour le breather d'Akhmediev.

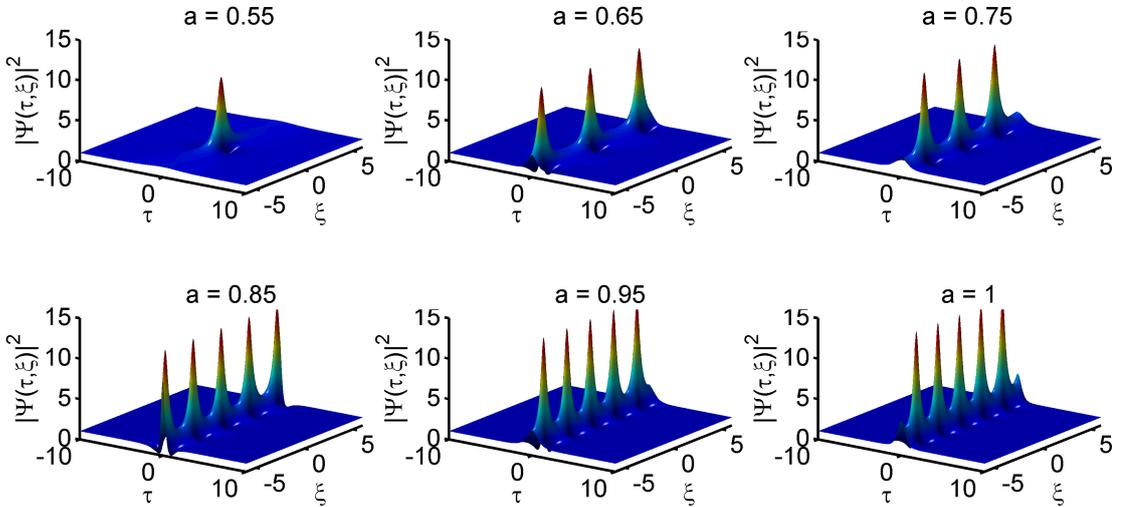


FIGURE 2.4 – Évolution des solitons Kuznetsov-Ma en fonction du paramètre  $a$ .

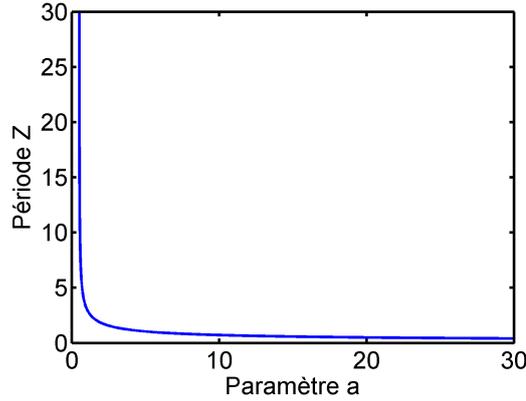


FIGURE 2.5 – Période spatiale  $Z$  des solitons Kuznetsov-Ma en fonction du paramètre  $a$ .

### 2.1.3 Le soliton de Peregrine

Comme nous avons pu voir dans les deux parties précédentes, le breather d'Akhmediev et le soliton de Kuznetsov-Ma ont une solution limite en commun qui est le soliton de Peregrine lorsque  $a$  tend vers  $1/2$ . Dans cette limite  $b \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow 0$ , ce qui signifie que le gain de l'instabilité de modulation tend vers 0 et que la fréquence de modulation est infiniment proche de la pompe comme nous pouvons le voir sur la figure 2.1. Un modèle analytique (équation (2.13)) a été dérivé par Peregrine en 1983 [5, 7, 22] :

$$\Psi = e^{i\xi} \left[ 1 - \frac{4(1 + 2i\xi)}{1 + 4\tau^2 + 4\xi^2} \right] \quad (2.13)$$

Cette expression est également appelée soliton rationnel d'ordre 1 car elle est composée d'un rapport de deux polynômes, comme nous pouvons voir avec l'équation (2.14) :

$$\Psi_n(\xi, \tau) = \left( (-1)^n + \frac{G_n + iH_n}{D_n} \right) \exp(i\xi) \quad (2.14)$$

Pour  $n=1$ , nous avons les valeurs suivantes :

$$G_1 = 4$$

$$H_1 = 8\xi$$

$$D_1 = 1 + 4\xi^2 + 4\tau^2$$

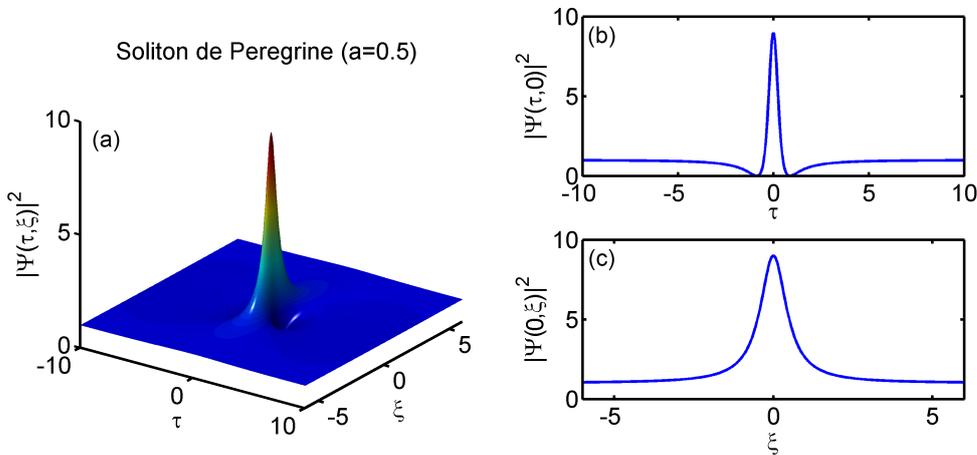


FIGURE 2.6 – (a) Évolution temporelle et spatiale du soliton Peregrine, (b) Profil du soliton Peregrine à  $\xi = 0$ , (c) Profil du soliton Peregrine à  $\tau = 0$ .

La figure 2.6(a) montre l'évolution spatio-temporelle du soliton de Peregrine, constitué d'une seule structure centrée en  $\tau = 0$  et  $\xi = 0$  ce qui correspond bien à une période infinie dans l'espace et le temps. La figure 2.6(b,c) montre les profils temporel et spatial du soliton Peregrine. Nous pouvons voir sur la figure 2.6(c) que la solution revient à la condition initiale tout comme les breathers d'Akhmediev. Le soliton Peregrine possède une intensité maximum de 9, ce qui correspond alors à neuf fois l'intensité moyenne (ou alors trois fois l'amplitude moyenne du champ). Le profil temporel montre une intensité nulle avant et après le maximum, c'est la caractéristique typique du soliton de Peregrine. Le soliton Peregrine est une structure localisée apte à reproduire les vagues scélérates dans les océans. Cependant, il existe des formes de vague différentes, telles que les structures plus complexes d'ordre supérieur. Nous verrons, par la suite, la génération de solution de second ordre.

L'observation du soliton Peregrine en optique est assez récente, car c'est en 2010 qu'il a été observé pour la première fois [7]. Celui a été généré, tout comme les breathers d'Akhmediev et le soliton Kuznetsov-Ma, de manière non idéale avec une onde continue modulée. En hydrodynamique, le soliton Peregrine a été observé l'année suivante [5] selon la même méthode que celle utilisée pour les autres solutions.

## 2.2 Des solutions complexes de second ordre

Le soliton de Peregrine d'ordre 2 possède les mêmes caractéristiques que celui d'ordre 1, soit une période spatio-temporelle infinie, mais a une intensité maximum de 25. Sa forme analytique est déterminée par l'expression (équation (2.14)) en utilisant  $n$  égale à 2. Les différentes valeurs de  $G$ ,  $H$  et  $D$  sont les suivantes [1, 10, 15, 23] :

$$G_2 = \frac{1}{96} (80\xi^4 + 96\xi^2\tau^2 + 16\tau^4 + 72\xi^2 + 24\tau^2 - 3)$$

$$H_2 = \frac{1}{48} \xi (16\xi^4 + 32\xi^2\tau^2 + 16\tau^4 + 8\xi^2 - 24\tau^2 - 15)$$

$$D_2 = -\frac{1}{1152} (64\xi^6 + 192\xi^4\tau^2 + 192\xi^2\tau^4 + 64\tau^6 + 432\xi^4 - 288\xi^2\tau^2 + 48\tau^4 + 396\xi^2 + 108\tau^2 + 9)$$

Nous pouvons voir sur la figure 2.7(a) l'évolution spatio-temporelle de la solution rationnelle d'ordre deux. Sur la figure 2.7(b) et (c), nous avons respectivement le profil temporel à  $\xi = 0$  et spatiale à  $\tau = 0$ . Nous pouvons remarquer aussi que l'intensité devient nulle deux fois de suite de part et d'autre de la structure centrale. De plus, si nous regardons l'évolution spatiale et temporelle, nous pouvons voir quatre lobes autour du pic central de la solution.

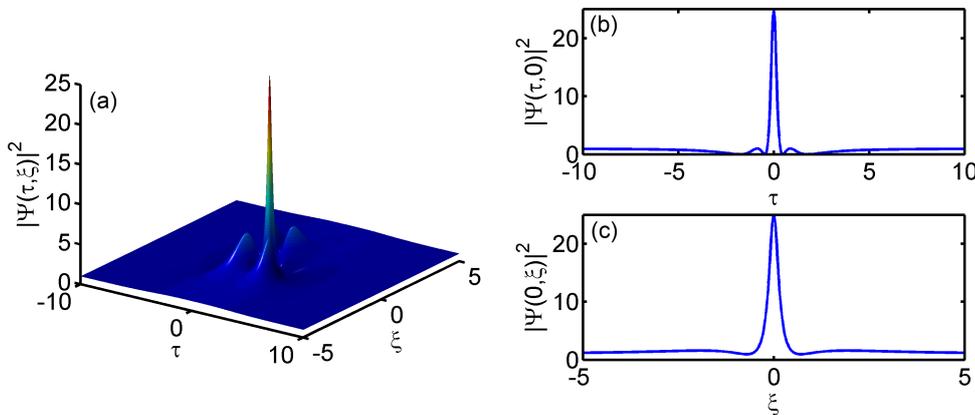


FIGURE 2.7 – (a) Évolution temporelle et spatiale du soliton Peregrine d'ordre deux, (b) Profil du soliton Peregrine d'ordre deux à  $\xi = 0$ , (c) Profil du soliton Peregrine d'ordre deux à  $\tau = 0$ .

Cette solution est un cas limite des breathers d'Akhmediev comme le soliton de Peregrine, ce qui le rend difficile à reproduire dans des expériences. Cependant, il existe des structures intermédiaires comme les solitons sur fond continu de second ordre, que nous décrivons dans la suite.

Notons que quelques solutions de second ordre et d'ordre supérieur ont été observées initialement en hydrodynamique [10, 11]. Afin de réaliser ses observations expérimentales, les méthodes dans un canal hydrodynamique sont identiques à celles qui ont permis d'obtenir les breathers d'Akhmediev, soliton Kuznetsov-Ma et Peregrine. Concernant l'optique, c'est dans le cadre de cette thèse que les résultats ont été obtenus, nous verrons ainsi l'observation des solitons sur fond continu de second ordre par deux manières, avec la manière idéale dans ce chapitre, et en utilisant une manière approchée dans le chapitre 3 [24, 25].

### 2.2.1 Superposition non linéaire de solutions de premier ordre "déphasées"

Dans ce premier cas, nous verrons la solution de second ordre qui peut être déphasée dans le temps ou encore dans l'espace. Nous parlons de déphasage, car les différentes solutions de premier ordre qui se superposent ne sont plus centrées au même endroit afin de créer la solution de second ordre. Tout comme le cas du soliton de Peregrine ou du soliton rationnel d'ordre deux, nous utilisons l'équation (2.14) avec  $n=2$  et les valeurs de  $G_2$ ,  $H_2$  et  $D_2$  ci-dessous [26] :

$$\begin{aligned}
 G_2 &= -\frac{1}{8}(5\xi^2 + \tau^2)(\xi^2 + \tau^2) - \frac{3}{16}(3\xi^2 + \tau^2) + \xi\xi_d + \tau\tau_d + \frac{3}{128} \\
 H_2 &= -\frac{1}{4}\xi(\xi^2 + \tau^2)^2 - \frac{1}{8}\xi(\xi^2 - 3\tau^2) + \frac{15}{64}\xi + \left(\xi^2 - \tau^2 - \frac{1}{4}\right)\xi_d + 2\xi\tau\tau_d \\
 D_2 &= \frac{1}{24}(\xi^2 + \tau^2)^3 + \frac{1}{32}(3\xi^2 - \tau^2)^2 + \frac{3}{128}(11\xi^2 + 3\tau^2) + \frac{3}{512} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{3}\xi^3 - \xi\tau^2 + \frac{3}{4}\xi - \frac{2}{3}\xi_d\right)\xi_d - \left(\xi^2\tau - \frac{1}{3}\tau^3 + \frac{1}{4}\tau - \frac{2}{3}\tau_d\right)\tau_d
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

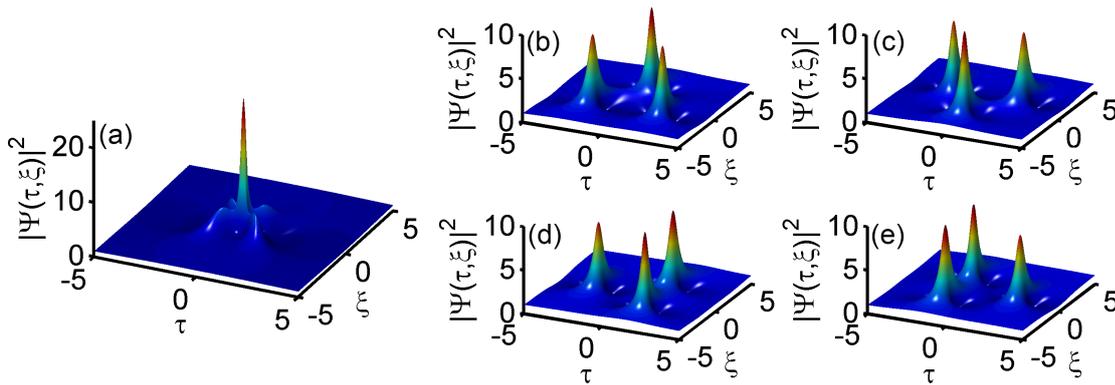


FIGURE 2.8 – (a) Évolution temporelle et spatiale du soliton Peregrine d'ordre deux, (b)  $\xi_d = 2^2$  et  $\tau_d = 0$ , (c)  $\xi_d = -2^2$  et  $\tau_d = 0$ , (d)  $\xi_d = 0$  et  $\tau_d = 2^2$ , (e)  $\xi_d = 0$  et  $\tau_d = -2^2$ .

Dans l'équation 2.15  $\tau_d$  et  $\xi_d$  sont les décalages relatifs définis par différence entre deux composantes. Ces valeurs sont définies arbitrairement et sont des constantes du type  $m^2$  où  $m$  est fixe. Si nous fixons ces deux constantes à 0, nous obtenons le soliton rationnel de second ordre comme nous pouvons le voir dans la figure 2.8(a). Si nous choisissons de réaliser un décalage, la solution obtenue est une répartition de solitons de premier ordre dans une forme de

triangle équilatéral. Nous pouvons remarquer sur la figure 2.8(b-e) que le maximum de chacun est d'environ 9, le soliton rationnel d'ordre 2 est simplement la superposition de trois solitons Peregrine. Selon les valeurs initiales choisies, celui-ci peut avoir une orientation différente. Les figures 2.8(b) et (c) montrent la solution obtenue lorsqu'un décalage est appliqué sur  $\xi$ . Si  $\xi_d = -2^2$  nous obtenons ce qui correspond à la cascade de solutions de premier ordre telle que présentée dans la référence [27]. De même, il est possible de réaliser un décalage temporel avec la variable  $\tau_d$ , le triangle sera alors orienté ainsi que le montre les figures 2.8 (d) et (e).

## 2.2.2 Superposition non linéaire de deux solutions de premier ordre "en phase"

Nous nous intéresserons par la suite aux solutions qui vont superposer des solutions de premier ordre de manière centrée, c'est-à-dire en "phase" ; il existe ainsi deux types de solutions. Nous aurons les solutions non dégénérées (les solutions superposées sont différentes) et celles dégénérées (mêmes solutions superposées). L'intérêt de générer des superpositions "en phase" est de pouvoir générer des pics de très forte intensité localisés dans le temps et l'espace.

### 2.2.2.1 Superposition non dégénérée

Dans ce paragraphe, nous étudions les solutions de second ordre non dégénérées. Repérons les deux solutions de premier ordre avec un indice 1 ou 2. Ainsi, chaque soliton sur fond continu d'ordre 1 sera caractérisé par un paramètre  $a_1$  et  $a_2$ . Cependant, nous utiliserons plutôt le paramètre  $l$ , défini par :

$$l_j = i\sqrt{2a_j} \quad (2.16)$$

Ces nouveaux paramètres permettent d'obtenir les fréquences des deux solutions de premier ordre que nous déterminons par l'expression suivante :

$$\kappa_j = 2\sqrt{1 + l_j^2} \quad (2.17)$$

Lorsque que  $\kappa \rightarrow 0$ , la solution du premier ordre tend vers le soliton de Peregrine, ainsi, si  $\kappa_{1,2}$  tendent tous les deux vers 0, nous obtiendrons alors la solution rationnelle de second ordre. Nous pouvons également définir le gain de l'instabilité de modulation pour chacun des deux solitons sur fond continu de premier ordre avec l'expression suivante :

$$\delta_j = \sqrt{2a_j\kappa_j} \quad (2.18)$$

La solution de second ordre est définie avec l'équation (2.14), et les paramètres  $G_2$ ,  $H_2$  et  $D_2$  ci-dessous [23] :

$$\begin{aligned} G_2 &= -(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \left( \frac{\kappa_1^2 \delta_2}{\kappa_2} \cosh(\delta_1 \xi_{s1}) \cos(\kappa_2 \tau_{s2}) - \frac{\kappa_2^2 \delta_1}{\kappa_1} \cosh(\delta_2 \xi_{s2}) \cos(\kappa_1 \tau_{s1}) \right. \\ &\quad \left. - (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \cosh(\delta_1 \xi_{s1}) \cosh(\delta_2 \xi_{s2}) \right) \\ H_2 &= -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \left( \frac{\delta_1 \delta_2}{\kappa_2} \sinh(\delta_1 \xi_{s1}) \cos(\kappa_2 \tau_{s2}) - \frac{\delta_1 \delta_2}{\kappa_1} \sinh(\delta_2 \xi_{s2}) \cos(\kappa_1 \tau_{s1}) \right. \\ &\quad \left. - \delta_1 \sinh(\delta_1 \xi_{s1}) \cosh(\delta_2 \xi_{s2}) + \delta_2 \sinh(\delta_2 \xi_{s2}) \cosh(\delta_1 \xi_{s1}) \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 D_2 = & 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \frac{\delta_1 \delta_2}{\kappa_1 \kappa_2} \cos(\kappa_1 \tau_{s1}) \cos(\kappa_2 \tau_{s2}) + 4\delta_1 \delta_2 \left( \sin(\kappa_1 \tau_{s1}) \sin(\kappa_2 \tau_{s2}) \right. \\
 & \left. + \sinh(\delta_1 \xi_{s1}) \sinh(\delta_2 \xi_{s2}) \right) - (2\kappa_1^2 - \kappa_1^2 \kappa_2^2 + 2\kappa_2^2) \cosh(\delta_1 \xi_{s1}) \cosh(\delta_2 \xi_{s2}) \\
 & - 2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \left( \frac{\delta_1}{\kappa_1} \cos(\kappa_1 \tau_{s1}) \cosh(\delta_2 \xi_{s2}) - \frac{\delta_2}{\kappa_2} \cos(\kappa_2 \tau_{s2}) \cosh(\delta_1 \xi_{s1}) \right)
 \end{aligned}$$

Avec  $\tau_{sj}$  et  $\xi_{sj}$  définis par :

$$\tau_{sj} = \tau - \tau_j \quad (2.20)$$

$$\xi_{sj} = \xi - \xi_j \quad (2.21)$$

où  $\tau_j$  et  $\xi_j$  sont les paramètres de décalages dans le temps ou l'espace, cependant nous nous concentrerons ici uniquement aux cas centrés en 0, soit  $\tau_j = 0$  et  $\xi_j = 0$ .

Ce type de solution est adaptée à la superposition de deux breathers ou de deux solitons KM. La figure 2.9(a) montre la superposition de deux breathers d'Akhmediev avec les paramètres  $a_1 = 0.423$  et  $a_2 = 0.2294$ . Ces paramètres nous donnent une fréquence  $\kappa_1 = 0.735$  et  $\kappa_2 = 1.471$ , qui correspond à  $\kappa_2 = 2\kappa_1$ .

Le profil en  $\xi = 0$  est représenté sur la figure 2.9(b), nous retrouvons la caractéristique d'un soliton sur fond continu de second ordre. En effet, pour chaque impulsion, nous avons bien de part et d'autre du pic central le double retour à zéro de l'intensité.

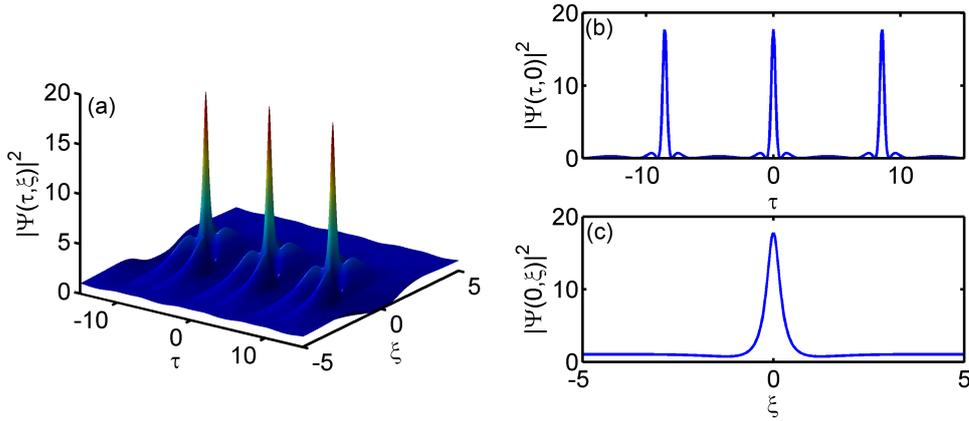


FIGURE 2.9 – (a) Évolution temporelle et spatiale de deux breathers d'Akhmediev avec  $a_1 = 0.423$  et  $a_2 = 0.2294$ , (b) Profil à  $\xi = 0$ , (c) Profil à  $\tau = 0$ .

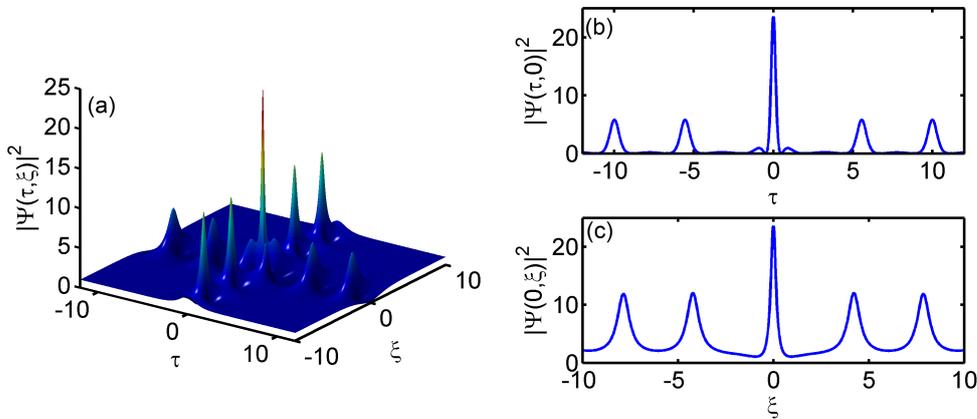


FIGURE 2.10 – (a) Évolution temporelle et spatiale de la superposition d'un breather d'Akhmediev et d'un soliton KM avec respectivement  $a_1 = 0.25$  et  $a_2 = 0.75$ , (b) Profil à  $\xi = 0$ , (c) Profil à  $\tau = 0$ .

De même, il est possible de réaliser une superposition avec un breather d'Akhmediev et un soliton KM ainsi que le montre l'évolution spatio-temporelle de la figure 2.10(a). Nous remarquons que mis à part la structure positionnée en  $\xi = 0$  et  $\tau = 0$ , les breathers d'Akhmediev sont localisés en  $\xi = 0$ , alors que les solitons KM le sont en  $\tau = 0$ . En s'éloignant de  $\xi = 0$  et  $\tau = 0$  apparaissent des solutions de premier ordre mais la structure centrale correspond à la solution de second ordre ainsi que le montre la figure 2.5(b).

Les résultats des figures précédentes correspondent uniquement à la superposition non linéaire des solutions de premier ordre avec une vitesse nulle; notons que cette superposition correspond à une collision de deux solutions. Considérons maintenant un cas différent où les breathers peuvent également avoir une vitesse non nulle. En effet si  $l$  possède une partie réelle les solutions ont une vitesse, c'est-à-dire qu'au lieu d'observer une localisation spatiale en  $\xi = 0$ , les breathers vont être répartis dans l'espace selon leur vitesse. En revanche, si  $l$  est purement imaginaire, les breathers n'ont pas de vitesse, et sont donc tous localisé en  $\xi = 0$ . L'expression de la solution diffère des équations (2.19) mais permet de modéliser les solitons sur fond continu de premier ordre ainsi que la superposition de deux d'entre elles (voir l'expression sur les références suivantes [15, 25]). La figure 2.11(a) représente son évolution spatio-temporelle de la collision de deux breathers d'Akhmediev avec une vitesse nulle avec les paramètres  $a_1 = 0.14$  et  $a_2 = 0.34$ . Les profils d'une solution de second ordre à  $\xi = 0$  et  $\tau = 0$  sont représentés sur les figures 2.11(b,c).

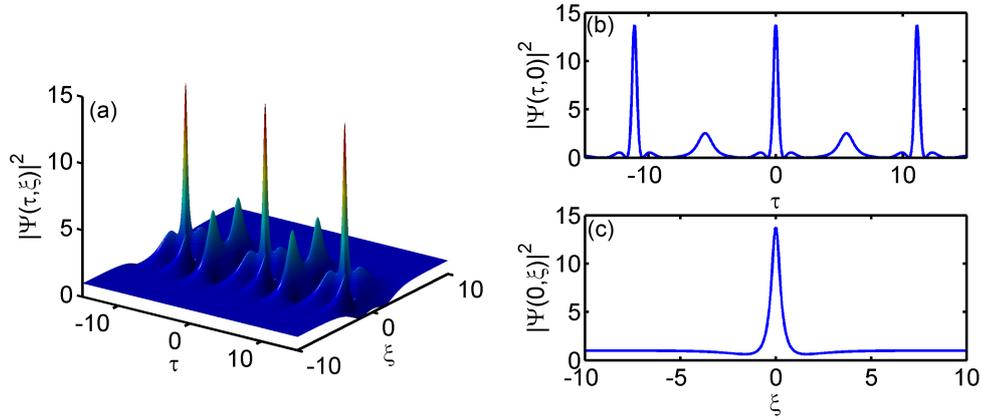


FIGURE 2.11 – (a) Évolution temporelle et spatiale d'une collision de deux breathers d'Akhmediev avec  $a_1 = 0.14$  et  $a_2 = 0.34$ . (b) Profil à  $\xi = 0$ , (c) Profil à  $\tau = 0$ .

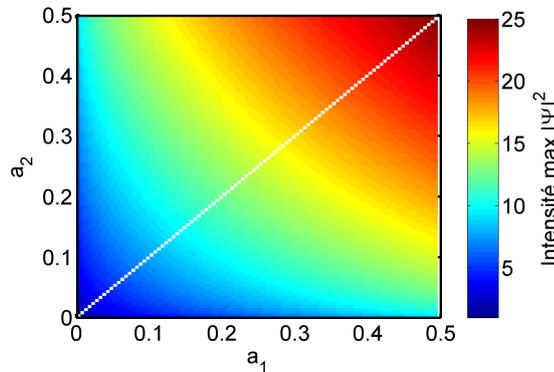


FIGURE 2.12 – Cartographie de l'intensité maximum survenant après la collision de deux breathers d'Akhmediev dont les paramètres varient selon l'intervalle  $]0;0.5[$ .

Nous avons vu que la superposition non linéaire de différentes solutions de premier ordre

(assez faciles à reproduire expérimentalement) permet de générer différents solitons sur fond continu de second ordre. La figure 2.12 permet de visualiser les maximums d'intensité qu'il est possible d'atteindre avec la collision de deux breathers d'Akhmediev. Notons que l'équation (2.19) ne permet pas de construire la superposition non linéaire de deux breathers d'Akhmediev de même paramètre  $a$  (voir solution dégénérée dans la section suivante).

### 2.2.2.2 Superposition dégénérée

Nous avons vu dans la partie précédente la superposition de deux solutions de premier ordre qui ne possèdent pas la même fréquence (même paramètre  $a$ ). Il existe une expression analytique (voir équation (2.22)) qui permet de reproduire la superposition de deux solitons sur fond continu d'ordre 1 avec la même fréquence [23].

$$\begin{aligned}
 G_2 &= -\frac{2\kappa}{\delta} \left( \cosh(\delta\xi) ((\delta^2 + \kappa^2) \cos(\kappa\tau) + \delta^2 \kappa\tau \sin(\kappa\tau)) \right. \\
 &\quad \left. - 2\delta\kappa \cosh(\delta\xi) \right) + \cos(\kappa\tau) \sinh(\delta\xi) (2\delta^2 - \kappa^2) \delta\xi \\
 H_2 &= -\frac{1}{2\delta\kappa} \left( 8\delta\xi (2\delta^2 - \kappa^2) [\delta \cos(\kappa\tau) \cosh(\delta\xi) - \kappa] \right. \\
 &\quad \left. + 8\delta^3 \sinh(\delta\xi) [\cos(\kappa\tau) + \kappa\tau \sin(\kappa\tau)] + (\kappa^4 - 4\delta^2) \kappa \sinh(2\delta\xi) \right) \\
 D_2 &= -\frac{1}{4\delta^2\kappa^2} \left( \kappa^4 (\delta^2 + \kappa^2) + 8\delta^2\kappa^2 (\delta^2\tau^2 + \kappa^2\xi^2) + 32\delta^4\xi^2 (\delta^2 - \kappa^2) \right. \\
 &\quad \left. + 4[\kappa^4 \cosh(2\delta\xi) - \delta^4 \cos(2\kappa\tau)] - 16\delta^2\kappa\xi (2\delta^2 - \kappa^2) \cos(\kappa\tau) \sinh(\delta\xi) \right. \\
 &\quad \left. - 4\delta\kappa^2 [4\delta^2\tau \sin(\kappa\tau) + \kappa^3 \cos(\kappa\tau)] \cosh(\delta\xi) \right)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

où  $\kappa$  est défini par  $2\sqrt{1+l^2}$  avec  $l = i\sqrt{2a}$ , et  $\delta$  défini par  $\sqrt{2a\kappa}$ . Considérons l'exemple de deux breathers d'Akhmediev avec  $a = 0.25$  tel que représenté sur la figure 2.13. La figure 2.13 représente l'évolution spatio-temporelle de la solution, tandis que les figures 2.13(b) et (c) montrent les profils à  $\xi = 0$  et  $\tau = 0$ . Cette figure montre bien la caractéristique des solutions sur fond continu de second ordre.

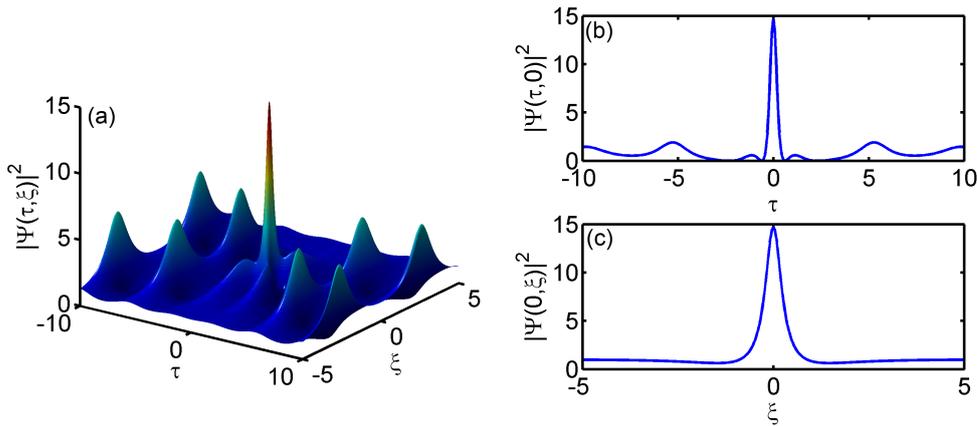


FIGURE 2.13 – (a) Évolution temporelle et spatiale de la superposition de deux breathers d'Akhmediev avec  $a=0.25$ , (b) Profil à  $\xi = 0$ , (c) Profil à  $\tau = 0$ .

La figure 2.14 représente le maximum d'intensité obtenu par superposition de deux breathers de même paramètre  $a$  (voir figure 2.14). Nous pouvons voir que la courbe évolue de manière exponentielle lors des premières valeurs de  $a$ . L'évolution est initialement exponentielle puis devient quasi-linéaire.

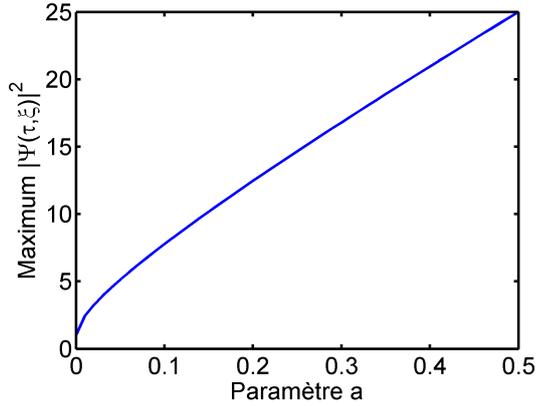


FIGURE 2.14 – Courbe de l'intensité max en fonction de la superposition non linéaire dégénérée de deux breathers d'Akhmediev en fonction de  $a$ .

En résumé nous avons étudié les différents types de solutions obtenues par superposition de deux solitons sur fond continu de premier ordre (identiques ou distincts) ainsi que la collision de deux solutions (qui est également solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire). Nous verrons dans la suite de ce chapitre comment générer les solutions expérimentalement de manière idéale.

### 2.3 Simulation de la génération expérimentale de ces solutions de manière idéale

Afin de pouvoir mettre en œuvre une génération des solutions de second ordre de manière idéale, une source laser impulsionnelle sera employée avec filtrage spectral et contrôle de la phase. Un oscilloscope à échantillonnage optique (OSO) et un analyseur de spectre optique (OSA) sont les principaux outils de caractérisation que nous avons utilisés (voir figure 2.15). Un descriptif complet se trouve dans la partie 2.6.1.

La source laser cadencée à 20GHz [28] a été développée par compression d'impulsions dans une fibre optique standard, impulsions générées par modulation d'intensité d'une diode laser continue à 1550 nm. Un modulateur de phase permet d'éviter la rétrodiffusion Brillouin. Les impulsions sont alors amplifiées dans un amplificateur Erbium pour atteindre une puissance moyenne de 450 mW.

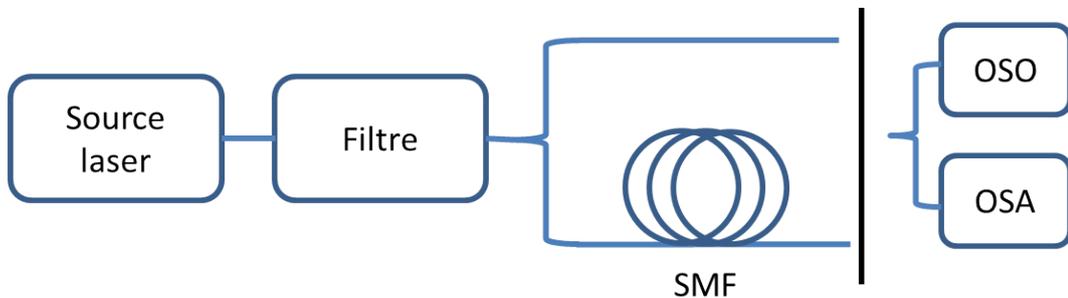


FIGURE 2.15 – Schéma du dispositif expérimental. **SMF** : fibre monomode (SMF-28), **OSO** : oscilloscope à échantillonnage optique, **OSA** : analyseur de spectre optique.

Le train d'impulsions est alors injecté dans une fibre SMF de 2.1 km de long, avec les paramètres  $\beta_2 = -20.4 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$ ,  $\gamma = 1.2 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$  et  $\alpha_{dB} = 0.3 \text{ dB km}^{-1}$ . Nous reparlerons

de ce dispositif plus en détail dans la suite de ce chapitre (voir 2.6.1). Les caractéristiques temporelles et spectrales obtenues par simulation numérique de la source laser sont reproduites sur la figure 2.16.

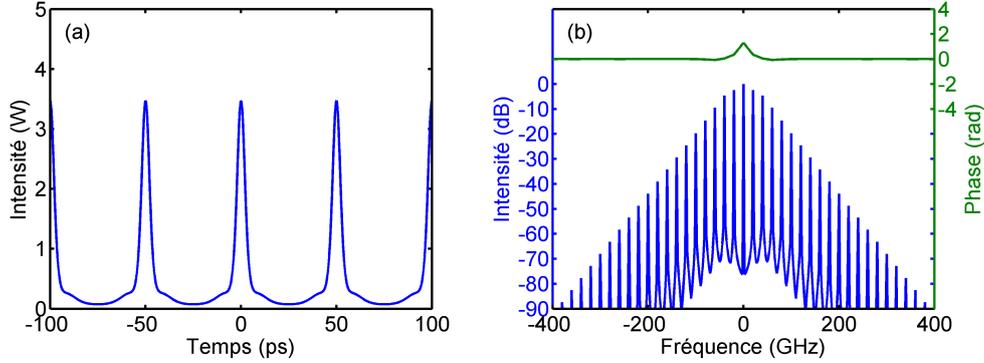


FIGURE 2.16 – (a) Profil d’intensité temporelle à la sortie de la source laser. (b) Profil d’intensité et de phase du spectre en sortie de source laser.

La source laser est optimisée sur un point de fonctionnement qui conduit à un spectre triangulaire avec une non-déplétion de la pompe. L’objectif est alors de mettre en œuvre une mise en forme spectrale en intensité et en phase afin de reproduire quasi exactement la solution analytique désirée. Pour cela nous avons utilisé un filtre programmable qui permet de modifier le spectre et également la phase initiale. En utilisant la solution analytique, nous pouvons déterminer un filtre d’intensité et de phase afin d’avoir un signal correspondant à la solution analytique à la distance choisie. Les simulations présentées ici nous permettent de valider l’utilisation du filtre mis en œuvre lors des expériences. Ces simulations numériques effectuent tout d’abord la propagation de l’onde continue modulée à 20GHz pour obtenir la source, on applique ensuite le filtre dans le domaine spectral. Puis nous simulons la propagation de la condition initiale obtenue par filtrage à la puissance souhaitée. Le filtre spectral programmable offre une dynamique de fonctionnement sur environ 50 dB. Dans notre exemple, nous avons appliqué un filtrage sur 24 raies spectrales en plus de la raie centrale de pompe. Les phases de chaque composante spectrale sont ajustées aux valeurs données par la solution analytique. Le filtre optique programmable concernant la phase spectrale fonctionne de façon discontinue par pas de 2 GHz de large qui correspond à deux fois la résolution minimale. Dans la suite de cette partie, nous ferons ainsi la mise en forme de diverses solutions analytiques que ce soit de premier ordre ou de second ordre. Les figures suivantes sont présentées en paramètre normalisé comme défini au début de ce chapitre, afin de comparer plus facilement les résultats des simulations numériques aux solutions analytiques.

### 2.3.1 Le breather d’Akhmediev

Le premier cas étudié de manière idéale est le breather d’Akhmediev donnée par l’expression analytique (équation (2.3) de la partie 2.1.1). Nous effectuerons une mise en forme spectrale au niveau du maximum de compression ( $\xi = 0$ , figure 2.17) et à une distance donnée avant la compression maximale ( $\xi = -1.5$ , figure 2.18). Ainsi à partir de la source laser et en définissant les filtres comme sur la figure 2.17(a) et 2.18(a), nous pourrions obtenir les spectres correspondant à un breather d’Akhmediev de paramètre  $a = 0.25$  à la distance  $\xi = 0$  et  $\xi = -1.5$ . La puissance moyenne de la source permettant de générer de tels breathers est de 138 mW. Les figures 2.17(b,c) et 2.18(b,c) montrent les résultats de la mise en forme spectrale et temporelle pour  $\xi = 0$  et  $\xi = -1.5$ . La mise en forme correspond en tout point à la solution analytique et nous voyons que la phase a une influence majeure au centre du spectre. En effet, bien que la phase spectrale diffère

sur les extrémités du spectre la simulation numérique reproduit bien la solution analytique.

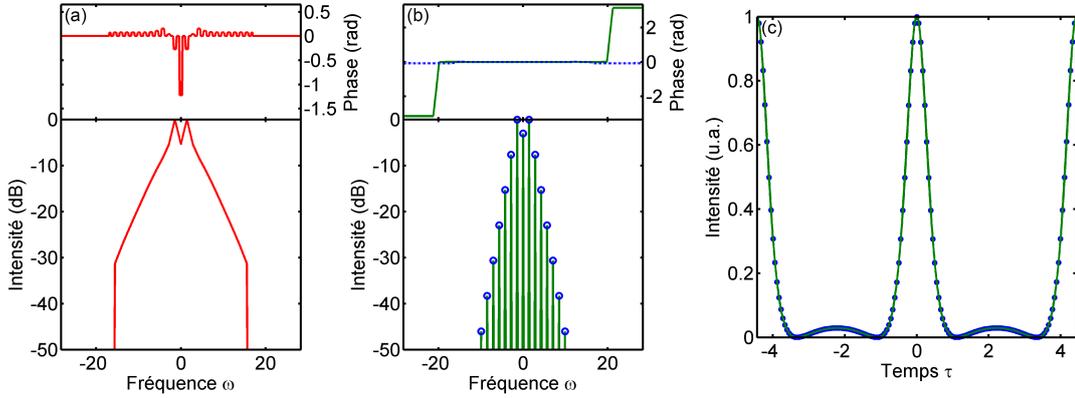


FIGURE 2.17 – Mise en forme de la source laser pour obtenir des Breathers d’Akhmediev à  $\xi=0$ . (a) Filtre de phase (en haut) et spectral (en bas). (b) Profil de phase (haut) et spectre (bas). (c) Profil temporel. En vert, solution analytique, cercle bleu, simulation numérique.

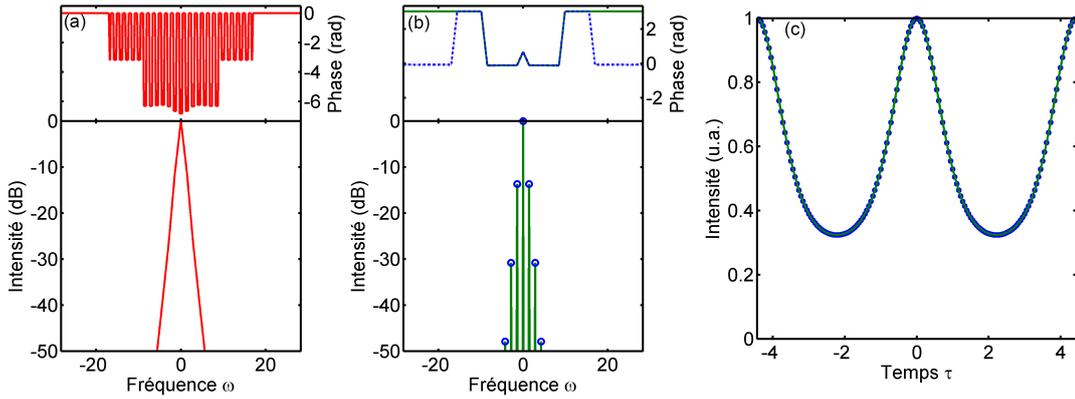


FIGURE 2.18 – Mise en forme de la source laser pour obtenir des Breathers d’Akhmediev à  $\xi = -1.5$ . (a) Filtre de phase (en haut) et spectral (en bas). (b) Profil de phase (haut) et spectre (bas). (c) Profil temporel. En vert, solution analytique, cercle bleu, simulation numérique.

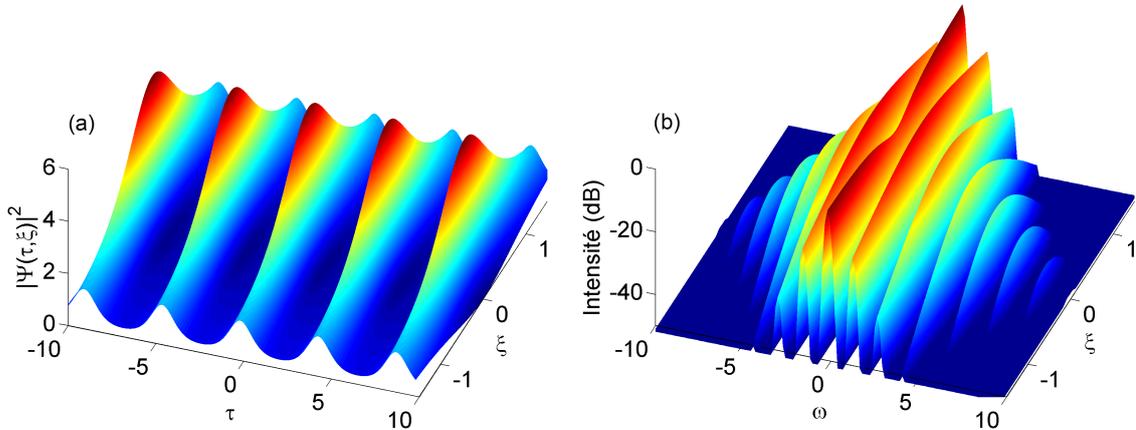


FIGURE 2.19 – Évolution spatio-temporelle (a) et spatio-fréquentielle (b) de breathers d’Akhmediev qui ont été mis en forme par modification d’une source laser à l’aide de filtre programmable.

La condition initiale obtenue sur la figure 2.18 peut être utilisée pour simuler la propagation sur 1.5 longueur non linéaire (soit 9.5 km). Cette distance de propagation correspond au maximum de compression des breathers d'Akhmediev. La figure 2.19 montre que les évolutions spatio-temporelle et spatio-spectrale du champ optique sont conformes à celles données par les solutions analytiques. En effet le maximum de compression a bien lieu à la distance  $\xi = 0$ . Nous verrons une comparaison plus détaillée dans la partie 2.4.

### 2.3.2 Le soliton de Peregrine

Etant donné que le soliton de Peregrine est une structure doublement localisée, sa période est infinie dans le temps et dans l'espace. Compte-tenu que la source laser est périodique nous allons générer un train de solitons Peregrine. La puissance moyenne utilisée ici est de 1 W. Comme précédemment, nous effectuerons la mise en forme de la solution analytique à deux distances, en  $\xi = 0$  et la seconde à  $\xi = -1.5$  (soit à -1250 m de la distance de compression maximum).

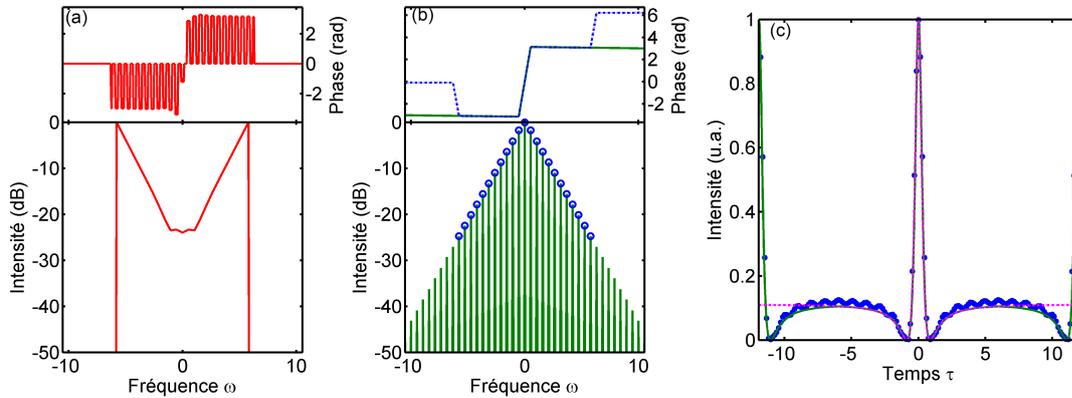


FIGURE 2.20 – Mise en forme de la source laser pour obtenir des solitons Peregrine à  $\xi = 0$ . (a) Filtre de phase (en haut) et spectral (en bas). (b) Profil de phase (haut) et spectre (bas). (c) Profil temporel. En vert, solution analytique répétée à la fréquence de la source laser, cercle bleu, simulation numérique, en magenta discontinu, solution analytique.

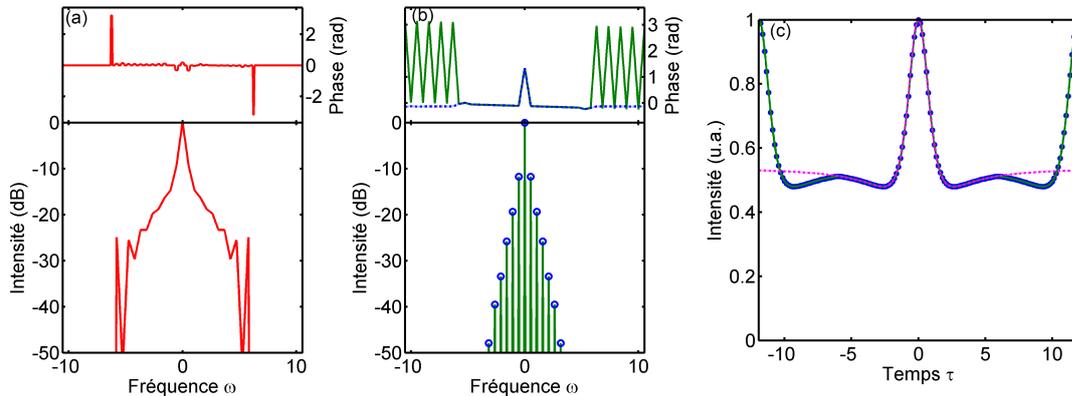


FIGURE 2.21 – Mise en forme de la source laser pour obtenir des solitons Peregrine à  $\xi = -1.5$ . (a) Filtre de phase (en haut) et spectral (en bas). (b) Profil de phase (haut) et spectre (bas). (c) Profil temporel. En vert, solution analytique répétée à la fréquence de la source laser, cercle bleu, simulation numérique, en magenta discontinu, solution analytique.

Les figures 2.20 et 2.21 montrent les résultats de la mise en forme de la source laser aux deux distances  $\xi = 0$  et  $\xi = -1.5$ . Les solutions analytiques sont en bon accord avec les mises

en forme correspondantes. En effet, les structures générées sont quasi-identiques tant dans le domaine spectral que temporel. Il y a cependant un petit désaccord à  $\xi = 0$ , le spectre analytique est beaucoup plus large que celui de la source laser, ce qui induit une petite modulation sur les piédestaux des solitons Peregrine. D'autre part, dans le domaine temporel, la solution analytique (lignes discontinues magenta) pour la structure positionnée en  $\tau = 0$  est en très bon accord avec les résultats de la mise en forme.

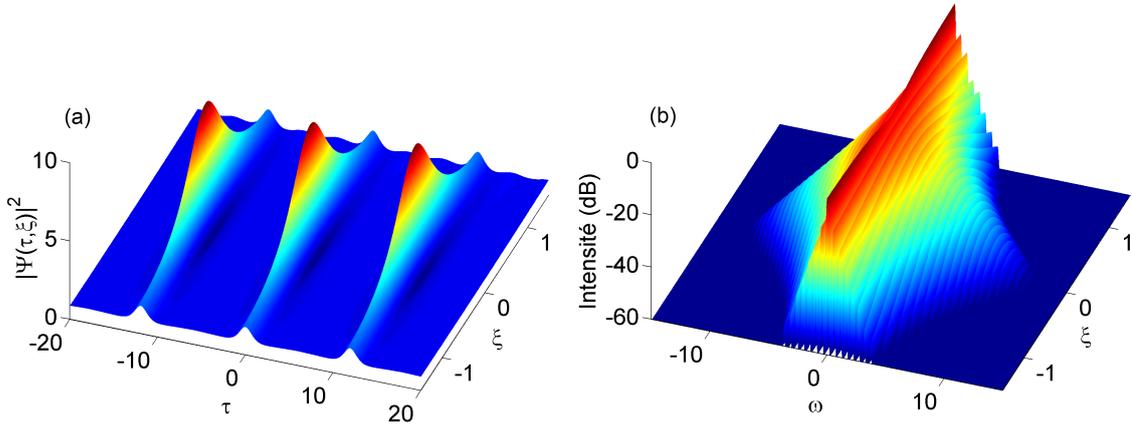


FIGURE 2.22 – Évolution spatio-temporelle (a) spatio-fréquentielle (b) d'un train de soliton Peregrine en prenant comme condition initiale la mise en forme à partir de la solution analytique à  $\xi = -1.5$ .

Les conditions initiales montrées dans la figure 2.21 ont été utilisées pour simuler la propagation dans la fibre, les résultats sont reportés sur la figure 2.22.

### 2.3.3 Les solutions de deuxième ordre

Intéressons nous maintenant aux solutions de second ordre, en utilisant l'expression (2.19) de la partie 2.2.2.1. Les paramètres sont identiques à ceux utilisés pour décrire l'expression analytique avec la superposition de deux breathers d'Akhmediev, soit  $a_1 = 0.4323$  et  $a_2 = 0.2294$  et une puissance moyenne de 513 mW.

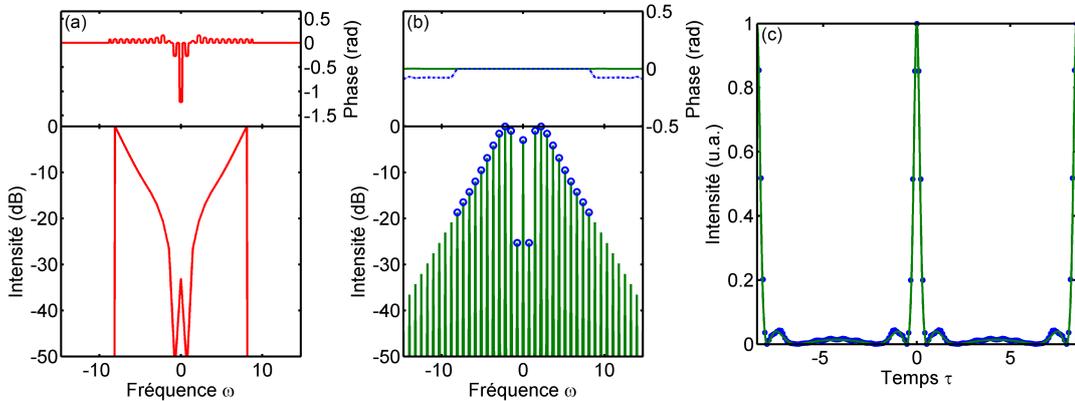


FIGURE 2.23 – Mise en forme de la source laser pour obtenir la solution de second ordre avec  $a_1 = 0.4323$  et  $a_2 = 0.2294$  à  $\xi = 0$ . (a) Filtre de phase (en haut) et spectral (en bas). (b) Profil de phase (haut) et spectre (bas). (c) Profil temporel. En vert, solution analytique, cercle bleu, simulation numérique.

### 2.3 Simulation de la génération expérimentale de ces solutions de manière idéale

Comme pour les précédentes mises en forme, nous étudions les deux distances  $\xi = 0$  (figure 2.23) et  $\xi = -1.5$  (figure 2.24 pour une distance de 2.5 km). Les filtres utilisés pour la mise en forme sont représentés sur les figures 2.23(a) et 2.24(a). Les résultats de l'application des différents filtres sont visibles sur les figures 2.23(b,c) et 2.23(b,c) pour chacune des distances choisies. Nous pouvons voir le bon accord entre la solution analytique et la mise en forme, tant dans le domaine temporel que spectral.

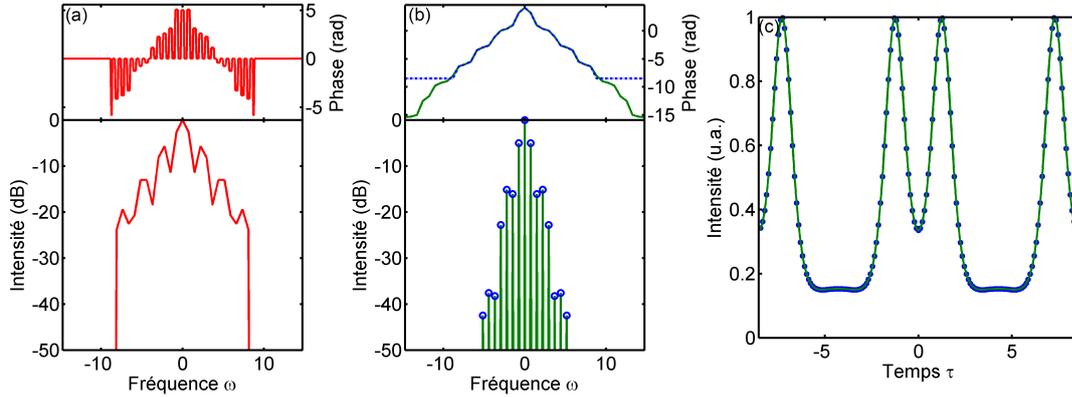


FIGURE 2.24 – Mise en forme de la source laser pour obtenir la solution de second ordre avec  $a_1 = 0.4323$  et  $a_2 = 0.2294$  à  $\xi = -1.5$ . (a) Filtre de phase (en haut) et spectral (en bas). (b) Profil de phase (haut) et spectre (bas). (c) Profil temporel. En vert, solution analytique, cercle bleu, simulation numérique.

Après avoir défini les conditions initiales (figure 2.24), nous pouvons simuler la propagation dans la fibre optique sur 3 longueurs non linéaire (soit 5 km) afin d'observer l'évolution temporelle et spectrale en fonction de la distance de propagation. Ces évolutions sont visibles sur la figure 2.25.

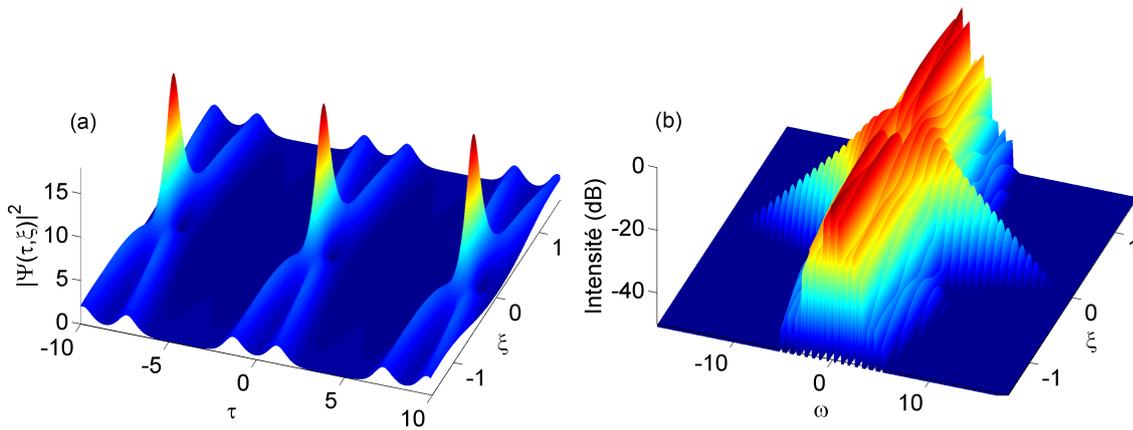


FIGURE 2.25 – Évolution spatio-temporelle (a) spatio-fréquentielle (b) de la solution analytique de la superposition de deux breathers d'Akhmediev avec  $a_1 = 0.4323$  et  $a_2 = 0.2294$  en prenant comme condition initiale la mise en forme à partir de la solution analytique à  $\xi = -1.5$

En résumé nous avons vu dans cette partie comment générer de manière idéale diverses solutions allant d'un cas simple comme les breathers d'Akhmediev à des cas moins simple comme

les solitons de Peregrine, ou encore plus complexes comme la superposition de deux breathers d'Akhmediev. Nous avons également montré qu'il était possible de les générer de façon linéaire à la sortie d'un filtre programmable, mais également en réalisant une propagation non linéaire dans une fibre standard.

## 2.4 Comparaison entre les solutions analytiques et les simulations numériques de la génération des solutions de manière idéale

Dans cette partie, nous comparons les évolutions temporelle et fréquentielle entre les solutions analytiques et la simulation numérique de la propagation avec comme condition initiale, la mise en forme à partir de l'expression analytique à une distance  $\xi = -1.5$  que nous avons vue dans la partie 2.3. La figure 2.26 montre l'exemple du breather d'Akhmediev avec  $a = 0.25$ , la figure 2.27 montre la comparaison d'un soliton Peregrine avec la génération d'un train de soliton Peregrine, et la figure 2.28 une solution de second ordre avec  $a_1 = 0.4323$  et  $a_2 = 0.2294$ . Ces trois figures témoignent d'un très bon accord entre les expressions analytiques et les simulations numériques.

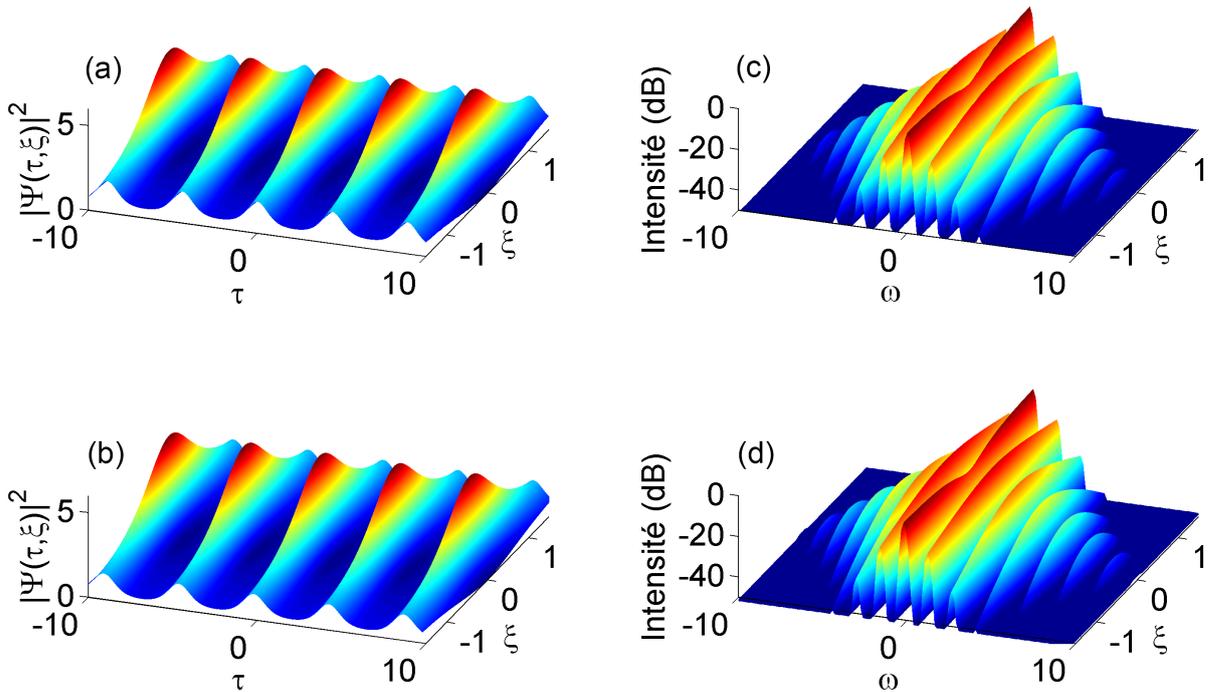


FIGURE 2.26 – Breather d'Akhmediev analytique avec  $a = 0.25$  (a,c) ; simulation numérique de la propagation avec la condition initiale effectuée par mise en forme située à  $\xi = -1.5$  (b,d). (a,b) Évolution spatio-temporelle. (c,d) Évolution spatio-fréquentielle.

2.4 Comparaison entre les solutions analytiques et les simulations numériques de la génération des solutions de manière idéale

---

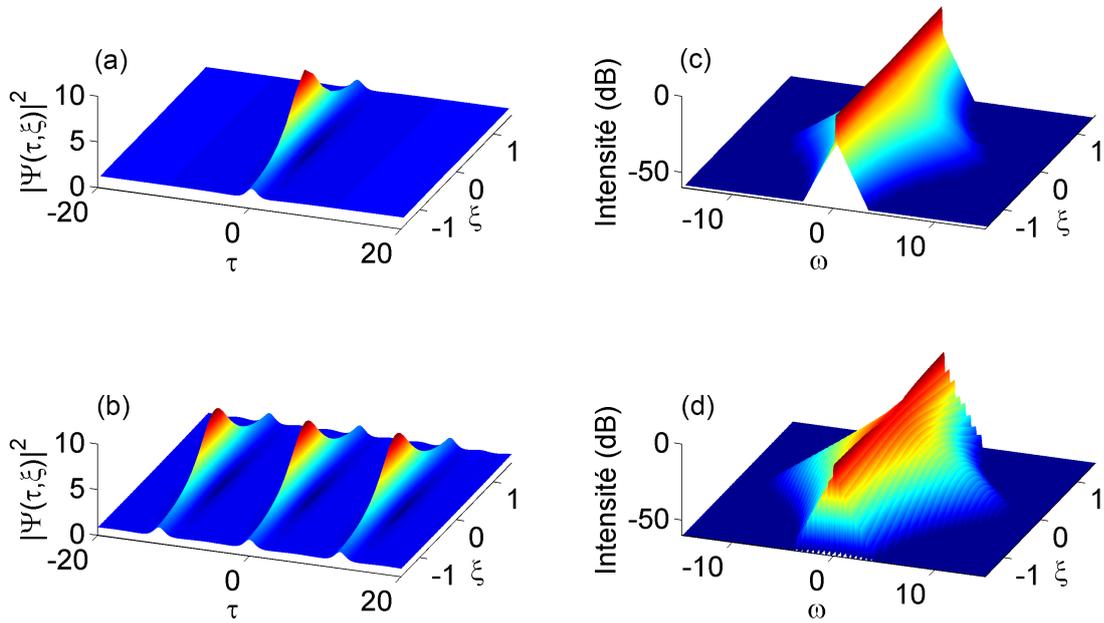


FIGURE 2.27 – Soliton Peregrine analytique (a,c), simulation numérique de la propagation avec la condition initiale effectuée par mise en forme située à  $\xi = -1.5$  (b,d). (a,b) Évolution spatio-temporelle. (c,d) Évolution spatio-fréquentielle.

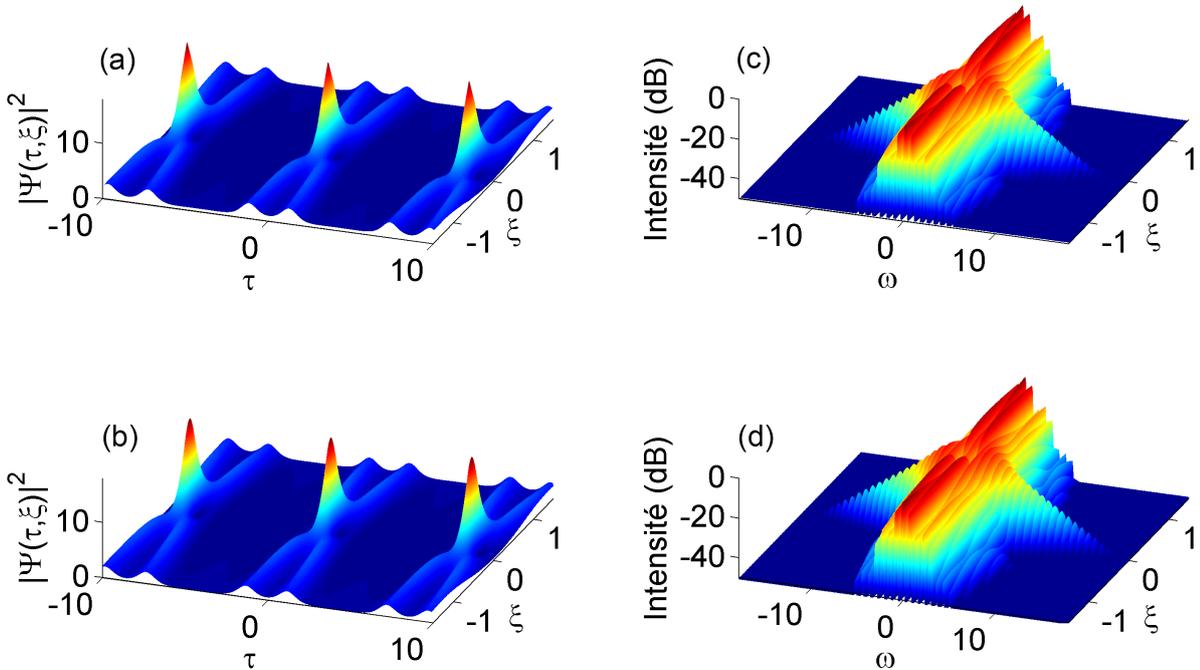


FIGURE 2.28 – Solution de second d'ordre analytique avec  $a_1 = 0.4323$  et  $a_2 = 0.2294$  (a,c), simulation numérique de la propagation avec la condition initiale effectuée par mise en forme située à  $\xi = -1.5$  (b,d). (a,b) Évolution spatio-temporelle. (c,d) Évolution spatio-fréquentielle.

Les figures 2.29 à 2.31 montrent une comparaison plus précise entre analytique et numérique pour les profils temporels et spectraux à  $\xi = 0$ . La figure 2.29 traite du breather d'Akhmediev avec  $a = 0.25$ . On peut voir que spectralement et temporellement, nous avons des profils identiques entre la solution analytique et de la simulation à partir de la condition initiale parfaite. Notons toutefois qu'il existe des petites différences dans le bas du spectre, mais elles restent très minimes.

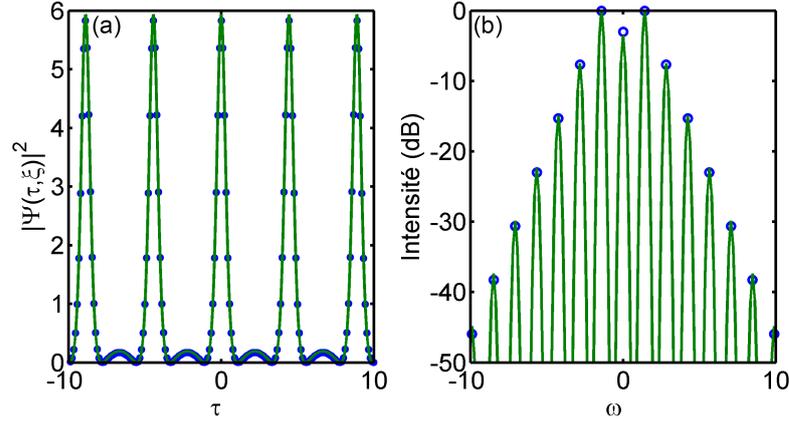


FIGURE 2.29 – Comparaison des profils temporels (a) et spectraux (b) au maximum de compression des breathers d'Akhmediev ( $a=0.25$ ). Les profils sont obtenus par la solution analytique (en cercle bleu) et par simulation numérique avec comme condition initiale la mise en forme à partir de la solution analytique (en trait continu vert).

La figure 2.30, qui porte sur le soliton de Peregrine, montre que la génération des trains de solitons Peregrine par propagation est identique à la solution analytique. Notons l'absence de modulations sur les piédestaux contrairement au cas  $\xi = 0$ . La figure 2.31 montre la mise en forme de la solution de second ordre avec les paramètres  $a_1 = 0.4323$  et  $a_2 = 0.2294$ . Notons à nouveau un très bon accord entre les solutions analytiques et la propagation de la mise en forme à  $\xi = -1.5$ .

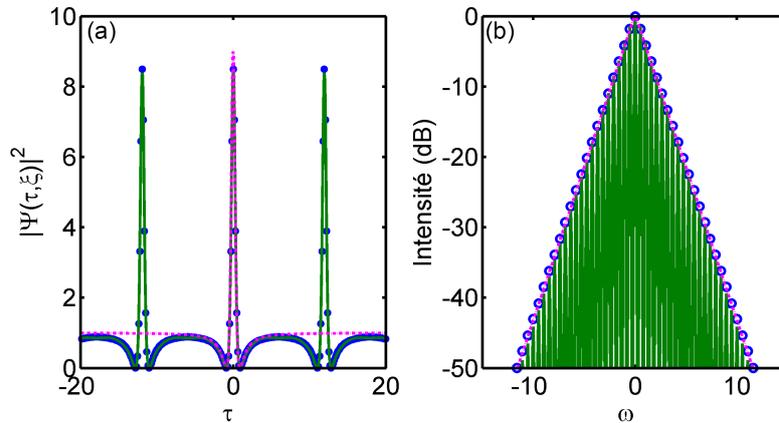


FIGURE 2.30 – Comparaison des profils temporels (a) et spectraux (b) au maximum de compression d'un train de soliton Peregrine. Les profils sont obtenus par la solution analytique (en cercle bleu) et par simulation numérique avec comme condition initiale la mise en forme à partir de la solution analytique (en trait continu vert).

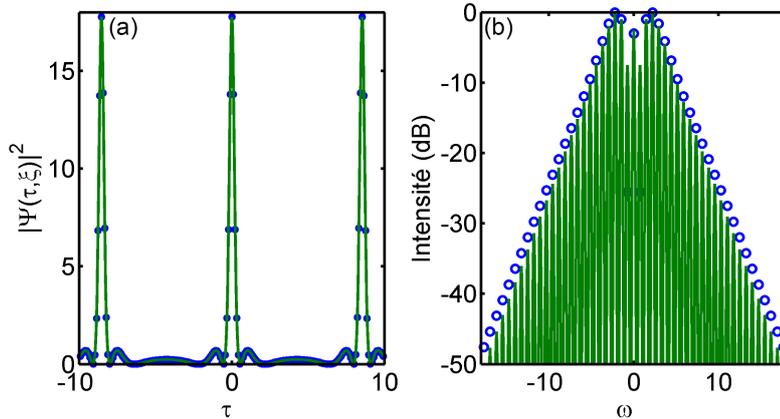


FIGURE 2.31 – Comparaison des profils temporels (a) et spectraux (b) au maximum de compression des solitons de second ordre ( $a_1 = 0.4323$  et  $a_2 = 0.2294$ ). Les profils sont obtenus par la solution analytique (en cercle bleu) et par simulation numérique avec comme condition initiale la mise en forme à partir de la solution analytique (en trait continu vert).

Nous avons montré précédemment qu’il est possible de générer expérimentalement les breathers d’Akhmediev et le soliton de Peregrine de manière non idéale. Ici, nous avons pu montrer numériquement qu’il était possible de recréer efficacement la génération de ces solutions de premier ordre, mais également de second ordre de manière idéale. Dans la suite, nous allons étudier l’influence de différents facteurs présents dans les expériences, tels que la puissance initiale et les pertes.

## 2.5 Impact des conditions initiales et des pertes sur la propagation

### 2.5.1 Impact de la puissance initiale

L’ajustement de la puissance moyenne initiale est très important pour la mise en forme spectrale et de phase. En effet, la condition initiale doit être choisie sur une solution analytique normalisée. Afin de dénormaliser celle-ci, nous avons besoin des différents paramètres de la fibre (dispersion  $\beta_2$ , coefficient de non-linéarité  $\gamma$ ) et également de la puissance moyenne initiale  $P_0$ ; ce qui permet alors d’accorder les solutions avec la source laser à 20 GHz et créer les filtres correspondants. La puissance moyenne expérimentale injectée dans la fibre optique doit être identique à celle utilisée pour la dénormalisation dans les simulations numériques. En effet, s’il existe une différence nous n’aurions pas la bonne condition initiale et nous n’aurions pas le profil souhaité à la sortie de la fibre optique. De plus, la puissance moyenne permet de définir le paramètre  $a$  des breathers soit pour la solution de premier ordre soit pour la superposition non linéaire. En effet, on rappelle que le paramètre  $a$  (voir équation (2.6)) est directement lié à la fréquence de répétition des solutions analytiques, mais également aux paramètres de la fibre optique et surtout à la puissance moyenne utilisée.

### 2.5.2 Impact de la phase spectrale initiale relative

La phase relative entre les différentes composantes spectrales a la plus grande importance pour générer les structures de second ordre avec la mise en forme linéaire. En effet, la seule modification des intensités de chacune des composantes spectrales à l’aide du filtre programmable ne permettrait pas de générer correctement la structure souhaitée. La figure 2.32 montre le résultat obtenu avec un filtre de phase nulle dans le cas d’un soliton sur fond continu de second

ordre à  $\xi = -1.5$ . Nous remarquons qu'à la sortie du filtre nous obtenons un profil temporel totalement différent de la solution analytique, bien que l'accord des profils spectraux soit très bon ; d'où toute l'importance d'optimiser la phase pour obtenir une mise en forme correcte.

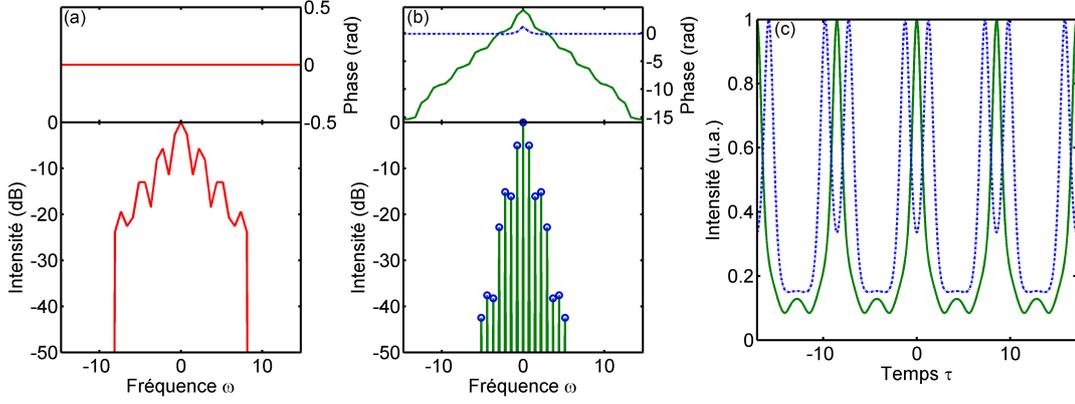


FIGURE 2.32 – Mise en forme de la source laser pour obtenir des solitons de second ordre à  $\xi=0$ . (a) Filtre de phase (en haut) et spectral (en bas). (b) Profil de phase (haut) et spectre (bas). (c) Profil temporel. En vert, solution analytique, cercle bleu, simulation numérique.

### 2.5.3 L'influence des pertes

Les pertes vont jouer un rôle impossible à négliger lors des expériences. En effet, lors des simulations précédentes, celles-ci n'ont pas été prises en compte puisque l'équation de Schrödinger non linéaire (équation (2.1)) ne contient pas de terme de pertes. De plus les solutions que nous avons présentées au début de ce chapitre dans les parties 2.1 et 2.2 ont été obtenues à partir de l'ESNL sans perte. Dans cette partie, nous allons voir les modifications que les pertes vont introduire sur la génération de solutions de second ordre.

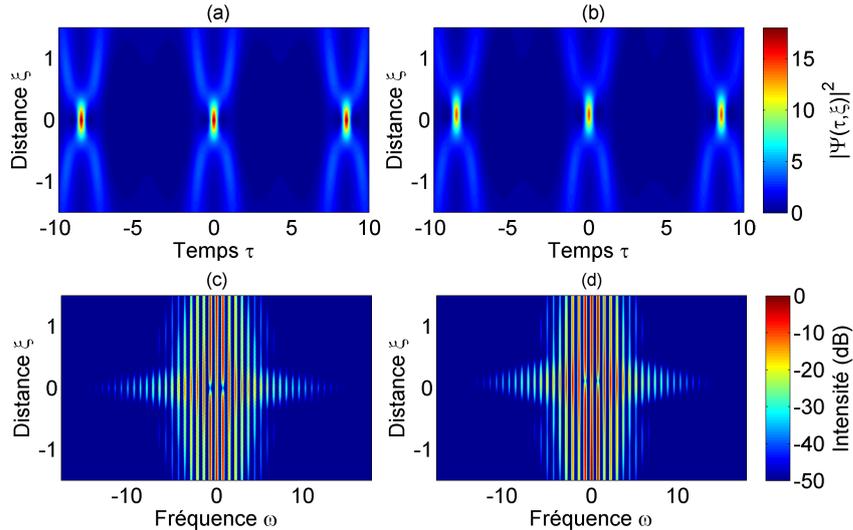


FIGURE 2.33 – Évolution de la mise en forme de soliton de second ordre sans perte (a,c) et avec perte (b,d). Évolution spatio-temporelle (a,b) et spatio-fréquentielle (c,d).

Dans la gamme de fréquence utilisée expérimentalement les pertes de la fibre optique sont de 0.2 dB/km. Lorsque nous avons fait la mise en forme spectrale et de phase, et que nous avons simulé sa propagation pour générer la structure voulue, les pertes n'étaient pas prises en

compte. La figure 2.33 montre le résultat de la simulation numérique avec la prise en compte des pertes dans le modèle. Nous remarquons que contrairement à la propagation sans perte, nous avons un décalage de  $\xi = +0.12$  sur l'apparition de la structure de second ordre. La figure a été normalisée par rapport à la puissance d'entrée moyenne de 513 mW.

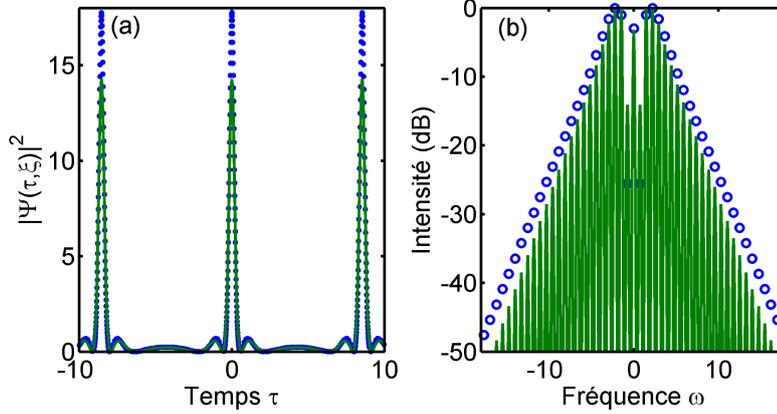


FIGURE 2.34 – Profil temporel (a) et spectral (b). En bleu, solution analytique à  $\xi = 0$ . En vert, simulation numérique à  $\xi = +0.12$

Comparons maintenant les profils temporels et spectraux de la solution analytique à  $\xi = 0$  et de la simulation numérique à  $\xi = +0.12$ . Nous pouvons voir sur la figure 34 que le profil temporel est en bon accord avec la solution analytique. Notons toutefois que l'intensité maximale est très différente, ce qui n'est pas surprenant. De même, le spectre possède de bonnes similitudes même s'il n'est pas aussi large que la solution analytique. Nous pouvons voir que malgré une condition initiale idéale, les pertes dans nos simulations numériques réduisent l'intensité maximum attendue, cependant, les profils temporel et spectral sont en bon accord avec la théorie. Nous allons décrire les résultats obtenus expérimentalement dans la partie suivante.

## 2.6 Génération expérimentale des solitons sur fond continu : idéaux

### 2.6.1 Le montage expérimental

Le dispositif expérimental représenté sur la figure 2.35 utilise des composants ultrarapides pour les télécommunications optiques. En effet, il bénéficie d'un banc d'essai différent par rapport aux études précédentes sur les breathers d'Akhmediev de premier ordre [7, 8]. Le peigne de fréquence initial est généré par l'application d'une source d'impulsions de fréquence de répétition de 20 GHz centrée à 1550 nm. La source impulsionnelle est obtenue par compression non linéaire d'un battement initial dans une fibre optique. Pour générer le battement initial, nous avons utilisé une diode laser externe (ECL) combinée à un modulateur d'intensité de  $LiNbO_3$  (IM) piloté par une horloge externe de 20 GHz. Un modulateur de phase (PM) à une fréquence de 100 MHz, est également introduit pour éviter l'effet néfaste de la rétrodiffusion Brillouin stimulée. Le battement sinusoïdal obtenu est amplifié à une puissance moyenne optimale de 0.45 W au moyen d'un amplificateur à fibre dopée à l'erbium (EDFA) avant l'injection dans la fibre de compression. La compression non linéaire se déroule dans une fibre optique monomode standard ( $SMF_1$ ) de 2.1 km de long. Elle possède les caractéristiques suivantes : une dispersion de vitesse de groupe  $\beta_2 = -20.4 ps^2 km^{-1}$ , des pertes linéaires  $\alpha_{dB} = 0.3 dB.km^{-1}$ , et un coefficient non linéaire  $\gamma = 1.2 W^{-1} km^{-1}$ .

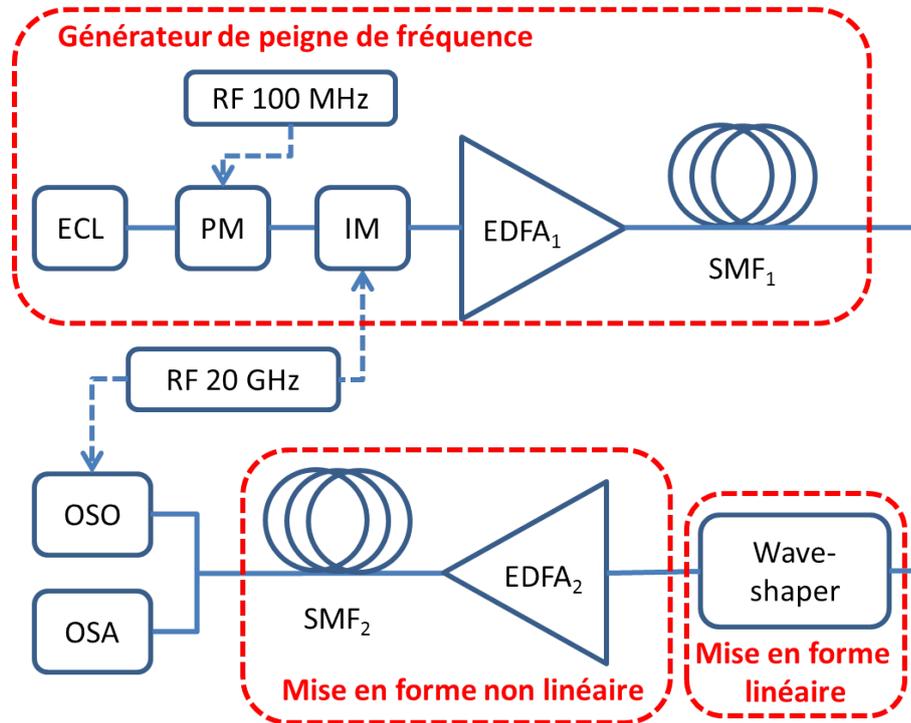


FIGURE 2.35 – Montage de la mise en forme d'intensité et de phase spectrale pour la génération de soliton sur fond continu idéal. Avec 3 étages : Générateur de peigne de fréquence, mise en forme linéaire, mise en forme non linéaire. **ECL** : Diode laser externe, **PM** : modulateur de phase, **IM** : modulateur d'intensité, **EDFA** : amplificateur fibré dopé Erbium, **SMF** : fibre monomode (SMF-28), **Waveshaper** : filtre optique programmable, **OSO** : oscilloscope à échantillonnage optique, **OSA** : analyseur de spectre optique, **RF** : signal radiofréquence.

Ce type de sources lasers combinées à des fibres optiques ont permis de générer des peignes de fréquence avec une haute qualité d'impulsions. En effet, les impulsions générées sont sans piédestaux, et offrent un spectre de raie formant une parabole ou un triangle avec de nombreuses composantes spectrales et avec un bon rapport signal sur bruit [28, 29].

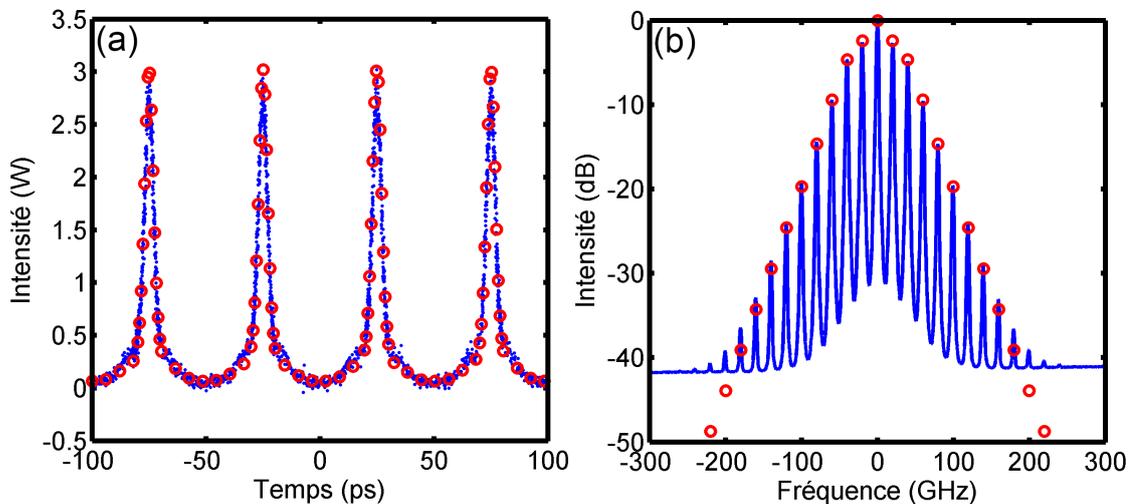


FIGURE 2.36 – Profil temporel (a) et spectral (b) de la source laser. En rouge, simulation numérique de la source; et en bleu, mesure expérimentale

Ici la source peigne de fréquences n'utilise qu'un seul type de fibre optique (SMF). Les mesures des profils temporel et spectral du peigne de fréquence sont rapportés sur les figures 2.36(a) et (b). Le spectre d'une telle source d'impulsions peut être approché par une série de Dirac  $\delta$  séparée par la fréquence de répétition. La largeur de l'enveloppe du peigne dépend de la compression non linéaire de l'onde continue modulée initialement et détermine le nombre de bandes latérales et leur amplitude décroissante. La puissance moyenne à l'entrée de la fibre optique a été déterminée en fonction de l'amplitude de modulation du signal de battement initial pour optimiser la bande passante du spectre de sortie sans avoir une trop grande déplétion de la pompe, entraînant ainsi un spectre de forme triangulaire typique sur une échelle logarithmique. Ce type de spectre est bien adapté pour les études des solitons sur fond continu [16, 30].

Ensuite le filtre optique programmable (*WaveShaper*) fournit un contrôle extrêmement fin des caractéristiques d'amplitude et de phase pour chaque raie du peigne de fréquence. La haute résolution (1 GHz) permet de choisir ou de commander individuellement chacune des raies spectrales du peigne [31]. Nous définirons les amplitudes et les phases relatives de 24 bandes latérales et de la raie centrale à 1550 nm (c'est-à-dire la fréquence de l'onde continue) afin de déterminer les conditions initiales exactes pour stimuler les solutions sur fond continu de premier ou second ordre dans la fibre optique. Un amplificateur erbium (EDFA) est utilisé pour amplifier la puissance moyenne de l'onde synthétisée avant le couplage dans une seconde fibre optique (*SMF<sub>2</sub>*) de 1.5 km de long. Les caractéristiques de cette fibre sont les suivantes : la dispersion de vitesse de groupe,  $\beta_2 = -21.1 \text{ ps}^2.\text{km}^{-1}$ , les pertes linéaires,  $\alpha_{dB} = 0.3 \text{ dB.km}^{-1}$ , et le coefficient de non-linéarité,  $\gamma = 1.2 \text{ W}^{-1}.\text{km}^{-1}$ .

La puissance moyenne d'entrée de fibre est fixée afin de satisfaire les valeurs des paramètres généraux  $a$  en utilisant les propriétés de la fibre optique. À la sortie de la fibre optique, le profil de l'onde est caractérisé à l'aide d'un oscilloscope à échantillonnage optique ultrarapide (OSO) avec une résolution subpicoseconde et un analyseur de spectre optique (OSA) de grande dynamique et une résolution de 2.5 GHz.

## 2.6.2 Mesure expérimentale

### 2.6.2.1 Étude de l'impact de la phase

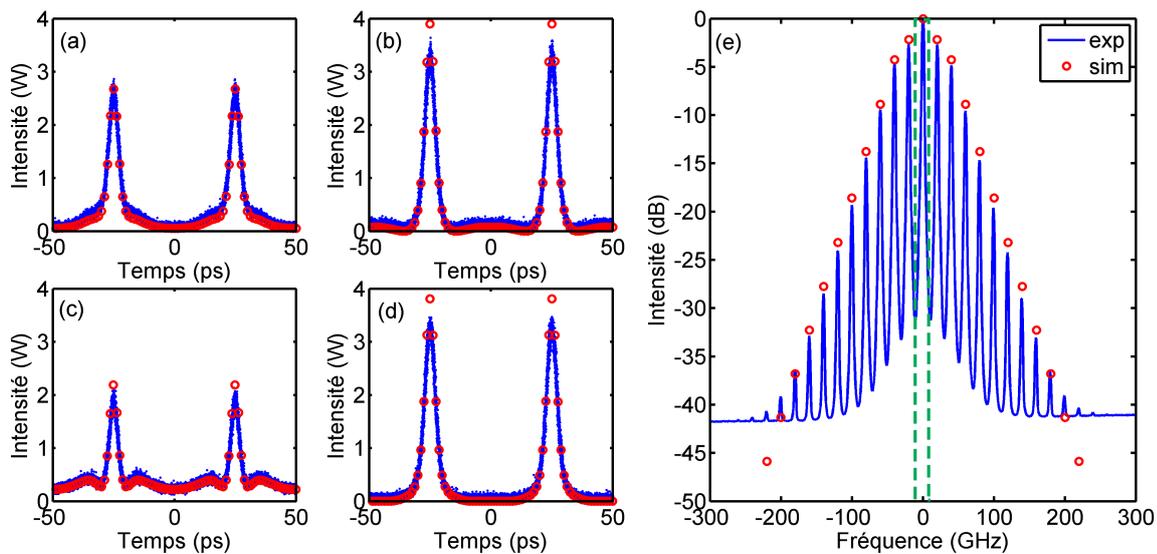


FIGURE 2.37 – Profil temporel (a-d) et spectral (e) de la source laser. En bleu correspond à la mesure expérimentale, et en rouge correspond à la simulation numérique selon la phase spectrale appliquée sur la fréquence pompe. Phase relative de 0,  $-0.5\pi$ ,  $0.25\pi$  et  $-0.25\pi$  respectivement sur les figures a, b, c, d.

Comme nous avons pu voir lors des simulations, la phase spectrale joue un rôle très important. En effet, malgré un spectre identique la phase va modifier le profil temporel. Nous pouvons réaliser un simple test en utilisant le spectre de la source que nous allons utiliser et en modifiant uniquement la phase de la composante centrale :  $0$ ,  $-0.5\pi$ ,  $0.25\pi$  et  $-0.25\pi$ . Nous caractérisons la sortie du filtre à l'aide de l'OSO et de l'OSA et nous comparons les simulations de l'application du filtre et les mesures expérimentales sur la figure 2.37. La zone du filtre de phase est montrée sur la figure 2.37(e) en pointillé vert.

Nous pouvons remarquer que les quatre modifications de phase ne changent pas le spectre de puissance mais modifient les profils temporels de façon importante. Un bon accord est obtenu entre les simulations et les résultats expérimentaux. De plus, ces résultats permettent de valider la méthode de détermination de la phase spectrale de la source par simulations numériques. Il est important de noter qu'il faudra appliquer des filtres de phase très précis pour obtenir les solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire désirées.

## 2.6.2.2 Étude de différents cas

### 2.6.2.2.1 Solutions de premier ordre

Etudions dans un premier temps les solutions de premier ordre obtenues directement à la sortie du filtre programmable. Appliquons le filtre d'intensité et de phase que nous avons obtenu par les simulations de mise en forme (voir figures 2.17(a) et 2.20(a)). Sur les figures 2.38 et 2.39, nous pouvons voir les profils temporels et spectraux de la mise en forme de la source laser en breather d'Akhmediev ayant un paramètre  $a=0.25$  et de la mise en forme d'un train de soliton Peregrine. Nous pouvons comparer sur ces figures les solutions générées suite à la mise en forme par les filtres lors des expériences et des simulations. Nous pouvons voir que les résultats expérimentaux sont en accord avec les simulations numériques.

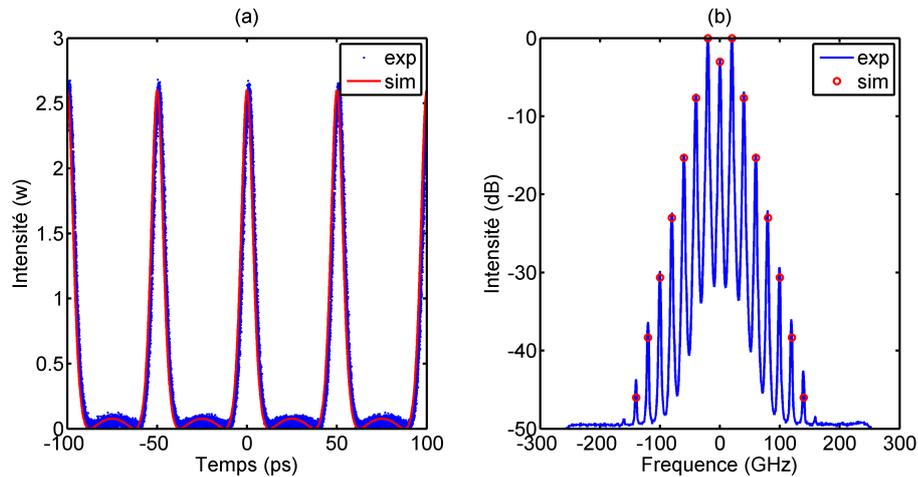


FIGURE 2.38 – Profil temporel (a) et spectral (b) de la mise en forme de la source laser en breather d'Akhmediev avec un paramètre  $a = 0.25$ . En bleu correspond à la mesure expérimentale, et en rouge correspond à la simulation numérique selon les filtres d'intensité et de phase spectrale (voir figure 2.17(a)) appliquée sur le spectre de la source.

Les résultats des figures 2.38 et 2.39 sont obtenus directement après la mise en forme par le filtre.

Dans le travail de cette thèse, nous nous sommes intéressés surtout aux solutions complexes, c'est pourquoi par la suite des expériences, nous avons mis en forme la solution de second ordre que nous avons vu sur la figure 2.9, qui correspond à la solution de l'équation 2.19.

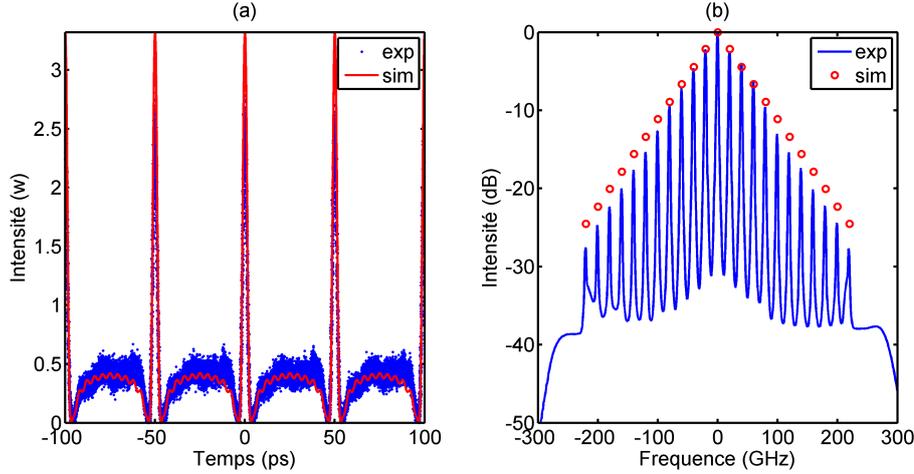


FIGURE 2.39 – Profil temporel (a) et spectral (b) de la mise en forme de la source laser en soliton Peregrine. En bleu correspond à la mesure expérimentale, et en rouge correspond à la simulation numérique selon les filtres d'intensité et de phase spectrale (voir figure 2.20(a)) appliquée sur le spectre de la source.

### 2.6.2.2.2 Solutions de second ordre

Nous allons à présent illustrer le principe de fonctionnement d'un générateur d'ondes non linéaires complexes à partir d'une propagation non linéaire dans une fibre optique (ce qui diffère de la partie précédente où on générât directement la solution (équation (2.19)) de façon linéaire à l'aide d'un filtre). Ici, une condition initiale éloignée du maximum d'intensité de la solution, se propage dans une fibre optique afin de générer la solution complexe à l'aide de processus non linéaires. Ainsi, nous avons réalisé des simulations numériques à l'aide des caractéristiques de la source laser initiale. La figure 2.40 montre le cas particulier où l'amplitude maximale de la solution de second ordre est obtenue en sortie de fibre. Cela signifie que l'état initial à l'entrée de la fibre doit être égale à  $\Psi_{in} = \Psi(\xi = -L_{SMF}/L_{NL}, \tau)$ , avec  $L_{SMF} = 1.5 \text{ km}$ . Il est alors de calculer la phase et l'intensité des composantes spectrales dont nous avons besoin en prenant la transformée de Fourier du champ de l'onde initiale. Le calcul permet ainsi d'en déduire le filtre de phase et d'intensité spectrale à utiliser pour le WaveShaper. La correspondance entre la théorie et l'expérience peut être obtenue en rappelant que la distance  $z(\text{m})$  et le temps  $t(\text{s})$  sont liés aux paramètres normalisés précédents par  $z = \xi L_{NL}$  et  $t = \tau \tau_0$ . Le champ dimensionnel  $A(z, t)(W^{1/2})$  est  $A = P_0^{1/2} \Psi$ ,  $P_0$  est la puissance moyenne de l'onde d'entrée. Nous effectuons ici une superposition de deux breathers d'Akhmediev déterminés par la fréquence de modulation  $\omega_{mod}$  en relation avec le paramètre général  $a$  par :  $2a = 1 - \left(\frac{\omega_{mod}}{\omega_c}\right)^2$  avec  $\omega_c^2 = \frac{4\gamma P_0}{\beta_2}$  [18]. Les paramètres physiques sont :  $P_0 = 0.513 \text{ W}$ ,  $a_1 = 0.2294$  qui correspond à une fréquence de  $\omega_{mod_1} = 40 \text{ GHz}$ , et  $a_2 = 0.4323$  soit une fréquence de modulation de  $\omega_{mod_2} = 20 \text{ GHz}$ . Sur la figure 2.40(a-c), nous avons représenté les trois étapes de l'expérience avec les évolutions de l'intensité temporelle, la phase et de l'intensité spectrale qui correspond à (a) au peigne de fréquence initiale (b) l'onde d'entrée synthétisée et (c) à l'onde à la sortie de fibre. Les résultats numériques sont ainsi comparés à la solution analytique de la solution de second ordre, en effet, pour (b) cela correspond à  $\Psi(\xi = -L_{SMF}/L_{NL}, \tau)$  et (c) à  $\Psi(\xi = 0, \tau)$ . Nous avons un excellent accord entre la théorie et les simulations, mais cela a nécessité une attention particulière à la phase et l'amplitude de chacune des composantes spectrales.

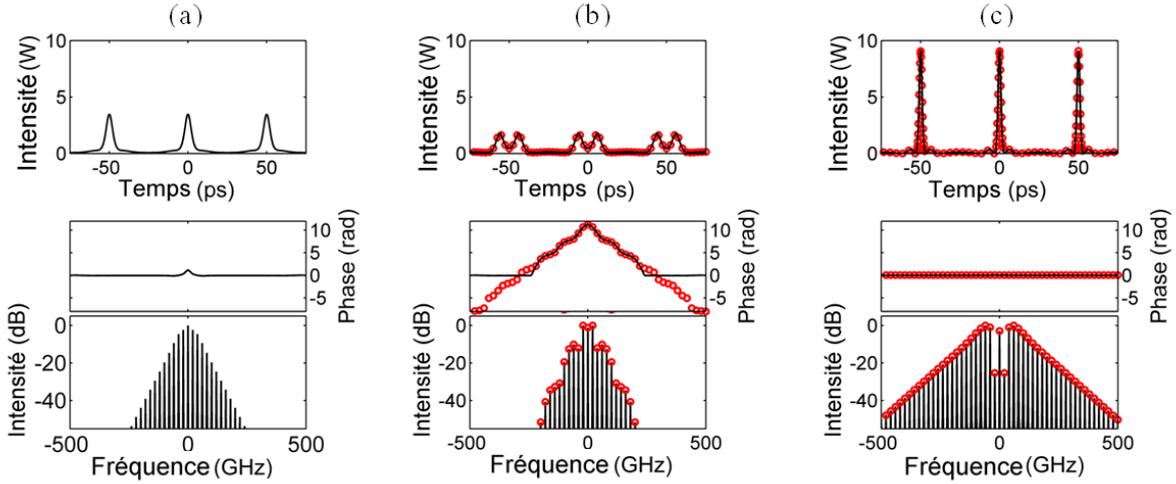


FIGURE 2.40 – Évolution de l'intensité temporelle, phase et de l'intensité spectrale dans notre générateur à solution correspondant au peigne de fréquence (a), champ d'entrée synthétisé (b) et le champ de sortie de la fibre (c). Lignes noires (cercles rouges) correspondantes aux simulations numériques (théorie donnée par l'équation (2.19)).

Afin de valider le générateur de solutions complexes de l'équation de Schrödinger non linéaire, nous avons étudié expérimentalement les paramètres de superposition non linéaire décrits ci-dessus. Inspirés par les études en hydrodynamique, nous avons également appliqué une méthode originale pour reconstruire l'évolution de l'onde en fonction de la distance de propagation en bénéficiant de la mise en forme avec l'aide du filtre programmable [5, 10, 11]. En effet, les conditions du profil initial pour la propagation non linéaire sont générées de façon répétitive avec des conditions données par la théorie à différentes distances. Ainsi, nous commençons à  $z = -3$  km (soit  $\xi = -1.85$ ) et nous procédons à une étape de propagation égale à  $\Delta_z = 0.1$  km ( $\Delta_\xi = 0.0616$ ). Nous répétons ce processus 25 fois, fournissant ainsi l'observation de l'évolution de l'onde sur 2.5 km (soit 1.54 longueur non linéaire).

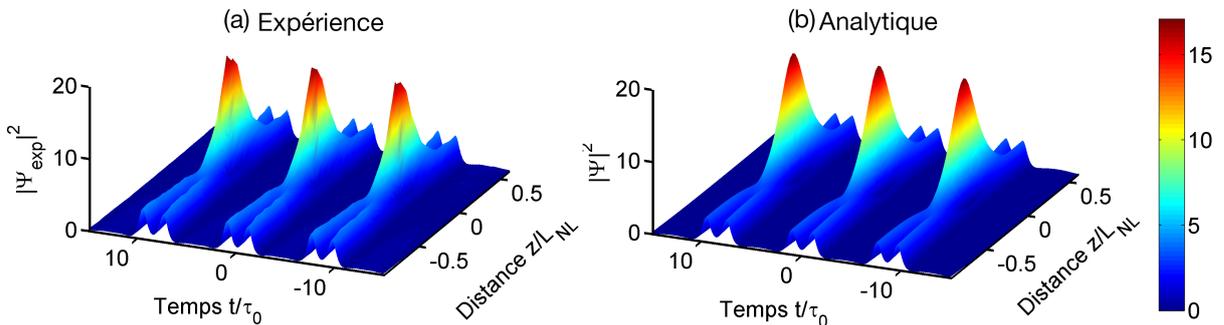


FIGURE 2.41 – Évolution de la seconde pause de l'ordre dans le domaine temporel en fonction de la distance de propagation. (a) Expériences, (b) solution analytique donnée par l'équation (2.19). Notons que les dimensions distance et temps sont normalisées ici pour une meilleure comparaison avec la théorie.

La figure 2.41(a) montre à la fois la croissance et la décroissance d'un soliton sur fond continu de second ordre. Les caractéristiques spécifiques sont bien présentes, notamment le pic central est périodique dans le temps en raison de la superposition de deux breathers d'Akhmediev, et la signature typique en forme de X dans le plan  $(\xi, \tau)$ . Notons que le pic central de forte

amplitude apparaît et disparaît sur moins de la moitié de la longueur non linéaire. Les résultats expérimentaux sont comparés à la solution analytique donnée par l'équation (2.19) sur la figure 2.41(b). On notera également que le profil d'intensité expérimental est normalisé à la puissance moyenne  $P_0$  d'entrée. L'accord entre les deux est remarquable pour l'ensemble de l'évolution mesurée dans le plan  $(\xi, \tau)$ . La figure 2.42 montre une comparaison explicite à une distance correspondant à l'amplitude maximale de la solution de second ordre. Seules de petites différences avec la théorie apparaissent sur l'intensité maximum. Nous soulignons que seul l'effet des pertes de la fibre optique affecte les résultats obtenus (ici les pertes sont de  $\alpha_{dB} = 0.3 \text{ dB.km}^{-1}$ ). En effet, le profil de l'onde expérimental dans les domaines temporel et fréquentiel est indiscernable des prédictions données par les simulations de la propagation en tenant compte des pertes linéaires (voir figures 2.42(c,d)). Le paramètre d'erreur entre la forme expérimentale et la théorie, est défini par :

$$M = \frac{\int (|\overline{|\Psi_{exp}|^2} - |\overline{|\Psi|^2}|)^2 dt}{\int (|\overline{|\Psi_{exp}|^2}|)^2 dt} \quad (2.23)$$

Ici,  $M = 4\%$ , il faut savoir que  $|\overline{|\Psi|^2}|$  désigne la moyenne de la forme analytique normalisée, soit le maximum égal à 1. Nous observons un très bon accord entre la mesure expérimentale et la forme de la solution analytique.

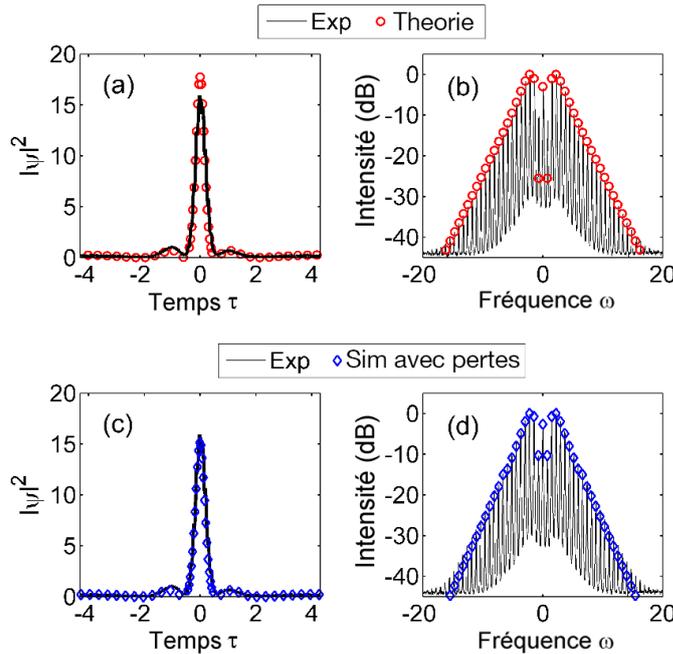


FIGURE 2.42 – Comparaison entre expériences (lignes noires) et la théorie (cercles rouges) à la distance correspondant à l'amplitude maximale de la solution de second ordre. (a) Profil d'intensité temporelle. (b) Profil d'intensité spectrale. (c) et (d) comparaison entre l'expérience similaire (lignes noires) et simulation numérique en prenant en compte les pertes de fibres linéaire (losanges bleus). Notez également que les profils d'intensité expérimental et simulé sont normalisés à la puissance moyenne d'entrée  $P_0$ .

Pour compléter la caractérisation expérimentale, des mesures spectrales ont également été effectuées (voir figure 2.42(b,d)). La génération multiple des bandes latérales est clairement observée par rapport au spectre initial du peigne de fréquence. L'excellent rapport signal sur bruit dans nos expériences permet de satisfaire quantitativement les prédictions théoriques sur une dynamique de 40 dB. On notera également que la modulation de fréquence du spectre est

$\omega_{mod,2}$  (soit une fréquence de modulation de 20 GHz), cela correspond à la période temporelle du pic central de la solution de second ordre. L'évolution expérimentale complète dans le domaine des fréquences est représentée sur la figure 2.43(a). Un fort élargissement spectral se produit lorsque la solution de second ordre atteint son maximum de compression temporelle et de pic d'intensité maximum. De même, dans des études précédentes des breathers d'Akhmediev, nous confirmons que la compression temporelle est associée à une localisation spatiale accrue du transfert d'énergie à des ordres supérieurs des bandes latérales. L'accord ici entre l'évolution spectrale enregistrée expérimentalement et la solution théorique est excellent (voir figure 2.43(b)).

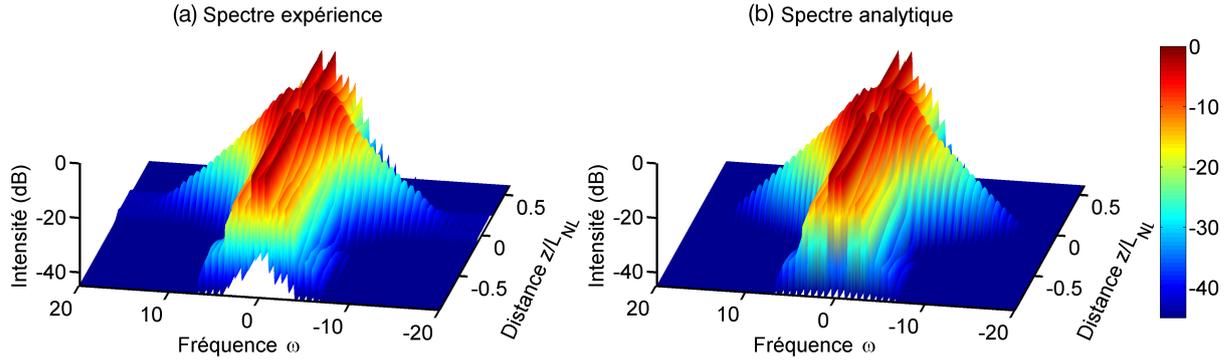


FIGURE 2.43 – Évolution de la solution de second ordre dans le domaine des fréquences en fonction de la distance de propagation. (a) Expériences. (b) Solution analytique donnée par l'équation (2.19). Notons que les dimensions de distance et fréquence sont normalisées afin de faire une meilleure comparaison avec la théorie.

## 2.7 Conclusion

Dans les première et seconde parties, nous avons vu les différentes solutions analytiques de solitons sur fond continu de premier et second ordre, ainsi que leurs représentations graphiques qui nous permettent de repérer une forme caractéristique. À partir de ces solutions, nous avons imaginé des expériences afin de les générer dans une fibre optique de manière idéale. C'est pourquoi dans la troisième partie, nous avons pu voir les simulations numériques de la mise en forme d'intensité et de phase du spectre à la distance  $\xi = 0$  et à  $\xi = -1.5$ , également utilisé comme condition initiale pour les simulations de propagation. Les comparaisons des simulations avec les solutions analytiques ont permis de vérifier la faisabilité de nos expériences. De plus dans la cinquième partie, nous avons étudié les impacts et les effets néfastes relatifs aux expériences. Enfin, dans la dernière partie, nous avons mis en œuvre les différentes expériences nécessaires pour vérifier l'impact de la phase, mais aussi la génération des solutions de premier ordre directement après le filtre. Enfin, une génération par étape a permis de reconstituer l'évolution de la solution de second ordre. Tous les résultats obtenus montrent de très bons accords avec les simulations numériques menées. Cependant, les résultats correspondent au cas de génération idéale, nous verrons dans le chapitre suivant des cas plus proches de conditions réalistes avec du bruit, des pertes plus importantes et un système un peu plus perturbé.

## Références du chapitre 2

- [1] N Akhmediev, A Ankiewicz, and M Taki. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace. *Physics Letters A*, 373(6) :675–678, 2009.
- [2] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, a. Montina, and F. T. Arecchi. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Physics Reports*, 528(2) :47–89, 2013.
- [3] Christian Kharif, Efim Pelinovsky, and Alexey Slunyaev. *Rogue Waves in the Ocean*. Springer, 2009.
- [4] Alfred Osborne. *Nonlinear Ocean Waves & the Inverse Scattering Transform*, volume 97. Academic Press, 2010.
- [5] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev. Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*, 106(20) :2–5, 2011.
- [6] Miguel Onorato, Davide Proment, Günther Clauss, and Marco Klein. Rogue Waves : From Nonlinear Schrödinger Breather Solutions to Sea-Keeping Test. *PLoS ONE*, 8(2) :1–5, 2013.
- [7] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, and J. M. Dudley. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics. *Nature Physics*, 6(10) :790–795, 2010.
- [8] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, G. Genty, B. Wetzel, N. Akhmediev, F. Dias, and J. M. Dudley. Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre. *Scientific Reports*, 2 :1–5, 2012.
- [9] H Bailung, S K Sharma, and Y Nakamura. Observation of Peregrine Solitons in a Multi-component Plasma. *Physical Review Letters*, 255005(December) :1–9, 2011.
- [10] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev. Super Rogue Waves : Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves. *Physical Review X*, 2(1) :2–7, 2012.
- [11] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, a. Slunyaev, a. Sergeeva, E. Pelinovsky, and N. Akhmediev. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 86(5) :1–6, 2012.
- [12] Steven T. Cundiff and Andrew M. Weiner. Optical arbitrary waveform generation. *Nature Photonics*, 4(11) :760–766, 2010.
- [13] Andrew M. Weiner. Ultrafast optical pulse shaping : A tutorial review. *Optics Communications*, 284(15) :3669–3692, 2011.
- [14] Zhi Jiang, Daniel E. Leaird, Chen Bin Huang, Houxun Miao, Motonobu Kurogi, Kazuhiro Imai, and Andrew W. Weiner. Spectral line-by-line pulse shaping on an optical frequency comb generator. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 43(12) :1163–1174, 2007.
- [15] N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, and a. Ankiewicz. Extreme waves that appear from nowhere : On the nature of rogue waves. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics*, 373(25) :2137–2145, 2009.
- [16] Kamal Hammani, Benjamin Wetzel, Bertrand Kibler, Julien Fatome, Christophe Finot, Guy Millot, Nail Akhmediev, and John Dudley. Spectral dynamics of modulation instability described using akhmediev breather theory. *Optics letters*, 36(11) :2140–2142, 2011.

- 
- [17] N Akhmediev and VI Korneev. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear schrödinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 69(2) :1089–1093, 1986.
- [18] J M Dudley, G Genty, F Dias, B Kibler, and N Akhmediev. Modulation instability, Akhmediev Breathers and continuous wave supercontinuum generation. *Optics express*, 17(24) :21497–21508, 2009.
- [19] A Chabchoub, B Kibler, JM Dudley, and N Akhmediev. Hydrodynamics of periodic breathers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 372(2027) :20140005, 2014.
- [20] EA Kuznetsov. Solitons in a parametrically unstable plasma. In *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, volume 236, pages 575–577, 1977.
- [21] Y-C Ma. The perturbed plane-wave solutions of the cubic schrödinger equation. *Studies in Applied Mathematics*, 60 :43–58, 1979.
- [22] DH Peregrine. Water waves, nonlinear schrödinger equations and their solutions. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 25(01) :16–43, 1983.
- [23] David J. Kedziora, Adrian Ankiewicz, and Nail Akhmediev. Second-order nonlinear schrödinger equation breather solutions in the degenerate and rogue wave limits. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 85(6) :1–9, 2012.
- [24] B. Frisquet, A. Chabchoub, J. Fatome, C. Finot, B. Kibler, and G. Millot. Two-stage linear-nonlinear shaping of an optical frequency comb as rogue nonlinear-Schrödinger-equation-solution generator. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 89(2) :1–6, 2014.
- [25] B. Frisquet, B. Kibler, and G. Millot. Collision of akhmediev breathers in nonlinear fiber optics. *Physical Review X*, 3(4) :1–9, 2013.
- [26] David J. Kedziora, Adrian Ankiewicz, and Nail Akhmediev. Circular rogue wave clusters. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 84(5) :1–7, 2011.
- [27] Miro Erkintalo, Kamal Hammani, Bertrand Kibler, Christophe Finot, Nail Akhmediev, John M. Dudley, and Goëry Genty. Higher-order modulation instability in nonlinear fiber optics. *Physical Review Letters*, 107(25) :14–18, 2011.
- [28] Ibrahim El Mansouri, Julien Fatome, Christophe Finot, Michel Lintz, and Stéphane Pitois. All-fibered high-quality stable 20-and 40-ghz picosecond pulse generators for 160-gb/s otdm applications. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 23(20) :1487–1489, 2011.
- [29] C. Fortier, B. Kibler, Julien Fatome, C. Finot, S. Pitois, and G. Millot. All-fibered high-quality low duty-cycle 160-GHz femtosecond pulse source. *Laser Physics Letters*, 5(11) :817–820, 2008.
- [30] Nail Akhmediev, Adrian Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and John M. Dudley. Universal triangular spectra in parametrically-driven systems. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics*, 375(3) :775–779, 2011.
- [31] Aisling M. Clarke, David G. Williams, Michaël a F Roelens, and Benjamin J. Eggleton. Reconfigurable optical pulse generator employing a fourier-domain programmable optical processor. *Journal of Lightwave Technology*, 28(1) :97–103, 2010.
-



CHAPITRE

3

VERS LA GÉNÉRATION ET  
L'INTERACTION DE SOLITONS SUR  
FOND CONTINU DANS UN SYSTÈME  
PHYSIQUE "RÉALISTE"



Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il était possible de générer des solutions de manière idéale que ce soit en optique dans le cadre de cette thèse, mais aussi également en hydrodynamique pour les solutions de premier ordre ou d'ordre supérieur [1–3]. Ce type de génération idéale est peu représentatif de ce qui pourrait se faire dans la nature, mais constitue une démonstration de l'existence de ces solutions. En effet, nous pouvons utiliser des conditions initiales approchées afin de les générer. Cependant si les premières observations des solutions de premier ordre ont été confirmées dans différents domaines au cours des dernières années [1, 4–8], aucune expérience n'a été réalisée afin de révéler une interaction synchronisée entre ces solutions de premier ordre. En revanche, les interactions de solitons standards ont été étudiées en détails [9], et sont connues pour leur collision élastique. Il est intéressant de noter également que des structures cohérentes non-linéaires sont également connues pour coexister avec la turbulence d'ondes. Même en présence de phases aléatoires liées à l'étude des ondes incohérentes, diverses simulations numériques ont montré l'émergence spontanée d'ondes localisées cohérentes (même des solutions rationnelles de l'équation de Schrödinger non-linéaire) à partir d'un environnement turbulent [10–13]. Il est donc d'une importance fondamentale d'examiner l'approche cohérente et déterministe à la compréhension de phénomène extrême ondulatoire dans les conditions océaniques réalistes [14, 15]. À cet égard, il est intéressant de mentionner la récente observation des solitons rationnels qui peuvent expliquer les vagues scélérates avec une amplitude plus élevée en eau profonde [16, 17]. Cependant, ces solutions d'ordre supérieur peuvent être interprétés comme une superposition non-linéaire de deux ou plus solutions de premier ordre [18]. Ainsi, comme alternative à la génération de manière idéale de nos solutions de second ordre, nous pouvons considérer la collision de solutions périodiques de premier ordre de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Ces structures de premier ordre, des breathers d'Akhmediev, seront également générés de manière non-idéale, c'est-à-dire en utilisant une condition initiale approchée à la solution analytique comme cela a déjà été fait lors des premières observations en optique [8, 19].

Nous verrons ainsi dans la première partie une étude numérique de la génération non idéale avec une excitation à une seule bande latérale de l'onde continue ( $1 + \exp(i\Omega t)$ ) pour chaque breather d'Akhmediev. Nous déterminerons également la condition initiale totale afin d'exciter deux breathers d'Akhmediev différents de manière simultanée et qui peuvent entrer en collision.

Dans une seconde partie, nous comparerons les solutions analytiques avec les solutions générées de manière non idéale afin de vérifier la faisabilité et l'intérêt de cette méthode. Ensuite, nous étudierons les différents impacts que nous pourrions retrouver dans les expériences, à savoir les conditions initiales avec l'impact du spectre initial, de la puissance moyenne initiale, ou encore de la phase relative entre les composantes spectrales, enfin, nous analyserons l'impact des pertes linéaires de la fibre.

Enfin, dans la dernière partie, nous effectuerons la génération expérimentale des solutions de premier ordre et de second ordre. Nous verrons en détails le montage expérimental permettant de réaliser les mesures et observations. Nous comparerons nos enregistrements aux simulations numériques et aux solutions analytiques.

### **3.1 Simulation numérique de la génération de solutions d'une manière non idéale**

Si en laboratoire, nous n'avons pas les moyens de réaliser une mise en forme idéale pour générer des solutions de l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire avec un filtre optique programmable en phase et en intensité, il existe une autre possibilité pour générer ces solutions. Il suffit

alors de propager une condition initiale approchée de la solution analytique. Cependant, la génération de la solution de second ordre n'est pas évidente, car la mise en forme est beaucoup plus complexe [7, 19, 20]. On a pu voir que les solutions de second ordre sont des superpositions non-linéaires des solutions de premier ordre, l'idée est alors de stimuler deux solitons sur fond continu de premier ordre et qu'ils entrent en collision lors de la propagation non-linéaire. Nous verrons dans cette partie comment stimuler d'abord ces solutions de premier ordre. En effet, comme nous pouvons voir sur le schéma de la figure 3.1, nous utiliserons une source laser particulière permettant d'avoir un peigne de fréquence. Ensuite, nous utiliserons un filtre permettant d'obtenir trois composantes spectrales (une centrale qui fera office d'onde continue, et deux autres qui seront les fréquences de perturbations de l'onde continue). Puis nous injecterons cela dans une fibre SMF ayant pour caractéristique suivante :  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2.\text{km}^{-1}$ , un coefficient non-linéaire  $\gamma = 1.2 \text{ W}^{-1}.\text{km}^{-1}$  et nous considérerons dans cette partie que la fibre n'a pas de pertes. Les mesures des profils temporels et spectraux seront réalisés à l'aide d'un oscilloscope à échantillonnage optique (OSO) et d'un analyseur de spectre optique (OSA), mais nous verrons plus en détail le montage expérimental dans la partie 3.4.1.

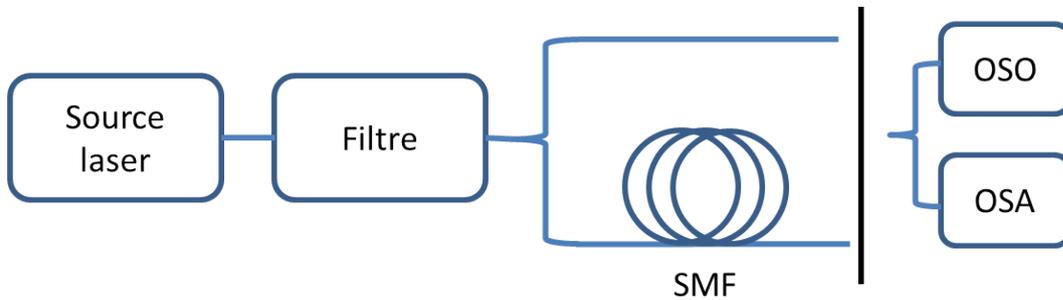


FIGURE 3.1 – Schéma du dispositif expérimental. SMF : fibre monomode (SMF-28), OSO : oscilloscope à échantillonnage optique, OSA : analyseur de spectre optique.

### 3.1.1 Le breather d'Akhmediev

La génération de breathers d'Akhmediev est l'une des plus simples à effectuer de manière non idéale, en effet cela a déjà été démontré expérimentalement avec une condition approchée. L'expression analytique du breather d'Akhmediev est celle que nous avons pu voir dans le chapitre 2, avec l'équation (2.3). Afin de générer de manière approchée la condition initiale, on utilise une onde continue faiblement modulée avec le champ défini par :  $\psi(0, t) = 1 + \delta_{mod} \cos(\omega_{mod}t)$ , où  $\delta_{mod}$  et  $\omega_{mod}$  sont respectivement l'amplitude et la fréquence de modulation. Le deuxième moyen est d'utiliser l'approximation par une exponentielle complexe qui permet également d'avoir une modulation, seulement celle-ci sera asymétrique du point de vue spectral. En effet, le champ est alors défini par  $\psi(0, t) = 1 + \delta_{mod} \exp(i\omega_{mod}t)$ , où  $\delta_{mod}$  et  $\omega_{mod}$  sont respectivement l'amplitude et la fréquence de modulation, qui sont identiques à la condition initiale précédente. Nous utilisons une amplitude de 0.49, ceci ne correspond pas à une faible modulation, mais cette amplitude correspond à l'excitation requise par l'expérience. De plus, nous vérifierons que des breathers d'Akhmediev sont bien générés dans ces conditions (voir figure 3.7).

Nous pouvons voir sur la figure 3.2 les différentes évolutions temporelles et spectrales de la solution analytique, mais aussi des deux conditions initiales approchées (sinusoïdale, et exponentielle complexe) avec une fréquence de 40 GHz. Les breathers générés ont un paramètre  $a = 0.34$  avec les propriétés de la fibre et une puissance moyenne de 831 mW. Les évolutions des simulations numériques ont été décalées de façon à avoir la distance 0 qui correspond au maximum de compression.

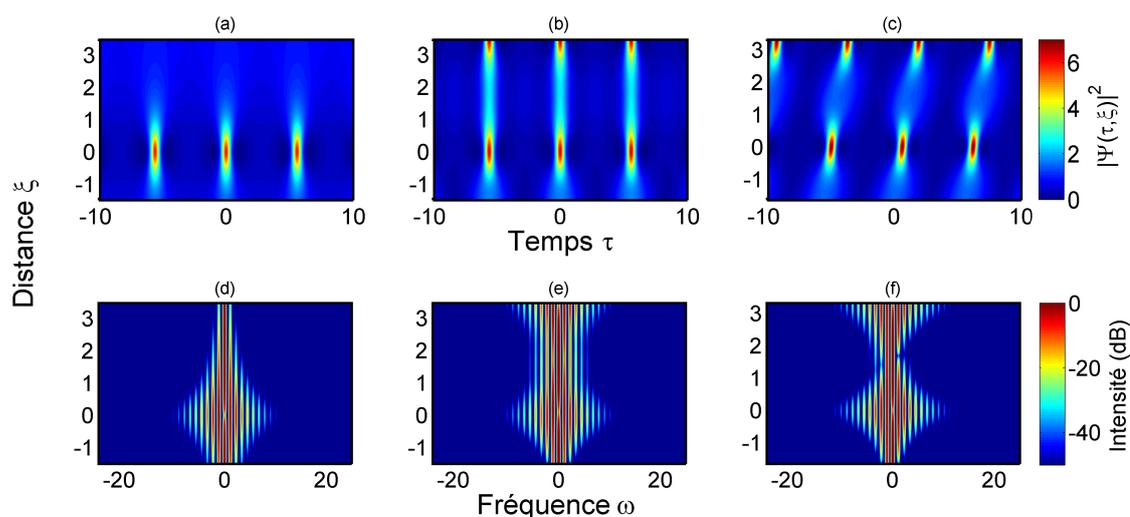


FIGURE 3.2 – (a-c) Évolution spatio-temporelle. (d-f) Évolution spatio-fréquentielle. (a,d) solution exacte du breather d'Akhmediev. (b,c,e,f) Simulation numérique de la propagation de la condition non idéale (b,e) perturbation sinusoïdale avec une amplitude de 0.49, (c,f) perturbation exponentielle avec une amplitude de 0.49.

Ainsi, pour l'évolution sinusoïdale, nous avons décalé de 1.5 longueur non-linéaire et pour l'exponentielle de 1.6. Nous pouvons voir que la solution exacte du breather montre qu'un seul cycle de croissance/décroissance, en effet, il a une période spatiale infinie. Seulement, pour les cas sinusoïdal et exponentiel, nous avons une récurrence dans la compression des breathers ceci est dû à la condition initiale imparfaite. Nous retrouvons celle-ci après chaque cycle de compression. Étant donné que celle-ci permet l'apparition du breather, le fait de retrouver la condition initiale imparfaite permet de relancer la dynamique de génération des breathers d'Akhmediev. On note toutefois deux différences entre les deux méthodes, avec la stimulation sinusoïdale nous avons une solution bipériodique (en temps et en espace). Il en est de même avec l'exponentielle, mais les périodes ne sont pas les mêmes. En effet pour la stimulation exponentielle, il faudra plusieurs récurrences du breather afin d'avoir à nouveau le maximum du breather au même temps. De plus, la particularité du breather généré par la condition initiale exponentielle est que le spectre initial possède une asymétrie. C'est pourquoi les breathers se déplacent avec un certain angle (différence de vitesse de groupe). Ceci est dû aux premières étapes de la croissance des différentes composantes lors de la propagation qui induit une vitesse moyenne de groupe distincte par rapport à la stimulation sinusoïdale. Mais de manière globale, on peut noter que la dynamique entre les deux stimulations reste similaire, en effet, nous avons dans le spectre une croissance des composantes avant et une décroissance après l'apparition du maximum d'intensité du breather d'Akhmediev. Grâce au contrôle de l'inclinaison des breathers, il est alors aisé de penser qu'utiliser deux breathers ayant une vitesse de groupe qui les oppose permettra plus facilement de créer la collision.

### 3.1.2 Les solutions de deuxième ordre

Pour réaliser une collision de deux breathers d'Akhmediev, nous ferons une superposition de deux ondes modulées avec des fréquences différentes afin de bien créer deux breathers d'Akhmediev distincts. Nous avons vu dans la partie précédente qu'il faut utiliser une stimulation exponentielle afin d'envisager une collision. Pour créer nos ondes, nous avons à disposition une source laser à 20 GHz qui nous permet d'avoir un peigne de fréquence avec des composantes tous les 20 GHz. On utilisera alors un système de filtre passe-bande afin de n'avoir que trois fréquences, celle centrale et une de chaque côté de la pompe. Ainsi, notre choix s'est porté sur

un breather à 40 GHz (situé à -40 GHz de la fréquence centrale) et un autre à 60 GHz (situé à +60 GHz de fréquence centrale). Avec ce choix de fréquences de modulation, les paramètres de la fibre optique ainsi que la puissance moyenne utilisée (ici 831 mW), nous avons des breathers ayant un paramètre  $a$  respectivement de 0.34 et de 0.14. Suite à cela, nous réalisons des séries de simulation pour trouver la modulation idéale initiale afin d'avoir une collision efficace et le maximum d'intensité crête. Nous pouvons ainsi simuler les trois filtres passe-bandes en utilisant un champ correspondant directement au résultat que nous donneraient les filtres. Ainsi la condition initiale est la suivante :  $\psi_{in} = 1 + \delta_{mod1} \exp(-i\omega_1 t) + \delta_{mod2} \exp(i\omega_2 t)$ , où 1 et 2 correspondent respectivement à la fréquence de modulation à 40 GHz et 60 GHz. Les amplitudes de modulation sont définies par :  $\delta_{mod1,2} = 1 - A_{1,2}$ , où  $A$  est une valeur comprise entre 0 et 100% qui correspond à l'atténuation de la composante spectrale sur laquelle nous appliquons le filtre, on note que la fréquence centrale n'est pas modifiée. Nous pouvons voir les résultats obtenus pour l'intensité maximale de la collision sur la figure 3.3, où  $A_{1,2}$  est respectivement l'atténuation pour la modulation à 40GHz et à 60GHz.

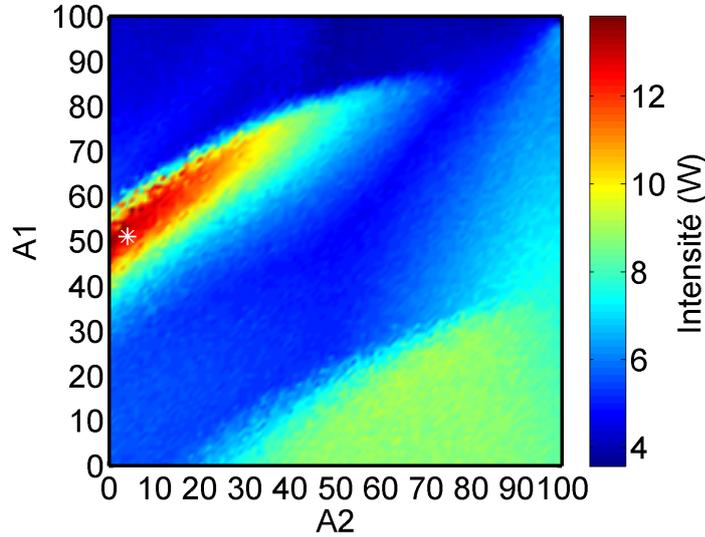


FIGURE 3.3 – Cartographie du maximum d'intensité (propagation sans pertes) en fonction de l'atténuation  $A_1$  et  $A_2$  des filtres passe-bande positionnés à -40GHz et +60GHz de la fréquence centrale.

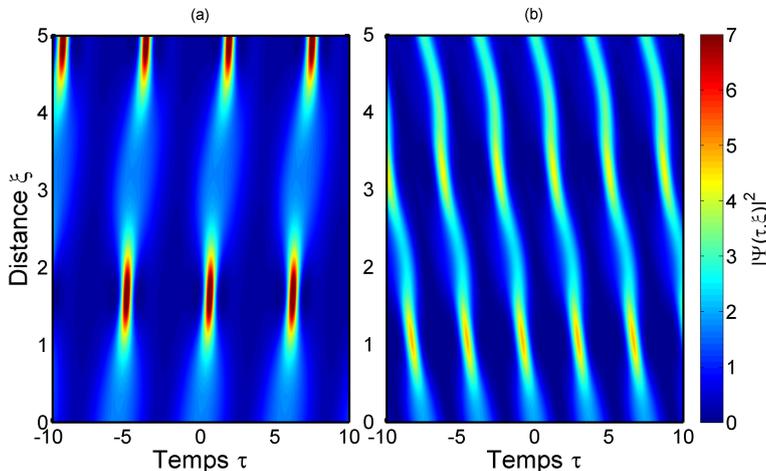


FIGURE 3.4 – Évolution temporelle individuelle des breathers d'Akhmediev à 40 GHz avec un paramètre  $a$  égal à 0.34 (a) et à 60GHz avec un paramètre  $a$  égal à 0.14 (b).

Sur la figure 3.3, nous pouvons voir toute une zone où l'intensité dépasse 9 W, ce qui correspond à une structure qui est supérieure au soliton Peregrine (9x831 mW), mais on va surtout s'intéresser à un point particulier qui est le couple (51%, 4%) symbolisé par l'étoile. Il correspond à une amplitude de modulation de 0.49 et 0.96 pour les breathers à 40 GHz et 60 GHz respectivement. Nous pouvons voir leurs évolutions respectives sur la figure 3.4. Ainsi, nous voyons bien que chacun des deux breathers a une vitesse de groupe différente qui est due au signe opposé de leur fréquence de perturbation relative à l'onde continue.

Afin de créer la collision, il suffit alors de mettre en forme un spectre qui permet la superposition des deux ondes modulées. Nous pouvons ainsi voir la condition initiale que nous utiliserons (voir figure 3.5) afin de générer la solution de second ordre issu de la collision entre deux breathers d'Akhmediev. Sur cette figure, nous pouvons voir le spectre de la condition initiale ainsi que le profil temporel qu'on injectera dans la fibre expérimentalement afin de recréer la collision.

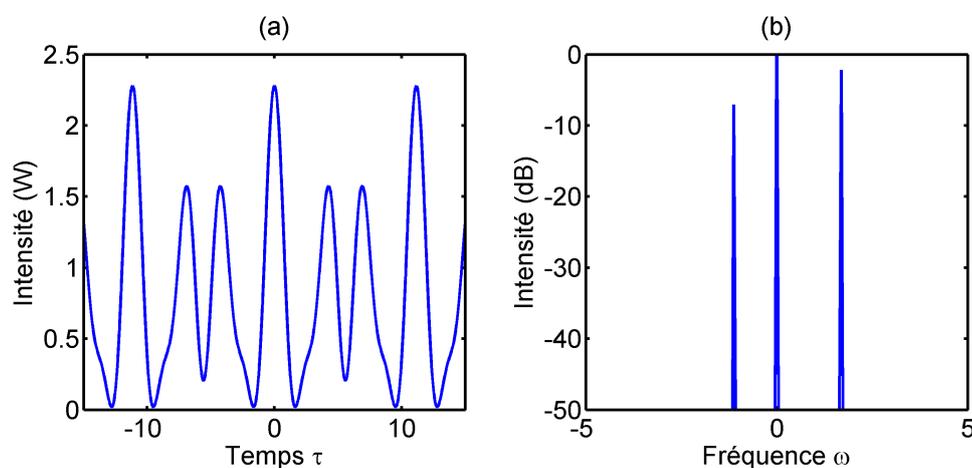


FIGURE 3.5 – Profil temporel (a) et spectral (b) de la condition initiale pour générer une collision de deux breathers.

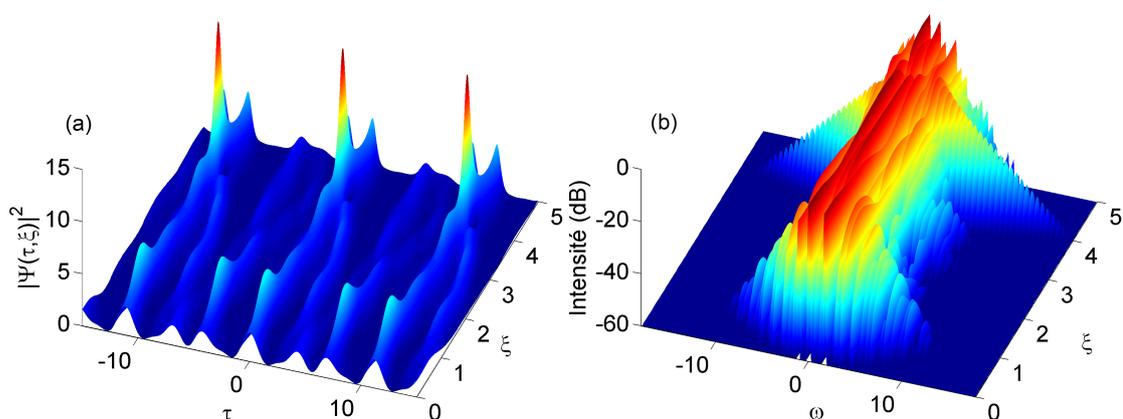


FIGURE 3.6 – Évolution temporelle (a) et fréquentielle (b) de la simulation numérique de la propagation de la condition initiale définie par la figure 3.5.

En utilisant les conditions initiales de la figure 3.5, nous pouvons simuler la propagation de

celle-ci dans une fibre de 5 km (ou 5 longueurs non linéaires, car avec les paramètres utilisés, 1 longueur non linéaire est égale à 1 km). Nous avons l'évolution temporelle et fréquentielle en fonction de la distance de propagation sur la figure 3.6. Les différents profils ont été normalisés afin de pouvoir comparer plus facilement à la théorie. De plus, la puissance a été normalisée par rapport à la puissance moyenne initiale de telle façon que la puissance moyenne soit égale à 1. Sur cette figure, nous pouvons voir également les différents breathers se former et rentrer en collision à une distance  $\xi = 4$ . On peut également voir le spectre qui subit un élargissement important au niveau de la collision des deux breathers. On atteint une valeur d'intensité maximum de 15. Nous pourrions voir les comparaisons des résultats des simulations avec les solutions analytiques dans la dernière partie de ce chapitre (voir partie 3.2).

Dans notre cas, nous avons utilisé des fortes amplitudes pour générer nos breathers rapidement et éviter l'impact néfaste des pertes de propagation. Cependant, d'un point de vue théorique, les breathers se génèrent avec une faible amplitude de modulation, contrairement aux solitons de KM qui eux doivent avoir une forte amplitude de modulation [6].

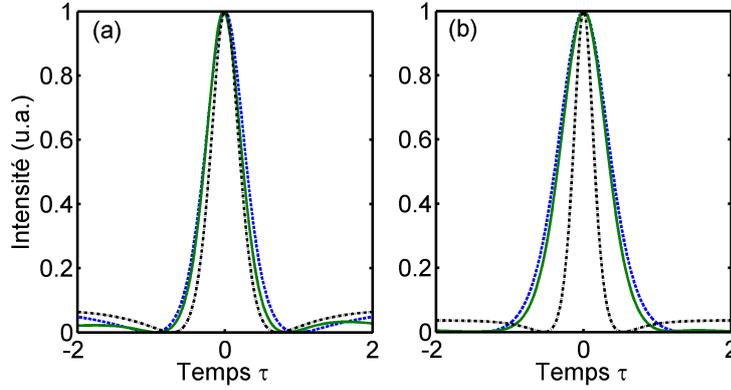


FIGURE 3.7 – Comparaison entre un breather d'Akhmediev (trait discontinu bleu), un soliton KM (trait discontinu noir) et la simulation numérique de notre condition initiale (trait continu vert). (a) Breather à 40 GHz, (b) Breather à 60 GHz.

Nous pouvons voir sur la figure 3.7 une comparaison entre le résultat de notre génération et la solution analytique pour nos paramètres  $a$  choisis et le soliton KM. Pour déterminer le paramètre  $a$  du soliton KM, on utilisera le fait que l'onde initiale doit être de la forme suivante :  $\psi(0, t) = \sqrt{P_0} + \sqrt{P_0}((\sqrt{2a_{KM}} - 1)(1 + \cos(\omega_{mod}t)))$ , ce qui nous permet de définir un minimum obtenu par  $\sqrt{P_0}$  et le maximum obtenu par  $\sqrt{P_0} + 2\sqrt{P_0}(\sqrt{2a_{KM}} - 1)$ , soit une expression pour  $a_{KM}$  de :

$$a_{KM} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_{max} + I_{min}}{2I_{min}} \right)^2 \quad (3.1)$$

où  $I_{min}$  et  $I_{max}$  sont obtenu à l'aide de la condition initiale. Les valeurs de  $a$  ensuite obtenues nous permettent alors d'avoir la solution analytique correspondante (équation (2.12)). On peut également utiliser l'expression analytique suivante :

$$\Psi_{max}(\tau) = 1 + \frac{2(1 - 2a)}{\sqrt{2a} \cosh(\tau/\Delta_\tau) - 1} \quad (3.2)$$

où  $\Delta_\tau = \frac{1}{2\sqrt{(2a-1)}}$ . Avec cette expression analytique, il devient alors aisé de comparer notre breather obtenu par simulation et l'expression analytique au maximum de compression. Étant

donné qu'on souhaite uniquement comparer la forme des différents résultats, les résultats sont normalisés. D'après la figure 3.7, malgré les faibles différences pour le cas 40GHz, nous avons bien des breathers d'Akhmediev et non des solitons KM.

Nous avons pu voir dans cette partie tout d'abord la simulation de deux méthodes d'excitation de breathers, et ensuite le moyen de réaliser une collision entre eux. Les différentes simulations n'ont pas pris en compte les pertes ou diverses modifications possibles telles que la modification de la condition initiale avec la phase, l'incertitude sur les intensités des composantes spectrales ou sur la puissance initiale de notre onde.

### 3.2 Comparaison entre les solutions analytiques et les simulations numériques avec une excitation non idéale

On a pu voir dans le chapitre 2 qu'avec la génération de manière idéale les différences avec les solutions exactes étaient minimales. Cependant, on a également vu qu'il était possible de générer des solutions de manière non idéale. On peut donc voir sur la figure 3.8 la comparaison entre la solution analytique et la génération du breather par stimulation sinusoidale (en haut sur la figure) ou exponentielle (en bas sur la figure).

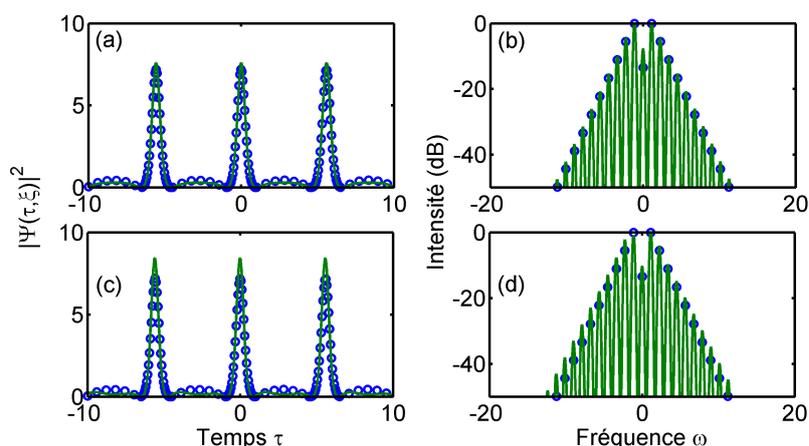


FIGURE 3.8 – Comparaison au maximum de compression du profil temporel (a,c) et spectral (b,d) entre la solution d'un breather d'Akhmediev (en bleu) et la simulation (en vert) avec une perturbation sinusoidale (a,b), la solution d'un breather d'Akhmediev (en bleu) et la simulation (en vert) avec une perturbation exponentielle (c,d).

On peut remarquer que la stimulation sinusoidale donne des résultats très proches de la solution analytique au maximum de compression. Quant à l'utilisation d'une stimulation exponentielle, elle permet d'avoir un spectre légèrement plus large dû à une compression temporelle plus importante (intensité crête supérieure). On remarque aussi que nous avons une légère asymétrie due à la condition initiale. Nous avons également réalisé une superposition des conditions initiales non-idéales menant à la collision de deux breathers d'Akhmediev (voir sur la figure 3.9, pour  $a_1 = 0.34$  et  $a_2 = 0.14$ ).

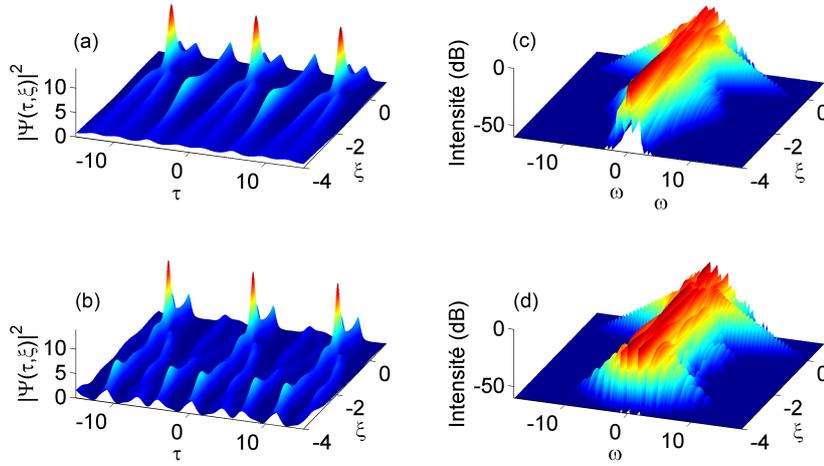


FIGURE 3.9 – Évolution temporelle (a,b) et spectrale (c,d) de la solution analytique (a,c) et de la simulation numérique (b,d) de la collision de deux breathers d'Akhmediev ( $a_1 = 0.34$  et  $a_2 = 0.14$ ).

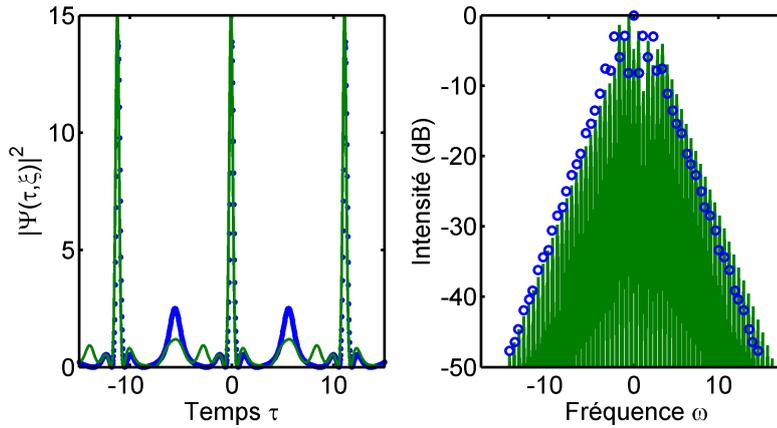


FIGURE 3.10 – Comparaison des profils temporels (a) et des profils spectraux (b) à  $\xi = 0$  de la solution analytique (en bleu) et de la simulation numérique (en vert) de la collision de deux breathers d'Akhmediev ( $a_1 = 0.34$  et  $a_2 = 0.14$ ).

Malgré quelques différences de la dynamique de propagation, nous avons à la position  $\xi = 0$  la génération de la structure de second ordre due à la collision. Nous avons placé l'origine de telle façon à ce qu'elle corresponde au maximum de compression, la condition initiale est alors à  $\xi = -4$ . On remarque qu'au niveau de cette position nous avons également un spectre très large qui est très semblable à la théorie. Avec la figure 3.10, nous nous rendons compte plus facilement des similitudes ou différences entre les profils au niveau de la collision. Nous pouvons voir que le spectre est plus élargi sur l'un des deux côtés (du côté des hautes fréquences), cela s'explique par les conditions initiales asymétriques. De plus, nous pouvons voir que la structure générée possède la même forme surtout au centre, le fond continu est similaire à certains endroits. Le fait que nous ayons pris une condition initiale non idéale ne permet pas d'obtenir avec exactitude la solution de second ordre, mais permet de s'en rapprocher très fortement.

### 3.3 Les différents impacts d'une excitation réaliste des solutions

Lors de nos simulations précédentes, nous n'avons pas pris en compte certains aspects qui pourraient intervenir lors de nos expériences, en effet, les simulations numériques basées sur l'équation de Schrödinger non linéaire sont effectuées sans tenir compte des pertes linéaires de propagation. Les simulations sont généralement présentées dans un cadre idéal, or nous pouvons supposer quelques incertitudes sur les conditions initiales .

#### 3.3.1 L'impact des conditions initiales

L'impact des conditions initiales est crucial, en effet, nous pouvons avoir des modifications du spectre initial, mais aussi de la puissance, ou encore une modification de la phase spectrale, qui peuvent changer toute la dynamique non-linéaire. Dans cette partie, nous étudierons ainsi l'importance des conditions initiales et leurs impacts sur la collision de deux breathers.

##### 3.3.1.1 Impact du spectre initial

Comme nous avons pu voir dans la partie 3.1.2, le choix du point de fonctionnement s'est fait au pour cent près, afin d'optimiser au mieux le maximum d'intensité de la collision entre les deux solutions de premier ordre. Cependant, si on regarde la figure 3.3, on peut voir qu'une assez grande zone permet une collision efficace. En effet, nous pouvons modifier légèrement l'atténuation sans pour autant perdre trop en intensité maximum. Cependant, le fait de changer les atténuations modifie l'efficacité de la collision. Moins elle sera efficace, et moins elle possédera la forme d'une solution de second ordre. C'est pourquoi, expérimentalement, le réglage devra être précis. Nous pouvons voir l'effet de variations de de 10% des raies spectrales à la figure 3.11 par rapport à la collision déterminée précédemment. Malgré la propagation similaire sur les 2 premières longueurs non-linéaires, nous avons ensuite des évolutions qui sont assez différentes pour les deux collisions peu efficaces. De plus, l'apparition de la structure résultant de l'interaction des breathers apparait soit beaucoup plus loin ou un peu en avance (soit  $\xi_{collision} + 0.8$  ou  $\xi_{collision} - 0.2$ ) par rapport à la distance de collision prévue. On peut voir que l'impact du réglage de nos filtres peut entrainer la non-observation du phénomène de collision entre deux breathers d'Akhmediev.

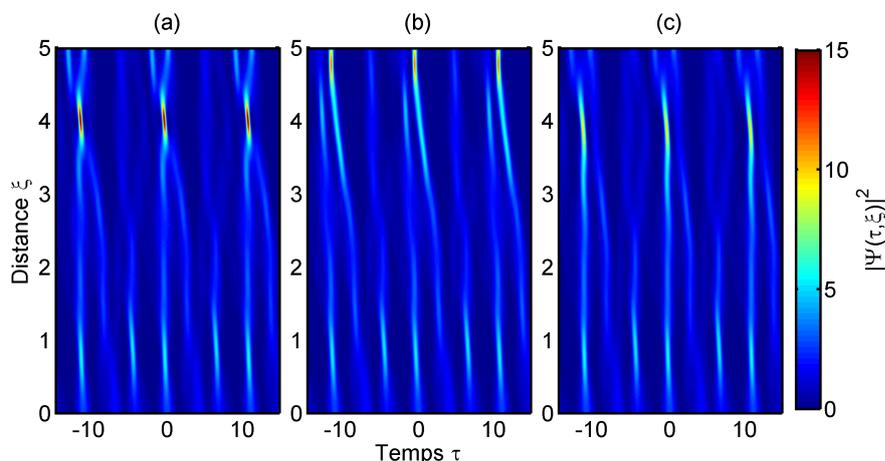


FIGURE 3.11 – Simulation numérique de la propagation de deux breathers ( $a_1 = 0.34$  et  $a_2 = 0.14$ ) avec différentes atténuations sur les composantes spectrales. (a) 51% - 4%. (b) 61% - 4%. (c) 51% - 14%.

### 3.3.1.2 Impact de la puissance initiale

Dans la mise en forme du spectre optique, la puissance moyenne initiale est un autre paramètre important. En effet, les conditions de la collision concernent deux breathers bien spécifiques, or le paramètre  $a$  est aussi déterminé par la puissance moyenne initiale.

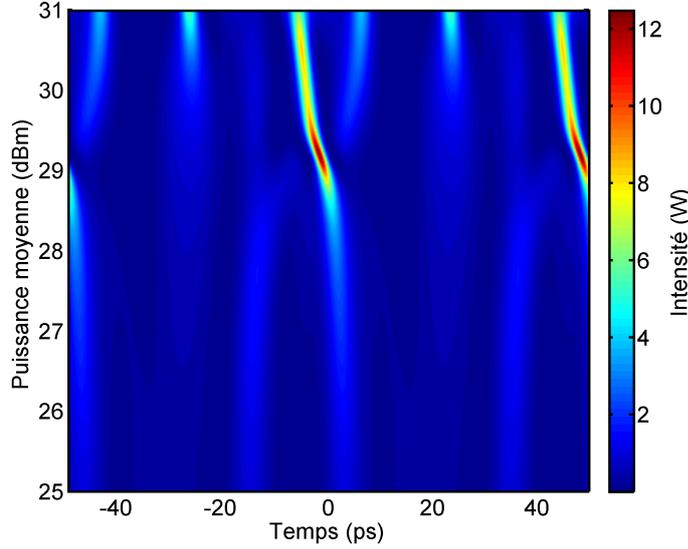


FIGURE 3.12 – Évolution du profil temporel à  $z=4$  km en fonction de la puissance moyenne initiale en dBm.

Toutefois, comme nous avons pu le voir dans la partie de la génération des solutions de second ordre, nous devons fixer les paramètres  $a$  de nos breathers et ensuite rechercher la condition initiale afin d'avoir la collision. Seulement, si la puissance initiale est modifiée, on aura alors une modification des paramètres  $a$  et ainsi une altération de la collision entre les structures. On peut ainsi voir sur la figure 3.12 l'évolution numérique du profil temporel à 4 km en fonction de la puissance initiale. Sur cette figure, on distingue clairement que la collision est très efficace seulement à 29.2 dBm ce qui correspond à 831 mW. Le maximum d'intensité est donc obtenu pour  $15 \times 0.831 W \simeq 12.5 W$ , 15 correspondant au maximum d'intensité normalisé.

### 3.3.1.3 Impact de la phase spectrale initiale relative

De même, lors de la collision de deux breathers d'Akhemediev, la phase spectrale va jouer un rôle majeur puisque celle-ci peut annihiler ou non la collision. On va alors modifier la phase spectrale en lui appliquant une modification avec le filtre programmable uniquement sur une seule composante (celle à -40 GHz de la fréquence de la pompe). Nous pouvons voir sur la figure 3.13 que la collision n'existe que sous certaines conditions.

La périodicité de la collision est donnée par l'expression suivante :  $\Delta_\phi = \frac{2k\pi|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_2}$ . Où  $k$  est un entier et  $\omega_1$  correspond à la fréquence de modulation sur laquelle nous modifions la phase spectrale, et  $\omega_2$  est la deuxième fréquence de modulation qui n'est pas impactée. Ainsi, la périodicité afin de retrouver la collision est de  $\frac{2k\pi}{3}$ . On peut voir sur la figure 3.13, que nous retrouvons la collision deux fois dans l'intervalle de  $2\pi$ , soit une période de  $\frac{2\pi}{3}$ .

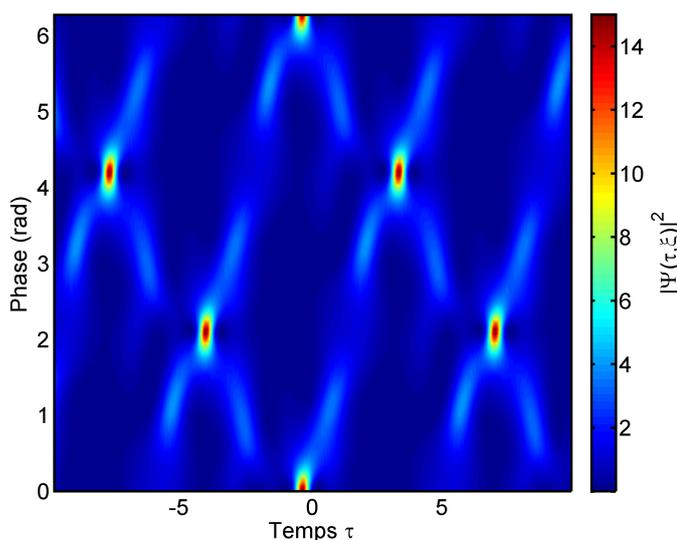


FIGURE 3.13 – Évolution du profil temporel à  $\xi = 4$  (ou 4 km dans notre cas) en fonction de la phase appliquée sur la composante à -40 GHz de la fréquence pompe.

### 3.3.2 L'impact des pertes

Les pertes jouent un rôle néfaste sur la génération de solitons sur fond continu, et quelle que soit la méthode d'excitation. En effet, les pertes ont un impact très fort sur la distance de compression maximale du breather, et sur leur propagation en générale. Comme on peut voir sur la figure 3.14 (représentation avec des paramètres normalisés), nous avons à gauche la simulation numérique de la propagation afin d'obtenir la collision sans perte, et à droite lorsque nous prenons en compte les pertes. Nous remarquons la perte d'intensité lumineuse lors de la collision, celle-ci n'est plus aussi efficace dû à la propagation modifiée des breathers.

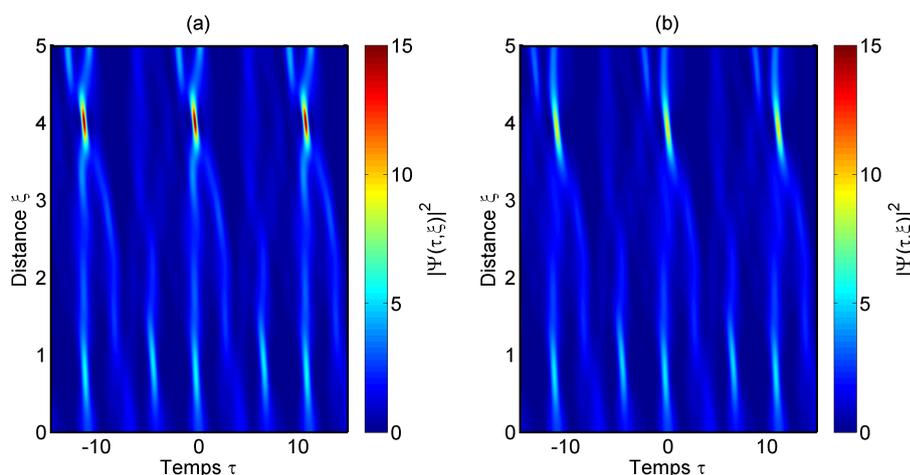


FIGURE 3.14 – Simulation numérique de la collision dans le domaine temporel sans pertes (a), avec pertes (b).

Nous devons alors modifier les différentes valeurs d'atténuation des filtres passe-bandes qui sont situés à -40 GHz et +60 GHz de la composante centrale afin de compenser l'impact des pertes et donc optimiser la collision à nouveau. Nous pouvons voir le résultat du maximum d'intensité de la collision en fonction des différentes atténuations sur les filtres sur la figure

3.15. Nous pouvons déterminer un nouveau point de fonctionnement qui est montré par l'étoile blanche qui est positionnée à 46% - 4%. Cela nous donne alors des amplitudes de modulation de 0.54 - 0.96 pour les modulations à 40 GHz et à 60 GHz.

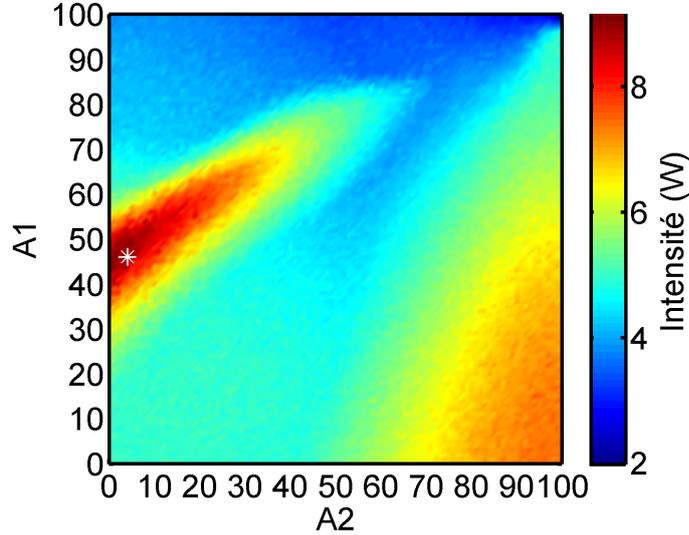


FIGURE 3.15 – Cartographie du maximum d'intensité avec les pertes en fonction de l'atténuation  $A_1$  et  $A_2$  des filtres passe-bande positionnés à -40GHz et +60GHz de la fréquence centrale.

En utilisant les paramètres déterminés à partir de la figure 3.15, nous pouvons effectuer une nouvelle simulation de propagation (voir figure 3.16(b)). Nous comparons le résultat avec les anciens paramètres.

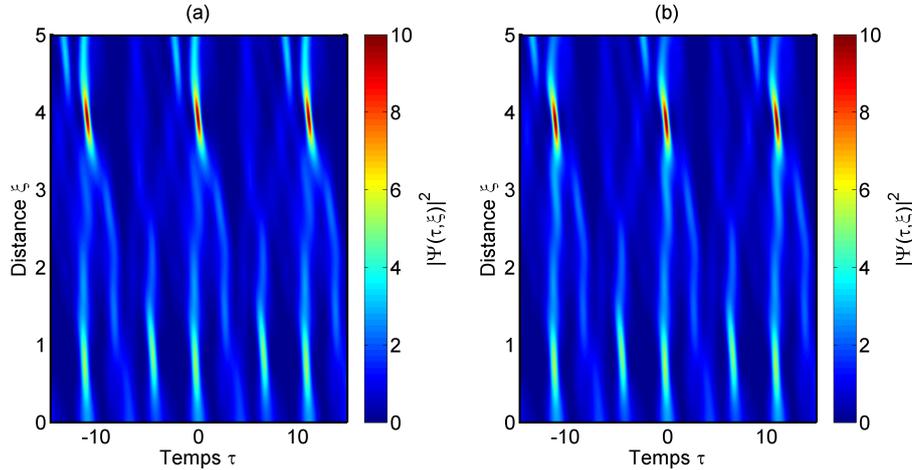


FIGURE 3.16 – Simulation numérique de la propagation avec perte en prenant 51% - 4% (a) et 46% - 4% (b) d'atténuation sur les filtres situés à -40GHz et à 60GHz.

Nous pouvons voir sur cette figure que la collision est de nouveau efficace avec les nouveaux paramètres. La collision s'effectue légèrement plus tôt dans la fibre optique, au lieu d'être à  $\xi = 4$ , elle est à  $\xi = 3.8$ . Nous pouvons voir sur la figure 3.17 la comparaison des profils temporels (les profils d'intensité sont normalisés par rapport à la puissance moyenne initiale) entre les deux couples d'atténuations sur les filtres. Le premier correspond aux paramètres 51% - 4% d'atténuations qui sont ceux que nous avons choisis sans les pertes. Quant au second jeu 46% - 4%, il correspond à la prise en compte des pertes.

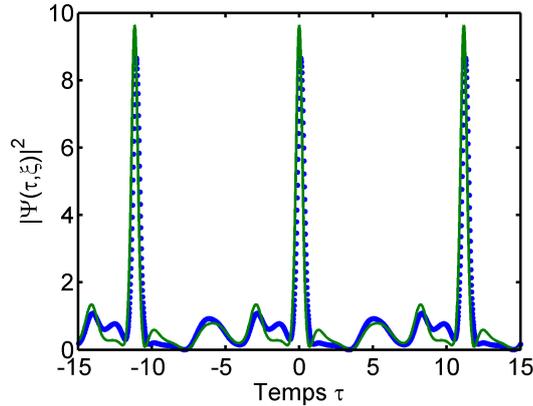


FIGURE 3.17 – Comparaison des profils temporels de la collision à  $\xi = 3.8$ . En bleu, les filtres à 51% - 4%. En vert, les filtres à 46% - 4%.

Cette modification permet d'obtenir une collision beaucoup plus efficace. Nous avons pu voir que les pertes ne sont pas du tout négligeables, mais permettent malgré tout d'observer les phénomènes voulus et d'envisager confortablement les expériences.

### 3.4 Expériences sur l'excitation non-idéale des solitons sur fond continu

#### 3.4.1 Le montage expérimental

Les simulations précédentes de l'équation de Schrödinger non-linéaire ont permis de concevoir des expériences où le phénomène de collision entre deux breathers d'Akhmediev peut être testé pour la première fois.

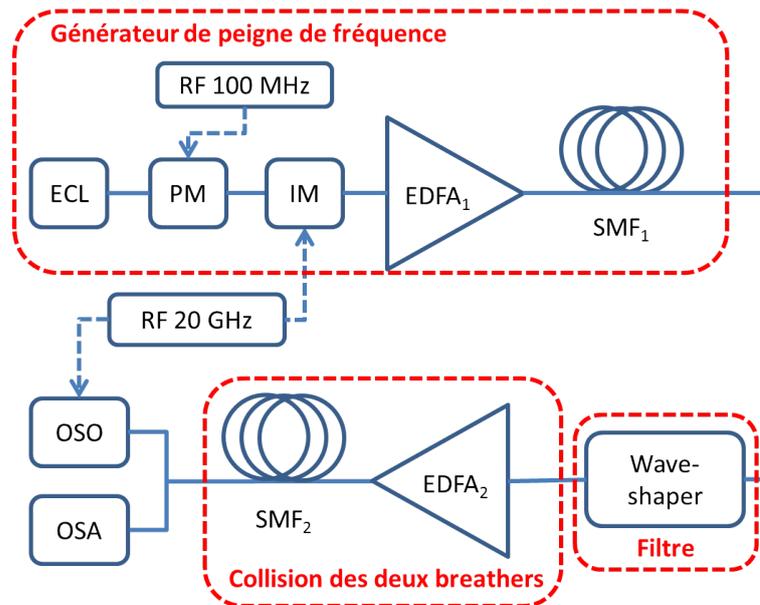


FIGURE 3.18 – Montage de la collision de deux breathers d'Akhmediev. Avec 3 étages : Générateur de peigne de fréquence, filtre, propagation non linéaire. *ECL* : Diode laser externe, *PM* : modulateur de phase, *IM* : modulateur d'intensité, *EDFA* : amplificateur fibre dopée Erbium, *SMF* : fibre monomode (SMF-28), *Waveshaper* : filtre optique programmable, *OSO* : oscilloscope à échantillonnage optique, *OSA* : analyseur de spectre optique, *RF* : signal radiofréquence.

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 3.18 avec des composants des télécommunications optiques. Ce type de montage a déjà été éprouvé lors d'expériences sur les solitons sur fond continu [5, 6, 8, 21]. En particulier, nous avons utilisé la mise en forme simple d'un peigne de fréquence optique pour synthétiser des conditions initiales avec des modulations choisies de l'onde continue. Cela correspond à une superposition de trois diodes lasers avec des longueurs d'onde différentes. Le peigne de fréquence initial est généré par l'utilisation d'une source d'impulsions ayant pour taux de répétition 20 GHz centré à 1550 nm. Nous aurons recours à la même source laser que dans le chapitre 2, nous utilisons la compression non-linéaire d'un battement sinusoïdal dans une fibre optique standard des télécommunications (SMF-28) [22]. Le spectre d'une telle source d'impulsions peut être approché comme une série de fonctions de Dirac séparées par la fréquence de répétition. La largeur de l'enveloppe du peigne dépend de la compression non-linéaire de la première onde continue modulée. On utilisera un filtre optique programmable, ici dans ce cas présent, nous contrôlerons les amplitudes de nos raies spectrales, et également de la phase relative entre les raies. Le filtre optique nous permettra de garder uniquement la fréquence pompe ainsi que les fréquences situées à -40 GHz et 60 GHz de la fréquence centrale. Nous obtenons ainsi une superposition de deux exponentielles complexes perturbant l'onde continue pompe. Une fois la génération de la condition initiale effectuée, nous utilisons un amplificateur à fibre dopée Erbium (EDFA) qui permet d'amplifier la puissance moyenne de l'onde continue modulée jusqu'à 1.1 W. On note que pour atténuer les effets de la rétrodiffusion Brillouin, un modulateur de phase est déjà utilisé dans la source laser permettant de générer le peigne de fréquence. Enfin, comme dans le chapitre 2, les profils d'intensités sont caractérisés par un oscilloscope à échantillonnage optique ultrarapide (OSO) avec une résolution inférieure à la picoseconde et un analyseur de spectre optique (OSA) avec une résolution de 2.5 GHz. L'onde modulée et amplifiée est alors injectée dans une fibre optique standard (SMF-28) avec une dispersion de vitesse de groupe  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2.\text{km}^{-1}$ , un coefficient non linéaire  $\gamma = 1.2 \text{ W}^{-1}.\text{km}^{-1}$ , et les pertes de la fibre  $\alpha_{dB} = 0.2 \text{ dB}.\text{km}^{-1}$ .

### 3.4.2 Mesures et observations expérimentales

Nous avons effectué des simulations numériques intensives afin de déterminer tous les paramètres du champ initial  $A(z = 0, t)$  et la distance de collision. Ainsi, nous avons pu déterminer la condition initiale comme étant la superposition de deux exponentielles complexes dont le champ de l'entrée est  $A(z = 0, t) = \sqrt{P_0} [1 + \delta_1 \exp(i\omega_{mod,1}t) + \delta_2 \exp(i\omega_{mod,2}t)]$ . Tout comme dans le chapitre 2, nous utilisons le même formalisme afin de passer des dimensions avec des unités physiques à des dimensions normalisées. Afin d'adapter au mieux les résultats des simulations, nous avons utilisé l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée (GNLSE, dont nous avons pu voir une description dans le chapitre 1, partie 1.2.2.2), voir l'équation 3.3, car elle est connue pour fournir une description précise de la propagation de l'enveloppe du champ  $A(z, t)$  dans les fibres optiques [23].

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2}A - i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + i\gamma \left(1 + \frac{i}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(A(z, t) \int_{-\infty}^{+\infty} R(t')|A(z, t-t')|^2 dt'\right) \quad (3.3)$$

Dans cette équation, nous utilisons également le terme de troisième ordre de dispersion ( $\beta_3 = 0.12 \text{ ps}^3.\text{km}^{-1}$ ). Nous pouvons noter que les simulations de l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée permet de prendre en compte des conditions expérimentales supplémentaires, telles que l'émission spontanée de l'amplificateur avec le bruit phénoménologique d'un photon par mode pour modéliser le bruit quantique.

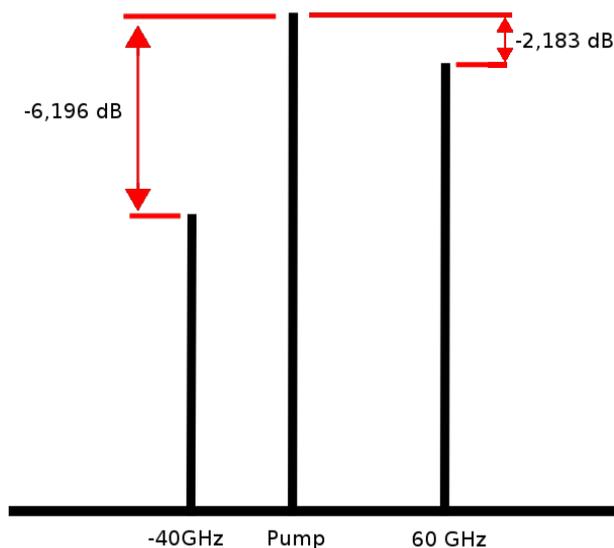


FIGURE 3.19 – Schéma des conditions initiales dans le domaine spectral.

Nous avons vérifié que seul l'effet des pertes de la fibre affecte de manière significative les résultats précédents avec le modèle standard de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Nous rappelons que nous avons utilisé les paramètres suivants dans nos simulations et dans les expériences : la puissance moyenne  $P_0 = 0.83 \text{ W}$ , les bandes latérales :  $\frac{\omega_{mod,1}}{2\pi} = -40 \text{ GHz}$  et  $\frac{\omega_{mod,2}}{2\pi} = 60 \text{ GHz}$  (soit des paramètres généralisés  $a_1 = 0.34$  et  $a_2 = 0.14$ ). Ainsi, d'après nos simulations, et l'étude de l'impact des pertes, nous pouvons déterminer l'amplitude de modulation de nos bandes latérales, soit  $\delta_1 = 0.54$  et  $\delta_2 = 0.96$ , ces conditions initiales sont alors visibles sur le schéma de la figure 3.19. Enfin la collision s'effectue à  $z = 3.8 \text{ km}$ . Par la suite, les profils temporels et spectraux seront étudiés à la sortie d'un segment de fibre de 3.8 km.

### 3.4.2.1 Breathers d'Akhmediev

La première étape dans cette expérience a été de vérifier que des breathers d'Akhmediev étaient générés indépendamment lorsque nous utilisons uniquement l'une des deux fréquences de perturbation. Sur la figure 3.20, nous présentons les profils temporels d'intensité de sortie enregistrés. Sur la figure 3.20(a), la génération du breather d'Akhmediev ( $a = 0.34$ ), est en très bon accord avec la simulation numérique de l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée. Il en est de même pour le breather d'Akhmediev ( $a = 0.14$ ) que nous pouvons voir sur la figure 3.20(b).

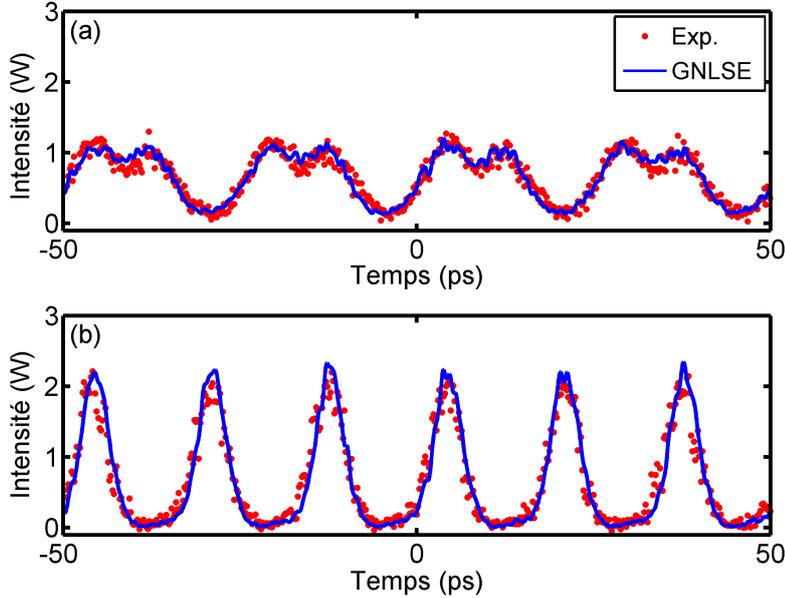


FIGURE 3.20 – Profils temporels d'intensité obtenus après 3.8 km de propagation pour les breathers d'Akhmediev indépendants. (a)  $a_1 = 0.34$ . (b)  $a_2 = 0.14$ . Profils expérimentaux (points rouges) comparés aux simulations numériques de l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée (ligne bleue).

L'utilisation d'une perturbation de type exponentielle complexe permet ainsi de générer les breathers d'Akhmediev tout autant qu'avec une perturbation sinusoidale. Nous remarquons que l'intensité de nos breathers d'Akhmediev, lorsqu'il n'y a aucune interaction entre les deux, ont des intensités crêtes "faibles".

### 3.4.2.2 La collision des breathers d'Akhmediev

Ainsi, nous avons vu qu'afin de créer une intensité crête nettement supérieure à celle que nous pouvons obtenir avec des solutions de premier ordre, il faut faire intervenir leur interaction et notamment un processus de collision synchronisé. La figure 3.21(a,c) présente les conditions initiales d'excitation de la collision de deux breathers. Les mesures des profils temporel et spectral d'intensité sont effectuées en sortie de fibre optique à  $z = 3.8 \text{ km}$ , ces résultats sont donnés sur la figure 3.21(b,d). Nous pouvons voir que nous avons un très bon accord entre nos expériences et nos simulations qui ont permis d'établir la distance de collision et de prédire la forme de la structure résultante. On voit ainsi clairement des pics d'intensité beaucoup plus importants parmi tout le "fond continu", on a aussi une intensité crête qui est beaucoup plus élevée qu'avec des breathers d'Akhmediev simples. On note également que la périodicité du phénomène de collision est liée à la différence entre les fréquences des deux breathers d'Akhmediev, ici,  $T_{collision} = 2T_{mod,1} = 3T_{mod,2} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ ns}$  soit  $50 \text{ ps}$ .

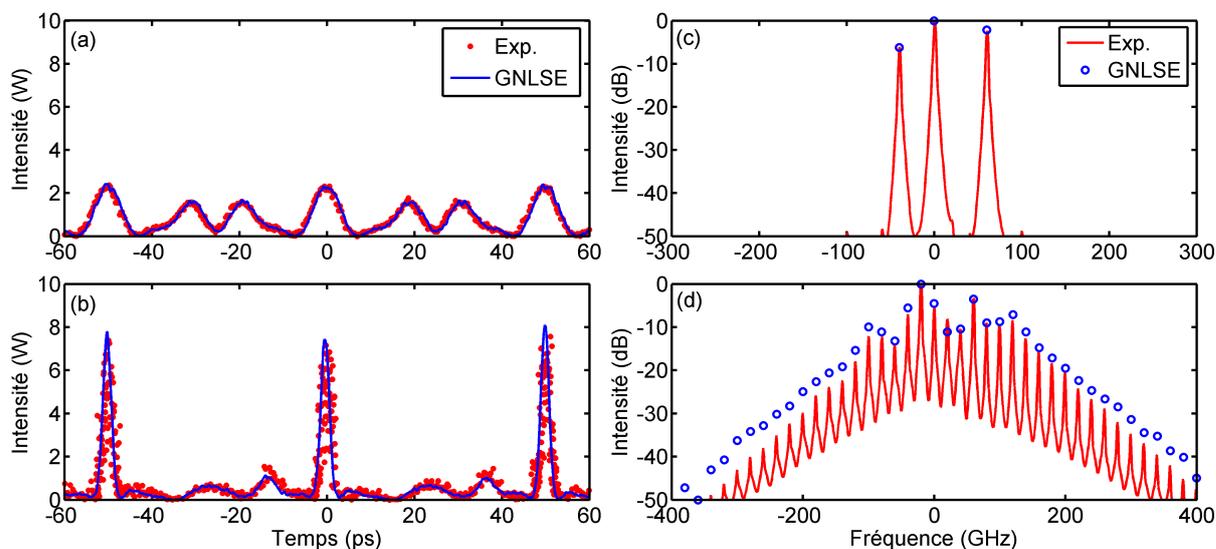


FIGURE 3.21 – Profils d'intensité temporels (a,b) et spectraux (c,d) obtenus avant et après propagation dans la fibre. (a,c) État initial pour les deux breathers d'Akhmediev ( $a_1 = 0.34$  et  $a_2 = 0.14$ ). (b,d) Onde géante de la collision à 3.8 km. Profils expérimentaux (points/ligne rouge) comparés aux simulations numériques de l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée (ligne/cercle bleu) correspondant.

Afin d'évaluer l'observation de la collision de deux breathers d'Akhmediev, nous allons comparer les mesures expérimentales avec la théorie en utilisant des variables normalisées. Nous les comparons également aux simulations sans pertes de l'équation de Schrödinger non-linéaire standard. Ainsi, comme nous avons pu voir précédemment, la distance de collision prédite est de  $\xi_{collision,NLS} = 4$ , la distance de la collision expérimentale est  $\xi = z\gamma P_0 = 3.8$ . La distance entre les deux est relativement proche, ce qui permet de comparer les résultats. Ainsi, nous pouvons voir sur la figure 3.22(a), les profils temporels normalisés  $|\Psi(\xi, \tau)|^2$ , où  $\xi$  correspond à la distance où a lieu la collision. Outre la présence de lobes latéraux secondaires attribués à une excitation non-idéale des breathers d'Akhmediev, la principale différence avec la solution idéale est la puissance crête maximale. Un meilleur accord serait possible si on pouvait exciter la collision sur une distance de propagation beaucoup plus courte. En effet, si nous enlevons le terme de perte dans l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée nous retrouvons les résultats des simulations qui ont été faites à partir du modèle standard. Nous notons que la périodicité de la collision dans le temps est très bien prédite par la théorie. De plus, sur la figure 3.22(b), des mesures expérimentales dans le domaine spectral (en ligne rouge) ont été effectuées et sont comparées aux simulations numériques (cercles bleus) correspondant à une échelle logarithmique, nous pouvons voir qu'il y a un très bon accord. Nous avons également une comparaison avec le spectre théorique de la solution (ligne grise), cette solution reproduit bien la décroissance des intensités des bandes latérales mesurée sur le côté des hautes fréquences. L'origine des divergences sur les basses fréquences est l'excitation non-idéale et asymétrique de nos breathers d'Akhmediev. Avec des conditions idéales, nos simulations numériques et nos expériences permettent de retrouver parfaitement la solution théorique (voir chapitre 2).

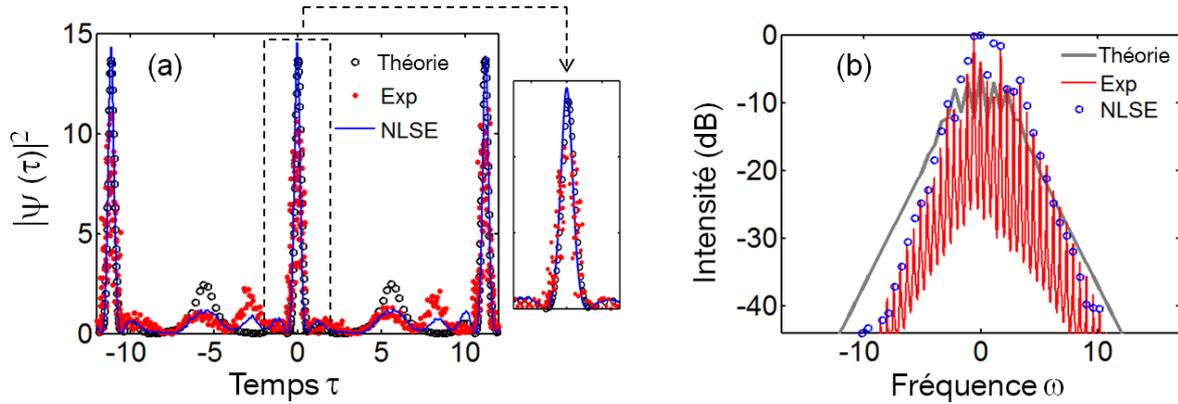


FIGURE 3.22 – (a) Comparaison entre les profils de la collision expérimentale (points rouges), théorie idéale (cercles noirs), simulation de l'équation de Schrödinger non-linéaire (ligne bleue). À noter qu'ici le profil expérimental a été normalisé à la puissance moyenne de sortie. Le pic maximum expérimental atteint 11, comme le montre le zoom sur le pic principal. (b) Comparaison entre les spectres expérimental (rouge), numérique (cercle bleu), et théorique de la solution de second ordre correspondante (en gris).

Les résultats que nous avons ici sont très importants, car malgré des pertes, une condition initiale non-idéale et asymétrique, nous générons de structure d'onde complexe de second ordre. De plus, cela confirme l'existence possible de structures ayant une puissance crête nettement supérieure à la puissance crête des solutions sur fond continu de premier ordre ( $|\Psi_{max}|^2 \geq 9$ ).

### 3.4.2.3 Impact des conditions initiales

Dans les parties précédentes, nous avons pu voir les résultats d'une collision synchronisée entre deux breathers d'Akhmediev. En effet, l'intensité maximale n'est obtenue que lorsque les maximums locaux coïncident dans le plan  $(\xi, \tau)$  [2]. Deux caractéristiques des breathers d'Akhmediev excités sont connues pour être cruciales, leur vitesse et la différence de phase entre les deux. Le contrôle de la différence de vitesse est réalisé par l'ajustement de l'amplitude et de la fréquence des perturbations initiales. Ici, dans cette partie, nous allons étudier l'impact des paramètres initiaux tels que la puissance moyenne initiale et la différence de phase entre les deux breathers.

#### 3.4.2.3.1 Impact de la puissance moyenne

Tout d'abord, nous modifions la puissance moyenne d'entrée  $P_0$  de l'onde bi-modulée initiale autour de la puissance moyenne optimale utilisée avant. Cela a pour effet de modifier les paramètres généraux  $a_1$  et  $a_2$  et ainsi que la collision entre les deux breathers d'Akhmediev qui ne se produit plus efficacement. On peut voir l'évolution du profil temporel à 3.8 km en fonction de la puissance injectée (allant de 316 mW (25 dBm) à 1.1 W (30.5 dBm)) sur la figure 3.23(b,c), où nous avons l'évolution expérimentale sur la figure (b) et la simulation sur la figure (c). On peut alors répertorier la puissance crête maximum en fonction de la puissance moyenne d'entrée, ce résultat est représenté sur la figure 3.23(a), nous obtenons un très bon accord entre l'expérience et les simulations. Cette variation de la puissance d'entrée de l'onde bi-modulée conduit à une modification des distances de compression des breathers d'Akhmediev qui sont excités, et provoque alors un déplacement des maximums localisés dans le plan  $(\xi, \tau)$ . Même si les breathers peuvent interagir, nous avons pu voir dans le chapitre 2 (figure 2.12) que la modification des paramètres généraux ne donne pas nécessairement une puissance crête aussi élevée que celle que nous obtenons avec la puissance moyenne optimale (831 mW).

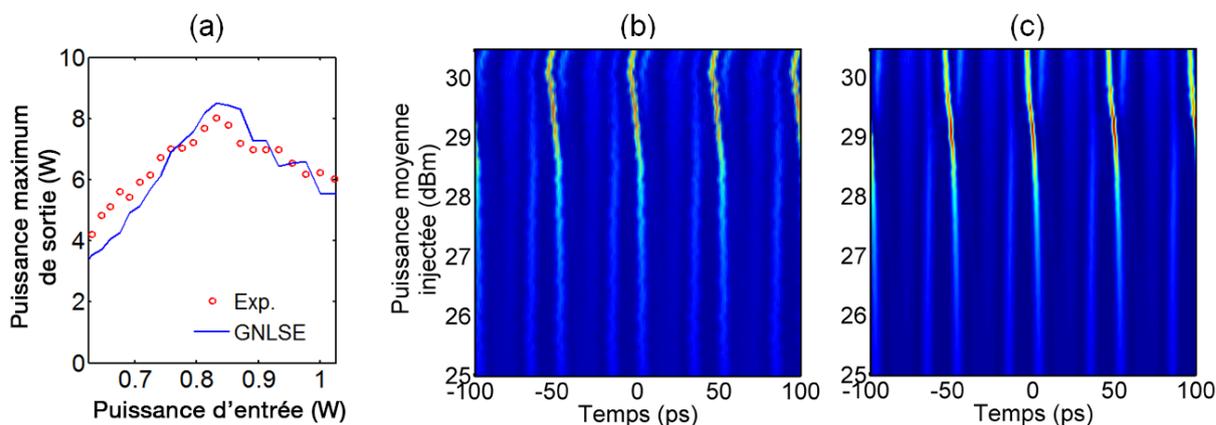


FIGURE 3.23 – (a) Puissance maximum du profil temporel d'intensité enregistré à la sortie de la fibre en fonction de la puissance moyenne d'entrée de l'onde bimodulée. (b,c) Évolution du profil d'intensité temporel en fonction de la puissance moyenne initiale. (b) Expériences. (c) Simulation de l'équation de Schrödinger non-linéaire.

### 3.4.2.3.2 Impact de la phase spectrale

Outre le choix judicieux de la puissance d'entrée et des propriétés des perturbations initiales décrites ci-dessus, le dispositif expérimental permet de contrôler les phases spectrales de nos perturbations exponentielles,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , comme suit :  $A(z=0, t) = \sqrt{P_0}(1 + \delta_1 \exp(i\omega_{mod,1}t + i\phi_1) + \delta_2 \exp(i\omega_{mod,2}t + i\phi_2))$ . Ainsi, une fois qu'on fixe la phase d'un des deux breathers d'Akhmediev, on modifie la différence de phase relative  $\Delta_\phi = |\phi_1 - \phi_2|$ , pouvant empêcher ainsi la collision dite "synchronisée". Les simulations numériques correspondantes en utilisant l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée (voir figure 3.24(b)) permettent de confirmer nos mesures expérimentales (voir figure 3.24(a)). Nous représentons les profils d'intensité dans le domaine temporel à la distance de collision ( $z=3.8$  km) en fonction de la phase  $\phi_1$  qui varie dans la gamme  $0$  à  $2\pi$ , tandis qu'on fixe  $\phi_2 = 0$ . Nous pouvons noter que la collision émerge de manière périodique avec  $\Delta_\phi$ , comme nous avons pu voir avec nos études numériques préliminaires.

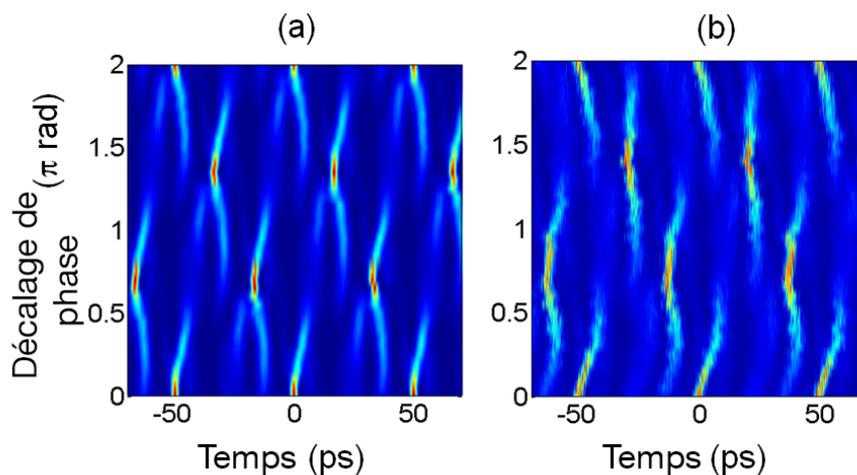


FIGURE 3.24 – Évolution du profil d'intensité temporel en fonction de la différence de phase initiale  $\Delta_\phi$  entre les deux breathers d'Akhmediev. (a) Simulation avec les équations de Schrödinger non linéaire. (b) Expériences.

Ces résultats permettent de confirmer que la synchronisation de la collision entre deux breathers d'Akhmediev dépend très fortement de la différence de phase relative des fréquences de perturbation initiales. En effet, nous sommes capables de supprimer totalement le phénomène de collision et ainsi éviter l'émergence d'un pic de forte intensité en introduisant seulement un déphasage entre les breathers d'Akhmediev.

## 3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons pu voir la génération déterministe de solitons sur fond continu de premier ordre et ensuite de second ordre grâce à un processus de collision. Dans une première partie, les simulations numériques ont permis de vérifier la faisabilité de l'expérience qui a été aussi confrontée aux solutions analytiques. Afin d'être encore plus proches de ce qui pourrait se passer lors des expériences, nous avons analysé différents impacts et perturbations de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Ainsi, nous avons étudié l'impact des conditions initiales (spectre initial, puissance moyenne, phase relative sur les composantes spectrales), et des pertes. Enfin dans la dernière partie, nous avons présenté les premières mesures et observations expérimentales de la collision de breathers d'Akhmediev. Nous avons vérifié l'impact de quelques incertitudes sur les conditions initiales qui mène à la disparition de la collision. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment on peut étendre la génération d'ondes localisées dans le plan  $(\xi, \tau)$  à un système vectoriel.

---

## Références du chapitre 3

- [1] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev. Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*, 106(20) :2–5, 2011.
- [2] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev. Super Rogue Waves : Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves. *Physical Review X*, 2(1) :2–7, 2012.
- [3] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, a. Slunyaev, a. Sergeeva, E. Pelinovsky, and N. Akhmediev. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 86(5) :1–6, 2012.
- [4] H Bailung, S K Sharma, and Y Nakamura. Observation of Peregrine Solitons in a Multi-component Plasma. *Physical Review Letters*, 255005(December) :1–9, 2011.
- [5] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, and J. M. Dudley. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics. *Nature Physics*, 6(10) :790–795, 2010.
- [6] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, G. Genty, B. Wetzels, N. Akhmediev, F. Dias, and J. M. Dudley. Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre. *Scientific Reports*, 2 :1–5, 2012.
- [7] J M Dudley, G Genty, F Dias, B Kibler, and N Akhmediev. Modulation instability, Akhmediev Breathers and continuous wave supercontinuum generation. *Optics express*, 17(24) :21497–21508, 2009.
- [8] Kamal Hammani, Bertrand Kibler, Christophe Finot, Philippe Morin, Julien Fatome, John M Dudley, and Guy Millot. Peregrine soliton generation and breakup in standard telecommunications fiber. *Optics letters*, 36(2) :112–114, 2011.
- [9] Yuri S Kivshar and Govind Agrawal. *Optical solitons : from fibers to photonic crystals*. Academic press, 2003.
- [10] Victor I. Shrira and Vladimir V. Geogjaev. What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? *Journal of Engineering Mathematics*, 67(1) :11–22, 2010.
- [11] A. Calini and C. M. Schober. Homoclinic chaos increases the likelihood of rogue wave formation. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics*, 298(5-6) :335–349, 2002.
- [12] Adrian Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and Nail Akhmediev. Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 81(4) :1–8, 2010.
- [13] Bertrand Kibler, Kamal Hammani, Claire Michel, Christophe Finot, and Antonio Picozzi. Rogue waves, rational solitons and wave turbulence theory. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics*, 375(35) :3149–3155, 2011.
- [14] M. Onorato, a. R. Osborne, M. Serio, and S. Bertone. Freak waves in random oceanic sea states. *Physical Review Letters*, 86(25) :5831–5834, 2001.
- [15] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, a. Montina, and F. T. Arecchi. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Physics Reports*, 528(2) :47–89, 2013.

- [16] M. Onorato, a. R. Osborne, M. Serio, L. Cavaleri, C. Brandini, and C. T. Stansberg. Extreme waves, modulational instability and second order theory : wave flume experiments on irregular waves. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 25(5) :586–601, 2006.
- [17] Miguel Onorato, Davide Proment, Günther Clauss, and Marco Klein. Rogue Waves : From Nonlinear Schrödinger Breather Solutions to Sea-Keeping Test. *PLoS ONE*, 8(2) :1–5, 2013.
- [18] N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, and a. Ankiewicz. Extreme waves that appear from nowhere : On the nature of rogue waves. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics*, 373(25) :2137–2145, 2009.
- [19] Kamal Hammani, Benjamin Wetzel, Bertrand Kibler, Julien Fatome, Christophe Finot, Guy Millot, Nail Akhmediev, and John Dudley. Spectral dynamics of modulation instability described using akhmediev breather theory. *Optics letters*, 36(11) :2140–2142, 2011.
- [20] N Akhmediev and VI Korneev. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear schrödinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 69(2) :1089–1093, 1986.
- [21] Miro Erkintalo, Kamal Hammani, Bertrand Kibler, Christophe Finot, Nail Akhmediev, John M. Dudley, and Goëry Genty. Higher-order modulation instability in nonlinear fiber optics. *Physical Review Letters*, 107(25) :14–18, 2011.
- [22] Ibrahim El Mansouri, Julien Fatome, Christophe Finot, Michel Lintz, and Stéphane Pitois. All-fibered high-quality stable 20-and 40-ghz picosecond pulse generators for 160-gb/s otdm applications. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 23(20) :1487–1489, 2011.
- [23] A Mussot, A Kudlinski, M Kolobov, E Louvergneaux, M Douay, and M Taki. Observation of extreme temporal events in CW-pumped supercontinuum. *Optics express*, 17(19) :17010–17015, 2009.

CHAPITRE

— 4 —

INSTABILITÉ DE MODULATION  
VECTORIELLE ET ONDES  
SCÉLÉRATES DANS UN SYSTÈME  
FIBRÉ DE TYPE MANAKOV



Dans les chapitres précédents, nous avons pu voir la génération de structure de type onde scélérate complexe (de second ordre). Cependant il existe des systèmes permettant une génération de structure beaucoup plus complexe. En effet, dans les systèmes précédents la variable de polarisation n'était pas prise en compte. Afin de prendre en compte cette dernière, il faut alors envisager d'utiliser un système d'équations de Schrödinger non linéaire couplées pour décrire l'interaction non linéaire entre les différentes ondes polarisées. Ces systèmes couplés sont utilisés dans divers domaines tels que l'optique non linéaire, l'hydrodynamique, la physique des plasmas, des condensats de Bose-Einstein, et même les systèmes financiers [1–5]. Le premier type de modèle multi-composantes lié à l'équation de Schrödinger non-linéaire avec des applications physiques est le modèle de Manakov [6]. Pour deux composantes, l'ensemble correspond alors à deux équations de Schrödinger non linéaire couplées. Ce système est complètement intégrable par un choix particulier des paramètres non-linéaires, offrant ainsi des conditions propices à la propagation de solitons. Dans ce contexte, les propriétés mathématiques d'un tel modèle ont été étudiées en détail, les solitons et leurs interactions représentent un sujet fascinant dans de nombreux domaines de la physique [7, 8]. En particulier, lorsqu'on considère un champ optique de deux composantes polarisées orthogonalement, le système Manakov admet des solutions stables à deux composantes formées par deux solitons incohérents brillants (en dispersion anormale) ou sombres (en dispersion normale). Plus généralement, le système de Manakov est considéré comme un modèle prometteur pour la description des interactions entre canaux dans des systèmes de transmission longue distance basés sur un multiplexage en longueurs d'ondes [9], des systèmes multiplexés en polarisation [10, 11], ou encore le multiplexage spatial en utilisant des fibres multimodes ou multicoeurs [12]. Une condition suffisante pour l'intégrabilité des équations de Schrödinger non linéaire couplées est la suivante : la dispersion doit être la même pour les deux modes de polarisation ; en outre, le rapport entre l'automodulation de phase et la modulation de phase croisée doit être égal à 1, et le coefficient non linéaire doit être identique pour les deux composants [6, 13]. De plus, il faut vérifier que le système d'ondes couplées ne présente pas d'échange non-linéaire d'énergie entre les composantes de façon cohérente [14]. Les études théoriques ont prédit que de telles exigences sont satisfaites facilement quand on considère des composantes polarisées orthogonalement dans des fibres optiques standards présentant une très faible biréfringence résiduelle qui varie rapidement [15, 16]. En effet, les variations aléatoires de la biréfringence de la fibre se produisent sur une échelle de longueur très courte par rapport à la longueur non linéaire dans les liaisons de transmission optique, de sorte qu'un effet non linéaire moyen peut être approché, ce qui réduit le coefficient de modulation de phase croisé à l'unité, à la différence des fibres biréfringentes homogènes. Malgré des études mathématiques complexes du système de Manakov [17–20], les expériences ont été limitées à seulement un petit nombre de systèmes tels que les guides d'ondes optiques et les condensats de Bose-Einstein [21–23]. Il y a un grand intérêt de réaliser plus d'études afin de caractériser quantitativement la propagation non linéaire des ondes décrite par le modèle de Manakov, outre la preuve de l'existence des solitons et de son application qualitative dans la conception de réseaux optiques [16, 24]. Les dynamiques non linéaires et les instabilités associées [25, 26] qui peuvent être prédites en utilisant le modèle Manakov sont restées jusqu'à présent non testées. Dans ce chapitre, nous démontrerons à l'aide de simulations et d'expériences que des instabilités non linéaires peuvent être quantitativement bien prédites par le modèle Manakov lors de la propagation dans de longues fibres ayant une variation aléatoire rapide de la biréfringence résiduelle.

Ainsi, nous verrons dans une première partie le concept de l'instabilité de modulation vectorielle qui est l'extension du phénomène d'instabilité de modulation scalaire. Dans le cadre de cette thèse, nous avons travaillé dans un régime de dispersion normale. Une étude analytique de l'instabilité de modulation sera menée avec le modèle Manakov. De plus, nous étudierons également une solution analytique de type onde scélérate de ce modèle, comme nous avons pu

voir dans les chapitres précédents concernant l'équation de Schrödinger non linéaire.

Dans la deuxième partie, nous verrons les premières observations de l'instabilité de modulation vectorielle spontanée, et nous aurons une description détaillée du montage expérimental. Les résultats expérimentaux seront confrontés aux simulations numériques en utilisant le modèle décrit dans la première partie. Afin d'éprouver le modèle, nous effectuerons une étude en puissance et une étude en fonction de l'espacement fréquentiel entre les deux composantes de polarisation initiales.

Dans la troisième partie, nous étudierons le processus d'instabilité de modulation vectorielle stimulée (c'est-à-dire induite à une fréquence de perturbation spécifique). Tout comme l'instabilité de modulation scalaire, cette stimulation permettra de générer la solution analytique décrite lors de la première partie. Nous confronterons alors les résultats des expériences aux simulations, mais également à la solution analytique.

## 4.1 Le modèle Manakov

### 4.1.1 Description du modèle

Le couplage entre deux faisceaux laser dans les matériaux diélectriques non-linéaires peut conduire à un ensemble vaste et diversifié d'effets physiques fascinants. Des exemples typiques de ces effets sont des processus de mélange à quatre-ondes (FWM) et d'instabilité de modulation (MI). Dans les fibres optiques, l'interaction conservative entre les effets non-linéaires et de dispersion conduit à des phénomènes tels que l'instabilité de modulation. Ceci se produit lorsqu'une onde continue (ou quasi-continue) est soumise à une modulation de son amplitude, en présence de bruit ou toute autre faible perturbation [14, 27–30]. Dans les chapitres précédents, nous avons utilisé l'instabilité de modulation scalaire qui ne se produit que dans un régime focalisant, c'est-à-dire avec une dispersion de vitesse de groupe (GVD) anormale. Toutefois, la prolongation de l'instabilité de modulation à un régime de dispersion normale a été soulignée par Berkhoer et Zakharov, en considérant le couplage non-linéaire entre deux différents modes (par exemple, deux modes de polarisation) via la modulation de phase croisée (XPM) [30]. Par la suite, plusieurs expériences avec deux modes de polarisation ont été effectuées afin d'observer l'instabilité de modulation vectorielle dans les fibres biréfringentes [31–33]. Il a depuis longtemps été prédit que l'instabilité de modulation induite par modulation de phase croisée devrait également être observable dans le régime de dispersion normale grâce à l'interaction entre deux pompes multiplexées en longueur d'onde avec un état de polarisation parallèle [34]. Mais le processus peut être entravé par la présence simultanée de mélange à quatre ondes [35, 36]. La situation est complètement différente quand deux pompes multiplexées en longueurs d'onde avec des états de polarisation orthogonaux sont impliquées [33]. Ainsi lorsque le décalage de vitesse de groupe entre les deux modes orthogonaux est grand, le gain de l'instabilité de modulation par polarisation croisée est relativement étroit, et le mélange à quatre-ondes est supprimé. Dans toutes les expériences précédentes sur l'instabilité de modulation vectorielle, la biréfringence de la fibre est telle que le rapport entre l'automodulation de phase (SPM) et la modulation de phase croisée (XPM) était différent de l'unité, ce qui ne correspond pas au système de Manakov. Du point de vue des applications de télécommunications, l'instabilité de modulation via la modulation de phase croisée peut être une source de détérioration pour les systèmes de multiplexage en longueur d'onde ou en polarisation [37–40]. D'un point de vue fondamental, l'instabilité de modulation est à l'origine de phénomènes fondamentaux très importants, tels que la génération de solitons optiques [41, 42], la génération de supercontinuum [43] et la formation d'ondes scélérates [44–48].

La propagation (sans pertes) de deux ondes optiques ayant des polarisations orthogonales est décrite par un système de deux équations de Schrödinger non linéaire couplées (CNLSEs, *Coupled Nonlinear Schrödinger Equations*) [14] :

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_{1,u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \left[ \left( |u|^2 + \frac{2}{3} |v|^2 \right) u + \frac{1}{3} u^* v^2 \exp(-2i\Delta\beta z) \right], \\ i \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \beta_{1,v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \left[ \left( |v|^2 + \frac{2}{3} |u|^2 \right) v + \frac{1}{3} v^* u^2 \exp(2i\Delta\beta z) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $\Delta\beta = \beta_{0,x} - \beta_{0,y}$ .  $u$  et  $v$  sont les amplitudes complexes des enveloppes lentement variables des deux ondes pompes aux fréquences  $\omega_{u,v} = \omega_0 \pm \pi\Delta$  respectivement, où  $\Delta = \Delta\omega/2\pi$  est l'écart fréquentiel entre les deux ondes.  $\beta_2$  et  $\gamma$  sont respectivement la dispersion de la vitesse de groupe et le coefficient non-linéaire Kerr à la fréquence  $\omega_0$ . Notre fibre possède une variation aléatoire rapide de la biréfringence résiduelle, ainsi sur une grande longueur de fibre, nous pouvons considérer la valeur moyenne de  $\Delta\beta = 0$ . On définit également  $\delta = \beta_2\Delta$  qui est associé au désaccord de vitesse de groupe (GVM, *Group-velocity mismatch*). En raison de la dispersion de vitesse de groupe en régime normal, l'onde pompe  $u$  ( $v$ ) est plus lente (rapide) que les ondes à la fréquence porteuse  $\omega_0$ . Afin de faciliter l'étude de ce système d'équations, nous utilisons le formalisme du vecteur Jones et des matrices de Pauli qui sont définis comme suivant [14] :

$$|U\rangle = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Nous pouvons alors réécrire le système d'équations (1) en tenant compte de l'approximation de la biréfringence de la fibre, nous obtenons alors l'équation suivante :

$$i \left( \frac{\partial |U\rangle}{\partial z} + \sigma_1 \frac{\delta}{2} \frac{\partial |U\rangle}{\partial t} \right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 |U\rangle}{\partial t^2} + \gamma \left( s_0 |U\rangle - \frac{1}{3} s_3 \sigma_3 |U\rangle \right) = 0 \quad (4.3)$$

où  $s_1$  et  $s_3$  sont des paramètres de Stokes. Ils permettent de décrire l'état de polarisation de l'onde. Ces paramètres sont définis par :

$$s_0 = |u|^2 + |v|^2, \quad s_1 = |u|^2 - |v|^2, \quad s_2 = 2\text{Re}(u^*v), \quad s_3 = 2\text{Im}(u^*v) \quad (4.4)$$

On rappelle que nous utilisons une fibre optique ayant une faible biréfringence aléatoire. Ainsi si nous nous propageons sur une longue distance, il est nécessaire de réaliser une valeur moyenne du dernier terme de l'équation 4.3, et en utilisant l'identité suivante [10] :

$$\sum_{i=1}^3 s_i \sigma_i |U\rangle = s_0 |U\rangle \quad (4.5)$$

nous pouvons donc en déduire que  $s_3 \sigma_3 |U\rangle = \frac{1}{3} s_0 |U\rangle$ . On obtient alors l'équation suivante :

$$i \left( \frac{\partial |U\rangle}{\partial z} + \sigma_1 \frac{\delta}{2} \frac{\partial |U\rangle}{\partial t} \right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 |U\rangle}{\partial t^2} + \gamma \frac{8}{9} s_0 |U\rangle = 0 \quad (4.6)$$

On définit alors  $\gamma' = \gamma \frac{8}{9} = \frac{8n_2\omega_0}{9cA_{eff}}$ , où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide,  $n_2 = 2.6 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$  est l'indice de réfraction non-linéaire, et  $A_{eff}$  désigne l'aire effective du coeur à la fréquence de la porteuse  $\omega_0$ . Le facteur 8/9 que nous avons obtenu permet de tenir compte des variations aléatoires rapides de la biréfringence de la fibre [16]. Nous obtenons finalement le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\delta}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma' (|u|^2 + |v|^2) u &= 0, \\ i \frac{\partial v}{\partial z} - i \frac{\delta}{2} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma' (|v|^2 + |u|^2) v &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les équations couplées (4.7) sont équivalentes au système de Manakov [6, 15, 16] une fois que le terme du décalage de vitesse de groupe est éliminé par la transformation :

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \tilde{u}(z, t) \exp \left[ i \frac{\delta}{(2\beta_2)} t - i \frac{\delta^2}{8\beta_2} z \right], \\ v(z, t) &= \tilde{v}(z, t) \exp \left[ -i \frac{\delta}{(2\beta_2)} t - i \frac{\delta^2}{8\beta_2} z \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dans le système d'équations (4.7),  $z$  et  $t$  désignent la distance de propagation et le temps retardé (dans un référentiel voyageant à la vitesse de groupe évaluée à la fréquence porteuse  $\omega_0$ ). Nous pouvons noter que dans les équations (4.7), les variations de  $\beta_2$  et  $\gamma$  en fonction de la fréquence sont négligés, ce qui est raisonnable pour les écarts de fréquence que nous considérons dans nos expériences ( $\Delta \leq 500 \text{ GHz}$ ). Nous tenons à souligner le fait que les termes de couplage cohérent [16] ont été négligés dans les équations (4.7), car ils ne jouent qu'un rôle dans la plage de paramètres (petites valeurs de  $\Delta$ ), qui est en dehors de nos conditions expérimentales. D'autre part, les effets Raman ne sont pas pris en compte dans les équations (4.7), puisque nos conditions expérimentales ont été choisies de manière à ce que la diffusion Raman soit négligeable. La validité des équations (4.7) décrivant l'instabilité de modulation vectorielle dans une fibre à faible biréfringence aléatoire a été récemment confirmée qualitativement dans le régime de dispersion anormale à Dijon en 2013 [49]. De plus, nous pouvons noter que dans ce type de système, lorsque les deux ondes polarisées orthogonalement sont injectées, celles-ci préservent leur orthogonalité au cours de la propagation.

#### 4.1.2 Instabilité de modulation vectorielle et analyse de stabilité linéaire

L'analyse de stabilité linéaire (ASL) d'une solution (onde continue) du système d'équations (4.7) conduit à l'équation aux valeurs propres suivante :  $[M][Y] = K[Y]$ , avec le vecteur propre défini comme  $[Y]^T = [u_a, u_s^*, v_a, v_s^*]$ , où  $u_s$  et  $u_a$  sont les amplitudes Stokes et anti-Stokes des bandes latérales de l'onde pompe  $u$ , de même,  $v_s$  et  $v_a$  sont les amplitudes Stokes et anti-Stokes de l'onde pompe  $v$ . Tout au long des mesures qui seront réalisées par la suite, nous supposons que la puissance totale  $P$  injectée dans la fibre est également répartie entre les deux pompes, à savoir  $|u(z=0, t)|^2 = |v(z=0, t)|^2 = P/2$ . La matrice de stabilité du système  $[M]$  est définie par :

$$[M] = \begin{pmatrix} -a + b + p/2 - k & p/2 & p/2 & p/2 \\ -p/2 & -a - b - p/2 - k & -p/2 & -p/2 \\ p/2 & p/2 & a + b + p/2 - k & p/2 \\ -p/2 & -p/2 & -p/2 & a - b - p/2 - k \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

avec  $a = \pi\Delta\beta_2\Omega$ ,  $b = \frac{1}{2}\beta_2\Omega^2$  et  $p = \gamma P$ , où  $\Omega$  est la fréquence angulaire de perturbation en rapport avec le nombre d'ondes  $K$  obtenues par la relation de dispersion :

$$\det([M] - K[I]) = 0 \quad (4.10)$$

Le phénomène d'instabilité de modulation se produit lorsque le nombre d'ondes  $K$  de la perturbation possède une partie imaginaire non nulle, et se manifeste par une augmentation exponentielle de l'amplitude de la perturbation, dont l'importance est mesurée par un coefficient de gain en

---

puissance  $G$  défini par  $G(\Omega) = 2|\text{Im}(K)|$ . À partir de la matrice (4.9), on obtient ainsi la relation de dispersion suivante :

$$K^2 = a^2 + b^2 + bp - \sqrt{b(4a^2(b+p) + bp^2)} \quad (4.11)$$

ce qui nous donne la condition d'existence de l'instabilité de modulation, à savoir :

$$\max \left[ 0, \left( \Delta^2 - \frac{p}{\pi^2 \beta_2} \right) \right] \leq \left( \frac{\Omega}{2\pi} \right)^2 \leq \Delta^2 \quad (4.12)$$

Les figures 4.1, 4.3, 4.4, et 4.5 montrent respectivement le spectre de gain pour différentes puissances, le gain maximum en fonction de la puissance totale  $P$ , la fréquence de modulation optimale (OMF, *Optimal Modulation Frequency*) définie comme étant la fréquence à laquelle le gain est maximum, et les intensités des vecteurs propres du système. Ces valeurs ont été obtenus pour les valeurs de paramètres suivants :  $\gamma = 2.4 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$  et  $\beta_2 = 18 \text{ ps}^2\text{km}^{-1}$  (ou  $D = -14 \text{ ps}(\text{nm.km})^{-1}$ ).

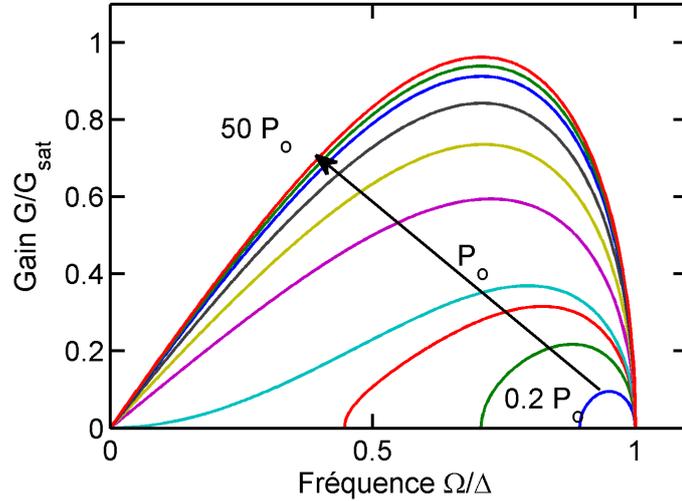


FIGURE 4.1 – Gain de l'instabilité de modulation vectorielle en fonction du décalage de fréquence de la bande latérale pour des puissances totales de pompe dans la gamme de  $0.2 P_o$  à  $50 P_o$ .

D'après la figure 4.1, quelle que soit la puissance d'entrée, la fréquence de coupure haute est fixée et reste égale à l'espacement des pompes, tandis que la fréquence de coupure basse est fonction du niveau de la puissance d'entrée. On désigne la puissance pour laquelle la fréquence de coupure basse disparaît par :  $P_o = \frac{9\pi^2 \Delta^2 \beta_2}{8\gamma}$  (par exemple,  $P_o = 0.134 \text{ W}$  pour  $\Delta = 40 \text{ GHz}$ ).

Un point remarquable est que dans le cas défocalisant (dispersion normale), contrairement au cas focalisant (dispersion anormale), il existe deux régimes distincts d'instabilité de modulation : "passe-bande" (*passband*) et "bande de base" (*baseband*). L'instabilité de modulation vectorielle est définie pour  $0 \leq \Omega_1 \leq \Omega < \Omega_2$  pour lequel le gain  $G(\Omega) \neq 0$ , on est en régime "passe-bande" si  $\Omega_1 > 0$  tandis qu'on est en régime "bande de base" si  $\Omega_1 = 0$  [44, 45]. Nous pouvons voir sur la figure 4.2, un schéma des différents types de régime selon la situation des bandes de gains. Ainsi le régime "passe-bande" correspond à la ligne continue bleue, et le régime "bande de base" correspond à la ligne discontinue verte. On peut voir que le régime "bande de base" a une bande de gain étendue entre les deux pompes (de la position 0 à 1 en fréquence normalisée) alors que le régime "passe-bande" ne possède qu'une bande de gain limitée et n'est pas étendue jusqu'aux deux pompes.

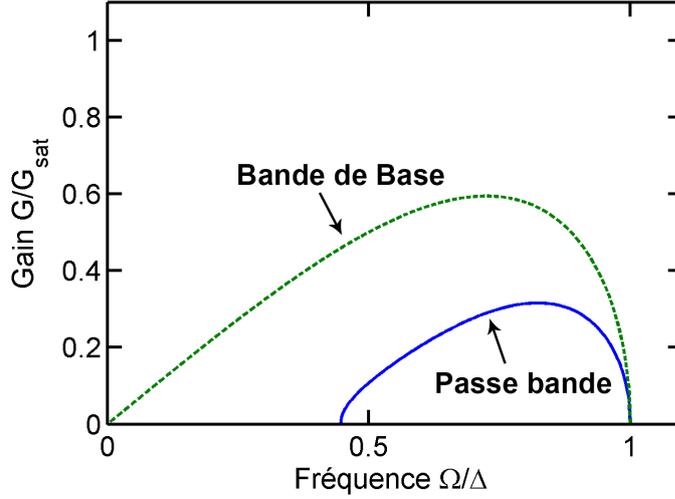


FIGURE 4.2 – Schéma explicatif des bandes de gains selon le régime "bande de base" (*baseband*) (en ligne discontinue verte), et le régime "passe-bande" (*passband*) (en ligne continue bleue).

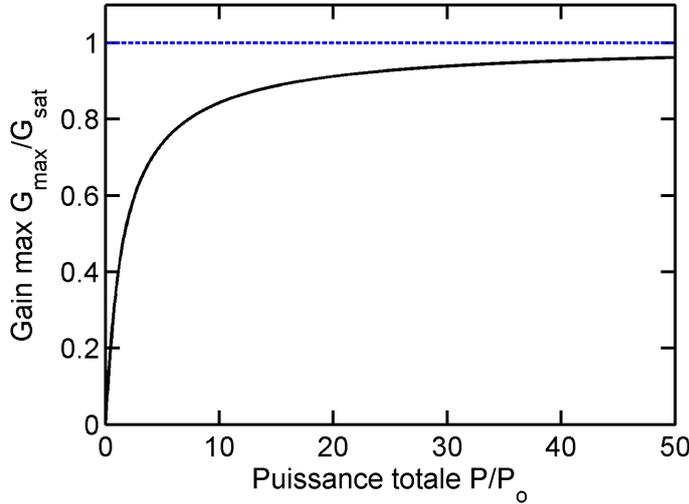


FIGURE 4.3 – Gain maximum de l'instabilité de modulation vectorielle en fonction de la puissance (la ligne pointillée bleue représente le niveau du gain maximum de saturation).

Un autre point remarquable est que, contrairement au cas de la fibre fortement biréfringente [33], il n'y a aucune puissance critique au-delà duquel l'instabilité de modulation vectorielle disparaît. Au contraire, dans le cas présent, il y a une augmentation monotone du gain maximum selon la puissance d'entrée puis une saturation du gain se développe à partir de  $10P_o$  (voir figure 4.3). La solution asymptotique de la relation de dispersion (équation (4.11)) qui se trouve dans la limite des grandes valeurs de  $p$  conduit à la valeur de saturation du gain maximum  $G_{sat} = 2\pi^2\Delta^2\beta_2$  et à la fréquence de modulation optimale  $f_{sat} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$ .

Sur la figure 4.4, on montre que la fréquence de modulation optimale (OMF) diminue de façon monotone pour atteindre la valeur minimale asymptotique  $f_{sat}$  tandis que  $P$  augmente ( $OMF/\Delta \rightarrow 1/\sqrt{2} = 0.707$ ). Les vecteurs propres du système, qui sont représentés sur la figure 4.5, révèlent que l'instabilité de modulation vectorielle génère deux bandes latérales dominantes : une bande latérale anti-Stokes  $u_a$  à la fréquence  $\omega_u + \Omega$  polarisée le long de la pompe à la fréquence  $\omega_u$ , et la bande latérale Stokes  $v_s$  à la fréquence  $\omega_v - \Omega$  polarisée le long de la pompe à la fréquence  $\omega_v$ . Cependant, quand on augmente la puissance d'entrée, nous pouvons voir l'apparition de deux

bandes latérales secondaires : bande latérale Stokes  $u_s$  à la fréquence  $\omega_u - \Omega$  polarisée le long de la pompe à la fréquence  $\omega_u$  et la bande latérale anti-Stokes  $v_a$  à la fréquence  $\omega_v + \Omega$  polarisée le long de la pompe à la fréquence  $\omega_v$ . Nous pouvons noter que les intensités des quatre bandes latérales saturent à des niveaux de puissance élevés avec une valeur asymptotique de l'intensité des bandes latérales secondaires d'environ 16% des bandes latérales principales.

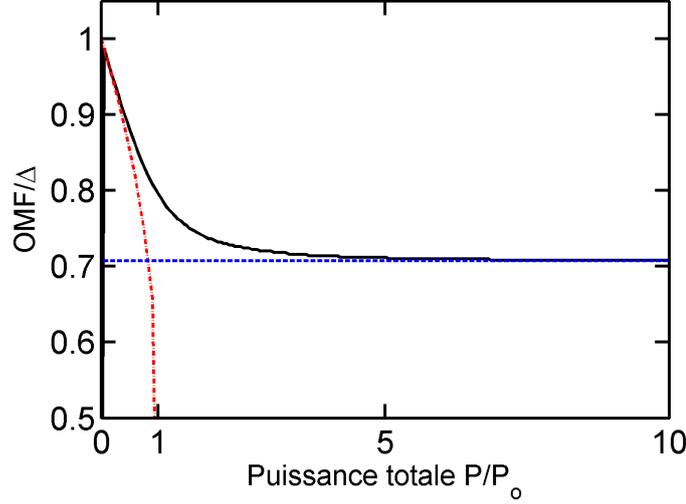


FIGURE 4.4 – Fréquence de modulation optimale en fonction de la puissance totale. La ligne noire donne les résultats obtenus à partir de l'analyse de stabilité linéaire (équation (4.11)), tandis que la ligne rouge discontinue est obtenue par la condition d'accord de phase (équation (4.13)). La ligne pointillée bleue représente la limite de saturation.

Certaines des caractéristiques décrites précédemment peuvent également être comprises en considérant le phénomène d'instabilité de modulation vectorielle comme un processus de mélange à quatre ondes, pour lequel deux photons pompe sont transférés aux deux bandes latérales dominantes dont les fréquences sont données par la condition d'accord de phase suivante :

$$\Delta k_L + \Delta k_{NL} = -2\pi\Delta\beta_2\Omega + \beta_2\Omega^2 + \gamma P = 0 \quad (4.13)$$

Le premier terme de la partie centrale de l'équation (4.13) représente le rôle du désaccord de vitesse de groupe entre les deux pompes. Le second terme décrit le rôle de la dispersion de la vitesse de groupe, tandis que le dernier terme représente le rôle de la non-linéarité Kerr. Étant donné que dans les fibres optiques le coefficient non-linéaire est positif, la condition d'accord de phase (4.13) nécessite un désaccord négatif de la phase linéaire. On peut noter que lorsque le désaccord de la pompe  $\Delta$  disparaît (régime mono-fréquence), l'instabilité se produit uniquement pour une dispersion de vitesse de groupe négative (dispersion anormale). Dans le cas général de deux pompes de fréquences différentes ( $\Delta \neq 0$ ), l'équation (4.13) conduit à des valeurs complexes de désaccord  $\Delta$  pour des puissances de pompe  $P > P_o$ . Cependant, lorsque  $P < P_o$ , l'équation (4.13) fournit une expression analytique de la fréquence de modulation optimale :

$$f_{opt} = \frac{\Delta}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{P}{P_o}} \right) \quad (4.14)$$

Le graphique correspondant est représenté par la ligne rouge discontinue dans la figure 4.4. On peut noter que l'expression analytique (4.14) donne une bonne approximation de la fréquence de modulation optimale aux basses puissances de pompe (typiquement  $P/P_o < 0.5$ ). Mais il diffère considérablement de la fréquence de modulation optimale exacte qui peut être dérivée à partir

du système de Manakov (équations (4.7)) pour des plus grandes valeurs de puissances de pompe ( $0.5 < P/P_o < 1$ ). Cet écart peut être expliqué par l'influence de la paire de bandes latérales secondaires [33] (voir figure 4.5).

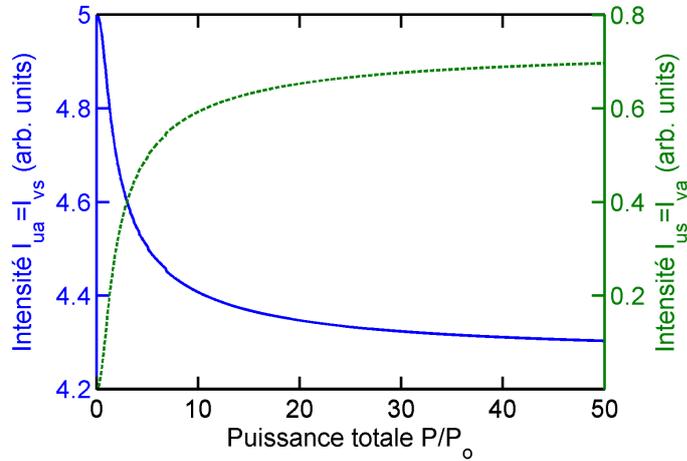


FIGURE 4.5 – Les intensités des bandes latérales de l’instabilité de modulation obtenues à partir des vecteurs propres du système en fonction de la puissance totale de la pompe. La ligne bleue (verte pointillée) correspond aux bandes latérales primaires (secondaires).

### 4.1.3 Solution analytique de type onde scélérate vectorielle

L’émergence de structures temporelles telles que des solitons brillants [14] et des solitons sur fond continu [46, 50, 51] dans les fibres optiques, à partir d’ondes continues, est reliée au processus d’instabilité de modulation. Dans le régime de dispersion normale (ce qui correspond au régime d’eau peu profonde en hydrodynamique), il n’y a pas d’instabilité de modulation. Toutefois, le couplage non-linéaire entre deux modes de polarisation orthogonales peut conduire à une instabilité de modulation vectorielle. Nous avons également vu que le modèle de Manakov peut conduire à l’instabilité de modulation vectorielle. Il a été récemment démontré que l’instabilité de modulation vectorielle du système de Manakov permet de générer une structure de type onde scélérate optique "noire" (*Optical Dark Rogue Wave*), ce type de structure est liée au régime de dispersion normale (dispersion qui permet également de propager des solitons "noirs").

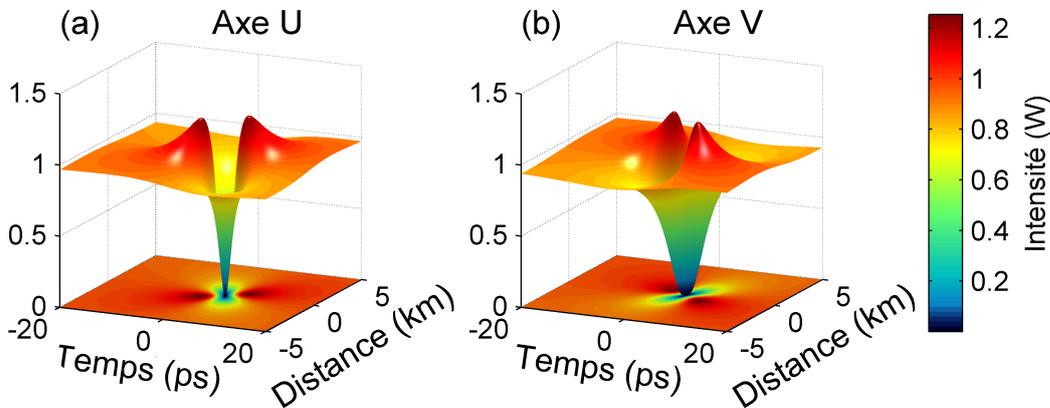


FIGURE 4.6 – Évolution spatio-temporelle de la solution analytique de type onde scélérate vectorielle "noire" des équations (4.15) selon les axes  $u$  (a) et  $v$  (b).

L'évolution de l'intensité dans le temps et l'espace des deux ondes polarisées orthogonalement sur la figure 4.6 constitue une solution de type onde scélérate optique "noire" du système de Manakov (les deux axes de polarisation  $u$  et  $v$  sont totalement arbitraires mais orthogonaux). Nous pouvons voir une soudaine extinction lumineuse isolée et qui arrive presque à 0. Cette solution est décrite par les expressions analytiques simples d'un rapport de deux polynômes ci-dessous, qui ont été obtenues par transformation de Darboux [44] :

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{2}{\gamma}} a \frac{a_u \sqrt{2\beta_2} p t + 2p^2 t^2 + \beta_2 \beta \theta_u + \sqrt{2\beta_2} \beta p t \theta_u + i \alpha_u \beta_2 p^2 z + \beta_2 p^4 z^2}{\sqrt{2\beta_2} \beta p t + 2p^2 t^2 + \beta_2 (\beta + p^4 z^2)} e^{i4za^2} \\ V &= \sqrt{\frac{2}{\gamma}} a \frac{a_v \sqrt{2\beta_2} p t + 2p^2 t^2 + \beta_2 \beta \theta_v + \sqrt{2\beta_2} \beta p t \theta_v + i \alpha_v \beta_2 p^2 z + \beta_2 p^4 z^2}{\sqrt{2\beta_2} \beta p t + 2p^2 t^2 + \beta_2 (\beta + p^4 z^2)} e^{i4za^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

où,

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\gamma P}{4}}, \quad q = -\frac{\delta}{2\sqrt{2\beta_2}}, \\ \theta_n &= \frac{2q_n + ip}{2q_n - ip}, \quad \alpha_n = \alpha = \frac{4p^2}{p^2 + 4q^2} \text{ où } n = u, v, \\ q_u &= -q, \quad q_v = q, \quad \beta = \frac{p^3}{(\chi(p^2 - 4q^2))}, \quad \chi = \text{Im}(k), \quad p = 2\text{Im}(\lambda + k) \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est la solution double du polynôme  $\lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$ , avec  $A_0 = -k^3 + k(q^2 + 2a^2)$ ,  $A_1 = -k^2 - q^2 + 2a^2$ ,  $A_2 = k$ . La contrainte sur les doubles racines n'est satisfaite que lorsque le discriminant est nul, ce qui se traduit par une condition d'un polynôme de quatrième ordre défini par :

$$k^4 + D_3 k^3 + D_2 k^2 + D_1 k + D_0 = 0 \quad (4.16)$$

avec  $D_0 = \frac{(q^2 - 2a^2)^3}{16q^2}$ ,  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = \frac{(a^2 - 10a^2 q^2 - 2q^4)}{4q^2}$ ,  $D_3 = 0$ .

Dans notre cas, les paramètres de la fibre optique utilisés pour la figure 4.6 sont les mêmes que précédemment, soit :  $\beta_2 = 18 \text{ ps}^2 \cdot \text{km}^{-1}$ ,  $\gamma = 2.4 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$ . On a également  $\delta = 1.8 \text{ ps} \cdot \text{km}^{-1}$  et une puissance totale de  $P = 1.9 \text{ W}$ . Nous obtenons alors les paramètres tronqués suivants (en choisissant la valeur de  $k$  complexe) :  $a = 1.06778$ ,  $k = 0.251791i$ ,  $\lambda = -0.785421i$ ,  $q = -0.942478$ .

De plus, nous pouvons analyser l'évolution de la phase temporelle pour cette solution (voir figure 4.7), il est intéressant de noter que son évolution est de signe opposé entre chaque axe, et nous avons un saut de phase avant et après le minimum d'intensité.

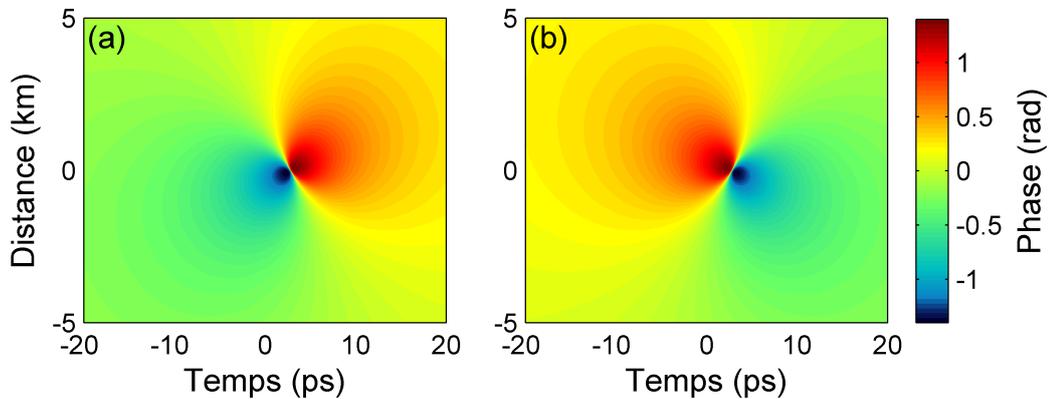


FIGURE 4.7 – Évolution de la phase temporelle de la solution analytique de type onde scélérate vectorielle "noire" des équations (4.15) selon les axes  $u$  (a) et  $v$  (b).

Afin de compléter l'analyse de cette solution, nous pouvons regarder les différents profils à  $z = 0$  qui correspondent au minimum d'intensité. Les profils temporels d'intensité, les fréquences instantanées liées à l'évolution des profils temporels, et les profils spectraux selon chaque axe sont représentés sur les figures 4.8(a),(b) et (c) respectivement.

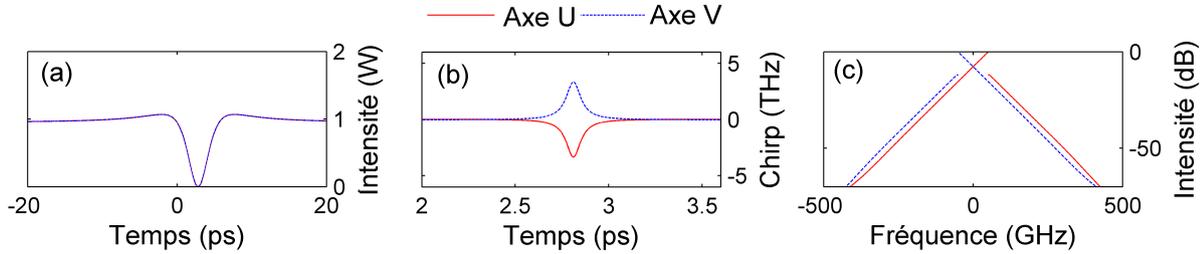


FIGURE 4.8 – Profils temporels d'intensité (a), fréquence instantanée (b) et profils spectraux (c) de la solution analytique de type onde scélérate vectorielle "noire" des équations (4.15) à  $z = 0$  selon les axes  $u$  (ligne rouge continue) et  $v$  (ligne bleue discontinue).

Nous pouvons voir sur la figure 4.8(b), sur une toute petite fenêtre temporelle qu'il y a une variation très importante des fréquences sur le profil temporel (environ 3 THz d'amplitude, et de signe opposé selon les axes de polarisation), notamment à proximité du minimum d'intensité de l'onde scélérate. Nous pouvons noter également que les spectres théoriques ont été décalés vers les basses et les hautes fréquences afin de respecter l'écart entre les deux pompes que nous aurons dans notre expérience.

## 4.2 Observation de l'instabilité de modulation vectorielle spontanée

### 4.2.1 Montage expérimental

Le dispositif expérimental utilisé pour observer l'instabilité de modulation vectorielle de type Manakov est représenté sur la figure 4.9. Deux ondes pompes quasi-continues ont été générées à partir de deux diodes laser émettant une lumière polarisée à différentes longueurs d'ondes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Elles sont réglées autour de la longueur d'onde centrale ( $\lambda_0 = 1554.7 \text{ nm}$ ) avec un désaccord de fréquence allant de 50 à 250 GHz par rapport à la fréquence centrale. Les deux ondes pompes ont été combinées à l'aide d'un coupleur à maintien de polarisation avec un rapport de couplage de 50:50. Afin d'augmenter considérablement la puissance crête impliquée dans notre expérience, nous avons modifié temporellement les ondes continues pour obtenir un signal d'impulsion créneau de 100 ns de large avec un cycle de répétition de 1:10 grâce à un modulateur électro-optique contrôlé par un générateur de séquence binaire pseudo-aléatoire. Nous pouvons souligner que de telles impulsions fournissent un état d'onde quasi-continue pour la démonstration du phénomène d'instabilité de modulation, puisque la durée d'impulsion est d'environ quatre ordres de grandeur plus grande que la période de modulation attendue. En outre, pour supprimer la rétrodiffusion Brillouin stimulée (SBS) qui peut se produire dans la fibre optique, un modulateur de phase a été inséré dans le montage expérimental afin d'augmenter la largeur des raies spectrales de nos deux ondes pompes. Le modulateur de phase a été piloté par un signal radiofréquence de 67 MHz, nous permettant ainsi de travailler à des puissances relativement élevées de pompe tout en étant bien en dessous du seuil de la rétrodiffusion Brillouin stimulée. À ce stade, les deux ondes de pompe ont été séparées spectralement au moyen d'un filtre programmable tandis qu'une paire de contrôleurs de polarisation (PC) a permis d'obtenir deux états de polarisation linéaires orthogonaux.

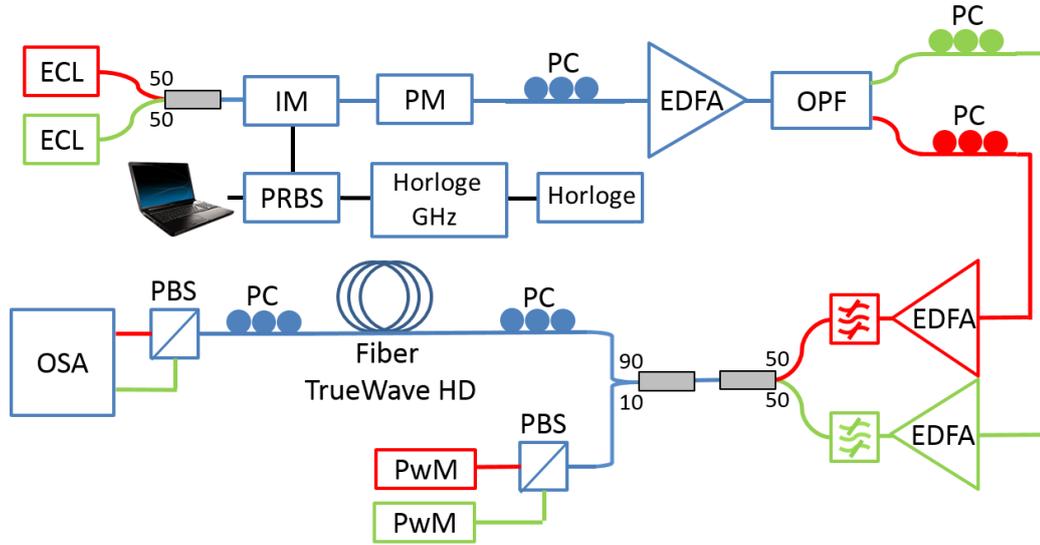


FIGURE 4.9 – Schéma du montage expérimental : lignes rouge et vert représentent les deux longueurs d’ondes multiplexées et de polarisations orthogonales. **ECL** : diode laser, 50:50 et 90:10 coupleurs à fibre optique, **EDFA** : Amplificateur à fibre dopée Erbium, **IM** : modulateur d’intensité, **PC** : contrôleur de polarisation, **PM** : modulateur de phase, **PBS** : cube séparateur de polarisation, **PRBS** : Générateur de séquence binaire pseudo-aléatoire, **PwM** : Puissance-mètre, **OPF** : Filtre programmable optique, **OSA** : Analyseur de spectre optique.

Les deux ondes pompes ont été finalement recombinaées avant injection après leur amplification indépendante par des amplificateurs à fibre dopée erbium. La fibre optique que nous avons utilisée dans notre expérience était une fibre TrueWave HD d’une distance de 5 km, avec les paramètres physiques suivants : une dispersion chromatique  $D = -14 \text{ ps/nm/km}$ , un coefficient non linéaire  $\gamma = 2.4 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$ , et ayant des pertes linéaires de  $0.25 \text{ dB/km}$  à  $\lambda_0 = 1554.7 \text{ nm}$ . Cette fibre possède une faible dispersion modale de polarisation avec une valeur de  $0.017 \text{ ps.km}^{-1/2}$ . À la sortie de la fibre, on utilise un cube séparateur de polarisation (PBS) permettant d’étudier les deux polarisations linéaires orthogonales. Les deux ondes résultantes sont caractérisées au moyen de deux analyseurs de spectre optique simultanément. Nous pourrions noter la présence de deux puissance-mètres, ceux-ci permettent un suivi des états de polarisation en prélevant et en séparant les polarisations (avec un cube séparateur de polarisation) d’une partie du signal avant injection dans la fibre optique.

Pour mettre en évidence l’impact fondamental de l’état de polarisation initiale du système à deux pompes, nous pouvons voir une mesure des spectres obtenus en sortie de fibre. Sur la figure 4.10(a), nous avons les profils spectraux de différentes conditions initiales, c’est-à-dire trois configurations distinctes des états de polarisation des deux pompes en entrée de fibre (parallèle, quelconque, et orthogonal). La figure 4.10(b) montre les profils mesurés en sortie. Les résultats obtenus confirment clairement que l’instabilité de modulation vectorielle n’est observée que dans le seul cas où les pompes sont dans un état de polarisation orthogonale comme prédit par la théorie. Nous pouvons noter que certaines bandes latérales étroites de mélange à quatre-ondes ne peuvent être complètement supprimées avant injection dans la fibre, conduisant ainsi à leur amplification lors de la propagation.

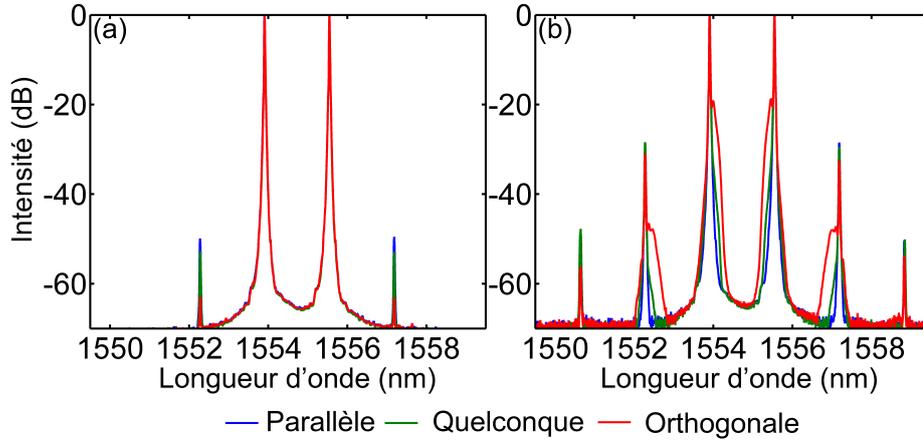


FIGURE 4.10 – (a) Spectres des différentes conditions initiales (b) Spectres correspondants en sortie de fibre. État de polarisation parallèle (ligne bleue continue), quelconque (ligne verte continue) et orthogonale (ligne rouge continue). L'écart fréquentiel entre les deux pompes est de 200 GHz, avec une puissance totale de 1.6 W.

## 4.2.2 Résultats expérimentaux

### 4.2.2.1 En fonction de la puissance initiale

La figure 4.11 compare l'évolution des spectres de sortie des deux états de polarisation orthogonaux enregistrés avec les simulations numériques correspondantes, en fonction de la puissance d'entrée  $P_u$  et  $P_v$  des deux pompes. Ici, nous avons fixé l'espacement entre les deux pompes à 200 GHz, ce qui correspond à  $P_o = 3.3 W$  et  $G_{sat} = 62 dB/km$ . Nous considérons ainsi le régime "passe-bande" de l'instabilité de modulation vectorielle.

D'après la figure 4.11, pour des puissances de pompes supérieures à 0.5 W, une large bande spectrale d'instabilité de modulation vectorielle se développe le long de l'image de la seconde pompe (polarisée orthogonalement à la première pompe). Ceci révèle un excellent accord entre les simulations numériques du système de Mankov avec des pertes et les résultats expérimentaux. En outre, nous pouvons voir également l'émergence de bandes latérales secondaires, comme prédit par l'analyse linéaire de stabilité avec des puissances supérieures à  $P_o$ . De plus, la croissance de ces bandes latérales secondaires est renforcée par le mélange à quatre ondes en cascade entre chaque pompe et bande latérale primaire de l'instabilité de modulation vectorielle avec un état de polarisation parallèle. Nous pouvons également observer sur la figure 4.11 que le centre de gravité de la bande latérale primaire se rapproche de la pompe avec l'augmentation de la puissance. C'est en très bon accord avec les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire.

Une approche quantitative plus précise de l'accord entre théorie et expériences est reportée sur la figure 4.12, avec les paramètres d'expériences suivants :  $\Delta = 200 GHz$ , et  $P = 1.6 W$ . Les résultats numériques du modèle de Manakov ont été moyennés sur une dizaine de simulations (ligne discontinue bleue) Nous avons un très bon accord entre les mesures expérimentales et les simulations numériques. On remarque cependant qu'il y a une différence avec la théorie, ceci est dû au développement de bandes latérales par mélange à quatre ondes.

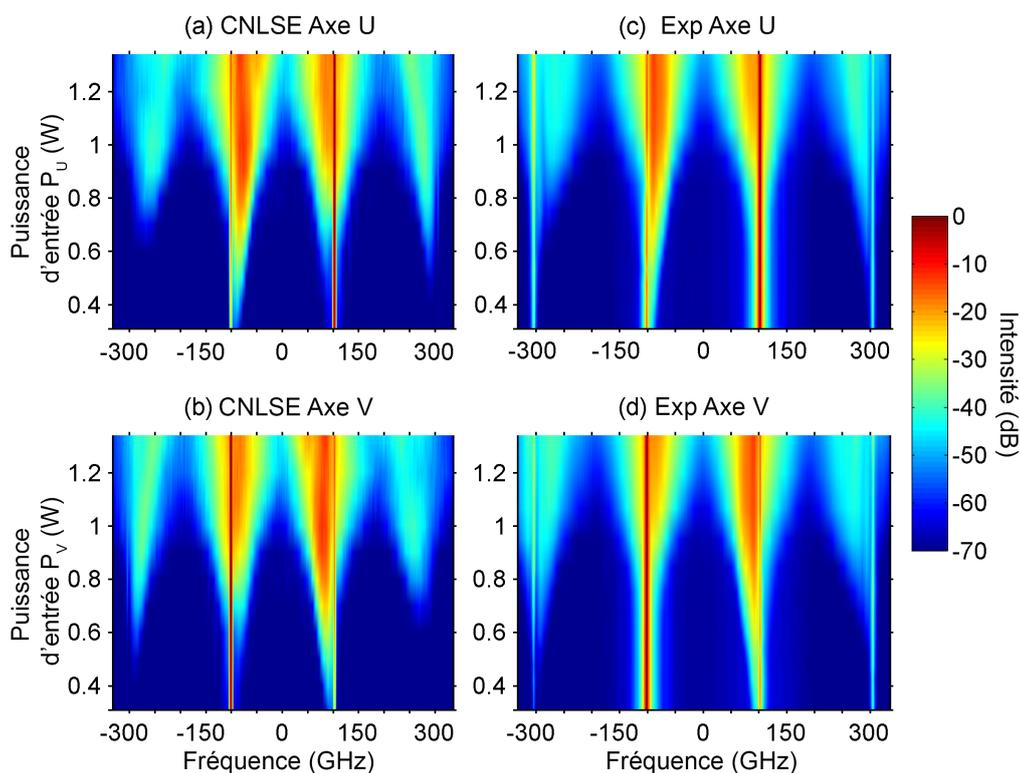


FIGURE 4.11 – Spectres de sortie en fonction de la puissance de la pompe d'entrée de l'axe u et de l'axe v. (a,b) simulation numérique avec les équations de Schrödinger non linéaire couplées (équation (4.7)) avec des pertes (c,d) mesures expérimentales

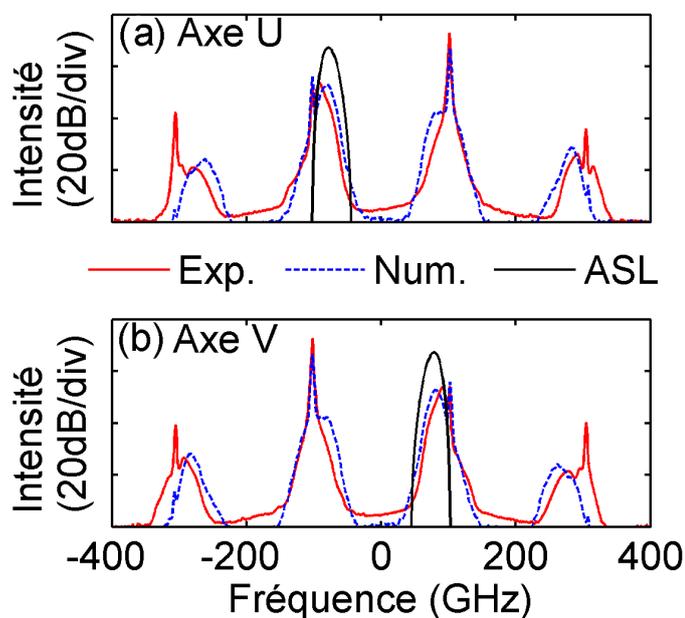


FIGURE 4.12 – Comparaison des profils spectraux après 5 km de propagation avec les paramètres suivants :  $\Delta = 200 \text{ GHz}$  et  $P = 1.6 \text{ W}$  selon les deux axes de polarisation  $u$  (a) et  $v$  (b). Expérience (ligne continue rouge), simulation numérique (ligne discontinue bleue), analyse de stabilité linéaire (ligne continue noire).

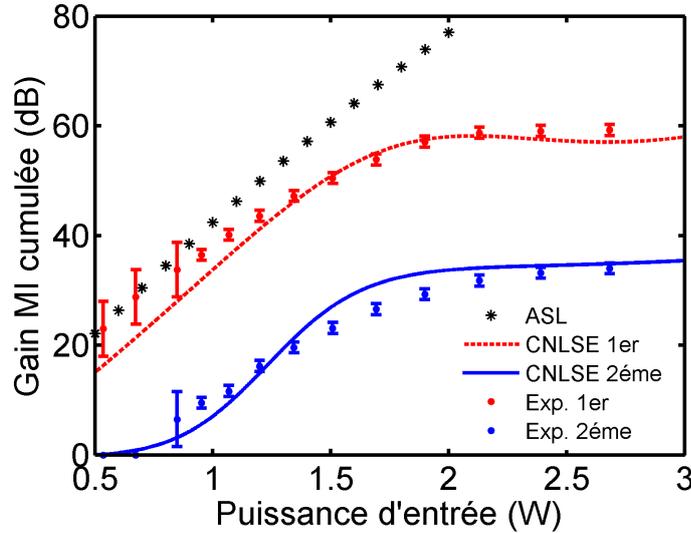


FIGURE 4.13 – Évolution du gain cumulé de l'instabilité de modulation vectorielle en fonction de la puissance d'entrée totale de pompe.

Nous pouvons aussi également vérifier l'excellent accord des comparatifs avec des paramètres d'expérience et simulation différents. Ces résultats sont alors répertoriés sur la figure 4.13, où l'on compare le gain cumulé de l'instabilité de modulation vectorielle en fonction de la puissance  $P_{tot}$  de pompe, à la fois pour la première et seconde bande latérale. La figure 4.13 montre également, avec les points étoilés, le gain analytique obtenu à partir de l'analyse de la stabilité linéaire des équations (4.7). Les gains numériques et expérimentaux sont tous deux réduits par rapport aux prédictions analytiques à cause d'une saturation non-linéaire du gain qui se produit pour des puissances supérieures à 1.5 W. Le gain de saturation observé est dû à l'influence du mélange à quatre ondes entre chaque pompe et de la bande latérale primaire de l'instabilité de modulation vectorielle, ainsi que de la déplétion de la pompe.

#### 4.2.2.2 En fonction de l'écart de fréquence

Nous avons également étudié expérimentalement la dépendance du gain de l'instabilité en fonction de l'écart de fréquence entre les deux pompes. La figure 4.14 compare les solutions numériques (figure 4.14(a,b)) et les résultats expérimentaux (figure 4.14(c,d)). La variation des espacements entre les deux pompes varie de 100 GHz ( $P_o = 0.837$  W,  $G_{sat} = 15.4$  dB/km) à 500 GHz ( $P_o = 20.8$  W,  $G_{sat} = 386$  dB/km). La puissance de pompe de chaque axe est fixée à 0.8 W, soit une puissance totale  $P = 2P_u = 2P_v = 1.6$  W. Ainsi la figure 4.14 révèle clairement l'existence du régime "passe-bande" de l'instabilité de modulation vectorielle (pour  $200$  GHz  $\leq \Delta \leq 500$  GHz) et du régime "bande de base" ( $\Delta = 100$  GHz). Il est important de noter que l'existence d'un régime d'instabilité de modulation en "bande de base" est étroitement liée avec les mécanismes conduisant à la formation de structures d'ondes extrêmes localisées (ondes scélérates) [44]. Outre un excellent accord quantitatif entre la théorie et les expériences. La figure 4.14, nous montre également qu'à partir d'un espacement fréquentiel des deux pompes de 200 GHz, nous avons une émergence inattendue d'une image miroir du spectre d'instabilité de modulation qui apparaît comme un large piédestal autour de chaque pompe.

Nous pouvons voir sur la figure 4.15 un aperçu quantitatif de l'accord entre les prédictions analytiques, les simulations numériques avec pertes, et les mesures expérimentales. Les prédictions analytiques du gain sont en très bon accord quantitatif avec les simulations numériques

et les expériences pour des écarts de pompe en dessous de 150 GHz. Le gain saturé légèrement au-dessus de 40 dB en raison du transfert de puissance dans les bandes latérales secondaires par mélange à quatre ondes.

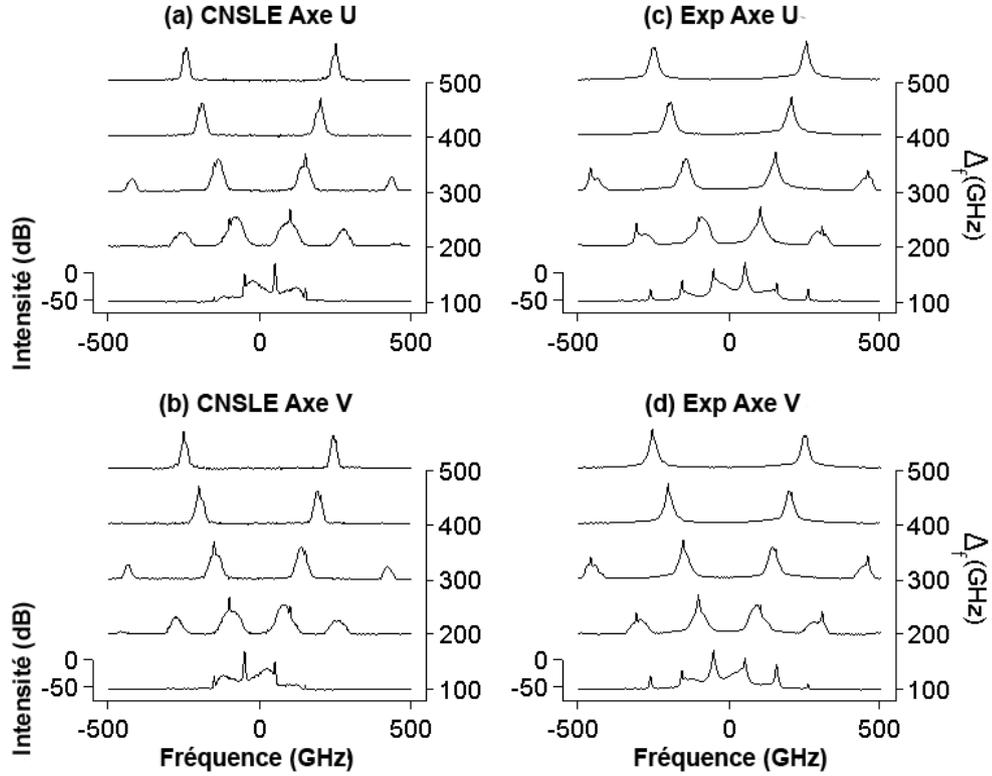


FIGURE 4.14 – Variation des profils spectraux de sortie en fonction de l'écart de fréquence des deux pompes. (a,b) Simulation numérique des équations de Schrödinger non linéaire couplées avec pertes (équations (4.7)), (c,d) mesures expérimentales.

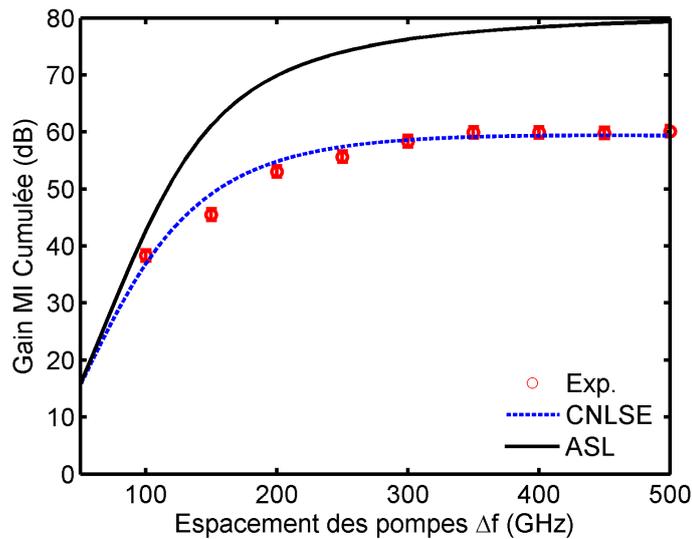


FIGURE 4.15 – Comparaison entre les prédictions analytiques (ligne continue noire), les simulations numériques (ligne discontinue bleue) et résultats expérimentaux (cercle rouge) du gain cumulé de l'instabilité en fonction de l'espacement de fréquence entre les deux pompes.

Les résultats observés ici sont les premières observations de l'instabilité de modulation vectorielle de type Manakov. De plus, nous avons un très bon accord entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux, ce qui valide l'existence de l'instabilité de modulation vectorielle dans une fibre optique standard ayant une variation aléatoire rapide de la biréfringence résiduelle. Tout comme l'instabilité de modulation scalaire que nous avons vue lors des précédents chapitres, c'est un processus qui permet de générer des solutions de type onde scélérates. Ainsi, les résultats obtenus ici laissent présager qu'il est possible de générer également ce type de solutions et de les observer par stimulation de l'instabilité avec une fréquence de perturbation spécifique.

### 4.3 Instabilité de modulation vectorielle stimulée et génération de solutions extrêmes vectorielles

#### 4.3.1 Montage expérimental

Le montage qu'on utilisera afin de générer expérimentalement les solutions de type onde scélérates noires est quasiment identique au précédent. Nous avons un étage supplémentaire qui correspond à un étage de modulation de l'onde continue. En effet, tout comme pour la génération de solitons sur fond continu, nous avons besoin de stimuler l'instabilité de modulation vectorielle à une fréquence particulière en utilisant une forme approchée de la solution, soit une condition initiale de forme sinusoïdale. Nous pouvons voir le montage sur la figure 4.16.

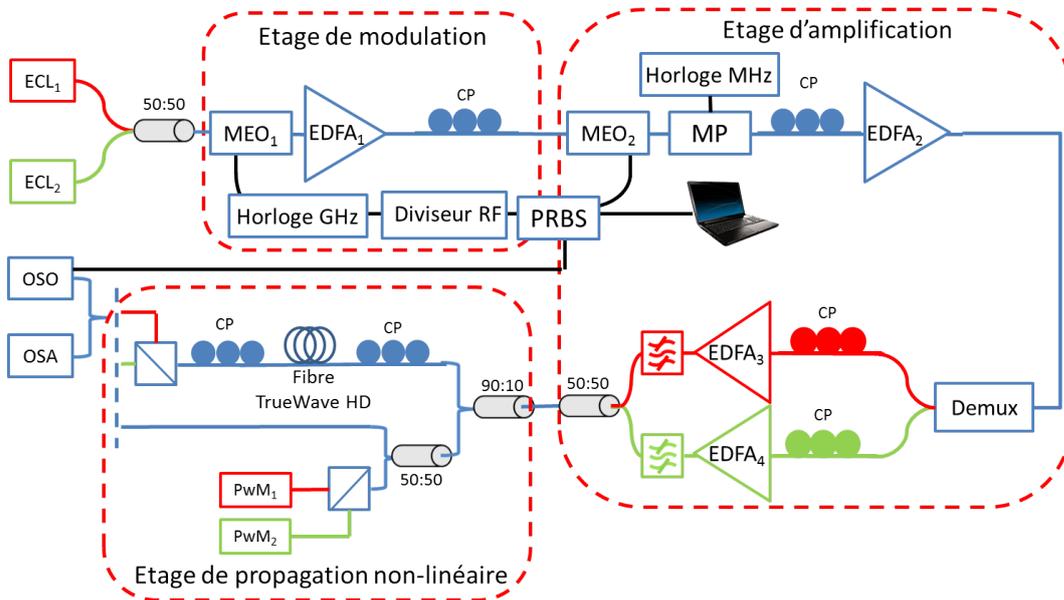


FIGURE 4.16 – Montage expérimental pour générer des solutions de type ondes scélérates vectorielles noires. **ECL** : Diode laser à cavité externe (*External Cavity Laser*), **MEO** : Modulateur électro-optique, **EDFA** : amplificateur fibré dopé Erbium (*Erbium doped fiber amplifier*), **CP** : contrôleur de polarisation, **PRBS** : Générateur de séquence binaire pseudo-aléatoire (*Pseudo-random binary sequence*), **MP** : modulateur de phase, **Demux** : démultiplexeur en longueur d'onde, **PwM** : puissance-mètre, **OSO** : Oscilloscope à échantillonnage optique, **OSA** : analyseur de spectre optique (*Optical Spectral Analyser*). 50:50, 90:10 sont des coupleurs fibrés avec une répartition de 50%/50% et 90%/10% respectivement

Comme pour le montage précédent, nous avons la combinaison de nos deux ondes pompes

(ligne rouge et verte). Pour générer les solutions de type onde scélérate vectorielle noire, il est nécessaire de rompre la stabilité des ondes continues orthogonales par modulation de celles-ci. Pour induire des perturbations de l'intensité initiale, nous avons utilisé un modulateur électro-optique (à savoir l'étage de modulation). Les pompes de polarisations orthogonales sont espacées en fréquence ( $\Delta = 100 \text{ GHz}$ ) et modulées à une fréquence de 35 GHz, ce qui correspond à la moitié de la valeur de fréquence qui conduit au gain maximum d'instabilité. En effet, dans nos conditions, nous avons besoin que la puissance totale soit supérieure ou égale à  $P_0$  ( $P_0 = 0.83 \text{ W}$  pour  $\Delta = 100 \text{ GHz}$ ) afin d'être dans le régime "bande de base". Et ainsi, dans ces conditions, les basses fréquences nées de perturbations dues au bruit éprouvent toujours un gain exponentiel, mais avec des taux plus faibles. C'est précisément dans ces conditions-là que nous pourrions obtenir la croissance d'une structure de type onde scélérate vectorielle noire. Nous pouvons définir les différents champs des ondes pompes comme :  $E_{u,v} = \sqrt{P/2}(1 + \epsilon \cos(\omega t))$ , où  $\epsilon = 0.16$  est l'amplitude de modulation et  $\omega = 2\pi f$  avec  $f = 35 \text{ GHz}$  est la fréquence de modulation. Le premier amplificateur ( $EDFA_1$ ) permet de compenser les pertes dues à la modulation sinusoïdale des deux ondes pompes. Nous utilisons un second modulateur électro-optique qui est entraîné par un générateur de séquence binaire pseudo aléatoire. Les séquences tout comme dans la partie précédente permettent alors de générer des impulsions crêteaux d'environ 100 ns de large avec un cycle de répétition de 1 pour 10. Ceci nous permet d'augmenter la puissance comme lors des expériences précédentes, sauf que nous avons le sommet de nos impulsions crêteaux modulé. Afin de limiter la rétrodiffusion Brillouin, nous utilisons un modulateur de phase à 67 MHz. Nous utilisons ensuite un second amplificateur ( $EDFA_2$ ) afin de compenser les pertes dues à toutes les modulations successives. Nous utilisons ensuite un filtre programmable permettant de séparer chacune des deux pompes et des des contrôleurs de polarisation afin de définir les polarisations orthogonales. Puis nous amplifions les deux pompes séparément ( $EDFA_3$  et  $EDFA_4$ ) afin d'obtenir en entrée de fibre une puissance totale de 2.5 W permettant de respecter les conditions du régime "bande de base" ( $P_{tot} = 2.5 \text{ W} > P_0 = 0.83 \text{ W}$ ). Les deux pompes sont alors recombinaées avec un coupleur puis injectées dans la même fibre optique que précédemment, avec les propriétés suivantes : une dispersion normale  $D = -14 \text{ ps/nm/km}$ , un coefficient non linéaire  $\gamma = 2.4 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$ , et ayant des pertes de  $0.25 \text{ dB/km}$  à  $\lambda_0 = 1554.7 \text{ nm}$ . Cette fibre possède une faible dispersion modale de polarisation avec une valeur de  $0.017 \text{ ps.km}^{-1/2}$ . Dans le cadre de cette expérience, nous utiliserons deux longueurs de fibre, une première de 3 km afin d'observer une structure de type onde scélérate de premier ordre. Puis une seconde longueur de 5 km pour observer une structure plus complexe d'ordre supérieur.

### 4.3.2 Résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous pourrions vérifier avec des simulations numériques basées sur les équations (4.7) et des expériences la génération de structure de type onde scélérate vectorielle noire. Nous verrons dans un premier cas, le cas d'une structure "simple", et dans un second temps d'une structure "complexe".

#### 4.3.2.1 Le cas simple : onde scélérate noire de premier ordre

À partir de la confirmation de l'existence de l'instabilité de modulation vectorielle spontanée à partir d'une onde quasi-continue, nous allons voir que si nous ajoutons une perturbation sinusoïdale, nous observons l'émergence d'un train périodique de structures de type onde scélérate noire. En effet, comme pour l'instabilité de modulation scalaire, le fait de rajouter une simple perturbation sur l'onde continue permet l'émergence de structure de type onde scélérate. Ainsi nous pouvons voir sur la figure 4.17(a,b) les simulations numériques basées sur les paramètres expérimentaux de la figure 4.16. Nous avons l'apparition à 3 km d'un trou d'intensité qui correspond à la structure de type onde scélérate noire. En effet, nous pouvons regarder l'évolution des

4.3 Instabilité de modulation vectorielle stimulée et génération de solutions extrêmes vectorielles

solutions analytique sur la figure 4.17(c,d) pour une puissance totale  $P = 2.5$  W (les différents paramètres liés à cette solution sont en choisissant la valeur de  $k$  complexe :  $a = 1.224745$ ,  $k = 0.421018i$ ,  $\lambda = -1.024621i$ , et  $q = -0.942478$ ).

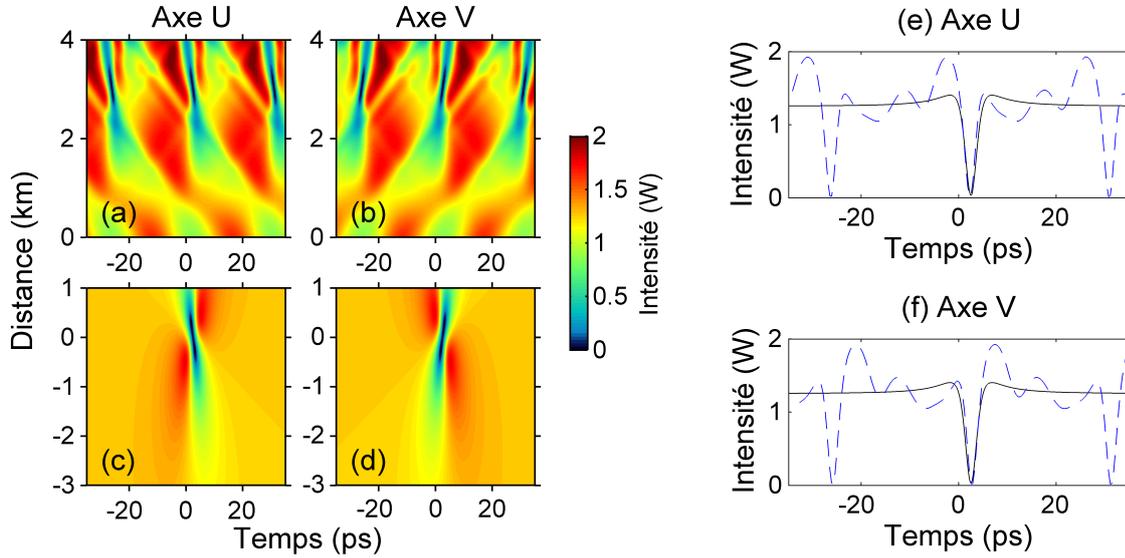


FIGURE 4.17 – Évolution des intensités optiques selon les modes de polarisation orthogonaux. (a,b) Simulation numérique liée aux expériences montrant la génération d'un train périodique de structure de type onde scélérate noire à partir d'une onde quasi-continue modulée sinusoïdalement (sans pertes). (c,d) Solution exacte obtenue pour  $P=2.5$  W. (e,f) Comparaison des profils temporels d'intensité obtenus pour chaque axe. Simulation numérique (ligne discontinue bleue) Solution analytique (ligne continue noire).

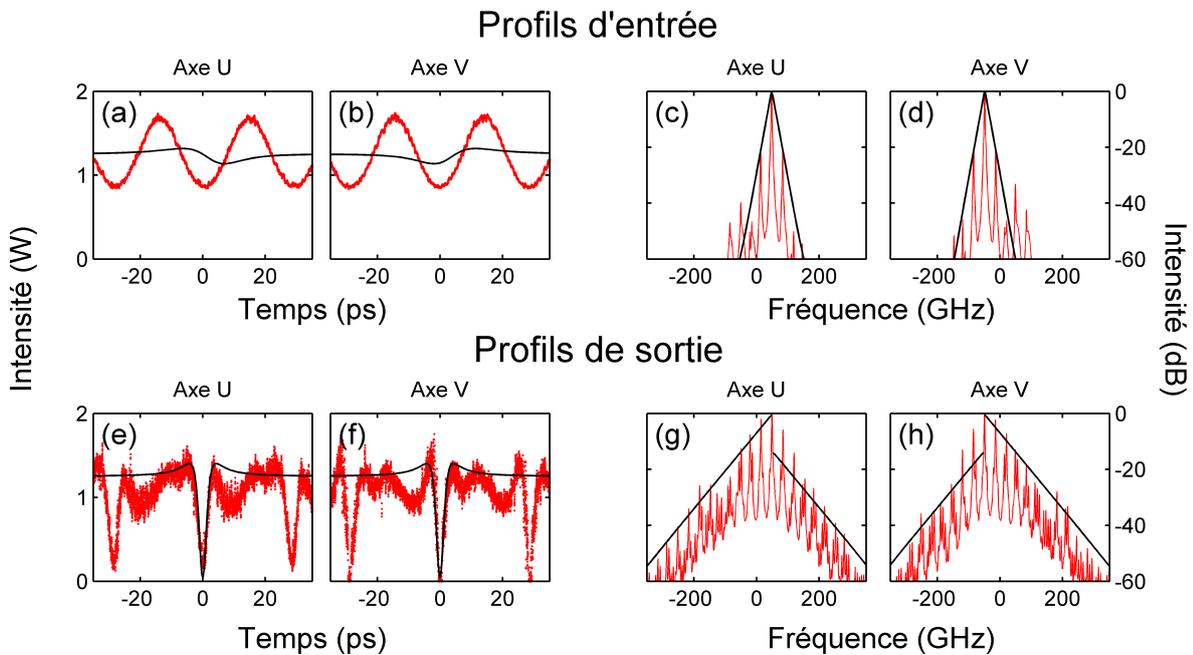


FIGURE 4.18 – Profil temporels (a,b,e,f) et spectraux (c,d,g,h) selon les deux axes de polarisation et selon l'entrée de la fibre optique (a-d) et la sortie de la fibre optique après 3 km de propagation (e-h). Les lignes rouges correspondent aux mesures expérimentales et les lignes continues noires sont la solution analytique correspondant à la structure de type onde scélérate à  $P=2.5$  W.

Nous pouvons voir également une comparaison des profils à 3 km pour la simulation numérique et à 0 km pour la solution analytique sur la figure 4.17(e,f). Nous avons un très bon accord entre la solution analytique et la simulation numérique. La différence entre les deux est que la solution analytique possède une structure unique localisée en temps et espace, contrairement à notre simulation qui possède une structure périodique dans le temps, mais localisée dans l'espace.

Les résultats obtenus par simulations peuvent être vérifiés avec une série de mesures expérimentales. En effet, nous pouvons voir sur la figure 4.18, une comparaison des conditions initiale 4.18(a-d) et de sortie 4.18(e-h) de la fibre après 3 km de propagation selon les deux polarisations orthogonales, dans les domaines temporel et spectral. Nous pouvons voir qu'un excellent accord quantitatif est obtenu entre la théorie et les expériences à la fois dans le domaine temporel et spectral. Seuls de légers écarts apparaissent en raison des conditions initiales non idéales, comme nous avons pu voir lors du chapitre 3. De plus, si nous nous penchons sur les spectres d'entrée et de sortie, nous vérifions l'asymétrie spectrale prédite par la théorie. Les mesures des profils d'intensité sans tenir compte des axes de polarisation nous permettent d'obtenir l'intensité optique totale. Nous pouvons voir ces résultats sur la figure 4.19.

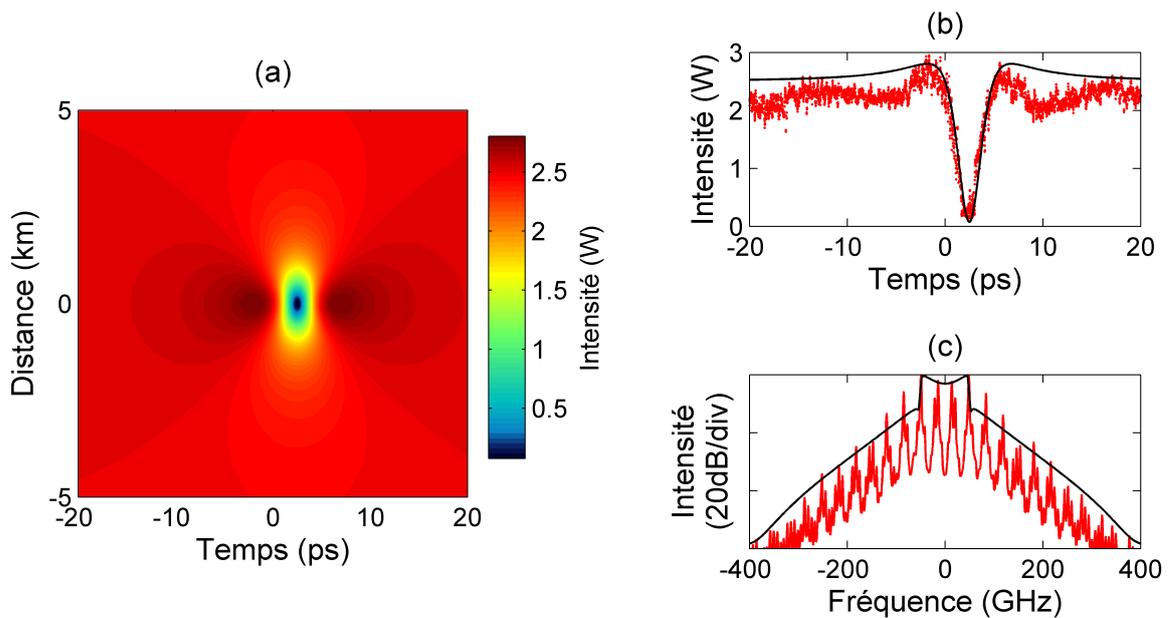


FIGURE 4.19 – (a) Évolution spatio-temporelle de l'intensité optique totale de la solution analytique. Comparaison entre les mesures expérimentales (point et ligne continue rouge) et la solution analytique totale (ligne continue noire) dans le domaine temporel (b) et dans le domaine spectral (c).

Ainsi, la somme des intensités optiques des deux modes de polarisation montre une symétrie totale même si nous avons un décalage temporel arbitraire dû à la solution analytique dans toute l'évolution spatio-temporelle 4.19(a). Sur la figure 4.19(b,c), nous avons la comparaison avec les mesures expérimentales (en rouge) et la somme des intensités de la solution analytique (en noir) dans le domaine temporel et dans le domaine spectral respectivement. Nous pouvons voir que les profils de l'intensité optique totale au centre de la structure de type onde scélérate sont symétriques. Nous pouvons considérer la somme des intensités optiques des deux modes de polarisation comme une image physique globale d'une onde scélérate sombre vectorielle.

### 4.3.2.2 Extension à un cas complexe : solution d'onde scélérate d'ordre supérieure

Si nous poursuivons la propagation de nos deux ondes ayant un état de polarisation orthogonal jusqu'à 5 km (voir figure 4.21). Nous pouvons voir l'apparition d'une double structure ayant chacune un minimum d'intensité aux alentours de 5 km. On peut alors faire l'analogie avec la génération non-idéale d'un breather d'Akhmediev ayant un paramètre généralisé proche de 0.5. En effet, après la génération de celui-ci, le breather se sépare en deux à la suite de la propagation [52], ceci est également une possibilité d'une structure complexe déphasée comme nous avons pu le voir dans le chapitre 2. Ici, nous sommes dans le cas de structure de type onde scélérate noire. Il existe aussi des structures complexes qui peuvent également s'apparenter à une structure complexe déphasée en trois structures de type onde scélérates noires, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.20 tirée à partir de la référence [53].

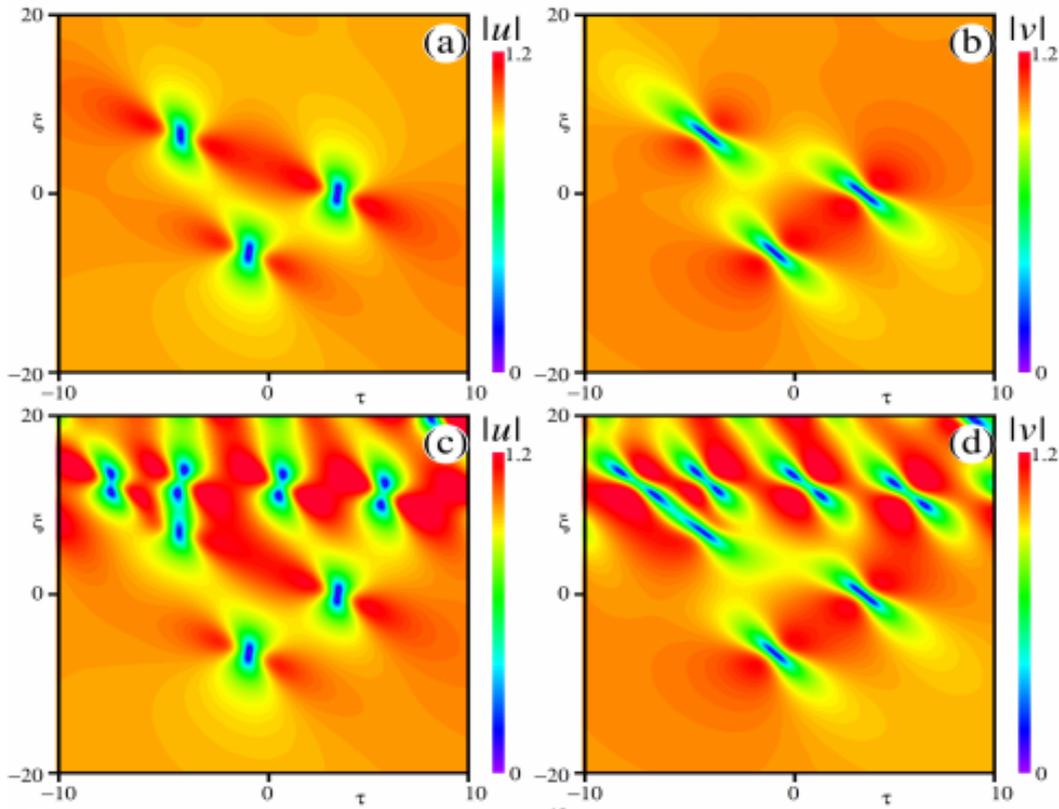


FIGURE 4.20 – Évolution spatio-temporelle de l'amplitude  $u$  et  $v$ . (a-b) sans bruit (c-d) avec du bruit sur la condition initiale. Figure tirée de la référence [53].

Pour cette partie, nous avons pris la même fibre optique que précédemment sauf qu'elle dispose d'une longueur de 5 km. Nous avons ainsi pu réaliser les mesures expérimentales correspondant aux deux axes de polarisation et , avec une puissance totale de  $P=2.5$  W. Nous pouvons voir sur la figure 4.22 une comparaison des résultats expérimentaux (en rouge) et des simulations numériques (en bleu). Un excellent accord est obtenu de nouveau entre les simulations numériques et nos mesures expérimentales sur cette génération de structures d'ondes scélérates superposées. De plus, nous gardons toujours un spectre asymétrique tout comme précédemment. Enfin, si nous faisons une comparaison qualitative entre la figure 4.20 et 4.21, nous retrouvons une première structure où il y a un minimum d'intensité, puis lorsque nous poursuivons la propagation une double structure où nous avons un minimum d'intensité à chaque structure.

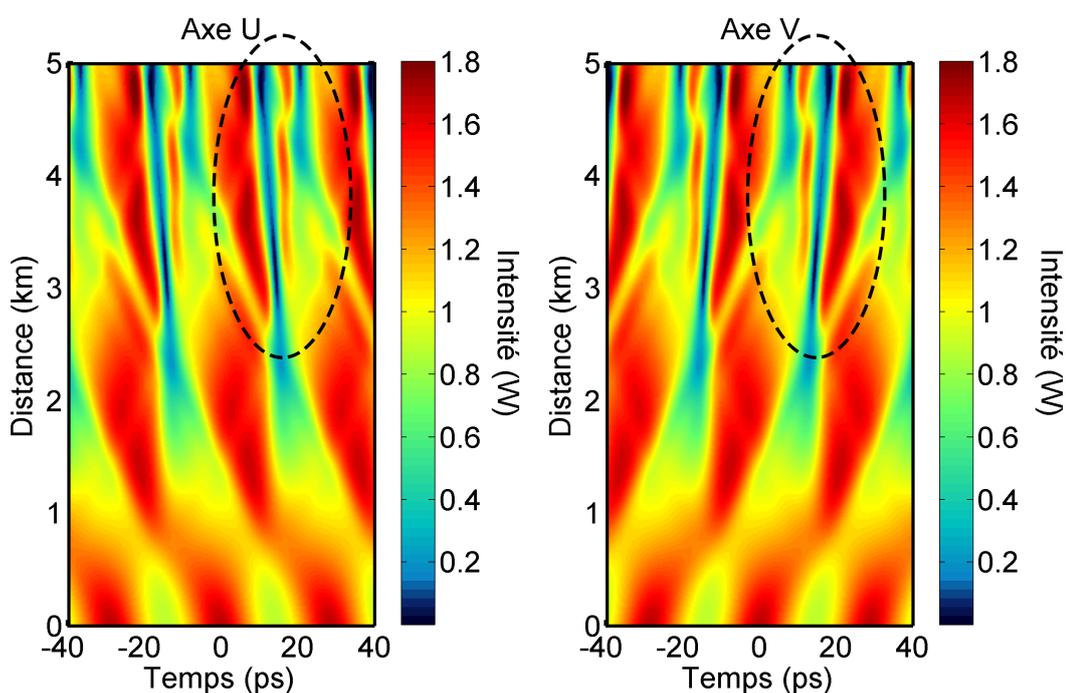


FIGURE 4.21 – Évolution spatio-temporelle de l'intensité optique selon les deux axes de polarisation  $u$  et  $v$  sur 5 km de fibre optique (avec les pertes). Ovale discontinu noir : les trois structures de type onde scélérates noires.

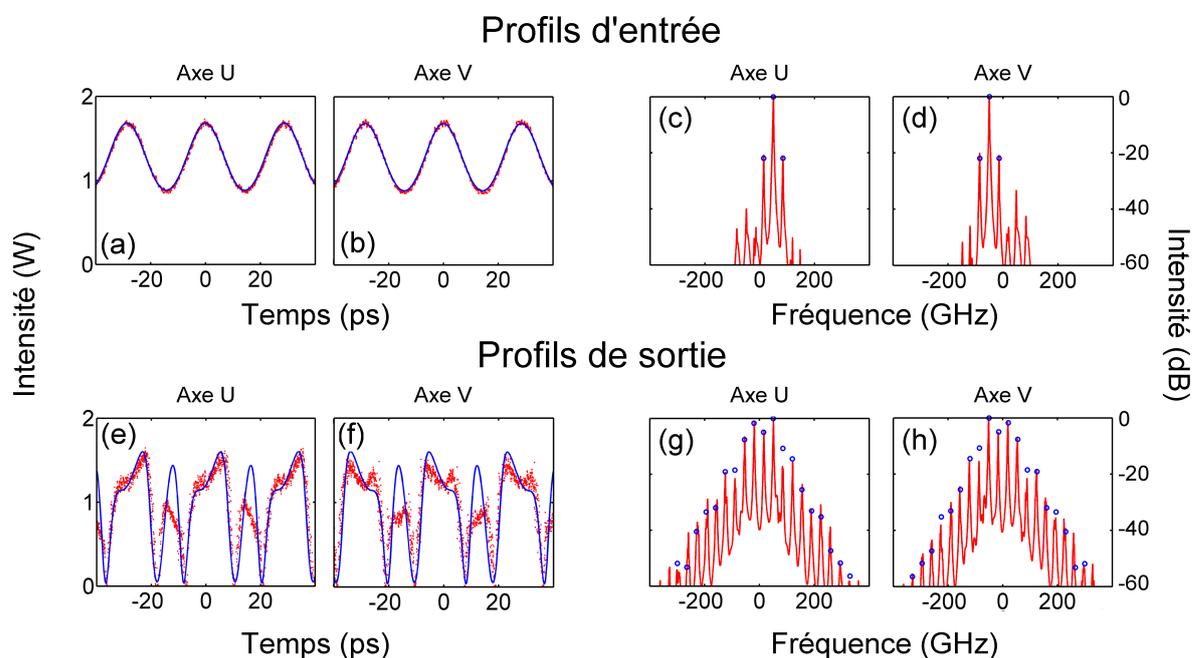


FIGURE 4.22 – Profils temporels (a,b,e,f) et spectraux (c,d,g,h) selon les deux axes de polarisation et selon l'entrée de la fibre optique (a-d) et la sortie de la fibre optique après 5 km de propagation (e-h). En rouge, mesures expérimentales et en bleu (ligne pour le domaine temporel, cercle pour le domaine spectral), simulations numériques à  $P=2.5$  W.

Nous pouvons également regarder l'intensité recombinaison des deux polarisations, une comparaison entre les simulations numériques et les mesures expérimentales sont représentées sur la figure 4.23(b,c). Tout comme dans la partie précédente, l'intensité totale est parfaitement

symétrique, la vitesse de groupe du profil d'intensité totale est bien la moyenne des vitesses de groupe selon chaque axe. On retrouve un excellent accord quantitatif sur la superposition des ondes scélérates générées.

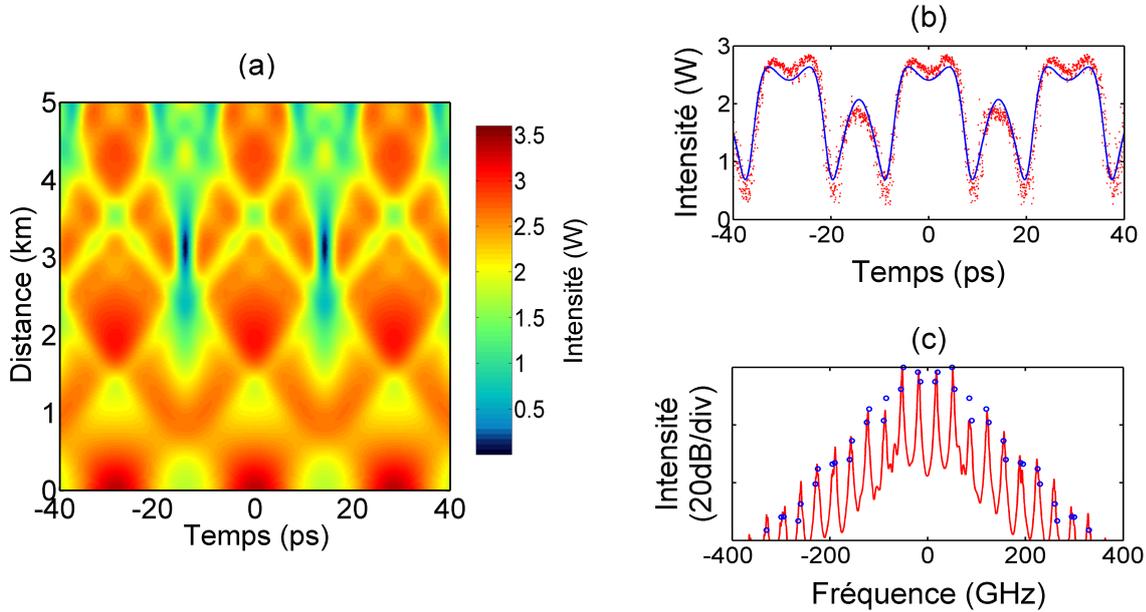


FIGURE 4.23 – (a) Évolution spatio-temporelle de l'intensité optique totale de la simulation numérique sur 5 km de propagation. Comparaison entre les mesures expérimentales (point et ligne continue rouge) et simulation numérique totale (ligne continue et cercle bleu) dans le domaine temporel (b) et dans le domaine spectral (c).

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré l'extension du processus d'instabilité de modulation et la génération de structures scélérates à un système vectoriel de type Manakov. Ceci requiert une fibre optique standard des télécommunications possédant une variation aléatoire rapide de la biréfringence résiduelle et un régime de dispersion normale. Le modèle d'équations couplées de Manakov permet de décrire quantitativement un processus d'instabilité de modulation via une modulation de phase croisée. Un système physique équivalent correspond à deux ondes pompes de longueurs d'ondes différentes et ayant des polarisations orthogonales. Une analyse de stabilité linéaire a permis de déterminer différentes conditions d'existence de l'instabilité non-linéaire, telles que l'écart fréquentiel entre les deux pompes et également la puissance de celles-ci. Nous avons pu démontrer deux types de régimes : le régime "bande de base" et le régime "passe-bande". Ces régimes sont très importants, car ils définissent l'étendue des bandes de gains et la condition de génération de solutions de structures scélérates vectorielles noires. Ceux-ci ont été confirmés grâce à une première observation de ce phénomène lors d'expériences d'instabilité de modulation spontanée. Les résultats expérimentaux obtenus ont montré de très bons accords avec les simulations numériques, mais également avec la théorie. Enfin, en réalisant de multiples simulations numériques, il a été possible de trouver des conditions initiales d'une onde faiblement modulée qui permet de stimuler le processus d'instabilité de modulation vectorielle pour générer des structures d'ondes scélérates. Les résultats expérimentaux après 3 km de propagation confirment les prédictions numériques et la théorie. Enfin, nous avons également

observé la génération d'une structure de type onde scélérate plus complexe si nous poursuivons la propagation jusqu'à 5 km. Cette structure se rapproche de la solution appelée "Dark-Three sister" [53] qui fait référence aux trois vagues scélérates successives dans les océans qu'on appelle les trois soeurs [54]. Ces premières observations ouvrent la voie vers de nouvelles observations de solutions beaucoup plus complexes, l'adaptation des solutions théoriques à la mise forme des conditions initiales devient alors inévitable.

## Références du chapitre 4

- [1] Pierre-Louis Sulem Catherine Sulem. *The Nonlinear Schrödinger Equation : Self-focusing and Wave Collapse*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 1 edition, 1999.
- [2] Fabio Baronio, Antonio Degasperis, Matteo Conforti, and Stefan Wabnitz. Solutions of the vector nonlinear schrödinger equations : Evidence for deterministic rogue waves. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :044102, Jul 2012.
- [3] M. Onorato, A. R. Osborne, and M. Serio. Modulational instability in crossing sea states : A possible mechanism for the formation of freak waves. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :014503, Jan 2006.
- [4] Yu.V. Bludov, V.V. Konotop, and N. Akhmediev. Vector rogue waves in binary mixtures of bose-einstein condensates. *The European Physical Journal Special Topics*, 185(1) :169–180, 2010.
- [5] VladimirG. Ivancevic. Adaptive-wave alternative for the black-scholes option pricing model. *Cognitive Computation*, 2(1) :17–30, 2010.
- [6] Sergei V Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Soviet Physics-JETP*, 38(2) :248–253, 1974.
- [7] Yuri S Kivshar and Govind Agrawal. *Optical solitons : from fibers to photonic crystals*. Academic press, 2003.
- [8] Panayotis G Kevrekidis, Dimitri J Frantzeskakis, and Ricardo Carretero-González. *Emergent nonlinear phenomena in Bose-Einstein condensates : Theory and experiment*, volume 45. Springer Science & Business Media, 2007.
- [9] M. Winter, C.-A. Bunge, D. Setti, and K. Petermann. A statistical treatment of cross-polarization modulation in dwdm systems. *Lightwave Technology, Journal of*, 27(17) :3739–3751, Sept 2009.
- [10] Jr. Evangelides, S.G., L.F. Mollenauer, J.P. Gordon, and Neal S. Bergano. Polarization multiplexing with solitons. *Lightwave Technology, Journal of*, 10(1) :28–35, Jan 1992.
- [11] F. Yaman and Guifang Li. Nonlinear impairment compensation for polarization-division multiplexed wdm transmission using digital backward propagation. *Photonics Journal, IEEE*, 1(2) :144–152, Aug 2009.
- [12] S. Mumtaz, R. Essiambre, and G.P. Agrawal. Nonlinear propagation in multimode and multicore fibers : Generalization of the manakov equations. *Lightwave Technology, Journal of*, 31(3) :398–406, Feb 2013.
- [13] V.E. Zakharov and E.I. Schulman. To the integrability of the system of two coupled nonlinear schrödinger equations. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 4(2) :270 – 274, 1982.
- [14] G.P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 2013.
- [15] P.K.A. Wai and C.R. Menyak. Polarization mode dispersion, decorrelation, and diffusion in optical fibers with randomly varying birefringence. *Lightwave Technology, Journal of*, 14(2) :148–157, Feb 1996.

- [16] D. Marcuse, C.R. Menyuk, and P.K.A. Wai. Application of the manakov-pmd equation to studies of signal propagation in optical fibers with randomly varying birefringence. *Light-wave Technology, Journal of*, 15(9) :1735–1746, Sep 1997.
- [17] P. L. Christiansen, J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, and N. A. Kostov. Quasi-periodic and periodic solutions for coupled nonlinear schrödinger equations of manakov type. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 456(2001) :2263–2281, 2000.
- [18] M. G. Forest, D. W. McLaughlin, D. J. Muraki, and O. C. Wright. Nonfocusing instabilities in coupled, integrable nonlinear schrödinger pdes. *Journal of Nonlinear Science*, 10(3) :291–331, 2000.
- [19] O.C. Wright III. On elliptic solutions of a coupled nonlinear schrödinger system. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 264 :1 – 16, 2013.
- [20] A.M. Kamchatnov. Periodic waves in a two-component bose-einstein condensate. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 118(4) :630–642, 2014.
- [21] Zhigang Chen, Mordechai Segev, Tamer H. Coskun, Demetrios N. Christodoulides, and Yuri S. Kivshar. Coupled photorefractive spatial-soliton pairs. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14(11) :3066–3077, Nov 1997.
- [22] C. Hamner, J. J. Chang, P. Engels, and M. A. Hoefer. Generation of dark-bright soliton trains in superfluid-superfluid counterflow. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :065302, Feb 2011.
- [23] M. A. Hoefer, J. J. Chang, C. Hamner, and P. Engels. Dark-dark solitons and modulational instability in miscible two-component bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 84 :041605, Oct 2011.
- [24] L. Beygi, E. Agrell, J.M. Kahn, and M. Karlsson. Coded modulation for fiber-optic networks : Toward better tradeoff between signal processing complexity and optical transparent reach. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 31(2) :93–103, March 2014.
- [25] G. J. Roskes. Some nonlinear multiphase interactions. *Studies in Applied Mathematics*, 55(3) :231–238, 1976.
- [26] C. K. Law, C. M. Chan, P. T. Leung, and M.-C. Chu. Critical velocity in a binary mixture of moving bose condensates. *Phys. Rev. A*, 63 :063612, May 2001.
- [27] VI Bespalov and VI Talanov. Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 3 :471, 1966.
- [28] T Brooke Benjamin and JE Feir. The disintegration of wave trains on deep water part 1. theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(03) :417–430, 1967.
- [29] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita. Observation of modulational instability in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :135–138, Jan 1986.
- [30] AL Berkhoer and VE Zakharov. Self excitation of waves with different polarizations in nonlinear media. Technical report, Inst. of Nuclear Physics, Novosibirsk, USSR, 1970.
- [31] Joshua E. Rothenberg. Modulational instability for normal dispersion. *Phys. Rev. A*, 42 :682–685, Jul 1990.

- [32] P.D. Drummond, T.A.B. Kennedy, J.M. Dudley, R. Leonhardt, and J.D. Harvey. Cross-phase modulational instability in high-birefringence fibers. *Optics Communications*, 78(2) :137 – 142, 1990.
- [33] E. Seve, P. Tchofo Dinda, G. Millot, M. Remoissenet, J. M. Bilbault, and M. Haelterman. Modulational instability and critical regime in a highly birefringent fiber. *Phys. Rev. A*, 54 :3519–3534, Oct 1996.
- [34] Govind P. Agrawal. Modulation instability induced by cross-phase modulation. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :880–883, Aug 1987.
- [35] Joshua E. Rothenberg. Modulational instability of copropagating frequencies for normal dispersion. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :813–813, Feb 1990.
- [36] M Yu, CJ McKinstrie, and Govind P Agrawal. Instability due to cross-phase modulation in the normal-dispersion regime. *Physical Review E*, 48(3) :2178, 1993.
- [37] Yann Frignac, Gabriel Charlet, Wilfried Idler, Roman Dischler, Patrice Tran, Stéphanie Lanne, Sophie Borne, Catherine Martinelli, Gustav Veith, Amaury Jourdan, Jean-Pierre Hamaide, and Sébastien Bigo. Transmission of 256 wavelength-division and polarization-division-multiplexed channels at 42.7 gb/s (10.2 tb/s capacity) over 3x100km of teralight™ fiber. In *Optical Fiber Communications Conference*, page FC5. Optical Society of America, 2002.
- [38] A.H. Gnauck, G. Charlet, P. Tran, P.J. Winzer, C.R. Doerr, J.C. Centanni, E.C. Burrows, T. Kawanishi, T. Sakamoto, and K. Higuma. 25.6-tb/s wdm transmission of polarization-multiplexed rz-dqpsk signals. *Lightwave Technology, Journal of*, 26(1) :79–84, Jan 2008.
- [39] Xiang Liu, Fred Buchali, and R.W. Tkach. Improving the nonlinear tolerance of polarization-division-multiplexed co-ofdm in long-haul fiber transmission. *Lightwave Technology, Journal of*, 27(16) :3632–3640, Aug 2009.
- [40] E.F. Mateo, Xiang Zhou, and Guifang Li. Selective post-compensation of nonlinear impairments in polarization-division multiplexed wdm systems with different channel granularities. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 47(1) :109–116, Jan 2011.
- [41] Akira Hasegawa. Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers. *Optics letters*, 9(7) :288–290, 1984.
- [42] P.V. Mamyshev, S.V. Chernikov, and E.M. Dianov. Generation of fundamental soliton trains for high-bit-rate optical fiber communication lines. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 27(10) :2347–2355, Oct 1991.
- [43] John M Dudley, Goëry Genty, and Stéphane Coen. Supercontinuum generation in photonic crystal fiber. *Reviews of modern physics*, 78(4) :1135, 2006.
- [44] Fabio Baronio, Matteo Conforti, Antonio Degasperis, Sara Lombardo, Miguel Onorato, and Stefan Wabnitz. Vector rogue waves and baseband modulation instability in the defocusing regime. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :034101, Jul 2014.
- [45] Fabio Baronio, Shihua Chen, Philippe Grelu, Stefan Wabnitz, and Matteo Conforti. Baseband modulation instability as the origin of rogue waves. *Phys. Rev. A*, 91 :033804, Mar 2015.
- [46] DR Solli, C Ropers, P Koonath, and B Jalali. Optical rogue waves. *Nature*, 450(7172) :1054–1057, 2007.

- [47] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, and J. M. Dudley. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics. *Nature Physics*, 6(10) :790–795, 2010.
- [48] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev. Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*, 106(20) :2–5, 2011.
- [49] Julien Fatome, Ibrahim El-Mansouri, Jean-Luc Blanchet, Stéphane Pitois, Guy Millot, Stefano Trillo, and Stefan Wabnitz. Even harmonic pulse train generation by cross-polarization-modulation seeded instability in optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 30(1) :99–106, Jan 2013.
- [50] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, a. Montina, and F. T. Arecchi. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Physics Reports*, 528(2) :47–89, 2013.
- [51] John M Dudley, Frédéric Dias, Miro Erkintalo, and Goëry Genty. Instabilities, breathers and rogue waves in optics. *Nature Photonics*, 8(10) :755–764, 2014.
- [52] Miro Erkintalo, Kamal Hammani, Bertrand Kibler, Christophe Finot, Nail Akhmediev, John M. Dudley, and Goëry Genty. Higher-order modulation instability in nonlinear fiber optics. *Physical Review Letters*, 107(25) :14–18, 2011.
- [53] Shihua Chen, Jose M Soto-Crespo, and Philippe Grelu. Dark three-sister rogue waves in normally dispersive optical fibers with random birefringence. *Optics express*, 22(22) :27632–27642, 2014.
- [54] PETER Müller, Chris Garrett, and A Osborne. Rogue waves. *Oceanography*, 18(3) :66, 2005.



# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Les objectifs de cette thèse ont été d'explorer les solutions complexes d'ondes scélérates récemment développées par les théoriciens dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-linéaire et des processus d'instabilité de modulation, et notamment les capacités de l'optique ultrarapide dans les fibres pour les observer et confirmer leur existence dans des systèmes physiques réels. En effet, les travaux rapportés dans ce manuscrit concernent l'analyse des caractéristiques des solutions de type onde scélérate de second ordre dans les chapitres 2 et 3, ainsi que les solutions de type onde scélérate vectorielle "noire" dans le chapitre 4. La même méthodologie a été utilisée pour les différents cas, nous nous sommes intéressés à la génération de ces solutions avec des simulations numériques dans un premier temps, afin de déterminer les configurations expérimentales requises, puis des démonstrations expérimentales sont venues valider les solutions théoriques. Ainsi en ce qui concerne les structures de type onde scélérate de second ordre dans un système de propagation scalaire, nous avons réalisé diverses études qui analysent deux types d'excitation du processus d'instabilité de modulation.

La première méthode requiert la mise en forme de conditions initiales idéales pour l'excitation de l'onde scélérate, de manière similaire aux expériences menées en hydrodynamique. Cependant, cela pose d'énormes contraintes notamment de mise en forme d'ondes optiques arbitraires à des échelles de temps de l'ordre de la picoseconde, donc bien au-delà des limites actuelles des modulateurs électro-optiques et générateurs de signaux électriques. Une des solutions proposer est d'utiliser la mise en forme dans le domaine de Fourier d'une source optique à peigne de fréquence (source impulsionnelle), c'est-à-dire un contrôle fin de l'intensité et de la phase de chaque raie spectrale du peigne de fréquences. Cette méthode fait appel au récent développement de sources impulsionnelles ultrarapides et de filtres spectraux programmables aux longueurs des télécommunications. Nous avons mis en évidence l'impact néfaste des incertitudes sur la mise en forme des conditions d'excitations, en particulier les phases relatives des différentes composantes spectrales. Nous avons démontré avec succès la génération d'une superposition non-linéaire de solitons sur fond continu en excellent accord avec les prédictions théoriques, ces solutions générées présentent peu d'imperfection puisqu'elles sont générées idéalement.

Cependant, afin de prouver que ce type d'ondes extrêmes existe dans un système physique plus réaliste, plus proche des conditions turbulentes à la surface des océans, nous avons envisagé une deuxième méthode d'excitation simplifiée. Ainsi, dans nos recherches, nous avons pu

vérifier qu'une excitation non idéale était possible pour observer des solutions de type onde scélérate (solitons sur fond continu ou breathers). Les recherches des années passées ont montré que la génération non idéale des solutions de premier ordre était réalisable avec une condition initiale approchée. Ils ont permis d'observer toutes les propriétés de localisation et de forme des solutions analytiques. Ici, nous avons montré pour la première fois l'interaction synchronisée (collision) de deux breathers d'Akhmediev (solutions d'ordre 1) excités par de simples modulations sinusoidales. Cette collision présente une structure d'onde extrêmement localisée avec un pic d'intensité géant, et notamment les signatures d'une solution complexe d'ordre 2 dues à la superposition non-linéaire des deux breathers. Des conditions de synchronisation sont indispensables pour une collision efficace. En plus des pertes linéaires de propagation, les impacts de la phase spectrale relative des fréquences de perturbation et de leur différence de vitesse de groupe ont été analysés en détails. Ceci a mis en évidence la possibilité d'une collision totalement annihilée.

Enfin, dans le cadre de cette thèse, nous avons pu étendre la question des solutions de type onde scélérate à un système vectoriel, à savoir le modèle intégrable de Manakov (système de deux équations de Schrödinger non-linéaire couplées). Pour ce faire, il a fallu d'abord étudier de manière quantitative le phénomène d'instabilité de modulation vectorielle dans une fibre optique des télécommunications possédant une variation aléatoire rapide de la biréfringence résiduelle, afin de vérifier la validité du modèle de Manakov. Les résultats obtenus sont pionniers puisqu'il s'agit de la première observation de l'instabilité de modulation vectorielle dans le cadre d'un système de type Manakov. Tout comme l'instabilité de modulation scalaire, il existe des solutions de type onde scélérate dans le modèle de Manakov. Nous avons ainsi pu réaliser également la première observation expérimentale de l'instabilité de modulation vectorielle stimulée et générant une structure de type onde scélérate vectorielle "noire". Nous avons pu observer également la génération d'une structure d'ordre supérieur lorsqu'on a poursuivi la propagation dans la fibre optique. On appelle cette structure les "Dark-Three sister" qui s'apparente aux trois vagues scélébrates successives observées dans les océans.

Les résultats obtenus lors de cette thèse ont montré qu'il existe énormément de solutions de type onde scélébrates de l'équation de Schrödinger non linéaire. Cependant, celles-ci deviennent de plus en plus complexes, d'une part à travers leurs caractéristiques de localisation extrême de l'énergie, et d'autre part pour les générer. À partir de résultats obtenus et de la recherche actuelle, il est assez aisé de déterminer quelques perspectives qui sont à mener par la suite. En effet, la première perspective va être la suite de la génération de structure de type onde scélérate vectorielle. En effet, pour le moment il existe très peu de solutions dérivées par les théoriciens, mais il est possible d'imaginer l'étendue possible étant donné le nombre de solutions dans le cas scalaire. En effet, les possibilités sont d'autant plus nombreuses que nous étudions un nombre important de composantes couplées dans un système physique. Ici nous nous sommes limités à deux composantes de polarisation. Les résultats présentés montrent deux structures de type onde scélérate vectorielle "noire", mais il existe pour certains paramètres un couplage entre une structure d'onde "noire" et une autre "brillante". Enfin, dans le domaine scalaire, nous avons montré la possibilité de recréer facilement des structures de premier ordre et de second ordre. La solution de second ordre observé concerne uniquement la superposition non linéaire de deux breathers d'Akhmediev. On pourrait envisager comme perspective de réaliser une génération d'une superposition d'un breather d'Akhmediev et d'un soliton de Kuznetsov-Ma. Cette superposition est très complexe a réalisé du fait qu'il s'agit de deux solutions localisées dans des directions différentes, l'un est localisé dans l'espace, et l'autre dans le temps. De plus, du fait que le Kuznetsov-Ma ne présente pas de périodicité dans le temps, cela rend son observation beaucoup plus compliquée. Enfin, outre le fait de rester sur les solutions de second ordre, il est envisageable également de réaliser une étude expérimentale approfondie sur la génération

de solution de type onde scélérate "déphasée" que nous avons vu dans le chapitre 2. De plus, on pourrait se demander s'il n'est pas possible de réaliser une superposition non linéaire d'une solution de premier ordre avec une de second ordre en les faisant interagir comme lorsque nous avons fait interagir deux breathers d'Akhmediev. Les possibilités de génération de solution avec les deux méthodes présentées dans le cadre de cette thèse sont très nombreuses, et peuvent ouvrir des possibilités qui n'étaient pas envisageables auparavant.

Pour conclure, afin de générer des structures de type onde scélérate toujours plus proches des conditions océaniques, il faut envisager d'étendre l'analogie basée sur le modèle standard (équation de Schrödinger nonlinéaire) sans pertes, ni dispersion ou non-linéarité d'ordre supérieur. Le développement de systèmes expérimentaux optiques analogues faisant intervenir les problèmes de dissipation, de forçage et de non-homogénéité est un réel challenge. En effet, ce genre de systèmes pourrait tout à fait s'apparenter à la présence de vent qui apporterait une modification de la propagation de nos ondes. En effet, les recherches menées dans ces systèmes permettront ainsi de mieux appréhender les phénomènes de vagues scélébrates océaniques.



ANNEXE

A

CALCUL DE LA LARGEUR SPATIALE À  
MI-HAUTEUR D'UN BREATHER  
D'AKHMEDIEV



Le calcul de la largeur spatiale à mi-hauteur d'un breather d'Akhmediev avec un paramètre général  $a$  se base sur la solution analytique de l'équation de Schrödinger non linéaire que nous avons vue lors du chapitre 1. On utilise l'expression suivante :

$$\Psi(\tau, \xi) = \frac{\left( (1 - 4a) \cosh(b\xi) + \sqrt{2a} \cos(\omega\tau) + ib \sinh(b\xi) \right)}{\left( \sqrt{2a} \cos(\omega\tau) - \cosh(b\xi) \right)} e^{i\xi} \quad (\text{A.1})$$

Où  $b$  et  $\omega$  qui sont respectivement le gain et la fréquence normalisés, liés à la période de modulation définie par :

$$b = [8a(1 - 2a)]^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

$$\omega = 2(1 - 2a)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

On s'intéresse à la largeur spatiale, on se place alors à  $\tau = 0$ , on obtient l'expression :

$$\Psi(0, \xi) = \frac{\left( (1 - 4a) \cosh(b\xi) + \sqrt{2a} + ib \sinh(b\xi) \right)}{\left( \sqrt{2a} - \cosh(b\xi) \right)} e^{i\xi} \quad (\text{A.4})$$

L'intensité lumineuse est obtenue par :

$$\begin{aligned} I(0, \xi) &= \Psi(0, x) \times \Psi^*(0, \xi) \\ &= \frac{\left( (1 - 4a) \cosh(b\xi) + \sqrt{2a} + ib \sinh(b\xi) \right)}{\left( \sqrt{2a} - \cosh(b\xi) \right)} e^{i\xi} \times \frac{\left( (1 - 4a) \cosh(b\xi) + \sqrt{2a} - ib \sinh(b\xi) \right)}{\left( \sqrt{2a} - \cosh(b\xi) \right)} e^{-i\xi} \\ &= \frac{\left( (1 - 4a) \cosh(b\xi) + \sqrt{2a} \right)^2 + b^2 \sinh(b\xi)^2}{\left( \sqrt{2a} - \cosh(b\xi) \right)^2} \end{aligned}$$

On obtient  $I_{max}$  lorsqu'on se place à  $\xi = 0$ , on a alors :

$$I_{max} = \frac{\left( (1 - 4a) + \sqrt{2a} \right)^2}{\left( \sqrt{2a} - 1 \right)^2} \quad (\text{A.5})$$

On recherche les largeurs à mi-hauteur pour lesquels  $I_{max}/2 > 1$ , car l'intensité du fond continu est égale à 1. On a  $a_{min}$  tel que  $I_{max}/2 = 1$  :

$$\frac{\left( (1 - 4a) + \sqrt{2a} \right)^2}{\left( \sqrt{2a} - 1 \right)^2} = 2 \quad (\text{A.6})$$

$$4a + 2\sqrt{2a} + \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Changement de variable par } a = A^2 : \quad (\text{A.8})$$

$$4A^2 + 2\sqrt{2}A - \frac{1}{2} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Soit après résolution du polynôme :

$$a_{min} = \frac{1}{8} \left( 3 - 2\sqrt{2} \right) \quad (\text{A.10})$$


---

Maintenant que nous connaissons la plus petite valeur de  $a$  afin d'avoir une solution pour la largeur à mi-hauteur. On calcule la demi-largeur à mi-hauteur à l'aide de l'équation suivante :

$$\frac{\left((1-4a) + \sqrt{2a}\right)^2}{2\left(\sqrt{2a} - 1\right)^2} = \frac{\left((1-4a) \cosh(b\xi) + \sqrt{2a}\right)^2 + b^2 \sinh(b\xi)^2}{\left(\sqrt{2a} - \cosh(b\xi)\right)^2} \quad (\text{A.11})$$

On effectue un changement de variable afin de simplifier l'équation, on définit alors  $X = \cosh(b\xi)$ . De plus, en utilisant l'identité remarquable :

$$\sinh^2(z) = \cosh^2(z) - 1 \quad (\text{A.12})$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation (A.11) sous la forme d'un polynôme de second degré :

$$\left(4a + 2\sqrt{2a} - \frac{1}{2}\right) X^2 + \left(-3\sqrt{2a} - 8a\right) X + 8a^2 + 4a\sqrt{2a} + 7a \quad (\text{A.13})$$

Après résolution du polynôme (A.13), nous obtenons les racines suivantes :

$$X_1 = \frac{7\sqrt{2a} + 8a(1 - \sqrt{2a})}{8a + 4\sqrt{2a} - 1} \quad (\text{A.14})$$

$$X_2 = \sqrt{2a} \quad (\text{A.15})$$

La largeur spatiale à mi-hauteur est obtenue par :

$$\Delta_\xi = 2 \times \frac{1}{b} \cosh^{-1}(X) \quad (\text{A.16})$$

Or, la racine  $X_2$  ne donne pas de solution réelle pour  $a \in [a_{min}; 0.5]$  contrairement à la racine  $X_1$ . On obtient ainsi l'expression suivante pour la largeur spatiale à mi-hauteur :

$$\Delta_\xi = \frac{2}{\sqrt{8a(1-2a)}} \cosh^{-1}\left(\frac{7\sqrt{2a} + (1 - \sqrt{2a})8a}{8a + 4\sqrt{2a} - 1}\right) \quad (\text{A.17})$$

# LISTE DES PUBLICATIONS



- [1] B. Frisquet, B. Kibler, and G. Millot. Collision of akhmediev breathers in nonlinear fiber optics. *Physical Review X*, 3(4) :1–9, 2013.
- [2] B. Frisquet, A. Chabchoub, J. Fatome, C. Finot, B. Kibler, and G. Millot. Two-stage linear-nonlinear shaping of an optical frequency comb as rogue nonlinear-Schrödinger-equation-solution generator. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 89(2) :1–6, 2014.
- [3] B Frisquet, B Kibler, J Fatome, P Morin, F Baronio, M Conforti, G Millot, and S Wabnitz. Polarization modulation instability in a manakov fiber system. *Physical Review A*, 92(5) :053854, 2015.
- [4] K Tarnowski, A Anuskiewicz, P Mergo, B Frisquet, B Kibler, and W Urbanczyk. Nonlinear mode coupling in a birefringent microstructured fiber tuned by externally applied hydrostatic pressure. *Journal of Optics*, 17(3) :035506, 2015.
- [5] Benoit Frisquet, Bertrand Kibler, Philippe Morin, Fabio Baronio, Matteo Conforti, Guy Millot, and Stefan Wabnitz. Optical dark rogue wave. *Scientific reports*, 6, 2016.





# Résumé

**Titre :** Ondes scélérates complexes dans les fibres optiques

Ce manuscrit de thèse présente l'étude d'instabilités non-linéaires et la génération d'ondes scélérates complexes liées à la propagation de la lumière dans des fibres optiques standards des télécommunications optiques. Un rappel est tout d'abord présenté sur les phénomènes physiques linéaires et non-linéaires impliqués et qui peuvent présenter une analogie directe avec le domaine de l'hydrodynamique. Les différentes formes d'ondes scélérates liées au processus d'instabilité de modulation, aussi appelées « breathers », sont alors présentées, elles sont obtenues par la résolution de l'équation de Schrödinger non-linéaire. À partir de ces solutions exactes, divers systèmes expérimentaux sont alors conçus par simulation numérique à partir de deux méthodes d'excitation d'ondes scélérates. La première est une génération exacte à partir des solutions analytiques en effectuant une mise en forme spectrale en intensité et en phase d'un peigne de fréquence optique. La seconde méthode est basée sur des conditions initiales approchées avec des ondes continues modulées sinusoidalement. Les mesures expérimentales réalisées avec ces deux méthodes démontrent parfaitement la génération d'ondes scélérates complexes (solutions d'ordre supérieur du système) issues de la superposition non-linéaire ou collisions de « breathers » de premier ordre. Enfin, nous avons également étudié un système non-linéaire équivalent au modèle de Manakov, qui fait intervenir la propagation de deux ondes distinctes avec des polarisations orthogonales dans une fibre optique. L'analyse de stabilité et des simulations numériques de ce système multi-variable mettent en évidence un nouveau régime d'instabilité de modulation vectorielle ainsi que de nouvelles solutions d'ondes scélérates noires et couplées en polarisation. Un nouveau système expérimental mis en place a permis de confirmer ces prédictions théoriques avec un excellent accord quantitatif.

*Mots-Clés :* Optique non-linéaire ultrarapide, fibres optiques, instabilité de modulation, ondes scélérates, polarisation, équation de Schrödinger non-linéaire, système de Manakov.

## Abstract

**Title :** Complex rogue wave in the fiber optics

This manuscript presents the generation of complex rogue waves related to nonlinear instabilities occurring through the propagation of light in standard optical fibers. Linear and nonlinear physical phenomena involved are first listed, in particular some of them by analogy with the field of hydrodynamics. The different forms of rogue waves induced by the modulation instability process are then presented. They are also known as "breathers", and they are obtained by solving the nonlinear Schrödinger equation. From these exact solutions, various experimental systems were designed by means of numerical simulations based on two rogue-wave excitation methods. The first one is an exact generation of mathematical solutions based on the spectral shaping of an optical frequency comb. The second method uses approximate initial conditions with a simple sinusoidal modulation of continuous waves. For both cases, experimental measurements demonstrate the generation of complex rogue waves (i.e., higher-order solutions of the system) arising from the nonlinear superposition or collision of first-order breathers. Finally, we also studied a nonlinear fiber system equivalent to the Manakov model, which involves the propagation of two distinct waves with orthogonal polarizations. The stability analysis and numerical simulations of this multi-component system highlight a novel regime of vector modulation instability and the existence of coupled dark rogue-wave solutions. A new experimental system setup was conceived and theoretical predictions are confirmed with an excellent quantitative agreement.

*Keywords :* Ultrafast nonlinear optics, optical fibers, modulation instability, rogue waves, polarization, nonlinear Schrödinger equation, Manakov system.